



**HAL**  
open science

# Du mélange turbulent aux courants de gravité en géométrie confinée

Thomas Séon

► **To cite this version:**

Thomas Séon. Du mélange turbulent aux courants de gravité en géométrie confinée. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT : . tel-00115881

**HAL Id: tel-00115881**

**<https://theses.hal.science/tel-00115881>**

Submitted on 24 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

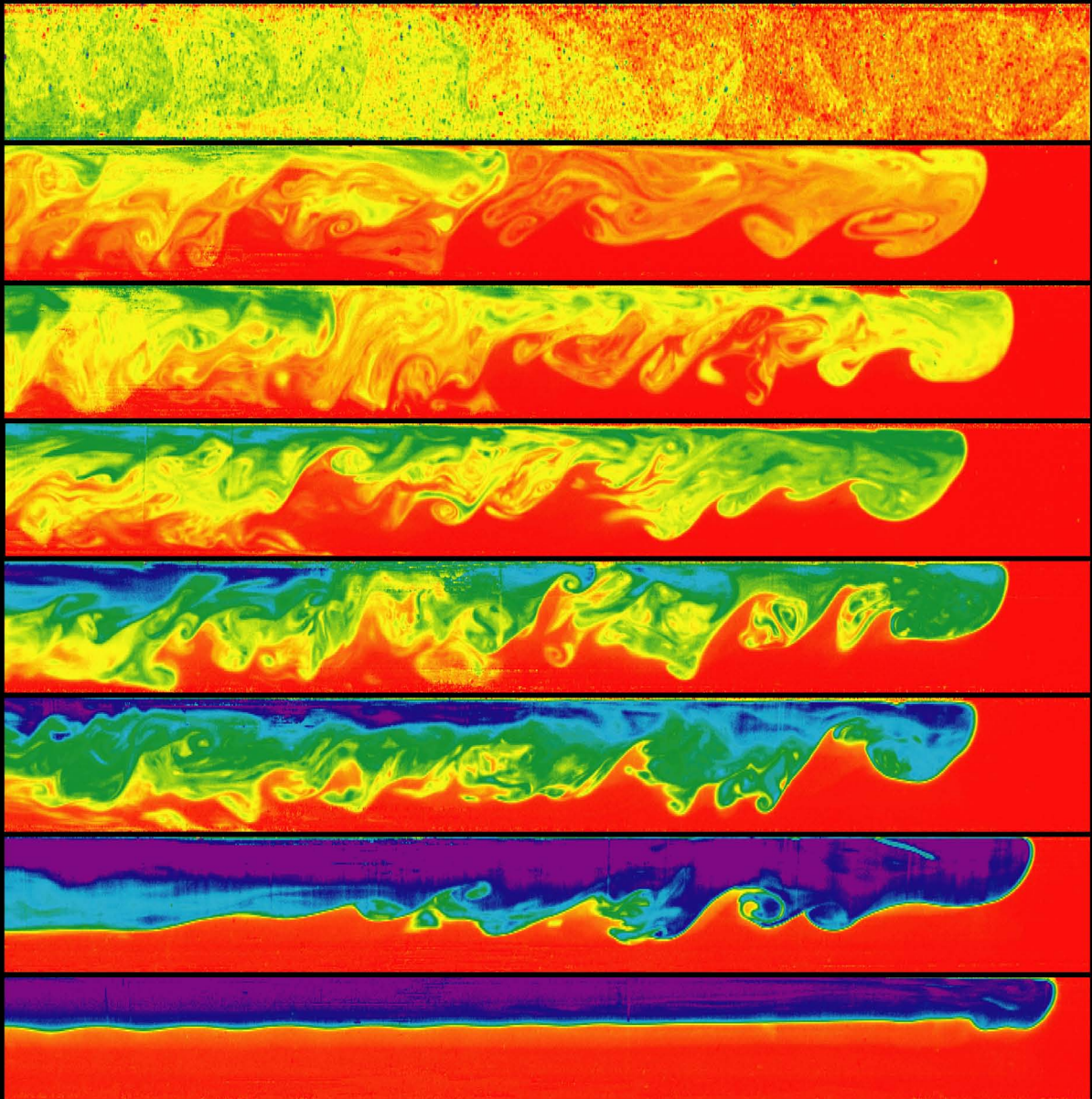
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thomas Séon

---

# Du Mélange turbulent aux courants de gravité en géométrie confinée

---





**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6**

*Spécialité : PHYSIQUE DES LIQUIDES*

*Pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR de  
L'UNIVERSITÉ de PARIS 6**

*Présentée par*

**Thomas Séon**

Sujet de la thèse :

**Du Mélange Turbulent aux Courants de Gravité  
en Géométrie Confinée**

Soutenue le :

27 septembre 2006

Devant le jury composé de :

**B. Castaing** ..... Rapporteur  
**A.-M. Cazabat** ..... Présidente  
**J.-M. Chomaz** ..... Rapporteur  
**E.J. Hinch** ..... Examineur  
**J.-P. Hulin** ..... Directeur de Thèse  
**C. Misbah** ..... Examineur





# Remerciements

Mes remerciements vont, tout d'abord, à mes directeurs de thèse Jean-Pierre Hulin et Bernard Perrin pour la qualité inégalable de leur encadrement pendant ces trois ans et demi de thèse et de stage de DEA.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Jean-Pierre. Sa disponibilité, son enthousiasme, sa culture, sa gentillesse ont rendu ces années aussi enrichissantes qu'agréables, il a su me faire partager sa rigueur et son sens des interprétations physiques malgré la complexité apparente des phénomènes étudiés. Je lui dois beaucoup et je ne sais comment lui exprimer ma reconnaissance.

Mais la qualité de mon encadrement ne s'arrête pas là. En effet, Bernard Perrin a énormément participé à ce travail, sa venue une demi-journée par semaine a ponctué ces années de discussions passionnantes, enthousiastes et studieuses, sans lesquelles cette thèse n'aurait jamais été aussi efficace et agréable.

Et puis, ne serait-ce pas un bon apprentissage que de devoir combattre pour se faire entendre au milieu de ces deux patrons dont la passion n'a d'égale que l'enthousiasme...? Ce fut une véritable chance et un vrai bonheur de travailler avec un tel duo, aussi bien sur le plan scientifique qu'humain, et pour tout ça, Jean-Pierre et Bernard, Merci !

Je tiens ensuite à remercier tout particulièrement John Hinch, son extraordinaire sens physique et son aisance mathématique m'ont beaucoup impressionné, nos discussions furent particulièrement fructueuses, et nous lui devons entre autres plusieurs volets théoriques de ce travail. Je le remercie aussi chaleureusement d'avoir accepté de participer à mon jury. Mais la chose dont je lui suis probablement le plus reconnaissant, c'est de m'avoir offert l'opportunité de travailler trois mois sous sa direction, de l'autre côté de la Manche, au laboratoire DAMTP-CMS à Cambridge. Ce fut un grand privilège ! Les outils analytiques et numériques présentés au chapitre 6 sont entièrement dus à ce travail.

Je remercie beaucoup Dominique Salin qui a fait plus que m'accueillir chaleureusement en ces lieux en qualité de directeur du laboratoire ; à travers sa collaboration sur cette thèse, il m'a fait profiter de ses conseils et de son dynamisme, et a ainsi grandement participé à la progression de ce travail.

Je remercie également Chaouqi Misbah, à qui je dois en grande partie l'opportunité d'écrire ces lignes. Ses cours d'hydrodynamique ainsi que le projet bibliographique et le stage de maîtrise que j'ai faits sous sa direction m'ont donné envie de poursuivre dans cette voie. Et ce cadeau n'est pas l'unique que Chaouqi Misbah m'ait fait. En vantant mes mérites auprès d'Anne-Marie Cazabat,

il m'a permis d'intégrer le DEA de Physique des liquides et ainsi de continuer dans cette thèse. Pour finir, il a accepté de participer à mon jury en examinant mon travail et je l'en remercie. Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Anne- Marie Cazabat de m'avoir accepté dans ce DEA ; ce fut pour moi une excellente année, de plus je la remercie de m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury de thèse. Je tiens enfin à remercier Jean-Marc Chomaz et Bernard Castaing d'avoir accepté de consacrer une partie de cet été 2006 à la lecture de ce manuscrit et à la rédaction du rapport.

Je souhaite remercier, pour leur soutien et pour l'ambiance générale du labo, tous les chercheurs permanents ou doctorants du FAST et notamment Alban Aubertin, Harold Auradou, Yann Bertho, Marguerite D'Olce, Delphine Doppler, Raphael Fischer, Georges Gauthier (merci pour tout !), Dominique Gobin, Philippe Gondret, Benoît Goyeau, Blandine Gueslin, Silvia Hirata, Jérôme Martin, Frédéric Moisy, Hervé Pabiou, Laurent Ponson, Ludovic Pauchard, Marc Rabaud, Christian Ruyer-Quil, Laurence Talini et Laurent Talon. Pendant la rédaction de ma thèse, j'ai eu la joie de partager mon bureau avec Guillaume Kasperski et Stephanie Deboeuf ; merci pour votre aide et pour cette très bonne ambiance.

J'adresse un merci tout particulier à Cyprien Morize, avec qui j'ai particulièrement partagé ces trois ans de vie au FAST, et qui malgré un goût immodéré pour le mauvais football n'en est pas moins devenu un ami. Merci aussi à Veronica D'Angelo et Alejandro Boshan ; à force de me parler de votre pays vous m'avez finalement convaincu, maintenant il va falloir assumer. Avant de clore ce paragraphe, je souhaite remercier très chaleureusement Laurent Duchemin que j'ai rencontré au DAMTP à Cambridge et qui m'a beaucoup aidé pour certaines parties de ma thèse, et pour la suite, et tout ça sans aucune autre raison que celle d'être un ami.

Cette expérience n'aurait pas pu voir le jour sans le travail conjugué de Christian Saurine, Gérard Chauvin et Raphaël Pidoux, et je les en remercie ! Merci aussi d'avoir été présents tout au long de cette thèse lorsque la physique imposait quelques légères modifications du dispositif expérimental... Et merci pour tout le reste ; ce fut un vrai plaisir de passer ces années avec vous. Je remercie aussi Christian Borget, Léonore Alves, Maryse Labrude, Monique Sainte-Rose et Jean-Marie Hollier pour leur gentillesse et leur aide précieuse pendant ces années.

J'ai eu le plaisir de travailler avec deux stagiaires. Eric Chatelain qui nous a aidé à étudier l'influence du diamètre en réalisant une série d'expériences dans un tube de 12 millimètres, et Jemil Znaien qui a effectué un travail important sur le tube de 30 millimètres de diamètre, et les régimes proches de l'horizontale. Apparemment cela ne lui a d'ailleurs pas suffi puisqu'il a accepté de poursuivre son travail de stage dans le cadre de sa thèse ; je le remercie pour sa confiance et je lui souhaite bonne chance pour la suite.

Je remercie la société de service pétrolier Schlumberger d'avoir initié cette expérience, et plus particulièrement Gérard Daccord et Martin G. Lüling de s'être intéressés à l'avancement de ce travail. Merci aussi à Marie Debacq car ses premiers travaux sur le sujet ont été déterminants pour ma thèse.

Je remercie Jean Nahmias et Olivier Cadot de m'avoir offert des vacances respectivement à l'IUT de Chimie d'Orsay et à l'ENSTA. L'enseignement y a toujours été un plaisir.

---

Je souhaite maintenant présenter un grand merci à de nombreuses personnes étrangères à la recherche mais qui ont largement contribué à la réussite de cette thèse. Merci à Romain Glé qui grâce à son génie artistique nous a permis d'être primés dans la "Gallery of Fluid Motion". Merci à Julie Lasserre-Deroyer d'avoir passé tant d'heures à débusquer les fautes d'orthographe glissées par je ne sais quel esprit malin lorsque j'avais le dos tourné. Merci à mon frère Damien Séon d'avoir mis ses compétences d'ingénieur au service de la réalisation du dessin de notre vanne ; la figure 3.2 est entièrement son œuvre. Merci à Pierre Blanc, qui grâce à ses talents de flasheur me permet de diffuser élégamment ce travail sur le web. Merci à Etienne Hantz sans qui j'aurais eu un peu frais lors de la fin de cette thèse. Merci à Fabrice Reybaud qui m'a très souvent tenu compagnie pendant les longues nuits de rédaction. Et merci à Rak, Trist, Pipo et Molo, Mat, Tof, Yann, Jano, Gaspé, Bernouz, Boolfight, Pimouss, la team Dassault, Thomas, Ben, José Cobos, Luru, l'OPA et tous ceux que j'ai pu oublier... pour leur confiance et leur abnégation tout au long de ces années.

Je remercie enfin mes parents, mon frère, Mushu, Pomme et JPK pour leur organisation du pot de thèse qui fut une vraie réussite, mais bien évidemment et surtout pour tout le reste qui ne peut figurer ici. Oliv, merci d'être venu.

Merci enfin à Clara.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Cadre général de la these . . . . .	1
1.1.1	Problématique du travail . . . . .	1
1.1.2	Intérêt fondamental et applications de l'étude . . . . .	4
1.1.3	Travaux antérieurs en géométrie confinée . . . . .	6
1.1.4	Mécanismes de base . . . . .	7
1.1.4.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor en géométrie libre et confinée . . . . .	7
1.1.4.2	Mélange transverse dans la zone de mélange et instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . . .	10
1.1.4.3	Expériences de mélange dans les écoulements stratifiés en conduits inclinés . . . . .	13
1.1.4.4	Stabilité des écoulements de cisaillement stratifiés . . . . .	14
1.2	Quelques phénomènes liés au mélange confiné induit par gravité . . . . .	17
1.2.1	Écoulements résultant d'un équilibre inertie-gravité . . . . .	17
1.2.1.1	Vitesse des bulles de grand diamètre dans un tube vertical . . . . .	18
1.2.1.2	Vitesse des bulles de grand diamètre dans un tube incliné . . . . .	20
1.2.1.3	Courants de gravité . . . . .	22
1.2.2	Effet Boycott . . . . .	27
1.2.3	Dispersion de Taylor . . . . .	29
1.2.3.1	Dispersion de Taylor dans un écoulement laminaire . . . . .	29
1.2.3.2	Dispersion de Taylor dans un écoulement turbulent . . . . .	31
1.3	Conclusion . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Présentation qualitative des observations</b>	<b>33</b>
2.1	Dispositif expérimental de visualisation . . . . .	33
2.2	Du mélange turbulent aux courants de gravité en tubes inclinés : contrôle du mélange transverse par l'angle d'inclinaison . . . . .	34

2.3	Dynamique de front en tube incliné . . . . .	38
2.4	Cas particulier du tube vertical . . . . .	40
2.5	Introduction des paramètres de contrôle du problème . . . . .	41
2.6	Objectif et plan . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Techniques expérimentales</b>	<b>43</b>
3.1	Motivations . . . . .	43
3.2	Etude macroscopique . . . . .	43
3.2.1	Montage expérimental . . . . .	43
3.2.2	Caractérisation des fluides . . . . .	44
3.2.3	Visualisation et mesure de concentration par absorption optique . . . . .	46
3.3	Mesures locales de concentration . . . . .	49
3.3.1	Montage expérimental . . . . .	49
3.3.2	Caractérisation des fluides . . . . .	50
3.3.3	Visualisation et méthode de mesure par fluorescence laser . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Dynamique des fronts de déplacement</b>	<b>55</b>
4.1	Présentation . . . . .	55
4.1.1	Présentation des différents régimes . . . . .	55
4.1.2	Etude des régimes sans mélange au front : régimes 2 et 3 . . . . .	60
4.1.2.1	Présentation des données expérimentales et influence des paramètres de contrôle du système ( $At$ , $\nu$ et $d$ ). . . . .	60
4.1.2.2	Définition de grandeurs caractéristiques du système : $V_t$ et $V_\nu$ et $Re_t$ . . . . .	60
4.1.2.3	Régime inertiel saturé . . . . .	62
4.1.2.4	Régime visqueux . . . . .	64
4.1.3	Mécanismes contrôlant la vitesse d'écoulement . . . . .	66
4.1.3.1	Relation vitesse du front - débit du fluide . . . . .	66
4.1.3.2	Régime visqueux . . . . .	67
4.1.3.3	Transition régime visqueux - régime inertiel . . . . .	67
4.1.3.4	Régime inertiel . . . . .	68
4.2	Régime visqueux . . . . .	70
4.2.1	Régime visqueux stationnaire . . . . .	70
4.2.2	Phase d'écoulement transitoire en régime visqueux . . . . .	75
4.2.2.1	Mise en évidence qualitative des régimes transitoires . . . . .	75
4.2.2.2	Déplacement du front en tube horizontal ( $\theta = 90^\circ$ ) . . . . .	75



4.2.2.3	Modélisation à deux dimensions de l'étalement en tube horizontal . . . . .	78
4.2.2.4	Etude du régime visqueux transitoire pour des tubes proches de l'horizontale . . . . .	80
4.3	Régimes inertiels de déplacement du front . . . . .	95
4.3.1	Vitesses du front en régime stationnaire inertiel . . . . .	96
4.3.2	Analyse locale des variations de contraste de concentration au front . . . . .	100
4.3.2.1	Introduction . . . . .	100
4.3.2.2	Variations de la concentration au front en régime transitoire . . . . .	102
4.3.2.3	Analyse expérimentale de la relation vitesse-concentration . . . . .	104
4.4	Conclusion . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Mélange diffusif</b>	<b>107</b>
5.1	Mélange diffusif en tube vertical . . . . .	107
5.1.1	Régime d'étalement macroscopiquement diffusif de la zone de mélange . . . . .	107
5.1.2	Domaine d'existence du régime de mélange diffusif en fonction du contraste de densité . . . . .	110
5.1.2.1	Régime diffusif aux contrastes de densité forts et intermédiaires . . . . .	110
5.1.2.2	Régime non diffusif aux très faibles contrastes de densité . . . . .	112
5.1.3	Domaine d'existence des régimes d'écoulement en fonction de la viscosité et du diamètre . . . . .	112
5.1.4	Variation du coefficient de diffusion macroscopique avec le contraste de densité, le diamètre et la viscosité . . . . .	113
5.1.5	Loi d'échelle . . . . .	114
5.2	Tubes inclinés . . . . .	116
5.2.1	Existence d'un régime d'étalement diffusif en tube incliné . . . . .	116
5.2.2	Domaine d'existence du régime diffusif pour des tubes inclinés . . . . .	118
5.2.3	Variation du coefficient de diffusion en fonction de l'angle d'inclinaison et des différents paramètres de contrôle de l'écoulement . . . . .	120
5.2.4	Lois d'échelle vérifiées par le coefficient de diffusion . . . . .	120
5.2.5	Influence des conditions aux limites : mélange aux temps longs . . . . .	124
5.3	Mécanisme de mélange diffusif et temps caractéristique de mélange . . . . .	128
5.3.1	Relation diffusion-vitesse de front en tube incliné . . . . .	128
5.3.2	Mélange diffusif intermittent : observation expérimentale . . . . .	128
5.3.3	Mélange diffusif intermittent : un cas modèle . . . . .	129
5.3.4	Variations expérimentales du temps caractéristique de mélange $D/V_f^2$ . . . . .	133
5.4	Conclusion . . . . .	136

<b>6</b>	<b>Instabilités et mélange transverse pour un contre-écoulement stratifié</b>	<b>139</b>
6.1	Objectif du chapitre et lien avec le reste de la thèse . . . . .	139
6.2	Méthode de simulation numérique de la déstabilisation d'un contre écoulement stratifié	140
6.2.1	Equations de base : équations linéarisées des petites perturbations . . . . .	140
6.2.2	Méthode numérique de résolution . . . . .	143
6.3	Simulation d'un cas modèle simple . . . . .	146
6.3.1	Hypothèses de base . . . . .	146
6.3.2	Etude du taux de croissance dans le cas modèle . . . . .	146
6.3.3	Bilan de l'étude du cas modèle et perspectives . . . . .	149
6.4	Les profils de concentration transverses : un ingrédient essentiel d'une simulation réaliste . . . . .	150
6.4.1	Profils de concentration et simulation de l'instabilité . . . . .	150
6.4.2	Profils de concentration expérimentaux . . . . .	151
6.5	Conclusion . . . . .	153
<b>7</b>	<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>155</b>
7.1	Résultats expérimentaux . . . . .	155
7.1.1	Dynamique du front . . . . .	155
7.1.2	Mélange en aval du front : diffusion macroscopique . . . . .	157
7.1.3	Instabilités et mélange transverse pour un contre-écoulement stratifié : étude numérique . . . . .	158
7.2	Perspectives . . . . .	158
7.2.1	Etude locale du mélange induit par gravité en tube vertical ou incliné - LIF-PIV	158
7.2.1.1	Structure locale du champ de vitesse et de concentration au front . . . . .	159
7.2.1.2	Analyse des fluctuations de vitesse et de concentration . . . . .	159
7.2.1.3	Caractéristiques spatio-temporelles des écoulements ; intermittence et instabilités. . . . .	159
7.2.2	Influence du confinement . . . . .	160
7.2.2.1	Transition entre mélange confiné et non confiné . . . . .	160
7.2.2.2	Géométrie du canal . . . . .	160
7.2.3	Extension des résultats obtenus à d'autres systèmes . . . . .	161
7.2.3.1	Fluides non miscibles . . . . .	161
7.2.3.2	Suspensions de particules . . . . .	161

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Cadre général de la these

#### 1.1.1 Problématique du travail

Nous nous intéressons dans la présente thèse au mélange spontané sous l'effet de la gravité de deux fluides de densités différentes initialement séparés sous forme de deux couches superposées dans une géométrie confinée telle qu'un tube vertical ou incliné. Contrairement à beaucoup d'opérations de mélange industriel, les deux fluides ne sont ni agités ni remués de l'extérieur. Nous verrons que des problèmes de ce type se rencontrent fréquemment en océanographie, en hydrologie ou encore en génie pétrolier ou chimique.

Prenons tout d'abord le cas où les deux fluides sont initialement superposés dans une configuration stable (le fluide léger étant au-dessus). Le seul mécanisme qui permette à ces fluides de s'interpénétrer de façon spontanée est alors la diffusion moléculaire qui reflète l'agitation thermique des molécules : l'épaisseur de la zone de mélange croît dans ce cas comme la racine carrée du temps (figure 1.1a). Ce mélange par diffusion moléculaire est très homogène à l'échelle moléculaire mais extrêmement lent aux grandes échelles : il est donc inefficace. La figure 1.2 présente un exemple d'une telle stratification stable de densité, créée par la présence de polluant dans les hautes couches de l'atmosphère : celles-ci s'échauffent alors en absorbant le rayonnement solaire et leur température devient plus élevée que celle du sol. La densité de l'air est alors plus faible qu'au sol et aucun mouvement de convection n'apparaît : dans cette configuration stable, la pollution ne peut se mélanger avec les autres couches de l'atmosphère et elle s'accumule en augmentant encore plus l'effet d'absorption du rayonnement solaire.

En fait, tout mélange efficace requiert une première phase d'interpénétration convective à grande échelle suivie de mouvements à des échelles de plus en plus petites jusqu'à ce que la diffusion moléculaire assure un mélange homogène. Aussi, dans le présent travail, nous nous intéressons au cas opposé de deux fluides de densités différentes initialement séparés dans une configuration instable de contraste de densité (fluide lourd situé au-dessus du fluide léger). Les instabilités qui se développent dans ce cas - **instabilités de Rayleigh-Taylor** - provoquent les mouvements convectifs permettant une interpénétration des fluides.

Les instabilités de Rayleigh-Taylor et le mélange qu'elles induisent ont fait l'objet de nombreuses recherches dans le cas d'une interface étendue par rapport à la longueur d'onde des instabilités qui se développent initialement et d'une épaisseur de la zone de mélange inférieure ou égale à sa dimension transverse ; la dimension transverse de l'interface n'influence pas le développement de l'instabilité : on n'a pas d'effet de confinement. Il apparaît alors un système de doigts multiples qui permet aux deux fluides de s'interpénétrer (Fig. 1.1b), ces doigts grossissent ensuite par coalescence. Il faut cependant noter que, si on réalise ainsi une interpénétration à grande échelle, il faudra, pour obtenir un vrai mélange, qu'il apparaisse des mouvements du fluide à plus petite échelle transverses aux doigts.

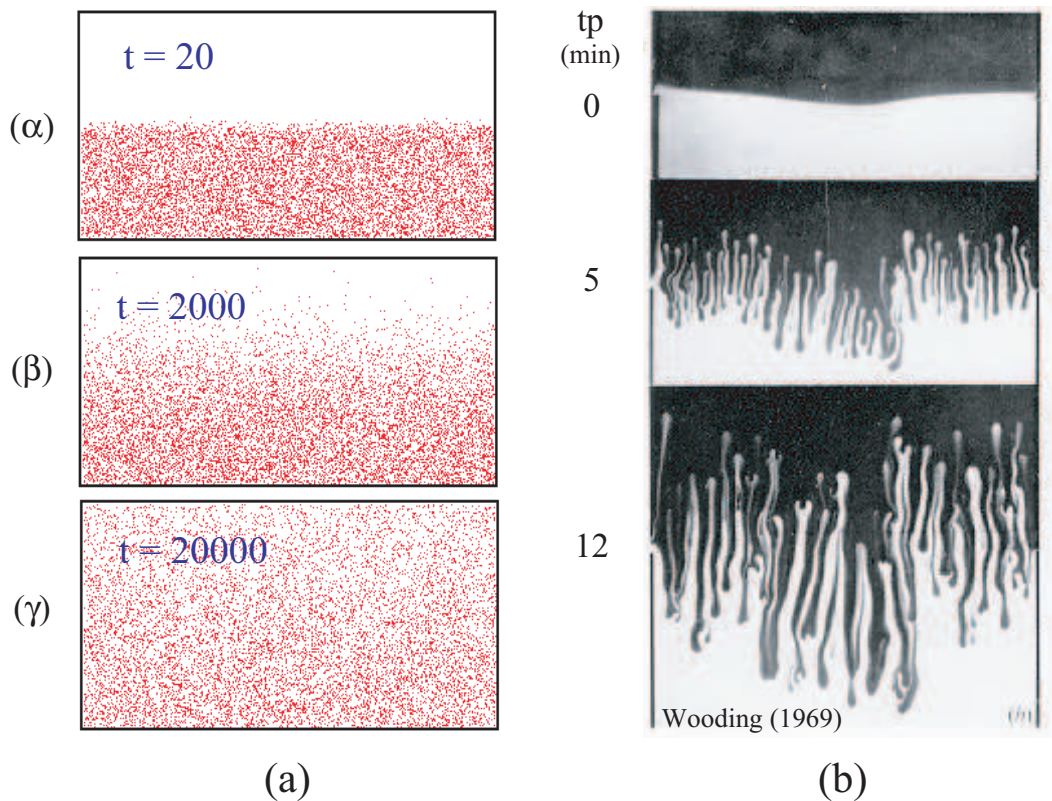


FIGURE 1.1: (a)-Fluides stratifiés avec contraste de densité stabilisant : mélange lent par diffusion moléculaire. (b)-Fluides stratifiés avec contraste de densité déstabilisant : développement d'une instabilité de Rayleigh-Taylor (expérience de Wooding en cellule de Hele-Shaw (1969) [74]).

Dans notre expérience, et au contraire des études dont nous venons de discuter, nous nous intéressons au mélange induit par gravité dans des tubes de grande longueur par rapport à leur diamètre (Fig. 1.3). Le mélange est étudié aux temps longs tels que l'épaisseur de la zone de mélange suivant l'axe du tube soit grande devant le diamètre de celui-ci (les fluides sont toujours initialement séparés dans une configuration instable). On est alors dans une géométrie confinée transversalement, ce qui sélectionne les modes d'instabilité qui peuvent se développer : en particulier, le diamètre du tube impose une taille maximum transversale des doigts qui se développent alors que la propagation longitudinale reste libre.

Lorsque la zone de mélange se développe suivant l'axe du tube sur une distance supérieure à son diamètre, il apparaît à l'intérieur de cette zone un contre-écoulement : ce mouvement moyen des



FIGURE 1.2: Exemple d'une stratification stable de densité au-dessus de Los Angeles, créée par la présence de polluant dans les hautes couches de l'atmosphère : celles-ci s'échauffent en absorbant le rayonnement solaire et leur température devient plus élevée que celle du sol. La densité de l'air est alors plus faible qu'au sol, dans cette configuration stable, la pollution ne peut se mélanger avec les autres couches de l'atmosphère ce qui conduit à la formation du "smog".

deux fluides est reflété par les déplacements en sens opposé des deux fronts qui limitent la zone de mélange. Aux très faibles contrastes de densité et pour des tubes de faible diamètre, on peut avoir un contre-écoulement stable des fluides : cependant, la plupart du temps, l'interface entre ceux-ci se déstabilise en raison de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz résultant de ce cisaillement. Cette instabilité induit un mélange transverse souvent très efficace qui, nous le verrons, a une influence clé sur la dynamique d'étalement de la zone de mélange.

Une configuration particulièrement intéressante (et peut être mieux définie) est celle du mélange dans un tube incliné. Il apparaît alors une composante de la gravité transverse à l'axe du tube qui rompt la symétrie de révolution du système en induisant des effets de stratification : on aura en effet accumulation du fluide léger dans la partie supérieure de la section du tube et du fluide lourd dans la partie inférieure. Par ailleurs cette stratification fait apparaître un gradient horizontal de la densité qui induit un écoulement vers le haut au fluide léger compensé par un écoulement vers le bas du fluide lourd. On peut alors représenter le système d'une manière simplifiée comme deux écoulements en sens inverse localisés près des parois et couplés par une zone de mélange.

La figure 1.3 résume les processus à l'œuvre dans cette dernière configuration :

- Interpénétration des deux fluides de densité différente sous l'effet de la composante longitudinale  $g \cos\theta$  de la gravité.
- Mélange transverse, en particulier par les instabilités de type Kelvin-Helmholtz à l'interface entre les deux fluides en contre-écoulement.

- Ségrégation des deux fluides dans la section du tube induite par la composante transverse  $g \sin \theta$  de la gravité.

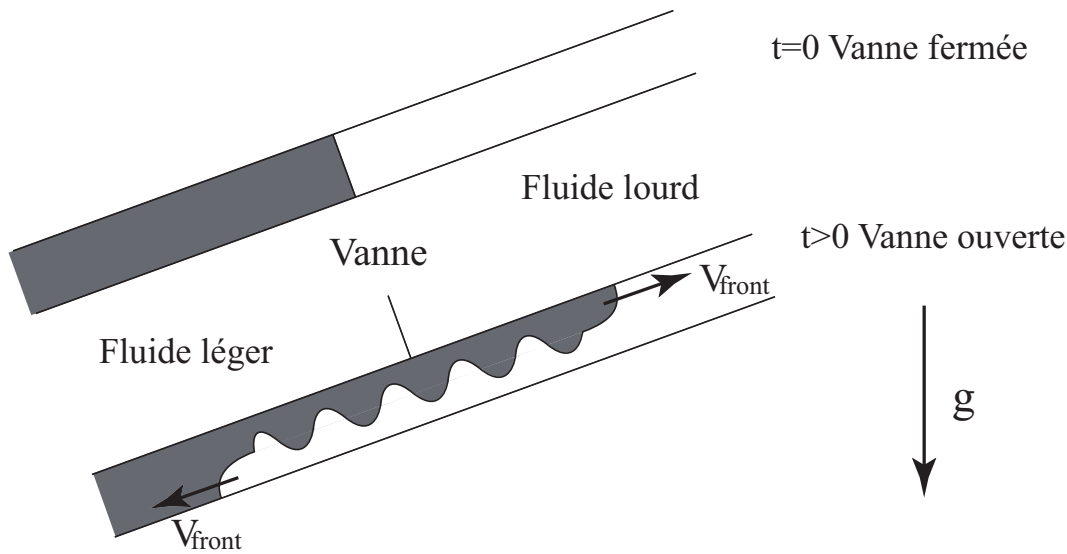


FIGURE 1.3: Schéma du mélange induit par gravité dans un tube incliné (en bas) de deux fluides de densités différentes initialement séparés dans une configuration instable (en haut).

Nous rediscuterons plus loin ces trois processus. Dans un tube vertical, la ségrégation est absente et le développement de la zone de mélange résulte uniquement d'un équilibre entre l'interpénétration induite par la composante longitudinale de la gravité et le mélange transverse résultant des instabilités de cisaillement.

### 1.1.2 Intérêt fondamental et applications de l'étude

Conceptuellement, l'utilisation d'une géométrie confinée réduit le nombre de modes d'instabilité qui se développent : le mélange s'effectue donc par des scénarios plus simples à étudier et à modéliser. La modélisation peut être encore simplifiée dans le cas d'un tube incliné où la ségrégation rompt la symétrie de révolution du système : on peut alors le représenter en première approximation comme deux écoulements en sens inverse couplés par une zone de mélange.

Outre la motivation fondamentale que nous venons de décrire, ces études ont des applications importantes. Historiquement, elles ont été d'ailleurs initiées au laboratoire FAST par une coopération avec la société de services pétroliers Schlumberger (Dr. G. Daccord, division Dowell) : le problème pratique était celui des mélanges de fluides injectés lors des opérations de "complétion" de puits de pétrole après leur forage.

Lors de la construction d'un puits de pétrole, on réalise en effet d'abord un forage de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres de diamètre, puis on met en place, à l'intérieur, un long tube métallique (formé de nombreuses sections raccordées par vissage les unes aux autres). Il faut ensuite consolider la roche et éviter les circulations parasites de fluide entre les différentes couches géologiques, en cimentant l'espace annulaire de quelques centimètres de largeur entre la roche et le tube métallique. L'injection du coulis de ciment dans le puits se fait par l'intérieur



du tube (figure 1.4), en chassant la boue initialement présente qui remonte ensuite par l'espace annulaire. Des fluides intermédiaires de "nettoyage" sont également souvent injectés avant le ciment. Comme ces différents fluides sont de densités différentes, il peut se développer des instabilités qui les mélangent. Or, pour éviter de compromettre la solidité mécanique du puits en mettant en place un ciment de mauvaise qualité peu résistant, la contamination du ciment par les autres fluides doit être évitée. Il faut donc pouvoir évaluer avec précision la quantité de chaque fluide à injecter pour déplacer complètement le fluide précédent (une très grande marge de sécurité n'est pas acceptable à cause du coût élevé des fluides utilisés). Ainsi, il est important de bien comprendre et de quantifier les processus de mélange dans de telles injections. Il faut noter que les forages pétroliers sont souvent inclinés (voire même horizontaux), comme dans notre étude et que, par ailleurs, les fluides utilisés sont souvent non newtoniens (cependant nous n'étudierons pas l'influence de la rhéologie dans le présent travail).

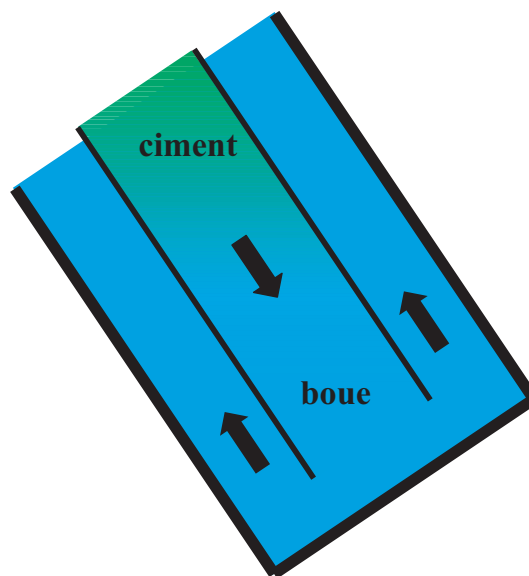


FIGURE 1.4: Schéma de l'injection du ciment lors de la complétion d'un puits de pétrole

Outre la complétion des forages pétroliers que nous venons de décrire, ces études de mélange en géométrie confinée de canaux allongés ont des applications dans de nombreux domaines.

- Réactions chimiques entre des fluides de densités différentes dans des récipients de grande longueur ou des réacteurs tubulaires.
- Échangeurs de chaleur tubulaires (les contrastes de densité résultent dans ce cas des gradients de température).
- Propagation d'incendie et de fumée dans une cage d'ascenseur, une galerie ou un tunnel [12, 81].
- Dispersion de polluants denses dans des couches d'eau peu profonde.
- Océanographie : mélange d'eau douce et d'eau salée ou d'eaux de salinités différentes dans des couches de faible épaisseur sur des fonds horizontaux ou faiblement inclinés.

- Sédimentation de particules dans des séparateurs inclinés utilisant l'effet Boycott [1][32].

### 1.1.3 Travaux antérieurs en géométrie confinée

Comme nous l'avons indiqué plus haut, les études des instabilités de type Rayleigh-Taylor sont très nombreuses [51], en liaison, par exemple, avec leurs applications à la fusion inertielle, à la modélisation des explosions nucléaires ou à l'astrophysique [38]. C'est en particulier le cas pour la forme qu'elles prennent lorsqu'une onde de choc traverse une interface : instabilité de Richtmyer-Meshkov [48][41]. Nous discuterons plus loin un peu plus en détail ces études qui traitent surtout le cas où l'épaisseur de la zone de mélange est inférieure ou similaire à la dimension transverse.

Assez peu d'études ont, cependant, été réalisées sur les caractéristiques aux temps longs des instabilités dans une géométrie confinée. Dans le cas d'un tube vertical, on citera tout d'abord les travaux de Taylor [61] qui, dans une configuration instable, a calculé analytiquement le gradient de densité critique pour le développement de la convection naturelle.

Zukoski *et al.* [12, 81] se sont intéressés en 1975 au mélange de liquide chaud et froid dans une conduite verticale de section carrée, dans le but de modéliser la propagation de la fumée lors d'un incendie dans une cage d'escalier ou d'ascenseur (figures 1.5a-b). Ces auteurs ont mis en évidence une variation en  $t^{0.57}$  de la hauteur du front au-dessus du bas de la conduite (figure 1.5c). Cependant, ces auteurs n'ont pas étudié l'évolution en temps des profils de concentration qui sera un des éléments clé de notre étude.

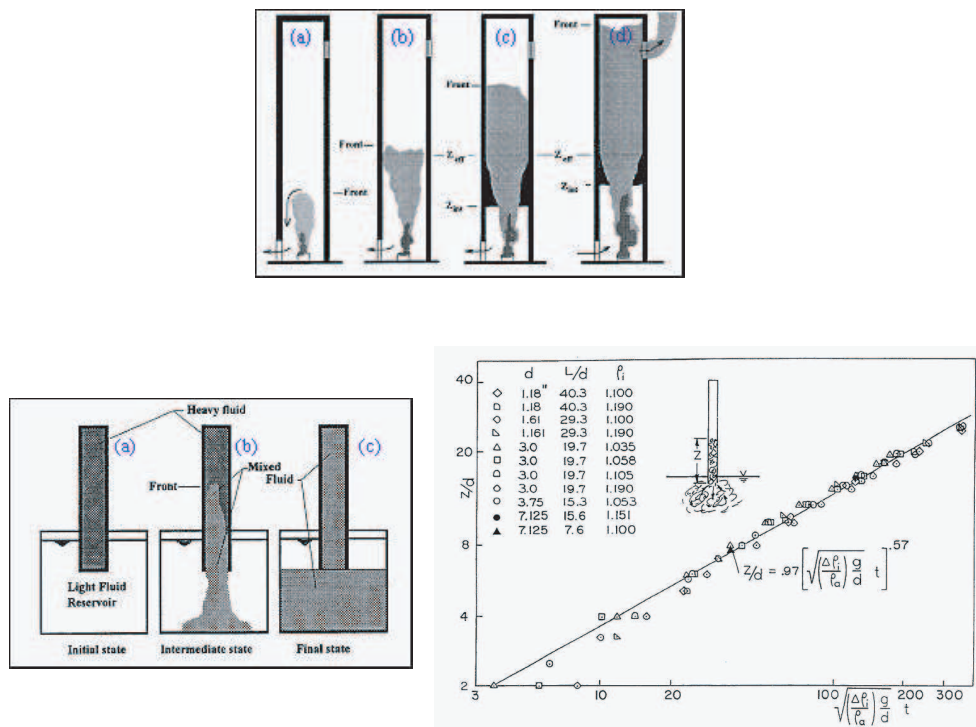


FIGURE 1.5: (a) Schéma de l'ascension de la fumée dans un conduit ouvert en bas. (b) Modélisation expérimentale de ce phénomène avec deux liquides. (c) Variation (en coordonnées logarithmiques) de la hauteur du front montant de fluide léger par rapport au bas de la conduite en fonction du temps normalisé (la hauteur a été normalisée par la largeur de la conduite) (documents extraits de la référence [12])

Plus récemment, Baird *et al.*[2](1992) ont introduit en haut d'un tube vertical rempli d'eau distillé une petite quantité de solution miscible plus dense (figure 1.6a). Ces auteurs observent notamment que le déplacement de la position du front de mélange dans le tube en fonction du temps varie en  $t^{1/2}$  comme on le voit dans la figure 1.6b. Comme dans les expériences de Zukoski, l'évolution en fonction du temps des profils de concentrations n'a pas été envisagée.

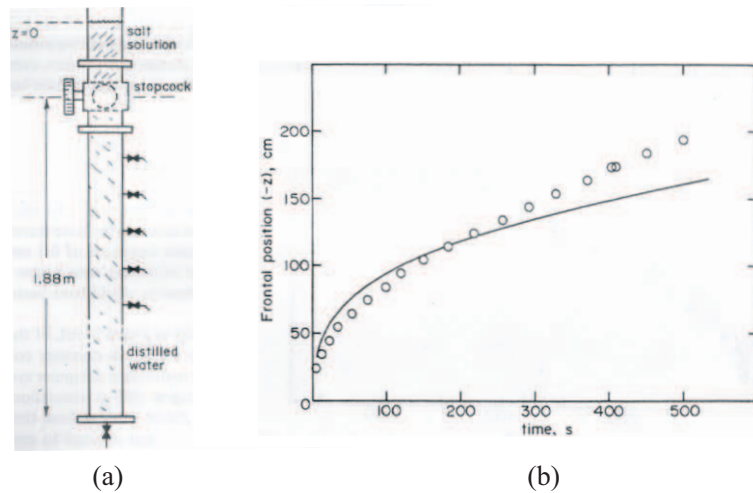


FIGURE 1.6: (a) Montage expérimental pour réaliser le mélange, le tube a un diamètre intérieur de  $2.63\text{cm}$ . (b) Position du front de mélange dans le tube en fonction du temps, lorsqu'on ajoute  $50\text{ml}$  de fluide lourd à  $100\text{g/L}$  de chlorure de sodium (document extrait de la référence [2]).

Dans le cas de tubes horizontaux ou faiblement inclinés par rapport à l'horizontale, les processus que nous étudions sont très voisins des phénomènes de courants de gravité et d'écoulements d'échange (*lock-exchange* en anglais). Dans ce dernier cas, deux volumes de fluide de densité différente sont initialement séparés par une cloison verticale coupant en deux un canal horizontal. Nous évoquerons plus loin ces phénomènes ainsi que d'autres qui présentent également des analogies instructives avec ceux que nous étudions. C'est le cas de la propagation de grandes bulles dans un tube ou de l'effet Boycott d'accélération de la sédimentation de particules dans un tube lorsqu'on incline celui-ci.

#### 1.1.4 Mécanismes de base

Nous observerons, dans la suite de cette étude, des effets de mélange originaux et, parfois même, inattendus. Cependant ils résultent toujours de la combinaison de mécanismes simples que nous avons déjà évoqués plus haut et qui, eux, ont déjà largement été étudiés. Dans cette section, nous revenons sur ceux-ci en rappelant quelques résultats particulièrement importants pour la suite de notre étude.

##### 1.1.4.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor en géométrie libre et confinée

Dans nos expériences, la phase initiale de l'interpénétration des deux fluides lorsque le tube est vertical correspond au développement d'une instabilité de Rayleigh-Taylor (nous redéfinirons ce

terme un peu plus bas). Par ailleurs, même aux temps longs et en écoulement incliné, le "moteur" de l'écoulement reste, comme pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor, les forces d'Archimède liées à la composante longitudinale de la gravité et à la différence de densité entre les fluides. Aussi, allons-nous tout d'abord rappeler les propriétés de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (RT) observées dans les expériences décrites dans la littérature (l'article de Sharp [51] fournit une bonne vue d'ensemble de cette instabilité). Nous discuterons ensuite, par comparaison avec ces résultats, les caractéristiques spécifiques des écoulements que nous étudions.

L'instabilité de RT apparaît à l'interface entre deux fluides de densités différentes  $\rho_1 > \rho_2$  soumis à une accélération de composante non nulle normale à l'interface [59]. Cette instabilité se manifeste par une interpénétration des deux fluides : elle se développe lorsque l'accélération (due à la pesanteur ou à toute autre source) est dirigée du fluide le plus lourd vers le plus léger [59]. Le développement de l'instabilité de RT à partir d'une petite perturbation initiale passe par plusieurs étapes [51, 76] :

- Des déformations spontanées de petite amplitude de l'interface apparaissent et nous voyons se dégager celles qui correspondent au taux de croissance maximum (*i.e.* à la longueur d'onde  $\lambda$  la plus instable dans un modèle linéaire de l'instabilité).
- L'amplitude de cette perturbation croît exponentiellement avec le temps jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur de l'ordre de  $0.1\lambda$  à  $0.4\lambda$ , pour laquelle la croissance de l'instabilité ne peut plus être décrite par des équations linéarisées.
- Les perturbations croissent ensuite sous forme de doigts qui évoluent souvent vers des formes de "champignons" qui interagissent non linéairement avec leurs voisines, jusqu'à atteindre une taille d'environ  $10\lambda$  toujours mesurée perpendiculairement à l'interface.
- Ensuite, nous observons la coalescence des différents doigts et la "mémoire" des conditions initiales est perdue.

Dans cette dernière phase, l'échelle de longueur naturelle du problème est alors la distance  $h$  théorique de "chute libre" des volumes de fluide sous l'effet de la poussée d'Archimède  $(\rho_1 - \rho_2)g$  pendant le temps  $t$  depuis la mise en contact des fluides : cette distance est déterminée par l'équation de Newton  $\bar{\rho}dv/dt = (\rho_1 - \rho_2)g$ . En prenant comme densité moyenne :  $\bar{\rho} = (\rho_2 + \rho_1)/2$ , on trouve  $h = Atgt^2$  où le nombre d'Atwood  $At$  est défini, comme il est d'usage, par :

$$At = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (1.1)$$

Nous pouvons donc nous attendre à ce que la largeur  $\delta$  de la zone de mélange soit proportionnelle à  $h$ , et ainsi  $\delta \propto Atgt^2$ .

De nombreux travaux ont effectivement mis en évidence numériquement [76, 79, 78, 18] ou expérimentalement [77, 46] une croissance de l'épaisseur de la zone de mélange dans le régime non linéaire de la forme :

$$\delta = \alpha Atgt^2$$

avec  $\alpha \simeq 0.04 - 0.06$  [16]. La faible valeur et la variabilité de  $\alpha$  restent des sujets d'études très actifs.

Supposons maintenant que l'approximation de Boussinesq soit vérifiée, c'est-à-dire que le contraste de densité  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  soit négligeable devant la densité  $\rho_i$  des fluides "i" avec ( $\Delta\rho \ll \rho_i$ ) - on parle alors de courant de Boussinesq. On peut alors supposer que la différence de densité  $\Delta\rho$  n'influence ni les propriétés du fluide comme la viscosité, ni même les termes convectifs de l'équation de Navier-Stokes mais influence seulement le terme moteur de flottabilité :  $\rho_i g$ . Réécrivons alors la densité des fluides (identifiés par l'indice "i") sous la forme :  $\rho_i = \bar{\rho} \pm \Delta\rho/2$  avec  $\bar{\rho} = (\rho_2 + \rho_1)/2$  ; l'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \bar{\rho} v \cdot \vec{\nabla} v = -\vec{\nabla} P + (\bar{\rho} \pm \frac{\Delta\rho}{2}) \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Ce sont les termes  $\frac{\Delta\rho}{2} \vec{g}$  qui marquent la déviation par rapport à un équilibre hydrostatique et initient les écoulements : ces termes aussi bien que les déplacements qu'ils engendrent sont symétriques. On peut donc s'attendre à ce que les amplitudes des déformations descendantes ( $\delta_-$ ) et montantes ( $\delta_+$ ) du front induites par l'instabilité vérifient  $\delta_- = \delta_+ = \delta/2$ .

Enfin, si on prend en compte l'effet de la diffusion moléculaire que nous avons négligée jusqu'ici, celle-ci peut être dominante aux temps très courts : cet étalement diffusif pourra précéder le développement de l'instabilité. De fait, des simulations numériques 3D récentes réalisées par Cook et Dimotakis en 2001 [17] ont mis en évidence une variation initiale de  $h$  en  $\sqrt{t}$  avant le passage à un régime de croissance quadratique. Ce régime lié à la diffusion moléculaire est indépendant des perturbations initiales. La figure 1.7(a) extraite d'une publication de ces auteurs montre bien la croissance progressive de la taille caractéristique des déformations dans le régime non linéaire ; la figure 1.7(b) montre, elle, la transition entre les deux régimes d'étalement de la zone de mélange.

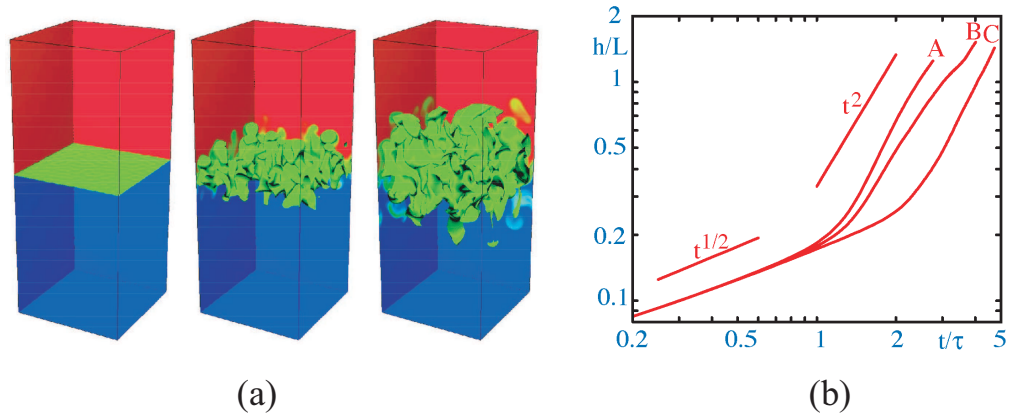


FIGURE 1.7: (a) Evolution du front de mélange entre deux fluides liée au développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Le fluide lourd apparaît en rouge et le fluide léger en bleu et le front de séparation en vert. Les temps normalisés correspondant aux trois images sont respectivement  $t/\tau = 0$ ,  $t/\tau = 3.44$  et  $t/\tau = 4.63$  où  $\tau$  correspond à la transition entre les deux régimes en  $t^{0.5}$  et  $t^2$  - (b) Variation de la hauteur  $h(t)$  de la zone de mélange en fonction du temps normalisé  $t/\tau$  pour trois perturbations initiales différentes (A,B,C). La simulation visualisée sur la figure (a) correspond au cas C (documents extraits de la référence [17]).

L'évolution est très différente dans une géométrie confinée de tube vertical de faible diamètre, dès lors que la hauteur de la zone de mélange et le diamètre des digitations atteignent l'ordre de grandeur du diamètre du tube. On n'a alors plus qu'un doigt (ou "champignon") dans celui-ci et la hauteur de la zone de mélange n'augmente alors plus en  $t^2$  avec le temps. Nous avons d'ailleurs vu que les expériences de Zukoski *et al.* [12, 81] et de Baird *et al.* [2] montraient toutes deux une croissance de la hauteur proche de  $t^{0.5}$  (mais cette fois-ci aux temps longs). Nous verrons que nous n'observons également jamais de variation en  $t^2$  (notre dispositif expérimental ne permet d'ailleurs pas les mesures aux temps et distances très courts pour lesquels elle pourrait être observée).

Dans les tubes fortement inclinés, on s'écarte encore plus du cas de l'instabilité de Rayleigh Taylor en géométrie non confinée. A l'instant initial, si l'interface est perpendiculaire à l'axe du tube, on a un gradient horizontal de concentration (et donc de densité). Plutôt que le développement d'une instabilité par amplification de perturbations de petite amplitude, on a alors mise en mouvement sous l'effet de gradients déterministes de pression présents dès le départ. Le fluide léger monte dans la partie supérieure de la section du tube alors que le fluide lourd descend dans la partie inférieure.

Signalons, également, le cas des instabilités de Rayleigh-Taylor dans une cellule de Hele-Shaw étudiées en particulier par Wooding (Fig. 1.1b) : l'écoulement est alors confiné dans la direction perpendiculaire aux plaques mais non confiné parallèlement à celles-ci. On observe expérimentalement que la taille des déformations augmente d'abord comme le carré du temps, puis linéairement [74] [73]. Cette différence provient probablement du fait que le confinement dans la direction perpendiculaire aux plaques finit par bloquer le processus d'appariement des "doigts" créés par l'instabilité. Ceux-ci se développent ensuite avec une largeur approximativement constante.

Les études sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor ont également débouché sur des analyses fines du mélange dans ces processus. Des approches intéressantes de la caractérisation de l'efficacité de ce mélange ont ainsi été proposées par Holford [34] et Linden [40] : ces méthodes sont potentiellement susceptibles d'applications à nos expériences.

#### 1.1.4.2 Mélange transverse dans la zone de mélange et instabilité de Kelvin-Helmholtz

Nous avons vu que, aux temps assez longs pour que la hauteur de la zone de mélange suivant l'axe du tube soit grande devant son diamètre, il apparaît un contre-écoulement global des deux fluides. Les caractéristiques de ce contre-écoulement dépendent fortement de leur contraste de densité (caractérisé par le nombre d'Atwood  $At$ ), de leur viscosité et du diamètre du tube : cela apparaît bien dans la figure 1.8 extraite de la référence [22] qui compare des expériences réalisées avec trois valeurs de  $At$  diminuant de gauche à droite. Pour le contraste de densité le plus faible, on a un contre-écoulement stable des fluides ; pour les deux autres, l'écoulement se déstabilise en arrière du front. D'autre part, plus  $At$  est élevé, plus le mélange transverse est efficace : on sépare facilement à l'œil les deux fluides dans la vue du milieu et plus du tout dans celle de gauche qui correspond à la valeur de  $At$  la plus élevée, et pour laquelle le mélange est beaucoup plus efficace.

Le développement d'instabilités dans le sillage du front et le mélange transverse qu'elle induisent ont donc clairement une influence clé sur l'écoulement. Nous pensons que ces instabilités, au



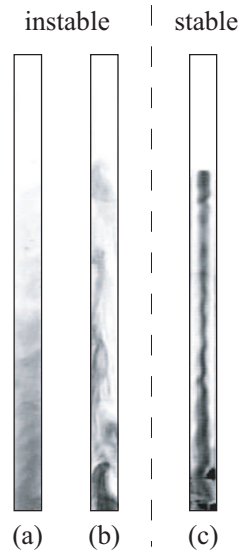


FIGURE 1.8: Vue d'une section de longueur  $30\text{cm}$  d'un tube vertical située juste au-dessus de la vanne de séparation initiale des fluides. Un fluide léger coloré (en noir) monte à l'intérieur d'un fluide lourd transparent (en clair). Les fluides sont miscibles et les contrastes de densité sont, de gauche à droite (a)  $At = 5 \times 10^{-2}$ , (b)  $At = 8 \times 10^{-4}$ , (c)  $At = 10^{-4}$

moins dans leur phase de départ, résultent du mécanisme classique rencontré dans de nombreux écoulements de cisaillement, et appelé **instabilité de Kelvin-Helmholtz** [30, 31, 13].

Une configuration modèle typique d'apparition de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est la mise en contact de deux courants parallèles d'un même fluide animés initialement de vitesses différentes (problème de la couche de mélange). Cette instabilité est d'origine inertielle et la viscosité n'aura sur elle qu'une influence secondaire, en particulier en atténuant par diffusion de la quantité de mouvement la croissance de l'instabilité. Nous la négligerons dans un premier temps dans la discussion simple qui suit.

Considérons alors une configuration où le gradient de vitesse entre les deux fluides (figure 1.9) est localisé autour de leur interface. Une déformation de celui-ci provoque un resserrement des lignes de courant du côté de la face convexe, et donc une augmentation de la vitesse. La pression locale (notée  $P^-$ ) va donc diminuer par *effet Bernoulli*. Inversement, la pression sur la face concave (notée  $P^+$ ) augmente : l'écoulement induit par cette différence de pression renforcera donc la déformation initiale. De plus, les parties déformées de l'interface arrivent dans des zones de vitesse différente de leur vitesse initiale : cela tend à les faire déferler (figure 1.9) ou même à enrouler l'interface sur elle-même : on a ainsi l'amorce du mélange entre les deux fluides.

Appelons maintenant  $\eta(x, t)$  le déplacement de l'interface perturbée par rapport à sa position moyenne  $y = y_0$ ,  $u_x$  la perturbation de la composante longitudinale  $U$  de la vitesse ( $U = \bar{V} + u_x$  où  $\bar{V}$  est la vitesse au départ en  $y = y_0$ ) et  $k$  le nombre d'onde. Soit une déformation d'amplitude normale  $\eta > 0$  de l'interface et de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ , la composante normale  $u_y$  de la vitesse près de la zone perturbée sera de l'ordre de  $k\eta\bar{V}$  (c'est-à-dire du produit de la vitesse moyenne et de la pente locale de l'interface). Supposons maintenant que la perturbation apportée aux champs de vitesse et de pression par la déformation de l'interface décroisse sur une distance

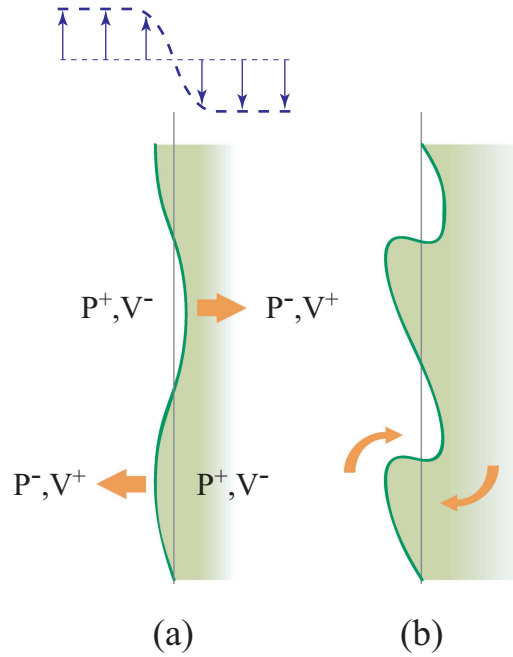


FIGURE 1.9: Principe du développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour deux couches liquides superposées animées de vitesses différentes (flèches bleues). (a) Une faible déformation de l'interface est amplifiée par les variations de pression résultant de l'effet Bernoulli. (b) Des effets non linéaires conduisent, aux grandes amplitudes, à un déferlement similaire à celui observé pour des vagues.

de l'ordre de grandeur de  $\lambda \sim 1/k$  ; par ailleurs, l'équation de conservation de la masse impose que les deux dérivées partielles  $\partial u_x/\partial x$  et  $\partial u_y/\partial y$  soient égales et opposées. Ces deux dérivées seront respectivement alors de l'ordre de  $u_x/\lambda$  et  $u_y/\lambda$  et il en résulte que  $u_x \sim u_y \sim k\eta\bar{V}$ . La perturbation de pression vaut, d'après le théorème de Bernoulli,  $p \sim \rho(U^2 - \bar{V}^2) \sim \rho\bar{V}u_x \sim \rho k\eta\bar{V}^2$  (les termes en  $\rho u_y^2$  et  $\rho u_x^2$  sont en effet négligeables). En écrivant que l'accélération transverse du fluide  $\rho du_y/dt$  résulte du gradient  $\partial p/\partial y \sim \rho k^2\eta\bar{V}^2$  de cette pression, on trouve à partir des résultats précédents l'ordre de grandeur du taux de croissance  $\sigma = 1/u_y du_y/dt$  de l'instabilité :

$$\sigma = \frac{1}{u_y} \frac{du_y}{dt} = \frac{1}{\rho u_y} \frac{\partial p}{\partial y} \sim k\bar{V}$$

L'interface serait donc instable par rapport à toutes les perturbations, avec un taux de croissance d'autant plus élevé que le nombre d'onde  $k$  est plus grand. Ce résultat peu physique résulte de l'approximation de fluide parfait utilisée : pour un fluide visqueux, les perturbations qui apparaissent sont lissées par la diffusion visqueuse de la quantité de mouvement. Pratiquement, cet effet de la viscosité est important pour un mode donné de longueur d'onde  $\lambda$  si la distance de diffusion visqueuse  $(\nu/\sigma)^{0.5}$  pendant le temps caractéristique  $1/\sigma$  de croissance de l'instabilité est supérieure à  $\lambda$  (la distance de l'interface sur laquelle se fait sentir l'influence d'une déformation). Cela conduit à la condition  $\lambda \gg \nu/V$  pour qu'une perturbation puisse se développer sans être atténuée par la viscosité ;  $\nu/V$  sera donc l'ordre de grandeur des longueurs d'onde des modes de plus fort taux de croissance une fois la viscosité prise en compte (plus la viscosité sera élevée et plus cette longueur d'onde est importante).

Jusqu'ici, nous n'avons pas tenu compte de l'influence de la gravité dans la direction perpendiculaire à l'axe du tube qui n'est nulle que dans le cas des tubes verticaux. Pour ceux-ci, comme le montre la figure 1.8c, on a, en moyenne, une symétrie de révolution de l'écoulement autour de l'axe du tube : les modes d'instabilité de l'interface entre les fluides peuvent alors se développer dans n'importe quelle direction. Cela complique d'ailleurs l'analyse de ces instabilités et du mélange qu'elles induisent.

Cette symétrie est rompue quand le tube est incliné par rapport à la verticale. On a alors une ségrégation des fluides par la composante de la gravité transverse à l'axe du tube : le fluide léger se place préférentiellement dans la partie supérieure de la section du tube, et le fluide lourd dans la partie inférieure. Ce gradient horizontal de densité est présent sur toute la zone d'interpénétration des fluides et induit des écoulements en sens inverse des fluides léger (vers le haut) et lourd (vers le bas). Comme nous l'avons vu, ce contre-écoulement déstabilise l'interface alors que le gradient de densité et la composante de la gravité transverses à l'axe du tube le stabilisent.

La section suivante est consacrée à des expériences montrant le développement de telles instabilités dans des écoulements de cisaillement stratifiés. Nous discuterons ensuite les conditions d'apparition de ces instabilités.

#### 1.1.4.3 Expériences de mélange dans les écoulements stratifiés en conduits inclinés

Des instabilités hydrodynamiques de ce type ont été observées pour la première fois dans une telle configuration par Osborne Reynolds en 1883 : dans un article publié dans la revue *"Philosophical Transactions of the Royal Society of London"* [47], il présente un montage expérimental constitué d'un tube coudé aux deux extrémités et rempli de deux fluides non miscibles. Lorsqu'on incline ce tube par rapport à l'horizontale, les deux couches de fluide se mettent en mouvement en sens opposé : des vagues apparaissent alors sur l'interface et marquent la présence de tourbillons. L'apparition de ces tourbillons ou "sinuosités" caractérise, d'après Reynolds, une transition d'un écoulement "direct" à un écoulement sinueux".

Depuis 1883, de nombreux travaux ont abordé des écoulements similaires. Parmi les plus marquants, on note l'expérience de Thorpe qui, dès 1968, a repris l'expérience de Reynolds, et utilisé un réservoir basculant pour étudier la formation des tourbillons dans un fluide stratifié cisailé. Mis à part dans son article de 1969 [65], Thorpe a utilisé deux fluides miscibles : de l'eau et de l'eau salée. Il a ainsi pu obtenir, grâce à ce dispositif, des vues particulièrement esthétiques et démonstratives du développement des instabilités de Kelvin-Helmholtz (figure 1.10).

Sur la figure (a), les deux fluides commencent à accélérer, ils sont parfaitement séparés et le gradient de densité, localisé à l'interface, est très élevé ; à mesure que les fluides accélèrent, le gradient de vitesse augmente, jusqu'à ce que l'interface se déstabilise et forme des vagues caractéristiques des instabilités de Kelvin-Helmholtz (figure (c)). Ces "vagues" augmentent alors d'amplitude puis déferlent (figure (d)), induisant ainsi du mélange transverse entre les deux fluides (figure (e)&(f)) et donc une diminution du gradient de concentration transverse. Si le gradient de concentration diminue encore, le gradient de vitesse n'est plus assez élevé pour que les instabilités subsistent à l'interface : les deux fluides se croisent alors en un contre-écoulement parallèle stable. Cette

suite de phénomènes allant de l'apparition de vagues jusqu'au mélange turbulent en passant par le déferlement et la création de tourbillons est décrite dans les références [63] et [64].

Quantitativement, Thorpe a mesuré dans un premier temps le seuil et le taux de croissance de l'instabilité [66]. Il s'est ensuite intéressé à la saturation non-linéaire des rouleaux et à l'apparition de la turbulence à deux dimensions [67], puis à trois dimensions dans un réservoir plus large [68].

On remarque que, quand le contraste de densité entre les deux fluides (ou  $At$ ) augmente, les gradients de pression longitudinaux provoquant la mise en mouvement du fluide (et donc l'apparition d'instabilités) et les gradients de pression transverse stabilisant le contre-écoulement augmentent tous les deux. Ces deux effets de la variation de  $At$  agissent donc en sens inverse sur la stabilité de l'écoulement. Par contre, lorsqu'on rapproche le canal de l'horizontale ( $\theta$  augmente) les gradients longitudinaux diminuent alors que les gradients transverses augmentent : ces deux effets contribuent, eux, à stabiliser le contre-écoulement.

Pour finir, rappelons que le mélange induit par les instabilités de cisaillement dans un fluide stratifié n'est pas uniquement un objet de laboratoire, mais se rencontre dans de nombreuses situations géophysiques : c'est notamment le cas lorsque deux couches de fluides, généralement de densités différentes, glissent l'une sur l'autre [20] [11].

En océanographie, par exemple, différentes mesures ont montré que la turbulence apparaissait par bouffées provenant de la formation de tourbillons. La thermocline (zone où la température de la mer décroît brusquement avec la profondeur) peut ainsi présenter des rangées régulières de structures spiralées [75]. Dans l'atmosphère, la jonction de couches d'air de températures et de vitesses différentes, peut donner lieu à des phénomènes semblables visualisés sur la figure 1.11 par la présence de nuages. Dans tous les écoulements géophysiques (ou industriels) où ils apparaissent, ces tourbillons contribuent de façon significative au transport de quantité de mouvement, de chaleur ou de polluants. Cela a motivé de très nombreuses études sur les couches de mélange stratifiées.

#### 1.1.4.4 Stabilité des écoulements de cisaillement stratifiés

Comme nous l'avons vu sur la figure 1.10, les instabilités interfaciales dans des contre-écoulements stratifiés n'apparaissent qu'au-dessus d'une valeur seuil de la vitesse. Nous allons maintenant analyser les paramètres qui déterminent ce seuil (comme les profils de vitesse et de concentration transverse). Comme nous l'avons déjà indiqué qualitativement, la valeur du seuil est déterminée par l'équilibre entre des effets antagonistes :

- L'écoulement de cisaillement déstabilise l'interface entre les fluides via le mécanisme de Kelvin-Helmholtz (entre autres).
- La stratification induite par la composante transverse de la gravité le stabilise.

De nombreuses études mathématiques et numériques ont étudié la stabilité de tels interfaces cisailés, avec différents profils transverses de densité et de vitesse, et ont montré que deux types d'instabilité pouvaient naître au niveau de l'interface.

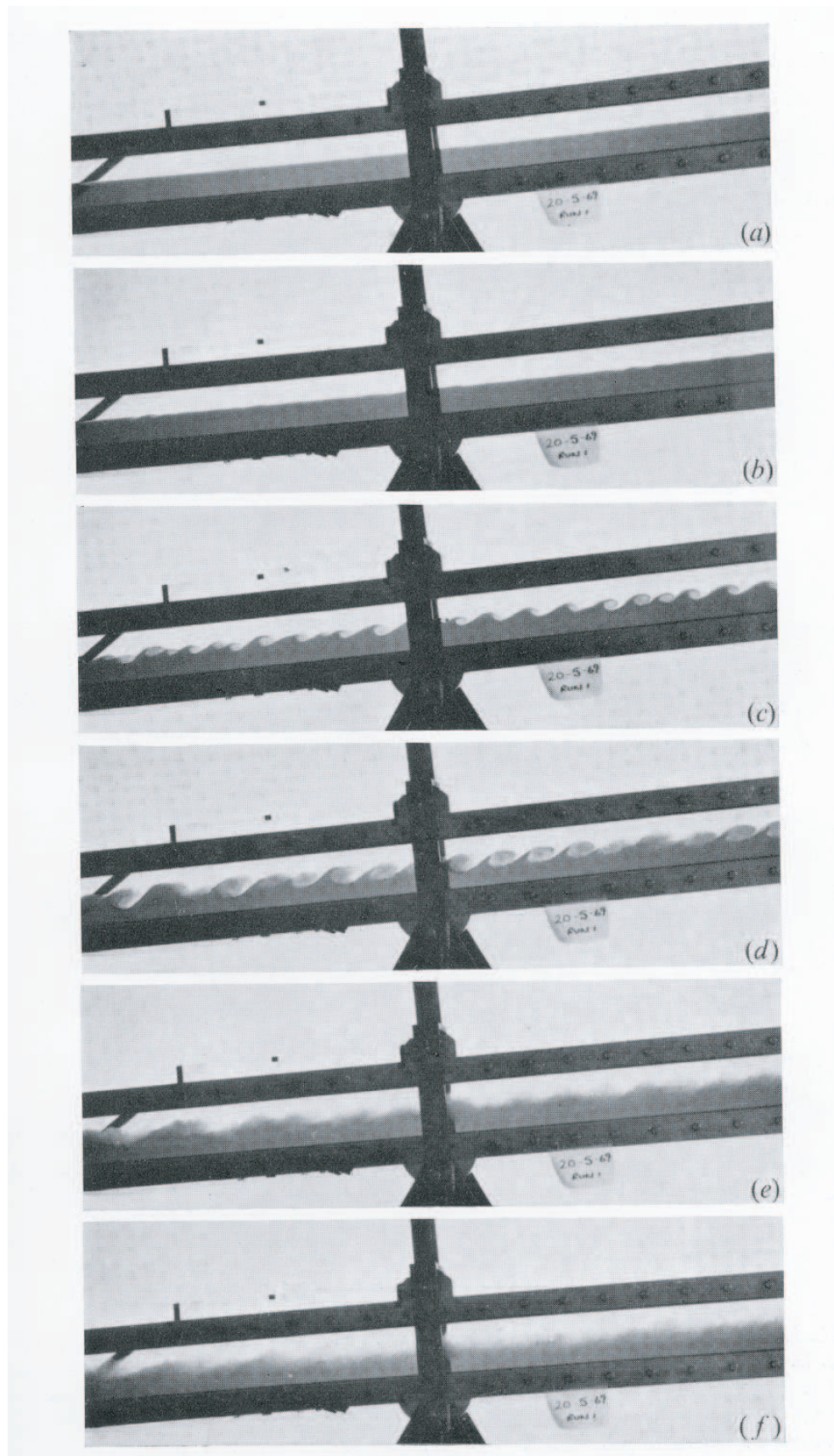


FIGURE 1.10: Croissance d'instabilités à l'interface entre une couche d'eau et une d'eau salée colorée. La différence de densité est  $\Delta = 7.95 \cdot 10^{-2} g/cc$ . La diffusion moléculaire a agi pendant 30min avec le tube à l'horizontale avant qu'il ne soit incliné à  $4.4^\circ$ . Le premier cliché est pris 3.35 sec après l'inclinaison du tube et l'intervalle de temps entre les clichés est de 0.35s (document extrait de la référence [66]).





