

# Renormalisation des théories de champs non commutatives

Soutenance de thèse

Fabien Vignes-Tourneret

Laboratoire de Physique Théorique  
Université Paris XI

Orsay, le 14 septembre 2006



**UNIVERSITÉ  
PARIS-SUD 11**

# Avertissement

Ce programme comporte certaines scènes déconseillées aux personnes insensibles à la rigueur mathématique.

# Plan de l'exposé

1 Motivations et contexte

2 Analyse multi-échelles

3 Vulcanisation

4 Le modèle de Gross-Neveu non commutatif

5 Conclusion et perspectives

# Motivations et contexte

## 1 Motivations et contexte

- État des lieux
- Théorie des champs non commutative

## 2 Analyse multi-échelles

## 3 Vulcanisation

## 4 Le modèle de Gross-Neveu non commutatif

## 5 Conclusion et perspectives

# La physique fondamentale aujourd'hui



# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité)

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
- ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.



# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps,
- ➔ fort contenu géométrique.

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps,
- ➔ fort contenu géométrique.

Pourquoi ne pas se satisfaire de cette situation ?

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps,
- ➔ fort contenu géométrique.

Pourquoi ne pas se satisfaire de cette situation ?

- ▶ Ésthétiquement (mathématiquement) décevant

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps,
- ➔ fort contenu géométrique.

Pourquoi ne pas se satisfaire de cette situation ?

- ▶ Ésthétiquement (mathématiquement) décevant,
- ▶ certaines situations requièrent la gravitation **et** la mécanique quantique.

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps,
- ➔ fort contenu géométrique.

Pourquoi ne pas se satisfaire de cette situation ?

- ▶ Ésthétiquement (mathématiquement) décevant,
  - ▶ certaines situations requièrent la gravitation **et** la mécanique quantique.
- ➔ La relativité générale ne s'y applique pas.

# La physique fondamentale aujourd'hui

Elle repose sur deux théories très bien vérifiées expérimentalement (dans leurs domaines de validité) :

- ▶ la relativité générale,
  - ▶ le modèle standard des interactions électro-faible et forte.
- ➔ Conception ambiguë de l'espace-temps,
- ➔ fort contenu géométrique.

Pourquoi ne pas se satisfaire de cette situation ?

- ▶ Ésthétiquement (mathématiquement) décevant,
  - ▶ certaines situations requièrent la gravitation **et** la mécanique quantique.
- ➔ La relativité générale ne s'y applique pas.
- ➔ Nécessité de mieux comprendre la mécanique quantique.



# Pourquoi la géométrie non commutative ?



# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

- ▶ Une généralisation de la géométrie différentielle ordinaire.

# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

- ▶ Une généralisation de la géométrie différentielle ordinaire.
- ▶ Certains types d'espaces (topologiques, mesurables, ...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions.

# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

- ▶ Une généralisation de la géométrie différentielle ordinaire.
- ▶ Certains types d'espaces (topologiques, mesurables, ...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions.
- ▶ Théorème de Gelfand-Naimark : toute  $C^*$ -algèbre commutative est exactement une algèbre de fonctions continues sur un espace topologique (1940).

# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

- ▶ Une généralisation de la géométrie différentielle ordinaire.
- ▶ Certains types d'espaces (topologiques, mesurables, ...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions.
- ▶ Théorème de Gelfand-Naimark : toute  $C^*$ -algèbre commutative est exactement une algèbre de fonctions continues sur un espace topologique (1940).

$$X \text{ esp. topo.} \longleftrightarrow C_0(X) \subset \{C^*\text{-algèbres}\}$$

# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

- ▶ Une généralisation de la géométrie différentielle ordinaire.
- ▶ Certains types d'espaces (topologiques, mesurables, ...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions.
- ▶ Théorème de Gelfand-Naimark : toute  $C^*$ -algèbre commutative est exactement une algèbre de fonctions continues sur un espace topologique (1940).

$$X \text{ esp. topo.} \longleftrightarrow C_0(X) \subset \{C^*\text{-algèbres}\}$$

- ▶ Quelles algèbres correspondent aux variétés différentiables (1970) ?

# Qu'est-ce que la géométrie non commutative ?

- ▶ Une généralisation de la géométrie différentielle ordinaire.
- ▶ Certains types d'espaces (topologiques, mesurables, ...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions.
- ▶ Théorème de Gelfand-Naimark : toute  $C^*$ -algèbre commutative est exactement une algèbre de fonctions continues sur un espace topologique (1940).

$$X \text{ esp. topo.} \longleftrightarrow C_0(X) \subset \{C^*\text{-algèbres}\}$$

- ▶ Quelles algèbres correspondent aux variétés différentiables (1970) ?
- ➔ Géométrie différentielle non commutative = comment faire de la géométrie à partir d'algèbres non commutatives.

# Pourquoi la géométrie non commutative ?



# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut*

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?
- ▶ Un fort potentiel unificateur

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?
- ▶ Un fort potentiel unificateur
  - ▶ Le champs de Higgs est une composante d'un champ de jauge unique (Dubois-Violette, Kerner, Madore)



# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?
- ▶ Un fort potentiel unificateur
  - ▶ Le champs de Higgs est une composante d'un champ de jauge unique (Dubois-Violette, Kerner, Madore)
  - ▶ Les symétries internes et externes sont unifiées (mêmes auteurs)

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?
- ▶ Un fort potentiel unificateur
  - ▶ Le champs de Higgs est une composante d'un champ de jauge unique (Dubois-Violette, Kerner, Madore)
  - ▶ Les symétries internes et externes sont unifiées (mêmes auteurs)
  - ▶ Idées appliquées avec succès au modèle standard (Connes-Lott)

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?
- ▶ Un fort potentiel unificateur
  - ▶ Le champs de Higgs est une composante d'un champ de jauge unique (Dubois-Violette, Kerner, Madore)
  - ▶ Les symétries internes et externes sont unifiées (mêmes auteurs)
  - ▶ Idées appliquées avec succès au modèle standard (Connes-Lott)
  - ▶ Unification de l'action d'Einstein-Hilbert et du modèle standard (Connes-Chamseddine)

# Pourquoi la géométrie non commutative ?

Un cadre mathématique cohérent :

- ▶ Généralisation de la géométrie différentielle classique
- ➔ contient la géométrie usuelle
- ▶ utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (opérateurs sur un espace de Hilbert)

Une approche *du bas vers le haut* :

- ➔ Que nous apprennent les modèles actuels ?
- ▶ Un fort potentiel unificateur
  - ▶ Le champs de Higgs est une composante d'un champ de jauge unique (Dubois-Violette, Kerner, Madore)
  - ▶ Les symétries internes et externes sont unifiées (mêmes auteurs)
  - ▶ Idées appliquées avec succès au modèle standard (Connes-Lott)
  - ▶ Unification de l'action d'Einstein-Hilbert et du modèle standard (Connes-Chamseddine)

Tout ceci reste classique !

# Du haut vers le bas

# Du haut vers le bas

Qu'est-ce que le groupe de renormalisation sur un espace non commutatif ?

# Du haut vers le bas

Qu'est-ce que le groupe de renormalisation sur un espace non commutatif?  
Une première étape : les théories de champs non commutatives.

# Du haut vers le bas

Qu'est-ce que le groupe de renormalisation sur un espace non commutatif?

Une première étape : les théories de champs non commutatives.

- ▶ Une vieille idée due à Schrödinger, Heisenberg et Peierls



## Du haut vers le bas

Qu'est-ce que le groupe de renormalisation sur un espace non commutatif?

Une première étape : les théories de champs non commutatives.

- ▶ Une vieille idée due à Schrödinger, Heisenberg et Peierls
- ➔ Snyder (1947) : *Quantized space-time*. Pour améliorer le comportement UV des théories de champs.

# Du haut vers le bas

Qu'est-ce que le groupe de renormalisation sur un espace non commutatif ?

Une première étape : les théories de champs non commutatives.

- ▶ Une vieille idée due à Schrödinger, Heisenberg et Peierls
- ➔ Snyder (1947) : *Quantized space-time*. Pour améliorer le comportement UV des théories de champs.
- ▶ Idée abandonnée : non physique (?), renormalisation.

## Du haut vers le bas

Qu'est-ce que le groupe de renormalisation sur un espace non commutatif ?

