Finance Mathématique et Probabilités Numériques

Bruno Bouchard

Document de synthèse présenté pour obtenir[1]

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

par

Bruno BOUCHARD-DENIZE
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Université Pierre et Marie Curie
75252 Paris Cedex 05

Finance Mathématique
et
Probabilités Numériques

[1]Document rédigé en mars 2006.

Introduction

Ce document est une synthèse de travaux menés depuis 1998 en finance mathématique et probabilité numérique.

Le chapitre I présente différents résultats obtenus en finance théorique. Il peut être scindé en deux parties.

La première concerne les marchés financiers en temps discret avec frictions. On y étudie trois extensions des modèles usuels : évaluation d'options américaines, modèles à rendements non-linéaires, arbitrage en information incomplète. S'agissant de questions qui n'avaient jusqu'alors quasiment pas été abordées par la littérature, nous sommes amenés à proposer de nouvelles modélisations.

Dans la seconde partie, on résume une série de résultats portant sur les problèmes d'existence et de dualité en gestion optimale de portefeuille en temps continu. Il s'agit essentiellement de s'affranchir de trois hypothèses habituellement retenues : absence de friction, fonctions d'utilité régulières, utilité ne dépendant que de la consommation ou de la richesse terminale. L'étude de ces questions nous a également amené à travailler sur les relations de polarité que l'on peut établir sur L^0 et qui apparaissent naturellement en finance, et plus particulièrement dans les problèmes duaux en gestion de portefeuille.

Le chapitre II rassemble des travaux portant sur la résolution (explicite ou numérique) de problèmes de cibles stochastiques par des techniques de type solutions de viscosité.

Les deux premières sections portent sur les cibles stochastiques et leurs liens avec les équations paraboliques. Le premier modèle étudié est une extension des problèmes de sur-réplication usuels et s'avère suffisamment général pour rendre compte de nombreuses situations en matière de gestion de risques (en assurance, gestion de provisions,...). Le second correspond à un modèle financier markovien dans lequel on veut évaluer une option à barrière sous contraintes de portefeuille. La dynamique est moins générale que dans le modèle précédent mais la présence de la barrière rend le problème techniquement plus difficile.

La troisième section porte sur la couverture d'option en présence de coûts de transaction. On utilise également des techniques de viscosité mais la caractérisation finale est explicite. On obtient de nouveaux résultats sur les marchés avec coûts "non-effectifs", i.e. qui sont nuls entre certains actifs.

Le chapitre III porte sur la discrétisation et l'approximation numérique d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). Là encore la motivation initiale vient de la finance. Dans un premier temps, on étudie une famille de représentations alternatives permettant le calcul rapide d'un grand nombre d'espérances conditionnelles. Celle-ci est ensuite utilisée pour construire un schéma numérique permettant la résolution des EDSR dans un modèle markovien et le calcul de prix d'options américaines. On s'intéresse ensuite aux EDSR à sauts et on propose un schéma de discrétisation adapté à la résolution de systèmes d'équations paraboliques couplées qui apparaissent notamment dans les modèles avec risque de défauts. Enfin, on améliore significativement les résultats de convergence déjà établis pour les EDSR réfléchies.

Le chapitre IV traite de la “randomisation” (ou canadisation) de l'horizon de temps en contrôle stochastique. La motivation initiale est l'algorithme proposé par Carr pour l'évaluation des options américaines. On propose un cadre très général dans lequel on montre que la convergence a bien lieu. Ceci conduit à la mise en oeuvre d'algorithmes rapides de résolution numérique pour certains problèmes de contrôle stochastique.

Le dernier chapitre présente les principaux axes de recherche que je compte suivre dans les années à venir.

Ces différents chapitres sont basés sur les articles suivant :

Articles publiés ou à paraître

[1] Bouchard B. et N. Touzi (2000). Explicit solution of the multivariate super-replication problem under transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, 10 3, 685-708.
[2] Bouchard B., Y. Kabanov et N. Touzi (2001). Option pricing by large risk aversion utility under transaction costs. *Decisions in Economics and Finance*, 24, 127-136.
[3] Bouchard B. (2002). Stochastic Target with Mixed diffusion processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 101, 273-302
[4] Bouchard B. (2002). Utility Maximization on the Real Line under Proportional Transaction Costs. *Finance and Stochastics*, 6 (4), 495-516.
[5] Bouchard B. et L. Mazliak (2003). A multidimensional bipolar theorem in $L^0(\mathbb{R}^d; \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Stochastic Processes and their Applications*, 107 (2), 213-231.
[6] Bouchard B., N. Touzi et A. Zeghal (2004). Dual Formulation of the Utility Maximization Problem : the case of Nonsmooth Utility. *Annals of Applied Probability*, 14 (2), 678-717.
[7] Bouchard B. (2004). No-arbitrage in discrete-time markets with proportional transaction costs and general information structure. A paraître dans *Finance and Stochastics*.
[8] Bouchard B. et H. Pham (2004). Wealth-Path Dependent Utility Maximization in Incomplete Markets. *Finance and Stochastics*, 8 (4), 579-603.
[9] Bouchard B., I. Ekeland, et N. Touzi (2004). On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations. *Finance and Stochastics*, 8 (1), 45-71.
[10] Bouchard B. et N. Touzi (2004). Discrete-Time Approximation and Monte-Carlo Simulation of Backward Stochastic Differential Equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 111 (2), 175-206.
[11] Bouchard B. (2005). A version of the $\mathcal{G}$-conditionial bipolar theorem in $L^0(\mathbb{R}^d; \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Journal of Theoretical Probability*, 18 (2), 439 - 467 .
[12] Bouchard B. et H. Pham (2005). Optimal consumption in discrete time financial models with industrial investment opportunities and non-linear returns. *Annals of Applied Probability*, 15 (4), 2393-2421.
[13] Bouchard B. et E. Temam (2005). On the Hedging of American Options in Discrete Time Markets with Proportional Transaction Costs. *Electronic Journal of Probability*, 10, 746-760.
[14] Bouchard B., N. El Karoui et N. Touzi (2005). Maturity randomization for stochastic control problems. *The Annals of Applied Probability*, 15 (4), 2575-2605.

Articles soumis

[15] Bouchard B. et I. Bentahar (2005). Explicit characterization of the super-replication strategy in financial markets with partial transaction costs. Document de travail du LPMA.
[16] Bouchard B. et R. Elie (2005). Discrete time approximation of decoupled Forward-Backward SDE with jumps. Document de travail du LPMA.
[17] Bouchard B. et I. Bentahar (2006). Barrier option hedging under constraints. Document de travail du LPMA.
[18] Bouchard B. et J.-F. Chassagneux (2006). Discrete time approximation for continuously and discretely reflected BSDE's. Document de travail du LPMA.

Autres documents de travail

[19] Bouchard B. (1999). Option Pricing via Utility Maximization in the presence of Transaction Costs : an Asymptotic Analysis. Document de travail du CEREMADE.
[20] Bouchard B. (2000). A Note on the Utility Based Option Pricing with Proportional Transaction Costs under Large Risk Aversion. Document de travail du CREST.
[21] Bouchard B. (2000). Exponential hedging and pricing under proportional transaction costs. Document de travail du CREST.

Thèse de doctorat

Bouchard B. *Contrôle Stochastique Appliqué à la Finance*. Thèse de doctorat de l'Université Paris IX Dauphine, 2000.

Notations générales : Afin d'alléger au maximum la rédaction, nous listons ici un certain nombres de notations qui seront utilisées tout au long de ce document. Tout élément $x = (x^i)_{i\le d}$ de $\mathbb{R}^d$ sera identifié à un vecteur colonne de norme euclydienne $|x|$. On note $\mathbb{R}^d_+ := [0,\infty)^d$, $\mathbb{M}^d$ l'ensemble des matrices $d\times d$ et $\mathbb{M}^d_+$ lorsque les composantes sont positives. La matrice $\mathrm{diag}\,[x]$ est l'élément de $\mathbb{M}^d$ dont la i-ème composante diagonale est x^i. La trace de $M\in\mathbb{M}^d$ est noté $\mathrm{Tr}[M]$, $|M|$ désigne sa norme euclydienne comme élément de $\mathbb{R}^{d^2}$ et M' sa transposée. Pour une fonction régulière $\varphi : (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d \mapsto \varphi(t,x)$, on note $D\varphi$, ou $\nabla_x\varphi$, et $D^2\varphi$, ou $\nabla^2_x\varphi$, sa jacobienne et sa hessienne par rapport à x. Pour un sous-ensemble $E\subset\mathbb{R}^d$, on note $\mathrm{cl}(E)$ ou $\bar{E}$ sa fermeture, $\mathrm{int}(E)$ son intérieur et $\mathrm{ri}(E)$ son intérieur relatif. On travaillera toujours sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\le T}$ satisfaisant les conditions habituelles avec $\mathcal{F}_0$ triviale. On désignera toujours par W un mouvement brownien d-dimensionnel. Pour $\tilde{\mathbb{P}}\sim\mathbb{P}$, un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{M}^d$ et $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, on note $L^p(E;\Omega,\mathcal{G},\tilde{\mathbb{P}})$ l'espace des variables aléatoires $\mathcal{G}$-mesurables, admettant un moment d'ordre $p\ge 0$ pour $\tilde{\mathbb{P}}$, à valeurs dans E. La norme associée est notée $\|\cdot\|_{L^p(\tilde{\mathbb{P}})}$. Le cas $p=\infty$ correspond aux variables essentiellement bornées. Si $\mathbb{G}$ est une filtration, on note de manière similaire $L^p(E;\Omega\times[0,T],\mathbb{G},\tilde{\mathbb{P}})$ pour désigner les processus ξ adaptés à $\mathbb{G}$ tels que $\|\xi\|_{\mathbb{H}^p(\tilde{\mathbb{P}})} := \|(\int_0^T|\xi_t|^2dt)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\tilde{\mathbb{P}})} < \infty$. On omettra l'un des arguments s'il est clairement identifié par le contexte. Toutes les inégalités entre variables aléatoires sont à prendre au sens $\mathbb{P}$-p.s.

Chapitre I

Arbitrage, couverture et gestion optimale de portefeuille : quelques apports à la théorie

1 Modèles avec coûts de transaction proportionnels en temps discret

Depuis les travaux pionniers de Jouini et Kallal, [JoKa95] et [JoKa99], les modèles de marchés financiers avec coûts de transactions propotionnels ont été largement étudiés dans la littérature. En particulier, les travaux récents [KaSt01b], [KaRaS02], [Sc04] et [KaRaS03] ont permis de clarifier la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage et ses implications dans les modèles en temps discret, voir également [Ra02], [Pe01] et [Gr05].

La modélisation abstraite proposée par [KaRaS02] est la suivante. Tout d'abord, la présence de coûts de transaction impose de représenter la richesse comme un processus d dimensionnel, chaque composante reflétant la position de l'agent dans l'un des actifs financiers. Afin d'éliminer la question du choix d'un numéraire, on s'intéresse aux quantités (par opposition aux montants) d'actifs détenues. Les échanges sont représentés par un processus adapté ξ. A chaque date t, ξ_t^i est la quantité d'actifs i achetée en échange d'autres actifs. Etant données une dotation initiale $x \in \mathbb{R}^d$ et une stratégie ξ, le processus de portefeuille correspondant est

$$V_t^{x,\xi} \;\; := \;\; x + \sum_{s=0}^{t} \xi_s \;\; , \; t \in \mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, T\} \subset \mathbb{N} \; .$$

La contrainte d'autofinancement s'écrit de manière abstraite

$$\xi_t \in -K_t \qquad \mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T} \; ,$$

où $(K_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une suite de cônes aléatoires, $\mathbb{P}-$p.s. finiment engendrés et dont l'intérieur contient $\mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$. On notera $\mathcal{K}$ l'ensemble de ces suites.
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des processus adaptés ξ vérifiant cette condition, $A(x) := \{V^{x,\xi} \; : \; \xi \in \mathcal{A}\}$ et $A_t(x) := \{V_t \; : \; V \in A(x)\}$.

Exemple 1.1 *Si on suppose que le prix d'une unité d'actif j en unités d'actif i est π_t^{ij}, on peut écrire K comme*

$$K_t(\omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \exists a \in \mathbb{M}_+^d \ t.q. \ x^i + \sum_{j \neq i \leq d} a^{ji} - a^{ij}\pi_t^{ij}(\omega) \geq 0 \ \ \forall \ i \leq d \right\} .$$

Dire que $\xi_t \in -K_t$, signifie que l'on peut trouver une matrice de transfert $\eta_t = (\eta_t^{ij})_{i,j \leq d} \in L^0(\mathbb{M}_+^d; \mathcal{F}_t)$ telle que

$$\xi_t^i \leq \sum_{j \neq i \leq d} \eta_t^{ji} - \eta_t^{ij}\pi_t^{ij} \ , \quad i \leq d \ \ ,$$

i.e. le montant net transféré pour chaque actif est le résultat d'échanges simples η_t^{ij} entre chaque couple d'actifs, après éventuellement avoir consommé une partie des avoirs.

La principale question traitée dans les articles précédemment cités est celle de l'absence d'opportunité d'arbitrage et de la sur-réplication d'actifs contingents de type européen.

Dans les articles [7], [12] et [13], on s'intéresse à trois nouveaux problèmes :

1. Comment évaluer une option américaine ?

2. Peut-on étendre ces modèles à des investissements non-financiers générant des rendements non-linéaires ?

3. Que peut-on dire sur l'absence d'opportunité d'arbitrage si l'agent ne possède pas toute l'information sur les taux d'échange entre actifs ?

1.1 Sur-réplication d'options américaines

Une option européenne est représentée par une variable aléatoire $G \in L^0(\mathbb{R}^d; \mathcal{F})$, chaque composante G^i correspondant à une quantité d'actif i devant être livrée à échéance. Les travaux de [KaRaS02], [Sc04] et [KaRaS03] ont notamment permis de caractériser l'ensemble $\Gamma(G)$ des dotations initiales $x \in \mathbb{R}^d$ telles que $G \in A_T(x)$, i.e. qui permettent de couvrir l'option sans risque. Formellement et sous certaines conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage que l'on explicitera par la suite, on a

$$\Gamma(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbb{E}\left[Z_T'G - Z_0'x\right] \leq 0, \ \ \text{pour tout} \ \ Z \in \mathcal{Z}, \ (Z_T'G)^- \in L^1 \right\}$$

où $\mathcal{Z}$ est l'ensemble des martingales Z vérifiant

$$Z_t \ \in \ K_t^o \qquad \text{pour tout} \ \ t \in \mathbb{T} \ ,$$

et $K_t^o(\omega)$ désigne le cône polaire positif de $K_t(\omega)$, i.e.

$$K_t^o(\omega) \ \ := \ \ \left\{ z \in \mathbb{R}^d \ : \ z'y \geq 0 \ , \ \ \text{pour tout} \ y \in K_t(\omega) \right\} \ .$$

Similairement, une option américaine est modélisée par un processus $\vartheta \in L^0(\mathbb{R}^d; \mathbb{F})$, ϑ_t^i représentant la quantité d'actif i délivrée en cas d'exercice à la date t. Sur-répliquer ϑ signifie que le processus de portefeuille $V^{x,\xi}$ est tel que $V_t^{x,\xi} - \vartheta_t \in -K_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, i.e. qu'à une transaction près $V^{x,\xi}$ permet d'obtenir ϑ à n'importe quelle date avant la maturité. Par abus de notation, on note également $\Gamma(\vartheta)$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tels qu'un tel ξ existe.

Par analogie avec la formulation duale obtenue pour ces produits dans les marchés sans friction, on pourrait s'attendre à pouvoir identifier $\Gamma(\vartheta)$ avec

$$\Theta(\vartheta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \sup_{\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{T})} \mathbb{E}\left[Z'_\tau \vartheta_\tau - Z'_0 x \right] \leq 0 \ , \ \text{ pour tout } \ Z \in \mathcal{Z}, \ (Z'\vartheta)^- \in L^1(\mathbb{F}) \right\} ,$$

où $\mathcal{T}(\mathbb{T})$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\mathbb{T}$. On montre dans [13] que cette formulation n'est en générale par correcte. Ce phénomène avait déjà été observé par [ChJh01] dans des modèles d'arbres avec un seul actif risqué. On montre ensuite qu'une caractérisation duale peut être obtenue si à chaque mesure $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ on associe l'ensemble $\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{P}})$ des processus $Z \in L^1(\mathbb{R}^d_+; \mathbb{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ tels que

$$Z_t \in K^o_t \ \text{ et } \ \bar{Z}_t \ := \ \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{s=t}^{T} Z_s \mid \mathcal{F}_t \right] \in K^o_t \ \ \forall\, t \in \mathbb{T} \, .$$

Si l'on suppose que l'ensemble $A(0)$ est fermé en mesure (quand on l'indentifie à un sous-ensemble de $L^0(\mathbb{R}^{d \times (T+1)})$) et qu'il n'y pas d'arbitrage faible dans la terminologie de [KaSt01b]

$$\mathbf{NA}^w \ : \ A_T(0) \cap L^0(\mathbb{R}^d_+; \mathcal{F}) \ = \ \{0\} \ ,$$

on peut montrer par des arguments de séparation de type Hahn-Banach que $\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{P}}) \neq \emptyset$. On obtient ensuite un premier résultat qui caractérise l'ensemble des processus ϑ qui sont sur-réplicables à partir d'une dotation initiale nulle.

Théorème 1.2 *Si $A(0)$ est fermé en mesure et $\mathbf{NA}^w$ est satisfaite, alors on a équivalence entre*
(i) $0 \in \Gamma(\vartheta)$
(ii) $\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{t=0}^T \vartheta'_t Z_t\right] \leq 0$, $\forall\, \tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ *et* $Z \in \mathcal{D}(\tilde{\mathbb{P}})$ *tels que* $(\vartheta' Z)^- \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{F}, \tilde{\mathbb{P}})$
(iii) $\exists\, \tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ *tel que* $\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{t=0}^T \vartheta'_t Z_t\right] \leq 0$ *pour tout* $Z \in \mathcal{D}(\tilde{\mathbb{P}})$ *vérifiant* $(\vartheta' Z)^- \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{F}, \tilde{\mathbb{P}})$.

Comme corollaire immédiat, on obtient la formulation duale

$$\Gamma(\vartheta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \vartheta'_t Z_t \right] \leq \bar{Z}'_0 x \ \ \forall\, Z \in \mathcal{D}(\mathbb{P}), \ (Z'\vartheta)^- \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{F}, \mathbb{P}) \right\} .$$

On montre ensuite que cette représentation généralise celles proposées par [ChJh01]. La première consiste à interpréter les éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ comme des mesures sur un arbre (ici de dimension infinie) vérifiant un certain nombre de contraintes. L'autre revient essentiellement à montrer que l'égalité $\Gamma(\vartheta) = \Theta(\vartheta)$ est vraie à condition de remplacer dans la définition de $\Theta(\vartheta)$ l'ensemble des temps d'arrêt par un ensemble de temps d'arrêt "aléatoires".

On montre ensuite que $A(0)$ est fermé en mesure sous la condition suivante :

$$\xi \in \mathcal{A} \text{ et } \sum_{t \in \mathbb{T}} \xi_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi_t \in N_t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}$$

où $N_t = K_t \cap (-K_t)$ désigne l'ensemble des échanges réversibles à la date t, i.e. les "directions" dans lesquelles les coûts de transaction sont nuls. Cette hypothèse est vérifiée sous la condition de non-arbitrage stricte introduite par [KaRaS02]

$$\mathbf{NA}^s : \ A_t(0) \cap L^0(K_t; \mathcal{F}_t) \quad \subset \quad L^0(N_t; \mathcal{F}_t) \ \text{ pour tout } \ t \in \mathbb{T} \ ,$$

lorsque $N_t = \{0\}$ pour tout t, i.e. lorsqu'il n'existe pas de couple d'actifs pouvant être échangés librement. C'est également le cas sous la condition de non-arbitrage robuste introduite par [Sc04] et ré-écrite sous la forme suivante par [KaRaS03]

$$\mathbf{NA}^r : \ \mathbf{NA}^w \text{ est vérifiée par un élément } \tilde{K} \in \mathcal{K} \text{ qui domine } K,$$

au sens où $K_t \setminus K_t^0 \ \subset \ \mathrm{ri}(\tilde{K}_t) \quad \forall\, t \in \mathbb{T}$, voir également [Pe01].

La preuve de ce dernier résultat repose essentiellement sur des arguments initialement proposés par [KaRaS02] et [KaRaS03] que l'on adapte à notre contexte.

1.2 Gestion optimale et rendements non-linéaires

Dans [12], on considère une extension du modèle avec coûts de transaction proportionnels étudié dans la sous-section 1.1 dans laquelle l'agent financier peut également investir dans des actifs productifs, ou actifs industriels, dont le rendement n'est pas nécessairement linéaire, voir [KaKi03] et [DiPi94] pour des modèles similaires.

Marché et stratégies d'investissement

On définit $(K_t)_{t\in\mathbb{T}}$ comme dans la partie introductive de la section 1 mais on écrit maintenant $d = d_F + d_I$ où d_F et d_I sont deux entiers. Le premier est le nombre d'actifs financiers, le second le nombre d'actifs industriels. Par la suite, à tout élément $x \in \mathbb{R}^d$ on associera le vecteur $x^F \in \mathbb{R}^{d_F}$ (resp. $x^I \in \mathbb{R}^{d_I}$) formé par ses d_F premières (resp. d_I dernières) composantes. Ainsi, une stratégie ξ se décompose en $\xi^F + \xi^I$ où chaque composante de ξ^F (resp. ξ^I) représente une quantité d'actifs financiers (resp. industriels). Comme on ne peut pas vendre à découvert un actif industriel, on dira dans cette section qu'une stratégie $\xi \in L^0(\mathbb{R}^d; \mathbb{F})$ est admissible pour une dotation initiale $x \in \mathbb{R}^d$, et on notera $\xi \in \mathcal{A}(x)$, si

$$x^I + I(\xi)_t \in \mathbb{R}^{d_I}_+ \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T} \ , \qquad \text{avec} \qquad I(\xi)_t = \sum_{s=0}^{t} \xi^I_s \ .$$

On suppose ensuite que les actifs industriels rapportent un rendement par période $[t, t+1]$ (aléatoire) qui dépend de la quantité d'actifs industriels détenus en début de période : $R_{t+1}(x^I + I(\xi)_t)$. Le processus $R = (R_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{R}$ des processus à valeurs dans l'espace des applications de $\mathbb{R}^{d_I}_+$ dans $\mathbb{R}^{d_F} \times \{0_{\mathbb{R}^{d_I}}\}$, où $0_{\mathbb{R}^{d_I}}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{d_I}$, tels que $R_t(x)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^{d_I}_+$. On peut noter que le rendement n'est pas connu en début de période et que les gains générés par l'activité de production correspondent à des actifs financiers (des devises par exemple).

L'ensemble des valeurs terminales de portefeuille, après consommation éventuelle, s'écrit donc

$$A_T(x) \quad := \quad \left\{ x + \sum_{t=0}^{T} \xi_t + \sum_{t=0}^{T-1} R_{t+1}(x^I + I(\xi)_t) \ , \ \xi \in \mathcal{A}(x) \right\} \ .$$

Contrairement aux modèles usuels en finance, la dynanique de la richesse et A_T ne sont pas linéaires en la dotation initiale et l'ensemble des stratégies admissibles en dépend également.

Problème de consommation optimale

Un processus de consommation $c \in L^0(\mathbb{R}^d_+;\mathbb{F})$ est admissible pour la dotation initiale $x \in \mathbb{R}^d$ s'il peut être financé par une stratégie d'investissement : $\left(\sum_{t=0}^T c_t, 0_{\mathbb{R}^{d_I}}\right) \in A_T(x)$. On note $\mathcal{C}_T(x)$ l'ensemble formé par de tels processus.

Dans [12], on étudie le problème de consommation optimale suivant. On se donne une suite $(U_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de fonctions (d'utilité) concaves de $\mathbb{R}^d_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant chacune $\mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}(U_t)) = \mathbb{R}^d_+$ et la propriété de croissance au sens de $\mathbb{R}^d$: $U_t(x) \geq U_t(y)$ si $x - y \in \mathbb{R}^d_+$. On s'intéresse à la maximisation de l'utilité espérée de la consommation

$$u(x) \quad := \quad \sup_{c\in\mathcal{C}^U_T(x)} \mathbb{E}\left[\sum_{t\in\mathbb{T}} U_t(c_t)\right] \quad \text{où} \quad \mathcal{C}^U_T(x) := \left\{c \in \mathcal{C}_T(x) \;:\; (\sum_{t\in\mathbb{T}} U_t(c_t))^- \in L^1(\mathbb{P})\right\}\,.$$

Propriété de fermeture de l'ensemble des processus de consommation admissibles

Afin d'obtenir un résultat d'existence pour le problème de maximisation $u(x)$, il est nécessaire d'établir une propriété de fermeture de l'ensemble $\mathcal{C}_T(x)$. Si l'on considérait un marché sans friction et sans actifs industriels, cette propriété serait une conséquence de l'hypothèse usuelle d'absence d'opportunité d'arbitrage faible qui s'écrit

$$\mathbf{NA}^w \;:\quad A_T(0) \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) \quad = \quad \{0\}\,,$$

voir la section précédente. Ici la difficulté est double. Tout d'abord les transactions sont soumises à des coûts de transaction et la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage faible n'est pas assez forte en générale. Ensuite, la dynamique du portefeuille n'est pas linéaire comme dans les modèles usuels de marché financier.