FIGURE 1.11: Nuages en forme de vagues dans le Wyoming aux États-Unis. Ils résultent du déplacement relatif de couches d'air de vitesses différentes (Document Brooks Martner, NOAA Environmental Technology Laboratory).

La première est l'instabilité de Kelvin-Helmholtz déjà évoquée précédemment : les mécanismes de croissance et de saturation de l'amplitude des tourbillons ont été décrits dans différentes configurations de couches de mélange [33] et des diagrammes de stabilité ont été calculés aussi bien pour des conduits horizontaux [39] que faiblement inclinés [23].

Le deuxième type d'instabilité est l'onde de Holmboe [35, 55, 39, 23, 45]. Elle peut apparaître lorsque la variation de densité s'opère sur une distance plus faible que la variation de vitesse, c'est-à-dire lorsque le gradient de densité se développe à l'intérieur d'une couche de cisaillement de plus grande épaisseur. Il apparaît alors de part et d'autre de l'interface deux trains de tourbillons d'amplitude finis qui se propagent dans des directions opposées le long de l'interface et qui proviennent des couches limites de diffusion.

Dans nos expériences, nous verrons que ce sont plutôt des instabilités de Kelvin-Helmholtz que des ondes de Holmboe qui seront observées.

Examinons maintenant plus quantitativement les conditions d'apparition de ces instabilités. Le nombre sans dimension qui caractérise le rapport des effets de la stratification et du cisaillement est le nombre de Richardson  $Ri(z)$ , défini par :

$$Ri(z) = \frac{\text{stratification}}{\text{cisaillement}} = \frac{-g(\partial\rho/\partial z)}{\rho(\partial U/\partial z)^2} = \frac{N^2}{(\partial U/\partial z)^2}$$

où  $N^2(z)$  est le carré de la fréquence de Brunt-Vaisala (fréquence spontanée d'oscillation d'un petit volume de fluide déplacé transversalement), les dérivées  $\partial\rho/\partial z$  et  $\partial U/\partial z$  sont respectivement le gradient de densité et le gradient de vitesse transverses de l'écoulement parallèle initial. Le théorème de Miles (1961) [42] et Howard (1961) [36] affirme qu'un écoulement parallèle stratifié sera stable vis-à-vis de fluctuations de faible amplitude tant que  $Ri(z) > 0.25$  quel que soit le nombre de Reynolds. En revanche, dès que  $Ri(z) < 0.25$  à un endroit dans l'écoulement, des instabilités peuvent apparaître [69, 24].



Malgré l'abondance de la littérature, il existe peu d'études portant sur une géométrie de tube circulaire allongé. Afin de déterminer plus précisément la dépendance des seuils d'instabilité en fonction des paramètres de contrôle de l'expérience et des profils transverses de concentration et de vitesse, nous avons entamé une modélisation numérique de ces instabilités dont les premiers résultats seront présentés dans le dernier chapitre.

Au delà du développement de telles instabilités et de la transition vers la turbulence, un point encore plus crucial pour l'interprétation de nos expériences est la connaissance du mélange qu'elles induisent. L'explication et la quantification du mélange induit par ces instabilités de cisaillement ont fait l'objet de nombreuses études [44, 28, 56, 58, 69]. Toutefois, malgré la somme importante de travaux réalisés sur ces écoulements, le cas d'un tube incliné à un angle quelconque n'a semble-t-il pas été étudié.

## 1.2 Quelques phénomènes reliés au mélange confiné induit par gravité

Tout en ayant leurs caractéristiques spécifiques, nos expériences présentent des analogies certaines avec des phénomènes observés dans d'autres systèmes.

Un premier type d'expérience lié à certains des phénomènes que nous observons est constitué par les écoulements dont la dynamique résulte d'un équilibre entre l'inertie et la gravité : les vitesses caractéristiques varient alors en  $\sqrt{Atgd}$  (où  $At$  caractérise le contraste de densité entre deux fluides et  $d$  est une dimension caractéristique). Une bulle de grande dimension montant dans un tube vertical ou incliné en est un exemple (dans ce cas,  $At = 1$ ). Un autre exemple, extrêmement proche de notre expérience, est celui des courants de gravité d'une masse de fluide lâchée à l'intérieur d'une autre de densité différente. L'écoulement de lock-exchange de deux fluides dans un canal horizontal ou peu incliné initialement séparés par une barrière amovible est encore plus proche de notre configuration expérimentale.

Une des caractéristiques les plus intéressantes que nous observerons est l'augmentation de la vitesse des fronts de déplacement souvent observée lorsque l'inclinaison des tubes par rapport à la verticale augmente. Cela suggère une analogie avec l'accélération de la sédimentation de particules dans un tube observée quand on incline celui-ci (effet Boycott).

Enfin, le mélange macroscopiquement diffusif que nous observerons sur les profils de concentration longitudinaux résulte d'un équilibre entre l'étalement de ces profils par le profil de vitesse dans le tube et le mélange transverse par les instabilités de cisaillement. Il y a une analogie certaine avec le processus de dispersion de Taylor en régime laminaire ou turbulent qui résulte aussi d'un tel équilibre.

Nous allons maintenant discuter brièvement ces divers phénomènes.

### 1.2.1 Écoulements résultant d'un équilibre inertie-gravité

Dans cette partie nous allons nous intéresser à deux phénomènes dominés par les effets inertiels et dont la dynamique résulte d'un équilibre inertie-gravité :

- Montée d'une bulle d'air de grande dimension dans un tube vertical ou incliné (cas de deux fluides non-miscibles).
- Courants de gravité avec un étalement d'un fluide lourd à l'intérieur d'une couche de fluide plus léger sur un fond horizontal ou incliné (fluides miscibles).

Dans ces deux cas la vitesse est déterminée par un équilibre entre les termes moteurs de gradient de pression hydrostatique.

$$\Delta\rho g d$$

avec  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  ; et les termes de pression de Bernoulli (de type inertiel) qui s'écrivent :

$$(\rho_1 + \rho_2)V^2$$

En égalant ces deux termes nous obtenons **la vitesse caractéristique inertielle** :

$$V_t = \sqrt{Atgd} \quad (1.2)$$

Nous verrons que les vitesses caractéristiques des phénomènes que nous allons présenter ci-après ont bien des vitesses proportionnelles à  $V_t$ . En utilisant cette vitesse caractéristique  $V_t$ , on définit un nombre de Reynolds :

$$Re_t = \frac{V_t d}{\nu} = \frac{\sqrt{Atgd} d}{\nu} \quad (1.3)$$

### 1.2.1.1 Vitesse des bulles de grand diamètre dans un tube vertical

Les études les plus anciennes sur ce type de bulles semblent remonter à l'école allemande du début du siècle autour de L. Prandtl (H. Blasius [7] et Förster [29]). La seconde vague de travaux sur le sujet a été initiée par D. Dumitrescu [25], également étudiant de L. Prandtl, en 1943, sept ans avant l'article de R.M. Davies et S.G. Taylor [19], qui est le plus souvent référencé sur le sujet. En observant les dates de publication, il est difficile de ne pas relier ces études aux deux guerres mondiales et, plus précisément, au développement des sous-marins.

Le problème que nous regardons ici est celui d'une bulle d'air, fréquemment appelée "bulle de Taylor", montant dans un tube vertical, et dont le diamètre est voisin de celui du tube. Ce dernier est initialement rempli d'un liquide de densité  $\rho$ , de viscosité cinématique  $\nu$  et de tension de surface  $\sigma$ . La bulle monte à une vitesse constante  $V_b$  sous l'effet des forces de pression d'Archimède liées à la gravité  $g$ . On trouvera un exposé d'ensemble sur la propagation de ces bulles (particulièrement dans la limite de bulles de grande longueur) dans l'article de Fabre et Liné (1992) [27]. La photographie de la figure 1.12 montre un exemple de telles bulles. On remarque que le nez de celle-ci est quasi-sphérique et qu'il se forme un film de fluide d'épaisseur non nulle entre la bulle et la paroi du tube.

Dans son article de 1950, G.I. Taylor [19] donne un argument simple permettant d'évaluer la vitesse de la bulle : il commence par négliger la tension de surface, ce qui sera valable pour des bulles de très grand diamètre devant la longueur capillaire. Puis, il suppose le fluide parfait et

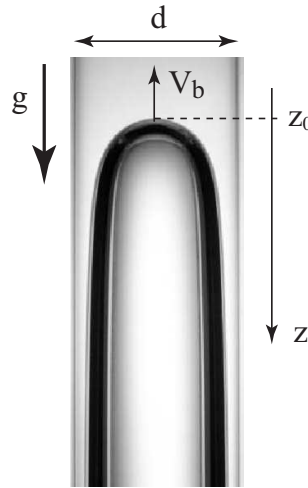


FIGURE 1.12: Photographie d'une bulle infinie se propageant dans un tube cylindrique de diamètre  $d = 0.078m$  rempli d'eau (cliché tiré de la référence [14]).

l'écoulement potentiel. En suivant ces hypothèses, la pression le long de la surface avant de la bulle doit être constante et égale à la pression interne constante  $P_0$  de l'air. Ensuite, Taylor applique le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant qui longe la surface de la bulle à partir du point de stagnation à l'avant de celle-ci ( $z = z_0$ ) (voir fig.1.12) : la somme du terme de pression de Bernoulli  $1/2\rho V(z)^2$  et du terme de pression hydrostatique  $-\rho gz$  ( $z$  est compté positivement vers le bas) doit alors être constante et égale à  $-\rho gz_0$  (car  $V(z_0) = 0$ ). En supposant que la face avant de la bulle est hémisphérique, ce qui est vérifié expérimentalement, Taylor et Davies trouvent alors que cette condition est vérifiée si la vitesse  $V_b$  de montée de la bulle vaut :

$$V_b = 2/3\sqrt{gR} = 0,47\sqrt{gD} \quad (1.4)$$

où  $R$  est le rayon de la surface sphérique de la tête de la bulle. Taylor et Davies obtiennent ainsi le résultat remarquable suivant : **la vitesse d'une bulle de Taylor est déterminée par sa partie avant et, plus précisément, elle ne dépend que de son diamètre et pas de sa longueur**. Ce dernier résultat est très bien vérifié expérimentalement : dans des tubes de grand diamètre, (15 – 20cm) des bulles en forme de calotte sphérique de quelques centimètres de hauteur montent presque à la même vitesse que des grandes bulles de plusieurs dizaines de centimètres de longueur. On remarquera que le coefficient de proportionnalité 0.47 dans l'équation 1.4 est égal à  $V_b/\sqrt{gD}$  et représente donc un *nombre de Froude* caractéristique de l'écoulement.

Quantitativement, la valeur de ce facteur trouvée par Taylor et Davies n'est d'ailleurs pas tout à fait exacte, car ces auteurs ne prennent pas en compte les effets du contre-écoulement de liquide sur les côtés. Dumitrescu [25] avait, le premier, donné la valeur exacte suivante, obtenue à partir d'un calcul théorique utilisant un développement en série de l'écoulement potentiel autour du front toujours supposé sphérique :

$$V_b^v = 0.35\sqrt{gd} \quad (1.5)$$

Cette relation est en bon accord avec les résultats expérimentaux [80] pour des tubes de grand

diamètre. Cependant, dans leur calcul, aussi bien Taylor et Davies que Dumitrescu ne prennent pas en compte l'effet de la viscosité  $\nu$  et de la tension de surface  $\sigma$ , et ces paramètres auront une influence non négligeable pour des tubes de faible diamètre. E.E. Zukoski, en 1966, a analysé expérimentalement en détail leur influence sur la dynamique des bulles [80] et obtenu les résultats suivants :

- La tension de surface n'influence pas la vitesse pour des nombres de Bond  $Bo > 10$  ( $Bo = \frac{\text{gravité}}{\text{capillarité}} = \Delta\rho g R^2 / \sigma$ ).
- La viscosité ne modifie pas non plus la vitesse pour des nombres de Reynolds  $Re > 10$  ( $Re = \rho_l g R^2 / \mu_l$  où l'indice  $l$  réfère au liquide).

On trouvera des données expérimentales et théoriques plus quantitatives sur la variation de la vitesse des bulles en fonction des nombres de Reynolds et de Bond dans les études de Bendiksen [6] et, plus récemment, de Joseph [70].

Dans nos expériences, le nombre de Reynolds est toujours supérieur à 10 et le nombre de Bond est infini car nous travaillons avec des fluides miscibles sans tension de surface. D'autre part les fronts de déplacement que nous observons ont fréquemment des tailles de l'ordre de grandeur du diamètre du tube. Dans les cas où nous avons de part et d'autre de l'interface les deux fluides de départ presque purs, nous pouvons donc espérer pouvoir appliquer - au moins à un coefficient de proportionnalité près - les résultats précédents ; il faudra cependant introduire un facteur supplémentaire  $\sqrt{At}$  tenant compte du fait que l'accélération effective  $g^* = gAt$  pour nos deux fluides ( $At \neq 1$ ) alors que  $g^* = g$  pour l'eau et l'air ( $At = 1$ ).

### 1.2.1.2 Vitesse des bulles de grand diamètre dans un tube incliné

Dans un tube incliné, la géométrie des bulles est modifiée et, en particulier, la symétrie de révolution par rapport à l'axe du tube est rompue. La prédiction théorique de la vitesse de la bulle devient donc plus complexe. Parmi les études expérimentales les plus citées de la dynamique des bulles de Taylor en tube incliné de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , on trouve celles de Zukoski [80], et de Weber *et al* [72]. La figure 1.13 extraite de la référence [80] montre ainsi la variation expérimentale de la vitesse normalisée  $V_b / \sqrt{gR}$  d'une bulle de Taylor en fonction de l'inclinaison du tube pour un nombre de Bond très élevé ( $Bo = 1000$ ) pour lequel la tension de surface est négligeable. Nous observons que :

- la vitesse atteint un maximum autour de  $55^\circ$  et elle varie très peu pour des angles voisins ;
- la relation 1.5 est bien vérifiée lorsque le tube est vertical ;
- pour le tube horizontal, la vitesse n'est pas nulle et est même supérieure à la vitesse en tube vertical.

Le problème d'une bulle en tube horizontal a été discuté théoriquement par Benjamin [4], toujours en supposant que la viscosité et la tension de surface sont négligeables. Pratiquement, une bulle de taille finie finirait par devenir immobile, même si on lui impose une vitesse initiale et nous remplaçons ce problème par celui d'un tube horizontal initialement plein d'eau et que nous laissons

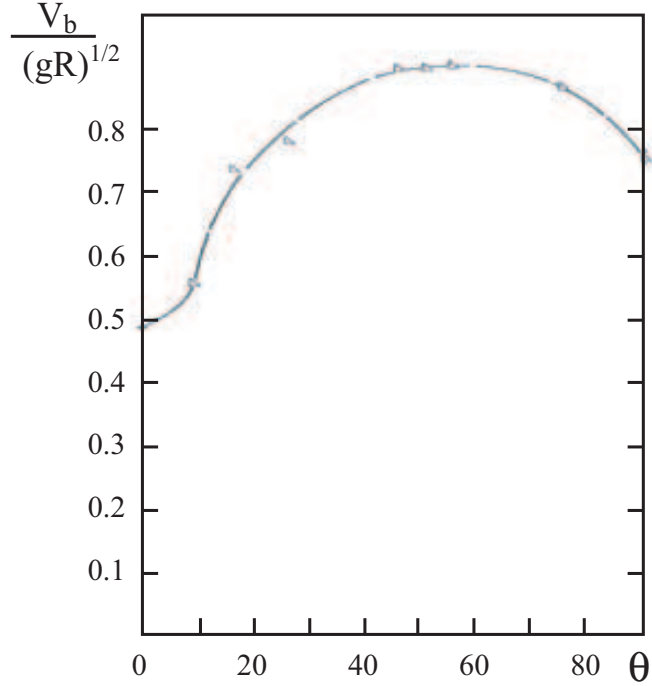


FIGURE 1.13: Variation de la vitesse normalisée d'une bulle de Taylor en fonction de l'inclinaison  $\theta$  du tube par rapport à la verticale (nombre de Bond :  $Bo = 1000$ , diamètre du tube :  $17.8cm$ ). Figure extraite de la référence [80].

se vider par une extrémité alors que l'autre reste fermée. Au fur et à mesure que le tube se vide, le front avant de la "bulle" qui se forme se propage jusqu'au bout du tube. Sous ces hypothèses, Benjamin obtient l'expression suivante de la vitesse de ce front :

$$V_b^h = 0.542\sqrt{gd} = 0.766\sqrt{gR} \quad (1.6)$$

La valeur de vitesse ainsi obtenue est en bon accord avec les résultats expérimentaux de la figure 1.13. Si on connaît bien expérimentalement les mouvements des bulles dans un tube incliné, on ne dispose pas à l'heure actuelle de théorie complète de ces mouvements. Dans une approche semi-empirique, Bendiksen [5] a supposé en 1984 que les effets qui induisent le mouvement à l'horizontale et à la verticale sont indépendants : il a proposé d'écrire la vitesse d'une bulle en tube incliné comme une combinaison des vitesses en tubes verticaux et horizontaux. Nous obtenons alors une relation du type :

$$V_b(\theta) = V_b^v \cos \theta + V_b^h \sin \theta \quad (1.7)$$

Où  $\theta$  est toujours l'angle du tube avec la verticale. D'où :

$$V_b(\theta) = \sqrt{gd}(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \quad (1.8)$$

Il est ainsi possible d'ajuster assez correctement cette expression avec les variations représentées dans la figure 1.13. Cette loi empirique a été améliorée par Weber *et al.* en 1986 [72].

Ces résultats peuvent paraître surprenants compte tenu du fait que la composante de la gravité  $g \cos \theta$  parallèle à l'axe du tube diminue lorsque l'inclinaison du tube augmente et s'annule pour  $\theta = \pi/2$ . Or, les forces d'Archimède qui semblent devoir être le moteur du mouvement de ces bulles, sont proportionnelles à  $g \cos \theta$  : on attendrait donc une diminution sensible de la vitesse  $V_b$  lorsque  $\theta$  augmente alors que  $V_b$  reste toujours de l'ordre de  $\sqrt{gR}$  et passe même par un maximum avant de diminuer. Pour comprendre ce résultat, il faut noter que les relations du type  $V_b \propto \sqrt{gR}$  ne reflètent pas un bilan d'énergie ou un équilibre de forces sur l'ensemble de la bulle : elles reflètent un équilibre de pression local sur la partie avant de la bulle ou, encore, une conservation de l'énergie (cinétique + potentielle) le long de lignes de courant suivant cette face avant. Les variations de vitesse (entre un point de stagnation et le côté de la bulle) sont toujours de l'ordre de  $\rho V_b^2$  et les variations d'énergie potentielle sont toujours de l'ordre de  $\rho g R$  (la longueur des trajets reste de l'ordre de  $R$  que le tube soit vertical ou horizontal). La vitesse  $V_b$  est donc toujours de l'ordre de  $\sqrt{gR}$ . Par contre, le bilan d'énergie global varie fortement avec l'angle : l'énergie potentielle apportée par le déplacement de la bulle est, par unité de temps, de l'ordre de  $dE_p/dt = \rho g \mathcal{V} \cos \theta V_b$  où  $\mathcal{V}$  est le volume de la bulle. Cette énergie est dissipée dans le sillage turbulent en arrière de la bulle et dans l'écoulement rapide du film liquide sur le côté. Lorsque l'angle  $\theta$  croît,  $dE_p/dt$  diminue ainsi que l'énergie dissipée dans le sillage qui devient visuellement beaucoup plus calme. On retrouvera le même paradoxe apparent avec le même type d'explication dans nos expériences.

### 1.2.1.3 Courants de gravité

Le terme "courants de gravité" est souvent utilisé pour décrire l'écoulement, sous l'effet de la gravité, d'un fluide dense au fond d'une couche horizontale ou inclinée de fluide moins dense. Le front avant de déplacement a généralement une très forte pente par rapport au fond. Ces écoulements sont très fréquents en géophysique, en océanographie et en météorologie [53] : les forces d'Archimède (aussi appelées de flottabilité) sont à l'origine de ces phénomènes qui apparaissent lorsqu'on met en présence des masses de fluides de densités différentes.

Donnons tout d'abord quelques exemples de tels écoulements. Dans l'atmosphère par exemple, l'arrivée d'une masse d'air froide et dense sous forme de courant de gravité est parfois rendue visible par la présence en suspension de poussières et de particules comme dans la figure. Les tempêtes de sable (appelées *Haboob* au Soudan) peuvent résulter d'effets similaires (le fluide "lourd" est alors l'air chargé de sable). Les nuages tels que ceux présentés sur la figure 1.14 peuvent atteindre 1000 m de hauteur et une vitesse de 90 km/h.

En milieu océanique, les courants de gravité résultent de la mise en présence de masses d'eau de température et/ou de salinités différentes. Par exemple, au niveau du détroit de Gibraltar, la mer Méditerranée déverse des eaux chaudes mais fortement salées dans l'Océan Atlantique [3]. La plus forte salinité de la mer Méditerranée (et donc sa densité plus élevée de 1028.95 g/l) résulte de la forte évaporation dans cette mer fermée et chaude, qui est supérieure à l'apport en eau douce par les précipitations et les rivières. Cette eau pénètre en profondeur les eaux plus froides mais moins salées de l'Océan Atlantique.

Les configurations de courants de gravité peuvent se diviser en deux catégories : celles où la source est de volume fixe comme dans les expériences de "lock-exchange" et celles où la source



FIGURE 1.14: Vues du front en mouvement d'une masse d'air dense chargée de sable - en haut à droite : schéma de la mise en suspension des particules.

est continue. Dans les expériences de "lock-exchange", deux fluides de densités différentes sont initialement situés dans un canal horizontal (ou peu incliné) et séparés par une "porte" verticale qui est ensuite retirée : cet écoulement simule par exemple la propagation d'eau douce au-dessus d'eau salée lors de l'ouverture d'une écluse à l'embouchure d'une rivière. Cette méthode permet de générer d'une manière simple un front de déplacement lorsque chaque fluide pénètre à l'intérieur de l'autre fluide dont la densité est différente (voir figure 1.17). De fait, notre dispositif expérimental n'est autre qu'un dispositif de "lock-exchange", dont la caractéristique est d'utiliser un tube dont le diamètre est faible devant sa longueur.

Les courants de gravité sont limités à l'avant par un front généralement assez raide ; en arrière de celui-ci, on trouve un bourrelet dont la hauteur se réduit ensuite lorsqu'on s'éloigne du front. La figure 1.15 montre l'évolution du profil du front (et de la forme du bourrelet) pour une série de courants de gravité observés avec deux fluides de différence de température croissante d'une très faible valeur dans le cas (a) jusqu'à  $35^\circ$  dans le cas (f) qui correspond à une différence de densité de 1%. Augmenter le contraste de densité a pour conséquence d'augmenter le nombre de Reynolds, ce qui modifie considérablement la forme du front. Pour de faibles nombres de Reynolds ((a) :  $Re < 10$ ), les forces visqueuses dominent les forces de flottabilité, le front est petit et il y a peu de mélange. Lorsque le nombre de Reynolds augmente ((f) :  $Re > 1000$ ), la taille du front augmente également ; des instabilités de cisaillement apparaissent en arrière et induisent du mélange avec le fluide ambiant.

La vitesse d'un front de courant de gravité a été prédite théoriquement, en particulier par Benjamin [4] puis par Shin *et al.* [52] en supposant des fluides parfait en écoulement non turbulents et dans une géométrie de canal rectangulaire horizontal (voir schéma dans la figure 1.16). Le

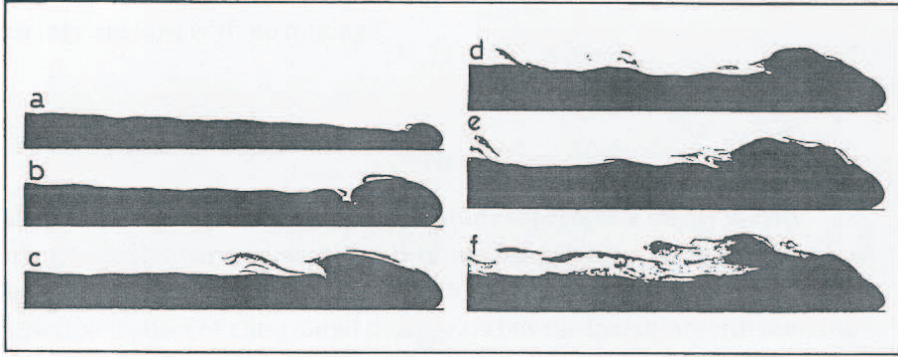


FIGURE 1.15: Shadow pictures montrant le profil d'un front d'un courant de gravité. La différence de température augmente entre (a) et (f). Cliché tiré la référence [50].

courant s'étend sur toute la longueur du canal et a une structure moyenne bidimensionnelle, avec un contre-courant dans le fluide déplacé. Pour arriver à ce résultat, Benjamin applique les équations de continuité et de Bernoulli le long de l'interface entre les deux couches de fluides. Il montre en particulier que, en supposant la conservation de l'énergie, le seul écoulement stable est celui qui se déplace avec une épaisseur  $h = 1/2H$  où  $H$  est la hauteur totale de liquide dans le canal. La vitesse  $U$  du front vaut alors :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2Atgh} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{AtgH} \sim 0.7 \sqrt{AtgH} \quad (1.9)$$

Une expression équivalente est obtenue en introduisant le nombre de Froude :

$$F_H = \frac{U}{\sqrt{2gAtH}} \quad (1.10)$$

D'après la théorie de Benjamin, on doit avoir  $F_H = 1/2$ . Les prédictions de cette théorie ont été effectivement vérifiées expérimentalement par Shin *et al.*, tant au niveau de la hauteur  $h = 1/2H$  de la couche de fluide déplaçant (figure 1.17a) qu'au niveau de la vitesse : on observe en effet sur la figure 1.17b un bon accord entre les valeurs théoriques (en noir) et les valeurs expérimentales correspondant à la figure 1.17a (en blanc). De plus, et malgré les fortes différences entre le système que nous étudions et la configuration décrite par la théorie, nous retrouverons la même valeur numérique dans notre expérience. En conclusion, en dépit du mélange, clairement visible sur la figure 1.17a, et de la dissipation due à la turbulence et aux contraintes visqueuses, **la théorie de Benjamin qui suppose la conservation de l'énergie semble décrire les expériences de façon satisfaisante**. Comme pour la bulle de Taylor, ce résultat peut indiquer que la vitesse de propagation du courant de gravité est déterminée par des équilibres de pression sur la partie avant du front, et qu'une approximation de fluide parfait suffit à la déterminer, indépendamment des processus dissipatifs en aval.

Des expériences similaires ont été réalisées (Barr, 1967) en utilisant soit la température, soit la concentration en sel pour créer une différence de densité. Les valeurs de  $F_H$  déterminées par les deux techniques sont comparables et varient entre 0.42 pour  $Re = 200$  et 0.46 pour  $Re \geq 1000$  (au lieu de 0.5 pour la théorie de Benjamin).



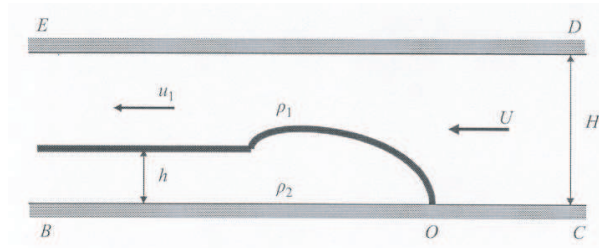


FIGURE 1.16: Schéma d'un courant de gravité dans son référentiel.

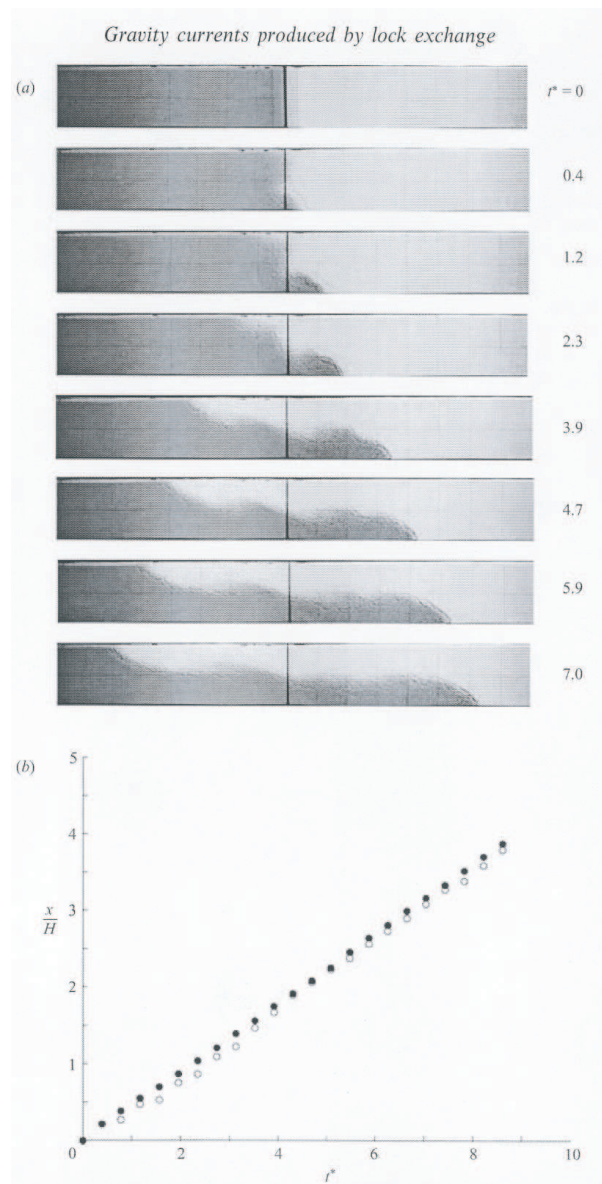


FIGURE 1.17: Courant de gravité produit par lock-exchange dans un canal rigide, le contraste de densité est  $At = 3.5 \cdot 10^{-2}$ . - (a) Séquences d'images d'ombroscopie - (b) variation avec le temps  $t$  de la position  $x$  du front adimensionnés respectivement par le temps caractéristique  $\sqrt{2Atg/H}$  et la taille  $H$  du canal (document extrait de la référence [52]).

Si les mesures de courant de gravité donnent un accord satisfaisant avec la théorie de Benjamin, Shin *et al.* [52] remarquent que la valeur de la vitesse n'est pas un test assez sensible de la présence de dissipation d'énergie. Ceci est illustré par la figure 1.18, qui montre les variations théoriques de l'énergie et de la vitesse normalisées en fonction de la hauteur : on observe que le nombre de Froude  $F_h$  pour lequel la dissipation est maximale ( $\Delta\hat{E}$  max.) est  $F_H = 0.527$  alors que  $F_h = 0.5$  quand l'énergie est conservée. Il sera très difficile de détecter expérimentalement une différence aussi faible. Par contre, le courant de fluide déplaçant correspondant à la dissipation maximale a une hauteur  $h/H = 0.347$  contre  $h/H = 0.5$  quand l'énergie est conservée : une telle différence est beaucoup plus facile à détecter. Il faut d'ailleurs noter que les courants de gravité qui occupent moins de la moitié du canal ne conservent pas leur énergie. Finalement, après une étude détaillée des hauteurs de courants de gravité produits par "lock exchange", Shin *et al.* ont conclu (a) que le taux d'énergie dissipée reste faible malgré la présence de mélange et (b) que la réduction de vitesse par rapport à celle d'un courant conservatif n'est que de quelques pour cent.

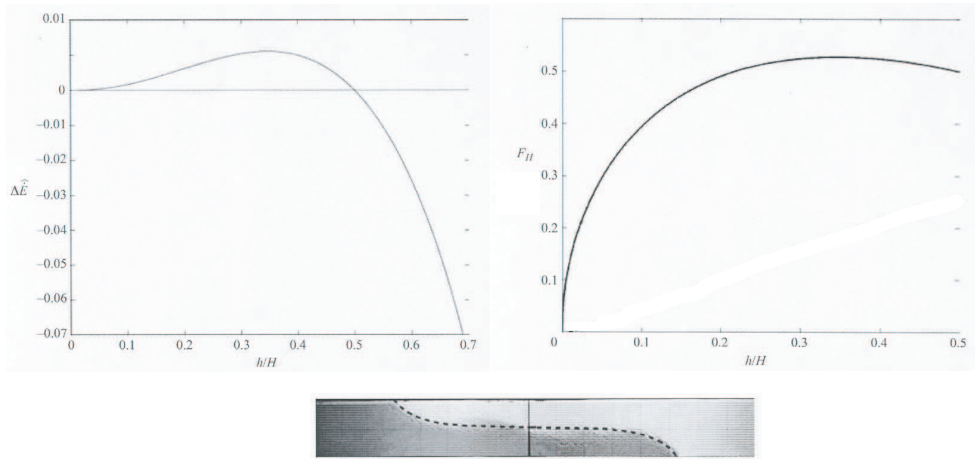


FIGURE 1.18: A gauche : flux d'énergie adimensionné  $\Delta\hat{E}$  tracé en fonction de la hauteur du courant adimensionné  $h/H$ . A droite : nombre de Froude  $F_H$  tracé en fonction de la hauteur du courant adimensionné  $h/H$ . En bas : expérience de "lock-exchange" à laquelle à été superposée la forme du front de la solution de Benjamin [4] en écoulement potentiel (trait en tirets).

Ces résultats ont été complétés par une analyse de l'évolution temporelle des courants de gravité réalisée par Huppert et Simpson [37] qui se base sur des résultats expérimentaux de Britter et Simpson [10] et de Simpson et Britter [54]. Ces auteurs ont complété l'analyse de Benjamin en identifiant trois phases distinctes des écoulements de lock-exchange dans un canal horizontal. Une première phase de "chute" est caractérisée par un courant de gravité se propageant avec une vitesse de front constante. Cette phase est suivie par une phase inertielle self-similaire, dans laquelle les forces de flottabilité sont équilibrées par les forces inertielles : on a alors une diminution la vitesse de front au cours du temps [49]. Dans la dernière phase, les forces de flottabilité sont équilibrées par des forces visqueuses. Seule la phase initiale de vitesse constante est, en fait, correctement décrite par la théorie de Benjamin supposant la conservation de l'énergie.

Un paramètre particulièrement intéressant est l'inclinaison du fond sur lequel s'écoulent ces courants de gravité (en liaison avec nos expériences dans lesquelles l'inclinaison du tube varie entre la verticale et l'horizontale). Britter et Linden ont ainsi étudié [9] le mouvement sur un

fond incliné et sans confinement d'un courant de gravité produit par l'introduction d'une quantité finie de fluide dense. Pour des angles d'inclinaison  $\alpha$  faibles du fond par rapport à l'horizontale ( $\alpha = \pi/2 - \theta \leq 0.5^\circ$ ), la vitesse de front diminue avec la distance à la source ; au contraire, pour des angles  $\alpha$  plus élevés, la force de gravité finit par équilibrer les effets de la friction et la vitesse du front devient constante. Ensuite, sur une très large gamme de valeurs de  $\alpha$ , la vitesse de front adimensionnée par la racine cubique du flux  $(g'_0 Q)^{1/3}$  est indépendante de  $\alpha$  et vaut  $1.5 \pm 0.2$  pour  $5^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Enfin, la vitesse du front est plus faible que la vitesse moyenne du fluide qui le suit : la taille du bourrelet situé en aval du front augmente donc au cours du temps. Un autre facteur de cette croissance du bourrelet est le mélange avec le milieu ambiant qui devient plus fort quand  $\alpha$  augmente.

Ce mélange en aval du front a des implications importantes sur la dynamique des écoulements dans notre géométrie expérimentale. On note particulièrement sur ce sujet l'étude par Ellison et Turner [26] de l'écoulement en arrière du front d'un courant dense sur une pente, généré par une source continue. Lorsqu'il apparaît des instabilités à l'interface d'un tel courant, celles-ci entraînent le fluide ambiant : il y a alors mélange entre les masses d'eau de densités différentes, l'épaisseur du courant augmente et la dynamique du courant est modifiée.

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel sur une pente d'inclinaison  $\alpha$ , Ellison et Turner [26] montrent que la vitesse moyenne  $U$  le long de la pente est indépendante de la distance  $x$  à la source. Par contre, l'épaisseur du courant  $h$  croît linéairement avec la distance  $x$  par entraînement du fluide ambiant. Dans le même temps, l'écart de densité entre le courant et ce fluide ambiant diminue et vient compenser l'effet de la variation de  $h$ . Ces mesures ont également permis d'évaluer le taux d'entraînement du fluide extérieur dans l'écoulement et d'analyser sa variation en fonction du nombre de Richardson défini plus haut.

### 1.2.2 Effet Boycott

Lors des expériences en tube incliné, nous verrons que l'apparition d'un gradient de la concentration relative transverse des deux fluides accélère leur écoulement et augmente la vitesse du front. Un phénomène similaire est observé lors de la sédimentation d'une suspension de particules dans un tube incliné : c'est l'*effet Boycott*, du nom de celui qui a découvert le phénomène en 1920 [8]. Cet effet est apparent dans l'expérience de la figure 1.19 : nous observons que la sédimentation en tube incliné est beaucoup plus rapide qu'en tube vertical. A cause de l'inclinaison du tube, la sédimentation verticale initiale des particules à la vitesse  $V_t$  les entraîne vers la partie inférieure de la section du tube (figure 1.20(a)) : il apparaît alors un gradient horizontal de concentration de particules (et donc de densité moyenne du fluide) dans cette section. Cette différence de densité induit des écoulements séparés en sens inverse de la suspension concentrée et du fluide clair, respectivement dans les parties haute et basse de la section (les vitesses sont notées  $V_{sh}$  et  $V_{sb}$  sur la figure). La sédimentation est alors beaucoup plus rapide que dans un tube vertical où n'apparaît pas de gradient transverse de concentration : les particules sont alors en effet freinées par le contre-écoulement du fluide. Dans les rues piétonnes, il est de la même manière préférable de séparer les flux des "particules humaines" en deux files se déplaçant en sens opposé afin d'améliorer la circulation.

L'effet Boycott a été étudié théoriquement, en particulier par Acrivos et Herbolzheimer [1],



FIGURE 1.19: Effet Boycott lors de la sédimentation d'une suspension de particules dans un tube incliné. A gauche le tube est vertical, à droite il est incliné à  $30^\circ$  par rapport à la verticale. Les photos ont été prises après le même laps de temps suivant la fin de l'agitation homogénéisant la suspension (photos extraites de la référence [31]).

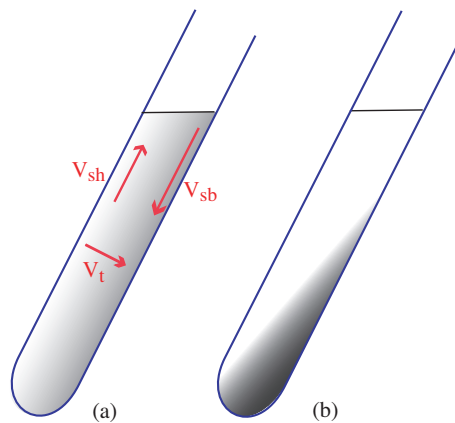


FIGURE 1.20: Schéma de la sédimentation de particules dans un tube incliné. (a) Début de la sédimentation, avec ségrégation et différenciation des vitesses à l'intérieur de la section du tube. (b) Configuration finale (schéma extrait de la référence [31]).

qui en ont présenté une description théorique détaillée et commentent également de nombreuses références antérieures. Un article ultérieur [32] a étudié théoriquement et expérimentalement la formation et la croissance d'instabilités à l'interface entre la suspension et le fluide clair, pendant une sédimentation en canal incliné.

### 1.2.3 Dispersion de Taylor

Au cours de cette étude, nous rencontrerons des phénomènes d'étalement macroscopiquement diffusif de la zone de mélange : cela signifie que la concentration relative  $C$  d'un des fluides moyennée sur la section du tube vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

où  $x$  est la coordonnée parallèle à la longueur du tube et  $D$  le coefficient de diffusion macroscopique qui sera, dans nos expériences, considérablement supérieur au coefficient de diffusion moléculaire  $D_m$ . Nous verrons que cet étalement diffusif résulte d'un équilibre entre l'étalement convectif de cette zone et le mélange transverse dans la section du tube induit en particulier par les instabilités de cisaillement. Le processus dit de "dispersion de Taylor" d'un traceur (colorant, sel...) injecté dans un écoulement forcé dans un tube (ou entre deux plaques) est en fait très voisin : l'étalement de la tache de traceur au fur et à mesure qu'il progresse dans le tube résulte, lui aussi, d'un équilibre entre un étalement convectif par le profil de vitesse dans la section du tube et un transport transverse dans celle-ci par la diffusion moléculaire transverse (écoulement laminaire) ou par des fluctuations turbulentes (écoulement turbulent). Nous allons maintenant analyser brièvement ces deux processus décrits pour la première fois par Taylor en 1953 [60] puis en 1954 [62] par des approches similaires.

#### 1.2.3.1 Dispersion de Taylor dans un écoulement laminaire

La dispersion d'une tache de colorant dans un écoulement de Poiseuille schématisé figure 1.21a, ou dispersion de Taylor, a été simulée numériquement dans la figure 1.21b-d, pour un écoulement laminaire à deux dimensions entre deux plans parallèles. On appelle  $V_0$  la vitesse caractéristique sur l'axe  $Ox$ , et  $a$  la demi-distance entre plaques.

Déposons à l'instant initial  $t = 0$  une ligne de colorant transverse à l'écoulement et de concentration constante : en l'absence de diffusion moléculaire, elle serait rapidement étirée en une parabole par le profil de vitesse de Poiseuille qui varie de 0 à  $U_0$  entre les parois et l'axe. Au bout d'un temps  $t$ , le traceur serait donc réparti sur une distance  $\Delta x$  augmentant linéairement avec le temps :

$$\Delta x = U_0 t \tag{1.11}$$

Vu de loin, on aurait alors l'impression que la tache qui s'étale est en train de se mélanger. Cependant, en l'absence de diffusion moléculaire ou aux temps courts (figure 1.21(b)) il suffirait d'inverser le sens de l'écoulement pour revenir à l'état initial : il n'y pas eu de vrai mélange.

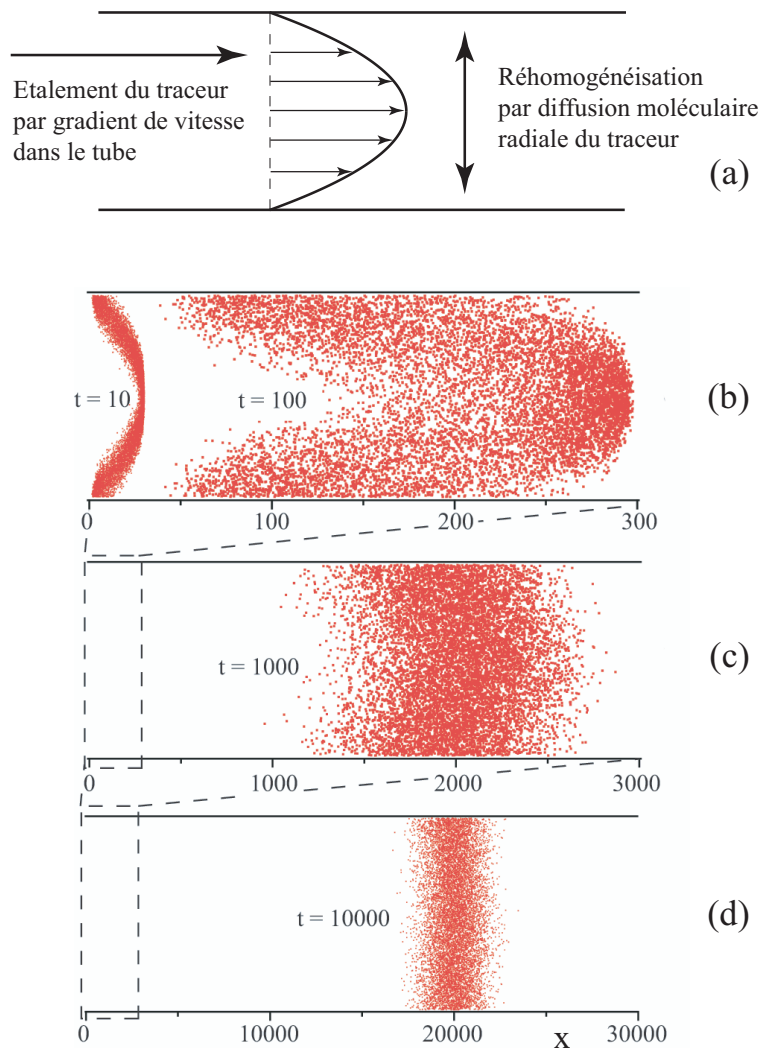


FIGURE 1.21: Simulation numérique de la dispersion d'une ligne de colorant dans un écoulement laminaire entre deux plans parallèles. Le colorant est initialement ( $t = 0$ ) disposé uniformément entre les deux plaques suivant une ligne ( $x = 0$ ) transverse à l'écoulement. Le processus est observé à des temps croissants, de  $t = 10$  à  $t = 10000$ . Notez que l'échelle des distances le long de l'écoulement augmente d'un facteur 10 entre les figures (b) et (c), puis entre les figures (c) et (d) (les unités sont arbitraires). Les figures (b, c, d) ont été extraites de la référence [31].

Aux temps longs, la diffusion moléculaire perpendiculaire à l'axe vient limiter cet effet d'étirement en réhomogénéisant transversalement la répartition du traceur (figure 1.21(c)).

Le temps caractéristique  $\tau$  nécessaire pour diffuser sur la demi-distance  $a$  entre les plaques (ou sur le rayon  $a$  du tube) est :

$$\tau = a^2/D_m \quad (1.12)$$

$\tau$  est l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour passer du régime transitoire précédent à un régime statistiquement stationnaire de dispersion (régime de Taylor) où la distribution transverse de la concentration aura été homogénéisée (figure 1.21(d)) et où la largeur  $\Delta x$  de la tache de traceur augmente comme la racine carrée du temps et vérifie :

$$\Delta x^2 = 2D_{Taylor}t \quad (1.13)$$

Il s'agit alors d'un vrai mélange irréversible de la tache de traceur avec le fluide en écoulement.

Physiquement,  $\tau$  représente (à un facteur constant près) l'ordre de grandeur du temps de transition entre les régimes d'étalement caractérisés par les équations (1.11) et (1.13). On peut donc supposer que ces deux équations sont vérifiées simultanément pour  $t = \tau$  (argument dit de "cross over"). On a alors :  $D_{Taylor} \sim \Delta x^2/\tau = U_0^2\tau$ , d'où finalement :

$$D_{Taylor} \sim \frac{U_0^2 a^2}{D_m} \quad (1.14)$$

Le calcul complet de Taylor donne un coefficient de proportionnalité 1/55 dans le cas de deux plans parallèles et 1/48 pour un tube circulaire (dans les deux cas, on a remplacé la vitesse maximum  $U_0$  par la vitesse moyenne  $U$  plus facile à déterminer). De plus, la limite de  $D$  aux très faibles vitesses n'est pas 0 mais le coefficient de diffusion moléculaire  $D_m$  qui doit donc être introduit comme terme additif.

On ne peut, par ailleurs, atteindre le régime de dispersion de Taylor que si le tube a une longueur  $L$  suffisante pour que le traceur puisse diffuser sur le rayon du tube pendant la durée du parcours le long de celui-ci. Soit :

$$\frac{L}{U} \gg \frac{a^2}{D_m} \quad (1.15)$$

la valeur effective pour un tube est de l'ordre de  $11a^2/D_m$ . Notons que le coefficient de diffusion moléculaire intervient au dénominateur et que paradoxalement augmenter  $D_m$  diminue donc la dispersion : de fait, la diffusion radiale homogénéise la répartition du traceur et limite les effets des gradients de vitesse.

### 1.2.3.2 Dispersion de Taylor dans un écoulement turbulent

Pour un écoulement turbulent développé, le profil de vitesse sera cette fois-ci logarithmique près des parois. L'étalement du profil de concentration sous le seul effet des gradients de vitesse restera

cependant linéaire avec le temps comme dans le cas laminaire. Par contre, cette fois-ci, le mécanisme de mélange transverse n'est plus la diffusion moléculaire mais les fluctuations turbulentes du champ de vitesse qui seront également aléatoires.

Dans ce cas, Taylor [62] a montré que le coefficient de dispersion peut s'écrire sous la forme :

$$D_{Taylor}^{turb} = av^* \quad (1.16)$$

où  $v^*$  est l'échelle de vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes. Enfin, comparons, pour une vitesse moyenne  $U$  donnée, les valeurs des deux coefficients de diffusion laminaire et turbulent ; leur rapport vaut :

$$\frac{D_{Taylor}^{turb}}{D_{Taylor}^{lam}} \propto \frac{v^* D_m}{U U a} = \frac{v^*}{U} \frac{1}{Pe} \quad (1.17)$$

$Pe$  est le nombre de Peclet, qui vaut ici de l'ordre de 1000 fois le nombre de Reynolds, qui est lui-même  $\gg 1$ . D'autre part, le rapport  $\frac{v^*}{U}$  est, lui aussi, inférieur à 1, ce qui entraîne que :

$$D_{Taylor}^{turb} \ll D_{Taylor}^{lam} \quad (1.18)$$

A vitesse moyenne donnée, le coefficient de diffusion est donc plus faible pour un écoulement turbulent que pour un écoulement laminaire. Cela reflète le fait que le transport transverse par les fluctuations de vitesse dans un écoulement turbulent est beaucoup plus efficace que par la diffusion moléculaire dans un écoulement laminaire. L'homogénéisation *transverse* est donc plus rapide et le coefficient de diffusion *longitudinal* résultant plus faible comme l'indique l'inégalité (1.18). Nous rencontrerons des effets équivalents dans notre expérience : plus le mélange transverse sera efficace, plus le coefficient de diffusion macroscopique sera faible.

### 1.3 Conclusion

Nous avons vu dans le présent chapitre que le mélange induit par gravité dans un tube vertical ou incliné ne faisait pas simplement intervenir une interpénétration sous l'effet des forces de flottabilité (ou d'Archimède) parallèles à l'axe du tube, mais également que le mélange transverse par des instabilités de cisaillement (atténuées à des degrés divers suivant l'inclinaison par les effets de ségrégation associés à la composante transverse de la gravité) jouait un rôle crucial. Dans cette perspective, nous avons vu que, si assez peu d'études portent sur le problème spécifique qui nous intéresse, il présente des points communs avec plusieurs phénomènes qui, eux, font l'objet d'une littérature abondante (courants de gravité, bulle de Taylor, instabilités de Rayleigh-Taylor et de Kelvin-Helmholtz, dispersion de Taylor). Dans le chapitre suivant, nous allons présenter quelques résultats obtenus dans notre configuration d'étude et les discuter qualitativement dans la perspective des mécanismes et des analogies que nous venons d'évoquer.



## Chapitre 2

# Présentation qualitative des observations

Le but du présent chapitre est de donner une première vue, essentiellement qualitative, de nos techniques expérimentales et des principales caractéristiques qualitatives des écoulements que nous avons observés. Plus précisément, nous montrerons que des observations qualitatives de photos et de vidéos de l'écoulement permettent d'identifier plusieurs régimes d'écoulement, ainsi que leur dépendance en fonction de paramètres tels que le contraste de densité  $At$  entre les fluides utilisés et l'inclinaison  $\theta$  du tube par rapport à la verticale.

### 2.1 Dispositif expérimental de visualisation

Les expériences sont réalisées dans un tube transparent d'une longueur de 3,5 mètres et d'un diamètre de 20 millimètres que l'on peut incliner d'un angle  $\theta$  variant de 0 à 90° par rapport à la verticale (figure 2.1). On place dans la partie supérieure du tube le fluide lourd transparent (de l'eau salée) et dans la partie inférieure le fluide léger coloré (le colorant utilisé dépend de la méthode de visualisation). Ces deux fluides miscibles sont initialement en configuration instable et séparés par une vanne que l'on ouvre à l'instant  $t = 0$ .

Nous utilisons deux méthodes de visualisation différentes : la première est présentée sur le tube de gauche de la figure 2.1, et consiste à colorer le fluide léger avec un colorant noir et à éclairer le tube par l'arrière. L'analyse qualitative des écoulements est réalisée à l'aide d'une caméra vidéo filmant une portion de tube de 30cm de longueur, située au dessus de la vanne. Les analyses quantitatives (mesures de la concentration relative des deux fluides) sont réalisées sur des images obtenues en même temps par une camera digitale mais avec une cadence d'acquisition beaucoup plus faible (4 images/s au plus) que la vidéo (25 images/s).

Dans l'autre méthode, présentée sur l'image de droite, nous mettons de la fluoresceine en solution dans le fluide léger, le fluide lourd étant transparent. Nous éclairons une section de 70cm de long du plan diamétral vertical de la partie supérieure par un plan lumineux, obtenu à l'aide d'un laser vert (longueur d'onde  $\lambda = 532\text{ nm}$ ) et d'une optique d'élargissement. Le fluide léger situé dans le plan laser fluoresce et la mesure de l'intensité lumineuse acquise par la caméra digitale permet de déterminer la concentration locale de fluoresceine après une calibration préalable. Nous obtenons ainsi des images de fraction locale de chaque fluide dans le plan diamétral.

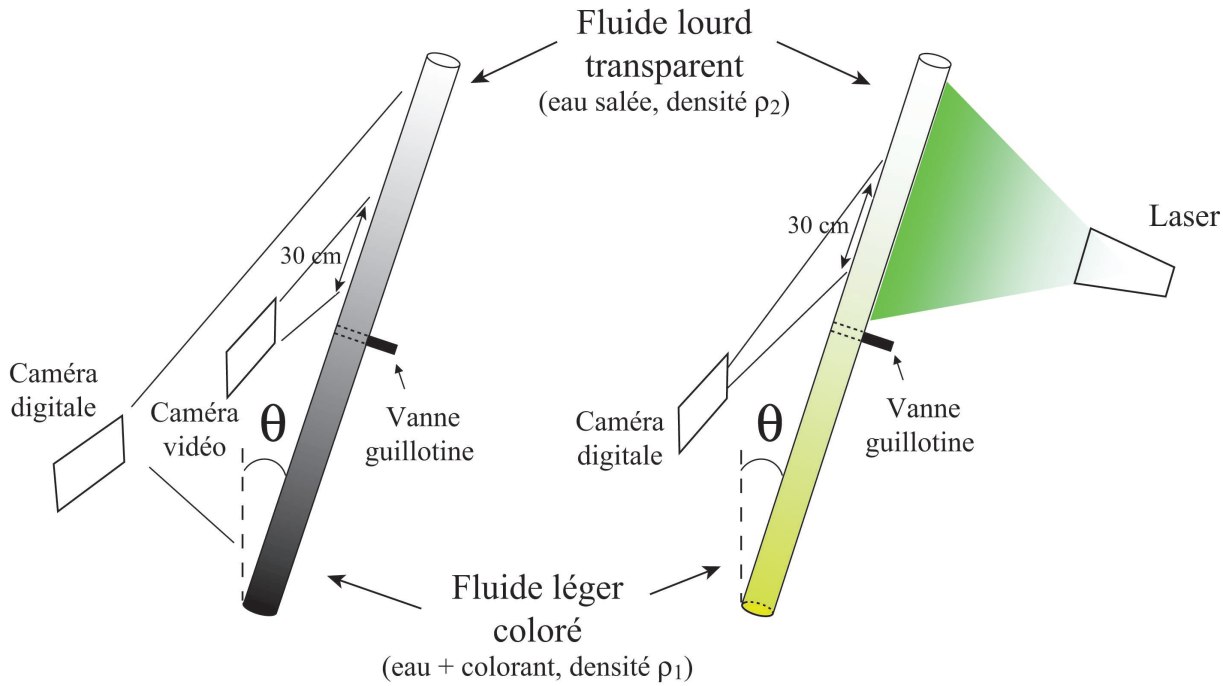


FIGURE 2.1: Vues schématiques des dispositifs expérimentaux utilisés pour deux techniques de visualisation différentes. - Gauche : visualisation par transparence et par absorption par un colorant - Droite : visualisation par fluorescence induite par un laser. Le tube est long de  $3.5m$  et a un diamètre intérieur de  $d = 20mm$ . La viscosité est toujours égale à celle de l'eau dans les expériences présentées dans ce chapitre ( $\mu = 10^{-3} Pa.s$ ).

La procédure expérimentale et les techniques de calibration et d'analyse des images seront décrites plus en détail dans le prochain chapitre.

## 2.2 Du mélange turbulent aux courants de gravité en tubes inclinés : contrôle du mélange transverse par l'angle d'inclinaison

Nous montrons sur la figure 2.2 des images en fausses couleurs de la fraction locale de fluide léger dans le fluide lourd, sur une longueur de  $30cm$  de tube éclairée par la nappe laser, pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\theta$  (les images sont obtenues avec le dispositif de droite de la figure 2.1).

Dans la partie supérieure, nous avons positionné ces images à l'angle auquel elles ont été prises ; dans la partie inférieure, nous avons mis les mêmes images, mais en cadrage horizontal, pour une observation plus précise. Les fluides léger et lourd purs apparaissent respectivement en bleu et en rouge ; les mélanges apparaissent en couleurs intermédiaires (un mélange à 50% apparaît ainsi en vert clair).

Lorsque le tube est vertical ( $\theta = 0^\circ$ ), l'écoulement est **turbulent**, ce qui induit un bon mélange transverse et un mélange efficace à petites échelles, d'où la prédominance de jaune et de rouge.

Pour un angle d'inclinaison du tube  $\theta = 20^\circ$  par rapport à la verticale nous observons :

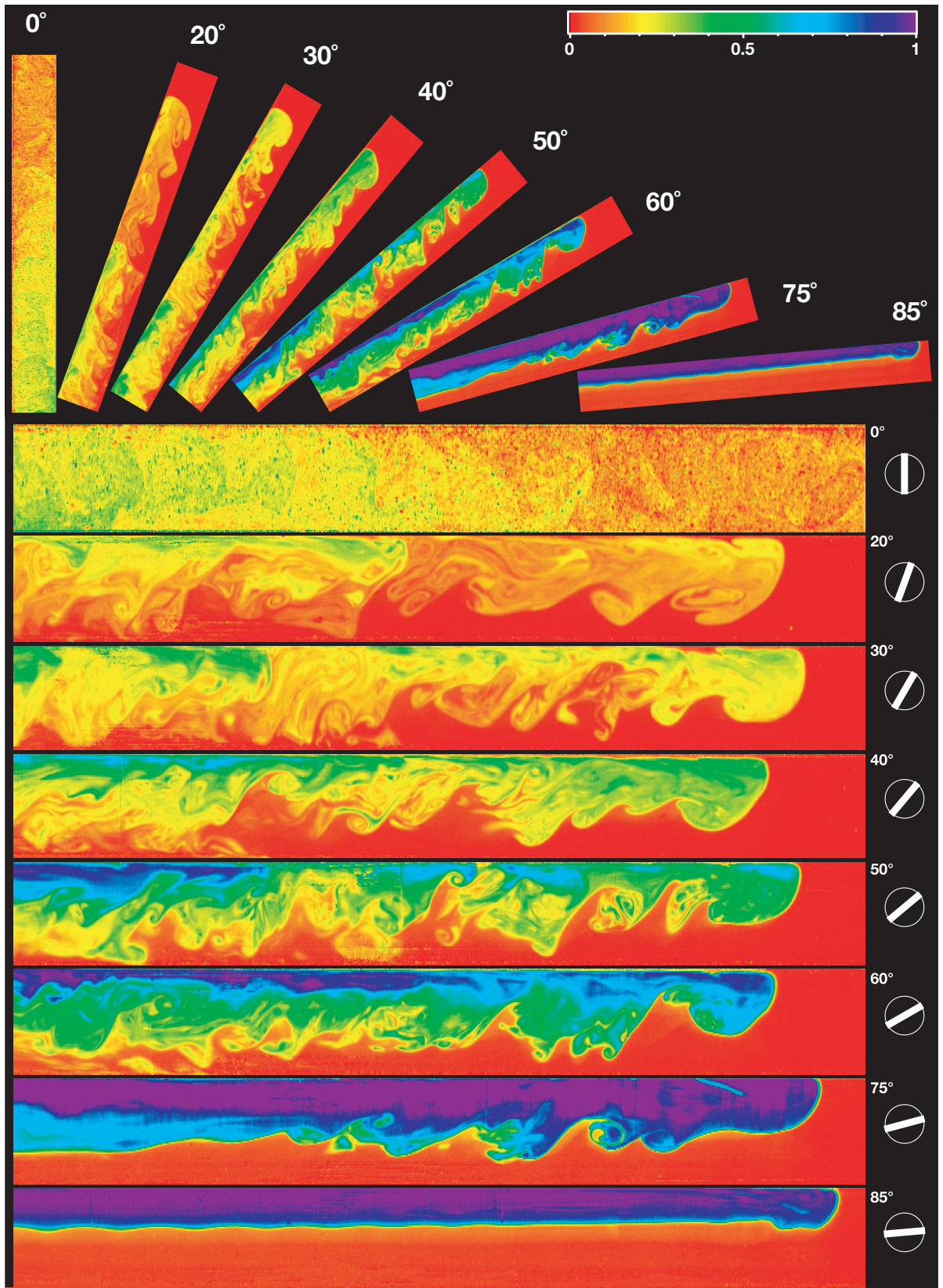


FIGURE 2.2: Images de la fraction locale de fluide léger obtenues pour un contraste de densité :  $\rho_2 - \rho_1 = 8 * 10^{-3} g/cm^3$  et une viscosité des deux fluides :  $\mu = 10^{-3} Pa.s$ , à des angles d'inclinaison :  $\theta = 0, 20, 30, 40, 50, 60, 75$  et  $85^\circ$  (champ des images :  $20 * 300mm$ ). Le code de couleurs pour la fraction normalisée est montré en haut à droite de la figure. Nous avons agrandi les images du tube plus fortement dans la direction perpendiculaire que dans la direction parallèle à l'axe du tube. Les petits symboles sur la droite rappellent à quel angle correspond chaque image.

- Une nette **ségrégation** des deux fluides : du fluide plus léger s'écoule vers le haut sur la génératrice supérieure du tube, tandis que du fluide lourd s'écoule vers le bas sur la génératrice inférieure.
- Le développement d'une instabilité de cisaillement à l'interface entre les fluides : **instabilité de Kelvin-Helmholtz**, qui induit un mélange transverse à caractère turbulent. Le mélange transverse est moins efficace que dans le cas vertical, probablement à cause de la ségrégation induite par la composante transverse de la gravité : il finit cependant par brasser les fluides sur l'ensemble de la section du tube.

Ce régime de mélange faiblement turbulent est dominé par des effets **inertiels**, l'énergie est dissipée par l'intermédiaire des instabilités de cisaillement puis des tourbillons (nous discuterons ce point par la suite). Enfin, le front avant de pénétration du fluide léger dans le fluide lourd est clairement défini, contrairement au cas du tube vertical. Nous observons nettement les fronts dès que  $\theta$  dépasse quelques degrés, particulièrement lorsque le contraste de densité diminue.

Ensuite, lorsque  $\theta$  augmente, les deux fluides sont de plus en plus ségrégés, ce qui atténue les instabilités de cisaillement et donc le mélange transverse. Nous voyons ainsi, en arrière du front, du fluide plus léger, de plus en plus pur, près de la génératrice supérieure : lorsque  $\theta$  augmente les colorations correspondantes sont d'abord vertes puis bleues et, entre  $50$  et  $60^\circ$ , il apparaît un canal de fluide léger pur (bleu foncé) qui alimente le front avant. Ce canal subsiste car les tourbillons de Kelvin-Helmholtz ne sont plus assez développés pour mélanger les fluides sur l'ensemble de la section du tube.

Pour  $\theta > 70^\circ$ , la ségrégation est encore plus forte : toute une fraction de la section du tube est alors occupée par le fluide léger montant. Pour  $\theta = 75^\circ$ , nous distinguons à l'interface, juste en arrière du front avant, un tourbillon de Kelvin-Helmholtz qui, après avoir été éjecté par le front, mélange les deux fluides, mais uniquement sur une petite partie de la section près de l'axe du tube.

Enfin, pour  $\theta = 85^\circ$ , l'effet de ségrégation amortit suffisamment les instabilités de cisaillement pour **supprimer presque totalement le mélange entre les deux fluides**. Nous sommes alors qualitativement très près du cas de deux fluides non miscibles (la tension superficielle mise à part), et nous observons un **contre-écoulement laminaire parallèle** des deux fluides juxtaposés dans la section du tube : presque toute l'énergie est dissipée par viscosité dans le volume de l'écoulement. Cependant, même pour  $\theta = 85^\circ$ , l'interface n'est pas encore totalement plate et on y distingue des petites ondulations dissymétriques avec des pointes dirigées vers le fluide lourd. Ces formes marquent le développement à l'interface d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz d'amplitude faible et constante sous forme d'une rangée périodique de tourbillons d'axe horizontal. Le champ de vitesse de ces tourbillons déforme l'interface et il apparaît des trajectoires fermées du fluide près de leur cœur (on peut visualiser ces trajectoires si du colorant est injecté à proximité). Ces tourbillons ne créent donc pas de mélange, mais ils dissipent de l'énergie.

Les cartes de concentration relative des fluides de la figure 2.2 nous ont donc permis d'analyser qualitativement l'évolution du mélange avec l'inclinaison  $\theta$ . Notons cependant que ces mesures de fluorescence laser donnent une valeur quantitative précise de la fraction relative de chaque fluide : nous utiliserons ces valeurs plus loin dans le présent travail.

Nous allons maintenant chercher à identifier plus en détail les phénomènes physiques mis en jeu lorsque nous inclinons le tube.

Tout d'abord, notons que, de façon similaire au phénomène de dispersion de Taylor [60][62] présenté au chapitre précédent, l'étalement de la zone de mélange au cours du temps résulte de l'action combinée de deux processus :

- D'une part, l'**étalement longitudinal** de la zone de mélange associé aux gradients de la vitesse moyenne dans la section du tube.
- D'autre part, un **mélange transverse** à l'axe du tube, résultant des instabilités de l'interface entre les fluides plus ou moins amorties par l'effet de ségrégation de la composante transverse de la gravité.

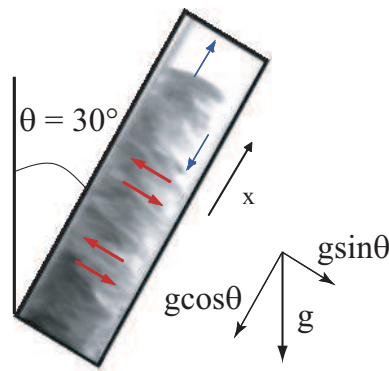


FIGURE 2.3: Visualisation d'une section du tube de quelques centimètres de longueur près du front de pénétration du fluide léger ( $\theta = 30^\circ$ ). L'image est fortement dilatée dans la direction transverse à l'axe du tube. Les flèches bleues marquent le contre-écoulement longitudinal et les flèches rouges les mouvements transverses.

Détaillons maintenant les mécanismes physiques qui contrôlent ces phénomènes afin de comprendre l'évolution du mélange en fonction de  $\theta$  observée sur la figure 2.2. Nous avons ainsi schématisé sur la figure 2.3 l'action des deux composantes de la gravité qui déterminent cette évolution.

- La composante longitudinale  $g \cos \theta$  de la gravité est le moteur de l'interpénétration des fluides à travers les forces de flottabilité (ou d'Archimède) qui varient suivant la densité du fluide. Dans le cas d'un contre-écoulement laminaire avec une interface stable entre les fluides ( $\theta = 85^\circ$  dans la figure 2.2), il y a simplement équilibre entre ces forces et les contraintes visqueuses. Pour des angles d'inclinaison plus faibles (mais suffisants pour induire une ségrégation), ces forces de flottabilité génèrent un écoulement stratifié en sens inverse des deux fluides.
- Il résulte de ce contre-écoulement un cisaillement qui provoque généralement des instabilités de Kelvin-Helmholtz à l'interface entre les fluides, ce sont elles qui sont à l'origine du mélange transverse.
- La composante transverse de la gravité  $g \sin \theta$ , a elle, au contraire, un effet stabilisant sur l'interface : elle tend en effet à maintenir le fluide lourd près de la génératrice inférieure du tube et le fluide léger près la génératrice supérieure.

Au fur et à mesure que l'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale augmente, l'influence de la composante transverse de la gravité  $g \sin \theta$  devient plus grande, ce qui conduit à la réduction du mélange transverse observée sur la figure 2.2. Aux plus fortes inclinaisons du tube, il y a ainsi une ségrégation totale des fluides.

D'un point de vue plus fondamental, l'existence de cette composante transverse de la gravité  $g \sin \theta$  simplifie fortement notre étude. D'une part, et c'est un point particulièrement important, elle lève une dégénérescence en rompant la symétrie de révolution globale du cas vertical, et rend ainsi l'écoulement bidimensionnel, en première approximation. Cela justifie par exemple l'utilisation d'une nappe laser verticale passant par l'axe du tube. D'autre part, la composante  $g \sin \theta$  permet de contrôler l'importance relative du mélange transverse tout en maintenant constant le contraste de densité. Il est ainsi possible d'étudier séparément l'influence des différents paramètres du problème. Ainsi, bien qu'elle ajoute une variable supplémentaire dans le problème, l'inclinaison du tube simplifie plutôt la structure de l'écoulement et permet de mieux le contrôler : elle nous aidera donc à le comprendre.

Nous reviendrons plus loin sur le cas du tube vertical, et nous observerons des effets tridimensionnels ainsi que l'absence de ségrégation. Cependant, il subsistera des similitudes importantes avec le cas incliné : en particulier, lorsque le contraste de densité décroît, nous verrons que nous avons également une transition d'un régime de mélange par instabilités de cisaillement à un régime de contre-écoulement laminaire stable.

### 2.3 Dynamique de front en tube incliné

Après avoir étudié le mélange à proprement dit, ainsi que les mécanismes qui le contrôlent, nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique d'avancée des fronts d'interpénétration des fluides et à son évolution en fonction de l'inclinaison du tube  $\theta$ . La figure 2.4 montre cette dynamique des fronts à travers des séquences d'images, obtenues avec la caméra vidéo et un tube rétroéclairé, pour quatre angles d'inclinaisons différents :  $\theta = 0, 30, 75$  et  $85^\circ$ . Notons tout d'abord que nous retrouvons, sur ces séquences, les observations précédentes sur l'évolution du mélange avec  $\theta$  ; notamment, nous voyons que le mélange transverse diminue à mesure que  $g \sin \theta$  augmente.

Tout d'abord, si nous regardons le temps nécessaire au front de fluide léger pour traverser le champ de la caméra, il met environ :

- une minute à  $\theta = 0^\circ$  ;
- vingt-cinq secondes à  $\theta = 30^\circ$  ;
- quinze secondes à  $\theta = 75^\circ$  ;
- vingt secondes à  $\theta = 85^\circ$ .