Une première étape : les théories de champs non commutatives.

- ▶ Une vieille idée due à Schrödinger, Heisenberg et Peierls
- ➔ Snyder (1947) : *Quantized space-time*. Pour améliorer le comportement UV des théories de champs.
- ▶ Idée abandonnée : non physique (?), renormalisation.
- ▶ Certaines limites de la théorie des cordes sont des théories de champs non commutatives (1998).

# L'espace de Moyal

# L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

# L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}_\Theta^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

# L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}_\Theta^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

- ▶  $\Theta =$  matrice anti-symétrique constante

## L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}_\Theta^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

- ▶  $\Theta =$  matrice anti-symétrique constante

- ▶  $d = 4$  :

$$\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & (0) \\ (0) & 0 & 1 \\ (0) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



## L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}_\Theta^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

- ▶  $\Theta =$  matrice anti-symétrique constante

- ▶  $d = 4$  :

$$\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ (0) & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Analytiquement : une représentation de cette algèbre est donnée par
  - ▶  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

## L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}_\Theta^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

- ▶  $\Theta =$  matrice anti-symétrique constante

- ▶  $d = 4$  :

$$\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & (0) \\ (0) & 0 & 1 \\ (0) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Analytiquement : une représentation de cette algèbre est donnée par
  - ▶  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
  - ▶ équipé du produit associatif mais non commutatif de Moyal

## L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

- ▶  $\Theta =$  matrice anti-symétrique constante

- ▶  $d = 4$  :

$$\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ (0) & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Analytiquement : une représentation de cette algèbre est donnée par
  - ▶  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
  - ▶ équipé du produit associatif mais non commutatif de Moyal

$$(f \star g)(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^d y f(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) g(x + y) e^{ik \cdot y}$$

## L'espace de Moyal

L'espace le plus simple et le plus étudié.

- ▶ Algébriquement : l'ensemble des « fonctions sur  $\mathbb{R}^d$  » est engendré par

$$\{x^\mu, \mu = 1, \dots, d\} \text{ quotienté par } [x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}.$$

- ▶  $\Theta =$  matrice anti-symétrique constante

- ▶  $d = 4$  :

$$\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ (0) & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Analytiquement : une représentation de cette algèbre est donnée par
  - ▶  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
  - ▶ équipé du produit associatif mais non commutatif de Moyal

$$(f \star g)(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^d y f(x + \frac{1}{2}\Theta \cdot k) g(x + y) e^{ik \cdot y}$$

- ▶ Extension en une sous-algèbre du dual  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .



# Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par



## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- ▶ Le secteur planaire est inchangé.



## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

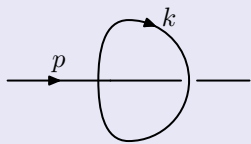
- ▶ Le secteur planaire est inchangé.
- ▶ Le secteur non planaire souffre d'un nouveau type de divergences.

## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- ▶ Le secteur planaire est inchangé.
- ▶ Le secteur non planaire souffre d'un nouveau type de divergences. Par exemple,



$$= \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu \Theta^{\mu\nu} k_\nu}}{k^2 + m^2}$$

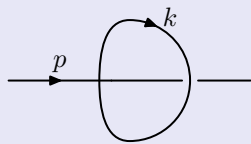
$$= \frac{\lambda}{48\pi^2} \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} p^{-2}$$

## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- ▶ Le secteur planaire est inchangé.
- ▶ Le secteur non planaire souffre d'un nouveau type de divergences. Par exemple,



$$= \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu \Theta^{\mu\nu} k_\nu}}{k^2 + m^2}$$

$$= \frac{\lambda}{48\pi^2} \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} p^{-2}$$

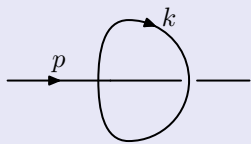
- ▶ Divergence non locale.

## Mélange UV/IR

- ▶ Le modèle  $\phi^4$  sur  $\mathbb{R}_\Theta^4$  est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \star \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- ▶ Le secteur planaire est inchangé.
- ▶ Le secteur non planaire souffre d'un nouveau type de divergences. Par exemple,



$$= \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu \Theta^{\mu\nu} k_\nu}}{k^2 + m^2}$$

$$= \frac{\lambda}{48\pi^2} \sqrt{\frac{m^2}{\tilde{p}^2}} K_1(\sqrt{m^2 \tilde{p}^2}) \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} p^{-2}$$

- ▶ Divergence non locale.
- ➔ La théorie est non renormalisable.

# Analyse multi-échelles

## 1 Motivations et contexte

## 2 **Analyse multi-échelles**

- Espace des phases
- Comptage de puissance

## 3 Vulcanisation

## 4 Le modèle de Gross-Neveu non commutatif

## 5 Conclusion et perspectives

# Espace des phases

## Espace des phases

- Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)



## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.
  - ▶ Un bon moyen = découpage du propagateur

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.
- ▶ Un bon moyen = découpage du propagateur

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(p^2 + m^2)}$$

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.
- ▶ Un bon moyen = découpage du propagateur

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(p^2 + m^2)}$$

$$C(x, y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2}$$

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.
- ▶ Un bon moyen = découpage du propagateur

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(p^2 + m^2)}$$

$$C(x, y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2} = \sum_{i=0}^\infty C^i(x, y)$$

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.
- ▶ Un bon moyen = découpage du propagateur

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(p^2 + m^2)}$$

$$C(x, y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2} = \sum_{i=0}^\infty C^i(x, y)$$

$$C^0 = \int_1^\infty \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2}$$

## Espace des phases

- ▶ Considérons le modèle commutatif :  $L[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-\Delta + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- ▶ L'analyse multi-échelles s'inspire des idées de Wilson sur le groupe de renormalisation (UV  $\rightarrow$  IR, théories effectives)
- ➔ Effectuer l'intégrale fonctionnelle en plusieurs fois.
- ▶ Un bon moyen = découpage du propagateur

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(p^2 + m^2)}$$

$$C(x, y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2} = \sum_{i=0}^\infty C^i(x, y)$$

$$C^0 = \int_1^\infty \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2}$$

$$C^i = \int_{M^{-2i}}^{M^{-2(i-1)}} \frac{dt}{(4\pi t)^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - tm^2}, \quad i = 1, \dots, \infty$$

# Espace des phases

## Lemme

Pour tout  $i$ , il existe  $K, k \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$C^i(x, y) \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|x-y|}.$$



# Espace des phases

## Lemme

Pour tout  $i$ , il existe  $K, k \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$C^i(x, y) \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|x-y|}.$$

►  $C = \sum_i C^i$  implique  $d\mu_C(\phi) = \bigotimes_i d\mu_{C^i}(\phi^i)$ ,  $\phi = \sum_i \phi^i$ .

# Espace des phases

## Lemme

Pour tout  $i$ , il existe  $K, k \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$C^i(x, y) \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|x-y|}.$$

- ▶  $C = \sum_i C^i$  implique  $d\mu_C(\phi) = \bigotimes_i d\mu_{C^i}(\phi^i)$ ,  $\phi = \sum_i \phi^i$ .
- ▶ Le découpage du propagateur  $\rightarrow$  attribution d'échelles

# Espace des phases

## Lemme

Pour tout  $i$ , il existe  $K, k \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$C^i(x, y) \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|x-y|}.$$

- ▶  $C = \sum_i C^i$  implique  $d\mu_C(\phi) = \bigotimes_i d\mu_{C^i}(\phi^i)$ ,  $\phi = \sum_i \phi^i$ .
- ▶ Le découpage du propagateur  $\rightarrow$  attribution d'échelles :

$$A_G = \int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu \in G} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l$$

# Espace des phases

## Lemme

Pour tout  $i$ , il existe  $K, k \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$C^i(x, y) \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|x-y|}.$$

- ▶  $C = \sum_i C^i$  implique  $d\mu_C(\phi) = \bigotimes_i d\mu_{C^i}(\phi^i)$ ,  $\phi = \sum_i \phi^i$ .
- ▶ Le découpage du propagateur  $\rightarrow$  attribution d'échelles :

$$A_G = \int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu \in G} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l = \sum_{i_1, \dots, i_l} \int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu \in G} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l}$$

