Analyse spectrale à haute résolution de signaux irrégulièrement échantillonnés : *application à l'Astrophysique*

Sébastien Bourguignon

2002 – 2005

sous la direction de Hervé Carfantan

Équipe Signal, Image et Instrumentation

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse et de Tarbes

Observatoire Midi-Pyrénées

UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE

Plan de l'exposé

1. Présentation du problème
2. Approche par pénalisation
3. Modélisation Bernoulli-Gaussienne
4. Application à des données réelles
5. Conclusions et perspectives

Motivations

- Analyse de séries temporelles
  - astrophysique : courbes de lumière, de vitesse radiale ...

- Recherche de périodicités
  - étoiles variables : plusieurs modes d'oscillation
  - étude de systèmes multiples : une (plusieurs?) périodes

$\Rightarrow$ estimation de raies spectrales

Limites de la couverture temporelle

- Contraintes observationnelles $\Rightarrow$ échantillonnage incomplet
  - alternance jour/nuit, saisons...

    absence périodique de données : *trous*
  - mesures non régulières

    échantillonnage irrégulier

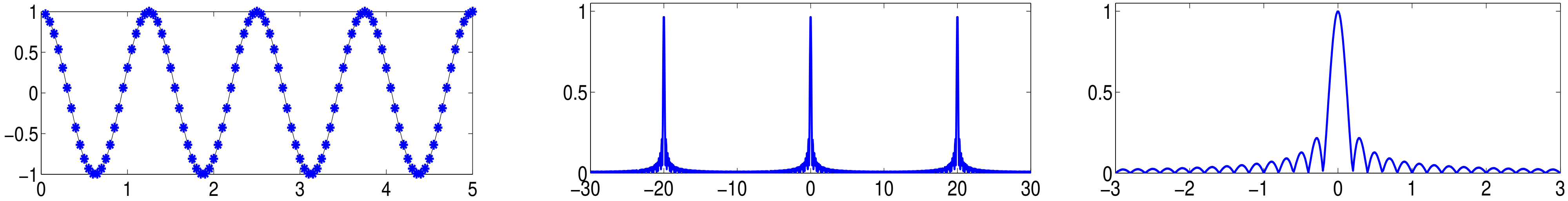
- Spectre de Fourier

$$y_e(t) = y(t) \times \underbrace{\sum_n \delta(t - t_n)}_{w(t)} \quad \xrightarrow{\text{T.F.}} \quad Y_e(f) = Y(f) \star \underbrace{\sum_n e^{-j2\pi f t_n}}_{W(f)}$$

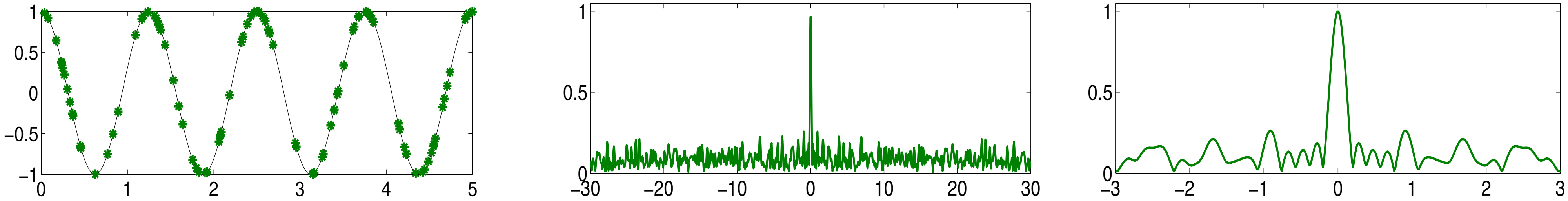
échantillonnage irrégulier $\quad \Rightarrow \quad W(f)$??

Échantillonnage et fenêtre spectrale

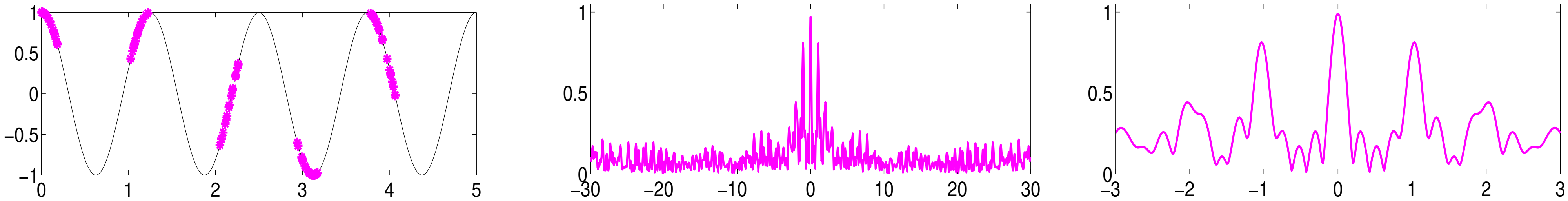
Échant. régulier — Fenêtre spectrale



Échant. irrégulier — Fenêtre spectrale



Échant. irrégulier + trous — Fenêtre spectrale



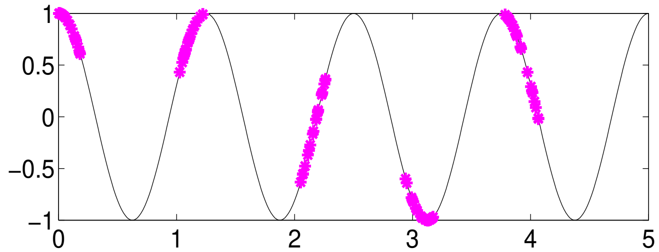
Temps (j) — Fréquence (j^{-1}) — Fréquence (j^{-1})

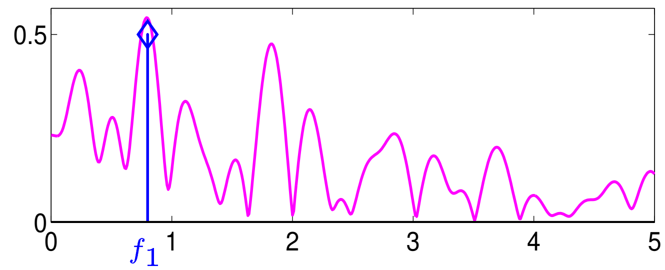
Que faire?

Modèle paramétrique : $y(t_n) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2\pi\nu_k t_n) + b_k \sin(2\pi\nu_k t_n) + \epsilon_n$

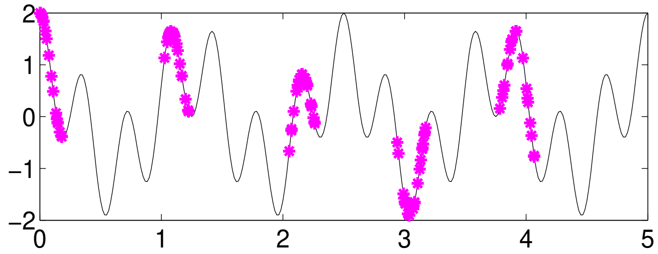
❏ $K = 1$:
- régulier $\rightarrow$ périodogramme
- irrégulier $\rightarrow$ Lomb-Scargle, DCDFT

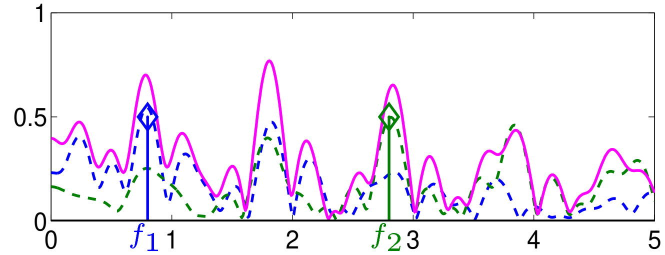
} Maximum de Vraisemblance (ϵ_n gaussien)





❏ $K > 1 \Rightarrow$ **maxima locaux** de $\mathcal{L}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\nu}_K, \boldsymbol{a}_K, \boldsymbol{b}_K)$ + choix de K





- techniques itératives : CLEAN mais...