Dans [12], nous proposons d'imposer une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage robuste qui généralise celle définie dans [Sc04]. On suppose qu'il existe un couple $(\tilde{K}, \tilde{R}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{R}$ qui satisfait $\mathbf{NA}^w$ et tel que, pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$\underline{K}_t \setminus \underline{N}_t \;\subset\; \mathrm{ri}(\underline{\tilde{K}}_t) \quad , \quad \tilde{R}_t(0) \in \underline{K}_t \quad \text{et} \quad \tilde{R}_t(\alpha) - R_t(\alpha) \in \mathrm{ri}(\underline{K}_t) \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{d_I}_+ \setminus \{0\}\,.$$

Ici, $\underline{K}_t(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^{d_F} : (x, 0_{\mathbb{R}^{d_I}}) \in K_t(\omega)\}$ et $\underline{N}$ est défini similairement à partir de $N = K \cap (-K)$. Dans [Sc04], l'hypothèse de non-arbitrage robuste signifie qu'il existe un modèle dans lequel les coûts de transaction sont plus faibles, strictement dans les directions où ils ne sont pas déjà nuls, tel qu'il n'y a toujours pas d'arbitrage au sens de $\mathbf{NA}^w$ (avec $d_I = 0$). C'est le sens de la condition (i) ci-dessus qui porte sur les transactions entre actifs financiers. Comme diminuer les coûts de transaction revient en quelque sorte à accroître le rendement des investissements financiers, notre idée est d'autoriser également une légère augmentation du rendement des actifs industriels. C'est le sens de la condition (ii).

Pour obtenir le résultat de fermeture on a besoin de régularité et de concavité (au sens de $\underline{K}$) sur $\mathbb{R}^{d_I}_+$: pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $\mathbb{P}-$p.s.

(R1) $R_t(0) = 0$ et R_t est continue.

(R2) $\lambda R_t(\alpha) + (1-\lambda)R_t(\beta) - R_t(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in -\underline{K}_t$, $\forall$ $(\lambda, \alpha, \beta) \in [0,1] \times (L^0(\mathbb{R}_+^{d_I}))^2$.

(R3) Il existe $a_t \in L^0(\mathbb{R}^d)$ et $L \in \mathcal{R}$ tels que $\lambda L_t(\alpha) = L_t(\lambda\alpha)$ $\mathbb{P}-$p.s. et $R_t(\alpha) + a_t + L_t(\alpha) \in L^0(\mathbb{R}_+^d)$ pour tout $(\lambda, \alpha) \in L^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{d_I})$.

Sous ces conditions, on obtient le résultat escompté.

Théorème 1.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^{d_F} \times \mathbb{R}_+^{d_I}$, $A_T(x)$ et $\mathcal{C}_T(x)$ sont fermés en probabilité.*

Ce résultat nous permet en outre de fournir une caractérisation duale de ces deux ensembles. La démonstration est fortement inspirée par les techniques introduites dans [KaRaS02] et [KaRaS03]. Toutefois, la présence de la non-linéarité due au processus de rendement R complique significativement la preuve.

Existence pour le problème de consommation optimale

Afin d'obtenir un résultat d'existence, il est nécessaire d'imposer également des conditions sur la suite de fonctions d'utilité $(U_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Tout d'abord, il est bien connu qu'il faut des hypothèses de type Inada qui en dimension 1 s'écrivent $U'(0+) = \infty$ et $U'(\infty) = 0$. Dans notre cadre multivarié où U_t n'a pas de raison d'être régulière, nous ré-écrivons cette hypothèse sous la forme $\mathrm{int}(\mathbb{R}_+^{d_F}) \subset \mathrm{dom}(\tilde{U}_t)$ où $\tilde{U}_t$ est la tranformée de Fenchel associée à U : $\tilde{U}_t(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^d} U_t(x) - x'y$. On suppose en outre que pour tout $t \in \mathbb{T}$ et $\lambda \in (0,1)$, il existe $C_t^\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\tilde{U}_t(\lambda y) \le C_t^\lambda(1 + \tilde{U}_t(y)^+)$ pour tout $y \in \mathrm{dom}(\tilde{U}_t)$. Il s'agit d'une extension naturelle au cadre multivarié de la condition d'Elasticité Asymptotique Raisonnable de [KrSc99], les deux conditions étant équivalentes en dimension 1. C'est également une hypothèse plus faible que celle retenue par [DePhT02] qui traite également d'un problème d'optimisation d'utilité dans un cadre multivarié. Le résultat d'existence est le suivant.

Théorème 1.4 *S'il existe $x_0 \in int(K_0)$ tel que $u(x_0) < \infty$, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}^{d_F} \times \mathbb{R}_+^{d_I}$ tel que $\mathcal{C}_T^U(x) \neq \emptyset$, il existe $c^* \in \mathcal{C}_T^U(x)$ vérifiant $u(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t\in\mathbb{T}} U_t(c_t^*)\right]$.*

La preuve repose sur le résultat de fermeture déjà énoncé et sur une adaptation du schéma de preuve d'existence directe utilisé dans [KrSc03]. Cependant cette approche nécessite de montrer au préalable un résultat de dualité abstrait sur le problème d'optimisation dont la preuve est très spécifique au cadre univarié. Nous contournons cette difficulté en introduisant un problème de contrôle auxiliaire.

1.3 Absence d'arbitrage et information imparfaite

Dans [7], on étudie les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage $\mathbf{NA}^w$, $\mathbf{NA}^s$ et $\mathbf{NA}^r$ décrites dans la sous-section 1.1 dans un modèle dans lequel l'agent financier possède une information différente de celle générée par les processus de taux de change entre actifs. On suppose que la filtration de l'agent $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est quelconque et non plus nécessairement égale à $\mathbb{F}$ comme dans les modèles habituellement considérés. Dans l'Exemple 1.1, cela revient à ne plus supposer que la filtration de l'agent contient celle générée par le processus π. Une telle situation est typiquement celle d'un petit investisseur qui n'a pas un accès direct à l'information sur les prix. C'est aussi le cas lorsque les ordres sont exécutés avec un délai, et à un prix qui n'est pas nécessairement le même que celui observé au moment du passage de l'ordre, voir par exemple [ChGa03].

En l'absence de friction, la caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage en temps discret est facilement établie en suivant presque ligne par ligne la preuve de [KaSt01]. Dans [KaSt03], il est montré que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une mesure $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que la $(\mathbb{H},\mathbb{Q})$-projection optionnelle des prix est une $(\mathbb{H},\mathbb{Q})$-martingale. L'objectif de [7] est d'étendre ce résultat aux marchés avec coûts de transaction proportionnels.

Une modélisation alternative basée sur la notion d'ordre

Dans un premier temps, il est nécessaire de proposer une modélisation adaptée à ce contexte. En effet, l'approche présentée dans la partie introductive de cette section n'a plus de sens puisque dire que les processus de taux de change ne sont pas $\mathbb{H}$-adaptés revient à dire que le processus K n'est pas $\mathbb{H}$-adapté. Il n'est donc plus possible de modéliser la stratégie financière à travers les quantités nettes achetées ou vendues et il faut revenir à la notion d'ordres simples.

Etant donné un ensemble convexe fermé $\mathcal{O}$ de $\mathbb{M}^d$, on dit que η est *processus d'ordre simple* s'il appartient à $L^0(\mathcal{O};\mathbb{H})$. Typiquement η^{ij} représente un ordre d'achat de $|\eta^{ij}|$ unités d'actif j contre de l'actif i s'il est positif et un ordre de vente de $|\eta^{ij}|$ unités d'actif j contre de l'actif i s'il est négatif. L'impact sur le portefeuille (en unités physiques) d'un ordre est mesuré par un *processus de conversion* $F = (F_t)_t$, i.e. une suite d'applications aléatoires de $\mathbb{M}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}$-mesurable telle que, pour tout t, F_t est $\mathbb{P}-$p.s. continue et vérifie, $\mathbb{P}-$p.s., les propriétés d'homogénéité et de concavité suivantes

HF$_1$: $\lambda F_t(a) = F_t(\lambda a)$ pour tout $\lambda \geq 0$ et $a \in \mathbb{M}^d$.

HF$_2$: $F_t(a_1 + a_2) \geq F_t(a_1) + F_t(a_2)$ pour tout $a_1,\ a_2 \in \mathcal{O}$.

On dit qu'un processus ξ est un *processus d'échange* s'il résulte d'un processus d'ordre simple

$$\xi_t \in -K_t \quad := \quad \left\{F_t(\eta),\ \eta \in L^0(\mathcal{O};\mathcal{H}_t)\right\} \quad , \quad t \in \mathbb{T} \ .$$

On note simplement $\xi \in -K$. Le processus de portefeuille associé est V^ξ défini par $V_t^\xi = \sum_{s=0}^t \xi_s$ et on note $A_t(0) := \{V_t^\xi - r \ : \ \xi \in -K,\ r \in L^0(\mathbb{R}^d_+)\}$ l'ensemble des actifs sur-réplicables par une stratégie partant de 0 menée jusqu'en t.

Par la suite, on dira qu'un processus d'échange est reversible si $\xi \in N := K \cap (-K)$. Dans le modèle exposé en introduction de cette section, si un processus d'échange est réversible, alors $-\xi$ est automatiquement un processus d'échange. Ce n'est plus le cas dans notre modèle. Toutefois, dire qu'une transaction est réversible revient à dire qu'elle n'implique que des échanges entre actifs entre lesquels il n'y a pas de friction. Dans ce cas, on devrait pouvoir annuler l'opération simplement en passant un ordre inverse. C'est le sens de l'hypothèse suivante :

HN : Pour tout t et $\eta \in L^0(\mathcal{O};\mathcal{H}_t)$, $F_t(\eta) \in N_t \Rightarrow F_t(-\eta) = -F_t(\eta)$ et $-\eta \in L^0(\mathcal{O};\mathcal{H}_t)$.

Enfin, on suppose que les ordres d'échange à l'achat et à la vente entre deux mêmes actifs s'annulent dans le sens où

$\mathbf{H}\mathcal{O}$: 1. $F(\pm e_{ij}) = 0$ si $\pm e_{ij} \notin \mathcal{O}$, $i, j \leq d$.
2. $F(\eta) = \sum_{i,j} \left[(\eta^{ij})^+ F(e_{ij}) + (\eta^{ij})^- F(-e_{ij})\right]$ pour tout η dans $L^0(\mathbb{M}^d)$.

Ici, e_{ij} est la matrice de $\mathbb{M}^d_+$ dont la composante (k,l) vaut $\mathbf{1}_{(i,j)=(k,l)}$.

Caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage

Dans ce modèle, les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage faible et stricte présentées dans la sous-section 1.1 s'écrivent simplement

$$\mathbf{NA}^w \ : \ A_T(0) \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) = \{0\} \quad \text{ et } \quad \mathbf{NA}^s \ : \ A_t(0) \cap (K_t + L^0(\mathbb{R}^d_+)) \subset N_t \quad \text{ pour tout } \ t \in \mathbb{T} \,.$$

On définit l'absence d'opportunité d'arbitrage robuste, $\mathbf{NA}^r$, comme l'existence d'un processus de conversion d'ordres G vérifiant $\mathbf{H}\mathcal{O}$ tel que pour tout $\eta \in L^0(\mathcal{O}; \mathbb{H})$ et t :

1. $G_t(\eta_t) \geq F_t(\eta_t)$
2. $F_t(\eta_t) \notin N_t \ \Rightarrow \ \mathbb{P}\left[\exists\, k \text{ tel que } G^k_t(\eta_t) > F^k_t(\eta_t)\right] > 0$
3. $\mathbf{NA}^w$ est vérifiée par G.

Afin d'étendre les caractérisations d'absence d'opportunité d'arbitrage de [KaRaS02], [Sc04] et [KaRaS03], il reste à introduire une bonne classe de variables duales qui coïncide avec l'ensemble $\mathcal{Z}$ défini dans la sous-section 1.1 lorsque F est $\mathbb{H}$-adapté. Pour cela, on introduit l'ensemble $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}$ des éléments $Z \in L^\infty(\mathrm{int}(\mathbb{R}^d_+); \mathcal{F})$ tels que

$$\bar{F}_t(\eta_t; Z) \leq 0 \quad \text{ et } \quad F_t(\eta_t)\mathbf{1}_{\bar{F}_t(\eta_t;Z)=0} \in N_t \ , \quad \text{pour tout } \eta \in L^0(\mathcal{O}; \mathbb{H}) \ \text{ et } \ t \ ,$$

où $\bar{F}_t(\eta_t; Z) := \mathbb{E}\left[Z' F_t(\eta_t) \mid \mathcal{H}_t\right]$. Lorsque F est $\mathbb{H}$-adapté, on retrouve facilement l'interprétation usuelle de $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}$ en terme de processus de prix fictifs, voir par exemple [1] et [Sc04]. En effet, si on définit $\bar{Z}$ et $\tilde{Z}$ par $\bar{Z}_t = \mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{H}_t\right]$ et $\tilde{Z}_t = \bar{Z}_t / \bar{Z}^1_t$ et si on introduit la mesure équivalente $\bar{\mathbb{Q}}$ définie par $d\bar{\mathbb{Q}}/d\mathbb{P} = \bar{Z}^1_T / \bar{Z}^1_0$, la $(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{H})$-martingale $\tilde{Z}$ correspond à un processus de prix fictif dans un marché sans coût de transaction dans lequel le premier actif est pris comme numéraire. La condition $\bar{F}_t(\eta_t; Z) \leq 0 \Leftrightarrow \tilde{Z}'_t F_t(\eta_t) \leq 0$ signifie que les transactions effectuées évaluées au prix $\tilde{Z}_t$ vérifient la condition usuelle d'autofinancement. Par ailleurs, $F_t(\eta_t)\mathbf{1}_{\bar{F}_t(\eta_t;Z)=0} \in N_t$ implique que cette condition n'est saturée que si la transaction est réversible. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.5 *Sous* $\mathbf{NA}^r$, $A_T(0)$ *est fermé en probabilité et* $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}$ *est non-vide. Si* $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}$ *est non vide alors* $\mathbf{NA}^w$, $\mathbf{NA}^s$ *et* $\mathbf{NA}^r$ *sont vérifiées.*

On montre en outre que la première assertion reste vraie si l'on remplace $\mathbf{NA}^r$ par $\mathbf{NA}^s$ dès que l'on fait l'hypothèse de frictions effectives : $N = \{0\}$. On propose également une représentation alternative de l'ensemble $\mathcal{Z}_{\mathbb{H}}$ en terme de cônes de solvabilité "projetés" qui permet de faire le lien avec l'ensemble de variables duales $\mathcal{Z}$ introduit dans la sous-section 1.1. Enfin, on étudie les implications de ce théorème dans différents modèles spécifiques. On montre en particulier que notre condition d'absence d'opportunité d'arbitrage robuste est équivalente à celle de [Sc04].

Note : Ce travail a été ré-écrit dans un cadre abstrait par [DeKaS06]. Leur approche consiste à remplacer F par un opérateur linéaire qui s'avère un peu plus flexible. Ils énoncent également une formulation duale pour le problème de sur-réplication qui découle de la propriété de fermeture de $A_T(0)$ et d'arguments similaires à ceux déjà employés pour obtenir le Théorème 1.5.

2 Relations de dualité en finance et gestion de portefeuilles

Il existe une vaste littérature sur les problèmes de maximisation d'utilité en marchés incomplets. Depuis les travaux pionniers de [KaLeSX91] qui sont à l'origine de l'approche par dualité, jusqu'aux plus récents articles [KrSc99], [KrSc03], [Sc01] et [Sc03] qui ont largement contribué à clarifier la situation lorsque la fonction d'utilité est régulière, donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution au problème dual et au problème primal.

La série d'articles présentés ci-après s'intéresse à des extensions non-triviales de ces travaux lorsque :

1. on tient compte de la présence de coûts de transaction dans des marchés multivariés ([2], [4], [19], [20], [21]),

2. la fonction d'utilité n'est pas régulière, ce qui est le cas lorsque l'on considère des critères de minimisation de l'erreur de couverture ([6]),

3. l'horizon de temps est aléatoire et/ou l'utilité dépend de la trajectoire de la richesse et non plus seulement de sa valeur terminale ([8]).

Enfin, on étudie une relation de polarité sur L^0 qui permet de mieux comprendre la nature des problèmes duaux apparaissant dans cette théorie ([5], [11]).

2.1 Modèles avec coûts de transaction proportionnels

Existence et dualité

Dans [21] et [4], on considère un marché financier avec coûts de transaction proportionnels en temps continu. Les actifs risqués sont modélisés par une semi-martingale $S = (S^1, \dots, S^d)$ à composantes strictement positives. Ici S^1 est pris comme numéraire et est normalisé $S^1 \equiv 1$. Les coûts de transactions sont représentés par une matrice à coefficients positifs $\Lambda = (\lambda^{ij})_{i,j \leq d}$: si on achète de l'actif j en échange de l'actif i, on paie un coût proportionnel à la transaction de coefficient λ^{ij} en actif i. Une dotation initiale est un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$, chaque composante x^i représentant un avoir en actif i, en terme de numéraire. Pour modéliser la dynamique des portefeuilles financiers, on suit l'approche introduite par [Ka99] et [KaLa02]. Une stratégie financière est décrite par un processus matriciel $L = (L^{ij})_{i,j \leq d}$ adapté à variation bornée, continu à droite, dont chaque composante est positive, croissante et tel que $L(0-) = 0$. Le portefeuille $X^{x,L}$ induit par la dotation initiale x et la stratégie L

est la solution sur $[0,T]$ de

$$X_t^i = x + \int_0^t \frac{X_{r-}^i}{S_{r-}^i}\, dS_r^i + \sum_{j=1}^d \left(L_t^{ji} - (1+\lambda^{ij})L_t^{ij}\right) \ ,\ i \le d\ .$$

On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies L et on note $\mathcal{X}(x) := \{X_T^{x,L},\ L \in \mathcal{A}\}$ l'ensemble des valeurs terminales de portefeuille partant d'une dotation initiale x.
Etant donnée un fonction d'utilité U finie sur $\mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de gestion optimale

$$\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}\left[U\left(\ell(X-G)\right)\right] \tag{2.1}$$

où $G \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un actif contingent borné, chaque composante G^i représentant un montant d'actif S^i devant être livré, et ℓ est la fonction de liquidation définie par

$$\ell(x) := \sup\left\{ w \in \mathbb{R}\ :\ x^i + \sum_{j=1}^d (a^{ji} - (1+\lambda^{ij})a^{ij}) \ge w\mathbf{1}_{i=1},\ i \le d \right\}.$$

Autrement dit, $\ell(X-G)$ est la quantité maximale de numéraire que l'on peut obtenir à partir de la richesse X après livraison de l'actif contingent G. Le cône convexe fermé polyèdral

$$K \quad := \quad \left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ \ell(x) \ge 0\right\}\ ,$$

correspond à l'ensemble des portefeuilles qui permettent d'obtenir une quantité d'actif 1 positive une fois soldées toutes les autres positions en actifs risqués. C'est ce que l'on appelle la "région de solvabilité".
L'étude de (2.1) pose plusieurs difficultés. Jusqu'alors les problèmes de gestion optimale avec coût de transactions proportionnels n'avaient été étudiés que dans le cadre univarié ou dans des modèles n'autorisant pas d'échanges directs entre les actifs risqués, voir [CvKa96], [CvWa01] et [Gu02] pour des résultats d'existence généraux, et, [HoNe89], [DaPaZ93] et [BaSo96] pour des approches par EDP.
Dans cet article, nous utilisons les théorèmes de sur-réplication obtenus par [Ka99] et [KaLa02][1] pour les marchés comprenant plusieurs actifs risqués qui peuvent être échangés directement sans passer par un numéraire, voir [JoKa95] et [CvKa96] pour le cas univarié. En particulier, on se restreint aux hypothèses faites dans le second papier : S est continue, il existe une mesure martingale équivalente pour S, K^o (le polaire positif de K au sens de l'analyse convexe) est d'intérieur non vide. Cette dernière condition est équivalente à : $\lambda^{ij} + \lambda^{ji} > 0$ pour tout (i,j). Ceci implique qu'il n'existe pas de couple d'actifs pouvant être librement échangés.
Par ailleurs, le problème (2.1) est mal posé. En effet, il est bien connu en finance mathématique qu'il est nécessaire d'imposer une borne inférieure au processus de richesse de manière à éviter les "arbitrages" obtenus en suivant des stratégies de type "doubling strategies". Il est donc nécessaire de restreindre le problème (2.1) à une sous-classe $\mathcal{X}_b(x)$ de $\mathcal{X}(x)$. De manière

[1]Ces travaux ont été très récemment étendus aux processus non continus par [CaSc06].

naturelle, on pourrait imposer que la valeur liquidative d'un portefeuille soit uniformément bornée inférieurement,

$$\mathcal{X}_b(x) := \left\{ X_T^{x,L},\ L \in \mathcal{A}_b \right\} \text{ où } \mathcal{A}_b := \left\{ L \in \mathcal{A} \ :\ \exists\, c > 0,\ \ell(X_t^{0,L}) \geq -c\ \ \forall\, t \leq T \right\} .$$

Toutefois, la fonction d'utilité U étant finie sur $\mathbb{R}$, il est clair que le problème

$$\sup_{X \in \mathcal{X}_b(x)} \mathbb{E}\left[U\left(\ell(X - G) \right) \right] \tag{2.2}$$

n'a aucune raison d'avoir une solution dans $\mathcal{X}_b(x)$. Afin de mieux poser le problème d'optimisation, on suit une approche similaire à celle de [Sc01]. On relaxe le problème en cherchant une solution dans $\mathcal{X}_U(x)$ défini comme l'ensemble des éléments $X \in L^0(\mathbb{R}^d)$ tels qu'il existe une suite $(X^n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{X}_b(x)$ vérifiant

$$X^n \longrightarrow X\ \mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[U\left(\ell(X^n - G) \right) \right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[U\left(\ell(X - G) \right) \right] .$$

Le problème primal est défini par

$$u(x; G) := \sup_{X \in \mathcal{X}_U(x)} \mathbb{E}\left[U\left(\ell(X - G) \right) \right] . \tag{2.3}$$

Dans [21] et [4], on suit l'approche par dualité initialement introduite par [CoHu89] et [KaLeSX91] pour les marchés financiers sans friction. Cette approche permet de substituer au problème de contrôle (dynamique) initial un problème de contrôle (dual) statique. En marchés complets, elle permet une résolution quasi-explicite (à un paramètre près, que l'on peut en général au moins estimer par des techniques de type Monte-Carlo). En marchés incomplets, elle peut également permettre de se ramener à un problème plus simple à traiter numériquement (voir e.g. [Mn02]). D'une marnière générale, elle a été jusqu'à très récemment utilisée pour obtenir des résultats d'existence généraux.

D'après [Ka99] et [KaLa02], il existe une dualité naturelle entre $\mathcal{X}_b(x)$ et l'ensemble $\mathcal{Z}$ des processus Z à valeurs dans K^o tels que $(Z^i S^i)_{i\leq d}$ est une martingale. Leur résultat essentiel implique que, sous certaines hypothèses,

$$\mathcal{X}_b(x) \cap L^0(K) \ = \ \left\{ X \in L^0(K) \ :\ \mathbb{E}\left[Z_T' X \right] \leq Z_0' x\ ,\ \forall\, Z \in \mathcal{Z} \right\} . \tag{2.4}$$

L'ensemble $\mathcal{Z}$ est une extension naturelle de l'espace des densités de mesure martingale (locale) qui apparaît dans les modèles sans friction. Etant donnée (2.4), il serait naturel de considérer le problème dual

$$\bar{u}(y; G) = \inf_{Z \in \mathcal{Z},\, Z_0 = y} \mathbb{E}\left[\tilde{U}(Z_T^1) - Z_T' G \right] . \tag{2.5}$$

Toutefois, $\mathcal{Z}$ n'étant pas fermé en probabilité, il y a peu de chance de réussir à montrer un résultat d'existence pour (2.5). Ce phénomène est bien connu dans les modèles sans friction. L'ensemble des variables duales est donc défini comme suit. A $y \in K^o$, on associe tout d'abord

$$\mathcal{Y}(y) \ := \ \left\{ Y \in L^0(K^o) \ :\ \mathbb{E}\left[Y' X \right] \leq y' x\ \forall\, X \in \mathcal{X}(x) \cap L^0(K) \right\} .$$

Ensuite, on se restreint à la sous-classe

$$\mathcal{Y}_{\tilde{U}}(y) \quad := \quad \left\{ Y \in \mathcal{Y}(y) \ : \ Y^1 > 0, \ \mathbb{E}\left[Y^1\right] = y^1, \ \tilde{U}(Y^1) \in L^1 \right\}$$

que l'on suppose non-vide et on définit

$$\tilde{u}(y; G) \quad := \quad \inf_{Y \in \mathcal{Y}_{\tilde{U}}(y)} \mathbb{E}\left[\tilde{U}(Y^1) - Y'G\right] \ . \tag{2.6}$$

Dans [21], on se concentre sur l'utilité exponentielle : $U(z) = -e^{-\eta z}$ avec $\eta > 0$. Dans [4], on considère le cas où U est une fonction strictement concave, C^1, vérifiant les conditions d'Inada : $U'(-\infty) = \infty$ et $U'(\infty) = 0$. On travaille sous les hypothèses d' "élasticité asymptotique raisonnable" introduites par [KrSc99] et [Sc01]. Celles-ci sont nécessaires pour obtenir un résultat d'existence général, voir [GuSc04] pour les modèles avec coûts de transaction lorsque U est définie sur $\mathbb{R}_+$. On montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

1. il existe une solution X_* à (2.3),
2. il existe $y_* \in K^o$ tel que $u(x; G) = \tilde{u}(y_*; G) + y_*'x$,
3. il existe une solution $Y_* \in \mathcal{Y}_{\tilde{U}}(y_*)$ à (2.6),
4. $X^* = -\tilde{U}'(Y_*^1)e_1 + G$, où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

On montre en outre que $X^* \in \mathcal{X}(x)$ s'il existe une mesure martingale équivalente de densité H telle que $\tilde{U}(H) \in L^1$. Ces résultats étendent aux modèles avec coûts de transaction proportionnels ceux de [Sc01]. La preuve consiste à approcher le problème (2.3) par une suite de problèmes similaires mais définis pour des fonctions d'utilités à domaine borné inférieurement. Il faut également tronquer l'actif contingent G de manière à ce que la suite de problèmes soit bien définie, ce qui n'apparaît pas dans [Sc01] qui considère le cas où $G = 0$ (le cas $G \neq 0$ en marchés incomplets a été traité au même moment par [Ow02]). On montre les résultats d'existence et de dualité pour ces problèmes, puis on passe à la limite. La difficulté principale provient évidemment de ce passage à la limite qui est rendu plus délicat que dans [Sc01] du fait de l'aspect multivarié des différentes variables.