Il y a donc, dans un premier temps, une augmentation de la vitesse de front avec  $\theta$ , puis une rediminution lorsque le tube est proche de l'horizontale. Remarquons que l'augmentation de la vitesse de front avec l'inclinaison du tube est assez surprenante ; en effet, à mesure que  $\theta$  augmente,



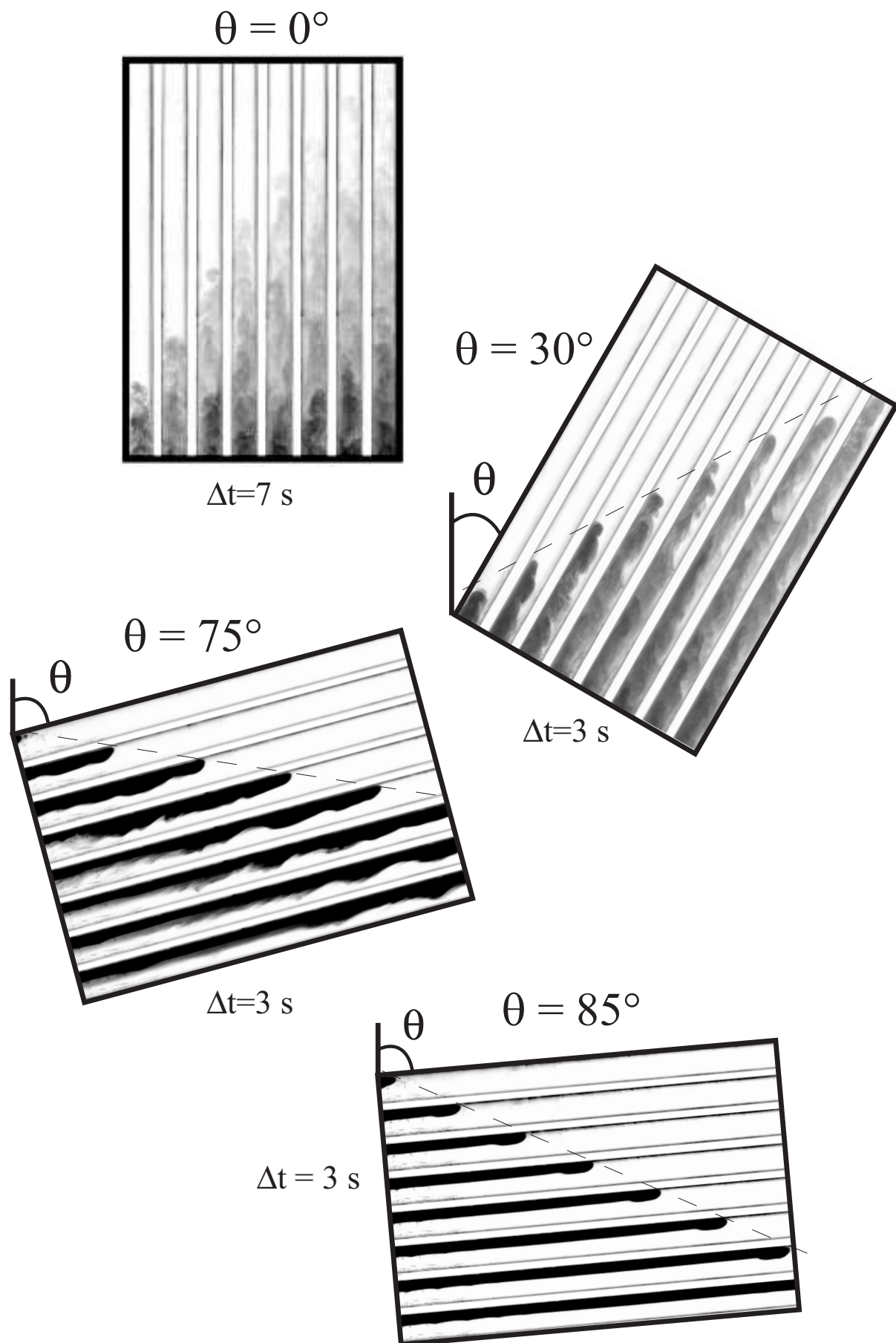


FIGURE 2.4: Séquences d'images d'une portion de  $30\text{cm}$  de longueur de tube au-dessus de la vanne pour différentes inclinaisons  $\theta$  par rapport à la verticale (le contraste de densité est fixe avec  $\rho_2 - \rho_1 = 8.10^{-3} \text{ g/cm}^3$ )

la composante longitudinale de la gravité, et donc les forces d'Archimède (ou de flottabilité) qui sont le moteur de l'écoulement diminuent.

Ensuite, nous observons que la vitesse du front (repérée par des tirets) est constante lorsque le tube est incliné. Cette stationnarité de l'interpénétration des fluides est également assez surprenante : si nous regardons la séquence à  $30^\circ$ , il est clair que le fluide déplaçant se mélange de plus en plus avec l'autre au fur et à mesure que le front avance. Comme les forces motrices d'Archimède sont proportionnelles aux contrastes de densité, nous nous attendrions plutôt à une diminution de la vitesse à mesure de cette progression du front.

Nous discuterons plus en détail les valeurs de ces vitesses de front et leur variation en fonction de tous les paramètres du problème dans le chapitre qui leur sera consacré. Nous allons maintenant analyser les caractéristiques spécifiques du mélange induit par gravité dans un tube vertical par rapport aux observations précédentes.

## 2.4 Cas particulier du tube vertical

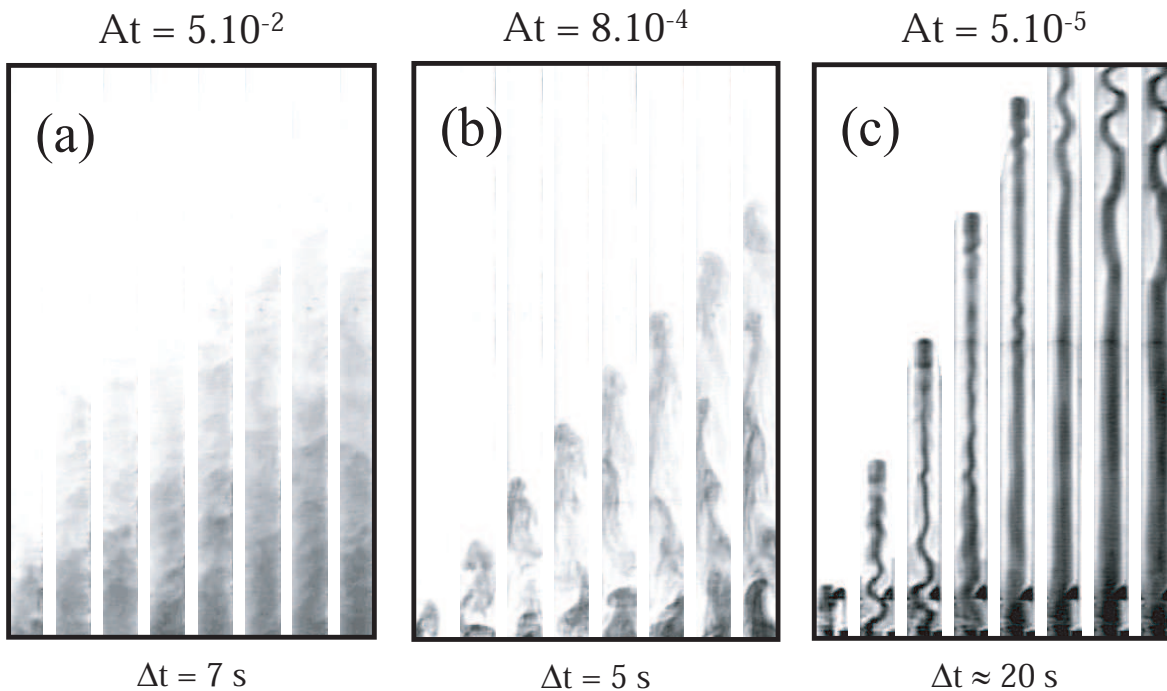


FIGURE 2.5: Séquences d'images provenant des  $30 \text{ cm}$  de longueur de tube au dessus de la vanne lorsque le tube est vertical et rétroéclairé, et pour différents contrastes de densité caractérisés par le nombre d'Atwood  $At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ .

La figure 2.5 montre des séquences d'images obtenues en tube vertical avec la caméra vidéo et un tube rétroéclairé pour différents contrastes de densité. Pour  $At = 5.10^{-2}$ , nous observons sur la figure 2.5(a) le caractère turbulent caractéristique des forts contrastes de densité. Cet écoulement turbulent induit un bon mélange transverse et surtout un mélange efficace à petite échelle. Nous avons déjà vu que, malgré l'apparition de ségrégation, ce régime subsiste pour des faibles angles



d'inclinaison (figure 2.2).

Comme pour l'écoulement, également à  $\theta = 0^\circ$ , de la figure 2.4 il est difficile de déterminer précisément la position du front. Même si nous allons voir que celui-ci est plus facilement identifiable pour des contrastes de densité plus faibles, nous n'étudierons donc pas systématiquement les variations de la vitesse de front pour un tube vertical.

Pour des contrastes de densité plus faibles (figure 2.5(b)), nous n'observons plus un mélange turbulent, mais une instabilité initiale en forme de champignon. Ce dernier se déstabilise rapidement sous l'effet des gradients de vitesse entre le fluide ascendant et descendant. Dans ce cas, le mélange transverse est plus lent et le mélange à petite échelle moins efficace ; ce régime a des analogies avec les écoulements aux angles d'inclinaison intermédiaires du paragraphe précédent (figure 2.2). Cependant, nous observons qu'en tube vertical l'écoulement est tridimensionnel sans effet de ségrégation, contrairement au cas d'un tube incliné.

Enfin, pour des contrastes de densité encore plus faibles, l'instabilité de sillage due aux gradients de vitesse s'amortit rapidement et il apparaît un contre-écoulement stable dans la partie centrale de la zone d'interpénétration des fluides (figure 2.5c). Les deux fluides restent quasiment séparés et le mélange est alors très fortement réduit. Par ailleurs, la concentration de chaque fluide moyennée sur la section du tube est constante et voisine de 0,5. Ce régime de contre-écoulement stable est similaire à celui observé aux fortes inclinaisons dans la figure 2.2.

En conclusion, nous observons qu'en diminuant le contraste de densité en tube vertical, on passe d'un régime de mélange turbulent à un régime de contre-écoulement stable, comme cela avait été le cas en augmentant l'inclinaison du tube à contraste de densité constant. Cependant, les causes physiques de ce changement de régime sont différentes : pour un tube incliné, augmenter  $\theta$  revient à augmenter la composante transverse de la gravité ce qui diminue le mélange transverse en atténuant les instabilités. Pour le tube vertical, la réduction du mélange transverse lorsque le contraste de densité diminue, vient du fait que la diminution correspondante des forces d'Archimède réduit les vitesses, et leur gradient à l'interface. Les instabilités de cisaillement à l'origine du mélange transverse sont alors supprimées. Nous étudierons par la suite la dépendance de l'influence des contrastes de densité par rapport à l'angle d'inclinaison  $\theta$ .

Nous allons maintenant clore le présent chapitre en discutant les différents paramètres physiques qui interviennent dans le mélange et dont l'influence sera discutée par la suite.

## 2.5 Introduction des paramètres de contrôle du problème

Bien qu'un peu complexe à mettre en œuvre, l'étude de l'influence de l'**angle d'inclinaison**  $\theta$  du tube par rapport à la verticale s'est révélée particulièrement fructueuse (comme nous avons pu le voir au début de ce chapitre). L'influence de  $\theta$ , aussi bien sur le mélange que sur la dynamique de front, s'est révélée considérable et nous en reparlerons tout au long de ce travail.

Un deuxième paramètre caractéristique, essentiel puisqu'il influence directement les forces d'Archimède qui sont le moteur de l'écoulement, est le **contraste de densité**, caractérisé par le nombre sans dimension :

$$\text{le nombre d'Atwood : } At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

où  $\rho_i$  est la masse volumique du fluide  $i$ .

Un autre paramètre qui intervient dans tous ces écoulements est **la viscosité des fluides**  $\mu$ . Nous verrons que son influence sur le mélange et la dynamique peut être assez étonnante, car contre-intuitive, en particulier dans les régimes de mélange turbulent ; une augmentation de la viscosité provoque une augmentation des vitesses de front ! Une analyse fine de l'influence de la viscosité sur les variations de fraction volumique locale de chacun des fluides dans l'écoulement sera nécessaire pour comprendre ces résultats.

Pour finir, rappelons qu'une spécificité de ce travail réside dans le fort confinement latéral imposé par la géométrie tubulaire : nous utilisons en effet un rapport longueur sur diamètre ( $L/d$ ), de l'ordre de 100. Des expériences réalisées avec plusieurs **diamètres de tube**  $d$  nous aideront à préciser l'influence de  $d$  sur le développement des instabilités et le mélange.

Nous discuterons plus précisément les valeurs utilisées pour tous ces paramètres dans le chapitre suivant, qui traite du dispositif et de la procédure expérimentale.

## 2.6 Objectif et plan

A l'issue de ce chapitre, nous sommes donc en mesure de dégager les principales questions que posent cette expérience et auxquelles nous tenterons de répondre au long de ce manuscrit. Pour chaque expérience, nous étudierons deux processus : la dynamique de front, et le mélange en aval du front ; ceci nous conduit naturellement au plan suivant :

- Dans le chapitre 3 nous décrirons les dispositifs et procédures expérimentaux utilisés pour les visualisations par transparence et par fluorescence laser. Dans les deux cas, nous décrirons le montage expérimental, les fluides utilisés et la méthode de visualisation à proprement parler.
- Le chapitre 4 sera consacré aux mesures de la dynamique des fronts d'interpénétration des fluides : nous étudierons en particulier l'évolution des vitesses de front en fonction des différents paramètres de contrôle. Nous essaierons de dégager les paramètres caractéristiques importants ainsi que les lois d'échelles qu'ils vérifient et nous tenterons de caractériser les différents régimes d'écoulements.
- Dans le chapitre 5, nous caractériserons quantitativement l'étalement de la zone de mélange en tubes verticaux et inclinés et nous étudierons la distribution des fluides dans ces configurations. Nous nous intéresserons aussi aux mécanismes à l'origine du mélange.
- Enfin, dans une dernière partie, nous nous intéresserons analytiquement et numériquement à la déstabilisation de l'interface, et nous rechercherons ainsi les critères d'apparition du mélange transverse.

# Chapitre 3

## Techniques expérimentales

### 3.1 Motivations

Nous allons décrire dans ce chapitre les techniques expérimentales utilisées pour étudier la dynamique du mélange entre deux fluides miscibles de densités différentes, initialement stratifiés en configuration instable dans un tube de grande longueur vertical ou incliné. Les mesures se font exclusivement par analyse quantitative d'images ; le mélange est rendu visible en mettant un composé absorbant ou fluorescent en solution dans le fluide léger.

Pour ce faire, nous utiliserons deux méthodes différentes : la première consistera à prendre un point de vue très macroscopique, en mesurant la vitesse du front et les profils de variation de la concentration moyenne dans la section du tube le long de celui-ci. Nous mesurerons, en fonction du temps, l'intensité lumineuse traversant le tube avec une caméra digitale à grande dynamique, ce qui permet, après traitement informatique des images, d'obtenir l'évolution, le long du tube, des profils de concentration moyennés sur la section, et le diagramme spatio-temporel des variations de ces profils. La deuxième méthode adoptera, elle, un point de vue beaucoup plus local : on étudiera avec une technique de fluorescence laser la concentration locale dans une partie de tube longue d'une cinquantaine de centimètres.

Dans le premier cas, la mesure de concentration est, de toute manière, intégrée le long de la trajectoire des rayons lumineux à travers le tube. Dans le second, les mesures de concentration, sont ponctuelles mais seulement réalisées dans le plan du faisceau lumineux. Les deux techniques de mesure sont donc complémentaires : l'une permet de suivre l'évolution du mélange à l'échelle macroscopique et l'autre permet d'étudier ses mécanismes microscopiques.

### 3.2 Etude macroscopique

#### 3.2.1 Montage expérimental

Notre dispositif expérimental (figure 3.1) est constitué d'un tube de plexiglas (rigide et transparent), d'une longueur de 3.3 mètres, séparé en deux moitiés supérieure et inférieure par une vanne

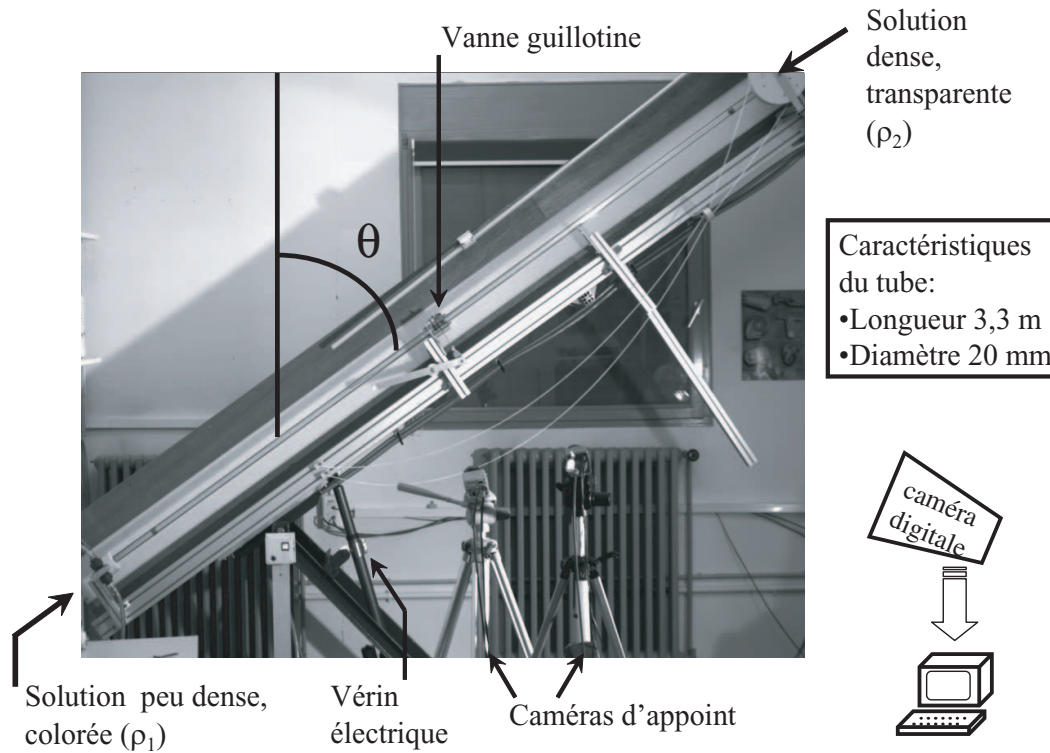


FIGURE 3.1: Montage expérimental

guillotine. Nous avons mené des campagnes d'expériences avec trois tubes de diamètres différents :  $d = 12 \text{ mm}$ ,  $20 \text{ mm}$ , et  $30 \text{ mm}$  dans le but d'étudier l'influence du confinement transverse.

La vanne guillotine (figure 3.2) est constituée de deux parties distinctes en plexiglas où viennent se positionner les deux tubes ; ces deux parties sont bridées ensemble par quatre goujons, mais permettent la "libre" translation d'une plaque de métal percée d'un trou de diamètre égal à celui du tube. Notons d'ailleurs que, malgré les précautions prises pour limiter les perturbations de l'écoulement au niveau de la vanne, cette dernière pourra perturber légèrement la forme de l'interface aux temps courts.

Le tube est rétroéclairé par une boîte lumineuse constituée de plusieurs néons et de papier diffusant éclairant une plaque de plastique translucide : l'ensemble permet d'obtenir un éclairage très homogène. Cet ensemble, renforcé par un bâti métallique dans le but de minimiser la flèche induite par le poids du montage, pivote autour d'un axe horizontal et peut s'incliner de  $\theta = 0^\circ$  à  $\theta = 90^\circ$  par rapport à la vertical. Le mouvement de rotation est assuré par un vérin électrique capable de développer une force de  $5000 \text{ N}$  sur  $30 \text{ cm}$  de course. Enfin, nous mesurons l'angle d'inclinaison au moyen d'un inclinomètre à affichage digital dont la résolution est  $0,1^\circ$ .

### 3.2.2 Caractérisation des fluides

Dans le tube, on place initialement le fluide léger dans la moitié inférieure (en dessous de la vanne) et le fluide lourd dans la moitié supérieure. Les deux fluides sont miscibles et sont tous deux des solutions aqueuses.

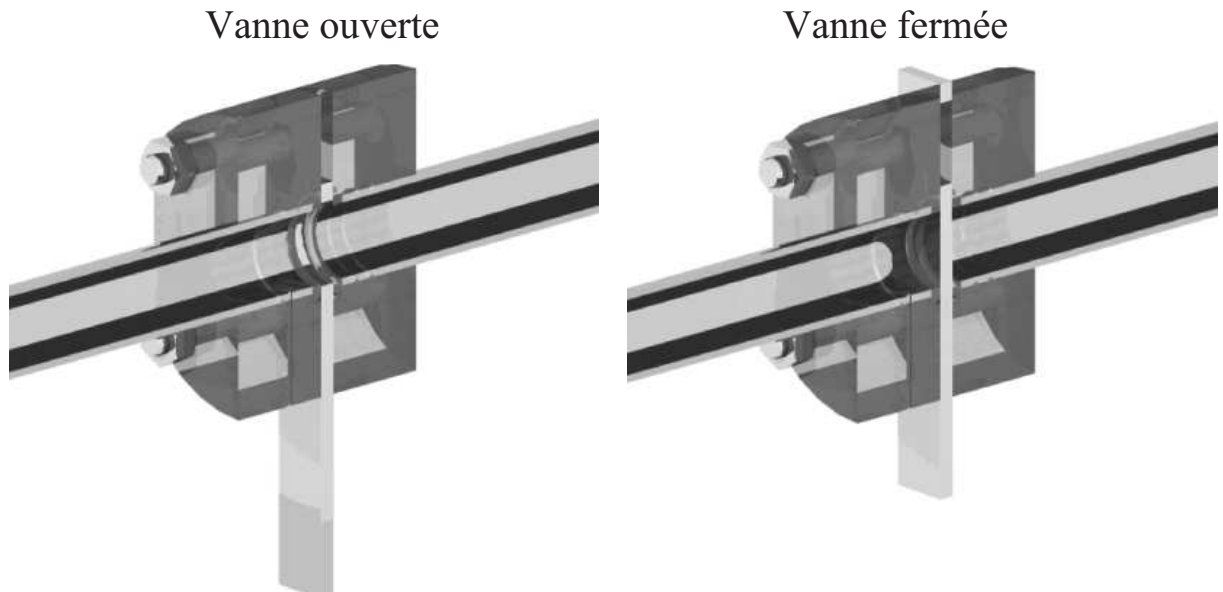


FIGURE 3.2: Vue en coupe d'une vanne guillotine en position ouverte à gauche et fermée à droite pour un tube de diamètre 20mm.

La viscosité  $\nu$  des deux fluides peut être modifiée en ajoutant du glycérol. Nous veillerons toujours à avoir deux fluides de même viscosité de façon à ne pas introduire un second contraste entre les propriétés des fluides : on aurait en effet du mal à distinguer son influence sur le mélange de celle du contraste de densité.

Le fluide dans la partie supérieure est alourdi par l'ajout d'un sel, le chlorure de calcium ( $CaCl_2$ ) dont la concentration varie de  $0.1g/l$  à  $100g/l$ , ce qui permet d'avoir une gamme de contrastes de densité couvrant trois ordres de grandeurs :  $10^{-5} < At < 5.10^{-2}$ . Sur la figure 3.3, nous avons tracé l'augmentation de viscosité due à l'ajout de sel. La courbe en trait plein est celle trouvée dans la littérature et correspondant au cas de l'eau avec du chlorure de calcium ( $CaCl_2$ ) ([71] p. D-233). Nous avons, de plus, mesuré expérimentalement la viscosité de quelques solutions eau-glycérol mélangées à du  $CaCl_2$  ; ces valeurs ont été également portées sur le graphique (1 correspond à de l'eau sans glycerol de viscosité  $10^{-6}m^2/s$ , 2 et 4 à des solutions d'eau-glycérol de viscosité 2 et  $4.10^{-6}m^2/s$ ). On observe alors que, pour une solution de viscosité  $10^{-6}m^2/s$ , il y a très peu de variation sur la gamme de valeurs d' $At$  utilisée, et pour les solutions de viscosité 2 et  $4.10^{-6}m^2/s$ , il sera nécessaire de travailler uniquement avec des solutions pour lesquelles  $At$  est inférieur à  $10^{-2}$ . L'augmentation de viscosité sera donc supposée suffisamment faible, dans les gammes considérées, pour ne pas influencer le mélange.

Le fluide léger dans la partie basse est coloré par de la nigrosine à une concentration de  $40 mg.l^{-1}$  dans les tubes de 12 et 20 mm de diamètre et  $24 mg.l^{-1}$  dans celui de 30 mm (le choix de la concentration en nigrosine sera justifié ultérieurement). Le colorant permet de réaliser des mesures d'absorption optique tout en modifiant très peu les propriétés du fluide, que ce soit sa densité ou sa viscosité.

Ensuite, la densité et la température des deux fluides sont mesurées avant chaque expérience et on veille à ce que leurs températures initiales soient identiques.

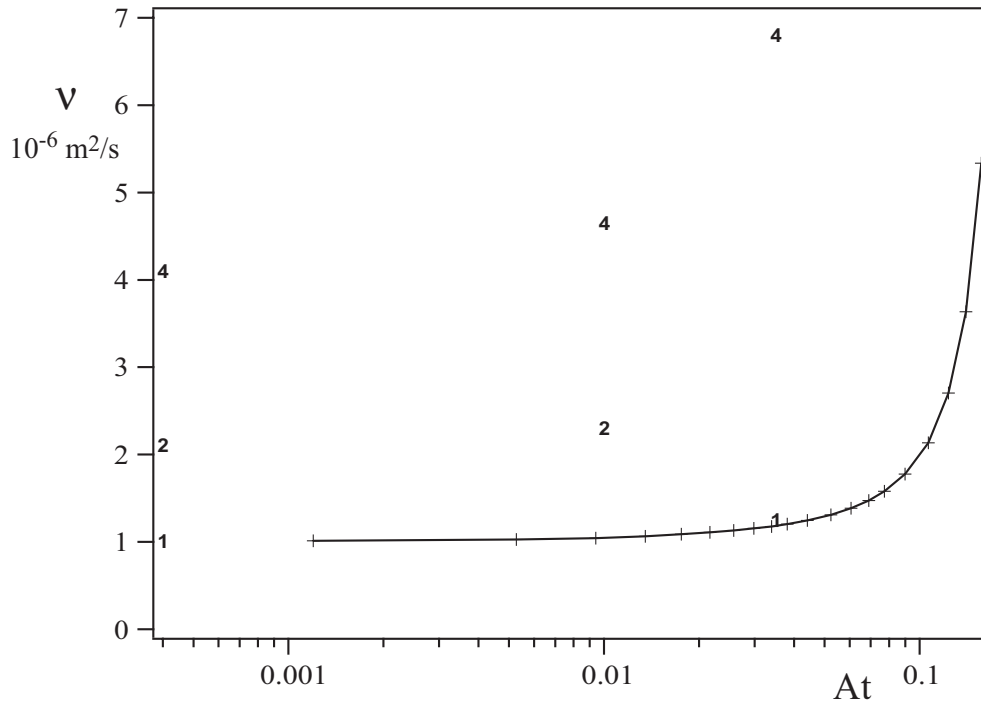


FIGURE 3.3: Variation de la viscosité  $\nu = \mu/\rho$  en fonction du nombre d'Atwood  $At$ . La courbe en trait plein vient de la littérature et correspond au cas de l'eau avec du chlorure de calcium ( $CaCl_2$ ). Les points notés 1, 2 et 4 sont expérimentaux et correspondent respectivement à des solutions d'eau sans glycérol de viscosité  $10^{-6}m^2/s$ , et à des solution eau-glycérol de viscosité  $2.10^{-6}m^2/s$  et  $4.10^{-6}m^2/s$ .

Les deux fluides sont enfin introduits dans le tube, vanne fermée, à l'aide de deux pompes péristaltiques. Le fluide léger sera introduit par le bas et le fluide lourd par le haut de façon à ce qu'ils ne se mélangent pas avant le début de l'expérience.

Après ouverture de la vanne guillotine qui sépare initialement les fluides, on observe le développement du mélange le long du tube au cours du temps.

### 3.2.3 Visualisation et mesure de concentration par absorption optique

La méthode de mesure optique consiste à acquérir à intervalles de temps réguliers des images de l'intensité lumineuse traversant le tube, à l'aide d'une caméra digitale refroidie par effet Peltier et capable de distinguer 4096 niveaux de gris. Cette caméra possède un très faible niveau de bruit grâce au refroidissement ; le grand nombre de niveaux de gris qui peuvent être ainsi distingués permet d'analyser une large gamme de concentrations.

L'étalonnage tracé sur la figure 3.4 montre que l'intensité lumineuse transmise varie avec la concentration suivant une loi du type  $I(C) = \Psi \exp^{-\alpha C}$  jusqu'à une valeur  $C_{max}$  qui dépend du diamètre du tube et est prise égale à  $24 mg/l$  pour un tube de  $30 mm$ . Ainsi, dans cette gamme, la concentration relative de fluide coloré vérifie :

$$\frac{C - C_{min}}{C_{max} - C_{min}} = \frac{\log I(C) - \log I(C_{min})}{\log I(C_{max}) - \log I(C_{min})}$$

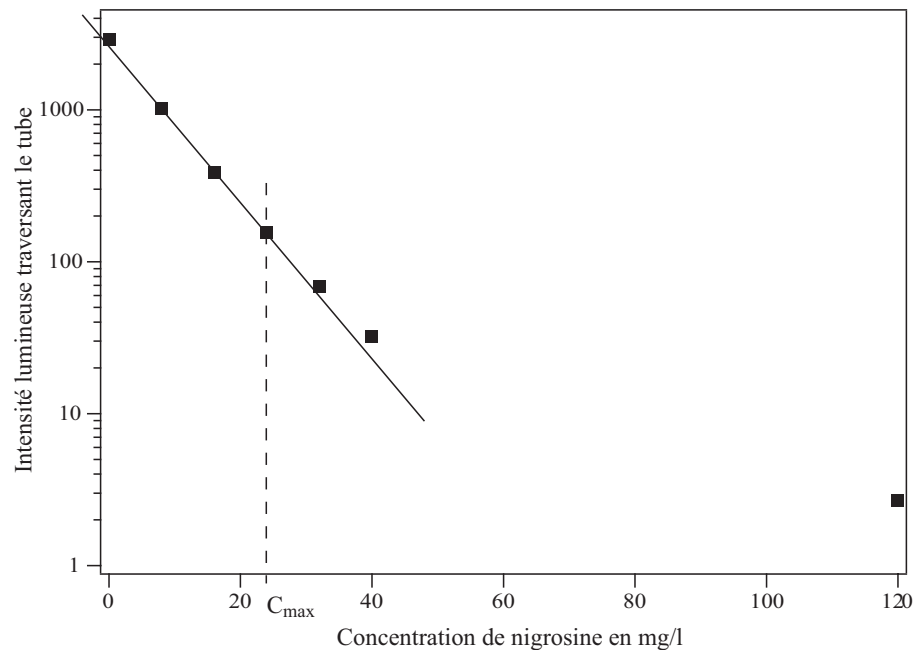


FIGURE 3.4: Variation en échelle logarithmique de l'intensité lumineuse traversant le tube (exprimée en niveaux de gris), en fonction de la quantité de nigrosine moyennée sur 8 pixels au centre du tube pour  $d = 30\text{mm}$ . Le trait pointillé correspond à  $24\text{mg/l}$  et détermine la concentration maximum au-dessus de laquelle la variation de l'intensité lumineuse traversant le tube ne peut plus être considérée comme exponentielle en fonction de la concentration en nigrosine.

où  $I(C_{min})$  représente l'intensité mesurée sans colorant ( $C_{min} = 0$ ).

Cela nous permet de déterminer les concentrations normalisées locales, sans avoir à connaître les constantes de calibrations  $\Psi$  et  $\alpha$ . Les images de l'intensité lumineuse le long du tube (d'une taille typique de  $1300 \times 20$  pixels) sont alors traduites en cartes de concentration normalisée à l'aide d'images de référence obtenues préalablement avec chacune des deux solutions pures (0 pour le fluide léger coloré et 1 pour le fluide lourd non coloré). Cette méthode de mesure nous permet donc d'obtenir une image de la concentration normalisée, moyennée sur la profondeur du tube<sup>1</sup>.

En plus de ces calibrations, nous avons réalisé des images en saturant le tube de colorant très concentré ( $\gg C_{max}$ ) ; en regardant ligne par ligne la valeur de l'intensité lumineuse mesurée par la caméra (figure 3.5), nous observons, d'une part, que celle-ci n'est pas nulle (ce qui nous donne la valeur de la lumière parasite qu'il faudra soustraire aux intensités mesurées lors des expériences) et, d'autre part, qu'il existe une zone où les effets de bord sont importants. Nous restreindrons donc la zone sur laquelle nous travaillerons en pratique à 4 pixels de chaque côté de l'axe pour un tube de  $30\text{mm}$  de diamètre et 3 pixels de chaque côté pour un tube de  $20\text{mm}$  (notons que 1 pixel =  $2.3\text{mm}$ ).

Enfin, le traitement des images s'achève en moyennant les valeurs de concentration sur les 6 ou 8 pixels correspondant à une distance donnée le long de l'axe. On considère alors que la valeur obtenue représente la concentration moyenne dans la section du tube à la position le long de l'axe

<sup>1</sup>C'est de ce moyennage, intrinsèque à la méthode d'absorption optique, qu'on pourra s'affranchir en changeant de technique d'observation (voir paragraphe 3.3).

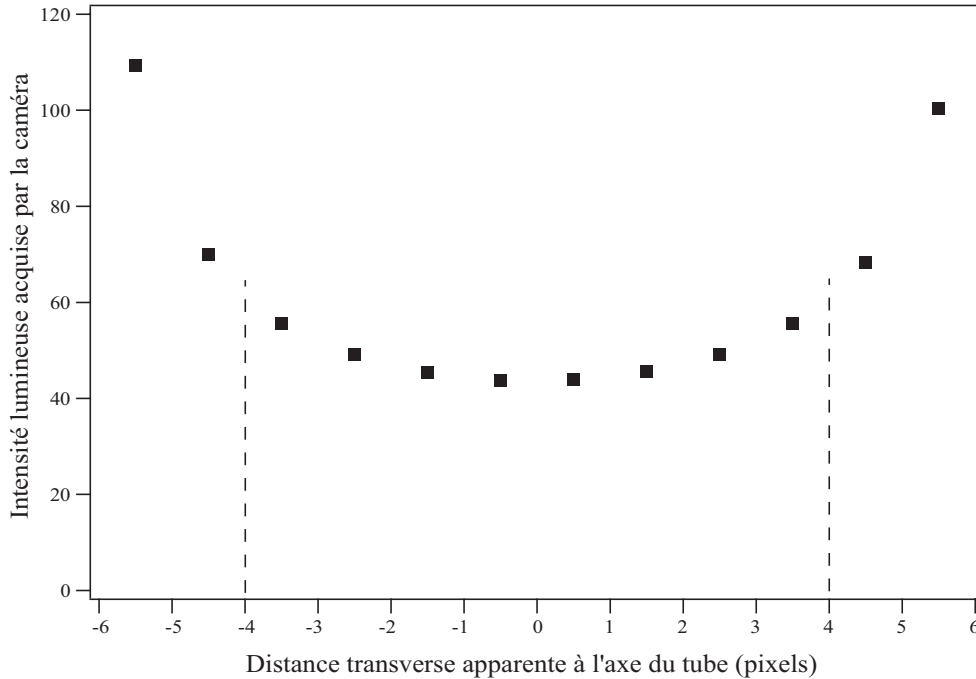


FIGURE 3.5: Intensité lumineuse d'une solution saturée en nigrosine en fonction de la distance transverse apparente à l'axe d'un tube de 30 mm. L'échelle horizontale est en pixels et chaque pixel représente 2.3mm.

considérée : nous obtenons ainsi à des intervalles de temps réguliers le profil de concentration moyenne le long du tube. La figure 3.6(a) est un exemple de tels profils. Remarquons que sur cette figure que les profils s'étalent au cours du temps, ce qui reflète l'étalement de la zone de mélange le long du tube.

Ces profils peuvent également être traduits en variations de niveaux de gris sur des lignes représentant la longueur du tube (chaque point de la ligne est associé à un pixel). En accolant les lignes les unes aux autres, on obtient un diagramme spatio-temporel du type de celui de la figure 3.6b. L'ordonnée correspond à la distance à la vanne, tandis que l'abscisse correspond au temps écoulé après l'ouverture (chaque ligne verticale représente le profil de concentration moyenne à un temps  $t$  donné). Le temps  $t = 0$  se situe à gauche du diagramme spatio-temporel : la moitié supérieure est alors blanche et la moitié inférieure noire ; ensuite, la zone de mélange s'étale sur une distance de plus en plus grande le long du tube lorsque le temps augmente (les temps  $t_1, t_2$  et  $t_3$  correspondent aux temps auxquels les profils de concentration moyenne normalisée ont été tracés sur la figure 3.6(a)).

Notons enfin que cette procédure peut être utilisée pour acquérir des profils de concentration transverse à l'axe du tube. Il suffira de tourner la caméra de  $90^\circ$  et d'utiliser un plus fort grossissement pour avoir une meilleure définition dans la dimension transverse. Nous décrirons plus loin les résultats de ces mesures.

Les profils de concentration moyenne nous renseigneront sur l'étalement de la zone de mélange et les diagrammes spatio-temporels nous permettront d'analyser la propagation de zones de forte variation de concentration, telles que les fronts d'interpénétration des fluides, et de déterminer leur vitesse. Ce sont deux méthodes d'analyse très complémentaires sur lesquelles reposeront



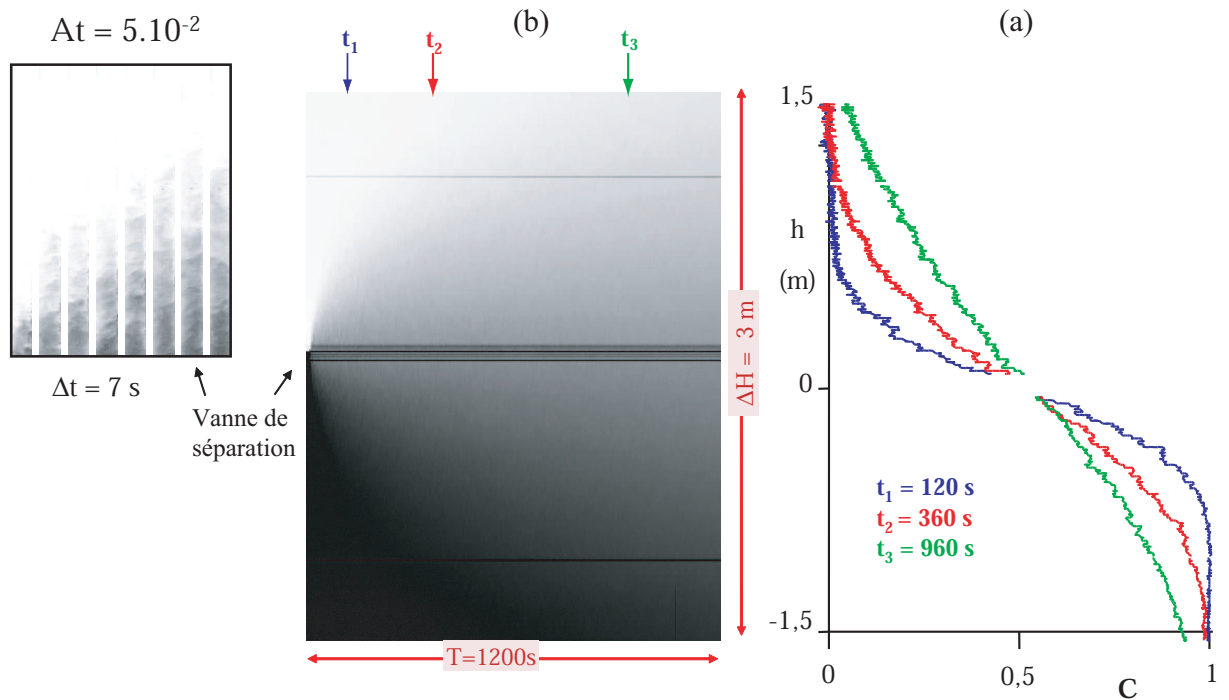


FIGURE 3.6: - (a) Exemples de profils de concentration moyenne normalisée, à trois instants différents :  $t_1, t_2, t_3$  (tube vertical,  $At = 5.10^{-2}$ ). - (b) Exemple de diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne normalisée (tube vertical,  $At = 5.10^{-2}$ ).

toutes nos études quantitatives. Pour finir, deux caméras vidéo classiques complètent le dispositif d'observation. Elles nous permettent d'enregistrer simultanément sur cassette vidéo, grâce à un dispositif de partage d'écran, l'écoulement sur les trente premiers centimètres du tube de part et d'autre de la vanne, ces vidéos fournissent un nombre beaucoup plus important d'images par seconde (25) mais avec une moins bonne résolution des images et peu de niveaux de gris.

### 3.3 Mesures locales de concentration

Nous avons montré que la mesure de l'intensité de lumière transmise utilisée dans l'expérience précédente permet de déterminer la concentration moyenne le long du tube : nous verrons par la suite que cette méthode de mesure donne accès à de nombreuses quantités caractéristiques du mélange. L'interprétation détaillée de ces mesures est cependant parfois limitée par notre manque d'informations sur la dynamique et les mécanismes locaux du mélange. Il nous était donc nécessaire de pouvoir analyser la structure à petite échelle de l'écoulement. Dans la suite de ce chapitre, nous allons décrire la technique spécifique que nous avons utilisée pour réaliser ces observations locales.

#### 3.3.1 Montage expérimental

La partie supérieure du tube est maintenant éclairée dans un plan diamétral vertical, et sur une longueur d'environ un mètre, par moyen d'une nappe laser ( $\lambda = 532nm$ ), d'épaisseur 1 mm (figure 3.7).

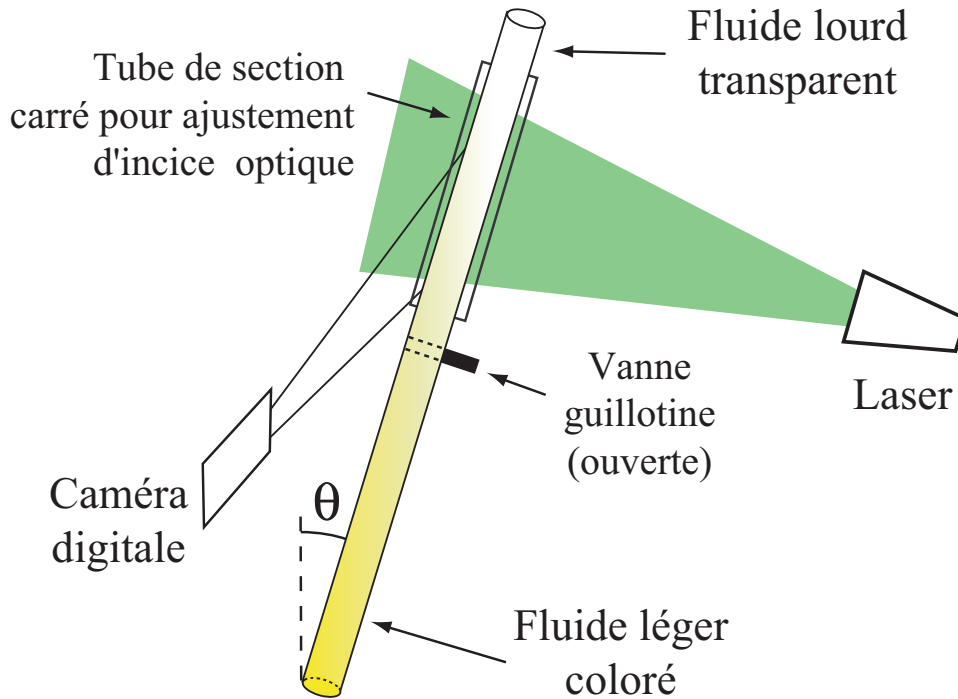


FIGURE 3.7: Schéma du montage expérimental de diffusion induite par laser avec l'éclairage par un faisceau laser plan. Ce dispositif est complété par une caméra vidéo située au même endroit que la caméra digitale et filmant le même champ.

Dans le but de réduire les effets de lentille cylindrique dus à la section circulaire du tube, la partie de celui-ci éclairée par la nappe laser est incluse dans un large tube en plexiglas de section carrée. L'espace entre les deux tubes est alors rempli soigneusement avec de l'eau javellisée préalablement dégazée. Ce dispositif a pour effet de réduire nettement la déviation des rayons lumineux due au changement d'indice entre l'air, le plexiglas, et l'eau. La nappe laser est réglée pour être perpendiculaire à deux des faces du tube carré. Le montage est fixé par deux "bouchons" placés aux extrémités de ce dernier tube (avec des passages étanches pour le tube expérimental). Nous avons réalisé ces expériences uniquement dans le tube de diamètre  $20mm$ .

### 3.3.2 Caractérisation des fluides

Le fluide léger est, cette fois-ci, une solution d'eau et de fluoresceine ; seules les régions éclairées par la nappe laser et contenant du fluide fluorescent seront donc lumineuses et visibles sur l'image.

Pour déterminer la concentration en fluoresceine à utiliser, nous avons tracé sur la figure 3.8 la variation de la quantité de lumière émise par fluorescence et détectée par la caméra, avec la distance à l'axe du tube, pour différentes concentrations en fluoresceine. Nous observons que la réémission de lumière pour les solutions les plus concentrées diminue au fur et à mesure de la traversée du tube : l'énergie incidente est absorbée par le colorant. La concentration en fluoresceine doit donc être assez élevée pour avoir une fluorescence détectable par la caméra et assez faible pour éviter l'absorption de lumière dans la dimension transverse du tube. La concentration maximale acceptable suivant ce critère est de l'ordre de  $50mg/l$  mais la valeur de l'intensité de la lumière de fluorescence est alors

un peu faible. Cela nous a conduit à utiliser un objectif de distance focale  $50\text{mm}$  et d'ouverture la plus grande possible ( $f = 1,4$ ). Il est ainsi possible d'obtenir un signal plus élevé (en nombre de niveaux de gris), et donc d'analyser avec une plus grande dynamique le phénomène de mélange.

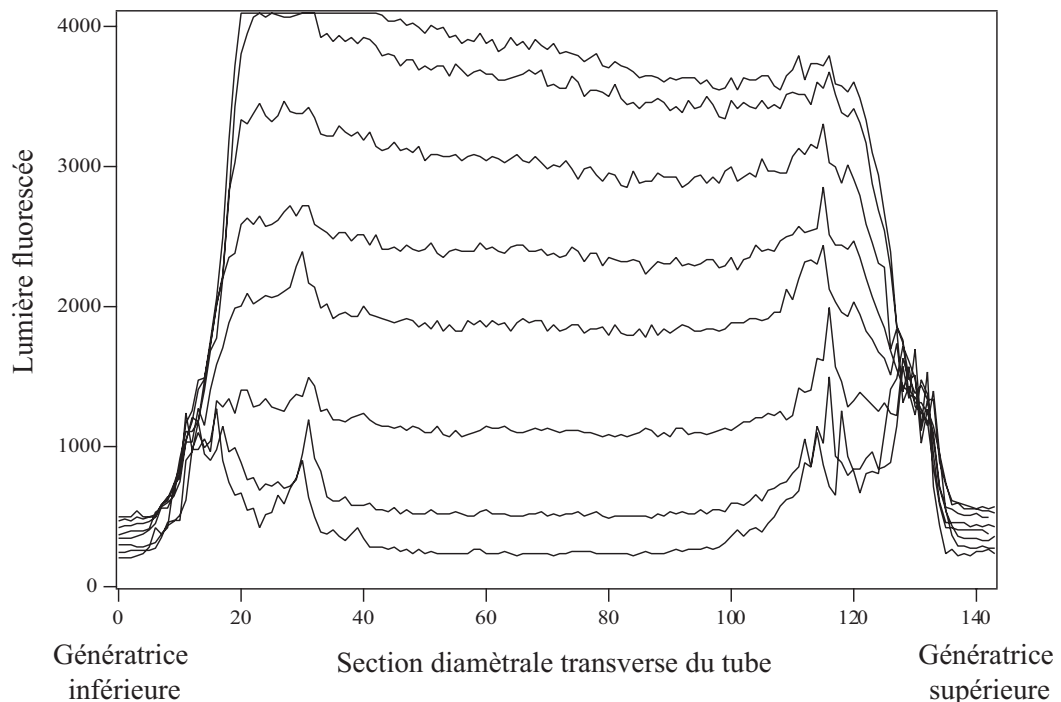


FIGURE 3.8: Quantité de lumière fluorescée acquise pas la caméra sur toute la dimension transverse du tube pour différentes concentrations en fluoresceine : de bas en haut de la figure 0, 10, 30, 50, 70, 90, 110 et  $120\text{ mg/l}$ . Notons que la gauche de la figure correspond à la génératrice inférieure du tube, située du côté du laser émetteur.

Les deux fluides sont toujours soigneusement dégazés et filtrés pour éliminer les bulles et les particules solides non dissoutes ; un peu d'eau de javel est mise en solution pour éviter l'apparition d'algues et de micro-organismes. Ensuite, les deux moitiés du tube sont remplies lentement à partir de leur base pour éviter l'apparition de bulles. Cette procédure nous permet d'éliminer les problèmes de diffusion de lumière non souhaitée qui induiraient un bruit de fond important sur l'image.

### 3.3.3 Visualisation et méthode de mesure par fluorescence laser

A la différence de la méthode de mesure précédente où le tube était presque filmé en entier, ici le champ filmé par la caméra est compris entre 200 et 600  $\text{mm}$  suivant la résolution qu'on désire avoir dans la dimension transverse.

Ensuite, pour obtenir des valeurs quantitatives de la concentration locale des fluides, les images acquises par la caméra digitale sont, comme précédemment, normalisées entre les images de références obtenues avec le tube respectivement rempli de fluide lourd (transparent) et léger (fluorescent). La variation de l'intensité lumineuse émise par fluorescence avec la concentration en fluoresceine est maintenant linéaire, comme on le voit sur la figure 3.9, ce qui simplifie la normalisation.

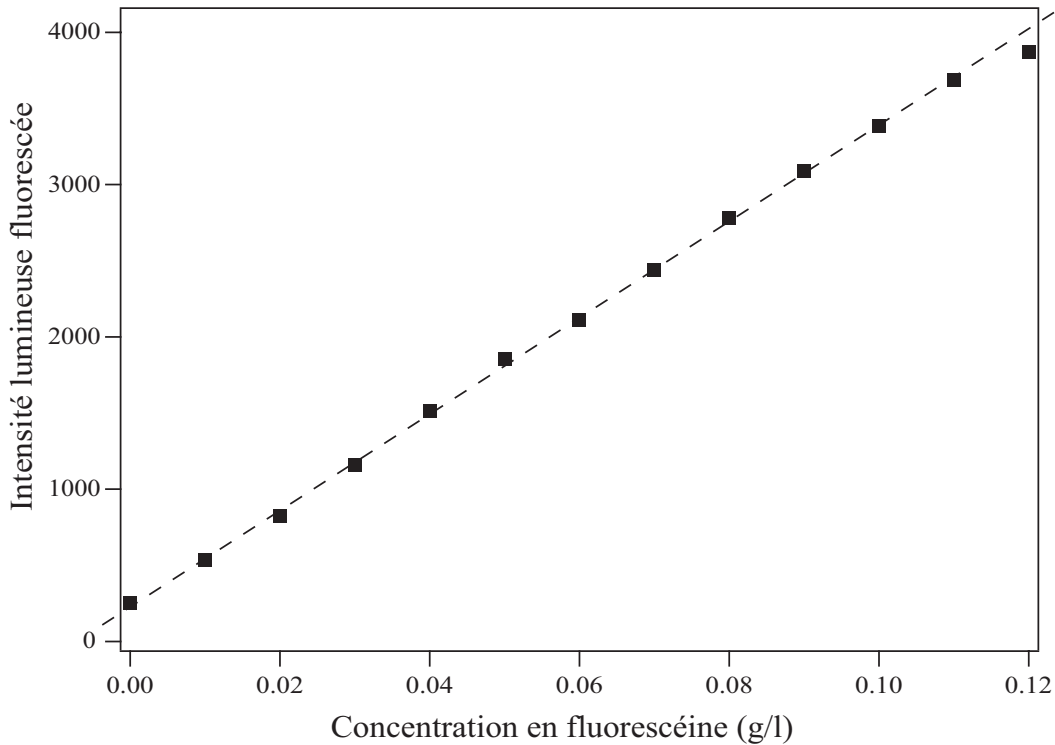


FIGURE 3.9: Variation de l'intensité lumineuse émise par fluorescence et moyennée sur l'ensemble de l'image en fonction de la concentration en fluoresceine.

Notons que l'éclairage laser n'est pas homogène sur la longueur du tube, et qu'il y a donc de fortes variations spatiales de la lumière émise par fluorescence. On s'affranchit de ce problème grâce à une normalisation faite avec le fluide pur fluorescent, et il faut, par conséquent, veiller à ne pas décaler le tube ou la caméra entre la réalisation de l'image de référence et l'expérience proprement dite.

Cette méthode de mesure nous permet ainsi d'obtenir des cartes de la fraction locale de fluide léger dans la zone illuminée par la nappe laser (c'est-à-dire un plan vertical passant par l'axe du tube). En fait, les images normalisées fournissent une concentration de colorant fluorescent normalisée par la concentration initiale dans le fluide léger ; nous supposons que cette concentration normalisée est identique à la fraction locale de fluide léger, ce qui revient à négliger la diffusion moléculaire du sel et du colorant entre les deux solutions. La figure 3.10 est un exemple d'une telle image : un codage en fausses couleurs a été utilisé de telle sorte que le fluide lourd transparent apparaît en rouge et le fluide léger fluorescent en bleu foncé. Les régions contenant un mélange entre les deux fluides apparaissent en couleurs intermédiaires.

Enfin, en supposant que la densité locale du mélange varie linéairement avec  $C(x,t)$ , les variations de  $C$  peuvent être traduites en variations de densité. Dans nos expériences, la zone d'observation est située au-dessus de la vanne, mais des observations symétriques pourraient être faites en dessous. Pour finir, comme précédemment, deux caméras vidéo classiques complètent le dispositif d'observation. Elles nous permettent d'obtenir des informations qualitatives, avec deux champs de visions différents et un nombre d'images par seconde plus élevé, sur les écoulements dans la zone illuminée.

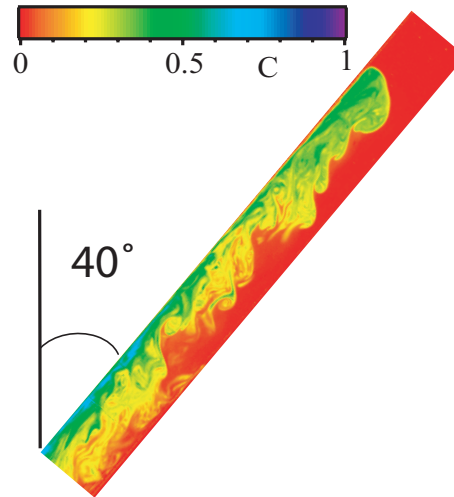


FIGURE 3.10: Image de la distribution de la fraction locale de fluide léger  $C(x, t)$  obtenue pour  $At = 4 * 10^{-3}$  et  $\mu = 10^{-3} Pa.s$  pour  $\theta = 40^\circ$  (champ filmé 20\*300mm). Le code de couleurs pour les valeurs de  $C(x, t)$  est indiqué au dessus du tube.

Dans les chapitres suivants, nous allons décrire les résultats obtenus par l'application de ces techniques expérimentales à la mesure des vitesses du front et à celle de l'évolution spatio-temporelle des profils de concentration le long du tube.



# Chapitre 4

## Dynamique des fronts de déplacement

### 4.1 Présentation

#### 4.1.1 Présentation des différents régimes

Nous avons vu précédemment que notre système peut se caractériser par deux phénomènes physiques qui, bien que liés, peuvent être étudiés séparément :

- La dynamique de front.
- Les processus de mélange en aval du front.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la dynamique de front, et ceci passera par un travail approfondi sur les vitesses des fronts d'interpénétration des fluides ; puis nous verrons, dans le chapitre suivant, les résultats obtenus concernant le mélange proprement dit.

Précisons ce que nous entendons par "vitesse de front" (figure 4.1) :

A  $t > 0$ , pour le tube incliné lorsque la vanne est ouverte, la différence de densité des fluides induit une ségrégation de ceux-ci associée à la gravité (le fluide léger monte préférentiellement près de la génératrice supérieure du tube, et le fluide lourd descend près de la génératrice inférieure), ce qui facilite l'interpénétration, et permet de garder un front avant de déplacement bien défini. Lorsque le tube est vertical, les deux fluides n'étant pas ségrégés, leur front est nettement plus mélangé, il est donc souvent difficile à définir étant donné l'incertitude sur sa localisation exacte, nous ne parlerons donc que très rarement de vitesse de front dans cette configuration. Rappelons à ce stade que les caméras vidéo filment les trente premiers centimètres de part et d'autre de la vanne ; d'autre part, étant donné que nous sommes dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, l'interpénétration des fluides est symétrique. Aussi, chaque fois que nous montrerons des images qualitatives, seront-elles issues uniquement de la caméra filmant la partie au-dessus de la vanne, comme c'est le cas sur la figure 4.1.

Pour définir plus quantitativement la notion de front et étudier sa vitesse, nous utilisons les diagrammes spatio-temporels construits à l'aide des films de la caméra digitale (où le tube est filmé

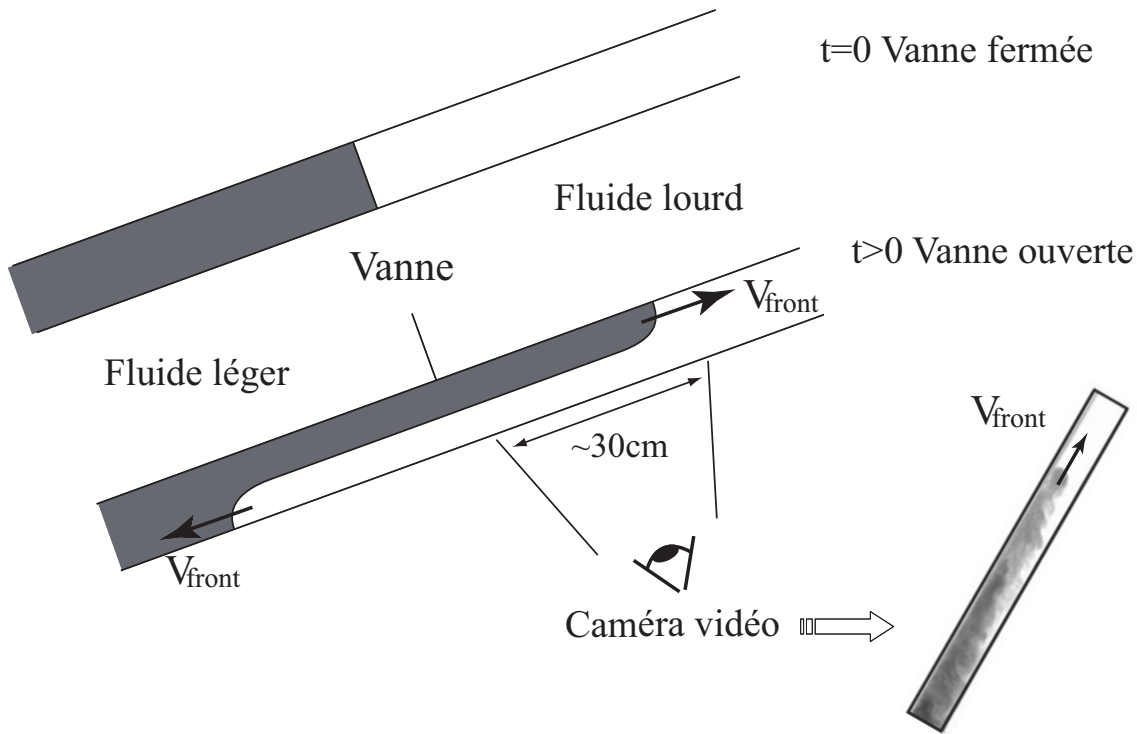


FIGURE 4.1: Schéma de l'interpénétration des deux fluides de densité différente : les fluides grisé et blanc représentent respectivement les fluides léger et lourd. Nous avons aussi repéré le champ de vision de la caméra vidéo dont on tire les images qualitatives, comme celle qui a été insérée sur ce schéma.

en entier) et que nous avons définis au paragraphe 3.2.3. Nous observons sur un diagramme spatio-temporel typique (figure 4.2) que la zone de mélange présente des frontières nettes correspondant à des fronts bien définis d'interpénétration des fluides.

De plus, la pente locale de ces frontières donne accès à la vitesse de front instantanée. Nous observons tout d'abord, aux temps courts, une décélération du front, précédée probablement par une accélération rapide non visible, car s'opérant dans une zone masquée par la vanne. Après ce régime transitoire, le front atteint une vitesse stationnaire correspondant sur le diagramme aux deux traits en tirets. La pente de ces deux segments donne ainsi accès à une valeur précise de la vitesse stationnaire en régime établi des fronts montant et descendant. Ces deux valeurs très proches l'une de l'autre seront ensuite moyennées et cette moyenne constituera la valeur de  $V_{front}$  (noté souvent  $V_f$  pour simplifier) dans cette configuration.

Nous mettons ainsi en évidence un résultat important de ces expériences : l'existence d'un régime stationnaire d'interpénétration des fluides à une vitesse  $V_{front}$  constante, précédé d'un régime transitoire court. Nous allons, dans ce chapitre, commencer par l'étude des vitesses stationnaires, puis, dans un deuxième temps, nous nous intéresserons au régime transitoire.

Nous avons alors tracé, sur la figure 4.3, la variation des vitesses de front en régime établi  $V_{front}$ , en fonction de l'inclinaison  $\theta$  du tube par rapport à la verticale, pour un contraste de densité, une viscosité, et un diamètre de tube donnés :  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$  et  $d = 20mm$ . Nous y avons ajouté des inserts correspondant à des images obtenues par les caméras vidéo (30cm de



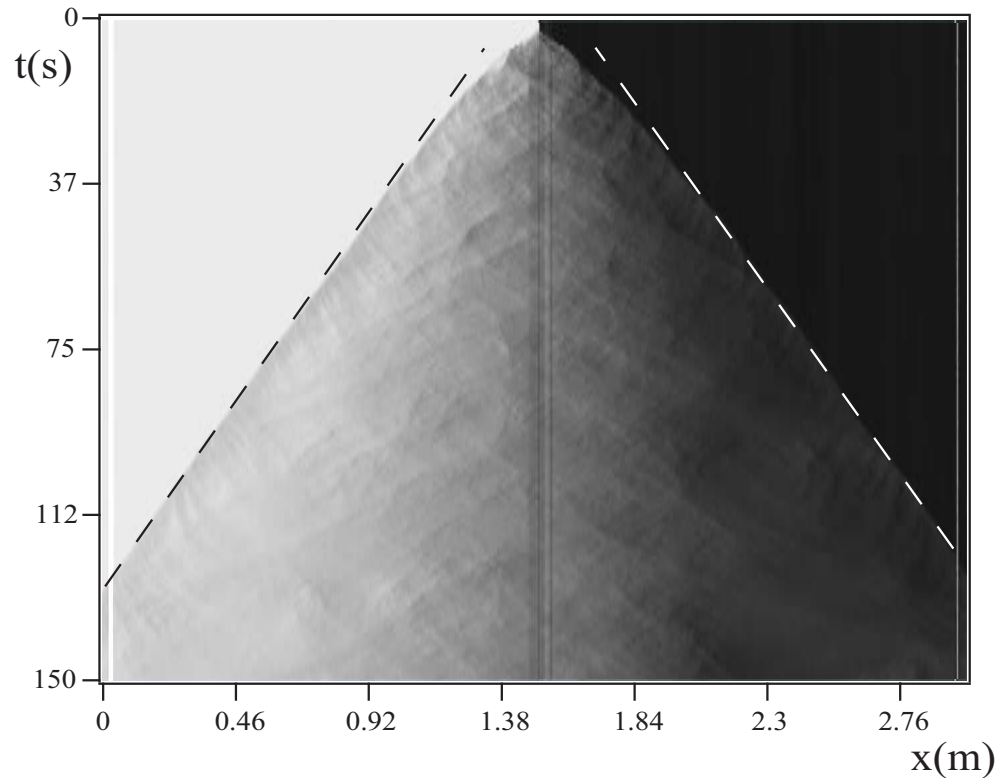


FIGURE 4.2: Diagramme spatio-temporel pour  $\theta = 35^\circ$ ,  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$  et  $d = 20mm$ . Les vitesses stationnaires en régime établi ont été repérées par des tirets pointillés.

longueur de tube filmés), qui nous donnent une idée de l'état du mélange pour quatre inclinaisons représentatives.

Nous observons, sur cette figure, trois régimes distincts :

1. Dans le premier régime ( $0 < \theta \lesssim 60^\circ$ ) le mélange semble relativement turbulent (voir insert), et assez efficace à petite échelle dans toute la dimension transverse du tube, mis à part près du front, où des effets de ségrégation nets sont visibles dès que le tube est un peu incliné. Ce régime est caractérisé par une augmentation de la vitesse de front avec  $\theta$ . Nous appellerons ce régime : **régime inertiel de fort mélange** ou régime 1.

Remarquons que l'augmentation de la vitesse de front en tube incliné par rapport au cas vertical est un phénomène analogue à l'*effet Boycott* : celui-ci, présenté dans le chapitre d'introduction, est observé lors de la sédimentation d'une suspension de particules dans un tube incliné où, de manière identique à notre problème, la sédimentation est beaucoup plus rapide que dans un tube vertical. Cet effet est dû à l'existence d'un courant de recirculation ascendant le long de la génératrice supérieure du tube. Comme dans notre expérience, cette accélération de la sédimentation en tube incliné résulte d'un gradient horizontal de concentration en particules.

2. Dans le deuxième régime ( $60^\circ \lesssim \theta \lesssim 80^\circ$ ), le mélange transverse est fortement réduit (voir insert). L'inclinaison du tube augmente la composante transverse de la gravité, qui accroît la ségrégation des fluides dans le tube, et s'oppose ainsi au mélange transverse en bloquant le

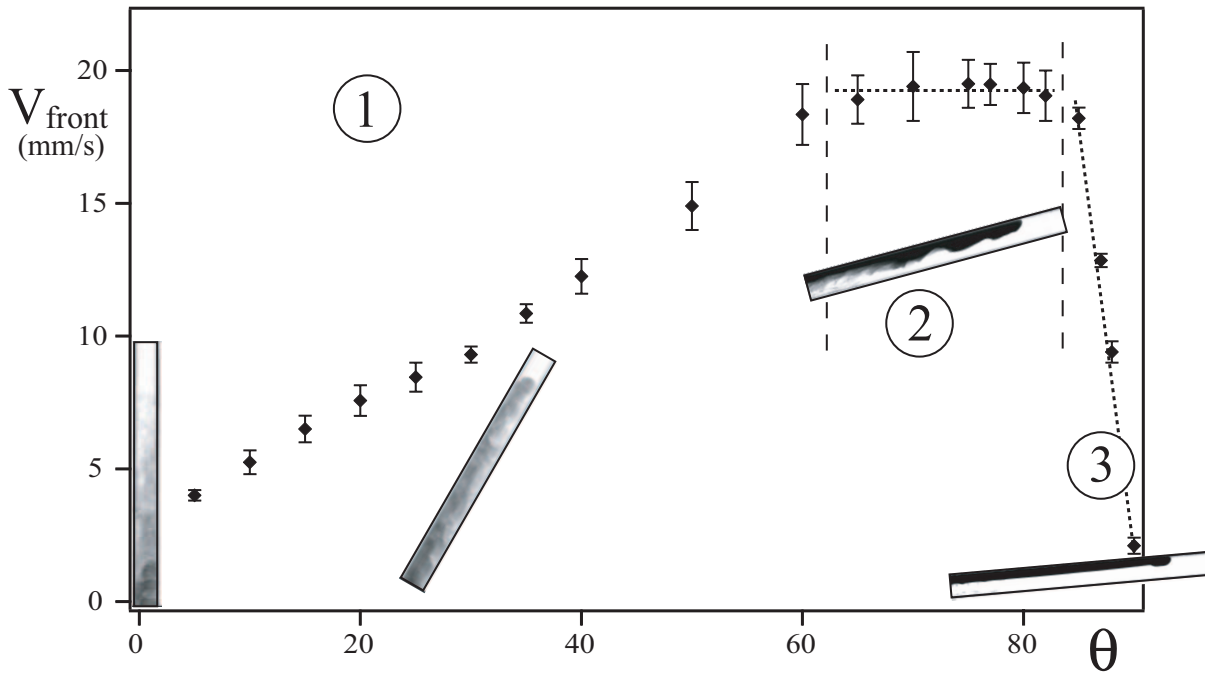


FIGURE 4.3: Vitesses de front en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  ( $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{mm}$ ). Les inserts sont des images de  $30 \text{cm}$  de longueur de tube juste au-dessus de la vanne (figure 4.1) dans le régime d'écoulement correspondant. Les tirets verticaux représentent les frontières entre les régimes, les traits pointillés sont simplement des guides pour l'œil.

développement des instabilités de cisaillement à l'interface. Ceci explique la forte réduction du mélange transverse lorsque  $\theta$  augmente. Ce régime est caractérisé par une vitesse de front maximale et constante avec  $\theta$  :  $V_f^M$ . Nous appellerons ce régime : **régime inertiel saturé** ou régime 2.

3. Dans le troisième et dernier régime, le phénomène de ségrégation devient dominant : il bloque le développement des instabilités de cisaillement, et ne permet plus aucun mélange entre les deux fluides. Ce régime de contre-écoulement parallèle est caractérisé par une diminution de la vitesse de front avec l'angle  $\theta$  : nous verrons que cette vitesse de front est contrôlée par le frottement visqueux dans toute la zone d'écoulement parallèle entre les deux fronts, aussi appellerons-nous ce régime : **régime visqueux** ou régime 3.

Au vu de cette figure et en particulier des inserts nous pouvons distinguer le régime 1, des régimes 2 et 3, suivant l'efficacité du mélange : dans le premier régime, le mélange est assez efficace et notamment au front, de ce fait le contraste de densité au front est *a priori* inférieur au contraste de densité initial entre les deux fluides (ceci est visualisé par un front plutôt gris sur les inserts) ; au contraire, dans les régimes 2 et 3, les instabilités de cisaillement sont fortement réduites (voire complètement annihilées) et le mélange ne s'opère qu'en aval du front avant ; il n'y a donc pas de mélange au front, et le contraste de densité y est alors égal au contraste initial entre les deux fluides (contraste de densité maximum visualisé sur les inserts par un front noir). **En conclusion, de même que le premier régime semble marqué par un fort mélange (même au front), les régimes 2 et 3 semblent caractérisés par la présence de fluide non mélangé au front**

(**fluide pur**). Nous vérifierons par la suite ces hypothèses de façon quantitative. Notons qu'aux forts angles d'inclinaison (régimes 2 et 3) l'écoulement est souvent très proche de celui des courants de gravité décrits par exemple dans les références [53, 4, 9, 10, 37, 49, 52, 54].

Évaluons maintenant les nombres de Reynolds caractéristiques de ces écoulements :

- les vitesses les plus faibles sont de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-3} m/s$  ;
- la taille caractéristique est celle du diamètre du tube :  $2 \cdot 10^{-2} m$  ;
- la viscosité cinématique est celle de l'eau :  $10^{-6} m^2/s$ .

Le nombre de Reynolds est donc au minimum de l'ordre de 60.

Par conséquent, dans les régimes 1 et 2 où les mouvements transverses existent, l'écoulement est dominé par des effets inertiels et résulte donc d'un équilibre inertie gravité ; en revanche dans le régime 3, régime de contre-écoulement parallèle, les termes inertiels de l'équation de Navier-Stokes sont nuls en raison de la géométrie de l'écoulement et celui-ci est alors dominé par la viscosité malgré la valeur assez élevée du nombre de Reynolds<sup>1</sup>.

Pour conclure, trois régimes sont à distinguer suivant la valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale :

**Régime 3 : régime visqueux** de contre-écoulement quasi-parallèle caractérisé par une diminution de la vitesse de front avec  $\theta$ , et aucun mélange.