Que faire?

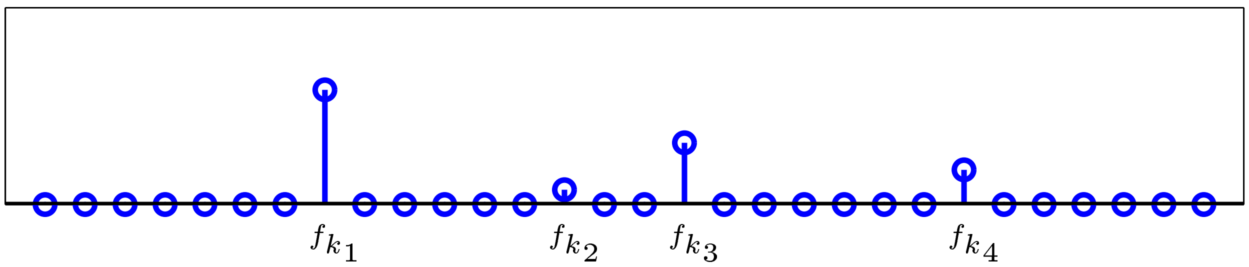
Approche non paramétrique [Sacchi *et al.*, 1998] : $f_k = \frac{k}{P} f_{\max},\ _{k=0\ldots P}$

$$
\begin{aligned}
y(t_n) &= \sum_{k=0}^{P} a_k \cos(2\pi f_k t_n) + b_k \sin(2\pi f_k t_n) + \epsilon_n \\
\Leftrightarrow \quad y(t_n) &= \sum_{k=-P}^{P} x_k \, e^{j2\pi f_k t_n} + \epsilon_n, \qquad x_{-k} = {x_k}^*
\end{aligned}
$$

- choix de $f_{\max}$? $\rightarrow$ physique *a priori*
- linéarité $\leftrightarrow$ # inconnues élevé

$\Rightarrow$ **régularisation** : *a priori* de parcimonie ($x_k = 0$ presque partout)

$x_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$



Formulation bayésienne

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{W} = \{e^{j2\pi f_k t_n}\}_{k=-P\ldots P, n=1\ldots N}$$

- Loi sur les perturbations : $\epsilon_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

  $\Rightarrow$ vraisemblance $\mathcal{L}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}) = p_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{y} - \mathbf{W}\boldsymbol{x}) \propto \exp -\dfrac{||\boldsymbol{y} - \mathbf{W}\mathbf{x}||^2}{2\sigma_\epsilon^2}$

- Loi *a priori* : $p(\boldsymbol{x}) \rightarrow$ parcimonie
  - loi de type Laplace: $p(x_k) \propto e^{-|x_k|/\sigma_x}$

    $\rightarrow$ déconvolution impulsionnelle [Alliney & Ruzinsky, 1994]

    $\rightarrow$ représentations parcimonieuses [Chen *et al.*, 1999 ; Fuchs, 2004]
  - modélisation Bernoulli-Gaussienne

    $\rightarrow$ déconvolution impulsionnelle [Kormylo & Mendel, 1981]

    $\rightarrow$ analyse spectrale [Dublanchet, 1996]

Règle de Bayes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{loi } \textit{a posteriori} : p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}) \times p(\boldsymbol{x})}$

2. Approche par pénalisation

Approche par pénalisation

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{MAP}} = \arg\min J(\boldsymbol{x}),\; J(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{W}\boldsymbol{x}\right\|^2 + \lambda R(\boldsymbol{x})}$$

[Sacchi *et al.*, 1998], [Ciuciu *et al.*, 2001]

- $R(\boldsymbol{x}) \to$ parcimonie :

  $p(x_k) \propto \exp -\frac{|x_k|}{\sigma_x} \Rightarrow R(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_k |x_k|$: J non différentiable

- λ : compromis fidélité aux données / information *a priori*

  Bayes : $\lambda = \sigma_\epsilon^2/\sigma_x$

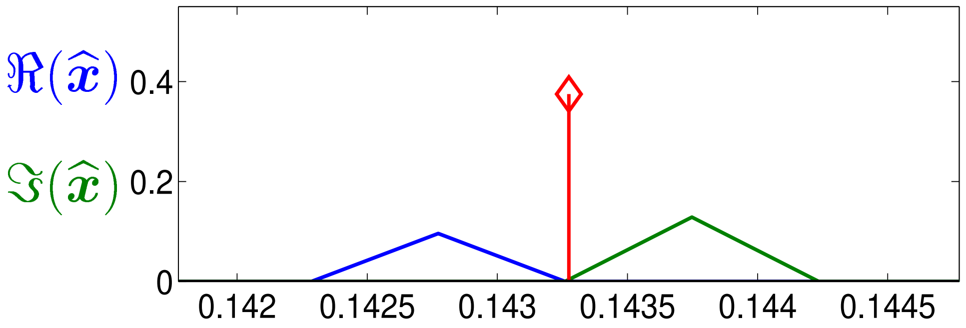
- Contribution $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pénalisation } \ell^1 \text{ pour } x_k \in \mathbb{C} \\ \bullet \text{ algorithmes d'optimisation} \end{array} \right.$

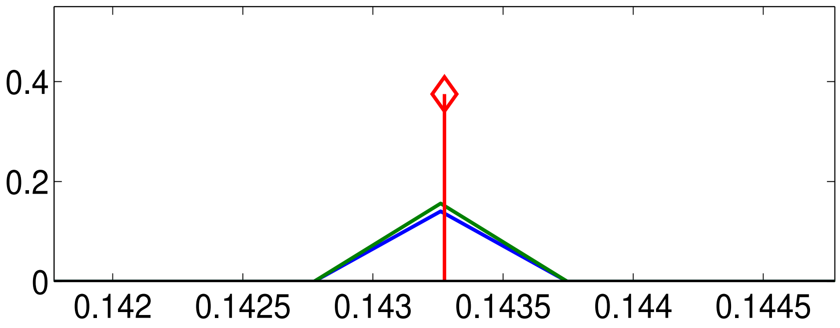
Pénalisation ℓ^1

- Habituel : $x_k \in \mathbb{R} \Rightarrow |x_k| = x_k^+ - x_k^-, \begin{cases} x_k^+ &= \max(x_k, 0) \\ x_k^- &= \max(-x_k, 0) \end{cases}$

  $\Rightarrow$ programmation quadratique sous contrainte

- Ici : $x_k \in \mathbb{C}$ et $|x_k| \neq |\Re(x_k)| + |\Im(x_k)|$





☹ Pénalisation ℓ^1 sur $\Re, \Im$ ☺ Pénalisation ℓ^1 dans $\mathbb{C}$

- optimisation ?? $\begin{cases} \bullet \text{ IRLS} \\ \bullet \text{ Gauss-Seidel} \end{cases}$

Optimisation ℓ^1 : IRLS (1/2)

