



HAL
open science

Géométrie hyperbolique effective et triangulations idéales canoniques en dimension trois

François Guéritaud

► **To cite this version:**

François Guéritaud. Géométrie hyperbolique effective et triangulations idéales canoniques en dimension trois. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT : . tel-00119465

HAL Id: tel-00119465

<https://theses.hal.science/tel-00119465>

Submitted on 9 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE EFFECTIVE ET TRIANGULATIONS IDÉALES CANONIQUES

EN DIMENSION 3.

par

François Guéritaud

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR L'OBTENTION DU GRADE
DE DOCTEUR ÈS SCIENCES
À L'UNIVERSITÉ DE PARIS-XI
(MATHÉMATIQUES)

Jury composé de :

Francis Bonahon
Steven P. Kerckhoff (rapporteur)
François Labourie
Frédéric Paulin (directeur de thèse)
Jean-Marc Schlenker
Caroline Series (rapporteur)

Décembre 2006

François Guéritaud

Pour Laureline.

*In der Wahrheit Feuerspiegel
Lächelt sie den Forscher an...*

Schiller, *An die Freude*.

Remerciements

Le travail ici présenté doit beaucoup à mes directeurs de thèse, Francis Bonahon et Frédéric Paulin. Bénéficiaire à tour de rôle des conseils de chacun d’eux a été pour moi une chance professionnelle, une durable expérience personnelle, et enfin la source d’un intéressant problème d’étiquette lors de la rédaction de ces remerciements.

Frédéric Paulin, qui s’est spontanément proposé pour l’encadrement de cette thèse en France lorsque la question d’une cotutelle a été soulevée, est mon professeur depuis l’an 2000 : il m’a offert l’exemple d’une rigueur et d’une puissance de travail peu communes. Si ce mémoire est lisible, une bonne part du mérite lui revient, pour ses relectures inlassables, bienveillantes, et par-dessus tout impitoyables. Il m’aura guidé avec souplesse et discernement à travers les différentes étapes naturelles d’une thèse. Sa disponibilité à toute question, profonde, stupide ou même informatique, était et demeure d’un prix infini à ses étudiants, en même temps qu’un peu mystérieuse : car voilà un mathématicien qui en sait sans doute plus long et en accomplit davantage que la plupart d’entre nous, et ne paraît pourtant jamais pressé quand on vient le trouver dans son bureau.

Francis Bonahon, que j’ai rencontré pour la première fois en 2002, a mis peu de temps à cerner mes intérêts et à m’orienter vers des problèmes qui, par la suite, sont apparus comme taillés sur mesure. Il m’a soufflé à l’été 2004 l’idée simple et belle de la partie 3.3.2, qui “fait marcher” tout le chapitre, et plusieurs autres points clés du mémoire lui doivent beaucoup. Grâce à lui j’ai pu entrer de plain-pied dans le monde de la recherche mathématique, et grâce à lui je ne me souviens pas de m’y être jamais senti mal à l’aise. C’est petit à petit que j’ai découvert, comme par hasard, l’étendue de ses intérêts et de sa culture mathématiques, au cours de discussions nombreuses, intenses, souvent gaies et amusantes, encore nourrissantes pour l’esprit longtemps après que le tableau noir a été effacé.

Steve Kerckhoff, à qui je dois mon premier contact avec la géométrie hyperbolique, et Caroline Series ont accepté la charge de rapporteurs, un travail bien lourd et sans doute ingrat. Qu’ils en soient ici remerciés chaleureusement : j’ai plaisir à imaginer qu’il s’agira des premiers chapitres d’un dialogue mathématique riche et stimulant. Je connais chacun d’eux par ses travaux, et ils sont venus de bien loin : c’est un honneur que de pouvoir les compter au nombre des membres du jury.

François Labourie et Jean-Marc Schlenker ont également accepté de siéger à ce jury. Pour m’avoir accordé leur temps et leur bienveillance en faisant ce déplacement, je les remercie.

De nombreuses autres personnes ont joué un rôle essentiel dans ce travail. Il me serait impossible de ne pas mentionner Makoto Sakuma, qui m’a suggéré l’idée de la partie 1.11 et m’a encouragé sur la voie du théorème 3.1.1, qu’il avait conjecturé. Découvrir la proximité presque comique de nos travaux à Oberwolfach en 2005 demeure pour moi l’un des moments les plus excitants de ces années de recherche, et c’est à peine si j’espère pouvoir lui retourner, quelque jour, la générosité avec laquelle il m’a invité à venir lui rendre visite, à Osaka en janvier 2006.

Mon collaborateur David Futer était du voyage, et je l’ai rencontré en personne à cette occasion.

C'est peu dire qu'il a contribué à cette thèse : le chapitre 4, solution d'un problème qui l'a longtemps préoccupé, est une nouvelle collaboration, et c'est lui qui a jeté le premier pont concret entre le chapitre 1 et la théorie des nœuds. Son authentique talent de pédagogue, entre autres qualités, fait de lui un collaborateur avec qui on a plaisir à travailler.

J'ai eu avec Saul Schleimer et Tracy Hall quelques-unes des discussions mathématiques les plus alertes et les plus tardives auxquelles il m'ait été donné de participer, et qui ont vite commencé à porter leurs fruits. Enfin, bien des personnes ont contribué à des degrés divers ou ont manifesté leur intérêt en m'invitant à faire différents exposés. Parmi ceux que je n'ai pas encore cités, comptons Ian Agol, Nalini Anantharaman, Laurent Bartholdi, Michel Boileau, Brian Bowditch, Peter Buser, Dick Canary, Yves de Cornulier, Nathan Dunfield, Pascal Hubert, Ruth Kellerhals, Cyril Lecuire, Xiaobo Liu, Feng Luo, Gregor Masbaum, Daniel Matignon, Greg McShane, Ken Ohshika, Robert Penner, Jean-Marc Schlenker, Ken Shackleton et Marc Troyanov. Pour clore l'ordre alphabétique, des remerciements tout particuliers doivent aller à Masaaki Wada et à Jeffrey Weeks, auteurs respectifs de deux logiciels [W1, W2] grâce auxquels on démontre (presque) des théorèmes en jouant. Il est difficile d'imaginer ce que cette thèse aurait contenu, n'eût été le produit de leur travail.

Plusieurs établissements m'ont permis de bénéficier de leur soutien matériel ou financier au cours de ces années de thèse : l'École normale supérieure de Paris (UMR 8553 du CNRS), l'Université d'Orsay, la University of Southern California (Los Angeles), la National Science Foundation (bourse numéro DMS-0103511), l'École polytechnique fédérale de Lausanne, et enfin l'Université d'Osaka. Je souhaite remercier aussi les diligentes secrétaires de ces institutions.

Faire des mathématiques en général, et rédiger une thèse en particulier, est en dernier ressort (et à mon avis !) une activité profondément personnelle. Il est presque impossible de l'exercer en l'absence du cadre solide et du riche terreau qu'offrent un cercle familial, petit ou grand, et un cercle d'amis. Si j'ai eu de la chance d'étudier dans les conditions qui ont été les miennes, je n'en ai pas eu moins en venant au monde entre mes parents et mes sœurs, ni en trouvant l'affection de ceux qui me sont chers.

Si Barbara ne m'avait donné que sa patience et son soutien, elle mériterait déjà de figurer bien haut dans ces remerciements. Elle m'a donné bien plus, c'est pourquoi ces derniers mots de reconnaissance lui appartiennent tout entiers.

Table des matières

Dédicace	ii
Épigraphe	iii
Remerciements	v
Préface	xi
0.1 Généralités et motivations	xi
0.2 Résultats	xiv
0.3 Esquisse des démonstrations et commentaires	xvi
Publications et travaux	xxii
1 Triangulations canoniques des fibrés en tores percés	1
1.1 Introduction	1
1.2 Classes de conjugaison dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et triangulation de Farey	2
1.3 La triangulation canonique	4
1.3.1 Échanges de diagonale	4
1.3.2 Tétraèdres	4
1.4 Combinatoire du tore à l’infini	6
1.5 Recherche d’angles strictement positifs	8
1.6 Volume hyperbolique	10
1.6.1 Volume d’un tétraèdre idéal	11
1.6.2 Volume critique et holonomie triviale	11
1.6.3 Comportement de la fonctionnelle volume	15
1.7 Quelques dégénérescences qui n’ont certainement pas lieu	16
1.8 Un lemme géométrique	17
1.9 Il n’y a pas de dégénérescences	19
1.9.1 Cas 1 : $RR LR$	19
1.9.2 Cas 2 : $RR LL$	21
1.10 Exemple numérique : $R^N L^M$	22
1.11 Canonicité géométrique	24

2	Décompositions canoniques de complémentaires d'entrelacs	31
2.0.1	Tores percés et sphères à 4 trous	31
2.1	Entrelacs à deux ponts	32
2.1.1	Diagramme de Farey revisité	32
2.1.2	Triangulation idéale	33
2.1.3	Maximisation du volume	35
2.1.4	Canonicité géométrique	36
2.2	Entrelacs à deux ponts augmentés	38
2.2.1	Diagramme de Farey, revisité à nouveau	39
2.2.2	Triangulation idéale	40
2.2.3	Maximisation du volume	42
2.2.4	Canonicité géométrique	45
2.2.5	Entrelacs à deux ponts doublement augmentés	48
2.2.6	Exceptions : entrelacs de Whitehead, entrelacs borroméen, et demi-chirurgies	49
2.3	Recollements et entrelacs arborescents augmentés	51
3	Cœurs convexes des groupes quasi-fuchsien du tore percé	55
3.1	Introduction	55
3.2	Stratégie	57
3.2.1	Position précise du problème	57
3.2.2	Plan de la démonstration	59
3.3	L'espace des déformations	59
3.3.1	Angles dièdres	59
3.3.2	Une contrainte naturelle sur le plissage de T_i	60
3.3.3	Étude de ϕ^+ et ϕ^-	62
3.3.4	Comportement des plissages $\lambda_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$	63
3.4	Volume hyperbolique	65
3.5	Comportement de (w_i)	68
3.6	Le lien de la pointe	71
3.7	Convergence intrinsèque des surfaces T_i	75
3.7.1	Épaisseur des tétraèdres	75
3.7.2	Cartes de Teichmüller	76
3.7.3	Convergence des modules	78
3.8	Convergence extrinsèque des surfaces T_i	79
3.8.1	Surfaces plissées	79
3.8.2	Position du problème	80
3.8.3	Convergence des φ_i	81
3.8.4	L'application $\varphi_{+\infty}$ est une immersion topologique	82
3.8.5	Mesure de plissage de $\varphi_{+\infty}$	84
3.8.6	Complétude	84
3.8.7	Un groupe quasi-fuchsien du tore percé	85
3.8.8	Canonicité géométrique	86
3.9	Généralisations	86
3.9.1	Un seul plissage rationnel	87
3.9.2	Deux plissages rationnels	91

3.9.3	Pincement	92
3.9.4	Bouts infinis	92
3.9.5	Le théorème des laminations de plissage pour les groupes du tore percé	93
4	Characterization of hyperbolic links among arborescent ones	97
4.1	Introduction	97
4.2	Angled blocks	100
4.2.1	From polyhedra to blocks	101
4.2.2	Normal surface theory in angled blocks	103
4.2.3	Combinatorial area	106
4.3	A simplification algorithm for arborescent links	110
4.3.1	Slopes on a Conway sphere	110
4.3.2	The algorithm	111
4.3.3	Analyzing the output	114
4.4	Block decomposition of the link complement	117
4.4.1	Gluings through tetrahedra	118
4.4.2	Collapsing	120
4.4.3	Blocks associated to large bracelets	121
4.5	Angle structures for the link complement	122
4.5.1	Angle structures for a non-augmented large block	123
4.5.2	Angle structures for product regions and trivial tangles	126
4.5.3	Non (strongly) Montesinos links	132
4.5.4	Strongly Montesinos links	133
5	Les polynômes de Markoff sont totalement positifs	135
5.1	Introduction	135
5.2	Les fonctions f_s sont des polynômes de Laurent	137
5.3	Une famille de domaines et de fonctions	139
5.4	L'application de Markoff formelle	145
5.5	Généralisation conjecturale	147
	Bibliographie	151

Préface

0.1 Généralités et motivations

Les objets étudiés dans cette thèse sont des variétés hyperboliques de dimension 3, quotients de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 par un groupe discret sans torsion d'isométries. D'après le théorème de rigidité de Mostow [Mo, BCG], deux variétés hyperboliques de dimension 3 (ou plus) et de volume fini sont homéomorphes si et seulement si elles sont isométriques : il s'agit donc d'objets très rigides, et tout invariant métrique est automatiquement promu invariant topologique. Malgré cela, l'ensemble des variétés hyperboliques est d'une richesse considérable ; la conjecture d'hyperbolisation de Thurston [T2] (que les arguments de Perelman démontrent vraisemblablement) entraîne même que toute variété de dimension 3 admet une métrique hyperbolique, sauf obstruction topologique "évidente" (en un sens approprié).

Par exemple, Thurston a montré [T3] que beaucoup de fibrés en surfaces sur le cercle sont hyperboliques. Soit S une surface connexe compacte orientable, de genre g , à n composantes de bord, telle que $3g + n > 3$. Soit $\varphi : S \rightarrow S$ un homéomorphisme tel qu'aucun itéré φ^n ne préserve une classe d'isotopie de courbes simples fermées (hormis peut-être les courbes librement homotopes aux composantes de bord, et celles qui se contractent en un point) : on dit que la classe d'isotopie de φ est *pseudo-Anosov*. On définit le tore d'application

$$V_\varphi := (S \times [0, 1]) / \sim_\varphi$$

où la relation d'équivalence \sim_φ est engendrée par : $(x, 0) \sim_\varphi (\varphi(x), 1)$ pour tout point x de S (notons qu'à homéomorphisme près, V_φ ne dépend que de la classe d'isotopie de φ). Alors l'intérieur de V_φ admet une métrique hyperbolique complète, de volume fini.

La démonstration (voir par exemple [Ot]), qui fait appel à de profonds résultats de topologie et d'analyse complexe, est difficile et non-explicite. Par exemple, elle ne renseigne guère sur les différents invariants métriques de V_φ (volume, spectre des longueurs...). Plus généralement, presque tout résultat explicite en géométrie hyperbolique requiert un encombrant attirail de techniques et de formules (habituellement hérissées de fonctions cosh, sinh, voire de polylogarithmes...). Même calculer le volume d'un simple tétraèdre est un problème difficile. Au delà des propriétés de la trigonométrie hyperbolique élémentaire (plane), l'un des rares énoncés exacts est la *formule de Schläfli* [Mi2] :

Proposition 0.1.1. *Soit $\{Q_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ une famille différentiable de polyèdres compacts de \mathbb{H}^3 (au sens où les sommets suivent des trajectoires différentiables et disjointes dans \mathbb{H}^3 , et où les sommets d'une face donnée restent coplanaires). Soient e_1, \dots, e_n les arêtes de Q_t : on note $\ell_t(e_i)$ la longueur de e_i dans le polyèdre Q_t , et $\theta_t(e_i)$ l'angle dièdre intérieur de Q_t en e_i . Si $\mathcal{V}(t)$ est le volume de Q_t , alors*

$$\frac{d\mathcal{V}(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ell_t(e_i) \frac{d}{dt} \theta_t(e_i).$$

La proposition s'étend naturellement au cas où certains sommets des Q_t sont idéaux (situés dans le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{S}^2$ de \mathbb{H}^3), pour peu qu'on définisse les $\ell_t(e_i)$ en tronquant les sommets idéaux par des horoboules arbitraires.

Décomposer une variété hyperbolique en polyèdres est une idée bien naturelle, déjà exploitée par Thurston dans sa construction inaugurale du complémentaire du nœud de huit [T1], et qui a été portée avec succès dans de nombreuses directions [Gr, NZ]. Au cours des années 90, Rivin et Casson ont suggéré une nouvelle méthode pour prouver qu'une variété donnée V est hyperbolique. On peut résumer cette méthode en trois points :

- Triangulation : choisir une décomposition \mathcal{D} de la variété V en un nombre fini de tétraèdres, éventuellement épointés en certains sommets.
- Munir les tétraèdres d'angles dièdres strictement positifs satisfaisant certaines équations linéaires de compatibilité.
- Dans l'espace W des combinaisons d'angles dièdres qui satisfont ces conditions, trouver un point critique p de la fonctionnelle volume $\mathcal{V} : W \rightarrow \mathbb{R}^+$.

(Pour le dernier point, notons qu'un tétraèdre hyperbolique est déterminé à isométrie près par ses angles dièdres ; en fait les exemples traités dans ce mémoire ne compteront que des tétraèdres *idéaux*, dont tous les sommets sont à l'infini — c'est-à-dire épointés).

Théorème 0.1.2 (Rivin, [R1]). *Si le point critique p existe, le recollement V des tétraèdres d'angles donnés par p est une variété hyperbolique complète.*

(La réciproque du théorème est vraie : les angles d'une triangulation (géodésique) d'une variété hyperbolique complète définissent un point critique de la fonctionnelle volume associée à la triangulation. La démonstration, dans les deux sens, est essentiellement une application de la formule de Schläfli).

Un inconvénient de cette méthode est que chacune des trois étapes nécessite la connaissance explicite d'une triangulation \mathcal{D} : mener à bien ce programme pour toutes les variétés hyperbolisables semble donc tout à fait chimérique. Cet inconvénient est aussi un avantage : en plus de montrer que V est hyperbolique, on vient d'exhiber une triangulation géométrique \mathcal{D} de V (ce qui peut nous renseigner, par exemple, sur le volume hyperbolique de V).

Soit V une variété hyperbolique à une pointe, de volume fini. Alors V possède une décomposition *géométriquement canonique* \mathcal{D}^{Geom} en polyèdres hyperboliques idéaux convexes : il s'agit de la décomposition de Delaunay, duale du domaine de Voronoï relatif au point idéal (le point idéal est situé à distance infinie dans la pointe : dans ce contexte, le domaine de Voronoï est parfois appelé "domaine de Ford"). Pour construire la décomposition de Delaunay, choisissons un voisinage horoboulé simple H de la pointe de V (par exemple, on peut définir H comme la composante non compacte de la *partie fine* de V , qui est la partie de V où le rayon d'injectivité est inférieur à une constante de Margoulis $\varepsilon > 0$; voir par exemple [MT]). Le *lieu (géométrique) de coupure* X est l'ensemble des points x de V tels qu'il existe au moins deux plus courts segments de x à H . Cet X est une union de polygones totalement géodésiques qui constitue un rétract par déformation forte de V . Cette décomposition en polygones de X définit une structure cellulaire dont le dual combinatoire est, par définition, la décomposition de Delaunay \mathcal{D}^{Geom} de V . (Intuitivement, cette notion de dual combinatoire est analogue de celle qui existe dans un complexe cellulaire : nous donnerons dans un instant une définition de \mathcal{D}^{Geom} qui, au prix d'être moins intuitive, permet de voir immédiatement que \mathcal{D}^{Geom} est bien définie en tant que décomposition en polyèdres à faces totalement géodésiques).

Supposons que l'on devine la nature combinatoire de \mathcal{D}^{Geom} , et qu'il s'agisse d'une triangulation. On est alors certain en principe de pouvoir mener à bien le programme de Casson–Rivin : mieux, on peut

espérer *prouver* qu'on a deviné juste et que la triangulation utilisée est bien \mathcal{D}^{Geom} . Par le théorème de rigidité de Mostow, on détient alors en \mathcal{D}^{Geom} un invariant topologique complet de V .

But : le propos des chapitres 1 à 3 de cette thèse sera de mener à bien ce “super programme de Casson–Rivin” pour quelques exemples simples de variétés V .

Epstein et Penner [EP] ont donné de \mathcal{D}^{Geom} une reformulation en termes d’enveloppe convexe dans l’espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} . En fait, leur construction est une façon fort simple de s’assurer que \mathcal{D}^{Geom} est bien définie. Par la représentation d’holonomie de la structure hyperbolique, le groupe fondamental Γ de V agit linéairement sur l’espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} (qui contient le modèle demi–hyperboloïde de \mathbb{H}^3), et Γ préserve le cône des vecteurs isotropes de \mathbb{R}^{3+1} , que nous appellerons vecteurs lumière. Si l’on se fixe un revêtement universel $\mathbb{H}^3 \rightarrow V$, le voisinage horoboulouque choisi H de la pointe définit une famille d’horoboules de \mathbb{H}^3 qui définissent à leur tour en une Γ –orbite (discrète) de vecteurs lumière de \mathbb{R}^{3+1} . Soit $C \subset \mathbb{R}^{3+1}$ l’enveloppe convexe de cette Γ –orbite : la décomposition cellulaire du bord du polyèdre C se projette alors (depuis l’origine) sur le demi–hyperboloïde \mathbb{H}^3 , puis de \mathbb{H}^3 à la variété V pour redonner exactement \mathcal{D}^{Geom} . Pour énoncer nos résultats à la partie 0.2, il importera que la définition utilisée soit celle d’Epstein–Penner (en particulier dans le cas de variétés de volume infini).

Avant le sommaire des résultats du mémoire, rappelons brièvement les principales propriétés de la compactification de Thurston de l’espace de Teichmüller \mathcal{T}_S d’une surface S (on définit \mathcal{T}_S comme l’espace des classes d’isotopie de métriques hyperboliques d’aire finie sur l’intérieur de S). Les propriétés qui suivent ne seront pas utilisées directement dans le mémoire, mais permettent de brosser dans cette introduction un contexte éclairant.

Soit \mathcal{PML} l’ensemble des *laminations mesurées projectives* sur l’intérieur de S (classes, pour une relation d’équivalence légèrement plus grossière que l’isotopie, de feuilletages singuliers munis d’une mesure transverse, et dont les singularités et le comportement près de ∂S vérifient certaines propriétés). Alors \mathcal{PML} est une variété PL munie d’une action du groupe G des classes de difféomorphismes de S préservant l’orientation (un élément g de G agit par l’opération “pousser en avant par g ”, notée g_* ; on dit que g et g' appartiennent à la même classe si on peut passer de l’un à l’autre par une isotopie qui fixe le bord de S globalement). Par ailleurs, G agit sur \mathcal{T}_S . Notons \mathbb{B}^N la boule unité ouverte de \mathbb{R}^N , et \mathbb{S}^{N-1} son bord. Il existe un entier N et des homéomorphismes (identifications) $\mathcal{T}_S \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^N$ et $\mathcal{PML} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{N-1}$ tels que l’action de G induite sur la boule unité fermée B de \mathbb{R}^N soit continue. Si $\varphi \in G$ est pseudo–Anosov, alors φ possède exactement deux points fixes, attractif et répulsif, dans B , et ils appartiennent à $\partial B \simeq \mathcal{PML}$. Tous ces résultats sont montrés dans [FLP]. L’existence de ces laminations invariantes est à l’origine de la terminologie *pseudo–Anosov* : en dimension quelconque, un difféomorphisme d’une variété compacte $f : M \rightarrow M$ est dit *d’Anosov* (voir par exemple [KH]) quand le fibré tangent TM est somme directe de deux sous-fibrés E^+, E^- normés non nuls, stables par f , tels qu’il existe $0 < \lambda < 1$ vérifiant $\sup_{x \in M} \|Df|_{E_x^\pm}\| = O(\lambda^n)$ (en dimension 2, on obtient des feuilletages non singuliers en intégrant E^+ et E^-).

Le point de départ pour faire fonctionner le programme de Casson–Rivin est le choix d’une “bonne” triangulation de V . Casson lui-même a proposé une stratégie pour trianguler un tore d’application $V = (S \times [0, 1]) / \sim_\varphi$, où $\varphi : S \xrightarrow{\sim} S$ est un difféomorphisme de classe pseudo–Anosov. On se donne une triangulation τ de S , ainsi que son image $\varphi_*(\tau)$: supposons, pour simplifier, que ces deux triangulations aient les mêmes sommets, mais n’aient aucune arête commune (deux arêtes sont considérées identiques si elles sont isotopes à extrémités fixées). Un chemin en *échanges de diagonale* entre τ et $\varphi_*(\tau)$ est par définition une suite $(\tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{m-1}, \tau_m = \varphi_*(\tau))$ telle que τ_i, τ_{i+1} ne sont séparés que par un

échange de diagonale dans un quadrilatère (la figure 1.3.1 représente un tel échange, où les sommets ont la particularité d’être des points *idéaux*). Si l’on interprète chaque échange de diagonale comme un tétraèdre (c’est là l’observation de Casson), ce chemin définit alors une triangulation \mathcal{D} de V . Pour obtenir une triangulation intéressante, il est toutefois nécessaire de choisir τ et les τ_i d’une manière qui soit “compatible” avec φ : sans entrer dans les détails, disons qu’en associant à une triangulation de S la région de l’espace de Teichmüller \mathcal{T}_S de S où toutes les arêtes apparaissent “courtes”, on s’attend à ce que pour un “bon” chemin, la suite des régions associées aux τ_i dans \mathcal{T}_S ne s’écarte pas trop de l’axe de φ (cet axe est une géodésique de \mathcal{T}_S qui relie les deux points invariants de φ , pour une métrique G -invariante appropriée de \mathcal{T}_S). C’est là une philosophie générale plutôt qu’un énoncé mathématique à part entière. Il faut donc choisir les τ_i avec soin, mais aucun candidat unique ne saute aux yeux.

0.2 Résultats

Le but de cette thèse est de mener à bien le programme de Casson–Rivin à divers degrés pour diverses familles de variétés, et de récolter au passage des informations géométriques telles que la combinatoire de \mathcal{D}^{Geom} . Les variétés étudiées seront assez simples (et leur hyperbolicité, connue depuis longtemps) :

- Au chapitre 1, les tores d’application sur le tore percé T , la plus petite surface “intéressante” de ce point de vue.
- Au chapitre 2, des complémentaires d’entrelacs à deux ponts dans \mathbb{S}^3 (là encore, une des familles d’entrelacs les plus simples), ainsi que certains complémentaires d’entrelacs *arborescents* (une classe plus large).
- Au chapitre 3, des groupes quasi-fuchsien du tore percé.
- Au chapitre 4 (collaboration avec David Futer), nous trouvons tous les complémentaires d’entrelacs arborescents hyperboliques (nous ne réaliserons pas la totalité du programme de Casson–Rivin dans ce cas, mais seulement les deux premières étapes, qui par le théorème d’hyperbolisation de Thurston [T2] suffisent pour conclure à l’hyperbolicité).
- Enfin le chapitre 5, indépendant des autres, est destiné à lever le mystère qui plane sur une démonstration clé, un peu “magique”, du chapitre 3 (proposition 3.7.6).

Résultats de canonicité géométrique

Dans le cas présenté au chapitre 1, les choix problématiques inhérents à la stratégie de triangulation de Casson disparaissent : étant donné un homéomorphisme $\varphi : T \xrightarrow{\sim} T$ du tore percé, la suite de triangulations τ_i de T est *canonique* en un sens combinatoire (cela vient du fait que le graphe des triangulations idéales, dont les arêtes correspondent aux échanges de diagonale, est un arbre). On obtient donc une triangulation *combinatoirement canonique* \mathcal{D}^{Comb} de V . De fait (théorème 1.1.1), on peut entièrement mener à bien pour \mathcal{D}^{Comb} le programme de Casson–Rivin. Aux chapitres 2 et 3, les triangulations sous-jacentes seront essentiellement des variantes de \mathcal{D}^{Comb} , et jouiront donc encore de cette “canonicité combinatoire”.

Notre première série de résultats peut s’énoncer comme suit :

Théorème 0.2.1. *Dans tous les cas présentés aux chapitres 1 et 2, \mathcal{D}^{Comb} est égale à \mathcal{D}^{Geom} ou (exceptionnellement) à un raffinement de \mathcal{D}^{Geom} .*

En d’autres termes, la géométrie hyperbolique de V “choisit” la combinatoire la plus simple, ou en tout cas celle à laquelle la méthode de Casson aboutit le plus naturellement (voir les théorèmes 1.1.2, 2.1.2, 2.2.11 et 2.3.1). Pour ces exemples, le résultat était connu des spécialistes, mais reposait sur des techniques hétéroclites et parfois difficiles [Ak, ASWY3, L2]. Pour les variétés du chapitre 2, le résultat n’est qu’annoncé dans [ASWY3].

En revanche, le chapitre 3 démontre un résultat de la forme $\mathcal{D}^{Geom} = \mathcal{D}^{Comb}$ dans un contexte radicalement nouveau.

La définition d’Epstein–Penner de \mathcal{D}^{Geom} , tout comme la définition métrique d’origine (le dual du domaine de Ford–Voronoi), a encore un sens pour une variété V de volume infini (géométriquement finie, pour fixer les idées). Cependant, les deux définitions ne coïncident plus dans ce cas. La construction d’Epstein–Penner (que nous adoptons désormais comme étant *la* définition de \mathcal{D}^{Geom}) définit une décomposition de *l’intérieur du cœur convexe* de V . Le dual du domaine de Ford–Voronoi, lui, ne comprend plus qu’une partie des cellules de \mathcal{D}^{Geom} : plus exactement, il comprend les cellules qui proviennent de faces de type espace dans \mathbb{R}^{3+1} (faces sur lesquelles la restriction du produit lorentzien de \mathbb{R}^{3+1} est définie positive).

Cette généralisation de la construction d’Epstein–Penner au cas de volume infini est due à Akiyoshi et Sakuma [AS]. Avec Wada et Yamashita [ASWY2], ils ont proposé une séduisante description conjecturale de la combinatoire de \mathcal{D}^{Geom} dans le cas où $V = \mathbb{H}^3/\Gamma$ avec Γ un groupe quasi–fuchsien du tore percé (sous-groupe discret et géométriquement fini de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ librement engendré par deux éléments dont le commutateur est parabolique).

Rappelons [S4] que le bord du cœur convexe de V est muni de deux laminations mesurées de plissage, dont les classes projectives définissent des points à l’infini de l’espace de Teichmüller $\mathcal{T}_T \simeq \mathbb{H}^2$ de T . Ces deux points remplacent les points fixes de l’homéomorphisme pseudo–Anosov $\varphi : T \rightarrow T$ du chapitre 1, et dès lors on construit une triangulation combinatoire \mathcal{D}^{Comb} selon le même procédé (de Casson). La triangulation \mathcal{D}^{Comb} est canonique en un sens combinatoire, par rapport aux laminations de plissage du bord du cœur convexe. Peut-on raidir \mathcal{D}^{Comb} pour en faire une triangulation totalement géodésique de l’intérieur du cœur convexe (sans renverser l’orientation d’aucun tétraèdre) ? Le théorème principal du chapitre 3 donne une réponse affirmative :

Théorème 3.1.1 *Si V est l’intérieur du cœur convexe d’un groupe quasi–fuchsien du tore percé, la triangulation idéale \mathcal{D}^{Geom} de V n’est autre que la version totalement géodésique de \mathcal{D}^{Comb} .*

Ce résultat, qui s’accompagne de la preuve de plusieurs conjectures faites dans [ASWY2], est nouveau : c’est apparemment la première description connue de \mathcal{D}^{Geom} pour une variété V à bord, dont le bord est une surface plissée de plissage irrationnel. Dans ce cas, \mathcal{D}^{Geom} est infinie, mais de volume fini. Les tétraèdres de \mathcal{D}^{Geom} , qui sont en nombre infini, deviennent donc infiniment plats et infiniment étirés, et leurs volumes infiniment petits : il est assez frappant qu’on puisse néanmoins “deviner”, synthétiquement, la nature de $\mathcal{D}^{Geom} = \mathcal{D}^{Comb}$.

Théorème des laminations de plissage

Divers auteurs [Jø, MSW] avaient déjà noté que l’espace des groupes quasi–fuchsien se laisse décrire en bien plus grand détail lorsque la surface sous-jacente est le tore percé T — comme le complexe des courbes simples fermées de T est dual d’un arbre planaire, une approche combinatoire et explicite est possible. Comme les groupes quasi–fuchsien (déformations de groupes fuchsien de surfaces)

constituent eux-mêmes une famille fondamentale d'exemples de groupes kleinien de volume infini, les groupes du tore percé sont ainsi devenus un "terrain d'entraînement" fort apprécié pour des travaux à la visée ultime plus large : on pense par exemple au travail de Minsky [Min] sur les invariants de bouts, qui put déboucher sur la preuve [BCM] de la Conjecture des laminations de bout de Thurston. De même, Caroline Series [S4] a pu démontrer la Conjecture des laminations de plissage de Thurston dans le cas du tore percé :

Théorème 0.2.2 (Series). *Un groupe quasi-fuchsien du tore percé est uniquement et continûment déterminé, à conjugaison près, par les laminations mesurées de plissage de son cœur convexe.*

Le cas général, où le tore percé T est remplacé par une surface quelconque, semble poser de grandes difficultés techniques. Les questions d'unicité et de continuité sont étroitement liées : le cas général est équivalent à l'énoncé suivant, à la simplicité trompeuse.

Conjecture 0.2.3 (Thurston). *Soit \mathcal{QF} l'espace des groupes quasi-fuchsien sur une surface donnée S (de caractéristique d'Euler négative), et soit \mathcal{ML} l'espace des laminations mesurées sur S . L'application de plissage $f : \mathcal{QF} \rightarrow \mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$ (qu'on sait continue) admet en tout point une section locale.*

Ici \mathcal{ML} admet une structure de variété PL (définie par exemple en termes de réseaux ferroviaires sur S , voir [PH]). Bonahon et Otal [BO] ont décrit l'image de f , et montré qu'un couple de laminations rationnelles a bien un seul antécédent (au plus) par f .

Dans le chapitre 3, nous montrons que l'intérieur du cœur convexe d'un groupe quasi-fuchsien du tore percé admet toujours une triangulation idéale (ou une décomposition légèrement plus grossière) $\mathcal{D}^{Comb} = \mathcal{D}^{Geom}$ qui reflète aussi bien la géométrie intrinsèque du cœur convexe que la combinatoire de ses plissages de bord, chacune d'une manière aussi simple et fidèle qu'il est permis d'espérer. À la clef, on obtient un contrôle géométrique suffisamment étroit pour redémontrer le théorème 0.2.2 (corollaire 3.9.9).

0.3 Esquisse des démonstrations et commentaires

Variétés de volume fini

Soit $T := (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) / \mathbb{Z}^2$ le tore percé muni de sa structure différentielle et de l'orientation induite par \mathbb{R}^2 . Alors \mathcal{T}_T est identifié au plan hyperbolique \mathbb{H}^2 muni de l'action de $G \simeq SL_2(\mathbb{Z})$ par isométries, et \mathcal{PML} s'identifie à $\partial\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ en associant à tout feuilletage du tore percé sa pente (tout relevé d'une feuille à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ est une courbe infinie qui reste à distance bornée d'une unique droite vectorielle de \mathbb{R}^2 : c'est la pente de cette droite qu'on associe au feuilletage). Remarquons que dans le cas de T , la compactification de Thurston $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ de l'espace de Teichmüller est une variété différentiable (et pas seulement PL) à bord.

Considérons un difféomorphisme $\varphi : T \rightarrow T$ qui préserve l'orientation : on assimile la classe d'isotopie de φ à un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ (qui agit par l'action linéaire quotient sur T). On voit alors facilement que l'application φ est pseudo-Anosov, pour la définition du 0.1, si et seulement si les valeurs propres de φ sont réelles et distinctes. Au chapitre 1 nous montrerons, suivant le programme de Casson-Rivin exposé au 0.1, le résultat que voici.

Théorème 1.1.1 [Thurston]. *Si φ a deux valeurs propres réelles distinctes, alors le fibré en tores percés V_φ admet une métrique hyperbolique complète de volume fini.*

Comme à la partie 0.1, la triangulation \mathcal{D}^{Comb} que nous choisirons pour V_φ proviendra d'un chemin en triangulations de T , plus exactement une géodésique dans l'arbre Y des triangulations (en effet Y sera naturellement plongé dans $\mathcal{T}_T = \mathbb{H}^2$, et la géodésique reliera les points à l'infini fixés par φ). De façon équivalente, \mathcal{D}^{Comb} sera dictée par une certaine "forme normale" de l'élément φ de $SL_2(\mathbb{Z})$ (cette forme normale reflète l'unicité des chemins dans l'arbre Y). Nous donnerons alors une démonstration spécifique à \mathcal{D}^{Comb} du théorème 0.1.2 de Rivin. Pour montrer que le théorème s'applique, il nous restera alors à rechercher un point critique du volume : nous nous concentrerons sur le maximum absolu (la fonctionnelle volume se trouve être concave), et il suffira de montrer qu'il s'agit d'un point intérieur — c'est-à-dire que tous les tétraèdres sont "non dégénérés" (n'ont aucun angle dièdre nul). Il s'agit, moralement, de prouver un certain nombre d'inégalités (strictes). Exclure les dégénérescences les plus faciles nous permettra d'avoir une métrique hyperbolique au moins sur une partie de la variété V_φ : puis nous raisonnerons sur cette métrique pour prouver des inégalités plus fines et exclure d'autres dégénérescences, et ainsi de suite.

Une fois \mathcal{D}^{Comb} réalisée géométriquement, nous pourrions montrer le

Théorème 1.11.1 [Akiyoshi, Lackenby]. *Pour V_φ , on a $\mathcal{D}^{Comb} = \mathcal{D}^{Geom}$.*

Nous verrons à la partie 1.11 que cet énoncé se ramène à un simple calcul (une fois que \mathcal{D}^{Geom} a été devinée !). Soient $\Delta = \alpha\beta\gamma\delta$ et $\Delta' = \beta\gamma\delta\epsilon$ deux tétraèdres idéaux de \mathbb{H}^3 (donnés par leurs sommets $\alpha, \dots, \epsilon \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$), ayant une face commune $\beta\gamma\delta$ et se projetant sur deux tétraèdres adjacents de V_φ (pour un revêtement universel fixé $\mathbb{H}^3 \rightarrow V_\varphi$). Fixons un voisinage horoboulou simple de la pointe de V_φ . Alors α, \dots, ϵ déterminent naturellement (voir l'introduction du 1.11) des vecteurs lumière a, \dots, e du cône isotrope de l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} . Pour montrer la propriété de convexité dans \mathbb{R}^{3+1} , il suffit de s'assurer que vus depuis l'origine, les tétraèdres affines $abcd$ et $bcde$ forment un angle dièdre saillant. En d'autres termes, il faut montrer que le 2-plan affine Π passant par b, c, d (vu depuis l'origine) masque la droite passant par a, e : soit, en termes algébriques, que

$$Pb + Qc + Rd = \lambda a + (1 - \lambda)e \text{ entraîne } P + Q + R > 1$$

(noter que l'équation de gauche admet toujours une unique solution, pour laquelle $0 < \lambda < 1$: en effet l'hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^{3+1} contenant Π sépare a de e , parce que le plan hyperbolique contenant β, γ, δ sépare α de ϵ). Voir la figure 0.3.1. La triangulation \mathcal{D}^{Comb} de V_φ se relève alors à un complexe *localement convexe* de l'espace de Minkowski (la propriété ci-dessus est l'inégalité de convexité) ; il suffit alors de vérifier qu'on retrouve bien là la définition d'Epstein–Penner de la décomposition de Delaunay \mathcal{D}^{Geom} .

À nouveau, montrer $P + Q + R > 1$ relèvera d'un raisonnement géométrique sur V_φ , d'ailleurs essentiellement le même que dans la preuve du théorème 1.1.1 (lemme 1.8.2 et proposition 1.11.4 — une propriété qui avait intrigué Jørgensen).

Au chapitre 2, nous étudierons les entrelacs à deux ponts : un tel entrelacs s'obtient à partir d'une tresse à 4 brins en connectant deux par deux les extrémités initiales, ainsi que les extrémités finales, des brins (figure 0.3.2 — le lien entre fibrés en tores percés, fibrés en sphères à quatre trous, et tresses à quatre brins sera détaillé à la partie 2.0.1). Les théoriciens des nœuds ont observé, à la suite de Schubert

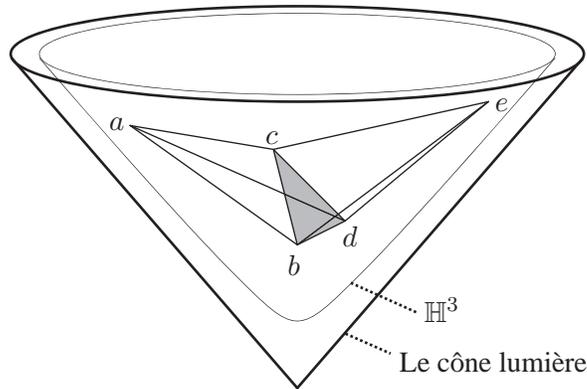


FIG. 0.3.1 – Propriété de convexité dans l’espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} (vue schématique).

[S3, Con, Mu], que les entrelacs à deux ponts ont une structure combinatoire particulièrement simple (notamment, deux tels entrelacs sont homéomorphes si et seulement si les tresses sous-jacentes sont identiques, à des transformations “évidentes” près [S3]). De fait, le complémentaire d’un entrelacs à deux ponts dans \mathbb{S}^3 admet une décomposition en tétraèdres idéaux \mathcal{D}^{Comb} très semblable à celle du chapitre 1, pour laquelle nous mènerons à bien le programme de Casson–Rivin et montrerons que, là encore, $\mathcal{D}^{Comb} = \mathcal{D}^{Geom}$.

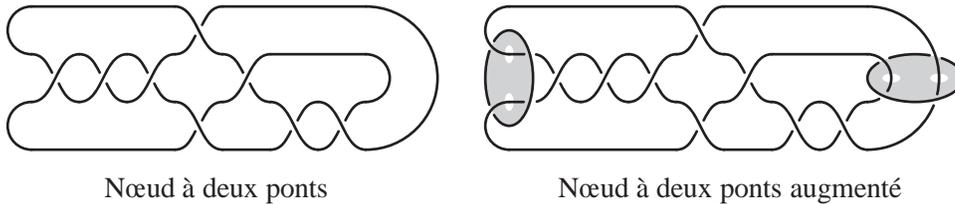


FIG. 0.3.2 – Noter les disques à deux trous dans le complémentaire du nœud augmenté.

Une variante supplémentaire consiste à ajouter autour de l’une et/ou l’autre des extrémités de l’entrelacs à deux ponts une composante non nouée, dite *composante d’augmentation* (figure 0.3.2 — on parlera d’entrelacs à deux ponts *augmentés*). Là encore, nous trouverons une triangulation naturelle \mathcal{D}^{Comb} , mènerons à bien le programme de Casson–Rivin et montrerons que $\mathcal{D}^{Comb} = \mathcal{D}^{Geom}$. De plus, chaque composante d’augmentation définit un disque à deux trous Σ (topologiquement, une sphère à trois trous), qui doit automatiquement être totalement géodésique pour la métrique hyperbolique. Nous pouvons couper les complémentaires de plusieurs entrelacs à deux ponts augmentés le long de ces sphères à trois trous $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ et les recoller isométriquement deux par deux comme bon nous semble : nous verrons (théorème 2.3.1) que la variété obtenue M est automatiquement munie, par cette construction, d’une triangulation idéale notée \mathcal{D}_M^{Comb} , et que \mathcal{D}_M^{Comb} est (un raffinement de) la décomposition géométriquement canonique \mathcal{D}_M^{Geom} .

La classe des variétés M que l’on peut obtenir de cette manière comprend en particulier tous les complémentaires d’entrelacs *arborescents totalement augmentés*, une certaine sous-famille des entrelacs arborescents étudiés au chapitre 4 (voir la remarque 4.5.8). Cette famille a notamment la propriété

que tout complémentaire d'entrelacs arborescent s'obtient par remplissage de Dehn entier à partir d'un complémentaire d'entrelacs arborescent totalement augmenté. Nous pouvons résumer les résultats du chapitre 2 (pour l'essentiel) comme suit :

Théorème. *Si M est un complémentaire d'entrelacs arborescent totalement augmenté dans \mathbb{S}^3 et \mathcal{D}_M^{Comb} la triangulation idéale décrite ci-dessus, alors \mathcal{D}_M^{Comb} est un raffinement de \mathcal{D}_M^{Geom} .*

Groupes quasi-fuchsien du tore percé

Les auteurs de [AS] ont montré que pour une variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ géométriquement finie mais de volume infini, \mathcal{D}^{Geom} est susceptible de comportements étranges : voici une liste qu'ils ont dressée des bizarreries possibles.

- i – Certaines faces F dans \mathbb{R}^{3+1} peuvent être de type lumière ou de type temps (la restriction à F du produit lorentzien n'est pas définie positive) : les cellules correspondantes dans M n'ont pas de contrepartie duale dans le domaine de Ford–Voronoi de M .
- ii – La décomposition \mathcal{D}^{Comb} pourrait être localement infinie (on ignore si cela arrive réellement, mais les auteurs de [AS] utilisent une définition spéciale des faces $F \subset \mathbb{R}^{3+1}$ pour ménager cette possibilité).
- iii – L'intérieur de certaines cellules de \mathcal{D}^{Geom} peut avoir un groupe fondamental non trivial.
- iv – L'union des cellules de \mathcal{D}^{Geom} dans M n'est qu'un sous-ensemble dense du cœur convexe de M , et contient l'intérieur V de ce cœur convexe.
- v – L'enveloppe affine de certaines faces $F \subset \mathbb{R}^{3+1}$ peut contenir 0 : dans ce cas la projection de F à M a pour dimension $\dim(F) - 1$ et se trouve contenue dans le bord du cœur convexe de M . Au chapitre 3 nous ignorerons délibérément de telles faces, dites *invisibles*, et considérerons simplement \mathcal{D}^{Geom} comme une décomposition de l'intérieur V du cœur convexe de M .

Si Γ est un groupe quasi-fuchsien du tore percé, les faces invisibles sont exactement décrites dans [AS], auquel nous renvoyons pour plus de détails. L'un des intérêts de la description complète de \mathcal{D}^{Geom} que nous obtenons est de montrer que la bizarrerie ii ne se produit pas. Il serait extrêmement intéressant d'étendre ce résultat à tous les groupes kleinien.

Formulons par avance quelques remarques quant à la stratégie de démonstration des théorèmes 3.1.1 et 0.2.2 cités plus haut :

- Il s'agit d'appliquer le programme de Casson–Rivin à une triangulation infinie \mathcal{D}^{Comb} .
- Comme au chapitre 1, le chemin $(\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en triangulations de T sous-jacent à \mathcal{D}^{Comb} (défini cette fois en termes de laminations de plissage) permet de définir une famille de tores percés plissés $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ dans la variété V : la surface T_i est plissée selon les arêtes de τ_i . Les T_i seront plongées, ce qui est relativement inhabituel dans les démonstrations faisant appel à des surfaces plissées.
- Afin d'appliquer le théorème 0.1.2, nous chercherons un point qui soit critique pour la fonctionnelle volume au sens suivant : pour toute déformation *ne portant que sur un nombre fini d'angles dièdres*, le volume ne change pas à l'ordre 1.
- Il existera des combinaisons d'angles dont le volume est infini — chercher comme point critique le maximum absolu serait donc absurde. Pour remédier à cet état de fait, nous rechercherons le maximum absolu sur un domaine restreint.

- La restriction reflètera l'intensité des plissages de ∂V : comme les angles dièdres des tétraèdres de \mathcal{D}^{Comb} détermineront des mesures de plissage λ_i pour les surfaces T_i (ici, λ_i est définie par exemple sur l'ensemble des courbes simples fermées dans la surface intrinsèque T_i , et prend ses valeurs dans \mathbb{R}), nous imposerons

$$\lambda^- < \lambda_i < \lambda^+$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$, où λ^-, λ^+ (supposées données) sont les mesures de plissage, négative et positive, des deux composantes du bord de V .

- Montrer la conjecture 0.2.3 dans le cas particulier du tore percé (et donc le théorème 0.2.2) revient à montrer que le groupe que nous construisons dépend continûment des laminations de plissage λ^+, λ^- . Cette propriété découlera du principe heuristique suivant : quand les λ^\pm varient continûment, le domaine sur lequel on maximise la fonctionnelle volume varie lui aussi continûment. La position du maximum (qui détermine la métrique de la variété) varie donc, elle aussi, continûment. Bien sûr, la triangulation elle-même, objet discret, varie de façon violemment discontinue : il faut donc travailler un peu pour donner un sens précis à ce principe heuristique !

Enfin, nous étendrons partiellement le théorème 3.1.1 aux groupes du tore percé non quasi-fuchsien (géométriquement infinis), en interprétant les laminations de bout comme des laminations de plissage irrationnelles d'intensité infinie. L'extension ne sera que partielle à cause de la difficulté de montrer l'unicité d'un groupe de laminations de plissage données, comme dans la conjecture 0.2.3.

Le long projet de monographie [ASWY3] étudie les groupes quasifuchsien du tore percé sous l'angle de leur domaine de Ford-Voronoi \mathcal{F} , en classifiant les manières dont la combinatoire de \mathcal{F} peut changer lorsque le groupe quasi-fuchsien varie continûment. Soulignons le caractère radicalement opposé de l'approche présentée ici : nous commençons par recoller des tétraèdres idéaux hyperboliques satisfaisant certaines contraintes (reflétant le plissage), puis montrons que leur union V est l'intérieur du cœur convexe d'un groupe Γ , et enfin que Γ dépend continûment des contraintes d'origine.

Entrelacs arborescents

Le chapitre 4, article rédigé en langue anglaise en collaboration avec David Futer, est une application partielle du programme de Casson-Rivin aux complémentaires d'entrelacs arborescents. Au lieu de montrer que l'espace W des combinaisons d'angles dièdres contient un point critique de la fonctionnelle volume, on se contente de montrer que W est non vide. Par une légère généralisation (théorème 4.1.1) d'un théorème de Lackenby [L1, partie 4], cela suffit pour prouver que la variété est hyperbolique — en utilisant bien sûr le théorème d'hyperbolisation de Thurston.

Plus exactement, pour appliquer le théorème d'hyperbolisation, il faut montrer qu'il n'y a pas de surfaces essentielles de caractéristique d'Euler positive dans la variété : à cette fin, nous développons une théorie des surfaces normales par rapport à une certaine décomposition de la variété. Les pièces de la décomposition qu'on se donne peuvent être toutes simples ou très compliquées, ce qui rend la théorie assez souple : étant donné un entrelacs arborescent, nous pouvons décomposer son complémentaire d'une manière adéquate et détecter la présence (ou l'absence) de surfaces essentielles.

L'énoncé exact que nous montrerons (théorème 4.1.5) est une caractérisation, explicite et algorithmique, des entrelacs hyperboliques au sein de la famille des entrelacs arborescents (nous renvoyons au texte [définition 4.1.4] pour la terminologie). Ce résultat est connu, mais la démonstration pré-existante s'étend sur plusieurs articles et/ou références non publiées [BS, Oe, W4, Me]. Bonahon et Siebenmann ont obtenu à la fin des années 70 un théorème plus fort (classification complète des entrelacs arbores-

cents), et leur projet de monographie sur le sujet [BS] a été informellement diffusé et cité à de nombreuses reprises.

Le chapitre 5 est logiquement indépendant du reste du mémoire. On y définit une famille de polynômes de Laurent indexée dans $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ qui généralise les nombres de Markoff et se trouve liée à la variété des caractères du tore percé. Nous décrivons exactement quels monômes apparaissent dans chaque polynôme et montrerons que tous les coefficients sont des entiers strictement positifs, propriété dont un cas particulier est utilisé au chapitre 3 (proposition 3.7.6).

En particulier, on obtient une famille de cartes globales de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_T du tore percé, pour laquelle les changements de carte sont des polynômes de Laurent à coefficients positifs. Ces résultats peuvent être rapprochés de l'esprit, sinon des méthodes, de [FZ], ainsi que des travaux qui tournent autour de [FG].

Dans tout ce mémoire, le symbole “=” est précédé (respectivement, suivi) de deux points (:=, resp. =:) quand l'égalité sert de définition au membre de gauche (resp. de droite).

Publications et travaux

- *A note on Steiner symmetrization of hyperbolic triangles*, *Elemente der Mathematik* **58** (2003), 21–25.
- *On an Elementary Proof of Rivin’s Characterization of Convex Ideal Hyperbolic Polyhedra by their Dihedral Angles*, *Geometriae Dedicata* **108**–1 (2004), 111–124.
- Avec un appendice par David Futer : *On canonical triangulations of once–punctured torus bundles and two-bridge link complements*, *Geometry & Topology* **10** (2006), 1239–1284 ; également sur arXiv :math.GT/0406242 . Comprend des extraits des chapitres 1 et 2 de cette thèse.
- *Triangulated cores of punctured-torus groups*, arXiv :math.GT/0605481, 2006, soumis pour publication. Extrait des chapitres 1 et 3 de cette thèse.
- *Formal Markoff maps are positive*, arXiv :math.NT/0605735 , extrait du chapitre 5 de cette thèse.
- Avec David Futer : *Angled decompositions of arborescent link complements*, arXiv :math.GT/0610775, 2006, en cours de soumission. Extrait du chapitre 4 de cette thèse.
- En cours de rédaction avec Saul Schleimer : *Canonical triangulations of Dehn fillings* (titre provisoire).

Chapitre 1

Triangulations canoniques des fibrés en tores percés

1.1 Introduction

Soit $T := (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ le tore percé muni de sa structure différentielle et d'une orientation. Le groupe G des classes d'isotopie de difféomorphismes orientés $\varphi : T \rightarrow T$ (ou groupe des classes de difféomorphismes de T) est identifié à $G \simeq SL_2(\mathbb{Z})$, donc toute classe $[\varphi] \in G$ admet un couple bien défini de valeurs propres dans \mathbb{C} . Définissons le *fibré en tores percés*

$$V_\varphi := T \times [0, 1] / \sim$$

où \sim identifie $(x, 0)$ à $(\varphi(x), 1)$ pour tout x de T . Alors V_φ est une variété différentielle orientée de dimension 3, bien définie à difféomorphisme près. Le théorème d'hyperbolisation de Thurston [Ot] admet comme cas très particulier le

Théorème 1.1.1. *Si φ a deux valeurs propres réelles distinctes, le fibré en tores percés V_φ admet une métrique hyperbolique complète de volume fini.*

Dans ce chapitre nous démontrerons le théorème 1.1.1 par des méthodes élémentaires et, dans une certaine mesure, constructives. La stratégie consiste à exhiber une triangulation totalement géodésique \mathcal{D}^{Comb} , canonique en un sens combinatoire, qui décompose V_φ en tétraèdres idéaux (tétraèdres hyperboliques dont les sommets sont à l'infini). Nous montrerons ensuite que \mathcal{D}^{Comb} possède une remarquable propriété géométrique :

Théorème 1.1.2 (Akiyoshi). *La triangulation \mathcal{D}^{Comb} est géométriquement canonique, c'est-à-dire duale du domaine de Ford–Voronoi de V_φ .*

D'un point de vue combinatoire, \mathcal{D}^{Comb} (appelée parfois la triangulation de Floyd-Hatcher ou de monodromie — voir [FH]) est construite en exprimant un certain conjugué de $\pm\varphi$ comme un produit de matrices de transvection positives. Étant donnée une triangulation combinatoire de cette sorte, le problème consistant à la rendre hyperbolique se prête *grosso modo* à deux approches. La première relève de l'analyse complexe, est explicite et "locale" : calculs de birapports, d'isométries hyperboliques particulières, etc (voir par exemple [NZ]). La seconde, décrite d'abord par Rivin, Casson, et Colin de Verdière

[R1, Col], est “globale” et relève de l’analyse réelle : pour rendre la métrique complète, on tue son holonomie en maximisant le volume hyperbolique total (mais il peut y avoir des obstructions combinatoires). Dans le cas de V_φ , la combinatoire de \mathcal{D}^{Comb} est suffisamment simple pour nous permettre de faire interagir explicitement les deux approches, débouchant sur d’utiles résultats à “moyenne portée” (partie 1.8). Le principe qui sous-tend de tels résultats est que si la structure de plus grand volume n’est pas complète, elle doit néanmoins être complète en émphla plupart des endroits, ce qui nous autorise à faire sur elle des raisonnements métriques pour prouver les inégalités nécessaires et lever les “obstructions combinatoires”.

En combinant les méthodes de [ASWY1] et de [Min], profonds résultats sur la frontière de l’espace des groupes quasi-fuchsien, Akiyoshi a démontré le théorème 1.1.2 dans [Ak]. Lackenby [L2], en supposant l’existence de la métrique hyperbolique (donc le théorème de Thurston), a retrouvé le même résultat par la théorie des surfaces normales. La démonstration proposée ici ne fait en revanche appel à aucun résultat extérieur. Parmi les autres références étroitement liées à ce sujet, signalons le joli article [ASWY2], qui expose et développe le travail de Jørgensen, et les exemples compilés dans [AH], [He] et [Ko].

La réciproque du théorème 1.1.1 est vraie. Si la trace τ de l’application de monodromie φ appartient à $\{-1, 0, 1\}$, alors $[\varphi]$ est d’ordre fini et V_φ est un fibré de Seifert. Si $\tau = \pm 2$, alors φ préserve une courbe simple fermée γ (parallèle à un vecteur propre rationnel de φ) dans le tore percé, et γ définit un tore (ou une bouteille de Klein) incompressible dans V_φ . Dans chacun de ces cas on obtient une obstruction à l’existence de la métrique hyperbolique.