# Espace des phases

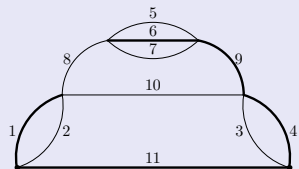
## Lemme

Pour tout  $i$ , il existe  $K, k \in \mathbb{R}_+$  tels que

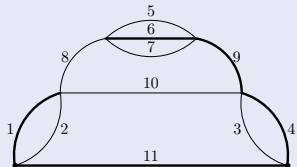
$$C^i(x, y) \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|x-y|}.$$

- ▶  $C = \sum_i C^i$  implique  $d\mu_C(\phi) = \bigotimes_i d\mu_{C^i}(\phi^i)$ ,  $\phi = \sum_i \phi^i$ .
- ▶ Le découpage du propagateur  $\rightarrow$  attribution d'échelles :

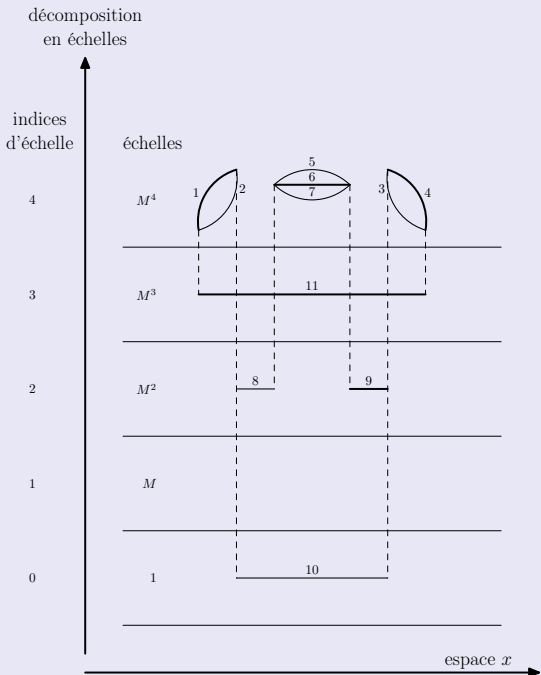
$$\begin{aligned} A_G &= \int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu \in G} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l = \sum_{i_1, \dots, i_l} \int_{\mathbb{R}} \prod_{\nu \in G} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l} \\ &= \sum_{\mu \in \mathbb{N}^l(\mathfrak{G})} A_G^\mu \end{aligned}$$



Un graphe de  $\phi^4$



Un graphe de  $\phi^4$



Exemple d'attribution d'échelles

# Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.



## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{I \in G} C_I^{i_I}(x_I, y_I) \quad \text{invariance par translation}$$

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{I \in G} C_I^{i_I}(x_I, y_I) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{ij}(x_l, y_l) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{l \in G} M^{2(i_l+1)} \prod_{l \in \mathcal{T}} M^{-4(i_l+1)}$$

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l}(x_l, y_l) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{l \in G} M^{2(i_l+1)} \prod_{l \in \mathcal{T}} M^{-4(i_l+1)} = K^n \prod_{l \in G} \prod_{i=0}^{i_l} M^2 \prod_{l \in \mathcal{T}} \prod_{j=0}^{i_l} M^{-4}$$

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l}(x_l, y_l) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{l \in G} M^{2(i_l+1)} \prod_{l \in \mathcal{T}} M^{-4(i_l+1)} = K^n \prod_{l \in G} \prod_{i=0}^{i_l} M^2 \prod_{l \in \mathcal{T}} \prod_{j=0}^{i_l} M^{-4}$$

Naturel d'introduire :  $G^i \stackrel{\text{def}}{=} \{l \in G : i_l \geq i\}$ .

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l}(x_l, y_l) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{l \in G} M^{2(i_l+1)} \prod_{l \in \mathcal{T}} M^{-4(i_l+1)} = K^n \prod_{l \in G} \prod_{i=0}^{i_l} M^2 \prod_{l \in \mathcal{T}} \prod_{j=0}^{i_l} M^{-4}$$

Naturel d'introduire :  $G^i \stackrel{\text{def}}{=} \{l \in G : i_l \geq i\}$ .  $G^i = \bigcup_k G_k^i$  (**composantes connexes**).

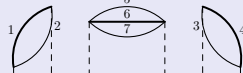
# décomposition en échelles

indices  
d'échelle

échelles

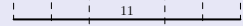
4

$M^4$



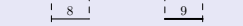
3

$M^3$



2

$M^2$



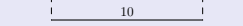
1

$M$

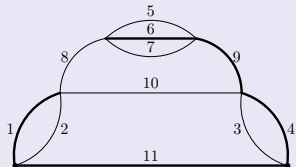


0

1



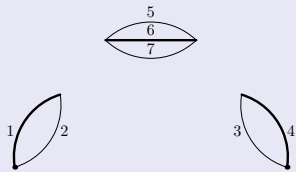
espace  $x$



Un graphe de  $\phi^4$

Exemple d'attribution d'échelles

# décomposition en échelles

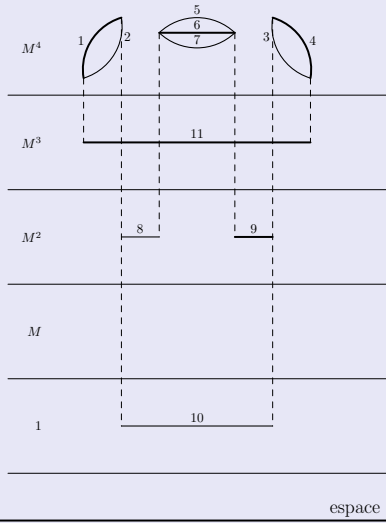


Composantes connexes à l'échelle  $M^4$

indices d'échelle

4  
3  
2  
1  
0

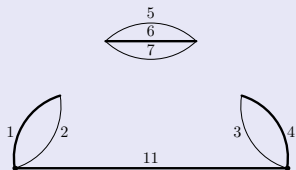
échelles



Exemple d'attribution d'échelles



# décomposition en échelles



Composantes connexes à l'échelle  $M^3$

indices d'échelle

4

échelles

$M^4$

3

$M^3$

2

$M^2$

1

$M$

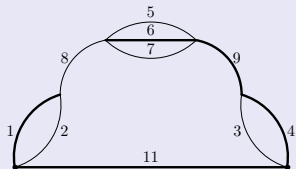
0

1

espace  $x$

Exemple d'attribution d'échelles

décomposition  
en échelles



Composante  
connexe à l'échelle  
 $M^2$

indices  
d'échelle

4

échelles

$M^4$

3

$M^3$

2

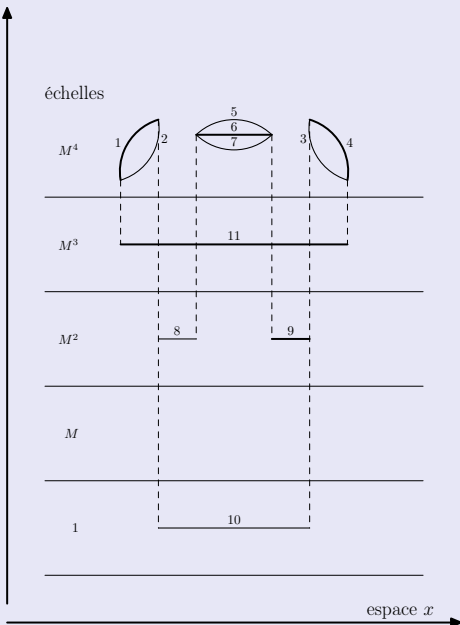
$M^2$

1

$M$

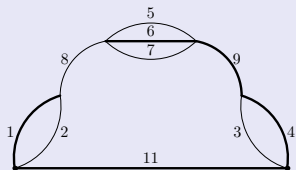
0

1



espace  $x$

Exemple d'attribution d'échelles



Composante  
connexe à l'échelle  
 $M$

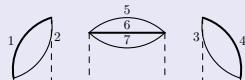
décomposition  
en échelles

indices  
d'échelle

4

échelles

$M^4$



3

$M^3$



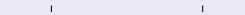
2

$M^2$



1

$M$



0

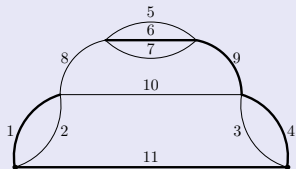
1



espace  $x$

Exemple d'attribution d'échelles

décomposition  
en échelles



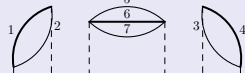
Composante  
connexe à l'échelle  
1

indices  
d'échelle

4

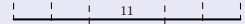
échelles

$M^4$



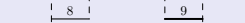
3

$M^3$



2

$M^2$



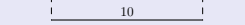
1

$M$



0

1



espace  $x$

Exemple d'attribution d'échelles

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l}(x_l, y_l) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{l \in G} M^{2(i_l+1)} \prod_{l \in \mathcal{T}} M^{-4(i_l+1)} = K^n \prod_{l \in G} \prod_{i=0}^{i_l} M^2 \prod_{l \in \mathcal{T}} \prod_{j=0}^{i_l} M^{-4}$$

Naturel d'introduire :  $G^i \stackrel{\text{def}}{=} \{l \in G : i_l \geq i\}$ .  $G^i = \bigcup_k G_k^i$  (**composantes connexes**).