**Régime 2 : régime inertiel saturé** caractérisé par une vitesse de front qui sature à une valeur quasiment indépendante de  $\theta$ , et un mélange en aval du front.

**Régime 1 : régime inertiel** caractérisé par une augmentation de la vitesse de front avec  $\theta$ , et un mélange dans tout l'écoulement.

Nous allons, dans ce chapitre, commencer par décrire les régimes inertiel et visqueux sans mélange au front (régime 2 et 3), ce qui nous permettra de définir les grandeurs caractéristique du système. Puis nous nous pencherons plus en détail sur le régime visqueux (régime 3), que nous étudierons dans sa phase stationnaire mais aussi dans sa phase transitoire. Enfin nous nous intéresserons aux régimes inertiels, avec ou sans mélange au front (régime 1 et 2), pour lesquels nous étudierons l'effet de ce mélange sur la vitesse de front en phase stationnaire et en phase transitoire.

---

<sup>1</sup>Nous rappelons que, lorsque l'écoulement est laminaire et quasi-parallèle, nous sommes dans le cadre de l'approximation de lubrification. Les régimes sont alors dominés par la viscosité tant que le nombre de Reynolds est inférieur à l'inverse de l'angle que fait localement l'interface avec l'axe du tube. Cet angle étant petit, le nombre de Reynolds pourra être supérieur à 1 [30].

## 4.1.2 Etude des régimes sans mélange au front : régimes 2 et 3

### 4.1.2.1 Présentation des données expérimentales et influence des paramètres de contrôle du système ( $At$ , $\nu$ et $d$ ).

La figure 4.4 analyse l'influence des différents paramètres de contrôle du système sur la variation de la vitesse de front  $V_f$  en fonction de l'inclinaison du tube  $\theta$  ; dans chaque figure, seul un paramètre varie (les deux autres sont maintenus constants) :

- le contraste de densité  $At$ , figure 4.4(a) ;
- la viscosité des fluides  $\nu$ , figure 4.4(b) ;
- le diamètre du tube  $d$ , figure 4.4(c).

Le fait principal observé sur ces figures est la présence constante des trois domaines discutés dans le paragraphe précédent, mais avec des gammes de valeurs de  $\theta$  différentes (pour le régime 1, nous avons simplement mis un guide pour l'œil qui donne la tendance, mais il sera étudié quantitativement plus loin).

Les autres faits marquants sont les suivants :

- Dans le régime 2, la vitesse de front ne dépend pas de la viscosité mais augmente avec  $At$  et  $d$ , renforçant l'idée que ce régime est contrôlé par les effets inertiels.
- La vitesse dans le régime 3 dépend de la viscosité, ce qui va dans le sens d'un contrôle des forces visqueuses dans ce régime.
- Le domaine d'existence des régimes 2 et 3 a une étendue qui diminue lorsque le contraste de densité  $At$  et le diamètre de tube  $d$  augmentent et lorsque la viscosité  $\nu$  diminue ; de plus, il se décale vers les angles proches de l'horizontale : il s'ensuit que le domaine du régime 1 augmente avec  $At$  et  $d$  et diminue avec  $\nu$ .

Maintenant que nous avons exposé la dépendance de la vitesse de front  $V_f$  par rapport aux différents paramètres de notre système, nous allons nous attacher, à déterminer les grandeurs caractéristiques de notre système, et ce en utilisant uniquement des arguments de lois d'échelle.

### 4.1.2.2 Définition de grandeurs caractéristiques du système : $V_t$ et $V_\nu$ et $Re_t$ .

Il apparaît clairement que les régimes 2 et 3 sont dominés respectivement par des effets inertiels et visqueux. Si les effets inertiels sont dominants la vitesse est déterminée par un équilibre entre les termes moteurs de pression d'Archimède :

$$\Delta\rho g d$$

avec  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  ; et les termes de pression inertielle qui sont plutôt de l'ordre de :

$$(\rho_1 + \rho_2)V^2$$

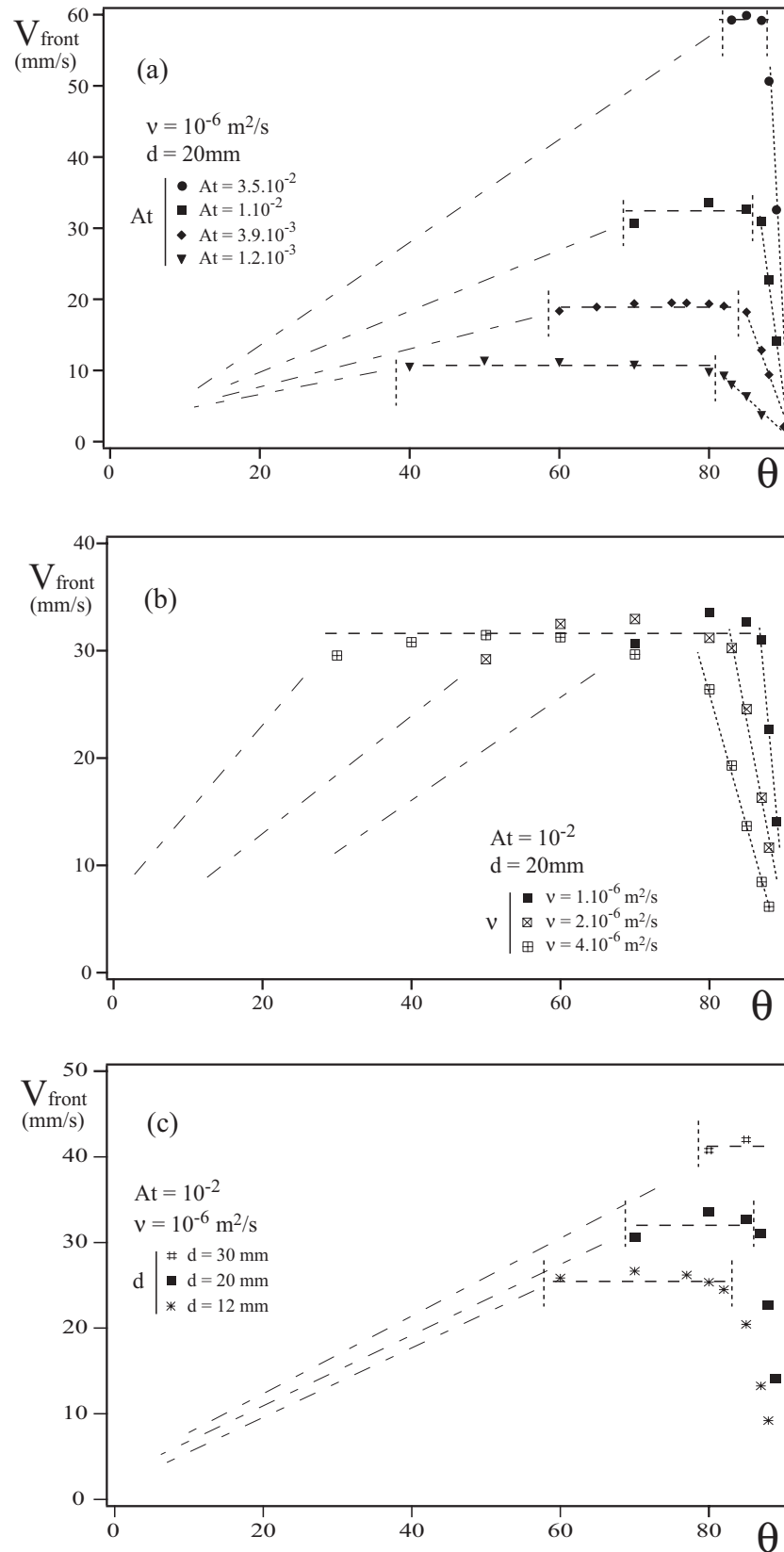


FIGURE 4.4: Variation de la vitesse de front en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ , dans les régimes d'écoulement 2 et 3, (a) pour différents contrastes de densité  $At = 3.54 \cdot 10^{-2}$  (●),  $At = 10^{-2}$  (■),  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$  (◆),  $At = 1.2 \cdot 10^{-3}$  (▼) ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ). (b) Pour différentes viscosités  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (■),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (⊠),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (⊞) ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ). (c) Pour différents diamètres de tube  $d = 12 \text{ mm}$  (\*),  $d = 20 \text{ mm}$  (■),  $d = 30 \text{ mm}$  (#) ( $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Les tirets sont des guides pour les régimes 2 et 3, les traits mixtes servent simplement à donner la tendance du régime 1.

En égalant ces deux termes nous obtenons **la vitesse caractéristique inertielle** :

$$V_t = \sqrt{Atgd} \quad (4.1)$$

Cette expression coïncide dimensionnellement avec celle de la vitesse d'une bulle de Taylor inertielle [19, 4], pour laquelle le contraste de densité normalisé  $At$ , entre l'air et l'eau, peut être pris égal à 1 (*cf.* chapitre 1) .

D'autre part, en utilisant la vitesse caractéristique  $V_t$ , on peut définir un nombre de Reynolds :

$$Re_t = \frac{V_t d}{\nu} = \frac{\sqrt{Atgd} d}{\nu} \quad (4.2)$$

Dans la suite,  $Re_t$  sera utilisé comme paramètre de référence pour comparer les résultats expérimentaux obtenus pour différents contrastes de densité et/ou viscosités des fluides et/ou diamètres de tube, en particulier dans le régime inertiel.

Si le système est gouverné par des effets visqueux, nous pouvons définir une vitesse caractéristique visqueuse. En équilibrant les contraintes visqueuses, proportionnelles à :

$$(\rho_1 + \rho_2)\nu V/d$$

par les termes de pression d'Archimède :

$$\Delta\rho g d$$

On en déduit alors **la vitesse caractéristique visqueuse** :

$$V_\nu = \frac{Atgd^2}{\nu} \quad (4.3)$$

Remarquons, pour finir, que le rapport de ces deux vitesses caractéristiques nous conduit à la relation :

$$\frac{V_\nu}{V_t} = Re_t$$

Nous allons maintenant tester la pertinence de ces grandeurs caractéristiques sur les données expérimentales présentées précédemment (figures 4.4).

#### 4.1.2.3 Régime inertiel saturé

La figure 4.5 présente la variation des vitesses de front  $V_f$  normalisées par la vitesse caractéristique inertielle  $V_t$  en fonction de  $\theta$  pour toutes les expériences présentées dans le paragraphe précédent. Nous observons que cette normalisation rassemble toutes les vitesses du régime de saturation (régime 2), notées  $V_f^M$ , sur un seul et même "plateau", tel que le rapport  $V_f^M/V_t = 0.7$  est indépendant

de  $At$ ,  $\nu$ ,  $d$ , et de l'angle  $\theta$  sur une large gamme. Nous pouvons donc affirmer que, dans le régime inertiel saturé, la vitesse du front vérifie la relation :

$$V_f^M = 0.7V_t = 0.7\sqrt{Atgd} \quad (4.4)$$

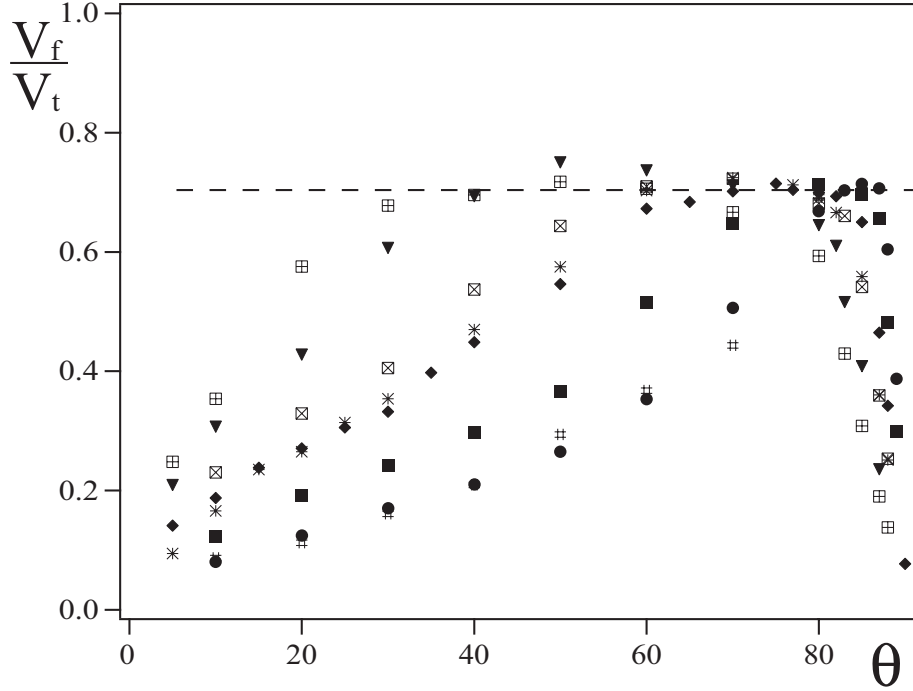


FIGURE 4.5: Variation des vitesses de front normalisées  $V_f/V_t$  avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour différents contrastes de densité, différentes viscosités, et différents diamètres du tube. La signification des symboles est la même que dans les figures 4.4.

Ce résultat fondamental démontre que la vitesse  $V_t$  est bien la vitesse caractéristique appropriée pour ce régime et confirme que la valeur du contraste de densité physiquement pertinente pour l'évaluation des forces d'Archimède dans le régime 2 est bien la différence de densité initiale  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  entre les deux fluides. Or nous avons vu au chapitre 1 que la dynamique de tels systèmes est contrôlée par la structure au front de l'écoulement ; ces résultats impliquent donc que le contraste de densité au front dans le régime 2 est bien égal à  $\Delta\rho$  ; et cela suggère, une fois de plus, que le contraste de densité au front dans le régime 1 est inférieur à  $\Delta\rho$ , comme nous le verrons quantitativement plus loin dans la discussion de ce régime.

La très faible variation de la vitesse  $V_f$  avec  $\theta$  est, au départ, plus surprenante. Nous n'observons, en particulier, absolument pas la décroissance en  $\sqrt{g \cos \theta}$  qu'on attendrait si seul la composante longitudinale de la gravité contrôlait l'écoulement ( $g$  serait alors remplacé par  $g \cos \theta$  dans 4.4). On peut comprendre qualitativement ce résultat via l'analogie avec la montée des longues bulles dans des tubes de grand diamètre. Pour un tube vertical, nous avons vu au premier chapitre que la vitesse est  $V_b = 0.35\sqrt{gd}$  [25], ce qui est proche de l'équation 4.4 à un facteur deux près et en prenant  $At = 1$  (ce qui revient à négliger la densité de l'air). Dans un tube incliné par rapport à la verticale, la vitesse de la bulle de Taylor ne décroît pas comme  $\sqrt{g \cos \theta}$  mais augmente au

contraire avec  $\theta$ , passe par un maximum, puis redescend quand  $\theta$  s'approche de l'horizontale (*cf.* figure 1.13 chapitre 1) [80, 5, 72]. Par analogie, on peut supposer que la faible variation que nous observons dans le régime inertiel de saturation reflète la proximité d'un tel maximum. Il est à noter que la vitesse n'a pas de raison de s'annuler lorsque le tube est horizontal : la propagation du front peut alors être considérée comme celle d'une vague en eau peu profonde dans une couche de fluide horizontale d'épaisseur  $d$  : la vitesse de propagation est alors toujours de l'ordre de  $\sqrt{gd}$  où  $g$  est, cette fois-ci, perpendiculaire à la direction de propagation.

En fait, quelque soit l'angle, ces résultats expriment un équilibre entre des variations de pression de type Bernoulli de l'ordre de  $\rho V^2$ , et des variations de différence de pression hydrostatique de part et d'autre de l'interface, qui sont toujours de l'ordre de  $\Delta\rho gd$ ,  $d$  étant l'ordre de grandeur de la différence de hauteur entre la "pointe" du front et la zone où l'interface devient parallèle à l'axe du tube.

Rappelons enfin un résultat démontré au premier chapitre : Benjamin [4] à trouvé théoriquement la même expression de la vitesse en  $\sqrt{Atgd}$  avec le même préfacteur (0.7) pour des tubes horizontaux et des fluides parfaits ; cette similitude est frappante malgré les différences fondamentales entre ses hypothèses et les nôtres.

#### 4.1.2.4 Régime visqueux

Nous avons vu sur la figure 4.4 (b) que, dans le régime visqueux 3, la vitesse de front  $V_f$  diminue fortement lorsque l'angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale se rapproche de  $90^\circ$  et que, pour un angle donné,  $V_f$  diminue quand la viscosité augmente. Cela suggère un écoulement laminaire visqueux de type Poiseuille, freiné par la viscosité, et généré par la composante axiale  $g \cos \theta$  de la gravité (et non pas simplement par l'accélération de gravité  $g$ ). Dans ce cas nous nous attendons à ce que  $V_f$  soit proportionnel à la vitesse caractéristique visqueuse  $V_\nu$  où l'on remplace  $g$  par  $g \cos \theta$ .

Pour nous en convaincre, traçons la variation des vitesses de front normalisées  $V_f/V_t$  en fonction du rapport des vitesses caractéristiques  $(V_\nu/V_t) \cos \theta = Re_t \cos \theta$  (figure 4.6(a)) (notons que  $Re_t \cos \theta$  augmente lorsque l'angle d'inclinaison  $\theta$  diminue, l'ordre des régimes est de ce fait inversé sur le graphique). Nous observons alors une excellente superposition dans le régime 3 de toutes les données présentées sur les figures 4.4, sur une seule et même droite passant par l'origine, c'est-à-dire que nous avons :

$$V_f \propto V_\nu \cos \theta$$

Ceci confirme que  $V_\nu \cos \theta$  est la bonne vitesse caractéristique pour ce régime, et que le régime 3 est bien un régime de contre-écoulement parallèle visqueux.

Une autre présentation de ces résultats est exploitée dans la figure 4.6(b) qui montre la variation en log-log de  $V_f/(V_\nu \cos \theta)$  en fonction de  $Re_t \cos \theta$  : le rapport  $V_f/(V_\nu \cos \theta)$  est alors à peu près constant pour les faibles valeurs de  $Re_t \cos \theta$ .

Ces deux figures montrent également la remarquable superposition des données dans le régime 2, marqué par une valeur constante de  $V_f/V_t = 0.7$  sur la figure 4.6(a), et par une droite de pente -1 sur la figure 4.6(b), ce qui est bien l'illustration du régime inertiel saturé à la vitesse  $V_f = 0.7V_t$ .



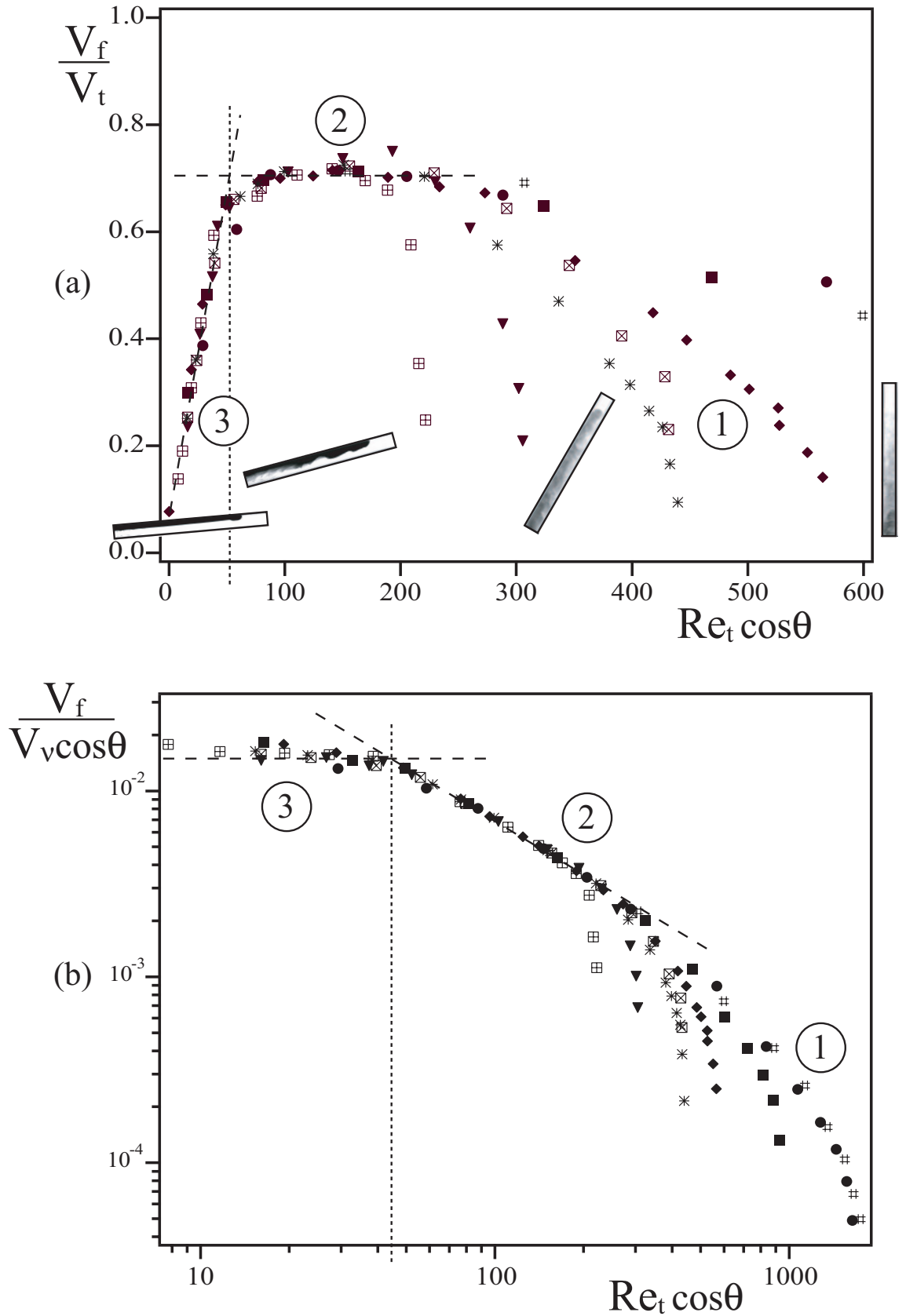


FIGURE 4.6: (a) Variation de la vitesse de front normalisée  $V_f/V_t$  en fonction de  $Re_t \cos \theta = V_\nu \cos \theta / V_t$  pour différents contrastes de densité, différentes viscosités et différents diamètres de tube. La signification des symboles est la même que dans les figures 4.4. L'augmentation de l'abscisse  $Re_t \cos \theta$  correspond à la diminution de l'angle d'inclinaison  $\theta$ , ce qui inverse donc l'ordre des régimes par rapport aux précédents graphes. (b) Vitesse de front normalisée  $V_f/(V_\nu \cos \theta)$  en fonction de  $Re_t \cos \theta$  pour les mêmes données en coordonnées logarithmiques. La pente  $-1$  de la droite en tirets obliques correspond à  $V_f \propto V_t$  (régime 2).

Ces figures nous permettent aussi de définir la transition entre les régimes inertiels et le régime visqueux comme l'intersection des deux droites correspondant aux régimes 2 et 3. Cette transition a lieu pour :

$$Re_t \cos \theta \simeq 50$$

Pour les plus grandes valeurs de  $Re_t \cos \theta$ , la transition vers le régime 1 est marquée par une déviation des courbes par rapport à la variation commune dans le régime 2. Cette déviation se produit pour des valeurs de  $Re_t \cos \theta$  qui dépendent à la fois du contraste de densité  $At$  de la viscosité  $\nu$  et du diamètre du tube  $d$  : plus précisément cette transition correspond à des valeurs de  $\theta$  d'autant plus élevées que  $At$  est grand,  $\nu$  faible et  $d$  élevé.

### 4.1.3 Mécanismes contrôlant la vitesse d'écoulement

Nous allons, dans ce paragraphe, discuter les mécanismes qui contrôlent la vitesse du front et la vitesse du fluide au sein de l'écoulement dans les différents régimes. Mais tout d'abord nous allons démontrer que la vitesse de front est égale, sous certaines conditions, à la vitesse moyenne dans l'écoulement.

#### 4.1.3.1 Relation vitesse du front - débit du fluide

On peut en effet supposer, que dans un référentiel fixe par rapport à la pointe du front, le profil de la ligne de séparation entre les deux fronts n'évolue que très lentement, au moins aux temps longs, et peut être considérée comme stationnaire. Cela implique que, dans ce même référentiel, le débit de chaque fluide à travers une section  $x = \text{cte}$  est nul. Appelons  $S_i(x)$  la section occupée par le fluide  $i$  à cette distance (voir figure 4.7),  $S_1(x) + S_2(x)$  est par définition égal à la section  $S$ .

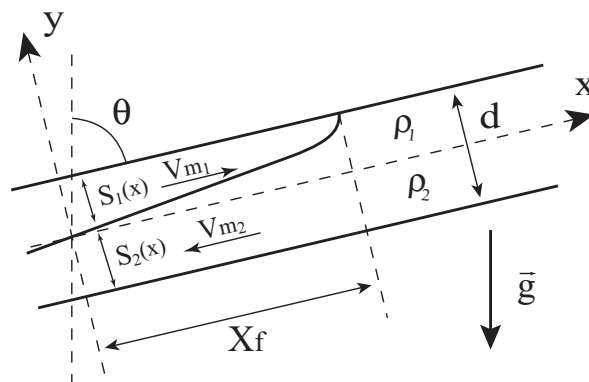


FIGURE 4.7: Schéma de l'interpénétration des fluides,  $S_i(x)$  est la section occupée par le fluide  $i$  à la distance  $x$  et  $V_{mi}(x)$  est la vitesse moyenne au sein de l'écoulement du fluide  $i$  dans la section  $S_i$  dans le référentiel lié au front.

Si on revient maintenant dans le référentiel fixe par rapport au tube, le débit  $Q_i(x)$  du fluide  $i$  vaut  $0 + V_f S_i(x)$ . Il vaut également  $V_{mi}(x) S_i(x)$  par définition (si  $V_{mi}$  est la vitesse moyenne du fluide  $i$  dans la section  $S_i$  dans le référentiel fixe), ce qui conduit à :

$$V_{mi} = V_f \quad (4.5)$$

Nous verrons toutefois dans le paragraphe 4.1.3.3 un cas particulier où cette relation ne s'applique plus ; en effet, la vitesse du front sera inférieure à la vitesse moyenne dans l'écoulement et ainsi le front va grossir, le profil de l'interface entre les fluides ne pourra plus être considéré comme stationnaire.

#### 4.1.3.2 Régime visqueux

Bien que le nombre de Reynolds soit nettement plus grand que 1 ( $Re \simeq 100$ ), l'écoulement dans la zone de mélange entre les fronts ascendants et descendants est laminaire et quasi-parallèle, l'approximation de lubrification peut donc s'appliquer : c'est alors un équilibre entre les forces de gravité et les forces visqueuses qui détermine la vitesse de l'écoulement et donc celle du front, cette dernière s'ajustant à la vitesse moyenne comme nous venons de le démontrer. Dans les régimes visqueux, c'est donc la dissipation visqueuse dans tout le volume de l'écoulement qui détermine la vitesse de front.

Il est alors important de noter que, au niveau du front, l'écoulement ne peut plus être quasi-parallèle : l'approximation de lubrification ne s'applique plus et les termes inertiels tels que la pression de Bernoulli doivent être pris en compte. C'est ce qui explique le bourrelet observé juste en arrière du front (figure 4.8). La hauteur  $h_{bour}$  de celui-ci peut être estimée en supposant que la différence de pression hydrostatique  $\Delta\rho gh_{bour}$  associée à cette sur-épaisseur équilibre la pression de Bernoulli qui est de l'ordre de  $\rho V_f^2$  d'où  $h_{bour} \propto V_f^2 / Atg$ . La hauteur du bourrelet s'adapte ainsi pour que la vitesse  $V_f = \sqrt{Atgh_{bour}}$  soit égale à la vitesse visqueuse dans cette configuration. On observera effectivement sur la figure 4.14, qui présente un écoulement transitoire visqueux qui ralentit au cours du temps, que la hauteur  $h_{bour}$  diminue lorsque la vitesse du front  $V_f$  diminue.

#### 4.1.3.3 Transition régime visqueux - régime inertiel

Lorsque l'inclinaison du tube  $\theta$  s'éloigne de l'horizontale la vitesse visqueuse augmente proportionnellement à  $g \cos \theta$  (figure 4.6). Cependant la vitesse de front  $V_f$  ne peut pas dépasser la vitesse (indépendante de  $\theta$ ) observée dans le régime 2 qui, nous l'avons vu, est de l'ordre de  $0.7V_t$ . Cette vitesse correspond, elle, à un équilibre au niveau du front entre un terme gravitaire de l'ordre de  $\Delta\rho gd$  et un terme inertiel de l'ordre de  $\rho V^2$ .

Lorsque la vitesse moyenne correspondant au régime visqueux dépasse de très peu la vitesse inertielle  $0.7V_t$  (c'est-à-dire pour des valeurs de  $\theta$  juste inférieures à celles correspondant à la transition) on observe des écoulements du type de ceux de la figure 4.9. L'excès de fluide apporté par le débit légèrement trop élevé dans la zone d'écoulement quasi-parallèle entre les fronts s'accumule sous forme d'un bourrelet situé juste en arrière du front et dont la longueur suivant l'axe croît au cours du temps. Dans ce cas, le raisonnement précédent suivant lequel  $V_{mi} = V_f$  (équation 4.5) ne s'applique plus puisqu'on a un écoulement instationnaire dans le référentiel du front.

Ce phénomène, où la vitesse de l'écoulement dominé par la viscosité est supérieure à la vitesse de front fixée par l'inertie, crée donc un ressaut qui se déplace dans le sens de l'écoulement, mais

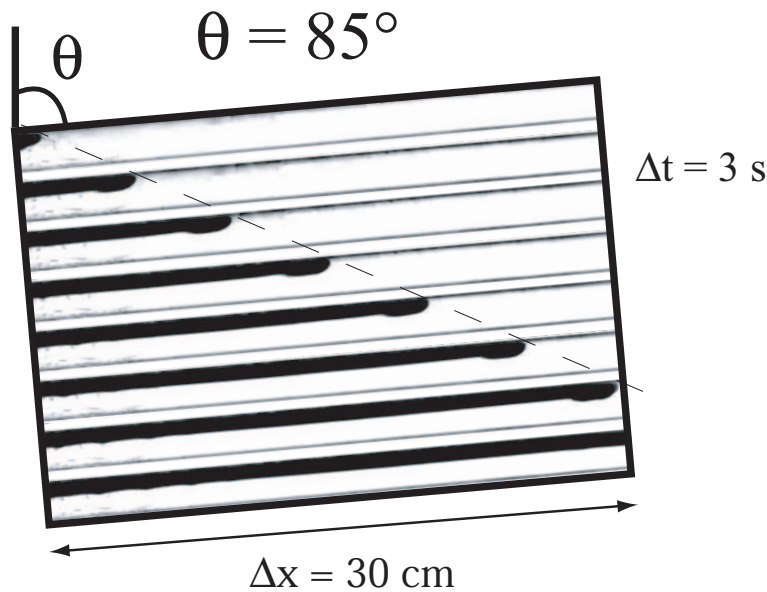


FIGURE 4.8: Visualisation de l'étalement des fluides à  $\theta = 85^\circ$ ,  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$  et  $d = 20 mm$ . Le trait pointillé note la stationarité de la vitesse de front. Cette figure nous permet la visualisation du bourrelet au niveau du front.

à une vitesse inférieure. Nous distinguons donc sur le diagramme spatio-temporel de la figure 4.9 deux frontières qui se déplacent à vitesse constante, une première qui est le front avant (la plus à l'extérieur) et la deuxième qui est la limite entre le bourrelet dont la hauteur est d'environ 60% du tube et le reste de l'écoulement dont la hauteur est d'environ 35% du tube. Dans ce cas, la vitesse de front est égale à  $31 mm/s$  et la vitesse du ressaut à  $10 mm/s$ . Ce phénomène n'est pas anecdotique ; il se retrouve toujours à la limite entre le régime inertiel et le régime visqueux quels que soient les valeurs des paramètres de contrôle.

#### 4.1.3.4 Régime inertiel

Lorsque  $\theta$  diminue encore, la vitesse du front reste d'abord égale à  $0.7V_t$ , mais l'écoulement entre les fronts se déstabilise et n'est plus du tout laminaire. L'excès d'énergie motrice, apportée par les forces d'Archimède, est absorbé par ces instabilités et non plus seulement par la viscosité. La variation d'énergie potentielle globale est alors absorbée par la dissipation turbulente dans l'ensemble du sillage derrière le front, mais en revanche, c'est localement au niveau même du front que la vitesse de celui-ci est déterminée par un équilibre entre les variations de pression hydrostatique et de pression de Bernoulli.

En se rapprochant encore plus de la verticale, le mélange induit par les instabilités devient suffisant pour réduire le contraste de densité au front, ce qui entraîne une diminution de la vitesse de celui-ci dans le régime 1.

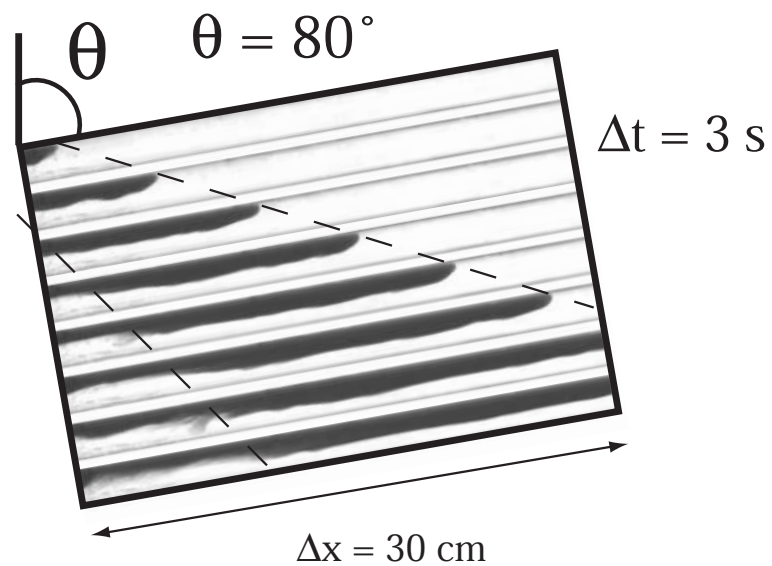
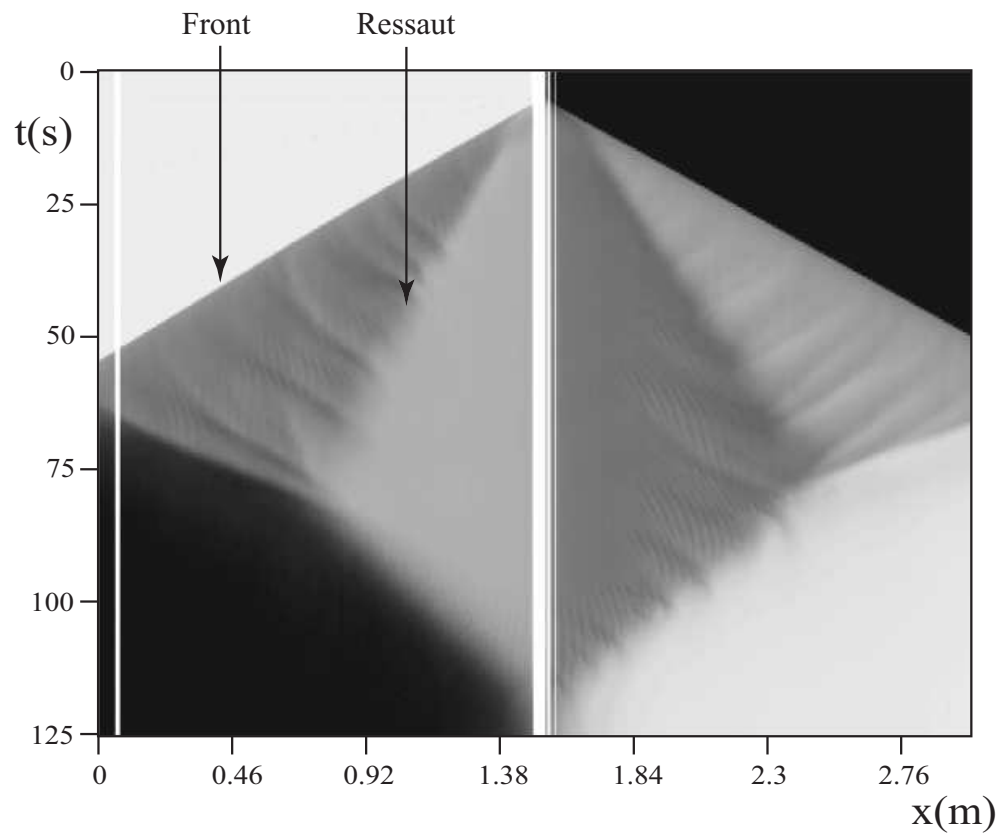


FIGURE 4.9: En haut : diagramme spatio-temporel observé pour  $\theta = 80^\circ$ ,  $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 2.10^{-6} m^2/s$  et  $d = 20mm$  illustrant le phénomène de croissance d'un bourrelet en arrière du front. En bas : visualisation d'un phénomène similaire pour la même inclinaison, mais avec  $At = 3.9.10^{-3}$  et  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ . Ces deux écoulements sont observés à une valeur de  $\theta$  juste inférieure à celle correspondant à la transition entre les régimes visqueux et inertiels. La vitesse moyenne d'écoulement entre les fronts est supérieure à la vitesse des fronts, et l'apport correspondant de fluide provoque une croissance des bourrelets en arrière des fronts.

## 4.2 Régime visqueux

Dans la partie précédente, nous avons montré que, pour  $Re_t \cos \theta \lesssim 50$ , un contre-écoulement stable parallèle s'établit, contrôlé par la dissipation visqueuse dans tout le volume de l'écoulement. Cet écoulement est induit par les forces d'Archimède, proportionnelles à la composante longitudinale de la gravité  $g \cos \theta$ , et au contraste de densité initial  $\Delta \rho$  entre les deux fluides. Nous allons d'abord chercher une expression théorique de la vitesse de ces écoulements en régime stationnaire puis discuter les régimes transitoires, particulièrement importants près de l'horizontale.

### 4.2.1 Régime visqueux stationnaire

Pour évaluer la vitesse de contre-écoulement stationnaire en régime visqueux dans un tube incliné, nous allons utiliser un calcul dû à E.J. Hinch, et applicable au cas où l'interface entre les deux fluides sépare exactement la section du tube en deux (figure 4.10) (bien que cette condition ne soit pas toujours exactement vérifiée).

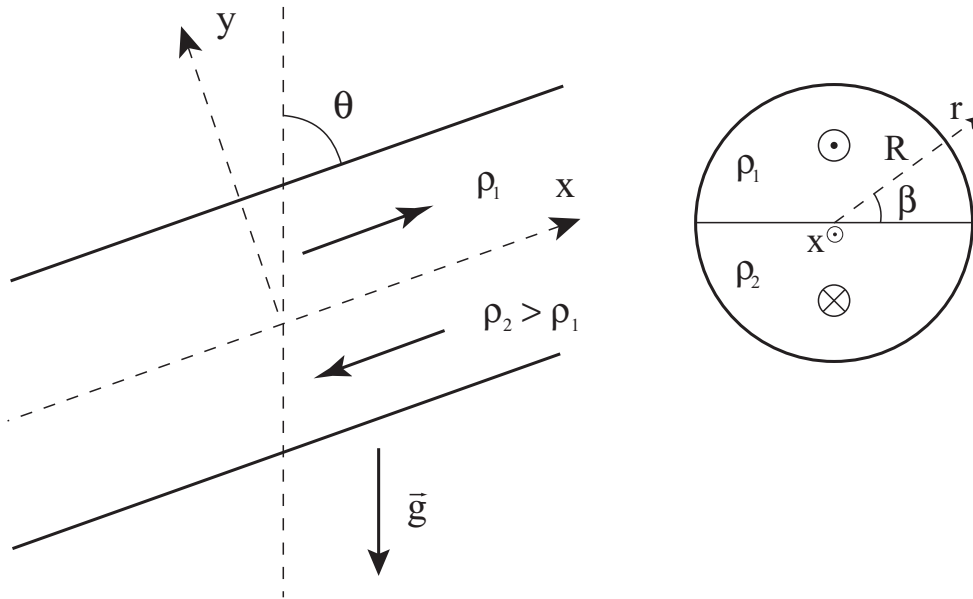


FIGURE 4.10: Schéma d'un contre-écoulement stratifié dans un tube incliné.  $\beta$  et  $r$  sont les coordonnées polaires dans le tube,  $R$  est le rayon du tube et  $\theta$  est l'angle que fait le tube par rapport à la verticale.

L'écoulement étant parallèle et stationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes ( $\beta$  et  $r$  sont définis sur la figure 4.10) :

$$\eta \Delta \vec{u}(r, \beta) = \overrightarrow{\text{grad}P} - \rho(\beta) \vec{g} \quad (4.6)$$

avec :

$$\vec{u}(r, \beta) = (u_x(r, \beta), 0, 0)$$

Si on pose

$$\rho(\beta) = \begin{cases} \rho_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} = \bar{\rho} - \frac{\Delta\rho}{2} & 0 \leq \beta < \pi \\ \rho_2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} = \bar{\rho} + \frac{\Delta\rho}{2} & \pi \leq \beta < 2\pi \end{cases}$$

avec

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 > 0$$

Ainsi

$$\rho(\beta) = \bar{\rho} + f(\beta)\Delta\rho \quad \text{avec} \quad f(\beta) = \begin{cases} -1/2 & 0 \leq \beta < \pi \\ 1/2 & \pi \leq \beta < 2\pi \end{cases}$$

Enfin, les conditions aux limites sur les parois imposent :

$$u = 0 \text{ pour } r = R$$

Projetons maintenant l'équation de Stokes 4.6 sur  $x$  :

$$\eta\Delta u_x = \frac{\partial P}{\partial x} + \bar{\rho}g \cos \theta + f(\beta)\Delta\rho g \cos \theta \quad (4.7)$$

Le gradient de pression longitudinale  $\partial P/\partial x$  est forcément constant suivant  $x$  par invariance par translation. Le gradient radial  $\partial P/\partial r$ , s'il n'est pas nul, doit être aussi constant suivant  $x$ . Il en résulte que  $\partial P/\partial x$  doit être constant dans tout l'écoulement. De plus, compte tenu du fait que chaque fluide occupe la moitié de la section du tube, on peut supposer que les deux champs de vitesses sont exactement anti-symétriques :

$$u_x(r, \beta) = -u_x(r, -\beta)$$

Comme les autres termes de l'équation (4.7) sont constants dans chacune des demi-sections, les composantes qui changent de signe au passage d'un fluide à l'autre et celles qui restent constantes doivent être séparément nulles, on a ainsi d'une part :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \bar{\rho}g \cos \theta = 0$$

(le gradient de pression longitudinal s'oppose donc au gradient de pression hydrostatique moyen) et d'autre part :

$$f(\beta)\Delta\rho g \cos \theta - \eta\Delta u_x = 0 \quad (4.8)$$

On réécrit l'équation 4.8 sous une forme sans dimension, en posant :

$$u_x^* = \frac{u_x}{[u_x]} \quad \text{avec} \quad [u_x] = \frac{\Delta\rho g \cos \theta R^2}{\eta}$$

et

$$r^* = r/R$$

Il nous faut alors résoudre l'équation sans dimension :

$$\Delta^* u_x^*(r^*, \beta) = f(\beta) \quad (4.9)$$

avec les conditions aux limites :

$$u_x^* = 0 \text{ pour } r^* = 1$$

On omettra l'astérisque "\*" par la suite.

Pour ce faire, on développe  $f(\beta)$  en série de Fourier (il n'y aura pas de termes en cosinus car la fonction est impaire) :

$$f(\beta) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sin(n\beta)$$

avec

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} \sin(n\beta) d\beta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\frac{1}{2} \sin(n\beta) d\beta \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(n\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\pi n} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{1}{\pi n} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi n} & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons développer le champ de vitesse sous la forme :

$$u_x(r, \beta) = \sum_{n \text{ impair}} u_n(r) \sin(n\beta)$$

Comme l'opérateur  $\Delta$  est linéaire, on peut réécrire l'équation (4.9) sous la forme d'une somme de termes en  $\sin(n\beta)$ , qui doivent être individuellement nuls puisque cette base est orthogonale. Pour les modes  $n$  impairs, qui interviennent seuls dans le développement, on doit donc avoir :

$$\Delta u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u_n = -\frac{2}{\pi n} \quad (4.10)$$

Pour déterminer  $u_n$ , on le développe en série sous la forme  $u_n = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} a_\alpha r^\alpha$  et on détermine tous les coefficients  $a_\alpha$

On trouve alors qu'il n'existe que deux seuls termes différents de zéro  $\alpha = 2$  et  $\alpha = n$  ( $n$  impair) :

$$u_n = -\frac{2}{\pi n(n^2 - 4)} (r^n - r^2)$$

En vue de déterminer la vitesse moyenne, calculons maintenant le flux adimensionné  $Q^*$  :



$$\begin{aligned}
Q^* &= \int_0^\pi \int_0^1 u_x(r, \beta) r d\beta dr \\
&= \sum_{n \text{ impair}} \int_0^\pi \int_0^1 -\frac{2}{\pi n(n^2 - 4)} (r^n - r^2) \sin(n\beta) r d\beta dr \\
&= \sum_{n \text{ impair}} -\frac{2}{\pi n(n^2 - 4)} \cdot \frac{2}{n} \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{\pi n^2 (n+2)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

On obtient alors pour la valeur du flux  $Q$  :

$$Q = \left( \frac{\pi}{16} - \frac{1}{2\pi} \right) \frac{\Delta \rho g R^4}{\eta} \cos \theta$$

Pour obtenir la vitesse moyenne théorique  $V_{visq}^{thq}$  qui correspond à la vitesse de front théorique dans le régime visqueux, on divise le flux par la demi-surface de la section du tube  $\pi R^2/2$  et on obtient finalement (avec  $R = d/2$ ) :

$$V_{visq}^{thq} = \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \frac{\Delta \rho g d^2}{2\eta} \cos \theta \quad (4.11)$$

Enfin, pour faire apparaître le nombre d'Atwood, on suppose que les deux fluides ont la même viscosité cinématique, notée  $\nu_{eff} = \eta/\bar{\rho}$  (ce qui est généralement bien vérifié). Avec  $At = \Delta\rho/2\bar{\rho}$ , on obtient ainsi pour **la vitesse de front théorique en régime visqueux** :

$$V_{visq}^{thq} = k_v \frac{At g d^2}{\nu_{eff}} \cos \theta \quad (4.12)$$

avec

$$k_v = \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{2\pi^2} \right)$$

Traçons maintenant dans la figure 4.11 la variation des vitesses de front mesurées expérimentalement en fonction de cette vitesse théorique (équation 4.12).

Nous observons alors une excellente proportionnalité dans ce régime entre la vitesse expérimentale du front ( $V_f$ ) et la valeur théorique ( $V_{visq}^{thq}$ ). Bien que le rapport  $V_f/V_{visq}^{thq} = 1.25$  soit différent de 1, le modèle théorique est ainsi très bien validé. Ce facteur 1.25 peut résulter d'une validité imparfaite de l'hypothèse de symétrie des écoulements dans la section.

Nous voyons plus clairement la validité de ces résultats pour chaque cas individuel dans la figure 4.12, où on a tracé en fonction de  $\theta$  les points expérimentaux et les valeurs théoriques corrigées en tenant compte du facteur 1.25. Sur cette figure nous n'avons pas mis toutes les données expérimentales de la figure précédente pour une meilleure lisibilité.

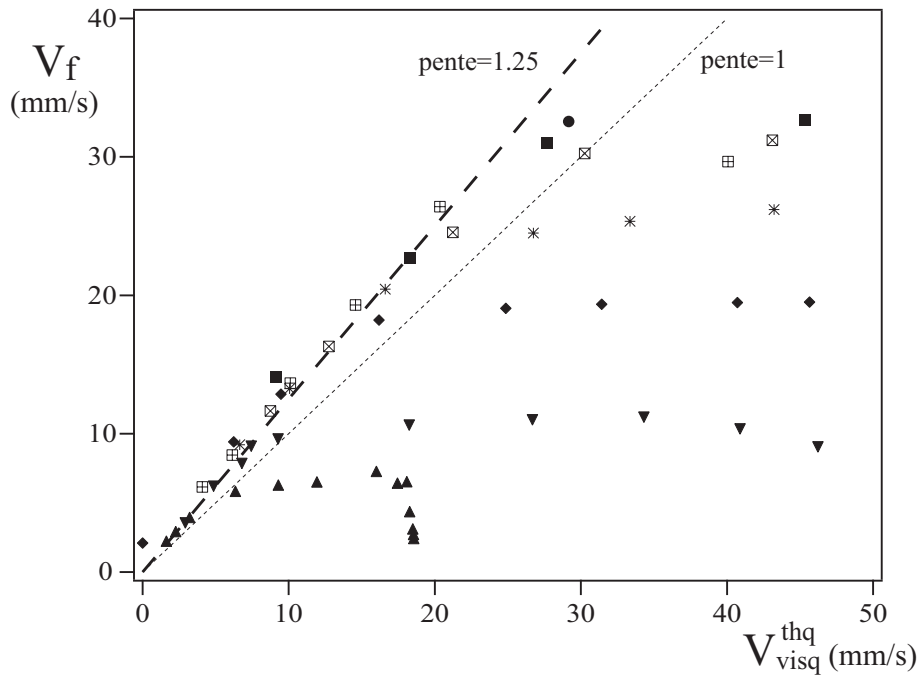


FIGURE 4.11: Vitesses expérimentales de front  $V_f$  en fonction de la vitesse de front théorique en régime visqueux  $V_{visq}^{thq}$  (équation 4.12) pour l'ensemble des données que nous avons présentées jusqu'ici : les valeurs par défaut des paramètres sont  $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ ,  $d = 20mm$  (■). Les symboles correspondants à des valeurs de paramètres différents sont les suivants :  $At = 3.54 \cdot 10^{-2}$  (●),  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$  (◆),  $At = 1.2 \cdot 10^{-3}$  (▼),  $At = 4 \cdot 10^{-4}$  (▲),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} m^2/s$  (⊠),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} m^2/s$  (⊞),  $d = 12mm$  (\*),  $d = 30mm$  (‡). La droite en tirets fins est de pente 1, la droite en tirets gras est de pente 1.25.

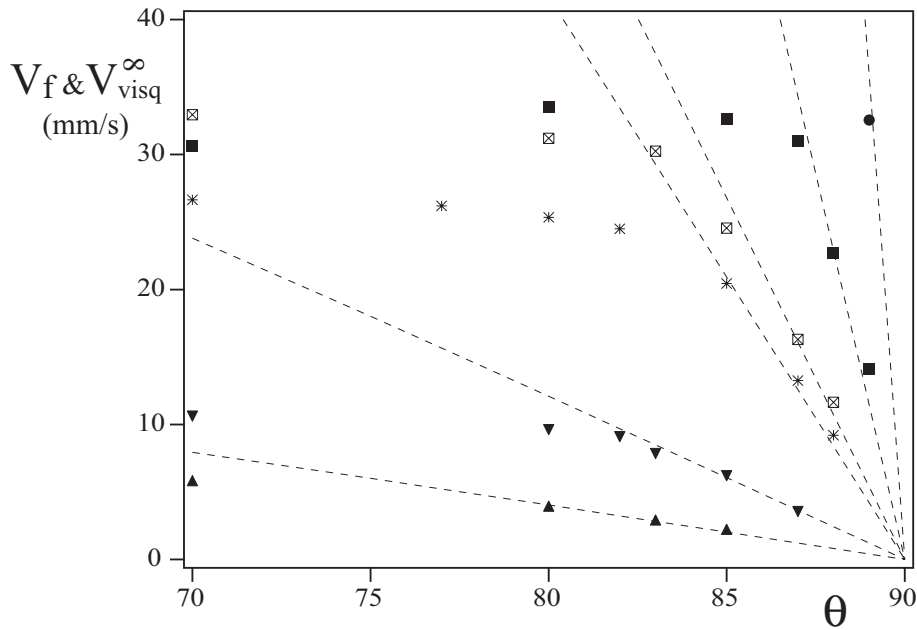


FIGURE 4.12: Vitesses théoriques ajustées  $V_{visq}^{\infty} = 1.25 * V_{visq}^{thq}$  en tirets, et vitesses expérimentales, en fonction de l'angle  $\theta$  pour un tube proche de l'horizontale. Les symboles correspondant aux données expérimentales ont la même signification que sur les figures précédentes.

Nous obtenons finalement, en utilisant la vitesse caractéristique  $V_\nu = \frac{Atgd^2}{\nu}$ , l'expression des vitesses de front en régime visqueux :

$$V_{visq}^\infty = \alpha k_v V_\nu \cos \theta \quad (4.13)$$

avec

$$\alpha = \alpha^{fit} = 1.25$$

et

$$k_v = \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{2\pi^2} \right)$$

L'indice supérieure  $\infty$  de  $V_{visq}^\infty$  signifie que la vitesse est mesurée à grande distance, nous discuterons ce point plus tard. Nous verrons aussi par la suite que cette valeur de  $\alpha$  doit encore être légèrement corrigée car, dans certaines des expériences précédentes, le front n'a pas encore atteint sa vitesse stationnaire à l'extrémité du tube, ce qui fausse un peu les ajustements précédents.

## 4.2.2 Phase d'écoulement transitoire en régime visqueux

### 4.2.2.1 Mise en évidence qualitative des régimes transitoires

Nous avons jusqu'ici travaillé sur les vitesses de front en régime stationnaire atteintes aux temps longs. Nous allons nous intéresser maintenant aux régimes transitoires observés à des temps plus courts mais toujours en régime visqueux.

La figure 4.13 illustre bien ces régimes transitoires : elle montre des diagrammes spatio-temporels obtenus pour un même contraste de densité ( $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ), une même viscosité ( $\nu = 10^{-6} m^2/s$ ), un même diamètre de tube ( $d = 20mm$ ) et trois inclinaisons  $\theta$  différentes. Pour  $\theta = 85^\circ$ , la frontière de la zone d'interpénétration qui montre l'évolution en temps de la position du front est quasiment droite sur tout le diagramme spatio-temporel, c'est-à-dire que la vitesse du front reste constante pendant toute l'expérience. En revanche, plus près de l'horizontale ( $\theta = 88^\circ$ ), la vitesse diminue initialement au cours du temps pour atteindre une valeur constante (frontière courbe aux temps courts puis droite sur le diagramme spatio-temporel). Enfin, pour un tube horizontal, la vitesse continue de décroître pendant toute la durée du déplacement. La durée de la phase transitoire semble donc augmenter lorsqu'on se rapproche de l'horizontale.

Nous nous intéressons tout d'abord au régime d'étalement pour un tube horizontal.

### 4.2.2.2 Déplacement du front en tube horizontal ( $\theta = 90^\circ$ )

Dans cette configuration, le fluide s'étale sous l'effet d'une différence de pression hydrostatique très faible, correspondant à une hauteur de l'ordre du diamètre du tube. La figure 4.14 montre une séquence d'images du front pendant le déplacement de celui-ci.

Nous observons sur la figure 4.14 que l'interface est parfaitement stable : dans un tel cas, l'énergie potentielle apportée par la faible différence de hauteur est entièrement dissipée par la viscosité. La miscibilité des fluides ne joue alors aucun rôle, si ce n'est par le biais de la diffusion

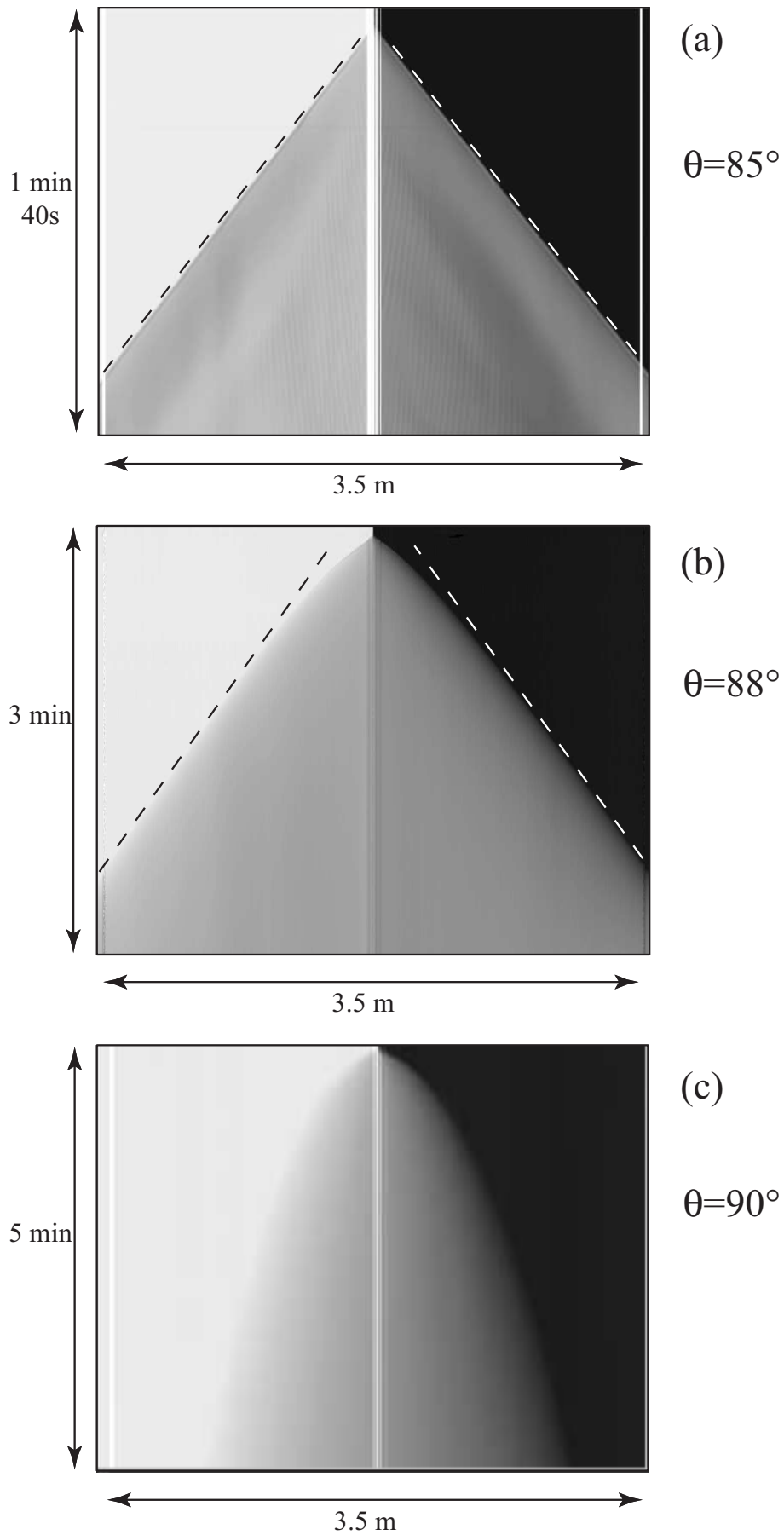


FIGURE 4.13: Diagrammes spatio-temporels en régime visqueux pour  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$  et (a)  $\theta = 85^\circ$ , (b)  $\theta = 88^\circ$  (c)  $\theta = 90^\circ$ . Les vitesses stationnaires en régime établi ont été repérées par un trait en tirets.

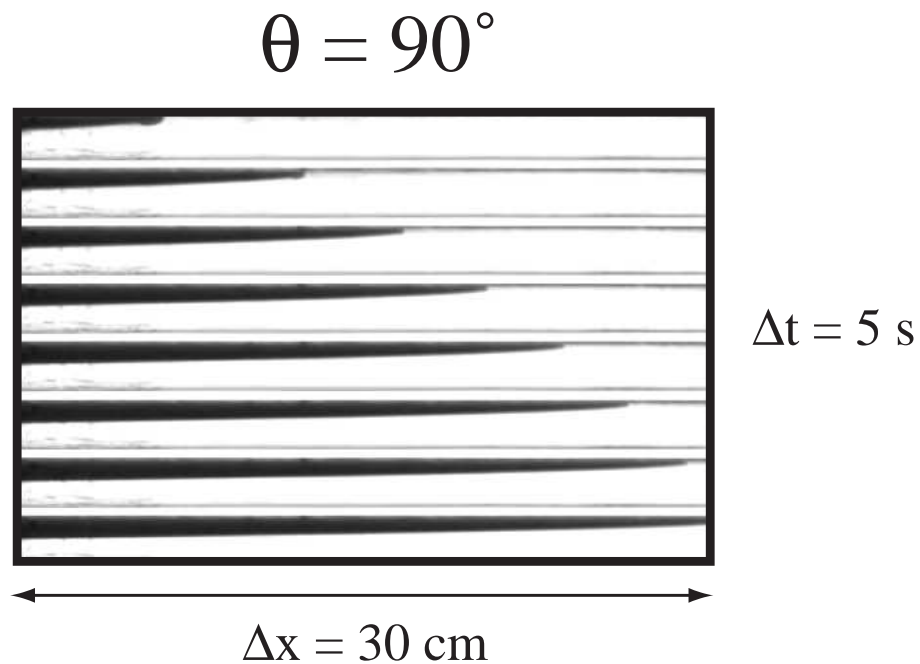


FIGURE 4.14: Séquences d'images des 30cm de longueur de tube situés au-dessus de la vanne pour  $\theta = 90^\circ$ , c'est-à-dire pour un tube horizontal (le contraste de densité correspond à :  $At = 3.9.10^{-3}$ ).

moléculaire, et nous aurions donc le même résultat avec des fluides non miscibles sans tension superficielle. Notons qu'un déplacement symétrique est observé de l'autre côté de la vanne, ce qui reflète la validité de l'approximation de Boussinesq.

A partir des figures 4.14 et 4.15(a), nous observons que ce déplacement présente les caractéristiques suivantes :

- La vitesse du front diminue constamment au cours du temps (dynamique instationnaire).
- Les vitesses sont très lentes et sont seulement de l'ordre de  $1.5 \text{ mm/s}$  près des extrémités du tube.
- L'épaisseur de fluide augmente continûment à partir d'une très faible valeur près du front (la hauteur du front est ici très faible) jusqu'au rayon du tube près de la vanne.

Notons qu'aux temps courts nous retrouvons un "bourrelet" juste en arrière du front de pénétration et qu'il disparaît par la suite comme nous l'avions remarqué précédemment.

Par ailleurs, comme les deux fluides restent séparés, les valeurs de concentrations relatives moyennes montrées dans la figure 4.15(a) reflètent en réalité la hauteur relative de chaque fluide par rapport au diamètre ( $\bar{C} = (C_1 h_1 + C_2 h_2)/(h_1 + h_2)$ ), à la distance de la vanne correspondante (mesurée suivant l'axe). Ces profils de hauteur relative sont tracés à différents instants sur la figure 4.15(b). La forme en parabole de la frontière dans le diagramme spatio-temporel suggère une variation en  $\sqrt{t}$  de la distance du front à la vanne. Cette hypothèse est vérifiée quantitativement (figure 4.15(c)) en traçant ces profils en fonction de la distance normalisée  $x/\sqrt{t}$  : on observe effectivement une très bonne coïncidence des profils (sauf au temps le plus court) dans ces coordonnées

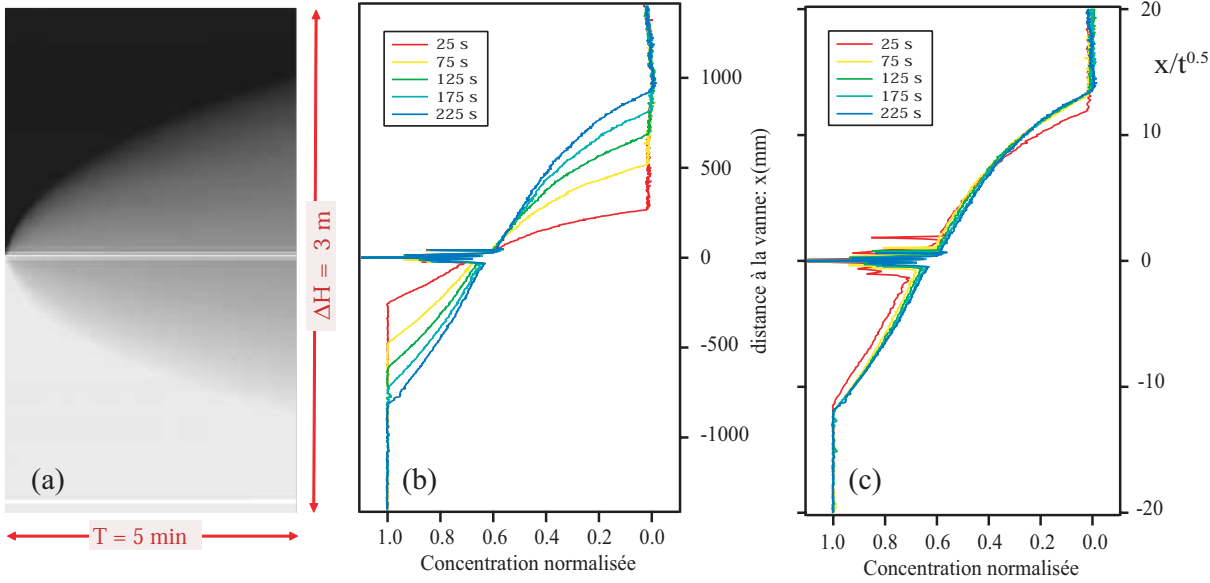


FIGURE 4.15: Expériences réalisées pour :  $At = 3.9.10^{-3}$  et  $\theta = 90^\circ$ . (a) : diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne normalisée. (b) et (c) : profils de concentration normalisée, à différents instants tracés en fonction de la distance à la vanne puis de la distance normalisée  $x/\sqrt{t}$ . Notons que, dans ce cas où il n'y a pratiquement aucun mélange, la concentration des fluides est proportionnelle à leur hauteur.

normalisées. **Dans cette configuration l'étalement des fluides se fait donc en  $\sqrt{t}$ .** Remarquons cependant qu'il est impossible d'ajuster les profils de concentration par des fonctions erreur ; la croissance de la zone d'interpénétration (en  $\sqrt{t}$ ) n'est donc pas diffusive.

Ce phénomène d'étalement qui ralentit en  $\sqrt{t}$  peut s'expliquer qualitativement comme suit : le débit est purement induit par le gradient de pression longitudinal (il n'y a pas de composante horizontale de la gravité) et ce dernier est proportionnel à la pente de l'interface. De plus, au cours de l'étalement, cette pente (et par conséquent le débit) diminue comme l'inverse de la distance  $x$  parcourue par le front, et les écoulements ralentissent donc progressivement avec  $dx/dt \propto 1/x$ , ce qui conduit finalement à  $x \propto \sqrt{t}$ .

Sur la base de cet argument qualitatif, qui n'est autre qu'un argument de conservation de masse, nous allons maintenant démontrer analytiquement, dans une géométrie simplifiée, la décroissance en  $\sqrt{t}$ .

#### 4.2.2.3 Modélisation à deux dimensions de l'étalement en tube horizontal

Nous nous intéresserons à l'écoulement simplifié bi-dimensionnel entre deux plans : figure 4.16(a).

Écrivons l'équation de conservation de la masse des fluides entre les sections  $x$  et  $x + dx$  :

$$\begin{aligned} +\frac{\partial Q_1}{\partial x} dx &= \frac{\partial h}{\partial t} dx \\ -\frac{\partial Q_2}{\partial x} dx &= \frac{\partial h}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

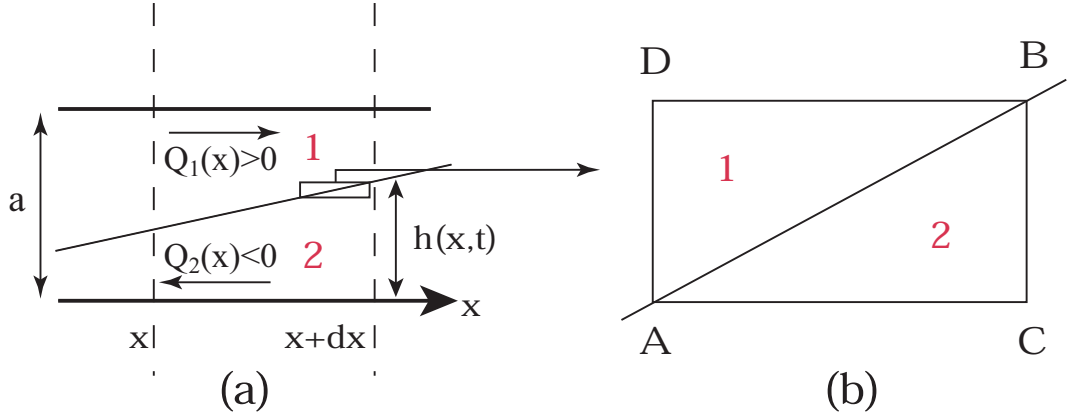


FIGURE 4.16: (a) Schéma de l'écoulement entre deux plans de deux fluides ségrégés. (b) Élément d'un volume infinitésimal de fluide comprenant l'interface.

où  $Q_i$  est le débit du fluide  $i$  à travers la section perpendiculaire à l'axe.

En supposant  $\partial h/\partial x \ll 1$  et un nombre de Reynolds  $Re \ll (\partial h/\partial x)^{-1}$ , nous supposons valable l'approximation de lubrification. Les débits  $Q_i$  correspondent alors à ceux d'un écoulement de Poiseuille entre deux plans solides<sup>2</sup> [30] :

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{(a-h)^3}{12\eta} \\ Q_2 &= -\frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{h^3}{12\eta} \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $P_i$  est la pression du fluide  $i$  et  $\eta$  la viscosité des fluides.

Les équations (4.14) et (4.15) induisent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) dx = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(a-h)^3}{12\eta} \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial h}{\partial t} dx$$

En négligeant le terme du second ordre  $(\partial h/\partial x)(\partial P_i/\partial x)$ , nous obtenons :

$$\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{(a-h)^3}{12\eta} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

Exprimons alors de deux manières la variation de pression  $P_A - P_B$  le long du segment AC de l'interface, en tenant compte de la continuité de la pression de part et d'autre de celle-ci, et en supposant toujours la pente de l'interface  $\partial h/\partial x$  faible (figure 4.16(b)) :

$$P_B = P_A + \frac{\partial P_2}{\partial x} dx - \rho_2 g dh$$

et

$$P_B = P_A + \frac{\partial P_1}{\partial x} dx - \rho_1 g dh$$

D'où

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial x} = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.17)$$

<sup>2</sup>Ici les conditions aux limites sont les mêmes car la vitesse est nulle au milieu par symétrie.

Soit en dérivant cette équation par rapport à la variable  $x$  :

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = (\rho_2 - \rho_1)g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (4.18)$$

Les équations (4.16) et (4.18) donnent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \left( \frac{1}{h^3} + \frac{1}{(a-h)^3} \right) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{12\eta} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (4.19)$$

Pour démontrer qu'il existe des solutions auto-similaires pour lesquelles la hauteur est seulement fonction de  $x/\sqrt{t}$ , exprimons cette équation en fonction de cette nouvelle variable, en posant :

$$\theta = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t}} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Et

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left( -\frac{1}{2} \frac{x}{t^{3/2}} \right) \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

Nous avons alors

$$-\frac{1}{2}\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( \frac{1}{h^3} + \frac{1}{(a-h)^3} \right) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{12\eta} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \quad (4.20)$$

**L'équation (4.19) admet donc bien pour solutions une famille de fonctions auto-similaires :**

$$h(x/\sqrt{t}).$$

Pour de telles fonctions, si nous traçons les hauteurs de fluides (qui sont, nous le rappelons, proportionnelles à leurs "concentrations") en fonction de  $x/\sqrt{t}$ , les courbes se superposent ; c'est ce que nous observons pour les courbes expérimentales de la figure 4.15(c) (sauf pour celle correspondant au temps le plus courts).