Notre démonstration du théorème 1.1.1 traitera principalement du cas où les valeurs propres de φ sont positives. Le cas négatif n’est qu’une variante mineure (en particulier, $V_{-\varphi}$ peut s’obtenir en décollant les tétraèdres métriques de V_φ et en les recollant d’une manière légèrement différente).

La partie 1.2 est standard et rappelle la classification des classes de conjugaison de $SL_2(\mathbb{Z})$ afin de définir la triangulation \mathcal{D}^{Comb} . Cette dernière est étudiée en détail dans les parties 1.3 et 1.4. On munit \mathcal{D}^{Comb} d’angles dièdres strictement positifs (c’est-à-dire d’une “structure hyperbolique linéaire”) à la partie 1.5. La partie 1.6 explique quel rôle joue la maximisation du volume (elle redémontre donc dans ce cas particulier le théorème 0.1.2), ce qui permet de traiter les cas faciles à la partie 1.7. La partie 1.8 présente le lemme géométrique essentiel pour l’assaut final, mené à bien à la partie 1.9. La partie 1.10, logiquement indépendante du reste du chapitre, est consacrée à un exemple numérique. Un simple calcul permet, à la partie 1.11, d’aboutir au théorème 1.1.2 : nous verrons que l’inégalité clé est de nouveau donnée par le lemme géométrique de la partie 1.8.

1.2 Classes de conjugaison dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et triangulation de Farey

Proposition 1.2.1. *Soit φ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ qui possède deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{R}_+^* . La classe de conjugaison de φ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ contient un élément de la forme*

$$A\varphi A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_n & 1 \end{pmatrix}$$

où $n > 0$ et où les a_i, b_i sont des entiers strictement positifs. De plus, le membre de droite est unique à permutation cyclique près des facteurs $\begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_i & 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, tout produit non vide de tels facteurs est un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ avec deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{R}_+^* . \square

Nous esquissons une preuve de ce fait populaire, principalement afin d'introduire le *mot cyclique* Ω associé à φ . Cette esquisse, ainsi que le contenu des parties 1.3 et 1.4 où nous définirons la triangulation \mathcal{D}^{Comb} de V_φ , rejoint l'exposition originale de Floyd et Hatcher [FH], qui étudient les surfaces normales de \mathcal{D}^{Comb} pour classifier les surfaces incompressibles de V_φ .

L'implication réciproque est facile à voir (vérifier simplement que la trace est strictement supérieure à 2); nous nous concentrons donc sur l'implication directe.

Considérons le modèle du demi-plan supérieur pour l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 , muni de la triangulation de Farey F (le triangle idéal 01∞ et toutes ses images par réflexions successives par rapport à ses côtés). Nous identifions $PSL_2(\mathbb{R})$ au groupe des isométries de \mathbb{H}^2 par l'intermédiaire de l'isomorphisme Ψ défini par

$$\Psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{dz + c}{bz + a}.$$

(Avec cette convention légèrement inhabituelle, les pentes des vecteurs propres de M sont les points fixes de $\Psi(M)$, plutôt que leurs inverses). On sait que le groupe des isométries orientées de \mathbb{H}^2 qui préservent F est alors identifié à $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Soit Λ la droite hyperbolique orientée qui va du point fixe répulsif de φ au point fixe attractif. Alors Λ traverse une infinité de triangles $(\dots t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$ de F , ou "triangles de Farey". On peut formellement écrire un mot bi-infini

$$\Omega = \dots LRRRLLR \dots$$

où la k -ème lettre est R (resp. L) si et seulement si la droite Λ ressort de t_k par le côté situé à droite (resp. à gauche) du côté où elle entre. On dira que Λ *tourne à droite* (resp. *tourne à gauche*) en t_k . Le mot Ω contient au moins un R et un L , parce que les extrémités de Λ sont distinctes. L'image de t_0 par φ est un certain t_m ($m > 1$), et Ω est périodique de période m .

À présent, définissons les matrices de transvection standard

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices définissent des transformations paraboliques de \mathbb{H}^2 qui fixent respectivement les points 0 et ∞ . Soit M n'importe quel sous-mot de Ω de longueur m : nous regardons M comme un produit de matrices de transvection standard, et donc comme un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$. En étudiant l'action de R et de L sur F , on voit alors facilement que φ et M sont conjuguées dans $PSL_2(\mathbb{Z})$, et donc dans $SL_2(\mathbb{Z})$ puisque toutes deux sont de trace strictement positive. L'existence des (a_i, b_i) est démontrée.

On vérifie l'unicité de la manière suivante : d'une part, si φ et φ' sont conjugués, il y a un élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ (respectant F) qui envoie l'axe de φ sur l'axe de φ' , donc φ et φ' définissent le même mot Ω à translation près. D'autre part, en considérant l'action de R et de L sur \mathbb{H}^2 , on voit qu'un produit de matrices de transvection standard (comme dans l'énoncé de la proposition 1.2.1 définit toujours le mot $\Omega = R^{a_1} L^{b_1} \dots R^{a_n} L^{b_n}$, répété indéfiniment.

Dans le langage de la proposition 1.2.1, on peut montrer que la suite $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ est (une puissance de) la période de la décomposition en fraction continue de la pente du vecteur propre dilatant de φ . Le mot Ω sera vu tantôt comme étant infini et périodique, tantôt comme étant fini et cyclique, selon le contexte.

1.3 La triangulation canonique

1.3.1 Échanges de diagonale

Il existe une autre interprétation bien connue de la triangulation de Farey F du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Par l'identification canonique $H_1(T, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$, où T est le tore percé défini dans l'introduction, chaque nombre rationnel dans le bord $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de \mathbb{H}^2 peut être vu comme une *penne*, c'est-à-dire une classe d'isotopie de droites proprement plongées dans T , allant du trou au trou. L'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\widehat{\mathbb{Q}}$ coïncide avec l'action du groupe G des classes de difféomorphismes de T sur les pentes rationnelles. Deux rationnels sont reliés par une arête de la triangulation de Farey F si et seulement si les courbes correspondantes dans T sont homotopiquement disjointes. Les faces de F , qui possèdent trois arêtes, correspondent exactement aux classes d'isotopie de *triangulations idéales* de T : toute triangulation de cette sorte possède un sommet (le trou de T), trois arêtes, et deux triangles (adjacents le long de chacune des arêtes). Lorsqu'on passe d'une face de F à une de ses voisines, exactement un sommet de Farey est remplacé par un autre, ce qui dans les triangulations de T associées signifie qu'exactly une arête est remplacée. On voit que la triangulation subit alors un *échange de diagonale* : effacer une arête e , de manière à libérer un quadrilatère Q dont e était une diagonale, puis insérer dans Q l'autre diagonale (figure 1.3.1).

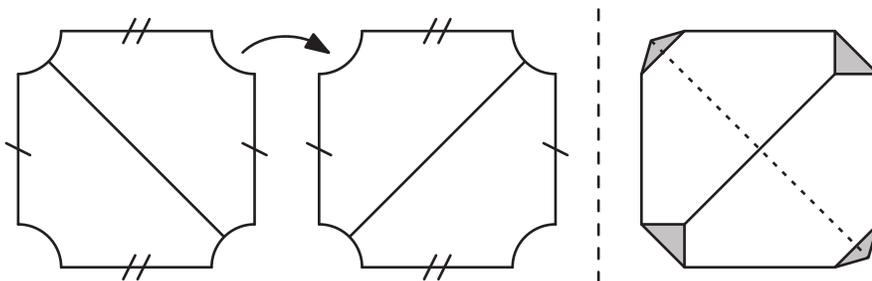


FIG. 1.3.1 – À gauche : un échange de diagonale dans T (le trou de T est dans les 4 coins), associé aux triangles de Farey adjacents $-1\infty 0$ et $1\infty 0$. À droite : interprétation de cet échange de diagonales comme un tétraèdre idéal, dont on a ici tronqué les sommets (grisé).

1.3.2 Tétraèdres

Comme auparavant, soit φ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ qui admet deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{R}_+^* . Dans l'esquisse de preuve de la proposition 1.2.1, nous avons introduit les triangles de Farey t_0, t_1, \dots traversés par l'axe Λ de φ . Au vu de ce qui précède, cette suite de triangles définit un chemin en triangulations du tore percé T séparées par des échanges de diagonales (sans retours en arrière), partant d'une triangulation (associée à t_0) pour parvenir à son image par φ_* (associée à t_m).

Plus précisément, lorsque la droite orientée Λ traverse une arête e de la triangulation de Farey, e reçoit naturellement une orientation transverse. Nous pouvons donc définir la triangulation *supérieure* (resp. *inférieure*) $\tau_+(e)$ (resp. $\tau_-(e)$) du tore percé T comme étant celle associée au triangle de Farey traversé juste après (resp. juste avant) l'arête e . Un échange de diagonale sépare les triangulations $\tau_-(e)$ et $\tau_+(e)$. Un tétraèdre idéal est par définition un espace difféomorphe à un tétraèdre idéal hyperbolique (topologiquement c'est un tétraèdre compact auquel on a ôté ses sommets). Nous pouvons immerger un

tel tétraèdre $\Delta(e)$ dans $T \times \mathbb{R}$: le bord de l'image immergée de $\Delta(e)$ est constitué de deux *surfaces plissées* (supérieure et inférieure) homotopes à la fibre T et triangulées selon $\tau_+(e)$ et $\tau_-(e)$, respectivement (figures 1.3.1 et 1.3.2). L'immersion est un plongement sur l'intérieur de $\Delta(e)$, mais deux paires d'arêtes opposées de $\Delta(e)$ subissent des identifications.

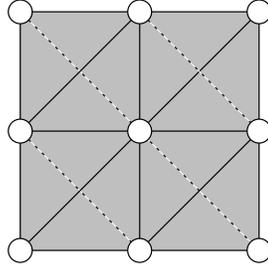


FIG. 1.3.2 – Quatre copies du tétraèdre $\Delta(e)$ dans le revêtement $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}$ de $T \times \mathbb{R}$.

À présent, si Λ traverse les arêtes de Farey e_i, e_{i+1}, \dots , nous pouvons recoller la surface supérieure du tétraèdre $\Delta_i := \Delta(e_i)$ à la surface inférieure de Δ_{i+1} dans $T \times \mathbb{R}$, parce que $\tau_+(e_i) = \tau_-(e_{i+1})$. Nous obtenons de la sorte un empilement bi-infini de tétraèdres $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Pour tout $N \geq 0$ l'espace $U_N := \bigcup_{i=-N}^N \Delta_i$ est un rétract par déformation forte de $T \times \mathbb{R}$. Pour N assez grand, U_N est homéomorphe à $T \times [0, 1]$: il n'en saurait être autrement que si tous les Δ_i pour $-N \leq i \leq N$ ont une arête en commun ; or toute arête de tout tétraèdre Δ_j n'est partagée que par un nombre fini d'autres tétraèdres Δ_i (consécutifs), parce que pour tout sommet de Farey v , seules un nombre fini d'arêtes de Farey e_i bordent des triangles ayant v comme sommet (et ces e_i sont consécutives). Par conséquent, l'espace $U = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ est homéomorphe à $T \times \mathbb{R}$. Si m est la période du mot Ω , il existe un homéomorphisme orienté Φ de U , agissant par $[\varphi]$ sur le facteur T , qui envoie Δ_i sur Δ_{i+m} pour tout i . Le quotient U/Φ est une variété (homéomorphe à) V_φ , naturellement triangulée en m tétraèdres idéaux.

La figure 1.3.3 illustre aussi une façon d'interpréter les matrices de transvection standard R et L directement comme des ajouts de nouveaux tétraèdres (par l'intermédiaire d'échanges de diagonale sur les faces supérieures).

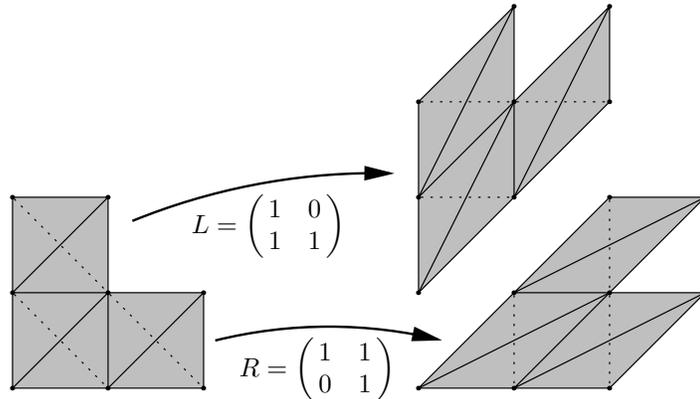


FIG. 1.3.3 – Ajout d'un tétraèdre, vu dans le revêtement $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}$.

1.4 Combinatoire du tore à l'infini

La variété V_φ est naturellement homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord, notée $\overline{V_\varphi}$ et définie comme un fibré sur le cercle dont la fibre est $T - \delta$, où δ est un voisinage régulier du trou de T .

Le *tore à l'infini* de la variété V_φ est par définition le bord de $\overline{V_\varphi}$, à savoir un tore topologique. Les liens des sommets des tétraèdres Δ_i fournissent une triangulation \mathcal{A} du tore à l'infini en un certain nombre de triangles topologiques. Dans cette partie nous étudions la combinatoire de \mathcal{A} .

Chaque sommet de \mathcal{A} correspond à une arête de V_φ commune à un certain nombre de tétraèdres consécutifs Δ_i . Cette arête, par sa pente dans le tore percé T , correspond à son tour à un sommet de Farey commun à un certain nombre de triangles de Farey consécutifs. L'union de tous les triangles de Farey adjacents à un sommet donné v forme un *éventail*. Si v apparaît comme un sommet de triangles visités par la droite Λ , l'une des deux choses suivantes doit se produire immédiatement après que Λ pénètre l'éventail : ou bien Λ tourne une fois à droite, puis un certain nombre de fois (éventuellement nul) à gauche, puis à droite pour sortir de l'éventail, ou bien la même chose est vraie en échangeant les mots droite et gauche.

Par conséquent, les sommets de \mathcal{A} correspondent exactement aux sous-mots de Ω de la forme RL^*R ou LR^*L (où $* \geq 0$). Chaque sous-mot de cette forme correspond en fait à deux sommets de \mathcal{A} , parce que les arêtes des tétraèdres Δ_i ont deux extrémités.

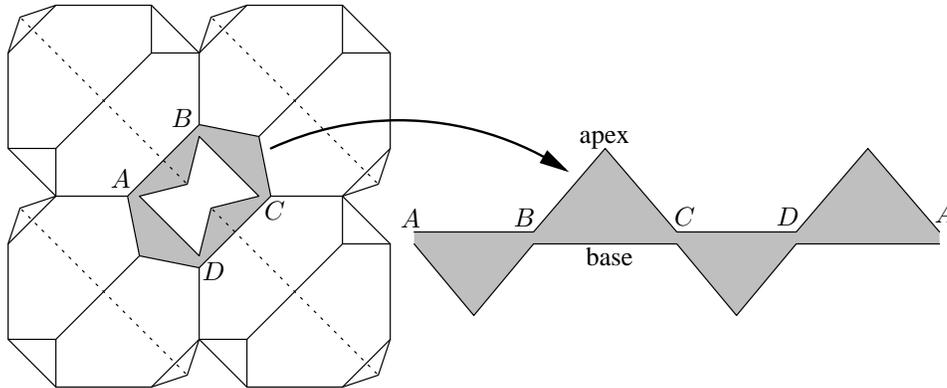


FIG. 1.4.1 – Le lien de la pointe.

De plus, chaque tétraèdre Δ_i , possédant quatre sommets, verse une contribution de quatre triangles à \mathcal{A} . En regardant un sommet (c'est-à-dire un trou) du revêtement $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}$ de $T \times \mathbb{R}$ avec l'image immergée de Δ_i , on vérifie (Figure 1.4.1) que chacun des quatre triangles possède exactement un sommet qui n'est commun à aucun des trois autres : ce sommet s'appelle l'*apex* du triangle, et le côté opposé s'appelle la *base*. Les quatre bases forment une ligne brisée de quatre segments qui est un lacet faisant le tour du trou, et les quatre apex pointent alternativement vers le haut et vers le bas dans le facteur \mathbb{R} de $T \times \mathbb{R}$. Ces chaînes de quatre triangles doivent être empilées les unes sur les autres tout en respectant la combinatoire décrite précédemment au niveau des sommets. Le résultat est montré sur la figure 1.4.2, où le mot sous-jacent Ω est $\dots R^4 L^4 R^4 L^4 \dots$ (à lire de bas en haut). C'est le moment de faire quelques remarques.

Première remarque : nous avons marqué x_i, y_i, z_i les secteurs angulaires des triangles correspondant à Δ_i

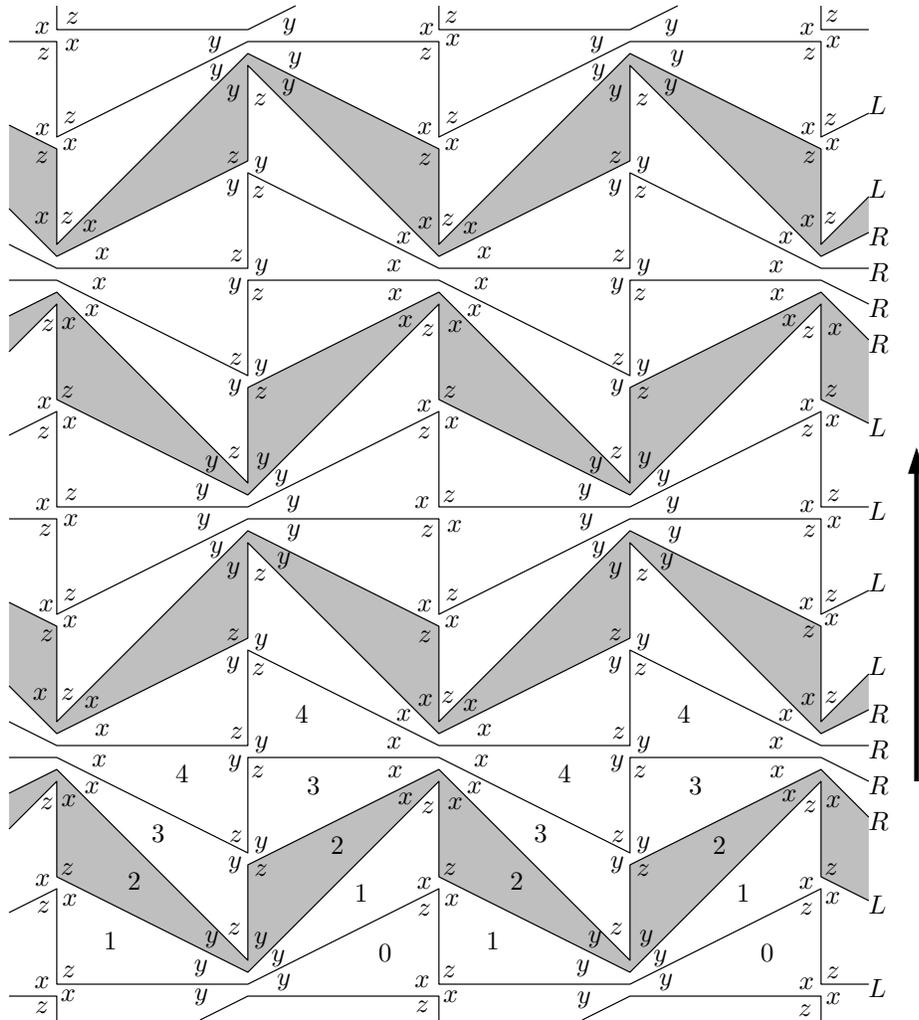


FIG. 1.4.2 – La triangulation \mathcal{A} du tore à l’infini.

(sur la figure 1.4.2, l’indice i est remplacé par un numéro au centre du triangle, omis après les 4 premiers niveaux). Chaque secteur angulaire correspond à un angle dièdre (topologique) de Δ_i . Deux angles dièdres opposés sont toujours égaux dans un tétraèdre hyperbolique : c’est pourquoi trois symboles par niveau suffisent, au lieu de six (le nombre d’arêtes d’un tétraèdre).

Deuxième remarque : sur la figure 1.4.2, l’aspect “éclaté” des sommets de la triangulation du tore à l’infini sert à souligner la structure nivelée du dessin (un niveau par tétraèdre Δ_i).

Troisième remarque : montrer le théorème 1.1.1 (par la méthode proposée) revient à réaliser la figure 1.4.2 géométriquement dans le plan par des triangles euclidiens, de manière que les angles marqués de la même lettre à l’intérieur d’un niveau donné soient égaux (le lemme 1.6.2 rendra cette idée plus précise).

Quatrième remarque : par convention, la paire d’arêtes opposées de Δ_i qui ne subit pas d’identification est marquée z_i . De façon équivalente, si un tétraèdre est vu comme un échange de diagonale, z_i est la lettre associée à l’arête qui disparaît et à celle qui apparaît. C’est donc l’apex qui porte la lettre z_i . Les

autres paires d'arêtes de Δ_i sont marquées x_i et y_i de telle manière que dans chaque triangle, les lettres x, y, z apparaissent dans le sens des aiguilles d'une montre. Par conséquent, si e_i est une arête de Farey et si p (resp. q) est son extrémité droite (resp. gauche) pour l'orientation transverse, l'angle dièdre du tétraèdre Δ_i à l'arête de pente p (resp. q) est x_i (resp. y_i).

Cinquième remarque : les tétraèdres Δ_i sont naturellement indexés dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Les lettres R et L de Ω habitent naturellement sur les surfaces plissées, c'est-à-dire *entre* les tétraèdres Δ_i . Dans la figure 1.4.2 et dorénavant, le i -ème niveau est coloré en gris si et seulement si les lettres juste avant et juste après Δ_i sont différentes (ici $i = 2, 6, \dots$). De tels indices i sont appelés indices *charnière*, parce qu'ils se trouvent à la charnière entre deux sous-mots non vides R^p et L^q . Les tétraèdres charnière (les Δ_i associés) joueront un rôle important par la suite.

Sixième remarque : alors que le domaine fondamental de la figure 1.4.2 est censé avoir une longueur horizontale de quatre triangles (voir la figure 1.4.1), on note une période horizontale de longueur 2 seulement. Ce phénomène provient de l'involution "hyperelliptique" du tore percé (rotation de 180° autour du trou, centrale dans le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ et par conséquent bien définie sur V_φ). Cette particularité simplifiera certains de nos calculs.

Septième remarque : la valence d'un sommet s de \mathcal{A} correspondant au sous-mot RL^nR ou LR^nL de Ω (où $n \geq 0$) est $2n + 4$. Il en est ainsi parce qu'exactly $n + 2$ triangles de Farey sont adjacents au rationnel correspondant v_s ; chacun de ces triangles de Farey définit une surface triangulée (avec une arête de pente v_s), et chacune de ces surfaces définit exactement deux segments issus de s dans \mathcal{A} .

1.5 Recherche d'angles strictement positifs

Les tétraèdres Δ_i et Δ_{i+1} ont en commun deux faces triangulaires dont l'union forme un *tore percé plissé* Σ proprement isotope à $T \times \{*\}$ dans $T \times \mathbb{R}$. De plus, Σ reçoit une orientation transverse induite par le facteur \mathbb{R} . Supposons que tous les tétraèdres Δ_i soient munis d'angles dièdres. Soit e une arête de Σ : si la somme de tous les angles dièdres en e *au dessus* de Σ vaut $\pi + \alpha$, nous appelons α l'*angle de plissage* de Σ en e .

Dans cette partie nous trouvons des angles dièdres strictement positifs pour les tétraèdres idéaux Δ_i . Plus exactement, nous décrivons l'espace convexe Π des combinaisons d'angles x_i, y_i, z_i pour les Δ_i telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i — Pour tout } i \text{ dans } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ on ait } x_i + y_i + z_i = \pi ; \\ \text{ii — Les angles dièdres autour de chaque arête aient pour somme } 2\pi ; \\ \text{iii — Pour tout } i \text{ de } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \text{ les trois angles de plissage de la surface} \\ \text{plissé entre } \Delta_i \text{ et } \Delta_{i+1} \text{ aient pour somme } 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

La condition (1.1-ii) est nécessaire, bien qu'insuffisante, pour avoir une métrique hyperbolique au voisinage de l'arête ; la condition (1.1-iii) est nécessaire, bien qu'insuffisante, pour que l'holonomie du lacet autour du trou de T soit une isométrie parabolique de \mathbb{H}^3 (voir le sous-lemme 1.6.4). La condition d'holonomie "globale" (1.1-iii) restreint l'espace des solutions (ou structures d'angles), mais va rendre cet espace un peu plus facile à décrire.

Rappelons la droite orientée Λ qui va du point fixe répulsif q^- de φ au point fixe attractif q^+ à travers la triangulation de Farey. Si le tétraèdre Δ_i , correspondant à l'arête de Farey e_i , réalise un échange de

diagonale au cours duquel on supprime une arête ε' pour la remplacer par ε , nous notons z_i l'angle dièdre intérieur de Δ_i en ε et en ε' (quatrième remarque sur la figure 1.4.2). Notons que la pente de ε (resp. ε') est le rationnel situé à l'opposé de e_i dans le diagramme de Farey, du côté de q^+ (resp. q^-). Définissons l'angle de plissage w_i par la relation : $\pi - w_i = z_i$.

Ainsi, pour que (1.1-ii) et (1.1-iii) soient satisfaites, les angles de plissage du tore percé plissé Σ situé entre Δ_{i-1} et Δ_i doivent valoir

$$w_{i-1}, -w_i \text{ et } w_i - w_{i-1}. \quad (1.2)$$

(Notons bien les signes : par notre définition, les angles qui saillent vers le haut, comme la “nouvelle” arête de Δ_{i-1} , sont des plissages positifs, tandis que les angles qui saillent vers le bas, comme “l'ancienne” arête de Δ_i , sont négatifs). Nous pouvons écrire les nombres (1.2) dans les coins du triangle de Farey correspondant (Figure 1.5.1 — haut), en distinguant les deux cas L et R , et répéter l'opération pour tous les indices i .

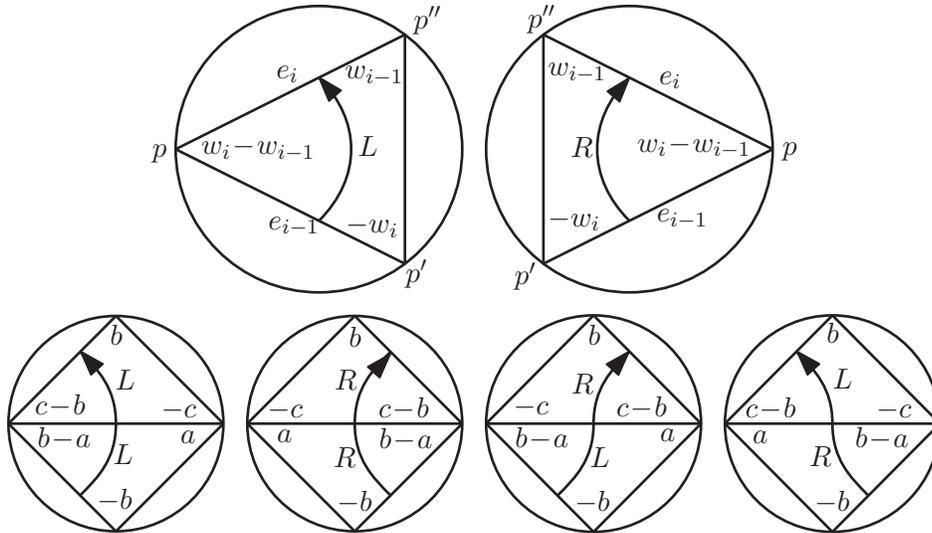


FIG. 1.5.1 – Bas : e_i est l'arête horizontale et $(a, b, c) = (w_{i-1}, w_i, w_{i+1})$.

En fait, les valeurs w_i vont aussi déterminer les x_i et les y_i . Pour voir cela, écrivons les angles de plissage de deux surfaces plissées, situées au dessus et au dessous du tétraèdre Δ_i . Pour plus de confort, notons

$$(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) =: (a, b, c).$$

Par la quatrième remarque sur la figure 1.4.2, la quantité $2x_i$ (resp. $2y_i$) est la différence entre les nombres inscrits juste au dessous et juste au dessus de l'extrémité droite (resp. gauche) de e_i dans la figure 1.5.1 (le facteur 2 provient du fait que deux arêtes de Δ_i d'angle x_i [resp. y_i] sont identifiées). En calculant les différences entre les angles de plissage donnés à la figure 1.5.1 (bas), on obtient les formules suivantes pour x_i, y_i, z_i (selon la nature des lettres Ω_i^- et Ω_i^+ , égales chacune à R ou à L , rencontrées juste avant et juste après l'indice i) :

1.6.1 Volume d'un tétraèdre idéal

Le volume d'un tétraèdre hyperbolique idéal d'angles dièdres $x, y, z > 0$ est

$$\mathcal{V}(x, y, z) = - \int_0^x \log(2 \sin u) du - \int_0^y \log(2 \sin u) du - \int_0^z \log(2 \sin u) du \quad (1.5)$$

(Nous renvoyons à [Mi1] pour la démonstration). Comme $\int_0^\pi \log(2 \sin u) du = 0$, l'équation (1.5) donne aisément

Proposition 1.6.1. *La fonction \mathcal{V} se prolonge par continuité à tous les triplets de réels positifs ou nuls (x, y, z) tels que $x + y + z = \pi$: la valeur de \mathcal{V} au bord de ce domaine est 0. Si $\frac{d}{dt}(x_t, y_t, z_t) = (X, Y, Z)$ alors*

$$\exp\left(\frac{-2d}{dt}\mathcal{V}(x_t, y_t, z_t)\right) = \sin^{2X} x_t \sin^{2Y} y_t \sin^{2Z} z_t. \quad (1.6)$$

Démonstration. Immédiat. Nous appliquerons toujours cette formule sous la forme donnée ici, car c'est pour cette forme que le membre de droite apparaîtra le plus simple. \square

1.6.2 Volume critique et holonomie triviale

Lemme 1.6.2 (Rivin, Chan–Hodgson). *Dans le polyèdre ouvert affine P des suites (w_i) qui satisfont (1.4), définissons la fonctionnelle volume \mathcal{V} comme la somme des volumes hyperboliques des tétraèdres Δ_i ayant pour angles dièdres x_i, y_i, z_i , donnés par le tableau 1.3. Alors (w_i) est un point critique de \mathcal{V} dans P si et seulement si le recollement des tétraèdres Δ_i définit une métrique hyperbolique complète, de volume fini, sur le fibré en tores percés V_φ .*

Démonstration. Ce lemme, devenu standard, est valable pour n'importe quelle triangulation idéale d'une variété (voir par exemple [CH, R1]). Néanmoins, la preuve suivante est délibérément spécifique à l'exemple considéré. Cela nous permettra d'introduire quelques objets et relations qui seront utiles par la suite ⁽¹⁾.

Commençons par supposer que (w_i) est un point critique. Soit B le tore à l'infini de V_φ auquel on a ôté les sommets de la triangulation \mathcal{A} . Si σ est l'involution hyperelliptique de V_φ (agissant comme une translation horizontale sur B), définissons $B' := B/\sigma$ et $\mathcal{A}' := \mathcal{A}/\sigma$. Soient t_0 un triangle de \mathcal{A}' , ϵ_0 un côté orienté de t_0 et p_0 un point intérieur de t_0 . Le groupe des similitudes orientées du plan euclidien \mathbb{C} est $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Définition 1.6.3. Étant donné (w_i) dans P , la fonction d'holonomie est la représentation

$$\rho : \pi_1(B', p_0) \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

définie comme suit. Étant donné un élément α de $\pi_1(B', p_0)$, regardons α comme une suite cyclique de triangles $t_0, t_1, \dots, t_s = t_0$ de \mathcal{A}' , tels que deux t_i consécutifs partagent toujours une arête. Alors, dessinons une copie orientée τ_0 de t_0 dans le plan \mathbb{C} , avec les angles définis par (w_i) , en faisant coïncider l'image de l'arête orientée ϵ_0 avec $]0, 1[$. Dessinons une copie τ_1 de t_1 , adjacente (le long d'un côté) à

¹Réciproquement, l'idée principale de la preuve présentée ici — associer explicitement à chaque arête de V_φ une déformation des angles dièdres — peut s'étendre pour montrer le théorème de Rivin dans toute sa généralité.

τ_0 , également avec les angles définis par (w_i) . Puis dessinons une copie τ_2 de t_2 adjacente à τ_1 , et ainsi de suite. Par définition, $\rho(\alpha)$ est la similitude orientée qui envoie la copie de l'arête orientée ϵ_0 dans τ_0 sur la copie de ϵ_0 dans τ_s . La fonction d'holonomie réduite $\psi : \pi_1(B', p_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ est définie comme la projection de ρ sur le premier facteur.

C'est un simple exercice de vérifier que ρ est bien définie, et constitue une représentation (la règle de concaténation est que $\alpha\beta$ dénote le lacet α suivi du lacet β). Notons que ψ , dont l'image est commutative, induit une représentation $\psi : H_1(B', \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Sous-lemme 1.6.4. Soit α un élément de $H_1(B', \mathbb{Z})$ représenté par un lacet autour d'un sommet de degré 4 de \mathcal{A}' , et soit β un élément représenté par une courbe qui suit un niveau "gris" (charnière) dans \mathcal{A}' (figure 1.6.1). Si (w_i) est critique pour la fonctionnelle volume \mathcal{V} , alors $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = 1$.

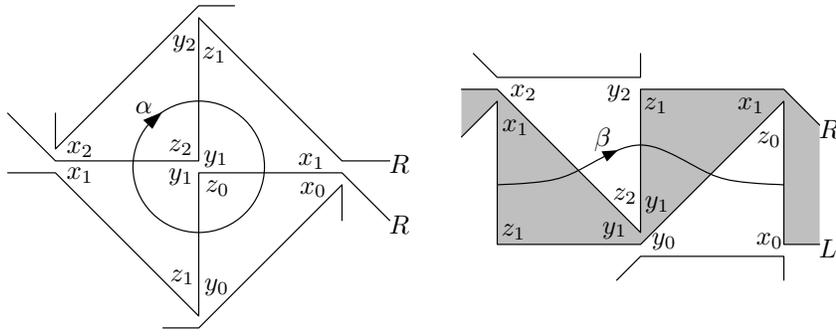


FIG. 1.6.1 – Courbes dans la triangulation de pointe. À chaque courbe α, β est associé un calcul d'holonomie.

Démonstration. On sait déjà que $\psi(\alpha), \psi(\beta)$ appartiennent à \mathbb{R}_+^* , à cause des conditions d'angle (1.1) qui définissent P et imposent le parallélisme (orienté). Il reste à montrer que $|\psi(\alpha)| = |\psi(\beta)| = 1$.

En un point critique, la dérivée partielle de \mathcal{V} par rapport à n'importe quelle variable w_i doit être nulle. Entre deux lettres identiques (et à l'entour), par exemple R et R , d'après le tableau (1.3), les angles doivent revêtir la forme

Ω	R	R
i	0	2
w_i	a	c
x_i	$\frac{1}{2}(\xi - b)$	$\frac{1}{2}(-a + 2b - c)$
y_i	$\frac{1}{2}(\eta + b)$	$\frac{1}{2}(a + c)$
z_i	$\pi - a$	$\pi - b$

(l'expression exacte de ξ, ξ', η, η' dépend des lettres situées avant et après RR , mais seule la contribution

de b nous intéresse ici). En vertu de la proposition 1.6.1, la criticalité de \mathcal{V} implique

$$1 = \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial b} = \frac{\sin y_0 \sin^2 x_1 \sin y_2}{\sin x_0 \sin^2 z_1 \sin x_2}.$$

Comme les longueurs des côtés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles opposés, on en déduit que les longueurs des côtés dans la figure 1.6.1 (à gauche) autour du sommet central s'assemblent correctement. Donc $|\psi(\alpha)| = 1$. Le cas d'un sous-mot LL est traité de la même manière, ce qui nous débarrasse de *tous* les sommets de degré 4 de la triangulation \mathcal{A}' .

Au voisinage d'une charnière entre deux lettres différentes, par exemple L suivi de R , les angles revêtent la forme

Ω	L	R	
i	0	1	2
w_i	a	b	c
x_i	$\frac{1}{2}(\xi + b)$	$\frac{1}{2}(a + b - c)$	$\frac{1}{2}(-b + \xi')$
y_i	$\frac{1}{2}(\eta - b)$	$\frac{1}{2}(-a + b + c)$	$\frac{1}{2}(b + \eta')$
z_i	$\pi - a$	$\pi - b$	$\pi - c$

Cette fois, la criticalité donne

$$1 = \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial b} = \frac{\sin x_0 \sin y_1 \sin x_1 \sin y_2}{\sin y_0 \sin^2 z_1 \sin x_2}.$$

Comme on le voit sur la figure 1.6.1 (à droite) et par le même argument trigonométrique, cela signifie que le premier et le dernier côté traversés par β ont la même longueur. Donc $\psi(\beta) = 1$. (Si Ω est réduit à LR , le calcul est formellement le même, en identifiant les indices 0 et 2). Le cas d'un sous-mot RL est semblable. Le sous-lemme 1.6.4 est démontré. \square

Soit à présent α un élément de $\pi_1(B', p_0)$ qui est conjugué à un lacet simple autour d'un sommet de degré 4 de \mathcal{A}' . Par le sous-lemme 1.6.4 (et un facile argument de conjugaison), $\rho(\alpha)$ est une translation. De plus, $\rho(\alpha)$ fixe le sommet dont α fait le tour, donc $\rho(\alpha) = 1$, l'identité du plan euclidien.

Sous-lemme 1.6.5. *Soit U le quotient du tore à l'infini de V_φ par l'involution hyperelliptique, de sorte que $B' \subset U$. Supposons que (w_i) est un point critique de \mathcal{V} . Alors la représentation $\rho : \pi_1(B', p_0) \rightarrow \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{C}$ descend à une représentation $\rho_U : \pi_1(U, p_0) \rightarrow \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{C}$ dont la première projection $\psi_U : \pi_1(U, p_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ est triviale.*

Démonstration. Pour voir que ρ_U est bien définie, il suffit de vérifier que, si γ est (conjugué à) un lacet qui fait le tour d'un sommet v de \mathcal{A}' , alors $\rho(\gamma) = 1$. Si v a pour degré 4, c'est déjà fait. Sinon, par l'argument qui précède le sous-lemme 1.6.5, il suffit de montrer que $\psi([\gamma]) = 1$, où $[\gamma]$ est la classe d'homologie de γ . Mais dans $H_1(B', \mathbb{Z})$, l'élément $[\gamma]$ est une somme de lacets autour de sommets de degré 4 et de courbes qui suivent les niveaux-charnière "gris" (voir la figure 1.6.2 : les arêtes verticales de B' des deux côtés de l'image sont identifiées, et les courbes qui traversent ces arêtes subissent une

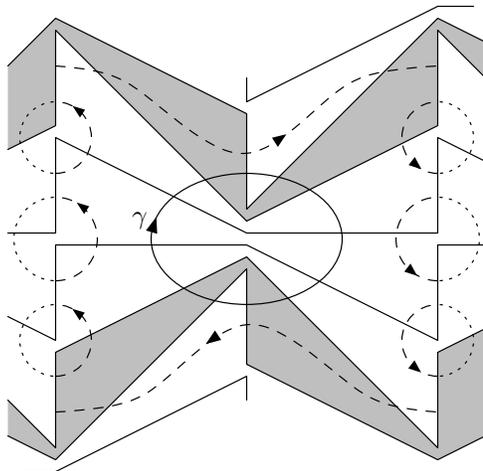


FIG. 1.6.2 – Un sommet de degré élevé dans la triangulation de pointe.

opération de “dessoudage-ressoudage” pour donner γ). Donc par le sous-lemme 1.6.4, $\psi([\gamma]) = 1$: par conséquent ρ_U est bien défini. De plus, si β est une courbe qui suit un niveau “gris” (charnière), le sous-lemme 1.6.4 dit que $\rho_U(\beta) = \rho(\beta)$ est une *translation* euclidienne (différente de l’identité). La valeur prise par ρ_U en un autre générateur de $\pi_1(U)$ (qui est commutatif) doit commuter avec $\rho_U(\beta)$, et donc être une translation elle aussi. On en déduit que l’image de ρ_U est contenue dans $\{1\} \times \mathbb{C}$ et $\psi_U = 1$: le sous-lemme 1.6.5 est démontré. \square

Si l’on confère une longueur de 1, par exemple, à l’arête ϵ_0 de \mathcal{A}' , un point critique (w_i) de la fonctionnelle volume permet ainsi de définir les longueurs de toutes les autres arêtes de \mathcal{A}' d’une manière cohérente. On obtient une métrique euclidienne complète g sur U . Un revêtement universel \tilde{U} de U se plonge donc dans \mathbb{C} (ce plongement, appelé l’application développante de la structure localement euclidienne, est bien injectif puisque la \tilde{g} -géodésique reliant deux points distincts de \tilde{U} est envoyée sur un segment de \mathbb{C}); il y a donc une isométrie $\tilde{U} \simeq \mathbb{C}$. La métrique g se relève de U au tore à l’infini de V_φ et à sa triangulation \mathcal{A} , ce qui fournit une réalisation géométrique de \mathcal{A} , et de la figure 1.4.2, dans \mathbb{C} (pavage euclidien). Au dessus de chaque triangle du revêtement universel de \mathcal{A} on peut construire un tétraèdre idéal avec un sommet à l’infini : le tétraèdre est l’enveloppe convexe hyperbolique du point ∞ et des sommets du triangle. Notons que ces tétraèdres remplissent \mathbb{H}^3 entièrement à partir d’une certaine hauteur.

Pour s’assurer que la métrique obtenue par recollement sur l’union $V = V_\varphi$ de tous les tétraèdres idéaux est bien complète, on suppose qu’une géodésique $\gamma(t)$ dans V part à l’infini en temps $T < \infty$. Si $K \subset V$ est compact, c’est-à-dire possède une intersection compacte avec chaque tétraèdre Δ_i , alors γ finit par quitter K (sinon, les $\gamma(T - 1/n)$ s’accumuleraient en un certain point p d’un certain tétraèdre, mais il y a une petite boule hyperbolique plongée dans V de centre p : absurde). Donc pour t assez proche de T , il existe un relevé de $\gamma(t)$ à une hauteur euclidienne arbitrairement grande au dessus de la triangulation \mathcal{A} (plongée dans \mathbb{C} dans le modèle du demi espace supérieur). Mais aux hauteurs suffisamment grandes, les tétraèdres au dessus de \mathcal{A} remplissent \mathbb{H}^3 complètement, donc les géodésiques sont définies pour des temps longs (par exemple des temps plus grands que 1) : contradiction. L’implication directe du lemme 1.6.2 est montrée.

Pour l'implication réciproque, il suffit de montrer que si le recollement des tétraèdres définit une métrique hyperbolique complète, alors le recollement de leurs liens sommitaux (triangles euclidiens) est une réalisation géométrique de \mathcal{A} , c'est-à-dire de la figure 1.4.2 (vérifier $\partial\mathcal{V}/\partial w_i = 0$ revient alors à répéter les deux calculs du sous-lemme 1.6.4, en distinguant selon que i est un indice charnière ou non). Or c'est bien le cas : étant donnée une métrique hyperbolique complète, considérons un revêtement universel triangulé $\mathbb{H}^3 \rightarrow V_\varphi$ et envoyons un relevé de la pointe en l'infini, dans le modèle du demi-espace supérieur. C'est une propriété classique que les transformations de \mathbb{H}^3 qui commutent avec l'application de revêtement et laissent fixe le point ∞ sont toutes paraboliques, de sorte que le lien de l'infini admet deux périodes de translation et constitue une réalisation euclidienne de \mathcal{A} (et de la figure 1.4.2). \square

1.6.3 Comportement de la fonctionnelle volume

Par suite du lemme 1.6.2, pour montrer le théorème 1.1.1 il suffit de trouver un point critique de la fonctionnelle volume \mathcal{V} dans le polyèdre ouvert P des suites cycliques $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ qui satisfont aux conditions (1.4). Nous allons faire appel à quelques faits supplémentaires concernant le volume d'un tétraèdre idéal.

Par la proposition 1.6.1, la fonctionnelle volume \mathcal{V} s'étend continûment à l'adhérence (compacte) \overline{P} du polyèdre P (l'espace \overline{P} est défini en remplaçant les conditions (1.4) par des inégalités larges, ou encore en prenant les limites dans \mathbb{R}^m de suites de P). Par conséquent, \mathcal{V} admet des extrema bien définis sur \overline{P} , qui sont automatiquement critiques pour peu qu'ils appartiennent à P . À cause de la proposition suivante, tout point critique doit être un maximum absolu.

Proposition 1.6.6. *Le volume d'un tétraèdre idéal est une fonction concave de ses angles dièdres. La concavité est stricte sur l'espace des tétraèdres d'angles strictement positifs.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 1.6.1, dont nous employons à nouveau les notations : x_t, y_t, z_t sont les angles dièdres ; supposons que $x_t, y_t, z_t > 0$ sont des fonctions affines de t de coefficients dominants X, Y, Z non tous nuls. La proposition 1.6.1 implique $-d\mathcal{V}/dt = X \log \sin x_t + Y \log \sin y_t + Z \log \sin z_t$, et en dérivant cela :

$$\begin{aligned} -d^2\mathcal{V}/dt^2|_{t=0} &= X^2 \cot x_0 + Y^2 \cot y_0 + Z^2 \cot z_0 \\ &= X^2 \cot x_0 + Y^2 \cot y_0 + (X + Y)^2 \frac{1 - \cot x_0 \cot y_0}{\cot x_0 + \cot y_0} \\ &= \frac{(X + Y)^2 + (X \cot x_0 - Y \cot y_0)^2}{\cot x_0 + \cot y_0} =: D. \end{aligned}$$

On a $D > 0$ parce que $\cot x_0 + \cot y_0 = \frac{\sin z_0}{\sin x_0 \sin y_0} > 0$ (noter que l'annulation du numérateur de D entraînerait $\cot x_0 + \cot y_0 = 0$, d'où $z_0 = 0$). Le prolongement par continuité de \mathcal{V} est concave aussi, mais au sens large seulement. \square

Par conséquent, la fonctionnelle volume \mathcal{V} est également concave sur \overline{P} et le théorème 1.1.1 sera vrai si le maximum de \mathcal{V} est intérieur. Analysons donc le comportement de \mathcal{V} près du bord de \overline{P} .

Proposition 1.6.7. (Dégénérescence simple). *Si $(Q_t)_{t \geq 0}$ est une famille différentiable de tétraèdres idéaux d'angles x_t, y_t, z_t tels que $x_0, y_0 \in (0, \pi)$; $z_0 = 0$ et $\frac{dz_t}{dt}|_{t=0} > 0$, alors $\frac{d\mathcal{V}}{dt}|_{t=0} = +\infty$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que le membre de droite de (1.6) tend vers 0 quand t tend vers 0. Nous appelons cette situation une *dégénérescence simple* parce que le triangle “limite” n’a qu’un seul angle nul z_0 (deux de ses sommets sont donc confondus). \square

Proposition 1.6.8. (Dégénérescence double). *Si $(Q_t)_{t \geq 0}$ est une famille différentiable de tétraèdres idéaux qui satisfont $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \pi)$ et $\frac{d}{dt}|_{t=0}(x_t, y_t, z_t) = (1 + \lambda, 1 - \lambda, -2)$ où $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\exp \frac{-d\mathcal{V}}{dt}|_{t=0} = \frac{1-\lambda^2}{4} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^\lambda$.*

Démonstration. Quand t tend vers 0, on a $\sin x_t \sim (1 + \lambda)t$ et $\sin y_t \sim (1 - \lambda)t$ alors que $\sin z_t \sim 2t$. Le membre de droite de (1.6) est donc équivalent à

$$[(1 + \lambda)t]^{1+\lambda} [(1 - \lambda)t]^{1-\lambda} (2t)^{-2} = \frac{1 - \lambda^2}{4} \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right)^\lambda.$$

Nous appelons cette situation une *dégénérescence double* parce que le triangle limite a deux angles nuls (ses sommets sont distincts, mais alignés). \square

1.7 Quelques dégénérescences qui n’ont certainement pas lieu

Dorénavant, nous fixons $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ dans le polyèdre compact \overline{P} à la valeur qui maximise le volume hyperbolique total de tous les tétraèdres. Pour montrer que (w_i) est critique pour le volume \mathcal{V} , il suffit de s’assurer que (w_i) appartient à l’intérieur P de \overline{P} , c’est-à-dire que tous les x_i, y_i, z_i appartiennent à l’intervalle $]0, \pi[$.

Proposition 1.7.1. *Si pour quelque indice i , l’un des nombres x_i, y_i, z_i est nul, alors deux de ces nombres sont nuls et le troisième vaut π . En d’autres termes, il n’y a pas de dégénérescences simples, seulement des dégénérescences doubles.*

Démonstration. S’il en est autrement, considérons un segment affine allant de (w_i) à n’importe quel point intérieur de P . Par la proposition 1.6.7, la dérivée partielle de \mathcal{V} en (w_i) le long de ce segment est $+\infty$, donc \mathcal{V} ne pouvait pas être maximal en (w_i) . \square

Un tétraèdre Δ_i tel que (x_i, y_i, z_i) possède un, et donc deux termes nuls, est dit *aplatis* ; un tétraèdre aplati est caractérisé par le fait que w_i vaut soit 0 soit π .

Proposition 1.7.2. (Effet domino). *Si deux tétraèdres consécutifs Δ_{i-1}, Δ_i sont aplatis, alors Δ_{i+1} et Δ_{i-2} sont aplatis eux aussi.*

Démonstration. Nous nous préoccupons seulement de Δ_{i+1} , et utilisons uniquement le tableau (1.3) et sa conséquence (1.4). Il y a plusieurs cas à considérer :

- Si i n’est pas une charnière, l’aplatissement de Δ_i implique $w_{i-1} + w_{i+1} \in \{0, 2\pi\}$. Par la condition de domaine $0 \leq w \leq \pi$, cela entraîne $w_{i+1} \in \{0, \pi\}$, donc Δ_{i+1} est aplati.
- Si i est un indice charnière et $w_i = \pi$, on doit avoir $|w_{i-1} - w_{i+1}| = \pi$, donc par la condition de domaine, w_{i+1} vaut 0 ou π , et Δ_{i+1} est aplati.
- Si i est un indice charnière et $w_i = 0$, on doit avoir $|w_{i+1} - w_{i-1}| \leq 0$ donc $w_{i+1} = w_{i-1}$: mais Δ_{i-1} est aplati par hypothèse, donc Δ_{i+1} l’est aussi. Notons que l’hypothèse d’aplatissement de Δ_{i-1} n’est utilisée que dans ce cas. \square

Proposition 1.7.3. *Si Δ_i est aplati, alors i est un indice charnière et $w_i = 0$.*

Démonstration. Dans tous les autres cas, la démonstration de la proposition 1.7.2 oblige Δ_{i+1} à être aplati, ce qui déclenche l'effet domino : tous les Δ_j sont aplatis, et le volume vaut 0 — qui n'est certainement pas le maximum. \square

Fait élémentaire 1.7.4. Si ABC est un triangle euclidien d'angles strictement positifs dont les côtés ont pour longueurs a, b, c , alors

$$\begin{aligned} a = b &\iff \widehat{A} = \widehat{B} \iff \sin \widehat{A} = \sin \widehat{B} \\ a < b &\iff \widehat{A} < \widehat{B} \iff \sin \widehat{A} < \sin \widehat{B}. \quad \square \end{aligned}$$

Le volume \mathcal{V} est toujours supposé maximal, et nous supposons que certains tétraèdres Δ_i sont aplatis, c'est-à-dire que certains paramètres charnière w_i sont nuls. Les endroits où un paramètre w_i s'annule seront signalés par une barre verticale : $\dots LL|RR \dots$. Par la proposition 1.7.2, deux barres verticales consécutives sont toujours séparées par au moins deux lettres.

Les motifs $RL|RL$ et $LR|LR$ n'ont jamais lieu, parce qu'il suffirait de porter le w_i incriminé à $\varepsilon > 0$ pour faire augmenter le volume (notons que $w_{i-1} = w_{i+1} =: A$ par la condition de charnière 1.4-iii) :

Ω	L	R	L	R
w_i	u	A	$0 + \varepsilon$	A
x_i	\cdot	$\frac{1}{2}(u + A - \varepsilon)$	$\frac{1}{2}\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\varepsilon + A - v)$
y_i	\cdot	$\frac{1}{2}(-u + A + \varepsilon)$	$\frac{1}{2}\varepsilon$	$\frac{1}{2}(-\varepsilon + A + v)$
z_i	\cdot	$\pi - A$	$\pi - \varepsilon$	$\pi - A$

entraîne

$$\exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(A-u)\sin(A-v)}{\sin(A+u)\sin(A+v)} < 1,$$

où l'on a utilisé le fait élémentaire 1.7.4, la proposition 1.6.1 et la proposition 1.6.8 (avec $\lambda = 0$).

Toute barre verticale est donc adjacente à au moins deux lettres consécutives identiques (d'un côté de la barre au moins). Toutefois, les motifs $R|LL|R$ et $L|RR|L$ ne peuvent pas non plus apparaître, par la proposition 1.7.3, puisque le tétraèdre central (non charnière) aurait alors un angle nul ($a + c = 0$ en utilisant la notation du tableau 1.3).

1.8 Un lemme géométrique

Définition 1.8.1. Dans le revêtement universel de la triangulation \mathcal{A} du tore à l'infini de V_φ (figure 1.4.2), un *éventail* désigne une suite d'au moins trois niveaux consécutifs, tels que le premier et le dernier niveau sont grisés (charnière) et tous les niveaux intermédiaires sont blancs. Les éventails sont en bijection avec les sous-mots de Ω de la forme RL^kR ou LR^kL tels que $k \geq 2$ (voir les remarques au sujet de la figure 1.4.2 à la partie 1.4).

Lemme 1.8.2. *Supposons $w_0 = 0$, de sorte que Ω contient un sous-mot $L|R^kL$ avec $k \geq 2$, ou bien $L|R^k|L$ avec $k \geq 3$ (dans ce dernier cas, la seconde barre verticale indique que w_k s'annule au même*

titre que w_0). L'éventail correspondant admet une structure euclidienne complète à bord (avec les angles prescrits par les w_i). De plus, soient Q, F, G les longueurs des segments de la ligne brisée correspondant à la première lettre R , dans l'ordre indiqué sur la figure 1.8.1 (F, G sont les côtés adjacents à l'apex dans un triangle aplati [charnière] pointant vers le haut, au sens de la figure 1.4.1 page 6). Alors $Q < F + G$.

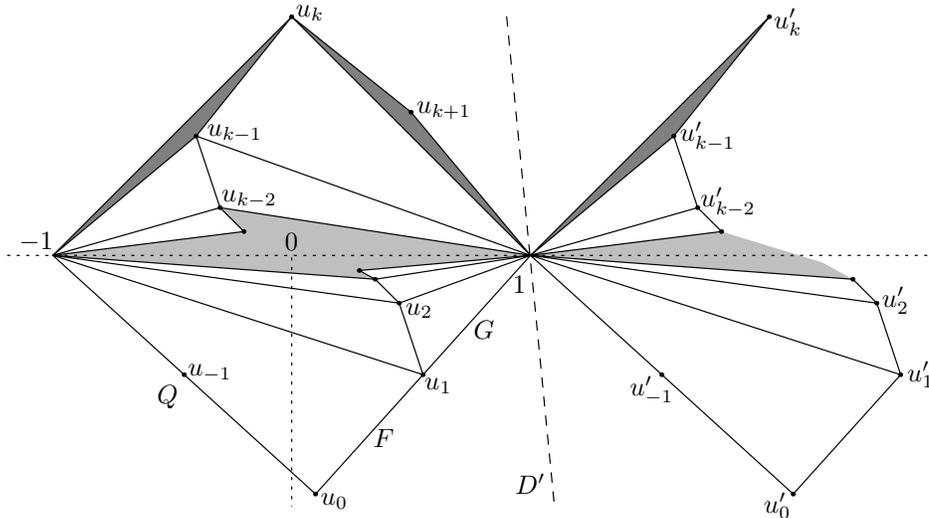


FIG. 1.8.1 – Cette situation, où $Q \geq F + G$, est impossible.

Démonstration. Commençons par restreindre notre attention au cas $L|R^kL$, $k \geq 2$. Les sommets intérieurs de l'éventail (topologique) correspondent aux indices i situés entre deux R , c'est-à-dire $1 \leq i \leq k - 1$, au sens où l'holonomie autour du i -ème sommet u_i (figure 1.8.1) est contrôlée par $\partial\mathcal{V}/\partial w_i$ (sous-lemme 1.6.4). Quand $2 \leq i \leq k - 1$, aucun des triangles adjacents à u_i n'est aplati, donc w_i peut varier dans un petit intervalle sans faire sortir le m -uplet w du domaine \overline{P} ; par conséquent, la valeur de w_i dans cet intervalle est critique, ce qui par le calcul du sous-lemme 1.6.4 entraîne que l'holonomie autour du sommet associé u_i est triviale. Pour $i = 1$, le sommet correspondant u_1 est adjacent à un angle plat $z_0 = \pi$ (figure 1.8.1) donc son holonomie n'est pas imposée par les w_i (quand un triangle possède un angle π , les deux autres angles sont toujours 0 tandis que les côtés adjacents peuvent valoir n'importe quoi). Le cas de $L|R^k|L$ est semblable : aux indices $2 \leq i \leq k - 2$ le sous-lemme 1.6.4 s'applique, tandis qu'en $i = 1$ et en $i = k - 1$ l'holonomie n'est pas imposée par les w_i . (Nous cessons maintenant de distinguer les cas $L|R^kL$ et $L|R^k|L$).