Prix de réserve et aversion à l'égard du risque infinie

On se restreint maintenant au cas étudié dans [21] : $U(z) = U_\eta(z) := -e^{-\eta z}$ avec $\eta > 0$. On obtient une formulation duale pour le prix de réserve d'un actif contingent $G \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$p_\eta^G(x) \quad := \quad \inf\left\{p \in \mathbb{R} \ : \ u(x + pe_1; G) \geq u(x; 0)\right\} \ , \ e_1 = (1, 0 \ldots, 0) \ .$$

On montre en effet, que

$$p_\eta^G(x) \quad = \quad \sup_{(y,Y) \in \mathbf{Y}_\eta} \mathbb{E}\left[Y'G - \eta^{-1}Y^1 \ln(Y^1) - y'x\right] + \inf_{(y,Y) \in \mathbf{Y}_\eta} \mathbb{E}\left[\eta^{-1}Y^1 \ln(Y^1) + y'x\right]$$

où $\mathbf{Y}_\eta := \{(y, Y) \in K^o \times L^0(K^o) \ : \ Y \in \mathcal{Y}_{\tilde{U}_\eta}(y), \ y^1 = 1\}$. Ici, $\tilde{U}_\eta$ est la transformée de Fenchel associée à U_η.

Dans [2], on étudie le comportement de $p_\eta^G(x)$ lorsque le paramètre d'aversion à l'égard du risque η tend vers ∞. Notre principal résultat montre que le prix de réserve tend vers le prix de sur-réplication lorsque la dotation initiale est nulle. Ce résultat avait été conjecturé dans [BaSo96]. Dans le cas général, on obtient

$$\lim_{\eta\to\infty} p_\eta^G(x) \quad = \quad \ell(x) + \inf\left\{p \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, X \in \mathcal{X}_S(x+pe_1) \text{ t.q. } \ell(X-G) \geq 0\right\} \ ,$$

où $\mathcal{X}_S(x)$ est l'ensemble des valeurs terminales des portefeuilles $X^{x,L}$ tels qu'il existe $c_L \geq 0$ pour lequel $X^{x,L} - c_L S \in K$. Ce résultat requiert une hypothèse technique supplémentaire qui nous assure que le théorème de sur-réplication de [Ka99] et [KaLa02], dont (2.4) est une forme particulière, peut-être ré-écrit en terme de l'ensemble $\mathbf{Y}_\eta$.
Cette propriété avait déjà été établie dans le document de travail [19] dans un modèle de diffusion browienne markovien. L'approche était complètement différente et reposait sur la dérivation puis l'étude du comportement asymptotique d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, prises au sens de la viscosité. Dans la note [20], le résultat précédent est étendu à une plus large classe de fonctions d'utilité. Des résultats similaires ont été obtenus par [KaRo00], [DeGrRSSS02] et [KaSt02] dans des modèles de marchés financiers incomplets mais sans friction.

2.2 Modèles sans friction : utilités non régulières et dépendant de la trajectoire de la richesse

Dans [6] et [8], on considère un marché financier sans friction. Les prix des actifs financiers sont modélisés par une semi-martingale localement bornée S à composantes strictement positives. On suppose que le premier actif joue le rôle d'un numéraire, i.e. $S^1 = 1$. Un processus de richesse s'écrit alors $X_t^{x,\theta} := x + \int_0^t \theta_r' dS_r$, où $x \in \mathbb{R}$ est la dotation initiale et $\theta \in L(S)$, l'ensemble des processus prévisibles, S-intégrables. Par la suite on notera

$$\mathcal{X}(x) \quad := \quad \left\{X_T^{x,\theta},\ \theta \in L(S)\right\} \ .$$

On suppose que l'ensemble $\mathcal{M} = \{H = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} \ : \ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P},\ \ S \text{ est une } \mathbb{Q}\text{-martingale locale}\}$ des densités de mesures martingales locales est non vide. Cette condition est équivalente à l'absence de “free lunch with vanishing risk” qui est une version faible de l'arbitrage, voir [DeSc94].

Utilités non-régulières

Il est généralement supposé que la fonction d'utilité est C^1 ce qui ne permet pas d'englober les problèmes de minimisation de l'erreur de couverture du type

$$\inf_{X\in\mathcal{X}(x)} \mathbb{E}\left[V\left([G-X]^+\right)\right] \ , \ \ G \in L^\infty(\mathbb{R}) \ ,$$

voir par exemple [Cv99], [FoLe00] et [Ph02]. L'objectif de [6] est d'étendre les résultats généraux obtenus dans [KrSc99] et [KrSc03] au cas où U n'est pas C^1 mais simplement croissante et concave.
Lorsque la fonction d'utilité U a un domaine borné inférieurement, on suit l'approche de [DePhT02] qui consiste à approcher $\tilde{U}$ par une suite $(\tilde{U}_n)_n$ construite par inf-convolution.

Ceci nous permet de montrer l'existence d'une solution au problème dual associé à chaque $\tilde{U}_n$. Lorsque la fonction U est finie sur $\mathbb{R}$, on procède comme dans [Sc01] et [4], i.e. on approche U par une suite de fonctions (non régulières) à domaines bornés inférieurement.
Comme dans [DePhT02], on écrit les conditions d'Inada et d'"élasticité asymptotique raisonable" sur la transformée de Fenchel $\tilde{U}$ et non sur U directement.
On a déjà remarqué dans la partie précédente que l'utilisation de portefeuilles uniformément bornés inférieurement ne permet pas d'obtenir un résultat d'existence lorsque U est finie sur $\mathbb{R}$. Dans [DeGrRSSS02] et [Sc03], les auteurs proposent différentes classes de stratégies et montrent qu'elles sont équivalentes dans le sens où les valeurs d'utilité espérée maximales sont les mêmes. Dans [6], on étend également ce résultat au cas non-régulier.

Utilités dépendant de la trajectoire du portefeuille

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des utilités ne dépendant que de la richesse terminale, ou de la consommation (voir la section I.1.2). Dans [8][2], on considère des problèmes de la forme

$$u(x) \quad := \quad \sup \mathbb{E}\left[\int_0^T U(X_t)dF_t\right] \,, \tag{2.7}$$

où U est C^1 définie sur $(0,\infty)$, vérifie les conditions d'Inada, et F admet une décomposition de la forme

$$F_t \quad = \quad \int_0^t f_u du + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{1}_{\tau_i \le t} \mathbf{1}_{\tau_i < T} + h_T \mathbf{1}_{t=T} \,, \quad 0 \le t \le T,$$

où f est adaptée, positive et continue à droite, les τ_i sont des temps d'arrêts, les α_i des coefficients strictement positifs et h_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, positive et bornée.
La maximisation dans (2.7) se fait sur le sous-ensemble $\mathcal{X}_U(x)$ de l'espace $\mathcal{X}_+(x)$ des processus positifs de la forme $x + \int_0^\cdot \theta_r' dS_r$, $\theta \in L(S)$, qui vérifient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T U(X_t)^- dF_t\right] < \infty \quad .$$

Il s'agit clairement d'une généralisation du problème d'optimisation de la richesse terminale mais cette modélisation permet également de rendre compte des situations dans lesquelles l'horizon de temps est aléatoire, modélisé par un pseudo-temps d'arrêt au sens de [NiYo05], voir [Ri75] et [BlKaJM02] pour une approche par EDP et pour plus de références. Par ailleurs, l'approche usuelle suppose que l'agent ne s'intéresse qu'à sa richesse terminale, ce qui n'est pas le cas en pratique, notamment pour les agents financiers dont la performance est régulièrement contrôlée.
L'ensemble des variables duales est défini ainsi. A $y \ge 0$, on associe

$$\mathcal{Y}(y) \quad := \quad \left\{ Y \in L^0(\mathbb{R}_+;\mathbb{F}) \ : \ E\left[\int_0^T X_t Y_t dF_t\right] \le y, \ \forall \ X \in \mathcal{X}_+(1) \right\} \,.$$

[2]Ce travail a été motivé par une présentation de M. Jeanblanc sur les problèmes de gestion optimale en horizon aléatoire et leurs liens avec les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

On montre facilement que cet ensemble est non-vide sous l'hypothèse $\mathcal{M} \neq \emptyset$. On note $\mathcal{Y}_*(y)$ la restriction de $\mathcal{Y}(y)$ aux processus strictement positifs.
Le problème dual s'écrit

$$\tilde{u}(y) \quad := \quad \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} \mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{U}(Y_t) dF_t\right] .$$

On suppose comme dans [KrSc03] que le problème est fini pour tout $y > 0$. Ce qui est impliqué par la condition d'"élasticité asymptotique raisonnable" de [KrSc99] et la finitude, en au moins un point, de u. Sous ces conditions, on retrouve les résultats d'existence et de dualité obtenus dans le cas usuel où $F_t = 1_{t=T}$. Notre approche diffère de celle retenue dans [6] qui suit l'approche classique consistant à prouver l'existence dans le problème dual puis à utiliser des techniques de type calcul des variations sur celui-ci pour dériver la solution du problème primal, voir [KaLeSX91]. La raison est la suivante : on peut prouver l'existence d'une solution $\hat{Y}$ associée à $\tilde{u}(\hat{y})$ où $\hat{y}$ vérifie $u(x) = \tilde{u}(\hat{y}) + \hat{y}x$. On peut également suivre l'approche par calcul des variations usuelle et montrer que $\hat{X} = -\tilde{U}'(\hat{Y})$ vérifie

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{X}_t Y_t dF_t\right] \quad \leq \quad yx$$

pour tout $Y \in \mathcal{Y}(y)$ et $y > 0$. Si l'on pouvait montrer que $\hat{X}$ est cadlag, il ne serait pas très difficile d'en déduire que $\hat{X} \in \mathcal{X}_U(x)$. Malheureusement, cela reviendrait à montrer que $\hat{Y}$ est cadlag. Or, même si l'on redéfinissait $\mathcal{Y}$ en se restreignant à des processus cadlag, il n'y a aucune raison pour que l'argument minimum dans $\tilde{u}$ soit aussi régulier. Autrement dit, on n'arrive pas à en déduire que $\hat{X} \in \mathcal{X}_U(x)$.

Pour contourner cette difficulté, on commence par montrer la dualité entre u et $\tilde{u}$ en s'inspirant de techniques introduites par [KrSc03]. Puis on montre directement l'existence d'une solution au problème primal. Ensuite, on utilise une approche par calcul des variations mais cette fois-ci sur le problème primal. Ceci nous permet de montrer l'existence d'une solution au dual et de retrouver la relation habituelle entre les deux solutions. On en déduit en même temps que la solution du problème dual est bien cadlag.
On étudie un exemple correspondant à un marché financier complet dans lequel la solution peut-être explicitée. On prouve également un théorème de bipolarité qui permet d'étendre à notre cas le résultat (iv) du Théorème 2.2 de [KrSc99], voir la section suivante.

2.3 Théorèmes de bipolarité dans L^0

Bien que l'espace $L^0(\mathbb{R}_+)$, muni de la topologie de la convergence en mesure, ne soit pas localement convexe, il a été montré par [BrSc99] que l'on peut obtenir une version du théorème de bipolarité, voir [Sc96], si l'on place $L^0(\mathbb{R}_+)$ en polarité avec lui-même à travers le produit scalaire $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}[XY]$ à valeur dans $[0, \infty]$. Autrement dit, si C est un sous-ensemble de $L^0(\mathbb{R}_+)$, on peut définir son polaire comme

$$C^o \quad := \quad \{X \in L^0(\mathbb{R}_+) \ : \mathbb{E}[XY] \leq 1 \ \forall\, Y \in C\} .$$

Son bipolaire C^{oo} est le polaire de C^o, i.e. $C^{oo} = (C^o)^o$.

La motivation initiale vient de la finance où il existe une dualité naturelle entre l'ensemble des valeurs terminales de portefeuille et les densités de mesures martingales (locales) équivalentes, voir [DeSc94]. En particulier, l'ensemble des variables duales qui apparaissent dans les problèmes de maximisation d'utilité est une extension de l'ensemble de ces densités qui correspond en fait exactement à son bipolaire. Un des objectifs de [BrSc99] est de clarifier la structure de ce bipolaire. Le résultat principal est qu'il coïncide avec l'enveloppe convexe solide fermée de l'ensemble de départ.

On a également vu dans la section 2.1 que, dans les modèles avec coûts de transaction proportionnels, la notion de densité de mesure martingale doit être remplacée par celle de martingale d-dimensionnelle à valeurs dans un cône convexe fermé. La formulation duale de l'ensemble des actifs contingents sur-réplicables faisant intervenir les valeurs initiales et terminales de ces processus, voir (2.4). On retrouve ainsi, après normalisation, une relation de polarité similaire à celle décrite ci-dessus à condition de considérer un espace du type $L^0(\Gamma)$ où Γ est un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^d_+$. Dans [5], on montre que les résultats obtenus par [BrSc99] peuvent être étendus à ce cadre multivarié.

Enfin, on peut se demander ce qui se passe si l'on remplace le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[X'Y]$ par une version conditionnelle : $\langle X, Y\rangle_{\mathcal{G}} := \mathbb{E}[X'Y \mid \mathcal{G}]$ où $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$. Dans ce cas le polaire $\mathcal{G}$-conditionnel de $C \subset L^0(\Gamma)$ est

$$C^{(\mathcal{G},\, o)} \;:=\; \left\{ X \in L^0(\Gamma^o) \;: \mathbb{E}\left[X'Y \mid \mathcal{G}\right] \le 1 \;\forall\, Y \in C \right\}$$

et son bipolaire $\mathcal{G}$-conditionnel est

$$C^{(\mathcal{G},\, oo)} \;:=\; \left\{ X \in L^0(\Gamma^{oo}) \;: \mathbb{E}\left[X'Y \mid \mathcal{G}\right] \le 1 \;\forall\, Y \in C^{(\mathcal{G},\, o)} \right\} .$$

Ici Γ^o est le polaire positif de Γ au sens de l'analyse convexe et son bipolaire positif Γ^{oo} coïncide simplement avec Γ, voir [Ro70].

Lorsque $\Gamma = \mathbb{R}_+$, ce problème a été étudié par [Zi02] qui étend à ce cadre, mais sous des hypothèses un peu fortes, le résultat de bipolarité de [BrSc99]. Il s'agit d'une étape vers la démonstration d'une version dynamique du théorème de bipolarité appelé "théorème de bipolarité filtré". Une application de ce résultat dynamique en finance est décrite dans [Zi02]. Dans [11], nous étendons cette version conditionnelle au cadre multivarié et nous affaiblissons les hypothèses de [Zi02].

Avant d'énoncer notre principal résultat, nous avons besoin d'introduire les définitions suivantes.

Définition 2.6 *Soit $\mathcal{D} \subset L^0(\Gamma)$. On dit que $\mathcal{D}$ est Γ-solide si pour tout $Y \in \mathcal{D}$ et $\tilde{Y} \in L^0(\Gamma)$: $Y - \tilde{Y} \in \Gamma$ $\mathbb{P}-p.s. \Rightarrow \tilde{Y} \in \mathcal{D}$. On dit que $\mathcal{D}$ est $\mathcal{G}$-convexe si : $hY_1 + (1-h)Y_2 \in \mathcal{D}$, $\forall\, h \in L^0([0,1];\mathcal{G})$ et $Y_1,\ Y_2 \in \mathcal{D}$.*

Dans la suite, on supposera que : $\mathrm{ri}(\Gamma) \neq \emptyset$ et $\Gamma \cap \partial[0,\infty)^d = \{0\}$. Notre résultat principal repose également sur l'une des deux hypothèses suivantes :

H1 : $\mathrm{conv}^{\mathcal{G}}(C) \cap L^0(\mathrm{ri}(\Gamma)) \neq \emptyset$ où $\mathrm{conv}^{\mathcal{G}}(C)$ est l'enveloppe $\mathcal{G}$-convexe de C.

ou

H2 : $\{Y\mathbf{1}_{\{Y\notin \mathrm{ri}(\Gamma)\}},\ Y\in\overline{C}^{\mathcal{G}}\}$ est borné en probabilité, où $\overline{C}^{\mathcal{G}}$ est l'enveloppe fermée (en probabilité), $\mathcal{G}$-convexe et Γ-solide de C.

On peut remarquer que l'hypothèse H2 est toujours vérifiée lorsque $\Gamma=\mathbb{R}_+$, cas étudié par [BrSc99] et [Zi02], ce dernier supposant de surcroît que C est borné en probabilité. S'appuyant sur des résultats déjà obtenus dans [5], on montre dans [11] le résultat suivant.

Théorème 2.7 *Si* H1 *ou* H2 *sont vérifiées, alors* $C^{(\mathcal{G},\,oo)}=\overline{C}^{\mathcal{G}}$.

On montre en outre dans [11] que les hypothèses H1 et H2 ne sont plus nécessaires si Γ est un cône polyèdral. Dans ce cas, on utilise un argument de type exhaustion qui nous permet de nous ramener au cas $d=2$ puis $d=1$.
On déduit de ce résultat que tout élément Y de $C^{(\mathcal{G},\,oo)}$ peut être dominé par la limite (pour la convergence en probabilité) d'une suite $(Y_n)_n$ de combinaison convexe d'éléments de C au sens où $Y_n\to Y_*$ tel que $Y_*-Y\in\Gamma$. Formellement, cela implique que $v(C)=v(C^{oo})$ si $v(\mathcal{D}):=\inf_{Y\in\mathcal{D}}\mathbb{E}\left[V(Y)\right]$ pour une fonctionnelle convexe V de Γ dans $\mathbb{R}$, croissante pour l'ordre partiel associé à Γ.

En finance, il s'agit de savoir si la valeur du problème dual associé à un problème de gestion de portefeuille reste la même si l'on considère l'espace naturel des variables duales qui apparaissent dans les théorèmes de sur-réplication ou si l'on considère leur extension (bipolaire) introduite naturellement afin d'obtenir des résultats d'existence. Par exemple, le problème de la section 2.1 correspond à la situation où $\Gamma=K^o$ est un cône polyèdral, $C=\{Z_T\ :\ Z\in\mathcal{Z},\ Z_0=y\}$ pour un $y\in\Gamma$ et $C^{oo}=\mathcal{Y}(y)$ (avec les notations de cette section). La question est alors de savoir si $\bar{u}$ définie dans (2.5) coïncide avec $\tilde{u}$ définie dans (2.6).

En utilisant le résultat énoncé ci-dessus, on montre sous des conditions de type “élasticité asymptotique raisonnable”, voir [KrSc99] et [DePhT02], que $v(C)=v(C^{00})$ si $v(C)<\infty$. Il s'agit d'une extension du résultat de la Proposition 3.2 de [KrSc99]. Par ailleurs, on énonce un résultat d'existence général pour le problème $\inf_{Y\in C^{00}}\mathbb{E}\left[V(Y)\right]$ qui généralise celui obtenu par [DePhT02]. Dans [11], on montre que ces résultats peuvent-être étendus aux problèmes du type $\operatorname{ess}\inf_{Y\in C}\mathbb{E}\left[V(Y)\mid\mathcal{G}\right]$.

Chapitre II

Cibles stochastiques et évaluation d'actifs contingents : approche par solutions de viscosité

Dans ce chapitre, on étudie trois problèmes de cible stochastique. En finance, ils s'interprètent comme des problèmes de sur-réplication sous contraintes de portefeuille ou en présence de coûts de transaction proportionnels. Dans les deux premières sections ([3] et [17]), l'objectif est de caractériser la fonction valeur comme solution discontinue de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Dans la dernière section ([1] et [15]), la dérivation des équations ne sert que d'étape intermédiaire. Elles permettent d'établir un certain nombre de propriétés vérifiées par la fonction valeur, et finalement d'en déduire une formulation explicite.

1 Cibles stochastiques, diffusions mixtes et couverture sous contraintes

Le problème de cible

Dans [3], on cherche à caractériser l'ensemble des conditions initiales $z \in \mathbb{R}^d$ telles qu'il existe un contrôle ν pour lequel le processus contrôlé Z_z^ν atteigne une cible $G \subset \mathbb{R}^d$ presque sûrement à une date $T > 0$ fixée à l'avance.

Plus précisément, on se donne un sous-ensemble compact U de $\mathbb{R}^d$ et on définit $\mathcal{U}$ comme l'ensemble des processus prévisibles à valeurs dans U. Etant donné $t \in [0,T]$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathcal{U}$, on considère le processus $Z_{t,z}^\nu := (X_{t,x}^\nu, Y_{t,z}^\nu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ solution sur $[t,T]$ de

$$
\begin{aligned}
X_{t,x}^\nu(s) \quad &= \quad \rho\left(s, X_{t,x}^\nu(s), \nu(s)\right) ds + \alpha\left(s, X_{t,x}^\nu(s), \nu(s)\right)' dW(s) \\
&\quad + \int_E \beta\left(s, X_{t,x}^\nu(s-), \nu(s), e\right) \mu(de, ds)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y^{\nu}_{t,z}(s) &= r\left(s, Z^{\nu}_{t,z}(s), \nu(s)\right) ds + a\left(s, Z^{\nu}_{t,z}(s), \nu(s)\right)' dW(s) \\
&\quad + \int_E b\left(s, Z^{\nu}_{t,z}(s-), \nu(s), e\right) \mu(de, ds) \, .
\end{aligned}
$$

Ici, W est un mouvement brownien d-dimensionnel et μ est une mesure de Poisson associée à l'espace de marques $E \subset \mathbb{R}^m$. Les fonctions ρ, α, β, r, b et a sont continues, lipschitziennes à croissance linéaire en leur seconde variable, uniformément par rapport aux autres, et bornées en $e \in E$. Le problème consiste à caractériser l'ensemble

$$
\Gamma(t,x) := \left\{ y \in \mathbb{R} \ : \ \exists \, \nu \in \mathcal{U}, \ Y^{\nu}_{t,x,y}(T) \geq g\left(X^{\nu}_{t,x}(T)\right) \ \right\} \, ,
$$

où g est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

Ce problème, dit de “cible stochastique”, a été étudié par [SoTo02] dans le cas d'une diffusion brownienne où $\beta = b = 0$, voir également [SoTo02b] pour les liens avec les flots géométriques et [SoTo04]. Il s'agit d'une extension naturelle des problèmes de sur-réplication rencontrés en finance mathématique. En effet, on peut voir $Y^{\nu}_{t,x,y}$ comme le processus de portefeuille associé à une stratégie financière ν sur un marché constitué par les actifs risqués $X^{\nu}_{t,x}$. La fonction g s'interprète alors comme le “pay-off” d'une option et $\Gamma(t,x)$ comme l'ensemble des richesses initiales permettant de se couvrir sans risque contre la livraison de l'option européenne $g\left(X^{\nu}_{t,x}(T)\right)$. La borne inférieure

$$
u(t,x) := \inf \Gamma(t,x) \tag{1.1}
$$

correspond au prix de sur-réplication de $g\left(X^{\nu}_{t,x}(T)\right)$.

En finance, l'étude de la fonction u repose généralement sur une formulation duale qui permet de se ramener à un problème de contrôle écrit sous une forme standard. En utilisant des techniques classiques de programmation dynamique, elle permet de caractériser u comme solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Mais une telle formulation n'est pas toujours disponible. C'est le cas en particulier pour les problèmes de couverture de grands investisseurs dont la stratégie ν peut influencer l'évolution du sous-jacent X. C'est également le cas pour les problèmes de couverture sous contrainte gamma étudiés dans [SoTo00], voir également [SoTo04] et [SoTo05]. C'est enfin le cas pour une plus grande variété de questions liées à la couverture de risques exogènes, comme celle de la gestion optimale de provisions que nous étudions dans [3].

Pour caractériser u comme solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, il faut alors avoir recours à un principe de programmation dynamique directement écrit sur le problème de cible. Dans notre cadre il s'énonce sous la forme suivante.