Nous retrouvons donc bien un étalement des fluides en  $\sqrt{t}$ . Pour avoir une véritable équation de diffusion, et ainsi pouvoir ajuster les profils de concentration par des fonctions erreur, il aurait fallu que la hauteur soit constante, les différences étant particulièrement sensibles dans les régions de faible épaisseur.

#### 4.2.2.4 Etude du régime visqueux transitoire pour des tubes proches de l'horizontale

Établissons tout d'abord l'expression analytique de la vitesse du front en fonction de sa position dans le tube, ce qui nous permettra de caractériser quantitativement les différents régimes transitoires.



*Etude de l'évolution de la vitesse de front en régime transitoire*

Si le tube n'est plus exactement horizontal, il apparaît une nouvelle force motrice associée à la composante longitudinale de la gravité  $g \cos \theta$  (orientée suivant l'axe du tube). Contrairement au cas précédent nous nous placerons dans une géométrie tubulaire (et non plane), mais nous ne chercherons pas à écrire l'équation (équivalente à 4.19) vérifiée en tous points par l'interface. Nous nous placerons au niveau de la vanne, où par symétrie les sections occupées par les deux fluides sont les mêmes, et nous chercherons seulement à déterminer les différentes composantes de l'écoulement et leur évolution au cours du temps.

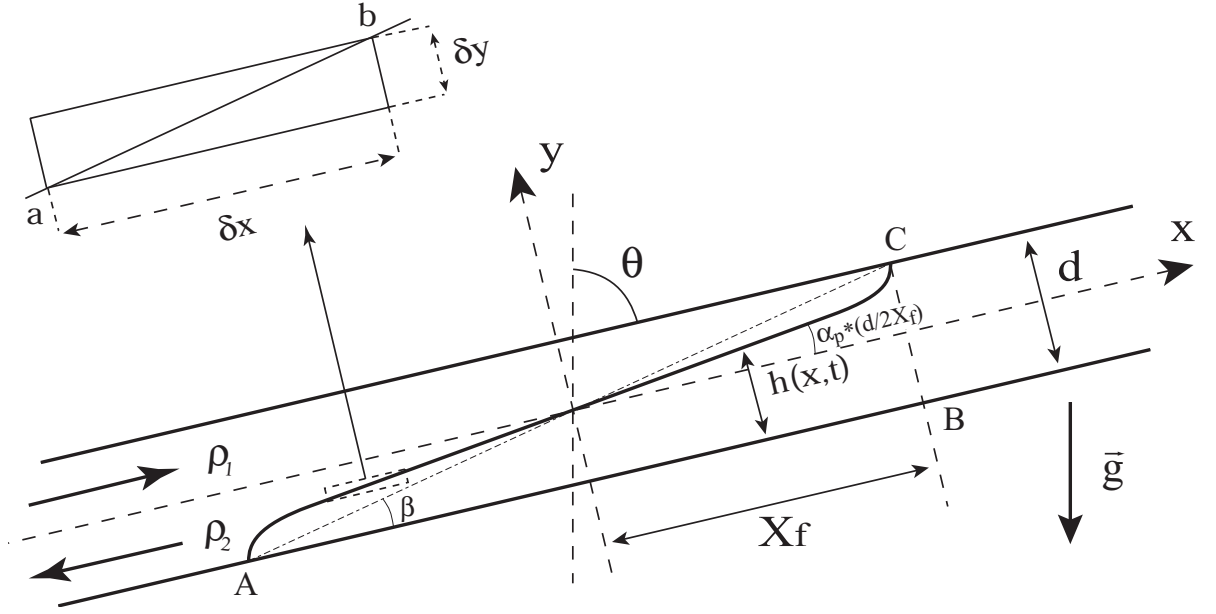


FIGURE 4.17: Schéma de l'étalement transitoire. Notons que  $\beta$  est tel que  $\tan \beta = d/2X_f \approx \beta$ , et  $\alpha_p$  tel que  $\frac{\partial h}{\partial x} = \alpha_p \frac{d}{2X_f}$ . En haut à gauche : élément d'un volume infinitésimal de fluide comprenant l'interface.

Tout d'abord, comme dans le cas précédent, exprimons de deux manières différentes la différence de pression entre a et b (en haut à gauche de la figure 4.17), en supposant ici que la hauteur de l'interface est indépendante de la coordonnée  $z$  normale au plan de la section.

$$\begin{aligned} \delta P)_{ab} &= \frac{\partial P_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P_1}{\partial y} \delta y \\ &= \frac{\partial P_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P_2}{\partial y} \delta y \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial h}{\partial x} = - \left( \frac{\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial x}}{\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_2}{\partial y}} \right) \quad (4.21)$$

De plus, pour un écoulement quasi-parallèle, on a :

$$\frac{\partial P_i}{\partial y} = -\rho_i g \sin \theta \quad (4.22)$$

Avec (4.22) et (4.21) on obtient :

$$(\rho_2 - \rho_1)g \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} = - \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) \quad (4.23)$$

Nous retrouvons exactement la même expression que dans le cas des plans horizontaux (équation 4.17) en remplaçant  $g$  par  $g \sin \theta$ .

Dans un tel écoulement l'équation de Stokes prend la forme :

$$\eta \Delta v_{xi} = - \frac{\partial P_i}{\partial x} - \rho_i g \cos \theta \quad (4.24)$$

à condition de supposer la pente de l'interface  $\partial h / \partial x$  assez faible pour que les approximations de lubrification s'appliquent.

On voit que l'écoulement est alors induit par la combinaison du gradient de pression, associé à l'inclinaison de l'interface par rapport à l'axe du tube, et d'un terme de pression hydrostatique, associé à la composante de la gravité suivant l'axe. L'équation (4.13) déterminant le débit dans un contre-écoulement parallèle peut donc s'appliquer au cas présent, mais seulement au niveau de la vanne où les deux fluides occupent chacun la moitié du tube, et à condition de la mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\alpha k_v d^2} v_{x1} &= - \frac{\partial P_1}{\partial x} - \rho_1 g \cos \theta \\ - \frac{\eta}{\alpha k_v d^2} v_{x2} &= - \frac{\partial P_2}{\partial x} - \rho_2 g \cos \theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

D'où :

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = - \left( \rho_1 g \cos \theta + \frac{\eta}{\alpha k_v d^2} v_{x1} \right) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = - \left( \rho_2 g \cos \theta - \frac{\eta}{\alpha k_v d^2} v_{x2} \right) \quad (4.27)$$

De plus  $|v_{x1}| = |v_{x2}| = v_{visq}$  (toujours au niveau de la vanne). En substituant (4.26) (4.27) dans (4.23) on obtient alors l'expression de **la vitesse dans le régime visqueux transitoire** :

$$v_{visq} = \alpha k_v \frac{(\rho_2 - \rho_1) g d^2}{2\eta} \left( \cos \theta + \frac{\partial h}{\partial x} \sin \theta \right) \quad (4.28)$$

De plus, en introduisant une viscosité cinématique effective  $\nu = \eta / \bar{\rho}$  et  $At = (\rho_2 - \rho_1) / 2\bar{\rho}$ , on obtient :

$$v_{visq} = \alpha k_v \frac{At g d^2}{\nu} \cos \theta \left( 1 + \frac{\partial h}{\partial x} \tan \theta \right) \quad (4.29)$$

Le premier terme est stationnaire, le second est instationnaire. Lorsque  $\partial h / \partial x = 0$ , ce qui reflète la limite aux temps longs, l'équation (4.29) se ramène à l'expression (4.13) de la vitesse visqueuse

en régime stationnaire (déjà corrigée pour s'ajuster aux données expérimentales). L'équation (4.29) peut donc finalement s'écrire :

$$v_{visq} = V_{visq}^{\infty} \left( 1 + \frac{\partial h}{\partial x} \tan \theta \right) \quad (4.30)$$

Rappelons que cette vitesse a été déterminée au niveau de la vanne mais, comme nous l'avons déjà vu, la vitesse de front est égale aux vitesses moyennes au sein de l'écoulement et, notamment, à la vanne ( $x = 0$ ) ; **l'équation (4.30) représente donc l'expression de la vitesse de front dans le régime visqueux transitoire.**

Nous allons maintenant décrire l'évolution de cette vitesse (4.30) en fonction de l'avancée  $X_f$  du front dans le tube ( $X_f$  est la position du front suivant l'axe du tube, voir figure 4.17). Pour ce faire, nous allons écrire la pente de l'interface sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{d}{2X_f} * \alpha_p$$

Le coefficient  $\alpha_p$  est égal au rapport entre la pente de l'interface et la pente du segment AC sur la figure 4.17. Ce coefficient dépend en particulier de la hauteur de la couche de fluide au niveau du front et il sera supposé constant durant chaque expérience.

Dans le régime visqueux, la vitesse du front doit alors vérifier :

$$v_{visq} = V_{visq}^{\infty}(\theta) \left( 1 + \lambda \frac{d}{X_f} \right) \quad (4.31)$$

Avec

$$\lambda = \alpha_p \frac{\tan \theta}{2} \quad (4.32)$$

La variation correspondante de la vitesse  $v_{visq}$  en fonction de la position du front dans le tube  $X_f$  est représentée dans la figure 4.18 pour trois cas différents :

**(a) Régime visqueux ( $\theta \neq 90^\circ$ ) :** l'expression (4.31) prédit une divergence de la vitesse  $v_{visq}$  aux faibles distances ( $X_f$  proche de 0). Or,  $v_{visq}$  ne peut pas dépasser la vitesse stationnaire inertielle  $\gamma V_t$  déterminée au niveau du front (phénomène similaire à la transition entre le régime 3 et le régime 2 expliquée au paragraphe 4.1.3.3). C'est donc cette dernière vitesse qui est observée aux temps courts tant que  $v_{visq}$  est supérieure ou égale à  $\gamma V_t$ . Puis, au delà d'une distance de transition  $X_f^{Tr}$  telle que  $v_{visq} = \gamma V_t$ , la dissipation visqueuse contrôle l'écoulement. La vitesse, régie par l'équation (4.31), décroît donc comme  $(\lambda d/X_f) * V_{visq}^{\infty}$ , jusqu'à atteindre la vitesse constante  $V_{visq}^{\infty}$  lorsque le terme  $\lambda d/X_f$  lié à la pente de l'interface ( $\partial h/\partial x$ ) sera négligeable par rapport à 1.

**(b) Régime visqueux "diffusif"  $\theta = 90^\circ$  :** dans le cas où  $\theta = 90^\circ$ , la vitesse de front a la forme  $v_{visq} = \alpha k_v V_\nu \frac{\alpha_p}{2} \frac{d}{X_f}$ , ce régime représente le cas limite (où  $V_{visq}^{\infty} = 0$ ) du régime visqueux précédent, avec la même phase initiale inertielle où la vitesse du front est égale à  $\gamma V_t$ . Ensuite  $v_{visq} \propto d/2X_f(t)$  soit  $dx/dt \propto d/2X_f(t)$ , et finalement  $(X_f(t))^2 \propto t$ , nous retrouvons alors

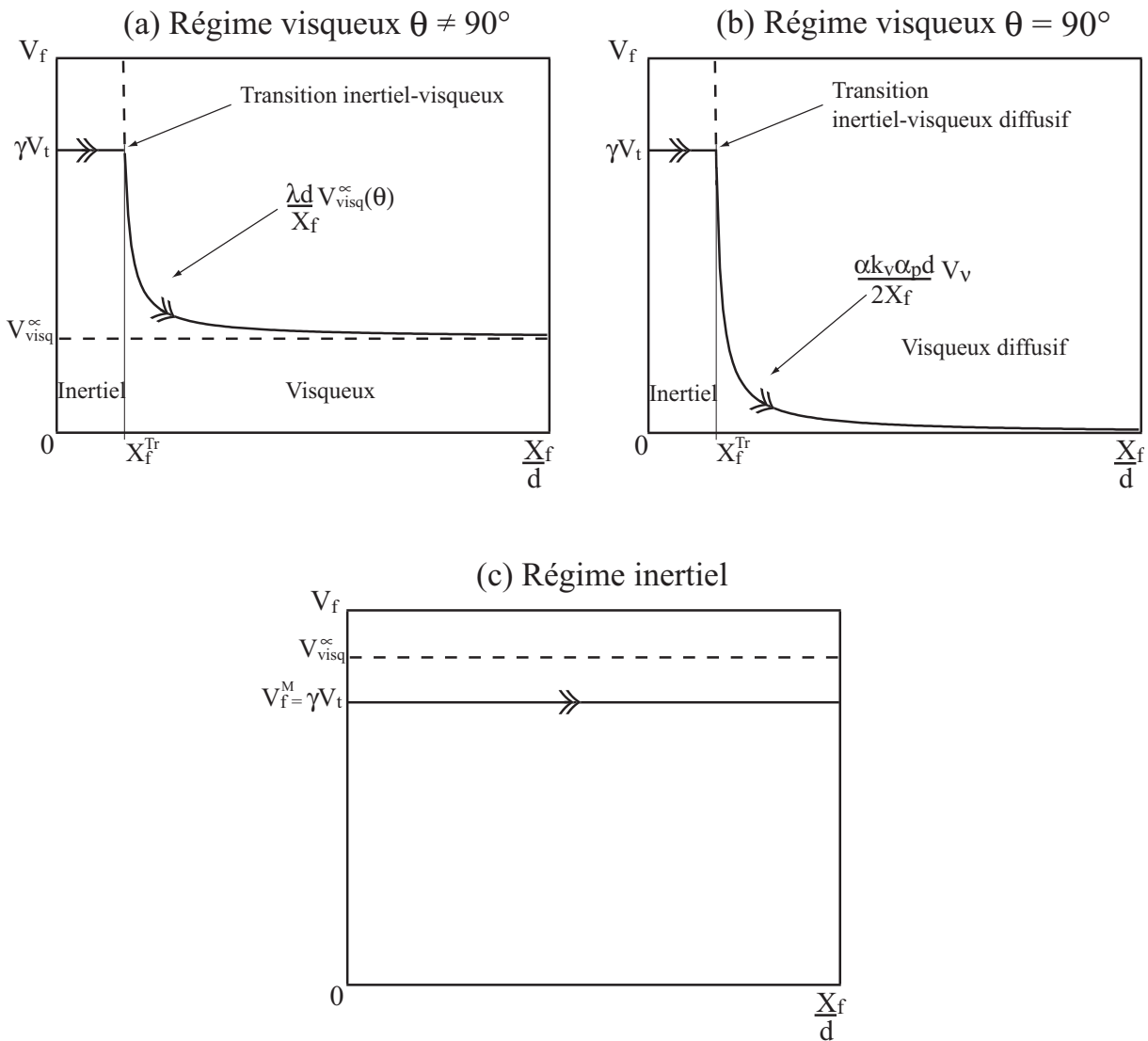


FIGURE 4.18: Schéma de l'évolution de la vitesse de front en trait plein dans le régime visqueux transitoire en fonction de la position du front  $X_f$  dans le tube, et ce pour trois cas différents : (a) régime visqueux  $\theta \neq 90^\circ$  :  $v_{visq} = V_{visq}^\infty(\theta) \left(1 + \lambda \frac{d}{X_f}\right)$  ; (b) régime visqueux diffusif  $\theta = 90^\circ$  :  $v_{visq} = \alpha k_v V_v \frac{\alpha_p}{2} \frac{d}{X_f}$  ; (c) régime inertiel :  $v_{visq} = \gamma V_t = V_f^M$ . Les flèches indiquent le sens de l'évolution au cours du temps de  $V_f$  et  $X_f$ .

le résultat du paragraphe précédent en tube horizontal avec un étalement des fluides non stationnaire en  $X_f(t) \propto \sqrt{t}$ . C'est pourquoi, nous appellerons ce régime à  $\theta = 90^\circ$  : régime visqueux "diffusif".

(c) **Régime inertiel** : lorsque  $V_{visq}^\infty > \gamma V_t$ , l'écoulement est alors dans le régime 2 inertiel et la vitesse de front est stationnaire et égale à la vitesse de saturation  $V_f^M = \gamma V_t = \gamma \sqrt{Atgd}$  quelle que soit la position du front, avec  $\gamma = 0.7$  comme nous l'avons vu au paragraphe 4.1.2.3.

Notons enfin que pour  $X_f < d$  (début de l'expérience) nous ne pouvons rien dire car notre calcul a été réalisé en approximation de lubrification et n'est donc pas valable dans ce cas ; de plus la présence de la vanne empêche toute observation au début de l'étalement, là où le fluide est en phase d'accélération (instabilités de Rayleigh-Taylor :  $x \propto Atgt^2$  [51][17] voir chapitre 1) pour atteindre la vitesse  $\gamma V_t$ .

Dans l'évolution de la vitesse de front en régime transitoire, nous avons ainsi pu prédire une transition entre un régime stationnaire inertiel (vitesse  $\gamma V_t$ ) et un régime instationnaire visqueux ( $v_{visq}$ ). La distance à laquelle s'effectue cette transition (noté  $X_f^{Tr}$  sur la figure) dépend des valeurs des paramètres de contrôle du système par l'intermédiaire de  $V_{visq}^\infty(\theta)$ . Nous allons donc déterminer la dépendance de cette transition par rapport à ces paramètres, dans le but de cartographier les différents régimes.

Pour cela, déterminons les valeurs de  $X_f$  telles que la **condition de contrôle par les effets inertiels** soit vérifiée :

$$v_{visq} \geq V_f^M = 0.7 \sqrt{Atgd}$$

Soit :

$$V_f^M \leq V_{visq}^\infty(\theta) \left( 1 + \lambda \frac{d}{X_f} \right)$$

**L'écoulement est donc inertiel tant que :**

$$\frac{X_f}{d} \leq \frac{\alpha_p \tan \theta}{2 \left( \frac{V_f^M}{V_{visq}^\infty} - 1 \right)} = \frac{X_f^{Tr}}{d} \quad (4.33)$$

Une fois que le front a dépassé cette distance de transition  $X_f^{Tr}$ , l'écoulement est en régime visqueux et la vitesse de front régie par l'équation (4.31) décroît, comme nous venons de le voir, jusqu'à atteindre la vitesse limite constante  $V_{visq}^\infty$ . Cette dernière vitesse sera atteinte lorsque le terme  $\lambda d/X_f$  sera négligeable par rapport à 1, c'est-à-dire que nous serons en présence d'un **étalement stationnaire visqueux** lorsque :

$$\frac{X_f}{d} \gg \alpha_p \frac{\tan \theta}{2} \quad (4.34)$$

Notons que lorsque le tube est horizontal ( $\theta = 90^\circ$ ),  $\tan \theta$  tend vers l'infini, et on retrouve le fait que l'écoulement est toujours instationnaire (la valeur de la vitesse limite est nulle).

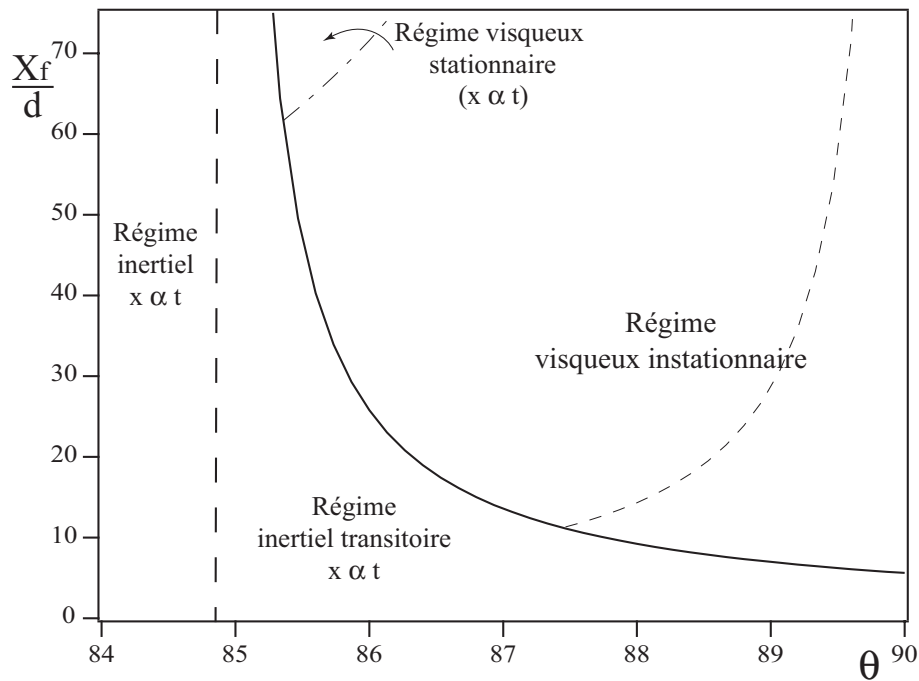


FIGURE 4.19: Cartographie des différents régimes d'avancée du front en fonction de l'angle  $\theta$ , réalisée pour  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 20\text{mm}$  et  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ , la courbe en trait plein marque la transition inertiel-visqueux c'est-à-dire  $\frac{X_f^{Tr}}{d} = \frac{\tan \theta}{2 \left( \frac{V_M}{V_{visq}^\infty(\theta)} - 1 \right)}$  et la courbe en tirets fins  $\frac{X_f}{d} = \frac{\tan \theta}{2}$  caractérise la distance à laquelle l'influence de la pente de l'interface sur la vitesse d'interpénétration devient comparable à la vitesse limite visqueuse stationnaire ; la courbe en tirets mixtes caractérise la distance où cette influence ne vaut plus que 10% de la vitesse visqueuse stationnaire.

**La figure 4.19 montre une cartographie des phases transitoires dans le régime 3 visqueux** dans le plan  $(X_f/d, \theta)$  pour des valeurs fixes des paramètres autres que  $\theta$  (ici  $At = 3.9.10^{-3}$ ,  $d = 20mm$  et  $\nu = 10^{-6}m^2/s$ ).

L'égalité  $X_f^{Tr}/d = f(\theta)$  (équation 4.33) en trait plein indique la frontière entre la phase transitoire inertielle et la phase visqueuse : la droite verticale en grands tirets représente l'asymptote de cette transition, elle représente aussi la frontière entre les angles pour lesquels le mouvement du front est toujours inertiel et ceux pour lesquels il devient visqueux aux temps longs. Nous avons pris  $\alpha_p = 1$ , car nous ne connaissons pas encore sa valeur, ce qui induit probablement une petite erreur dans la localisation exacte des frontières entre régimes. Nous retrouvons les résultats observés sur la figure 4.3 : pour  $\theta \leq 85^\circ$ , le régime est inertiel ; pour  $\theta > 85^\circ$ , le régime est visqueux aux temps longs, mais nous observons ici qu'il ne sent l'influence visqueuse qu'après un régime inertiel transitoire dont la durée décroît avec l'angle  $\theta$ .

Nous avons tracé de plus sur ce même graphique deux guides-œil :

- L'un en petits tirets fins correspond à la courbe  $\frac{X_f}{d} = \frac{\tan\theta}{2}$  qui indique les points où le terme lié à la pente de l'interface est de l'ordre de grandeur du terme stationnaire.
- L'autre en tirets mixtes où ce terme à été pris 10% du terme stationnaire et où nous pouvons considérer le front visqueux comme stationnaire.

Nous voyons ainsi grâce à ces guides-œil, que, pour les grandes valeurs de  $\theta$ , la longueur du tube  $L = 75d$  est insuffisante pour atteindre la vitesse visqueuse stationnaire  $V_{visq}^\infty$  ; la vitesse mesurée sur les diagrammes spatio-temporels sera alors supérieure à la vitesse  $V_{visq}^\infty$  et remet en question la valeur du coefficient d'ajustement  $\alpha = 1.25$  introduit dans l'équation (4.13). Nous réajusterons plus loin sa valeur en analysant plus finement les données expérimentales.

Nous allons maintenant analyser l'évolution des domaines d'existence des différents régimes en fonction du contraste de densité  $At$  et de la viscosité  $\nu$ . Nous avons donc tracé sur la figure 4.20 les mêmes courbes que sur la figure 4.19 pour plusieurs valeurs du nombre d'Atwood  $At$  et de la viscosité  $\nu$  :

- figure (a),  $d$  et  $\nu$  fixés ( $d = 20mm$  et  $\nu = 10^{-6}m^2/s$ ) et trois valeurs de  $At$  différentes :  $At = 1.2.10^{-3}$ ,  $At = 3.9.10^{-3}$  et  $At = 1.1.10^{-2}$  ;
- figure (b),  $At$  et  $d$  fixés ( $At = 10^{-2}$  et  $d = 20mm$ ) et trois valeurs différentes de la viscosité :  $\nu = 10^{-6}m^2/s$ ,  $\nu = 2.10^{-6}m^2/s$  et  $\nu = 4.10^{-6}m^2/s$ .

La courbe en tirets fins représentant  $\frac{X_f}{d} = \frac{\tan\theta}{2}$  restera la même pour toutes les valeurs de  $At$ ,  $\nu$  et  $d$  car elle ne fait intervenir que la variable  $\theta$  ; rappelons que cette courbe n'a de sens physique que dans les domaines contrôlés par la viscosité.

Nous retrouvons, tout d'abord, sur la figure 4.20(a), que le régime visqueux est observable sur une gamme de valeurs de  $\theta$  d'autant plus large que le contraste de densité initial est faible. Sur les courbes correspondant à des valeurs de  $\nu$  différentes (figure 4.20(b)), le régime visqueux existe

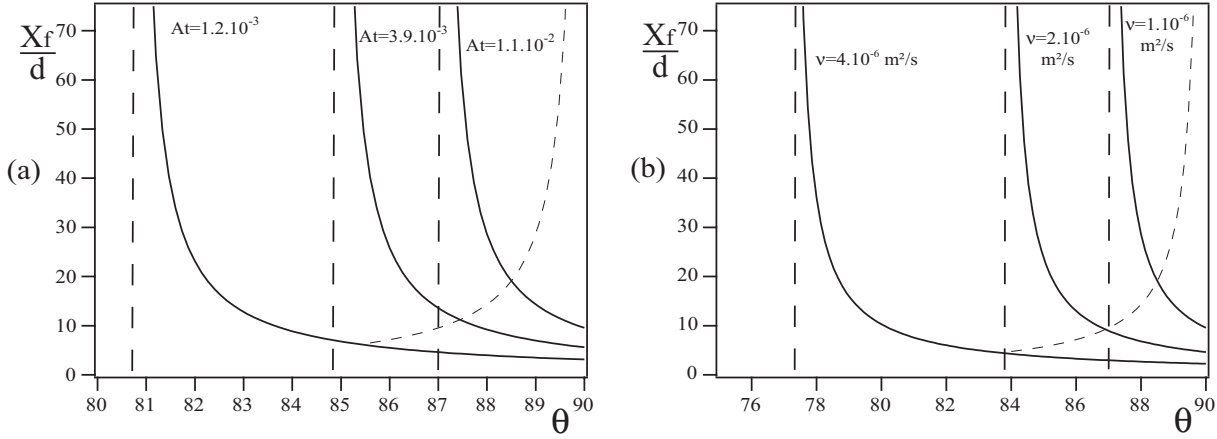


FIGURE 4.20:  $\frac{X_f}{d}$  en fonction de  $\theta$ , avec en trait plein :  $\frac{X_f}{d} = \frac{\tan \theta}{2 \left( \frac{V_f^M}{V_{visq}(\theta)} - 1 \right)}$  et en trait pointillé :  $\frac{X_f}{d} = \frac{\tan \theta}{2}$ .

- (a)  $d$  et  $\nu$  constants ( $d = 20mm$  et  $\nu = 10^{-6}m^2/s$ ) les valeurs de  $At$  sont notées sur les courbes.  
 (b)  $At$  et  $d$  constants ( $d = 20mm$  et  $At = 10^{-2}$ ) les valeurs de  $\nu$  sont notées sur les courbes.

sur une gamme de valeurs de  $\theta$  d'autant plus large que la viscosité est élevée. Ce point a déjà été discuté auparavant : on retrouve ainsi les mêmes valeurs de  $\theta$  pour les transitions entre les régimes stationnaire visqueux et stationnaire inertiel (régime 3 et 2) que dans les figures 4.4 (a) et (b).

D'autre part, à  $\theta$  donné, le régime inertiel transitoire persiste sur une distance de déplacement du front d'autant plus grande que le contraste de densité est fort et la viscosité est faible. Il en résulte que le régime stationnaire visqueux est atteint d'autant plus tôt dans le tube que le contraste de densité est faible et la viscosité élevée.

### *Ajustement du modèle de variation de la vitesse de front avec les données expérimentales*

Comparons maintenant ces prédictions aux mesures expérimentales de l'évolution de la position  $X_f$  des fronts dans le tube. Nous avons donc tracé sur la figure 4.21 la variation de  $X_f$  en fonction du temps, pour les deux cas extrêmes de la figure 4.19, c'est-à-dire  $\theta = 85^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$  ( $At = 3.9.10^{-3}$ ,  $d = 20mm$  et  $\nu = 10^{-6}m^2/s$ ). Ces figures correspondent aux diagrammes spatio-temporels (a) et (c) de la figure 4.13. Pour plus de lisibilité, nous n'avons tracé que le déplacement d'un seul front sur ces figures mais son symétrique suit les mêmes variations (approximation de Boussinesq).

- Pour  $\theta = 85^\circ$ , la position  $X_f$  du front est remarquablement proportionnelle au temps (figure 4.21(a)), avec une pente  $V_f = 0.65 * \sqrt{Atgd}$  très proche de la vitesse  $V_f^M$  du régime inertiel de saturation. On reste donc toujours dans le régime inertiel comme le laissait prévoir la figure 4.19.
- A l'opposé, pour  $\theta = 90^\circ$ , le tracé en coordonnées logarithmiques de la progression du front figure 4.21(b), déterminé sur le diagramme spatio-temporel de la figure 4.13(c), montre une droite de pente 1 au début de l'expérience jusqu'à  $X_f = 0.13m \simeq 6d$ , correspondant au



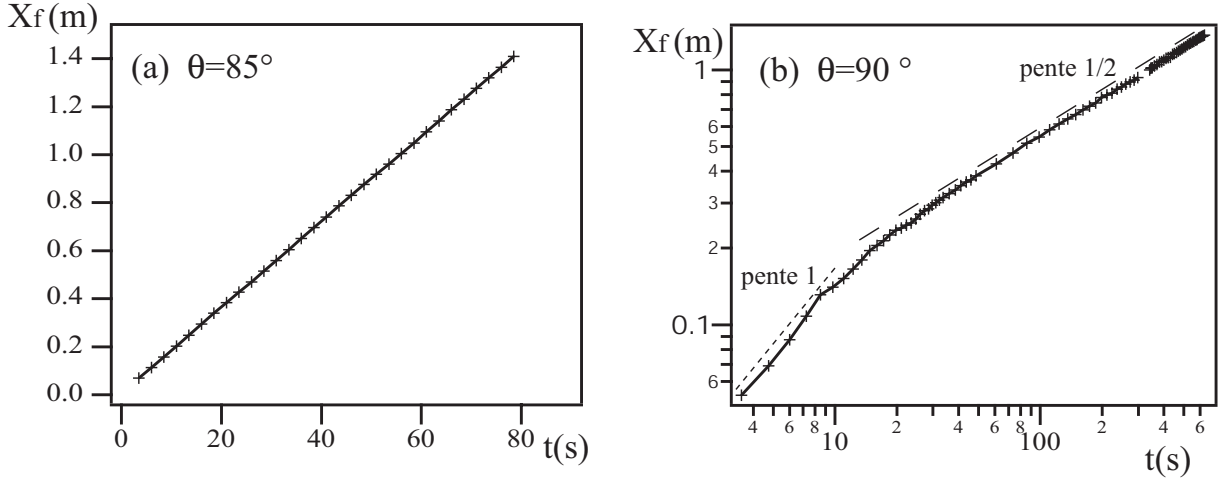


FIGURE 4.21: Variation de la distance  $X_f$  du front à la vanne en fonction du temps ( $t_0$  est l'instant où on ouvre la vanne). Pour  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$  et  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  : (a) et (b)  $\theta = 85^\circ$ , (c) et (d)  $\theta = 90^\circ$  les deux traits en tirets sont des droites de pentes 1 et 1/2 notés sur la figure.

régime inertiel transitoire, puis, après une courte période de transition, une droite de pente 1/2 correspondant à l'étalement en  $\sqrt{t}$  de la zone d'interpénétration discuté au paragraphe 4.2.2.2. Si on fait un ajustement linéaire sur les quatre points correspondant au régime inertiel on trouve  $V_f = 0.57 * \sqrt{Atgd}$  (la valeur de  $\gamma = 0.57$  sera discutée plus tard).

Tous ces résultats correspondent donc parfaitement aux prédictions théoriques de la figure 4.19 :

- Pour  $\theta = 85^\circ$ , une vitesse constante inertielle sur toute la longueur du tube.
- Pour  $\theta = 90^\circ$ ,
  - une vitesse constante inertielle au début de l'expérience ;
  - une transition entre les régimes inertiels et visqueux à  $X_f/d \simeq 6$  ;
  - un étalement en  $\sqrt{t}$  marquant un régime instationnaire appelé "visqueux diffusif".

Voyons maintenant ce qu'il se passe dans les cas intermédiaires. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps essayer d'ajuster directement la variation des vitesses expérimentales par  $\gamma V_t$  dans la partie inertielle et par l'équation (4.31) dans la partie visqueuse, et voir quelles valeurs de  $\gamma$ ,  $V_{visq}^\infty$  et  $\alpha_p$  nous donne le meilleur ajustement.

C'est ce que nous avons fait sur la figure 4.22 où sont tracées des valeurs de vitesse estimées par dérivation numérique de la variation de la position en fonction du temps. L'ajustement est très correct dans la partie visqueuse mais le domaine inertiel n'apparaît pas clairement à cause du nombre de points expérimentaux trop faible dans ce régime. Nous observons aussi que plus  $\theta$  ou  $At$  sont élevés, plus le régime asymptotique est long à atteindre : la vitesse mesurée en bout de tube sur les diagrammes spatio-temporels risque donc d'être un peu plus élevée que la vraie valeur asymptotique  $V_{visq}^\infty$ .

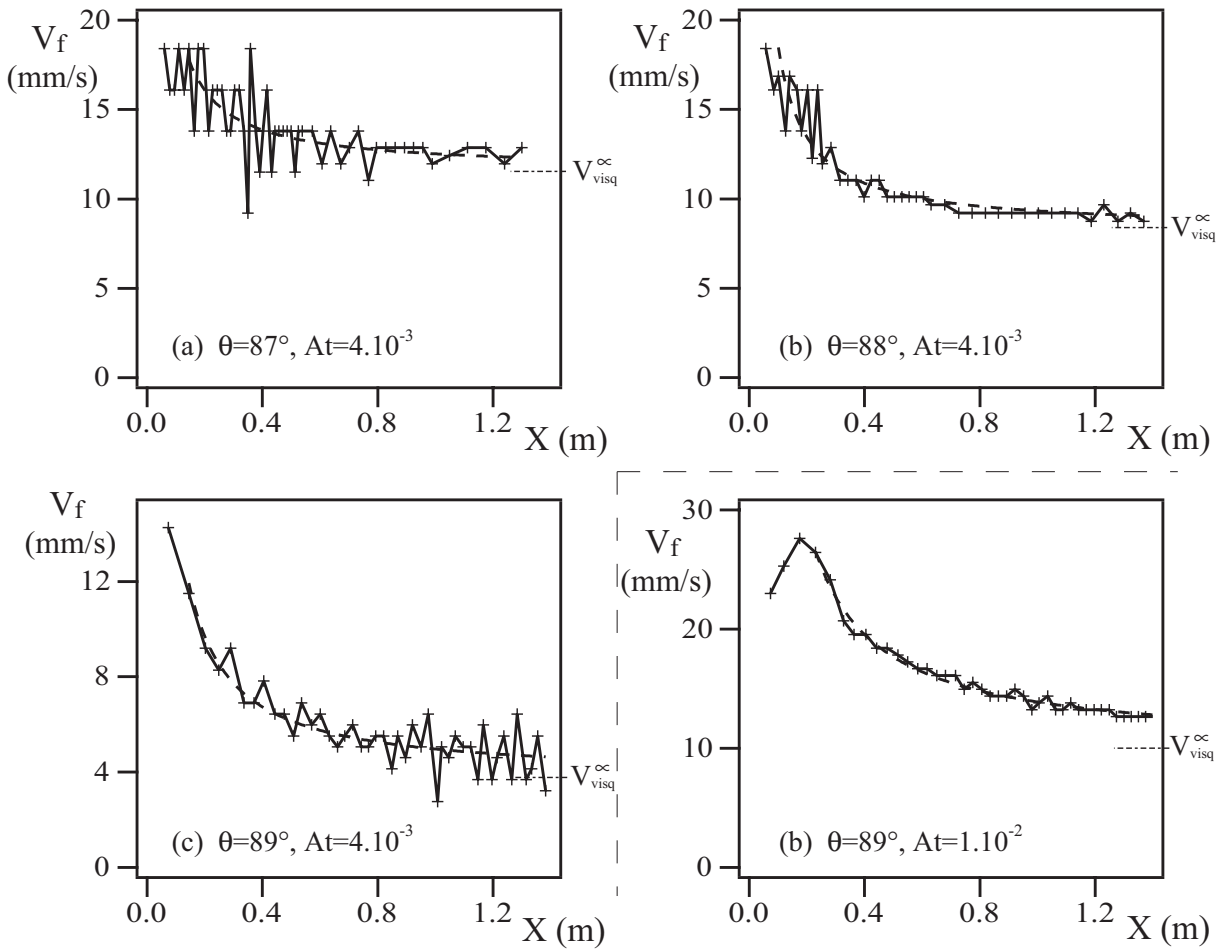


FIGURE 4.22: Variation de la vitesse de front en fonction de sa position dans le tube pour  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  et pour différentes valeurs de  $\theta$  et  $At$  notées sur les courbes. Les courbes en pointillés représentent des ajustements par la fonction  $V_f = V_{visq}^\infty(\theta) \left(1 + \frac{\lambda d}{X_f}\right)$  avec  $\lambda = \alpha_p \frac{\tan \theta}{2}$ . Nous avons noté sur chaque courbe la position de la vitesse asymptotique déterminée à partir de l'ajustement. (a)  $V_{visq}^\infty = 11.6(\text{mm}/\text{s})$  (b)  $V_{visq}^\infty = 8.2(\text{mm}/\text{s})$  (c)  $V_{visq}^\infty = 3.7(\text{mm}/\text{s})$  (d)  $V_{visq}^\infty = 10.1(\text{mm}/\text{s})$ .

Cependant, la dérivation numérique utilisée pour déterminer les vitesses instantanées introduit des erreurs supplémentaires assez fortes. Nous utiliserons donc directement les courbes de variations de la position du front en fonction du temps pour déterminer les valeurs de  $\gamma$ ,  $V_{visq}^\infty$  et  $\alpha_p$ .

Dans ce but intégrons l'équation (4.31) :

$$\begin{aligned}\frac{dX_f}{dt} &= V_{visq}^\infty \left(1 + \lambda \frac{d}{X_f}\right) \\ dt &= \frac{X_f}{V_{visq}^\infty (X_f + \lambda d)} dX_f\end{aligned}$$

D'où :

$$t = \frac{X_f}{V_{visq}^\infty(\theta)} - \frac{\lambda d}{V_{visq}^\infty(\theta)} \ln(X_f + \lambda d) + K \quad (4.35)$$

Il y a donc trois paramètres ajustables dans cette expression :  $V_{visq}^\infty(\theta)$ ,  $\lambda$ , et la constante d'intégration  $K$ .

Notons que, pour  $\theta = 90^\circ$ ,  $V_{visq}^\infty$  est nulle, et il faut donc utiliser une autre fonction. On reprend alors l'équation (4.31) et on la développe, ce qui donne avec  $\sin \theta = 1$  :

$$V_f = \left(\alpha k_v V_\nu \frac{d}{2} \alpha_p\right) * \frac{1}{X_f}$$

Après intégration, on obtient :

$$t = \frac{1}{\alpha k_v V_\nu d \alpha_p} X_f^2 + K' \quad (\theta = 90^\circ) \quad (4.36)$$

Nous avons utilisé ces deux équations pour ajuster les données expérimentales dans le régime visqueux, en traçant le temps en fonction de l'abscisse correspondante du front. La figure 4.23 présente ainsi les données expérimentales et les ajustements obtenus pour  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  et pour six inclinaisons différentes. Les ajustements utilisant les équations (4.35) et (4.36) sont tracés en pointillés gras sur les courbes.

Notons que nous avons aussi ajusté par l'équation (4.35) les données correspondant à  $\theta = 85^\circ$  bien qu'elles soient, comme nous l'avons vu, dominées par les effets inertiels, et ce afin de vérifier si l'utilisation de notre procédure à proximité des transitions entre régimes risque de conduire à des erreurs d'interprétation.

Nous obtenons un excellent ajustement entre les courbes théoriques et les points expérimentaux, et pouvons alors étudier les paramètres  $V_{visq}^\infty$  et  $\alpha_p$  issus de cet ajustement.

#### *Etude des paramètres issus de l'ajustement en régime visqueux : $V_{visq}^\infty$ et $\alpha_p$*

La figure 4.24 présente alors la variation des valeurs de la vitesse asymptotique  $V_{visq}^\infty$  obtenues à partir de ces ajustements (ronds noirs) en fonction de  $\cos \theta$  : ces points sont alignés sur une droite comme nous l'attendions théoriquement (équation 4.13 :  $V_{visq}^\infty = \alpha k_v V_\nu \cos \theta$ ).

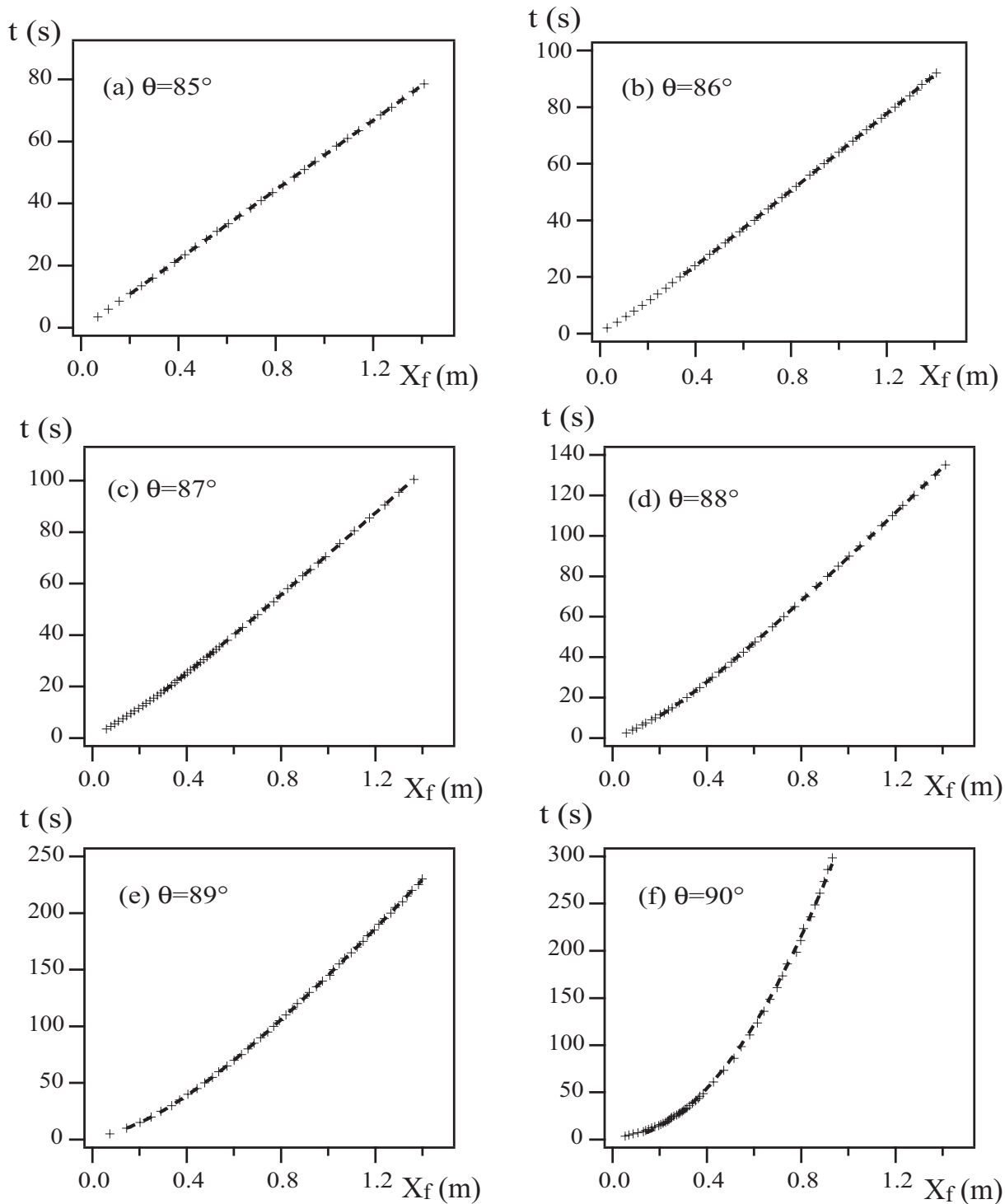


FIGURE 4.23: Courbes expérimentales de déplacement du front avec, en abscisse sa position dans le tube, et en ordonnée le temps correspondant, pour différentes valeurs de  $\theta$  notées sur les courbes ( $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 20\text{mm}$  et  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ). Les ajustements utilisant les équations (4.35) et (4.36) sont tracés en tirets gras sur les courbes.

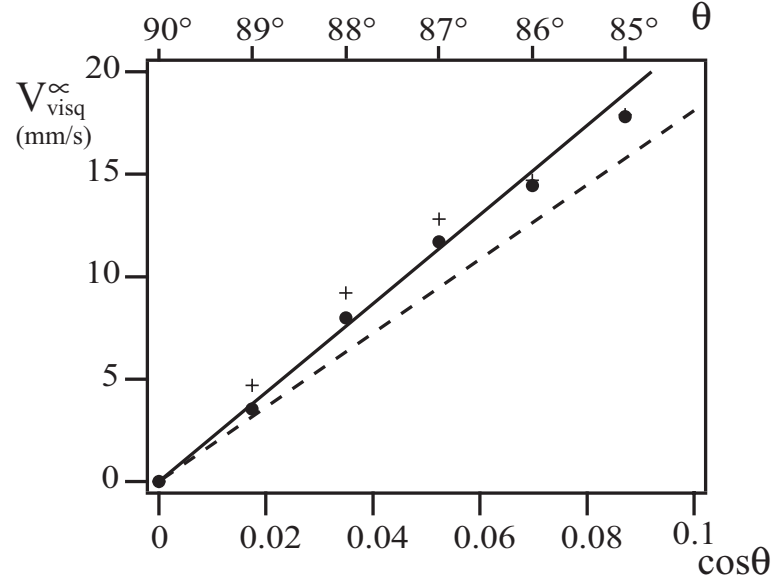


FIGURE 4.24: Les symboles ronds représentent la variation en fonction de  $\cos \theta$  des valeurs de  $V_{visq}^\infty$  résultants des ajustements. Les croix sont les valeurs des vitesses déterminées à l'aide des diagrammes spatio-temporels expérimentaux. La droite en tirets représente la vitesse visqueuse théorique définie par l'équation 4.12 :  $V_{visq}^{thq} = k_v V_\nu \cos \theta$ , tandis que la droite en trait plein représente  $\bar{V}_{visq}^\infty = 1.2 * V_{visq}^{thq}$  d'où  $\alpha^\infty = 1.2$ .

Les valeurs expérimentales des vitesses de front  $V_{visq}^\infty$  déterminées directement à partir des diagrammes spatio-temporels sont superposées sur cette courbe (symboles +) et nous voyons que ces vitesses sont surestimées pour  $\theta = 89^\circ$ ,  $88^\circ$  et  $87^\circ$  : cela implique que, pour ces angles, la vitesse de front n'atteint pas son régime stationnaire visqueux en bout de tube ; pour  $\theta = 85^\circ$  et  $86^\circ$  les valeurs obtenues sont correctes : la vitesse est stationnaire au bout du tube.

D'autre part, nous avons tracé en tirets la vitesse visqueuse théorique  $V_{visq}^{thq} = k_v V_\nu \cos \theta$  résultant de l'équation 4.12. Pour ajuster cette droite sur les points  $V_{visq}^\infty$ , il nous faut multiplier  $V_{visq}^{thq}$  par le facteur  $\alpha = \alpha^\infty = 1.2$ . Nous en déduisons **l'expression plus exacte de la vitesse visqueuse stationnaire** que nous utiliserons donc par la suite à la place de l'équation 4.13 :

$$V_{visq}^\infty = \alpha^\infty k_v V_\nu \cos \theta \quad (4.37)$$

avec

$$\alpha^\infty = 1.2$$

La valeur de  $\alpha^{fit} = 1.25$  dans l'équation 4.13 était légèrement trop élevée et la procédure d'ajustement a donc permis de la corriger.

Déterminons maintenant les variations du paramètre  $\alpha_p$  (défini dans figure 4.17), pour cela nous déduisons les valeurs de  $V_{visq}^\infty$  et de  $\lambda$  de l'ajustement et nous calculons  $\alpha_p$  par la relation :

$$\alpha_p = \frac{V_{visq}^\infty \lambda}{\alpha^\infty k_v V_\nu \frac{\sin \theta}{2}} \quad \text{avec} \quad \alpha^\infty = 1.2 \quad (4.38)$$

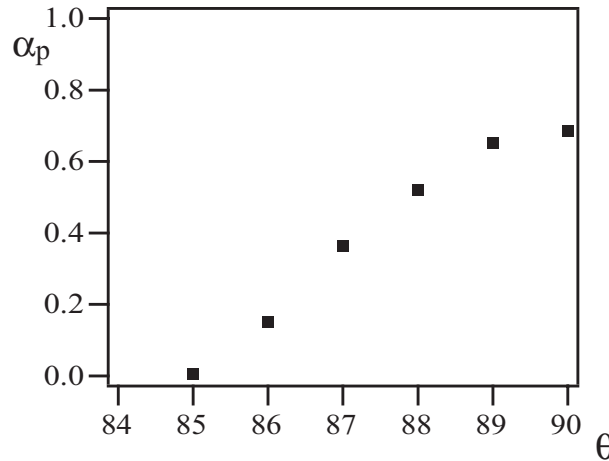


FIGURE 4.25: Evolution de  $\alpha_p$  en fonction de  $\theta$ .  $\alpha_p$  est défini sur la figure 4.17 et représente le rapport  $\frac{\partial h / \partial x}{d / 2 X_f}$ . Ce coefficient dépendra en particulier de la hauteur de la couche de fluide au niveau du front et sera supposé constant durant chaque expérience.

La figure 4.25 présente ainsi les variations de  $\alpha_p$  en fonction de  $\theta$ . Tout d'abord, pour  $\theta = 85^\circ$  :  $\alpha_p = 0$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ , la hauteur de l'interface entre les deux fluides est donc constante sur toute la longueur du tube (voir la séquence de vues du tube de la figure 4.8), rappelons que cet angle correspond à la transition vers le régime inertiel. L'utilisation de la procédure d'ajustement pour  $\theta = 85^\circ$  n'a donc pas conduit à des interprétations erronées. Ensuite, lorsque  $\theta$  est supérieur à  $85^\circ$ ,  $\alpha_p$  devient différent de zéro, et augmente avec  $\theta$  : cela indique que la pente de l'interface augmente et que la hauteur de front diminue. On atteint ainsi une valeur limite de l'ordre de 0.7 au delà de  $89^\circ$  : pour ces angles très proches de l'horizontale la hauteur du front est faible (voir la séquence de vues du tube de la figure 4.14).

### *Etude quantitative du régime transitoire inertiel*

Terminons par l'étude du régime transitoire inertiel initial. Nous voulons déterminer la vitesse de front  $V_f = \gamma V_t$  et, pour ce faire, nous avons ajusté sur la figure 4.26, la relation :

$$t = \frac{1}{\gamma V_t} X_f + K_2 \quad (4.39)$$

avec les variations observées aux temps courts sur les courbes expérimentales  $t = f(X_f)$ .

Nous obtenons effectivement un bon ajustement aux temps courts (tirets gras), ce qui confirme l'existence d'un régime transitoire inertiel de vitesse constante, et permet de déterminer celle-ci. De plus, ces courbes permettent d'estimer les distances correspondant à la transition entre les régimes visqueux et inertiels, qu'on peut comparer aux abscisses prédites par la figure 4.19. Sur les courbes (a), (b), (c) et (d) les transitions ont respectivement lieu pour  $X_f \simeq 0.3 - 0.5m$ ,  $X_f \simeq 0.3 - 0.35m$ ,  $X_f \simeq 0.2 - 0.25m$ ,  $X_f \simeq 0.12 - 0.13m$  et sont en bon accord avec la théorie qui prévoit  $X_f = 0.5m$ ,  $X_f = 0.3m$ ,  $X_f = 0.2m$ ,  $X_f = 0.12m$ . Pour  $\theta = 86^\circ$  la transition est mal définie à cause de la proximité du régime entièrement inertiel (régime 2).

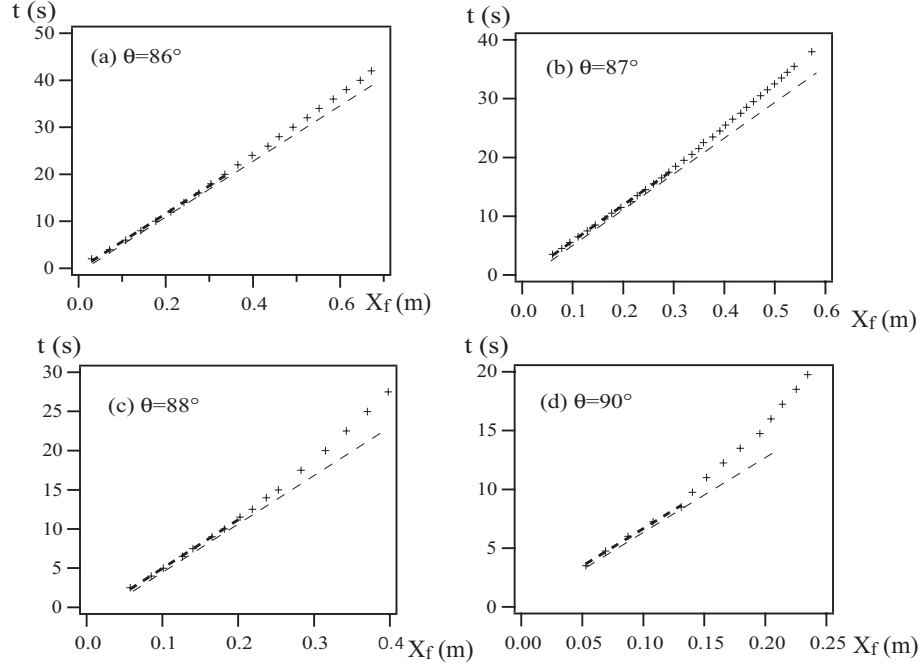


FIGURE 4.26: Evolution spatio-temporelle du front avec en abscisse sa position dans le tube et en ordonnée le temps correspondant, pour  $At = 3.9.10^{-3}$ ,  $d = 20mm$  et  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  et différentes valeurs de  $\theta$  notées sur les courbes. L'ajustement par la relation linéaire 4.39 est tracé en pointillés gras et la droite pointillée en traits fins prolonge cette variation pour des  $X_f$  plus élevés.

La variation en fonction de  $\theta$  du coefficient  $\gamma$  introduit dans l'expression théorique (4.39), et déterminé par les ajustements, est tracée sur la figure 4.27. Alors que  $\gamma$  reste voisin de 0.7 dans tout le régime inertiel (2), sa valeur diminue au delà de  $\theta = 85^\circ$ , lorsque le tube se rapproche de l'horizontale, mais  $\gamma$  ne tend pas vers 0, mais vers la valeur finie 0.55. Cette décroissance peut résulter de la diminution de l'énergie potentielle motrice disponible.

### 4.3 Régimes inertiels de déplacement du front

Après avoir décrit le mouvement du front dans les cas où la viscosité contrôle sa dynamique (du moins aux temps longs), nous allons étudier les cas où l'inertie est dominante et, en particulier, le régime où le mélange influence fortement la dynamique du front (régime 1 sur la figure 4.3). Nous allons analyser l'évolution de la vitesse de front en fonction des différents paramètres de contrôle expérimentaux puis nous relierons ces variations à celles de la concentration relative locale des fluides près du front. Dans ce but, ces concentrations seront mesurées par une technique de fluorescence induite par laser. Ces comparaisons seront réalisées principalement sur la vitesse stationnaire atteinte par le front aux temps longs, mais nous nous intéresserons également à l'évolution temporelle de la vitesse du front dans les régimes transitoires initiaux.

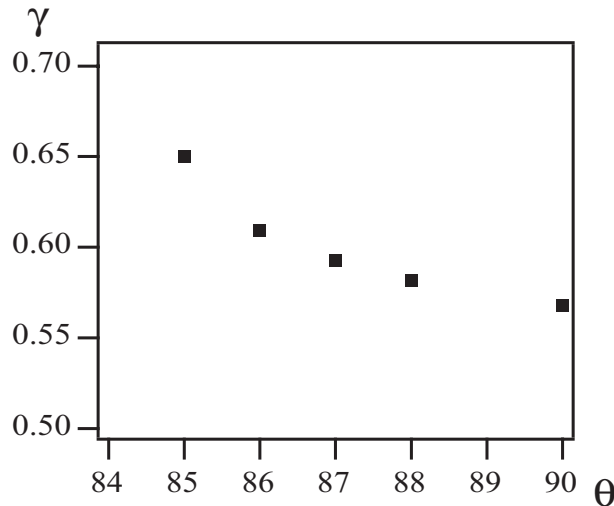


FIGURE 4.27: Variation de  $\gamma$  en fonction de  $\theta$ .  $\gamma$  est égal au rapport  $V_f/V_t$  dans le régime inertiel initial.

### 4.3.1 Vitesses du front en régime stationnaire inertiel

Les figures 4.28 (a), (b) et (c) présentent les variations, en fonction de  $\theta$ , des vitesses de front mesurées aux temps longs, respectivement à différents contrastes de densité  $At$ , viscosités des fluides  $\nu$  et diamètres du tube  $d$  (les autres paramètres étant maintenus respectivement constants dans chaque figure).

Dans tous les cas, la vitesse augmente avec l'angle (régime 1), jusqu'à ce qu'elle atteigne la vitesse de saturation  $V_f^M$  correspondant au régime 2,  $V_f^M = 0.7V_t = 0.7\sqrt{Atgd}$  (paragraphe 4.1.2.3).

Dans la figure 4.28(a) paramétrée par le contraste de densité  $At$ , nous observons que la vitesse du front dépend très peu du contraste de densité aux très faibles angles, et qu'elle ne s'écarte de la courbe de variation commune que lorsqu'elle devient de l'ordre de la vitesse de saturation  $V_f^M$  qui, elle, varie en  $\sqrt{At}$ . Il en résulte que le régime de fort mélange (1) s'étend sur une gamme de valeurs de  $\theta$  d'autant plus large que  $At$  est élevé. Cette faible dépendance de  $V_f$  par rapport à  $At$  dans le régime 1 suggère que l'existence d'un mélange plus efficace (visible simplement à l'œil, notamment sur les différents inserts) vient tempérer considérablement l'influence directe, sur les forces motrices d'Archimède, de l'augmentation du contraste de densité.

Sur la seconde figure 4.28(b) paramétrée par des valeurs de viscosité différentes, nous observons que, toujours dans le régime 1, la vitesse du front augmente nettement avec la viscosité, alors qu'au contraire, la vitesse  $V_f^M$  de saturation n'en dépend pratiquement pas. Il en résulte que le domaine de valeurs de  $\theta$  correspondant au régime de fort mélange (1) est d'autant plus étroit que la viscosité est élevée. Un tel comportement de la vitesse peut paraître contre-intuitif : on a en effet toujours tendance à penser que la viscosité freine les écoulements. Là encore, l'influence de l'efficacité du mélange paraît être un élément déterminant : l'augmentation de la viscosité tend en effet à réduire le nombre de Reynolds (si toutes les autres variables sont constantes) et donc le degré de turbulence et l'intensité du mélange.

Enfin, la dernière figure (4.28(c)) montre que l'augmentation du diamètre  $d$  ( $At$  et  $\nu$  fixés) tend,



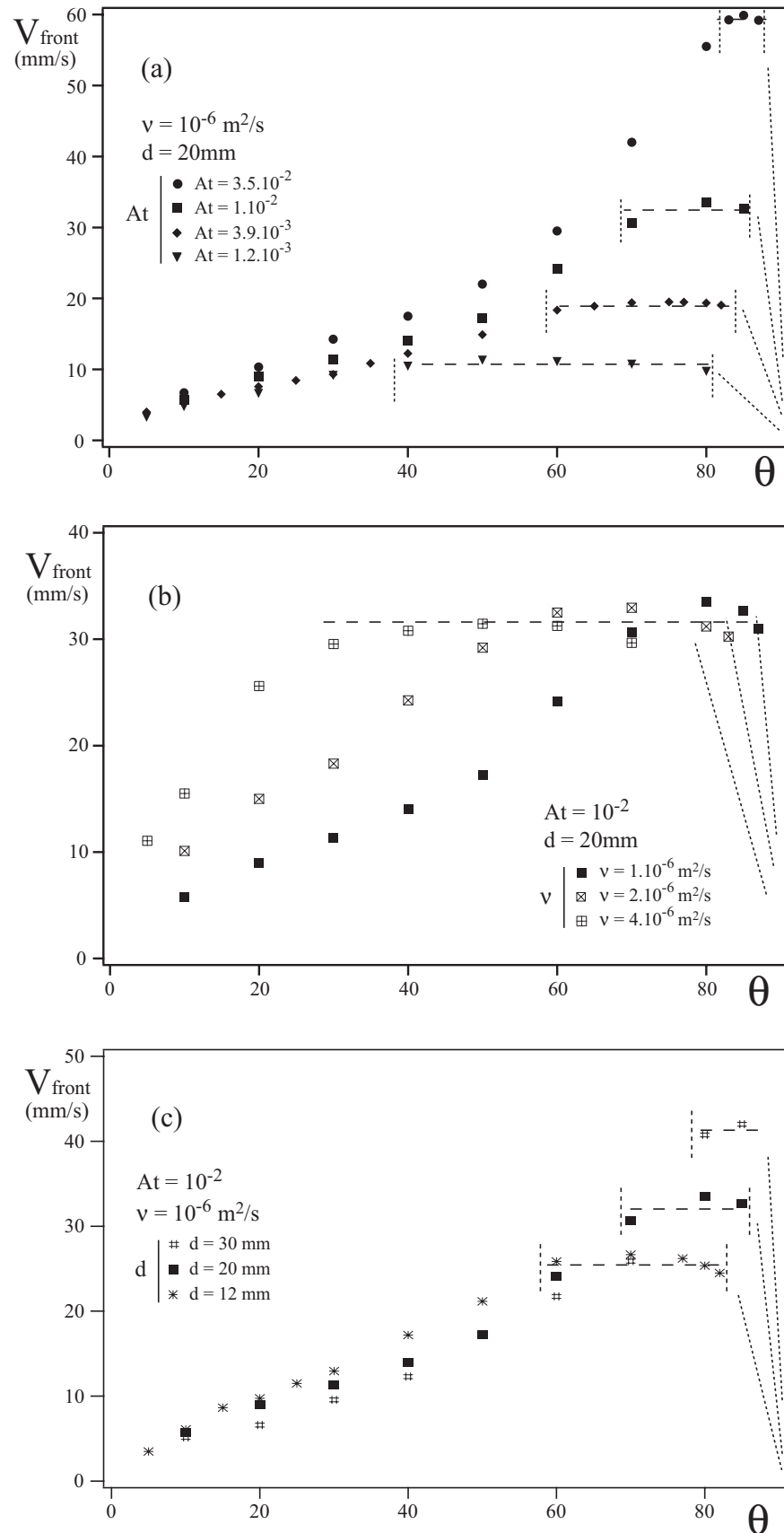


FIGURE 4.28: Variation de la vitesse du front en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ . (a) Pour différents contrastes de densité  $At = 3.54 \cdot 10^{-2}$  ( $\bullet$ ),  $At = 10^{-2}$  ( $\blacksquare$ ),  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$  ( $\blacklozenge$ ),  $At = 1.2 \cdot 10^{-3}$  ( $\blacktriangledown$ ) ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ). (b) Différentes viscosités  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $\blacksquare$ ),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $\boxtimes$ ),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $\boxplus$ ) ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ). (c) Différents diamètres de tube  $d = 12 \text{ mm}$  ( $*$ ),  $d = 20 \text{ mm}$  ( $\blacksquare$ ),  $d = 30 \text{ mm}$  ( $\#$ ) ( $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Les tirets sont des guides pour les régimes 2 et 3.

d'une manière assez contre-intuitive, à diminuer la vitesse du front dans le régime 1, alors que la vitesse de saturation  $V_f^M$  augmente au contraire avec le diamètre comme  $\sqrt{d}$ .

Dans les trois cas de la figure 4.28 il apparaît donc qu'une augmentation de l'efficacité du mélange (observé à l'œil), ou, de manière équivalente, du degré de turbulence de l'écoulement tend à réduire la vitesse de front.

Nous allons maintenant, comme nous l'avons fait au paragraphe 4.1.2.3, analyser plus quantitativement ces variations en utilisant des variables sans dimension. Comme ces écoulements sont dominés par l'inertie nous utiliserons la vitesse sans dimension  $V_f/V_t$ . Rappelons qu'à partir de cette vitesse nous pouvons construire le nombre de Reynolds sans dimension :  $Re_t = V_t d/\nu$  ( $d$  est en effet la seule longueur caractéristique du problème). Notons que la valeur de ce nombre est au moins de quelques dizaines, ce qui explique le fait que la viscosité n'agisse pas directement pour freiner l'écoulement.

Par analogie avec d'autres processus turbulents, nous allons maintenant chercher à trouver une loi d'échelle simple, de type variation en loi de puissance, du rapport  $V_f/V_t$  avec le nombre de Reynolds  $Re_t$  :

$$\frac{V_f}{V_t} = Re_t^\beta f(\theta) \quad (4.40)$$

où  $\beta$  serait un exposant caractéristique. On peut d'ailleurs réécrire cette relation, en remplaçant  $V_t$  et  $Re_t$  par leurs expressions :

$$V_f = \frac{(Atg)^{\frac{\beta+1}{2}} d^{\frac{3\beta+1}{2}}}{\nu^\beta} \quad (4.41)$$

Comme  $V_f$  dépend peu de  $At$  et de  $d$ , l'estimation la plus précise de  $\beta$  est obtenue en essayant de faire coïncider les courbes de la figure 4.28(b), en multipliant  $V_f$  par  $\nu^\beta$  pour différentes valeurs de  $\beta$ . La meilleure coïncidence est obtenue pour  $\beta = -3/4$ , comme le montre la figure 4.29.

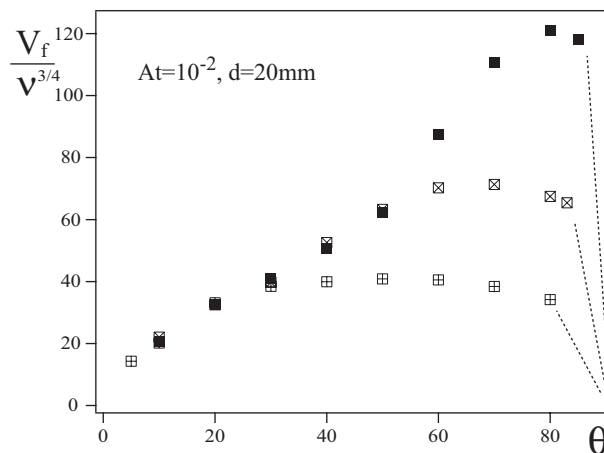


FIGURE 4.29: Variation de la vitesse de front divisée par  $\nu^{3/4}$   $V_f/\nu^{3/4}$  en fonction de  $\theta$  pour trois viscosités différentes :  $\nu = 1.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (■),  $\nu = 2.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (⊗),  $\nu = 4.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (⊕) ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ). Les tirets sont des guides qui repèrent le régime visqueux.

Si la loi d'échelle est vérifiée, le produit  $(V_f/V_t)Re_t^{3/4}$  doit ainsi dépendre seulement de  $\theta$ . La figure 4.30 montre alors qu'on observe en effet un très bon regroupement des différentes variations dans le régime 1 (sauf peut être pour  $d = 12mm$  où une variation en  $d^{-1/2}$  aurait été mieux adaptée), c'est-à-dire tant qu'on ne s'approche pas de la valeur de saturation  $V_f^M$ . Notons ici que toutes les autres données avec lesquelles nous avons essayé cette normalisation se sont correctement ajustées sur cette tendance (à part la variation obtenue pour le contraste de densité et le diamètre les plus élevés et pour la viscosité la plus faible, laquelle donne des points globalement au-dessus de la tendance commune)

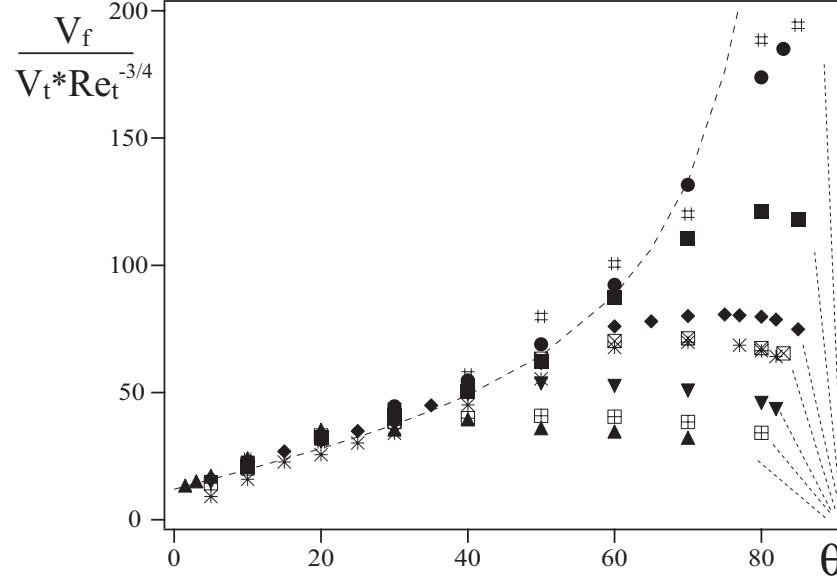


FIGURE 4.30: Variation de la vitesse de front normalisé  $V_f/(V_t Re_t^{-3/4})$  en fonction de  $\theta$  pour l'ensemble des données que nous avons présentées jusqu'ici : les valeurs par défaut des paramètres sont  $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ ,  $d = 20mm$  (■), les symboles correspondants à des valeurs de paramètres différents sont les suivants :  $At = 3.54 \cdot 10^{-2}$  (●),  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$  (◆),  $At = 1.2 \cdot 10^{-3}$  (▼),  $At = 4 \cdot 10^{-4}$  (▲),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} m^2/s$  (⊗),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} m^2/s$  (⊕),  $d = 12mm$  (\*),  $d = 30mm$  (‡). La courbe en tirets fins correspond à la loi de variation :  $a + b \tan \theta$  avec  $a = 12$  et  $b = 44$ , les segments en tirets sont des guides qui repèrent le régime visqueux.

La relation (4.40) peut donc être réécrite sous la forme :

$$V_f = (gAt)^{1/8} \nu^{3/4} d^{-5/8} f(\theta)$$

Cette relation traduit bien la très faible dépendance de  $V_f$  par rapport à  $At$  (exposant 1/8) et sa légère diminution lorsque le diamètre augmente (exposant -5/8).