Par conséquent nous pouvons immerger l'éventail dans \mathbb{C} sous forme d'une chaîne infinie de polygones triangulés. Nous plaçons deux nœuds consécutifs aux points -1 et 1 (un nœud est par définition un relevé du sommet de \mathcal{A} de degré $2k + 4$ associé au sous-mot LR^kL). Nous notons encore $u_i \in \mathbb{C}$ l'affixe du relevé de u_i situé entre les nœuds -1 et 1 (l'indice i varie en fait de -1 à $k + 1$; voir la figure 1.8.1). Nous disposons la figure de sorte que $\text{Im}(u_0) < 0$ et u_1 appartienne au segment ouvert $]u_0, 1[$. La condition (1.1-iii) entraîne que l'image du plongement de l'éventail dans \mathbb{C} est invariante par une translation horizontale de longueur 2. En particulier, bien qu'ôter un nœud (comme -1 ou 1) disconnecte l'éventail, le lien géométrique de chaque nœud est complètement déterminé. Pour prouver l'inégalité du lemme, il suffit de montrer que $\text{Re}(u_0) < 0$. Supposons donc $\text{Re}(u_0) \geq 0$.

La propriété de similitude des triangles de sommets $1, u_i, u_{i+1}$ et $-1, u_i, u_{i-1}$ est exprimée par la relation $\frac{u_{i+1}-1}{u_i-1} = \frac{u_{i-1}+1}{u_i+1}$, d'où par récurrence

$$(u_{i+1} - 1)(u_i + 1) = (u_i - 1)(u_{i-1} + 1) = \cdots = (u_1 - 1)(u_0 + 1) =: K.$$

Comme u_1 appartient au segment $]1, u_0[$, le nombre $u_1 - 1$ est un multiple positif (réel) du nombre $u_0 - 1$, donc K est un multiple positif de $u_0^2 - 1$, ce qui entraîne $\text{Im}(K) \leq 0$. Soit D la droite passant par 0 et par les points $\pm\sqrt{K}$: ou bien D est verticale, ou bien D visite les quadrants supérieur gauche et inférieur droit (ouverts). Soit D' la parallèle à D passant par 1, et définissons $u'_i := 2 + u_i$ pour tout i . Par définition de K , les demi-droites $[1, u_{i+1})$ et $[1, u'_i)$ sont symétriques par rapport à D' . De plus, les demi-droites passant par $u_0, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, u'_k, u'_{k-1}, \dots, u'_0, u'_{-1}, u_0$ et issues de 1 (dans cet ordre cyclique) subdivisent \mathbb{C} en des secteurs angulaires de somme 2π qui réalisent le lien géométrique d'un nœud de l'éventail, tel qu'il est spécifié par les angles $x_i, y_i, z_i \geq 0$. Enfin, comme tous ces angles sont positifs ou nuls, la symétrie axiale du lien par rapport à D' entraîne que pour tout $-1 \leq i \leq k$, le point u'_i (resp. u_{i+1}) est à droite (resp. à gauche) de D' .

Rappelons que $\text{Im}(u_0) < 0$. Supposons $\text{Im}(u_i) < 0$ pour quelque $0 \leq i \leq k$. Alors $\text{Im}(u'_i) < 0$. Vu la direction de D' et la symétrie par rapport à D' , cela entraîne $\text{Im}(u_{i+1}) < 0$. Par récurrence immédiate, le secteur angulaire $\widehat{u_{k+1}1u'_k}$ (juste au dessus de 1) est plus grand que π . Mais c'est un angle du lien du nœud 1 (à savoir, z_{k+1}). Absurde. \square

Bien entendu, un énoncé semblable au lemme 1.8.2 est valable pour les sous-mots de la forme $LR^k|L$, et aussi pour $R|L^kR$, $R|L^k|R$, $RL^k|R$.

1.9 Il n'y a pas de dégénérescences

Proposition 1.9.1. *Les angles des tétraèdres Δ_i sont tous strictement positifs.*

Fait élémentaire 1.9.2. Si U et V sont des constantes strictement positives, la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f(\lambda) := \frac{1-\lambda^2}{4} U \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} V \right)^\lambda$ prend quelque part la valeur $\frac{U}{(1+V)(1+V^{-1})}$. C'est en fait le minimum absolu : en effet, $(\log f)'(\lambda) = \log \left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda} V \right]$, donc f est minimale quand le crochet vaut 1, d'où le résultat par un calcul direct. \square

Nous sommes enfin en mesure de montrer que la configuration $\dots RR|L \dots$ (et de même $\dots LL|R \dots$) n'a jamais lieu, ce qui entraînera la proposition 1.9.1 le théorème 1.1.1. La stratégie consiste à supposer que $RR|L$ se produit, c'est-à-dire que $w_j = 0$ pour un certain j (pour plus de confort nous supposons $j = 2$). Puis, on remplace w_2 par ε et w_1 par $w_1 + \lambda\varepsilon$, pour un λ judicieusement choisi. Alors le volume \mathcal{V} augmente. (La valeur de λ , qu'il est inutile de calculer explicitement, maximisera $\partial\mathcal{V}/\partial\varepsilon$, et $e^{-2\partial\mathcal{V}/\partial\varepsilon}$ sera la valeur de f mentionnée au fait élémentaire 1.9.2. Nous précisons en temps utile ce que sont les paramètres U, V). Les calculs de volume découlent de la proposition 1.6.8 (en l'indice $i = 2$) et de la proposition 1.6.1 (autres indices).

1.9.1 Cas 1 : $RR|LR$

D'après le tableau (1.3), les angles sont comme suit (pour gagner un peu de place, nous tabulons $2x_i, 2y_i, 2z_i$ au lieu de x_i, y_i, z_i). Noter la relation $w_1 = w_3 =: A$, une conséquence de la relation de charnière (1.4-iii).

Ω	R		R	L	R
i	0	1	2	3	4
w_i	u	$A + \lambda\varepsilon$	$0 + \varepsilon$	A	v
$2x_i$	$\xi - A - \lambda\varepsilon$	$-u + 2A + 2\lambda\varepsilon - \varepsilon$	$(1 - \lambda)\varepsilon$	$\varepsilon + A - v$.
$2y_i$	$\eta + A + \lambda\varepsilon$	$u + \varepsilon$	$(1 + \lambda)\varepsilon$	$-\varepsilon + A + v$.
$2z_i$	$2\pi - 2u$	$2\pi - 2A - 2\lambda\varepsilon$	$2\pi - 2\varepsilon$	$2\pi - 2A$.

On a $u = w_0 > 0$ parce que $L|RR|LR$ est exclu (par la discussion qui suit le fait élémentaire 1.7.4). Donc Δ_0 n'est pas aplati : si $-1 < \lambda < 1$, alors ε peut prendre de petites valeurs positives sans rendre négatif aucun des x_i, y_i, z_i . Avec le bon choix de λ , on en déduit

$$\begin{aligned} \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1 - \lambda^2}{4} \underbrace{\frac{\sin(A - v)}{\sin(A + v)}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{\sin y_1}{\sin x_1}}_{Q/F} \left(\frac{1 + \lambda \underbrace{\sin y_0 \sin^2 x_1}_{F/G=:V}}{1 - \lambda \underbrace{\sin x_0 \sin^2 z_1}_{F/G=:V}} \right)^\lambda \\ &\leq \frac{Q/F}{(1 + F/G)(1 + G/F)} = \frac{1}{1 + F/G} \frac{Q}{F + G} < 1 \end{aligned}$$

par le lemme 1.8.2 (voir la figure 1.9.1, à gauche — à nouveau, la relation de proportionnalité entre les côtés et les sinus dans un triangle euclidien a été mise à profit pour calculer Q/F et F/G). Si Ω est réduit à $RR|L$, les colonnes 0 et 3 du tableau ci-dessus coïncident, mais les termes perturbatifs en ε s'additionnent et le calcul est le même.

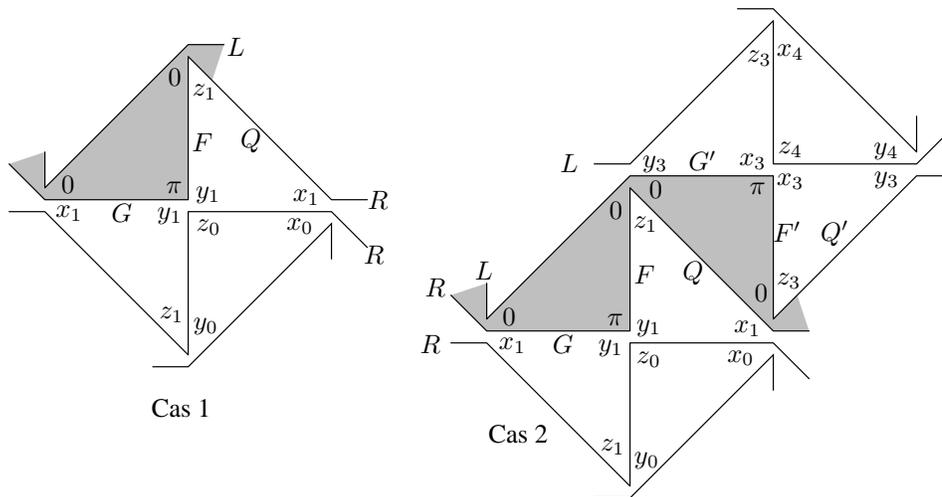


FIG. 1.9.1 – Le calcul final. On a dessiné et légendé la triangulation de pointe près d'une charnière.

1.9.2 Cas 2 : $RR|LL$

Les angles sont comme suit.

Ω	R		R	$ $	L	L	
i	0	1			2	3	4
w_i	u	$A + \lambda\varepsilon$			$0 + \varepsilon$	A	v
$2x_i$	$\xi - A - \lambda\varepsilon$	$-u + 2A + 2\lambda\varepsilon - \varepsilon$			$(1 - \lambda)\varepsilon$	$\varepsilon + v$	$A + \xi'$
$2y_i$	$\eta + A + \lambda\varepsilon$	$u + \varepsilon$			$(1 + \lambda)\varepsilon$	$-\varepsilon + 2A - v$	$-A + \eta'$
$2z_i$	$2\pi - 2u$	$2\pi - 2A - 2\lambda\varepsilon$			$2\pi - 2\varepsilon$	$2\pi - 2A$	$2\pi - 2v$

Considérons d'abord la valeur de A . Comme il n'y a pas de barre verticale juste avant ni juste après $RR|LL$ (en effet $RR|LL|R$ est impossible par la discussion qui suit le fait élémentaire 1.7.4), les tétraèdres $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_3, \Delta_4$ n'ont que des angles strictement positifs. Donc le paramètre A , qui n'a d'influence sur les angles d'aucun autre tétraèdre, peut varier librement dans un petit intervalle quand $\varepsilon = 0$. Donc A est critique :

$$1 = \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial A} \Big|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\frac{\sin y_0 \sin^2 x_1}{\sin x_0 \sin^2 z_1}}_{F/G} \underbrace{\frac{\sin^2 y_3 \sin x_4}{\sin^2 z_3 \sin y_4}}_{F'/G'}$$

d'où $F/G = G'/F'$. Par conséquent, avec le bon choix de λ ,

$$\begin{aligned} \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1 - \lambda^2}{4} \frac{\overbrace{\frac{\sin y_1}{\sin x_1} \frac{\sin x_3}{\sin y_3}}^U}{\underbrace{Q/F} \quad \underbrace{Q'/F'}} \left(\frac{1 + \lambda \frac{\sin y_0 \sin^2 x_1}{\sin x_0 \sin^2 z_1}}{1 - \lambda \frac{\sin y_0 \sin^2 x_1}{\sin x_0 \sin^2 z_1}} \right)^\lambda \\ &= \frac{Q/F \cdot Q'/F'}{(1 + G/F)(1 + G'/F')} = \frac{Q}{F + G} \frac{Q'}{F' + G'} < 1 \end{aligned}$$

par le lemme 1.8.2 (figure 1.9.1, à droite). Si Ω est réduit à $RR|LL$, les colonnes 0 et 4 du tableau ci-dessus coïncident, mais les termes perturbatifs s'additionnent et le calcul est le même.

Deux remarques pour conclure. Premièrement, quitte à remplacer la monodromie φ par φ^2 (ce qui double la période m de Ω), on peut toujours supposer que Ω possède au moins 6 lettres : ainsi, toutes les colonnes des tableaux ci-dessus sont bien distinctes, et pour retrouver la variété d'origine V_φ on se contente de quotienter par la symétrie additionnelle (que le maximum volumique $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ doit respecter, par concavité de la fonctionnelle volume \mathcal{V}). Que l'on compare cela à la remarque qui clôt la partie 1.5. Deuxièmement, le choix de $\lambda \in] -1, 1[$, qui peut sembler "magique" à première vue, est essentiellement notre seul degré de liberté dans les parties 1.9.1–1.9.2 : le volume est déjà critique par rapport à la plupart des paramètres (y compris A , la valeur commune de w_1 et w_3) ; par conséquent, seules les déformations sur w_1, w_2, w_3 sont susceptibles de changer le volume au premier ordre, et si

l'on suppose $\frac{\partial w_2}{\partial \varepsilon} = 1$, alors seule compte la valeur de la différence $\frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial w_3}{\partial \varepsilon} \in]-1, 1[$.

Le théorème 1.1.1 est démontré.

1.10 Exemple numérique : $R^N L^M$

Dans cette partie nous fixons deux entiers suffisamment grands N et M et étudions comment se comportent les angles pour $\Omega = R^N L^M$: aux indices charnière, les angles qui par les calculs précédents doivent être positifs s'avèreront très petits. Nous allons directement construire une réalisation euclidienne de la figure 1.4.2, automatiquement unique à similitude près. Comme N et M sont grands, il existe de petits nombres complexes a, a', b, b' tels que

$$\begin{cases} \sin a &= i \tan b \cos b' \\ \sin a' &= -i \tan b' \cos b \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} b &= (\pi - 2a)/N \\ b' &= (\pi - 2a')/M. \end{cases} \quad (1.7)$$

Une façon de calculer a, a' consiste à poser $a_0 = a'_0 = 0$ et à définir par récurrence $a_{s+1} = \arcsin(i \tan \frac{\pi - 2a_s}{N} \cos \frac{\pi - 2a'_s}{M})$, et une expression analogue (au signe près) pour a'_{s+1} . Les suites a_s, a'_s convergent à une vitesse exponentielle vers a, a' . Les constantes a, a' deviennent arbitrairement petites quand N, M sont assez grands, d'où $b \sim \pi/N$, $b' \sim \pi/M$ et, par insertion dans (1.7), $a \sim i\pi/N$, $a' \sim -i\pi/M$. En utilisant le symbole de Landau $O(A, B)$ au sens de $O(\max\{A, B\})$, cela entraîne

$$\begin{aligned} b &= \frac{\pi}{N} - \frac{2i\pi}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}, \frac{1}{M^3}\right) & a &= \frac{i\pi}{N} + \frac{2\pi}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}, \frac{1}{M^3}\right) \\ b' &= \frac{\pi}{M} + \frac{2i\pi}{M^2} + O\left(\frac{1}{N^3}, \frac{1}{M^3}\right) & a' &= \frac{-i\pi}{M} + \frac{2\pi}{M^2} + O\left(\frac{1}{N^3}, \frac{1}{M^3}\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

(En fait a, a', b, b' sont des fonctions analytiques de $\frac{1}{N}, \frac{1}{M}$, par le théorème des fonctions implicites).

Proposition 1.10.1. *L'éventail associé à R^N peut être plongé dans \mathbb{C} avec pour nœuds les points d'affixes $\pm \cot b$ et pour sommets intermédiaires les points $\cot(a + sb)$ où $-1 \leq s \leq N + 1$; de même, l'éventail associé à L^M se plonge dans \mathbb{C} avec pour nœuds $\pm \cot b'$ et pour sommets intermédiaires $\cot(a' + sb')$ où $-1 \leq s \leq M + 1$ (voir la figure 1.10.1).*

Démonstration. Il y a plusieurs choses à vérifier. D'abord, la similitude des paires de triangles au sein de chaque éventail découle de l'égalité de rapports complexes suivante :

$$\frac{\cot(A_s + b) - \cot b}{\cot(A_s + b) - \cot A_s} = \frac{\cot(A_s - b) + \cot b}{\cot(A_s - b) - \cot A_s} = \frac{\sin^2 A_s}{\sin^2 b} \quad (1.9)$$

où $A_s = a + sb$ pour tout $0 \leq s \leq N$, et une relation semblable concernant a', b' .

Ensuite, si l'on supprime deux des quatre triangles liminaires (gris), chaque éventail devient un parallélogramme. Cela découle de $\cot(a + Nb) = \cot(\pi - a) = -\cot a$, et de même pour a' . En particulier, chaque éventail admet un centre de symétrie.

De plus, ces deux parallélogrammes sont superposables. Pour le voir, notons $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ les cotan-

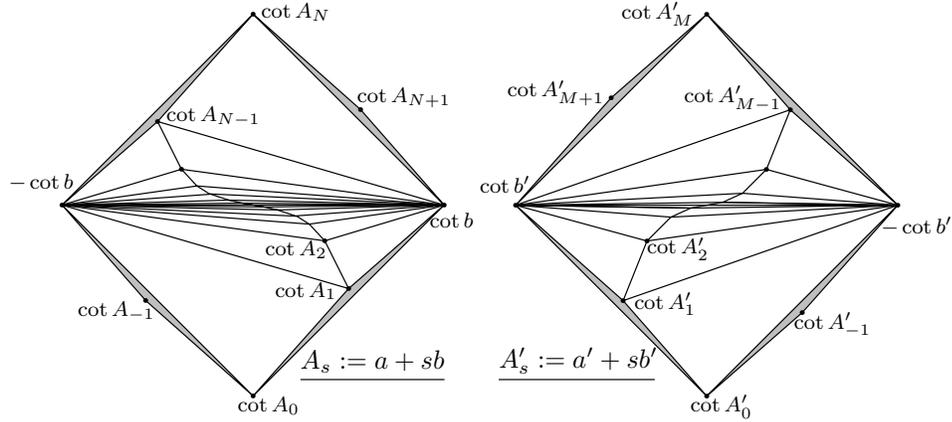


FIG. 1.10.1 – Deux éventails métriques.

gentes carrées de a, a', b, b' . En élevant (1.7) à la puissance -2 , on obtient

$$\begin{cases} 1 + \alpha &= -\beta(1 + \beta'^{-1}) \\ 1 + \alpha' &= -\beta'(1 + \beta^{-1}) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta + \beta/\beta' + 1}{\beta' + \beta'/\beta + 1} = \frac{\beta}{\beta'}$$

ce qui entraîne $\frac{\cot a}{\cot b} = \pm \frac{\cot a'}{\cot b'}$, le signe approprié étant un “moins” en vertu de l’estimation (1.8).

Mieux, les triangles liminaires (gris) sont semblables d’un éventail à l’autre : par (1.9) leurs paramètres complexes sont $\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}$ et $\frac{\sin^2 b'}{\sin^2 a'}$, tous deux égaux par (1.7) à $-\frac{\cos^2 b'}{\cos^2 b}$.

Enfin, tous les triangles sont correctement orientés, c’est-à-dire $\text{Im}\left(\frac{\sin^2 A_s}{\sin^2 b}\right) > 0$ pour tout $0 \leq s \leq N$. On vérifie d’abord cela en $s = 0$ (le cas $s = N$ en découlera par symétrie) : on a $\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = -\frac{\cos^2 b'}{\cos^2 b} = -\frac{1 - \sin^2 b'}{1 - \sin^2 b}$. Dans cette dernière expression, le numérateur et le dénominateur sont tous deux ~ 1 , mais leurs parties imaginaires sont de l’ordre de $-4\pi^2/M^3$ et $4\pi^2/N^3$ respectivement, par (1.8). Donc le paramètre complexe du triangle grisé (figure 1.10.1) appartient bien au demi-plan supérieur, et les deux petits angles de ce triangle sont de l’ordre de

$$2\pi^2(N^{-3} + M^{-3})$$

radians. Petits, mais pas aplatis !

Pour vérifier que $\arg\left(\frac{\sin A_s}{\sin b}\right)$ appartient à $(0, \pi/2)$ pour tous les autres $0 \leq s \leq N$, traçons les courbes de niveau de $z \mapsto \arg(\sin z)$ dans \mathbb{C} . C’est la figure 1.10.2, pour $0 \leq \text{Re}(z) \leq \pi$: les courbes appartiennent à quatre familles symétriques (“quadrants” qui se rencontrent en $\pi/2 \in \mathbb{C}$), et on vérifie aisément que les deux familles au dessus (resp. au dessous) de l’axe réel sont constituées de courbes convexes (resp. concaves). La région permise aux $A_s = a + sb$ est en gris (avec un étroit goulet près de $\pi/2$) ; les régions interdites sont laissées en blanc. Le segment $[A_0 A_N]$ reste clairement dans la région grise, ce qui entraîne le résultat.

Par un argument semblable, les triangles de l’éventail associé à L^M sont correctement orientés eux aussi. Par conséquent on peut paver le plan euclidien avec des parallélogrammes (ou éventails) semblables à ceux de la figure 1.10.1 afin d’obtenir une réalisation euclidienne de la figure 1.4.2. \square

Pour conclure, notons que le groupe kleinien associé au plongement de l’éventail de gauche de la

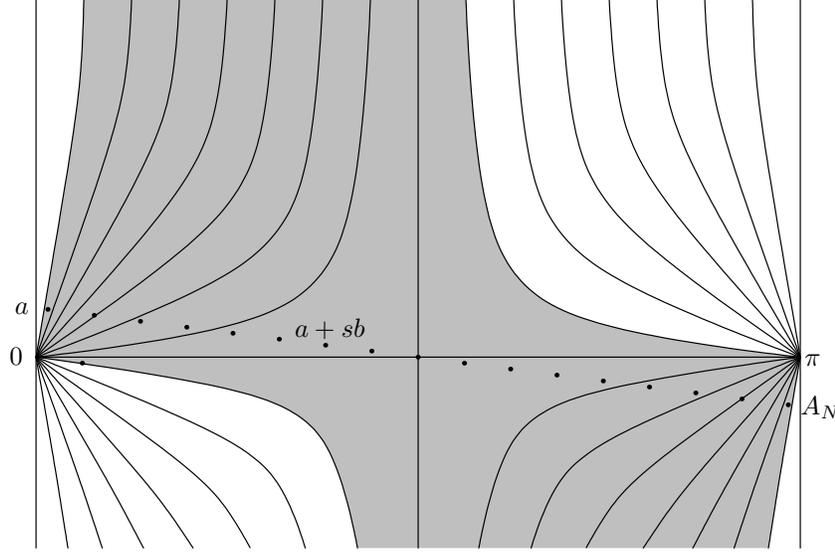


FIG. 1.10.2 – Courbes de niveau de $z \mapsto \arg(\sin z)$.

figure 1.10.1 contient la transformation de Möbius $z \mapsto \frac{z \cos b - \sin b}{z \sin b + \cos b}$ (celle-ci envoie chaque tétraèdre habitant au dessus d'un triangle de la moitié gauche de l'éventail sur un tétraèdre habitant au dessus du triangle semblable situé dans la moitié droite). Par conséquent, $2ib$ (et de même $-2ib'$) est la longueur complexe d'une très courte géodésique fermée de la variété hyperbolique V_φ .

1.11 Canonicité géométrique

Rappelons brièvement la correspondance entre les horoboules de \mathbb{H}^3 et les vecteurs du cône isotrope (ou cône lumière) de l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} . Munissons \mathbb{R}^4 du produit lorentzien $\langle (x, y, z, t) | (x', y', z', t') \rangle := xx' + yy' + zz' - tt'$. Définissons

$$X := \{ v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t > 0 \text{ et } \langle v | v \rangle = -1 \}.$$

Alors $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit une métrique riemannienne sur X ; il y a une isométrie $X \simeq \mathbb{H}^3$, et $\text{Isom}^+(X)$ est une composante de $SO_{3,1}(\mathbb{R})$. Cette isométrie $X \simeq \mathbb{H}^3$ envoie tout plan hyperbolique de \mathbb{H}^3 sur l'intersection de X avec un hyperplan (linéaire). Nous identifions le point (x, y, z, t) de X avec le point situé à hauteur euclidienne $\frac{1}{t+z}$ au dessus du nombre complexe $\frac{x+iy}{t+z}$ dans le modèle du demi-espace de Poincaré. Avec cette convention, l'horoboule fermée $H_{d,\zeta}$ de diamètre euclidien d centrée en $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ dans le modèle demi-espace est identifiée à l'ensemble $\{ v \in X \mid \langle v | v_{d,\zeta} \rangle \geq -1 \}$, où $v_{d,\zeta} = \frac{1}{d}(2\xi, 2\eta, 1 - |\zeta|^2, 1 + |\zeta|^2)$. Nous identifions donc $H_{d,\zeta}$ et le point $v_{d,\zeta}$ du cône lumière. De même, l'horoboule fermée $H_{h,\infty}$ formée des points à hauteur euclidienne h ou plus dans le modèle demi-espace correspond à $\{ v \in X \mid \langle v | v_{h,\infty} \rangle \geq -1 \}$ où $v_{h,\infty} = (0, 0, -h, h)$, donc nous identifions $H_{h,\infty}$ et $v_{h,\infty}$.

Considérons les objets suivants : une variété hyperbolique complète V de dimension 3, à une pointe, de volume fini ; un voisinage horoboulque H de la pointe ; un revêtement universel $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow V$, et le groupe $\Gamma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ des transformations π -équivariantes. Alors H se relève à une famille d'horoboules $(H_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans \mathbb{H}^3 , correspondant à une famille de vecteurs lumière $(v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans l'espace

de Minkowski. L'enveloppe convexe (fermée, linéaire) C de $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est Γ -invariante, et son bord ∂C est muni d'une décomposition naturelle \tilde{D} en *facettes* polyédrales. Epstein et Penner ont montré [EP] que \tilde{D} définit une décomposition \mathcal{D}^{Geom} de V , indépendante de H , en polyèdres hyperboliques idéaux convexes.

Théorème 1.11.1 (Akiyoshi, Lackenby). *Supposons que $V = V_\varphi$ est un tore d'application sur le tore percé. Alors la décomposition \mathcal{D}^{Geom} de V est, combinatoirement, la triangulation $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ définie à la partie 1.3.*

Démonstration. (Il s'agit d'une reformulation du théorème 1.1.2). La preuve d'Akiyoshi consiste à marier l'analyse des groupes quasifuchsien du tore percé par Jørgensen [Jø, ASWY3], et les résultats de Minsky concernant les bouts infinis [Min], deux théories difficiles. La preuve de Lackenby [L2] est topologique : il montre par la théorie des surfaces normales que parmi une certaine classe de triangulations, seule la triangulation de la partie 3.2 est invariante pour l'involution hyper-elliptique (propriété dont \mathcal{D}^{Geom} jouit automatiquement si l'on admet que V_φ est bien hyperbolique). La démonstration proposée ici, qui ne fait pas usage du théorème d'hyperbolisation de Thurston, est purement métrique.

Le revêtement universel $\pi : \tilde{V} \simeq \mathbb{H}^3 \rightarrow V$ détermine une triangulation idéale de \tilde{V} . Étant donné un voisinage horoboulouque H de la pointe de V , considérons ses relevés $(H_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans \mathbb{H}^3 et les vecteurs lumière associés $(v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} . Alors chaque tétraèdre Δ de \tilde{V} a ses sommets aux centres de quatre horoboules H_1, \dots, H_4 : considérons l'enveloppe convexe τ_Δ de v_1, \dots, v_4 , et définissons $D := \bigcup_\Delta \tau_\Delta \subset \mathbb{R}^{3+1}$. La projection centrale vers l'hyperboloïde X par rapport à l'origine envoie τ_Δ homéomorphiquement sur le relevé de Δ à X , de sorte que les intérieurs des τ_Δ sont deux à deux disjoints. De plus, chaque τ_Δ est naturellement muni d'une orientation transverse \vec{u} (dont on dira qu'elle pointe "vers le haut"), donnée par n'importe quel vecteur allant de l'origine à un point de τ_Δ . Le théorème affirme exactement que $D \subset \partial C$ en tant que complexes polyédraux (l'inclusion se doit d'être stricte, car ∂C contient par exemple tous les tv_i pour $t \geq 1$: ces effets pervers sont analysés en détail dans [AS], y compris dans le cas de variétés de volume infini).

Supposons que le complexe $D \subset \mathbb{R}^4$ de codimension 1 est localement convexe, avec \vec{u} pointant endedans et des angles dièdres non nuls aux jonctions $\tau_\Delta \cap \tau_{\Delta'}$. Montrons qu'alors, on a bien $D \subset \partial C$. Pour toute partie Y d'un espace vectoriel réel, posons $IY := \{ty \mid t \geq 1, y \in Y\}$. Alors ID est un ensemble convexe (pour tous points $x, y \in ID$ non colinéaires, le quadrant bidimensionnel $P = \mathbb{R}^+x + \mathbb{R}^+y$ rencontre l'hyperboloïde X le long d'un segment hyperbolique du revêtement universel [convexe !] \tilde{V} de V , et $P \cap ID$ est convexe par locale convexité de D : donc le segment $[x, y]$ est dans ID). De plus, ID contient tous les vecteurs lumière $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, donc son adhérence \overline{ID} contient leur enveloppe convexe C . Réciproquement, D est bien sûr contenu dans C et on vérifie aisément que $IC \subset C$ (parce que $I\{v_i\} \subset C$ pour tout i , voir [AS]). Donc $ID \subset C$ et, par fermeture, $\overline{ID} = C$. On a clairement $D \subset \partial \overline{ID}$ car deux points de D ne sont jamais colinéaires. Dès lors $D \subset \partial C$ en tant qu'ensembles, et donc en tant que complexes polyédraux puisque les angles dièdres de D sont non nuls. Il nous suffit donc de montrer

Lemme 1.11.2. *Le complexe simplicial $D \subset \mathbb{R}^4$ de codimension 1 est localement convexe (\vec{u} pointant en dedans), et ses angles dièdres sont non nuls.*

Démonstration — Considérons deux tétraèdres idéaux adjacents Δ, Δ' dans $\mathbb{H}^3 \simeq \tilde{V}$, relevés de deux tétraèdres Δ_{i-1}, Δ_i de la variété V . Il s'agit de montrer que l'angle dièdre dans \mathbb{R}^4 entre τ_Δ et $\tau_{\Delta'}$ pointe vers le bas. Nous pouvons supposer que la lettre entre $i-1$ et i est un L appartenant à une

syllabe RL^nR du mot Ω . Dans le revêtement universel du lien de la pointe, la surface plissée T_i entre Δ_{i-1} et Δ_i admet pour lien une ligne brisée Z de \mathbb{C} qui comprend $(-1, \zeta, \zeta', 1)$ et se trouve invariante par les translations $u \mapsto u \pm 2$, comme dans la figure 1.11.1 (nous supposons que les sommets -1 et 1 appartiennent tous deux aux segments de base des triangles euclidiens situés juste au dessus et juste au dessous de la ligne brisée Z , au sens de la figure 1.4.1). Baptisons comme suit les affixes des segments orientés de Z :

$$\begin{aligned}\zeta + 1 &= \vec{a} = a e^{\sqrt{-1}A} \\ \zeta' - \zeta &= \vec{b} = b e^{\sqrt{-1}B} \\ 1 - \zeta' &= \vec{c} = c e^{\sqrt{-1}C}\end{aligned}$$

(pour le moment A, B, C ne sont définis que modulo 2π). À la verticale de la ligne brisée Z dans le demi-espace de Poincaré se trouve un relevé de la surface T_i , qui contient notamment les triangles idéaux $(-1, \zeta, \infty)$ et (ζ, ∞, ζ') ainsi que $(\infty, \zeta', 1)$, et qui admet comme transformation équivariante

$$f : u \mapsto 1 + \frac{(\zeta + 1)(\zeta' - 1)}{u + 1},$$

parce que f envoie le premier de ces trois triangles idéaux sur le dernier (en respectant l'ordre des sommets). Par conséquent, $f(H_{1,\infty}) = H_{|\zeta+1||\zeta'-1|,1} = H_{ac,1}$. Notons que a et c sont les longueurs des segments de Z adjacents au sommet 1 . De même, les horoboules suivantes appartiennent toutes à la même orbite pour l'action du groupe $\Gamma = \pi_1(T)$:

$$H_{1,\infty} ; H_{ac,-1} ; H_{ab,\zeta} ; H_{bc,\zeta'} ; H_{ac,1}.$$

Si $\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1}$ et $\zeta' = \xi' + \eta'\sqrt{-1}$, les vecteurs lumière correspondants dans l'espace de Minkowski sont respectivement

$$\begin{aligned}v_\infty &= (0, 0, -1, 1) \\ v_{-1} &= \frac{1}{ac} (-2, 0, 0, 2) \\ v_\zeta &= \frac{1}{ab} (2\xi, 2\eta, 1 - |\zeta|^2, 1 + |\zeta|^2) \\ v_{\zeta'} &= \frac{1}{bc} (2\xi', 2\eta', 1 - |\zeta'|^2, 1 + |\zeta'|^2) \\ v_1 &= \frac{1}{ac} (2, 0, 0, 2).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Notons que l'hyperplan vectoriel passant par $v_\zeta, v_{\zeta'}, v_\infty$ sépare v_1 de v_{-1} , parce que le plan hyperbolique passant par les points idéaux $\zeta, \zeta', \infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ sépare les points idéaux 1 et -1 . De plus, les parties imaginaires η, η' de ζ, ζ' satisfont $\eta > \eta'$ parce que les triangles euclidiens $-1\zeta'\zeta$ et $1\zeta\zeta'$ sont orientés dans le sens direct.

À la face $v_\zeta v_{\zeta'} v_\infty$ (de codimension 2 dans \mathbb{R}^{3+1}), pour montrer que l'angle dièdre dans \mathbb{R}^{3+1} est convexe, il suffit de montrer que si $Pv_\zeta + Qv_{\zeta'} + Rv_\infty = \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_{-1}$ (pour quelque $0 < \lambda < 1$) alors $P + Q + R > 1$ (de plus, un tel résultat suffira à traiter toutes les faces de codimension 2 du complexe simplicial D). On trouve aisément l'unique solution

$$P = \frac{-b\eta'}{c(\eta - \eta')} ; Q = \frac{b\eta}{a(\eta - \eta')} ; R = \frac{\eta(1 - |\zeta'|^2) - \eta'(1 - |\zeta|^2)}{ac(\eta - \eta')}$$

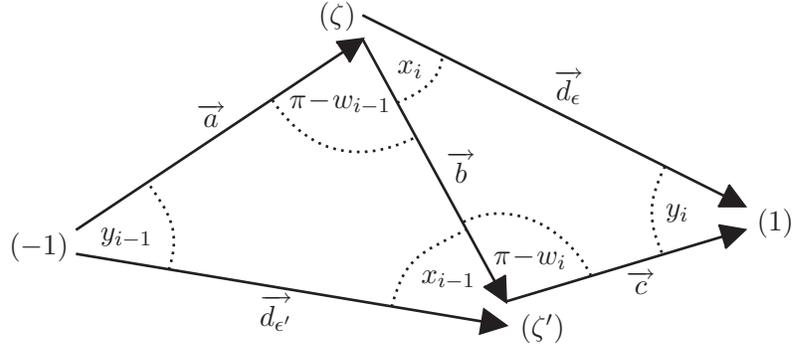


FIG. 1.11.1 – Tétraèdres adjacents Δ_{i-1}, Δ_i (vus depuis la pointe).

d'où

$$P + Q + R = 1 + \frac{X}{ac(\eta - \eta')} \quad \text{où } X = bc\eta - ab\eta' + \eta(1 - |\zeta|^2) - \eta'(1 - |\zeta'|^2) + ac(\eta' - \eta).$$

Il suffit maintenant de montrer que $X > 0$. Munissons $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel “ \bullet ” et observons que $1 - |\zeta|^2 = \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c})$ et $1 - |\zeta'|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c}$. On en déduit

$$\begin{aligned} X &= \eta(bc + \vec{b} \bullet \vec{c}) - \eta'(ab + \vec{a} \bullet \vec{b}) + (\eta' - \eta)(ac - \vec{a} \bullet \vec{c}) \\ &= abc \left[\frac{\eta}{a}(1 + \cos(B - C)) - \frac{\eta'}{c}(1 + \cos(A - B)) + \frac{\eta' - \eta}{b}(1 - \cos(A - C)) \right] \\ &= abc[\sin A(1 + \cos(B - C)) + \sin C(1 + \cos(A - B)) + \sin B(1 - \cos(A - C))] \\ &= 4abc \sin \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - B}{2} \cos \frac{B - C}{2}. \end{aligned}$$

par les formules trigonométriques usuelles. Cette dernière expression est une fonction bien définie de $A, B, C \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (bien que chaque facteur ne soit défini qu'au signe près). Néanmoins, nous allons commencer par soigneusement choisir des représentants de A, B, C dans \mathbb{R} .

Observation 1.11.3. Il existe un unique triplet de représentants $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{A, B, C\} \subset J$ où J est un intervalle ouvert de longueur inférieure à π et contenant 0. (En effet, la ligne brisée Z n'a pas d'auto-intersection, et cette propriété équivaut à l'existence d'un demi-plan ouvert H contenant les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: l'observation en découle puisque $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2$ appartient à H).

Nous choisissons les représentants $A, B, C \in \mathbb{R}$ donnés par l'observation 1.11.3, et répétons un choix analogue pour la ligne brisée Z_i correspondant à chaque surface $T_i = \Delta_i \cap \Delta_{i-1}$, où i décrit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (chaque Z_i , incluse dans une bande horizontale infinie, peut être naturellement orientée de $-\infty$ à $+\infty$, de sorte que chaque arête ϵ du lien de la pointe reçoit une orientation, comme dans la figure 1.11.1 : nous notons $\vec{d}_\epsilon = d_\epsilon e^{\sqrt{-1}D_\epsilon}$ l'affixe de cette arête ϵ). Par l'observation 1.11.3, tous les arguments complexes D_ϵ sont dans $] -\pi, \pi[$. Mais comme $0 \leq w \leq \pi$, l'existence de l'intervalle J implique aussi (en utilisant les notations de la figure 1.11.1) :

$$A = B + w_{i-1} \quad \text{et} \quad C = B + w_i$$

d'où $B = \inf J$ et $B \in] - \pi, 0[$. On en déduit que $B + x_i \in] - \pi, \pi[$, d'où (en notant $\epsilon = [\zeta, 1]$ et $\epsilon' = [-1, \zeta']$ comme dans la figure 1.11.1) :

$$D_\epsilon = B + x_i \quad \text{et de même} \quad D_{\epsilon'} = B + x_{i-1}.$$

En d'autres termes (par transitivité, et par le tableau 1.3), pour n'importe quelle paire d'arêtes ϵ_1, ϵ_2 du lien de la pointe, la différence d'arguments $D_{\epsilon_1} - D_{\epsilon_2} \in \mathbb{R}$ peut être lue "naïvement" comme une combinaison linéaire des $\{w_i\}_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$, sans ajouter aucun multiple de 2π .

À présent que tous les arguments sont fixés dans l'intervalle réel $] - \pi, \pi[$, nous pouvons écrire $\cos \frac{A-B}{2} = \cos(w_{i-1}/2) > 0$ et $\cos \frac{B-C}{2} = \cos(w_i/2) > 0$. Pour montrer que $X > 0$ il reste à voir que $0 < A + C < 2\pi$. Cette inégalité est une variante du lemme 1.8.2, que nous nous attachons à prouver maintenant (elle implique une observation empirique de Jørgensen qui devint la conjecture 8.6 de [ASWY2]).

Proposition 1.11.4. *Avec les notations précédentes, on a : $0 < A + C < 2\pi$.*

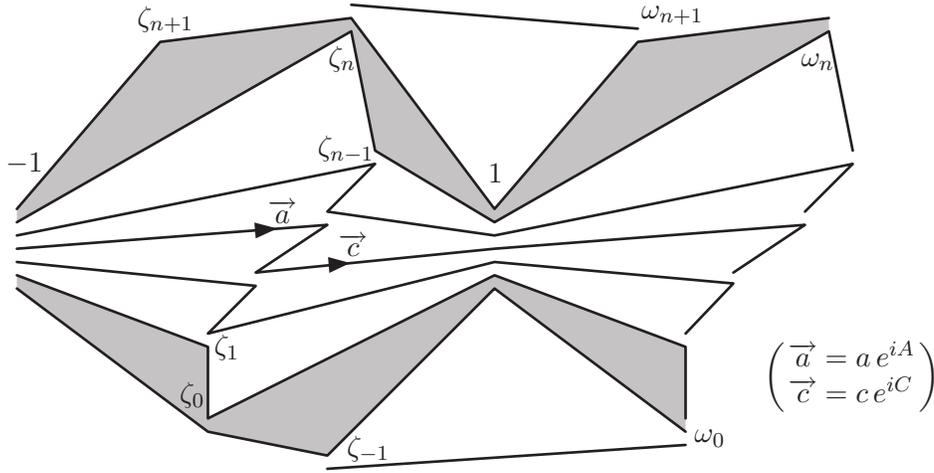


FIG. 1.11.2 – Vue de la pointe : une syllabe $RL^n R$, bordée par deux indices charnière 0 et n (en gris).

Considérons la syllabe complète $RL^n R$, telle que la ligne brisée $(-1, \zeta, \zeta', 1)$ corresponde à l'un des L . Il existe une suite de points $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ dans \mathbb{C} telle que la ligne brisée correspondant à la j -ème lettre L est $(-1, \zeta_j, \zeta_{j-1}, 1)$, et ce pour chaque $1 \leq j \leq n$. La ligne brisée correspondant au R initial (resp. final) est $(-1, \zeta_0, \zeta_{-1}, 1)$ pour un certain ζ_{-1} (resp. $(-1, \zeta_{n+1}, \zeta_n, 1)$ pour un certain ζ_{n+1}). Il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $(\zeta, \zeta') = (\zeta_k, \zeta_{k-1})$.

Posons $\omega_j := \zeta_j + 2$ pour tout j . Par construction, les demi-droites issues de 1 passant par $\zeta_{-1}, \zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n, \omega_{n+1}, \omega_n, \dots, \omega_1, \omega_0, \zeta_{-1}$ (dans cet ordre cyclique rétrograde) partagent \mathbb{C} en secteurs angulaires de mesure strictement inférieure à π et de somme 2π (ces $2n + 4$ demi-droites réalisent le lien du sommet 1 dans la triangulation de la pointe, voir la figure 1.11.2). En comparant les angles auprès de 1 et de -1 , et en désignant chaque segment ϵ du lien de la pointe par ses extrémités (et son argument complexe par D_ϵ), on voit de suite que $D_{-1\zeta_{k+1}} - D_{-1\zeta_k} = D_{\zeta_{k-1}1} - D_{\zeta_k1}$. Par conséquent,

$$A + C = D_{-1\zeta_k} + D_{\zeta_{k-1}1} = D_{-1\zeta_{k+1}} + D_{\zeta_k1} = \dots = D_{-1\zeta_j} + D_{\zeta_{j-1}1} \quad (1.11)$$

(pour tout $0 \leq j \leq n + 1$). Comme les triangles $\zeta_0\zeta_{-1}1$ et $\omega_01\zeta_{-1}$ sont orientés dans le sens direct (et que $\omega_0 = \zeta_0 + 2$), on a $\text{Im}(\zeta_{-1}) < \text{Im}(1)$ c'est-à-dire $\text{Im}(\zeta_{-1}) < 0$. De même, $\zeta_n1\omega_{n+1}$ et $\omega_n\omega_{n+1}1$ sont orientés dans le sens direct, donc $\text{Im}(\omega_{n+1}) > 0$. Il existe donc $0 \leq j \leq n + 1$ tel que $\text{Im}(\zeta_{j-1}) < 0$ et $\text{Im}(\zeta_j) \geq 0$. Il en découle $D_{-1\zeta_j} \in [0, \pi[$ et $D_{\zeta_{j-1}1} \in]0, \pi[$. Par (1.11), cela implique $A + C \in]0, 2\pi[$. Le théorème 1.11.1 est prouvé. \square

Remarque : pour démontrer le théorème 1.11.1, nous n'avons pas utilisé le fait que les facettes dans \mathbb{R}^{3+1} données par la construction de l'enveloppe convexe d'Epstein–Penner sont de type espace. Plus loin, nous transposerons littéralement cette démonstration à un contexte où certaines facettes sont de type lumière ou de type temps (théorèmes 3.8.4 et 3.9.1). Considérons le tétraèdre idéal Δ de sommets $(-1, \zeta, \zeta', \infty)$ (avec les notations de la figure 1.11.1) : c'est un simple exercice de montrer que le relevé de Δ à \mathbb{R}^{3+1} est de type espace si et seulement si

$$2 \frac{\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}{\|\vec{a} + \vec{b}\|} > \frac{\|\vec{a} + \vec{b}\|}{\|\vec{c}\|} + \frac{\|\vec{c}\|}{\|\vec{a} + \vec{b}\|} .$$

Cette inégalité est donc vraie en particulier pour chaque ligne brisée Z_i , ce qui permet potentiellement de calculer certaines estimées géométriques dans la variété.

Chapitre 2

Décompositions canoniques de complémentaires d'entrelacs

Le but de ce chapitre est de donner les décompositions géométriquement canoniques de certains complémentaires d'entrelacs, suivant les techniques du chapitre 1.

Dans la partie 2.1, nous rappelons comment David Futer s'est appuyé sur le lien intime entre tore à un trou et sphère à quatre trous pour étendre le théorème 1.1.1 (et sa démonstration) aux complémentaires d'entrelacs à deux ponts. Nous omettons certaines des démonstrations, qui figurent toutes dans [GF, appendice], mais en détaillons brièvement certaines autres pour introduire des objets qui nous seront utiles. Puis nous étendons à notre tour le résultat de Futer aux *entrelacs à deux ponts augmentés* (partie 2.2) et à la classe des variétés obtenues par recollement de complémentaires d'entrelacs à deux ponts augmentés, découpés le long de sphères à 3 trous (partie 2.3). Chacun de ces cas est une variante plus ou moins élaborée de l'argument du chapitre 1, en utilisant une triangulation idéale appropriée. Nous montrerons en outre que toutes ces triangulations, choisies pour leur “canonicité” combinatoire, sont encore canoniques au sens géométrique.

2.0.1 Tores percés et sphères à 4 trous

Le théorème 1.1.1 demeure vrai si nous remplaçons le tore percé T par la sphère à 4 trous S , et l'application $\varphi : T \rightarrow T$ par un difféomorphisme orienté $\varphi_S : S \rightarrow S$ (il nous faut bien sûr préciser comment les “valeurs propres” de φ_S sont définies). En fait, les tétraèdres de la variété obtenue V_{φ_S} et de V_{φ} sont métriquement identiques ; seule la combinatoire de leur recollement est légèrement différente.

Définissons $R := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ et les applications $f, g, \sigma : R \rightarrow R$ données par $f(x) = x + (1, 0)$; $g(x) = x + (0, 1)$; $\sigma(x) = -x$. Se produisent alors les identifications naturelles $T = R / \langle f, g \rangle$ et $S = R / \langle f^2, g^2, \sigma \rangle$. Soit aussi $T' := R / \langle f^2, g^2 \rangle$ (notons que T' est un tore à quatre trous).

On peut montrer (voir par exemple [Mu]) qu'à isotopie près, tout difféomorphisme φ_S de S préservant l'orientation se relève en une application $\varphi_R : R \rightarrow R$ donnée par $\varphi_R(x) = Mx + v$ pour quelque $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $v \in \mathbb{Z}^2$. De plus, $(\pm M)$ et $(v \bmod 2\mathbb{Z}^2)$ sont uniques. On peut donc définir les valeurs propres de φ_S (à un signe près) comme étant celles de M . Remarquons finalement que φ_R induit des difféomorphismes orientés $\varphi' : T' \rightarrow T'$ et $\varphi_T : T \rightarrow T$.

On a des revêtements évidents $T' \rightarrow T$ et $T' \rightarrow S$, de degrés 4 et 2 respectivement. Étant donnée une triangulation idéale τ_T de T (correspondant à un triangle de Farey comme à la partie 1.3), on peut relever

τ_T à une triangulation idéale τ' de T' . Observons que σ agit sur T' comme une involution proprement discontinue qui fixe τ' , donc τ' définit une triangulation τ_S de S . On voit aisément que τ_S obéit à la combinatoire d'un tétraèdre (4 faces, 6 arêtes, 4 sommets idéaux). Si τ_T et τ_T^1 sont séparés par un échange de diagonale (voir la partie 1.3.1 pour une définition), alors τ_S et la triangulation τ_S^1 correspondante sont séparés par deux échanges de diagonale agissant sur une paire d'arêtes opposées. *Mutatis mutandis*, la construction de la partie 1.3 fournit des triangulations idéales (topologiques) de $T' \times \mathbb{R}$ et de $S \times \mathbb{R}$, ainsi que de leurs quotients $V_{\varphi'}$ et V_{φ_S} . Il y a des revêtements $V_{\varphi'} \rightarrow V_{\varphi_S}$ et $V_{\varphi'} \rightarrow V_{\varphi_T}$ (de degrés 2 et 4 respectivement), et toutes ces variétés sont hyperboliques quand φ possède des valeurs propres réelles distinctes. Toutes les triangulations de pointe ont le même revêtement universel, un pavage de \mathbb{R}^2 par des triangles euclidiens (figure 1.4.2). Notons que pour chaque tétraèdre Δ_i de V_{φ_T} , il y a deux tétraèdres $\hat{\Delta}_i, \bar{\Delta}_i$ isométriques à Δ_i dans V_{φ_S} .

2.1 Entrelacs à deux ponts

Définition 2.1.1. Soit \mathbb{B}^3 la boule standard fermée de \mathbb{R}^3 . Fixons une fois pour toutes des orientations sur \mathbb{B}^3 et $\partial\mathbb{B}^3$. On dit d'un arc de \mathbb{B}^3 qu'il est proprement plongé s'il rencontre $\partial\mathbb{B}^3$ exactement en ses deux extrémités. Un arc $\alpha \subset \mathbb{B}^3$ proprement plongé est dit *dénoué* s'il existe un arc $\alpha' \subset \partial\mathbb{B}^3$, de mêmes extrémités que α , tel que $\alpha \cup \alpha'$ est le bord d'un disque plongé $D \subset \mathbb{B}^3$. Deux arcs dénoués disjoints α, β forment un *tangle trivial* si les disques associés D_α, D_β (fermés) peuvent être choisis disjoints. Voir la figure 2.2.1 page 38 (volet gauche).

Soit $B = (\mathbb{B}^3, \alpha, \beta)$ un tangle trivial. Alors le bord de $\mathbb{B}^3 \setminus (\alpha \cup \beta)$ est une sphère à quatre trous S . Si B' est un autre tangle trivial, définissant lui aussi une sphère à quatre trous S' , on peut choisir un homéomorphisme renversant l'orientation pour recoller S à S' : l'union des deux copies de \mathbb{B}^3 est alors homéomorphe à \mathbb{S}^3 , et l'union des quatre arcs dénoués forme un *entrelacs à deux ponts* dans \mathbb{S}^3 . Le choix de l'homéomorphisme de recollement peut être arbitrairement "compliqué" dans le groupe des classes d'homéomorphismes de S , mais n'a d'importance qu'à isotopie près pour la définition de l'entrelacs.

Les complémentaires d'entrelacs à deux ponts (ou nœuds à deux ponts s'ils n'ont qu'une composante) sont donc, combinatoirement et géométriquement, des objets assez voisins des fibrés en sphères à quatre trous. De fait, Makoto Sakuma et Jeffrey Weeks [SW2] ont décrit une triangulation idéale (combinatoire) des complémentaires d'entrelacs à deux ponts non toriques, très proche de la triangulation de la partie 1.3 (et donc de la partie 2.0.1). David Futer a étendu les méthodes du chapitre 1 pour montrer que la triangulation de Sakuma–Weeks peut être rendue totalement géodésique. Dans cette partie, nous résumons l'argument de Futer [GF, appendice], puis nous montrerons le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. *Le complémentaire d'un entrelacs à deux ponts non torique admet une métrique hyperbolique, pour laquelle la triangulation de Sakuma–Weeks est géométriquement canonique.*

2.1.1 Diagramme de Farey revisité

Tout d'abord, nous donnons une description légèrement différente (mais équivalente) des entrelacs à deux ponts. Soit $S = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) / \langle f^2, g^2, \sigma \rangle$ la sphère à 4 trous de la partie 2.0.1, où $f(x, y) = (x+1, y)$; $g(x, y) = (x, y+1)$ et $\sigma(x, y) = (-x, -y)$. Toute droite de \mathbb{R}^2 de pente rationnelle q , manquant \mathbb{Z}^2 , définit par projection une courbe simple fermée de S , dont on dit qu'elle a pour pente q . Il est en outre

bien connu [Mu] que toute courbe simple fermée de S qui ne borde pas un disque de S est isotope à une courbe obtenue de cette manière.

Choisissons deux rationnels $q, q' \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (éventuellement égaux). Attachons une 2-poignée (disque épaissi) à $S \times [0, 1]$ le long d'une courbe simple fermée de pente q dans $S \times \{0\}$: l'intérieur de la variété obtenue est homéomorphe à l'intérieur de \mathbb{B}^3 privé des arcs d'un tangle trivial. Ensuite, attachons une 2-poignée le long d'une courbe de pente q' dans $S \times \{1\}$. Soit V l'intérieur de la variété obtenue après ces recollements.

Observation 2.1.3. La variété V est homéomorphe au complémentaire d'un entrelacs à deux ponts dans \mathbb{S}^3 .

L'entrelacs à deux ponts est déterminé par les deux rationnels q, q' , et quitte à changer le marquage de S (c'est-à-dire la base du réseau \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{R}^2), on peut toujours supposer $q' = \infty$: alors, seul le rationnel q détermine l'entrelacs, une observation due, sous cette forme, à Conway [Con] (voir aussi [S3]).

Considérons les sommets q, q' du diagramme de Farey décrit à la partie 1.2. Si q, q' ne sont pas égaux ni voisins de Farey, la droite (hyperbolique) orientée Λ de q à q' traverse une famille d'arêtes de Farey e_0, e_1, \dots, e_m , où $m \geq 0$. Pour tout $0 \leq i < m$, la droite Λ effectue un virage à droite (R) ou à gauche (L) à travers le triangle de Farey situé entre e_i et e_{i+1} . (Au triangle initial [resp. final], comprenant q [resp. q'] comme sommet, aucune lettre de $\{R, L\}$ n'est associée). Finalement, Λ définit un mot de m lettres $\Omega = LRR\dots L$ (éventuellement vide). Noter que Ω possède un début et une fin, au lieu d'être cyclique comme dans le chapitre 1.

Dorénavant, nous supposons que Ω comprend au moins un R et un L (de façon équivalente, q et q' n'ont aucun voisin de Farey en commun). On peut vérifier que les autres cas correspondent à des entrelacs toriques, donc non hyperboliques.

2.1.2 Triangulation idéale

La triangulation idéale de V se construit essentiellement comme à la partie 1.3, adaptée au cas des sphères à 4 trous comme à la partie 2.0.1, à laquelle nous renvoyons le lecteur. La seule différence importante est dans la manière de recoller les “premiers” et les “derniers” tétraèdres, opération que nous décrivons à présent.

À tout $0 < i < m$ sont associés une arête de Farey e_i , un tétraèdre idéal Δ_i (plus exactement, une paire de tétraèdres idéaux $\hat{\Delta}_i, \check{\Delta}_i$ comme à la partie 2.0.1, mais en l'absence de risque de confusion le symbole Δ_i désignera indifféremment chacun des deux), et un paramètre $w_i \in [0, \pi]$. Aux arêtes de Farey e_0 et e_m , bases de triangles de Farey de sommets q et q' , aucun tétraèdre n'est associé. Dans la suite, nous poserons cependant $w_0 = w_m = \pi$. Pour expliquer le sens de cette convention, il nous faut décrire la triangulation de Sakuma-Weeks [SW2].

En nous plaçant au début du mot Ω , supposons que $q = \frac{1}{2}$, que e_0 a pour extrémités $0, 1$ et que le triangle de Farey entre e_0 et e_1 est $1\infty 0$. Toute face f de la surface S (sphère à 4 trous plissée) associée à ce triangle de Farey possède une unique arête ϵ de pente ∞ , qu'elle partage avec une unique autre face f' : nous identifions simplement f à f' , par un homéomorphisme qui respecte ϵ . Ainsi, S se trouve repliée sur elle-même le long des deux arêtes de pente ∞ . On vérifie facilement (figure 2.1.1) que la courbe simple fermée de S de pente $q = \frac{1}{2}$ devient homotopiquement triviale, et que l'espace obtenu en épaississant S est homéomorphe à \mathbb{B}^3 privée des deux arcs d'un tangle trivial.