❑ IRLS (*Iterative Reweighted Least Squares*) [Byrd & Payne, 1979] :

$$R(\boldsymbol{x}) = \sum \phi(x_k) : \begin{cases} \boldsymbol{x} = \left(\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} + \lambda \mathbf{Q}_{\boldsymbol{x}}{}^{-1}\right)^{-1} \mathbf{W}^\dagger \boldsymbol{y} & (1) \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{Q}_{\boldsymbol{x}} \mathbf{W} \left(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{W} \mathbf{Q}_{\boldsymbol{x}} \mathbf{W}^\dagger\right)^{-1} \boldsymbol{y} & (2) \end{cases}, \mathbf{Q}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{diag}\left\{\frac{x_k}{\phi'(x_k)}\right\}_k$$

Itération t : i) mise à jour de $\mathbf{Q}^{(t)}$ à $\boldsymbol{x}^{(t)}$ fixé

ii) calcul de $\boldsymbol{x}^{(t+1)}$ à $\mathbf{Q}^{(t)}$ fixé

- Pénalisation ℓ^1 : $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{diag}\{|x_k|\}_k$ et $x_k^{(t)} = 0 \Rightarrow x_k^{(t+1)} = 0$

[Figueiredo, 2003]

$\Rightarrow$ 2 étapes en fonction de $\mathbf{N}_{-\mathcal{I}}^{(\mathbf{t})} = \mathrm{Card}\ \{x_k^{(t)} \neq 0, {}_{k=-P \ldots P}\}$

$N_{-\mathcal{I}}^{(t)} > N$: forme (2) : inversion $N \times N$

$N_{-\mathcal{I}}^{(t)} <= N$: forme (1) avec $\boldsymbol{x}^{(t)} \rightarrow \boldsymbol{x}_{-\mathcal{I}}^{(t)}$: inversion $N_{-\mathcal{I}}^{(t)} \times N_{-\mathcal{I}}^{(t)}$

Optimisation ℓ^1 : IRLS (2/2)

- Pas de preuve de convergence
- Test complémentaire : CNS pour $\widehat{\boldsymbol{x}} = \arg\min J(\boldsymbol{x})$

  $\rightarrow \widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{2P+2}$: [Alliney & Ruzinsky, 1994]

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^{2P+2} \text{ minimise } J \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad \forall k \text{ tq. } |\widehat{x}_k| = 0 : \quad |r_k| <= \lambda, \\ \\ (ii) \quad \forall k \text{ tq. } |\widehat{x}_k| \neq 0 : \quad r_k + \lambda \dfrac{\widehat{x}_k}{|\widehat{x}_k|} = 0 \end{cases}$$

$$\text{où } \boldsymbol{r} = \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{W}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y})$$

Optimisation ℓ^1 : Gauss-Seidel

❑ Gauss-Seidel [Alliney & Ruzinsky, 1994]:

$$\text{Itération } t : \forall k, \; \mathring{x}_k = \arg\min_{x_k} \|\boldsymbol{y} - \mathbf{W}\boldsymbol{x}\|^2 + \lambda |x_k|$$

- minimisation 1D explicite:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{i)} & \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{y} - \sum_{\ell \neq k} \boldsymbol{w}_k^\dagger x_k \\ \text{ii)} & \text{- si } |\boldsymbol{w}_k^\dagger \boldsymbol{e}_k| < \lambda : \; \mathring{x}_k = 0, \\ & \text{- si } |\boldsymbol{w}_k^\dagger \boldsymbol{e}_k| > \lambda : \; \arg \mathring{x}_k = \arg \boldsymbol{w}_k^\dagger \boldsymbol{e}_k \text{ et } |\mathring{x}_k| = \dfrac{1}{N}\left(|\boldsymbol{w}_k^\dagger \boldsymbol{e}_k| - \lambda\right) \end{array}}$$

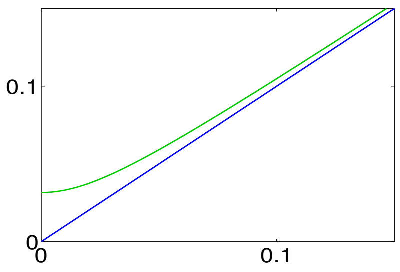
- coût d'une itération : 2 produits $\mathbf{W}\boldsymbol{u}$
- convergence assurée
- sur-relaxation : $x_k^{(t+1)} = \omega \, \mathring{x}_k + (1-\omega) x_k^{(t)}, \;\; \omega \sim 1.5 \Rightarrow$ accélération
- pénalisations $\ell^2\ell^1 \Rightarrow \mathring{x}_k$ également explicite

Optimisation $\ell^2\ell^1$

- Approximation $\ell^2\ell^1$ [Ciuciu *et al.*, 2001] :

  - $\sqrt{s^2 + |x_k|^2} \simeq |x_k|$

    $\Rightarrow R(\boldsymbol{x}) = \sum_k \sqrt{s^2 + |x_k|^2} \simeq \|\boldsymbol{x}\|_1$



  - Critère **différentiable strictement convexe** $\Rightarrow$ méthodes de gradient

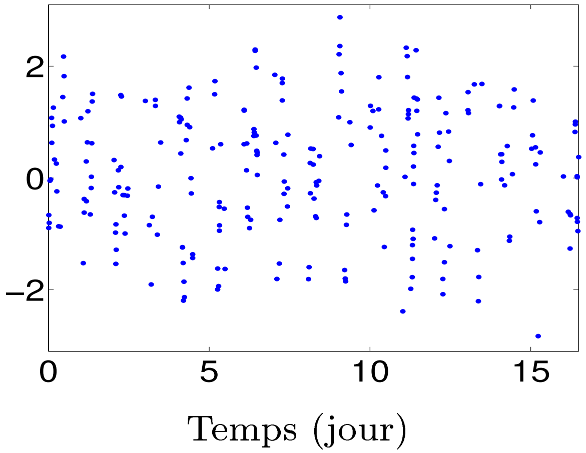
    $\rightarrow$ Échantillonnage régulier : $\mathbf{W} \sim$ T.F.D. $\Rightarrow$ calculs par FFT

    $\rightarrow$ Échantillonnage irrégulier : $\mathbf{W} \neq$ T.F.D.
    mais $\mathbf{W}^\dagger\mathbf{W}$ Toeplitz $\Rightarrow$ calculs par FFT

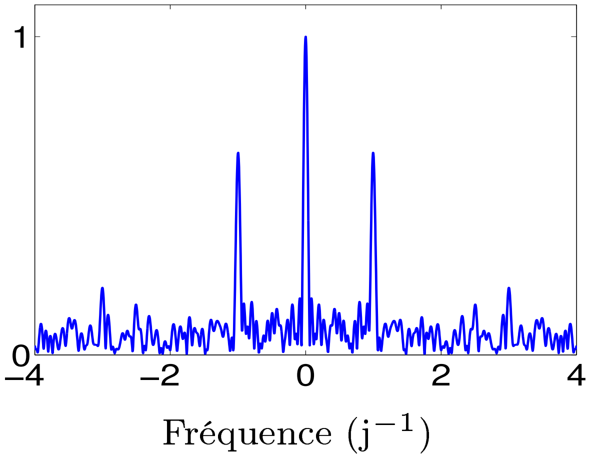
  - Gauss-Seidel

  - IRLS (convergence)