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\omega(G_k^i)}, \quad \omega(G_k^i) = N(G_k^i) - 4.$$

## Comptage de puissance

Soit un graphe  $G$  avec  $n$  vertex et  $N$  points externes.

$$A_G^\mu = \int \prod_{\substack{\nu \in G, \\ \nu \neq \nu_0}} dx_\nu \prod_{l \in G} C_l^{i_l}(x_l, y_l) \quad \text{invariance par translation}$$

$n - 1$  points à intégrer  $\rightarrow$  choisir un arbre  $\mathcal{T}$

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{l \in G} M^{2(i_l+1)} \prod_{l \in \mathcal{T}} M^{-4(i_l+1)} = K^n \prod_{l \in G} \prod_{i=0}^{i_l} M^2 \prod_{l \in \mathcal{T}} \prod_{j=0}^{i_l} M^{-4}$$

Naturel d'introduire :  $G^i \stackrel{\text{def}}{=} \{l \in G : i_l \geq i\}$ .  $G^i = \bigcup_k G_k^i$  (**composantes connexes**).

$$A_G^\mu \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\omega(G_k^i)}, \quad \omega(G_k^i) = N(G_k^i) - 4.$$

$\rightarrow$  direction du groupe de renormalisation.

# Vulcanisation

1 Motivations et contexte

2 Analyse multi-échelles

**3 Vulcanisation**

- Le contreterme manquant
- Orientabilité et localité
- Comptage de puissance

4 Le modèle de Gross-Neveu non commutatif

5 Conclusion et perspectives

# La percée



# La percée

## Théorème (H. Grosse and R. Wulkenhaar)

*La théorie quantique des champs définie par*

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

*avec  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$  et une métrique euclidienne est renormalisable à tous les ordres de perturbation.*

# La percée

## Théorème (H. Grosse and R. Wulkenhaar)

*La théorie quantique des champs définie par*

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

*avec  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$  et une métrique euclidienne est renormalisable à tous les ordres de perturbation.*

# La percée

## Théorème (H. Grosse and R. Wulkenhaar)

*La théorie quantique des champs définie par*

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

*avec  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$  et une métrique euclidienne est renormalisable à tous les ordres de perturbation.*

Il existe maintenant trois preuves différentes

# La percée

## Théorème (H. Grosse and R. Wulkenhaar)

*La théorie quantique des champs définie par*

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

*avec  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$  et une métrique euclidienne est renormalisable à tous les ordres de perturbation.*

Il existe maintenant trois preuves différentes :

- ▶ Base matricielle + équation de Polchinski (H. Grosse, R. Wulkenhaar)

# La percée

## Théorème (H. Grosse and R. Wulkenhaar)

La théorie quantique des champs définie par

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

avec  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$  et une métrique euclidienne est renormalisable à tous les ordres de perturbation.

Il existe maintenant trois preuves différentes :

- ▶ Base matricielle + équation de Polchinski (H. Grosse, R. Wulkenhaar)
- ▶ Base matricielle + analyse multi-échelles (V. Rivasseau, F. V. T., R. Wulkenhaar)

# La percée

## Théorème (H. Grosse and R. Wulkenhaar)

La théorie quantique des champs définie par

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{\Omega^2}{2} (\tilde{x}_\mu \phi) \star (\tilde{x}^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi + \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) (x)$$

avec  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$  et une métrique euclidienne est renormalisable à tous les ordres de perturbation.

Il existe maintenant trois preuves différentes :

- ▶ Base matricielle + équation de Polchinski (H. Grosse, R. Wulkenhaar)
- ▶ Base matricielle + analyse multi-échelles (V. Rivasseau, F. V. T., R. Wulkenhaar)
- ▶ En espace  $x$  (R. Gurau, J. Magnen, V. Rivasseau, F. V. T.)

# Le modèle

## Le modèle

- Le propagateur = noyau de Mehler

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y) \\
 &= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}
 \end{aligned}$$



## Le modèle

- ▶ Le propagateur = noyau de Mehler,  $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y) \\
 &= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}
 \end{aligned}$$

## Le modèle

- ▶ Le propagateur = noyau de Mehler,  $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y) \\
 &= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}
 \end{aligned}$$

## Le modèle

- ▶ Le propagateur = noyau de Mehler,  $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y) \\
 &= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}
 \end{aligned}$$

## Le modèle

- Le propagateur = noyau de Mehler,  $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y) \\
 &= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}
 \end{aligned}$$

## Le modèle

- Le propagateur = noyau de Mehler,  $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$

$$C(x, y) = (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y)$$

$$= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}$$

$$C^i \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|u| - kM^{-i-1}|v|}, \quad u = x - y, v = x + y$$

## Le modèle

- ▶ Le propagateur = noyau de Mehler,  $\tilde{\Omega} = \frac{2\Omega}{\theta}$

$$C(x, y) = (p^2 + \tilde{\Omega}^2 x^2 + m^2)^{-1}(x, y)$$

$$= \frac{\Omega^2}{\theta^2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sinh^2(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \tanh(2\tilde{\Omega}t)(x+y)^2 - tm^2}$$

$$C^i \leq KM^{2(i+1)} e^{-kM^{i+1}|u| - kM^{-i-1}|v|}, \quad u = x - y, v = x + y$$

- ▶ Le vertex est **non local** :

$$\int dx \phi^{*4}(x) = \frac{1}{\pi^4 |\det \Theta|} \int \prod_{i=1}^4 dx^i \phi(x^i) \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$\exp i(x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4),$$

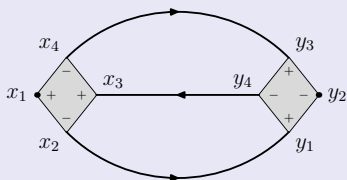
$$\text{avec } x \wedge y = 2x\Theta^{-1}y.$$

# Une notion clé

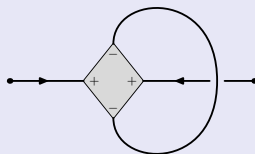
## Définition

Un graphe est dit **orientable** si ses lignes peuvent être munies de flèches alternativement entrantes et sortantes dans l'ordre cyclique autour de chaque vertex.

# Exemples



Orientable



Non orientable



# Une notion clé

## Définition

Un graphe est dit **orientable** si ses lignes peuvent être munies de flèches alternativement entrantes et sortantes dans l'ordre cyclique autour de chaque vertex.

- ▶ Alternance des flèches = alternance des signes des fonctions delta

# Une notion clé

## Définition

Un graphe est dit **orientable** si ses lignes peuvent être munies de flèches alternativement entrantes et sortantes dans l'ordre cyclique autour de chaque vertex.

- ▶ Alternance des flèches = alternance des signes des fonctions delta
- ▶ Fonction delta globale :

$$\delta_G \left( \sum_{e \in \mathcal{E}(G)} \eta(e) x_e + \sum_{l \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L}_0} u_l + \sum_{l \in \mathcal{L}_+} v_l - \sum_{l \in \mathcal{L}_-} v_l \right)$$

# Une notion clé

## Définition

Un graphe est dit **orientable** si ses lignes peuvent être munies de flèches alternativement entrantes et sortantes dans l'ordre cyclique autour de chaque vertex.