Proposition 1.8 *Soit* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.
(DP1) *Soit* $y \in \mathbb{R}$ *et* $\nu \in \mathcal{U}$ *tels que* $Y^{\nu}_{t,x,y}(T) \geq g\left(X^{\nu}_{t,x}(T)\right)$. *Alors, pour tout temps d'arrêt* $\theta \geq t$, *on a :*

$$
Y^{\nu}_{t,x,y}(\theta) \geq u\left(\theta, X^{\nu}_{t,x}(\theta)\right) \, .
$$

(DP2) *Soit* $y := u(t,x)$, $\eta > 0$ *et* $\theta \geq t$ *un temps d'arrêt. Alors, quel que soit* $\nu \in \mathcal{U}$ *:*

$$
\mathbb{P}\left[Y^{\nu}_{t,x,y-\eta}(\theta) > u\left(\theta, X^{\nu}_{t,x}(\theta)\right)\right] < 1 \, .
$$

Une version générale de ce principe est démontrée dans [SoTo02]. Dans [3], on l'établit sous l'hypothèse : pour tout $(t,x,y,\tilde{y}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\tilde{y} \;\geq\; y \quad \text{et} \quad y \;\in\; \Gamma(t,x) \;\Longrightarrow\; \tilde{y} \;\in\; \Gamma(t,x)\;.$$

Celle-ci permet de caractériser Γ par sa borne inférieure. Lorsque $\beta = b = 0$, cas étudié par [SoTo02], cette hypothèse est toujours vérifiée par continuité des trajectoires de Z. Pour se passer de cette hypothèse, il faudrait travailler directement sur la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{y\in\Gamma(t,x)}$, voir [SoTo02c].[1]

Caractérisation de la borne inférieure

Si on suppose que u est suffisamment régulière et que l'infimum est atteint dans (1.1) le principe de programmation dynamique de la Proposition 1.8 implique, au moins formellement, que l'on doit trouver un contrôle $\nu \in \mathcal{U}$ tel que

$$d\left(Y^{\nu}_{t,x,y}(t) - u(t, X^{\nu}_{t,x}(t))\right) \quad \geq \quad 0\;,$$

si $y = u(t,x)$. En particulier, on doit pouvoir trouver $\nu \in U$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\nu}u(t,x) \quad &:= \quad r(t,x,u(t,x),\nu) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \rho(t,x,\nu)^{'}Du(t,x) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\mathrm{Trace}\left(D^2u(t,x)\alpha^{'}(t,x,\nu)\alpha(t,x,\nu)\right) \geq 0\;, \\
\mathcal{G}^{\nu,e}u(t,x) \quad &:= \quad b(t,x,u(t,x),\nu,e) - u\left(t, x+\beta(t,x,\nu,e)\right) + u\left(t,x\right) \geq 0\;.
\end{aligned}$$

Il est également clair que la partie brownienne de la différence doit absolument être nulle. Autrement dit, si on suppose que l'application $\nu \mapsto \alpha^{-1}(t,x,\nu)a(t,x,y,\nu)$ est inversible d'inverse $\psi(t,x,y,\cdot)$ pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, alors $\nu(t)$ doit coïncider avec $\psi(t,x,u(t,x),Du(t,x))$. Si U est convexe et δ désigne sa fonction support :

$$\delta(\zeta) := \sup_{\bar{\nu}\in U} \zeta'\bar{\nu} \;\;,\;\; \zeta \in \mathbb{R}^d\;,$$

alors $\nu(t)$ doit en outre vérifier

$$\chi(\nu(t)) := \inf_{\zeta\in\tilde{U}_1} \left(\delta(\zeta) - \zeta^{'}\nu(t)\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu(t) \in U\;,$$

où $\tilde{U}_1$ est la restriction à la boule unité de $\tilde{U} := \mathrm{dom}(\delta)$ (ici il s'agit simplement de la boule unité mais on se re-servira de cette notation dans la section suivante). Autrement dit, on doit avoir $\widehat{\mathcal{H}}u \geq 0$ avec

$$\widehat{\mathcal{H}}u(t,x) \quad := \quad \min\left\{\mathcal{L}^{\nu}u(t,x)\;;\; \inf_{e\in E}\mathcal{G}^{\nu,e}u(t,x)\;;\; \chi(\nu)\right\} \;\; \text{pour } \nu = \psi(t,x,u(t,x),Du(t,x))\;.$$

Il est également clair que l'une de ces inégalités doit être saturée. Dans [3], on montre que cette équation est vérifiée au sens de la viscosité.

[1] Le cas général a été étudié sous ma direction par Nicolas Saintier qui vient de finir une thèse à l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

Théorème 1.9 *Si u est localement bornée, alors elle est solution de viscosité discontinue sur $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ de $\widehat{\mathcal{H}}\varphi = 0$.*

Afin d'obtenir une caractérisation complète de u, on s'intéresse ensuite au bord en T.

Théorème 1.10 *Si u est localement bornée, alors les fonctions*

$$\bar{G}(x) \;:=\; \limsup_{t\uparrow T, x'\to x} u(t,x') \quad \textit{and} \quad \underline{G}(x) \;:=\; \liminf_{t\uparrow T, x'\to x} u(t,x') \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

sont, respectivement, sur- et sous-solution de viscosité sur $\mathbb{R}^d$ de

$$\min\left\{\varphi(x) - g_*(x) \;;\; \widehat{\mathcal{T}}\varphi(x)\right\} = 0 \quad \textit{et} \quad \min\left\{\varphi(x) - g^*(x) \;;\; \widehat{\mathcal{T}}\varphi(x)\right\} = 0 \;,$$

où

$$\widehat{\mathcal{T}}\varphi(x) \;\;:=\;\; \min\left\{\inf_{e\in E} \mathcal{G}^{\nu,e}\varphi(T,x) \;;\; \chi_U(\nu)\right\} \qquad \textit{pour } \nu = \psi(T,x,\varphi(x),D\varphi(x)) \;.$$

Ici g_* et g^* sont les enveloppes sci et scs de g. La difficulté majeure par rapport au travail de [SoTo02], qui considère le cas où $b = \beta = 0$, réside dans la preuve de la partie sous-solution où il faut contrôler les trajectoires des processus, ici discontinues, au sens presque sur.

Lorsque $a = \alpha = 0$, la contrainte sur le contrôle ν due à la présence du mouvement brownien disparaît et on obtient un résultat plus simple.

Théorème 1.11 *On suppose que $a = \alpha = 0$. Si u est localement bornée, alors elle est solution de viscosité discontinue sur $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ de*

$$\sup_{\nu\in U} \min\left\{\mathcal{L}^\nu\varphi(t,x) \;;\; \inf_{e\in E} \mathcal{G}^{\nu,e}\varphi(t,x)\right\} = 0 \;.$$

Par ailleurs, $\underline{G}$ et $\bar{G}$ vérifient respectivement sur $\mathbb{R}^d$

$$H_*(\underline{G}(x)) := \min\left\{\underline{G}(x) - g_*(x) \;;\; \sup_{\nu\in U}\, \inf_{e\in E} \mathcal{G}^{\nu,e}\underline{G}(x)\right\} \geq 0$$
$$H^*(\bar{G}(x)) := \min\left\{\bar{G}(x) - g^*(x) \;;\; \sup_{\nu\in U}\, \inf_{e\in E} \mathcal{G}^{\nu,e}\bar{G}(x)\right\} \leq 0 \;.$$

On peut remarquer que les conditions au bord en T sont maintenant énoncées dans un sens fort (et non au sens de la viscosité). Ceci est naturel puisque ces conditions ne font plus intervenir de termes locaux de dérivée.

Moyennant certaines hypothèses supplémentaires, on montre dans [3] que, si g est continue et $a = \alpha = 0$, alors $G := \underline{G} = \bar{G}$ est la plus petite solution de l'équation $H_* = 0$.

Enfin, on étudie plus particulièrement deux exemples d'application. Le premier correspond au problème de sur-réplication dans un modèle à volatilité stochastique, dirigée par un processus de sauts, et dans lequel un dividende aléatoire, également dirigé par un processus de sauts, est payé à une date fixe. Le second correspond à un problème de gestion optimale de provisions pour une entreprise industrielle qui peut se couvrir contre un risque (dont la réalisation est modélisée par un processus de Poisson) soit en s'assurant soit en investissant de manière à réduire ce risque.

2 Options à barrière et contraintes convexes

Modèle et dérivation formelle de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Dans [17], on s'intéresse à l'évaluation d'options à barrière sous contrainte de portefeuille. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un problème de cible stochastique similaire à celui étudié dans la section précédente (dont on reprend les notations) mais dans lequel l'ensemble à atteindre dépend du temps de sortie d'un domaine. On cherche à caractériser la borne inférieure $u(0, X_0)$ de l'ensemble

$$\left\{y \in \mathbb{R} \ : \ \text{ il existe } \nu \in \mathcal{U} \text{ tel que } Y_y^\nu(\tau) \geq g(\tau, X(\tau))\right\}$$

où $\tau := \inf\{t \in [0,T] \ : \ X(t) \notin \mathcal{O}\} \wedge T$, $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, le processus X est la solution de

$$X(t) \ = \ X_0 + \int_0^t \text{diag}\,[X(s)]\,\sigma(s, X(s))dW_s \ , \ \ t \leq T$$

et Y_y^ν est le processus contrôlé défini par

$$Y_y^\nu(t) \ = \ y + \int_0^t Y_y^\nu(s)\nu(s)'\text{diag}\,[X(s)]^{-1}\,dX(s) \ = \ y + \int_0^t Y_y^\pi(s)\nu(s)'\sigma(s, X(s))dW_s \ .$$

Ici, σ est supposée continue, bornée et d'inverse localement bornée, et $(t,x) \mapsto \text{diag}\,[x]\,\sigma(t,x)$ est lipschitzienne.

Du point de vue financier, X modélise le processus de prix de d actifs risqués sur un marché où l'actif sans risque est pris comme numéraire, Y_y^ν est le processus de richesse associé à la dotation initial $y \in \mathbb{R}$ et à la stratégie ν appartenant à l'ensemble $\mathcal{U}$ des processus prévisibles presque sûrement de carré intégrable tels que $\nu \in U \ dt \times d\mathbb{P}$-p.p., où U est maintenant un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^d$.

En finance, les contraintes de portefeuille apparaissent naturellement lorsque certains actifs ne peuvent être vendus à découvert. Elles peuvent également être imposées par l'agent financier lorsqu'il veut éviter d'investir une part trop importante de sa richesse dans certains actifs risqués. C'est typiquement le cas pour les options dont le profil de paiement est discontinu ou pour les options barrière pour lesquelles suivre une stratégie de couverture sans contrainte de type Black et Scholes peut conduire à acheter ou vendre une très grande quantité de sous-jacents.

Lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$ et σ est constante, le résultat remarquable de [BrCvS98] montre que le problème de couverture sous contrainte est équivalent à un problème de couverture sans contrainte dans lequel la fonction g est remplacée par une fonction $\hat{g}$ qui la domine et qui permet d'adopter une couverture satisfaisant automatiquement la contrainte. On parle de "face-lifting". Dans un modèle de diffusion markovienne, [CvPhT99b] étend ce résultat et donne une caractérisation en terme d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman de la fonction valeur associée, voir également le survey de [SoTo04].

L'objectif du papier [17] est de généraliser [CvPhT99b] au cas $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}^d$, ou encore $\mathcal{O}^* := \mathcal{O} \cap (0,\infty)^d \ \neq \ (0,\infty)^d$, puisque X est à composantes strictement positives. D'après les résultats de la section 1, on peut s'attendre à ce que la fonction u soit solution de viscosité discontinue à l'intérieure du domaine $D = [0,T) \times \mathcal{O}^*$ de

$$\min\{-\mathcal{L}\varphi\ ,\ \mathcal{H}\varphi\} = 0$$

où

$$\mathcal{H}\varphi(t,x) = \inf_{\rho\in\tilde{U}_1} \big(\delta(\rho)\varphi(t,x) - \rho'\mathrm{diag}\,[x]\, D\varphi(t,x)\big)\ ,\ \mathcal{L}\varphi(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sigma\sigma' D^2\varphi(t,x)\right]\ .$$

Par ailleurs, les résultats de [CvPhT99b] indiquent que la condition au bord en T devrait s'écrire

$$u(T-,x) \quad = \quad \hat{g}(T,x) := \sup_{\rho\in\tilde{U}} e^{-\delta(\rho)} g(T, xe^{\rho})$$

ce qui correspond à la propriété de "face-lifting" mise en évidence par [BrCvS98]. Il reste donc à fournir une condition sur le bord du domaine en espace $(0,T) \times \partial\mathcal{O}^*$ où $\partial\mathcal{O}^* := \partial\mathcal{O} \cap (0,\infty)^d$. Le résultat obtenu par [ShScW02] dans le modèle de Black et Scholes montre que la condition naturelle au bord $g(t,x)$ n'est en générale pas satisfaite de manière continue à cause de la contrainte imposée sur le portefeuille. D'un point de vue mathématique, cela s'exprime sous la forme d'une condition relaxée

$$\min\{u(t,x) - g(t,x)\ ,\ \mathcal{H}u(t,x)\} \quad = \quad 0\ .$$

Autrement dit, soit la condition naturelle au bord est satisfaite, soit la contrainte sur le contrôle ν est saturée. Intuitivement, la contrainte $\mathcal{H}u(t,x) \geq 0$ implique également un "lifting" de g ce qui devrait permettre de ré-écrire cette condition sous la forme

$$\min\{u(t,x) - \hat{g}(t,x)\ ,\ \mathcal{H}u(t,x)\} \quad = \quad 0\ ,$$

où $\hat{g}(t,x) := \sup_{\rho\in\tilde{U}(x,\partial\mathcal{O})} e^{-\delta(\rho)} g(t, xe^{\rho})$ pour $t < T$, avec $\tilde{U}(x,E) := \left\{\rho \in \tilde{U}\ :\ xe^{\rho} \in E\right\}$ si $E \subset \bar{\mathcal{O}}$.

Caractérisation par solutions de viscosité

La principale difficulté dans la dérivation des équations décrites ci-dessus vient de la contrainte sur le bord en espace. Dans [17], on suppose que le bord de $\mathcal{O}$ est régulier dans le sens où : il existe une fonction $d : (0,\infty)^d \mapsto \mathbb{R}$, C^2 dans un voisinage de $\partial\mathcal{O}^*$ telle que $\{x \in (0,\infty)^d\ :\ d(x) > 0\} = \mathcal{O}^*$ et $\{x \in (0,\infty)^d\ :\ d(x) = 0\} = \partial\mathcal{O}^*$. Cela revient essentiellement à supposer le bord C^2, voir [GiTr77], sauf que l'on se restreint à $(0,\infty)^d$. Encore une fois, cette restriction est naturelle puisque le processus X est à composantes strictement positives.

Grâce à cette condition, et d'autres hypothèses exposées ci-dessous, on montre que u est sous-solution discontinue de $\mathcal{B}\varphi = 0$ où

$$\mathcal{B}\varphi \quad := \quad \begin{cases} \min\{-\mathcal{L}\varphi\ ,\ \mathcal{H}\varphi\} & \text{sur} \quad D \\ \min\{\varphi - \hat{g}\ ,\ \mathcal{H}\varphi\} & \text{sur} \quad \partial_x D^* := [0,T) \times \partial\mathcal{O}^* \\ \varphi - \hat{g} & \text{sur} \quad \partial_T D^* = \{T\} \times \bar{\mathcal{O}}^* \end{cases} ,$$

où $\bar{\mathcal{O}}^* := \bar{\mathcal{O}} \cap (0,\infty)^d$. Toutefois, il est assez facile de voir que $\mathcal{B}$ ne peut admettre de sur-solution du fait de la condition sur $\partial_x D^*$ qui est mal définie. De manière à résoudre ce problème, on introduit un autre opérateur

$$\mathcal{B}_d\varphi \;:=\; \begin{cases} \mathcal{B}\varphi & \text{on} \quad D \cup \partial_T D^* \\ \min\{\varphi - \hat{g}\ ,\ \mathcal{H}_d\varphi\} & \text{on} \quad \partial_x D^* \end{cases} ,$$

avec

$$\mathcal{H}_\mathrm{d}\varphi(t,x) \;=\; \inf\left\{\delta(\rho)\varphi(t,x) - \rho' \mathrm{diag}\,[x]\, D\varphi(t,x),\ \rho \in \tilde{U}_1(x,\bar{\mathcal{O}})\right\} ,$$

où

$$\tilde{U}_1(x,\bar{\mathcal{O}}) \;:=\; \left\{\rho \in \tilde{U}_1\ :\ \exists\, \lambda_0 > 0 \text{ t.q. } \lambda\rho \in \tilde{U}(x,\bar{\mathcal{O}}) \forall \lambda \in [0,\lambda_0]\right\} .$$

On définit la notion de solution de viscosité discontinue de $\mathcal{B}\varphi$ sur $\bar{D}^* := [0,T] \times \bar{\mathcal{O}}^*$ comme suit.

Définition 2.12 *On dit qu'une fonction localement bornée w est solution de viscosité discontinue de $\mathcal{B}\varphi = 0$ sur $\bar{D}^*$ si w_* et w^* définie sur $\bar{D}$ par*

$$w_*(t,x) \;:=\; \liminf_{(\tilde{t},\tilde{x}) \in D,\ (\tilde{t},\tilde{x}) \to (t,x)} w(\tilde{t},\tilde{x}) \quad et \quad w^*(t,x) \;:=\; \limsup_{(\tilde{t},\tilde{x}) \in D,\ (\tilde{t},\tilde{x}) \to (t,x)} w(\tilde{t},\tilde{x})$$

sont respectivement sur- et sous-solution de $\mathcal{B}_d\varphi = 0$ et $\mathcal{B}\varphi = 0$ sur $\bar{D}^*$. Plus généralement, on dira que w est une sursolution (resp. soussolution) discontinue de viscosité de $\mathcal{B}\varphi = 0$ sur $\bar{D}^*$ si w_* est sursolution de $\mathcal{B}_d\varphi = 0$ (resp. soussolution de $\mathcal{B}\varphi = 0$) sur $\bar{D}^*$.

Remarque 2.13 Il serait naturel d'utiliser la notion usuelle de conditions au bord au sens de la viscosité pour les solutions discontinues, voir par exemple la Définition 7.4 de [CrIsL92]. Dans ce cas, il faudrait introduire les opérateurs

$$(\mathcal{B}_\mathrm{d})_+\varphi(t,x) \;=\; \max\{\mathcal{B}_\mathrm{d}\varphi(t,x)\ ,\ \min\{-\mathcal{L}\varphi(t,x), \mathcal{H}\varphi(t,x)\}\ \}$$

et

$$(\mathcal{B}_\mathrm{d})_-\varphi(t,x) \;=\; \min\{\mathcal{B}\varphi(t,x)\ , -\mathcal{L}\varphi(t,x)\ \}\ ,$$

qui correspondent aux enveloppes semi-continues supérieures et inférieures de $\mathcal{B}_\mathrm{d}$ sur $\bar{\mathcal{O}} \times [0,T)$. Toutefois, sous les hypothèses faites ci-dessous, on peut montrer que $(\mathcal{B}_\mathrm{d})_+\varphi = 0$ (resp. $(\mathcal{B}_\mathrm{d})_-\varphi = 0$) admet les mêmes sur-solutions que $\mathcal{B}_\mathrm{d}\varphi = 0$ (resp. sous-solutions que $\mathcal{B}\varphi = 0$) sur $D \cup \partial_x D^*$, pour la condition terminale $\varphi = \hat{g}$ en T. Notre définition est donc cohérente avec celle de [CrIsL92].

Afin d'obtenir une première caractérisation, nous avons besoin de conditions supplémentaires sur l'espace des contraintes U que l'on écrit sur $\tilde{U}(x,\mathcal{O})$:

$\mathbf{H}_{\tilde{K}}$:

(i) Pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\rho \in \tilde{U}(x,\mathcal{O})$ implique $\lambda\rho \in \tilde{U}(x,\mathcal{O})$ pour tout $\lambda \in [0,1)$.

(ii) Pour tout $x \in \mathcal{O}$, la fermeture de $\tilde{U}(x,\mathcal{O})$ est égale à $\tilde{U}(x,\bar{\mathcal{O}})$.

(iii) Si $(x_n)_n$ est une suite de $\mathcal{O}$ convergeant vers $x \in \partial\mathcal{O}$ et $\rho \in \tilde{U}(x,\bar{\mathcal{O}})$ alors il existe une suite $\rho_n \to \rho$ telle que, à une sous-suite près, $\rho_n \in \tilde{U}(x_n,\bar{\mathcal{O}})\ \forall\ n \geq 1$.

Ces hypothèses sont généralement vérifiées dans les applications financières. On a également besoin d'hypothèses de régularité et de croissance sur g :

H$_g$: (i) g est semi-continue inférieurement sur $[0,T] \times \partial\mathcal{O}^*$ et sur $\{T\} \times \bar{\mathcal{O}}^*$.
(ii) $\exists\, C_g > 0$ et $\bar{\gamma} \in K \cap \mathbb{R}^d_+$ t.q. $|g(\cdot,x)| \le C_g \left(1 + \prod_{i=1}^d (x^i)^{\bar{\gamma}^i}\right)$ $\forall\, x \in \bar{\mathcal{O}}^*$,
(iii) $\hat{g}$ est semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times (0,\infty)^d$ et à une croissance linéaire.

On suppose en outre que $g \ge 0$ sur $\mathcal{O} \cap (0,\infty)^d$ et que $g = 0$ sur $[0,T] \times \bar{\mathcal{O}}^c$.

Théorème 2.14 *Sous les conditions précédentes*
(i) *u est solution de viscosité discontinue de $\mathcal{B}\varphi = 0$ sur $\bar{D}^*$,*
(ii) *u est semi-continue inférieurement sur D,*
(iii) *u_* est la plus petite sur-solution de $\mathcal{B}\varphi = 0$ sur $\bar{D}^*$ dans la classe des fonctions w vérifiant la condition de croissance*

$$\exists\, C > 0 \;\; t.q. \; \forall\, (t,x) \in \bar{D}^* \;\; : \;\; |w(t,x)| \le C \left(1 + \prod_{i=1}^d (x^i)^{\bar{\gamma}^i}\right) . \tag{2.2}$$

Pour obtenir ce résultat, on a utilisé la formulation duale du prix de sur-réplication sous contraintes de [FoKr97] qui permet de ré-écrire le problème de cible sous forme d'un problème de contrôle (singulier) sous forme standard pour lequel on a un principe de programmation dynamique. On aurait également pu utiliser l'approche directe de la section 1.
La difficulté majeure vient de la condition sur le bord $\partial_x D^*$. On commence par écrire une condition au bord de type viscosité contrainte qui fait apparaître l'opérateur $\mathcal{L}$. Puis on utilise la régularité de $\partial\mathcal{O}^*$ pour éliminer ce terme en jouant sur la fonction d. La propriété (iii) est obtenue par approximation du problème par une suite croissante de problèmes de contrôle non singuliers. On dérive une suite d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman associées pour lesquelles on prouve un théorème de comparaison. On fait alors face à une difficulté qui vient de la particularité de la condition de croissance (2.2). En effet, celle-ci n'est pas écrite comme les conditions de croissance polynomiales usuelles qui permettent facilement de se ramener à un compact par pénalisation. L'assertion (ii) est essentiellement une conséquence de la convergence monotone des problèmes pénalisés et des théorèmes de comparaison associés.

On peut remarquer que (ii)-(iii) fournit déjà une caractérisation complète de u. Afin d'obtenir un résultat d'unicité de la solution de $\mathcal{B}\varphi = 0$, on a besoin d'hypothèses supplémentaires qui nous permettent, essentiellement, d'oublier la condition au bord $\partial_x D^*$ et de gérer le terme $\mathcal{H}\varphi$ dans l'intérieur du domaine :

H$'$: (i) Soit $\bar{\mathcal{O}}$ est borné, soit $\exists\, \varrho > 1$ t.q. $\varrho\bar{\gamma} \in U \cap (0,\infty)^d$,
(ii) $\mathrm{int}(U) \neq \emptyset$, et, soit $0 \in \mathrm{int}(U)$, soit $\bar{\mathcal{O}} \cap \partial\mathbb{R}^d_+ = \emptyset$,
(iii) $\forall\, x \in \partial\mathcal{O}^* \; \exists\, \rho \in \tilde{K}_1$ t.q. $Dd(x)'\mathrm{diag}\,[x]\,\rho > 0$.

Théorème 2.15 *Si* **H$'$** *est vérifiée alors,*
(i) *$u_* = u^*$ sur $\bar{D}^*$,*
(ii) *u est continue sur D,*
(iii) *u est l'unique solution de viscosité (au sens discontinu) de $\mathcal{B}\varphi = 0$ sur $\bar{D}^*$ vérifiant la condition de croissance (iii) du théorème précédent.*

Là encore la faiblesse de la condition de croissance (2.2) pose un problème. Pour traiter le terme $\mathcal{H}$ apparaissant dans l'opérateur $\mathcal{B}$, on construit une sur-solution stricte. On introduit également une fonction de pénalisation qui permet d'éviter le bord $\partial_x D^*$. On énonce en fait un résultat de comparaison générale pour cette équation. A notre connaissance, c'est la première fois qu'une telle équation est étudiée dans la littérature.

On étudie également un cas particulier qui correspond à celui résolu explicitement par [ShScW02]. On propose un schéma de discrétisation de $\mathcal{B}\varphi = 0$ pour cet exemple et on montre sa convergence. L'excellente performance de l'algorithme est observée numériquement.

3 Sur-réplication et coûts de transaction proportionnels

Dans les articles [1] et [15], on s'intéresse au problème de sur-couverture d'une option européenne dans un modèle de diffusion markovienne avec coûts de transaction proportionnels. Lorsque l'achat et la vente de l'actif sous-jacent est soumis à des coûts strictement positifs, ce problème a largement été étudié depuis la fameuse conjecture de Davis et Clark [DaCl94] selon laquelle la stratégie de couverture devrait consister à acheter immédiatement une certaine quantité de sous-jacent puis à ne plus faire de transaction jusqu'à la maturité de l'option. C'est ce que l'on appelle une stratégie "buy-and-hold". Ce résultat a été démontré à différents niveaux de généralité par [SoShC95], [LeSk97] et [CvPhT99] dans des modèles ne comportant qu'un actif risqué.