La tendance commune de variation des courbes renormalisées avec  $\theta$  est bien reproduite par une variation de la forme :

$$f(\theta) = a + b \tan \theta$$

D'où l'écriture finale de la vitesse du front dans le régime 1 de fort mélange :

$$\frac{V_f}{V_t} = Re_t^{-3/4} (a + b \tan \theta) \quad (4.42)$$

avec  $a \simeq 12$  et  $b \simeq 44$ .

Nous n'avons pas pour l'instant d'explication pour cette dépendance en  $\theta$  et en  $Re_t$  : la compréhension de ces lois sera un des objectifs majeurs de la suite de ce travail.

### 4.3.2 Analyse locale des variations de contraste de concentration au front

#### 4.3.2.1 Introduction

Les résultats de la partie précédente indiquent que l'efficacité du mélange à l'intérieur de l'écoulement a une influence essentiel sur la dynamique du front. Lorsque que le mélange est peu développé, la vitesse de front  $V_f^M$  est simplement de l'ordre de  $\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho}gd}$  ; cette expression exprime un équilibre entre un terme de pression de Bernoulli  $\rho V_f^2$  et un terme de différence de pression hydrostatique  $\Delta\rho gd$ , au niveau du front, et suggère que, dans le régime 2, les deux fluides de part et d'autre du front sont les fluides initiaux non encore mélangés. Au contraire, dans le régime 1, la réduction de la vitesse au front, alors qu'on est toujours en régime inertiel, suggère que le contraste de densité effectif au front  $\delta\rho$  a été réduit à une valeur inférieure à  $\Delta\rho$  ( $\delta\rho < \Delta\rho$ ), on peut penser alors que  $V_f$  est tel que :

$$\frac{V_f}{V_f^M} = \sqrt{\frac{\delta\rho}{\Delta\rho}} = \sqrt{C_f} \quad \text{avec} \quad \frac{\delta\rho}{\Delta\rho} = C_f \leq 1 \quad (4.43)$$

$C_f$  représente la fraction de fluide initial pur, dans le fluide déplaçant, au niveau du front (on suppose que de l'autre coté du front le fluide déplacé reste pur). Nous supposons pour cela une variation linéaire de la densité en fonction de la concentration du mélange qui est bien vérifiée (cette relation suppose que le facteur 0.7 représentant le rapport entre  $V_f^M$  et  $V_t$  reste le même pour  $\delta\rho < \Delta\rho$ ).

En appliquant la loi d'échelle précédente vérifiée par  $V_f/V_t$ , nous devons avoir :

$$\frac{V_f}{V_f^M} = \sqrt{C_f} \propto Re_t^{-3/4}$$

L'objectif de cette partie est donc de vérifier quantitativement ces prédictions en mesurant directement, par la méthode de fluorescence laser décrite au paragraphe 3.3 du chapitre 3, la fraction relative locale des deux fluides. La mesure de ses variations au front nous permettra d'estimer le contraste de densité local  $\delta\rho$  correspondant et de comparer sa variation avec  $\theta$  à celle de la vitesse de front  $V_f$ . Nous analyserons la relation entre la concentration  $C_f$  et la vitesse du front aussi bien en régime stationnaire aux temps longs qu'en régime transitoire.

Reprenons tout d'abord la figure 4.31 déjà présentée, et étudions-la de manière plus quantitative. Cette figure montre des images de la fraction normalisée de fluide léger dans la zone filmée par les caméras (figure 3.7 du chapitre 3) à différents angles d'inclinaisons pour le même contraste de densité et la même viscosité, le fluide lourd apparaît en rouge et le fluide léger en bleu foncé (voir le code de couleurs en insert). Les régions contenant un mélange des deux fluides apparaissent en couleur intermédiaire.

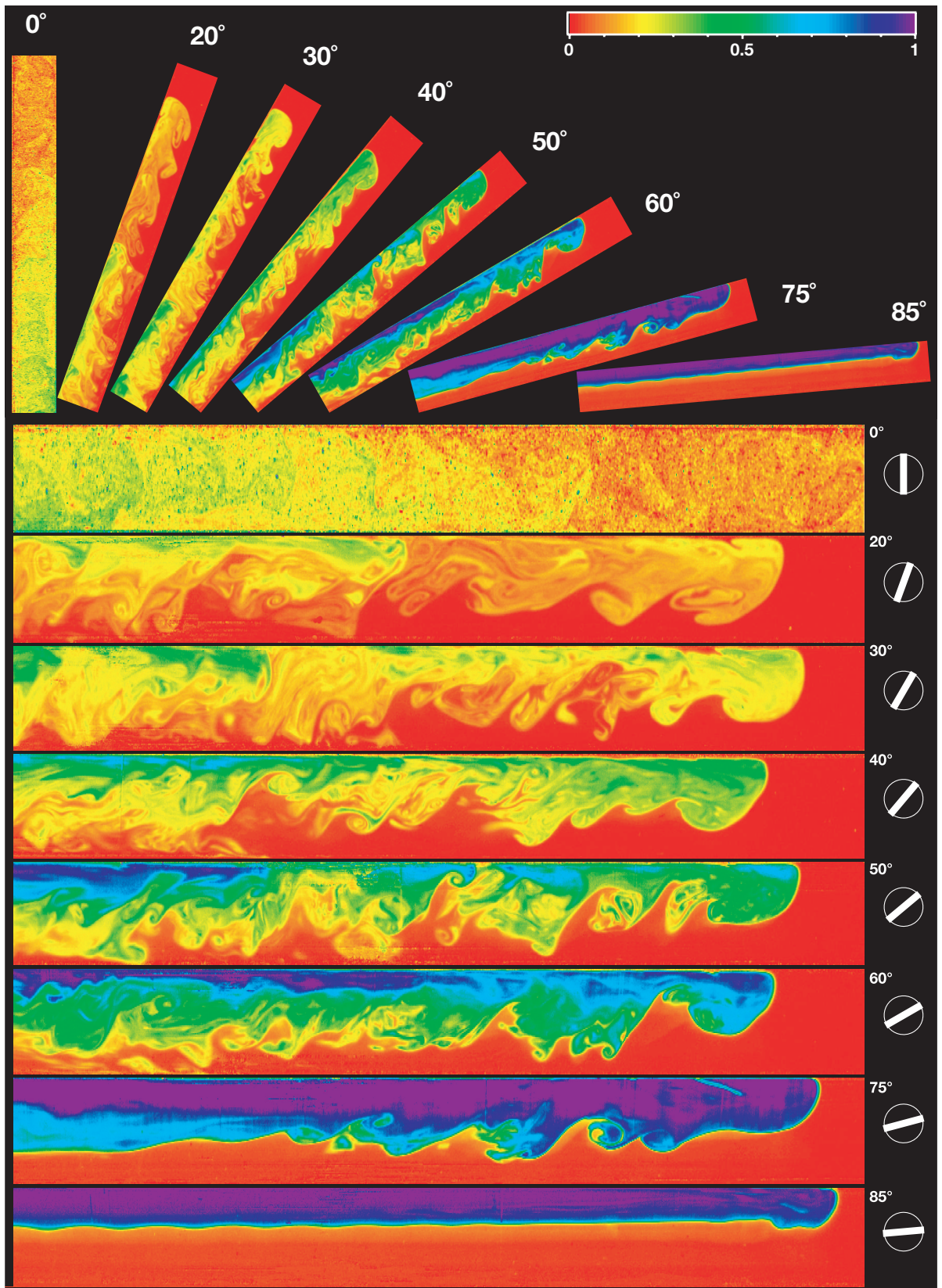


FIGURE 4.31: Image de la fraction relative locale normalisée de fluide léger  $C(x,t)$  obtenue pour  $At = 4 * 10^{-3}$  et  $\nu = 10^{-6} m^2/s$  à différents angles  $\theta = 0, 20, 30, 40, 50, 60, 75$  et  $85^\circ$  (champ filmé :  $20 * 300mm$ ). Le code de couleurs pour la fraction normalisée est montré en haut à droite de la figure. Nous avons agrandi les images du tube plus fortement dans la direction transverse que dans la direction longitudinale au tube. Un front symétrique de fluide lourd apparaît de l'autre côté de la vanne.

Les images normalisées fournissent alors directement la fraction relative locale  $C(\mathbf{x}, t)$  de fluide léger dans le plan éclairé par le laser (les composante de  $\mathbf{x}$  sont les coordonnées du point correspondant dans le plan laser). Nous savons que les variations de  $C(\mathbf{x}, t)$  peuvent être traduites en termes de variations de densité et que, en particulier, la valeur  $C_f$  de la fraction relative  $C(\mathbf{x}, t)$  au front est égale au rapport  $\delta\rho/\Delta\rho$  du contraste de densité local et du contraste initial de densité entre les deux fluides.

A  $\theta = 20^\circ$ , nous observons que le front apparaît en jaune dans le code de couleurs que nous utilisons, ce qui implique que la fraction relative locale au front est de l'ordre de  $C_f = \delta\rho/\Delta\rho \sim 0.2$  ; puis progressivement avec l'inclinaison  $\theta$ , le contraste de densité local au front augmente jusqu'à  $\theta = 60^\circ$  : pour cette valeur un canal de fluide pur léger (bleu foncé) alimente le front qui apparaît alors en bleu ; la fraction relative locale de fluide léger est donc très proche de 1. Le contraste de densité local au front est alors maximum avec :  $\delta\rho = \Delta\rho$ . Si on incline encore plus le tube, la ségrégation devient de plus en plus importante. Pour  $\theta = 75^\circ$ , toute une fraction de la section du tube est occupée par du fluide léger pur montant. Il apparaît des tourbillons de Kelvin-Helmholtz en arrière du front, mais ceux-ci, après avoir été éjectés, ne mélangent les fluides que sur une faible partie de la section au centre du tube.

Dans le but d'analyser quantitativement ces résultats, la fraction relative typique  $C_f(t)$  au front dans le fluide léger a été déterminée en moyennant six profils de variation de concentration (fait sur un pixel chacun) le long du tube, à l'intérieur d'une bande localisée dans la région de la section du tube de plus forte concentration (ces profils couvrent à peu près un dixième du diamètre). Dans la suite, le maximum de ces profils de concentration le plus proche du front est considéré comme représentant la concentration  $C_f(t)$  au front.

Les images de la figure 4.31 confirment par ailleurs qu'il n'y pas de mélange avec le fluide léger en avant du front : la concentration en fluide léger est donc considérée comme étant nulle dans cette région, et le contraste de densité relatif, de part et d'autre du front, peut donc bien être pris égal à  $C_f$ . Enfin, le front est supposé localisé à l'endroit où la concentration tombe à zéro sur les profils moyens. Cette procédure a été appliquée à des images successives lors de l'avancée du front, pour déterminer la variation au cours du temps de la fraction relative instantanée au front  $C_f(t)$  et de la vitesse instantanée  $V_f(t)$  (dédit du déplacement entre deux images). Ceci nous permet d'étudier quantitativement la phase transitoire du mouvement du front avant qu'il n'atteigne sa vitesse stationnaire.

#### 4.3.2.2 Variations de la concentration au front en régime transitoire

La figure 4.32(a) montre les variations temporelles de  $C_f(t)$  pour quatre angles différents :  $\theta = 20, 30, 50$  et  $60^\circ$  (notons que la gamme de temps sur laquelle nous avons travaillé correspond au temps de localisation du front dans le champ de la caméra).

Nous observons que, après une période transitoire durant laquelle la concentration relative au front décroît au fur et à mesure de son avancée,  $C_f(t)$  **atteint une valeur limite constante**  $C_{f\infty}$ . On atteint donc un régime d'écoulement qui apparaît stationnaire à l'échelle de temps de l'expérience : la dynamique du front est alors similaire à celle d'une bulle de fluide léger montant

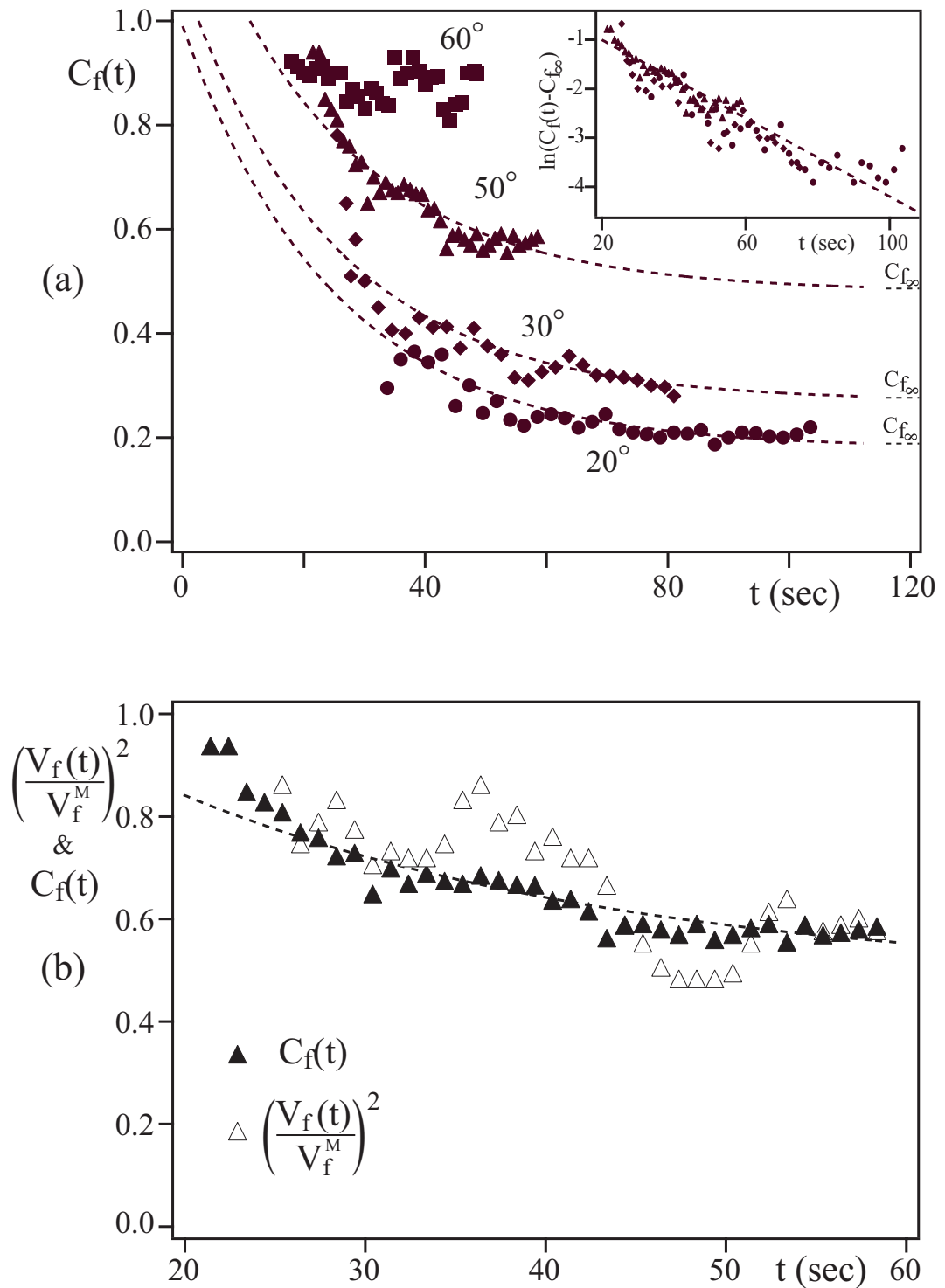


FIGURE 4.32: (a) Variation en fonction du temps de la fraction relative de fluide en mouvement  $C_f(t)$  au front pour quatre angles d'inclinaison différents :  $\theta = 20^\circ$  (●),  $\theta = 30^\circ$  (◆),  $\theta = 50^\circ$  (▲),  $\theta = 60^\circ$  (■). Courbes pointillées : relaxation exponentielle de constante de temps :  $\tau = 25s$  (voir insert) vers des valeurs asymptotiques 0.18, 0.27 et 0.48 (segments horizontaux) - (b) Comparaison des variations en temps de la fraction relative  $C_f(t)$  (▲) et du carré de la vitesse instantanée du front normalisée  $(V_f(t)/V_f^M)^2$  (△) pour  $\theta = 50^\circ$

sans se mélanger avec le fluide lourd environnant. Ce résultat particulièrement important est extrêmement surprenant : comment la concentration au front peut-elle rester constante, alors que nous sommes dans un régime où le mélange dû aux instabilités de cisaillement joue un rôle important ? Nous pensons que l'existence de ce régime stationnaire n'est possible que grâce à l'alimentation du front par un canal de fluide plus léger, de concentration variable avec  $\theta$ , qui existe contre la génératrice supérieure du tube : on compense ainsi l'effet des instabilités qui tend à diminuer la concentration au niveau du front.

D'autre part, on peut voir, par extrapolation, que  $C_f(t)$  ne s'écarte de la valeur initiale 1 qu'après un temps fini : le mélange dû aux instabilités de Kelvin-Helmoltz réduit donc la concentration locale seulement après un certains laps de temps, qui augmente lorsque  $\theta$  augmente. Ensuite,  $C_f(t)$  décroît jusqu'à atteindre une valeur limite  $C_{f\infty}$  : la variation linéaire de  $\ln(C_f(t) - C_{f\infty})$  tracée dans l'insert de la figure 4.32(a) montre que la relaxation est exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau = 25 \pm 5s$  indépendant de  $\theta$  aux erreurs expérimentales près.

Notons que ce temps caractéristique  $\tau \simeq 25s$  est étonnamment constant dans cette expérience ; nous le retrouverons pour différentes valeurs des paramètres de contrôle ainsi que pour l'interprétation d'autres types de mesures. Nous en parlerons plus en détail dans le dernier chapitre.

Nous allons maintenant nous intéresser aux valeurs de la concentration au front en régime stationnaire, lorsque  $C_f(t)$  a atteint une valeur constante  $C_{f\infty}$ .

### 4.3.2.3 Analyse expérimentale de la relation vitesse-concentration

En régime stationnaire, on note tout d'abord sur la figure 4.32(a) que la valeur limite  $C_{f\infty}$  augmente avec  $\theta$  ce qui traduit le fait que, plus  $\theta$  est grand, moins le mélange est efficace. Nous avons déjà observé qualitativement ce résultat sur la figure 4.31. Cette variation va nous permettre de vérifier quantitativement que la vitesse de front  $V_f$  est bien déterminée par le contraste de densité local  $\delta\rho$  correspondant.

En appliquant la relation 4.43 en régime stationnaire on s'attend à ce que :

$$\frac{V_f^\infty}{V_f^M} = \sqrt{C_{f\infty}} \quad (4.44)$$

La validité de cette relation est testée sur la figure 4.33 qui montre les variations en fonction de  $\theta$ , à la fois de  $\sqrt{C_{f\infty}}$  mesuré expérimentalement, et de la vitesse de front normalisée par la vitesse dans le régime 2 :  $V_f^\infty/V_f^M$ . Nous observons un excellent accord entre les variations de  $\sqrt{C_{f\infty}}$  avec  $\theta$  et celles de  $V_f^\infty/V_f^M$ , aussi bien dans le régime 1 que dans le régime 2 où  $C_{f\infty}$  est très proche de 1. Ces courbes valident donc nos prédictions et **confirment ainsi nos hypothèses concernant la relation directe entre la vitesse du front et le contraste de densité local au front  $\delta\rho$  en régime stationnaire.**

Une comparaison similaire est faite dans la figure 4.32(b) pour les valeurs instantanées du contraste de densité et de la vitesse de front pendant la phase transitoire. Les variations de la vitesse normalisée élevée au carré  $(V_f(t)/V_f^M)^2$  en fonction du temps ont été superposées sur la figure 4.32(b) pour  $\theta = 50^\circ$  aux variations de la concentration  $C_f(t)$ . Les deux courbes suivent la



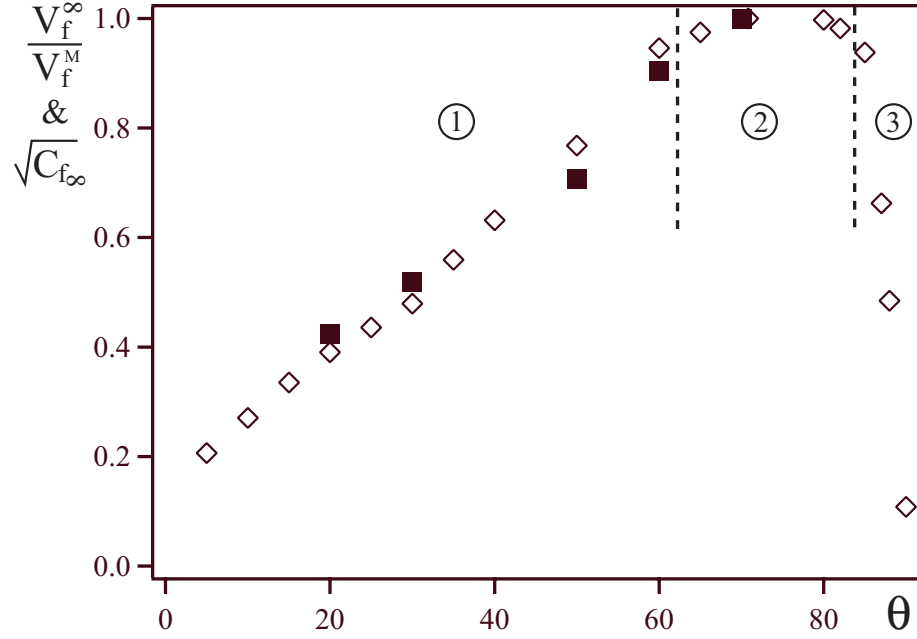


FIGURE 4.33: Variation avec l'angle d'inclinaison de la vitesse de front expérimentale normalisée en régime stationnaire  $V_f^\infty/V_f^M$  ( $\diamond$ ) et de sa valeur théorique  $\sqrt{C_{f\infty}}$  ( $\blacksquare$ ) calculée à partir des concentrations mesurées expérimentalement (les valeurs de  $At$  et  $\nu$  sont les mêmes que dans les figures 4.31 et 4.32).

même tendance : les fortes oscillations observées sur la variation de la vitesse sont liées à l'arrivée de paquets de fluide plus concentrés. Ceci indique que **la relation entre la vitesse de front et le contraste de concentration n'est pas seulement vraie en régime stationnaire mais aussi pour les valeurs instantanées en régime transitoire.**

## 4.4 Conclusion

Pour conclure, ces mesures directes de la concentration locale réalisées grâce à la technique de fluorescence laser nous ont permis de vérifier expérimentalement la relation très étroite entre le degré de mélange au front et la vitesse de front en régime d'écoulement dominé par les effets inertiels. Le résultat clef de ces expériences est le fait que la vitesse de front  $V_f$  est bien proportionnelle à la racine carrée de la concentration relative au front  $C_f$  dans les régimes inertiels (1 et 2).

Ces résultats confirment que de telles mesures de concentration locale fournissent des informations extrêmement importantes sur la dynamique du mélange. Nous n'avons discuté ici que les distributions de concentration au niveau du front, cependant des informations toutes aussi importantes sur ces phénomènes de mélange peuvent être attendues de mesures effectuées dans la zone de mélange entre les deux fronts. Un point particulièrement important sera l'influence des effets de stratification sur la distribution transverse des fluides dans l'écoulement, et des effets d'intermittence lors de leur variation temporelle. De telles mesures seront nécessaires pour nous permettre de comprendre les lois d'échelle mises en évidence dans le présent chapitre et, en particulier la variation en  $Re_t^{-3/2}$  observée pour la concentration au niveau du front.



## Chapitre 5

# Mélange diffusif

Après l'étude de la dynamique de front, nous allons nous intéresser au mélange en aval de celui-ci, et, plus précisément, à l'étude de la concentration relative des fluides dans la zone de mélange. Cette distribution est très fortement influencée par l'inclinaison, comme nous l'avons entrevu au chapitre précédent, mais, avant d'analyser cette influence, nous allons décrire les principaux résultats obtenus en tube vertical par mes prédécesseurs [21] [22] et moi-même :

- Existence d'un régime d'étalement macroscopiquement diffusif.
- Caractérisation de ce régime par un coefficient macroscopique de diffusion  $D$ .
- Disparition du régime diffusif aux faibles contrastes de densité et aux fortes viscosités.

Puis nous discuterons l'évolution de ce coefficient de diffusion en fonction des différents paramètres du problème ( $At$ ,  $\nu$  et  $d$ ).

Dans un deuxième temps, nous étudierons l'influence de l'inclinaison du tube sur le domaine d'existence de ce régime diffusif et sur la valeur du coefficient de diffusion.

Enfin, nous chercherons quel mécanisme peut rendre compte d'un étalement diffusif de la zone de mélange, et nous verrons les limites de cette description.

## 5.1 Mélange diffusif en tube vertical

### 5.1.1 Régime d'étalement macroscopiquement diffusif de la zone de mélange

Tout d'abord, rappelons rapidement la procédure expérimentale utilisée pour l'étude du mélange entre les fronts : le fluide léger, initialement séparé du fluide lourd, est coloré avec un colorant bleu foncé et le tube est rétro-éclairé. Après ouverture de la vanne centrale, les images de l'intensité lumineuse transmise à travers le tube sont transformées en profils de concentration normalisée le long du tube, dont nous tirons les diagrammes spatio-temporels.

Les figures 5.1 (a) et (b) montrent ainsi respectivement le diagramme spatio-temporel et des profils instantanés de la variation de la concentration normalisée en fonction de  $x$ , distance à la

vanne, pour le mélange en tube vertical, avec comme valeurs de paramètres de contrôle  $At = 3.9.10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ .

A gauche de la figure, une séquence de vues de cet écoulement est montrée ; chaque valeur de la concentration correspond à une moyenne sur la section du tube, à une distance donnée de la vanne. Les niveaux de gris du diagramme spatio-temporel correspondent à cette concentration. Nous caractériserons le mélange à partir de l'étalement de ces profils de concentration.

Le diagramme spatio-temporel présente ici une variation quasiment continue des nuances de gris, ce qui indique que les fluctuations de concentration sont faibles et que le mélange est homogène à petite échelle. Par ailleurs, les lignes de niveaux de gris constants présentent une allure parabolique : la largeur de la zone de mélange semble donc croître comme la racine carrée du temps.

Si nous traçons alors les profils de concentration normalisée à différents instants, non pas en fonction de la variable  $x$  mais en fonction de la variable  $x/t^{0.5}$  (figure 5.1(c)), on observe une excellente superposition des différents profils sur une même courbe. Nous traçons alors sur le même graphique la fonction :

$$C(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \quad (5.1)$$

solution de l'équation de diffusion à une dimension :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \times \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

où  $C$  est la concentration,  $\operatorname{erf}$  est la fonction erreur définie par :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

et  $D$  le coefficient de diffusion à déterminer.

Nous pouvons alors obtenir, grâce un ajustement adéquat du coefficient de diffusion  $D$ , une remarquable superposition des courbes expérimentales et théoriques (figure 5.1(c)).

Ceci a pour conséquence :

- D'une part de démontrer le **caractère diffusif de l'étalement de la zone de mélange**.
- D'autre part de caractériser ce mélange par un **coefficient de diffusion  $D$**  (dédit de l'ajustement de la fonction erreur avec les courbes expérimentales).

Notons enfin que ce coefficient de diffusion  $D$  est de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , soit supérieur de cinq ordres de grandeur au coefficient de diffusion moléculaire ( $D_m \simeq 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Nous sommes ainsi en présence d'un **processus de diffusion macroscopique**, résultant des mouvements aléatoires des "paquets de fluides" lourds et légers, et non pas d'un processus de diffusion à l'échelle moléculaire.

Dans le cas typique de la figure 5.1, la fonction erreur s'ajuste sans ambiguïté sur les courbes expérimentales. Dans d'autres cas, l'ajustement s'avère moins bon et l'équation (5.1) n'est, de plus, pas vérifiée sur l'ensemble du profil. Nous déterminons alors  $D$  à partir de la pente de variation

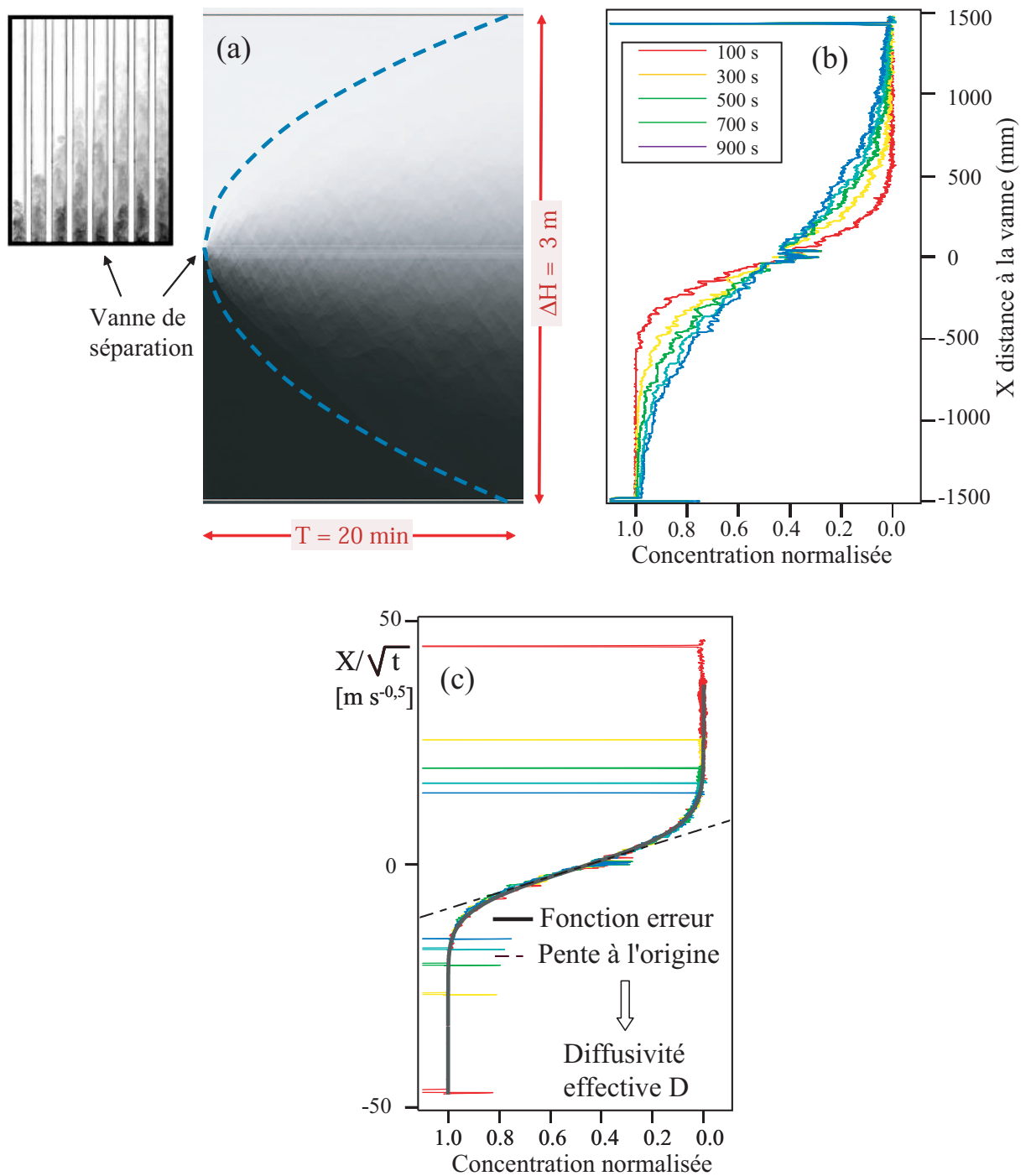


FIGURE 5.1: Profils de concentration et diagramme spatio-temporel obtenus en tube vertical ( $\theta = 0^\circ$ ) avec :  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ . En haut à gauche : séquence de photos du mélange. (a) Diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne normalisée. (b) Profils de concentration normalisée, à différents instants. (c) Profils de concentration normalisée, tracés en fonction de  $x/\sqrt{t}$  sur lesquels sont superposés une fonction erreur en trait plein et la pente à l'origine en trait mixte.

de la concentration, dans la région centrale. Calculons pour cela la dérivée pour  $x/\sqrt{t} = 0$  de la fonction (5.1) :

$$\left( \frac{\partial C(x,t)}{\partial \frac{x}{\sqrt{t}}} \right)_{\frac{x}{\sqrt{t}}=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}}$$

Ou encore

$$D = \frac{1}{4\pi \left( \frac{\partial C(x,t)}{\partial \frac{x}{\sqrt{t}}} \right)_{\frac{x}{\sqrt{t}}=0}^2}$$

Graphiquement  $\left( \frac{\partial C(x,t)}{\partial \frac{x}{\sqrt{t}}} \right)_{\frac{x}{\sqrt{t}}=0}$  représente la pente à l'origine des courbes de la variation de la concentration normalisée. Nous avons marqué cette pente sur la figure 5.1(c).

Cette méthode est moins précise mais nécessite uniquement de connaître la variation de la concentration normalisée dans la partie centrale de la zone de mélange (nous verrons son utilité plus tard).

Nous allons maintenant analyser les domaines d'existence de l'étalement diffusif, en fonction des paramètres de contrôle de l'expérience, et tout particulièrement du contraste de densité  $At$  qui influence considérablement les régimes d'écoulement (chapitre 2).

## 5.1.2 Domaine d'existence du régime de mélange diffusif en fonction du contraste de densité

Sur la figure 5.2, nous avons reproduit les séquences de photos déjà montrées au chapitre 2 (figures (a),(b),(c)), auxquelles nous avons ajouté les diagrammes spatio-temporels correspondants (figures (d),(e),(f)), et les profils de variation de la concentration normalisée en fonction de  $x/\sqrt{t}$  (figures (g) et (h)) et en fonction de  $x$  (figure (i)).

### 5.1.2.1 Régime diffusif aux contrastes de densité forts et intermédiaires

La première colonne présente une expérience où le contraste de densité ( $At = 5.10^{-2}$ ) est très élevé (supérieur à celui de la figure 5.1 :  $At = 4.10^{-3}$ ). Nous pouvons donc dire qualitativement que le mélange présente un caractère turbulent : sur le diagramme spatio-temporel, les fluctuations de concentration sont très faibles, et le mélange est encore plus homogène à petite échelle que dans la figure 5.1. Les profils de concentration normalisées se superposent alors parfaitement lorsqu'ils sont tracés en fonction de  $x/\sqrt{t}$ , le mélange est donc parfaitement diffusif et la détermination de  $D$  est très précise.

Pour un contraste de densité nettement inférieur ( $At = 8.10^{-4}$ ), le diagramme spatio-temporel de la figure 5.2(e) est différent, et reflète une structure différente de l'écoulement (figure 5.2(b)) :

- La zone de mélange présente, cette fois, des frontières assez nettes correspondant au front avant du déplacement des fluides et la vitesse de front est stationnaire.

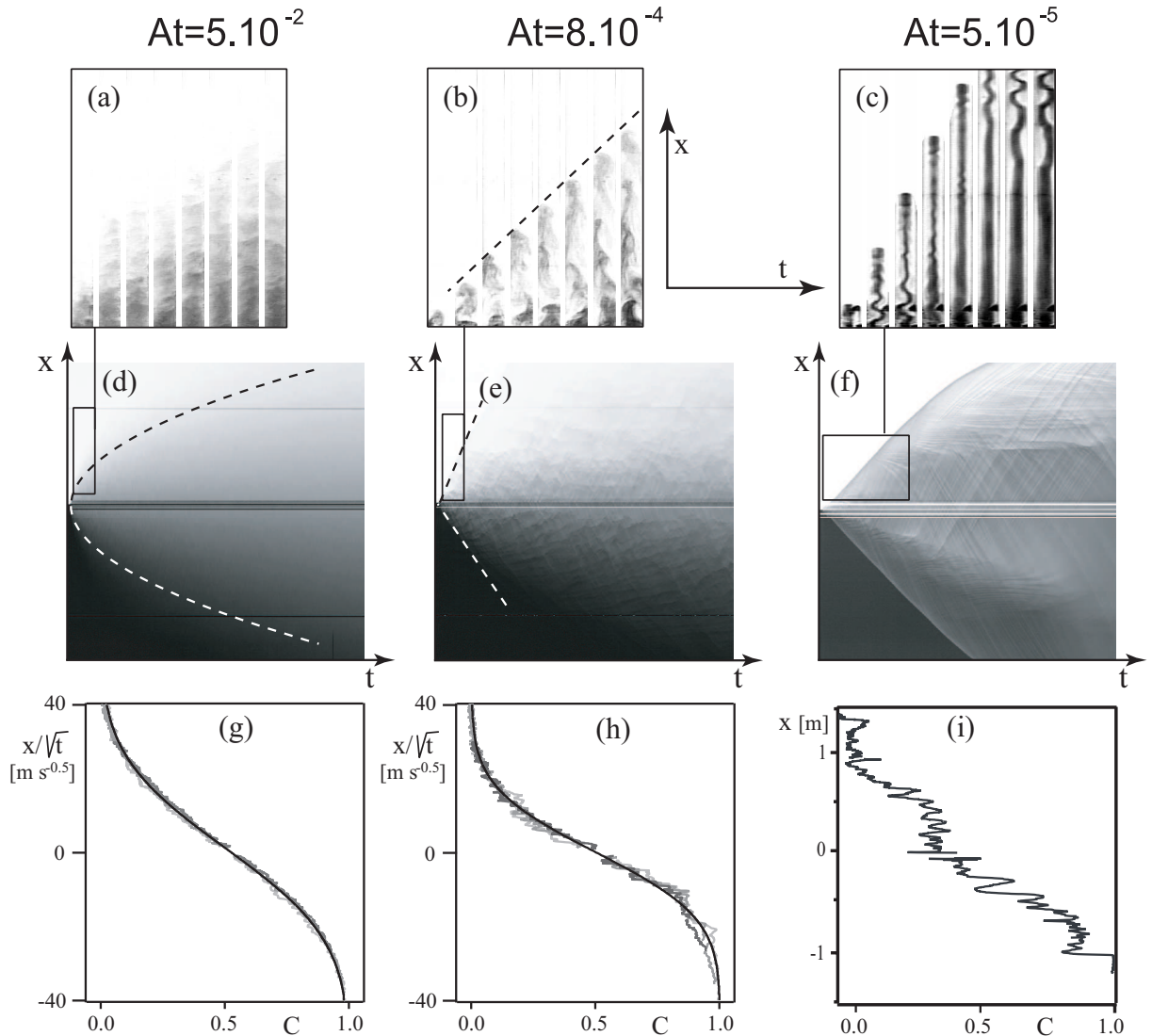


FIGURE 5.2: Résultats expérimentaux obtenus pour différents contrastes de densité ( $At = 5.10^{-2}$ ,  $8.10^{-4}$ ,  $5.10^{-5}$ ) à viscosité constante ( $\nu = 10^{-6}m^2/s$ ) et diamètre de tube constant ( $d = 20mm$ ). - (a),(b),(c) Séquences d'images de tubes verticaux obtenues pour des expériences réalisées à différents contrastes de densité, voir figure 2.5 au chapitre 2. - (d),(e),(f) Diagrammes spatio-temporels associés respectivement aux expériences (a), (b) et (c) (l'échelle verticale correspond à la distance à la vanne ( $\pm 1.5m$ ) et l'échelle horizontale au temps écoulé (20 min)). - (g),(h) Profils de concentration normalisée associés respectivement aux expériences (a) et (b) ( $t = 120, 360, 960s$ ) et tracés en fonction de  $\frac{x}{\sqrt{t}}$ . La courbe noire continue correspond à l'ajustement des courbes expérimentales par une fonction erreur. - (i) Variation de la concentration normalisée tracée en fonction de la distance  $x$  à la vanne ( $t = 190s$ ).

- Des stries obliques sont clairement visibles sur le diagramme spatio-temporel (figure 5.2(e)). Elles marquent des mouvements internes de paquets de fluides entre les deux fronts, observés sur la figure 5.2(b), et mettent en évidence des fluctuations relatives de concentration plus importantes que lorsque le nombre d'Atwood est plus fort (les pentes des stries indiquent la vitesse de propagation des perturbations).

Toutefois, les profils successifs de concentration se superposent encore lorsqu'ils sont tracés en fonction de  $x/t^{0.5}$  (figure 5.2(h)), et ils s'ajustent à nouveau par une fonction erreur. Ainsi, même aux faibles contrastes de densité, **le processus d'étalement reste diffusif** et il est encore possible de caractériser quantitativement le mélange par un **coefficient de diffusion macroscopique**.

### 5.1.2.2 Régime non diffusif aux très faibles contrastes de densité

Enfin, pour les très faibles contrastes de densité ( $At = 5.10^{-5}$  dans les figures 5.2 (c),(f) et (i)), nous avons un déplacement convectif marqué, caractérisé par la présence d'un front et par le déplacement à vitesse constante des perturbations de densité dans chacune des deux parties de la section (stries obliques sur le diagramme spatio-temporel). Remarquons de plus que la vitesse de propagation de ces perturbations de densité est plus élevée que la vitesse du front.

Le mélange ne présente alors **plus de caractéristiques diffusive**; nous ne pouvons plus ajuster les profils de concentration par des fonctions erreur, et donc définir un coefficient de diffusion. Ce régime non diffusif est analogue aux régimes 2 et 3 du chapitre précédent, c'est-à-dire des déplacements convectifs avec un très faible mélange ou même des contre-écoulements stables.

Intéressons-nous maintenant à l'influence de la viscosité des fluides et du diamètre du tube sur le type de régime observé.

### 5.1.3 Domaine d'existence des régimes d'écoulement en fonction de la viscosité et du diamètre

La figure 5.3(a) présente une carte des domaines d'existence des deux régimes d'écoulement en fonction de  $At$  et  $\nu$ . Quel que soit le contraste de densité, en augmentant la viscosité, on passe d'un régime de mélange diffusif à un régime de contre-écoulement stable. La viscosité réduit en effet les fluctuations de vitesse et le nombre de Reynolds local, ce qui a pour conséquence de réduire le mélange entre les deux fluides ; si ce mélange est trop faible, l'interpénétration des fluides ne peut évidemment plus atteindre de régime diffusif. Nous trouvons expérimentalement que la frontière entre les régimes diffusif et non-diffusif correspond à des valeurs du nombre d'Atwood proportionnelles à  $\nu^2$ .

L'influence du diamètre du tube  $d$  a été étudiée avec les valeurs de  $d$  suivantes :  $d = 44, 30, 20, 12, 8, 5, 3$  et  $2mm$ . La carte 5.3(b) montre les régimes d'écoulement observés suivant les valeurs de  $At$  et  $d$ . La diminution de  $d$  stabilise les écoulements et fait donc passer des régimes diffusifs vers des contre-écoulements stables. Le nombre d'Atwood correspondant à la transition entre les deux régimes varie cette fois comme  $d^{-3}$ .



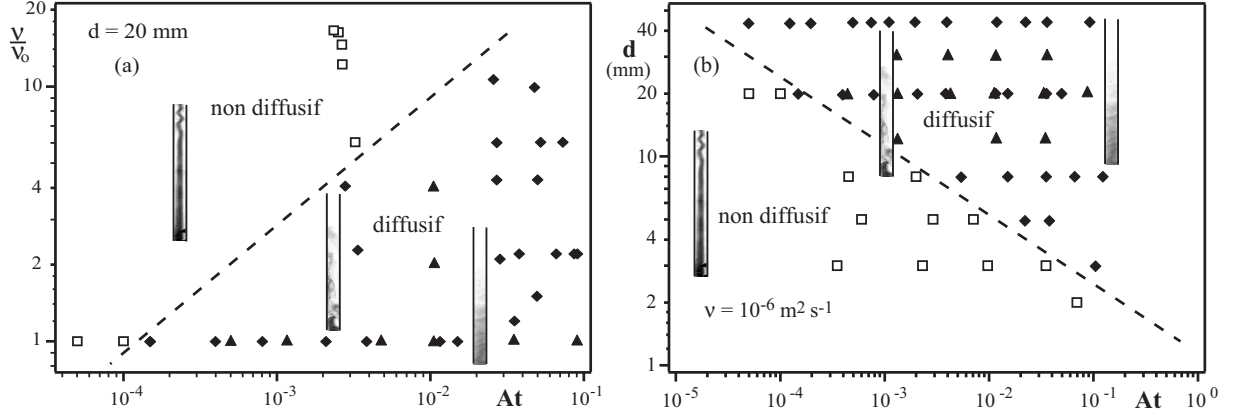


FIGURE 5.3: Domaines d'observation des régimes d'écoulement (a) en fonction de la viscosité des fluides  $\nu$  et du nombre d'Atwood  $At$  ( $d = 20\text{mm}$ ) ; (b) en fonction du diamètre du tube  $d$  et du nombre d'Atwood  $At$  ( $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ). ( $\blacklozenge$ ) Régime diffusif, expériences réalisées par Debacq *et al.* ; ( $\blacktriangle$ ) régime diffusif, expériences réalisées au cours de ma thèse. ( $\square$ ) Régime de contre-écoulement stable, expériences réalisées par Debacq *et al.* La ligne en tirets sépare les deux régimes et correspond à des variations en loi de puissance de  $\nu/\nu_0$  et de  $d$  en fonction de  $At$  avec des exposants respectifs de  $1/2$  dans (a) et  $-1/3$  dans (b).

#### 5.1.4 Variation du coefficient de diffusion macroscopique avec le contraste de densité, le diamètre et la viscosité

L'étude précédente a montré que, sur une très large gamme de contrastes de densité, et bien que les diagrammes spatio-temporels présentent des allures différentes, le mélange est macroscopiquement diffusif, et peut être caractérisé par un coefficient de diffusion.

Dans un premier temps, nous avons étudié la variation de  $D$  en fonction du nombre d'Atwood  $At$ , à viscosité constante  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ , et pour quatre diamètres de tube pour lesquels un régime diffusif a été observé ( $d = 8, 20, 30$  et  $44\text{mm}$ ) ; les résultats sont présentés sur la figure 5.4(a).

Un premier résultat important est la très faible variation du coefficient de diffusion avec  $At$  aux faibles valeurs du contraste de densité ; nous donnerons une explication à ce résultat lorsque nous nous intéresserons aux mécanismes qui sont à l'origine du mélange diffusif. Pour  $d = 20\text{mm}$ , le coefficient de diffusion garde ainsi une valeur constante ( $D = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ ) sur deux ordres de grandeurs de valeurs de contraste de densité (de  $At = 10^{-4}$  à  $At = 10^{-2}$ ), et ce malgré la grande diversité des diagrammes spatio-temporels observés. La valeur de  $D$  pour ces faibles valeurs de  $At$  augmente par ailleurs faiblement avec le diamètre  $d$  du tube.

Aux forts contrastes de densité,  $D$  augmente nettement avec  $At$ , au-delà d'une valeur seuil de  $At$  qui augmente quand le diamètre  $d$  diminue (figure 5.4(a)). Notons ainsi pour  $d = 20\text{mm}$  la forte augmentation de  $D$  pour  $At > 10^{-2}$ . Remarquons que la valeur de  $D$  pour les nombres d'Atwood élevés ( $At \gtrsim 0.1$ ) peut être surestimée du fait de l'augmentation de la viscosité des solutions avec la concentration en sel (nous verrons plus loin que  $D$  augmente avec la viscosité).

Analysons maintenant la variation du coefficient de diffusion  $D$  avec la viscosité des fluides : la figure 5.4(b) montre les variations de  $D$  avec  $At$  dans le tube de  $20\text{mm}$  de diamètre pour différentes

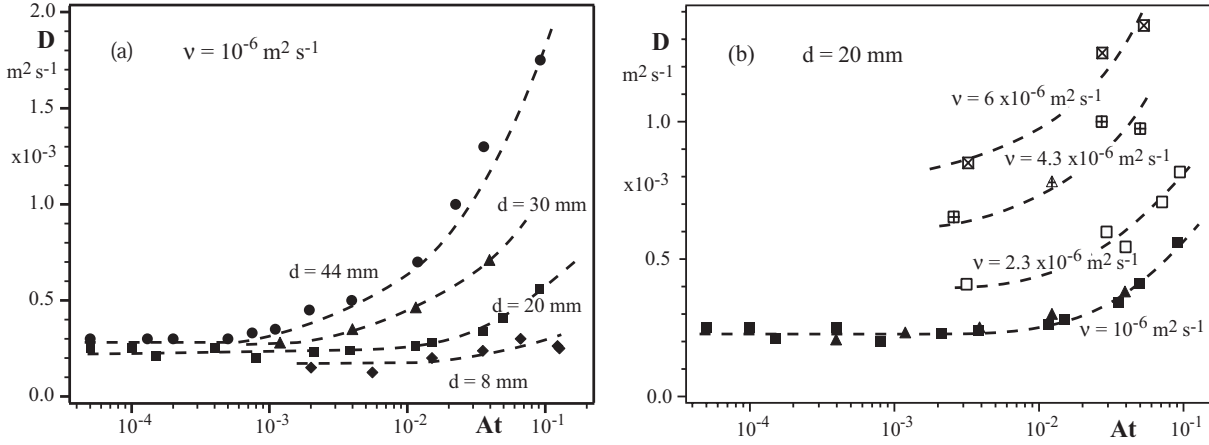


FIGURE 5.4: (a) Évolution du coefficient de diffusion macroscopique  $D$  avec le nombre d'Atwood  $At$  pour quatre diamètres de tube différents  $d = 44mm$  (●),  $d = 30mm$  (▲),  $d = 20mm$  (■) et  $d = 8mm$  (◆) ( $\nu = 10^{-6} m^2.s^{-1}$ ). Variation de  $D$  avec  $At$  pour des viscosités :  $\nu = 10^{-6} m^2.s^{-1}$  (■),  $\nu = 2.3 \cdot 10^{-6} m^2.s^{-1}$  (□),  $\nu = 4.3 \cdot 10^{-6} m^2.s^{-1}$  (▣) et  $\nu = 6 \cdot 10^{-6} m^2.s^{-1}$  (⊠) ( $d = 20mm$ ). Les lignes pointillées montrent les tendances des différentes variations. Dans les deux figures, les triangles sont les expériences réalisées au cours de cette thèse, les autres points sont des expériences réalisées par Debacq *et al.*

viscosités variant entre  $10^{-6}$  et  $6 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$ . Le résultat est en apparence très surprenant :  $D$  augmente avec la viscosité  $\nu$ , ce qui implique que la zone de mélange entre les deux fluides s'étale plus vite pour des fluides plus visqueux. Ce comportement s'explique de la même manière que l'augmentation de la vitesse de front avec la viscosité vue au chapitre précédent : augmenter  $\nu$  revient à limiter le mélange, les contrastes de densité locaux sont alors plus élevés, ce qui accroît la vitesse des mouvements internes de fluides responsable de la diffusion dans la zone de mélange. En revanche, les fluctuations de densité sont plus importantes, c'est-à-dire que le mélange est de moins bonne qualité à petite échelle.

### 5.1.5 Loi d'échelle

Nous allons maintenant chercher à regrouper les courbes de la figure 5.4 en les adimensionnalisant. Dans tous les régimes diffusifs étudiés ici, l'inertie joue un rôle dominant, et nous allons donc, comme au chapitre précédent, utiliser comme paramètres de référence le nombre de Reynolds et la vitesse inertielle :

$$Re_t = \frac{V_t d}{\nu}$$

$$V_t = \sqrt{Atgd}$$

Nous allons alors adimensionner le coefficient de diffusion macroscopique  $D$  en le divisant par le produit  $V_t d$  de même dimension, et nous traçons, sur la figure 5.5, la variation de ce rapport en fonction de  $Re_t$ .

Nous observons alors, sur cette figure, que les points de données viennent se confondre sur une même variation globale, au sein de laquelle nous distinguons deux régimes ; la transition entre

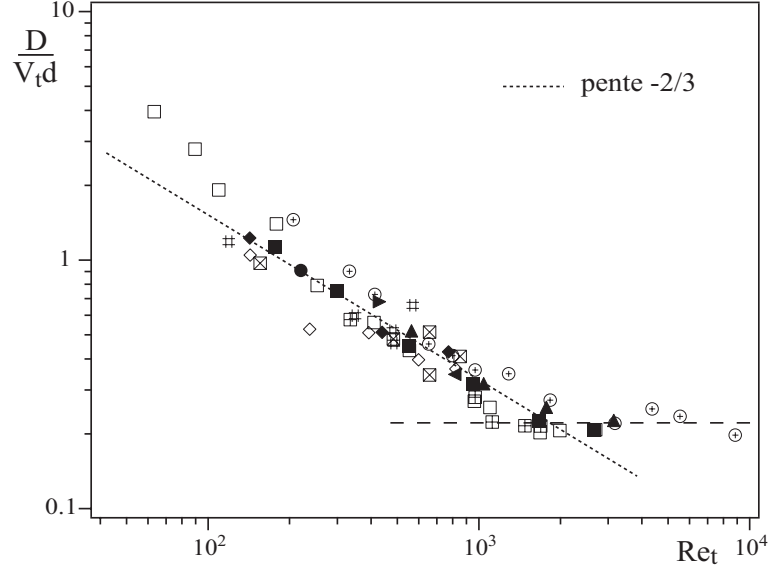


FIGURE 5.5: Variation du rapport  $D/V_t d$  avec le nombre de Reynolds  $Re_t = V_t d / \nu$  pour différents diamètres de tube  $d = 44\text{mm}$  :  $\oplus$  ;  $d = 30\text{mm}$  :  $\blacktriangle$ ,  $\blacktriangleleft$ ,  $\blacktriangleright$  ;  $d = 20\text{mm}$  :  $\square$ ,  $\boxplus$ ,  $\boxtimes$ ,  $\boxddagger$ ,  $\blacksquare$ ,  $\bullet$  ;  $d = 12\text{mm}$  :  $\blacklozenge$  ;  $d = 8\text{mm}$  :  $\diamond$  et différentes viscosités  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  :  $\diamond$ ,  $\square$ ,  $\oplus$ ,  $\blacklozenge$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$  ;  $2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  :  $\boxplus$ ,  $\blacktriangleleft$  ;  $4 \cdot 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  :  $\boxtimes$ ,  $\bullet$ ,  $\blacktriangleright$  ;  $6 \cdot 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  :  $\boxddagger$ . Les symboles pleins correspondent à des expériences réalisées au cours de cette thèse, les autres symboles correspondent à des expériences réalisées par Debacq *et al.* La pente des pointillés est  $-2/3$ .

ceux-ci correspondent au nombre de Reynolds :  $Re_t \simeq 2000$ .

Pour le régime correspondant à  $Re_t \lesssim 2000$ , le coefficient de diffusion normalisé  $D/V_t d$  vérifie :

$$\frac{D}{V_t d} \propto Re_t^{-2/3} \quad (5.2)$$

De plus, nous pouvons réécrire le nombre de Reynolds  $Re_t$  sous forme d'un rapport de deux longueurs caractéristiques :

$$Re_t = \left( \frac{d}{\left(\frac{\nu^2}{gAt}\right)^{1/3}} \right)^{3/2} = \left( \frac{d}{l_c} \right)^{3/2}$$

avec

$$l_c = \left( \frac{\nu^2}{gAt} \right)^{1/3}$$

L'équation (5.2) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\frac{D}{V_t} \propto l_c \quad (5.3)$$

Nous pouvons estimer graphiquement sur la figure 5.5 le coefficient de proportionnalité :  $D/V_t \simeq 200^{2/3} l_c \simeq 35 l_c$ .

D'autre part, pour le régime correspondant à  $Re_t \gtrsim 2000$  nous avons :

$$\frac{D}{V_t d} \propto 1$$

soit :

$$\frac{D}{V_t} \propto d \quad (5.4)$$

Nous voyons donc que, lorsque l'écoulement est le plus turbulent ( $Re_t \gtrsim 2000$ ), la longueur caractéristique du mélange diffusif  $D/V_t$  est proportionnelle au diamètre du tube  $d$  et du même ordre de grandeur ( $D/V_t \simeq 0.2d$ ), ceci semble indiquer que la taille maximale des structures turbulentes créant le mélange est de l'ordre du diamètre  $d$  du tube : ainsi une particule de fluide parcourra une distance de l'ordre de grandeur de  $d$  avant de se mélanger.

Lorsque le nombre de Reynolds diminue, la longueur caractéristique de diffusion  $D/V_t$  augmente : cela est pertinent étant donné que diminuer le nombre de Reynolds donne au mélange un aspect plus convectif et allonge donc les structures d'écoulement responsables du mélange. De plus, dans ce régime,  $D/V_t$  est proportionnel à la longueur caractéristique  $l_c$  : cette dernière caractérise la distance sur laquelle s'établit un équilibre entre les forces d'Archimède qui induisent le mouvement et les forces de viscosité qui le freinent.

L'explication de la relation entre cette longueur  $l_c$  et le processus de mélange étudié, ainsi que celle de la faible valeur du rapport  $D/V_t l_c$  pour  $Re_t \lesssim 2000$  n'apparaissent pas de manière évidente. La compréhension de ces résultats devra représenter un des objectifs importants de la suite de ce travail : elle nécessitera probablement une analyse expérimentale de la structure de ces écoulements à petite échelle.

## 5.2 Tubes inclinés

Nous allons maintenant aborder le cas des tubes inclinés, en montrant que les régimes d'étalement diffusif du profil de concentration subsistent et nous analyserons donc la variation du coefficient de diffusion avec l'angle d'inclinaison.

### 5.2.1 Existence d'un régime d'étalement diffusif en tube incliné

Pour vérifier que le mélange conserve son caractère diffusif en tube incliné nous avons tracé un exemple typique sur la figure 5.6.

Les figures (a) et (b) présentent le diagramme spatio-temporel et les profils de variation de la concentration normalisée en fonction de la distance à la vanne, à différents instants, pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$  et  $d = 20 mm$ . Sur la figure (c) nous avons tracé, comme dans le cas du tube vertical, la variation de la concentration normalisée en fonction de  $x/\sqrt{t}$  : nous voyons que les différentes courbes se superposent très bien, sauf aux temps longs. Lorsque les variations de concentration atteignent les extrémités fermées du tube, il y a en effet accumulation sur celles-ci du fluide en mouvement et donc déformation du profil ; nous reparlerons de ce phénomène par la

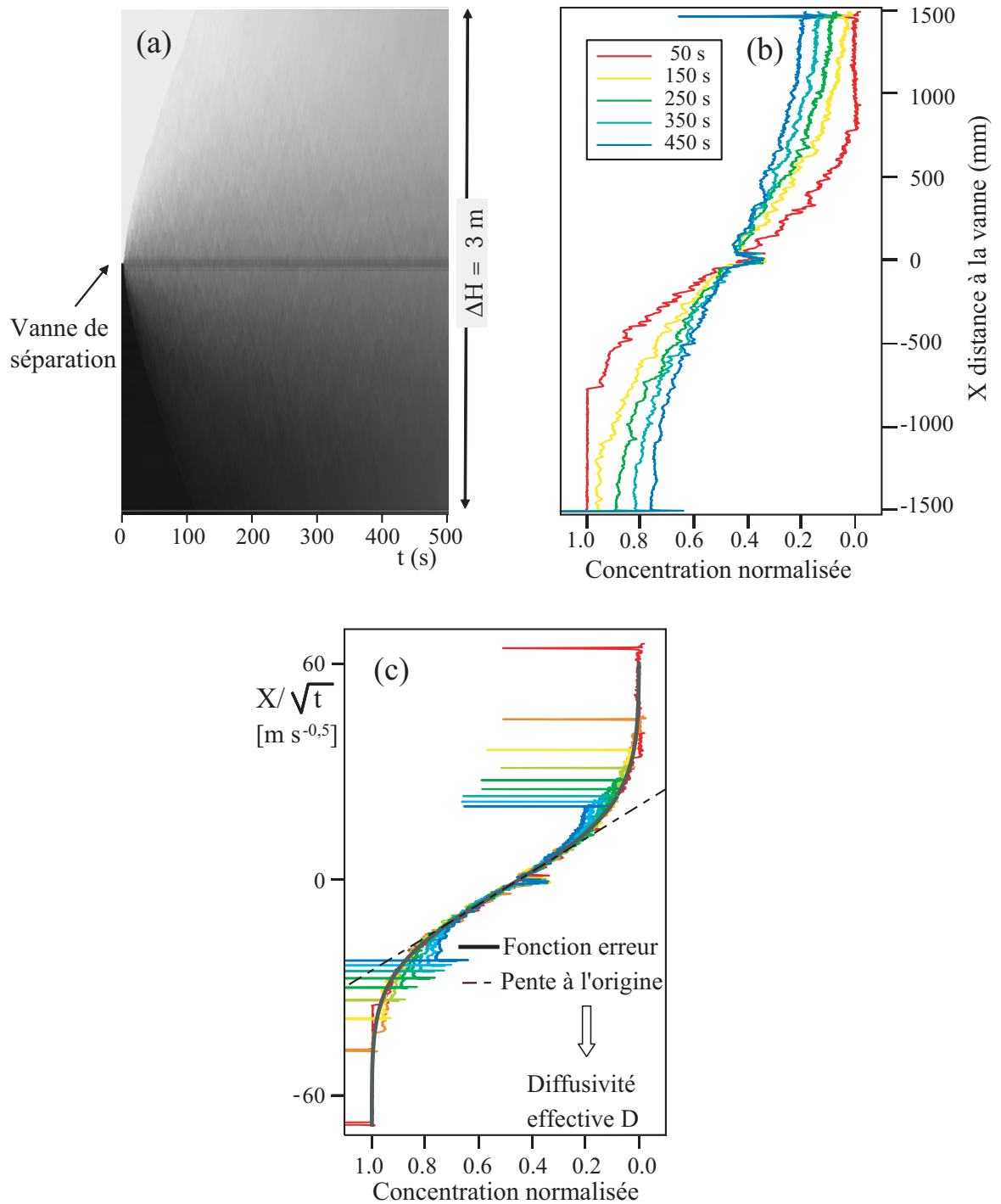


FIGURE 5.6: Expérience réalisée en tube incliné ( $\theta = 30^\circ$ ) montrant un étalement diffusif du profil de concentration pour :  $At = 1.10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $d = 20\text{mm}$ . (a) Diagramme spatio-temporel de la concentration normalisée moyennée sur la section du tube. (b) Profils de concentration normalisée, à différents instants. (c) Profils de variation de la concentration normalisée, en fonction de  $x/\sqrt{t}$  ajustés par une fonction erreur et par la tangente à l'origine ( $x/\sqrt{t} = 0$ ).

suite. Remarquons que ce phénomène n'a pas été observé en tube vertical pour le même temps d'observation expérimental : nous verrons en effet que l'étalement diffusif de la zone de mélange est plus rapide en tube incliné et qu'elle atteint donc plus vite les extrémités du tube.

Nous pouvons de plus ajuster sur ces courbes une fonction erreur, ce qui permet comme précédemment de déterminer un coefficient de diffusion macroscopique  $D$ . Ce coefficient peut également être déduit de la la pente à l'origine, ce qui, compte tenu des déformations de la courbe près des extrémités du tube, peut s'avérer très pratique

Toutefois l'existence de ces régimes diffusifs de mélange dépendent fortement de l'angle d'inclinaison.

### 5.2.2 Domaine d'existence du régime diffusif pour des tubes inclinés

Nous avons mené des séries d'expériences en tube incliné avec des contrastes de densité, des viscosités, et des diamètres de tube différents, et nous avons déterminé pour chaque valeur de ces paramètres la gamme des angles d'inclinaison pour lesquels le processus d'étalement est diffusif.

La figure 5.7 présente les domaines d'existence respectifs des régimes de mélange macrodiffusif et non-diffusif. Les différents diagrammes correspondent à des expériences où nous avons maintenu respectivement constants  $\nu$  et  $d$  (a),  $At$  et  $d$  (b), et  $At$  et  $\nu$  (c). Les régions grisées correspondent au domaine de mélange diffusif.

Nous observons donc que l'étalement du profil de concentration est diffusif :

- Pour  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  et  $d = 20mm$  (figure (a)) : seulement jusqu'à  $10^\circ$  pour les faibles contrastes de densité ( $At \simeq 4.10^{-4}$ ), et jusqu'à  $70^\circ$  pour les forts contrastes de densité ( $At \simeq 3.5.10^{-2}$ ).
- Pour  $At = 10^{-2}$  et  $d = 20mm$  (figure (b)) : jusqu'à  $60^\circ$  pour la viscosité de l'eau  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  et seulement jusqu'à  $10^\circ$  pour une viscosité quatre fois plus forte ( $\nu = 4.10^{-6}m^2/s$ ).
- Pour  $At = 10^{-2}$  et  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  (figure (c)) : seulement jusqu'à  $40^\circ$  pour un tube de 12 millimètres de diamètre et jusqu'à  $70^\circ$  pour un tube de 30 millimètres de diamètre.

La position de la frontière entre les deux domaines reflète la loi qualitative suivante : pour observer un régime de mélange analogue, il faut un contraste de densité (ou un diamètre de tube) d'autant plus élevé que l'angle d'inclinaison ( $\theta$  par rapport à la verticale) est important, et, inversement, il faut une viscosité d'autant plus faible que  $\theta$  est élevé. Nous avons vu que l'inclinaison du tube stabilise l'interface à travers l'effet de ségrégation induit par la composante transverse de la gravité. Cette compétition entre la stratification et le développement des instabilités de cisaillement explique le fait que, pour obtenir des observations analogues dans des conditions différentes, il faut conjointement augmenter le contraste de densité  $At$  et l'angle  $\theta$ , ou augmenter le diamètre  $d$  du tube et l'angle  $\theta$ , ou enfin diminuer la viscosité des fluides  $\nu$  en même temps que l'inclinaison  $\theta$  augmente.

Après avoir analysé l'évolution du domaine d'observation du régime diffusif en fonction des paramètres  $At$ ,  $d$  et  $\nu$ , nous allons regarder la variation du coefficient de diffusion en fonction de l'inclinaison du tube et des paramètres de l'écoulement.

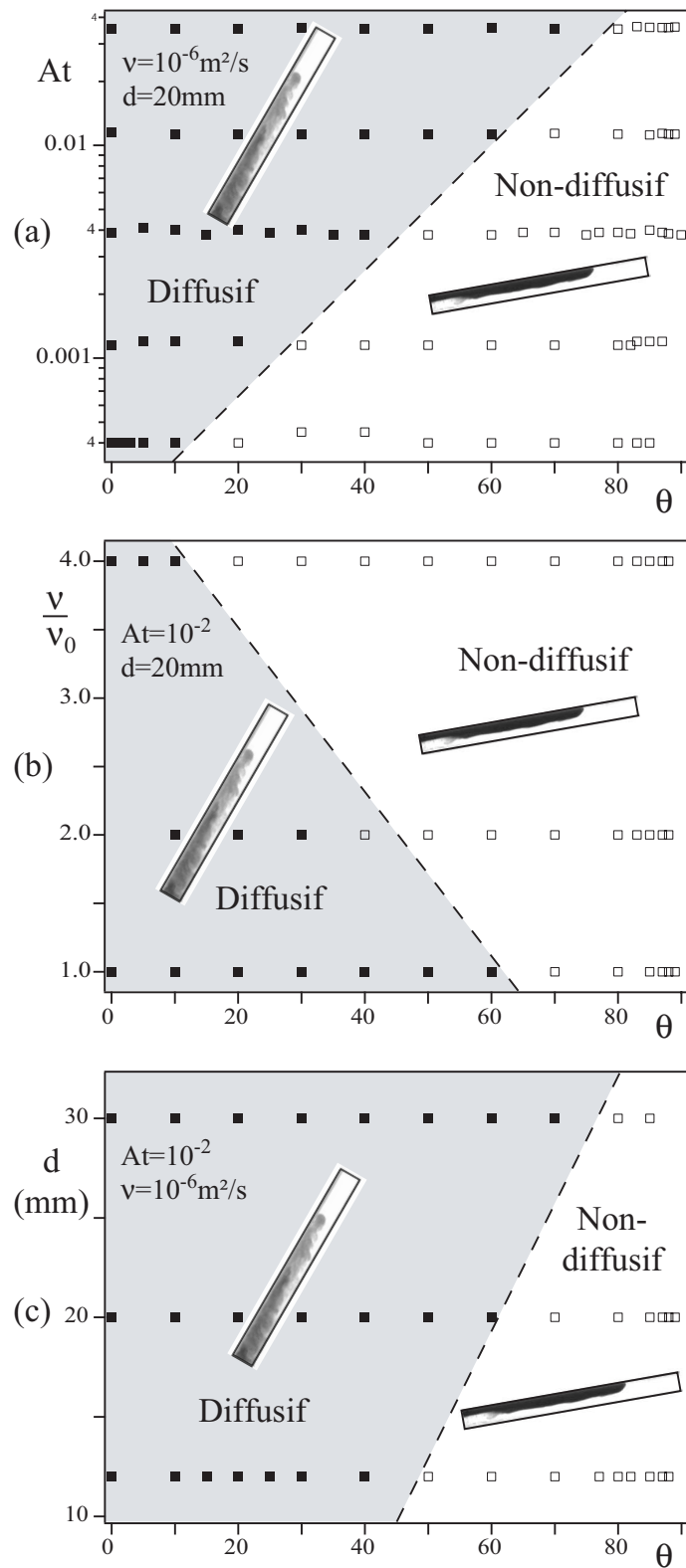


FIGURE 5.7: Domaines d'existence des régimes d'étalement diffusif et convectif en tube incliné : (a) plan de coordonnées  $At$ ,  $\theta$  (pour  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ) - (b) plan de coordonnées  $\nu/\nu_0$  ( $\nu_0 = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ),  $\theta$  (pour  $At = 10^{-2}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ) - (c) plan de coordonnées  $d$ ,  $\theta$  (pour  $At = 10^{-2}$  et  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

### 5.2.3 Variation du coefficient de diffusion en fonction de l'angle d'inclinaison et des différents paramètres de contrôle de l'écoulement

Nous avons tracé sur la figure 5.8 les variations du coefficient de diffusion en fonction de l'angle d'inclinaison, pour différents contrastes de densité (a), viscosités (b) et diamètres de tubes (c) :

- Tout d'abord, et c'est le fait le plus remarquable : le coefficient de diffusion augmente fortement avec l'angle  $\theta$  pour des valeurs fixes des paramètres  $At$ ,  $\nu$  et  $d$ . Nous discuterons cette augmentation ci-après.
- Ensuite, comme pour les tubes verticaux, le coefficient de diffusion  $D$  varie peu avec le contraste de densité  $At$  ainsi qu'avec le diamètre  $d$  du tube (figures 5.8 (a) et (c)). Par contre, contrairement au cas du tube vertical, la variation en fonction de ces deux paramètres n'est pas monotone : en effet, par exemple pour  $At = 4.10^{-3}$  (◆) la valeur de  $D$  est comprise entre celles correspondant à  $At = 4.10^{-2}$  (●) et  $At = 1.10^{-2}$  (■) ; de même, les valeurs de  $D$  pour  $d = 30mm$  (‡) sont comprises entre celles correspondant à  $d = 12mm$  (★) et  $d = 20mm$  (■). En revanche, comme dans le cas vertical,  $D$  augmente nettement avec la viscosité des fluides. Nous verrons cependant que les lois d'échelle vérifiées dans les cas verticaux et inclinés sont différentes.
- Enfin, et comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent, le domaine angulaire d'existence du régime d'étalement diffusif est d'autant plus étendu que le contraste de densité et le diamètre du tube sont élevés, et/ou que la viscosité est faible. Cela explique que, pour un angle  $\theta$  donné, toutes les valeurs de  $D$  correspondant aux différentes valeurs des paramètres de contrôle ne soient pas toujours disponibles (particulièrement aux angles  $\theta$  élevés).

Nous proposerons une explication de la forte augmentation du coefficient de diffusion avec  $\theta$  lorsque nous aborderons les mécanismes à l'origine du mélange diffusif. Nous allons maintenant chercher les lois d'échelle vérifiées par les variations du coefficient de diffusion en fonction des paramètres de contrôle.