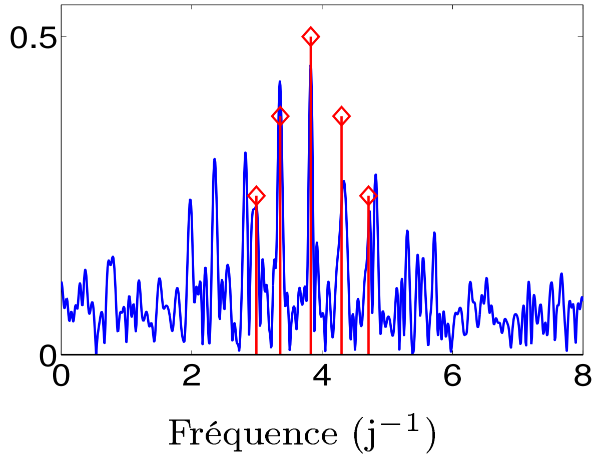
Résultats de simulations



Signal



Fenêtre spectrale



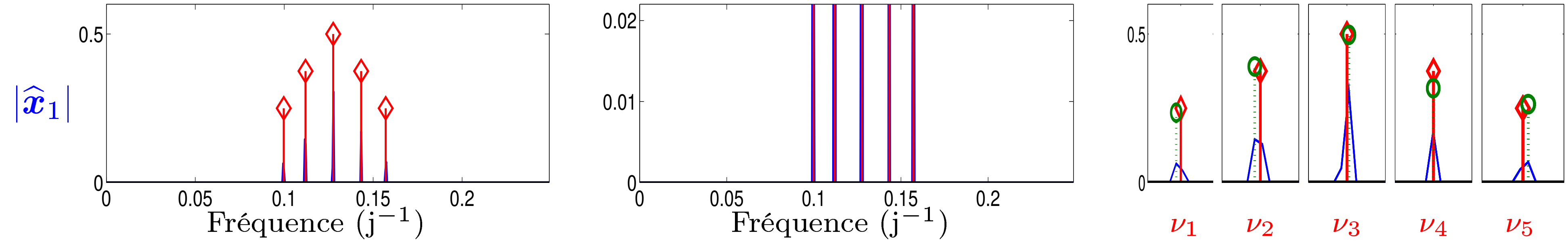
Spectre de Fourier

- 5 sinusoïdes entre 3 et 5 j^{-1}
- $N = 250$ points, échantillonnage irrégulier + trous journaliers
- SNR = 10 dB

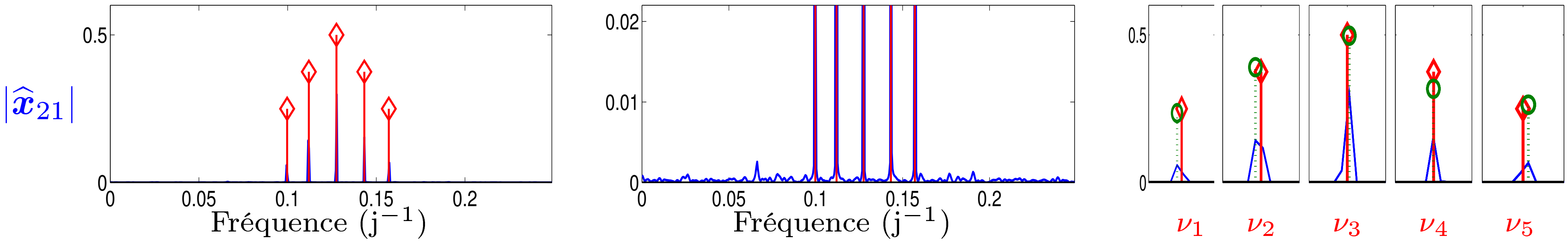
Résultats d'estimation

P=512 fréquences positives, $\lambda = 50$

- Pénalisation par la norme ℓ^1 : $\widehat{\boldsymbol{x}}_1 = \arg\min \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{W}\boldsymbol{x}\right\|^2 + \lambda \sum_k |x_k|$



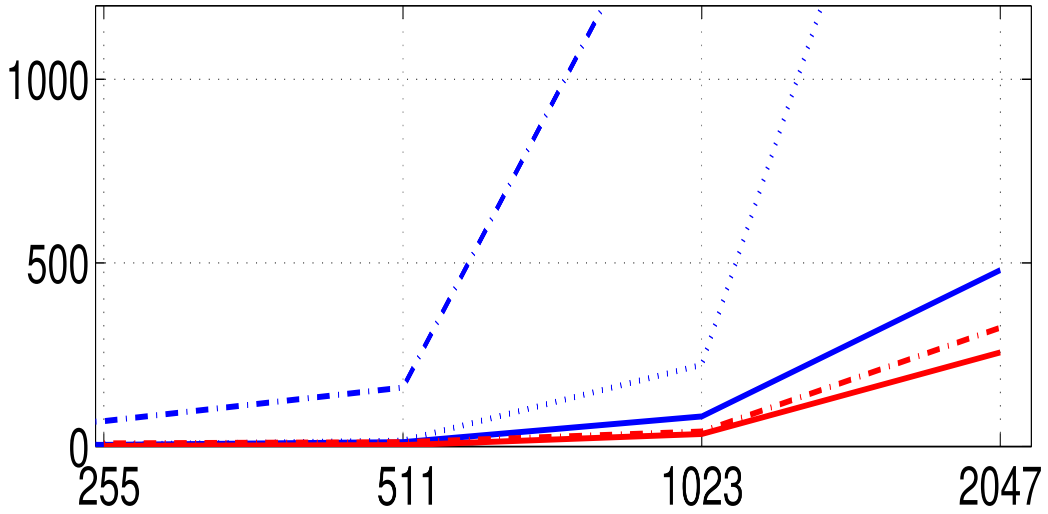
- Pénalisation $\ell^2\ell^1$: $\widehat{\boldsymbol{x}}_{21} = \arg\min \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{W}\boldsymbol{x}\right\|^2 + \lambda \sum_k \sqrt{s^2 + |x_k|^2}$



☺ Localisation fréquentielle

☹ perte d'amplitude mais réestimation *a posteriori*

Performances algorithmiques (1/2)