Notre contribution est double. Dans [1], on obtient une extension, non triviale, des résultats de [CvPhT99] aux cas de plusieurs sous-jacents. Dans [15], on améliore ces résultats en considérant un modèle dans lequel il n'y a pas de coûts de transaction entre certains actifs. Il s'agit d'une situation qui, à notre connaissance, n'avait jamais été considérée jusqu'alors dans la littérature sur les modèles en temps continu. Par la suite, on se place dans le cadre de [15], le résultat obtenu dans [1] pouvant être considéré comme un cas particulier.

Marché financier

On considère un marché constitué de trois types d'actif. On suppose tout d'abord qu'il existe un actif sans risque Q^0 que l'on prend comme numéraire : $Q^0 \equiv 1$. On considère ensuite un vecteur de m actifs risqués $P = (P^1, \ldots, P^m)$ qui peuvent être négociés librement, i.e. sans payer de coûts de transaction. Enfin, on considère un vecteur de d actifs risqués $Q = (Q^1, \ldots, Q^d)$ dont la négociation est soumise à des coûts de transaction proportionnels. Suivant la modélisation proposée par [Ka99], on suppose que l'on peut faire des transactions directes entre les actifs Q^i. Typiquement, on peut voir P comme un vecteur d'actifs négociés sur un marché domestique alors que les Q^i correspondent à des devises étrangères.

La dynamique du vecteur des actifs risqués $S = (P, Q)$ est de type Black-Scholes à volatilité locale :

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \operatorname{diag}[S(t)]\, \sigma(t, S(t)) dW(t) ,$$

où $\operatorname{diag}[s]\sigma(t,s)$ est supposée globalement lipschitzienne sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+^{d+m}$ pour assurer l'existence d'une solution à cette équation. Par la suite on supposera également que σ est localement bornée, inversible en tout point de $\mathbb{R}_+^{d+m}$ et d'inverse localement bornée.

Les coûts de transactions sont modélisés par une matrice de coefficients $\lambda^{ij} \geq 0$, $i,j = 0,\ldots,d$. Si on note $\tau_t^{ij} := Q^j(t)/Q^i(t)$ le taux de change, avant coûts de transaction, entre Q^i et Q^j au temps t, on doit donc payer $\pi_t^{ij+} := \tau_t^{ij}(1+\lambda^{ij})$ unités de Q^i pour obtenir une unité de Q^j. On obtient $\pi_t^{ij-} := \tau_t^{ij}/(1+\lambda^{ji})$ unités de Q^i en vendant une unité de Q^j. L'intervalle $[\pi_t^{ij-}\ ,\ \pi_t^{ij+}]$ correspond à la fourchette de prix d'achat-vente de Q^j en terme de Q^i.

Processus de richesse

Un portefeuille est un processus $X = (X^0, X^1, \ldots, X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Chaque composante X^i correspond au montant investi dans l'actif Q^i correspondant. Si on modélise la quantité d'actifs P détenue par un processus prévisible ϕ et si on suppose qu'il n'y a pas d'échanges faisant intervenir les actifs non librement échangeables $Q^1, \ldots, Q^d$, la dynamique de la richesse est donnée par

$$X^0(t) = X^0(0) + \int_0^t \phi(r)' dP(r) \quad \text{et} \quad X^i(t) = X^i(0) + \int_0^t \frac{X^i(r)}{Q^i(r)}\, dQ^i(r)\ \ ,\ i = 1,\ldots,d\ .$$

Pour modéliser les transactions faisant intervenir les actifs $Q^1, \ldots, Q^d$, on suit l'approche de la section I.2.1., i.e. on modélise le montant cumulé transféré entre les actifs Q^i et Q^j par un processus L^{ij} croissant continu à droite de valeur initial $L^{ij}(0-) = 0$. Ceci conduit à définir le processus de richesse comme solution de

$$\begin{aligned} X^0(t) &= X^0(0-) + \int_0^t \phi(r)' dP(r) + \sum_{j=1}^d \left[L^{j0}(t) - (1+\lambda^{0j})L^{0j}(t)\right] \\ X^i(t) &= X^i(0-) \int_0^t \frac{X^i(r)}{Q^i(r)}\, dQ^i(r) + \sum_{j=0}^d \left[L^{ji}(t) - (1+\lambda^{ij})L^{ij}(t)\right]\ \ ,\ i = 1,\ldots,d\ . \end{aligned}$$

Une stratégie de gestion est un couple $\nu = (\phi, L)$ où $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^m)$ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ presque sûrement de carré intégrable et $L = (L^{ij};\ i,j = 0,\ldots,d)$ est un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{M}^{1+d}$ dont chaque composante est continue à droite, croissante et vaut 0 en $0-$. Par la suite, on notera X_x^ν la solution du système précédent associé à ν et la condition initiale $X_x^\nu(0-) = x$.

Dans ce modèle, une stratégie ν est admissible, et on écrit $\nu \in \mathcal{A}$, s'il existe $(c,\gamma,\delta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ tel que

$$X^\nu(t) + (c + \gamma' P(t), \delta\, Q(t)) \in K \ \ \mathbb{P}-\text{p.s. pour tout } t \leq T\ ,$$

où K est la région de solvabilité naturellement définie par

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^{1+d}\ :\ \exists\, a \in \mathbb{M}_+^{1+d},\ x^i + \sum_{j=0}^d (a^{ji} - (1+\lambda^{ij})a^{ij})\ \geq\ 0\ \ \forall\, i = 0,\ldots,d \right\}\ ,$$

voir la section I.2.1.

Caractérisation explicite du prix de sur-réplication

Un actif contingent européen est représenté par une variable aléatoire $(1+d)$-dimensionnelle et $\mathcal{F}_T$-mesurable de la forme $g(S(T)) = (g^0(S(T)), \ldots, g^d(S(T)))$ où g est une application de $\mathbb{R}_+^{m+d}$ dans $\mathbb{R}^{1+d}$. Chaque variable aléatoire $g^i(S(T))$ représente un montant d'actif Q^i devant être délivré en actif Q^i à maturité. Dire qu'un portefeuille X_x^ν permet de couvrir l'option $g(S(T))$ signifie simplement que le portefeuille à maturité du vendeur après livraison de l'option est un portefeuille solvable : $X_x^\nu(T) - g(S(T)) \in K$. Le prix de sur-réplication est donc défini comme

$$p(0, S(0)) \quad := \quad \inf\left\{w \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, \nu \in \mathcal{A},\ X_{we_1}^\nu(T) - g(S(T)) \in K\right\} \quad \text{où} \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0)\ .$$

Encore une fois, il s'agit d'un problème de cible stochastique mais cette fois-ci les contrôles sont mixtes. L'objectif de [1] et [15] est de prouver dans ce cadre multivarié la conjecture de Davis et Clark émise pour le cas $m = 0$ et $d = 1$:

$$p(0, S(0)) \quad := \quad \inf\left\{w \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, \nu \in \mathcal{A}^{BH},\ X_{we_1}^\nu(T) - g(S(T)) \in K\right\}\ , \tag{3.3}$$

où $\mathcal{A}^{BH} := \{\nu = (\phi, L) \in \mathcal{A} \ : \ L(t) = L(0) \text{ pour tout } 0 \le t \le T\}$, et de donner une caractérisation explicite de $p(0, S(0))$.
Pour obtenir ce résultat, on fait les hypothèses suivantes :
$(\mathbf{H}_\lambda)$: $\lambda^{ij} + \lambda^{ji} > 0$ pour tout $i, j = 0, \ldots, d,\ i \neq j$.
$(\mathbf{H}_\sigma)$: Pour tout $i \le m$ et $t \le T$, $[\sigma(t, s)^{ij}]_{j \le m+d}$ ne dépend que des m premières composantes de s.

La première hypothèse signifie qu'on ne peut pas trouver de couples $i \neq j$ tels que Q^i et Q^j puissent être échangés librement. La seconde est une hypothèse technique qui implique que la dynamique des actifs librement échangeables P ne dépend pas de ceux soumis aux coûts de transaction Q.

Moyennant quelques hypothèses techniques de croissance et de semi-continuité sur g, on montre que (3.3) est vérifiée. On décrit la stratégie de couverture optimale et on établit une formule explicite de la forme

$$p(0, S(0)) \quad = \quad \mathbb{E}\left[G(P(T))\right] + c(\text{diag}[\hat{\Delta}]Q(0))$$

où G est le payoff d'une nouvelle option ne dépendant que de $P(T)$, $\hat{\Delta}$ est la quantité d'actif Q correspondant à la stratégie "buy-and-hold" optimale et $c(\text{diag}[\hat{\Delta}]Q(0))$ est le coût de constitution, en numéraire, du portefeuille $\text{diag}[\hat{\Delta}]Q(0)$ à la date initiale. La couverture se fait donc en conservant en portefeuille $\hat{\Delta}^i$ unité de Q^i pour $i \ge 1$ et en couvrant dynamiquement l'option $G(P(T))$ avec les actifs P^j qui peuvent être échangés librement.

Le résultat de [1] correspond au cas où $m = 0$, ce qui revient à ne pas faire dépendre g de $P(T)$. Il est obtenu par des techniques de type viscosité. Dans un premier temps, on introduit une famille contrôlée de marchés fictifs dans lesquels il n'y a pas de coût de transaction et tels que les taux d'échange entre les actifs évoluent dans les intervalles de prix du modèle avec coûts de transaction. On redéfinit les prix de sur-réplication associés à chaque marché et on considère le sup de ces prix sur l'ensemble des marchés fictifs. Cela fournit une borne inférieure naturelle pour p. On dérive ensuite l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman associée à cette borne inférieure, en utilisant le principe de programmation dynamique pour les problèmes de cibles stochastiques de [SoTo02]. Dans [1], l'équation est suffisamment dégénérée pour pouvoir conclure directement par des arguments de viscosité similaires à ceux utilisés dans [CvPhT99].

Dans [15], l'équation ne permet pas de conclure directement. On est obligé d'introduire un nouveau problème de contrôle qui peut s'interpréter comme un problème de couverture dans un marché sans coût de transaction mais avec une matrice de volatilité stochastique (bornée) dans les directions associées à la composante Q de S. En adaptant les techniques employées dans [BaBiBL03] à notre problème, on arrive à montrer un théorème de comparaison pour l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman associée. On conclut en montrant que si la borne sur la partie stochastique de la volatilité tend vers l'infini, on retrouve un montant permettant de couvrir l'option $g(S(T))$ en suivant une stratégie dans $\mathcal{A}^{BH}$. Dans un certain sens, cela confirme l'intuition selon laquelle les coûts de transaction proportionnels sont assimilables à une volatilité stochastique non bornée.

Chapitre III

Estimation d'espérances conditionnelles et méthodes de Monte-Carlo pour l'approximation d'EDSR

Dans [9], on s'intéresse au calcul d'espérances conditionnelles $r(x) := \mathbb{E}\left[g(X_2) \mid X_1 = x\right]$ où g est une fonction borélienne telle que $g(X_2) \in L^2$ et X est un processus markovien. L'objectif est d'obtenir une famille d'estimateurs qui permettent de calculer efficacement et rapidement la fonction r en un grand nombre de points. La motivation principale de ce travail provient des schémas numériques présentés dans les sections suivantes qui servent à estimer les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades ([10], [16] et [18]). Ceux-ci nécessitent le calcul d'un grand nombre d'espérances conditionnelles qu'il est impossible d'estimer en pratique par les estimateurs de Monte-Carlo standards fondés sur le tirage dans la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1.

1 Estimation d'espérances conditionnelles et calcul de Malliavin

Réprésentations d'espérances conditionnelles et calcul de Malliavin

Dans [9], nous construisons une famille de représentations pour r. Celle-ci repose sur la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin. Cette approche est bien connue lorsqu'il s'agit de donner une représentation à la densité f_X d'une variable aléatoire X, régulière au sens de Malliavin, voir par exemple [Nu95]. On commence par écrire $f_X(x) = \mathbb{E}\left[\epsilon_x(X)\right]$ où ϵ_x désigne la masse de Dirac en x. Formellement (ce n'est évidemment pas correct !), on écrit que $D_t H_x(X) = \epsilon_x(X) D_t X$ où H_x dénote la fonction de Heaviside. On se donne ensuite un processus h tel que $\int_0^\infty D_t X h_t dt = 1$ de sorte que, toujours formellement, $\epsilon_x(X) = \epsilon_x(X) \int_0^\infty D_t X h_t dt = \int_0^\infty D_t H_x(X) h_t dt$. On conclut en utilisant la formule d'intégration par partie du calcul de Malliavin : $f_X(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty D_t H_x(X) h_t dt\right] = \mathbb{E}\left[H_x(X) \mathcal{S}^h(1)\right]$

où, pour une variable aléatoire F, $\mathcal{S}^h(F)$ désigne l'intégrale de Skorohod de $(Fh_t)_{t\geq 0}$.
Le même genre de procédé peut-être utilisé pour ré-écrire une espérance conditionnelle, il suffit de remarquer que $\mathbb{E}\left[g(X_2) \mid X_1 = x\right] = \mathbb{E}\left[g(X_2)\epsilon_x(X_1)\right] / \mathbb{E}\left[\epsilon_x(X_1)\right]$ et de procéder à une double intégration par partie entre les dates 0 et 1, puis entre 1 et 2. Lorsque $d > 1$, on est amené à opérer une intégration par parties par dimension. Au lieu d'obtenir une intégrale de Skorohod simple, on obtient alors une intégrale de Skorohod itérée.

Dans [KoPe02] cette approche est améliorée par l'introduction d'une fonction régulière φ bornée et à dérivées bornées vérifiant $\varphi(0) = 0$ appelée fonction de localisation. Comme $\epsilon_x(X)$ $= \epsilon_x(X)\varphi(X - x)$, on peut reprendre les calculs précédents pour obtenir une représentation de $f_X(x)$ sous la forme $\mathbb{E}\left[H_x(X)\mathcal{S}^h(\varphi(X - x))\right]$. La fonction de localisation a pour objectif de réduire la variance de l'estimateur de Monte-Carlo associé.

Afin d'énoncer notre résultat principal, il est nécessaire d'introduire quelques notations. A partir de maintenant, on suppose que X_1 et X_2 appartiennent à l'espace $\mathbb{D}^\infty$ des variables aléatoires k fois dérivables au sens de Malliavin, à dérivées admettant un moment d'ordre p, pour tout $k, p \geq 1$. Si h appartient à $L^2(\mathbb{M}^d; \Omega \times [0, 2])$, $F \in L^2(\mathbb{R}; \Omega)$ et $I = (i_1, \ldots, i_k) \subset \mathbb{N}^k$, on note (sous réserve que ces quantités soient bien définies)

$$\mathcal{S}_i^h(F) \;:=\; \int_0^2 F(h_t^i)'\delta W_t \quad \text{pour } i = 1, \ldots, d, \text{ et} \quad \mathcal{S}_I^h(F) \;:=\; \mathcal{S}_{i_1}^h \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{i_k}^h(F)$$

les intégrales étant prises au sens de Skorohod. On peut maintenant introduire l'ensemble $\mathbf{H}(X)$ des processus h de $L^2(\mathbb{M}^d; \Omega \times [0, 2])$ tels que

$$\int_0^2 D_t X_1 h_t dt \;=\; I_d \quad \text{et} \quad \int_0^2 D_t X_2 h_t dt \;=\; 0$$

et

$$\mathcal{S}_I^h(\varphi(X_1)) \in \mathbb{D}^{1,2} \quad \text{pour tout} \quad I \;\in\; \mathcal{J}_k \;,\; k \leq d \text{ et } \varphi \in \mathcal{L}\;.$$

Ici, $\mathcal{J}_k$ est l'ensemble des sous-ensembles $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de $\mathbb{N}^k$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq d$ (pour $k = 0$ on pose $\mathcal{J}_0 := \emptyset$), et $\mathcal{L}$ est l'ensemble des éléments (fonctions de localisation) φ de $C_b^0(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ tels que

$$\varphi(0) \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \partial_I \varphi \;\in\; C_b^0 \;\text{ pour tout }\; k = 0, \ldots, d \text{ et } I \in \mathcal{J}_k\;,$$

où $\partial_I \varphi = \partial^k \varphi / \partial x_{i_1}, \ldots \partial x_{i_k}$ si $I = (i_1, \ldots, i_k)$ et $\partial_\emptyset \varphi := \varphi$.

Notre principal résultat fournit une famille de représentations pour r paramétrée par les éléments de $\mathbf{H}(X)$ et $\mathcal{L}$.

Théorème 1.16 *Pour tout $h \in \mathbf{H}(X)$ et $\varphi \in \mathcal{L}$:*

$$r(x) \;:=\; \mathbb{E}\left[g(X_2) \mid X_1 = x\right] \;=\; \frac{\mathbb{E}\left[Q^{h,\varphi}[f](x)\right]}{\mathbb{E}\left[Q^{h,\varphi}[1](x)\right]}$$

où

$$Q^{h,\varphi}[f](x) \;\;:=\;\; H_x(X_1)f(X_2)S^h\left(\varphi(X_1 - x)\right) \;\;,\;\; \mathcal{S}^h := \mathcal{S}^h_{(1,\ldots,d)}\;.$$

Réduction de variance et fonction de localisation optimale

Dans [KoPe02], les auteurs justifient par un calcul formel que, si $d=1$ et $f\equiv 1$, la fonction de localisation qui minimise

$$I^h[f](\varphi) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\left[H_x(X_1)f(X_2)^2\mathcal{S}^h\left(\varphi(X_1-x)\right)^2\right]dx$$

est de type exponentielle. Comme $E\left[H_x(X_1)f(X_2)\mathcal{S}^h\left(\varphi(X_1-x)\right)\right]$ ne dépend pas de φ cela revient à minimiser la variance intégrée de $H_x(X_1)f(X_2)\mathcal{S}^h\left(\varphi(X_1-x)\right)$, critère usuel en statistique non-paramétrique. Dans [9], on donne une justification de ce résultat que l'on étend en dimension $d\geq 1$ quelconque. On suppose que

$$\sum_{k=0}^{d}\sum_{I\in\mathcal{J}_k}\mathbb{E}\left[f(X_2)^2\mathcal{S}_I^h(1)^2\right] \;<\; \infty \quad \text{ et } \quad \mathbb{E}[|f(X_2)|]>0$$

de manière à ce que le problème $\min_{\varphi\in\mathcal{L}} I^h[f](\varphi)$ ait un sens. Notons que seul $\varphi|_{\mathbb{R}^d_+}$ intervient dans $I^h[f](\varphi)$, on peut donc ne considérer que la restriction à $\mathbb{R}^d_+$ des fonctions de localisation.

Fonction de localisation séparable optimale

On se restreint tout d'abord aux fonctions de localisation séparables, i.e. de la forme

$$\varphi(x) \;=\; \prod_{i=1}^{d}\varphi_i(x^i) \;\;,\;\; \varphi_i:\; \mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}\;,$$

et on montre qu'il existe une unique solution au problème de minimisation de $I^h[f]$ dans cette classe. La solution optimale s'écrit $\hat{\varphi}(x) \;=\; e^{-\hat{\eta}'x}$ sur $\mathbb{R}^d_+$, où $\hat{\eta}\in(0,\infty)^d$ est l'unique solution d'un système d'équations non-linéaires que l'on peut résoudre numériquement. Lorsque $d=1$, on retrouve le résultat intuité dans [KoPe02].

Cas général et extension à l'espace BCD

Le cas général est plus délicat à traiter. On commence par ré-écrire $I^h[f](\varphi)$ sous la forme

$$I^h[f](\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d_+}\partial\varphi(\xi)'\mathbb{E}[QQ']\partial\varphi(\xi)d\xi\;, \tag{1.1}$$

où Q est un élément de $L^2(\mathbb{R}^\kappa)$, voir [9] pour une définition exacte, et $\partial\varphi$ est le vecteur colonne $\partial\varphi \;:=\; \left(\,\partial_I\varphi\,\right)_{I\in\mathcal{J}_k,\,k=0,\ldots,d}\in\mathbb{R}^\kappa$, la définition de κ est implicite. Il faut remarquer que le critère de minimisation ne fait intervenir que φ, ses dérivées premières puis uniquement les dérivées croisées. Ceci conduit à construire un espace de Sobolev ne faisant intervenir que ces dérivées. On définit ainsi l'espace $\mathtt{BCD}_0(\mathbb{R}^d_+)$ des fonctions $\varphi\;:\mathbb{R}^d_+\to\mathbb{R}$ telles que les dérivées $\partial_I\varphi, I\in\mathcal{I}_k, k=0,...,d$, existent, sont continues sur l'intérieur de $\mathbb{R}^d_+$ et peuvent être étendues continuement sur le bord de $\mathbb{R}^d_+$. On munit cet espace du produit scalaire

$$<\varphi,\psi>_{\mathtt{BCD}_0}:=\int_{\mathbb{R}^d_+}\partial\varphi'(x)\partial\psi(x)dx$$

puis on le complète pour la norme associée pour obtenir l'espace $\mathtt{BCD}(\mathbb{R}^d_+)$, *bounded cross derivatives*, que l'on muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathtt{BCD}} =< \cdot, \cdot >^{1/2}_{\mathtt{BCD}_0}$.

Il faut noter que la formule du Théorème 1.16 reste valable si φ appartient à $C^0 \cap \mathtt{BCD}$ et vérifie $\varphi(0) = 1$. Pour donner un sens à la condition $\varphi(0) = 1$ pour toute fonction de $\mathtt{BCD}$, on prouve un théorème d'injection continue de $\mathtt{BCD}$ vers $C^0_b\left(\mathbb{R}^d_+\right)$. On peut ainsi étendre la formule du Théorème 1.16 à l'ensemble

$$\bar{\mathcal{L}}^{\mathtt{BCD}} := \left\{\varphi \in \mathtt{BCD}(\mathbb{R}^d_+) \ : \ \varphi(0) = 1\right\} .$$

D'après (1.1), le problème de minimisation de $I^h[f](\varphi)$ sur $\bar{\mathcal{L}}^{\mathtt{BCD}}$ est un problème convexe. Si on suppose également que $\mathbb{E}[QQ']$ est définie positive, ce problème est alors strictement convexe et coercif. On montre en outre que $\bar{\mathcal{L}}^{\mathtt{BCD}}$ est fermé pour $\|\cdot\|_{\mathtt{BCD}}$, ce qui nous permet de conclure à l'existence d'une solution au problème

$$\inf_{\varphi \in \bar{\mathcal{L}}^{\mathtt{BCD}}} I^h[f](\varphi) .$$

Dans [9], on explique comment obtenir une caractérisation de cette solution en terme de systèmes d'EDP. Un exemple en dimension deux montre qu'en général la fonction optimale dans $\bar{\mathcal{L}}^{\mathtt{BCD}}$ n'est pas séparable.

2 Discrétisation et approximation numérique d'EDSR

Depuis le milieu des années 90, une large littérature s'est développée autour des problèmes de résolution numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR), essentiellement dans le cas où la filtration est brownienne. Dans [MaPrY94] et [DoMaP96], les auteurs proposent une approche générale qui permet notamment d'approximer la solution d'une EDSR de type

$$Y_t \ = \ g(X_T) + \int_t^1 h(X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^1 (Z_s)' dW_s \tag{2.2}$$

avec

$$X_t \ = \ X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

où g, h, b et σ sont uniformément lipschitziennes. Leur approche repose sur le lien existant entre Y et la solution u, dans un sens éventuellement faible, de l'EDP parabolique semi-linéaire

$$-\mathcal{L}u(t,x) - h\left(x, u(t,x), \sigma(x)\nabla_x u(t,x)\right) \ = \ 0 \quad , \quad u(1,x) \ = \ g(x) \, , \tag{2.3}$$

où $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur de Dynkin associé à X. Il est en effet connu, voir par exemple [PaPe92] et [Pa98], que, sous certaines hypothèses techniques, on a $Y_t = u(t, X_t)$ et $Z_t = \sigma(X_t)\nabla_x u(t, X_t)$. Pour simuler (Y, Z), on peut donc commencer par estimer numériquement u et $\nabla_x u$ puis approcher X par son schéma d'Euler. On obtient ainsi une approximation naturelle de (Y, Z). Toutefois, cette approche nécessite la résolution de (2.3) qui est toujours extrêmement délicate en grande dimension.

Une autre approche consiste à approximer W par une suite de marches aléatoires sur un espace de probabilité fini. Puis, on écrit l'équation rétrograde associée en temps discret. C'est l'approche utilisée par [Ch97], [CoMaM98], [BrDeM01], [AnKo00] et [MaPrST02]. L'avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite pas la résolution de l'EDP associée, mais au contraire fournit une approximation de u à travers l'approximation de Y et le lien $u(t, X_t) = Y_t$. Mais là encore se pose le problème de l'explosion rapide de la complexité de l'algorithme quand la dimension augmente.

D'autres approches récemment développées évitent ce problème de complexité. C'est le cas de l'algorithme de [BaPa02], voir aussi [BaPa03], qui repose sur les techniques de quantification, ou de l'approche initiée par [Ca96] puis popularisée par [LoSc01] qui utilise des techniques de Monte-Carlo combinées à des régressions non-paramétriques, voir également [GoLeW05] pour des travaux plus récents.

C'est ce type d'approche que l'on utilise dans [10]. On commence par discrétiser (2.2). Le schéma obtenu fait intervenir le calcul d'espérances conditionnelles, qu'il n'est évidemment pas possible de calculer explicitement en général. Ensuite, on regarde l'impact d'une approximation de ces espérances conditionnelles. Enfin, on utilise les résultats de [9] pour proposer un estimateur particulier, voir la section précédente.