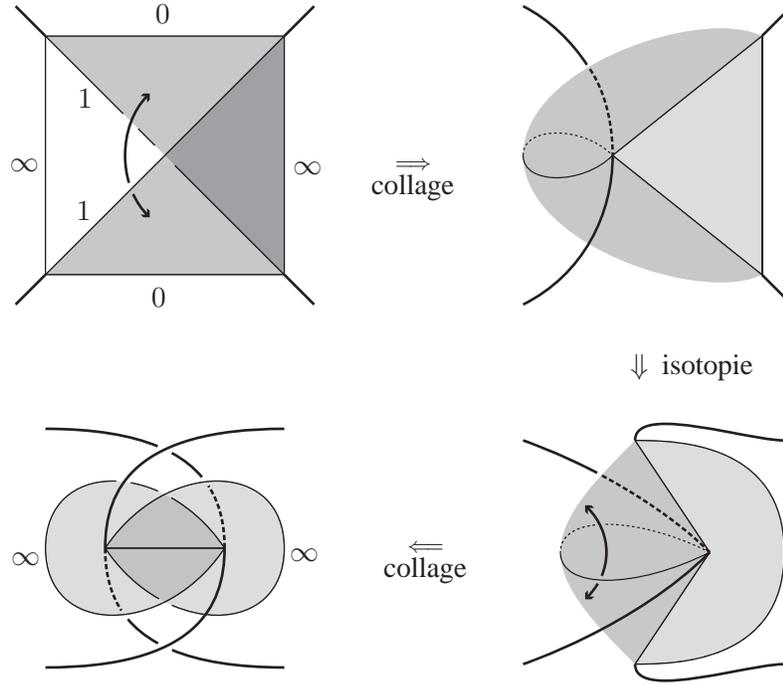


FIG. 2.1.1 – Repliement de la surface plissée S . On a indiqué les pentes de certaines arêtes.

Remarque 2.1.4. Les arêtes de S dont les pentes sont voisines de Farey de q (soit 0 et 1 dans la figure 2.1.1) sont identifiées à une seule arête lors du recollement. En revanche, aucun point des deux autres arêtes de S (de pente ∞) n'est identifié à un autre point.

Dans cette construction, S possède un angle de plissage égal à π (à l'arête de pente ∞), et c'est exactement le sens de la convention $w_0 = \pi$. On répète la construction près de la fin du mot Ω et on pose de même $w_m = \pi$. Voir [GF] pour plus de détails. Comme à la partie 1.5, on vérifie que cette construction donne une triangulation idéale \mathcal{D}^{Comb} de la variété V , et on a bien

Proposition 2.1.5. *Les systèmes d'angles strictement positifs pour \mathcal{D}^{Comb} vérifiant (1.1), et tels que les deux tétraèdres $\hat{\Delta}_i, \check{\Delta}_i$ soient isométriques pour tout i , sont donnés via le tableau (1.3) par les suites $(\pi = w_0, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m = \pi)$ satisfaisant les conditions de domaine, de concavité et de charnière (1.4) pour tout indice $0 < i < m$. \square*

Pour décrire la triangulation de la pointe, il suffit de modifier la figure 1.4.2 (et les remarques afférentes) au voisinage du début et de la fin du mot Ω (qui se lit toujours de bas en haut). Comme

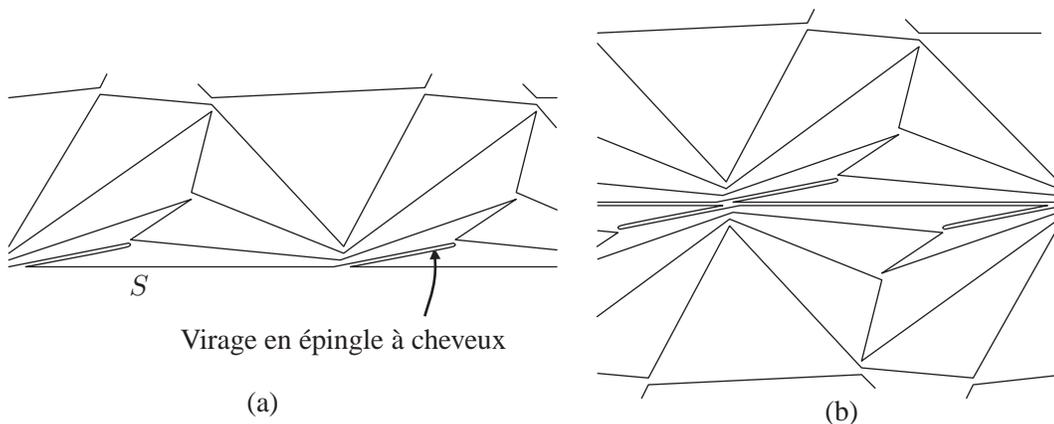


FIG. 2.1.2 – Repliement de la surface plissée S , vu de la pointe.

la surface S est repliée sur elle-même, la ligne brisée que détermine S dans le lien de la pointe admet un “virage en épingle à cheveux” (dont le sommet est le lien idéal de l’arête de pente ∞) : la figure 2.1.2–(a) représente la partie correspondante de la triangulation de pointe. De plus, S est recollée à elle-même : une seconde copie de la figure 2.1.2–(a) est donc adjacente à la première, et la seule possibilité est que ces deux copies soient images l’une de l’autre par une symétrie centrale (figure 2.1.2–(b)).

2.1.3 Maximisation du volume

On suppose dorénavant que $(\pi = w_0, w_1, \dots, w_m = \pi)$ maximise le volume hyperbolique \mathcal{V} , défini comme la somme des volumes des Δ_i (par convention, on ne compte qu’un seul tétraèdre par indice i : à proprement parler, \mathcal{V} désigne donc le *demi* volume hyperbolique). Les propositions 1.7.1 et 1.7.2 sont encore vraies, et on a la version suivante de la proposition 1.7.3 :

Lemme 2.1.6. *Au point $(\pi = w_0, \dots, w_m = \pi)$,*

- i – *Si Δ_i est aplati, alors i est un indice charnière qui ne vaut ni 1 ni $m - 1$, et on a $w_i = 0$.*
- ii – *Si Δ_i est aplati, alors i est adjacent à au moins deux lettres consécutives identiques.*
- iii – *Si les deux couches charnière aux extrémités d’une syllabe R^k ou L^k sont aplaties, alors $k \geq 3$.*

Démonstration. Presque tous ces résultats sont prouvés à la partie 1.7 (en particulier, “l’effet domino” de la proposition 1.7.2 s’applique dans les deux sens : si deux termes consécutifs de (w_0, \dots, w_m) appartiennent à $\{0, \pi\}$, tous les Δ_i seraient aplaties, ce qui contredirait la maximalité du volume). Il reste simplement à montrer que Δ_1 et Δ_{m-1} ne peuvent s’aplatir : comme $w_0 = w_m = \pi$, c’est une conséquence de ce même effet domino. \square

Le lemme 1.8.2 est encore vrai lui aussi : pour un éventail intérieur (ne correspondant ni à la première, ni à la dernière syllabe de Ω), la démonstration est strictement la même. Pour l’éventail initial, la preuve n’est que plus facile : si l’on a $\Omega = R^k|L\dots$ (la barre verticale marque l’aplatissement du premier tétraèdre charnière Δ_k), l’éventail prend l’aspect d’un triangle (figure 2.1.3). En définissant les longueurs

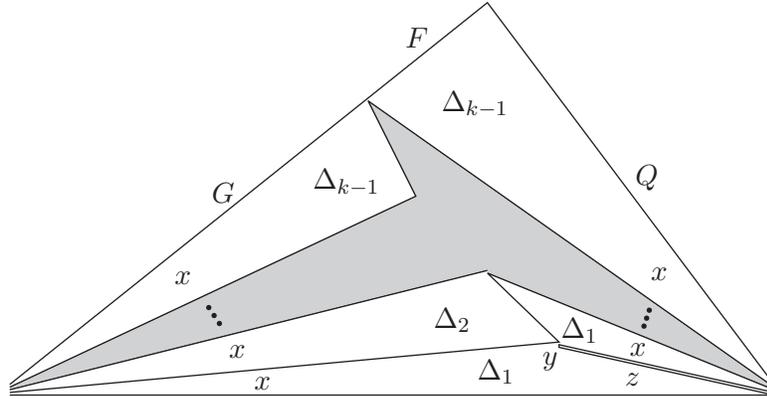


FIG. 2.1.3 – Dans le tout premier éventail de Ω , on a $Q < F + G$.

Q, F, G comme au lemme 1.8.2, on trouve que Q est le côté du triangle opposé à l'angle $x_1 + \dots + x_{k-1}$, tandis que $F + G$ est le côté opposé à $z_1 + (x_1 + \dots + x_{k-1})$: ainsi, $Q < F + G$.

(Avec les notations du lemme 1.8.2, le sommet du virage en épingle à cheveux est u_1 . Notons que la complétude de la métrique euclidienne en ce point u_1 découle de l'identité $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w_1} = 0$: c'est le même calcul qu'au sous-lemme 1.6.4, en supprimant le facteur " $\frac{\sin y_0}{\sin x_0}$ " [il n'y a pas de tétraèdre Δ_0] ; cette suppression correspond à la disparition du secteur angulaire z_0 , remplacé par le virage en épingle à cheveux qui constitue un secteur angulaire nul).

Armé de cette version étendue du lemme 1.8.2, on montre comme à la partie 1.9 qu'au maximum ($\pi = w_0, w_1, \dots, w_m = \pi$) du volume, aucun tétraèdre n'est aplati. Les calculs sont les mêmes, à la disparition près des facteurs correspondant aux indices $i = 0$ et $i = m$ quand Δ_2 ou Δ_{m-2} s'aplatit (comme au paragraphe précédent). L'expression de $\exp(-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varepsilon})$ en fonction de Q, Q', F, F', G, G' est donc la même qu'à la partie 1.9, et le théorème 2.1.2 est prouvé. Ici s'achève notre résumé du travail de D. Futur : nous renvoyons à [GF] pour plus de détails.

2.1.4 Canonicité géométrique

Nous étendons à présent les arguments de la partie 1.11 aux complémentaires d'entrelacs à deux ponts.

Théorème 2.1.7. *Soit V le complémentaire d'un entrelacs à deux ponts dans S^3 . La triangulation idéale de Sakuma–Weeks de V (décrite à la partie 2.1.2) est géométriquement canonique.*

Démonstration. Remarque : pour une variété hyperbolique à pointe(s) de volume fini, la décomposition géométriquement canonique n'est autre que le dual combinatoire du domaine de Ford–Voronoi \mathcal{F} . S'il y a plus d'une pointe, définir \mathcal{F} suppose le choix d'un voisinage horoboulisque de chaque pointe (plus exactement, des tailles relatives de ces voisinages). Cependant, un entrelacs à deux ponts qui a deux composantes admet une symétrie qui échange ces dernières : on fait donc le choix canonique de deux voisinages horobouliques de même volume.

La démonstration est une simple extension de la partie 1.11. Commençons par remonter la triangulation idéale de V à une triangulation idéale \mathcal{T} de son revêtement universel \mathbb{H}^3 , et munissons chaque sommet idéal p de \mathcal{T} d'une horoboule H_p qui se projette sur le voisinage horoboulisque de la pointe associée dans

V . Remontons ensuite H_p à un vecteur lumière (ou vecteur isotrope) v_p dans l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} : il nous faut prouver que pour toute paire de tétraèdres adjacents $\Delta = \alpha\beta\gamma\delta$ et $\Delta' = \beta\gamma\delta\epsilon$ de \mathcal{T} (donnés par leurs sommets $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$), l'équation

$$Pv_\beta + Qv_\gamma + Rv_\delta = \lambda v_\alpha + (1 - \lambda)v_\epsilon \text{ entraîne } P + Q + R > 1. \quad (2.1)$$

(Notons que l'équation possède une unique solution (P, Q, R, λ) , qui satisfait $0 < \lambda < 1$ puisque l'hyperplan passant par $0, v_\beta, v_\gamma, v_\delta$ sépare v_α de v_ϵ dans \mathbb{R}^{3+1}). Sauf mention explicite du contraire, nous nous plaçons dorénavant dans le modèle du demi-espace de Poincaré, bordé par le plan \mathbb{C} .

À nouveau, il suffit de montrer (2.1) quand $\beta = \infty$ et $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ sont les extrémités d'une arête E de la triangulation (euclidienne) de pointe, plongée dans \mathbb{C} . De plus rappelons que V est décomposée en paires de tétraèdres isométriques $\{\dot{\Delta}_i, \ddot{\Delta}_i\}$ pour $0 < i < m$, et que les quatre triangles idéaux de la sphère à 4 trous

$$S_i = (\dot{\Delta}_i \cup \ddot{\Delta}_i) \cap (\dot{\Delta}_{i-1} \cap \ddot{\Delta}_{i-1})$$

(où $1 < i < m$) sont transitivement permutés par des symétries globales de la variété V . Enfin, S_i définit une ligne brisée dans la triangulation de pointe : comme à la partie 1.11, il suffit de traiter une seule arête E de cette ligne brisée pour montrer (2.1) en chaque face $\beta\gamma\delta$ de S_i . Nous pouvons donc recopier mot à mot l'argument de la partie 1.11.

Le seul cas restant est celui où une paire de tétraèdres $\{\dot{\Delta}_i, \ddot{\Delta}_i\}$ est recollée non à la paire adjacente, mais à elle-même : cela se produit en $i = 1$ et en $i = m - 1$, dans la région des "ponts" de l'entrelacs à deux ponts (collage représenté à la figure 2.1.1 page 34). Nous nous concentrerons seulement sur $i = 1$. La sphère à 4 trous S_1 représentée à la figure 2.1.1 (page 34) définit une ligne brisée dans la triangulation de pointe, mais cette ligne brisée Z contient un "virage en épingle à cheveux" (figure 2.1.2) : sans perte de généralité, les sommets de Z sont

$$(\dots, -1, \zeta - 2, -1, 1, \zeta, 1, \dots),$$

où le $(k + 3)$ -ème sommet est l'image du k -ème par une translation horizontale de longueur 2. Intéressons-nous au triangle idéal $(\beta, \gamma, \delta) = (\infty, 1, -1)$. Comme à la partie 1.11, le diamètre euclidien de l'horoboule centrée en un sommet de la ligne brisée Z est égal au produit des longueurs des deux segments adjacents dans Z , tandis que l'horoboule centrée en ∞ contient tous les points dont la hauteur euclidienne au dessus de \mathbb{C} est supérieure ou égale à 1.

De plus, nous avons vu à la partie 2.1.2 que cette ligne brisée Z se recolle tout contre une autre ligne brisée $(\dots, -1, -\zeta, -1, 1, 2 - \zeta, 1, \dots)$, image de Z par la symétrie de centre 0. Donc les deux derniers sommets α, ϵ impliqués dans (2.1) sont $\alpha = \zeta$ et $\epsilon = -\zeta$. Suivant la partie 1.11, et en notant $\zeta =: \xi + i\eta$ et $d := |\zeta - 1|$, nous pouvons à présent écrire

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0, & 2 \end{pmatrix} \\ v_{-1} &= \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} -2, & 0, & 0, & 2 \end{pmatrix} \\ v_\infty &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1, & 1 \end{pmatrix} \\ v_\zeta &= \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} 2\xi, & 2\eta, & 1 - \xi^2 - \eta^2, & 1 + \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix} \\ v_{-\zeta} &= \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} -2\xi, & -2\eta, & 1 - \xi^2 - \eta^2, & 1 + \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

L'équation (2.1) devient $Pv_\infty + Qv_1 + Rv_{-1} = \lambda v_\zeta + (1 - \lambda)v_{-\zeta}$: comme $\eta \neq 0$ (tous les angles des

triangles sont strictement positifs), on trouve l'unique solution

$$\lambda = \frac{1}{2}; P = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{d^2} \text{ et } Q = R = \frac{1}{d}$$

d'où $P + Q + R = 1 + \frac{X}{d^2}$ où

$$\begin{aligned} X &= \xi^2 + \eta^2 - 1 + 2d - d^2 \\ &= |\zeta|^2 - (|\zeta - 1| - 1)^2 \\ &= (|\zeta| + 1 - |\zeta - 1|)(|\zeta| - 1 + |\zeta - 1|). \end{aligned}$$

Les deux facteurs de cette dernière expression sont strictement positifs, par les inégalités triangulaires dans le triangle $(0, 1, \zeta)$. Donc $X > 0$ et (2.1) est vraie. Le théorème 2.1.7 est prouvé. \square

2.2 Entrelacs à deux ponts augmentés

Au début de la partie 2.1, nous avons défini un entrelacs à deux ponts comme étant un recollement de deux tangles triviaux. Un tangle trivial *augmenté* est par définition un tangle trivial $(\mathbb{B}^3, \alpha, \beta)$ (où α, β sont deux arcs) auquel on a ajouté une composante $\gamma \simeq \mathbb{S}^1$, non nouée, enserrant α et β (figure 2.2.1). Notons qu'une chirurgie de Dehn entière (de paramètre n) sur γ redonne un tangle trivial, dans lequel α, β sont entortillés $2n$ fois.

Définition 2.2.1. La composante γ s'appelle *composante d'augmentation*.

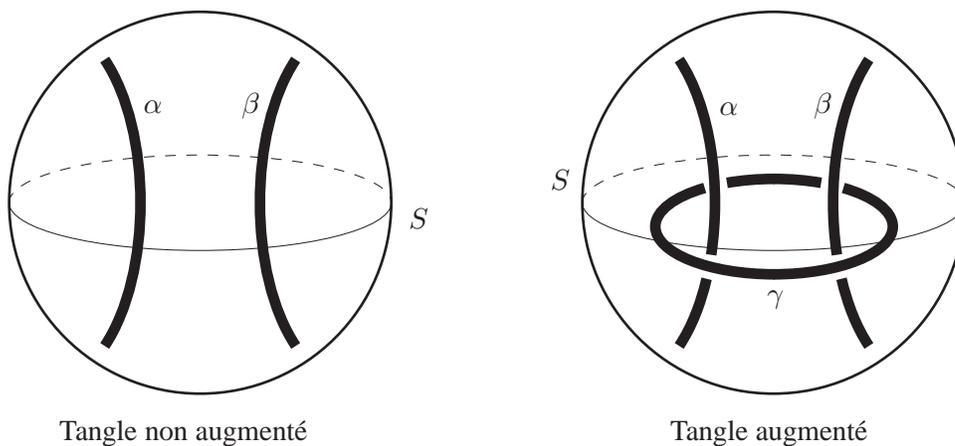


FIG. 2.2.1 – Les deux sortes de tangles.

Un entrelacs à deux ponts *augmenté* est un recollement de tangles triviaux dont l'un et/ou l'autre peuvent être augmentés. Le recollement se fait le long de la sphère à 4 trous S . Désormais et jusqu'à la partie 2.2.4 incluse, nous supposons que seul le premier tangle (correspondant au "début" du mot Ω) est augmenté.

2.2.1 Diagramme de Farey, revisité à nouveau

Comme à la partie 2.1.1, nous allons associer à chacun des deux tangles une *penne* dans $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ (le marquage de S étant choisi une fois pour toutes).

Définition 2.2.2. Comme à la partie 2.1.1 (observation 2.1.3), la penne q' associée au tangle non-augmenté \mathcal{T}' est la penne de la courbe simple fermée ∂D , où le disque $(D, \partial D)$ plongé dans $(\mathbb{B}^3, \partial\mathbb{B}^3)$ sépare les deux arcs de \mathcal{T}' (ce disque D est unique à homotopie près).

En revanche, dans le tangle augmenté, la définition est essentiellement différente :

Définition 2.2.3. La penne q associée au tangle augmenté \mathcal{T} est la penne de l'unique courbe simple fermée de $S = \partial\mathbb{B}^3 \setminus \alpha \setminus \beta$ qui est isotope à la composante d'augmentation γ .

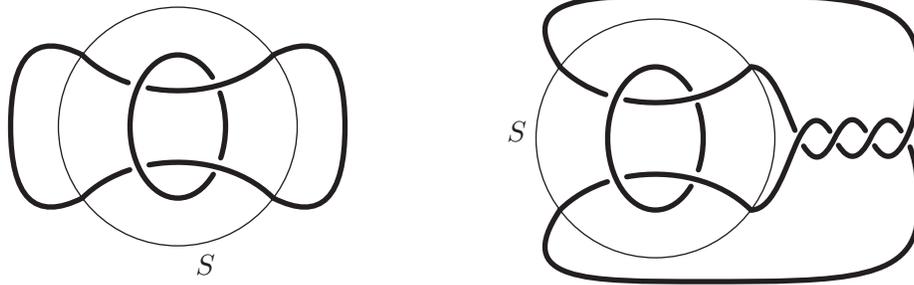


FIG. 2.2.2 – Entrelacs à deux ponts augmentés non hyperboliques : à gauche, $q = q'$. À droite, q et q' sont voisins de Farey.

Supposons dorénavant que ces deux pennes q, q' ne sont ni égales, ni adjacentes dans le graphe de Farey (on vérifie facilement que le complémentaire de l'entrelacs dans \mathbb{S}^3 admettrait une sphère essentielle dans le premier cas, et un anneau ou ruban de Möbius essentiel dans le second, et n'aurait donc pas de métrique hyperbolique : voir la figure 2.2.2). La droite orientée Λ qui va de q à q' à travers la triangulation de Farey détermine un mot Ω en les lettres $\{R, L\}$, comme à la partie 2.1.1. Le mot Ω peut être vide (par exemple si $q = \infty$ et $q' = \frac{1}{2}$) : l'entrelacs correspondant est l'entrelacs de Whitehead, dont la géométrie est bien connue — voir par exemple [SW2] ou [T1]. Nous traiterons brièvement l'entrelacs de Whitehead à la partie 2.2.6 ; d'ici là, nous supposons que Ω possède au moins une lettre. Près de la fin de Ω , on triangule comme à la partie 2.1.2. Nous décrivons maintenant la triangulation près du début de Ω .

Convention importante. Le triangle de Farey f admettant q pour sommet et traversé par la droite orientée Λ détermine une triangulation idéale de la sphère à 4 trous S . On suppose cette fois que l'indice i associé à l'arête de f opposée à q est $i = 1$ (et non $i = 0$ comme à la partie 2.1.2). A priori, aucune lettre (R ou L) n'est associée à f . Cependant, afin d'harmoniser les notations, nous allons artificiellement associer une lettre à f : arbitrairement, faisons ce choix de telle manière que Ω commence par une lettre répétée (RR ou LL). Ainsi, f se trouve entre deux arêtes de Farey, e_1 et une autre arête e_0 dont q est une extrémité.

On associe un paramètre réel w_0 à e_0 : les angles de plissage de S sont

$$w_0, -w_1 \text{ et } w_1 - w_0$$

comme en (1.2). (Choisir d’associer une lettre différente à f aurait pour seul effet d’échanger w_0 et $w_1 - w_0$). Le vecteur “de contrôle” permettant de paramétrer tous les angles de toutes les surfaces plissées est donc $(w_0, w_1, \dots, w_m = \pi)$ où $m \geq 2$ (car Ω compte au moins deux lettres). Par la suite nous verrons que ces angles w_i suffisent bien à donner une paramétrisation de l’espace des systèmes d’angles sur le complémentaire de l’entrelacs (pour une triangulation qui, près du début du mot Ω , reste à décrire).

2.2.2 Triangulation idéale

Décrivons à présent la triangulation idéale d’un tangle trivial augmenté. Soit $ABB''A''$ un parallélogramme de $\mathbb{C} \subset \partial\mathbb{H}^3$ (dans le modèle du demi-espace de Poincaré); soient A' le milieu de AA'' et B' le milieu de BB'' , et considérons les quatre triangles semblables ABA' , $BA'B'$, $A'B'A''$, $B'A''B''$, qui triangulent le parallélogramme $ABB''A''$ (figure 2.2.4, volet gauche). Bâtissons un tétraèdre idéal de sommet ∞ au dessus de chacun de ces triangles, et identifions les faces de ces tétraèdres par les translations de vecteur \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{AA''}$: l’espace obtenu X est homéomorphe à un tore plein privé de son âme et de deux points de son bord (figure 2.2.3– gauche). Identifions en outre les droites hyperboliques orientées $A'A$ et $A'A''$ au moyen d’une isométrie parabolique fixant A' : ces droites reliaient les points manquants (sommets idéaux) de ∂X ; l’espace qui résulte de cette identification, toujours noté X (figure 2.2.3– milieu) est donc un rétract de $Y = \mathbb{B}^3 \setminus (\alpha \cup \beta \cup \gamma)$, où $(\mathbb{B}^3, \alpha, \beta, \gamma)$ est un tangle trivial augmenté (figure 2.2.3– droite). Plus exactement, X s’obtient à partir de Y en identifiant certains points: si $[0, 1] \times [0, 1] \simeq Q \subset \mathbb{B}^3 \setminus \gamma$ est tel que $\{0\} \times [0, 1] = \alpha$, $\{1\} \times [0, 1] = \beta$ et que $[0, 1] \times \{0, 1\} \subset \partial\mathbb{B}^3$ comprend deux arcs de même pente que γ (c’est-à-dire disjoints de la courbe simple fermée de pente q), alors on identifie chaque segment $\{*\} \times [0, 1]$ de Q à un seul point.

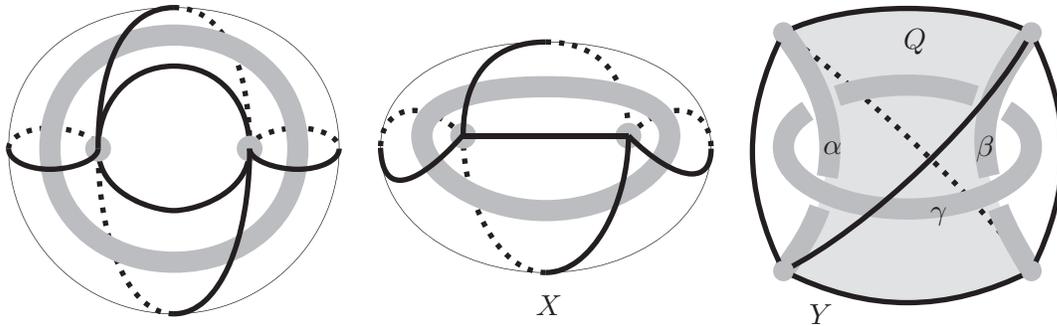


FIG. 2.2.3 – Réalisation polyédrale d’un tangle trivial augmenté.

La triangulation du parallélogramme d’origine $ABB''A''$ induit une triangulation idéale de ∂X , faisant de ∂X une sphère à 4 trous triangulée dont deux arêtes opposées ont été identifiées. À une réflexion près, Y est donc un tangle trivial augmenté “modèle” qui se recolle parfaitement à la sphère à quatre trous S (toujours munie de la triangulation idéale associée au triangle de Farey situé entre les arêtes de Farey e_0 et e_1) pour donner le complémentaire d’un entrelacs à deux ponts augmenté.

Remarque 2.2.4. Au lieu de Y , c’est X que nous recollerons à S . La variété obtenue est la même à homéomorphisme près: par la remarque 2.1.4, il est facile de voir que le quadrilatère Q qu’on a effondré sur un segment pour obtenir l’arête “pincée” de X est plongé dans le complémentaire de l’entrelacs; en

effet les arêtes de pente q ne sont pas identifiées à d'autres arêtes dans la triangulation près de la fin du mot Ω , parce que q et q' ne sont pas voisins de Farey.

Remarque 2.2.5. Nous avons mentionné le fait qu'il peut être nécessaire de réfléchir X (ou Y) dans un miroir avant de le recoller à S . Cela vient du fait que nous n'avons pas précisé l'orientation du parallélogramme $ABB''A''$ dans le plan \mathbb{C} . Voir aussi le paragraphe intitulé "Demi-chirurgies" dans la partie 2.2.6.

Enfin, déterminons quels doivent être les angles du triangle ABA' (ainsi que ses copies isométriques $BA'B'$, $A'B'A''$, $B'A''B''$) pour que les angles de plissage de X correspondent à ceux de S . Le lien de la pointe intérieure (ou d'augmentation) de X est, par construction, le tore euclidien (triangulé) obtenu en identifiant les côtés opposés du parallélogramme $ABB''A''$. Chaque sommet de ce lien est commun à 6 triangles isométriques, rangés dans un ordre cyclique. Le lien de X en l'un quelconque des sommets restants est un hexagone H obtenu en renversant l'ordre de ces 6 triangles (et en appliquant à chacun une homothétie convenable), comme sur la figure 2.2.4. Notons que le centre de H se trouve sur la bissectrice de chacun des angles de H . L'identification des arêtes $A'A$ et $A'A''$ de X par un parabolique se traduit comme l'identification d'une paire de sommets opposés de H par une translation euclidienne. Cette translation euclidienne coïncidera avec la période "horizontale" du lien d'une des pointe de l'entrelacs (autre que la pointe d'augmentation, associée à la composante d'augmentation de X). Sur la figure 2.2.4 (volet droit), on identifie donc les extrémités du diamètre horizontal de H . Nous appellerons H un *hexagone d'augmentation*.

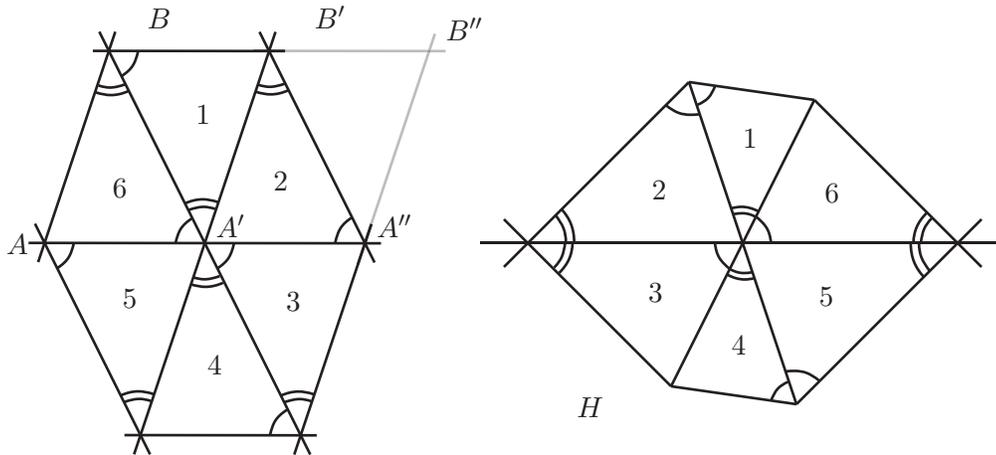


FIG. 2.2.4 – À gauche : triangulation de la pointe d'augmentation, avec le parallélogramme $ABB''A''$. À droite : L'hexagone d'augmentation H , lien du sommet idéal A' .

La figure 2.2.5 montre le lien de la (ou des) pointe(s) principale(s) (celle(s) qui ne sont pas d'augmentation) : les triangles délimités par des traits pointillés sont définis par les tétraèdres de X (on reconnaît les hexagones d'augmentation H dans la partie inférieure du dessin), tandis que les autres triangles sont définis par les $\{\Delta_i\}_{i \geq 1}$, d'angles donnés par le tableau 1.3. L'arête née de l'identification dans X des deux arêtes idéales de pente q (le rationnel associé au tangle augmenté T) a pour liens sommitaux le point de contact entre hexagones d'augmentation — cette arête est la seule arête de Δ_1 qui n'appartienne qu'à la surface plissée inférieure de Δ_1 (correspondant au premier triangle de Farey, de sommet q).

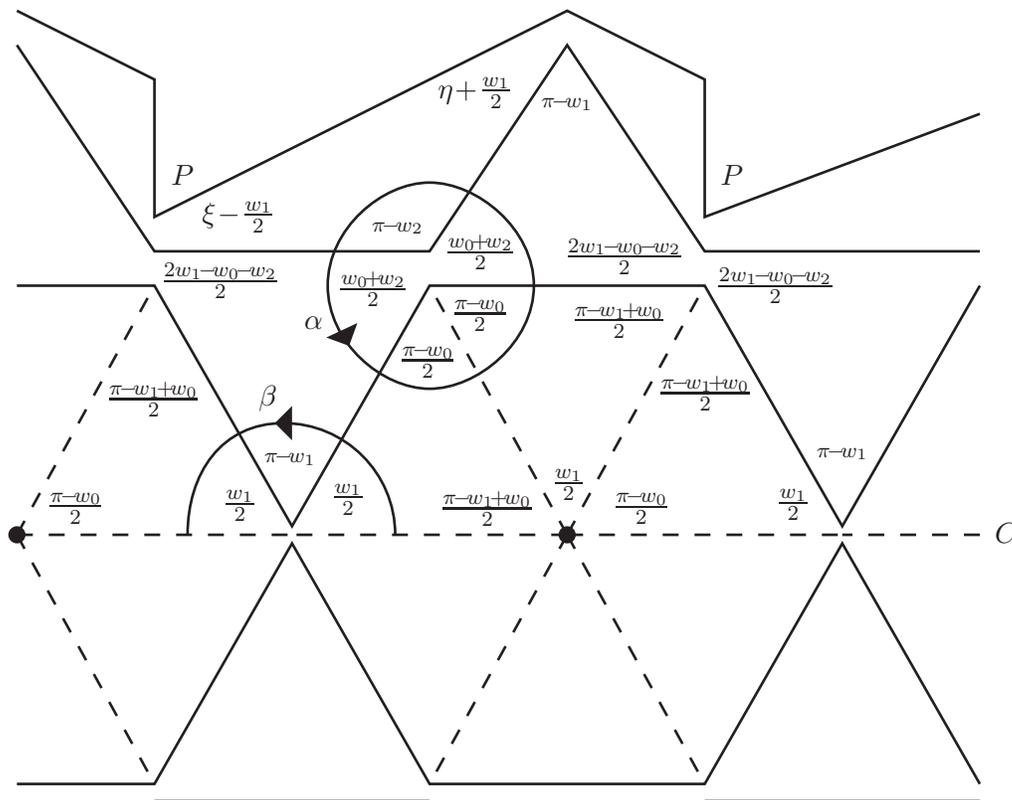


FIG. 2.2.5 – Triangulation de la pointe principale. Noter les hexagones d'augmentation (pointillés).

On lit en particulier sur la figure 2.2.5 que les angles des tétraèdres de X doivent être ceux des triangles formant les hexagones d'augmentation, soit

$$\frac{\pi - w_0}{2}, \frac{\pi - w_1 + w_0}{2}, \frac{w_1}{2} \quad (2.2)$$

pour s'adapter aux angles de plissage de S . Aux tétraèdres $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ d'angles donnés par le tableau 1.3 (deux par indice i) s'ajoutent donc quatre tétraèdres dont les angles sont le triplet ci-dessus. Nous désignerons ces quatre tétraèdres par le symbole Δ_0 quand il n'est pas nécessaire de les distinguer les uns des autres.

2.2.3 Maximisation du volume

Définition 2.2.6. Soit $\overset{\circ}{W}$ l'espace des points $w = (w_0, w_1, \dots, w_m = \pi)$ tels que les angles de tous les tétraèdres $(\Delta_i)_{0 \leq i < m}$ sont strictement positifs, et tels que

$$0 < w_0 < w_1 \quad (2.3)$$

(cette dernière condition revient à demander que les angles de Δ_0 soient aigus).

On voit aisément que $\overset{\circ}{W}$ est non vide : prendre par exemple $w_i = \frac{i+m}{2m}\pi$, puis perturber les $\{w_i\}_{0 < i < m}$ qui ne sont pas charnière pour rendre la suite w concave par morceaux, comme dans (1.4).

Définition 2.2.7. Soit W l'adhérence de $\overset{\circ}{W}$.

La contrainte additionnelle (2.3) sera utile dans la proposition suivante, ainsi qu'à la partie 2.2.4 pour montrer la canonicité géométrique de la triangulation. Continuons de dénoter par $\mathcal{V} : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonctionnelle volume, définie comme la somme des volumes des $\{\Delta_i\}_{i \geq 1}$, plus le double du volume de Δ_0 (répétons qu'il n'y a pas deux, mais quatre tétraèdres Δ_0).

Proposition 2.2.8. *Supposons que $w = (w_0, w_1, \dots, w_m = \pi) \in W$ réalise le maximum de \mathcal{V} sur W . Alors $w \in \overset{\circ}{W}$. Par conséquent, la triangulation de la partie 2.2.2 est réalisée géométriquement par des tétraèdres idéaux définissant une métrique hyperbolique complète.*

Démonstration. La proposition 1.7.1 est encore vraie : si Δ_i a un angle nul, alors ses angles sont $0, 0, \pi$ (et on dit que Δ_i est *aplatis*) — sinon, une déformation infinitésimale en direction d'un point intérieur de W ferait augmenter le volume. Comme à la partie 1.7, on en déduit le résultat suivant, analogue de la proposition 1.7.3.

Sous-lemme 2.2.9. *Si l'un des Δ_i est aplati pour $0 \leq i < m$, alors $i \geq 2$ et i est un indice charnière tel que $w_i = 0$.*

Démonstration. Premièrement, Δ_0 n'est pas aplati puisque tous ses angles, par (2.3), sont contraints à être aigus (et ne peuvent donc pas prendre la valeur π). Supposons que Δ_i est aplati pour un certain $i \geq 1$ tel que i n'est pas charnière ou $w_i = \pi$, et cherchons une contradiction. Comme aux propositions 1.7.2 et 1.7.3, les tétraèdres $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$ sont tous aplatis (effet domino). Donc seul Δ_0 est de volume non nul, et par (2.2) l'un de ses angles dièdres est $\frac{w_1}{2} \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Mais comme $m \geq 2$ on peut trouver une suite

$$(w'_0, w'_1, \dots, w'_m = \pi) = (\pi/3, 2\pi/3, \dots, \pi) \in W,$$

pour laquelle Δ_0 est un tétraèdre idéal régulier (d'angles dièdres $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$). Or le tétraèdre idéal régulier est l'unique tétraèdre idéal de plus grand volume : on en déduit $\mathcal{V}(w') > \mathcal{V}(w)$, contradiction. Le sous-lemme 2.2.9 est démontré. \square

Le lemme 1.8.2 reste vrai : pour un éventail qui n'est ni le premier ni le dernier du mot Ω , nous renvoyons à la démonstration d'origine page 17. Pour le dernier éventail, nous renvoyons à la partie 2.1.3 (en particulier la figure 2.1.3). Pour le premier éventail, il suffit de procéder de manière analogue à la démonstration d'origine ; la seule modification à apporter intervient dans la toute dernière ligne de l'argument (lemme 1.8.2, page 17) : dans le lien du nœud 1, l'angle au dessous du nœud n'est plus $z_{k+1} \leq \pi$, mais $\pi - w_1 + w_0 \leq \pi$ (comparer les figures 1.8.1 et 2.2.6).

Sous-lemme 2.2.10. *On suppose toujours que $w \in W$ réalise le maximum de la fonctionnelle \mathcal{V} sur W . Si i est un indice charnière, alors $w_i > 0$.*

Démonstration. On se contente de recopier mot à mot la partie 1.9 (et la partie 2.1.3 pour le dernier éventail). \square

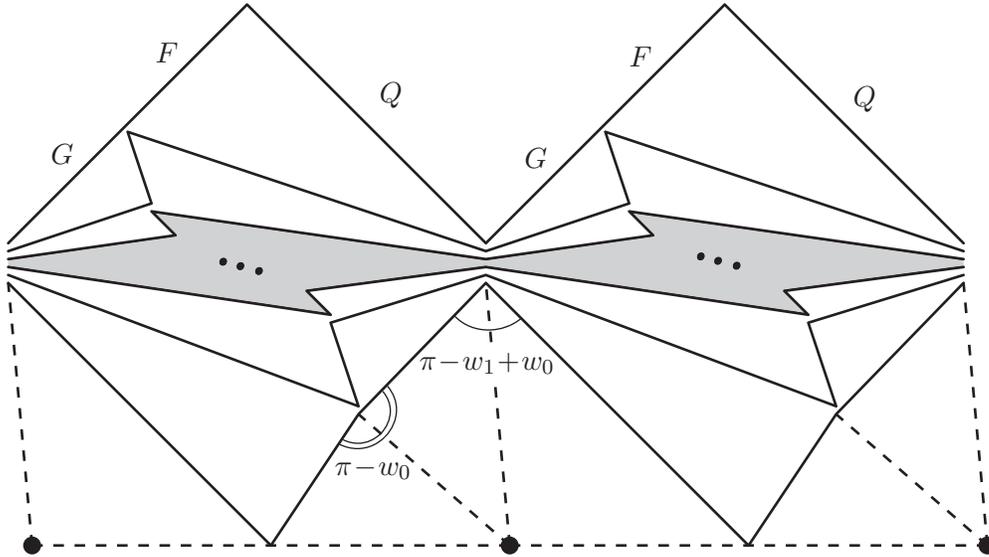


FIG. 2.2.6 – Pointe principale : comme au lemme 1.8.2, on a $Q < F + G$. Attention : l'orientation est celle de la figure 2.2.5 et non de la figure 1.8.1.

Pour montrer que w est un point intérieur de W , il reste à vérifier que les inégalités $0 \leq w_0 \leq w_1$ sont bien strictes (par les sous-lemmes 2.2.9–2.2.10, toutes les autres inégalités (1.4) servant à définir W sont strictes).

Montrons que $w_0 < w_1$. Supposons $w_0 = w_1$ et cherchons une contradiction. On peut supposer que Ω commence par les lettres RR (le cas LL est analogue). De plus, Ω n'est pas réduit à RR : si c'était le cas, comme $w_2 = \pi$ on aurait par concavité de la suite w la relation $w_0 = w_1 = w_2 = \pi$, exclu. Suivant (1.3) et (2.2), rappelons donc les angles des tétraèdres $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$:

Ω	R	R	
i	0	1	2
x_i	$\frac{1}{2}(\pi - w_1 + w_0)$	$\frac{1}{2}(2w_1 - w_0 - w_2)$	$\frac{1}{2}(\xi - w_1)$
y_i	$\frac{1}{2}(\pi - w_0)$	$\frac{1}{2}(w_0 + w_2)$	$\frac{1}{2}(\eta + w_1)$
z_i	$\frac{1}{2}w_1$	$\pi - w_1$	$\pi - w_2$

(Comme à l'ordinaire, l'expressions exacte de ξ et η dépend de la lettre qui suit RR , mais seules les contributions de w_0, w_1 nous préoccupent ici). On a donc, d'après la proposition 1.6.1,

$$\begin{aligned}
\exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial w_0} &= \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\pi - w_1 + w_0)}{\sin \frac{1}{2}(\pi - w_0)} \right)^2 \frac{\sin \frac{1}{2}(w_0 + w_2)}{\sin \frac{1}{2}(2w_1 - w_0 - w_2)} \\
&= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}w_0} \frac{\sin \frac{1}{2}(w_1 + w_2)}{\sin \frac{1}{2}(w_1 - w_2)} \quad \text{car } w_0 = w_1 \\
&> 1 \quad \text{par le fait élémentaire 1.7.4.}
\end{aligned}$$

(Dans le premier facteur de la première ligne, l'exposant 2 vient du fait qu'il y a quatre tétraèdres Δ_0 au lieu de deux). On en déduit que $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial w_0} < 0$: en faisant décroître un tout petit peu w_0 , on fait augmenter le volume. Absurde.

Montrons que $w_0 > 0$. Supposons $w_0 = 0$ et cherchons une contradiction. Notons que

$$1 = \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial w_1} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}w_1}{\sin^2 \frac{1}{2}(\pi - w_1 + w_0)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(2w_1 - w_0 - w_2)}{\sin^2(\pi - w_1)} \frac{\sin \frac{1}{2}(\eta + w_1)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - w_1)}$$

est le facteur réel de l'holonomie (similitude plane) associée au lacet α représenté sur la figure 2.2.5. De même,

$$1 \leq \exp \frac{-2\partial\mathcal{V}}{\partial w_0} = \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\pi - w_1 + w_0)}{\sin \frac{1}{2}(\pi - w_0)} \right)^2 \frac{\sin \frac{1}{2}(w_0 + w_2)}{\sin \frac{1}{2}(2w_1 - w_0 - w_2)} \quad (2.4)$$

est le rapport ℓ_{fin}/ℓ_{init} entre les longueurs des arêtes initiale et finale rencontrées par l'arc β (figures 2.2.5 et 2.2.7), si l'on suppose que les longueurs des côtés des triangles traversés par β coïncident.

Par les calculs d'holonomie du sous-lemme 1.6.4, la structure de similitude définie par le point w sur le lien de la pointe est donc complète (euclidienne) au voisinage de chaque sommet, *sauf* au point marqué P sur les figures 2.2.5 et 2.2.7. Plus exactement, la figure 2.2.7 est une version métrique exacte de la figure 2.2.5 dans le cas $w_0 = 0$: on a dû couper le long d'une arête issue de P pour obtenir une structure euclidienne bien définie.

Notons que les triangles (rectangles) issus des tétraèdres Δ_0 s'assemblent par groupes de trois pour former des triangles isocèles (en pointillés sur la figure 2.2.7) ; chacun de ces triangles isocèles forme la moitié d'un hexagone d'augmentation. Notons aussi l'inégalité $Q \geq F + G$ forcée par la relation (2.4). Ici Q, F, G jouent le même rôle que dans le lemme 1.8.2 (vis-à-vis de l'éventail initial, correspondant à la première syllabe du mot Ω) : par le lemme 1.8.2, on devrait avoir $Q < F + G$. Contradiction. La proposition 2.2.8 est démontrée. \square

2.2.4 Canonicité géométrique

La triangulation canonique d'une variété hyperbolique à pointe(s) dépend d'un choix de voisinages horobouliques particuliers des pointes, ou plus exactement, des tailles relatives de ces voisinages. Or il y a une pointe par composante de l'entrelacs (ici, une ou deux composantes principales, plus une composante d'augmentation) : il nous faut donc faire un choix. Comme à la partie 2.1.4, nous pouvons faire jouer les symétries de la variété dans le cas à 3 pointes (le groupe de Klein V_4 agit sur les entrelacs

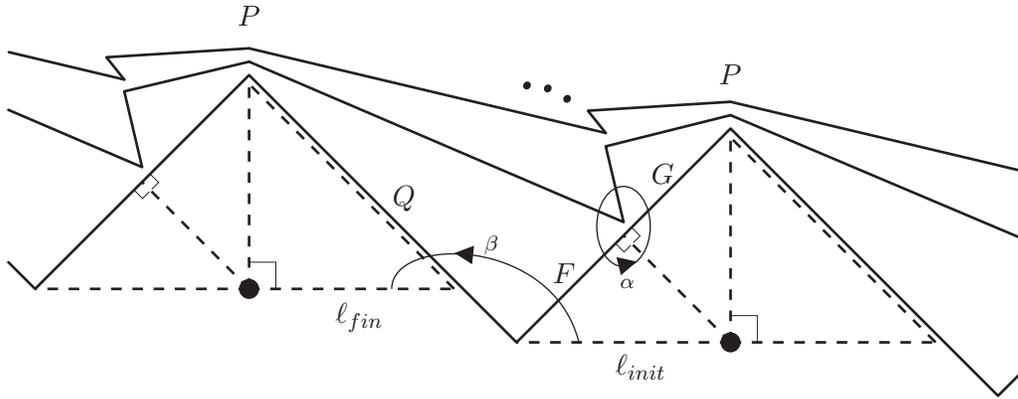


FIG. 2.2.7 – Triangulation de la pointe principale quand $w_0 = 0$ (voir la figure 2.2.5). La structure est incomplète au point P : c’est pourquoi on a coupé le long de l’arête Q .

à deux ponts, augmentés ou non) pour prendre des voisinages horobouliques de même volume aux deux pointes “principales”. Reste la pointe “d’augmentation”.

Dans un tangle trivial augmenté $(\mathbb{B}^3, \alpha, \beta, \gamma)$ (où γ est la composante d’augmentation) vit une sphère à trois trous (ou disque à deux trous), proprement plongée dans $\mathbb{B}^3 \setminus \alpha \setminus \beta \setminus \gamma$ et unique à isotopie près : c’est le disque bordé par γ et percé en deux points par α et β . Or toute sphère à 3 trous dans une variété hyperbolique est totalement géodésique, et isométrique à la sphère à 3 trous standard. De fait, le lien sommital de la sphère à trois trous issue du tangle augmenté \mathcal{T} est la droite pointillée horizontale C (subdivisée en segments de longueur 1) qui traverse les hexagones d’augmentation dans le tiers inférieur de la figure 2.2.5. Notons Σ la sphère à trois trous totalement géodésique contenue dans la variété (Σ est union de certaines faces des tétraèdres Δ_0). On a représenté Σ à la figure 0.3.2 page xviii.

Soit $\varepsilon > 0$ un petit réel. Choisissons pour chaque pointe de la variété un voisinage horoboulique simple tel que les trois composantes de l’intersection de Σ avec ces voisinages aient chacune pour aire ε . La triangulation géométriquement canonique associée \mathcal{D}^{Geom} est indépendante de ε .

Théorème 2.2.11. *La décomposition géométriquement canonique \mathcal{D}^{Geom} du complémentaire V d’un entrelacs arborescent augmenté est la triangulation étudiée aux parties 2.2.1 à 2.2.3.*

Démonstration. Comme toujours, on se ramène à montrer pour chaque triangle idéal τ de la triangulation une inégalité de convexité dans l’espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} . Si aucun des deux tétraèdres adjacents à τ n’est un Δ_0 , nous renvoyons aux parties 1.11 et 2.1.4.

Supposons que τ sépare un tétraèdre Δ_0 d’un tétraèdre Δ_1 . Ces triangles idéaux τ sont au nombre de 4 dans V , mais par action du groupe de Klein V_4 , il suffit de traiter un seul d’entre eux. Soit

$$Z := (\dots, -2, \zeta - 2, -\zeta^{-1}, 0, \zeta, 2 - \zeta^{-1}, 2, 2 + \zeta, \dots)$$

la ligne brisée ($u \mapsto u \pm 2$)–invariante définie dans le lien euclidien de la pointe par la sphère à 4 trous située à l’interface de Δ_0 et Δ_1 . Si les centres des hexagones d’augmentation (marqués par des points gras dans les figures 2.2.5 et 2.2.6) sont aux affixes $-1, 1, 3, \dots$ dans \mathbb{C} , alors les sommets de Z sont

bien de la forme donnée ci-dessus, parce que les triangles

$$(\zeta, 0, 1) ; (\zeta, 1, 2 - \zeta^{-1}) ; (1, 2, 2 - \zeta^{-1})$$

sont semblables (en respectant l'ordre des sommets) : voir la figure 2.2.8.

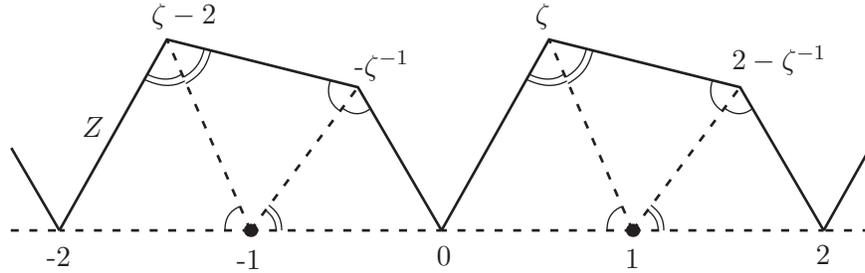


FIG. 2.2.8 – La ligne brisée Z .

Nous prendrons comme τ le triangle idéal de sommets $0, \zeta, \infty$. Comme à la partie 1.11, l'horoboule centrée en un sommet de Z a pour diamètre euclidien le produit des segments de Z adjacents : en notant H_u l'horoboule centrée en u , on trouve que :

$$\text{le diamètre de } H_0 \text{ est } |\zeta| \cdot |-\zeta^{-1}| = 1;$$

$$\text{le diamètre de } H_\zeta \text{ est } |\zeta| \cdot |2 - \zeta^{-1} - \zeta| = |1 - \zeta|^2;$$

$$\text{le diamètre de } H_{-\zeta^{-1}} \text{ est } |-\zeta^{-1}| \cdot |\zeta - 2 + \zeta^{-1}| = |1 - \zeta^{-1}|^2;$$

l'horoboule H_∞ centrée en ∞ est tangente à H_0 .

Enfin, le diamètre de l'horoboule H_1 centrée en 1 (correspondant à la pointe d'augmentation) est le même que celui de H_0 , par le choix qui précède le théorème 2.2.11. Notons que H_0, H_1, H_∞ sont deux à deux tangentes. Si nous notons $\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1}$, les vecteurs-lumière associés se calculent comme à la partie 1.11 :

$$\begin{aligned} v_0 &= (0, 0, 1, 1) \\ v_\zeta &= \frac{1}{(\xi-1)^2 + \eta^2} (2\xi, 2\eta, 1 - \xi^2 - \eta^2, 1 + \xi^2 + \eta^2) \\ v_\infty &= (0, 0, -1, 1) \\ v_1 &= (2, 0, 0, 2) \\ v_{-\zeta^{-1}} &= \frac{1}{(\xi-1)^2 + \eta^2} (-2\xi, 2\eta, \xi^2 + \eta^2 - 1, 1 + \xi^2 + \eta^2) . \end{aligned}$$

L'équation $Pv_0 + Qv_\infty + Rv_\zeta = \lambda v_{-\zeta^{-1}} + (1 - \lambda)v_1$ admet pour unique solution

$$P = \frac{1 + 2\xi - \xi^2 - \eta^2}{1 + \xi^2 + \eta^2}; \quad Q = \frac{-1 + 2\xi + \xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2 + \eta^2}; \quad R = \frac{1 - 2\xi + \xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2 + \eta^2} = \lambda$$

d'où $P + Q + R = 1 + \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2} > 1$ (puisque les angles du triangle $(0, 1, \zeta)$ sont tous, par (2.3), strictement aigus).

Remarque 2.2.12. Soit $\mu \geq 1$. Notons que $0 < \lambda < 1$. Si nous remplaçons v_1 par μv_1 et notons (P', Q', R', λ') la solution du nouveau système, il est facile de voir que $(P', Q', R') = \frac{1}{\lambda + \frac{1-\lambda}{\mu}}(P, Q, R)$.

Comme $\frac{1}{\lambda + \frac{1-\lambda}{\mu}} \geq 1$, on a encore $P' + Q' + R' > 1$. En d'autres termes, la relation de convexité dans l'espace de Minkowski est encore vraie si nous remplaçons l'horoboule H_1 (correspondant à la pointe d'augmentation) par une horoboule plus petite.

Reste à vérifier le cas où le triangle idéal τ sépare deux tétraèdres Δ_0 . Dans ce cas, plutôt que le lien d'une des pointes principales, nous choisissons de regarder le lien de la pointe d'augmentation, qui est un pavage de \mathbb{C} par des triangles *aigus* deux à deux isométriques dont les sommets forment un réseau affine : sans perte de généralité, τ a pour sommets ∞ et les extrémités $1, -1$ d'une arête de ce pavage. Les deux tétraèdres adjacents à τ ont pour quatrième sommet ζ et $-\zeta$ respectivement, où $\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ vérifie $|\zeta| > 1$ (car l'angle $\widehat{-1\zeta 1}$ est aigu). Les horosphères centrées en ± 1 et $\pm\zeta$ ont toutes le même diamètre (qu'on peut choisir égal à 1), d'où

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 0, 0, 2) \\ v_{-1} &= (-2, 0, 0, 2) \\ v_\zeta &= (2\xi, 2\eta, 1 - \xi^2 - \eta^2, 1 + \xi^2 + \eta^2) \\ v_{-\zeta} &= (-2\xi, -2\eta, 1 - \xi^2 - \eta^2, 1 + \xi^2 + \eta^2) \\ v_\infty &= (0, 0, -\kappa, \kappa) \end{aligned}$$

pour un certain $\kappa > 0$ qui dépend du choix de l'horoboule dans la pointe d'augmentation, et que nous ne calculerons pas. L'équation $Pv_1 + Qv_{-1} + Rv_\infty = \lambda v_\zeta + (1 - \lambda)v_{-\zeta}$ admet pour unique solution $P = Q = \lambda = \frac{1}{2}$ et $R = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\kappa}$, d'où $P + Q + R > 1$ car $|\zeta| > 1$. Le théorème 2.2.11 est démontré.

Nous terminons par deux remarques : premièrement, le calcul qu'on vient de faire revient simplement à s'assurer que le pavage de \mathbb{C} considéré est la triangulation de Delaunay associée au réseau affine formé par les sommets (pour la métrique euclidienne de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). Cette simplification a lieu parce que les horoboules centrées aux points du réseau ont toutes le même diamètre : le lieu géométrique des points de \mathbb{H}^3 équidistants de deux quelconques d'entre elles est donc un plan hyperbolique qui passe par l'infini, et a pour bord la droite médiatrice (dans \mathbb{C}) des centres des deux horoboules ; la recherche du domaine de Voronoï dans \mathbb{H}^3 se ramène donc à celle des domaines de Voronoï associés aux sommets du réseau dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 .