### 5.2.4 Lois d'échelle vérifiées par le coefficient de diffusion

Nous avons vu sur la figure 5.8 que le contraste de densité  $At$  et le diamètre  $d$  du tube ont une influence assez faible sur le coefficient de diffusion et, de plus, non monotone. En revanche, l'augmentation de  $D$  avec  $\nu$  est forte et monotone : pour analyser plus finement cette variation, nous avons normalisé les données de la figure 5.8(b), en traçant, dans la figure 5.9, la variation du coefficient de diffusion  $D$  divisé par  $\nu^{3/2}$  en fonction de l'angle d'inclinaison, pour les trois valeurs de viscosités utilisées plus haut ; pour comparaison nous avons reproduit à droite la figure 5.8(b).

Le résultat est éloquent et nous permet d'affirmer que, pour  $At$  et  $d$  fixés, le coefficient de diffusion  $D$  varie en  $\nu^{3/2}$  :

$$D \propto \nu^{3/2}$$



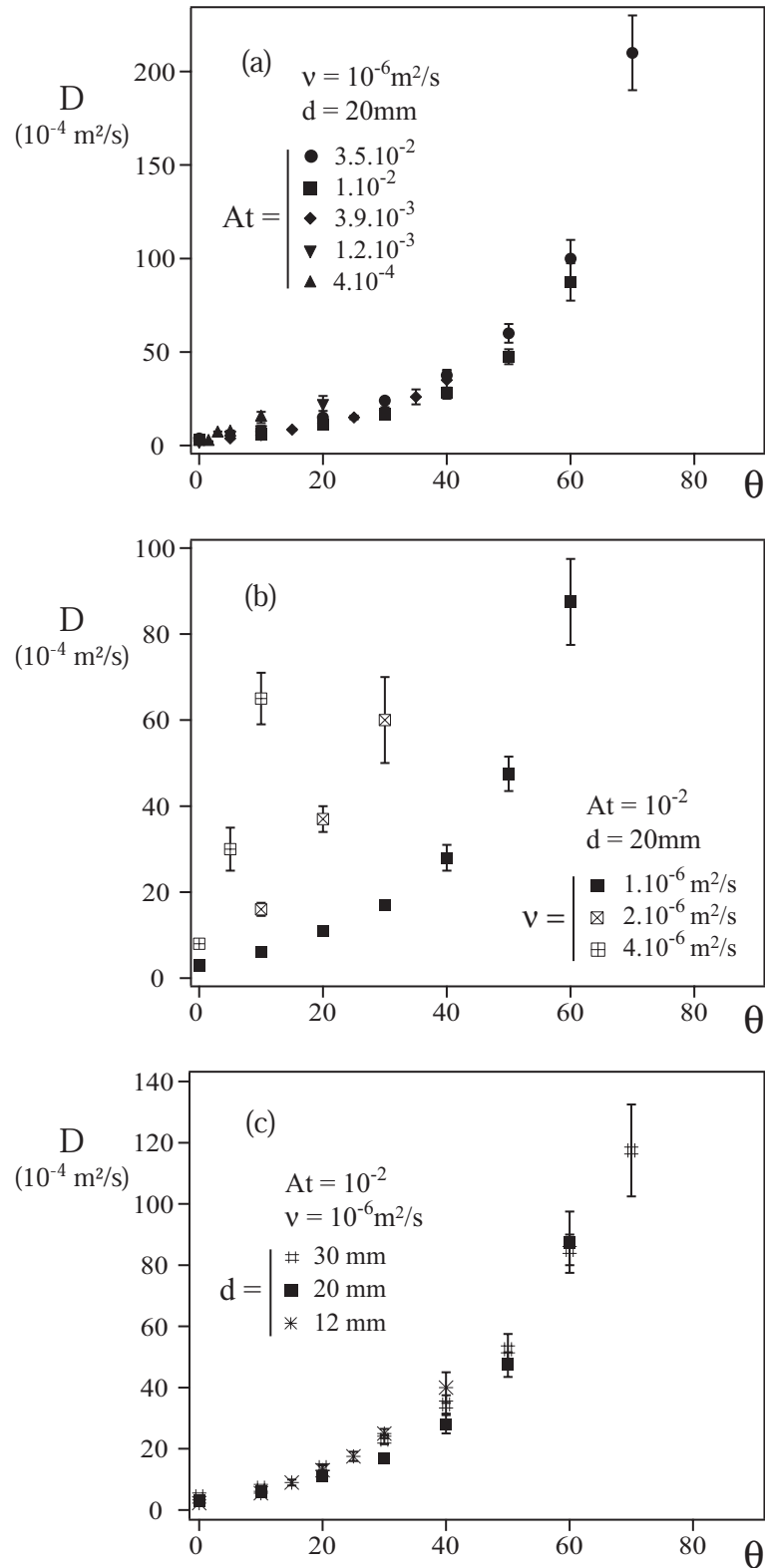


FIGURE 5.8: Variation du coefficient de diffusion macroscopique  $D$  avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  du tube défini par rapport à la verticale. (a) Pour différents contrastes de densité  $At = 3.54 \cdot 10^{-2}$  ( $\bullet$ ),  $At = 10^{-2}$  ( $\blacksquare$ ),  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$  ( $\blacklozenge$ ),  $At = 1.2 \cdot 10^{-3}$  ( $\blacktriangledown$ ),  $At = 4 \cdot 10^{-4}$  ( $\blacktriangle$ ) ( $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{mm}$ ). (b) Pour différentes viscosités  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  ( $\blacksquare$ ),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  ( $\boxtimes$ ),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  ( $\boxplus$ ) ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 20 \text{mm}$ ). (c) Pour différents diamètres de tubes  $d = 12 \text{mm}$  ( $*$ ),  $d = 20 \text{mm}$  ( $\blacksquare$ ),  $d = 30 \text{mm}$  ( $\#$ ) ( $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ).

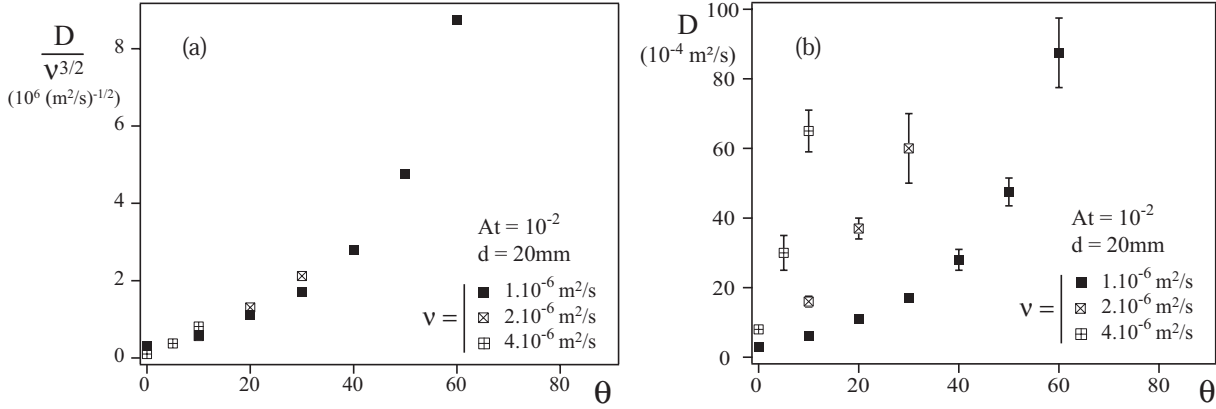


FIGURE 5.9: (a) Variation du rapport  $D/\nu^{3/2}$  avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour les trois valeurs de la viscosité utilisées figure 5.8(b), avec  $At$  et  $d$  fixes ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 20\text{mm}$ ). La signification des symboles est la même que dans la figure 5.8(b). (b) Pour comparaison nous avons reproduit la figure 5.8(b).

Cette loi diffère du cas vertical pour lequel nous avons  $D \propto \nu^{2/3}$ . Nous allons rechercher la loi d'échelle spécifique vérifiée dans le cadre d'un tube incliné. Rappelons tout d'abord que, dans le régime diffusif, les effets inertiels sont dominants ; comme pour la vitesse de front, la vitesse caractéristique  $V_t$  sera *a priori* la bonne vitesse de référence et nous remplacerons  $D$  par la grandeur sans dimension  $D/V_t d$  déjà utilisée dans le cas vertical. Nous supposerons également, comme pour la vitesse de front, que  $Re_t = V_t d/\nu$  est le bon nombre sans dimension en fonction duquel nous étudierons les variations de  $D/V_t d$ . Le type de dépendance déjà observée pour la vitesse du front suggère de postuler pour le rapport  $D/V_t d$  une variation du type  $D/V_t d = Re_t^\alpha f(\theta)$  où nous devons avoir  $\alpha = -3/2$  pour vérifier la dépendance de  $D$  en fonction de la viscosité observée expérimentalement, d'où :

$$\frac{D}{V_t d} = Re_t^{-3/2} g(\theta) \quad (5.5)$$

Afin de vérifier cette relation, la variation de  $\frac{D}{V_t d}$  en fonction de  $Re_t$  est tracée en échelle log-log dans la figure 5.10 pour différentes valeurs de  $\theta$ .

Quel que soit l'angle  $\theta$ , nous observons deux régimes de variation indépendants de  $\theta$ , avec une transition pour  $Re_t \sim 900$ . Cette valeur est d'ailleurs du même ordre que celle obtenue dans le cas vertical ( $Re_t \sim 2000$ ). Nous en déduisons que :

- $Re_t$  est bien le nombre sans dimension pertinent dans ce régime diffusif.
- D'autre part, dans le régime correspondant à  $Re_t \lesssim 900$ , la variation de  $D/V_t d$  avec  $Re_t$  est compatible avec la dépendance en  $Re_t^{-3/2}$  prédite par l'équation (5.5). Cela entraîne donc une variation de  $D$  en  $At^{1/4}$  et en  $d^{-3/4}$  que nous illustrerons plus loin. Notons que toutes les données de la figure 5.9 correspondent à ce régime ( $Re_t \lesssim 900$ ), ce qui explique qu'une seule loi d'échelle ait été observée pour la variation de  $D$  en fonction de  $\nu$ .
- Enfin, dans le régime observé pour  $Re_t \gtrsim 900$ , le rapport  $D/V_t d$  augmente avec  $Re_t$  en suivant

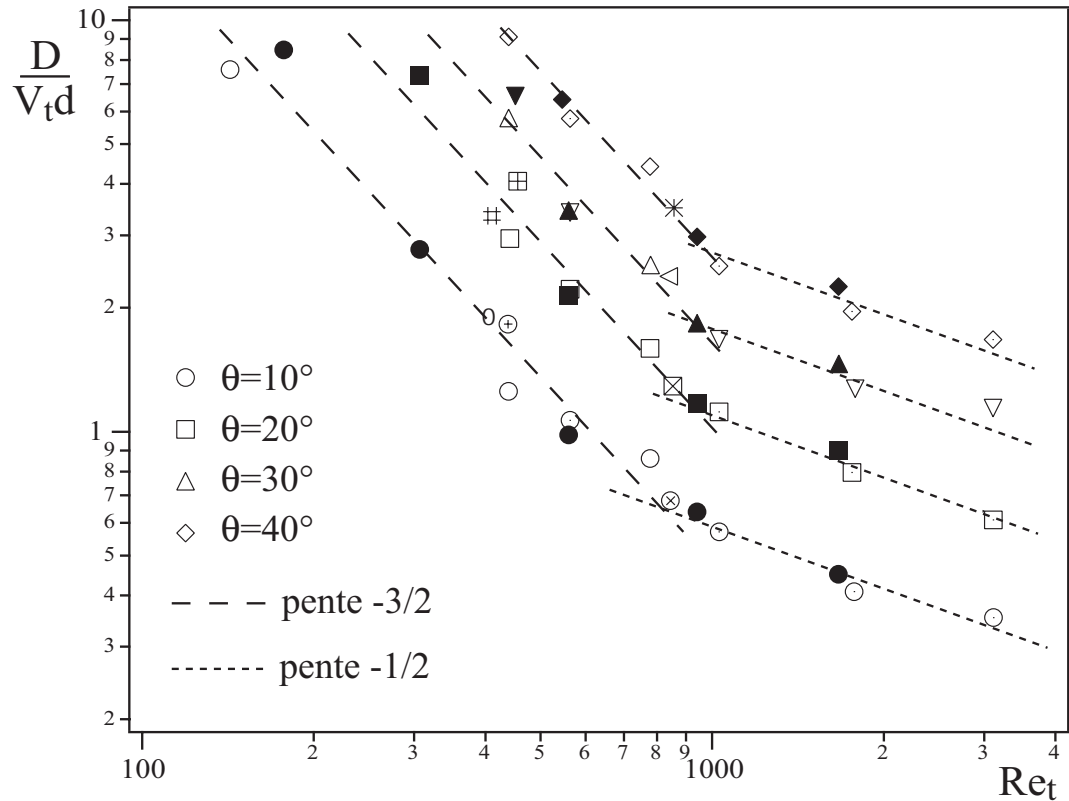


FIGURE 5.10: Variation du rapport  $D/(V_t d)$  avec le nombre de Reynolds  $Re_t = V_t d/\nu$ . Ces figures sont réalisées pour différents contrastes de densité, viscosités et diamètres de tube, et pour quatre angles d'inclinaison du tube :  $\theta = 10^\circ$  :  $d = 12\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\circ$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\bullet$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\odot$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\oplus$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\otimes$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 4.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\circ$ )  $D_{min}/\nu = 575$ . —  $\theta = 20^\circ$  :  $d = 12\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\square$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\blacksquare$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\boxplus$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\boxtimes$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\boxtimes$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 4.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\#$ )  $D_{min}/\nu = 1100$ . —  $\theta = 30^\circ$  :  $d = 12\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\triangle$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\blacktriangle$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\nabla$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\blacktriangledown$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\blacktriangleleft$ ),  $D_{min}/\nu = 1700$ . —  $\theta = 40^\circ$  :  $d = 12\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\diamond$ ),  $d = 20\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\blacklozenge$ ),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $\diamond$  avec un point à l'intérieur),  $d = 30\text{mm}$ ,  $\nu = 2.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ( $*$ ),  $D_{min}/\nu = 2600$ . La pente des pointillés est notée sur la figure.

une loi qui semble également indépendante de  $\theta$  :

$$\frac{D}{V_t d} \propto (Re_t)^a \text{ avec } a \simeq -0.5 \quad (5.6)$$

Nous disposons de beaucoup moins de données expérimentales sur ce régime et des expériences complémentaires seront nécessaires pour en préciser les caractéristiques.

Nous allons maintenant revenir, pour  $Re_t \lesssim 900$ , sur la variation expérimentale de  $D$  avec  $At$  et  $d$ , et vérifier si celle-ci est compatible avec l'équation (5.5). Pour cela nous avons représenté sur les figures 5.11 : les variations de  $D$  normalisé par  $At^{-1/4}$  en fonction de  $\theta$  (figure (a)),  $D$  normalisé par  $d^{-3/4}$  en fonction de  $\theta$  (figure (c)) et  $D$  normalisé par  $\nu^{3/2}$  en fonction de  $\theta$  (mais, cette fois-ci, pour des valeurs de  $Re_t$  plus élevées que dans la figure 5.9). Nous examinerons également sur ces figures les déviations observées aux valeurs de  $Re_t$  plus élevées.

Nous observons effectivement sur la figure 5.11 que presque tous les points se regroupent sur trois courbes uniques :

- $D/At^{-1/4} = h(\theta)$ .
- $D/\nu^{3/2} = k(\theta)$ .
- $D/d^{-3/4} = l(\theta)$ .

Les seuls points qui s'en écartent correspondent à des valeurs de paramètres telles que  $Re_t > 900$  :

- $At = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (●) pour  $D/At^{-1/4}$  ( $\nu$  et  $d$  fixes) ; dans ce cas  $Re_t \simeq 1660$ .
- $\nu = 10^{-6} m^2/s$  (‡) pour  $D/\nu^{3/2}$  ( $At$  et  $d$  fixes) ; dans ce cas  $Re_t \simeq 1700$ .
- $d = 30mm$  (‡) pour  $D/d^{-3/4}$  ( $At$  et  $\nu$  fixes) ; dans ce cas  $Re_t \simeq 1700$ .

En conclusion, tant que  $Re_t \lesssim 900$ , le coefficient de diffusion vérifie l'équation (5.5) mais lorsque  $Re_t \gtrsim 900$  il semble vérifier l'équation (5.6), bien que nous n'ayons pu analyser en détail le comportement dans ce régime. La variation non monotone de  $D$  en fonction de  $Re_t$  reflète la variation non monotone de  $D$  en fonction de  $d$  et  $At$  déjà notée sur la figure 5.8.

Enfin, pour déterminer la fonction  $g(\theta)$ , dépendance angulaire de  $D/V_t d = Re_t^{-3/2} g(\theta)$  (équation 5.5), nous avons porté dans la figure 5.12 l'expression  $\frac{D}{V_t d} / Re_t^{-3/2}$  en fonction de  $\theta$  pour toutes les données expérimentales vérifiant  $Re_t \lesssim 900$  ; nous retrouvons la remarquable dépendance de  $D/V_t d$  en  $Re_t^{-3/2}$  puisque tous les points se rassemblent sur la fonction angulaire  $g(\theta)$  très bien ajustée par  $g(\theta) = (a' + b' \tan \theta)^2$  avec  $a' = 71$  et  $b' = 260$ .

### 5.2.5 Influence des conditions aux limites : mélange aux temps longs

Nous allons terminer cette partie consacrée à l'étude du mélange en tube incliné en évoquant l'influence des conditions aux limites imposées par les extrémités du tube sur le mélange. Pour l'illustrer, nous allons discuter un cas de mélange diffusif dont l'aspect convectif est assez marqué

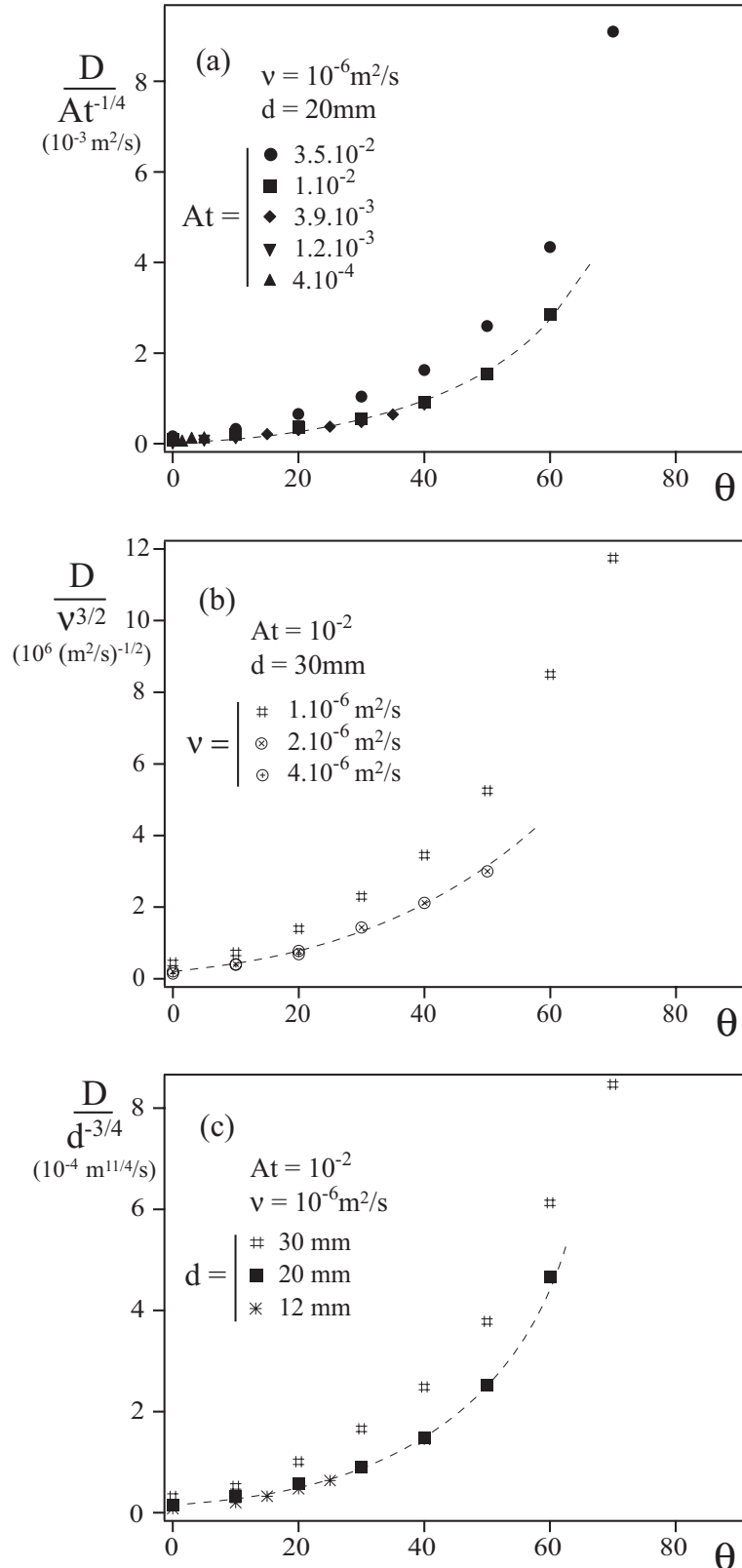


FIGURE 5.11: (a) Variation du rapport  $D/At^{-1/4}$  avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour différents contrastes de densités ( $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{mm}$ ), la signification des symboles est la même que dans la figure 5.8(a). (b) Variation du rapport  $D/\nu^{3/2}$  avec  $\theta$  pour différentes viscosités ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 30 \text{mm}$ ),  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  ( $\#$ ),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  ( $\otimes$ ),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  ( $\oplus$ ). (c) Variation du rapport  $D/d^{-3/4}$  avec  $\theta$  pour différents diamètres de tube ( $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ), la signification des symboles est la même que dans la figure 5.8(c). Tous les points regroupés sur les courbes en tirets correspondent au régime  $Re_t \lesssim 900$ , les points non regroupés sur les courbes en tirets correspondent au régime  $Re_t \gtrsim 900$ .

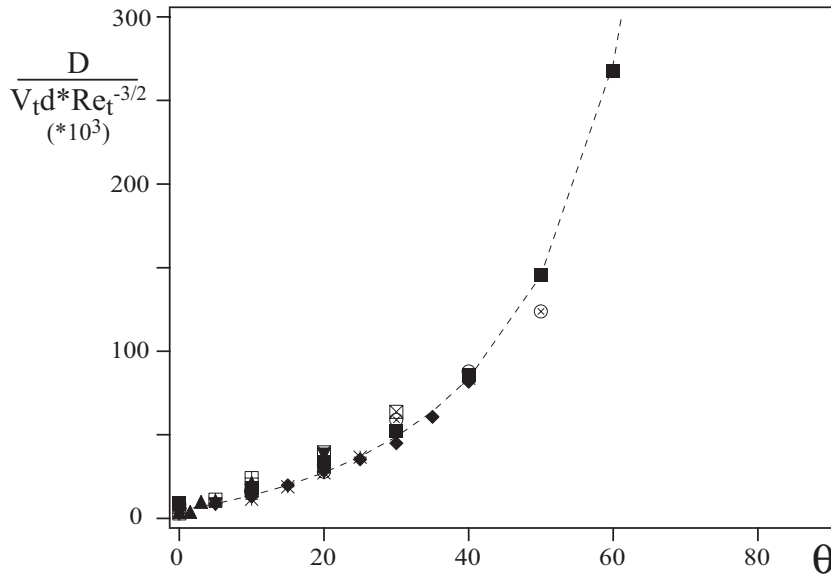


FIGURE 5.12: Variation du coefficient de diffusion normalisé  $D/(V_t d Re_t^{-3/2})$  en fonction de  $\theta$  pour l'ensemble des données que nous avons présentées sur les figures 5.9 et 5.11 et correspondant à des nombres de Reynolds  $Re_t \lesssim 900$  : les valeurs par défaut des paramètres sont  $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ ,  $d = 20mm$  (■), les symboles correspondant à des valeurs de paramètres différents sont les suivants :  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$  (◆),  $At = 1.2 \cdot 10^{-3}$  (▼),  $At = 4 \cdot 10^{-4}$  (▲),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} m^2/s$  (⊗),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} m^2/s$  (⊕),  $d = 12mm$  (\*),  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} m^2/s$  et  $d = 30mm$  (⊗),  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} m^2/s$  et  $d = 30mm$  (⊕). La courbe en tirets fin est de la forme  $(a' + b' \tan \theta)^2$  avec  $a' = 71$  et  $b' = 260$ .

(figure 5.13). Toutefois, malgré ce caractère convectif, nous avons vu qu'il était encore possible d'ajuster les courbes expérimentales par une fonction erreur, mais cet ajustement n'est possible qu'aux temps courts (figure 5.6). Pour comprendre ce dernier point, il nous faut regarder précisément les profils de concentration normalisée sur lesquels nous avons superposé les fonctions erreur correspondantes (figure 5.13(c)).

Sur le premier profil ( $t = 75s$ ), les deux sauts de concentration repérés par les flèches rouges correspondent aux fronts d'interpénétration des fluides. Dans leurs sillages, le profil de concentration se superpose correctement avec la fonction erreur, signe que l'étalement est de nature diffusif. Peu après, les fronts atteignent les extrémités du tube, et les courbes expérimentales commencent à dévier de la variation "diffusive" en fonction erreur à proximité de ces extrémités. Cette déviation reflète l'accumulation, à chaque extrémité du tube, du fluide dont le front a atteint cette extrémité. Les limites de ces zones d'accumulation, qui sont aussi celles de la zone de mélange diffusif, et que nous avons repérées sur les profils marron et jaune par des flèches, remontent vers la vanne de chaque côté de celle-ci comme des "fronts retour", et finissent par se rejoindre sur celle-ci : la zone de mélange diffusif a alors complètement disparu.

**Le processus d'étalement reste donc diffusif tant que les conditions aux limites ne jouent pas de rôle**, et, en pratique, tant que les fronts de déplacement n'ont pas atteint les extrémités du tube.

Notons que, dans le cas particulier de la figure 5.13, nous atteignons un profil de concentration moyenne quasi-constant ( $t = 675s$ ) : nous avons donc réalisé en quelques minutes et sans dépense

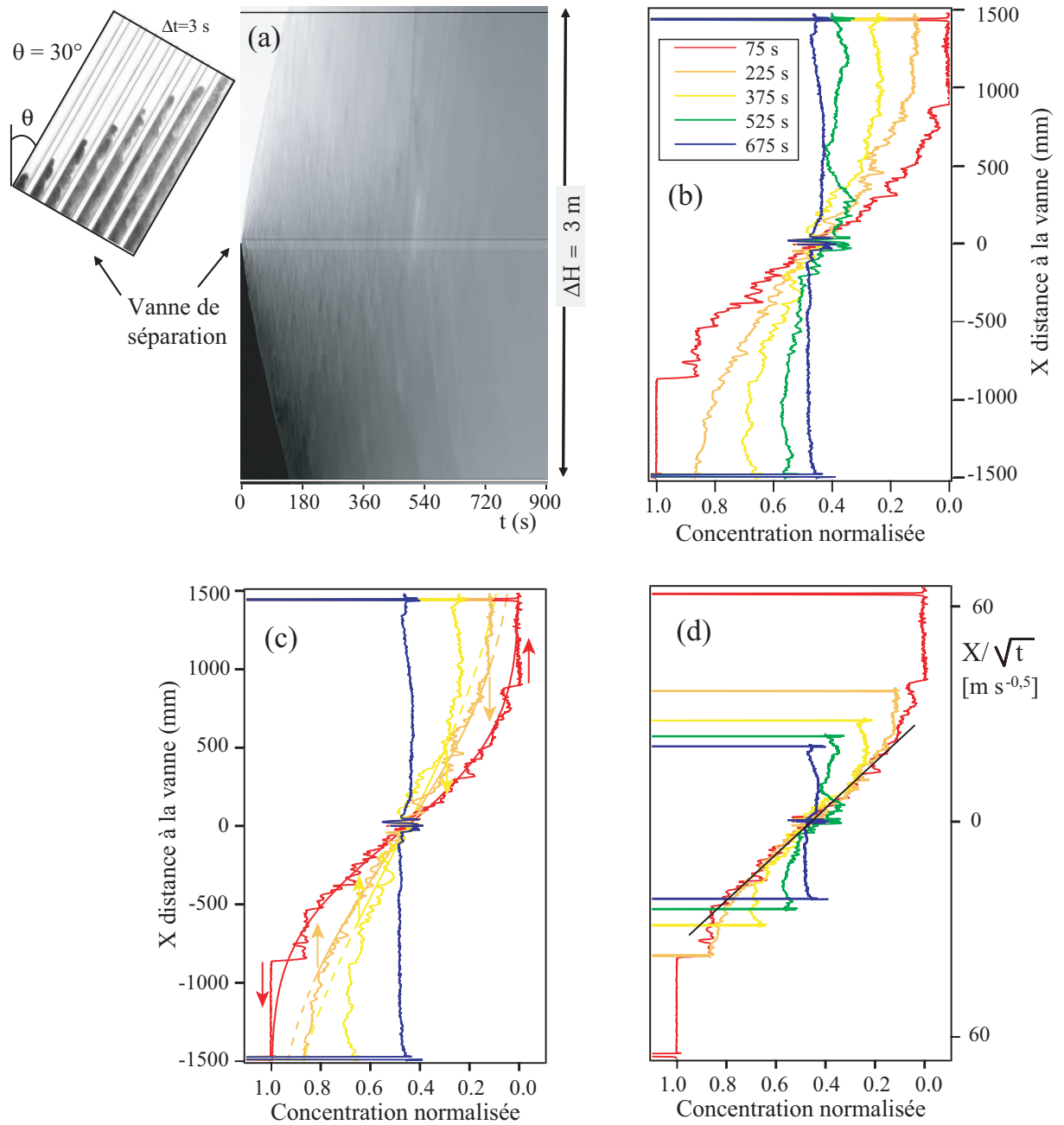


FIGURE 5.13: Expérience de mélange réalisées pour :  $\theta = 30^\circ$ ,  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ . (a)-Diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne normalisée. (b)-Profils de variation de la concentration normalisée, à différents instants. (c)-Profils de variation de la concentration normalisée, à différents instants, en fonction de la distance à la vanne (x), correctement ajustés par une fonction erreur. Les flèches rouges représentent la progression des fronts de pénétration ; les flèches marron et jaune marquent les limites du domaine sur lequel l'influence des conditions aux limites se fait sentir sur les profils de concentration. (d)-profils de variation de la concentration normalisée, à différents instants, en fonction de  $\frac{x}{\sqrt{t}}$ .

d'énergie un mélange d'excellente qualité. Il ne subsiste d'ailleurs plus de mouvement de fluide visible (spatio-temporel uniformément gris sur toute la hauteur du tube). Une telle valeur constante n'est atteinte que pour un domaine étroit de valeur de  $\theta$ , évidemment variable avec  $At$ ,  $d$ , et  $\nu$  ; aux angles encore plus élevés par rapport à la verticale, on trouve une stratification inverse des fluides avec un gradient de concentration stabilisant.

Nous venons donc de décrire quantitativement l'effet de l'inclinaison du tube sur le mélange diffusif, nous allons essayer maintenant de décrire les mécanismes physiques à l'origine de cet étalement diffusif de la zone de mélange.

## 5.3 Mécanisme de mélange diffusif et temps caractéristique de mélange

### 5.3.1 Relation diffusion-vitesse de front en tube incliné

Dans les pages précédentes, nous avons analysé les variations des vitesses de front  $V_f$  et des coefficients de mélange diffusif  $D$  en fonction des paramètres de contrôle du problème : contraste de densité  $At$ , viscosité  $\nu$ , diamètre  $d$  et inclinaison  $\theta$  du tube. Nous avons observé des caractéristiques qualitativement similaires pour ces variations, plus particulièrement dans le régime de faibles nombres de Reynolds  $Re_t \lesssim 900$  : augmentation importante de  $D$  et  $V_f$  avec l'angle  $\theta$  et la viscosité  $\nu$  et augmentation lente ou presque inexistante avec le contraste de densité  $At$  et le diamètre  $d$  (en revanche, la variation plus rapide de  $D$  avec  $At$  pour  $Re_t \gtrsim 900$  n'a pas d'équivalent pour la vitesse du front). Nous pouvons donc nous demander si une relation entre  $D$  et  $V_f$  existe.

Nous allons tout d'abord dégager une telle relation dans un cas modèle, celui du mélange intermittent, observé expérimentalement dans certains régimes d'écoulement. Nous montrerons que le rapport  $D/V_f^2$  représente alors un temps caractéristique de mélange transverse dans la section du tube, qui sera dans ce cas particulier la période de l'intermittence. Nous généraliserons ensuite qualitativement ce résultat et analyserons expérimentalement la dépendance de ce temps caractéristique par rapport aux autres paramètres de contrôle.

### 5.3.2 Mélange diffusif intermittent : observation expérimentale

Dans certains cas expérimentaux (en particulier lorsque le mélange n'est pas trop turbulent), l'écoulement présente un caractère intermittent avec, en alternance, des phases de contre-écoulement organisé, suivies du développement très rapide d'instabilités, assurant un fort mélange transverse et bloquant le contre-écoulement. Une fois le mélange transverse terminé, le contre-écoulement se développe de nouveau et le cycle recommence.

La figure 5.14 montre deux diagrammes spatio-temporels typiques réalisés à l'aide de la nappe laser ; le profil de concentration est pris, cette fois-ci, suivant la dimension transverse du tube (voir le schéma en haut de la figure 5.14). Dans ces diagrammes la coordonnée verticale correspond au temps et la coordonnée horizontale correspond à la position  $y$  dans la section du tube. Un codage en fausses couleurs représente la moyenne de la concentration, à une distance donnée de l'axe, sur un segment d'une longueur de  $10\text{cm}$  situé au-dessus de la vanne centrale. Le fluide lourd apparaît



en rouge et le fluide léger en bleu ; un mélange comprenant autant de fluide léger que de fluide lourd apparaît en blanc. Nous allons donc, sur cette figure, essayer d'identifier le phénomène de mélange intermittent et d'estimer la valeur expérimentale de  $\tau$ .

Nous avons repéré par des flèches, sur les deux diagrammes spatio-temporels, les moments où les deux fluides sont les plus séparés, ces instants étant suivis par des phases où le gradient de concentration transverse est faible, ce qui marque un mélange efficace. Les informations résultant des diagrammes spatio-temporels ont été confrontées à des visualisations directes sur les enregistrements vidéo. Nous avons ainsi pu observer que les instants repérés par les flèches correspondent à une phase de contre-écoulement longitudinal, qui apporte des fluides de concentrations différentes dans chaque moitié de la section du tube, et crée ainsi un gradient de concentration transverse. Ensuite, ce contre-écoulement se déstabilise et induit ainsi un mélange transverse qui homogénéise la concentration dans la section du tube. D'autre part, nous voyons que, bien qu'il soit possible d'identifier cette phase du mélange sur les deux diagrammes spatio-temporels, il est tout de même plus facile de le faire à  $\theta = 40^\circ$  qu'à  $\theta = 20^\circ$ , car plus l'aspect convectif est marqué, plus la phase de contre-écoulement peut apporter du fluide léger, et ainsi plus elle est visible sur le diagramme spatio-temporel.

Enfin, nous observons, sur les deux diagrammes spatio-temporels, que ce mélange intermittent est assez périodique. Le temps  $\tau$  entre chaque flèche est ainsi assez constant, et est égal à  $\tau \simeq 24s$  pour  $\theta = 40^\circ$  et  $\tau \simeq 28s$  pour  $\theta = 20^\circ$ . **Nous venons donc de mettre en évidence, expérimentalement, un phénomène d'intermittence, caractérisé par un temps  $\tau$  qui semble assez indépendant de  $\theta$ .** Lorsque le mélange est turbulent nous ne distinguons plus d'intermittence.

Nous allons maintenant montrer que l'écoulement intermittent que nous venons de décrire aboutit bien à un mélange diffusif. Nous analyserons en particulier l'influence de la faible dépendance du temps caractéristique de l'intermittence par rapport à l'angle d'inclinaison, sur la valeur du coefficient de diffusion macroscopique.

### 5.3.3 Mélange diffusif intermittent : un cas modèle

Nous avons schématisé dans la figure 5.15 les différentes configurations qui se succèdent dans ce régime de mélange intermittent.

- (a) - **Configuration initiale** : le mélange est homogène sur la section du tube mais il existe un gradient de concentration longitudinal déstabilisant  $C(x, t)$  tel que  $\partial C / \partial x < 0$  ( $x$  est compté positivement vers la droite et  $C(x, t)$  est la concentration relative du fluide léger).
- (b) - **Déplacement longitudinal** : un contre-écoulement se développe, avec le fluide léger qui monte et le fluide lourd qui descend : ce contre-écoulement fait apparaître un gradient de concentration transverse qui croît avec le temps et qui résulte du gradient de concentration longitudinal présent dans le mélange. Ce gradient transverse augmente avec le temps et accélère de plus en plus le mouvement relatif des deux fluides.

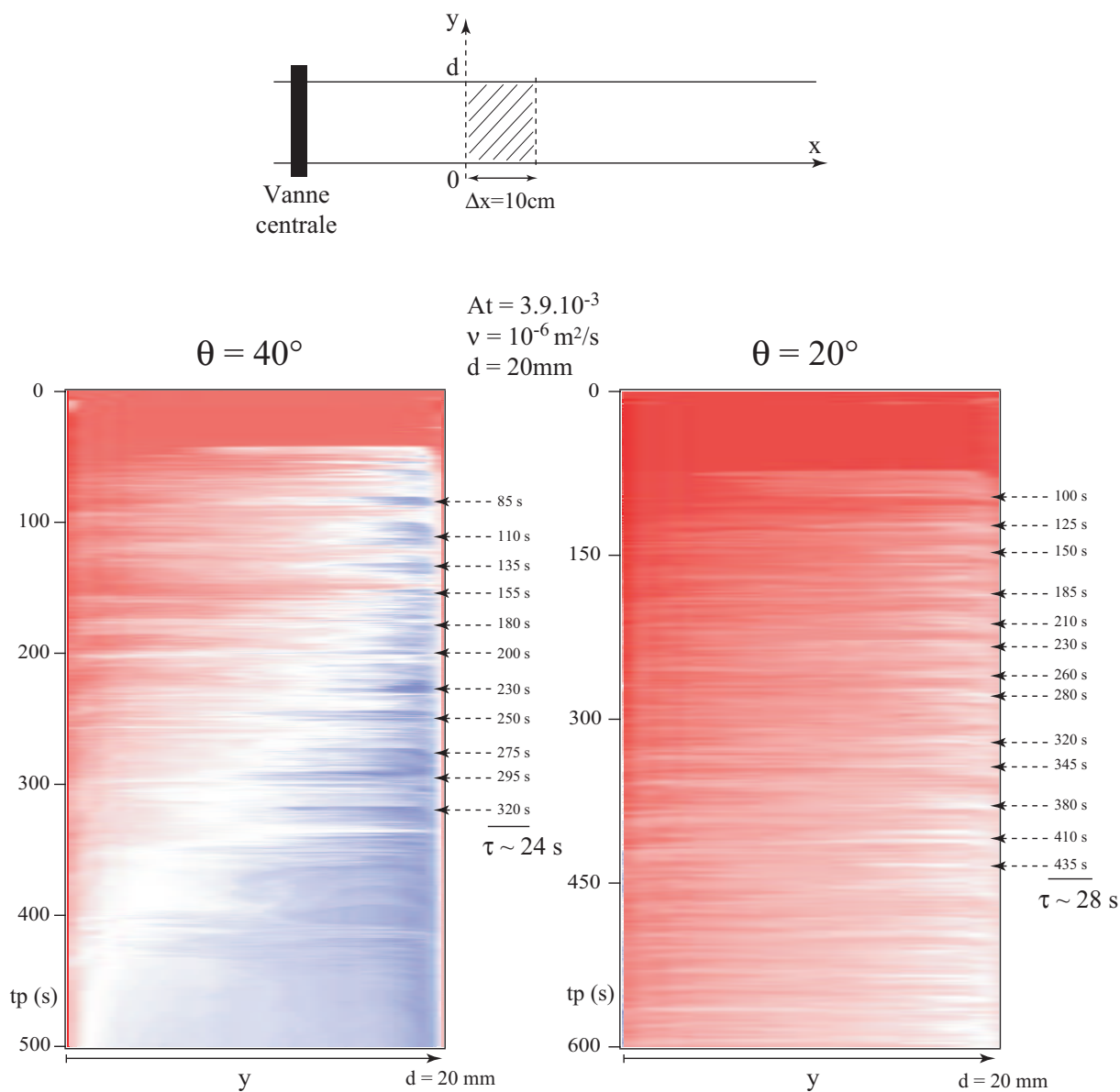


FIGURE 5.14: Diagrammes spatio-temporels réalisés à l'aide de la nappe laser et représentant la variation, sur le diamètre du tube, de la moyenne de la concentration sur des segments de  $10\text{cm}$  de longueur parallèles à l'axe et situés au-dessus de la vanne centrale (zone marquée par les hachures sur le schéma en haut de la figure), pour deux angles différents ( $\theta = 40^\circ$  à gauche et  $\theta = 20^\circ$  à droite). Le contraste de densité, la viscosité et le diamètre de tube sont identiques dans les deux cas :  $At = 3.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $d = 20\text{mm}$ . Le fluide lourd apparaît en rouge, le fluide léger en bleu, un mélange contenant autant de fluide léger que de fluide lourd apparaît en blanc.

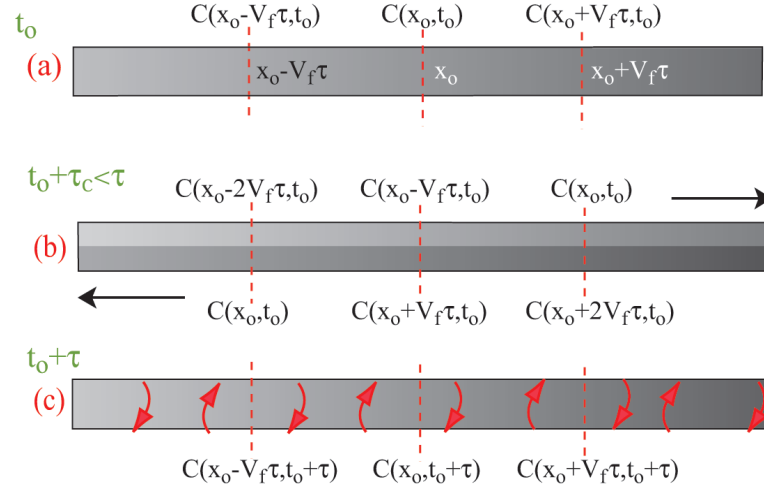


FIGURE 5.15: Schéma de la distribution de concentration à trois instants pendant la période de l'écoulement intermittent. (a) état initial - (b) fin du contre-écoulement - (c) fin de la période d'écoulement et mélange transverse.

(c) - **Mélange transverse** : des instabilités de Kelvin-Helmoltz dues au cisaillement à l'interface entre les deux fluides se développent. Ces instabilités induisent un mélange transverse efficace qui homogénéise la concentration dans la section du tube, et par conséquent bloque l'écoulement. Nous revenons ainsi au point de départ (a) et le processus peut recommencer.

Appelons alors  $\tau$  la période totale de ce phénomène d'intermittence, et séparons le tube dans sa section en deux moitiés correspondant aux deux régions de contre-écoulement. D'autre part, notons  $\delta x = \bar{V}\tau$  la distance parcourue pendant le temps  $\tau$ . Appelons  $\bar{V}$  la vitesse moyennée en temps dans chaque moitié de section. Pour assurer la conservation de la masse et en supposant l'écoulement en moyenne stationnaire, on doit avoir  $\bar{V} = V_f$  (dans le référentiel en mouvement à  $V_f$ , le débit doit en effet être nul).

La figure 5.15(a) montre l'état initial au temps  $t_0$  qui suit immédiatement la phase de mélange transverse. A cet instant  $t_0$ , la concentration est supposée uniforme dans la section du tube avec un profil  $C(x, t_0)$ . Un contre-écoulement de plus en plus rapide va alors se développer, la figure 5.15(b) représente la distribution de concentration à la fin de cette phase de contre-écoulement juste avant que le mélange transverse dû aux instabilités de Kelvin-Helmoltz ne commence, c'est-à-dire à un temps  $t + \tau_c$  avec  $\tau_c < \tau$ . Supposons que, pendant la phase suivante de mélange transverse, il n'y a plus de mouvement longitudinal, alors le déplacement global entre les figures 5.15(a) et 5.15(b) dans chaque moitié de section est égal en valeur absolue au déplacement moyen  $V_f \tau$  pendant la période totale  $\tau$  de l'écoulement intermittent. Il en résulte que les concentrations relatives  $C_u$  et  $C_l$  dans la moitié supérieure (et inférieure) de la section doivent vérifier :

$$C_u(x, t_0 + \tau_c) = C(x - V_f \tau, t_0) \quad (5.7)$$

$$C_l(x, t_0 + \tau_c) = C(x + V_f \tau, t_0) \quad (5.8)$$

Nous avons donc bien une différence de concentration (et donc de densité) entre les deux moitiés du tube à une distance  $x$  donnée (et donc un gradient transverse de concentration). Les instabilités de Kelvin-Helmholtz mélangent alors les fluides des moitiés supérieure et inférieure du tube, et on atteint une nouvelle concentration uniforme dans la section du tube qui est la moyenne des deux concentrations précédentes :

$$C(x, t_o + \tau) = (C_u(x, t_o + \tau_c) + C_l(x, t_o + \tau_c))/2$$

En combinant cette relation avec les équations 5.7 and 5.8, et en utilisant un développement de Taylor au second ordre par rapport à la distance  $x$ , on obtient :

$$C(x, t_o + \tau) = C(x, t_o) + \frac{V_f^2 \tau^2}{2} \frac{\partial^2 C(x, t_o)}{\partial x^2} \quad (5.9)$$

Enfin, en combinant l'équation (5.9) et le développement de Taylor au second ordre de  $C(x, t_o + \tau)$  par rapport au temps  $t$ , on obtient l'**équation de diffusion** :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{V_f^2 \tau}{2} \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.10)$$

Avec un coefficient de diffusion  $D$  vérifiant :

$$D = \frac{V_f^2 \tau}{2} \quad (5.11)$$

Et un temps caractéristique :

$$\frac{D}{V_f^2} = \frac{\tau}{2} \quad (5.12)$$

Rappelons que ceci est un modèle discret en temps et que le temps caractéristique  $\tau$  représente l'intervalle de temps entre chaque phase de mélange transverse total, le rapport  $D/V_f^2$  est donc bien égal ici (à un facteur 2 près) au temps caractéristique de mélange transverse dans le tube. Notons enfin que le développement qui permet de déduire l'équation (5.10) à partir de (5.9) suppose implicitement que le temps caractéristique de variation de  $C(x, t)$  est grand devant  $\tau$ .

Le raisonnement précédent est valable uniquement pour un écoulement intermittent. Cependant nous pouvons obtenir un résultat analogue (démonstration due à E.J. Hinch), dans le cas d'un écoulement où le mélange transverse s'opère en permanence, par l'intermédiaire d'un flux transverse, qui, cette fois-ci, ne varie que très lentement au cours du temps, et va de la génératrice inférieure vers la génératrice supérieure du tube. Ce flux, par unité de volume, est supposé égal à  $(C_u - C_l)/\tau$  (avec les mêmes notations que précédemment). Nous pouvons alors écrire les équations de transport dans chacune des demi-sections sous la forme :

$$\frac{\partial C_u}{\partial t} + V_f \frac{\partial C_u}{\partial x} = -\frac{C_u - C_l}{\tau} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial C_l}{\partial t} - V_f \frac{\partial C_l}{\partial x} = -\frac{C_l - C_u}{\tau} \quad (5.14)$$

La somme et la soustraction des équations (5.13) et (5.14) conduisent respectivement aux équations :

$$\frac{\partial(C_u + C_l)}{\partial t} + V_f \frac{\partial(C_u - C_l)}{\partial x} = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial(C_u - C_l)}{2\partial t} + \frac{V_f}{2} \frac{\partial(C_u + C_l)}{\partial x} = -\frac{C_u - C_l}{\tau} \quad (5.16)$$

Notons que la concentration moyenne dans la section est  $(C_u + C_l)/2$ .

En supposant une évolution quasi-stationnaire on peut négliger  $\partial(C_u - C_l)/\partial t$ , et, en combinant les équations (5.15) et (5.16), on obtient :

$$\frac{\partial(C_u + C_l)}{\partial t} = \frac{V_f^2 \tau}{2} \frac{\partial^2(C_u + C_l)}{\partial x^2} \quad (5.17)$$

Nous retrouvons donc une équation de diffusion avec le même coefficient de diffusion  $D = \frac{V_f^2 \tau}{2}$  et le même temps caractéristique du mélange transverse  $\frac{D}{V_f^2} = \frac{\tau}{2}$  que dans le modèle d'écoulement intermittent.

Signalons enfin l'analogie avec la dispersion de Taylor pour un écoulement laminaire dans un tube capillaire [60] déjà décrite au premier chapitre, où le coefficient décrivant l'étalement diffusif du front de concentration est proportionnel à  $V_f^2 \tau$  avec  $\tau = a^2/D_m$ , temps caractéristique de diffusion transverse moléculaire sur la section du tube de rayon  $a$ .

### 5.3.4 Variations expérimentales du temps caractéristique de mélange $D/V_f^2$

Nous allons maintenant étudier les variations des valeurs expérimentales de  $D/V_f^2$  en fonction de  $\theta$  pour différents contrastes de densité  $At$ , viscosités  $\nu$  et diamètres de tubes  $d$ . Nous aurons ainsi une première évaluation de la dépendance du temps caractéristique du mélange transverse en fonction des différents paramètres de contrôle de l'expérience. Les résultats sont présentés sur la figure 5.16.

Nous observons tout d'abord sur ces trois figures une caractéristique remarquable du temps caractéristique  $D/V_f^2$  : il semble souvent presque indépendant de  $\theta$ . A l'heure actuelle nous n'avons pas d'explication satisfaisante pour ce résultat, qui constitue sans aucun doute un point majeur de ce travail, encore non résolu.

D'autre part, nous observons sur la figure (a) que ce temps caractéristique décroît avec le contraste de densité  $At$ . En revanche la viscosité ne semble pas avoir une forte influence (figure (b)) : les points correspondant aux viscosités  $\nu = 2$  et  $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ont le même temps caractéristique indépendant de  $\theta$  ( $\simeq 18\text{s}$ ). La courbe correspondant à  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $\#$ ) est au-dessus : ce fait est probablement lié à la valeur du nombre de Reynolds  $Re_t$  qui est dans ce cas supérieure à 900, ce qui entraîne une augmentation de  $D$  sans augmentation correspondante de  $V_f$ . Enfin, nous voyons que la variation avec le diamètre de tube  $d$  est presque nulle entre  $d = 12\text{mm}$  et  $d = 20\text{mm}$  ; pour  $d = 30\text{mm}$  la courbe est aussi au-dessus des autres et nous proposons la même explication : le nombre de Reynolds  $Re_t$  est supérieur à 900 contrairement à  $d = 12\text{mm}$  et  $d = 20\text{mm}$  et ceci entraîne une augmentation de  $D$  sans augmentation correspondante de  $V_f$ .

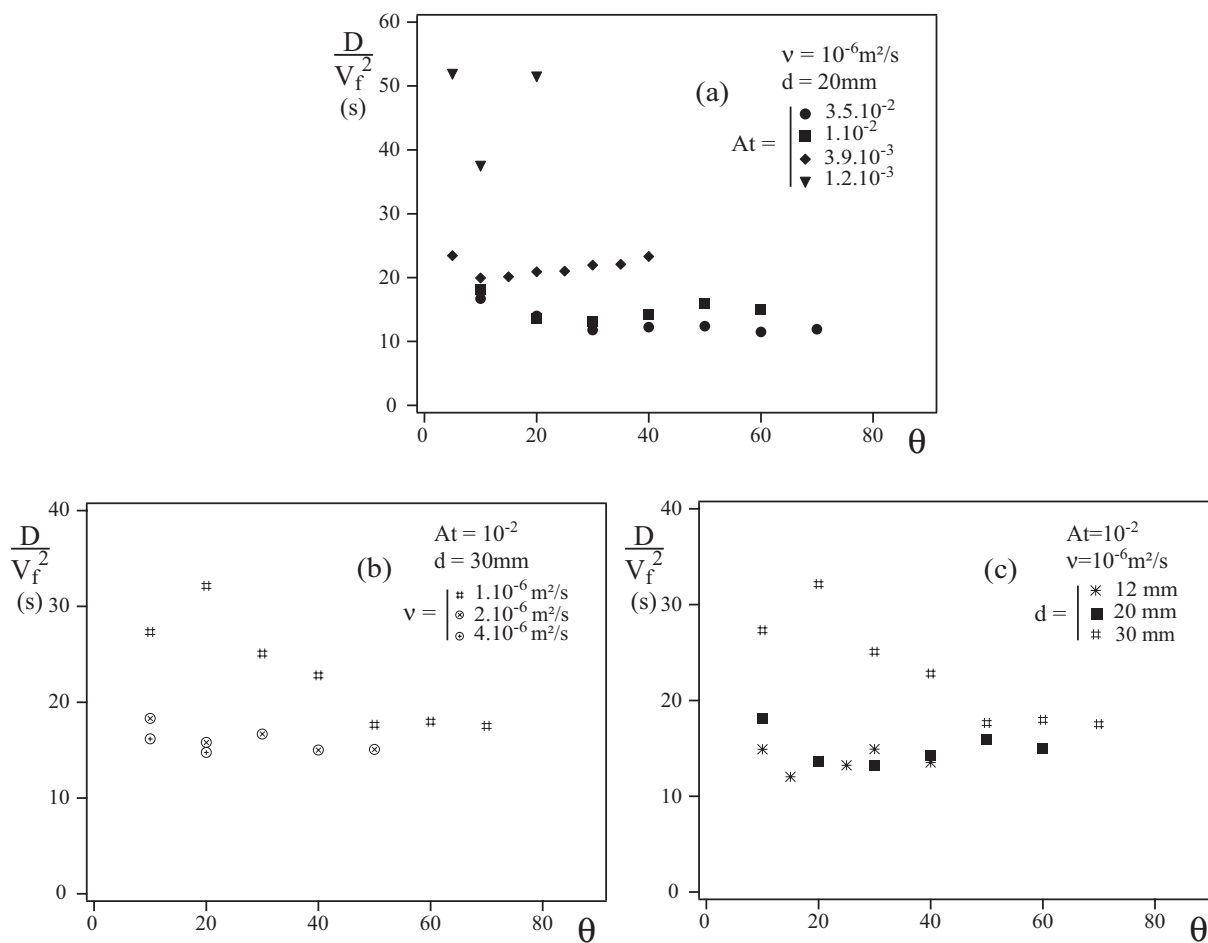


FIGURE 5.16: Variation du rapport  $D/V_f^2$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour : (a) différents contrastes de densité ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ), (b) différentes viscosités ( $At = 10^{-2}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$ ), (c) différents diamètres de tube ( $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). La signification des symboles, notée sur la figure, est la même que dans la figure 5.11.

Remarquons que, malgré les approximations très simplificatrices utilisées, l'équation (5.12) donne des prédictions raisonnables ; nous trouvons en effet sur la figure 5.14 des temps  $\tau$  de l'ordre de 25 – 30s, et nous avons sur la figure 5.16(a) :  $D/V_f^2 \simeq 20s$  dans les mêmes conditions (♦).

Étant donné que nous connaissons les lois d'échelle sur  $V_f$  ( $V_f/V_t \propto Re_t^{-3/4}$ ) et sur  $D$  ( $D/V_t d \propto Re_t^{-3/2}$ ) lorsque  $Re_t \lesssim 900$ , nous pouvons prédire pour cette gamme de nombre de Reynolds la loi d'échelle suivante pour  $\tau$  :

$$\begin{aligned} \tau \propto \frac{D}{V_f^2} &\propto \frac{V_t d * Re_t^{-3/2}}{\left(V_t * Re_t^{-3/4}\right)^2} \\ \frac{D}{V_f^2} &\propto \frac{d}{V_t} = \sqrt{\frac{d}{Atg}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nous avons tracé sur la figure 5.17 la variation du rapport des temps  $\frac{D}{V_f^2}$  sur  $\frac{d}{V_t}$  pour les différentes expériences correspondant à  $Re_t \lesssim 900$ . Nous observons certes une dispersion des données mais les valeurs expérimentales du rapport sont cependant regroupées autour de  $\sim 35$ .

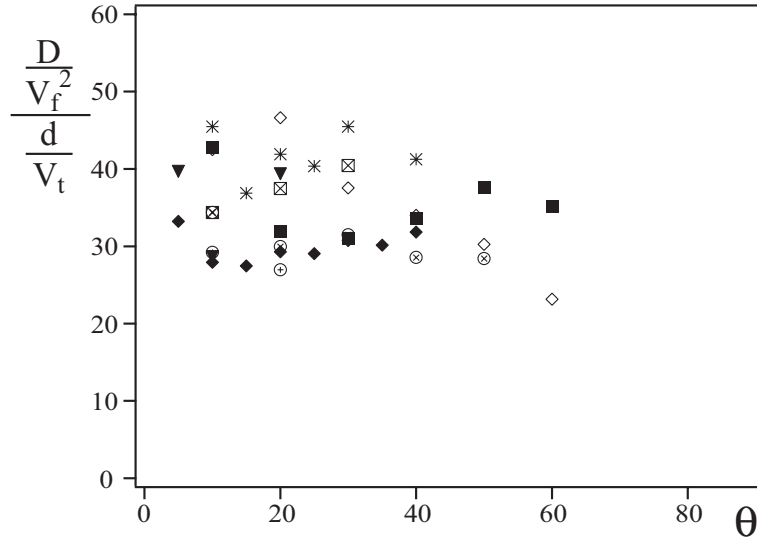


FIGURE 5.17: Evolution du temps caractéristique normalisé  $\frac{D/V_f^2}{d/V_t}$  en fonction de l'inclinaison du tube  $\theta$ . La signification des symboles est la même que dans la figure 5.11.

Notons que la variation en  $\sqrt{d}$  de  $\tau$  prédite par la relation (5.18) semble trop rapide au vu de nos observations expérimentales qui semblent indiquer une valeur presque indépendante de  $d$  (figure 5.16(c)).

Remarquons pour finir que cette quasi-indépendance de  $D/V_f^2$  en fonction  $\theta$  était déjà incluse dans les dépendances angulaires  $f(\theta)$  de  $V_f/V_t$  et  $g(\theta)$  de  $D/V_t d$  ; en effet :

$$f(\theta) = a(1 + b/a \tan \theta) = 12(1 + 3.7 \tan \theta)$$

et

$$g(\theta) = a'^2(1 + b'/a' \tan \theta)^2 = 71^2(1 + 3.7 \tan \theta)^2$$

et ainsi

$$\frac{D/V_f^2}{d/V_t} = \frac{g(\theta)}{f(\theta)^2} \simeq \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \simeq 35$$

Nous retrouvons donc bien une constante pour le rapport  $\frac{D/V_f^2}{d/V_t}$ , cette valeur étant tout à fait en accord avec la valeur trouvée expérimentalement.

## 5.4 Conclusion

L'étude des variations du coefficient de diffusion macroscopique  $D$  en fonction des paramètres de contrôle de l'écoulement nous a donc permis d'obtenir plusieurs résultats importants :

- Le premier d'entre eux est qu'il est possible d'observer des régimes d'étalement diffusif du profil de concentration dans les tubes inclinés comme dans les tubes verticaux. Leur domaine d'existence est d'autant plus étendu que l'angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale et la viscosité sont faibles, et que le diamètre du tube et les contrastes de densité sont élevés.
- Qualitativement, les caractéristiques principales de la variation de  $D$  sont sa très forte augmentation avec la viscosité  $\nu$  et, encore plus, avec l'angle d'inclinaison  $\theta$ . Les variations en fonction du diamètre  $d$  et, surtout, du contraste de densité (à travers le nombre d'Atwood  $At$ ) sont par contre plus lentes, surtout aux faibles vitesses d'écoulement. Tous ces résultats sont qualitativement similaires à ce qui avait été observé au chapitre précédent pour la vitesse de front.
- Quantitativement, la variation du coefficient de diffusion normalisé  $D/V_t d$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_t = V_t d / \nu$  présente deux types de dépendance en  $Re_t^{-3/2}$  et  $Re_t^{-1/2}$  suivant que  $Re_t$  est respectivement  $\lesssim 900$  ou  $\gtrsim 900$  : un changement de régime de ce type n'a pas été observé sur la vitesse du front. Dans le régime  $Re_t \lesssim 900$ ,  $D$  vérifie donc assez correctement une loi d'échelle du type  $D/(V_t d Re_t^{-3/2}) = g(\theta)$ .
- Les variations de  $D$  sont très étroitement liées à celles de la vitesse du front  $V_f$  (ou plus précisément à celles de  $V_f^2$ ), en particulier dans le régime  $Re_t \lesssim 900$ . Un premier indice est le fait que la loi d'échelle en  $Re_t^{-3/2}$  suivie par  $D/V_t d$  dans ce régime est le carré de la loi en  $Re_t^{-3/4}$  suivie par  $V_f/V_t$ . D'autre part, on arrive à un bon ajustement de la variation de  $D/V_t d$  en fonction de l'angle  $\theta$  par une loi en  $(a' + b' \tan \theta)^2$  alors que la variation de la vitesse normalisée  $V_f/V_t$  du front est bien reproduite par une loi en  $a + b \tan \theta$ .
- Plus finement, le rapport  $D/V_f^2$  est remarquablement constant en fonction de l'angle  $\theta$  et de la viscosité  $\nu$  du fluide (toujours dans le régime  $Re_t \lesssim 900$ ). Ce résultat est particulièrement important car des raisonnements semi quantitatifs indiquent que  $D/V_f^2$  représente le temps  $\tau$  caractéristique du mélange transverse qui joue un rôle clé dans le mécanisme d'étalement diffusif du profil de concentration. L'application des lois d'échelle trouvées séparément pour



$D$  et  $V_f$  conduit à prédire une loi d'échelle en  $(d/gAt)^{1/2}$  pour la variation de  $\tau$  : en revanche, cette loi ne semble pas totalement vérifiée.

Ces résultats donnent des indices précieux pour la compréhension de ces processus de mélange : celle-ci passera cependant par une meilleure compréhension de la structure de l'écoulement et des transferts de fluide transversalement à l'écoulement moyen dans la région de mélange située entre les deux fronts. Des études locales de l'écoulement et de la distribution des fluides dans cette zone seront nécessaires dans ce but.

Une première étape dans la compréhension de ces processus de mélange transverse sera celle de la déstabilisation des contre-écoulements qui est à l'origine de ce mélange. Nous allons analyser cette déstabilisation dans le prochain chapitre.



## Chapitre 6

# Instabilités et mélange transverse pour un contre-écoulement stratifié

### 6.1 Objectif du chapitre et lien avec le reste de la thèse

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la présence de mélange transverse et son intensité sont des éléments clés pour déterminer les régimes d'écoulement observés et leurs caractéristiques. Par exemple, l'existence d'un régime diffusif ou, au contraire, de contre-écoulement sans mélange sera déterminée par la stabilité du contre-écoulement et la présence ou non de mélange à l'interface. De même, dans les écoulements intermittents que nous avons discutés au chapitre précédent, nous avons observé une succession de phases de contre-écoulement stable et de mélange transverse induit par les instabilités. Déterminer le critère d'apparition de ces instabilités est donc nécessaire pour évaluer le temps caractéristique  $\tau$  de l'écoulement, qui joue un rôle primordial dans la relation entre le coefficient de diffusion macroscopique et la vitesse du front.

Dans le présent chapitre, nous rechercherons donc tout d'abord analytiquement et numériquement les critères d'apparition du mélange transverse par déstabilisation d'un contre-écoulement de fluide lourd et de fluide léger initialement stratifiés. Plus précisément, nous écrirons tout d'abord les équations du mouvement d'un contre écoulement stratifié de deux fluides visqueux de densités différentes dans un champ de gravité. Puis nous effectuerons une étude de stabilité linéaire en perturbant ces équations : nous calculerons alors numériquement le taux de croissance temporel des perturbations et déterminerons ainsi les domaines de valeurs des paramètres de contrôle pour lesquels l'écoulement est stable ou instable.

Dans ce problème, le profil transverse initial (avant déstabilisation) de la concentration relative des deux fluides joue un rôle très important. Il devra donc être introduit dans les simulations numériques ultérieures destinées à être comparées directement aux expériences. Dans cette perspective, nous présenterons donc dans la deuxième partie du chapitre les résultats de mesures expérimentales de ces profils transverses dans différents régimes d'écoulement.

Cette partie de notre travail a été réalisée au laboratoire DAMTP-CMS de l'Université de Cambridge sous la direction du Professeur E.J. Hinch. Nous avons essentiellement développé et mis au point les outils permettant la détermination numérique des critères d'instabilité ; à l'aide

de ces outils nous avons étudié un cas simple mais nous n'avons pas pu, faute de temps, réaliser une étude systématique. Nous discuterons donc à la fin du présent chapitre, les objectifs futurs de celle-ci, et, en particulier, les différents cas qui devront être étudiés.

## 6.2 Méthode de simulation numérique de la déstabilisation d'un contre écoulement stratifié

### 6.2.1 Equations de base : équations linéarisées des petites perturbations

Dans ce paragraphe, nous allons établir les équations de base de l'étude de stabilité linéaire d'un contre écoulement stratifié incliné à deux dimensions (figure 6.1). L'état de base est supposé correspondre à un profil  $\bar{u}(y)$  de la vitesse orientée suivant  $\hat{x}$  et à un profil de densité  $\bar{\rho}(y)$  ; la gravité intervient par l'intermédiaire des deux composantes parallèle et perpendiculaire à l'écoulement :  $\vec{g} = (-g \cos \theta, -g \sin \theta, 0)$ .

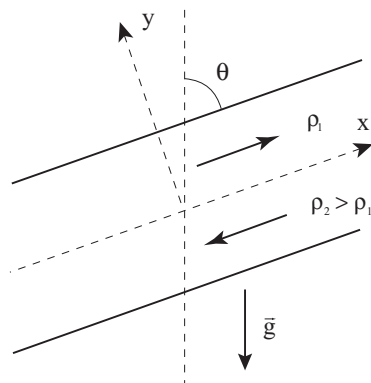


FIGURE 6.1: Schéma d'un contre-écoulement incliné stratifié à deux dimensions.  $\theta$  est l'angle que fait le canal avec la verticale.

Pour établir les équations que nous cherchons, nous partirons de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (6.1)$$

et des équations de conservation de la masse et de la densité du fluide (en négligeant la diffusion moléculaire) :

$$\partial_t \rho + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0 \quad (6.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (6.3)$$

Dans tout ce chapitre  $\partial_a$  désignera la dérivée partielle par rapport à la variable  $a$ , et  $\vec{u}$  le vecteur vitesse,  $\rho$  la masse volumique,  $P$  la pression et  $\eta$  la viscosité.

Dans le cadre de l'étude de stabilité linéaire, nous allons imposer une petite perturbation à l'écoulement de base et regarder si elle croît ou décroît ensuite. Le présent problème est invariant

par translation tant en ce qui concerne le temps  $t$  que la coordonnée  $x$  : nous écrirons donc les perturbations sous forme de modes normaux temporels, de nombre d'onde  $k$  réel et de pulsation  $\sigma$  complexe :  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  ( $\sigma_i < 0$  correspond à un écoulement stable où les perturbations s'atténuent après leur apparition et  $\sigma_i > 0$  à un écoulement instable). Les profils perturbés de vitesse et de densité ont donc la forme suivante :

•

$$\vec{u} = (\bar{u}(y), 0, 0) + (u'(y), v'(y), 0)e^{ik(x-\sigma t)} \quad (6.4)$$

où  $u'(y)$  et  $v'(y)$  représente les composantes suivant  $x$  et  $y$  de l'amplitude initiale de la perturbation.

•

$$\rho = \rho_o(1 + \alpha\Phi) \quad \text{avec} \quad \Phi = \bar{\phi}(y) + \phi'(y)e^{ik(x-\sigma t)} \quad (6.5)$$

où  $\alpha$  est une constante de l'expérience. La fonction  $\Phi$  représente les variations de concentration relative des deux fluides avec la distance et  $\alpha$  représente le rapport (supposé constant) entre les variations de densité et celles de concentration.

Comme l'écoulement est bidimensionnel et de divergence nulle, nous pouvons définir une fonction courant  $\Psi$  de la perturbation de vitesse, par

$$u'(y) = \partial_y \Psi \quad \text{et} \quad v'(y) = -\partial_x \Psi$$

Nous utiliserons donc les modes normaux de cette fonction courant :

$$\Psi = \psi(y)e^{ik(x-\sigma t)} \quad (6.6)$$

Comme précédemment, nous nous placerons dans le cadre de l'approximation de Boussinesq ( $\rho_2 - \rho_1 \ll \rho_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ ) : la variation de la masse volumique n'apparaît alors que dans le terme moteur de flottabilité  $\rho\vec{g}$  de l'équation de Navier-Stokes (6.1) (paragraphe 1.1.4.1). En effet, les variations relatives de la densité sont typiquement de l'ordre de  $10^{-2}$  ou  $10^{-3}$ , et peuvent être considérées comme des corrections du second ordre dans les équations, sauf dans le terme de gravité où elles constituent une correction du premier ordre. Ainsi, dans notre cas, le terme de gauche n'est plus multiplié par  $\rho$  mais par  $\rho_o$  qui est constant, les autres termes restent par ailleurs inchangés.

Nous ne détaillerons pas ici le calcul, assez fastidieux, des équations linéarisées. Nous commencerons par éliminer la pression en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes ce qui conduit à l'équation classique de transport de la vorticité  $\omega = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$  mais avec un terme  $\vec{\nabla} \wedge \rho\vec{g}$  non nul. On injecte ensuite dans cette équation et dans celles de transport de masse (Eqs. (6.2) et (6.3)) les profils perturbés (Eqs. (6.4) et (6.5)) en utilisant la fonction courant  $\Psi$ . On linéarise alors les équations ainsi obtenues en éliminant les termes du second ordre ; enfin nous les r ecrивons sous une forme adimensionnelle en notant  $L$  et  $U$  les échelles caractéristiques de longueur et de vitesse de l'écoulement et en écrivant la viscosité dynamique sous la forme  $\eta = \rho_o\nu$ . Nous obtenons alors les équations linéarisées sans dimensions suivantes :

$$\frac{d^4\psi}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + k^4\psi + Re Ri \left( ik \sin \theta \phi' - \cos \theta \frac{d\phi'}{dy} \right) = ik Re \left[ (\bar{u}(y) - \sigma) \left( \frac{d^2\psi}{dy^2} - k^2\psi \right) - \frac{d^2\bar{u}(y)}{dy^2} \psi \right] \quad (6.7)$$

$$-\frac{d\bar{\phi}}{dy}\psi + \bar{u}\phi' = \sigma\phi' \quad (6.8)$$

où  $Re$  et  $Ri$  sont respectivement les nombres de Reynolds et de Richardson :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (6.9)$$

$$Ri = \alpha \frac{gL}{U^2} \quad (6.10)$$

Nous avons déjà donné une définition locale du nombre de Richardson au paragraphe 1.1.4.4 ; celui que nous venons de définir a une signification plus globale. Notons que, si l'effet de la gravité est supprimé ( $Ri = 0$ ), nous retrouvons l'équation d'Orr-Sommerfeld [43, 57] qui décrit les instabilités visqueuses d'un écoulement parallèle.