Etape 1 : Discrétisation en temps

On se fixe une grille de temps $\pi := \{t_i := i/n,\ i = 0, \ldots, n\}$ et on approche X par son schéma d'Euler sur π. On approxime ensuite (Y, Z) par les processus discret (Y^π, Z^π) défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} Z^\pi_{t_i} & = & n\,\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ Y^\pi_{t_i} & = & \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + n^{-1}\, h\left(X^\pi_{t_i}, Y^\pi_{t_i}, Z^\pi_{t_i}\right) \end{array}\right. \tag{2.4}$$

avec comme condition terminale $Y^\pi_{t_n} := g(X^\pi_{t_n})$. A ma connaissance, nous étions les premiers à cette époque à considérer ce schéma lorsque h dépend de Z. La première étape consiste à étudier l'erreur de discrétisation

$$\mathrm{Err}_n := \max_{i \le n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|Y_t - Y^\pi_{t_i}\|_{L^2} + \left(\sum_{i \le n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|Z_t - Z^\pi_{t_i}\right\|^2_{L^2} dt\right)^{\frac{1}{2}} .$$

On commence par montrer qu'il existe $C > 0$ indépendant de n tel que

$$\mathrm{Err}_n \quad \le \quad C\left(n^{-\frac{1}{2}} + \|Z - \bar{Z}\|_{\mathbb{H}^2}\right)$$

où $\|V\|_{\mathbb{H}^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^1 |V_t|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$ et $\bar{Z}$ est défini pour $t \in [t_i, t_{i+1})$ par

$$\bar{Z}_t \quad = \quad n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s\, ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] .$$

Comme il est remarqué dans [Zh01], $\bar{Z}$ est la meilleure approximation de Z au sens $L^2(\Omega \times [0,1])$ dans la classe des processus adaptés constants par morceaux sur les intervalles $[t_i, t_{i+1})$.

Il en découle immédiatement que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Err}_n \;=\; 0\,,$$

i.e. que le schéma est convergent. Par ailleurs, il est montré dans [Zh01] que le terme $\|Z-\bar{Z}\|_{\mathbb{H}^2}$ est contrôlé en $n^{-\frac{1}{2}}$. Ceci implique qu'il existe $C>0$ indépendant de n tel que

$$\mathrm{Err}_n \;\le\; C\, n^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{2.5}$$

Il est clair que cette borne ne peut être améliorée en général.

Etape 2 : Approximation théorique de l'opérateur d'espérance conditionnelle

Le schéma de discrétisation (2.4) n'est pas utilisable en pratique puisqu'il nécessite le calcul d'espérances conditionnelles en dimension infinie. Les approches par quantification ou par régression non-paramétrique, voir les références données ci-dessus, consistent à remplacer cette opérateur par une approximation implémentable en pratique.

Dans [10], on étudie l'impact d'une telle approximation dans un contexte général. On peut tout d'abord remarquer que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] &= \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \mid X^\pi_{t_i}\right]\\
\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] &= \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}) \mid X^\pi_{t_i}\right]\,.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de considèrer une approximation $\hat{\mathbb{E}}^\pi_i$ de l'opérateur $\mathbb{E}^\pi_i := \mathbb{E}\left[\cdot \mid X^\pi_{t_i}\right]$ à laquelle on associe le processus $(\hat{Y}^\pi, \hat{Z}^\pi)$ défini par

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^\pi_{t_{i-1}} &= \hat{\mathbb{E}}^\pi_{i-1}\left[\hat{Y}^\pi_{t_i}\right] + n^{-1}\, h\left(X^\pi_{t_{i-1}}, \hat{Y}^\pi_{t_{i-1}}, \hat{Z}^\pi_{t_{i-1}}\right)\\
\hat{Z}^\pi_{t_{i-1}} &= n\, \hat{\mathbb{E}}^\pi_{i-1}\left[\hat{Y}^\pi_{t_i}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})\right]
\end{aligned}$$

avec pour condition terminale $\hat{Y}^\pi_1 = Y^\pi_1 \;=\; g\,(X^\pi_1)$. Sans surprise, on montre que l'erreur d'approximation globale est contrôlée par l'erreur effectuée sur l'approximation des opérateurs de régression :

$$\|\hat{Y}^\pi_{t_i} - Y^\pi_{t_i}\|_{L^2} \le C\, n \max_{0\le j\le n-1} \left\{ \|(\hat{\mathbb{E}}^\pi_j - \mathbb{E}^\pi_j)\left[\hat{Y}^\pi_{t_{j+1}}\right]\|_{L^2} + \|(\hat{\mathbb{E}}^\pi_j - \mathbb{E}^\pi_j)\left[\hat{Y}^\pi_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})\right]\|_{L^2} \right\}\,.$$

Etape 3 : Utilisation de l'estimateur d'espérance conditionnelle obtenu par intégration par parties

Il reste maintenant à choisir un opérateur $\hat{\mathbb{E}}^\pi$. Si on suppose que b et σ sont C^∞_b et que σ est uniformément elliptique, il est facile de vérifier que $X^\pi_{t_i} \in \mathbb{D}^\infty$ pour tout i et que le processus h_i à valeur dans $\mathbb{M}^d$ défini par

$$\begin{aligned}
h_{i,t} &= n\sigma(X^\pi_{t_{i-1}})^{-1}\mathbf{1}_{t\in[t_{i-1},t_i)}\\
&\quad - n\sigma(X^\pi_{t_i})^{-1}\left(I_d + n^{-1}\,\nabla b(X^\pi_{t_i}) + \sum_{j=1}^d \nabla\sigma^j(X^\pi_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})\right)\mathbf{1}_{t\in[t_i,t_{i+1})}
\end{aligned}$$

appartient bien à l'espace $\mathbf{H}_i(X^\pi)$ où $\mathbf{H}_i$ est défini comme $\mathbf{H}$ dans la section précédente avec t_i et t_{i+1} à la place de 1 et 2. Par une extension directe des résultats obtenus dans [9], on montre que si ϱ est une fonction réelle et ξ une variable aléatoire (vectorielle) indépendante de $\sigma(X^\pi_{t_i},\ 1 \le i \le n)$ telles que $R := \varrho(X^\pi_{t_{i+1}}, \xi) a\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \in L^2$, pour une certaine fonction affine $a\ : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, alors pour toute fonction de localisation φ, $\psi \in \mathcal{L}$:

$$\mathbb{E}\left[R \mid X^\pi_{t_i} = x\right] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[Q^R\left[h_i, \varphi\right](x)\right]}{\mathbb{E}\left[Q^1\left[h_i, \psi\right](x)\right]} \tag{2.6}$$

où

$$Q^R\left[h_i, \varphi\right](x) \quad := \quad H_x(X^\pi_{t_i}) \varrho(X^\pi_{t_{i+1}}, \xi) \mathcal{S}^{h_i}\left[a\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\varphi\left(X^\pi_{t_i} - x\right)\right]\ ,$$

voir la section précédente pour les notations.

Cette représentation procure un candidat naturel $\hat{\mathbb{E}}^\pi_i$ pour l'estimation de $\mathbb{E}^\pi_i$. On se donne une fonction de localisation $\varphi \in \mathcal{L}$ et considère nN copies indépendantes $(X^{\pi^{(1)}}, \ldots, X^{\pi^{(nN)}})$ de $X^{\pi^{(0)}} := X^\pi$ sur la grille π. On pose

$$\mathcal{N}_i \quad := \quad \{(i-1)N + 1, \ldots, iN\}\ , \quad 1 \le i \le n\ .$$

Initialisation : Pour $j \in \{0\} \cup \mathcal{N}_n$, on pose : $\hat{Y}^{\pi^{(j)}}_1 := Y^{\pi^{(j)}}_1 = g\left(X^{\pi^{(j)}}_1\right)$.
Induction rétrograde : Pour $i = n, \ldots, 1$, on pose, pour $j \in \{0\} \cup \mathcal{N}_{i-1}$:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}} &= \hat{\mathbb{E}}^{\pi^{(j)}}_{i-1}\left[\hat{Y}^\pi_{t_i}\right] + n^{-1} h\left(X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}, \hat{Y}^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}, \hat{Z}^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}\right) \\
\hat{Z}^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}} &= n \hat{\mathbb{E}}^{\pi^{(j)}}_{i-1}\left[\hat{Y}^\pi_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right]
\end{aligned}$$

avec, pour $i \ge 2$,

$$\hat{\mathbb{E}}^{\pi^{(j)}}_{i-1}\left[R_i\right] \ := \ \frac{\hat{Q}^{R_i}\left[h^{(j)}_{i-1}, \varphi\right]\left(X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}\right)}{\hat{Q}^1\left[h^{(j)}_{i-1}, \varphi\right]\left(X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}\right)} \tag{2.7}$$

où, pour $R_i = \hat{Y}^\pi_{t_i} a\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$ et $a\ : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine,

$$\hat{Q}^{R_i}\left[h^{(j)}_{i-1}, \varphi\right](X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}) := \frac{1}{N}\sum_{l \in \mathcal{N}_i} H_{X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}}(X^{\pi^{(l)}}_{t_{i-1}}) \hat{Y}^{\pi^{(l)}}_{t_i} \mathcal{S}^{h^{(l)}_i}\left[a\left(W^{(l)}_{t_i} - W^{(l)}_{t_{i-1}}\right)\varphi(X^{\pi^{(l)}}_{t_{i-1}} - X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}})\right]$$

$$\hat{Q}^1\left[h^{(j)}_{i-1}, \varphi\right](X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}) := \frac{1}{N}\sum_{l \in \mathcal{N}_i} H_{X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}}}(X^{\pi^{(l)}}_{t_{i-1}}) \mathcal{S}^{h^{(l)}_i}\left[\varphi(X^{\pi^{(l)}}_{t_{i-1}} - X^{\pi^{(j)}}_{t_{i-1}})\right]\ .$$

Pour $i = 1$, le conditionnement est dégénéré et on calcule une simple moyenne $\hat{\mathbb{E}}^\pi_0\left[R^{(0)}_1\right] := \frac{1}{N}\sum_{l \in \mathcal{N}_1} R^{(l)}_1$.

Il s'agit d'un algorithme très naturel, cependant le numérateur de (2.7) n'a aucune raison d'être uniformément strictement positif. Ceci implique que l'estimateur de l'espérance conditionnelle peut ne pas être intégrable. De manière à corriger ce problème, on propose dans [10] de tronquer ces estimateurs à partir de bornes polynomiales en X^π vérifiées par Y^π.

Remarque 2.17 1. Etant donné la forme très simple de la suite $(h_i)_i$, les intégrales de Skorohod intervenant dans les différents estimateurs peuvent êtres calculées explicitement en terme de sommes de Riemman.
2. L'indépendance entre les trajectoires de X^π utilisées aux différentes étapes est cruciale pour pouvoir faire appel à la représentation (2.6).

Une étude de la fonction de localisation séparable optimale dans ce cas, montre que le paramètre des fonctions exponentielles doit tendre vers l'infini en $\sqrt{n}$ de manière à contrôler l'explosion de la variance des estimateurs apparaissant dans (2.7) lorsque n devient grand. Il est donc nécessaire de faire évoluer la fonction de localisation en fonction du pas de temps. Etant donné $p > 1$, on montre que si $\varphi \in \mathcal{L}$ vérifie

$$\sum_{k=0}^{d} \sum_{I \in \mathcal{J}_k} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{4p+2}\, \partial_I \varphi(u)^2 du \quad < \quad \infty \,,$$

et si le schéma précédent est construit avec la fonction de localisation φ^π définie par $\varphi^\pi(x) = \varphi(n^{1/2}x)$, alors, pour tout $p > 1$, il existe $C > 0$ indépendant de n et N tel que

$$\max_{0 \le i \le n} \; \|\hat{Y}^\pi_{t_i} - Y^\pi_{t_i}\|^p_{L^p} \quad \le \quad C\; N^{-\frac{1}{2}}\; n^{p+d/4} \quad . \tag{2.8}$$

La difficulté provient ici du fait que l'estimateur d'espérance conditionnelle est défini comme un ratio. Cela explique une certaine perte de vitesse par rapport à la vitesse en $N^{-\frac{1}{2}}$ usuelle des estimateurs de type Monte-Carlo.

En combinant ce résultat avec (2.5), on obtient une erreur globale en $n^{-\frac{1}{2}} + N^{-\frac{1}{4}}\; n^{1+d/8}$. Pour s'assurer une vitesse de convergence en $n^{-\frac{1}{2}}$, il faut donc prendre $N \sim n^{6+d/2}$. Lorsque h ne dépend pas de Z, (2.8) est encore vraie pour $p = 1$. On obtient ainsi une convergence L^1 en $n^{-\frac{1}{2}}$ en prenant simplement $N \sim n^{3+d/2}$. Ceci est à comparer à l'ordre de grandeur n^3 qui correspondrait à une vitesse de convergence en $N^{-\frac{1}{2}}$ des estimateurs d'espérance conditionnelle.

Remarque 2.18 On pourra consulter [GoLeW05] pour une comparaison de notre méthode avec une méthode de type régression non paramétrique du point de vue de la complexité des algorithmes. Toutefois, l'étude de notre algorithme repose sur le postulat selon lequel la complexité globale de l'estimation des espérances conditionnelles à chaque étape est de l'ordre de N^2. Ceci n'est pas correct et on peut en fait construire un algorithme en $N(\ln(N))^d$ en utilisant des idées proches de celles utilisées pour les méthodes de tri rapide. La complexité de notre algorithme est en fait en $n^{(14+d)/2}(\ln(n))^d$ pour une erreur en $n^{-1/2}$. Pour $d \ge 3$, notre algorithme a une complexité plus faible.

3 EDSR avec sauts et applications à la résolution de systèmes d'EDP semi-linéaires

On a vu dans les sections précédentes comment estimer les espérances conditionnelles qui apparaissent naturellement dans le schéma de discrétisation d'une EDSR markovienne dirigée par la solution d'une EDS. Dans les deux dernières sections de ce chapitre, on se concentre sur l'aspect discrétisation dans deux modèles plus généraux : l'un avec sauts, l'autre avec réflection.

Dans [16], on s'intéresse aux EDSR avec saut du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y_t &=& g(M_1,X_1)+\int_t^1 h\left(\Theta_r\right)dr-\int_t^1 Z_r'dW_r-\int_t^1\int_E U_r(e)\bar{\mu}(de,dr) \\ X_t &=& X_0+\int_0^t b(M_r,X_r)dr+\int_0^t\sigma(M_r,X_r)dW_r+\int_0^t\int_E\beta(M_{r-},X_{r-},e)\bar{\mu}(de,dr)\ , \end{array}\right. \tag{3.9}$$

où W est mouvement brownien d-dimensionel, $\bar{\mu}(de,dt)=\mu(de,dt)-\lambda(de)dt$ est une mesure de Poisson compensée, indépendante de W, d'espace de marques $E=\mathbb{R}^\kappa$, et $\Theta := (M,X,Y,Z,\Gamma)$ avec Γ défini par

$$\Gamma := \int_E \rho(e)U(e)\lambda(de)$$

où $\rho\in L^\infty(\mathbb{R}^\kappa;E,\lambda)$. On suppose que $\lambda(E)<\infty$, i.e. que la mesure de saut a une intensité finie ce qui implique qu'il n'y a, presque sûrement, qu'un nombre fini de sauts sur $[0,1]$. Enfin, M est un processus adapté à la filtration $\mathbb{F}^\mu$ engendrée par μ que l'on définira par la suite.

De telles équations apparaissent naturellement dans les problèmes de contrôle, voir [TaLi94], dans les problèmes de couverture en finance, voir [Ey05], ou de gestion de portefeuille, voir [Be05].

En terme de résolution d'EDP, il y a deux types d'applications principales.

Cas 1 : EDP semi-linéaire avec terme intégral

On suppose que M a une dynamique du type

$$M_t \;=\; M_0+\int_0^t b^M(M_r)dr+\int_0^t\int_E\beta^M(M_{r-},e)\mu(de,dr)\ .$$

Dans ce cas, la solution de (3.9) peut être ré-interprétée en terme de solution de viscosité de l'EDP parabolique semi-linéaire avec terme intégral

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}u(t,m,x)-h\left(m,x,u(t,m,x),\sigma(m,x)\nabla_x u(t,m,x),\mathcal{I}[u](t,m,x)\right) \;&=\; 0 \\ u(1,m,x) \;=\; g(m,x)\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(t,m,x) \;&:=\; \frac{\partial u}{\partial t}(t,m,x)+\nabla_x u(t,m,x)b(m,x)+\nabla_m u(t,m,x)b^M(m) \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d(\sigma\sigma'(m,x))^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}(t,m,x) \\ &\quad +\int_E\left\{u(t,m+\beta^M(m,e),x+\beta(m,x,e))-u(t,x)-\nabla_x u(t,x)\beta(m,x,e)\right\}\lambda(de)\ , \\ \mathcal{I}[u](t,m,x) \;&:=\; \int_E\left\{u(t,m+\beta^M(m,e),x+\beta(m,x,e))-u(t,m,x)\right\}\rho(e)\,\lambda(de)\ . \end{aligned}$$

dans le sens où, sous certaines hypothèses techniques, $Y_t = u(t, M_t, X_t)$, voir [BaBuP97]. Quand on parlera du cas 1 par la suite, on supposera toujours que les fonctions b^M, $\beta^M(\cdot, e)$, b, σ, $\beta(\cdot, e)$, h et g sont lipschitziennes à croissance linéaire uniformément en $e \in E$.

Cas 2 : Systèmes d'EDP semi-linéaires

On peut également relier (3.9) à des systèmes d'EDP semi-linéaires, voir [PaPrR97] et [SoPa04]. Pour cela, on prend $\lambda = \lambda_0 \sum_{j=1}^{\kappa-1} \epsilon_j$ où $\lambda_0 > 0$, $\epsilon_j^i = \mathbf{1}_{i=j}$, et $\rho(j)^i = \mathbf{1}_{i=j}$ ce qui implique que $\Gamma^j = \lambda U(j)$. Pour simplifier on prend $\beta \equiv 0$. On se donne une famille $(\tilde b_m, \tilde\sigma_m, \tilde h_m, \tilde g_m)_{m\le\kappa}$ de fonctions lipschitziennes à croissance linéaire, et on pose

$$
\begin{aligned}
&(b(m,x), \sigma(m,x), g(m,x)) = (\tilde b_m(x), \tilde\sigma_m(x), \tilde g_m(x)) \\
&h(m,x,y,z,\gamma) = \tilde h_m\left(x, \left[y+\gamma^{\kappa-m+1}, \ldots, y+\gamma^{\kappa}, \underbrace{y}_{m}, y+\gamma^1, \ldots\right], z\right) - \sum_{j=1}^{\kappa} \gamma^j \,.
\end{aligned}
$$

Enfin, on définit M par

$$
M_t \;\; = \;\; 1 + \left(\int_0^t \sum_{j=1}^{\kappa-1} j\mu(\{j\}, dt) \right) \; [\kappa]
$$

où $[\kappa]$ signifie que l'on considère la somme modulo κ. Dans ce cas, on peut montrer, voir les deux articles cités ci-dessus, que la solution de (3.9) vérifie $Y_t = u^{M_t}(t, X_t)$ où $u = (u^1, \ldots, u^\kappa)$ est solution de viscosité du système

$$
-\mathcal{L}^m u^m(t,x) - h_m\left(x, u(t,x), \sigma_m(x)\nabla_x u^m(t,x)\right) = 0 \quad , \quad u^m(1,x) = g_m(x) \,,
$$

avec

$$
\mathcal{L}^m u^m(t,x) \;\; := \;\; \frac{\partial u^m}{\partial t}(t,x) + \nabla_x u^m(t,x) b_m(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma_m(\sigma_m)'(x))^{ij} \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^i \partial x^j}(t,x) \,.
$$

Schéma de discrétisation

On utilise un schéma similaire à celui étudié dans [10]. On se donne tout d'abord une approximation (M^π, X^π) de (M, X) vérifiant

$$
\max_{i\le n-1} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]} (|M_t - M^\pi_{t_i}|^2 + |X_t - X^\pi_{t_i}|^2) \right] \;\; \le \;\; C/n \,.
$$

Dans le cas 1, il suffit de définir (M^π, X^π) comme le schéma d'Euler de (M, X) sur π. Dans le cas 2, les fonctions b et σ ne sont pas lipschitziennes en m. Il n'est donc plus suffisant de considérer le schéma d'Euler de (M, X). Par contre, la trajectoire de M est parfaitement simulable et on peut prendre $M^\pi = M$. En incluant les temps de saut de μ dans la définition du schéma d'Euler X^π de X, on obtient une approximation de X vérifiant la condition ci-dessus.

Concernant la composante rétrograde, on utilise le schéma d'approximation suivant :

Cas 1. On définit le processus discret $(Y^\pi, Z^\pi, \Gamma^\pi)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} Z^\pi_{t_i} & = & n\,\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \Gamma^\pi_{t_i} & = & n\,\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \int_E \rho(e)\bar{\mu}(de,(t_i,t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ Y^\pi_{t_i} & = & \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + n^{-1}\, h\left(M^\pi_{t_i}, X^\pi_{t_i}, Y^\pi_{t_i}, Z^\pi_{t_i}, \Gamma^\pi_{t_i}\right) \end{array}\right.$$

avec comme condition terminale $Y^\pi_{t_n} := g(X^\pi_{t_n})$. Il s'agit d'une extension directe du schéma utilisé dans [10], voir la section précédente.

Cas 2. On définit $(Y^\pi, Z^\pi, \Gamma^\pi)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} Z^\pi_{t_i} & = & n\,\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \Gamma^\pi_{t_i} & = & n\,\mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \int_E \rho(e)\bar{\mu}(de,(t_i,t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ Y^\pi_{t_i} & = & \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left[\, h\left(M_s, X^\pi_{t_i}, Y^\pi_{t_{i+1}}, Z^\pi_{t_i}, \Gamma^\pi_{t_i}\right) \;\mid \mathcal{F}_{t_i}\right] ds \end{array}\right.$$

avec comme condition terminale $Y^\pi_{t_n} := g(X^\pi_{t_n})$. Là encore, on tient compte du fait que la fonction h n'est pas lipschitzienne en m.

Convergence du schéma

Comme dans la section précédente, l'erreur d'approximation est définie par la quantité

$$\begin{aligned} \mathrm{Err}_n \;&:=\; \max_{i \le n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left\| Y_t - Y^\pi_{t_i} \right\|_{L^2} + \left(\sum_{i \le n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| Z_t - Z^\pi_{t_i} \right\|^2_{L^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{i \le n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \Gamma_t - \Gamma^\pi_{t_i} \right\|^2_{L^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Comme dans [10], on énonce un premier résultat de convergence faisant intervenir les meilleurs approximations $(\bar{Z}, \bar{\Gamma})$ de (Z, Γ) au sens $L^2(\Omega \times [0,1])$ par des processus adaptés constants par morceaux sur les intervalles $[t_i, t_{i+1})$. On définit $(\bar{Z}, \bar{\Gamma})$ sur chaque $[t_i, t_{i+1})$ par

$$\bar{Z}_t := n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s\, ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \;\; et \;\; \bar{\Gamma}_t := n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_s\, ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] .$$

Pour tenir compte du cas 2, on introduit de manière similaire le processus $\bar{H}$ défini sur $[t_i, t_{i+1})$ par

$$\bar{H}_t \;:=\; n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(M_s, X_{t_i}, Y_{t_i}, \bar{Z}_{t_i}, \bar{\Gamma}_{t_i}\right) ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \quad \text{avec} \quad H_t \;:=\; h(M_t, X_{t_i}, Y_{t_i}, \bar{Z}_{t_i}, \bar{\Gamma}_{t_i})\,.$$

De manière à obtenir une écriture plus concise, on pose $H = \bar{H} = 0$ si on se trouve dans le cas 1. Par des techniques similaires à celles utilisées dans [10], on commence par montrer qu'il existe $C > 0$ indépendant de n tel que

$$\mathrm{Err}_n \;\le\; C\left(n^{-1/2} + \|Z - \bar{Z}\|_{\mathbb{H}^2} + \|\Gamma - \bar{\Gamma}\|_{\mathbb{H}^2} + \|H - \bar{H}\|_{\mathbb{H}^2}\right) ,$$

et que $\mathrm{Err}_n \to 0$. Afin d'obtenir une borne sur la vitesse de convergence du schéma, il reste donc à étudier

$$\|Z - \bar{Z}\|_{\mathbb{H}^2} + \|\Gamma - \bar{\Gamma}\|_{\mathbb{H}^2} + \|H - \bar{H}\|_{\mathbb{H}^2} \ .$$

Dans [16], on se concentre sur l'étude de $\|Z - \bar{Z}\|_{\mathbb{H}^2} + \|\Gamma - \bar{\Gamma}\|_{\mathbb{H}^2}$. Le terme en Γ est fortement lié à Y puisque par construction $\int_E U_t(e)\mu(de, \{t\}) = Y_t - Y_{t-}$. Or il n'est pas difficile de montrer que Y vérifie $\mathbb{E}|Y_t - Y_s|^2 \le C(t-s)$. On s'attend donc naturellement à obtenir sans trop de difficultés la borne : $\|\Gamma - \bar{\Gamma}\|_{\mathbb{H}^2} \le Cn^{-\frac{1}{2}}$. On montre en fait qu'il existe $C > 0$ indépendant de n tel que pour tout $i < n$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \left(|Y_t - Y_{t_i}|^2 + |\Gamma_t - \bar{\Gamma}_{t_i}|^2 + |\Gamma_t - \Gamma_{t_i}|^2\right)\right] \ \le\ Cn^{-1} \ .$$

Ce résultat est une conséquence de majorations standards et d'un résultat plus général qui montre que $\sup_{t\le 1}|Z_t|$ est borné dans L^p. Cette borne est obtenue par des techniques classiques de type calcul de Malliavin qui permettent, lorsque les coefficients sont suffisamment réguliers, de ré-écrire Z sous la forme :

$$(Z_t)' = \mathbb{E}\left[\Lambda_T \nabla g(X_T) D_t X_T + \int_t^T \Lambda_r \ (\nabla_x h(\Theta_r) D_t X_r + \nabla_\gamma h(\Theta_r) D_t \Gamma_r) \ dr \mid \mathcal{F}_t\right] \ \Lambda_t^{-1} \ , \tag{3.11}$$

où

$$\Lambda_t \ := \ \exp\left\{\int_0^t \nabla_z h(\Theta_u)' dW_u - \int_0^t \left(\frac{1}{2}|\nabla_z h(\Theta_u)|^2 + \nabla_y h(\Theta_u)\right) du\right\} \ .$$

On suppose dans un premier temps que toutes les fonctions sont C^1_b, puis on travaille par approximation.