Deuxièmement, le nombre κ est sans importance, ce qui signifie que la relation de convexité dans l'espace de Minkowski ($P + Q + R > 1$) persiste si nous changeons la taille de l'horoboule H_∞ . En rapprochant cette remarque de la remarque 2.2.12, nous obtenons le

Corollaire 2.2.13. *Si les voisinages horoboulaires des pointes sont définis comme au théorème 2.2.11, puis qu'on réduise le voisinage horoboulair de la pointe d'augmentation, la triangulation géométriquement canonique \mathcal{D}^{Geom} reste inchangée.*

□

2.2.5 Entrelacs à deux ponts doublement augmentés

Le recollement de deux tangles triviaux augmentés $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ (définis au début de la partie 2.2) est un *entrelacs à deux ponts doublement augmenté*. La composante d'augmentation γ dans \mathcal{T} est homotope à une unique courbe simple fermée de pente $q \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ dans la sphère à 4 trous $S = \partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{T}'$. De même, \mathcal{T}' définit une pente $q' \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ (définition 2.2.3). On vérifie facilement que si $q = q'$, alors le complémentaire de l'entrelacs possède un anneau ou ruban de Möbius irréductible. Si $q \neq q'$, on peut

tracer la droite Λ de q à q' à travers la triangulation de Farey dans \mathbb{H}^2 , et construire le mot Ω associé (en les lettres R et L). Le cas où q, q' sont adjacents dans le graphe de Farey est particulier : l'entrelacs correspondant est donné par les anneaux borroméens et nous le traiterons à la partie 2.2.6, en même temps que l'entrelacs de Whitehead déjà évoqué au 2.2.1. Si q, q' ne sont ni égaux, ni voisins dans le graphe de Farey, il suffit d'appliquer la méthode des parties 2.2.1 à 2.2.4, en traitant la fin du mot Ω de la même manière que son début. L'analogie du théorème 2.2.11 et du corollaire 2.2.13 est vérifiée.

Notons que la méthode s'applique bel et bien au cas $(q, q') = (\infty, \frac{1}{2})$, bien que le mot Ω défini *a priori* par ce couple soit vide. À la fin de la partie 2.2.1, nous avons en effet ajouté une lettre préfixe "arbitraire" au début du mot Ω , de telle façon que Ω commence par un doublon (par exemple, RR). Ici, il faut faire de même à la fin du mot Ω (car nous augmentons les deux bouts) : il suffit donc d'ajouter au mot vide un préfixe R et un suffixe R pour que le mot Ω obtenu commence (et finisse) effectivement par un doublon RR . On trouve du reste $(w_0, w_1, w_2) = (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, de sorte que la variété est un recollement de 6 tétraèdres idéaux dont tous les angles dièdres valent $\frac{\pi}{3}$ (figure 2.2.9).

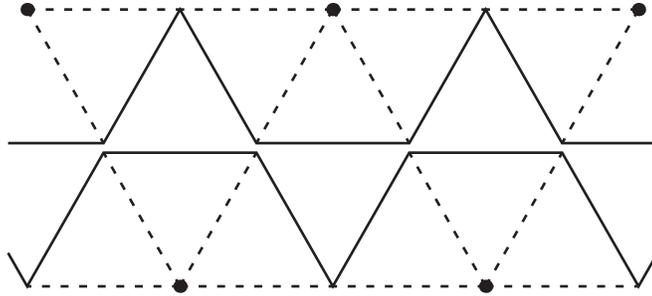


FIG. 2.2.9 – Triangulation de pointe principale d'un entrelacs doublement augmenté quand $(q, q') = (\infty, \frac{1}{2})$. Tous les triangles sont équilatéraux.

2.2.6 Exceptions : entrelacs de Whitehead, entrelacs borroméen, et demi-chirurgies

Les cas exceptionnels signalés aux parties 2.2.1 et 2.2.5 sont ceux où tous les tétraèdres proviennent des tangles augmentés. Ces entrelacs ont été décrits dans la littérature (voir par exemple [T1] ou [SW2]) et leur géométrie est bien comprise. Nous nous bornerons ici à signaler en quoi les affirmations des parties 2.1.3 à 2.2.4 deviennent des "cas limites".

Entrelacs de Whitehead

Parmi les entrelacs à deux ponts augmentés à une extrémité seulement, le cas limite est celui où les rationnels associés aux deux tangles sont ∞ et $\frac{1}{2}$, et où le mot Ω est donc vide. On a alors $m = 1$ et $(w_0, w_1) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$. L'entrelacs associé est l'entrelacs de Whitehead. La figure 2.2.10 (a) et (c) montre les triangulations de pointe (la pointe principale et la pointe d'augmentation : dans chaque cas on a représenté une maille complète, en utilisant pour la pointe principale la convention habituelle consistant à séparer les lignes brisées ; les hexagones d'augmentation deviennent des carrés). Un calcul facile révèle que l'inégalité de convexité dans l'espace de Minkowski n'est pas stricte en certaines arêtes : la décomposition \mathcal{D}^{Geom} est faite de deux pyramides idéales carrées, et les liens de pointe de \mathcal{D}^{Geom} sont

indiqués sur la figure 2.2.10 (b) et (d) — on a représenté les mêmes portions qu'en (a–c). Comme au corollaire 2.2.13, \mathcal{D}^{Geom} est inchangée si l'on diminue la taille de l'horoboule de référence dans la pointe d'augmentation.

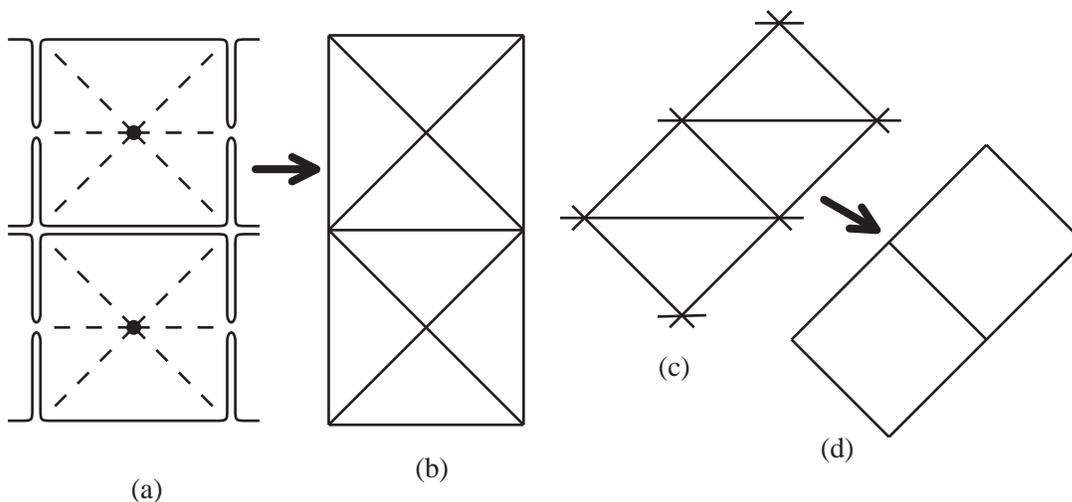


FIG. 2.2.10 – Entrelacs de Whitehead. (a)–(b) : pointe principale ; (c)–(d) : pointe d'augmentation.

Entrelacs borroméen

Parmi les entrelacs à deux ponts doublement augmentés, le cas limite est celui où les rationnels associés aux deux tangles $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ sont ∞ et 0 (voisins de Farey) : le mot Ω n'est alors pas même défini ! On peut néanmoins choisir une troisième pente (1 ou -1) pour définir une triangulation de la sphère à 4 trous de recollement $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, et de là, une triangulation idéale de la variété, qui se trouve être le complémentaire de l'entrelacs borroméen. Une maille de chacune des triangulations de pointe est montrée à la figure 2.2.11 (on s'est contenté de représenter l'une des deux pointes d'augmentation). À nouveau, certaines inégalités de convexité dans l'espace de Minkowski ne sont pas strictes : les liens de pointe de \mathcal{D}^{Geom} sont indiqués en (b–d), et \mathcal{D}^{Geom} est une décomposition en deux octaèdres idéaux réguliers. (Notons qu'il ne s'agit pas de la décomposition standard proposée par exemple dans [T1] : la pointe principale contient 8 carrés [sommets d'octaèdres], les pointes d'augmentation n'en contiennent que 2 chacune. Dans la décomposition standard, chaque pointe contient 4 carrés. Bien sûr, $4 + 4 + 4 = 8 + 2 + 2$). Enfin, diminuer l'horoboule de référence d'une des pointes d'augmentation (ou des deux) a pour effet de briser chaque octaèdre en deux pyramides idéales à base carrée : c'est la troisième version (b') de la triangulation de la pointe principale dans la figure 2.2.11 (les deux pointes d'augmentation (d) sont inchangées).

Demi-chirurgies

Considérons un entrelacs à deux ponts augmenté $\mathcal{T} \cup_S \mathcal{T}'$, où \mathcal{T}' est un tangle trivial et \mathcal{T} un tangle trivial augmenté (et S la sphère à 4 trous de recollement). La pente dans S définie par \mathcal{T}' est considérée

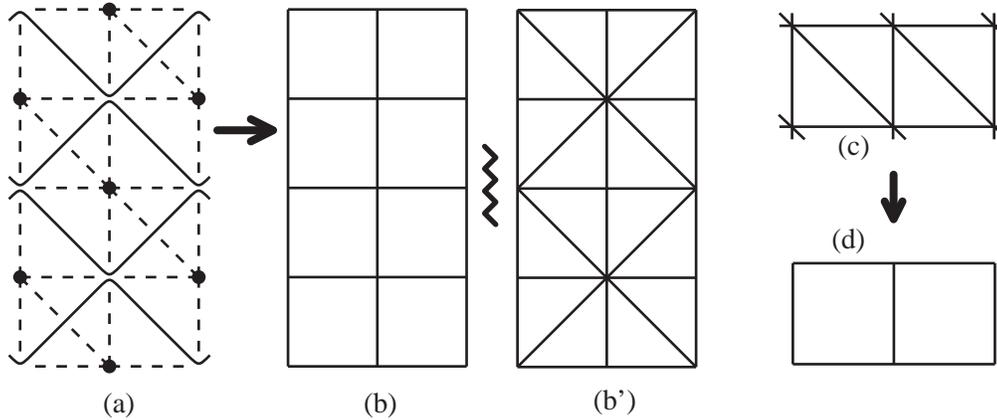


FIG. 2.2.11 – Entrelacs borroméen. (a)–(b)–(b') : pointe principale ; (c)–(d) : une pointe d'augmentation.

comme fixée, par exemple à la valeur ∞ . Alors la pente dans S définie par la composante d'augmentation γ de \mathcal{T} n'est en fait pas suffisante pour déterminer l'entrelacs : on peut entortiller les deux brins qui passent à travers γ un nombre arbitraire N de fois, pour obtenir une \mathbb{Z} -famille d'entrelacs K_N . À homéomorphisme près, le complémentaire de K_N dans S^3 dépend uniquement de la parité de N : il y a donc deux variétés différentes (ou quatre, dans le cas d'un entrelacs à deux ponts doublement augmenté) auxquelles on peut appliquer la méthode des parties 2.2.1 à 2.2.6. Ces variétés sont distinguées par des *demi-chirurgies de Dehn* : découper le long de la sphère à 3 trous Σ (totalement géodésique) bordée par γ , puis recoller Σ en échangeant deux de ses pointes (celles qui ne sont pas dans γ). Le réseau euclidien associé à la pointe d'augmentation n'a plus pour domaine fondamental le parallélogramme $ABB''A'$ (figure 2.2.4, volet gauche), mais le parallélogramme $A'B''A'''$, où A''' est le symétrique de A' par rapport à A'' . Voir aussi la remarque 2.2.5. Notons qu'une demi-chirurgie de Dehn peut fort bien changer le nombre de composantes connexes de l'entrelacs. Aux entrelacs exceptionnels (borroméen et de Whitehead) des deux précédents paragraphes s'ajoutent donc leurs frères obtenus par demi-chirurgie sur une ou deux composantes d'augmentation. Le frère du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead se trouve être le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead muni de l'orientation opposée, et le lecteur intéressé pourra déterminer les frères de l'entrelacs borroméen.

Nous appellerons Σ une *sphère à 3 trous d'augmentation*.

2.3 Recollements et entrelacs arborescents augmentés

Considérons des variétés hyperboliques M_1, \dots, M_n , où chaque M_i est le complémentaire d'un entrelacs à deux ponts augmenté une ou deux fois. Découpons chaque M_i le long de sa ou de ses sphères à 3 trous d'augmentation. Notons \overline{M}_i la variété à bord totalement géodésique obtenue, munie de sa décomposition idéale $\overline{\mathcal{D}}_i^{Geom}$ induite par la décomposition \mathcal{D}_i^{Geom} de M_i . Nous pouvons alors recoller les sphères à 3 trous des $\partial\overline{M}_i$ deux par deux d'une façon complètement arbitraire, pour obtenir une variété M sans bord, que nous supposons connexe.

Théorème 2.3.1. *Le recollement des $\overline{\mathcal{D}}_i^{Geom}$ est un raffinement de la décomposition géométriquement canonique \mathcal{D}^{Geom} de M .*

Remarque : à la fin de la démonstration, nous aurons de plus classifié les cas où ce raffinement est strict.

Démonstration. Notons que dans ce théorème, à la différence du corollaire 2.2.13, les voisinages horobouliques des pointes sont fixés une fois pour toutes (on suppose que les composantes d'intersection d'une sphère à 3 trous Σ avec les horoboules des trois pointes associées ont toutes la même aire hyperbolique).

Dans une triangulation de pointe d'un complémentaire d'entrelacs à deux ponts augmenté, appelons *droite de césure* le lien de pointe d'une sphère à trois trous d'augmentation : par exemple, la droite pointillée horizontale C qui traverse le bas de la figure 2.2.5 est une droite de césure. Dans une pointe d'augmentation, les arêtes sont rangées en 3 classes (selon leur direction) et l'union des arêtes de l'une de ces classes forme exactement les droites de césure. Dans les figures 2.2.10 et 2.2.11, toutes des droites de césure sont horizontales (et en pointillés dans la pointe principale).

Les triangulations de pointe des \overline{M}_i s'obtiennent à partir des triangulations de pointe des M_i en découpant le long des droites de césure. Les triangulations de pointe de M s'obtiennent par recollement le long de ces mêmes droites de césure. Il suffit donc de vérifier l'inégalité de convexité habituelle dans l'espace de Minkowski pour un tel recollement.

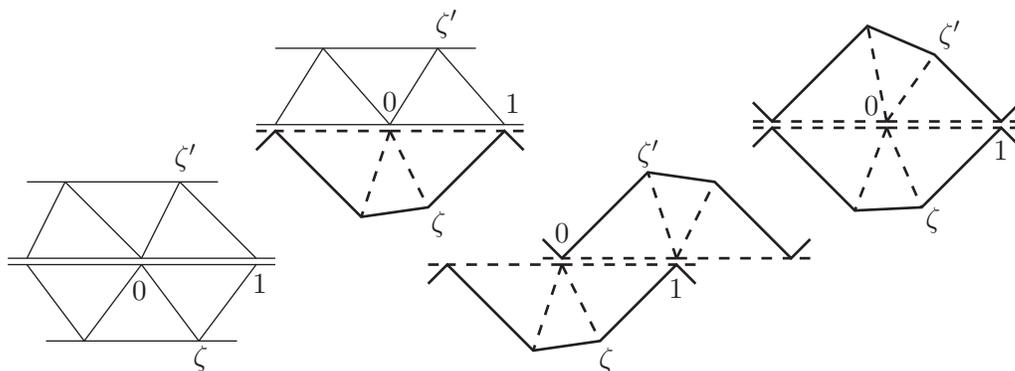


FIG. 2.3.1 – Quelques recollements possibles le long d'une droite de césure. Les triangles définis par une pointe d'augmentation sont dessinés au trait fin, les autres au trait gras (continu ou pointillé).

Faisons coïncider avec $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ la droite de césure le long de laquelle on entend recoller. On peut supposer que les tétraèdres à recoller définissent (par projection verticale dans le modèle du demi-espace de Poincaré) les triangles $(0, 1, \zeta)$ et $(0, 1, \zeta')$, où ζ, ζ' appartiennent à la bande $[0, 1] + i\mathbb{R}$ (rappelons que par (2.3) tous les angles sont aigus) et $\text{Im}(\zeta) < 0 < \text{Im}(\zeta')$. La figure 2.3.1 montre quelques-unes des possibilités, en fonction de la nature (principale ou d'augmentation) des deux pointes que l'on recolle. Les horoboules centrées en 0 et 1 ont pour diamètre euclidien 1 et sont tangentes à l'horoboule centrée en l'infini. En revanche, le diamètre de l'horoboule centrée en ζ est ou bien 1 (pour une pointe d'augmentation), ou bien $|\zeta - 1|^2$, ou bien $|\zeta|^2$ (ces deux derniers cas correspondant à une pointe principale d'un \overline{M}_i , comme à la partie 2.2.4). Si $\zeta = \xi + i\eta$ et $\zeta' = \xi' + i\eta'$, on a donc les vecteurs-lumière

$$\begin{aligned}
v_0 &= (0, 0, 1, 1) \\
v_1 &= (2, 0, 0, 2) \\
v_\infty &= (0, 0, -1, 1) \\
v_\zeta &= \mu (2\xi, 2\eta, 1 - \xi^2 - \eta^2, 1 + \xi^2 + \eta^2) \\
v_{\zeta'} &= \mu' (2\xi', 2\eta', 1 - \xi'^2 - \eta'^2, 1 + \xi'^2 + \eta'^2)
\end{aligned}$$

où $\mu \in \left\{1, \frac{1}{|\zeta|^2}, \frac{1}{|\zeta-1|^2}\right\}$ et $\mu' \in \left\{1, \frac{1}{|\zeta'|^2}, \frac{1}{|\zeta'-1|^2}\right\}$. On résout $Pv_0 + Qv_1 + Rv_\infty = \lambda v_\zeta + (1 - \lambda)v_{\zeta'}$, et on trouve

$$P + Q + R = 1 + \mu\mu' \frac{\eta'(1 - \xi + \xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{\mu}) - \eta(1 - \xi' + \xi'^2 + \eta'^2 - \frac{1}{\mu'})}{\eta'\mu' - \eta\mu}.$$

Comme $\eta < 0 < \eta'$, il suffit de montrer que $X := 1 - \xi + \xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{\mu} \geq 0$ (et de même $1 - \xi' + \xi'^2 + \eta'^2 - \frac{1}{\mu'} \geq 0$). Notons que X ne dépend que du tétraèdre idéal $0\infty 1\zeta$ (et des horoboules placées à ses sommets), pas du tétraèdre voisin : X est fonction du *tilt* défini par Sakuma et Weeks dans [SW1]. On a bien

$$\begin{aligned}
X &\geq \left| \zeta - \frac{1}{2} \right|^2 + \frac{3}{4} - \max \{1, |\zeta|^2, |1 - \zeta|^2\} \\
&= \min \left\{ \left| \zeta - \frac{1}{2} \right|^2 - \frac{1}{4}, \xi, 1 - \xi \right\}.
\end{aligned}$$

Ce dernier nombre est positif parce que tous les angles du triangle $(0, 1, \zeta)$ sont aigus. Le théorème 2.3.1 est démontré. De plus, classifier les cas d'égalité dans le calcul ci-dessus, et donc les cas où \mathcal{D}^{Geom} est strictement plus grossière que le recollement des $\overline{\mathcal{D}}_i^{Geom}$, est aisé en utilisant la partie 2.2.6 : parmi tous les entrelacs à deux ponts augmentés une ou deux fois, les seules droites de césure (et donc les seules sphères à trois trous d'augmentation) qui n'apparaissent pas dans \mathcal{D}^{Geom} sont celles de l'entrelacs de Whitehead (les arêtes horizontales de la figure 2.2.10–(c) sont absentes de 2.2.10–(d)). C'est donc le seul cas où $X = 0$, et les seules sphères à trois trous de recollement (des \overline{M}_i) qui n'apparaissent pas dans \mathcal{D}_M^{Geom} sont celles qui séparent deux \overline{M}_i définis par des entrelacs de Whitehead. Par exemple, la figure 2.3.2 montre un entrelacs dont le complémentaire s'obtient en découpant et recollant plusieurs complémentaires d'entrelacs de Whitehead. \square

La classe des variétés M auxquelles s'applique le théorème 2.3.1 contient notamment les *complémentaires d'entrelacs arborescents totalement augmentés*, généralisations de l'exemple de la figure 2.3.2. Nous renvoyons au chapitre 4 pour les définitions, et notamment à la remarque 4.5.8 pour la caractérisation exacte de ces entrelacs.

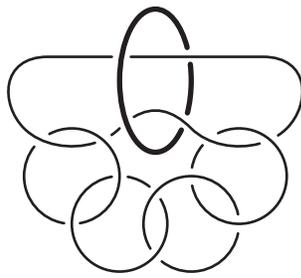


FIG. 2.3.2 – Pour obtenir cette variété on a découpé, puis recollé 5 copies du complémentaire de l’entrelacs de Whitehead (vu comme un nœud à deux ponts augmenté) le long de leur sphère à 3 trous d’augmentation. Les pointes d’augmentation ont été réunies pour former la composante grasse de l’entrelacs.

Chapitre 3

Cœurs convexes des groupes quasi-fuchsien du tore percé

3.1 Introduction

Considérons un groupe $\Gamma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ librement engendré par deux éléments de commutateur parabolique. On dit que Γ est un *groupe quasifuchsien du tore percé* si Γ est discret, sans torsion, avec $M := \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété géométriquement finie. Le cœur convexe de M admet alors deux composantes de bord, qui sont des *surfaces plissées* homéomorphes au tore percé T .

Dans ce chapitre, nous étudions les groupes quasi-fuchsien Γ du tore percé en étendant les méthodes du chapitre 1 : exhiber une triangulation totalement géodésique de l'intérieur du cœur convexe de M . En particulier, la combinatoire de la triangulation utilisée sera étroitement calquée sur celle du chapitre 1 : la droite-maîtresse Λ qui traverse le graphe de Farey aura pour extrémités, non plus les pentes des laminations stables et instables d'un homéomorphisme pseudo-Anosov du tore percé, mais les pentes des laminations de plissage du cœur convexe de \mathbb{H}^3/Γ , qu'on suppose données ⁽¹⁾. En particulier, nous montrerons que Γ est une fonction continue des laminations de plissage, ce qui entraînera le

Corollaire 3.9.9 (C. Series) *Les laminations de plissage forment un système de coordonnées continu de l'ensemble des groupes quasifuchsien non fuchsien du tore percé, vus à conjugaison près.*

La conjecture des laminations de plissage affirme que ce résultat reste vrai lorsqu'on remplace le tore percé par une surface quelconque. Le principal obstacle, pour la démontrer, est d'obtenir l'unicité d'un groupe de plissages donnés.

Décrivons à présent le principal résultat de ce chapitre. Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété hyperbolique complète à une pointe. Akiyoshi et Sakuma [AS] ont étendu la construction d'Epstein-Penner [EP] dans l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} pour montrer que l'intérieur V du cœur convexe de M admet une (unique) décomposition \mathcal{D}^{Geom} , canonique en un sens purement géométrique. Comme à la partie 1.11, \mathcal{D}^{Geom} est définie en considérant l'enveloppe convexe $C \subset \mathbb{R}^{3+1}$ de la Γ -orbite (discrète) d'un quelconque vecteur

¹Rappelons que dans la compactification de Thurston, le bord de l'espace de Teichmüller \mathcal{T} est l'ensemble \mathcal{PML} des laminations mesurées projectives : ici, \mathcal{T} est identifié à \mathbb{H}^2 (l'espace sous-jacent de la triangulation de Farey), tandis que \mathcal{PML} est identifiée à l'ensemble des pentes $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}^2$

isotrope représentant la pointe de M : la décomposition cellulaire du bord du polyèdre C se projette dans M pour donner \mathcal{D}^{Geom} . En fait, la projection de C à M contient non seulement V , mais aussi une partie du *bord* du cœur convexe de M , qui est précisément caractérisée (en dimension quelconque) dans [AS]. Ici nous nous intéresserons seulement à V lui-même.

Cette décomposition \mathcal{D}^{Geom} de V est plutôt mystérieuse en général. Par exemple, on ignore si \mathcal{D}^{Geom} est toujours localement finie. Toutefois, les cellules de \mathcal{D}^{Geom} de dimension maximale qui se relèvent à des faces de type espace de C sont des polyèdres idéaux contractiles dont l'union est un complexe dual du domaine de Ford–Voronoi de M . Les autres cellules de \mathcal{D}^{Geom} de dimension maximale peuvent être non contractiles, sont invisibles dans le domaine de Ford–Voronoi de M , et s'accumulent en général près de ∂V .

Dans le cas d'un groupe quasi-fuchsien du tore percé, les auteurs de [ASWY2] ont proposé une séduisante description conjecturale de la combinatoire de \mathcal{D}^{Geom} . Le complexe des triangulations idéales du tore percé est un arbre Y , et les classes projectives des deux plissages du bord de V définissent deux points à l'infini de Y : comme à la partie 1.3, l'unique géodésique de Y reliant ces deux points permet de définir une triangulation idéale (combinatoire) \mathcal{D}^{Comb} de V (plus de détails dans la partie 3.2). La triangulation \mathcal{D}^{Comb} est canonique en un sens combinatoire, par rapport aux laminations de plissage du bord de V . Peut-on raidir \mathcal{D}^{Comb} pour en faire une triangulation totalement géodésique de V (sans renverser l'orientation d'aucun tétraèdre) ? Le théorème principal de ce chapitre donne une réponse affirmative :

Théorème 3.1.1. *Si V est l'intérieur du cœur convexe d'un groupe quasi-fuchsien du tore percé, la triangulation idéale \mathcal{D}^{Geom} de V n'est autre que la version totalement géodésique de \mathcal{D}^{Comb} .*

Comme à la partie 1.11, une fois qu'on a deviné la nature de \mathcal{D}^{Geom} (en l'espèce, \mathcal{D}^{Comb}), montrer la canonicité géométrique est un simple calcul (vérifier une relation de convexité dans l'espace de Minkowski). Hormis \mathcal{D}^{Comb} et les décompositions plus grossières dont \mathcal{D}^{Comb} est un raffinement, nous ne connaissons en fait aucune décomposition de V en cellules idéales qui respecte l'involution hyperelliptique (propriété dont \mathcal{D}^{Geom} jouit automatiquement par symétrie).

Thurston et Bonahon [B1] ont montré comment associer une *lamination de bout* (classe projective de laminations mesurées) à un bout infini d'une variété hyperbolique. Le Théorème des laminations de bout [BCM] affirme, en gros, que la géométrie asymptotique du bout ne dépend que de la lamination associée. En vue d'une généralisation du théorème 3.1.1 à tous les groupes du tore percé, il est raisonnable de voir les laminations de bout comme des plissages d'intensité infinie (voir la partie 3.9.4), et de conjecturer que le groupe est déterminé à conjugaison près par ses laminations de plissage et/ou de bouts (cet énoncé engloberait le Théorème des laminations de bout et la Conjecture 0.2.3 des laminations de plissage de Thurston comme cas particuliers). De fait, notre méthode permet de construire des groupes kleinien du tore percé pour toute donnée admissible de laminations de plissage et/ou de bouts, et ces groupes satisfont à un analogue du théorème 3.1.1 : l'énoncé général, qui comprend une description complète de \mathcal{D}^{Geom} (en particulier dans le cas de laminations rationnelles), est le théorème 3.9.1. Quand exactement un des bouts est géométriquement infini, prouver l'unicité d'un tel groupe demeure un problème ouvert.

L'égalité $\mathcal{D}^{Geom} = \mathcal{D}^{Comb} =: \mathcal{D}$ du théorème 3.1.1 (et l'existence d'une réalisation de \mathcal{D}^{Comb} par des polyèdres idéaux bien orientés) était la Conjecture 8.2 de [ASWY2], également appelée *conjecture EPH* (pour elliptique–parabolique–hyperbolique, les trois types de faces dans l'espace de Minkowski : nous parlerons plutôt de faces de type espace, de type lumière et de type temps). Dans [Ak], Akiyoshi a établi cette égalité dans le cas de deux bouts infinis. Près d'un bout fini, les tétraèdres de \mathcal{D} s'aplatisent extrêmement vite : le plus petit des angles dièdres du i -ème tétraèdre est une fonction de i qui,

génériquement, tend vers 0 plus vite que n'importe quelle suite géométrique $(\alpha^i)_{i \geq 0}$. En un sens, la difficulté est de montrer que ces très petits angles restent néanmoins positifs dans la métrique hyperbolique.

La réalisation géométrique de \mathcal{D}^{Comb} (en d'autres termes, la construction des angles dièdres mentionnés ci-dessus) sera raisonnablement explicite : la solution apparaîtra comme le maximum d'une fonctionnelle "volume" \mathcal{V} concave, explicite, sur un domaine convexe explicitement défini. Le domaine est de dimension infinie, mais on borne explicitement la contribution des coordonnées de "queue" dans \mathcal{V} , ce qui suggère la possibilité d'une implémentation numérique. De plus, cette particularité nous permet de montrer que le groupe kleinien est continûment déterminé par les laminations de plissage : c'est l'étape clé pour démontrer le Théorème des laminations de plissage (partie 3.9.5).

3.2 Stratégie

La triangulation \mathcal{D}^{Geom} peut être vue (à titre dual) comme un raffinement du domaine de Ford–Voronoi du groupe quasi–fuchsien sous-jacent. Ce domaine a été décrit en très grand détail dans [Jø, ASWY1, ASWY2] et [ASWY3] : cette approche, qui fournit par dualité une description d'une sous-famille finie des tétraèdres de \mathcal{D}^{Geom} , repose sur un argument de "continuité géométrique" sur l'espace (connexe) des groupes quasi–fuchsien. Afin d'étudier *tous* les tétraèdres de \mathcal{D}^{Geom} simultanément, y compris ceux que le domaine de Ford–Voronoi ne voit pas (ceux qui ne sont pas de type espace), le présent travail adopte une approche diamétralement opposée : nous décrivons d'abord la forme que doivent posséder les tétraèdres de la triangulation candidate \mathcal{D}^{Comb} , puis nous travaillons à prouver que leur recollement définit un groupe quasi–fuchsien (plus exactement, l'intérieur du cœur convexe d'un tel groupe). Le calcul du 1.11 dans l'espace de Minkowski implique alors, par-dessus le marché, le théorème 3.1.1 ($\mathcal{D}^{Comb} = \mathcal{D}^{Geom}$).

Par rapport aux résultats antérieurs de canonicité géométrique ([Ak, L2, ASWY3]) qu'on trouve dans la littérature, la nouveauté du présent travail est donc de permettre le traitement de laminations de plissage, c'est-à-dire de groupes kleinien dont l'ensemble limite est plus petit que $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Nous utiliserons les résultats (et les notations) du chapitre 1, mais rappellerons toutes les définitions nécessaires.

3.2.1 Position précise du problème

Soit $T := (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ le tore percé en un point, muni de sa structure différentiable. Soit \mathcal{C} l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples fermées dans T qui ne séparent pas T (le bord d'un voisinage régulier du trou de T est ainsi exclu de \mathcal{C}). Soit aussi \mathcal{C}' l'ensemble des classes d'isotopie d'arcs proprement plongés dans T (allant du trou au trou) qui ne séparent pas T .

Considérons le revêtement abélien maximal $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$, et deux entiers ξ, η premiers entre eux. Si ℓ est une droite de pente η/ξ dans \mathbb{R}^2 qui rencontre (respectivement, ne rencontre pas) \mathbb{Z}^2 , alors $\pi(\ell \setminus \mathbb{Z}^2)$ définit une classe $\gamma' \in \mathcal{C}'$ (resp. $\gamma \in \mathcal{C}$). On appelle $\eta/\xi \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ la *pente* de γ' (resp. γ). Il est notoire que \mathcal{C} aussi bien que \mathcal{C}' sont paramétrés par $\mathbb{P}^1\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, *via* la pente : on a des bijections

$$s : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{Q} \quad ; \quad s' : \mathcal{C}' \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{Q} .$$

Si l'n'y a pas de risque de confusion, nous omettrons parfois s et identifierons simplement \mathcal{C} à $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$.

Soient (α^+, β^+) et (α^-, β^-) des éléments de \mathbb{R}^{*2} tels que β^+/α^+ et β^-/α^- soient deux irrationnels

distincts ⁽²⁾). Définissons les *plissages* $\lambda^\pm : \mathbb{P}^1\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^\pm$ par

$$\lambda^+(\eta/\xi) = \left\| \begin{array}{cc} \beta^+ & \eta \\ \alpha^+ & \xi \end{array} \right\| \quad \text{et} \quad \lambda^-(\eta/\xi) = - \left\| \begin{array}{cc} \beta^- & \eta \\ \alpha^- & \xi \end{array} \right\|, \quad (3.1)$$

où les doubles barres dénotent la valeur absolue du déterminant (et η/ξ est une fraction irréductible). Multiplier un couple (α^\pm, β^\pm) par (-1) ne change pas λ^\pm . Notons que $\lambda^- < 0 < \lambda^+$ (en tant que fonctions sur $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$).

Remarque 3.2.1. La mesure de plissage λ d'une surface plissée (d'aire finie) est définie *a priori* sur tout arc transverse à la lamination de plissage (voir la partie 3.8.1 pour une définition). Cependant, quelques paramètres réels suffisent à déterminer λ : par exemple, on connaît λ tout entière dès lors qu'on se donne les poids (pour λ) des arcs d'un réseau ferroviaire qui supporte la lamination de plissage [PH]. Dans ce chapitre, nous nous contenterons presque toujours de considérer la restriction d'une mesure de plissage sur T à l'ensemble \mathcal{C} des courbes (géodésique intrinsèques) simples fermées.

Dans le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 muni de sa frontière $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{P}^1\mathbb{R}$, considérons la triangulation de Farey : celle-ci s'obtient par réflexions successives du triangle idéal $1\infty 0$ par rapport à ses côtés (voir par exemple la seconde partie de [Min]). Les irrationnels β^+/α^+ et β^-/α^- appartiennent à $\partial\mathbb{H}^2$, et la droite (géodésique) orientée Λ de β^-/α^- à β^+/α^+ traverse une infinité d'arêtes de Farey $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (le choix de e_0 est arbitraire). À toute paire d'entiers consécutifs $(i-1, i)$ est associée une lettre, R ou L , selon que les arêtes e_{i-1}, e_i partagent leur extrémité droite ou gauche (on dira que Λ fait un virage à droite, ou à gauche, au triangle de Farey situé entre e_{i-1} et e_i). Nous obtenons un mot bi-infini $\dots RLLLR\ddots$ dont tout préfixe et tout suffixe contiennent une infinité de R , comme de L .

Deux rationnels de $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ sont voisins dans le graphe de Farey si et seulement si les éléments associés de \mathcal{C}' (arcs proprement plongés dans T) sont homotopiquement disjoints. Ainsi, chaque triangle de Farey τ définit une *triangulation idéale* du tore percé T : en effet, les sommets de τ sont les pentes de trois arcs disjoints (proprement plongés) de \mathcal{C}' dont l'union partage T en deux *triangles idéaux*. De plus, deux triangulations de T correspondant à des triangles de Farey qui partagent une arête ne diffèrent que par un *échange de diagonale* (figure 1.3.1). Un tel échange doit être vu comme un tétraèdre idéal (topologique) dans $T \times \mathbb{R}$ emplissant l'espace contenu entre deux surfaces plissées (topologiques), plissées selon les deux triangulations idéales (les diagonales de l'échange sont deux arêtes opposées du tétraèdre).

Comme au chapitre 1, notre stratégie sera de considérer une surface triangulée T_i (homéomorphe au tore percé T) correspondant au triangle de Farey situé entre e_{i-1} et e_i , et ce pour tout i dans \mathbb{Z} ; puis d'interpoler ces surfaces par des tétraèdres idéaux (topologiques) Δ_i correspondant aux échanges de diagonale (c'est-à-dire aux arêtes de Farey e_i elles-mêmes), et de munir tous ces objets de paramètres géométriques (angles dièdres) en utilisant le principe du volume maximal dû à Rivin (voir [R1]). Notons que λ^\pm code toute la combinatoire du recollement des tétraèdres Δ_i . De plus, chaque $T_i \subset T \times \mathbb{R}$, étant homotope à une fibre $T \times \{*\}$, est naturellement muni d'un *marquage* $T_i \simeq T$ (défini à isotopie près).

Théorème 3.2.2. *Il existe une variété hyperbolique non complète V , à une pointe, homéomorphe à $T \times \mathbb{R}$, telle que*

²Nous nous concentrons en premier lieu sur des laminations de plissage irrationnelles — quant aux rationnelles, voir la partie 3.9.

- i – Le complété métrique \overline{V} de V est homéomorphe à $T \times [0, 1] = V \sqcup T_{-\infty} \sqcup T_{+\infty}$, où $T_{-\infty}, T_{+\infty}$ sont des surfaces plissées dont les mesures de plissage, restreintes à l'ensemble \mathcal{C} des courbes simples fermées, coïncident respectivement avec $\lambda^- \circ s$ et $\lambda^+ \circ s$, où s est la fonction pente ;
- ii – Les réalisations géométriques des tétraèdres $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ dans V définissent une triangulation idéale totalement géodésique \mathcal{D}^{Comb} de V .

Les parties 3.3 à 3.8 sont consacrées à la construction d'une telle V . On exige que le trou de T corresponde à une pointe de V , de sorte que \overline{V} sera isométrique au cœur convexe d'une variété hyperbolique \mathbb{H}^3/Γ , où Γ est un groupe quasi-fuchsien du tore percé (on dira simplement que \overline{V} a pour plissage λ^\pm).

Par [S4], ou par le corollaire 3.9.9 ci-dessous, le groupe Γ est déterminé à conjugaison près dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ par les λ^\pm . Ainsi, notre construction fournit une décomposition \mathcal{D} de l'intérieur V du cœur convexe de *n'importe quel* groupe quasi-fuchsien du tore percé Γ dont les laminations de plissage sont irrationnelles. Le revêtement universel de V est représenté à la figure 3 de [T3].

Dans toute la démonstration, nous aurons affaire à une famille infinie de tétraèdres $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, séparés par des tores percés plissés $(T_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Par un choix arbitraire, nous avons résolu que T_i sera la surface $\Delta_i \cap \Delta_{i-1}$ — ou, ce qui revient au même, que le bord du tétraèdre Δ_i sera $T_i \cup T_{i+1}$. C'est toutefois la numérotation des tétraèdres Δ_i qu'on devra voir comme la plus essentielle au problème (voir notamment plus loin la définition 3.3.1).

3.2.2 Plan de la démonstration

Dans la partie 3.3, après avoir rappelé la paramétrisation (vue au 1.5) de l'espace des combinaisons d'angles dièdres x_i, y_i, z_i pour les tétraèdres $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, nous intégrons la donnée de λ^\pm sous forme d'une famille de contraintes supplémentaires sur les x_i, y_i, z_i . Dans la partie 3.4, nous menons à bien la maximisation du volume (sous ces contraintes). D'importantes propriétés asymptotiques de la solution sont analysées à la partie 3.5. Dans la partie 3.6 (à rapprocher de 1.4), nous décrivons la triangulation euclidienne de la pointe. Dans les parties 3.7 et 3.8, nous montrons que les surfaces plissées T_i convergent en un sens suffisamment fort pour que leur limite (quand i tend vers $\pm\infty$) coïncide avec le bord (plissé) du complété métrique de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$. À ce moment, nous aurons construit le cœur convexe d'un groupe quasi-fuchsien. Le théorème 3.1.1, pour ce groupe particulier, découle alors simplement du calcul déjà exposé à la partie 1.11. Dans la partie 3.9, nous donnons une construction analogue de groupes du tore percé admettant des pentes de plissage β^\pm/α^\pm rationnelles et/ou des bouts infinis, et nous redémontrons que le couple (λ^+, λ^-) forme un système de coordonnées continues pour l'espace des groupes quasi-fuchsien (non fuchsien) : c'est le théorème des laminations de plissage ; voir [S4]. Tous les groupes quasi-fuchsien du tore percé s'obtiennent donc par notre construction, et le théorème 3.1.1 est démontré.

3.3 L'espace des déformations

3.3.1 Angles dièdres

Dans ce paragraphe (simple rappel du 1.5), nous munissons d'angles dièdres les tétraèdres idéaux Δ_i . Plus précisément, nous décrivons l'espace convexe Σ des combinaisons d'angles positifs pour les Δ_i telles que

- les trois angles dièdres à chaque sommet idéal de Δ_i ont pour somme π (cela est vrai pour tout tétraèdre idéal de \mathbb{H}^3) ;

- les angles dièdres au voisinage d’une arête de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ ont pour somme 2π (cela est nécessaire, bien qu’insuffisant, pour avoir une structure hyperbolique au voisinage de l’arête) ;
- les trois angles de plissage de chaque tore percé plissé T_i , ou angles dièdres extérieurs signés, ont pour somme 0 (cela est nécessaire, bien qu’insuffisant, pour faire du trou p de T une pointe de V , c’est-à-dire faire de l’holonomie du lacet autour de p une isométrie parabolique de \mathbb{H}^3).

Les trois conditions ci-dessus ne font que reformuler (1.1) (la première condition implique que deux arêtes opposées de Δ_i reçoivent toujours le même angle dièdre). Par la suite nous appliquerons le principe du volume maximal de Rivin sur un certain sous-ensemble convexe de (l’adhérence de) Σ .

Comme au 1.5, les solutions du problème linéaire ci-dessus sont données par les suites $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } i \in \mathbb{Z} \text{ on a } 0 < w_i < \pi. \\ \text{Si } i \text{ sépare des lettres identiques (deux premiers cas), } 2w_i > w_{i+1} + w_{i-1}. \\ \text{Si } i \text{ sépare des lettres différentes (deux derniers cas), } |w_{i+1} - w_{i-1}| < w_i. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Plus précisément, en notant $(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) = (a, b, c)$, l’expression des angles dièdres x_i, y_i, z_i de Δ_i en fonction des lettres (R ou L) de Ω situées de part et d’autre de l’indice i (ou de l’arête de Farey e_i) est donnée par le tableau suivant (rappel du tableau 1.3).

	$L L$	$R R$	$L R$	$R L$
x_i	$\frac{1}{2}(a + c)$	$\frac{1}{2}(-a + 2b - c)$	$\frac{1}{2}(a + b - c)$	$\frac{1}{2}(-a + b + c)$
y_i	$\frac{1}{2}(-a + 2b - c)$	$\frac{1}{2}(a + c)$	$\frac{1}{2}(-a + b + c)$	$\frac{1}{2}(a + b - c)$
z_i	$\pi - b$	$\pi - b$	$\pi - b$	$\pi - b$

(3.3)

Supposons que $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfait (3.2). On rappelle quelques conventions utiles du chapitre 1 :

- Aux arêtes dont la pente est l’extrémité droite (resp. gauche) de e_i , l’angle de Δ_i vaut x_i (resp. y_i).
- Le facteur \mathbb{R} de $T \times \mathbb{R}$ permet de munir chaque surface plissée T_i d’une orientation transverse, dont on dit qu’elle pointe *vers le haut*.
- Soit ϵ une arête de T_i : si les angles dièdres adjacents à ϵ situés *au dessus* de T_i ont pour somme $\pi + \theta$, on appelle θ l’angle de plissage de T_i en ϵ .
- Une arête qui saille vers le haut a donc un plissage positif : cela concorde avec la convention $\lambda^- < 0 < \lambda^+$ de (3.1), puisque l’on entend faire de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ un espace convexe.
- Les angles de plissage de T_i sont donnés à la figure 1.5.1 (haut) en fonction des w_i : dans le coin p du triangle de Farey associé à T_i , figure l’angle de plissage de T_i en l’arête de pente p . Rappelons les valeurs (1.2) des angles de plissage de T_i :

$$w_{i-1} ; -w_i ; w_i - w_{i-1} . \quad (3.4)$$

Notons dorénavant Σ l’espace (convexe, non vide) des solutions $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de (3.2).

3.3.2 Une contrainte naturelle sur le plissage de T_i

Nous décrivons à présent un certain sous-ensemble convexe de Σ . Ce sous-ensemble sera défini par des conditions de décroissance pour la suite $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ au voisinage de $\pm\infty$. Ces conditions, dont la

vocation est de refléter les λ^\pm , s'obtiennent comme suit. Considérons le tore percé plissé T_i séparant les tétraèdres Δ_i et Δ_{i-1} . Soient $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les arêtes de T_i et $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les angles de plissage associés (comptés positivement pour une arête qui saille vers le haut, comme dans (3.4) ci-dessus). On rappelle l'ensemble \mathcal{C} des (classes d'isotopie de) courbes simples fermées dans le tore percé T , non homotopes à un point ou au lacet autour du trou. Définissons la mesure de plissage $\lambda_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de T_i par

$$\lambda_i(\gamma) = \delta_1 \nu_1(\gamma) + \delta_2 \nu_2(\gamma) + \delta_3 \nu_3(\gamma), \quad (3.5)$$

où $\nu_\sigma(\gamma) \in \mathbb{N}$ est le nombre d'intersection de γ avec l'arête ϵ_σ . Notons $\varepsilon_\sigma \in \mathcal{C}$ la courbe simple fermée qui a la même pente que ϵ_σ . Nous posons comme condition

$$\lambda^-(\varepsilon_\sigma) < \lambda_i(\varepsilon_\sigma) < \lambda^+(\varepsilon_\sigma)$$

pour tout $\sigma \in \{1, 2, 3\}$, et de même pour tout tore percé plissé T_i dans la \mathbb{Z} -famille ⁽³⁾.

Autrement dit, notons η/ξ la pente (rationnelle) de ε_σ . Observons que $\lambda_i(\varepsilon_\sigma) = \delta_{\sigma'} + \delta_{\sigma''} = -\delta_\sigma$ où $\{\sigma, \sigma', \sigma''\} = \{1, 2, 3\}$, car les pentes de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des voisins de Farey. Ainsi, par (3.1), la condition posée est que pour tout ε_σ défini comme ci-dessus,

$$-\left\| \begin{array}{cc} \beta^+ & \eta \\ \alpha^+ & \xi \end{array} \right\| < \delta_\sigma < \left\| \begin{array}{cc} \beta^- & \eta \\ \alpha^- & \xi \end{array} \right\|. \quad (3.6)$$

Afin d'exprimer (3.6) en termes des w_i , il nous faut définir quelques notations (les δ_σ sont fonction des w_i via (3.4) ci-dessus). Pour chaque arête de Farey e_i , soit q_i^+ (resp. q_i^-) le rationnel situé à l'opposé de e_i , du même côté de e_i que le point β^+/α^+ (resp. β^-/α^-). Pour un quelconque rationnel $p = \eta/\xi$, introduisons la notation légèrement abusive ⁽⁴⁾

$$\frac{\beta}{\alpha} \wedge p := \left\| \begin{array}{cc} \beta & \eta \\ \alpha & \xi \end{array} \right\| \quad (\text{valeur absolue du déterminant}). \quad (3.7)$$

Alors, si l, r sont les rationnels situés aux extrémités gauche et droite de l'arête de Farey e_i , on a

$$\left(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge l\right) + \left(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r\right) = \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge q_i^- ; \quad \left(\frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge l\right) + \left(\frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge r\right) = \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge q_i^+ . \quad (3.8)$$

En effet, la notation \wedge est invariante sous l'action du groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ (agissant sur $(\mathbb{H}^2, \partial\mathbb{H}^2)$ par isométries et sur les couples $\pm(\alpha, \beta)$ comme groupe de matrices). Comme $PSL_2(\mathbb{Z})$ agit transitivement sur les arêtes de Farey orientées, on est ramené au cas $(l, r, q_i^+, q_i^-) = (\infty, 0, 1, -1)$ où $\beta^-/\alpha^- < 0 < \beta^+/\alpha^+$, qui est immédiat.

Traduisons maintenant l'équation (3.6) en termes des w_i . Soient e_{i-1}, e_i deux arêtes de Farey consécutives ; p et p' sont les extrémités de e_{i-1} ; p et p'' sont les extrémités de e_i . On a $q_{i-1}^+ = p''$ et $q_i^- = p'$. Au vu de (3.4) et de la figure 1.5.1 (haut), l'équation (3.6) devient

³Il s'ensuit en fait une inégalité semblable pour toutes les courbes simples fermées γ de \mathcal{C} (voir le lemme 3.3.5 plus bas), c'est-à-dire $\lambda^- < \lambda_i < \lambda^+$ en tant que fonctions sur \mathcal{C} . Forcer cette inégalité "naturelle" est la raison-d'être de notre contrainte.

⁴Abusive en ce qu'elle dépend du couple (α, β) et non du seul réel $\frac{\beta}{\alpha}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p'') < w_{i-1} < \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge p'' \\ -(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p') < -w_i < \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge p' \\ -(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p) < w_i - w_{i-1} < \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge p. \end{array} \right.$$

Comme les w_i sont strictement positifs (3.2), cela équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i-1} < \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge q_{i-1}^+ \\ -(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge q_i^-) < -w_i \\ -(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p) < w_i - w_{i-1} < \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge p. \end{array} \right.$$

Enfin, observons $\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p = (\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge q_{i-1}^-) - (\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge q_i^-)$ tandis que $\frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge p = (\frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge q_i^+) - (\frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge q_{i-1}^+)$, par l'équation (3.8). Ainsi, si l'on introduit

$$\phi_i^+ := \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge q_i^- \quad \text{et} \quad \phi_i^- := \frac{\beta^-}{\alpha^-} \wedge q_i^+ \quad (3.9)$$

alors l'équation (3.6) devient

$$\left. \begin{array}{l} w_i < \min\{\phi_i^+, \phi_i^-\} \\ \phi_{i-1}^- - \phi_i^- < w_{i-1} - w_i < \phi_{i-1}^+ - \phi_i^+ \end{array} \right\} \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

3.3.3 Étude de ϕ^+ et ϕ^-

Définition 3.3.1. En 3.2.1, nous avons associé à chaque $i \in \mathbb{Z}$ une arête de Farey e_i , située entre deux lettres à valeurs dans $\{R, L\}$. Nous appellerons i un *indice charnière*, et Δ_i un *tétraèdre charnière*, quand les deux lettres sont distinctes (RL ou LR). L'adjectif *non-charnière* se rapporte à RR ou LL .

Lemme 3.3.2. Les suites $\phi^+, \phi^- : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfont les propriétés suivantes.

- i – Premièrement, ϕ^- est strictement croissante et ϕ^+ strictement décroissante.
- ii – Pour tout i , on a $1 < \phi_{i+1}^- / \phi_i^- < 2$ et $1 < \phi_{i-1}^+ / \phi_i^+ < 2$.
- iii – Si $i \in \mathbb{Z}$ n'est pas charnière, alors $\phi_{i-1}^+ + \phi_{i+1}^+ = 2\phi_i^+$ et $\phi_{i-1}^- + \phi_{i+1}^- = 2\phi_i^-$.
- iv – Si $i \in \mathbb{Z}$ est charnière, alors $\phi_{i+1}^- = \phi_i^- + \phi_{i-1}^-$ et $\phi_{i-1}^+ = \phi_i^+ + \phi_{i+1}^+$.
- v – Les suites ϕ^\pm sont convexes : $2\phi_i^\pm \leq \phi_{i-1}^\pm + \phi_{i+1}^\pm$.
- vi – Si $i < j$ sont deux charnières consécutives, alors $1 + \frac{j-i}{2} \leq \left\{ \frac{\phi_i^+}{\phi_j^+}, \frac{\phi_j^-}{\phi_i^-} \right\} \leq 1 + j - i$.
- vii – On a $\lim_{+\infty} \phi^+ = \lim_{-\infty} \phi^- = 0$ et $\lim_{-\infty} \phi^+ = \lim_{+\infty} \phi^- = +\infty$.
- viii – On a $\lim_{-\infty} (\phi_{i-1}^+ - \phi_i^+) = \lim_{+\infty} (\phi_{i+1}^- - \phi_i^-) = +\infty$.

Remarque 3.3.3. Les points iii et iv sont simplement des cas limites des inégalités (3.2), qui signifient la positivité des angles x_i, y_i, z_i .

Démonstration. Nous traitons seulement ϕ^+ : les arguments pour ϕ^- sont analogues. Soient $e_{i-1} = pr_{i-1}$ et $e_i = pr_i$ deux arêtes de Farey consécutives. On a $\phi_i^+ = \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r_{i-1}$ et $\phi_{i-1}^+ = \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r_{i-1} + \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p$ par l'équation (3.8), d'où i.

Pour ii, il suffit de montrer la borne supérieure. Observer que $\phi_{i-1}^+ = (\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r_i + \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p) + \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p$ tandis que $\phi_i^+ = \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r_i + \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p$.

Pour iii, supposons $e_{i+1} = pr_{i+1}$ de sorte que $\phi_k^+ = \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p + \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r_k$ quand $|i - k| \leq 1$. Pour $k \in \{i, i + 1\}$ le membre de droite est $\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge r_{k-1}$, donc $(\phi_{k-1}^+ - \phi_k^+) = \frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p$, ce qui suffit.

Pour iv, supposons $e_{i+1} = p'r_i$. En utilisant les notations de la formule (3.9), nous avons $q_{i+1}^- = p$ et $q_i^- = r_{i-1}$, extrémités de e_{i-1} . Vu l'équation (3.8), cela donne le résultat. Le point v est une conséquence de iv et ii aux indices charnières, et de iii aux autres indices. Pour vi, observer que $\phi_i^+ = \phi_j^+ + (j - i)\phi_{j+1}^+$ par iii-iv, et conclure en utilisant ii. Le point vii est une conséquence de vi, et de la présence d'une infinité de charnières au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. Le point viii découle de vii, v, et iv. \square

3.3.4 Comportement des plissages $\lambda_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$

Pour toute suite réelle $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, définissons la suite ∇u par $(\nabla u)_i = u_{i-1} - u_i$. Résumons les conditions imposées à $w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (équations 3.2 et 3.10 ci-dessus) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} 0 < w_i < \min\{\phi_i^+, \phi_i^-, \pi\} \\ \nabla \phi_i^- < \nabla w_i < \nabla \phi_i^+ & \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}; \\ |w_{i+1} - w_{i-1}| < w_i & \text{si } i \text{ est charnière;} \\ w_{i+1} + w_{i-1} < 2w_i & \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Vérifions que $w_i = f(\phi_i^+)f(\phi_i^-)$, par exemple, satisfait ce système, où f est n'importe quelle fonction strictement concave, monotone, de \mathbb{R}_+ dans $[0, 1[$, satisfaisant $f(x) \leq x$. Les deux premières lignes sont immédiates. Pour la troisième, observons que

$$\begin{aligned} f(\phi_{i+1}^+)f(\phi_{i+1}^-) &= f(\phi_{i+1}^+)f(\phi_i^- + \phi_{i-1}^-) < f(\phi_{i+1}^+) [f(\phi_i^-) + f(\phi_{i-1}^-)] \\ &< f(\phi_i^+)f(\phi_i^-) + f(\phi_{i-1}^+)f(\phi_{i-1}^-) \end{aligned}$$

et de même, $f(\phi_{i-1}^+)f(\phi_{i-1}^-) < f(\phi_i^+)f(\phi_i^-) + f(\phi_{i+1}^+)f(\phi_{i+1}^-)$. Pour la quatrième, notons $(A, a) = (f(\phi_{i-1}^+), f(\phi_{i+1}^+))$ et $(b, B) = (f(\phi_{i-1}^-), f(\phi_{i+1}^-))$, de sorte que $A > a$ et $b < B$. On a alors bien

$$f(\phi_i^+)f(\phi_i^-) > \frac{A+a}{2} \frac{b+B}{2} = \frac{Ab+aB}{2} + \frac{(A-a)(B-b)}{4} > \frac{Ab+aB}{2}.$$

Définition 3.3.4. Si (3.11') dénote le système (3.11) dans lequel toutes les inégalités strictes ont été remplacées par des inégalités larges, soit $W \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ l'espace des solutions de (3.11').

Supposons $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in W$ et rappelons (3.5) la mesure de plissage $\lambda_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ associée à T_i , le tore plissé percé situé entre les tétraèdres Δ_i et Δ_{i-1} .

Lemme 3.3.5. Pour toute courbe $\gamma \in \mathcal{C}$, la suite $(\lambda_i(\gamma))_{i \in \mathbb{Z}}$ est croissante, avec

$$\lambda^-(\gamma) \leq \lim_{i \rightarrow -\infty} \lambda_i(\gamma) \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i(\gamma) \leq \lambda^+(\gamma).$$

Démonstration. Tout d'abord, observons que les triplets d'angles de plissage de T_i, T_{i+1} sont toujours de la forme $(A, B, -x_i - y_i); (A - 2x_i, B - 2y_i, x_i + y_i)$ donnée dans la figure 3.3.1, où x_i (resp. y_i) est positif, égal à l'angle dièdre du tétraèdre Δ_i aux côtés horizontaux (resp. verticaux) du domaine fondamental (carré) de la surface T . La courbe fermée γ de T traverse ce domaine fondamental un certain nombre de fois, verticalement, horizontalement, ou en diagonale (découpant l'un des quatre coins du domaine). Alors $\lambda_i(\gamma)$ s'obtient en sommant les angles de plissage rencontrés par γ lors de ces différents passages (si U et U' sont les angles de plissage rencontrés par γ à l'entrée et à la sortie du domaine, et V la somme des angles rencontrés à l'intérieur du domaine [cette somme a un terme au plus !], on compte un plissage de $\frac{U}{2} + V + \frac{U'}{2}$ pour le passage considéré).