- ▶ Alternance des flèches = alternance des signes des fonctions delta
- ▶ Fonction delta globale :

$$\delta_G \left( \sum_{e \in \mathcal{E}(G)} \eta(e) x_e + \sum_{l \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L}_0} u_l + \sum_{l \in \mathcal{L}_+} v_l - \sum_{l \in \mathcal{L}_-} v_l \right)$$

→ Les graphes orientables sont « locaux ».

# Topologie des graphes de Feynman

# Topologie des graphes de Feynman

Soit un graphe avec :

- ▶  $V$  vertex,

# Topologie des graphes de Feynman

Soit un graphe avec :

- ▶  $V$  vertex,
- ▶  $I$  propagateurs (lignes doubles),

# Topologie des graphes de Feynman

Soit un graphe avec :

- ▶  $V$  vertex,
- ▶  $I$  propagateurs (lignes doubles),
- ▶  $L$  boucles (lignes simples).

# Topologie des graphes de Feynman

Soit un graphe avec :

- ▶  $V$  vertex,
- ▶  $I$  propagateurs (lignes doubles),
- ▶  $L$  boucles (lignes simples).

Ce graphe peut être dessiné sur une variété de genre  $g$ .



# Topologie des graphes de Feynman

Soit un graphe avec :

- ▶  $V$  vertex,
- ▶  $I$  propagateurs (lignes doubles),
- ▶  $L$  boucles (lignes simples).

Ce graphe peut être dessiné sur une variété de genre  $g$ .

- ▶ Calculé à partir de la caractéristique d'Euler  $\chi = 2 - 2g = V - I + L$ .

# Topologie des graphes de Feynman

Soit un graphe avec :

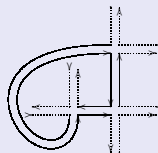
- ▶  $V$  vertex,
- ▶  $I$  propagateurs (lignes doubles),
- ▶  $L$  boucles (lignes simples).

Ce graphe peut être dessiné sur une variété de genre  $g$ .

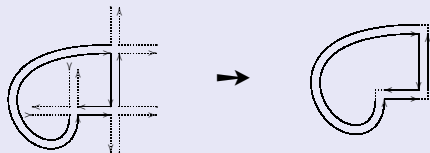
- ▶ Calculé à partir de la caractéristique d'Euler  $\chi = 2 - 2g = V - I + L$ .
- ➔ genre 0 : graphe planaire
- genre  $> 0$  : graphe non planaire.

# Exemples de graphes

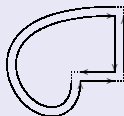
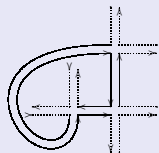
# Exemples de graphes



## Exemples de graphes



## Exemples de graphes



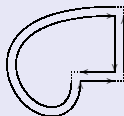
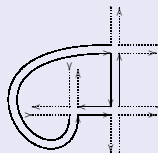
$$V=3$$

$$I=3$$

$$L=2$$

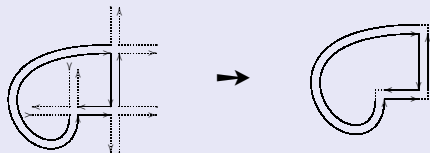
$$B=2$$

## Exemples de graphes

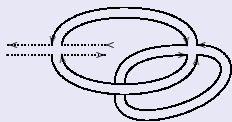


$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ I=3 \\ L=2 \\ B=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0$$

## Exemples de graphes

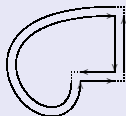
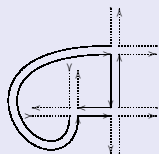


$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ l=3 \\ L=2 \\ B=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0$$

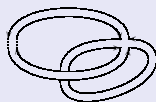
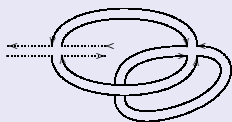




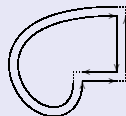
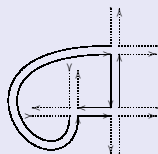
## Exemples de graphes



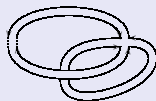
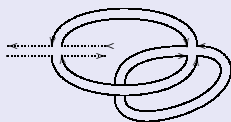
$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ I=3 \\ L=2 \\ B=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0$$



## Exemples de graphes

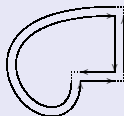
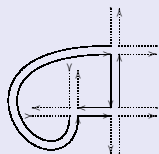


$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ I=3 \\ L=2 \\ B=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0$$

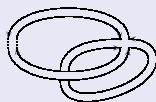
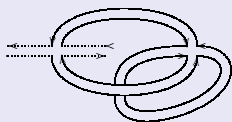


$$\begin{array}{l} V=2 \\ I=3 \\ L=1 \\ B=1 \end{array}$$

## Exemples de graphes



$$\left. \begin{array}{l} V=3 \\ l=3 \\ L=2 \\ B=2 \end{array} \right\} \rightarrow g = 0$$



$$\left. \begin{array}{l} V=2 \\ l=3 \\ L=1 \\ B=1 \end{array} \right\} \rightarrow g = 1$$

# Comptage de puissance

## Lemme

Soit  $G$  un graphe orientable connexe. Quel que soit  $\Omega \in ]0, 1]$ , il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test est bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\omega(G_k^i)}$$

$$\text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N & \text{si } G_k^i \text{ est non orientable,} \\ & \text{ou si } G_k^i \text{ est orientable, } g = 0 \text{ et } B \geq 2, \\ N + 4 & \text{si } G_k^i \text{ est orientable, } g \geq 1, \\ N - 4 & \text{si } G_k^i \text{ est orientable, } g = 0 \text{ et } B = 1. \end{cases}$$

# Comptage de puissance

## Lemme

Soit  $G$  un graphe orientable connexe. Quel que soit  $\Omega \in ]0, 1]$ , il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test est bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\omega(G_k^i)}$$

$$\text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N & \text{si } G_k^i \text{ est non orientable,} \\ & \text{ou si } G_k^i \text{ est orientable, } g = 0 \text{ et } B \geq 2, \\ N + 4 & \text{si } G_k^i \text{ est orientable, } g \geq 1, \\ N - 4 & \text{si } G_k^i \text{ est orientable, } g = 0 \text{ et } B = 1. \end{cases}$$

- ▶ Non orientable : une fonction delta de plus  $\Rightarrow$  gain  $M^{-4i}$ .
- ▶ Généralisation des travaux de T. Filk :
  - ▶ Deux lignes se croisent :  $\exp \nu_{V_j} \wedge \nu_{V_{j'}} \Rightarrow$  gain  $M^{-8i}$ .
  - ▶ Face brisée :  $\exp \nu_{V_j} \wedge x \Rightarrow$  gain  $M^{-4i}$ .

# Le modèle de Gross-Neveu non commutatif

1 Motivations et contexte

2 Analyse multi-échelles

3 Vulcanisation

4 **Le modèle de Gross-Neveu non commutatif**

- Présentation
- Les masselottes
- Un mélange renormalisable
- Contretermes

5 Conclusion et perspectives

## Le cas commutatif

Le modèle de Gross-Neveu sur  $\mathbb{R}^2$  est défini par l'action suivante

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx \left( \bar{\psi} (i\rlap{/}{\partial} + m) \psi + \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 \right) (x).$$

## Le cas commutatif

Le modèle de Gross-Neveu sur  $\mathbb{R}^2$  est défini par l'action suivante

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx \left( \bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi + \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 \right) (x).$$

Toutes les interactions sont équivalentes (localité) :

$$\bar{\psi}_{\uparrow} \psi_{\uparrow} \bar{\psi}_{\downarrow} \psi_{\downarrow} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$



## Le cas commutatif

Le modèle de Gross-Neveu sur  $\mathbb{R}^2$  est défini par l'action suivante

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx \left( \bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi + \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 \right) (x).$$

Toutes les interactions sont équivalentes (localité) :

$$\bar{\psi}_{\uparrow} \psi_{\uparrow} \bar{\psi}_{\downarrow} \psi_{\downarrow} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$

- ▶ Juste renormalisable (à deux dimensions)

## Le cas commutatif

Le modèle de Gross-Neveu sur  $\mathbb{R}^2$  est défini par l'action suivante

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx \left( \bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi + \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 \right) (x).$$