Temps cpu (s) en fonction de P

Pénalisation ℓ^1

— Gauss-Seidel

·— IRLS

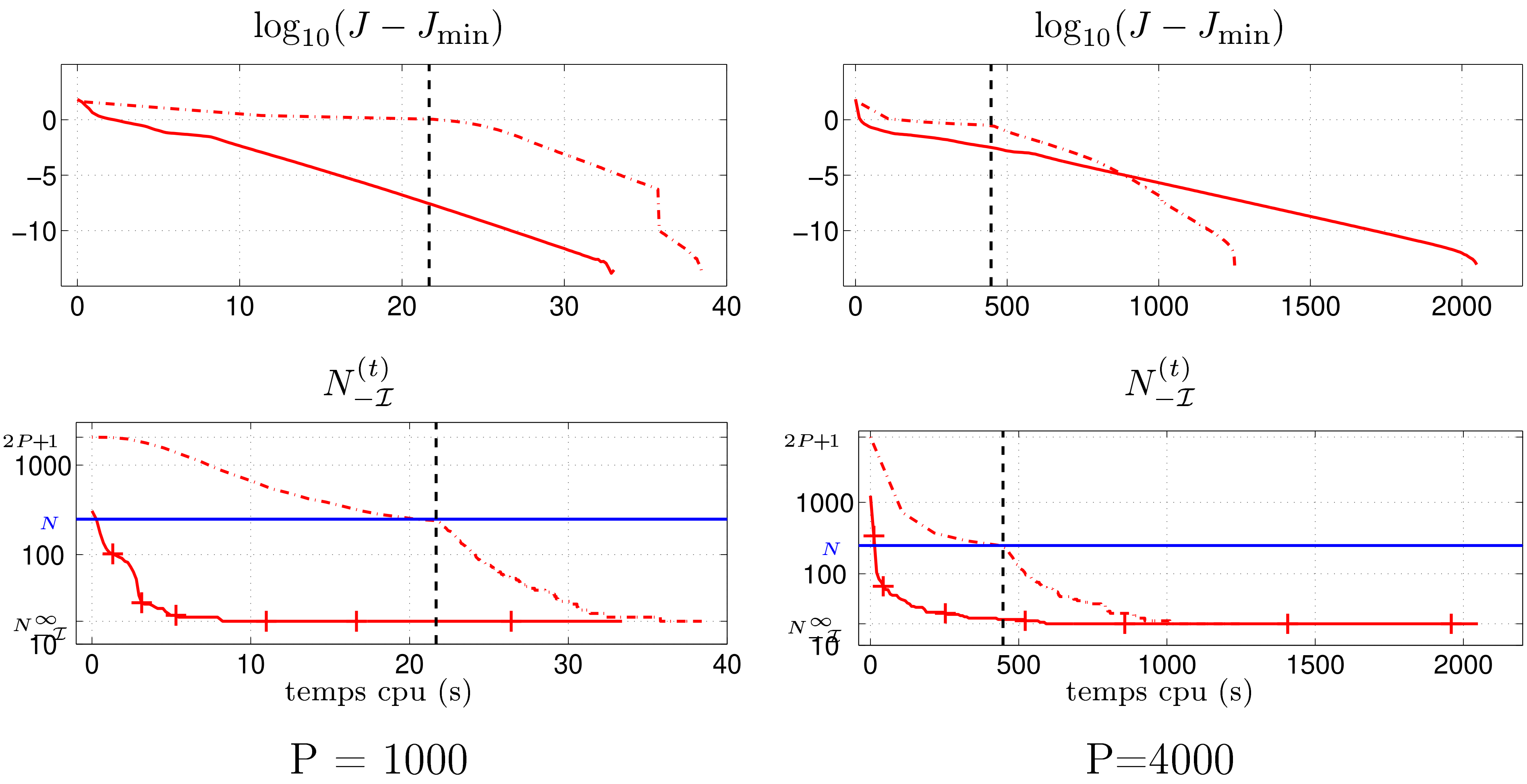
Pénalisation $\ell^2\ell^1$

— Gauss-Seidel

·— IRLS

··· Gradients Conjugués

Performances algorithmiques (2/2)



— Gauss-Seidel ℓ^1

·— IRLS ℓ^1

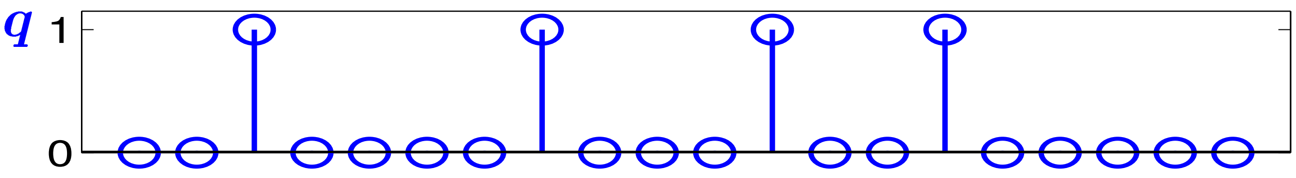
⇒ **propriétés complémentaires**

3. Modélisation Bernoulli-Gaussienne

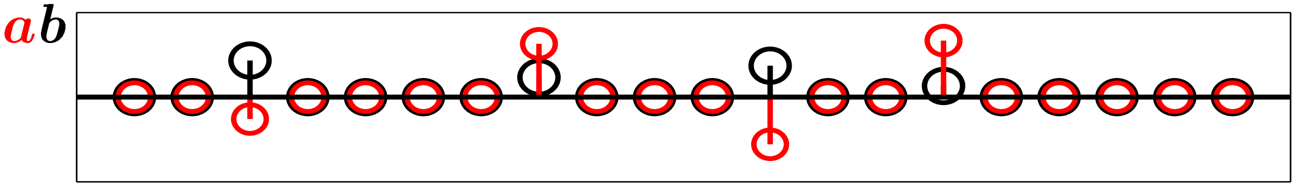
Modèle Bernoulli-Gaussien

$$y(t_n) = \sum_{k=0}^{P} a_k \cos(2\pi f_k t_n) + b_k \sin(2\pi f_k t_n) + \epsilon_n \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{H}\,\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\epsilon},\ \boldsymbol{s} = [a_0, b_0, \ldots, a_P, b_P]^{\mathrm{t}}$$

- Perturbations $\epsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$
- *Localisation* par $\boldsymbol{q} = [q_0, \ldots, q_P]^{\mathrm{t}}$: $\Pr(q_k = 1) = \lambda$, $\Pr(q_k = 0) = 1 - \lambda$



- Amplitudes $a_k | q_k,\ b_k | q_k \sim \mathcal{N}(0, q_k \sigma^2)$



$$\text{Modèle} = \begin{cases} \text{paramètres B-G } (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}) \\ \text{hyperparamètres } \boldsymbol{\theta} = (\lambda, \sigma^2, \sigma_\epsilon^2) \end{cases}$$

[Kormylo & Mendel, 1981; Dublanchet, 1996]

Estimation B-G

$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}) \times p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}|\boldsymbol{\theta})$ $\quad \Pr(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{q},\boldsymbol{\theta}) \times \Pr(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{\theta})$

- Maximum *a posteriori* $\to \Pr(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta})$ [Dublanchet 1996] :
  - ☺ algorithmes rapides (SMLR)
  - ☹ sous-optimal : 2^{P+1} configurations de $\boldsymbol{q}$; passage en non supervisé ?

- Moyenne *a posteriori* : $\boxed{\widehat{\boldsymbol{q}}_{\text{MP}} = \mathbb{E}[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y}]}$ probabilité de présence *a posteriori*

  - échantillonnage de $p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta})$: **algorithme de Gibbs**

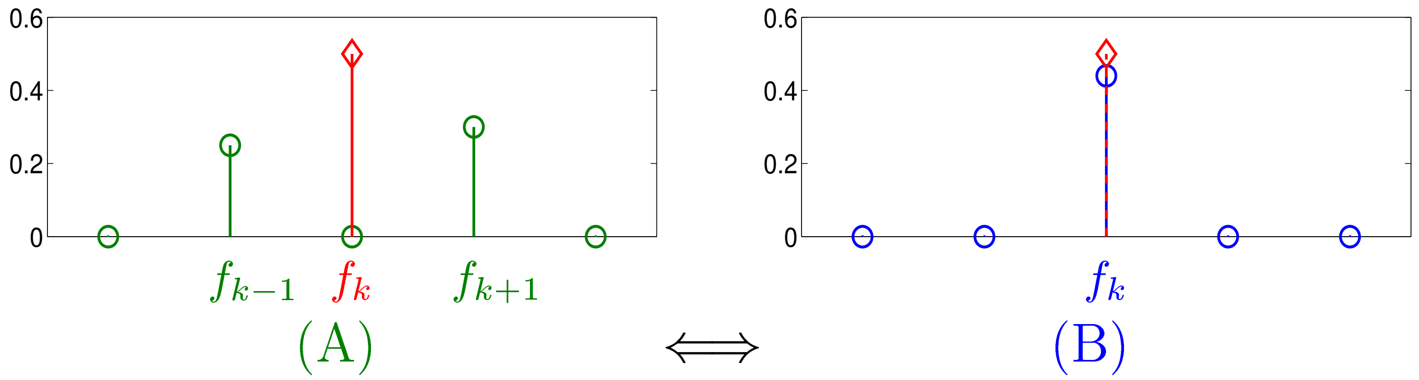
    itération t : $\forall k,\ \left(q_k^{(t)}, \boldsymbol{s}_k^{(t)}\right) \sim p(q_k, \boldsymbol{s}_k | q_{-k}, \boldsymbol{s}_{-k}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta})$