Le terme en Z est plus difficile à étudier. C'est le corps du papier [16]. On considère deux jeux d'hypothèses différents :
$\mathbf{H}_1$: Pour tout $(m, e) \in \mathbb{R}^\kappa \times E$, l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \beta(m, x, e)$ admet une Jacobienne $\nabla_x \beta(m, x, e)$ telle que

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto a(x, \xi; m, e) := \xi'(\nabla_x \beta(m, x, e) + I_d)\xi$$

vérifie l'une des conditions suivantes uniformément en $(m, x, \xi) \in \mathbb{R}^\kappa \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$a(x, \xi; m, e) \ \ge\ |\xi|^2 K^{-1} \quad \text{ or } \quad a(x, \xi; m, e) \ \le\ -|\xi|^2 K^{-1} \ .$$

$\mathbf{H}_2$: $b(m, \cdot)$, $\sigma(m, \cdot)$, $\beta(m, \cdot, e)$, $h(m, \cdot)$ et $g(m, \cdot)$ sont C^1_b à dérivées premières lipschitziennes uniformément en $e \in E$ et $m \in \mathbb{R}^\kappa$.

La première condition nous assure l'inversibilité du processus tangent ∇X de X. Elle est automatiquement vérifiée dans le cas 2 puisqu'alors $\beta = 0$. Elle nous permet d'étendre la preuve de [Zh01] au cas de diffusions à saut, voir ci-dessous. La seconde condition nous assure une forte régularité sur Z. Sous ces conditions, on peut contrôler $\|Z - \bar{Z}\|_{\mathbb{H}^2}$ en $n^{-\frac{1}{2}}$.

Théorème 3.19 *Si* $\mathbf{H}_1$ *ou* $\mathbf{H}_2$ *sont vérifiées, alors*

$$\|Z-\bar{Z}\|^2_{\mathbb{H}^2} \;\le\; \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|Z_t - Z_{t_i}\|^2_{L^2}dt \quad\le\quad C\,n^{-1}\;.$$

Lorsque $\mathbf{H}_1$ est vérifiée, on reprend les idées de [Zh01]. On suppose que toutes les fonctions sont C^1_b, un argument d'approximation permettant d'étendre ces résultats au cas général. En utilisant le lien bien connu entre DX et le processus tangent ∇X de X, on déduit de (3.11) que Z peut s'écrire sous la forme

$$(Z_t)' \quad=\quad \mathbb{E}\left[G \mid \mathcal{F}_t\right]\eta_t + \vartheta_t$$

où $G\in\cap_{p\ge 1}L^p$, ϑ et η sont des processus vérifiant $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]}(|\vartheta_t-\vartheta_{t_i}|^p+|\eta_t-\eta_{t_i}|^p)\right]$ $\le Cn^{-\frac{p}{2}}$, et la martingale $G_t:=\mathbb{E}\left[G\mid\mathcal{F}_t\right]$ admet une représentation sous la forme

$$G_t \;=\; \mathbb{E}\left[G_1\right]+\int_0^t\xi_s dW_s+\int_0^t\int_E V_s(e)\;\bar{\mu}(de,ds)$$

avec

$$\|\xi\|_{\mathbb{H}^p}+\|(\int_E |V(e)|^2\lambda(de))^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H}^p}<\infty\;.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left[|Z_t-Z_{t_i}|^2\right]dt \quad&\le\quad Cn^{-1}+C\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left[|G_t-G_{t_i}|^2\,|\eta_{t_i}|^2\right]dt\\ &+\quad C\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left[|\eta_t-\eta_{t_i}|^2\,|G_t-G_{t_i}|^2\right]dt\;.\end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant des majorations du type

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left[|G_t-G_{t_i}|^2\,|\eta_{t_i}|^2\right]dt \quad&\le\quad \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left[|\eta^*|^2\int_{t_i}^{t}\left(|\xi_s|^2+\int_E|V_s(e)|^2\lambda(de)\right)ds\;\right]dt\\ &\le\quad C\,n^{-1}\mathbb{E}\left[|\eta^*|^4\right]^{\frac{1}{2}}\left(\|\xi\|^2_{\mathbb{H}^4}+\|(\int_E|V(e)|^2\lambda(de))^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathbb{H}^4}\right)\;,\end{aligned}$$

où $\eta^*:=\max_{i\le n}|\eta_{t_i}|\in L^4$.

On déduit enfin des résultats précédents que, si $\mathbf{H}_1$ ou $\mathbf{H}_2$ sont vérifiées, alors

$$\mathrm{Err}_n \quad\le\quad C\left(n^{-1/2}+\|H-\bar{H}\|_{\mathbb{H}^2}\right)\;.$$

Remarque 3.20 1. Dans le cas où h ne dépend pas de Z, le résultat précédent reste vrai sans $\mathbf{H}_1$ ni $\mathbf{H}_2$. C'est le cas si $\sigma=0$ puisqu'alors $Z=0$.
2. Si h ne dépend pas de m alors la vitesse est en $n^{-\frac{1}{2}}$.
3. Tous ces résultats s'étendent immédiatement au cas où les fonctions dépendent du temps mais sont Hölder 1/2 en t et les autres hypothèses sont vérifiées uniformément en t.

4 EDSR réfléchies

Dans [18], on s'intéresse à la discrétisation des EDSR réfléchies de la forme

$$\begin{aligned} Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h\left(X_s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^1 (Z_s)' dW_s + A_1 - A_t \\ Y_t &\geq f(X_t) \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ , \end{aligned} \tag{4.12}$$

où A est un processus cadlag croissant vérifiant

$$\int_0^1 \left(Y_t - f(X_t)\right) dA_t = 0 \ .$$

Lorsque $h = 0$ et $f = g$, Y est l'enveloppe de Snell de $g(X)$, ce qui correspond en finance au prix d'une option américaine de payoff g. Plus généralement, la solution de (4.12) est intimement liée à une équation parabolique à frontière libre, voir [KaKaPPQ97].

Là encore on peut utiliser un schéma de discrétisation implicite :

$$\begin{aligned} Z^\pi_{t_i} &= (t_{i+1} - t_i)^{-1} \, \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \tilde{Y}^\pi_{t_i} &= \mathbb{E}\left[Y^\pi_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + (t_{i+1} - t_i) h(X^\pi_{t_i}, \tilde{Y}^\pi_{t_i}, Z^\pi_{t_i}) \\ Y^\pi_{t_i} &= \mathcal{R}\left(t_i \ , \ X^\pi_{t_i} \ , \ \tilde{Y}^\pi_{t_i}\right) \ , \ i \leq n-1 \ , \end{aligned} \tag{4.13}$$

avec la condition terminale $Y^\pi_1 = g(X^\pi_1)$ et

$$\mathcal{R}(t,x,y) := y + [f(x) - y]^+ \mathbf{1}_{\{t \in \Re \setminus \{0,T\}\}} \ , \ (t,x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^{d+1}$$

pour une partition $\Re := \{0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_\kappa = 1\} \subset \pi$.

De tels schémas ont été étudiés dans [10] et [BaPa03] lorsque $\pi = \Re$, h ne dépend pas de Z et $g = f$. Dans ce cas, on obtient une convergence en $n^{-\frac{1}{2}}$ lorsque les coefficients sont tous lipschitziens et à croissance linéaire, voir [BaPa03] pour un résultat plus fin lorsque f est semi-convexe. Dans [MaZh05], il est montré que l'on peut obtenir une borne sur la vitesse de convergence en $n^{-\frac{1}{4}}$ lorsque f dépend de Z à condition que cette fonction soit C^2_b et que σ soit uniformément elliptique. Il s'agit d'hypothèses beaucoup plus fortes que celles retenues en l'absence de réflection, voir les deux sections précédentes.

L'objet de [18] est de montrer que l'on peut alléger ces hypothèses et même obtenir une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$, au prix de conditions un peu plus fortes, i.e. $f \in C^2_b$ à dérivées secondes lipschitziennes.

Comme dans le cas non réfléchi, voir les sections précédentes, il est nécessaire de contrôler un terme de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left[|Z_t - Z_{t_i}|^2\right] dt \ .$$

L'approche de [MaZh05] consiste à prouver dans un premier temps que Z admet une représentation du type

$$(Z_t)' = \mathbb{E}\left[G^t \mid \mathcal{F}_t\right] \eta_t \ . \tag{4.14}$$

Contrairement à la représentation (3.11) correspondant au cas non-réfléchie, la variable G^t dépend maintenant de t. Cette formulation est obtenue en utilisant la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin. C'est essentiellement une généralisation de celle proposée dans [FoLaLLT99] pour le calcul des sensibilités en finance. Ceci explique leur hypothèse d'uniforme ellipticité sur σ. Par ailleurs, la dépendance de G^t en t n'étant pas triviale, il n'est plus possible d'utiliser l'approche martingale décrite dans la section précédente.
Notre approche est complètement différente. On commence par étudier la solution (Y^b, Z^b) d'une EDSR discrètement réfléchie :

$$Y_t^b = g(X_1) + \int_t^1 h(\Theta_u^b)du - \int_t^1 (Z_u^b)'dW_u + A_1^b - A_t^b \tag{4.15}$$

où $\Theta^b := (X_u, Y_u^b, Z_u^b)$ et $A_t^b := \sum_{j=1}^{\kappa-1} \left[h(X_{r_j}) - Y_{r_j}^b\right]^+ \mathbf{1}_{r_j<t}$. Lorsque les coefficients sont C_b^1, on montre que Z^b admet une version vérifiant

$$(Z_t^b)' \;\; = \;\; \mathbb{E}\left[\nabla g(X_1)\eta_1 \mathbf{1}_{\tau_j=1} + \nabla f(X_{\tau_j})\eta_{\tau_j}\mathbf{1}_{\tau_j<1} + \int_t^{\tau_j} \nabla_x h(\Theta_u^b)\eta_u du \mid \mathcal{F}_t\right] \eta_t^{-1}\sigma(X_t) \ ,$$

où $\tau_j := \inf\{t \in \Re \mid t \geq r_{j+1},\ f(X_t) > Y_t^b\} \wedge 1$, $j \leq \kappa - 1$, et

$$\eta := \nabla X \exp\left\{\int_0^{\cdot} \nabla_z f(\Theta_u^b)'dW_u - \int_0^{\cdot} \left(\frac{1}{2}|\nabla_z f(\Theta_u^b)|^2 + \nabla_y f(\Theta_u^b)\right) du\right\} \ .$$

En jouant sur cette formulation, on montre ensuite qu'il existe $C > 0$ indépendant de π et $\Re$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left[|Z_t^b - Z_{t_i}^b|^2\right] dt \;\; \leq \;\; C\, n^{-1} \, \left(1 + \beta n^{\frac{1}{2}} + \alpha(\kappa)\right) \ , \tag{4.16}$$

où $\alpha(\kappa) = \sqrt{\kappa}$ et $\beta = 1$ sous l'hypothèse
$\mathbf{H}_1$: h est C_b^1 à dérivées premières lipschitziennes,
et $\alpha(\kappa) = 1$ et $\beta = 0$ sous l'hypothèse
$\mathbf{H}_2$: h est C_b^2 à dérivées secondes lipschitziennes et σ est C_b^1 à dérivée première Lipschitzienne.

Pour simplifier, supposons que $g = f$ et $h = 0$. L'idée générale de la preuve est de se ramener à des termes de la forme

$$|\mathbb{E}\left[\nabla f(X_{\tau_j}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}\right] - \mathbb{E}\left[\nabla f(X_{\tau_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}\right]|$$

que l'on contrôle par $\Xi\mathbb{E}\left[\Xi(\tau_j - \tau_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}\right]^{\frac{1}{2}}$, sous $\mathbf{H}_1$, et par $\Xi\mathbb{E}\left[\Xi(\tau_j - \tau_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}\right]$ sous une version un peu plus forte de $\mathbf{H}_2$. Ici $\Xi \in L^p(\mathbb{R}_+)$, pour tout $p \geq 1$. On est ensuite amené à sommer ces termes, ce qui conduit à une majoration du type (4.16).

En utilisant, des résultats standards de stabilité, on montre ensuite que le résultat reste vrai si b, σ et g sont seulement lipschitziennes. Ceci nous permet d'obtenir les bornes suivantes sur la vitesse de convergence de (Y^π, Z^π) vers (Y^b, Z^b).

Théorème 4.21 *Il existe $C > 0$ indépendant de π et $\Re$ tel que*

$$\mathbb{E}\left[\max_{i \le n} |Y^\pi_{t_i} - Y^b_{t_i}|^2\right] + \max_{i<n} \mathbb{E}\left[\sup_{t \in (t_i, t_{i+1}]} |Y^\pi_{t_{i+1}} - Y^b_t|^2\right] \;\le\; C\,\alpha_Y(\kappa)\, n^{-1} + \beta\, n^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z^\pi_{t_i} - Z^b_t|^2 dt\right] \;\le\; C\,\alpha_Z(\kappa)\, n^{-1} + \beta\, n^{-\frac{1}{2}}$$

avec $(\alpha_Y(\kappa), \alpha_Z(\kappa)) = (\kappa^{\frac{1}{2}}, \kappa)$ et $\beta = 1$ sous $\mathbf{H}_1$, et $(\alpha_Y(\kappa), \alpha_Z(\kappa)) = (1, \kappa)$ et $\beta = 0$ sous $\mathbf{H}_2$.

On montre en outre que l'on a les mêmes bornes avec $\alpha_Z(\kappa) = \kappa^{\frac{1}{2}}$ sous $\mathbf{H}_1$, et $\alpha_Z(\kappa) = 1$ sous $\mathbf{H}_2$, si $(X^\pi_{t_i})_{i \le n}$ est remplacé par $(X_{t_i})_{i \le n}$ dans le schéma (4.13).

On passe ensuite au cas continument réfléchi. On reprend le schéma de discrétisation précédent avec $\Re = \pi$.

Théorème 4.22 *Il existe $C > 0$ indépendant de π tel que*

$$\mathbb{E}\left[\max_{i \le n} |Y^\pi_{t_i} - Y_{t_i}|^2\right] + \max_{i<n} \mathbb{E}\left[\sup_{t \in (t_i, t_{i+1}]} |Y^\pi_{t_{i+1}} - Y_t|^2\right] \;\le\; C\,\alpha(n)$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z^\pi_{t_i} - Z_t|^2 dt\right] \;\le\; C\, n^{-\frac{1}{2}}\,,$$

avec $\alpha(n) = n^{-\frac{1}{2}}$ sous $\mathbf{H}_1$ et $\alpha(n) = n^{-1}$ sous $\mathbf{H}_2$.

L'erreur sur Y est une conséquence du théorème précédent et d'arguments standards permettant de borner l'écart entre Y^b et Y en $n^{-\frac{1}{2}}$. L'erreur sur Z est plus compliquée à obtenir mais découle essentiellement de (4.16) et d'un résultat similaire obtenu sur le processus $(Y^{b,e}, Z^{b,e})$ défini comme (Y^b, Z^b) mais en remplaçant X par son schéma d'Euler continu.

Lorsque $(X^\pi_{t_i})_{i \le n}$ est remplacé par $(X_{t_i})_{i \le n}$ dans le schéma (4.13), on obtient les mêmes bornes sur $Y^\pi - Y$ mais on améliore celle sur $Z^\pi - Z$ sous $\mathbf{H}_2$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z^\pi_{t_i} - Z_t|^2 dt\right] \;\le\; C\, n^{-1}\,.$$

Chapitre IV

“Randomisation” de l’horizon de temps pour les problèmes de contrôles stochastiques

Dans [14], on s’intéresse à l’approximation de problèmes de contrôle stochastique à horizon fini par des problèmes à horizon aléatoire. Ce travail a pour origine l’article [Ca98] qui utilise cette technique pour proposer un algorithme rapide pour le calcul de prix d’options américaines, voir également [KyPi03].

L’algorithme de Carr pour l’évaluation des options américaines

Le problème étudié par [Ca98] est le suivant. Il s’agit de calculer la valeur en $t = 0$ de

$$V_t \;:=\; \operatorname*{ess-sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[e^{-r(\tau \wedge T)} g(S(\tau \wedge T)) \mid S(t) \right] ,$$

où $\mathcal{T}_t(\mathbb{F})$ est l’ensemble des $\mathbb{F}$-temps d’arrêt à valeurs dans $[t, \infty)$,

$$S(t) \;=\; S(0) \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right] , \qquad t \geq 0 ,$$

et $g(x) = [K - x]^+$ pour une constante $K > 0$ donnée. Ici, $\mathbb{F}$ est la filtration naturelle complétée engendrée par W. En finance, V_t correspond au prix à la date t d’un put américain de maturité T et de strike K dans le modèle de Black-Scholes, voir par exemple [KaSh98]. L’objectif de Carr est de se ramener à une suite de problèmes en horizon infini imbriqués dont la résolution, à chaque étape, est explicite : il introduit tout d’abord une suite $(\xi^k)_{k \geq 0}$ de variables aléatoires i.i.d. indépendantes de $\mathbb{F}$ de loi exponentielle de paramètre 1, puis il définit la suite de fonctions valeurs $(v_n^k)_{k \leq n,\, n \geq 1}$ par

$$v_n^k(x) \;:=\; \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[e^{-r(\tau \wedge T_n^k)} g(S(\tau \wedge T_n^k)) \middle| S(0) = x \right] ,$$

où

$$T_n^k := \sum_{j=k}^{1} \zeta_n^j \qquad \text{avec} \qquad \zeta_n^k := \frac{T}{n} \xi^k \quad \text{pour } k \leq n .$$

Ici, les $(T_n^k)_{k\leq n}$ peuvent être vus comme des maturités (aléatoires) résiduelles. Comme $T_n^n \to 1$ quand $n\to\infty$ presque sûrement, on peut vérifier que $v_n^n(S(0)) \to V_0$. Il reste donc à calculer $v_n^n(S(0))$. Pour cela, il ré-écrit, en utilisant l’indépendance de $(\xi^k)_{k\geq 0}$ et W,

$$v_n^k(x) \;=\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau}g(S(\tau))G_n^k(\tau) + e^{-r(\tau\wedge T_n^k)}g(S(\tau\wedge T_n^k))\mathbf{1}_{\{\tau>\zeta_n^k\}} \mid S(0)=x\right] ,$$

où

$$G_n^k(t) \;:=\; \mathbb{P}\left[\zeta_n^k \geq t\right] ,$$

puis utilise un argument de programmation dynamique formel pour obtenir

$$v_n^k(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau}g(S(\tau))G_n^k(\tau) + e^{-r\zeta_n^k}v_n^{k-1}\left(S(\zeta_n^k)\right)\mathbf{1}_{\{\tau>\zeta_n^k\}}\middle| S(0)=x\right] . \tag{0.1}$$

Comme les ζ_n^k ont une loi exponentielle et sont indépendants de S, on obtient alors

$$v_n^k(x) \;=\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[e^{-r_n\tau}g(S(\tau)) + \frac{n}{T}\int_0^\tau e^{-r_n t}v_n^{k-1}(S(t))dt\middle| S(0)=x\right] ,$$

avec $r_n := r + n/T$. Cela revient à considérer une suite de problèmes d’arrêt optimal en horizon infini. L’avantage est qu’ils peuvent être résolus explicitement à chaque étape en fonction de la fonction valeur calculée à l’étape précédente. Ceci procure une méthode d’approximation très rapide de V_0.
Malheureusement, l’égalité (0.1) n’a pas de raison d’être vérifiée. Pour cela, il faudrait disposer d’un principe de programmation dynamique valable à des dates aléatoires indépendantes de la filtration $\mathbb{F}$ qui sert à définir l’ensemble des temps d’arrêt.
L’objet de l’article [14] est de montrer que l’algorithme de Carr est néanmoins convergent et de l’étendre à une plus large classe de problèmes de contrôle.

Approche générale et convergence

On travaille maintenant sur un espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ muni d’une filtration $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles avec $\mathcal{F}_0$ triviale. Etant donné un ensemble U de fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, on note $\tilde{\mathcal{U}}(\mathbb{F})$ l’ensemble des processus $\mathbb{F}-$adaptés ν tels que

$$t \;\longmapsto\; \nu(t,\omega) \;\in\; U \quad \text{pour presque tout} \quad \omega\in\Omega\,.$$

Le processus contrôlé est défini par l’application

$$\nu \;\in\; \tilde{\mathcal{U}}(\mathbb{F}) \quad\longmapsto\quad Y^\nu \;,$$

où Y^ν est un processus $\mathbb{F}-$progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$Y^\nu(0) \;=:\; Y(0) \quad \text{est indépendant de} \quad \nu\,. \tag{0.2}$$

L’ensemble $\mathcal{U}(\mathbb{F})$ des contrôles admissibles est un sous-ensemble d’éléments $\nu\in\tilde{\mathcal{U}}(\mathbb{F})$. On suppose qu’il est stable par bifurcation aux temps déterministes, i.e.

(H$\mathcal{U}$) : Pour tout ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$, $t \geq 0$, et $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\nu_1 \;=\; \nu_2 \;\text{ sur } [0,t) \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \Longrightarrow \quad \nu_1 \mathbf{1}_A + \nu_2 \mathbf{1}_{A^c} \;\in\; \mathcal{U}(\mathbb{F}) \; .$$

Cette hypothèse est plus faible que celle de stabilité par bifurcation aux temps d'arrêt usuelles, voir [Ka79]. Elle est également plus faible que l'hypothèse de stabilité par concaténation :

(H$\mathcal{U}$)' : Pour tout ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$ et $\tau \in \mathcal{T}_0(\mathbb{F})$, $\nu_1 \mathbf{1}_{[0,\tau)} + \nu_2 \mathbf{1}_{[\tau,\infty)} \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$,

qui n'est pas satisfaite par les problèmes d'arrêt optimal. Plus loin on en utilisera une version affaiblie :

(H$\mathcal{U}$)$''$: Pour tout ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$ et $t \geq 0$, $\nu_1 \mathbf{1}_{[0,t)} + \nu_2 \mathbf{1}_{[t,\infty)} \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$.

On cherche à approcher

$$\sup_{\nu \in \mathcal{U}(\mathbb{F})} \; \mathbb{E}\left[Y^\nu(T)\right] \; .$$

Pour cela, on utilise un algorithme inspiré de celui de [Ca98]. Pour $n \geq 1$, on considère une suite $(\zeta_n^j)_{1 \leq j \leq n}$ de variables aléatoires positives indépendantes de $\mathbb{F}$ et on pose

$$T_n^k \; := \; \sum_{j=1}^{k} \zeta_n^j \quad \text{ for } 1 \leq k \leq n \, , \qquad T_n^0 \; := \; 0 \, .$$

On note m_n la loi de $(\zeta_n^1, \ldots, \zeta_n^n)$ sous $\mathbb{P}$.
L'algorithme est défini ainsi :

$$V_0^{n,\nu} \quad = \quad Y^\nu \;\; , \; \nu \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$$

et pour $k = 0, \ldots, n-1$

$$V_{k+1}^{n,\nu}(t) \;\; = \;\; \operatorname*{ess-sup}_{\mu \in \mathcal{U}(\mathbb{F};t,\nu)} \; \mathbb{E}\left[\bar{V}_k^{n,\nu}(t + \zeta_n^{n-k}) \middle| \mathcal{F}_t\right] \;\; , \; t \geq 0 \, ,$$

où $\bar{V}_k^{n,\nu}$ est un processus d'agrégation de $V_k^{n,\nu}$ au sens de l'hypothèse (HV) ci-dessous, et

$$\mathcal{U}(\mathbb{F};t,\nu) \quad := \quad \{\mu \in \mathcal{U}(\mathbb{F}) \; : \; \mu \; = \; \nu \quad \text{sur } [0,t) \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.}\} \; .$$

Pour donner un sens à cette construction, on suppose que

(HY) Il existe une martingale uniformément intégrable M^Y telle que, pour tout $\nu \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$, $|Y^\nu(t)| \leq M^Y(t)$ pour tout $t \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s.

(HV) Pour tout $\nu \in \mathcal{U}(\mathbb{F})$ et $1 \leq k \leq n-1$, il existe un processus $\bar{V}_k^{n,\nu}$ $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})-$mesurable tel que $\bar{V}_k^{n,\nu}(t) = V_k^{n,\nu}(t)$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t \geq 0$.