Toutes les interactions sont équivalentes (localité) :

$$\bar{\psi}_{\uparrow} \psi_{\uparrow} \bar{\psi}_{\downarrow} \psi_{\downarrow} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$

- ▶ Juste renormalisable (à deux dimensions)
- ▶ Asymptotiquement libre dans l'UV (Mitter, Weisz 1973)

## Le cas commutatif

Le modèle de Gross-Neveu sur  $\mathbb{R}^2$  est défini par l'action suivante

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx \left( \bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi + \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 \right) (x).$$

Toutes les interactions sont équivalentes (localité) :

$$\bar{\psi}_{\uparrow} \psi_{\uparrow} \bar{\psi}_{\downarrow} \psi_{\downarrow} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$

- ▶ Juste renormalisable (à deux dimensions)
- ▶ Asymptotiquement libre dans l'UV (Mitter, Weisz 1973)
- ▶ Construit par deux groupes différents (Gawedzki, Kupiainen 1986 ; Feldman, Magnen, Rivasseau, Sénéor 1986)

## Le cas commutatif

Le modèle de Gross-Neveu sur  $\mathbb{R}^2$  est défini par l'action suivante

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx \left( \bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi + \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 \right) (x).$$

Toutes les interactions sont équivalentes (localité) :

$$\bar{\psi}_{\uparrow} \psi_{\uparrow} \bar{\psi}_{\downarrow} \psi_{\downarrow} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$

- ▶ Juste renormalisable (à deux dimensions)
- ▶ Asymptotiquement libre dans l'UV (Mitter, Weisz 1973)
- ▶ Construit par deux groupes différents (Gawedzki, Kupiainen 1986 ; Feldman, Magnen, Rivasseau, Sénéor 1986)
- ▶ Génération de masse non perturbative (Gross, Neveu 1974 ; Kopper, Magnen, Rivasseau 1995)

# La version non commutative

# La version non commutative

Fermions en interaction quartique sur  $\mathbb{R}_\Theta^2$

## La version non commutative

Fermions en interaction quartique sur  $\mathbb{R}_\Theta^2$  :

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx (\bar{\psi} (i\not{\partial} + \Omega\not{\tilde{x}} + m) \psi + V_o(\bar{\psi}, \psi) + V_{no}(\bar{\psi}, \psi)) (x)$$

où  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$ ,  $\not{\partial} = \gamma^\mu a_\mu$ ,  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  et  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ .

## La version non commutative

Fermions en interaction quartique sur  $\mathbb{R}_{\Theta}^2$  :

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx (\bar{\psi} (i\cancel{\partial} + \Omega\cancel{\chi} + m) \psi + V_o(\bar{\psi}, \psi) + V_{no}(\bar{\psi}, \psi)) (x)$$

où  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$ ,  $\cancel{\partial} = \gamma^{\mu} a_{\mu}$ ,  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  et  $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = -2\delta^{\mu\nu}$ .



## La version non commutative

Fermions en interaction quartique sur  $\mathbb{R}_{\Theta}^2$  :

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx (\bar{\psi} (i\not{\partial} + \Omega\not{\tilde{x}} + m) \psi + V_o(\bar{\psi}, \psi) + V_{no}(\bar{\psi}, \psi)) (x)$$

où  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$ ,  $\not{\partial} = \gamma^{\mu} a_{\mu}$ ,  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  et  $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = -2\delta^{\mu\nu}$ .

Plusieurs interactions sont permises :

## La version non commutative

Fermions en interaction quartique sur  $\mathbb{R}_\Theta^2$  :

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx (\bar{\psi} (i\not{\partial} + \Omega\not{\tilde{x}} + m) \psi + V_o(\bar{\psi}, \psi) + V_{no}(\bar{\psi}, \psi)) (x)$$

où  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$ ,  $\not{\partial} = \gamma^\mu a_\mu$ ,  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  et  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ .

Plusieurs interactions sont permises :

- Interactions orientables

$$V_o = \frac{\lambda_1}{4} \int \bar{\psi} \star \gamma^\mu \psi \star \bar{\psi} \star \gamma_\mu \psi + \frac{\lambda_2}{4} \int \bar{\psi} \star \psi \star \bar{\psi} \star \psi \\ + \frac{\lambda_3}{4} \int \bar{\psi} \star i\gamma^0 \gamma^1 \psi \star \bar{\psi} \star i\gamma^0 \gamma^1 \psi$$

## La version non commutative

Fermions en interaction quartique sur  $\mathbb{R}_\Theta^2$  :

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx (\bar{\psi} (i\cancel{\partial} + \Omega\cancel{x} + m) \psi + V_o(\bar{\psi}, \psi) + V_{no}(\bar{\psi}, \psi)) (x)$$

où  $\tilde{x} = 2\Theta^{-1}x$ ,  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu a_\mu$ ,  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  et  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ .

Plusieurs interactions sont permises :

- ▶ Interactions orientables

$$V_o = \frac{\lambda_1}{4} \int \bar{\psi} \star \gamma^\mu \psi \star \bar{\psi} \star \gamma_\mu \psi + \frac{\lambda_2}{4} \int \bar{\psi} \star \psi \star \bar{\psi} \star \psi \\ + \frac{\lambda_3}{4} \int \bar{\psi} \star \gamma^0 \gamma^1 \psi \star \bar{\psi} \star \gamma^0 \gamma^1 \psi$$

- ▶ Interactions non orientables

$$V_{no} = \frac{\lambda_4}{4} \int \psi \star \gamma^\mu \bar{\psi} \star \bar{\psi} \star \gamma_\mu \psi + \frac{\lambda_5}{4} \int \psi \star \bar{\psi} \star \bar{\psi} \star \psi \\ + \frac{\lambda_6}{4} \int \psi \star \gamma^0 \gamma^1 \bar{\psi} \star \bar{\psi} \star \gamma^0 \gamma^1 \psi$$

# Renormalisable

## Théorème (BPHZ pour $\text{GN}_{\Theta}^2$ )

*La théorie quantique des champs définie par l'action*

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int dx (\bar{\psi} (\not{\partial} + \Omega \not{x} + m + i\alpha m \gamma^0 \gamma^1) \psi + V_{\circ}(\bar{\psi}, \psi)) (x)$$

*est renormalisable à tous les ordres de perturbation.*

# Le propagateur

$$C(x, y) = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y)$$

# Le propagateur

$$C(x, y) = \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y) = (i\cancel{\partial} + \Omega\cancel{\chi} + m)^{-1}(x, y)$$

## Le propagateur

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y) = (i\not{\partial} + \Omega\not{x} + m)^{-1}(x, y) \\
 &= (-\not{p} - \Omega\not{x} + m) ((\not{p} + \Omega\not{x} + m) (-\not{p} - \Omega\not{x} + m))^{-1}
 \end{aligned}$$

## Le propagateur

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y) = (i\rlap{\not{D}} + \Omega\rlap{\not{X}} + m)^{-1}(x, y) \\
 &= (-\rlap{\not{D}} - \Omega\rlap{\not{X}} + m) \left( (\rlap{\not{D}} + \Omega\rlap{\not{X}} + m) (-\rlap{\not{D}} - \Omega\rlap{\not{X}} + m) \right)^{-1} \\
 &= -\frac{\Omega}{\theta\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-tm^2}}{\sinh(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 + i\Omega x \wedge y} \\
 &\quad \times \left\{ i\tilde{\Omega} \coth(2\tilde{\Omega}t)(\rlap{\not{X}} - \rlap{\not{Y}}) + \Omega(\rlap{\not{X}} - \rlap{\not{Y}}) - m \right\} e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1}
 \end{aligned}$$



## Le propagateur

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y) = (i\cancel{\partial} + \Omega\cancel{x} + m)^{-1}(x, y) \\
 &= (-\cancel{\not{p}} - \Omega\cancel{x} + m) \left( (\cancel{\not{p}} + \Omega\cancel{x} + m) (-\cancel{\not{p}} - \Omega\cancel{x} + m) \right)^{-1} \\
 &= -\frac{\Omega}{\theta\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-tm^2}}{\sinh(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 + i\Omega x \wedge y} \\
 &\quad \times \left\{ i\tilde{\Omega} \coth(2\tilde{\Omega}t)(\cancel{x} - \cancel{y}) + \Omega(\cancel{x} - \cancel{y}) - m \right\} e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1}
 \end{aligned}$$

$$e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1} = \cosh(2\tilde{\Omega}t)\mathbb{1}_2 - i\sinh(2\tilde{\Omega}t)\gamma^0\gamma^1.$$