De λ_i à λ_{i+1} , le plissage total le long de γ augmente de :

$$\left[\frac{A-2x_i}{2} + (x_i + y_i) + \frac{A-2x_i}{2} \right] - \left[\frac{A}{2} - (x_i + y_i) + \frac{A}{2} \right] = 2y_i \text{ par passage vertical ;}$$

$$\left[\frac{B-2y_i}{2} + (x_i + y_i) + \frac{B-2y_i}{2} \right] - \left[\frac{B}{2} - (x_i + y_i) + \frac{B}{2} \right] = 2x_i \text{ par passage horizontal ;}$$

$$\left[\frac{A-2x_i}{2} + \frac{B-2y_i}{2} \right] - \left[\frac{A}{2} - (x_i + y_i) + \frac{B}{2} \right] = 0 \text{ par passage selon la diagonale montante ;}$$

$$\left[\frac{A-2x_i}{2} + (x_i + y_i) + \frac{B-2y_i}{2} \right] - \left[\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right] = 0 \text{ par passage selon la diagonale descendante,}$$

d'où la monotonie annoncée. (Cet argument, ou une variante, fonctionne encore pour des surfaces de genre quelconque et des courbes fermées non-simples, du moment que les angles du tétraèdre sont positifs).

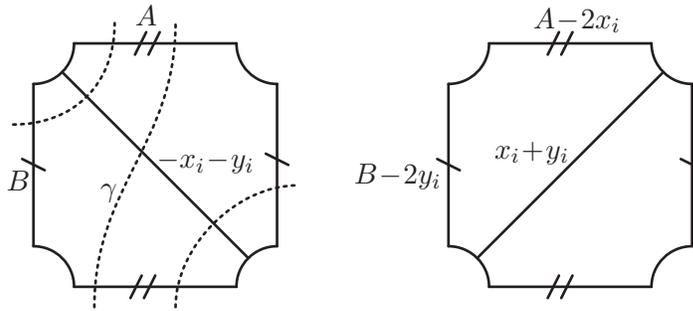


FIG. 3.3.1 – Plissages des surfaces T_i et T_{i+1} bordant Δ_i .

Pour l'encadrement, nous nous préoccupons seulement du côté de λ^+ . Considérons la pente $\sigma = \frac{\eta}{\xi} \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ de γ (une fraction réduite) ; rappelons la définition $\lambda^+(\sigma) = \|\frac{\beta^+}{\alpha^+} \frac{\eta}{\xi}\|$ posée en (3.1). Considérons un indice i suffisamment élevé pour que l'arête de Farey e_{i-1} sépare σ de β^+/α^+ . Considérons les points $p, p', p'' \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ tels que $(e_{i-1}, e_i) = (pp', pp'')$: les points $(\sigma, p, \frac{\beta^+}{\alpha^+}, p'', p', \sigma)$ sont rangés dans cet ordre (cyclique) le long de $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$. La notation \wedge de (3.7), appliquée à un couple de rationnels, n'est autre que le nombre d'intersection (géométrique) des courbes correspondantes. Par conséquent, en utilisant les angles donnés dans la figure 1.5.1 (haut), on trouve

$$\begin{aligned}
\lambda_i(\gamma) &= (p \wedge \sigma)(w_i - w_{i-1}) - (p' \wedge \sigma)w_i + (p'' \wedge \sigma)w_{i-1} \\
&= w_i(p \wedge \sigma) + \nabla w_i(p' \wedge \sigma) \quad \text{car } p'' \wedge \sigma = p \wedge \sigma + p' \wedge \sigma \\
&\leq \phi_i^+(p \wedge \sigma) + \nabla \phi_i^+(p' \wedge \sigma) \\
&= \left(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p'\right)(p \wedge \sigma) + \left(\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge p\right)(p' \wedge \sigma) \quad (*)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

par définition (3.9) de ϕ^+ . Cette dernière quantité est $\frac{\beta^+}{\alpha^+} \wedge \sigma$ (d'où la borne supérieure) : par SL_2 -invariance de la notation \wedge , il suffit de le vérifier pour $p = \infty$ et $p' = 0$ — dans ce cas, $\frac{\beta^+}{\alpha^+}$ et $\sigma = \frac{\eta}{\xi}$ sont de signes opposés, et (*) devient effectivement $|\beta^+ \xi| + |\alpha^+ \eta| = \left| \begin{vmatrix} \beta^+ & \eta \\ \alpha^+ & \xi \end{vmatrix} \right|$. \square

3.4 Volume hyperbolique

La topologie produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ induit une topologie naturelle sur l'espace W de la définition 3.3.4 : de toute évidence, W est non-vide, convexe et compact.

Si (x, y, z) est un triplet positif tel que $x + y + z = \pi$, soit $\mathcal{V}(x, y, z)$ le volume hyperbolique d'un tétraèdre idéal d'angles intérieurs x, y, z . Nous souhaitons calculer le volume hyperbolique total de tous les tétraèdres quand $w \in W$, c'est-à-dire

$$\mathcal{V}(w) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}(x_i, y_i, z_i)$$

où x_i, y_i, z_i sont définis en fonction des w_i via le tableau (3.3). Il nous faut bien sûr commencer par vérifier que cette somme converge. Estimons \mathcal{V} : la formule bien connue (1.5) (tirée de [Mi1]) donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(x, y, z) &= - \int_0^x \log 2 \sin - \int_0^y \log 2 \sin - \int_0^z \log 2 \sin \\
&= \int_0^x \log \frac{\sin(\tau + y)}{\sin \tau} d\tau \quad (\text{car } \int_0^\pi \log 2 \sin = 0) \\
&\leq \int_0^x \log \frac{\tau + y}{\tau} d\tau \quad (\text{par concavité de } \sin) \\
&= x \log \frac{x + y}{x} + y \log \frac{x + y}{y} \\
&\leq (x + y) \log 2 \quad (\text{concavité de } \log).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Lemme 3.4.1. *Il existe une constante universelle $K > 0$ telle que la somme des volumes des tétraèdres Δ_j pour $j \geq i$ (resp. $j \leq i$) est au plus $K \phi_i^+$ (resp. $K \phi_i^-$).*

Démonstration. Nous nous concentrons uniquement sur le côté ϕ^+ . Par le calcul ci-dessus, le volume du tétraèdre Δ_i est au plus $w_i \log 2 \leq \phi_i^+ \log 2$ (voir le tableau 3.3). En vertu du lemme 3.3.2-vi, cela

implique que le volume total de tous les tétraèdres *charnière* au delà de l'indice i est au plus $3\phi_i^+ \log 2$. Pour la même raison, il suffit de montrer

Sous-lemme 3.4.2. *Il existe une constante universelle $L > 0$ telle que si 0 et $N \in \mathbb{N}$ sont deux charnières consécutives, la somme des volumes des tétraèdres $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}$ est au plus $L\phi_0^+$.*

Démonstration. Par homogénéité dans l'estimation (3.13), on peut supposer $\phi_0^+ = 1$ et remplacer le volume par son estimation. Aussi, soit $(w_i)_{0 \leq i \leq N}$ une suite strictement concave dans $[0, 1]$: d'après le tableau (3.3), il nous faut trouver une borne supérieure universelle L (indépendante de N) pour

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{w_{i+1} + w_{i-1}}{2} \log \frac{2w_i}{w_{i+1} + w_{i-1}} + \frac{2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}}{2} \log \frac{2w_i}{2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}}.$$

Si $A < B$ sont des entiers strictement positifs, notons Σ_A^B la somme ci-dessus, restreinte aux indices $A \leq i < B$. Le terme général de Σ_A^B est au plus $2e^{-1} < 1$, parce que $\frac{\tau}{2} \log \frac{2}{\tau} \leq e^{-1}$ pour tout $\tau > 0$ (et que $w_i < 1$). Pour un contrôle plus fin, nous majorons la première moitié du terme général de Σ_A^B par $(\frac{w_{i+1} + w_{i-1}}{2})(\frac{2w_i}{w_{i+1} + w_{i-1}} - 1)$, et la seconde moitié, par les propriétés de concavité de \log . Il vient

$$\begin{aligned} \Sigma_A^B &\leq \sum_{i=A}^{B-1} \left(\frac{2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}}{2} \times \frac{w_{i+1} + w_{i-1}}{w_{i+1} + w_{i-1}} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=A}^{B-1} \frac{2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}}{2} \right) \log \frac{\sum_{i=A}^{B-1} w_i}{\sum_{i=A}^{B-1} \frac{2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}}{2}} \\ &= \sigma \log \frac{e \sum_{i=A}^{B-1} w_i}{\sigma}, \quad \text{où } \sigma = \frac{w_A - w_{A-1} + w_{B-1} - w_B}{2}. \end{aligned}$$

Soit $M \in \llbracket 0, N \rrbracket$ une valeur de l'indice i pour laquelle w_i est maximal. Si $A < B \leq M$, on a

$$0 \leq \sigma \leq \frac{w_A - w_{A-1}}{2} \leq \frac{1}{2A} \leq 1$$

(la troisième inégalité se déduit de la concavité de w entre 0 et A). Notons que $f : \tau \mapsto \tau \log \frac{e}{\tau}$ est croissante sur $[0, 1]$. Nous appliquons ces faits à $A = 2^{k-1}$ et $B = \min\{2^k, M\}$: la majoration précédente de Σ_A^B peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_A^B &\leq f(\sigma) + \sigma \log \left(\sum_{i=A}^{B-1} w_i \right) \\ &\leq f(2^{-k}) + 2^{-k} \log 2^{k-1} = 2^{-k} [1 + (2k - 1) \log 2]. \end{aligned}$$

Cette quantité (quand k décrit \mathbb{N}^*) est le terme d'une série absolument convergente de somme $L' < +\infty$. Après un argument semblable pour les indices $M < i < N$, nous pouvons prendre $L = 2e^{-1} + 2L'$. \square

Enfin, nous pouvons prendre $K = 3L + 3 \log 2$. Le lemme 3.4.1 est démontré. \square

Corollaire 3.4.3. *La fonctionnelle volume $\mathcal{V} : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie, continue, et concave.*

Démonstration. Le caractère bien défini était l'objet du lemme 3.4.1. Étant donné $\varepsilon > 0$, seuls un nombre fini d'indices i satisfont $\min\{\phi_i^+, \phi_i^-\} > \varepsilon/K$, et les autres contribuent au volume à hauteur de 2ε au

plus : d'où la continuité dans la topologie produit. La concavité se déduit de la concavité du volume d'un (seul) tétraèdre, en fonction de ses angles dièdres (voir la proposition 1.6.6). \square

Par compacité, il existe au moins une suite $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in W$ qui maximise le volume hyperbolique \mathcal{V} . Désormais, w dénotera un point de W réalisant ce maximum.

Proposition 3.4.4. *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, si $x_j y_j z_j = 0$ alors $\max\{x_j, y_j, z_j\} = \pi$.*

Démonstration. On procède comme à la proposition 1.7.1, à ceci près que le volume est maintenant une somme infinie : supposons que le tétraèdre Δ_j ait exactement un angle nul, et cherchons une contradiction. Si $\mathcal{V}(\Delta^t)$ est le volume d'un tétraèdre Δ^t d'angles $x^t, y^t, (\pi - x^t - y^t)$ où $(x^t, y^t)_{t \geq 0}$ est différentiable, $x^0 = 0 < y^0 < \pi$ et $dx^t/dt|_{t=0} > 0$, alors $d\mathcal{V}(\Delta^t)/dt|_{t=0} = +\infty$ (par la formule (3.13) ci-dessus).

Soit $(w'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite satisfaisant toutes les inégalités (strictes) de (3.11); définissons $w^t := w + t(w' - w)$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Alors $w^t \in W$, par convexité de W . Soit Δ_i^t le i -ème tétraèdre déterminé via (3.3) par $(w'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$: alors les angles de Δ_i^t satisfont les hypothèses du paragraphe précédent, et

$$\mathcal{V}(w^t) = \mathcal{V}(\Delta_j^t) + \left(\sum_{i \neq j} \mathcal{V}(\Delta_i^t) \right)$$

admet $+\infty$ comme dérivée à droite en $t = 0$ (le second terme de l'addition est concave et continu, et admet donc une dérivée à droite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0). Par conséquent, \mathcal{V} n'était pas maximal en w . \square

Dans la partie 3.9, nous ferons appel à la conséquence suivante de la proposition 3.4.4 :

Proposition 3.4.5. *Si $j \in \mathbb{Z}$ et $x_j y_j z_j = 0$, alors j est une charnière et $w_j = 0$.*

C'est exactement la proposition 1.7.3. Mais on peut en fait dire bien plus :

Proposition 3.4.6. *Toutes les inégalités (strictes) de (3.11) sont vraies en w .*

Démonstration. Soit $\delta_i := \phi_i^+ - w_i$. D'après la seconde condition de (3.11), la suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est positive, décroissante, et (par le lemme 3.3.2–iii–iv) vérifie

$$\begin{aligned} \delta_{i-1} &\geq \delta_i + \delta_{i+1} && \text{si } i \text{ est charnière;} \\ \delta_i &\leq \frac{\delta_{i-1} + \delta_{i+1}}{2} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Ces inégalités a priori sont larges, par la définition 3.3.4 de W .

Si $w_i = \phi_i^+$ pour quelque indice i , par décroissance de (δ_i) , on a $w_j = \phi_j^+$ pour tout $j \geq i$. Si $\nabla w_i = \nabla \phi_i^+$, alors $\delta_{i-1} = \delta_i$, d'où $\delta_i = \delta_{i+1} = \dots = \delta_k$ où k est le plus petit indice charnière supérieur ou égal à i . On a alors $\delta_{k+1} = 0$, donc $w_j = \phi_j^+$ pour tout $j > k$. Par conséquent, si quelque inégalité de (3.11) contenant ϕ^+ est en butée, alors $w = \phi^+$ dans un voisinage de $+\infty$.

Par le tableau 3.3 (et le lemme 3.3.2–iii–iv), on voit que tous les tétraèdres Δ_i pour i assez grand ont un angle nul, et un angle égal à $\pi - \phi_i^+ \in]0, \pi[$: donc w n'était pas un maximum, par la proposition 3.4.4. Aussi, toutes les inégalités de (3.11) impliquant ϕ^+ (ou, pareillement, ϕ^-) sont strictes en w . Il reste à montrer que les inégalités 3.2 sont strictes : rappelons qu'il s'agit des inégalités 1.4 du chapitre 1.

Tous les résultats des parties 1.7 à 1.9 sont vrais dans ce contexte (les démonstrations sont rigoureusement identiques, à la seule différence que les tétraèdres sont indexés dans \mathbb{Z} et non plus dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$). Par la proposition 1.9.1, toutes les inégalités (3.11) sont strictes en w , faisant de w un *point critique* de la fonctionnelle volume \mathcal{V} . \square

Corollaire 3.4.7. *Le maximum w de la fonctionnelle $\mathcal{V} : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ est unique.*

Démonstration. En effet, le volume d'un tétraèdre idéal est une fonction *strictement* concave des angles dièdres lorsque ceux-ci sont strictement positifs (proposition 1.6.6). \square

La proposition 3.4.6 implique que la représentation d'holonomie est triviale, c'est-à-dire que le recollement de n'importe quelle famille finie de tétraèdres consécutifs Δ_i , d'angles spécifiés par le maximisateur w du volume, définit une variété complète à bord polyédral (les Δ_i "s'assemblent correctement" autour de chaque arête intérieure) : voir [R1], [CH] ou le lemme 1.6.2. Par conséquent, les liens sommitaux des tétraèdres idéaux (ces liens sont des triangles euclidiens) forment une triangulation du lien de la pointe de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$. Le lien de cette pointe reçoit une structure euclidienne (définie à similitude près) et on peut dessiner son revêtement universel dans le plan (figure 3.4.1 — les propriétés combinatoires de cette triangulation sont analysées en détail dans la partie 3.6 ; voir aussi la partie 1.4). Notons Γ l'image de la représentation d'holonomie associée, $\rho : \pi_1(T) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$.

Dorénavant, nous considérerons $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ comme un espace métrique (homéomorphe à $T \times \mathbb{R}$) muni d'une structure hyperbolique non complète. Sauf mention expresse du contraire, Δ_i (muni des angles définis par w) désignera une partie de cet espace V .

3.5 Comportement de (w_i)

Nous souhaitons prouver que les plissages λ_i (voir la partie 3.3) des tores percés plissés T_i convergent (pour la topologie faible-*, c'est-à-dire sur n'importe quelle courbe test $\gamma \in \mathcal{C}$) vers les plissages λ^\pm au voisinage de l'infini. À cet effet, il nous faut étudier la suite $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, et en particulier, montrer que les bornes imposées par ϕ^\pm dans l'équation 3.11 se voient presque (mais pas tout à fait) atteintes. Nous utiliserons la notation ∇ comme dans la partie 3.3.4.

Lemme 3.5.1. *Rappelons que $\nabla\phi^- < 0 < \nabla\phi^+$ (lemme 3.3.2). On a*

$$\max \left\{ \overline{\lim}_{\mathbb{Z}} \frac{w}{\phi^+}, \overline{\lim}_{\mathbb{Z}} \frac{\nabla w}{\nabla\phi^+} \right\} = \max \left\{ \overline{\lim}_{\mathbb{Z}} \frac{w}{\phi^-}, \overline{\lim}_{\mathbb{Z}} \frac{-\nabla w}{-\nabla\phi^-} \right\} = 1.$$

Démonstration. Nous nous concentrons uniquement sur ϕ^+ ; la preuve est analogue pour ϕ^- . Comme $\frac{w}{\phi^+} < 1$, supposer $\overline{\lim}_{\mathbb{Z}} \frac{w}{\phi^+} < 1$ implique $\sup \frac{w}{\phi^+} < 1$, et de même pour $\frac{\nabla w}{\nabla\phi^+}$ (voir l'équation 3.11). Aussi, supposons $\sup \frac{w}{\phi^+} \leq 1 - \varepsilon$ et $\sup \frac{\nabla w}{\nabla\phi^+} \leq 1 - \varepsilon$ pour quelque $\varepsilon > 0$, et recherchons une contradiction.

Rappelons le couple (α^+, β^+) qui a servi à définir ϕ^+ . Pour tout $\mu > 0$, définissons $(\alpha^\mu, \beta^\mu) := (\mu\alpha^+, \mu\beta^+)$. Ce nouveau couple détermine une nouvelle fonction de plissage $\lambda^\mu = \mu\lambda^+ : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$, un nouveau $\phi^\mu = \mu\phi^+$ et un nouveau domaine W^μ par (3.11) (les nombres α^- et β^- sont inchangés). Par définition, $W = W^1$ et $W^\mu \subset W^{\mu'}$ si et seulement si $\mu \leq \mu'$. Soit $w^\mu = (w_i^\mu)_{i \in \mathbb{Z}}$ l'unique point qui réalise le maximum de la fonctionnelle volume \mathcal{V} sur W^μ . Par hypothèse, on a $w^1 \in W^{1-\varepsilon} \subset W^1$, donc $w^1 = w^{1-\varepsilon}$.

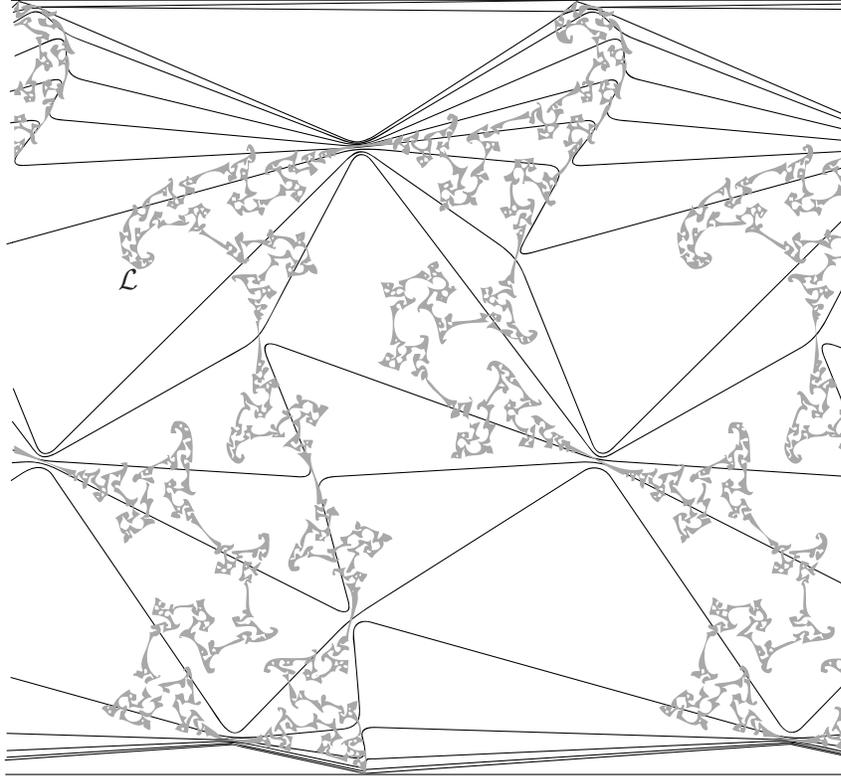


FIG. 3.4.1 – La triangulation de la pointe est dessinée, par anticipation, avec l’ensemble limite $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ du groupe quasi-fuchsien Γ (une courbe de Jordan compliquée). Le dessin se prolonge par périodicité horizontale. Chaque ligne brisée est un revêtement du lien de la pointe (trou) d’une surface plissée T_i ; les sommets (dessinés de manière à séparer artificiellement les T_i) sont tous des points fixes paraboliques de Γ , en lesquels l’ensemble limite \mathcal{L} est “pincé”. Une infinité de triangles extrêmement aplatis s’accumulent le long des horizontales supérieure et inférieure du dessin. Cette image a été produite avec l’aide du logiciel Opti [W1] de Masaaki Wada.

Notons $V(\mu) = \mathcal{V}(w^\mu)$, de sorte que $V(1) = V(1 - \varepsilon)$. Il est aisé de vérifier que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(t \cdot w^\mu + (1 - t) \cdot w^{\mu'}) \in W^{t\mu + (1-t)\mu'}$. Comme le volume de tout tétraèdre idéal est une fonction concave de ses angles dièdres, on en déduit que $V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est concave (au sens large). Par inclusion, V est aussi croissante. En fait, V est strictement croissante (ce qui produira avec $V(1) = V(1 - \varepsilon)$ la contradiction souhaitée) : pour voir cela, comme V est concave, il suffit d’exhiber des valeurs arbitrairement grandes du volume \mathcal{V} en des points $v^\mu \in W^\mu$, quitte à prendre μ assez grand. Nous pouvons supposer (au prix éventuel d’une translation d’indices, voir le lemme 3.3.2, vii – viii) que $\phi_0^- > \pi$ et $-\nabla\phi_0^- > \pi$. Alors, définissons $v_i^\mu = \min\{\phi_i^\mu, \phi_i^-, \pi/2\}$, de sorte que $v^\mu = \pi/2$ sur $[0, N]$ où N peut être rendu aussi grand qu’on voudra. Dès lors, pour tout indice *charnière* $0 < i < N$, le tétraèdre Δ_i a pour angles $\pi/2, \pi/4, \pi/4$ (voir le tableau 3.3). Comme il y a une infinité d’indices *charnière* au voisinage de $+\infty$, le volume prend des valeurs arbitrairement grandes : le lemme 3.5.1 est démontré. \square

Corollaire 3.5.2. *En fait,*

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \min \left\{ \frac{w_i}{\phi_i^+}, \frac{\nabla w_i}{\nabla \phi_i^+} \right\} = \overline{\lim}_{i \rightarrow -\infty} \min \left\{ \frac{w_{i-1}}{\phi_{i-1}^-}, \frac{-\nabla w_i}{-\nabla \phi_i^-} \right\} = 1 .$$

Démonstration. De nouveau, nous ne traitons que ϕ^+ . Par le lemme 3.5.1, il y a une sous-suite $(w_{\nu(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $w_{\nu(i)} \sim \phi_{\nu(i)}^+$ ou $\nabla w_{\nu(i)} \sim \nabla \phi_{\nu(i)}^+$. Supposons que la seconde de ces propriétés soit vérifiée. Pour un entier i fixé, soit n le plus petit indice charnière supérieur ou égal à $\nu(i)$: notons que $\phi_{n+1}^+ = \nabla \phi_n^+ = \nabla \phi_{\nu(i)}^+$ par le lemme 3.3.2-iii-iv, tandis que $w_{n+1} \geq \nabla w_n \geq \nabla w_{\nu(i)}$ par les conditions de positivité (3.11). Aussi, $\frac{w_{n+1}}{\phi_{n+1}^+} \geq \frac{\nabla w_{\nu(i)}}{\nabla \phi_{\nu(i)}^+}$; donc quitte à redéfinir ν on peut supposer simplement $w_{\nu(i)} \sim \phi_{\nu(i)}^+$.

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}$. Choisissons i tel que

$$w_{\nu(i)} \geq (1 - \varepsilon)\phi_{\nu(i)}^+ . \quad (3.14)$$

Soit n le plus petit indice charnière strictement supérieur à $\nu(i)$. Si $n = \nu(i) + 1$ alors

$$w_n \geq w_{n-1} - \nabla \phi_n^+ \geq (1 - \varepsilon)\phi_{n-1}^+ - \phi_{n+1}^+ = \phi_n^+ - \varepsilon\phi_{n-1}^+ \geq (1 - 2\varepsilon)\phi_n^+ ;$$

$$\nabla w_n = w_{n-1} - w_n \geq (1 - \varepsilon)\phi_{n-1}^+ - \phi_n^+ = \phi_{n+1}^+ - \varepsilon\phi_{n-1}^+ \geq (1 - 4\varepsilon)\phi_{n+1}^+ = (1 - 4\varepsilon)\nabla \phi_n^+$$

où le lemme 3.3.2 a été utilisé à plusieurs reprises. Par conséquent, $\min \left\{ \frac{w_n}{\phi_n^+}, \frac{\nabla w_n}{\nabla \phi_n^+} \right\} \geq 1 - 4\varepsilon$.

Si $n \geq \nu(i) + 2$, il existe un indice k tel que $\frac{k - \nu(i)}{n - \nu(i)} \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$. Nous allons montrer que $\min \left\{ \frac{w_k}{\phi_k^+}, \frac{\nabla w_k}{\nabla \phi_k^+} \right\} \geq 1 - 8\varepsilon$, ce qui terminera la démonstration.

• Par positivité de w et par concavité de w entre les points $(\nu(i), k, n)$ on a $w_k \geq \frac{1}{3}w_{\nu(i)}$. Par conséquent,

$$\phi_k^+ - w_k \leq \phi_{\nu(i)}^+ - w_{\nu(i)} \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - 1 \right) w_{\nu(i)} \leq \frac{3\varepsilon}{1 - \varepsilon} w_k$$

(ici la première inégalité est vraie parce que $(\phi^+ - w)$ est décroissante par la condition $\nabla w \leq \nabla \phi^+$ de (3.11), et la seconde provient de l'hypothèse (3.14) ci-dessus). Aussi,

$$\frac{w_k}{\phi_k^+} \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \geq 1 - 3\varepsilon .$$

• Notons que

$$(1 - \varepsilon)\phi_{\nu(i)}^+ \leq w_{\nu(i)} \leq w_k + (k - \nu(i))\nabla w_k \leq \phi_k^+ + (k - \nu(i))\nabla w_k$$

où la seconde inégalité provient de la concavité de w entre les points $(\nu(i), k - 1, k)$. Il s'ensuit que

$$(k - \nu(i))\nabla w_k \geq \phi_{\nu(i)}^+ - \phi_k^+ - \varepsilon\phi_{\nu(i)}^+ = (k - \nu(i))\nabla \phi_k^+ - \varepsilon\phi_{\nu(i)}^+$$

(la dernière égalité vient du lemme 3.3.2–iii), d’où

$$\nabla w_k \geq \nabla \phi_k^+ - \frac{\varepsilon}{k - \nu(i)} \phi_{\nu(i)}^+ \geq \nabla \phi_k^+ - \frac{2\varepsilon}{n - \nu(i)} \phi_{\nu(i)}^+.$$

Comme le lemme 3.3.2–i–iii–iv donne $\phi_{\nu(i)}^+ = \phi_n^+ + (n - \nu(i))\phi_{n+1}^+ \leq 2(n - \nu(i))\phi_n^+$, on en déduit

$$\nabla w_k \geq \nabla \phi_k^+ - 4\varepsilon \phi_n^+ \geq \nabla \phi_k^+ - 8\varepsilon \phi_{n+1}^+ = (1 - 8\varepsilon)\nabla \phi_k^+$$

car $\nabla \phi_k^+ = \nabla \phi_n^+ = \phi_{n+1}^+$ (lemme 3.3.2–iii–iv). □

Corollaire 3.5.3. *Rappelons le plissage $\lambda_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de la surface plissée T_i , où \mathcal{C} est l’ensemble des courbes simples fermées. Pour tout élément γ de \mathcal{C} on a $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i(\gamma) = \lambda^+(\gamma)$ et $\lim_{i \rightarrow -\infty} \lambda_i(\gamma) = \lambda^-(\gamma)$.*

Démonstration. D’après le corollaire 3.5.2, le rapport des membres de l’inégalité (3.12) peut être rendu aussi proche qu’on voudra de 1. □

3.6 Le lien de la pointe

Nous souhaitons maintenant étudier le comportement des surfaces plissées T_i lorsque i tend vers $\pm\infty$ — ou, plus précisément, trouver deux surfaces plissées limites $T_{\pm\infty}$ ayant pour plissage λ^\pm telles que le complété métrique \overline{V} de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ s’écrive $\overline{V} = V \sqcup T_{+\infty} \sqcup T_{-\infty}$, possède un bord $T_{+\infty} \sqcup T_{-\infty}$ localement convexe, et qu’il y ait un homéomorphisme $(\overline{V}, V) \xrightarrow{\sim} (T \times [0, 1], T \times]0, 1])$. La partie difficile est de montrer que les modules intrinsèques des T_i convergent dans l’espace de Teichmüller du tore percé T (pour le marquage défini avant le théorème 3.2.2). Cette question sera traitée à la partie 3.8. Pour le moment, nous nous contentons de décrire le lien de la pointe, d’introduire certaines notations et de prouver quelques inégalités. (Le contenu de la partie 1.4, et notamment la série de remarques faites à propos de la figure 1.4.2, s’applique ici).

Comme toujours, nous travaillons principalement dans un voisinage de $+\infty$. Définissons $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$, l’union de tous les tétraèdres idéaux. Nous commençons par orienter toutes les arêtes (intérieures) de V d’une manière qui sera cohérente avec les couples (α^\pm, β^\pm) définissant le plissage dans (3.1). Plus précisément, soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ la collection de toutes les extrémités de toutes les arêtes de Farey $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Pour $\sigma \in \mathcal{E}$, soit Q_σ l’arête de V de pente σ . Rappelons que le tore percé est défini comme $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$. Orienter Q_σ revient donc à orienter la droite vectorielle F_σ de pente σ dans \mathbb{R}^2 . Nous décidons que la moitié *positive* de F_σ sera du même côté de la droite $\mathbb{R}(\alpha^-, \beta^-)$ que le point (α^+, β^+) , et orientons Q_σ en conséquence.

Décrivons maintenant le lien euclidien de la pointe, ou triangulation de pointe : il s’agit du bord d’un voisinage horoboulouque simple de la pointe de V , triangulé par les liens idéaux (triangles euclidiens) des tétraèdres Δ_i . Ce lien de pointe est une variété euclidienne de dimension 2 (la métrique est définie à une constante multiplicative près, qui dépend du choix d’horoboule), et il est homéomorphe à un anneau $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$: nous appellerons ici “verticale” la direction du facteur \mathbb{R}). Chaque tétraèdre Δ_i apporte une contribution de quatre triangles euclidiens, semblables entre eux, au lien de la pointe, correspondant aux quatre sommets de Δ_i . Les bases de ces quatre triangles forment une courbe homotope au facteur \mathbb{S}^1 qui est une ligne brisée de quatre segments, et les triangles pointent alternativement vers le haut et vers le bas à partir de cette ligne brisée (voir la figure 3.6.1, version perfectionnée de la figure 1.4.1 page 6). Les

deux triangles pointe en haut (resp. pointe en bas) ont la même taille pour la métrique euclidienne, par effet de l'involution hyperelliptique ι (rotation de 180° autour du trou de T) qui agit de façon isométrique sur V (en renversant les orientations de toutes les arêtes) et par translation horizontale sur le lien de la pointe. Notons que ι , dont la définition est purement combinatoire, respecte les étiquettes x_i, y_i, z_i des angles dièdres : par unicité du maximum w de la fonctionnelle volume, ι est donc bien une involution métrique.

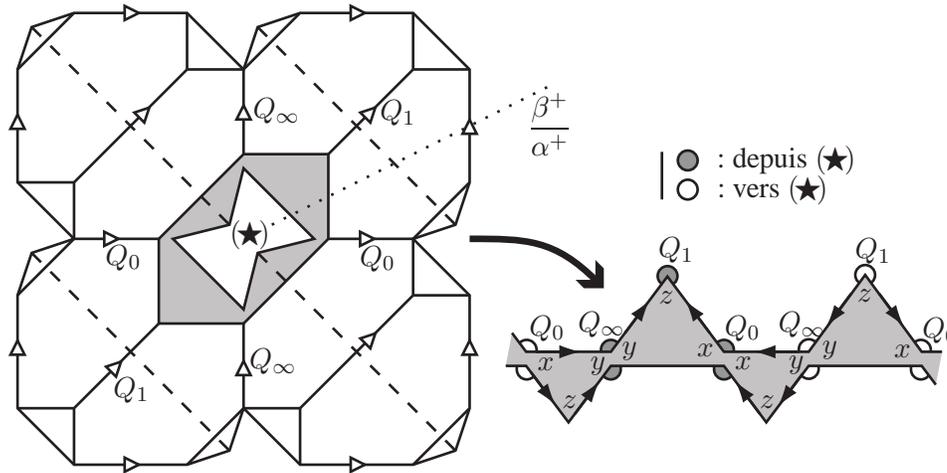


FIG. 3.6.1 – À gauche, (★) marque la pointe. À droite, la pointe est à l’infini.

Définition 3.6.1. Si le lacet autour du trou de T définit une géodésique fermée de longueur euclidienne 4 dans le lien de pointe, soit b_i (resp. b'_i) la longueur de la base d’un triangle pointe en bas (resp. pointe en haut) défini par le tétraèdre Δ_i , et soit $\chi_i = b'_i/b_i$ (voir par exemple la figure 3.6.3).

La figure 3.6.1 montre aussi plusieurs informations auxiliaires, en supposant $e_i = 0\infty$ et $\alpha^+, \beta^+ > 0$ (d’où $\beta^-/\alpha^- < 0$). En particulier, les surfaces plissées T_{i+1} et T_i (au dessus et au dessous de Δ_i) sont plissées le long des droites Q_0, Q_∞, Q_1 et Q_0, Q_∞, Q_{-1} respectivement, et les orientations des Q_σ sont indiquées dans le volet gauche de la figure 3.6.1 (l’orientation de la droite Q_{-1} n’est pas déterminée ; elle dépend de la position de β^-/α^- par rapport à -1). Les orientations des droites quittant le trou ou pointant vers le trou sont aussi montrées dans le volet de droite, aux sommets, à l’aide d’un code coloré. De plus, chaque segment ϵ de la ligne brisée supérieure dans le volet de droite correspond à un coin d’une face f de T_{i+1} dans le volet de gauche, donc ϵ reçoit l’orientation du côté de f opposé à ce coin. Si τ est l’un des triangles pointe en haut dessinés dans le plan \mathbb{C} (volet droit), considérons le tétraèdre hyperbolique idéal Δ (dans le modèle du demi-espace supérieur) dont les sommets sont ∞ et ceux de τ : toutes les arêtes de Δ , sauf une, reçoivent une orientations induite par la construction précédente, et Δ est isométrique (en respectant ces orientations) à Δ_i . Enfin, notons l’étiquetage des 3 coins de chaque triangle dans le volet de droite : le coin du sommet libre (“l’apex” du triangle, en haut ou en bas) porte l’étiquette z (l’angle en ce sommet du triangle est z_i) ; les autres coins portent, de même, les étiquettes x et y . Les symboles x - y - z apparaissent dans le sens des aiguilles d’une montre aux coins de chaque triangle. Notons que deux triangles consécutifs sont toujours semblables, avec pour centre de similitude leur sommet commun.

La contribution du tétraèdre Δ_{i-1} à la triangulation de la pointe est, elle aussi, l'union de quatre triangles, bordée par deux lignes brisées. De plus, la ligne brisée supérieure issue de Δ_{i-1} est la ligne brisée inférieure issue de Δ_i , et les orientations des droites pointant vers (ou depuis) le point à l'infini doivent coïncider. Un bref examen montre qu'il n'y a que deux possibilités, correspondant aux deux valeurs (R ou L) que peut prendre la lettre associée à la surface T_i : pour R , les deux quadruplets de triangles ont en commun deux sommets C, C' où toutes les étiquettes valent x ; pour L , la même chose est vraie en remplaçant x par y (figure 3.6.2).

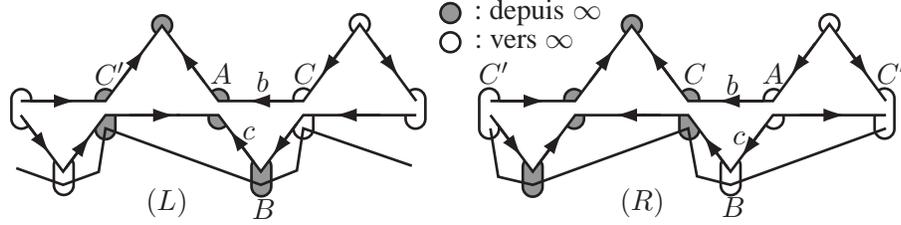


FIG. 3.6.2 – Transitions L et R . Comparer au volet droit de la figure 3.6.1.

Définition 3.6.2. Dans un triangle pointe en bas défini par Δ_i , les longueurs des côtés sont b_i (la base de la définition 3.6.1), b_{i-1} , et un troisième nombre que nous appelons c_i . Dans chacun des volets de la figure 3.6.2, on a donc $b = b_i$; $c = c_i$ et $BC = b_{i-1}$, où le tétraèdre Δ_i définit le quadruplet supérieur de triangles.

Propriété 3.6.3. Pour tout i assez grand, (b_i) est croissante et (b'_i) est décroissante.

Démonstration. Soit τ_i (resp. τ'_i) un triangle pointe en bas (resp. pointe en haut) défini par le tétraèdre Δ_i . Quand i est assez grand on a $z_i = \pi - w_i > \pi - \phi_i^+ > \pi/2$, donc b_i est le plus long côté de τ_i , et b'_i est le plus long côté de τ'_i . Comme b_{i-1} est un côté de τ_i et b'_{i+1} est un côté de τ'_i (figure 3.6.2 ou 3.6.3), on obtient le résultat. \square

Propriété 3.6.4. On a $\lim_{i \rightarrow +\infty} \chi_i = 0$ (voir la définition 3.6.1).

Démonstration. On sait déjà que $(\chi_i) = (b'_i/b_i)$ est décroissante au voisinage de $+\infty$. Il suffit donc de montrer que $\chi_{i+1}/\chi_{i-1} \leq 1/2$ pour tout indice charnière suffisamment élevé i . Considérons la figure 3.6.3, où les angles étiquetés z sont obtus (d'une façon générale, nous dessinons en grisé les triangles venant de Δ_i chaque fois que i est un indice charnière). On vérifie alors que

$$\frac{\chi_{i+1}}{\chi_{i-1}} = \frac{b'_{i+1} b_{i-1}}{b'_{i-1} b_{i+1}} < \frac{b'_{i+1} b_{i-1}}{b'_i b_i} = \frac{\sin x_i \sin y_i}{\sin^2 z_i} \leq \frac{\sin^2(w_i/2)}{\sin^2 w_i} < \frac{1}{2}$$

(les deux dernières inégalités résultent d'une simple étude de la fonction \sin , en utilisant $x_i + y_i = \pi - z_i = w_i < \pi/2$). Par conséquent, on trouve immédiatement $\lim_{i \rightarrow +\infty} b'_i = 0$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_i = 2$ (en normalisant comme à la définition 3.6.1, les nombres $2, b_i, b'_i$ sont les côtés d'un triangle euclidien). De même, $\lim_{i \rightarrow -\infty} b'_i = 2$ et $\lim_{i \rightarrow -\infty} b_i = 0$ — ce dont on peut par ailleurs se convaincre sur la figure 3.4.1. \square

Définition 3.6.5. Soit $J \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers j tels que $j - 1$ est une charnière.

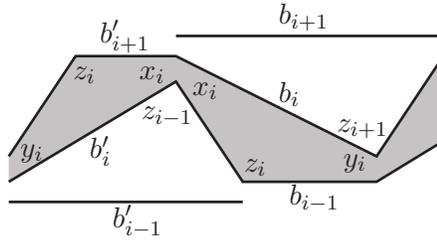


FIG. 3.6.3 – L'indice i est une charnière ; la nature de $i \pm 1$ est indéterminée.

Proposition 3.6.6. *Si $j < l$ sont deux éléments consécutifs de J suffisamment grands, et k n'est pas dans J , alors*

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} = \chi_{k-1} \quad \text{et} \quad \frac{c_l}{c_j} \leq \chi_{j-2}.$$

Démonstration. Comme $k - 1$ n'est pas une charnière, le segment b_{k-1} partage la même extrémité avec b_k et avec b_{k-2} (voir la figure 3.6.4, volet gauche) donc la relation de similitude des triangles τ_k, τ'_k entraîne $c_k/c_{k-1} = b'_{k-1}/b_{k-1} = \chi_{k-1}$.

Comme c_l est toujours un côté de τ'_{l-1} , on a $c_l \leq b'_{l-1}$ (pour l assez grand), d'où

$$\frac{c_l}{c_j} \leq \frac{b'_{l-1}}{c_j} \leq \frac{b'_j}{c_j} = \frac{c_{j-1}}{b_{j-2}} \leq \frac{b'_{j-2}}{b_{j-2}} = \chi_{j-2} \quad (3.15)$$

où l'égalité centrale traduit simplement le fait que les triangles "charnière" τ_{j-1}, τ'_{j-1} sont semblables (grisés dans la figure 3.6.4, volet droit). \square

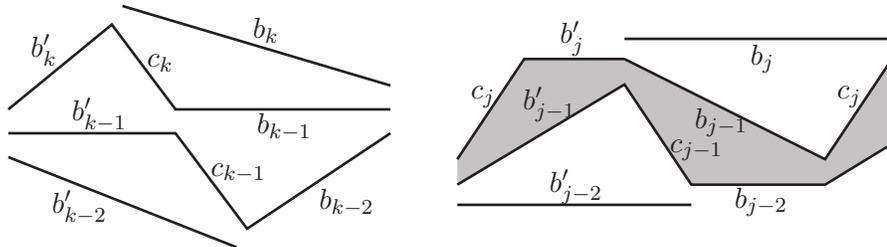


FIG. 3.6.4 – À gauche : $k - 1$ n'est pas charnière. À droite : $j - 1$ est charnière.

Corollaire 3.6.7. *Pour tout $\mu > 0$, la série de terme général c_i^μ est sommable.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 3.6.6 : comme (χ_i) tend vers 0, pour i assez grand, on peut borner les c_i^μ par une suite géométrique décroissante de raison $1/2$ sur chaque intervalle de la forme $\llbracket j, l - 1 \rrbracket$ où $j < l$ sont deux éléments consécutifs de l'ensemble J , et avoir $c_l^\mu \leq c_j^\mu/2$. \square

3.7 Convergence intrinsèque des surfaces T_i

3.7.1 Épaisseur des tétraèdres

Considérons un tétraèdre Δ_i bordé par les surfaces plissées T_i et T_{i+1} . Soit Q (resp. Q') l'arête de plissage de T_i (resp. T_{i+1}) qui n'est pas dans $T_i \cap T_{i+1}$. Soit s_i le plus court segment reliant Q à Q' , à travers Δ_i .

Définition 3.7.1. Rappelons l'orientation des arêtes de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$. Soit ℓ_i la longueur complexe de la loxodromie hyperbolique le long de s_i qui envoie Q sur Q' , en respectant les orientations de Q, Q' (on prend $-\pi < \text{Im } \ell_i \leq \pi$).

Proposition 3.7.2. *La série de terme général $(\ell_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est absolument convergente.*

Démonstration. Considérons un triangle pointe en bas τ défini par Δ_i . Baptisons A, B, C les sommets de τ , de telle manière que $AC = b_i, BC = b_{i-1}$ et $AB = c_i$ (voir la figure 3.6.2). Soit γ_i la loxodromie hyperbolique de longueur complexe ℓ_i le long de la perpendiculaire commune à $B\infty$ et AC , qui envoie B, ∞ sur A, C (dans cet ordre).

Sous-lemme 3.7.3. *Soit $\ell = \ell_i = \rho + \theta\sqrt{-1}$ la longueur complexe de γ_i , avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Alors $\max\{\rho, |\theta|\} \leq \pi\sqrt{c_i/b_i}$.*

Démonstration. Au prix d'une similitude plane, nous pouvons supposer $A = 1$ et $C = -1$. Pour plus de confort, notons a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC . Soit L la droite fixée par γ_i . L'isométrie hyperbolique définie par $z \mapsto f(z) = \frac{2B+1-z}{z+1}$ intervertit les droites orientées AC et $B\infty$, et renverse donc l'orientation de L en fixant le centre du tétraèdre $ABC\infty$. On en déduit que γ_i est donnée par $\gamma_i(z) = 2B - f(z)$ (en effet, $z \mapsto 2B - z$ fixe L également). Si M est une matrice de γ_i , on a $\frac{\text{tr}^2 M}{4 \det M} = \frac{\cosh \ell + 1}{2}$. Avec $M = \begin{pmatrix} 2B+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on trouve $B = \cosh \ell$. Calculons

$$\begin{aligned} \frac{a \pm c}{b} &= \frac{|B+1| \pm |B-1|}{2} \\ &= \left| \cosh^2 \frac{\ell}{2} \right| \pm \left| \sinh^2 \frac{\ell}{2} \right| \\ &= \cosh \frac{\ell}{2} \cosh \frac{\bar{\ell}}{2} \pm \sinh \frac{\ell}{2} \sinh \frac{\bar{\ell}}{2} \\ &= \cosh \frac{\ell \pm \bar{\ell}}{2}. \end{aligned}$$

Comme $\cosh(i\theta) = \cos \theta$ on obtient $\cosh(\rho) = \frac{a+c}{b}$ et $\cos(\theta) = \frac{a-c}{b}$. Les estimations $\text{Argcosh}(y) \leq 2\sqrt{\frac{y-1}{2}}$ et $\text{Arccos}(y) \leq \pi\sqrt{\frac{1-y}{2}}$, puisque $\frac{1}{2} \left| \frac{a+c}{b} - 1 \right| \leq \frac{c}{b}$ (inégalité triangulaire), donnent enfin $\rho \leq 2\sqrt{c/b}$ et $|\theta| \leq \pi\sqrt{c/b}$, d'où le sous-lemme 3.7.3. \square

Comme la suite (b_i) tend vers 2, la proposition 3.7.2 sera vraie du moment que la série des $\sqrt{c_i}$ converge : c'est le cas, par le corollaire 3.6.7 \square

Proposition 3.7.4. *Le lien de pointe est de largeur finie : il est isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{S}^1 \times]0, L[$ pour un certain $L > 0$. Les triangles idéaux dont les sommets sont ∞ et les extrémités de b_i s'accroissent sur un certain triangle idéal de \mathbb{H}^3 quand i tend vers $+\infty$; les itérés de ce triangle idéal par le relevé $z \mapsto z + 2$ de l'involution hyperelliptique sont joints bord à bord et leur union contient un demi-plan vertical (interrompu à hauteur 1 au dessus de \mathbb{C}).*

Démonstration. La première propriété découle encore du corollaire 3.6.7 : l'aire d'un triangle euclidien pointe en bas défini par le tétraèdre idéal Δ_i est de l'ordre de c_i quand i tend vers $+\infty$; ces aires sont donc de somme finie, et les triangles pointe en bas s'accroissent sur un segment b du bord du lien de pointe. Le reste de la proposition s'en déduit immédiatement parce que b est horizontal, de longueur 2.

Renvoyons de nouveau à la figure 3.4.1. □

3.7.2 Cartes de Teichmüller

Soit \mathcal{T}_T l'espace de Teichmüller du tore percé : pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, nous notons $\mu(T_i) \in \mathcal{T}_T$ le module intrinsèque de la surface marquée T_i (pour le marquage $T_i \simeq T$ défini juste avant le théorème 3.2.2). Afin de montrer que les $\mu(T_i)$ convergent dans \mathcal{T}_T , il nous faut introduire des cartes appropriées de \mathcal{T}_T .

Considérons une triangulation idéale (topologique) E du tore percé T , avec des arêtes marquées $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Alors E définit un homéomorphisme

$$h_E : \mathbb{P}^2 \mathbb{R}_+^* = (\mathbb{R}_+^*)^{\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}} / \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_T.$$

Plus précisément, étant donnée une métrique hyperbolique g sur T , pour calculer $h_E^{-1}(g)$, il suffit de raidir E de manière à en faire une triangulation totalement géodésique pour g , puis de renvoyer le triplet projectif des longueurs euclidiennes (positives) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 définies, dans le lien de la pointe, par les secteurs opposés à $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. (Il s'agit des *shearing coordinates* définies par Thurston et Bonahon : $\log \frac{\ell_1}{\ell_2}$ est la distance hyperbolique [signée] qui sépare le long de ϵ_3 les pieds des hauteurs des deux triangles idéaux adjacents à ϵ_3). Nous considérons h_E comme une carte globale de \mathcal{T}_T . Munissons $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}_+^*$ de la distance d donnée par

$$d([a : b : c], [a' : b' : c']) := \min_{\lambda > 0} \max \left\{ \left| \log \frac{\lambda a}{a'} \right|, \left| \log \frac{\lambda b}{b'} \right|, \left| \log \frac{\lambda c}{c'} \right| \right\}.$$

Définissons aussi $\bar{h}_E : \mathbb{P}^2 \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{T}_T$ par $\bar{h}_E([a : b : c]) := h_E([|a| : |b| : |c|])$.

En particulier, si le tore percé plissé T_{i+1} , plissé selon la triangulation idéale E_{i+1} , admet pour (demi)–lien dans le lien de la pointe une ligne brisée orientée dont les segments ont pour affixes les nombres complexes (a, b, c) , alors

$$\mu(T_{i+1}) = \bar{h}_{E_{i+1}}([a : b : c]).$$

De plus, la figure 3.7.1 montre deux lignes brisées correspondant respectivement à T_{i+1} et à la surface plissée précédente T_i . Comme les triangles (liens des sommets de Δ_i) sont semblables, les affixes des segments de la ligne brisée inférieure peuvent être écrits en fonction de (a, b, c) , comme indiqué. Par

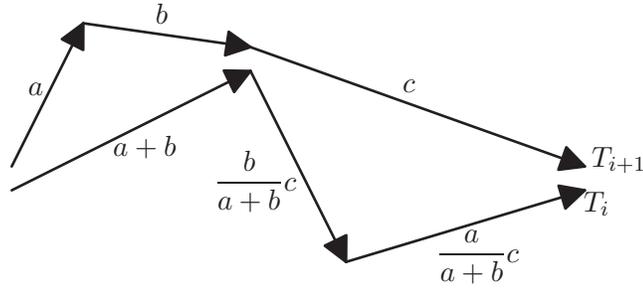


FIG. 3.7.1 – Les triplets projectifs complexes associés à T_{i+1} et T_i . Les orientations des segments *ne* coïncident pas avec celles des figures 3.6.1 et 3.6.2.

conséquent, si nous définissons le “changement de variables”

$$\Psi([a : b : c]) := \left(\left[a + b : \frac{b}{a + b}c : \frac{a}{a + b}c \right] \right)$$

(un automorphisme birationnel de $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ qui définit un homéomorphisme [ordinaire] de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^*$), alors

$$\mu(T_i) = \overline{h}_{E_i}(\Psi([a : b : c])).$$

Enfin, si nous regardons l’échange de diagonale entre les triangulations E_i et E_{i+1} comme un tétraèdre *aplati* (tout comme dans la figure 1.3.1), nous voyons que $\Psi_{|\mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^*}$ permet de passer de la carte associée à E_{i+1} à celle associée à E_i : en effet un tore percé hyperbolique (totalement géodésique) n’est rien d’autre qu’un tore de plissage angulaire nul, dont le (demi)–lien de pointe est donné par un triplet projectif de \mathbb{R}_+^* . Plus exactement, on a

$$\mu(T_{i+1}) = h_{E_{i+1}}(|a| : |b| : |c|) = h_{E_i}(\Psi(|a| : |b| : |c|)).$$

La restriction ψ de Ψ à $\mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^*$ (il faut restreindre aussi l’ensemble image !) est donc le changement de carte $h_{E_{i+1}} \rightarrow h_{E_i}$, c’est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^* & \xleftarrow{\psi} & \mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^* \\ h_{E_i} \searrow & & \swarrow h_{E_{i+1}} \\ & \mathcal{T}_T & \end{array}$$

commute. S’il n’y a pas de charnière entre les indices i et $i + k$ (bornes incluses), on voit immédiatement que le changement de carte $h_{E_{i+k}} \rightarrow h_{E_i}$ est un conjugué de la fonction ψ^k par une certaine permutation des coordonnées projectives.

Propriété 3.7.5. On a $d\left(h_{E_i}^{-1}\mu(T_i), h_{E_i}^{-1}\mu(T_{i+1})\right) = \log \frac{|a| + |b|}{|a + b|}$.

Démonstration. Le second membre est

$$d\left(\left[|a + b| : \left|\frac{b}{a + b}c\right| : \left|\frac{a}{a + b}c\right|\right], \left[|a| + |b| : \frac{|b|}{|a| + |b|}|c| : \frac{|a|}{|a| + |b|}|c|\right]\right),$$

ce qui donne le résultat. □

On voit facilement que $\psi : \mathbb{P}^2 \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{P}^2 \mathbb{R}_+^*$ est 3-lipschitzienne pour d . En fait,

Proposition 3.7.6. *Il existe $K > 0$ tel que le n -ème itéré ψ^n est Kn -bilipschitzien pour tout $n > 0$.*

Démonstration. Comme

$$\psi([a : b : c]) = \left[\frac{(a+b)^2}{c} : b : a \right] \text{ et } \psi^{-1}([a : b : c]) = \left[c : b : \frac{(c+b)^2}{a} \right] \quad (3.16)$$

pour tous $a, b, c > 0$, on peut remplacer ‘‘bilipschitzien’’ par ‘‘lipschitzien’’. Posons $A := \sqrt{a}$; $C := \sqrt{c}$;

$$P_n := \frac{A^{n+1}}{C^n} + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \binom{j}{i-1} \binom{n-i}{j-i} A^{2i-n-1} C^{n-2j} \text{ pour tout } n \geq -1$$

(le terme général est nul à moins que $0 < i \leq j \leq n$), ce qui donne en particulier $P_0 = A$, $P_{-1} = C$, $P_1 = \frac{A^2+1}{C}$. Nous prétendons que $\psi^n[a : 1 : c] = [P_n^2 : 1 : P_{n-1}^2]$ pour tout $n \geq 0$. Cela se voit par récurrence sur n : la seule difficulté est la relation de récurrence $P_{n+1}^2 = \frac{(P_n^2+1)^2}{P_{n-1}^2}$. Tout d’abord, on vérifie sans mal que $P_{n+1} + P_{n-1} = (\frac{A}{C} + \frac{C}{A} + \frac{1}{AC})P_n$ (en appliquant par deux fois la relation de Pascal). Donc, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} & (P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2) - (P_nP_{n-2} - P_{n-1}^2) \\ &= P_{n-1}(P_{n+1} + P_{n-1}) - P_n(P_n + P_{n-2}) \\ &= (P_{n-1}P_n - P_nP_{n-1})\left(\frac{A}{C} + \frac{C}{A} + \frac{1}{AC}\right) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = P_1P_{-1} - P_0^2 = 1$, ce qui prouve la récurrence. Comme P_n est un polynôme de Laurent en les variables A, C dont les degrés partiels sont un $O(n)$ et dont les coefficients sont positifs, on voit que $\log P_n$ est Ln -bilipschitzienne en $\log a, \log c$ pour un certain L universel. La proposition s’en déduit. □

Cette démonstration de la proposition 3.7.6 peut sembler extrêmement *ad hoc* et frustrante. Toutefois, la proposition 3.7.6 n’est qu’un cas particulier d’un phénomène plus général concernant les *Markoff maps* définies par Brian Bowditch dans [Bo], et que nous décrivons en détail dans la partie 5.

3.7.3 Convergence des modules

Proposition 3.7.7. *Les modules $(\mu(T_i))_{i \rightarrow \pm\infty}$ convergent dans l’espace de Teichmüller \mathcal{T}_T .*

Démonstration. Pour montrer l’énoncé relatif à $+\infty$, fixons une grande valeur de l’indice i , et montrons que la série de terme général

$$\eta_j := d\left(h_{E_i}^{-1}\mu(T_j), h_{E_i}^{-1}\mu(T_{j+1})\right),$$

définie pour $j > i$, est convergente.