Remarque 0.23 Si on suppose, comme c'est le cas dans [Ca98], que les ζ_n^i sont de loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$, on se ramène alors à une suite de problèmes de contrôle standards par la relation

$$e^{-\lambda_n t} V_{k+1}^\nu(t) \;\; = \;\; \operatorname*{ess-sup}_{\mu \in \mathcal{U}(\mathbb{F};t,\nu)} \; \mathbb{E}\left[\lambda_n \int_t^\infty \bar{V}_k^\mu(u) e^{-\lambda_n u} du \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] \, , \qquad t \geq 0 \, ,$$

et l'hypothèse (HV) est automatiquement vérifiée si l'on suppose la stabilité par bifurcation aux temps d'arrêt, voir [Ka79]. On montre que ce résultat reste valable sous (HY), (H$\mathcal{U}$) et $(\mathrm{H}\mathcal{U})''$ à partir du moment où $(Y^\nu)_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})}$ est une famille de processus cadlag vérifiant

$$\liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[Y^{\nu_k}(t)\right] \;\geq\; \mathbb{E}\left[Y^{\nu}(t)\right] \quad \text{si} \quad \mathbb{P}\left[\nu_k(t) \longrightarrow \nu(t),\ \forall t \geq 0\right] = 1\ .$$

Notre premier résultat fournit un encadrement de $V_n^n(0) := V_n^{n,\nu}(0)$.

Théorème 0.24 *Si (HY), (HV) et (H$\mathcal{U}$) sont vérifiées, alors*

$$\sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Y^\nu(T_n^n)\right] \;\leq\; V_n^n(0) \;\leq\; \int \sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Y^\nu(z^1+\ldots+z^n)\right] m_n(dz)\ .$$

On exploite ensuite ce résultat pour obtenir la convergence de l'algorithme sous différents jeux d'hypothèses. Un premier résultat est obtenu sous des conditions de régularité de l'application $t \longmapsto \mathbb{E}\left[Y^\nu(t)\right]$.

Proposition 0.25 *On suppose que (HY)-(HV)-(H$\mathcal{U}$) sont vérifiées, et que $T_n^n \longrightarrow T<\infty$ en probabilité.*
(i) *Si $t>0 \longmapsto \mathbb{E}\left[Y^\nu(t)\right]$ est continue en $t=T$ pour tout $\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})$, alors* $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y^\nu(T_n^n)\right] \geq \mathbb{E}\left[Y^\nu(T)\right]$ *pour tout $\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})$.*
(ii) *Si $t>0 \longmapsto \sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})}\mathbb{E}\left[Y^\nu(t)\right]$ est continue en $t=T$, alors* $\limsup_{n\to\infty} \int \sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Y^\nu(z^1+\ldots+z^n)\right] m_n(dz) \leq \sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Y^\nu(T)\right]$.
(iii) *Si les deux conditions précédentes sont vérifiées, alors*

$$\lim_{n\to\infty} V_n^n(0) \;=\; \sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Y^\nu(T)\right]\ .$$

On fait ensuite le lien entre ce cadre général et les problèmes d'arrêt optimal. On se donne un processus Z adapté à $\mathbb{F}$, à trajectoires cadlag et borné par une martingale uniformément intégrable. On ré-écrit le problème d'arrêt

$$V_0 := \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Z(\tau\wedge T)\right]\ ,$$

sous la forme

$$V_0 = \sup_{\nu\in\mathcal{U}(\mathbb{F})} \mathbb{E}\left[Y^\nu(T)\right] \quad \text{avec} \quad Y^\nu(t) = \int_0^t Z(u)d\nu(u) + Z(t)\mathbf{1}_{\nu(t)=0}\ .$$

et $\mathcal{U}(\mathbb{F}) := \{\mathbf{1}_{\tau<t}\ :\ \tau\in\mathcal{T}_0(\mathbb{F})\}$.

On montre la converge $V_n^n(0)\to V_0$ dès que (HV) est vérifiée et que $T_n^n\to T$ en probabilité. L'hypothèse (HV) peut-être vérifiée en faisant appel aux résultats généraux obtenus par [Ka79] dès que les ζ_n^i sont exponentiellement distribués. Ceci montre que l'algorithme de Carr est bien convergent. On étudie également le comportement de cet algorithme pour un problème de contrôle associé à la couverture d'une option européenne dans un modèle à volatilité stochastique, voir [AvLeP95]. Comme dans [Ca98], on observe une très bonne convergence sur une application numérique.

Chapitre V

Projets de recherche

Mes projets de recherche s'articulent autours de trois axes principaux qui sont succintement développés ci-dessous.

1 Finance mathématique

Je compte tout d'abord poursuivre les travaux initiés dans [7] sur les modèles à information incomplète. L'objectif final est d'être capable de traiter le cas de modèles en temps continu dans lesquels, même en l'absence de frition, les preuves du théorème fondamental d'évaluation d'actifs (voir [DeSc94]et [DeSc98]) ne semblent pas adaptables au cas où la filtration de l'agent ne contient pas celle des prix (il en est de même lorsque le nombre de dates est dénombrable, voir [Sc94]).

En particulier, la notion même de stratégie admissible pose certaines difficultés. Lorsque le nombre de date n'est pas fini, il est nécessaire d'imposer des bornes inférieures au processus de richesse afin d'éviter les stragégies d'arbitrage du type "doubling strategies", mais cette contrainte paraît extrèmement forte lorsque les prix (et donc la richesse) ne sont pas parfaitement observés. Des travaux en cours de Schachermayer et Guasoni sur les modèles avec coûts de transaction (et information parfaite) reposent sur la notion suivante : une stratégie est admissible si pour tout t il existe un temps d'arrêt plus grand que t tel qu'à ce temps la richesse soit positive (ou bornée inférieurement par une constante ne dépendant que de la stratégie). Avec cette définition, on pourrait admettre que la richesse devienne fortement négative pendant une période à condition de savoir avec certitude qu'elle doit revenir à terme dans la zone de solvabilité. On peut noter que de telles situations n'engendrent pas nécessairement d'arbitrage du fait de l'imperfection de l'information.

Je pense qu'il est nécessaire d'adopter ce type de définition lorsque l'information est incomplète. Des travaux devraient être menés dans ce sens très prochainement. S'agissant d'un sujet très difficile, je compte tout d'abord m'intéresser aux modèles à nombre de dates dénombrable avant de passer au temps continu.

Je compte également poursuivre les travaux commencés dans [1] et [15] sur la surréplication en présence de coût de transaction. L'objectif est d'être capable de traiter des structures de coûts générales (certains pouvant en particulier être nuls). Des recherches sont actuellement en cours avec L. Campi et P. Guasoni sur ce thème. Dans un premier temps, on compte s'intéresser à une généralisation de [15] dans laquelle les actifs sont regroupés en "classes d'équivalence" : les coûts sont nuls à l'intérieur d'une classe, strictement positifs entre les classes.

Je devrais ensuite m'intéresser à la couverture d'options américaines, les travaux menés dans [13] ayant montré qu'il ne s'agit pas d'une extension triviale des résultats obtenus pour les payoffs européens. Ce sujet est en outre fortement lié à la formulation d'un théorème de bipolarité "filtré" multidimensionnel sur lequel j'ai déjà travaillé à l'occasion de la rédaction de [11]. A l'époque, je n'avais pas su étendre les résultats de [Zi02] au cas multivarié. Les résultats obtenus depuis dans [13] devraient contribuer à une meilleure compréhension du problème.

2 Cibles stochastiques et EDP

Le travail réalisé avec I. Bentahar dans [17] a montré la difficulté des problèmes de cibles stochastiques lorsque la cible dépend du temps d'atteinte d'une frontière par un processus. J'ai l'intention de poursuivre ce travail dans un cadre plus général (typiquement celui de [3]) et d'affiner les hypothèses permettant d'obtenir des théorèmes de comparaison sur les EDP associées. Un travail est actuellement en cours avec N. Saintier.

Il serait également intéressant de traiter des problèmes de cibles dans lesquels le processus contrôlé doit rester dans un domaine jusqu'à un horizon donné (éventuellement un temps d'arrêt). Ceci est lié à la couverture d'options américaines avec contraintes de portefeuille.

Pour mener à bien ce travail, il faudra tout d'abord étendre le principe de programmation dynamique de Soner et Touzi.

3 Discrétisation d'EDSR

Dans le cadre de sa thèse, Jean-François Chassagneux poursuit sous ma direction des travaux sur la discrétisation d'EDSR réfléchies. Il travaille actuellement sur des modèles vectoriels qui sont notamment liés aux problèmes de contrôle impulsionnel et de jeux stochastiques. Il s'agit d'obtenir des résultats de régularités similaires à ceux déjà obtenus dans [18] (qui permettent ensuite d'étudier les vitesses de convergence des méthodes de résolution de type Monte-Carlo).

J'aimerais également travailler sur la discrétisation d'EDSR avec "contraintes" sur le processus de gain, voir par exemple [CvKaS98], qui sont fortement liées aux problèmes de couverture d'option sous contrainte du type de celui étudié dans [17].

Par ailleurs, jusqu'à présent, seul le cas de générateurs lipschitziens a été considéré alors que de nombreux problèmes, notamment issus de la finance, sont quadratiques. Il s'agit là d'un axe de recherche très important.

Bibliographie

[AnKo00] Antonelli F. et A. Kohatsu-Higa (2000). Filtration stability of backward SDE's. *Stochastic Analysis and Its Applications*, 18, 11-37.

[AvLeP95] Avellaneda M., M. Levy et A. Paras (1995), Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities, *Applied Mathematical Finance* 2, 73-88.

[BaPa02] Bally V. et G. Pages (2002). A quantization algorithm for solving discrete time multidimensional optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9 (6), 1003-1049.

[BaPa03] Bally V. et G. Pagès (2003). Error analysis of the quantization algorithm for obstacle problems. *Stochastic Processes and their Applications*, 106, 1-40.

[BaBiBL03] Barles B., S. Biton, M. Bourgoing et O. Ley (2003). Quasilinear parabolic equations, unbounded solutions and geometrical equations III. Uniqueness through classical viscosity solution's methods. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 18, 159-179.

[BaBuP97] Barles G., R. Buckdahn et E. Pardoux (1997). Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations. *Stochastics and Stochastics Reports*, 60, 57-83.

[BaSo96] Barles G. et H. M. Soner (1996). Option Pricing with Transaction Costs and a Nonlinear Black-Scholes Equation. Prépublication.

[Be05] Becherer D. (2005). Bounded solutions to Backward SDE's with Jumps for Utility Optimization and Indifference Hedging. Prépublication, Imperial College, London.

[BlKaJM02] Blanchet-Scalliet C., N. El Karoui, M. Jeanblanc et L. Martellini (2002). Optimal Investment and Consumption when Time-Horizon is Uncertain. Prépublication.

[BrSc99] Brannath, W. et W. Schachermayer (1999). A Bipolar Theorem for $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Séminaire de Probabilités* XXX, 349-354.

[BrDeM01] Briand P., B. Delyon et J. Mémin (2001). Donsker-type theorem for BSDE's. *Electronic Communications in Probability*, 6, 1-14.

[BrCvS98] Broadie M., J. Cvitaniĉ et M. Soner (1998). Optimal replication of contingent claims under portfolio constraints. *The Review of Financial Studies*, 11 (1), 59-79.

[CaSc06] Campi L. et W. Schachermayer (2006). A Super-Replication Theorem in Kabanov's Model of Transaction Costs. Prépublication.

[Ca98] Carr P. (1998). Randomization and the American Put. *The Review of Financial Studies* 11, 597-626.

[Ca96] Carrière J. F. (1996). Valuation of the Early-Exercise Price for Options using Simulations and Nonparametric Regression, *Insurance : mathematics and Economics*, 19, 19-30.

[ChJh01] Chalasani P. et S. Jha (2001). Randomized stopping times and american option pricing with transaction costs. *Mathematical Finance*, 11 (1), 33-77.

[Ch97] Chevance D. (1997). Numerical Methods for Backward Stochastic Differential Equations. In *Numerical methods in finance*, Edt L.C.G. Rogers and D. Talay, Cambridge University Press, 232-244.

[ChGa03] Chybiryakov O. et N. Gaussel (2003). How to hedge with a delayed information ?. Prépublication.

[CoMaM98] Coquet F., V. Mackevicius et J. Mémin (1998). Stability in D of martingales and backward equations under discretization of filtration. *Stochastic Processes and their Applications*, 75, 235-248.

[CoHu89] Cox J. et C.F. Huang (1989). Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices follow a Diffusion Process. *J. of Economic Theory*, 49, 33-83.

[CrIsL92] Crandall M. G., H. Ishii and P.-L. Lions (1992). User's guide to viscosity solutions of second order Partial Differential Equations. *Amer. Math. Soc.*, 27, 1-67.

[Cv99] Cvitanić J. (1999). Minimizing expected loss of hedging in incomplete and constrained markets. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38, 1050-1066.

[CvKa93] Cvitanić J. et I. Karatzas (1993). Hedging contingent claims with constrained portfolios. *Annals of Applied Probability*, 3, 652-681.

[CvKa96] Cvitaniĉ J. et I. Karatzas (1996). Hedging and portfolio optimization under transaction costs : A martingale approach. *Mathematical Finance*, 6 (2), 133-165.

[CvKaS98] Cvitaniĉ J., I. Karatzas et M. Soner (1998). Backward stochastic differential equations with constraints on the gains-process. *The Annals of Probability*, 26 (4), 1522-1551.

[CvPhT99] Cvitanić J., H. Pham et N. Touzi (1999). A closed-form solution to the problem of super-replication under transaction costs. *Finance and Stochastics*, 3, 35-54.

[CvPhT99b] Cvitaniĉ J. , H. Pham et N. Touzi (1999). Super-replication in stochastic volatility models with portfolio constraints. *Journal of Applied Probability*, 36, 523-545.

[CvWa01] Cvitanić J. et H. Wang (2001). On Optimal Terminal Wealth under Transaction Costs. *J. of Mathematical Economics*, 35 (2), 223-231.

[DaCl94] Davis M. et J. M. C. Clark (1994). A note on super-replicating strategies. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 347, 485-494.

[DaNo90] Davis M. et A. Norman (1990). Portfolio selection with transaction costs. *Math. Operation Research*, 15, 676-713.

[DaPaZ93] Davis M., V.G. Panas et T. Zariphopoulou (1993). European Option Pricing with Transaction Costs. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 31, 470-493.

[DePhT02] Deelstra G., H. Pham et N. Touzi (2002). Dual formulation of the utility maximization problem under transaction costs. *Annals of Applied Probability*, 11 (4), 1353-1383.

[DeGrRSSS02] Delbaen F., P. Grandits, Th. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer et C. Stricker (2002). Exponential hedging and entropic penalties. *Mathematical Finance*, 12 (2), 99-123.

[DeSc94] Delbaen F. et W. Schachermayer (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Annalen*, 300, 463-520.

[DeSc98] Delbaen F. et W. Schachermayer (1998). The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. *Math. Annalen*, 312, 215-250.

[DeKaS06] De Vallière D., Y. Kabanov et C. Stricker (2006). No-Arbitrage Properties for Financial Markets with Transaction Costs and Incomplete Information. Prépublication.

[DiPi94] Dixit A. et R. Pindick (1994). *Investment under uncertainty*, Princeton university press.

[DoMaP96] Douglas J. Jr., J. Ma et P. Protter (1996). Numerical Methods for Forward-Backward Stochastic Differential Equations. *Annals of Applied Probability*, 6, 940-968.

[Ey05] Eyraud-Loisel A. (2005). Backward Stochastic Differential Equations with Enlarged Filtration. Option Hedging of an insider trader in a financial market with Jumps. A paraître dans *Stochastic processes and their Applications*.

[FoKr97] Föllmer H. et D. Kramkov (1997). Optional decomposition under constraints. *Probability Theory and Related Fields*, 109, 1-25.

[FoLe00] Föllmer H. et P. Leukert (2000). Efficient hedging : cost versus shortfall risk. *Finance and Stochastics* 4, 117-146.

[FoLaLLT99] Fournié E., J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions et N. Touzi (1999). Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and Stochastics* **3**, 391-412.

[GiTr77] Gilbarg D. and N. S. Trudinger (1977). *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag.

[GoLeW05] Gobet E., J.P. Lemor et X. Warin (2005). Rate of convergence of empirical regression method for solving generalized BSDE. A paraître dans *Bernoulli*.

[Gr05] Grigoriev P. (2005). On low dimensional Case in the Fundamental Asset Pricing Theorem with Transaction Costs. *Statistics and Decisions*, 23 (1), 33-48.

[Gu02] Guasoni P. (2002). Optimal investment with transaction costs and without semimartingales. *Ann. Appl. Probab.*, 12 (4), 1227-1246

[GuSc04] Guasoni P. et W. Schachermayer (2004). Necessary conditions for the existence of utility maximizing strategies under transaction costs. *Statistics and Decisions*, 22 (2), 153-170.

[HoNe89] Hodges S. et A. Neuberger (1989). Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of Futures Markets*, 8, 222-239.

[JoKa95] Jouini E. et H. Kallal (1995). Martingales and Arbitrage in securities markets with transaction costs. *Journal of Economic Theory*, 66, 178-197.

[JoKa99] Jouini E. et H. Kallal (1999). Viability and Equilibrium in Securities Markets with Frictions. *Mathematical Finance*, 9 (3), 275-292.

[Ka99] Kabanov Y. (1999). Hedging and liquidation under transaction costs in currency market. *Finance and Stochastics*, 3 (2), 237-248.

[KaKi03] Kabanov Y. et M. Kijima. A consumption investment problem with production possibilities. Prépublication.

[KaLa02] Kabanov Yu. et G. Last (2002). Hedging under transaction costs in currency markets : a continuous time model. *Mathematical Finance*, 12, 63-75.

[KaRaS02] Kabanov Y., M. Rásonyi et C. Stricker (2002). No arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. *Finance and Stochastics*, 6 (3), 371-382.

[KaRaS03] Kabanov Y., M. Rásonyi et C. Stricker (2003). On the closedness of sums of convex cones in L^0 and the robust no-arbitrage property. *Finance and Stochastics*, 7 (3), 403-411.

[KaSt01] Kabanov Y. et C. Stricker (2001). A teachers' note on no-arbitrage criteria. *Séminaire de Probabilités XXXV*, Lect. Notes Math. 1755, Springer, 149-152.

[KaSt01b] Kabanov Y. et C. Stricker (2001). The Harisson-Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. *J. Math. Econ.*, 35 (2), 185-196.

[KaSt02] Kabanov Y. et C. Stricker (2002). On the optimal portfolio for the exponential utility maximization : remarks to the six-author paper. *Mathematical Finance*, 12 (2), 125-134.

[KaSt03] Kabanov Y. et C. Stricker (2003). The Dalang-Morton-Willinger theorem under delayed and restricted information. Prépublication.

[KaLeSX91] Karatzas I. , J.P. Lehoczky, S. E. Shreve et G.-L. Xu (1991). Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market. *SIAM J. on Control and Optimization*, 29 (3), 702-730.

[KaSh98] Karatzas I. et S.E. Shreve (1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag.

[Ka79] El Karoui N. (1979). Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour* IX, Lecture Notes in Mathematics 876, Springer Verlag.

[KaKaPPQ97] El Karoui N., C. Kapoudjan, E. Pardoux, S. Peng et M.C. Quenez (1997). Reflected solutions of backward stochastic differential equations and related obstacle problems for PDE's. *Annals of Probability*, 25, 702-737.

[KaPeQ97] El Karoui N., S. Peng et M.-C. Quenez (1997). Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical finance*, 7 (1), 1-71.

[KaRo00] El Karoui N. et R. Rouge (2000). Pricing via Utility Maximization and Entropy. *Mathematical Finance*, 10 (2), 259-276.

[KoPe02] Kohatsu-Higa A. et R. Pettersson (2002). Variance reduction methods for simulation of densities on Wiener space. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40, 431-450.

[KrSc99] Kramkov D. et W. Schachermayer (1999). The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability*, 9, 904-950.

[KrSc03] Kramkov D. et W. Schachermayer (2006). Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability*, 13 (4), 1504-1516.

[KyPi03] Kyprianou A. E. et M. R. Pistorius (2002). Perpetual Options and Canadization Through Fluctuation Theory. *Ann. Appl. Probab.*, 13 (3), 1077-1098

[LeSk97] Levental, S. et A. V. Skorohod (1997). On the possibility of hedging options in the presence of transaction costs. *Annals of Applied Probability*, 7, 410-443.

[LoSc01] Longstaff F. A. et R. S. Schwartz (2001). Valuing American Options By Simulation : A simple Least-Square Approach. *Review of Financial Studies*, 14, 113-147.

[MaPrST02] Ma J. , P. Protter, J. San Martin et S. Torres (2002). Numerical Method for Backward Stochastic Differential Equations. *Annals of Applied Probability*, 12 (1), 302-316.

[MaPrY94] Ma J., P. Protter et J. Yong (1994). Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly - a four step scheme. *Probability Theory and Related Fields*, 98, 339-359.

[MaZh02] Ma J. et J. Zhang (2002). Path Regularity of Solutions to Backward Stochastic Differential Equations. *Probability Theory and Related Fields*, 122, 163-190.

[MaZh05] Ma J. et J. Zhang (2005). Representations and Regularities for solution of BSDEs with reflections. *Stochastic Processes and Their Applications*, 115 (4), 539-569.

[Mn02] Mnif M. (2002). Optimal risk control under proportional reinsurance contract : a dynamic programming duality approach. Prépublication.

[NiYo05] Nikeghbali A. et M. Yor (2005). A definition and some properties of pseudo stopping times. *Annals of Probability*, 33 (5), 1804-1824

[Nu95] Nualart D. (1995). *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer Verlag, Berlin.

[Ow02] Owen M. (2002). Utility based optimal hedging in incomplete markets. *Annals of Applied Probability* 12, 691-709.

[Pa98] Pardoux E. (1998). Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order. Dans *Stochastic Analysis and Related Topics VI. Proceedings of the Sixth Oslo-Silivri Workshop, Geilo, 1996*, Progr. Probab. 42, 79-127, L. Decreusefond et al. (eds).

[PaPe92] Pardoux E. et S. Peng (1992). Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. *Lecture Notes in Control and Inform. Sci*, 176, 200-217.

[PaPrR97] Pardoux E., F. Pradeilles et Z. Rao (1997). Probabilistic interpretation for a system of semilinear parabolic partial differential equations. *Ann. Inst. H. Poincare*, 33 (4), 467-490.

[Pe01] Penner I. (2001). *Arbitragefreiheit in Finanzmärkten mit Transaktionkosten*. Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin.

[Ph02] Pham H. (2002). Minimizing shortfall risk and applications to finance and insurance problems. *Annals of Applied Probability*, 12 (1), 143-172.

[Ra02] Rásonyi M. (2002). *On certain problems of arbitrage theory in discrete time financial market models*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besaçon.

[Ri75] Richard S. (1975). Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived individual in a continuous time model. *Journal of Financial Economics*, **1**, 2, 1975, 187-203.

[Ro70] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[Sc94] Schachermayer W. (1994). Martingale Measures for discrete-time processes with infinite horizon. *Mathematical Finance*, 4 (1), 25-55.

[Sc01] Schachermayer W. (2001). Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. *Annals of Applied Probability* 11, 694-734.

[Sc03] Schachermayer W. (2003). A Super-Martingale Property of the Optimal Portfolio Process. *Finance and Stochastics*, 7 (4), 433-456.

[Sc04] Schachermayer W. (2004). The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time. *Mathematical Finance*, 14 (1), 19-48.

[Sc96] Schaefer, H. H. (1996). *Topological vector spaces*, Springer Graduate Texts in Mathematics.

[ShScW02] Shreve S. E., U. Schmock et U. Wystup (2002). Valuation of exotic options under shortselling constraints. *Finance and Stochastics*, 6, 143-172.

[SoShC95] Soner M., S. Shreve et J. Cvitanić (1995). There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *Annals of Applied Probability*, 5, 327-355.

[SoTo00] Soner H. M. et N. Touzi (2000). Super-replication under Gamma constraint. *Journal on Control and Optimization*, 39, 73-96.

[SoTo02] Soner H. M. et N. Touzi (2002). Stochastic target problems, dynamic programming and viscosity solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41, 404-424.

[SoTo02b] Soner H. M. et N. Touzi (2002). Dynamic programming for stochastic target problems and geometric flows. *Journal of the European Mathematical Society*, 4, 201-236.

[SoTo02c] Soner H. M. et N. Touzi (2002). Level set characterization of stochastic target problems. *Communications in PDEs*, 27, 2031-2053.

[SoTo04] Soner H. M. et N. Touzi (2004). The problem of super-replication under constraints. A paraître dans *Paris-Princeton Lectures in Mathematical Finance*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[SoTo05] Soner H. M. et N. Touzi (2005). Hedging under gamma constraints by optimal stopping and face-lifting. A paraître dand *Mathematical Finance*.

[SoPa04] Sow A. B. et E. Pardoux (2004). Probabilistic interpretation of a system of quasilinear parabolic PDEs. *Stochastics and Stochastics Reports*, 76 (5), 429-477.

[TaLi94] Tang S. et X. Li (1994). Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps. *SIAM J. Control Optim.*, 32 (5), 1447-1475.

[Zh01] Zhang J. (2001). *Some fine properties of backward stochastic differential equations.* PhD thesis, Purdue University.

[Zh04] Zhang J. (2004). A numerical scheme for BSDEs. *Annals of Applied Probability*, 14 (1), 459-488.

[Zi02] Žitković G. (2002). A Filtered Version of the Bipolar Theorem of Brannath and Schachermayer. *Journal of Theoretical Probability*, 15 (1), 41-61.