## Le propagateur

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y) = (i\not{\partial} + \Omega\not{x} + m)^{-1}(x, y) \\
 &= (-\not{p} - \Omega\not{x} + m) \left( (\not{p} + \Omega\not{x} + m) (-\not{p} - \Omega\not{x} + m) \right)^{-1} \\
 &= -\frac{\Omega}{\theta\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-tm^2}}{\sinh(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 + i\Omega x \wedge y} \\
 &\quad \times \left\{ i\tilde{\Omega} \coth(2\tilde{\Omega}t)(\not{x} - \not{y}) + \Omega(\not{x} - \not{y}) - m \right\} e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1}
 \end{aligned}$$

$$e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1} = \cosh(2\tilde{\Omega}t)\mathbb{1}_2 - i\sinh(2\tilde{\Omega}t)\gamma^0\gamma^1.$$

➔ Pas de décroissance dans les longues variables ( $v$ )

## Le propagateur

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= \int d\mu_C(\bar{\psi}, \psi) \psi(x) \bar{\psi}(y) = (i\rlap{/}\partial + \Omega\rlap{/}\not{x} + m)^{-1}(x, y) \\
 &= (-\rlap{/}\not{p} - \Omega\rlap{/}\not{x} + m) \left( (\rlap{/}\not{p} + \Omega\rlap{/}\not{x} + m) (-\rlap{/}\not{p} - \Omega\rlap{/}\not{x} + m) \right)^{-1} \\
 &= -\frac{\Omega}{\theta\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-tm^2}}{\sinh(2\tilde{\Omega}t)} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \coth(2\tilde{\Omega}t)(x-y)^2 + i\Omega x \wedge y} \\
 &\quad \times \left\{ i\tilde{\Omega} \coth(2\tilde{\Omega}t)(\rlap{/}\not{x} - \rlap{/}\not{y}) + \Omega(\rlap{/}\not{x} - \rlap{/}\not{y}) - m \right\} e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1}
 \end{aligned}$$

$$e^{-2i\tilde{\Omega}t\gamma^0\gamma^1} = \cosh(2\tilde{\Omega}t)\mathbb{1}_2 - i\sinh(2\tilde{\Omega}t)\gamma^0\gamma^1.$$

- ➔ Pas de décroissance dans les longues variables ( $v$ )
- ▶ Dans une tranche  $i$ ,

$$C^i(x, y) \simeq (M^{2i}(\rlap{/}\not{x} - \rlap{/}\not{y}) + (\rlap{/}\not{x} - \rlap{/}\not{y}) - m) (\mathbb{1}_2 - M^{-2i}\gamma^0\gamma^1) e^{-M^i|x-y| + i\Omega x \wedge y}$$

# Les masselottes

# Les masselottes

$\stackrel{\text{def}}{=} \text{fonctions décroissantes en } \nu$

# Les masselottes

<sup>def</sup>  
≡ fonctions décroissantes en  $v$

- ▶ Créées par intégration sur les variables  $u$

$$A = \int d^2 u e^{-M^{2i} u^2 + i u \wedge v} = KM^{-2i} e^{-kM^{-2i} v^2}$$

# Les masselottes

<sup>def</sup>  
≡ fonctions décroissantes en  $v$

- ▶ Créées par intégration sur les variables  $u$

$$A = \int d^2 u e^{-M^{2i} u^2 + i u \wedge v} = KM^{-2i} e^{-kM^{-2i} v^2}$$

Intégration difficile pour un graphe général.

# Les masselottes

<sup>def</sup>  
≡ fonctions décroissantes en  $v$

- ▶ Créées par intégration sur les variables  $u$

$$A = \int d^2 u e^{-M^{2i} u^2 + i u \wedge v} = KM^{-2i} e^{-kM^{-2i} v^2}$$

Intégration difficile pour un graphe général.

→ Astuce :  $A = 1 \times 1 \times A$ .



## Les masselottes

$\stackrel{\text{def}}{=} \equiv$  fonctions décroissantes en  $v$

- ▶ Créées par intégration sur les variables  $u$

$$A = \int d^2 u e^{-M^{2i} u^2 + i u \wedge v} = K M^{-2i} e^{-k M^{-2i} v^2}$$

Intégration difficile pour un graphe général.

→ Astuce :  $A = 1 \times 1 \times A$ . Soit  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 = \int d^2 a M^{2i} \xi(a M^i)$ ,  $u \mapsto u + a$

$$|A| \leq \int d^2 u d^2 a M^{2i} \Xi(a M^i) e^{-M^{2i}(u+a)^2} \left( \frac{1}{1 + M^{-2i} v^2} \right)^P$$

# Les masselottes

$\stackrel{\text{def}}{=} \text{fonctions décroissantes en } v$

- ▶ Créées par intégration sur les variables  $u$

$$A = \int d^2 u e^{-M^{2i} u^2 + i u \wedge v} = KM^{-2i} e^{-kM^{-2i} v^2}$$

Intégration difficile pour un graphe général.

- ➔ Astuce :  $A = 1 \times 1 \times A$ . Soit  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 = \int d^2 a M^{2i} \xi(aM^i)$ ,  $u \mapsto u + a$

$$|A| \leq \int d^2 u d^2 a M^{2i} \Xi(aM^i) e^{-M^{2i}(u+a)^2} \left( \frac{1}{1 + M^{-2i} v^2} \right)^P$$

- ▶ En réalité, décroissances en  $\mathcal{V}_l = \text{CL}(v_l, v_{l'}, l' \in G)$
- ➔ Indépendance ?

# Les masselottes

$\stackrel{\text{def}}{=} \text{fonctions décroissantes en } v$

- ▶ Créées par intégration sur les variables  $u$

$$A = \int d^2 u e^{-M^{2i} u^2 + i u \wedge v} = KM^{-2i} e^{-kM^{-2i} v^2}$$

Intégration difficile pour un graphe général.

- ➔ Astuce :  $A = 1 \times 1 \times A$ . Soit  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 = \int d^2 a M^{2i} \xi(aM^i)$ ,  $u \mapsto u + a$

$$|A| \leq \int d^2 u d^2 a M^{2i} \Xi(aM^i) e^{-M^{2i}(u+a)^2} \left( \frac{1}{1 + M^{-2i} v^2} \right)^P$$

- ▶ En réalité, décroissances en  $\mathcal{V}_l = \text{CL}(v_l, v_{l'}, l' \in G)$
- ➔ Indépendance ? (non orientables !)

# Encore du mélange

## Encore du mélange

- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

## Encore du mélange

- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .

## Encore du mélange

- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple

## Encore du mélange

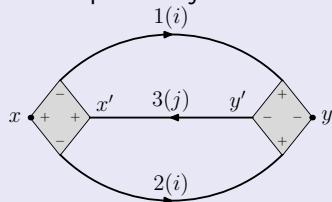
- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple :  $i > j$





## Encore du mélange

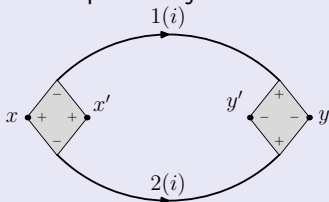
- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple :  $i > j$



Composante critique

## Encore du mélange

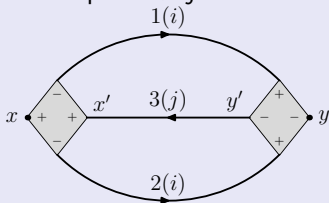
- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple :  $i > j$



$$B \geq 2 \rightarrow e^{2v_1 \wedge u_3}$$

## Encore du mélange

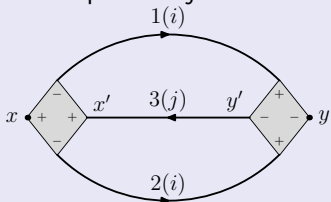
- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple :  $i > j$



$$B \geq 2 \rightarrow e^{2v_1 \wedge u_3}$$

$$\rightarrow |u_3| \leq M^{-i} = M^{-(i-j)} M^{-j}$$

## Encore du mélange

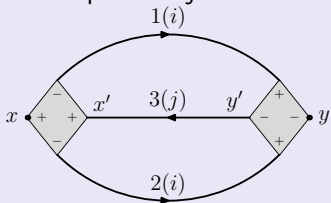
- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple :  $i > j$



$$B \geq 2 \rightarrow e^{2v_1 \wedge u_3}$$

$$\rightarrow |u_3| \leq M^{-i} = M^{-(i-j)} M^{-j}$$

$$\Phi^4 : |v_3| \leq M^j \rightarrow \text{gain } M^{-(i-j)}$$

## Encore du mélange

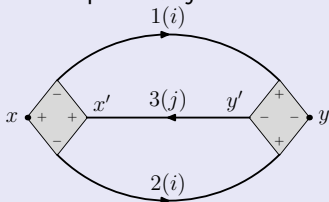
- ▶ Après obtention des masselottes :