  - lois *a priori* $p(\boldsymbol{\theta}) \Rightarrow$ non supervisé : $p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) \propto p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta}) \times p(\boldsymbol{\theta})$

  $\Rightarrow$ moyennes et variances [Cheng *et al.*, 1996]

Apports algorithmiques

- Échantillonnage de Gibbs → blocage autour de modes locaux



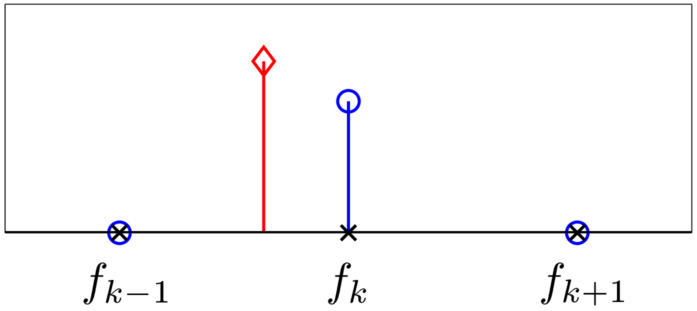
$$\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_{k-1} t_n} + e^{j2\pi f_{k+1} t_n}\right) \simeq e^{j2\pi f_k t_n}$$

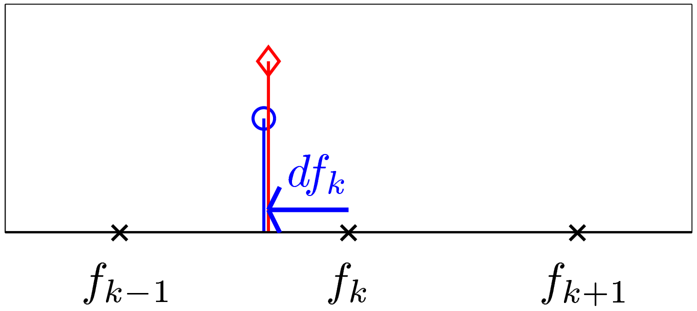
- mouvement (A) → (B) *peu probable* ⇒ convergence très longue
- analogie : blocage de l'algorithme SMLR

⇒ Échantillonnage par blocs de 3 : $(q_{k\to k+2}, \boldsymbol{s}_{k\to k+2} | reste)$

Extension : décalages fréquentiels

❏ Précision limitée ⇒ fréquences *hors grille* [Dublanchet, 1996] :





$$f_k = \frac{k}{P} f_{\max} \qquad \rightarrow \qquad f'_k = \frac{k}{P} f_{\max} - df_k$$

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\epsilon} \qquad\qquad \boldsymbol{y} = \mathbf{H}_{\boldsymbol{df}}\,\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\text{B-G} : (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\theta}) \qquad\qquad \text{B-G}_{\boldsymbol{df}} : (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{df}, \boldsymbol{\theta})$$

- df_k v.a. uniforme sur $\Delta f = [0, \frac{f_{\max}}{P}]$

$$\Rightarrow p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{df} \,|\, \boldsymbol{y}) \propto \underbrace{\mathcal{L}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{df})}_{p_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{y} - \mathbf{H}_{\boldsymbol{df}}\boldsymbol{s})} \; \underbrace{p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{df})}_{p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}) p(\boldsymbol{df})}$$

- MAP délicat [Dublanchet, 1996] ⇒ Échantillonnage de p($\boldsymbol{q}$,$\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{df}$,$\boldsymbol{\theta}$ $|\boldsymbol{y}$)

Algorithme hybride

- Échantillonnage de Gibbs $\Rightarrow$ lois $p(q_k, \boldsymbol{s}_k | \cdots)$, $p(\boldsymbol{\theta} | \cdots)$ inchangées

- Échantillonner $p(df_k \,|\, \boldsymbol{df}_{-k},\, \boldsymbol{q},\, \boldsymbol{s},\, \boldsymbol{y}) \propto \exp\left(-\frac{\left\|\boldsymbol{e}_k - \mathbf{H}_{df_k}\boldsymbol{s}_k\right\|^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \times \mathbf{1}_{\Delta f}(df_k)$?

$$\text{où } \mathbf{H}_{df_k} = \left[\cos 2\pi(\frac{k}{P}f_{\max} - df_k)t_n,\ \sin\pi(\frac{k}{P}f_{\max} - df_k)t_n\right]_{n=1\ldots N}$$

$\Rightarrow$ étape de Hastings-Metropolis : $\varphi \sim \Phi$ et $df_k = \varphi$ avec la proba. ρ_{HM}

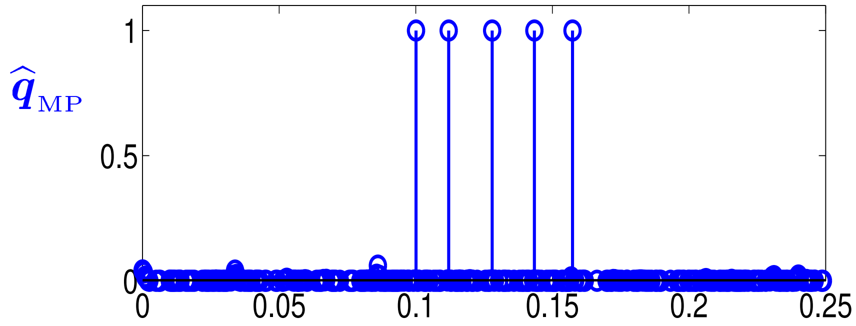
[Andrieu & Doucet, 1999] : Φ_1 uniforme, Φ_2 marche aléatoire

- Estimation :
  1. moyenne *a posteriori* $\widehat{\boldsymbol{q}}_{\text{MP}} = \mathbb{E}[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y}] \simeq \frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{q}^{(t)}$
  2. décalages $(\boldsymbol{df}|\widehat{\boldsymbol{q}}_{\text{MP}})$

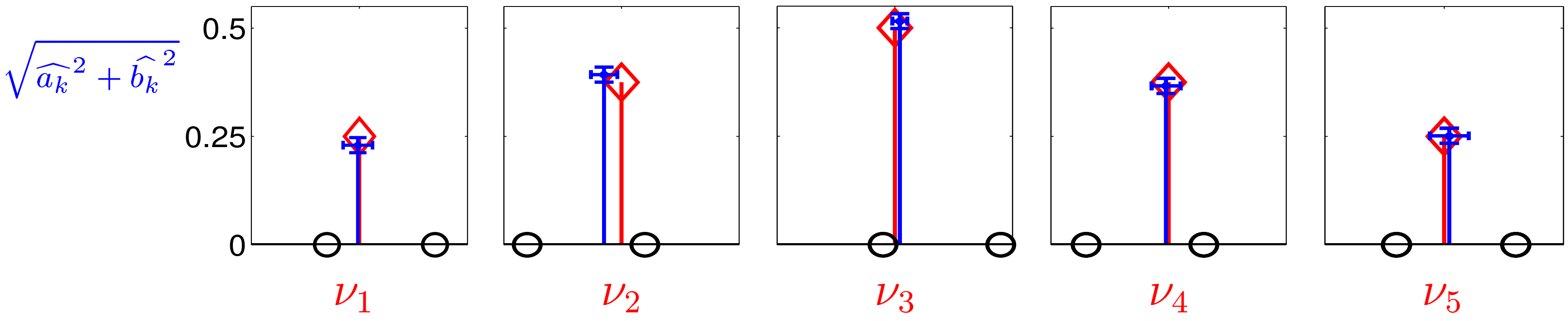
     $\boldsymbol{df}^{(t)} \rightarrow$ **moyennes** et **variances**
  3. amplitudes $(\boldsymbol{s}|\widehat{\boldsymbol{q}}_{\text{MP}}, \widehat{\boldsymbol{df}})$: **moyennes** et **variances** analytiques