Étant donné $j > i$, considérons dans le lien de la pointe un triangle pointe en bas τ défini par Δ_j , avec ses côtés de longueurs b_j, b_{j-1} et c_j (définition 3.6.2). Les angles de τ aux extrémités de b_j sont x_j

et y_j . En vertu de la propriété 3.7.5, on a $d\left(h_{E_j}^{-1}\mu(T_j), h_{E_j}^{-1}\mu(T_{j+1})\right) = \log \frac{c_j + b_{j-1}}{b_j}$. Calculons

$$\begin{aligned} \log \frac{c_j + b_{j-1}}{b_j} &\leq \frac{c_j + b_{j-1} - b_j}{b_j} = \frac{\sin x_j + \sin y_j - \sin z_j}{\sin z_j} = \frac{2 \sin \frac{x_j}{2} \sin \frac{y_j}{2}}{\cos \frac{x_j + y_j}{2}} \\ &\leq \frac{\sin x_j \sin y_j}{\sin^2 z_j} \sin^2 z_j = \frac{c_j b_{j-1}}{b_j^2} \sin^2 w_j \\ &\leq \frac{c_j}{b_j} \phi_j^{+2} \end{aligned}$$

(l'inégalité au début de la seconde ligne vaut pour les grandes valeurs de j parce que $x_j + y_j = 2w_j \rightarrow 0$). Définissons $\delta_j = \frac{c_j}{b_j} \phi_j^{+2}$, et soit M_j la meilleure constante bilipschitzienne pour le changement de carte $h_{E_j} \rightarrow h_{E_i}$. Notons que $\eta_j \leq M_j \delta_j$.

Soient $j < l$ deux éléments consécutifs de J (définition 3.6.5), et soit $k \notin J$ un entier. Nous allons majorer les $M_n \delta_n$ par des suites géométriques sur les intervalles de la forme $\llbracket j, l-1 \rrbracket$, en utilisant la proposition 3.6.6 tout comme dans le preuve de la proposition 3.6.7. Comme ψ est 3-bilipschitzienne, on a de toute évidence $M_k \leq 3M_{k-1}$. Par la proposition 3.6.6,

$$\frac{M_k \delta_k}{M_{k-1} \delta_{k-1}} \leq 3 \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \leq 3 \frac{c_k}{c_{k-1}} = 3\chi_{k-1}$$

car (ϕ_k^+) et $(1/b_k)$ sont décroissantes. Le membre de droite tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Par la proposition 3.7.6, $M_l \leq (l-j)L \cdot M_j$ pour un certain L universel, et par le lemme 3.3.2 (i-iii-iv), $\phi_j^+ = \phi_{l-1}^+ + (l-j-1)\phi_l^+ \geq (l-j)\phi_l^+$. En vertu de la proposition 3.6.6, on en déduit

$$\frac{M_l \delta_l}{M_j \delta_j} \leq (l-j)L \cdot \frac{c_l}{c_j} \left(\frac{\phi_l^+}{\phi_j^+}\right)^2 \leq \frac{L\chi_{j-2}}{l-j} \leq L\chi_{j-2}.$$

Le second membre tend vers 0 quand j tend vers l'infini, d'où la proposition 3.7.7. \square

3.8 Convergence extrinsèque des surfaces T_i

3.8.1 Surfaces plissées

Les propositions 3.7.2 et 3.7.7, avec le corollaire 3.5.3, sont les principaux ingrédients pour montrer que le complété métrique de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ possède deux composantes de bord $T_{+\infty}$ et $T_{-\infty}$, et se plonge isométriquement dans une variété hyperbolique M de dimension 3 (sans bord) dans laquelle $T_{+\infty}, T_{-\infty}$ sont des tores percés plissés de mesures de plissage λ^+ et λ^- . Une surface plissée dans une variété hyperbolique M de dimension 3 est, par définition, une fonction continue $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ (où Σ est une surface hyperbolique) qui envoie tout arc rectifiable sur un arc rectifiable de même longueur, et telle que tout point p de Σ appartienne à un segment ouvert s_p sur lequel la restriction de φ est totalement géodésique. On sait (voir [CEG], 5.1.4) que la direction de s_p est unique si et seulement si p appartient à une certaine *lamination géodésique* Λ (union fermée de géodésiques disjointes) de Σ , et que φ est totalement géodésique sur le complémentaire de Λ . Si φ est une *immersion topologique* (une application localement conjuguée à l'inclusion canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, par un homéomorphisme à la source et un

homéomorphisme à l'image), nous parlerons d'*immersion plissée*.

Pour parler efficacement de surfaces plissées, nous utiliserons le fait que si φ est une immersion (topologique) localement convexe et si Λ est de mesure de Lebesgue nulle, alors Λ est naturellement munie d'une mesure (de plissage) transverse ν_Λ . Plus précisément, ν_Λ peut être définie sur tout segment orienté s , transverse à Λ et suffisamment court, de la manière suivante (voir les parties 7 à 9 de [B2]). Tout d'abord, on peut supposer (quitte à passer à des revêtements universels) que $\Sigma = \mathbb{H}^2$ et $M = \mathbb{H}^3$. Immergeons $\varphi(\mathbb{H}^2)$ dans le modèle du demi-espace supérieur de Poincaré. Chaque composante connexe de $\mathbb{H}^2 \setminus \Lambda$ traversée par s s'étend à une partie A de \mathbb{H}^2 bordée seulement par (une ou) deux droites de Λ traversées par s . Munissons s d'une orientation transverse arbitraire, et fixons une identification $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La composante de bord à l'infini de A dans $\partial\mathbb{H}^3$ située (mettons) du côté positif pour l'orientation transverse de s définit un arc de cercle (ou segment de droite) orienté $c_A \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, d'angle $\theta_A \in (-2\pi, 2\pi)$ (l'orientation de c_A vient de celle [non transverse] de s , et on peut supposer $\infty \notin c_A$, pour toutes les régions A traversées par s simultanément). Si c_A est un segment de droite ou se trouve réduit à un point, nous posons $\theta_A = 0$. L'adhérence de l'union de tous les c_A forme un arc rectifiable $c = c(s) \subset \mathbb{C}$, de longueur $\sum_A \text{longueur}(c_A)$. L'arc c possède une *courbure régulière* bien définie, $RC(c)$, égale à la somme (absolument convergente) $\sum_A \theta_A$. Mais c possède aussi une *courbure totale* $TC(c)$, définie (à un multiple de 2π près, noté $2k\pi$) comme la différence entre les arguments complexes des vecteurs tangents initial et final à c . (L'entier k peut être déterminé en fermant l'arc plongé c par une ligne brisée, de manière à inclure c dans une courbe de Jordan dont par définition la courbure totale doit être 2π : il ne reste alors qu'à retrancher la somme des angles externes de la ligne brisée pour obtenir $TC(c)$). Alors, $\nu_\Lambda(s)$ est défini comme étant la *courbure singulière* $SC(c) = TC(c) - RC(c)$. Si s est un segment arbitrairement long de \mathbb{H}^2 transverse à Λ , nous pouvons définir $\nu_\Lambda(s)$ en subdivisant s en sous-segments suffisamment courts (s_1, \dots, s_n) et en posant $SC(c(s)) = \nu_\Lambda(s) = \sum_{i=1}^n \nu_\Lambda(s_i)$.

Réciproquement, si $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une immersion plissée et si $SC(c(s))$ est positif et bien défini pour tout segment transverse s , alors φ est localement convexe avec mesure de plissage ν_Λ comme ci-dessus. Nous renvoyons à [B2] pour plus de détails.

Enfin, nous utiliserons la définition suivante.

Définition 3.8.1. Dans \mathbb{R}^2 , soit A l'union des droites d'équation $x + y = n$ (pour n décrivant \mathbb{Z}), soit B l'union des droites $x = n$, et soit C l'union des droites $y = n$. Une suite (X_1, \dots, X_n) à valeurs dans un ensemble à trois éléments $\{a, b, c\}$ est appelée *sturmienne* s'il existe une bijection $\psi : \{a, b, c\} \xrightarrow{\sim} \{A, B, C\}$ et un segment σ de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ tels que σ rencontre d'abord $\psi(X_1)$, puis $\psi(X_2)$, puis $\psi(X_3)$, etc.

Il existe une constante universelle K^{St} telle que si (X_1, \dots, X_n) est sturmienne et $0 \leq k \leq n$, alors

$$|\{i \leq k \mid X_i = a\}| = \frac{k}{n} |\{i \leq n \mid X_i = a\}| + \delta \quad \text{où } |\delta| \leq K^{St}. \quad (3.17)$$

3.8.2 Position du problème

Définissons le tore percé hyperbolique marqué $T_{+\infty}$, muni (proposition 3.7.7) de la métrique hyperbolique $\lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(T_i)$. Il existe une unique lamination géodésique compacte Λ_c^+ de pente β^+/α^+ sur $T_{+\infty}$ (par définition, Λ_c^+ est la limite topologique de n'importe quelle suite de géodésiques simples fermées dont les pentes tendent vers β^+/α^+ : voir par exemple [B1]). Exactement deux géodésiques ℓ, ℓ' issues du trou de $T_{+\infty}$ manquent de rencontrer Λ_c^+ : soit $\Lambda^+ = \Lambda_c^+ \sqcup \ell \sqcup \ell'$. Alors $T_{+\infty}$ est l'union

disjointe de Λ^+ et des intérieurs de deux triangles idéaux A, A' . L'union $A \cup A' \cup \ell \cup \ell'$ est un bigone idéal percé (voir par exemple [AS]).

Rappelons les tétraèdres hyperboliques idéaux Δ_i , l'espace $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ et l'involution hyperelliptique $\iota : V \rightarrow V$ qui renverse l'orientation de toutes les arêtes de V . Les pentes des droites de plissage (orientées) de la surface T_i (située entre Δ_{i-1} et Δ_i) sont des éléments de $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ qui se projettent sur $0, 1, \infty$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: nous baptisons donc ces droites de plissage l_i^0, l_i^1, l_i^∞ . Pour $*$ $\in \{0, 1, \infty\}$, notons ω_i^* l'unique point de l_i^* fixé par l'involution (ou isométrie) hyperelliptique (cette isométrie est intrinsèquement définie sur la surface hyperbolique T_i , et les ω_i^* sont appelés *points de Weierstrass*). Soit s_i^* le segment reliant ω_i^* à ω_{i+1}^* (à travers le tétraèdre Δ_i si $\omega_i^* \neq \omega_{i+1}^*$) : chaque s_i^* est contenu dans une droite géodésique Ω^* de V fixée (point par point) par l'involution hyperelliptique. Notons que $\Omega^* \cap T_i = \{\omega_i^*\}$, parce que l'isométrie hyperelliptique de V se restreint à l'(unique) isométrie hyperelliptique de T_i .

Fixons la valeur de l'exposant $*$ (bientôt il sera omis). Fixons un point ω de \mathbb{H}^2 et une droite orientée l passant par ω . Pour chaque surface T_i (orientée), considérons le revêtement universel (pointé, orienté) $\pi_i : (\mathbb{H}^2, \omega, l) \rightarrow (T_i, \omega_i^*, l_i^*) = (T_i, \omega_i, l_i)$. Choisissons dans un revêtement universel \tilde{V} de V des relevés $\tilde{\omega}_i$ des ω_i reliés entre eux par des relevés des segments $s_i^* = s_i$ (c'est bien le même s_i qu'à la partie 3.7.1), et fixons une application développante $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{H}^3$. Il existe une unique application h_i telle que

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{H}^2, \omega, l) & \xrightarrow{h_i} & (\tilde{V}, \tilde{\omega}_i) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{H}^3 \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \\ T_i & \longrightarrow & V \end{array} \quad (3.18)$$

commute. Nous allons montrer que les immersions plissées (développantes)

$$\varphi_i = \Phi \circ h_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \quad (3.19)$$

convergent en tant qu'applications plissées vers une immersion plissée $\varphi_{+\infty}$.

3.8.3 Convergence des φ_i

Deux loxodromies qui fixent la même droite de \mathbb{H}^3 commutent. Par la proposition 3.7.2, comme les segments $s_i^* = s_i$ appartiennent tous à une même droite fixe de l'involution hyperelliptique, il est clair que la restriction de φ_i à l converge vers un plongement totalement géodésique de la droite l dans \mathbb{H}^3 (la convergence est uniforme sur tout compact de l). Par le théorème d'Ascoli, comme les φ_i sont 1-lipschitziennes, il existe une suite strictement croissante ν telle que les $\varphi_{\nu(i)}$ convergent vers une certaine application $\varphi_{+\infty}$, uniformément sur tout compact de \mathbb{H}^2 . Dans la partie 3.8.5 ci-dessous, on montrera que $\varphi_{+\infty}$ est en fait indépendante de la suite ν : par anticipation, nous convenons d'ores et déjà de noter (abusivement) φ_i à la place de $\varphi_{\nu(i)}$.

Nous allons travailler dans le fibré projectif tangent $\mathcal{E} = \mathbb{P}T\mathbb{H}^2$, un fibré en cercles au dessus de \mathbb{H}^2 dans lequel les laminations géodésiques se plongent naturellement (elles y sont fermées) : à un point x d'une lamination, le plongement associe le couple formé de x et de la direction de la lamination en x . Les mesures d'angles et de longueurs définissent (canoniquement) une métrique riemannienne complète sur \mathcal{E} . Pour $K \subset \mathbb{H}^2$ compact et $A, B \subset \mathcal{E}$ fermés, soit $K^\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ l'image réciproque de K par la projection canonique $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{H}^2$, et définissons

$$d_K(A, B) := \inf \{ \delta > 0 \mid A \cap K^\mathcal{E} \subset \mathcal{N}_\delta(B), B \cap K^\mathcal{E} \subset \mathcal{N}_\delta(A) \}$$

où $\mathcal{N}_\delta(X)$ dénote l'ensemble des points à distance au plus δ de X . Alors $\inf \{1, d_K\}$ est une pseudo-métrique, et l'ensemble des fermés de \mathcal{E} est compact pour la métrique de Hausdorff

$$d_H = \sum_{n>0} 2^{-n} \inf \{1, d_{K_n}\}$$

où les K_n sont des boules concentriques de rayon n .

Notons que $T_{+\infty}$ possède aussi des points de Weierstrass $\omega_{+\infty}^*$, appartenant aux feuilles $l_{+\infty}^*$ de la lamination géodésique Λ^+ . En fixant la valeur de $*$ comme plus haut, notons $\pi_{+\infty} : (\mathbb{H}^2, \omega, l) \rightarrow (T_{+\infty}, \omega_{+\infty}^*, l_{+\infty}^*)$ un revêtement universel orienté.

La proposition 3.7.7 a pour conséquence que les relevés à \mathcal{E} des $\pi_i^{-1}(l_i^0 \cup l_i^1 \cup l_i^\infty)$ convergent pour d_H vers le relevé de $\pi_{+\infty}^{-1}(\Lambda^+)$. Nous savons que $U = \pi_{+\infty}^{-1}(T_{+\infty} \setminus \Lambda^+) \subset \mathbb{H}^2$ est une union disjointe de triangles idéaux (ouverts), de mesure de Lebesgue pleine dans \mathbb{H}^2 . Si $K \subset U$ est un compact connexe, on a $K \cap \pi_i^{-1}(l_i^0 \cup l_i^1 \cup l_i^\infty) = \emptyset$ pour i assez élevé, de sorte que $\varphi_{+\infty}$ est totalement géodésique sur K . Par conséquent, $\varphi_{+\infty}$ est totalement géodésique sur chaque composante de U . Comme $\varphi_{+\infty}$ est clairement 1-lipschitzienne, nous pouvons approcher tout segment de $\mathbb{H}^2 \setminus U$ par des segments de U pour montrer que $\varphi_{+\infty}$ est totalement géodésique sur chaque feuille de $\mathbb{H}^2 \setminus U$. Par le lemme 5.2.8 de [CEG], $\varphi_{+\infty}$ envoie tout arc rectifiable sur un arc rectifiable de même longueur, et se trouve donc être une application plissée.

3.8.4 L'application $\varphi_{+\infty}$ est une immersion topologique

Définissons $\mathcal{P} := \pi_{+\infty}^{-1}(\Lambda^+)$, qui contient le lieu de plissage de $\varphi_{+\infty}$. Pour montrer que $\varphi_{+\infty}$ est une immersion (topologique, adjectif que nous omettrons désormais), il suffit de trouver un court segment géodésique m de \mathbb{H}^2 , passant par le point base ω , transverse à \mathcal{P} , et de montrer que $\varphi_{+\infty}$ est une immersion sur l'union Υ de toutes les strates (droites et triangles idéaux complémentaires) de \mathcal{P} traversées par m (en effet, $\pi_{+\infty}(\Upsilon) = T_{+\infty}$). Il est clair que $\varphi_{+\infty}$ est déjà une immersion au voisinage de tout point de $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{P}$. Aux autres points, la clé sera une propriété "d'équidistribution" des trois droites de plissage de la surface T_i , quand i tend vers $+\infty$. Dans le paragraphe suivant, nous rendrons cette idée précise : une géodésique simple fermée (intrinsèque) de pente fixée q dans T_i rencontrera les droites de plissage de T_i dans un ordre parfaitement équilibré, ou sturmien, comme à la définition 3.8.1.

Choisissons un petit $\mu_1 > 0$, et un entier $k \in \mathbb{Z}$ assez grand pour que $\phi_k^+ \leq \mu_1$. Soit q le rationnel situé à l'opposé de l'arête de Farey e_k , du même côté que β^-/α^- , de sorte que $\lambda^+(q) = \phi_k^+$ par (3.9). Soit m_i^C la géodésique fermée simple de pente q dans T_i (muni de la métrique intrinsèque) : pour un certain exposant $*$ indépendant de i , le point de Weierstrass $\omega_i = \omega_i^*$ appartient à m_i^C (il suffit en fait de choisir $*$ distinct du projeté de $q \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ à $\mathbb{P}^1\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; nous faisons ce choix une fois pour toutes). Par la proposition 3.7.7 et par convergence au sens de la métrique de Hausdorff, il existe $\mu_2 > 0$ tel que pour tout $i > k$, l'angle entre m_i^C et la droite de plissage l_i de T_i au point ω_i est au moins μ_2 , et il existe $\mu_3 > 0$ tel que le segment m_i de m_i^C de longueur $2\mu_3$, centré en ω_i , est plongé dans T_i . Les extrémités de m_i sont à distance au moins $\frac{1}{2}\mu_2\mu_3$ de la droite de plissage l_i de T_i . Notons que la courbe simple fermée m_i^C rencontre les droites de plissage de T_i dans un ordre sturmien : aussi, la somme algébrique des angles de plissage rencontrés par n'importe quel sous-segment de m_i ne peut excéder $2\mu_1$ si k est assez grand, par (3.17). Enfin, soit κ_i un sous-segment de la droite de plissage l_i , centré en ω_i , de longueur 2 : si μ_3 est assez petit, toute droite de plissage L rencontrée par m_i forme un angle d'au moins $\frac{1}{2}\mu_2$ avec m_i , et passe à distance au plus $3\mu_3$ de chaque extrémité de κ_i pour la métrique intrinsèque de T_i .

Pour évaluer les plissages des φ_i , nous poursuivons selon la méthode décrite à la partie 3.8.1. Disposons l'image de l'application développante $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{H}^3$ dans le modèle du demi-espace supérieur de telle manière que les $\{\varphi_i(\omega)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ soient sur la droite 0∞ , à des hauteurs euclidiennes inférieures à 1, et que $\varphi_{+\infty}(l)$ soit la droite orientée de -1 à 1 . Considérons les relevés des arcs m_i à \mathbb{H}^3 passant par les $\varphi_i(\omega)$, et appelons ces relevés \tilde{m}_i . Par la construction précédente (en considérant des relevés des segments κ_i), si les “ μ ” sont assez petits, toute droite de plissage de $\varphi_i(\mathbb{H}^2)$ rencontrée par \tilde{m}_i a ses extrémités à distance euclidienne au plus $1/2$ de 1 et de -1 dans \mathbb{C} (rappelons que φ_i est 1-lipschitzienne). Suivant la partie 3.8.1, soit c_i^{+1} (resp. c_i^{-1}) l'arc de \mathbb{C} différentiable par morceaux défini par le segment transverse \tilde{m}_i de $\varphi_i(\mathbb{H}^2)$ près de 1 (resp. -1).

Soit $\sigma \subset \mathbb{H}^3$ un sous-segment maximal de \tilde{m}_i qui traverse seulement un triangle idéal de $\varphi_i(\mathbb{H}^2)$. Soit $\sigma' \subset \mathbb{C}$ l'arc de cercle (non réduit à un point) défini par σ dans $c_i^{\pm 1}$. Par la construction précédente, pour un certain $K_1 > 0$ universel,

$$\frac{\text{longueur euclidienne de } \sigma'}{\text{longueur hyperbolique de } \sigma} \leq K_1.$$

En particulier, $c_i^{\pm 1}$ est de longueur au plus $2K_1\mu_3$. Mais les rayons de courbure régulière de $c_i^{\pm 1}$ sont au moins $\frac{1}{2}$ (les cercles osculateurs passent près de 1 et de -1), donc la courbure totale de $c_i^{\pm 1}$ est au plus $4K_1\mu_3$. Par la construction précédente, la courbure singulière de n'importe quel sous-arc de $c_i^{\pm 1}$ est au plus $2\mu_1$. Si les “ μ ” sont assez petits, il s'ensuit que tous les vecteurs tangents à $c_i^{\pm 1}$ ont pour argument complexe un réel de l'intervalle $[\pi/4, 3\pi/4]$. Par conséquent, si τ décrit l'ensemble des triangles idéaux de $\varphi_i(\mathbb{H}^2)$ traversés par \tilde{m}_i , et si $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ est la projection verticale, les différents $p(\tau)$ ne se rencontrent que le long de leur bord : ainsi $\varphi_i(\bigcup_{\tau} \tau)$ est une surface plongée (que l'on peut voir, par exemple, comme le graphe d'une fonction d'un ouvert de \mathbb{C} dans \mathbb{R}^+). De plus, définissons la *largeur* de $p(\tau)$ comme la longueur du segment $p(\tau) \cap \sqrt{-1}\mathbb{R}$ (inclus dans l'axe des imaginaires purs), et rappelons que l'arc \tilde{m}_i forme un angle d'au moins $\frac{1}{2}\mu_2$ avec chacune des droites de plissage qu'il rencontre. Alors, pour un certain $K_2 > 0$ universel,

$$\frac{\text{largeur de } p(\tau)}{\text{longueur hyperbolique de } \tau \cap \tilde{m}_i} \geq \frac{\mu_2}{K_2}.$$

Pour conclure que $\varphi_{+\infty}$ est bien une immersion topologique, définissons un relevé $m^{\mathcal{C}}$ passant par $\omega \in \mathbb{H}^2$ de la géodésique fermée simple de pente q dans $T_{+\infty}$, et un sous-segment m de $m^{\mathcal{C}}$, de longueur $2\mu_3$, centré en ω . L'angle entre m et n'importe quelle droite de plissage de Λ^+ qu'il rencontre est au moins $\frac{1}{2}\mu_2$. Soit I la collection (infinie) de tous les triangles idéaux de $\pi_{+\infty}^{-1}(T_{+\infty} \setminus \Lambda^+)$ traversés par m . Pour $\tau \in I$, notons $|\tau|$ la longueur de $m \cap \tau$. Par convergence au sens de la métrique de Hausdorff, $\varphi_{+\infty}(\tau) \subset \mathbb{H}^3$ est approché par des triangles des surfaces $\varphi_i(\mathbb{H}^2) \subset \mathbb{H}^3$, dont les projections verticales par $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ sont de largeur au moins $\frac{|\tau|\mu_2}{2K_2}$: donc $p(\varphi_{+\infty}(\tau))$ est de largeur non nulle. L'injectivité de $\varphi_{+\infty}$ s'en déduit : si $x, x' \in \bigcup_{\tau \in I} \tau$ n'appartiennent pas à la même strate de la lamination $\mathcal{P} = \pi_{+\infty}^{-1}(\Lambda^+)$, on trouve un τ qui sépare x de x' pour montrer que $\varphi_{+\infty}(x) \neq \varphi_{+\infty}(x')$. Par projection verticale sur \mathbb{C} , on voit que $\varphi_{+\infty}(\mathbb{H}^2)$ est topologiquement immergé dans \mathbb{H}^3 .

3.8.5 Mesure de plissage de $\varphi_{+\infty}$

Ces arguments s'étendent pour montrer que la mesure de plissage de $\varphi_{+\infty}$, définie comme au 3.8.1, est la limite des mesures de plissage des φ_i : les courbes rectifiables $c_{+\infty}^{\pm 1} \subset \mathbb{C}$ définies près de ± 1 par $\varphi_{+\infty}$ sont de longueur $\ell^{\pm 1}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une union finie disjointe d'arcs de cercle γ_ι dans $c_{+\infty}^{\pm 1}$ dont les longueurs ont pour somme au moins $\ell^{\pm 1} - \varepsilon$ (de plus la direction du vecteur tangent à $c_{+\infty}^{\pm 1}$, ou encore à $c_i^{\pm 1}$, est en tout point à $\pi/4$, au plus, de la verticale). Les γ_ι peuvent être approchés par des arcs (ou des unions d'arcs) de $c_i^{\pm 1}$, et la part de courbure régulière de $c_{+\infty}^{\pm 1}$ qui ne provient *pas* des γ_ι est au plus 3ε , parce que les rayons de courbure sont minorés. On en déduit que le plissage de $\varphi_{+\infty}$ est la limite des plissages des φ_i (sur tout arc transverse, et donc sur toute courbe simple fermée) : ce plissage est simplement (un relevé de) λ^+ , par le corollaire 3.5.3. En vertu du théorème D de [B2], $\varphi_{+\infty}$ est entièrement déterminé par son plissage λ^+ et par la métrique intrinsèque de $T_{+\infty}$. En particulier, $\varphi_{+\infty} = \lim \varphi_{\nu(i)}$ est indépendant de la sous-suite ν originalement choisie, et les φ_i convergent vers une application plissée dont le plissage est donné par λ^\pm , quand i tend vers $\pm\infty$.

3.8.6 Complétude

La construction du 3.8.4 dans \mathbb{H}^3 nous permet en outre de plonger le revêtement universel \tilde{V} de $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ dans une variété (topologique) à bord \tilde{V}_∂ , comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, considérons un voisinage U_x de x tel que $\varphi_{+\infty}$ soit un plongement sur U_x . Alors $\varphi_{+\infty}(U_x)$, qui est muni d'une orientation transverse bien définie (dont on dira qu'elle pointe "vers l'extérieur"), partage une petite boule B_x centrée en $\varphi_{+\infty}(x)$ en deux hémisphères solides (topologiques) que nous pouvons appeler "intérieur" et "extérieur", par référence à l'orientation transverse. Les hémisphères intérieurs H_x , quand x décrit \mathbb{H}^2 , peuvent être recollés pour obtenir une variété à bord H . Sans perte de généralité, les boules B_x peuvent être choisies assez petites pour que, par la construction du 3.8.4, chaque $H_x \setminus \varphi_{+\infty}(U_x)$ soit identifié à une partie de \tilde{V} , plongée dans \mathbb{H}^3 . Alors, on peut encore recoller H à \tilde{V} . Comme chaque H_x est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, l'espace $\tilde{V}_\partial = \tilde{V} \cup H$ est une variété topologique à bord (éventuellement non complète).

Plaçons un relevé de la pointe de V en $+\infty$. En prenant pour $x \in \mathbb{H}^2$ le relevé (par $\pi_{+\infty}$) d'un point proche de la pointe de $T_{+\infty}$, on voit que les triangles idéaux limite mentionnés à la proposition 3.7.4 font partie du bord de \tilde{V}_∂ .

Proposition 3.8.2. *L'action du groupe fondamental Γ du tore percé T sur \tilde{V} s'étend en une action proprement discontinue sur \tilde{V}_∂ .*

Démonstration. Considérons la représentation $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ donnée par l'application développante Φ du diagramme (3.18), et les représentations $\rho_n : \Gamma \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ qui satisfont $\varphi_n \circ \rho_n(g) = \rho(g) \circ \varphi_n$ pour tout $g \in \Gamma$. Par le lemme 3.7.7, les ρ_n convergent vers un certain $\rho_{+\infty}$. La convergence des φ_n implique immédiatement $\varphi_{+\infty} \circ \rho_{+\infty}(g) = \rho(g) \circ \varphi_{+\infty}$. Par conséquent, on peut choisir les hémisphères H_x de manière équivariante, et l'action de Γ sur \tilde{V}_∂ est bien définie. Cette action est déjà proprement discontinue en tout point x de \tilde{V} (quand g décrit Γ , les gx ne s'accumulent pas en x). Mais si Γ agit sans point fixe et par isométries sur un espace métrique localement compact X , l'ensemble des $x \in X$ tels que l'action est proprement discontinue en x est ouvert (de toute évidence) et fermé : en effet, par la contraposée, si $g_n x \rightarrow x$ pour quelque suite (g_n) de $\Gamma \setminus \{1\}$ et U est un voisinage compact de x , alors U contient une boule de rayon ε centrée en x , et dès que $d(x, x') \leq \varepsilon/2$, les $g_n x'$ doivent s'accumuler en quelque point de U , donc l'action n'est pas totalement discontinue en x' . La proposition s'ensuit, par connexité de \tilde{V}_∂ . \square

En conséquence, l'espace $V_\partial := \tilde{V}_\partial/\Gamma$ est une variété (topologique) à bord, contenant $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$; et ∂V_∂ consiste en deux tores percés plissés (intrinsèquement isométriques à $T_{+\infty}$ et une autre surface $T_{-\infty}$), de plissages λ^+ et λ^- .

Proposition 3.8.3. *La variété à bord V_∂ est complète.*

Démonstration. Considérons le complété métrique $\bar{V} \supset V_\partial$, supposons que l'inclusion soit stricte et cherchons une contradiction. Définissons une fonction continue $f : V_\partial \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ par $f(x) = d(x, \bar{V} \setminus V_\partial)$. Par hypothèse, $\inf f = 0$.

Considérons l'immersion de \tilde{V}_∂ dans le modèle du demi-espace supérieur de \mathbb{H}^3 obtenue en envoyant un relevé de la pointe (c'est-à-dire n'importe quel sommet de n'importe quel tétraèdre idéal Δ_i) à l'infini (figures 3.4.1 et 3.6.1-3.6.2 par exemple). L'image de $\partial \tilde{V}_\partial$ contient, en particulier, des demi-plans verticaux (dont le bord est à une certaine hauteur au dessus de \mathbb{C}) inclus dans des plans totalement géodésiques de \mathbb{H}^3 . Ces demi-plans sont au dessus des bords supérieur et inférieur de la figure 3.4.1, contenus dans les triangles idéaux limite mentionnés à la proposition 3.7.4. Par conséquent, toute géodésique de \tilde{V}_∂ dont le point initial est à une hauteur suffisante au dessus de \mathbb{C} est définie à tout temps $t \leq 1$ (à moins qu'elle rencontre $\partial \tilde{V}_\partial$ en ces demi-plans). Donc, si $H \subset V_\partial$ dénote un voisinage horoboulisque suffisamment petit de la pointe, on a $f \geq 1$ sur H .

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, considérons le compact $K_i := T_i \setminus H$ de V_∂ (où T_i est toujours le i -ème tore percé plissé). Par convergence des modules des T_i dans l'espace de Teichmüller, il existe une boule B de \mathbb{H}^2 centrée au point base ω , dont le rayon est indépendant de i , telle que $K_i \subset \pi_i(B)$: par convergence de (φ_i) , les $\pi_i(B)$ convergent métriquement vers un compact K' de ∂V_∂ , sur lequel f est strictement positive. Par conséquent, f est minorée (par une constante strictement positive, s'entend) sur un voisinage U de K' dans V_∂ , et $K_i \subset U$ pour i assez grand. Donc f est minorée sur $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} K_i$, donc sur $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} T_i$.

Toutefois, soit $\gamma(t)$ un arc rectifiable 1-lipschitzien de V_∂ , défini pour $t < M$, qui n'ait pas de limite en $M \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la restriction $\gamma|_{[M-\varepsilon, M]}$ rencontre $V_\partial \setminus \partial V_\partial$ (parce que le bord $\partial V_\partial = T_{+\infty} \sqcup T_{-\infty}$ est intrinsèquement une surface hyperbolique complète), mais alors $\gamma|_{[M-\varepsilon, M]}$ doit rencontrer Δ_i pour une famille infinie d'indices i (toute union finie de tétraèdres est complète). Donc on peut trouver $t_n \rightarrow M$ telle que $\gamma(t_n) \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} T_i$. Clairement, $f(\gamma(t_n)) \leq M - t_n$ qui tend vers 0 : contradiction. Donc V_∂ est complète. \square

3.8.7 Un groupe quasi-fuchsien du tore percé

Nous concluons l'argument de façon fort classique : rappelons la variété complète à bord localement convexe \tilde{V}_∂ , qui est un revêtement universel de $\bar{V} = V_\partial$. Étant donnés deux points $x, x' \in \tilde{V}_\partial$, considérons un plus court chemin γ de x à x' . Si un point intérieur de γ appartient à $\partial \tilde{V}_\partial$, par locale convexité du plissage (paragraphe 3.8.5), c'est que $\gamma \subset \partial \tilde{V}_\partial$, et γ est un segment géodésique de $\partial \tilde{V}_\partial$. Sinon, l'intérieur de γ est un segment de \tilde{V} . Dans tous les cas, l'application développante étendue $\Phi : \tilde{V}_\partial \rightarrow \mathbb{H}^3$ est un plongement (elle envoie γ sur un segment d'extrémités distinctes) et possède une image convexe fermée C , munie d'une action proprement discontinue du groupe fondamental Γ de T (proposition 3.8.2). L'action s'étend proprement discontinûment à \mathbb{H}^3 (on peut le voir en projetant chaque point de \mathbb{H}^3 sur C). La variété \mathbb{H}^3/Γ contient $\bar{V} \simeq C/\Gamma$, qui admet les plissages de bord souhaités λ^\pm . Comme l'union des relevés des tétraèdres Δ_i à \mathbb{H}^3 est dense dans C , c'est que C est le plus petit ensemble fermé et convexe contenant tous les points fixes paraboliques de Γ ; par conséquent \bar{V} est le cœur convexe, et Γ est quasi-fuchsien, avec pour plissages de bord λ^\pm . Le théorème 3.2.2 est prouvé.

3.8.8 Canonicité géométrique

Comme à la partie 1.11, fixons une variété hyperbolique complète M de dimension 3 à une pointe, dont le volume peut cette fois être infini. Considérons un voisinage horoboulouque H de la pointe, un revêtement universel $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$, et le groupe $\Gamma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ des transformations π -équivariantes. Alors H se relève à une famille d'horoboules $(H_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans \mathbb{H}^3 , correspondant à une famille de vecteurs lumière $(v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} . L'enveloppe convexe (fermée, linéaire) C de $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est Γ -invariante, et son bord ∂C est muni d'une décomposition naturelle \tilde{D} en *facettes* polyédrales. Soit V_M l'intérieur du cœur convexe de M .

Dans [AS], Akiyoshi et Sakuma généralisent la construction de l'enveloppe convexe d'Epstein–Penner pour montrer que \tilde{D} définit une décomposition \mathcal{D}^{Geom} de V_M , indépendante de H , en polyèdres hyperboliques idéaux (génériquement des tétraèdres), en autorisant quelques types de dégénérescences soigneusement définies. Dans [ASWY2], avec Wada et Yamashita, ils conjecturaient

Théorème 3.8.4. *Si $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, où Γ est le groupe quasi-fuchsien considéré à la partie 3.8.7, alors la décomposition \mathcal{D}^{Geom} de $V_M = V$ est, combinatoirement, la triangulation $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ définie à la partie 3.2.*

Démonstration. On se contente de recopier mot à mot la démonstration du théorème 1.11.1, à ceci près que le revêtement universel \tilde{V} de V est maintenant un convexe strictement inclus dans \mathbb{H}^3 (bien sûr, les tétraèdres Δ_i ne sont plus indexés dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, mais dans \mathbb{Z}). Notons que les “effets pervers” ($D \neq \partial C$) mentionnés au terme du second paragraphe de la démonstration du théorème 1.11.1 prennent une plus grande ampleur ici : ∂C contient des faces de dimension 3 qui se projettent tout entières sur le bord du cœur convexe, et n'appartiennent donc pas à D . Voir [AS] pour plus de détails. \square

3.9 Généralisations

Dans cette partie, nous généralisons tous les résultats précédents aux groupes du tore percé possédant des plissages rationnels et/ou des bouts infinis. Par une lamination *admissible* λ , nous entendons l'un quelconque des objets suivants :

- Un couple (défini au signe près) $\lambda = \pm(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}/\pm$ tel que β/α soit irrationnel ;
- Un couple $\lambda = \pm(\theta\alpha, \theta\beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux et $0 < \theta < \pi$ (nous appelons θ le *poids* de λ et notons $|\lambda| = \theta$) ;
- Un couple $\lambda = \pm(\pi\alpha, \pi\beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux (π est le *poids* de λ et nous notons $|\lambda| = \pi$) ;
- Une classe projective réelle $\lambda = \{(\mu\alpha, \mu\beta) \mid \mu \neq 0\}$ où β/α est irrationnel.

La *pente* de la lamination admissible est le nombre $s(\lambda) = \beta/\alpha \in \mathbb{P}^1\mathbb{R}$. La variété quotient d'un groupe du tore percé admet deux bouts géométriques (définis comme les bouts topologiques du complémentaire d'un voisinage régulier de la pointe) : voir [Min]. À chaque bout géométrique, on peut associer une unique lamination admissible (de plissage ou de bout) : les quatre cas ci-dessus correspondent, respectivement, au cas où ω est

- Fini, avec une lamination de *plissage* irrationnelle ;
- Fini, avec une lamination de *plissage* rationnelle et un angle de plissage θ ;
- Fini, avec une lamination de *bout* rationnelle (une pointe accidentelle) ;
- Infini, avec une lamination de *bout* irrationnelle (voir [B1] et la section 3 de [Min] pour une définition précise).

Théorème 3.9.1. Soient λ^+, λ^- des laminations admissibles de pentes distinctes. Il existe un groupe du tore percé Γ avec pour laminations de plissage et/ou de bouts λ^\pm , et l'intérieur V du cœur convexe de \mathbb{H}^3/Γ admet une décomposition idéale $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{Comb}$ en cellules polyédrales (de volume strictement positif) dont la combinatoire est dictée par λ^\pm , au sens suivant : si Λ est la droite géodésique orientée de $s(\lambda^-)$ à $s(\lambda^+)$ à travers le diagramme de Farey dans \mathbb{H}^2 , alors

- i – Si $s(\lambda^+)$ et $s(\lambda^-)$ sont irrationnelles, \mathcal{D} est composée de tétraèdres idéaux $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en bijection naturelle avec les arêtes de Farey traversées par Λ , comme à la partie 3.2.
- ii – Si seule $s(\lambda^+)$ est rationnelle et $|\lambda^+| < \pi$, alors \mathcal{D} possède un tétraèdre pour chaque arête de Farey que traverse Λ , et une cellule \mathcal{P} dont l'intérieur est non-contractile et homéomorphe à un tore plein : $\partial_1 = \overline{\partial\mathcal{P} \cap \partial V}$ est un tore percé plissé le long d'une géodésique simple fermée de pente $s(\lambda^+)$, et $\partial_2 = \overline{\partial\mathcal{P} \setminus \partial V}$ est un tore percé plissé le long de la triangulation idéale associée à l'unique triangle de Farey traversé par Λ qui ait $s(\lambda^+)$ pour sommet. Enfin, $\partial_1 \cap \partial_2$ est une géodésique qui va de la pointe à la pointe et a pour pente $s(\lambda^+)$. Voir le volet gauche de la figure 3.9.1.
- iii – Si seule $s(\lambda^+)$ est rationnelle et $|\lambda^+| = \pi$, toutes les propriétés du cas précédent s'appliquent, au détail suivant près : $\partial_1 = \overline{\partial\mathcal{P} \cap \partial V}$ devient une sphère à trois trous (la courbe simple fermée de pente $s(\lambda^+)$ a été "pincée", ce qui fait d'elle une nouvelle pointe) : voir le volet droit de la figure 3.9.1.
- iv – Si seule $s(\lambda^-)$ est rationnelle, la situation est semblable aux deux cas précédents, en échangeant λ^- et λ^+ .
- v – Si $s(\lambda^+), s(\lambda^-)$ sont des rationnels qui ne sont pas reliés par une arête de Farey, la situation est à nouveau semblable, avec deux pièces toriques $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ au lieu d'une.
- vi – Si $s(\lambda^+), s(\lambda^-)$ sont reliés par une arête de Farey, \mathcal{D} est composée seulement de deux tores pleins \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- comme ci-avant, recollés le long d'un tore percé T plissé le long de seulement deux droites allant de la pointe à la pointe : les pentes de ces droites sont $s(\lambda^+)$ et $s(\lambda^-)$.

De surcroît, \mathcal{D} coïncide avec la décomposition géométriquement canonique \mathcal{D}^{Geom} de V donnée par la construction de l'enveloppe convexe d'Epstein et Penner.

Notons que la combinatoire de \mathcal{D}^{Geom} ne dépend pas de la nature (finie ou infinie) des bouts de \mathbb{H}^3/Γ . Au stade actuel, nous avons traité le cas de deux laminations de plissage irrationnelles (bouts finis). Attachons-nous à montrer les cas restants du théorème 3.9.1.

3.9.1 Un seul plissage rationnel

Étudions le cas de deux bouts finis, quand seul β^+/α^+ est rationnel. Nous pouvons choisir de terminer le mot $\Omega \in \{R, L\}^{\mathbb{Z}}$ par un suffixe infini $LRR\dots R\dots$ (ou $RLL\dots L\dots$: c'est là un choix arbitraire) et reprendre l'argument à partir de la partie 3.2. Nous supposons que $i = 0$ est le plus grand indice charnière. Les parties 3.3 à 3.3.2 sont inchangées : simplement, la suite (w_i) est concave (donc croissante et convergente) sur \mathbb{N} . À la partie 3.3.3, on trouve que la suite (ϕ_i^+) est constante sur \mathbb{N} , égale à un certain réel positif. Par (3.9), ce réel coïncide avec le poids θ de la lamination rationnelle λ^+ , donc nous supposons $\theta < \pi$. La partie 3.4 est essentiellement inchangée : par le calcul du sous-lemme 3.4.2 (et en usant de la même notation), la somme des volumes de tous les tétraèdres Δ_i pour $i \geq 2^n$ est majorée par

$$\theta \sum_{k>n} \Sigma_{2^{k-1}}^{2^k} \leq \theta \sum_{k>n} 2^{-k} [1 + (2k - 1) \log 2] = O(2^{-n/2}).$$

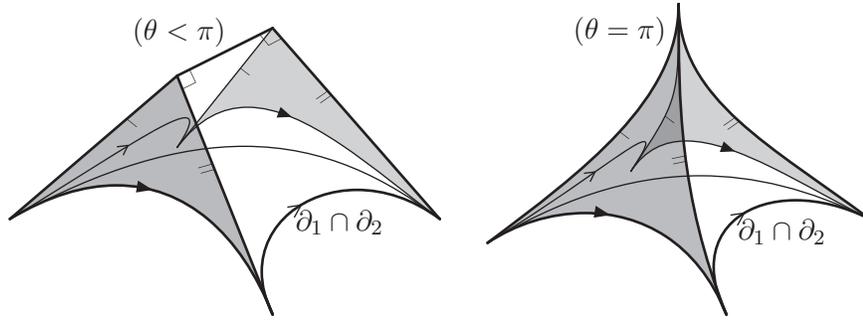


FIG. 3.9.1 – Pièces toriques : l’angle dièdre extérieur θ est le poids $|\lambda^\pm|$. Les faces grisées sont identifiées, ainsi que les paires d’arêtes décorées de flèches identiques.

Par conséquent la fonctionnelle volume \mathcal{V} est bornée, continue pour la topologie produit, et concave. On peut trouver le maximisateur w de \mathcal{V} , et il satisfait toujours les propositions 3.4.4 et 3.4.5 : en particulier, tous les tétraèdres Δ_i pour $i > 0$ n’ont que des angles strictement positifs. Nous fixons ce maximisateur w (et donc les angles des Δ_i).

Il faut faire quelque chose de neuf à la partie 3.5 : montrer que $\lim_{i \rightarrow +\infty} w_i = \theta$. Les $\{w_i\}_{i \geq 2}$ n’ont d’influence que sur les angles des $\{\Delta_i\}_{i \geq 1}$, qui sont tous strictement positifs : donc le volume \mathcal{V} est critique par rapport à chacun des w_i pour $i \geq 2$. Par le sous-lemme 1.6.4, on en déduit que les liens (triangles euclidiens) des $\{\Delta_i\}_{i \geq 1}$ s’assemblent correctement pour former une triangulation que l’on peut dessiner dans le plan euclidien \mathbb{C} . Plus précisément, comme Ω se termine par $RRR\dots$, il existe une suite de nombres complexes $(\zeta_i)_{i \geq 0}$ telle que pour tout $i \geq 1$, les triangles provenant de Δ_i ont leurs sommets en $(-1, \zeta_i, \zeta_{i-1})$ et en $(1, \zeta_i, \zeta_{i+1})$ (figure 3.9.2, volet gauche). Ces triangles étant semblables (ils proviennent tous deux de Δ_i), on a $(\zeta_i + 1)(\zeta_{i+1} - 1) = (\zeta_{i-1} + 1)(\zeta_i - 1) = \dots = (\zeta_0 + 1)(\zeta_1 - 1)$, d’où

$$\zeta_{i+1} = \frac{\zeta_i + \kappa}{\zeta_i + 1} =: \varphi(\zeta_i)$$

pour un certain nombre complexe $\kappa \neq 1$ indépendant de i . Notons que la longueur complexe ℓ de l’isométrie hyperbolique (définie par φ satisfait $\cosh \ell = \frac{1+\kappa}{1-\kappa}$). À terme, φ sera l’holonomie d’un lacet qui suit la courbe simple fermée le long de laquelle le bord du cœur convexe est plissé.

Proposition 3.9.2. *Le nombre κ appartient à l’intervalle réel $]0, 1[$, et les ζ_i appartiennent tous à un même cercle.*

Démonstration. Soit Z_i la ligne brisée ($u \mapsto u \pm 2$)-invariante de sommets $(\dots, -1, \zeta_{i-1}, \zeta_i, 1, \dots)$ définie par (le lien de) la surface plissée T_i . En vertu de (3.4), les angles externes (signés) de Z_i ont pour valeurs :

$$w_{i-1} \text{ au point } \zeta_i ; -w_i \text{ au point } \zeta_{i-1} ; w_i - w_{i-1} \text{ au point } 1.$$

D’abord, κ est réel : s’il en était autrement, les ζ_i auraient une limite dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (une racine carrée de κ), donc $w_i - w_{i-1}$ (l’angle externe de Z_i en 1) ne saurait tendre vers 0. Si $\kappa < 0$, alors φ est une pure rotation : les ζ_i appartiennent tous à un cercle du demi-plan inférieur (ouvert), ce qui contredit également $w_i - w_{i-1} \rightarrow 0$. Si $\kappa > 1$, alors φ est une symétrie axiale glissée de \mathbb{H}^3 : les ζ_i tendent vers $\pm\sqrt{\kappa}$ et on trouve $|w_i - w_{i-1}| \rightarrow \pi$, impossible. Si $\kappa = 0$, alors φ est une transformation parabolique qui fixe

0 : les ζ_i tendent vers 0 le long d'un cercle tangent à \mathbb{R} , et on trouve que l'angle $w_i = \pi - \widehat{\zeta_i \zeta_{i+1} 1}$ tend vers $\pi > \lim_{+\infty} \phi^+ = \theta$. La seule possibilité restante est que $\kappa \in]0, 1[$, auquel cas φ est une translation hyperbolique pure. L'unique groupe à un paramètre (réel) de translations hyperboliques pures auquel appartient φ a pour orbites dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ les arcs de cercle ⁽⁵⁾ d'extrémités 1 et -1 (ainsi que les singletons $\{1\}, \{-1\}$) : les ζ_i appartiennent à un tel arc de cercle. \square

Ainsi, les ζ_i appartiennent à un arc de cercle C du demi-espace inférieur qui rencontre l'axe réel aux points $\pm\sqrt{\kappa}$, et $\lim_{+\infty} \zeta_i = \sqrt{\kappa}$. Notons θ^* l'angle entre C et le segment $[-\sqrt{\kappa}, \sqrt{\kappa}]$ (plus exactement, l'angle entre leurs demi-tangentes en $\sqrt{\kappa}$). Comme $w_i = \pi - \widehat{\zeta_i \zeta_{i+1} 1}$, on voit facilement que

$$\theta^* = \lim_{i \rightarrow +\infty} w_i$$

(voir la figure 3.9.2). Par conséquent, $\theta^* \leq \theta$.

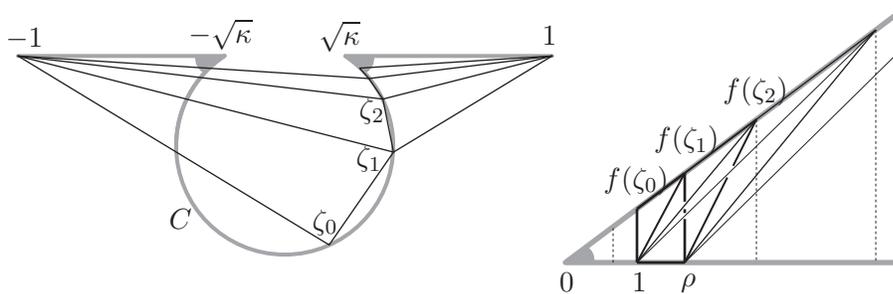


FIG. 3.9.2 – Tous les angles marqués (gris) valent $\pi - \theta^*$, et $\zeta_{j+1} = \varphi(\zeta_j) = \frac{\zeta_j + \kappa}{\zeta_j + 1}$.

Proposition 3.9.3. *On a $\theta^* = \theta$.*

Démonstration. Tout d'abord, on s'assure aisément que toute donnée $0 \leq w_0 < w_1 < \theta^* < \pi$ détermine, de façon continue et différentiable, un *unique* couple de nombres complexes (ζ_0, ζ_1) tels que :

- i – La ligne brisée $Z_1 = (\dots, -1, \zeta_0, \zeta_1, 1, \dots)$ a pour angles externes $(w_0, -w_1, w_1 - w_0)$ comme dans (3.4) plus haut ;
- ii – Le nombre $\kappa = 1 - (\zeta_0 + 1)(1 - \zeta_1)$ tel que $\zeta_1 = \frac{\zeta_0 + \kappa}{\zeta_0 + 1}$ appartient à $]0, 1[$;
- iii – Le cercle C passant par ζ_0 et ζ_1 centré sur l'axe imaginaire forme un angle θ^* avec l'axe réel.

Par ii, $\zeta_0 + 1$ et $1 - \zeta_1$ sont d'arguments opposés ; par i, on peut se contenter de chercher ζ_0 sur la demi-droite $-1 + e^{\sqrt{-1} \frac{w_0 - w_1}{2}} \mathbb{R}^+$ et ζ_1 sur $1 - e^{\sqrt{-1} \frac{w_1 - w_0}{2}} \mathbb{R}^+$. Ces demi-droites se rencontrent sous l'axe réel en un point p de l'axe imaginaire : toujours par i, l'argument de $\zeta_1 - \zeta_0$ et le rapport $\frac{\zeta_0 - p}{\zeta_1 - p}$ ne dépendent pas de θ^* . Dans le cas "limite" où $\zeta_1 = 1$, l'angle entre le cercle C et \mathbb{R} vaut $\pi - \widehat{(-1 \zeta_0 1)} = w_1$: de là, il est facile de voir que cet angle décrit $]w_1, \pi[$ quand ζ_1 s'éloigne de 1 dans la direction de p (le cercle C subit alors une homothétie de centre p).

⁵au sens conforme : un arc de cercle est l'image d'un segment par une transformation de Möbius

Ces ζ_0, ζ_1 définissent à leur tour tous les $\{\zeta_j\}_{j \geq 2}$ via $\zeta_{j+1} = \varphi(\zeta_j) = \frac{\zeta_j + \kappa}{\zeta_j + 1}$, et nous pouvons lire l'angle $w_j = \widehat{1\zeta_{j+1}\zeta_j} \leq \theta^*$ (croissance de w) et construire le tétraèdre idéal associé Δ_j . Dans ce qui suit, nous étudions quelle forme a l'espace $U := \bigcup_{j \geq 1} \Delta_j$, dont le bord (le tore percé T_1) admet pour angles de plissage $(w_0, -w_1, w_1 - w_0)$ (voir l'équation (3.4) ci-dessus).

Définissons $f(\zeta) := \frac{\zeta + \sqrt{\kappa}}{\zeta - \sqrt{\kappa}}$, de manière que $f(\varphi(\zeta)) = \rho f(\zeta)$ où $\rho := \frac{1 + \sqrt{\kappa}}{1 - \sqrt{\kappa}}$. L'enveloppe convexe hyperbolique de $(\infty, 1, \zeta_j, \zeta_{j+1})$ est isométrique au tétraèdre Δ_j : en appliquant f , nous obtenons un tétraèdre Δ'_j , isométrique à Δ_j , de sommets $(1, \rho, \rho^j f(\zeta_0), \rho^{j+1} f(\zeta_0))$ (figure 3.9.2, volet droit). De plus, tous les $f(\zeta_j) = \rho^j f(\zeta_0)$ appartiennent à la demi-droite $e^{i(\pi - \theta^*)} \mathbb{R}^+$ (en effet, f envoie $C \cap \mathbb{R} = \{\sqrt{\kappa}, -\sqrt{\kappa}\}$ sur $\{0, \infty\}$). Soit Π le plan hyperbolique appuyé sur la droite passant par $1, f(\zeta_0)$: la loxodromie $\Phi : u \mapsto \rho u$ admet un domaine fondamental bordé par Π et $\Phi(\Pi)$. En raisonnant dans ce domaine fondamental, on voit alors facilement que U possède le même volume que $D := D_1 \cup D_2$, où D_1, D_2 sont des tétraèdres idéaux de sommets $(\infty, f(\zeta_1), 1, \rho)$ et $(\infty, f(\zeta_1), 1, f(\zeta_0))$ respectivement. De plus, Φ identifie les faces $(\infty, 1, f(\zeta_0))$ et $(\infty, \rho, f(\zeta_1))$ de D , de sorte que (le complété de) D/Φ est une variété à bord polyédral, d'intérieur homéomorphe à un tore plein, et d'angles dièdres intérieurs

$$\left(\pi - w_1, \pi + w_0, \frac{w_1 - w_0}{2}, \frac{w_1 - w_0}{2}, \pi - \theta^* \right).$$

L'arête de D/Φ où l'angle dièdre vaut $\pi - \theta^*$ est une courbe simple fermée de longueur $\log \rho$, le long de laquelle D_1, D_2 s'enroulent à l'infini. (Les autres angles, indépendants de θ^* , sont ceux du quadrilatère de sommets $1, -1, \zeta_0, \zeta_1$). On obtient une image de D/Φ en remplaçant θ par θ^* dans le volet de gauche de la figure 3.9.1 (et en omettant d'identifier l'arête marquée $\partial_1 \cap \partial_2$ à l'arête opposée).

Fixons w_0, w_1 et observons que D dépend de manière différentiable de θ^* . La formule de Schläfli donne alors $\partial \mathcal{V}(D/\Phi) / \partial \theta^* = \frac{1}{2} \log \rho > 0$: donc le volume de D/Φ (et par là-même de U) est une fonction strictement croissante de θ^* (à w_0, w_1 fixés). Considérons les $\{w_j\}_{j \leq 1}$ comme fixés, et les $\{w_j\}_{j \geq 2}$ comme des inconnues qui déterminent les volumes de $\Delta_1, \Delta_2, \dots$: alors (w_2, w_3, \dots) est clairement la solution du problème de maximisation du volume pour $U = \bigcup_{j \geq 1} \Delta_j$ (avec angles de plissage fixés sur le bord T_1). Par conséquent, les w_i choisissent la plus grande limite possible θ^* en $+\infty$, à savoir $\theta^* = \theta$. \square

La démonstration précédente fait bien plus que déterminer $\lim_{+\infty} w_j$: comme dans les parties 3.5 à 3.8, elle fournit une description complète de $U = \bigcup_{j \geq 1} \Delta_j$ et de son bord (dont le plissage du côté extérieur s'avère égal à λ^+). Voici, toutefois, une observation fort importante :

Observation 3.9.4. La proposition 1.11.4, “ $A + C > 0$ ”, n'est pas valable pour la famille de surfaces plissées $(T_i)_{i \geq 0}$. À la place, on a $A + C = 0$. Cela signifie simplement que $\overrightarrow{-1, \zeta_i}$ et $\overrightarrow{\zeta_{i+1}, 1}$ forment des angles opposés avec l'axe réel. Et en effet, $(\zeta_i + 1)(1 - \zeta_{i+1}) = 1 - \kappa$ est bien un réel positif.