### Lemme (Comptage de puissance)

Soit  $G$  un graphe connexe orientable. Quelque soit  $\Omega \in [0, 1[$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que son amplitude amputée  $A_G^\mu$  intégrée contre des fonctions test soit bornée par

$$|A_G^\mu| \leq K^n \prod_{i,k} M^{-\frac{1}{2}\omega(G_k^i)} \quad \text{avec } \omega(G_k^i) = \begin{cases} N - 4 & \text{si } g = 0, \\ N + 4 & \text{si } g \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Insuffisant si  $N = 4, g = 0, B \geq 2$ .
- ▶ Exemple :  $i > j$



$$B \geq 2 \rightarrow e^{2v_1 \wedge u_3}$$

$$\rightarrow |u_3| \leq M^{-i} = M^{-(i-j)} M^{-j}$$

$$\Phi^4 : |v_3| \leq M^j \rightarrow \text{gain } M^{-(i-j)}$$

$$\text{GN} : |v_3| \leq M^i \rightarrow \text{gain } \mathcal{O}(1)$$

# Contretermes

- ▶ Les trois interactions orientables sont logarithmiquement divergentes et stables.

# Contretermes

- ▶ Les trois interactions orientables sont logarithmiquement divergentes et stables.
- ▶ La masse, la fonction d'onde et  $\Omega$  sont logarithmiquement divergents.

# Contretermes

- ▶ Les trois interactions orientables sont logarithmiquement divergentes et stables.
- ▶ La masse, la fonction d'onde et  $\Omega$  sont logarithmiquement divergents. Remarque : si  $m_0 = 0$  alors  $m_{\text{ren}} = 0$  (comme sur  $\mathbb{R}^2$ ).



# Contretermes

- ▶ Les trois interactions orientables sont logarithmiquement divergentes et stables.
- ▶ La masse, la fonction d'onde et  $\Omega$  sont logarithmiquement divergents. Remarque : si  $m_0 = 0$  alors  $m_{\text{ren}} = 0$  (comme sur  $\mathbb{R}^2$ ).
- ▶ Les composantes critiques (log div) ne sont pas renormalisables.

# Contretermes

- ▶ Les trois interactions orientables sont logarithmiquement divergentes et stables.
- ▶ La masse, la fonction d'onde et  $\Omega$  sont logarithmiquement divergents. Remarque : si  $m_0 = 0$  alors  $m_{\text{ren}} = 0$  (comme sur  $\mathbb{R}^2$ ).
- ▶ Les composantes critiques (log div) ne sont pas renormalisables. La renormalisation du graphe à deux points correspondant régularise cette sous-divergence à quatre points.

# Contretermes

- ▶ Les trois interactions orientables sont logarithmiquement divergentes et stables.
- ▶ La masse, la fonction d'onde et  $\Omega$  sont logarithmiquement divergents.  
Remarque : si  $m_0 = 0$  alors  $m_{\text{ren}} = 0$  (comme sur  $\mathbb{R}^2$ ).
- ▶ Les composantes critiques (log div) ne sont pas renormalisables.  
La renormalisation du graphe à deux points correspondant régularise cette sous-divergence à quatre points.
- ▶ Si  $m_0 \neq 0$  et  $\Omega_0 \neq 0$ , apparition d'un contreterme  $\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \psi$ .

# Conclusion et perspectives

- 1 Motivations et contexte
- 2 Analyse multi-échelles
- 3 Vulcanisation
- 4 Le modèle de Gross-Neveu non commutatif
- 5 Conclusion et perspectives**

# Conclusion

# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.

# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.
- ▶ Les théories de champs sur espace non commutatif souffrent du mélange UV/IR.

# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.
- ▶ Les théories de champs sur espace non commutatif souffrent du mélange UV/IR.
- ▶ La vulcanisation est une solution.



# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.
- ▶ Les théories de champs sur espace non commutatif souffrent du mélange UV/IR.
- ▶ La vulcanisation est une solution.
- ▶ L'analyse multi-échelles s'adapte bien aux théories non locales (en  $x$  et dans la base matricielle).

# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.
- ▶ Les théories de champs sur espace non commutatif souffrent du mélange UV/IR.
- ▶ La vulcanisation est une solution.
- ▶ L'analyse multi-échelles s'adapte bien aux théories non locales (en  $x$  et dans la base matricielle).  
Elle a permis une preuve compacte et rigoureuse de la renormalisabilité de  $\Phi_4^4$ .

# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.
- ▶ Les théories de champs sur espace non commutatif souffrent du mélange UV/IR.
- ▶ La vulcanisation est une solution.
- ▶ L'analyse multi-échelles s'adapte bien aux théories non locales (en  $x$  et dans la base matricielle).  
Elle a permis une preuve compacte et rigoureuse de la renormalisabilité de  $\Phi_4^4$ .
- ▶ L'étude du modèle de a permis de distinguer deux types de mélange (difficile de définir la direction du groupe de renormalisation).

# Conclusion

- ▶ La géométrie non commutative est un cadre mathématique prometteur.
- ▶ Les théories de champs sur espace non commutatif souffrent du mélange UV/IR.
- ▶ La vulcanisation est une solution.
- ▶ L'analyse multi-échelles s'adapte bien aux théories non locales (en  $x$  et dans la base matricielle).  
Elle a permis une preuve compacte et rigoureuse de la renormalisabilité de  $\Phi_4^4$ .
- ▶ L'étude du modèle de  $a$  a permis de distinguer deux types de mélange (difficile de définir la direction du groupe de renormalisation).
- ▶ Importance de l'orientabilité pour la « localité ».

# Perspectives

- ▶ Interactions non orientables, stabilité de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , absence de mélange local.

# Perspectives

- ▶ Interactions non orientables, stabilité de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , absence de mélange local.
- ▶ Fonction  $\beta$ , couplage et régularisation des flots.

# Perspectives

- ▶ Interactions non orientables, stabilité de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , absence de mélange local.
- ▶ Fonction  $\beta$ , couplage et régularisation des flots.
- ▶ Étude constructive du modèle de Gross-Neveu. Génération de masse.

# Perspectives

- ▶ Interactions non orientables, stabilité de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , absence de mélange local.
- ▶ Fonction  $\beta$ , couplage et régularisation des flots.
- ▶ Étude constructive du modèle de Gross-Neveu. Génération de masse.
- ▶ Dans la base matricielle, lien entre les propriétés asymptotiques du propagateur et le mélange. Orientabilité.



# Perspectives

- ▶ Interactions non orientables, stabilité de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , absence de mélange local.
- ▶ Fonction  $\beta$ , couplage et régularisation des flots.
- ▶ Étude constructive du modèle de Gross-Neveu. Génération de masse.
- ▶ Dans la base matricielle, lien entre les propriétés asymptotiques du propagateur et le mélange. Orientabilité.
- ▶ Étudier le groupe de renormalisation sur d'autres espaces non commutatifs (déformations).

# Perspectives

- ▶ Interactions non orientables, stabilité de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , absence de mélange local.
- ▶ Fonction  $\beta$ , couplage et régularisation des flots.
- ▶ Étude constructive du modèle de Gross-Neveu. Génération de masse.
- ▶ Dans la base matricielle, lien entre les propriétés asymptotiques du propagateur et le mélange. Orientabilité.
- ▶ Étudier le groupe de renormalisation sur d'autres espaces non commutatifs (déformations).
- ▶ Se passer de l'espace. . .