Simulations

- Non supervisé : $p(\lambda)$ uniforme, $p(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$, $p(\sigma_\epsilon^2) \propto \sigma_\epsilon^{-2}$
- 7500 itérations $\Rightarrow$ 15 min



$\widehat{\boldsymbol{q}}_{\text{MP}} = 1$ pour les 5 localisations correctes
$\widehat{\boldsymbol{q}}_{\text{MP}} < 0.1$ ailleurs



$\rightarrow \quad P = 500 \; : \frac{f_{\max}}{P} = 5.10^{-4}\text{j}^{-1} \leftrightarrow \Delta\nu_{\max} = 7.10^{-5}\text{j}^{-1}, \; \overline{\Delta\nu} = 3.10^{-5}\text{j}^{-1}$

$\rightarrow \quad P = 100 \Rightarrow$ mêmes résultats, temps $= 5$ min

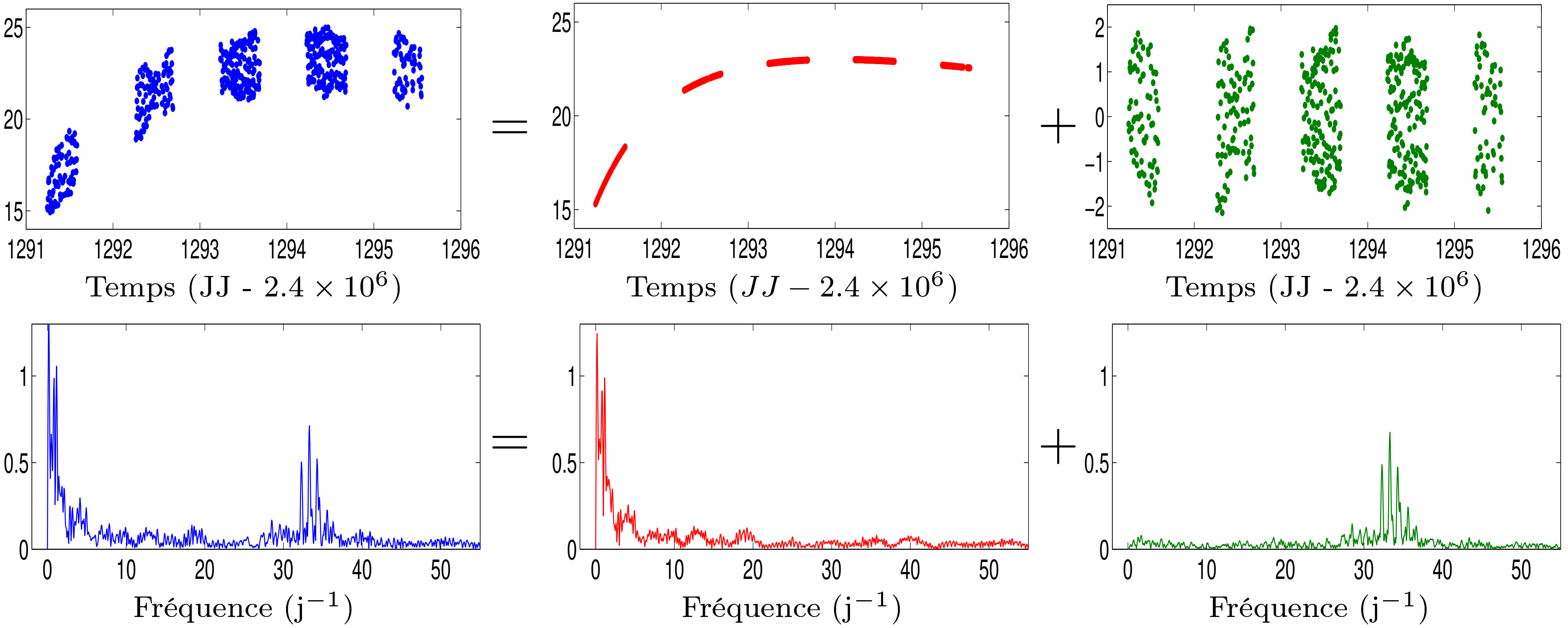
4. Application à des données réelles

Données de HD 104237 (1999)

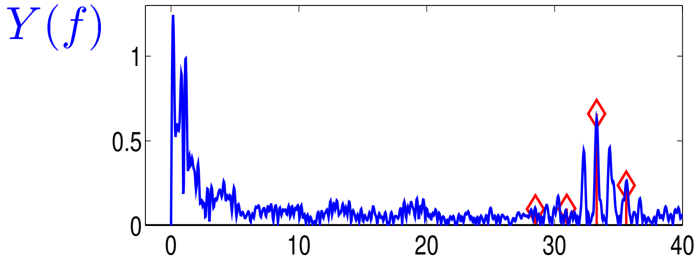
• Données brutes : - spectroscopie : mesure de spectre + réduction ⇒ 1 point

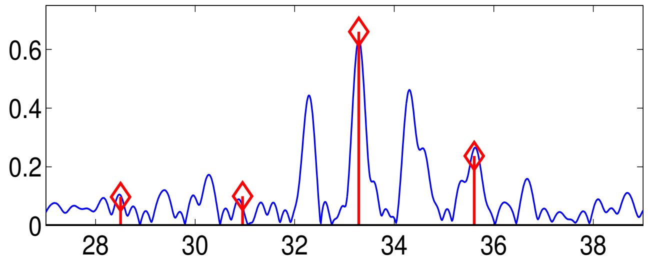
[Böhm *et al.*, 2004] - variable pulsante + système multiple