Des problèmes de stabilité numérique nous ont conduit à inclure dans l'équation de conservation de la masse (6.2) un terme de diffusion transverse à la direction de l'interface qui lisse les variations trop abruptes de concentration :

$$\partial_t \rho + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho - D \partial_y^2 \rho = 0 \quad (6.11)$$

Ceci conduit, après linéarisation et passage en variables sans dimension, à une nouvelle forme de l'équation 6.8 :

$$-\frac{d\bar{\phi}}{dy}\psi + \bar{u}\phi' - \frac{1}{ik Re Sc} \left( \frac{d^2\phi'}{dy^2} - k^2 \phi' \right) = \sigma\phi' \quad (6.12)$$

L'équation inclut un nouveau nombre sans dimension, le nombre de Schmidt  $Sc$  :

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (6.13)$$

$Sc$  caractérise le rapport du coefficient de diffusion visqueuse  $\nu$  et de la diffusion de masse  $D$  que nous avons introduite.

Par ailleurs, nous prendrons comme conditions aux limites sur les variations de concentration et sur la fonction courant liées à la perturbation :

$$\psi = 0 \quad \text{sur } y = \pm 1 \quad (6.14)$$

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \text{sur } y = \pm 1 \quad (6.15)$$

et

$$\frac{d\phi'}{dy} = 0 \quad \text{sur } y = \pm 1 \quad (6.16)$$

En théorie, il suffirait de résoudre ces équations pour déterminer le signe du taux de croissance temporel  $\sigma_i$  et en déduire un critère de stabilité de l'écoulement. Cependant, ce système d'équations différentielles linéaires du quatrième ordre pour la première (Eqn 6.7) et du deuxième ordre pour la seconde (Eqn. 6.12), ne possède pas de solution exacte, même pour les conditions aux limites les plus simples. Le problème peut cependant être résolu numériquement : les deux méthodes les plus fréquemment utilisées pour cela sont la méthode des différences finies et la méthode spectrale. La première consiste à intégrer spatialement l'équation en partant d'une frontière et à corriger de façon itérative pour satisfaire les conditions aux limites sur l'autre frontière. C'est cette méthode que nous allons utiliser et que nous allons détailler dans le paragraphe suivant, elle a l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre, mais est parfois peu stable numériquement.

### 6.2.2 Méthode numérique de résolution

Décrivons maintenant la méthode des différences finies utilisées pour résoudre le système des équations (6.7) et (6.12). Nous discrétisons tout d'abord la coordonnée  $y$  transverse à l'écoulement en  $N$  valeurs espacées de  $h = 2/N$  (figure 6.2). La valeur de la coordonnée transverse normalisée correspondant à la valeur  $i$  après discrétisation est égale à  $\bar{y} = -1 + ih$ , la valeur correspondante de la fonction  $f$  est donc :

$$f_i = f(-1 + ih) \quad i = 0, 1, \dots, N$$



FIGURE 6.2: Schéma de la discrétisation. Les valeurs indiquées au dessus de l'axe représentent la distance normalisée entre les parois planes du canal ( $y = \pm 1$  sur les parois et  $y = 0$  à mi-distance). Les valeurs indiquées au dessous sont les indices des points discrétisés qui sont séparés d'une distance  $h = 2/N$ .

Les dérivées de la fonction  $f(y)$  présentes dans les équations que nous avons à intégrer s'écrivent alors en utilisant les séries de Taylor :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dy} &\simeq \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2h} \\ \frac{d^2 f}{dy^2} &\simeq \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \\ \frac{d^4 f}{dy^4} &\simeq \frac{\frac{d^2 f_{i-1}}{dy^2} - 2\frac{d^2 f_i}{dy^2} + \frac{d^2 f_{i+1}}{dy^2}}{h^2} \\ &\simeq \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{h^4} \end{aligned}$$

avec une erreur de l'ordre de  $O(h^2)$ . Nous pouvons alors réécrire le système d'équations (6.7) et (6.12) sous la forme discrétisée :

$$\begin{aligned}
& \frac{\psi_{i-2}}{h^4} + \left( -\frac{4}{h^4} - \frac{2k^2}{h^2} - ikRe \frac{\bar{u}}{h^2} \right) \psi_{i-1} \\
& + \left[ \frac{6}{h^4} + \frac{4k^2}{h^2} + k^4 + ikRe \left( \bar{u} \left( \frac{2}{h^2} + k^2 \right) + \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \right] \psi_i \\
& + \left( -\frac{4}{h^4} - \frac{2k^2}{h^2} - ikRe \frac{\bar{u}}{h^2} \right) \psi_{i+1} + \frac{\psi_{i+2}}{h^4} \\
& + \left( Re Ri \frac{\cos \theta}{2h} \right) \phi'_{i-1} + (ikRe Ri \sin \theta) \phi'_i - \left( Re Ri \frac{\cos \theta}{2h} \right) \phi'_{i+1} \\
& = \sigma \times ikRe \left[ -\frac{\psi_{i-1}}{h^2} + \left( \frac{2}{h^2} + k^2 \right) \psi_i - \frac{\psi_{i+1}}{h^2} \right]
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$-ik ReSc \frac{d\bar{\phi}}{dy} \psi_i - \frac{\phi'_{i-1}}{h^2} + \left( ik ReSc \bar{u} + \frac{2}{h^2} + k^2 \right) \phi'_i - \frac{\phi'_{i+1}}{h^2} = \sigma \times ik ReSc \phi'_i \tag{6.18}$$

Les conditions aux limites (6.14), (6.15) et (6.16) deviennent alors :

$$(6.14) \Rightarrow \psi_0 = 0, \dots, \psi_N = 0 \tag{6.19}$$

$$(6.15) \Rightarrow \psi_1 = \psi_{-1} \quad \text{et} \quad \psi_{N-1} = \psi_{N+1} \tag{6.20}$$

et

$$(6.16) \Rightarrow \phi'_1 = \phi'_{-1} \quad \text{et} \quad \phi'_{N-1} = \phi'_{N+1} \tag{6.21}$$

Ces trois conditions imposent donc des équations simplifiées près des bords pour ( $i = 0, 1, 2$  et  $N - 2, N - 1, N$ ).

Le système des équations (6.17) et (6.18) se présente alors comme un problème aux valeurs propres généralisé résumé par l'équation matricielle :

$$\mathcal{A}V = \sigma \mathcal{B}V \tag{6.22}$$

où  $\sigma$  est la valeur propre complexe,  $V$  le vecteur propre de dimension  $2(N + 1)$  incluant les valeurs de  $\psi_i$  et de  $\phi_i$  pour tous les points discrétisés d'indices  $i = 0, \dots, N$ , et,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  les deux matrices carrées de dimension  $2(N + 1)$  comprenant les coefficients des équations (6.17) et (6.18). Pour analyser plus en détail ces trois termes, écrivons les explicitement :



$$V = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_N \\ \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$$\mathcal{A} = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right) \quad (6.24)$$

$$\mathcal{B} = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right) \quad (6.25)$$

Les matrices  $A_1$  et  $B_1$  sont des matrices carrées d'ordre  $(N + 1)$ , les termes non nuls de la matrice  $A_1$  sont regroupés sur 5 diagonales (Eqn. 6.26) : sur la ligne  $i$ , par exemple, seuls les éléments  $a_{i,i-2} \dots a_{i,i+2}$  peuvent être non nuls. Par ailleurs, tous les éléments sur les deux lignes et les deux colonnes d'indices  $i = 0$  et  $N$  sont égaux à 0 à l'exception de  $a_{0,0}$  et  $a_{N,N}$  qui sont égaux à 1 pour imposer les conditions  $\psi_0 = \psi_N = 0$  (Eqn 6.14). De la même manière il faut traiter séparément tous les termes déterminés par les conditions aux limites. Toutes les autres matrices sont remplies suivant le même schéma.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{21} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{31} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{i,i-2} & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-3,n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-3} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Pratiquement, les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  ont été générées à l'aide d'un programme FORTRAN, puis diagonalisées grâce à un sous-programme de la librairie LAPACK. Nous obtenons ainsi les valeurs complexes de la valeur propre  $\sigma$  et les vecteurs propres  $V$ . Nous étudierons alors les variations de la valeur imaginaire de  $\sigma$  en fonction des paramètres du problème ( $\bar{u}$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $\theta$ ,  $N$ ,  $k$ ,  $Re$ ,  $Ri$  et  $Sc$ ) et nous déterminerons les domaines de stabilité correspondants.

Dans le cadre de notre travail, nous avons pu tester ce code sur un cas modèle simple et comparer les résultats à ceux fournis par un autre code déjà existant au laboratoire DAMTP. Nous allons maintenant discuter les résultats que nous avons obtenus.

## 6.3 Simulation d'un cas modèle simple

### 6.3.1 Hypothèses de base

Nous nous plaçons dans une configuration horizontale :

$$\theta = 90^\circ$$

et nous utilisons les profils de vitesse et de densité suivants où  $y$  est la distance normalisée aux parois du canal avec  $y = \pm 1$  sur ces parois :

$$\bar{u} = \frac{\pi(\sin(\frac{\pi}{2}y) - y)}{\sqrt{\pi^2 - 4} - 2 \arccos(2/\pi)} \quad (6.27)$$

$$\bar{\rho}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = 1 - \alpha \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}y) \quad (6.28)$$

Ces profils ont été choisis en raison de leur simplicité et les coefficients ont été choisis pour que la valeur des maximums du profil de vitesse et du gradient de densité ( $d\bar{\phi}/dy$ ) soit de 1 (le paramètre  $\alpha$  a également été pris égal à 0.01 de façon à coller à la réalité expérimentale).

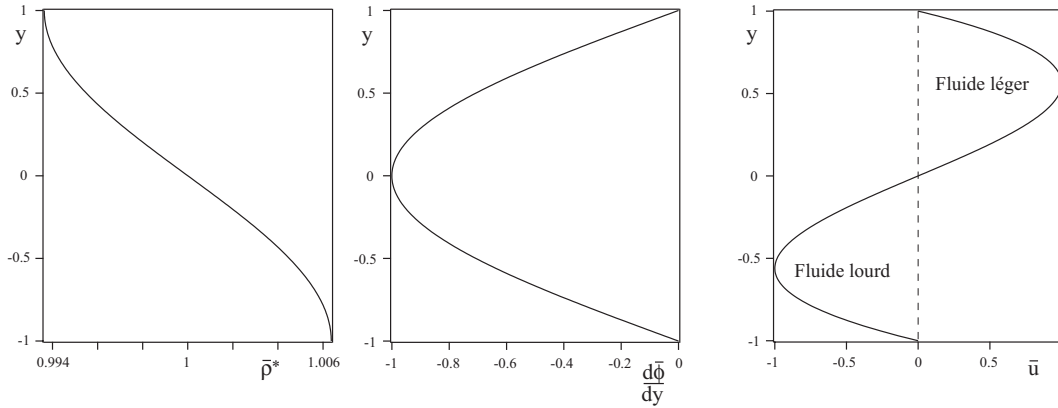


FIGURE 6.3: Variation en fonction de la position transverse dans le canal de la densité  $\bar{\rho}^*$  à gauche (avec  $\alpha = 0.01$ ), du gradient de densité :  $\frac{d\bar{\phi}}{dy}$  au centre, et de la vitesse  $\bar{u}$  à droite.

Enfin, un nombre  $N = 100$  de points a été choisi après quelques tests pour obtenir un temps de calcul et des erreurs raisonnables.

### 6.3.2 Etude du taux de croissance dans le cas modèle

Les essais que nous avons effectués ont porté sur l'influence des paramètres  $Re$ ,  $Ri$  et  $Sc$  sur la stabilité de l'écoulement.

En vue d'évaluer l'influence du nombre de Richardson  $Ri$ , nous avons tracé sur la figure 6.4, la variation du taux de croissance temporel  $\sigma_i$  (pris égal à la valeur maximum de la valeur propre imaginaire  $\sigma_i$  après la diagonalisation) en fonction du nombre d'onde  $k$ , pour différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri$  (0,0.1,...,1.5) et pour des valeurs constantes des autres paramètres :

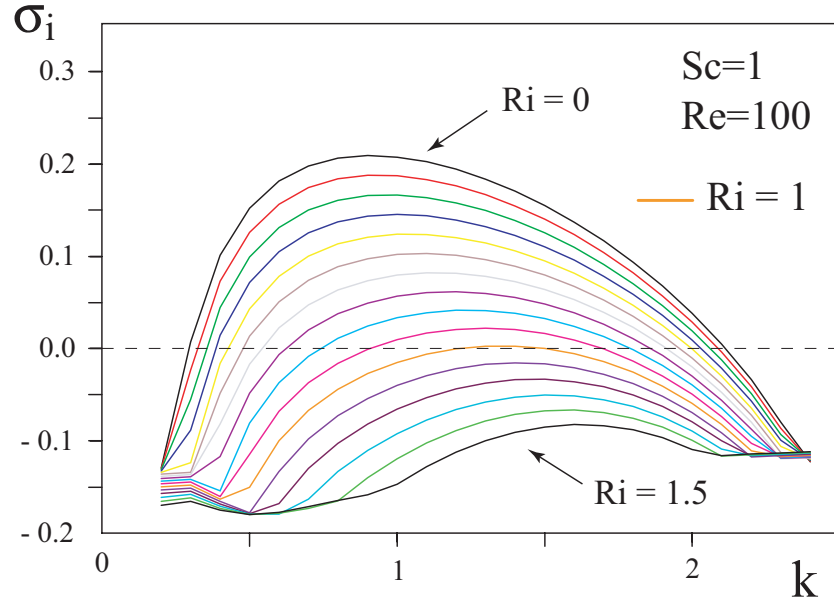


FIGURE 6.4: Variation du taux de croissance temporel  $\sigma_i$  de l'instabilité en fonction du nombre d'onde  $k$  pour des valeurs du nombre de Richardson variant par pas de 0,1 de  $Ri=0$  (courbe du haut) à  $Ri = 1.5$  (courbe du bas) avec  $Sc = 1$  et  $Re=100$ .

$Sc = 1$ , et  $Re = 100$ . Pour que l'écoulement soit stable, il faut que la valeur propre imaginaire  $\sigma_i$  soit négative quel que soit le vecteur d'onde  $k$  considéré. Nous constatons que cette condition est vérifiée pour  $Ri = Ri_c \simeq 1$  et pour toutes les valeurs supérieures. Dans ce cas, dans le rapport  $Ri = \alpha gL/U^2$ , les effets de stratification stabilisants dus à la gravité ( $\alpha gL$ ) deviennent supérieurs aux effets inertiels déstabilisants ( $U^2$ ).

D'autre part nous avons vu au paragraphe 1.1.4.4 du premier chapitre que le théorème de Miles-Howard [42, 36] prédit que la condition suffisante pour qu'un écoulement stratifié parallèle non visqueux soit stable, est que le nombre de Richardson local soit supérieur à 0.25 :  $Ri_{loc} > 0.25$  en tous les points de l'écoulement. En utilisant les notations sans dimensions utilisées jusqu'à maintenant, le nombre de Richardson local est défini par :

$$Ri_{loc}(y) = -\frac{gL}{U^2 \bar{\rho}(y)} \frac{(\partial \bar{\rho} / \partial y)}{(\partial \bar{u} / \partial y)^2}$$

En calculant la variation de  $Ri_{loc}(y)$  pour les profils de vitesse et de densité que nous avons utilisés lors du calcul précédent, nous trouvons que la valeur minimum, c'est à dire correspondante à la région susceptible d'être la plus instable, est atteinte pour  $y = 0$ . En évaluant  $Ri_{loc}$  en ce point nous avons :

$$Ri_{loc}(0) = -\frac{\alpha gL}{U^2} \frac{(\partial \bar{\phi}(0) / \partial y)}{(\partial \bar{u}(0) / \partial y)^2} \simeq 0.136 \times Ri$$

Nous trouvons ainsi que la valeurs de  $Ri_{loc}$  correspondant à la condition de stabilité  $Ri_c \simeq 1$  est  $Ri_{loc} \simeq 0.136$  ce qui est tout à fait compatible avec les prédictions de Howard et Miles.

Il est à noter que la valeur  $Sc = 1$  choisie dans le calcul de stabilité précédent, ne correspond pas à notre cas expérimental où le nombre de Schmidt  $Sc$  est plutôt de l'ordre de 1000 (viscosité cinématique  $\nu \sim 10^{-6}m^2/s$  et coefficient de diffusion moléculaire  $D \sim 10^{-9}m^2/s$ ). L'influence de la diffusion au voisinage de l'interface est donc surestimée et nous avons donc cherché à évaluer l'influence de  $Sc$  sur le seuil de stabilité.

Nous avons donc tracé sur la figure 6.5 la variation du taux de croissance temporel  $\sigma_i$  de l'instabilité en fonction du nombre d'onde  $k$  pour  $Re = 100$ , pour les mêmes valeurs du nombre de Richardson que dans la figure précédente (représenté avec le même de couleur), et pour deux valeurs du nombre de Schmidt : 100 sur la figure de gauche et 1000 sur la figure de droite.

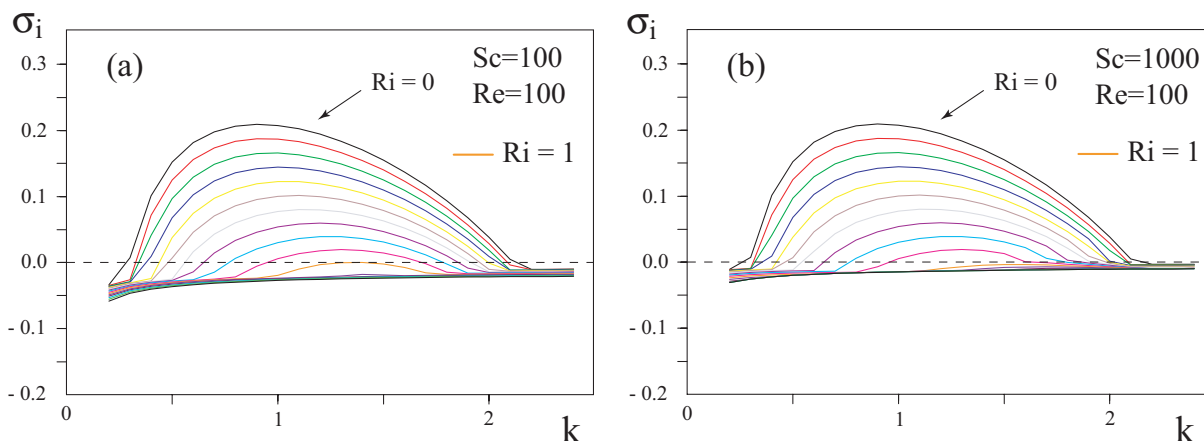


FIGURE 6.5: Variation du taux de croissance temporel  $\sigma_i$  de l'instabilité en fonction du nombre d'onde  $k$  pour  $Re = 100$  et un nombre de Richardson variant de  $Ri = 0$  (courbe du haut) à  $Ri = 1.5$  (courbe du bas) avec (a)  $Sc = 100$  (b)  $Sc = 1000$ . Le code de couleurs est le même que dans la figure 6.4. Notons que la valeur  $N = 100$  peut être insuffisante pour avoir une assez bonne précision à  $Sc=1000$  (et peut être même à  $Sc=100$ ).

Nous observons sur la figure de gauche que, pour  $Sc = 100$  (valeur inférieure d'un facteur 10 à la valeur réelle), les courbes de variation de  $\sigma_i$  en fonction de  $k$  sont très modifiées par rapport au cas  $Sc = 1$  dans les parties des courbes correspondant à des valeurs  $\sigma_i < 0$  et que, en particulier, les valeurs minimum de  $\sigma_i$  sont très augmentées. En revanche, la valeur seuil de  $Ri$  pour laquelle toutes les valeurs de  $\sigma_i$  sont inférieures à zéro est identique pour  $Sc = 1$  et  $Sc = 100$ . Pour  $Sc = 1000$  qui est très proche de la valeur réelle, les valeurs de  $Ri$  les plus négatives sont proches de 0 et il est difficile de déterminer la valeur seuil de  $Ri$  au dessus de laquelle l'écoulement est stable (la valeur 1 semble cependant compatible avec les courbes qui sont tracées). Dans le domaine des nombres de Schmidt supérieurs à 1, la valeur de  $Sc$  semble donc avoir une faible influence sur les conditions de stabilité. Quelques essais ont été réalisés sur le cas  $Sc = 0.01$  (assez irréaliste physiquement), nous constatons une forte augmentation de la valeur du nombre de Richardson nécessaire pour avoir la stabilité de l'écoulement : ce résultat est un peu paradoxal compte tenu de l'effet stabilisant qu'on attendrait d'une forte diffusion moléculaire.

Le deuxième nombre sans dimensions important est le nombre de Reynolds  $Re$  (toutes les simulations précédentes ont été effectuées avec un nombre de Reynolds  $Re = 100$ ).

Dans la figure 6.6 sont tracées des courbes de variation du taux de croissance  $\sigma_i$  en fonction

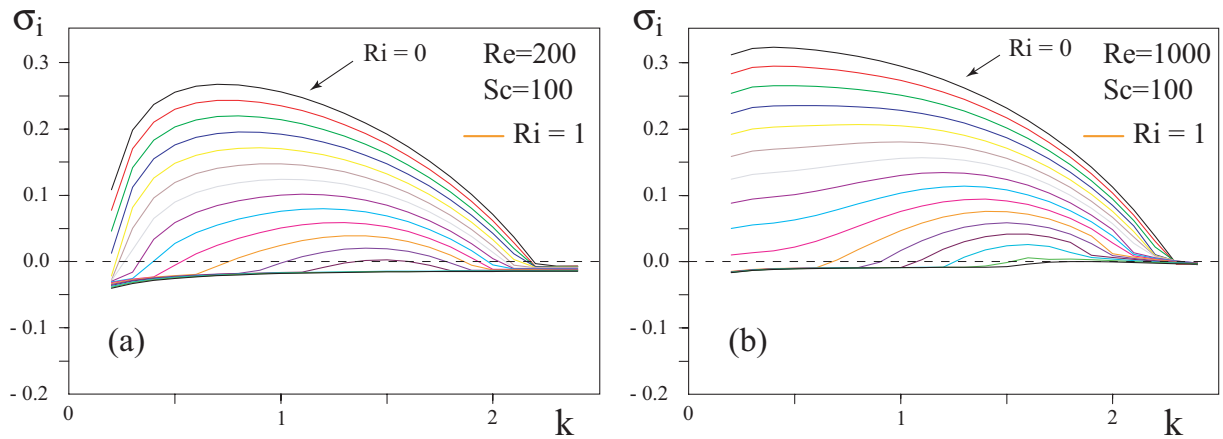


FIGURE 6.6: Variation du taux de croissance temporel  $\sigma_i$  de l'instabilité en fonction du nombre d'onde  $k$  pour  $Sc = 100$  et un nombre de Richardson variant de  $Ri = 0$  (courbe du haut) à  $Ri = 1.5$  (courbe du bas) avec (a)  $Re = 200$  (b)  $Re = 1000$ . Le code de couleurs est le même que dans la figure 6.4.

de  $k$  pour le même nombre de Schmidt  $Sc = 100$  que dans la figure 6.5(a) mais pour des nombres de Reynolds plus élevés  $Re = 200$  et  $1000$ . Nous constatons que l'augmentation de  $Re$  conduit à des valeurs minimales plus élevées du nombre de Richardson pour observer des écoulements stables (par exemple  $Ri \simeq 1.5$  pour  $Re = 1000$ ). Nous constatons par ailleurs que les valeurs de  $\sigma_i$  correspondantes aux faibles valeurs de  $k$  (grandes longueurs d'onde) augmentent fortement. Cette grande sensibilité du développement de l'instabilité à la valeur de  $Re$  contraste avec la faible dépendance par rapport à  $Sc$ .

### 6.3.3 Bilan de l'étude du cas modèle et perspectives

L'étude que nous venons de présenter a permis de valider le programme de simulation mais elle nous a aussi permis de dégager plusieurs caractéristiques intéressantes de l'influence des paramètres de contrôle du problème.

- Pour un profil de concentration (et donc de vitesse) donné, la stabilité de l'écoulement sera déterminée par les valeurs du nombre de Richardson  $Ri$ , du nombre de Reynolds  $Re$  et du nombre de Schmidt  $Sc$ . Pour les différents cas réalistes que nous avons étudiés, il a été possible de trouver une valeur de  $Ri$  critique  $Ri_c$  au-delà de laquelle tous les modes d'instabilité ont des taux de croissance négatifs.
- Cette valeur critique de  $Ri$  dépend très peu du nombre de Schmidt  $Sc$  (dans les cas réalistes où celui-ci est supérieur à 1). En revanche, les valeurs minimales négatives du taux de croissance  $\sigma_i$  sont de plus en plus proches de zéro au fur et à mesure que  $Sc$  augmente (c'est à dire que le coefficient de diffusion  $D$  diminue) ; cette tendance est confirmée par le fait que pour  $Sc = \infty$  le taux de croissance  $\sigma_i$  est nul pour  $Ri$  supérieure à  $Ri_c$  (les valeurs propres deviennent dans ce cas purement réelles). Ceci justifie *à posteriori* l'introduction du terme de diffusion dans l'équation de la masse.

- Le nombre de Richardson critique augmente assez fortement lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Ces résultats sont donc encourageants mais il sera souhaitable de les étendre à d'autres configurations et, en particulier, aux tubes inclinés. Nous pouvons nous attendre, en effet, (comme nous l'avons vu expérimentalement) à ce que l'angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale ait une forte influence sur la stabilité de l'écoulement : augmenter  $\theta$  pour des valeurs constantes des autres paramètres de l'étude conduit en effet à réduire la vitesse d'écoulement et à augmenter l'influence de la gravité transverse (il faut remplacer  $g$  par  $g \sin \theta$  dans l'écriture du nombre de Richardson). Une étude numérique récente a d'ailleurs été publiée par Defina et al. [23] sur les diagrammes de stabilité pour des tubes légèrement inclinés par rapport à l'horizontale : elle pourra servir de référence de départ à une étude ultérieure avant de passer au cas d'angles d'inclinaison plus élevés.

Ensuite, il sera nécessaire de dégager des conclusions propres à notre étude comme, notamment, l'influence de l'angle d'inclinaison du tube sur la stabilité des écoulements en fonction des paramètres de contrôle du problème.

Un paramètre très important de ces simulations ultérieures sera la prise en compte de profils de densité et de vitesse réalistes dans ces simulations. Nous allons maintenant aborder ce point en détail.

## 6.4 Les profils de concentration transverses : un ingrédient essentiel d'une simulation réaliste

### 6.4.1 Profils de concentration et simulation de l'instabilité

Les calculs du cas modèle ont supposé comme état de base un contre écoulement avec une variation continue de la densité normalisée sur l'ensemble de la distance entre parois (ce qui suppose que le mélange a déjà eu lieu). Les variations de vitesse ont aussi été imposées et ont été également distribuées sur l'ensemble de l'espace entre les parois.

Les calculs d'instabilité que nous venons de présenter ici ne sont évidemment valables que pour des écoulements laminaires. Pratiquement, ils sont importants pour déterminer si le contre-écoulement laminaire qui s'établit après la mise en contact des deux fluides va ou non se déstabiliser, et comme nous allons le voir plus loin, ils sont également important pour déterminer si après avoir mélangé en partie les deux fluides, nous pouvons atteindre de nouveau un régime d'écoulement laminaire stable.

Les profils de concentration que nous rencontrerons alors sont très différents de ce que nous avons décrit dans le cas modèle. Ainsi, au départ de l'expérience (et d'ailleurs à tout instant dans le régime 3), nous avons des forts gradients de concentration près de l'interface à cause de l'absence de mélange ; en revanche, les gradients de vitesse restent répartis dans toute la largeur de l'écoulement. Dans d'autres cas que nous détaillerons plus loin, nous avons une stratification en plusieurs couches.

Avant d'appliquer les calculs d'instabilités que nous venons de décrire, il nous faut donc connaître expérimentalement le profil de concentration relative des fluides (et donc de densité). Remarquons ici que, pour un écoulement laminaire parallèle entre deux plans verticaux ou inclinés, la connaissance du profil transverse de concentration, de l'inclinaison du canal et la condition de débit global nul suffisent à déterminer le profil de vitesse. L'équation de mouvement se réduit alors en effet à  $\eta(\partial^2 V_{xi}/\partial y^2) + \rho_i g \cos \theta + C = 0$  dans chaque fluide  $i$  où  $C$  est une constante unique. L'intégration de cette équation avec les conditions aux limites indiquées plus haut fournit alors le champ de vitesse qu'il n'est pas nécessaire de déterminer indépendamment.

### 6.4.2 Profils de concentration expérimentaux

Nous allons présenter ici quelques profils de concentration transverses typiques. Une large part d'entre eux correspondent à des régimes turbulents et ne sont donc pas pertinents pour l'étude de stabilité précédente mais ils n'en donnent pas moins des informations précieuses sur l'évolution de l'efficacité du mélange dans le système qui nous concerne.

Nous nous intéresserons ici à l'évolution des profils transverses de concentration au cours du temps et avec l'angle d'inclinaison pour un contraste de densité ( $At = 10^{-2}$ ), une viscosité ( $\nu = 2.10^{-6} m^2/s$ ) et un diamètre de tube ( $d = 20mm$ ) donnés.

La figure 6.7 présente une succession de profils expérimentaux qui reflètent les changements de régimes d'écoulement :

- Pour  $\theta = 10^\circ$ , les gradients transverses sont très faibles dès les temps courts et restent presque constants au cours du temps : cela reflète un mélange transverse très efficace caractéristique du régime diffusif d'étalement du profil de concentration.
- Pour  $\theta = 20^\circ$ , le gradient transverse reste constant sur la largeur du tube mais est au départ plus élevé : il atteint ensuite une valeur faible aux temps longs. Le mélange transverse par les instabilités de cisaillement est donc moins rapide mais il permet quand même d'homogénéiser la concentration sur la section du tube et d'atteindre un régime diffusif d'écoulement.
- Pour  $\theta = 40^\circ$ , les gradients transverse restent importants et à peu près constants au cours du temps : le mélange transverse n'est plus assez efficace pour pouvoir atteindre le régime diffusif. Cependant, les concentrations relatives ne sont pas égales à 0 ou 1 dans les parties supérieure ou inférieure de la section du tube : le contraste de concentration relative au niveau du front est donc encore inférieur à 1 car il n'y a pas d'arrivée de fluide léger pur au niveau du front. Nous ne sommes donc pas encore dans le régime 2 où la vitesse atteint une valeur "plateau" maximale (paragraphe 4.3.2).
- Pour  $\theta = 50^\circ$ , nous observons aux temps courts deux couches distinctes qui reflètent le contre-écoulement initial des deux fluides purs séparés avant le mélange par les instabilités de cisaillement. Ensuite, nous voyons apparaître aux temps plus longs une zone de mélange centrale (où le gradient de concentration est non nul) encadrée par deux "canaux" où les deux fluides de départ presque purs circulent en sens inverse à vitesse élevée. Nous avons alors un contraste de concentration presque égal à 1 au niveau des fronts de déplacement

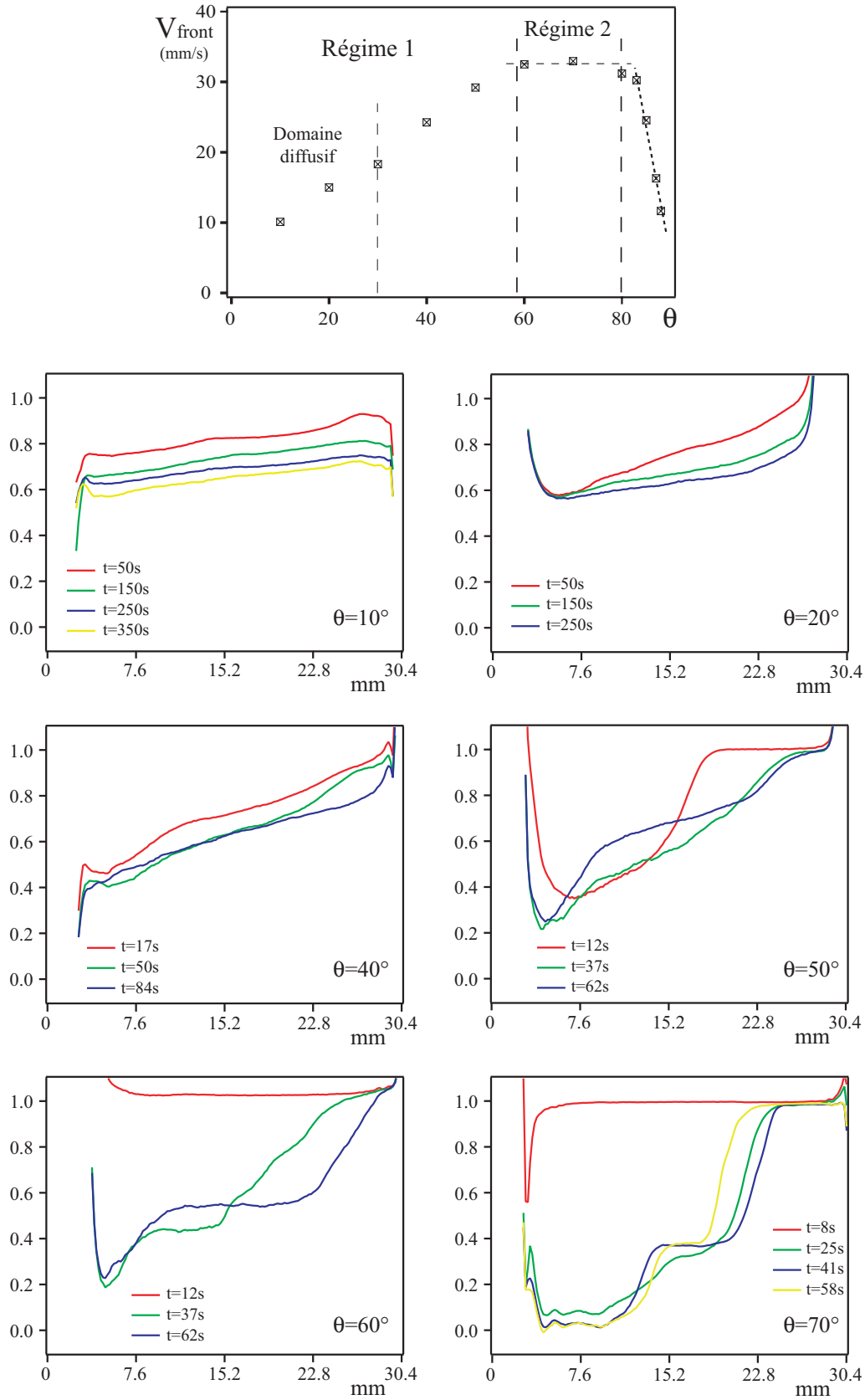


FIGURE 6.7: Variation de la concentration normalisée en fonction de la distance transverse dans la section du tube dans un plan vertical pour différents angles d'inclinaison et à différents instants ( $At = 10^{-2}$ ,  $\nu = 2.10^{-6} m^2/s$  et  $d = 20mm$ ). La courbe du haut rappelle la variation de la vitesse du front en fonction de  $\theta$  pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle ainsi que les domaines d'existence des différents régimes. Tous les profils sont mesurés à des temps (indiqués sur la figure) assez courts pour que les extrémités du tube n'aient pas d'influence. Notons qu'il ne faut pas tenir compte de la forme des courbes près des parois du tube car c'est un artefact dû à un problème optique.



qui sont alimentés par ces canaux. La vitesse du front est alors assez proche de la vitesse maximale correspondant au régime 2. Aux temps longs, les instabilités interfaciales sont réduites (réduction des gradients transverses) et nous approchons d'une configuration où un contre-écoulement stable peut réapparaître.

- Pour  $\theta = 60^\circ$ , nous observons aux temps longs également trois couches avec, cette fois-ci, un gradient de concentration nul (et une valeur moyenne de concentration de 0.5) dans une couche centrale large où les fluides sont bien mélangés. Nous avons toujours deux courants de concentration voisine de 0 et de 1 près des génératrices supérieure et inférieure du tube avec un mélange interfacial encore plus faible, surtout aux temps longs. La vitesse du front est maintenant presque égale à celle qui correspond au régime 2.
- Pour  $\theta = 70^\circ$ , nous atteignons rapidement une configuration stable à trois couches : la couche de mélange centrale est cette fois-ci plus étroite et les deux couches de fluides purs proches des parois sont plus larges. Nous avons, cette fois-ci, une configuration caractéristique du régime 2 de vitesse du front maximale.
- Pour  $\theta \geq 80^\circ$  (non représenté sur la figure car trivial), la zone centrale de mélange disparaît car nous ne développons plus d'instabilités interfaciales. Nous avons alors simplement un écoulement en sens inverse des deux fluides purs avec un fort gradient de concentration à leur interface.

Ainsi, les problèmes d'instabilités d'interfaces sont étroitement liés aux caractéristiques des différents régimes. Notons pour finir que pour les forts angles d'inclinaison nous observons un retour à des régimes d'écoulement stable qu'il sera utile de caractériser à partir des modélisations développées dans le présent chapitre.

## 6.5 Conclusion

Nous avons développé, mis au point et validé, au laboratoire DAMTP de Cambridge sous la direction du Professeur E.J. Hinch, un programme qui permet de déterminer les domaines de stabilité de l'écoulement en fonction des paramètres expérimentaux tels que : le profil de base de vitesse et de densité, l'angle d'inclinaison du tube  $\theta$ , la longueur d'onde des instabilités, le nombre de Reynolds  $Re$  et le nombre de Richardson  $Ri$  ; à ceux-ci il faudra ajouter des paramètres introduits dans le cadre de la simulation numérique : le nombre de Schmidt  $Sc$  qui est introduit pour atténuer les instabilités numériques et le nombre de points de discrétisation de la dimension transverse  $N$ .

Cependant nous n'avons pas pu, faute de temps, exploiter, comme nous le souhaitions, cet outil. Les perspectives sont donc très étendues et la principale est certainement l'étude de l'influence de l'angle d'inclinaison du tube  $\theta$  sur la stabilité des écoulements avec, pour objectif, de nous aider dans la compréhension du mélange transverse et ainsi du phénomène de diffusion macroscopique.

Enfin, dans ce problème, le profil transverse initial (avant déstabilisation) de la concentration relative des deux fluides joue un rôle très important. Les mesures expérimentales de ces profils transverses ont fait apparaître une grande variété de distribution des fluides allant d'une séparation complète pour les contre-écoulements laminaires parallèles jusqu'à de très faibles gradients de

densité dans les régimes diffusifs turbulents. D'autres types de profils ont été observés tels que des écoulements à trois couches stables avec une couche de mélange au centre et deux contre-écoulements de part et d'autre. Ces profils expérimentaux devront donc être introduits dans des simulations numériques ultérieures destinées à être comparées directement aux expériences.

# Chapitre 7

## Conclusions générales et perspectives

Nous avons, dans cette thèse, étudié le mélange induit par gravité de deux fluides miscibles de densités différentes dans un long tube vertical et incliné. Les études expérimentales quantitatives abordées dans ce travail ont porté sur deux phénomènes physiques macroscopiques, étroitement reliés :

- La dynamique du front de déplacement.
- Le mélange en aval du front, et tout particulièrement l'évolution du profil de concentration moyenne.

L'analyse de la structure à petite échelle de l'écoulement est restée surtout qualitative mais a néanmoins fourni des informations précieuses et s'est révélée très prometteuse pour l'avenir.

Nous allons maintenant rappeler les principaux résultats obtenus avant de dégager les perspectives de travaux de recherche futurs.

### 7.1 Résultats expérimentaux

#### 7.1.1 Dynamique du front

Notre étude expérimentale de la vitesse du front d'interpénétration des fluides, en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale, a fait apparaître trois régimes :

Régime 3 : Lorsque le tube est proche de l'horizontale, on observe un contre écoulement quasi-parallèle sans mélange entre les fluides. La composante de la gravité transverse à l'axe du tube impose en effet une stratification suffisamment forte pour bloquer le développement d'instabilités de cisaillement à l'interface qui induiraient un mélange transverse des fluides. Ce **régime visqueux** (régime 3) est contrôlé par la dissipation visqueuse en volume : Il est observé en dessous d'une valeur seuil de l'angle  $\theta$  qui dépend du nombre d'Atwood, du diamètre du tube et de la viscosité.

Aux temps longs (sauf pour un tube horizontal), le front atteint une vitesse constante  $V_{f\infty}$  qui tend vers 0 lorsque  $\theta$  tend vers  $90^\circ$  ; la valeur de  $V_{f\infty}$  peut être évaluée par les mêmes lois que celles qui régissent les écoulements de Poiseuille : elle est proportionnelle à l'inverse de la viscosité  $\nu$  et à  $\cos\theta$  (le "moteur" de l'écoulement est, en effet, la composante longitudinale  $g \cos\theta$  de la gravité).

Aux temps courts, la vitesse de front  $V_f$  est limitée par des effets inertiels au niveau même du front : comme aux angles d'inclinaison un peu plus élevés, la dynamique du front est dominée par un équilibre entre les variations de la pression de Bernoulli et de la pression hydrostatique.

Aux temps intermédiaires, on a de nouveau un régime dominé par la viscosité mais où la vitesse du front décroît avec la distance : cette décroissance reflète la diminution de la pente de l'interface au fur et à mesure que la longueur de la zone d'interpénétration des deux fluides augmente. Pour un tube horizontal, la vitesse limite aux temps longs  $V_{f\infty}$  est nulle et le profil de l'interface entre les fluides est self-similaire et dépend uniquement de la distance réduite  $x/t^{0.5}$ .

Dans ces régimes, la dissipation d'énergie par la viscosité joue un rôle essentiel mais le nombre de Reynolds est nettement  $> 1$  : si les effets inertiels sont négligeables dans la zone d'écoulement quasi parallèle pour des raisons géométriques, il sont dominants dans la zone d'écoulement tridimensionnel près du front : on observe ainsi souvent près de celui-ci un "bourrelet" associé à des effets de pression de Bernoulli.

Régime 2 : Pour des angles intermédiaires, le mélange reste modéré mais l'écoulement est dominé par les effets inertiels. la vitesse  $V_f$  du front reflète un équilibre pression de Bernoulli-pression hydrostatique près de celui-ci. Dans ce **régime inertiel saturé** la vitesse  $V_f$  est indépendante de  $\theta$  avec :

$$V_f = V_f^M = 0.7V_t = 0.7\sqrt{Atgd}$$

Dans ce second régime, le mélange produit par des instabilités de Kelvin-Helmholtz est encore faible car amorti par l'effet de ségrégation de la gravité transverse : du fluide déplaçant pur arrive ainsi jusqu'au niveau du front où le contraste de densité est donc égal à la différence entre les densités des deux fluides de départ.

La vitesse caractéristique inertielle  $V_t = \sqrt{Atgd}$  qui apparaît dans l'expression de  $V_f$  joue un rôle clé dans toute notre étude et on la rencontre dans de nombreux phénomènes voisins tels que la vitesse d'ascension des bulles de Taylor dans un tube (vertical ou incliné) ou de la vitesse d'un courant de gravité sur un fond horizontal . Cela est à première vue assez surprenant car les théories correspondantes ne prennent pas en compte la viscosité et supposent souvent les fluides parfaits. De fait, ces vitesses sont déterminées par des équilibres de pression sur la partie avant du front sur laquelle la couche limite visqueuse reste fine (le nombre de Reynolds est en effet élevé et la vitesse croît vers l'aval). Cela explique pourquoi l'approximation de fluide parfait reste valable ; sur la partie arrière du front de déplacement, nous avons, en revanche, des décollements de couches limites avec apparition d'instabilités.

Régime 1 : Enfin, pour un tube plus proche de la verticale, nous observons aussi un **régime inertiel** mais pour lequel  $V_f$  n'est plus égale à  $0.7\sqrt{Atgd}$  mais augmente avec  $\theta$ . L'effet de stratification

associé à la composante transverse de la gravité est alors beaucoup moins fort et les instabilités interfaciales mélangent les deux fluides sur toute la section du tube.

La variation de  $V_f$  avec les paramètres de contrôle de l'écoulement est alors parfois contre-intuitive : ainsi,  $V_f$  augmente ainsi avec la viscosité  $\nu$  et diminue lorsque le diamètre  $d$  augmente. En définissant un nombre de Reynolds  $Re_t = V_t d / \nu$  à partir de la vitesse inertielle  $V_t$ , nous trouvons que  $V_f$  vérifie une loi d'échelle du type  $V_f / V_t \propto Re_t^{-3/4}$  pour un angle  $\theta$  donné. La variation de  $V_f$  avec l'angle est, elle, du type  $V_f \propto a + b \tan \theta$  ( $a$  et  $b$  sont des constantes).

Des mesures directes de la concentration locale par une technique de fluorescence induite par laser (LIF) ont permis d'interpréter ces observations. Elles ont montré que, dans le régime 1, la vitesse  $V_f$  est déterminée par le contraste de densité local  $\delta\rho$  au niveau du front et non par la différence  $\Delta\rho$  entre les densités des fluides de départ ( $V_f \propto (\delta\rho)^{0.5}$ ). Appelons  $C_f$  le contraste entre les concentrations de fluide léger de part et d'autre du front mesurée par LIF : le rapport de la vitesse  $V_f$  correspondante et de la vitesse  $V_f^M$  dans le régime 2 doit être égal à  $\sqrt{C_f}$ , ce que nous avons pu vérifier quantitativement. Ce résultat permet d'expliquer les variations de  $V_f$  avec les paramètres expérimentaux ; ainsi, une augmentation de la viscosité diminue le nombre de Reynolds et l'efficacité du mélange :  $C_f$  et donc la vitesse du front augmentent alors. De même, aux angles  $\theta$  élevés, la ségrégation est plus forte et le mélange moins efficace :  $C_f$  et la vitesse  $V_f$  du front vont donc augmenter.

L'intensité du mélange transverse dans la section du tube a donc un rôle clé sur la dynamique du front.

### 7.1.2 Mélange en aval du front : diffusion macroscopique

Ce mélange transverse influence également fortement le profil de variation de la concentration relative des deux fluides (moyennée sur la section) le long du tube. Dans les tubes verticaux et faiblement inclinés, la variation de cette concentration vérifie une équation de diffusion macroscopique (jusqu'à un angle  $\theta$  maximum d'autant plus élevé que le contraste de densité est fort et la viscosité faible). L'analyse des variations du coefficient de diffusion  $D$  correspondant, en fonction des paramètres de contrôle de l'écoulement, montre plusieurs caractéristiques importantes : tout d'abord,  $D$  augmente fortement avec la viscosité  $\nu$  et encore plus rapidement avec l'angle d'inclinaison  $\theta$ . En revanche,  $D$  varie très lentement avec le contraste de densité  $\Delta\rho$  entre les fluides et avec le diamètre  $d$  du tube. Plus précisément, le coefficient normalisé  $D/V_t d$  varie en fonction du nombre de Reynolds  $Re_t$  en suivant des lois d'échelle en  $Re_t^{-3/2}$  ou  $Re_t^{-1/2}$  suivant que  $Re_t$  est respectivement  $\lesssim 900$  ou  $\gtrsim 900$ .

Dans le régime  $Re_t \lesssim 900$ , ces variations de  $D$  sont qualitativement du même type (mais en plus rapides) que celles observées pour la vitesse  $V_f$  du front. Ce qui nous a permis de déduire une relation entre  $D$  et  $V_f$  : leur rapport  $D/V_f^2$  est remarquablement constant en fonction de l'angle  $\theta$  et de la viscosité  $\nu$ .

L'ensemble de ces mesures de  $D$  et  $V_f$  conduisent à une description simple en termes d'écoulements en sens inverse des deux fluides (à une vitesse de l'ordre de  $V_f$ ) avec du mélange dans la partie

centrale de la section du tube. Lorsque ce mélange est peu efficace, par exemple à cause d'une forte stratification, nous n'avons pas d'étalement diffusif, comme dans les régimes (2) et (3). Nous n'atteindrons un régime diffusif que si le mélange transverse homogénéise la concentration dans toute la section de l'écoulement. Dans ce cas, des raisonnements semi-quantitatifs montrent que  $D/V_f^2$  représente le temps  $\tau$  caractéristique du mélange transverse. L'explication de la faible variation de ce temps  $\tau$  observée en fonction des paramètres de contrôle reste un objectif importants pour les études ultérieures.

### 7.1.3 Instabilités et mélange transverse pour un contre-écoulement stratifié : étude numérique

L'apparition d'instabilités à l'interface entre les fluides lourd et léger en contre-écoulement dans notre dispositif est la première étape du mélange transverse dont nous avons vu l'influence clé sur la dynamique de nos écoulements. Nous avons donc cherché à déterminer quantitativement les conditions d'apparitions de ces instabilités par une étude numérique complémentaire de nos expériences.

Les premiers résultats de cette étude ont permis de vérifier les nombres sans dimensions qui interviennent dans ce problème et de dégager les conditions de stabilité dans un cas modèle simple. Il sera judicieux d'étendre ultérieurement ces simulations vers des configurations de tubes inclinés avec des profils réalistes de densité et de vitesse (les deux étant étroitement couplés dans notre problème).

## 7.2 Perspectives

Plus généralement, si de nombreuses caractéristiques du problème de "lock-exchange" en géométrie confinée, que représente notre système, ont pu être étudiées en détail et souvent expliquées qualitativement au cours de notre travail, il reste encore de nombreux points à analyser. Il nous semble en particulier prioritaire d'examiner de manière approfondie la structure de l'écoulement à petites échelle et d'analyser quantitativement l'influence du confinement. Enfin, il sera pertinent d'étendre les résultats de ce travail à d'autres systèmes physiques de propriétés proches.

### 7.2.1 Etude locale du mélange induit par gravité en tube vertical ou incliné - LIF-PIV

Tout au long de ce manuscrit nous avons évoqué la nécessité de s'intéresser aux échelles locales de notre système pour mieux en comprendre les caractéristiques macroscopiques. Il faudra en particulier caractériser le temps, la vitesse et la longueur caractéristiques du mélange dans ces écoulements. Il faudra aussi comprendre certains phénomènes dépendant du temps, comme l'effet d'intermittence présenté au paragraphe 5.3 et la croissance des instabilités.

Pour atteindre ces objectifs il faudra caractériser quantitativement, expérimentalement et numériquement, le mélange local en mesurant les champs de vitesse et de concentration instantanés. Nous avons commencé à étudier le champ de concentration par fluorescence induite par laser (LIF) mais

il faudra analyser l'influence d'un plus grand nombre de paramètres et, surtout, étudier les fluctuations spatiales et temporelles du champ de concentration. Le champ de vitesse instantané sera, lui, déterminé dans les mêmes régions par vélocimétrie par imagerie de particules (PIV). Ces mesures devraient permettre de répondre à quelques questions particulièrement importantes.

### 7.2.1.1 Structure locale du champ de vitesse et de concentration au front

Nous avons montré que la vitesse du front est directement liée au contraste de densité local au front dans les régimes inertiels. Il faudra vérifier la généralité de ce résultat pour différentes viscosités, diamètres de tube et contrastes de densité entre les fluides. De plus, nous pensons que la concentration au front du fluide déplaçant, finit par devenir constante grâce à un apport de fluide plus léger par un canal situé contre la génératrice supérieure du tube (pour le front montant). Pour vérifier cette hypothèse, il faudra étudier quantitativement la relation entre la vitesse d'écoulement et le gradient de concentration transverse à l'axe du tube dans la zone de mélange.

### 7.2.1.2 Analyse des fluctuations de vitesse et de concentration

Dans tous les cas, le mouvement des "paquets de fluide" dans la zone de mélange est contrôlé par des forces d'Archimède qui dépendent du contraste de densité local entre ces "paquets" et leur environnement. Or, le champ de concentration et le mouvement des paquets de fluide deviennent de plus en plus désordonnés quand on passe d'un contre écoulement stable à un mélange turbulent. Mesurer la distribution et les fluctuations des concentrations locales (et de la vitesse) et leur corrélation permettra de caractériser le mélange dans ces écoulements. La détermination des lois d'échelle vérifiées par ces fluctuations aidera également à comprendre celles qui sont vérifiées par les paramètres macroscopiques.

### 7.2.1.3 Caractéristiques spatio-temporelles des écoulements ; intermittence et instabilités.

Le mélange dans ces écoulements varie souvent de manière significative au cours du temps. Ainsi, des effets d'intermittence sont ainsi souvent observés dans les tubes inclinés et même, parfois, en tube vertical : avec une alternance de phases de contre-écoulement relativement stable et de phases de mélange fortement turbulent. Dans un tel cas, le temps caractéristique du mélange est bien défini, l'analyse de ce régime fournira probablement des indices pour mieux comprendre les autres cas.

Même dans des régimes en apparence plus stationnaires, on observe souvent des "bulles" de fluides plus lourd ou plus léger, se propageant plus vite que le front de déplacement, et qui contribuent à maintenir constante la vitesse de celui-ci. Enfin, un autre phénomène clef, dépendant du temps, est représenté par les instabilités de cisaillement qui se développent en arrière du front et se propagent dans la zone de mélange : ces instabilités peuvent, soit s'amortir pendant leur propagation, soient se développer et provoquer le mélange transverse.

Dans tous ces cas, des mesures mieux résolues en temps seront nécessaires pour comprendre ces variations et leur influence sur le mélange.

## 7.2.2 Influence du confinement

Une des caractéristiques essentielles de notre système expérimental est le confinement par les parois du tube qui influence fortement le développement des différents modes d'instabilité et le processus de mélange. Il nous paraît nécessaire d'étudier spécifiquement plusieurs aspects de son influence.

### 7.2.2.1 Transition entre mélange confiné et non confiné

Un objectif particulièrement intéressant sera de déterminer s'il existe une taille caractéristique transverse du tube (ou canal) expérimental marquant la transition entre des comportements confinés et non confinés. On pourra par exemple répéter les expériences dans des tubes de diamètre de plus en plus grand ; une étude antérieure a en effet montré que, dans des tubes de  $44\text{mm}$  de diamètre, le comportement diffèrait fortement de celui observé dans les tubes plus petits [22]. On pourrait en particulier analyser, dans des tubes proches de la verticale, si, au delà d'un certain diamètre, plusieurs "doigts" peuvent se développer sans coalescer ; d'autre part, nous pourrions étudier l'interaction entre des "doigts" apparus simultanément.

### 7.2.2.2 Géométrie du canal

Un autre volet intéressant est l'influence de la géométrie des canaux (par exemple de section rectangulaire) sur l'apparition de modes d'instabilité et sur le forçage de ces modes : en utilisant de telles géométries, il sera ainsi possible de voir si le mélange varie lorsqu'on force la géométrie des instabilités initiales. Récemment, des simulations numériques de Jacques Magnaudet *et al.* à Toulouse (IMFT) ont été réalisées dans un canal rectangulaire : on observe dans ce cas un mode asymétrique avec un doigt central se déplaçant dans une direction et quatre doigts piégés dans les quatre coins qui se déplacent en sens inverse (voir figure 7.1). La combinaison d'études numériques et expérimentales avec différentes géométries permettra d'établir les caractéristiques des régimes de mélange en fonction de la géométrie et des autres paramètres de contrôle.

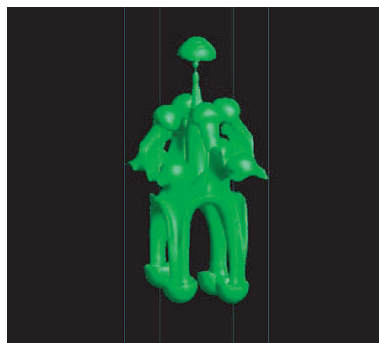


FIGURE 7.1: Isosurface de mélange à 50% entre les deux fluides, dans un canal vertical de section carrée ( $At = 0.01$ ,  $Ga = 385$ ,  $64 \times 64 \times 512$  grid) (document aimablement fourni par Jacques Magnaudet *et al.* - Toulouse (IMFT))



### 7.2.3 Extension des résultats obtenus à d'autres systèmes

Au cours de cette thèse nous n'avons utilisé que des fluides miscibles newtoniens. Cependant, comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, d'importantes analogies existent entre les processus que nous avons discuté et ceux observés dans d'autres systèmes, tels que les fluides non miscibles, les fluides réactifs ou les suspensions de particules. Ces systèmes sont, à la fois, très intéressants d'un point de vue fondamental et ont de nombreuses applications industrielles. Il sera donc intéressant d'étendre à ces systèmes certains aspects de nos études.

#### 7.2.3.1 Fluides non miscibles

Pour des fluides non miscibles de densités différentes, la différence majeure est, évidemment, l'absence de diffusion moléculaire et la présence d'une tension de surface qui stabilise l'interface entre les fluides. Aux forts angles d'inclinaison par rapport à la verticale, on peut s'attendre à observer un contre écoulement des deux fluides avec plus ou moins de perturbations de l'interface ; près de la verticale, il apparaîtra des émulsions et/ou des suspensions de gouttelettes (une part significative de l'énergie potentielle de gravité sera dissipée dans la génération de ces nouvelles interfaces). L'angle de transition entre les différents régimes dépendra, entre autres, de la tension de surface, de la viscosité et du contraste de densité. Les écoulements auront de nombreux points communs avec les écoulements diphasiques liquide-liquide et gaz-liquide classiques. Certains codes numériques tels que celui développé par l'équipe de Jacques Magnaudet à l'IMFT sont ainsi adaptés aux fluides non miscibles et pourront servir de base de comparaison.

#### 7.2.3.2 Suspensions de particules

Pour une suspension de particules, l'équivalent de nos expériences est la sédimentation de particules en tube incliné : son accélération par rapport au cas d'un tube vertical reflète l'effet Boycott, déjà évoqué à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Cet effet a déjà été beaucoup étudié mais il serait intéressant d'expliquer et de modéliser la transition entre régimes à partir d'expériences du type des nôtres : la spécificité par rapport à celles-ci serait alors la rhéologie particulière des suspensions. Les résultats pourraient, par exemple, être comparés à des simulations numériques utilisant un suivi de particules par méthode lagrangienne ; celles-ci ont, en effet, permis de modéliser le problème comparable de l'effet des forces d'Archimède dans les écoulements de bulles [15].



# Bibliographie

- [1] A. Acrivos and E. Herbolzheimer, *Enhanced sedimentation in settling tank with inclined walls*, J. Fluid. Mech. **92** (1979), 435–457.
- [2] M.H.I. Baird, K. Aravamudan, N.V. Rama Rao, J. Chadam, and A.P. Peirce, *Unsteady axial mixing by natural convection in vertical column*, AIChE J. **38** (1992), 1825.
- [3] M.O. Baringer and J.F. Price, *Mixing and spreading of the mediterranean outflow*, J. Phys. Oceanogr. **27** (1997), 1654–1692.
- [4] G.K. Batchelor and J.M. Nitsche, *Instability of stratified fluid in a vertical cylinder*, J. Fluid. Mech. **252** (1993), 419–448.
- [5] K.H. Bendiksen, *An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes*, Int.J. Mutiphase Flow **10** (1984), no. 4, 467–483.
- [6] ———, *On the motion of long bubbles in vertical tubes*, Int.J. Mutiphase Flow **11** (1985), 797–812.
- [7] H. Blasius, *Funktionentheoretische methoden in der hydrodynamik*, Z. Math. u Phys. **58** (1910), no. 90.
- [8] A. E. Boycott, *Sedimentation of blood corpuscles*, Nature **104** (1970), no. 532.
- [9] R.E. Britter and P.F. Linden, *The motion of the front of a gravity current traveling down an incline*, J. Fluid. Mech. **99** (1980), 531–543.
- [10] R.E. Britter and J.E. Simpson, *Experiments on the dynamics of a gravity current head*, J. Fluid. Mech. **88** (1978), 223–240.
- [11] K. A. Browning and C. D. Watkins, *Observations of clear air turbulence by high power radar*, Nature, Lond **227** (1970), 260–263.
- [12] J.B. Cannon and E.E. Zukoski, *Turbulent mixing in vertical shafts under conditions applicable to fires in high rise buildings*, Technical Fire Report n°1 to the National Science Foundation, California Institute of Technology, Pasadena, California (1975).
- [13] Francois Charru, *Instabilités hydrodynamiques*, prochainement publié, 2005.

- [14] C. Clanet, P. Héraud, and G. Searby, *On the motion of bubbles in vertical tubes of arbitrary cross-sections : some complements to the dimitrescu-taylor problem*, J. Fluid. Mech. **519** (2004), 359–376.
- [15] I. Climent and J. Magnaudet, *Large-scale simulations of bubble-induced convection*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 4827–4830.
- [16] The Alpha-Groupe collaboration, *A comparative study of the turbulent rayleigh-taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations*, Phys. Fluids **16** (2004), 1668–93.
- [17] A.W. Cook and P.E. Dimotakis, *Transition stages of rayleigh-taylor instability between miscible fluids*, J. Fluid. Mech. **443** (2001), 69–99.
- [18] S.B. Dalziel, P.F. Linden, and D.L. Young, *Self-similarity and internal structure of turbulence induced by rayleigh-taylor instability*, J. Fluid. Mech. **399** (1999), 1–48.
- [19] R.M. Davies and G.I. Taylor, *The mechanics of large bubbles rising through extended fluids and through liquids in a tube*, Proc.R.Soc.London, Ser. A **200** (1950), 375.
- [20] I.P.D. De Silva, H.J.S. Fernando, F. Eaton, and D. Hebert, *Evolution of kelvin-helmholtz billows in nature and laboratory*, Earth Planet. Sci. Lett. **143** (1996), 217–31.
- [21] M. Debacq, V. Fanguet, J.P. Hulin, D. Salin, and B. Perrin, *Self similar concentration profiles in buoyant mixing of miscible fluids in a vertical tube*, Phys. Fluids **13** (2001), 3097.
- [22] M. Debacq, J.P. Hulin, D. Salin, B. Perrin, and E.J. Hinch, *Buoyant mixing of miscible fluids of varying viscosities in vertical tube*, Phys. Fluids **15** (2003), 3846.
- [23] A Defina, S Lanzoni, and F.M. Susin, *Stability of a stratified viscous shear flow in a tilted tube*, Phys. Fluids **11** (1999), 344–355.
- [24] P.G. Drazin and W.H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge Univ. Press, 1981.
- [25] D. Dumitrescu, *Strömung an einer luftblase im senkrechten rohr*, Z. Angew. Math. Mech. **23** (1943), 139–149.
- [26] T.H. Ellison and J.S. Turner, *Turbulent entrainment in stratified flows*, J. Fluid. Mech. **6** (1959), 423–448.
- [27] J. Fabre and A. Liné, *Modelling of two-phase slug flow*, Annu.Rev. Fluid Mech. **24** (1992), 21–46.
- [28] H.J.S. Fernando, *Turbulent mixing in stratified fluids*, Annu.Rev. Fluid Mech. **23** (1991), 455–93.
- [29] Förster, *Über flüssikeitsstrahlen, deren formen drechunskörper sind*, Z. Math. u Phys. **62** (1912), 319.
- [30] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences, CNRS Editions, 2001.

- [31] ———, *Ce que disent les fluides*, Belin. Pour la science, 2006.
- [32] E. Herbolzheimer, *Stability of the flow during sedimentation in inclined channels*, Phys. Fluids **26** (1983), 2043–2054.
- [33] C.M. Ho and P. Huerre, *Perturbed free shear layers*, Annu.Rev. Fluid Mech. **16** (1984), 365.
- [34] J-M Holford, S.B. Dalziel, and D. Youngs, *Rayleigh-taylor instability at a tilted interface in laboratory experiments and numerical simulations*, Laser and Particle Beams **21** (2003), 419–423.
- [35] J. Holmboe, *On the behavior of symmetric waves in stratified shear layer*, Geophys.Publ. **24** (1962), 67.
- [36] L.N. Howard, *Note on a paper of john w. miles*, J. Fluid. Mech. **10** (1961), 509–12.
- [37] H.E. Huppert and J.E. Simpson, *The slumping of gravity currents*, J. Fluid. Mech. **99** (1980), 785–799.
- [38] H.-J. Kull, *Theory of the rayleigh-taylor instability*, Phys. Rep. **206** (1991), 197–325.
- [39] G. A. Lawrence, F.K. Browand, and L.G. Redekopp, *The stability of a sheared density interface*, Phys. Fluids **3** (1991), no. 10, 2360–2370.
- [40] P.F. Linden and J.M. Redondo, *Molecular mixing in rayleigh-taylor instability. part i: Global mixing*, Phys. Fluids **A3** (1991), 1269–77.
- [41] E.E. Meshkov, *Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave*, Sov. Fluid Dyn. **4** (1969), 101.
- [42] J.W. Miles, *On the stability of heterogeneous shear flows*, J. Fluid. Mech. **10** (1961), 496–508.
- [43] W.M.F. Orr, *The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid*, Proc. R. Irish Acad. A **27** (1907), 9–68 et 69–138.
- [44] W.R. Peltier and C.P. Caulfield, *Mixing efficiency in stratified shear flows*, Annu.Rev. Fluid Mech. **35** (2003), 135–67.
- [45] O. Pouliquen, J. M. Chomaz, and P. Huerre, *Propagating holmboe waves at the interface between two immiscible fluids*, J. Fluid. Mech. **266** (1994), 277–302.
- [46] K.I. Read, *Experimental investigation of turbulent mixing by rayleigh-taylor instability*, Physica D12 (1984), 45–58.
- [47] O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **174** (1883), 935.
- [48] R.D. Richtmyer, *Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids*, Commun Pure Appl. Maths **8** (1960), 297.

- [49] J. W. Rottman and J. E. Simpson, *Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel*, J. Fluid. Mech. **135** (1983), 95–110.
- [50] W. Schmidt, *Zur mechanik der boen*, Z. Meteorol. **28** (1911), no. 355-62.
- [51] D.H. Sharp, *An overview of rayleigh-taylor instability*, Physica D (Amsterdam) **12** (1984), no. 3.
- [52] J.O. Shin, S.B. Dalziel, and P.F. Linden, *Gravity currents produced by lock exchange*, J. Fluid. Mech. **521** (2004), 1–34.
- [53] J.E. Simpson, *Gravity currents in the environment and the laboratory*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [54] J.E. Simpson and R.E. Britter, *The dynamics of the head of a gravity currents advancing over a horizontal surface*, J. Fluid. Mech. **94** (1979), 477–495.
- [55] W.D. Smyth, G.P. Klaassen, and W.R. Peltier, *Finite amplitude holmboe waves*, Geophys. Astrophys. Fluid dyn. **10** (1988), 53.
- [56] W.D. Smyth and J.N. Moum, *Length scales of turbulence in stably stratified mixing layers*, Phys. Fluids **12** (2000), 1327–42.
- [57] A. Sommerfeld, *Ein beitrug zur hydrodynamischen erklaerung der turbulenten fluessigkeitsbewegungen*, Proc. 4th Internat. Congress of Mathematicians **3** (1908), 116–124.
- [58] E.J. Strang and H.J.S. Fernando, *Entrainment and mixing in stratified shear flows*, J. Fluid. Mech. **428** (2001), 349–386.
- [59] G.I. Taylor, *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their plane*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **201** (1950), 192.
- [60] ———, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube*, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **219** (1953), 186–203.
- [61] ———, *Diffusion and mass transport in tubes*, Proc. Roy. Soc., Ser. B **67** (1954), 857–869.
- [62] ———, *Dispersion of matter in turbulent flow through a pipe*, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **223** (1954), 446–468.
- [63] S.A. Thorpe, *A method of producing a shear flow in a stratified fluid*, J. Fluid. Mech. **32** (1968), 693–704.
- [64] ———, *Experiments on the stability of stratified shear flows*, Radio Sci. **4** (1969), 1327–1331.
- [65] ———, *Experiments on the stability of stratified shear flows : immiscible fluids*, J. Fluid. Mech. **39** (1969), 25.
- [66] ———, *Experiments on the instability of stratified shear flows : miscible fluids*, J. Fluid. Mech. **46** (1971), 299–319.

- [67] ———, *Experiments on instability and turbulence in a stratified shear flow*, J. Fluid. Mech. **61** (1973), 731–751.
- [68] ———, *Laboratory observations of secondary structures in kelvin-helmholtz billows and consequences for ocean mixing*, Geophys. Astrophys. Fluid dyn. **34** (1985), 175–199.
- [69] ———, *Transitional phenomena and the development of turbulence in stratified fluids : a review*, J. Geophys. Res. **92C** (1987), 5231–48.
- [70] F. Viana, R. Pardo, R. Yáñez, J.L. Trallero, and D.D. Joseph, *Universal correlation for the rise velocity of long gas bubbles in round pipes*, J. Fluid Mech. **494** (2003), 379–398.
- [71] R.C. Weast and M.J. Astle, *Crc handbook of chemistry and physics*, 63 ed., CRC Press, 1982.
- [72] M.E. Weber, A. Alarie, and M.E. Ryan, *Velocities of extended bubbles in inclined tubes*, Chem. Eng. Sci. **41** (1986), 235–40.
- [73] R. A. Wooding, *Instability of a viscous liquid of variable density in a vertical hele-shaw cell*, J. Fluid. Mech. **7** (1959), 501.
- [74] ———, *Growth of fingers at an unstable diffusing interface in a porous medium or hele-shaw cell*, J. Fluid. Mech. **39** (1969), 477.
- [75] J. D Woods, *Wave-induced shear instability in the summer thermocline*, J. Fluid. Mech. **32** (1968), 791–800.
- [76] D.L. Youngs, *Numerical simulation of turbulent mixing by raileigh-taylor instability*, Physica 12D (1984), 32–44.
- [77] ———, *Modeling turbulent mixing by rayleigh-taylor instability*, Physica D37 (1989), 370–287.
- [78] ———, *Rayleigh-taylor instability : numerical simulation and experiment*, Plasma Physics and controlled fusion **34** (1989), 2071–76.
- [79] ———, *Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by rayleigh-taylor instability*, Phys. Fluids **A3** (1991), 1312–19.
- [80] E.E. Zukoski, *Influence of viscosity, surface tension and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes*, J. Fluid. Mech. **25** (1966), 821.
- [81] E.E. Zukoski, *A review of flows driven by natural convection in adiabatic shafts*, NIST report NIST-GCR-95-679 (1995), and references therein.





## Résumé

Ce travail expérimental analyse le mélange de deux fluides miscibles associé à un écoulement induit par gravité dans la géométrie confinée d'un tube incliné. L'étude de la vitesse du front en fonction des paramètres de contrôle (contraste de densité entre les fluides  $\Delta\rho \ll 1$ , viscosité des fluides  $\nu$ , diamètre du tube  $d$  et angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale) a permis d'identifier 3 régimes d'écoulement en fonction de  $\theta$  : près de l'horizontale, un régime de contre-écoulement visqueux sans mélange ; pour les  $\theta$  intermédiaires, un régime inertiel avec un faible mélange transverse sans effet sur la vitesse du front liée alors à  $\Delta\rho$ , et, enfin, près de la verticale, un régime de mélange plus intense contrôlant tout l'écoulement. Dans ce dernier, l'étalement longitudinal de la zone de mélange est alors macroscopiquement diffusif. Les nombres sans dimension pertinents pour la vitesse du front et le coefficient de diffusion, et les lois d'échelles qui les lient ont été dégagés.

## Abstract

The present experimental work studies mixing between fluids of different density by buoyancy induced flow in the confined geometry of a tilted tube. The front velocity variations as a function of the control parameters (density contrast  $\Delta\rho \ll 1$  between the fluids, viscosity  $\nu$ , tube diameter  $d$  and tilt angle  $\theta$  from vertical) has allowed to identify 3 different flow regimes as a function of  $\theta$  : near horizontal, a viscous counterflow without mixing ; for intermediate angles, an inertial regime with a weak transverse mixing without effect on the front velocity, then determined by  $\Delta\rho$ , and, finally, near vertical, a more efficient mixing regime controlling the full flow volume. In this one, the longitudinal spreading of the mixing zone is macroscopically diffusive. The relevant dimensionless numbers for the front velocity and the diffusion coefficient, and the corresponding scaling laws have been determined.