• Fusion avec données 2000 ⇒ élimination de l'orbite : données corrigées



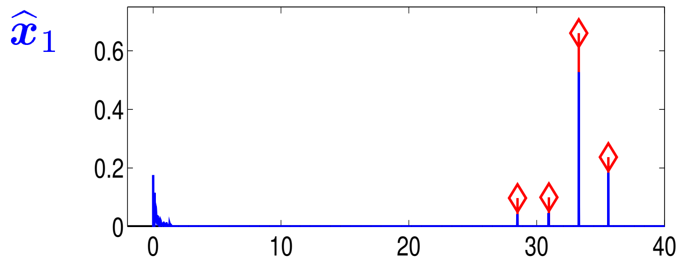
1. Simulations

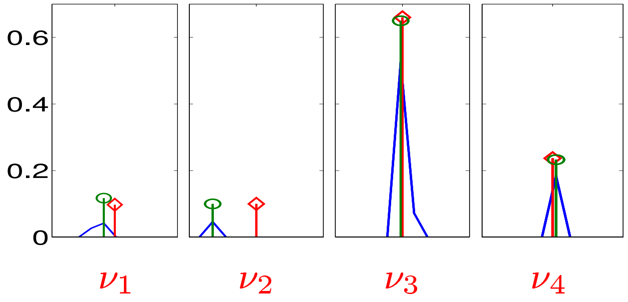




- → échantillonnage réel
- → 4 sinus + bruit blanc
- → basses fréquences

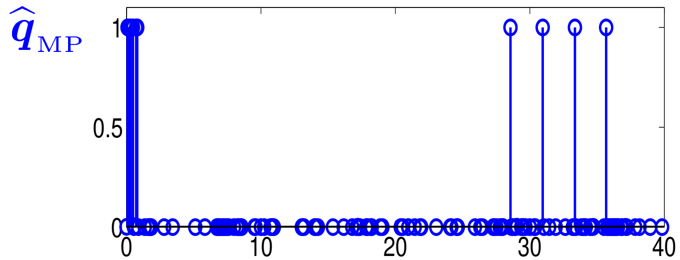
❏ Estimation par pénalisation ℓ^1

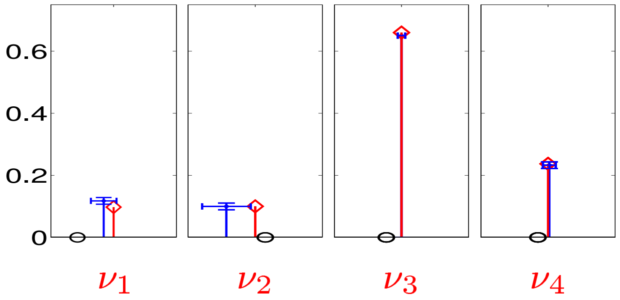




- $P = 5000 \Rightarrow \frac{f_{\max}}{P} = 8\ 10^{-3}\ \mathrm{j}^{-1}$
- $\Delta\nu_{\max} = 2.6\ 10^{-2}\ \mathrm{j}^{-1}$
- $\overline{\Delta\nu} = 9\ 10^{-3}\ \mathrm{j}^{-1}$
- $\lambda = 25$ « visuellement »

❏ Estimation par modélisation B-G$_{\boldsymbol{df}}$

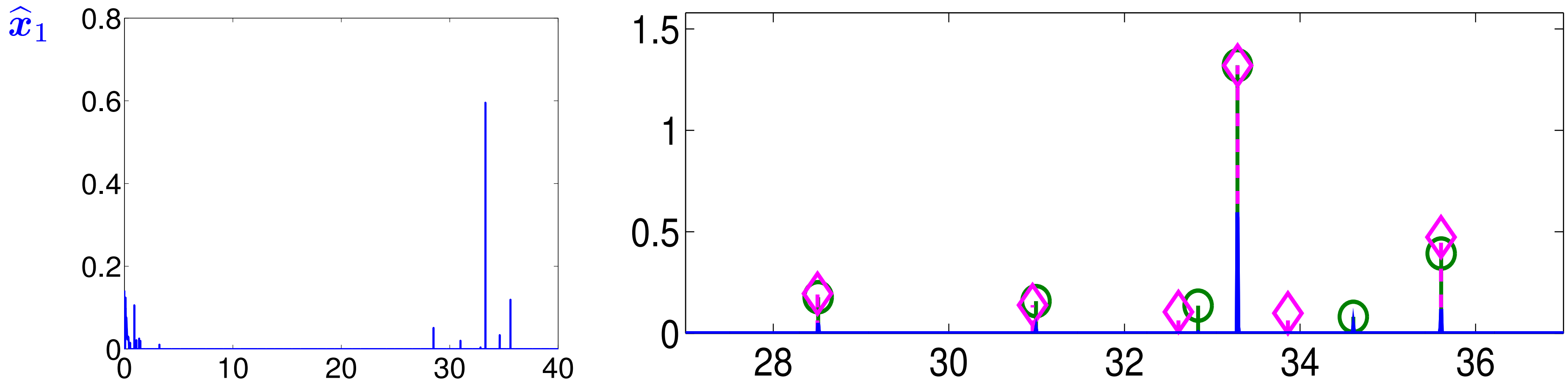




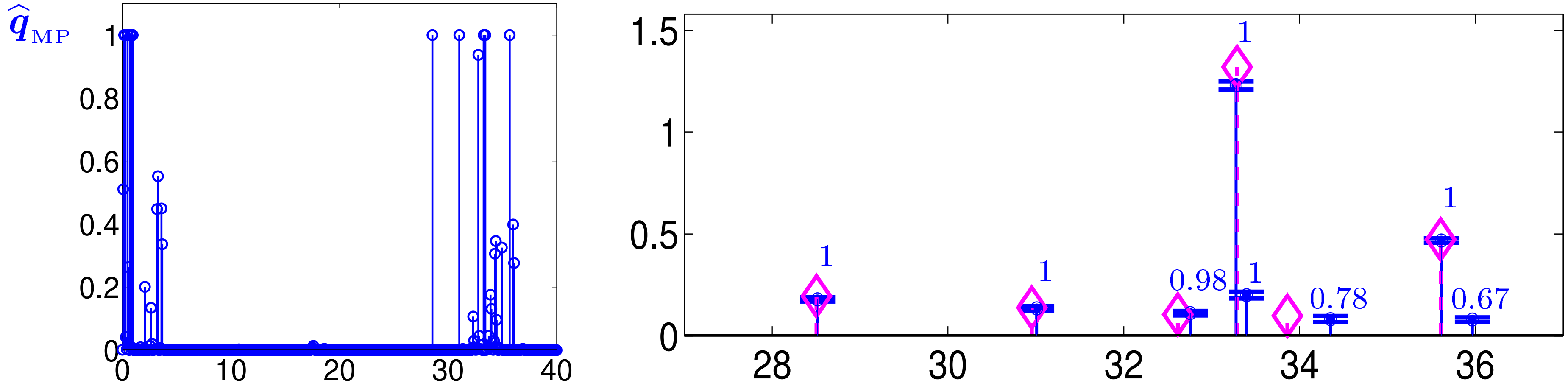
- $P = 500$
- $\Delta\nu_{\max} = 1.8\ 10^{-2}\ \mathrm{j}^{-1}$
- $\overline{\Delta\nu} = 6\ 10^{-3}\ \mathrm{j}^{-1}$
- entièrement non supervisé

2. Données réelles « brutes »

- Pénalisation ℓ^1 ($\diamond$: [Böhm *et al.*, 2004] sur données corrigées)



- Modélisation B-G$_{df}$



Conclusions et perspectives

Conclusions

- **Échantillonnage irrégulier**
  - problème plus délicat
  - algorithmes pas/peu dépendants de la structure
- **Pénalisation ℓ^1**
  - *a priori* satisfaisant pour des variables complexes
  - algorithmes efficaces (Gauss-Seidel, IRLS)
  - ☹ sélection de λ
- **Modélisation B-G**
  - approche entièrement non supervisée
  - algorithmes d'échantillonnage efficaces
  - décalages $\Rightarrow$ précision $\uparrow$
  - probabilités et incertitudes
- **Données réelles**
  - robustesse des estimateurs
  - attention aux prétraitements!

Perspectives

Améliorations

- ℓ^1 : fusion des algorithmes Gauss-Seidel et IRLS
- Gradients Conjugués préconditionnés pour pénalisation $\ell^2\ell^1$
- test d'arrêt des algorithmes MCMC
- mise en œuvre...

Pénalisation ℓ^1

- propriétés théoriques dans $\mathbb{C}$?
- représentations parcimonieuses : *Basis Pursuit* pour des variables complexes
- modèles non stationnaires (glissement des fréquences)

Modèle Bernoulli-Gaussien

- décomposition harmonique pour signaux périodiques
- déconvolution impulsionnelle d'images : ***df*** $\rightarrow$ précision subpixelaire