De même, on a l'analogue suivant du lemme 1.8.2.

Observation 3.9.5. Si $w_0 = 0$, l'éventail infini correspondant aux tétraèdres $(\Delta_i)_{i \geq 0}$ admet une structure euclidienne à bord. Si les longueurs Q, F, G sont définies comme au lemme 1.8.2, alors $Q = F + G$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir

Proposition 3.9.6. *Toutes les inégalités (strictes) de (3.11) sont vraies.*

Démonstration. Il s’agit de la proposition 3.4.6 (dans ce nouveau contexte où β^+/α^+ est rationnel). La démonstration est identique, en prenant toutefois garde au fait suivant : afin d’éliminer la possibilité $w_j = 0$ pour une charnière j , on fait appel au chapitre 1 (en particulier le lemme 1.8.2 et l’argument de la partie 1.9). La stratégie est de supposer $w_j = 0$, puis de perturber w en le remplaçant par un certain w^ε de telle sorte que le volume augmente : $\partial\mathcal{V}/\partial\varepsilon > 0$. Cette dernière inégalité a lieu, essentiellement, à cause de l’inégalité du lemme 1.8.2 (“ $Q < F + G$ ”), vérifiée aussi bien dans la syllabe R^n qui précède j que dans la syllabe L^m qui suit j . Plus précisément, $\partial\mathcal{V}/\partial\varepsilon$ est strictement positif dès lors que l’une au moins des deux inégalités “ $Q \leq F + G$ ” est stricte. Or cette inégalité est toujours stricte, sauf dans un unique cas (le suffixe infini $LRR\dots R\dots$) : nous pouvons donc conclure. \square

Par conséquent, tous les tétraèdres Δ_i n’ont que des angles strictement positifs et s’assemblent correctement : les parties 3.5 à 3.8 se répètent sans encombre pour le bout associé à λ^- , et $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i$ est l’intérieur du cœur convexe d’un groupe quasi-fuchsien du tore percé admettant les plissages souhaités, λ^\pm .

Les résultats de la partie 1.11 se généralisent immédiatement : la seule modification est que les tétraèdres $(\Delta_i)_{i \geq 0}$ se relèvent en une famille de cellules *coplanaires* dans l’espace de Minkowski, parce que l’inégalité clé de la proposition 1.11.4 est devenue une égalité. Donc la décomposition géométriquement canonique de l’intérieur du cœur convexe comprend la cellule non-contractile D/Φ (figure 3.9.1, volet gauche).

3.9.2 Deux plissages rationnels

Quand β^+/α^+ et β^-/α^- sont rationnels tous deux, le mot associé $\Omega \in \{R, L\}^{\mathbb{Z}}$ peut être choisi avec un préfixe infini $\dots R\dots RRL$ et un suffixe infini $LRR\dots R\dots$. Nous appliquons l’argument ci-dessus aux deux bouts simultanément. À nouveau, la proposition 3.9.6 est vraie car aucun indice charnière j n’appartient à la fois au préfixe et au suffixe.

Si les pentes des deux plissages rationnels ne sont pas adjacentes dans le graphe de Farey, nous pouvons remplacer le préfixe par $\dots LLR$ et/ou le suffixe par $RLL\dots$, et obtenir par là des triangulations différentes de l’intérieur du cœur convexe du même groupe quasifuchsien.

Si, par contre, $s(\lambda^+)$ et $s(\lambda^-)$ sont adjacents dans le graphe de Farey, alors $\Omega = \dots RRLRR\dots$ (observons que le préfixe et le suffixe ont une intersection non vide “ L ”, de sorte que l’opération consistant à changer le préfixe et l’opération consistant à changer le suffixe ne commutent pas). Si les indices i situés juste avant et juste après le L central sont 0 et 1, on obtient $w_0 = w_1$ en appliquant l’observation 3.9.4 au préfixe et au suffixe. En d’autres termes, les points a, b, c dans la figure 3.9.3 (gauche) sont alignés. Il est donc possible de retriangler le même cœur convexe selon un mot $\Omega = \dots LLLRRR\dots$, à condition d’autoriser le tétraèdre charnière Δ_0 à s’aplatir (en noir dans la figure 3.9.3, volet droit). Dans tous les cas, la suite $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ maximise le volume total.

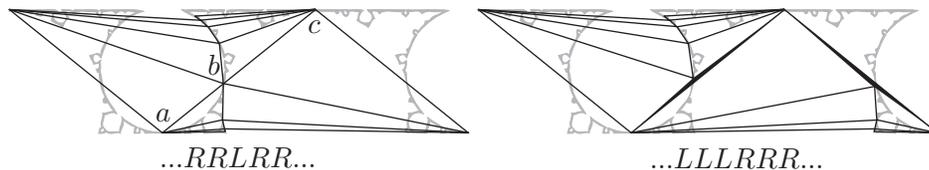


FIG. 3.9.3 – Deux triangulations superposées au même ensemble limite.

3.9.3 Pincement

Le cas où l'un des plissages λ^\pm (ou les deux) a pour poids π est un cas limite aisé des parties 3.9.1 et 3.9.2 (le terme de “pincement” fait référence au fait que la courbe de plissage devient de plus en plus courte, pour finalement se transformer en une pointe alors que l'angle de plissage atteint la valeur π).

Supposons $|\lambda^+| = \pi$ (notons que les conditions de (3.11) où figure ϕ^+ deviennent triviales, parce que $\phi^+ \geq \pi$). Les résultats de la partie 3.9.1 se généralisent au cas où $\theta = \pi$ et $\kappa = 0$. L'arc de cercle C de la figure 3.9.2 devient un cercle complet, tangent à l'axe réel \mathbb{R} en 0. L'analyse de la proposition 3.9.3 (existence et unicité de $\zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{C}$) s'étend de façon continue et différentiable au cas $\theta^* = \pi$. On trouve que le tétraèdre de sommets $(\infty, 1, \zeta_j, \zeta_{j+1})$ est envoyé par $f : u \mapsto 1/u$ sur un tétraèdre Δ'_j de \mathbb{H}^3 , isométrique à Δ_j , de sommets $(0, 1, \tau + j, \tau + j + 1)$ pour un certain $\tau \in \mathbb{C}$ indépendant de j (dans le volet droit de la figure 3.9.2, les deux demi-droites liminaires grises sont remplacées par deux droites parallèles). On vérifie sans mal que $\bigcup_{j \geq 1} \Delta_j$ est le tore plein représenté sur la figure 3.9.1 (à droite), et la formule de Schläfli implique de nouveau que $\theta^* = \pi$ réalise le volume maximal.

Après la proposition 3.9.3, le raisonnement est le même.

3.9.4 Bouts infinis

Par [Min], l'espace des groupes quasi-fuchsien est dense dans l'ensemble de toutes les représentations discrètes, fidèles, sans torsion, respectant les paraboliques, de $\pi_1(T)$ dans $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. De fait, tout bout géométriquement infini de la variété quotient d'une telle représentation est naturellement muni d'une *lamination de bout*, à savoir une classe projective de laminations mesurées irrationnelles que l'on se propose ici de voir comme un plissage “infiniment intense”. Dans cette partie, nous supposons que $\beta^+/\alpha^+ \notin \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ et considérons w^K , la solution du problème de maximisation du volume pour $(\phi^-, K\phi^+)$, où $K > 0$ (plus exactement, w est soumis aux conditions (3.11), où $K\phi^+$ remplace ϕ^+ ; et le tableau (3.3) continue d'exprimer x_i, y_i, z_i).

Étant donnée une représentation d'un groupe de surface (discrète, respectant les paraboliques), toute lamination mesurée compacte λ sur la surface admet une *longueur*, que l'on peut calculer en mesurant les longueurs (pondérées) d'une suite de courbes pondérées convergeant vers λ . Martin Bridgeman a montré [Br] que les longueurs des laminations de plissage d'un groupe quasi-fuchsien sont majorées par une constante qui ne dépend que de la surface sous-jacente (ici le tore percé). Par le théorème de la limite double de Thurston (théorèmes 4.1 et 6.3 de [T3]; voir aussi [Ot]), l'espace des représentations discrètes, respectant les paraboliques, pour lesquelles deux laminations mesurées fixes (dont l'union remplit la surface) sont de longueur au plus C (une constante donnée), est compact. Donc, quitte à passer à une sous-suite, la suite des groupes Γ^K correspondant à w^K converge algébriquement vers un certain Γ , quand K tend vers $+\infty$. Par le théorème A de [Min], \mathbb{H}^3/Γ est homéomorphe à $T \times \mathbb{R}$ et doit posséder un bout infini (sans quoi Γ serait quasi-fuchsien et les volumes seraient bornés, ce qui contredirait la preuve du lemme 3.5.1).

Proposition 3.9.7. *Le bout de \mathbb{H}^3/Γ associé à λ^- est fini, avec pour lamination de plissage λ^- . L'autre bout est infini, et sa lamination de bout est la classe projective de λ^+ .*

Démonstration. Par [B2] (théorème D), l'espace des représentations du groupe abstrait Γ qui respectent les paraboliques est paramétré de façon continue (en fait, holomorphe) par la donnée (τ, ω) d'un point τ de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_T , et d'un *cocycle transverse* ω à valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par rapport à une lamination topologique fixée μ (une mesure de plissage, en particulier, est un tel cocycle si on projette

ses valeurs sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). En prenant le support de λ^- comme μ , on en déduit immédiatement que le module intrinsèque du bord du cœur convexe de \mathbb{H}^3/Γ^K associé à λ^- converge dans \mathcal{T}_T , quand K tend vers l'infini. Par conséquent, \mathbb{H}^3/Γ contient une surface plissée H de plissage $\lambda^- < 0$ (donc localement convexe), qui est nécessairement une composante de bord du cœur convexe (le bord du revêtement universel de H contient tous les points fixes paraboliques).

Le bout de \mathbb{H}^3/Γ associé à λ^+ est donc infini. Les points fixes paraboliques du groupe limite Γ définissent les sommets d'une version de la figure 3.4.1 (le lien euclidien de la pointe), et donc une famille d'angles positifs ou nuls pour les tétraèdres Δ_i (on peut donc définir, à rebours, $w_i = \pi - z_i$). Par convergence algébrique, les w^K convergent vers w dans la topologie produit. Pour tous $i \leq j$, le volume total de $\Delta_{i-1}, \Delta_i, \dots, \Delta_j, \Delta_{j+1}$ est maximal par rapport aux paramètres w_i, \dots, w_j : en particulier, les propositions 3.4.4 et 3.4.5 sont encore vraies. On peut répéter l'argument du chapitre 1 (lemme 1.8.2 et partie 1.9) : par la proposition 1.9.1, tous les Δ_i n'ont que des angles strictement positifs. La proposition 1.11.4 (et, partant, le lemme 1.11.2), sont encore vrais : $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est la décomposition géométriquement canonique de \mathbb{H}^3/Γ . En particulier, la famille composée de toutes les arêtes de tous les tétraèdres $\{\Delta_i\}_{i \geq 0}$ forme une suite de laminations qui s'échappe de tout compact de \mathbb{H}^3/Γ , et tend vers la classe projective $[\lambda^+]$ (par des valeurs rationnelles, qui sont les extrémités des arêtes de Farey traversées par la géodésique joignant $\frac{\beta^-}{\alpha^-}$ à $\frac{\beta^+}{\alpha^+}$). Par conséquent, $[\lambda^+]$ est l'invariant de bout. \square

Le cas de deux bouts infinis a été traité dans [Ak]. Le théorème 3.9.1 est démontré.

3.9.5 Le théorème des laminations de plissage pour les groupes du tore percé

Proposition 3.9.8. *Le groupe Γ construit à la fin de la partie 3.4 est continûment déterminé par (λ^+, λ^-) .*

Démonstration. Commençons par observer que si β^+/α^+ est rationnel, le choix initial d'un suffixe infini dans la partie 3.9.1 n'a pas d'incidence sur le groupe finalement construit Γ : ce choix détermine simplement deux triangulations différentes de la même pièce torique (représentée figure 3.9.1), dont l'espace des déformations est inchangé.

Définissons l'ouvert

$$\mathcal{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} [\pi, +\infty[\cdot\{(m, n)\}$$

(notons que $0 \notin \mathcal{U}$). Une lamination de plissage admissible λ peut être identifiée à un point $\pm(\alpha, \beta)$ de \mathcal{U}/\pm . Soient $\alpha^\pm, \beta^\pm, \phi^\pm, W, w$ définis comme dans les parties 3.2.1 à 1.6 (à ceci près que $\frac{\beta^+}{\alpha^+}, \frac{\beta^-}{\alpha^-}$ peuvent être rationnels).

Supposons $(\alpha_n^+, \beta_n^+) \rightarrow (\alpha^+, \beta^+)$ et $(\alpha_n^-, \beta_n^-) \rightarrow (\alpha^-, \beta^-)$ dans \mathcal{U} , et définissons la droite orientée Λ_n de β_n^-/α_n^- à β_n^+/α_n^+ à travers le diagramme de Farey. Définissons aussi les fonctions associées $\phi^{\pm, n}$ comme en (3.9), les domaines W^n comme dans la définition 3.3.4, et les solutions $(w_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ du problème de maximisation du volume sur W^n . Si β^+/α^+ est rationnel, on peut supposer (quitte à se restreindre à deux sous-suites) que la suite (α_n^+, β_n^+) tend vers (α^+, β^+) dans le sens direct pour une orientation de référence de $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$. On fait une supposition semblable quant à β^-/α^- .

A priori, les suites $(w_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ ne sont définies que modulo une translation de l'indice i . Néanmoins, nous pouvons choisir ces translations d'une façon cohérente : il existe une arête de Farey e traversée par toutes les droites Λ_n pour n assez grand ; on décide donc pour tout n que w_0^n est le paramètre associé à e (à savoir, $e_0^n = e$). Par compacité de $[0, \pi]^{\mathbb{Z}}$, une certaine sous-suite de $(w^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain

w^* , pour la topologie produit. Il suffit de montrer que $w^* = w$: en effet, le groupe Γ est complètement (et continûment) déterminé par les formes d'un nombre fini de tétraèdres consécutifs Δ_i .

L'observation principale est que les mots $\Omega^n \in \{R, L\}^{\mathbb{Z}}$ convergent simplement vers Ω , et que $\phi^{\pm, n} \rightarrow \phi^{\pm}$ (simplement dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$), par définition (3.9). On en déduit que w^* appartient à l'espace W , d'où l'inégalité de volumes $\mathcal{V}(w^*) \leq \mathcal{V}(w)$. Comme $\max_W \mathcal{V}$ n'est atteint qu'en un point (le volume est une fonctionnelle strictement concave), il suffit de montrer l'inégalité réciproque. Procédons par l'absurde.

Supposons $\mathcal{V}(w^*) < \mathcal{V}(w)$. Il existe des entiers $m < 0 < M$ tels que les tétraèdres $\{\Delta_i\}_{m < i < M}$ définis par w ont un volume total strictement supérieur à $\mathcal{V}(w^*)$. Si nous parvenons à prolonger $(w_i)_{m \leq i \leq M}$ pour en faire une suite $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de l'espace W^n pour n assez grand, nous aurons la contradiction souhaitée.

Par le corollaire 3.5.2, on peut supposer $\frac{w_m}{\phi_m^-} > \frac{w_{m+1}}{\phi_{m+1}^-}$ et $\frac{w_{M-1}}{\phi_{M-1}^+} < \frac{w_M}{\phi_M^+}$ (si β^+/α^+ est rationnel, le corollaire 3.5.2 est superflu, car w est monotone et ϕ^+ est constante, dans un voisinage de $+\infty$). Comme w satisfait (3.11) (inégalités strictes), pour n assez grand, la sous-suite (w_m, \dots, w_M) satisfait les inégalités correspondantes servant à définir W^n , par convergence des $\phi^{\pm, n}$. Choisissons un tel n assez grand et définissons

$$v_i := \begin{cases} \phi_i^{-, n} \frac{w_m}{\phi_m^{-, n}} & \text{si } i \leq m ; \\ w_i & \text{si } m \leq i \leq M ; \\ \phi_i^{+, n} \frac{w_M}{\phi_M^{+, n}} & \text{si } M \leq i . \end{cases}$$

Si n est assez grand, on vérifie sans mal que $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ appartient à W^n . La seule difficulté est de s'assurer que le triplet (v_{M-1}, v_M, v_{M+1}) (et de même (v_{m-1}, v_m, v_{m+1})) vérifie les inégalités de concavité ou de charnière de (3.2 — 3.11) (selon que M est charnière ou non) : observer que quand n tend vers l'infini, $\left(\frac{v_{M-1}}{\phi_{M-1}^+}, \frac{v_M}{\phi_M^+}, \frac{v_{M+1}}{\phi_{M+1}^+}\right)$ tend vers le triplet $\left(\frac{w_{M-1}}{\phi_{M-1}^+}, \frac{w_M}{\phi_M^+}, \frac{w_M}{\phi_M^+}\right)$ dont le premier terme est plus petit que les deux autres ; et utiliser la remarque 3.3.3. \square

Corollaire 3.9.9. (C. Series) *Un groupe quasi-fuchsien du tore percé Γ est déterminé, à conjugaison près dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$, par ses mesures de plissage λ^{\pm} .*

Démonstration. L'espace \mathcal{QF} des groupes quasi-fuchsien mais non fuchsien (du tore percé) est une variété réelle connexe de dimension 4 — par exemple à cause du théorème d'Ahlfors–Bers [AB]. Rappelons l'ouvert \mathcal{U} rencontré dans la preuve de la proposition 3.9.8, et considérons l'application

$$f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{QF}$$

définie par la construction du groupe Γ (fin de la partie 3.4). On sait que f est bien définie et injective (théorème 3.2.2), et continue (proposition 3.9.8). Comme \mathcal{U}^2 est de dimension 4, le théorème de l'invariance du domaine permet d'affirmer que l'image $\text{Im}(f)$ est ouverte. Reste à montrer que $\text{Im}(f)$ est fermée.

Considérons des couples $(\lambda_n^+, \lambda_n^-)$ tels que les groupes correspondants $\Gamma_n = f(\lambda_n^+, \lambda_n^-)$ convergent vers un certain Γ dans \mathcal{QF} . La fonction qui à un groupe associe ses plissages est continue (voir [KS]), donc les λ_n^{\pm} convergent vers λ^{\pm} dans \mathcal{U} . La proposition 3.9.8 implique alors que $\Gamma = f(\lambda^+, \lambda^-)$. \square

À cause du corollaire 3.9.9, le théorème 3.9.1 couvre notamment tous les groupes quasi-fuchsien du tore percé. Le théorème 3.1.1 devient une conséquence du théorème 3.9.1.

Chapitre 4

Characterization of hyperbolic links among arborescent ones

4.1 Introduction

In the 1990s, Andrew Casson introduced a powerful technique for constructing and studying cusped hyperbolic 3-manifolds. His idea was to subdivide a manifold M into *angled ideal tetrahedra* : that is, tetrahedra whose vertices are removed and whose edges carry prescribed dihedral angles. When the dihedral angles of the tetrahedra add up to 2π around each edge of M , the triangulation is called an *angled triangulation*. Casson proved that every orientable cusped 3-manifold that admits an angled triangulation must also admit a hyperbolic metric, and outlined a possible way to find the hyperbolic metric by studying the volumes of angled tetrahedra — an idea also developed by Rivin [R1]. The power of Casson’s approach lies in the fact that the defining equations of an angled triangulation are both linear and local, making angled triangulations relatively easy to find and deform (much easier than to study an actual hyperbolic triangulation, as in [NZ, SW2] or in some aspects of Thurston’s seminal approach [T1]).

Our goal in this chapter is to extend this approach to larger and more complicated building blocks. These blocks can be ideal polyhedra instead of tetrahedra, but they may also have non-trivial topology. In general, an *angled block* will be a 3-dimensional manifold whose boundary is subdivided into faces looking locally like the faces of an ideal polyhedron, in a sense to be defined. The edges between adjacent faces carry prescribed dihedral angles. In Section 4.2, we will describe the precise combinatorial conditions that the dihedral angles must satisfy. These conditions will imply the following generalization of a result by Lackenby [L1, Corollary 4.6].

Theorem 4.1.1. *Let $(M, \partial M)$ be an orientable 3-manifold, subdivided into finitely many angled blocks in such a way that the dihedral angles at each edge of M sum to 2π . Then ∂M consists of tori, and the interior of M admits a complete hyperbolic metric.*

One can prove that a particular manifold with boundary is hyperbolic in a spectrum of practical ways, ranging from local to global. In some cases, a combinatorial description of M naturally guides a way to subdivide it into tetrahedra (see for example Chapters 1–2 and [GF], or [W3]). In these cases, angled triangulations are highly useful. On the other extreme, one can study the global topology of M and prove that it contains no essential spheres, disks, tori, or annuli ; Thurston’s hyperbolization theorem

then implies that $M \setminus \partial M$ is hyperbolic [T2]. Theorem 4.1.1 provides a medium-range solution (still relying on Thurston’s theorem) for situations where M naturally decomposes into pieces that retain some topological complexity.

We will apply Theorem 4.1.1 to the complements of arborescent links, which are defined in terms of *bracelets*. We choose an orientation of \mathbb{S}^3 , to remain fixed throughout the chapter.

Definition 4.1.2. An *unknotted band* $A \subset \mathbb{S}^3$ is an annulus or Möbius band, whose core curve C is an unknotted circle. Such an A has a natural structure as an I -bundle over C , and we will refer to the fiber over a point of C as a *crossing segment* of the unknotted band A .

Consider the manifold M_d obtained by removing from \mathbb{S}^3 the open regular neighborhoods of d disjoint crossing segments of an unknotted band A , and let $K_d = \partial A \cap M_d$. Then a d -*bracelet* B_d is the pair (M_d, K_d) , as in Figure 4.1.1. We say that d is the *degree* of the bracelet.

Note that when $d > 0$, B_d is determined up to homeomorphism (of pairs) by the integer d . For example, when $d = 2$, B_2 is homeomorphic to the pair $(\mathbb{S}^2 \times I, \{4 \text{ points}\} \times I)$. When $d = 1$, M_1 is a 3-ball and K_1 is a pair of simultaneously boundary-parallel arcs; a 1-bracelet B_1 is commonly called a *trivial tangle*. When $d = 0$, B_0 is determined by the *number of half-twists* in the band: namely, the linking number of C with ∂A .

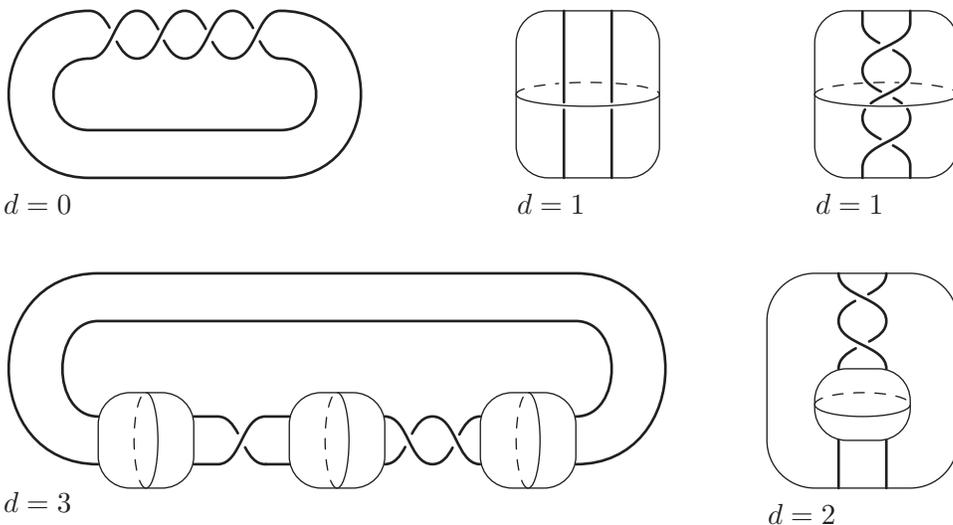


FIG. 4.1.1 – Examples of d -bracelets. The two 1-bracelets with different numbers of half-twists in their bands are homeomorphic.

Let B_{d_1} and B_{d_2} be two bracelets with $d_i > 0$, and choose a boundary sphere S_i of each B_{d_i} . The S_i have natural orientations induced by the orientation of \mathbb{S}^3 , and we can glue S_1 to S_2 by any orientation-reversing homeomorphism sending the unordered 4-tuple of points $S_1 \cap K_1$ to the 4-tuple $S_2 \cap K_2$. The union of the K_{d_i} then defines a collection of arcs in a larger subset of \mathbb{S}^3 . More generally, if bracelets B_{d_1}, \dots, B_{d_n} are glued to form \mathbb{S}^3 (some of the d_i being 1), the arcs in these bracelets combine to form a link K in \mathbb{S}^3 , as in Figure 4.1.2.

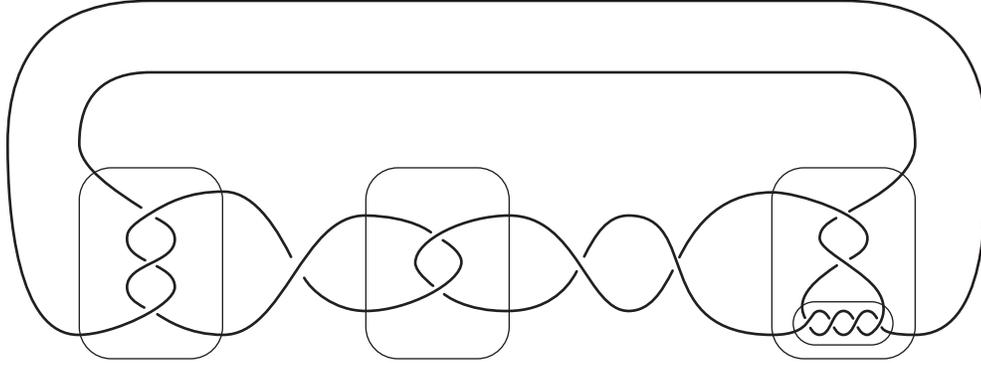


FIG. 4.1.2 – A generalized arborescent knot, obtained by gluing several bracelets.

Definition 4.1.3. A link $K \subset \mathbb{S}^3$ is called *prime* if, for every 2–sphere S meeting K in two points, at least one of the two balls cut off by S intersects K in a single boundary–parallel arc. If K is not prime, it is called *composite*. Note that with this convention, every split link (apart from the split link consisting of two unknots) is automatically composite.

Definition 4.1.4. A knot or link $K = \bigcup_{i=1}^n K_{d_i}$, obtained when several bracelets are glued together to form \mathbb{S}^3 , is called a *generalized arborescent link*. If, in addition, K is prime, we say that it is an *arborescent link*.

The pattern of gluing bracelets to form a link can be represented by a tree T , in which a d –valent vertex corresponds to a d –bracelet and an edge corresponds to a gluing map of two neighboring bracelets. The term *arborescent*, from the Latin word *arbor* (tree), refers to this correspondence. Special cases of arborescent links include *two–bridge links*, which can be constructed by gluing two 1–bracelets (already studied in Section 2.1), and *Montesinos links*, which can be constructed by gluing a single d –bracelet to d different 1–bracelets. Montesinos links are also known as *star links*, because the corresponding tree is a star.

Arborescent links are a class of links with rich combinatorics, because the topology of the link tends to “remember” the bracelet decomposition. For example, Gabai gave an effective algorithm to compute the genus of such a link in terms of the bracelets [Ga]. Arborescent links were also extensively studied, indeed classified, by Bonahon and Siebenmann. One geometric consequence of their work is the following result. (By definition, a link is called hyperbolic if its complement in \mathbb{S}^3 admits a complete hyperbolic metric.)

Theorem 4.1.5 (Bonahon–Siebenmann). *The following three families, shown in Figure 4.1.3, form a complete list of non-hyperbolic arborescent links :*

- I. K is the boundary of a single unknotted band,
- II. K has two isotopic components, each of which bounds a 2–punctured disk properly embedded in $\mathbb{S}^3 \setminus K$,
- III. K or its reflection is the pretzel link $P(p, q, r, -1)$, where $p, q, r \geq 2$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$.

Furthermore, an effective algorithm decides whether a given generalized arborescent link K is prime, and whether it lies in one of the exceptional families.

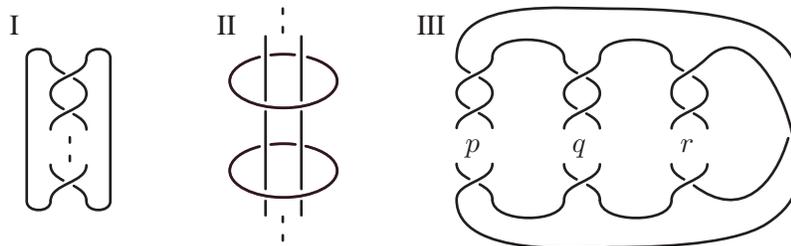


FIG. 4.1.3 – The three exceptional families of non-hyperbolic arborescent links. For family III, $p, q, r \geq 2$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$.

Bonahon and Siebenmann’s original proof of this theorem made strong use of the double branched covers of links. A possible characterization of arborescent links is that these covers are all *graph manifolds*, obtained by gluing Seifert fibered manifolds along incompressible tori — and these tori project to gluing spheres of d -bracelets. Their results and ideas were heavily quoted, but unfortunately the monograph containing the proof [BS] has never been finished. One of our primary motivations in this work was to write down a version of the proof.

In the years since Bonahon and Siebenmann’s monograph, several authors have re-proved parts of the theorem. Menasco [Me] proved that a two-bridge link (more generally, a prime alternating link) is hyperbolic whenever it is not in family I. Oertel [Oe] proved that the complement of a Montesinos link contains an incompressible torus if and only if the link is in family III, with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Finally, it follows from Wu’s work on Dehn surgery [W4] that all non-Montesinos arborescent *knots* are hyperbolic.

It is fairly straightforward to check that the links listed in Theorem 4.1.5 are indeed non-hyperbolic. For families I and II, Figure 4.1.3 reveals an obvious annulus or Möbius band that forms an obstruction to the existence of a hyperbolic structure. Meanwhile, the pretzel links in family III contain (less obvious) incompressible tori when $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ (by Oertel’s work [Oe]) and are Seifert fibered by Sakuma’s work [S1] when $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ (in fact, such links are torus links unless (p, q, r) is a permutation of $(2, 2, n)$). In particular, all of these well-studied links are known to be prime. Thus we will focus our attention on proving that all the remaining arborescent links are indeed hyperbolic.

The proof is organized as follows. In Section 4.2, we will define angled blocks and prove Theorem 4.1.1. In Section 4.3, we will perform a detailed study of how d -bracelets can be glued along 4-punctured spheres. This will enable us to simplify the bracelet presentation of any particular link and decide whether it is an exception. In Section 4.4, we will use the bracelet structure to subdivide the link complement into tetrahedra and solid tori. The subdivision will work for all arborescent links except families I and II. Finally, in Section 4.5, we will assign dihedral angles to edges on the boundary of the tetrahedra and solid tori. For links that are not in family III, these angles will satisfy the criteria of angled blocks, implying by Theorem 4.1.1 that the link complement is hyperbolic.

4.2 Angled blocks

In this section, we develop a theory of angled blocks that provides a practical way of proving that a given manifold is hyperbolic (Theorem 4.1.1). We lay out the necessary definitions in Section 4.2.1. In

Section 4.2.2, we study the intersections between blocks and surfaces in a manifold, and prove that any surface can be placed into a sufficiently nice *normal form*. The angle structures on the blocks allow us to define a natural measure of complexity for the surfaces, called *combinatorial area*, which behaves like hyperbolic area. In Section 4.2.3, we will use combinatorial area considerations to show that M cannot contain any essential surface of non-negative Euler characteristic : so by Thurston’s hyperbolization theorem, M must admit a hyperbolic structure.

Our proof of Theorem 4.1.1 follows the same outline as Casson’s proof that manifolds with an angled triangulation are hyperbolic, written down by Lackenby in [L1, Section 4]. The credit for developing these ideas goes mainly to Casson and Lackenby.

4.2.1 From polyhedra to blocks

In studying a 3–manifold M , it is frequently useful to decompose M into pieces that are not contractible. This idea has been recently studied by other authors : Agol has described a way to cut a manifold into non-contractible *nanotubes* [Ag], while Martelli and Petronio have cut a manifold into *bricks* [MP]. Rieck and Sedgwick, among others, have investigated how a solid torus added during Dehn surgery can intersect a Heegaard surface [RS]. Focusing on the individual pieces of the decomposition, Schlenker has studied manifolds with polyhedral boundary [S2]. Our angled blocks fit into this theme.

Definition 4.2.1. Let S be a closed oriented surface, and let $\Gamma \subset S$ be an embedded graph each of whose vertices has degree at least 3. We say that Γ *fills* S if every component of $S \setminus \Gamma$ is an open disk, whose boundary consists of at least 3 edges of Γ . Given a graph Γ that fills a surface, we can construct a *dual graph* $\Gamma^* \subset S$, well-defined up to isotopy, in the following fashion. Every disk of $S \setminus \Gamma$ defines a vertex of Γ^* . Every edge $e \subset \Gamma$ separates two faces of $S \setminus \Gamma$; we connect the corresponding vertices of Γ^* by a dual edge e^* . Finally, $S \setminus \Gamma^*$ is a union of disks, or faces, each corresponding to a vertex of Γ .

Note that this construction still makes sense if the surface S has several components. In this situation, both Γ and Γ^* will have as many components as S .

Definition 4.2.2. Let \mathcal{P} be a compact, oriented, irreducible, atoroidal 3–manifold with boundary. Let Γ be a graph that fills $\partial\mathcal{P}$, whose edges are e_1, \dots, e_n . To every edge $e_i \subset \Gamma$ we assign an *internal angle* α_i and an *external angle* $\varepsilon_i = \pi - \alpha_i$. By duality, an edge $e_i^* \subset \Gamma^*$ receives the same angle as its dual edge $e_i \subset \Gamma$.

We say that \mathcal{P} is an *angled block* if this assignment of angles satisfies the following properties :

- i – $0 < \alpha_i < \pi$ for all i ,
- ii – $\sum_{\partial D} \varepsilon_i = 2\pi$ for every face D of $\partial\mathcal{P} \setminus \Gamma^*$, and
- iii – $\sum_{\gamma} \varepsilon_i > 2\pi$ for every simple closed curve $\gamma \subset \Gamma^*$ that bounds a disk in \mathcal{P} but is not the boundary of a face of $\partial\mathcal{P} \setminus \Gamma^*$.

Finally, we remove from \mathcal{P} all the vertices of Γ , making them into *ideal vertices*. We will refer to the edges of Γ as the *edges of \mathcal{P}* , and to the faces of $\partial\mathcal{P} \setminus \Gamma$ as the *faces of \mathcal{P}* . Removing the vertices of Γ makes the faces of \mathcal{P} into ideal polygons.

Property i says that \mathcal{P} is locally convex at every edge. Property ii says that the link of every ideal vertex of \mathcal{P} has the angles of a convex Euclidean polygon. Property iii is motivated by the following theorem of Rivin [R2].

Theorem 4.2.3 (Rivin). *Let \mathcal{P} be an angled polyhedron — that is, a contractible angled block. Then \mathcal{P} can be realized as a convex ideal polyhedron in \mathbb{H}^3 with the prescribed dihedral angles, uniquely up to isometry. Conversely, the dihedral angles of every convex ideal polyhedron in \mathbb{H}^3 satisfy i–iii.*

Such characterizations of polyhedra in \mathbb{H}^3 by their dihedral angles were first studied by Andreev [An]. We conjecture that an analogous result holds for non-contractible blocks as well :

Conjecture 4.2.4. *Let \mathcal{P} be an angled block. Then its universal cover $\tilde{\mathcal{P}}$ can be realized as a (possibly infinite) ideal polyhedron in \mathbb{H}^3 , with dihedral angles specified by \mathcal{P} , uniquely up to isometry.*

When \mathcal{P} is contractible, this conjecture is exactly Rivin’s theorem. Schlenker [S2, Theorem 8.15] has treated the case where \mathcal{P} has incompressible boundary. We also note that the converse statement (that the ideal polyhedron $\tilde{\mathcal{P}}$ must satisfy i–iii) is a fairly straightforward consequence of the Gauss–Bonnet theorem.

Our primary interest is in the manifolds that one may construct by gluing together angled blocks. To build a manifold with boundary, we first truncate all the ideal vertices of the blocks. As a result, a truncated block, still denoted \mathcal{P} , has two kinds of faces : *interior faces* that are truncated copies of the original faces, and *boundary faces* that come from the truncated vertices. Similarly, \mathcal{P} has two kinds of edges : *interior edges* that are truncated edges of Γ , and *boundary edges* along the boundary faces.

Definition 4.2.5. Let $(M, \partial M)$ be a compact 3–manifold with boundary. An *angled decomposition* of M is a subdivision of M into truncated angled blocks, glued along their interior faces, such that $\sum \alpha_i = 2\pi$ around each interior edge of M . As a consequence, the boundary faces of the blocks fit together to tile ∂M .

Theorem 4.1.1 says that the interior of every orientable manifold with an angled decomposition must admit a hyperbolic structure. However, this is purely an existence result. An angled decomposition of a manifold is considerably weaker and more general than a hyperbolic structure, for two reasons. First, we do not know whether the blocks are actually geometric pieces — this is the content of Conjecture 4.2.4. Second, even when the blocks are known to be geometric, a geometrically consistent gluing must respect more than the dihedral angles. To obtain a complete hyperbolic structure, the truncated vertices of the blocks must fit together to tile a horospherical torus, meaning that these Euclidean polygons must have consistent sidelengths as well as consistent angles.

There is an interesting contrast between the rigidity of a hyperbolic structure and the flexibility of angle structures. By Definitions 4.2.2 and 4.2.5, an angle structure on a block decomposition is a solution to a system of linear equations and (strict) linear inequalities. The solution set to this system, if non-empty, is an open convex polytope, so for every angled decomposition there is a continuum of deformations.

In fact, geometric angled blocks — for example, angled polyhedra — can serve as a stepping stone on the way to finding a complete hyperbolic structure. Every angled polyhedron has a well-defined volume determined by its dihedral angles, by Theorem 4.2.3. If the volume of an angled decomposition is critical in the polytope of deformations, we can exploit Schläfli’s formula as in Theorem 0.1.2 by Rivin [R1] and show that the polyhedra glue up to give a hyperbolic metric : this is carried out for some examples in Chapters 1 and 2 (where all blocks are tetrahedra), and, in essence, in Sections 3.9.1–3.9.2 (with one or two exceptional blocks). However, depending on the combinatorics of the decomposition, a critical point may or may not occur. In fact, numerical experiments have shown that some of the decompositions that we will define for arborescent link complements in Section 4.4 admit angle structures, but have no critical point.

4.2.2 Normal surface theory in angled blocks

To prove Theorem 4.1.1, we study the intersections between angled blocks and essential surfaces. We choose to work in the PL category.

Definition 4.2.6. A surface $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ is called *essential* if S is incompressible, boundary-incompressible, and not boundary-parallel, or if S is a sphere that does not bound a ball.

Our goal is to move any essential surface into a form where its intersections with the individual blocks are particularly nice :

Definition 4.2.7. Let \mathcal{P} be a truncated block, and let $(S, \partial S) \subset (\mathcal{P}, \partial \mathcal{P})$ be a surface. We say that S is *normal* if it satisfies the following properties :

- i – every closed component of S is essential in \mathcal{P} ,
- ii – S and ∂S are transverse to all faces and edges of \mathcal{P} ,
- iii – no component of ∂S lies entirely in a face of $\partial \mathcal{P}$,
- iv – no arc of ∂S in a face of \mathcal{P} runs from an edge of \mathcal{P} back to the same edge,
- v – no arc of ∂S in an interior face of \mathcal{P} runs from a boundary edge to an adjacent interior edge.

Given a decomposition of M into blocks, a surface $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ is called *normal* if for every block \mathcal{P} , the intersection $S \cap \mathcal{P}$ is a normal surface in \mathcal{P} .

Proposition 4.2.8. *Let $(M, \partial M)$ be a manifold with an angled block decomposition.*

- (a) *If M is reducible, then M contains a normal 2-sphere.*
- (b) *If M is irreducible and ∂M is compressible, then M contains a normal disk.*
- (c) *If M is irreducible and ∂M is incompressible, then any essential surface can be moved by isotopy into normal form.*

Proof. The following argument is the standard procedure for placing surfaces in normal form with respect to a triangulation or a polyhedral decomposition [Ha]. As long as all faces of all blocks are disks, the topology of the blocks never becomes an issue. We will handle part (c) first, followed by (b) and (a).

For (c), assume that M is irreducible and ∂M is incompressible. Let $(S, \partial S)$ be an essential surface in $(M, \partial M)$. To move S into normal form, we need to check the conditions of Definition 4.2.7. Since S is essential in M , it automatically satisfies i. Furthermore, a small isotopy of S ensures the transversality conditions of ii.

Consider the intersections between S and the open faces of the blocks, and let γ be one component of intersection. Note that by Definition 4.2.1, the face F containing γ is contractible. We want to make sure that γ satisfies iii, iv, and v.

- iii – Suppose that γ is a closed curve, violating iii. By a minimality argument, we may assume that γ is innermost on the face F . Then γ bounds a disk $D \subset F$, whose interior is disjoint from S . But since S is incompressible, γ also bounds a disk $D' \subset S$. Furthermore, since we have assumed that M is irreducible, the sphere $D \cup_{\gamma} D'$ must bound a ball. Thus we may isotope S through this ball, moving D' past D . This isotopy removes the curve γ from the intersection between S and F .

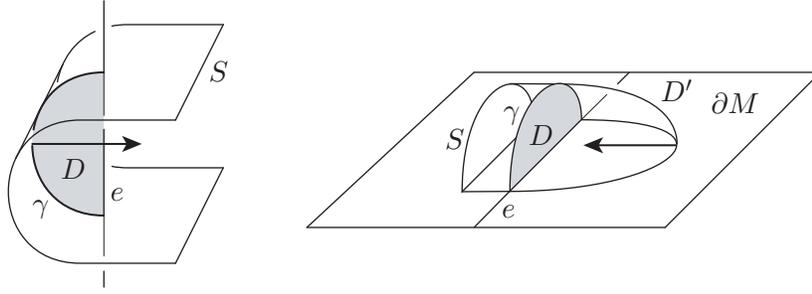


FIG. 4.2.1 – When a surface violates condition iv of normality, then an isotopy in the direction of the arrow removes intersections between S and the faces of M .

iv – Suppose that γ runs from an edge e back to e , violating iv. Then γ and e co-bound a disk $D \subset F$, and we can assume γ is innermost (i.e. S does not meet D again). If e is an interior edge, we can use this disk D to guide an isotopy of S past the edge e , as in the left panel of Figure 4.2.1. This isotopy removes γ from the intersection between S and F (some intersection components between S and the interiors of faces other than F may merge, but their total number never increases).

If γ lies in a boundary face, then the situation is very similar to the previous paragraph. This time, the disk D guides an isotopy of S along ∂M , simplifying the intersection between S and the faces of the blocks.

Finally, if e is a boundary edge and F is an interior face, then D is a boundary compression disk for S . Since S is boundary-incompressible, γ must also cut off a disk $D' \subset S$, as in the right panel of Figure 4.2.1. Since M is irreducible and ∂M is incompressible, it follows that the disk $D \cup_{\gamma} D'$ is boundary-parallel : $D \cup D' \cup \Delta$ bounds a ball B , for some disk $\Delta \subset \partial M$. We must ask on which side of $D \cup_{\gamma} D'$ the ball B lies : if a neighborhood of the arc γ in the surface S meets the interior of B , then S is a disk of B and is boundary-parallel (recall that S does not meet D again, because γ is innermost among the arcs running from e back to e). So S does not meet the interior of B . In particular, D' is isotopic to D by an isotopy sweeping out B and missing $S \setminus D'$. This defines an isotopy of S which can be extended slightly to move D' past D , thus removing the curve γ from the intersection between S and F .

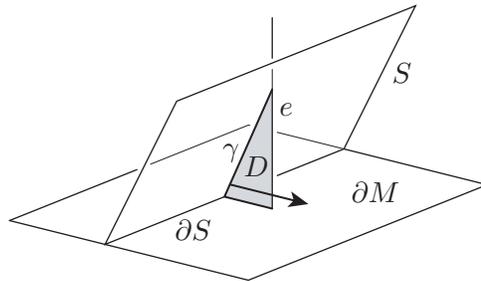


FIG. 4.2.2 – When a surface violates condition v of normality, a ∂M -preserving isotopy of S along the disk D , in the direction of the arrow, removes intersections between S and the faces of M .

v – Suppose that γ runs from a boundary edge to an adjacent interior edge, violating v. Then γ once

again cuts off a disk D of a face F . By isotoping S along this disk, as in Figure 4.2.2, we remove γ from the intersection of S and F .

It is immediate to check that each of the last three moves reduces the number of components of $S \cap Z$, where Z is the union of the interiors of the faces of M . Thus, after a finite number of isotopy moves, S becomes normal.

For part (b), assume that M is irreducible and ∂M is compressible. Let S be an essential disk in M ; under our assumptions, S must be a compression disk for ∂M . To move S into normal form, we follow a very similar procedure to the one in part (c). In particular, condition i of Definition 4.2.7 is vacuous because S has no closed components. Furthermore, a small isotopy of S ensures the transversality conditions of ii. Focusing our attention on conditions iii–v, let γ be one component of intersection between S and a face F of a block.

If γ is a simple closed curve, violating iii, the argument is exactly the same as above. We find that γ bounds a disk $D \subset F$ and an isotopic disk $D' \subset S$, because the disk S is incompressible and M is irreducible. Thus we may isotope S past D .

If γ runs from an edge e back to e , violating iv, the argument is mostly the same as above. If e is an interior edge, or γ lies in a boundary face, then the exact isotopies described in part (a)–iv will guide S past e . If e is a boundary edge and γ lies in an interior face F , then γ and e co-bound a disk $D \subset F$; up to replacing γ with an outermost arc of $D \cap S$ on F , we may assume $D \cap S = \gamma$ so that the disk D realizes a boundary compression of S . The situation is similar to the right panel of Figure 4.2.1, except now γ splits S into disks D_1 and D_2 (since S itself is a disk). At least one $D_i \cup_\gamma D$ must be essential in M , because if they were both boundary-parallel, S would be boundary-parallel also. If by S we now denote this essential disk $D_i \cup_\gamma D$, then S can be pushed away from the face F .

Finally, if γ runs from a boundary edge to an adjacent interior edge e , violating v, an isotopy of S as in Figure 4.2.2 will remove γ from the intersections between S and the faces of the blocks. Each of the last three moves simplifies the intersections between S and the faces, so a repeated application will place S in normal form.

For part (a), assume that the manifold M is reducible, and let $S \subset M$ be a sphere that doesn't bound a ball. We will move S into normal form by checking the conditions of Definition 4.2.7. Note that by Definition 4.2.2, an essential sphere can never be contained in a single block, so condition i is vacuous. A small isotopy of S ensures the transversality conditions of ii. Note as well that condition v is vacuous, because S is closed. To satisfy conditions iii and iv, let γ be one arc of intersection between S and a face F of a block.

If γ is a simple closed curve, violating iii, we may assume as before that γ is innermost in F . Thus γ bounds a disk $D \subset F$ whose interior is disjoint from S . Because S is a sphere, we may write $S = D_1 \cup_\gamma D_2$ for disks D_1 and D_2 . Suppose that each $D_i \cup_\gamma D$ bounds a ball B_i . Because the boundaries of B_1 and B_2 intersect exactly along a single disk D , either one ball contains the other or they have disjoint interiors. In either scenario, it follows that $S = D_1 \cup D_2$ must bound a ball — a contradiction. Thus, since at least one $D_i \cup_\gamma D$ must fail to bound a ball, we can replace D by one of the D_i . The resulting sphere, which we continue to call S , can be pushed away from the face F .

If γ runs from an edge e back to e , violating iv, then γ and e co-bound a disk D . As before, we can use D to guide an isotopy of S past e . (See Figure 4.2.1, left.) Note that since S is closed, γ must be an interior edge.

By repeating these moves, we eventually obtain a sphere in normal form. □

4.2.3 Combinatorial area

So far, we have not used the dihedral angles of the blocks. Their use comes in estimating the complexity of normal surfaces.

Definition 4.2.9. Let \mathcal{P} be an angled block, and denote by ε_δ the exterior dihedral angle at the edge δ . Truncate the ideal vertices of \mathcal{P} , and label every boundary edge δ with a dihedral angle of $\varepsilon_\delta = \frac{\pi}{2}$. Let S be a normal surface in \mathcal{P} , and let $\delta_1, \dots, \delta_n$ be the edges of the truncated block \mathcal{P} met by ∂S (each edge may be counted several times). We define the *combinatorial area* of S to be

$$a(S) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\delta_i} - 2\pi\chi(S).$$

For the sake of brevity, we will refer to the above sum of dihedral angles as $\sum_{\partial S} \varepsilon_i$ (to be read as one symbol, as soon as S and ε are defined).

Note that by the Gauss–Bonnet theorem, the right-hand side is just the area of a hyperbolic surface with piecewise geodesic boundary, with exterior angles ε_i along the boundary and Euler characteristic $\chi(S)$.

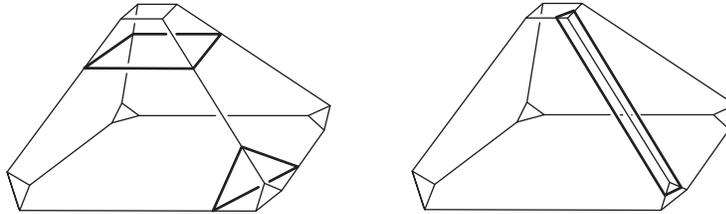


FIG. 4.2.3 – Left : in any block, a *vertex link* is parallel to a boundary face, and is thus a Euclidean polygon with combinatorial area 0. Right : a *boundary bigon* parallel to an interior edge also has combinatorial area 0.

Lemma 4.2.10. *Let S be a normal surface in a truncated angled block \mathcal{P} . Then $a(S) \geq 0$. Furthermore, if $a(S) = 0$, then every component of S is a vertex link (boundary of a regular neighborhood of a boundary face) or a boundary bigon (boundary of a regular neighborhood of an interior edge), as in Figure 4.2.3.*

Proof. Because combinatorial area is additive over multiple components of S , it suffices to consider the case when S is connected. Furthermore, when $\chi(S) < 0$, $a(S) > 0$, so it suffices to consider the case when $\chi(S) \geq 0$. By Definition 4.2.2, \mathcal{P} is irreducible and atoroidal, so S cannot be a sphere or torus. If S is an annulus, $a(S) = \sum_{\partial S} \varepsilon_i > 0$, because ∂S must intersect some edges and the dihedral angle on each edge is positive. Thus the only remaining case is when S is a disk.

For the rest of the proof, let $D \subset \mathcal{P}$ be a normal disk. We consider three cases, conditioned on the number n of intersection components between D and the union of all boundary faces.

Case 0: $n = 0$. Recall, from Definitions 4.2.1 and 4.2.2, that every interior face of \mathcal{P} corresponds to a complementary region of the graph Γ and to a vertex of the dual graph Γ^* . Thus ∂D defines a closed

path γ through the edges of Γ^* ; this is a non-backtracking path because no arc of ∂D runs from an edge back to itself. The path γ may pass through an edge multiple times, but it contains a simple closed curve in Γ^* . Thus, by Definition 4.2.2, $\sum_{\partial D} \varepsilon_i \geq 2\pi$. Equality can happen only when ∂D encircles an ideal vertex, in other words when D is a vertex link.

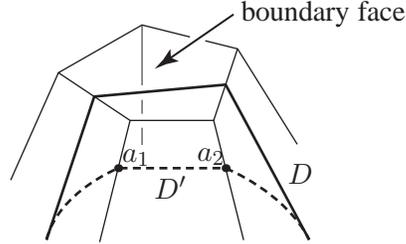


FIG. 4.2.4 – We may isotope ∂D off a boundary face of \mathcal{P} , producing a normal disk D' with $a(D') \leq a(D)$.

Case 1: $n = 1$. The two boundary edges crossed by ∂D contribute π to the external angle sum of ∂D . Thus we may isotope ∂D off the boundary face without increasing the angle sum, since by Definition 4.2.2 the interior edges meeting this face have a total angle of 2π . Let D' be the resulting disk, and a_1, \dots, a_k be the sequentially ordered intersection points of $\partial D'$ with the interior edges of the block near the old boundary face (in Figure 4.2.4, $k = 2$).

We claim that D' is normal, and is not a vertex link. Since $n = 1$, the only way that D' can fail Definition 4.2.7 is if an arc of $\partial D'$ violates condition iv and runs from an interior edge e back to itself. This cannot happen between a_i and a_{i+1} , otherwise the block would have a monogon face, in contradiction with Definitions 4.2.1 – 4.2.2. So condition iv is violated by an arc starting from a_1 in the direction opposite a_2 to end on the interior edge e (or by an analogous arc from a_k). But then the corresponding arc of ∂D must connect e to an adjacent boundary edge, contradicting condition v. Similarly, the only way to create a vertex link by pulling an arc of ∂D off a boundary face is if all of D is parallel to that boundary face — but then D once again violates condition v. Thus, by Case 0, $a(D) \geq a(D') > 0$.

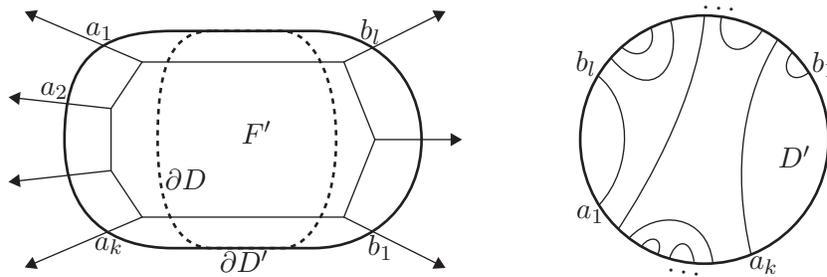


FIG. 4.2.5 – When $n = 2$ and $a(D) = 0$, we have a contradiction for D' normal (left), as well as for D' non-normal (right), unless $k = l = 1$.

Case 2: $n \geq 2$. Since ∂D crosses at least 4 boundary edges, $a(D) \geq 0$, with equality only if $n = 2$

and ∂D is disjoint from the interior edges. We restrict our attention to this case, and claim that D is a boundary bigon.

Push ∂D off the two boundary faces F_1 and F_2 , in a way that minimizes the angle sum of the new disk D' . Denote by a_1, \dots, a_k (resp. b_1, \dots, b_l) the points where $\partial D'$ crosses interior edges near F_1 (resp. F_2). Orient the edges containing the a_i and b_j away from the faces F_1 and F_2 . If A (resp. B) is the sum of the angles of D' at the a_i (resp. b_i), then $A, B \leq \pi$.

Suppose D' is normal. Since we know $a(D') \leq a(D) = 0$, it follows by Case 0 that D' must be the vertex link associated to a boundary face F' . Moreover, we have $A = B = \pi$, hence $k, l \geq 2$. Let us isotope D' into $\partial \mathcal{P}$ while keeping its boundary fixed, so that after the isotopy, D' contains the boundary face F' as well as initial segments of all interior edges starting at F' : these initial segments end at $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$, in that cyclic order around F' . Suppose the orientations on the interior edges through the a_i are inward for D' (in particular, this will happen whenever $F_1 \neq F'$). Then, since $k \geq 2$, it follows that $\partial \mathcal{P}$ contains an ideal bigon, which is impossible. Therefore the orientations point outward, which implies notably $F_1 = F'$. Similarly, $F_2 = F'$. As a result, the boundary of the original disk D violated condition iv, e.g. at the boundary edge situated between a_k and b_1 (Figure 4.2.5, left). Contradiction.

Therefore D' is not normal: define a disk $\Delta := D'$ (we are going to modify Δ). Then the loop $\partial \Delta$ must violate iv, running in a U-turn from an interior edge e back to e : we can isotope the disk Δ so as to erase this U-turn. Because dihedral angles are positive, the angle sum of Δ decreases to a value less than 2π , so Δ is even less normal now (by Case 0). If $\partial \Delta$ still crosses any (interior) edges, we can repeat the operation, until $\partial \Delta$ violates iii, and Δ can be isotoped into an interior face (recall the block \mathcal{P} is irreducible). Therefore D' can be isotoped, with fixed boundary, to a disk in the union of all (open) interior faces and interior edges. Interior edges must connect across D' the points $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ of $\partial D'$, which are still cyclically ordered (Figure 4.2.5, right.) If some edge goes from a_i to a_j (where $i < j$) then there must be an edge from a_s to a_{s+1} for some $i \leq s < j$, and therefore $\partial \mathcal{P}$ contains an ideal monogon: impossible. So every edge across D' runs from an a_i to a b_j , in fact to b_{k+1-i} (and we have $k = l$). If $k \geq 2$, then $\partial \mathcal{P}$ contains an ideal bigon. Therefore $k = 1$, so D' is traversed by a single edge e , and the original disk D was the boundary bigon associated to e . \square

For an essential surface $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$, we can define the combinatorial area $a(S)$ by adding up the areas of its intersections with the blocks. This definition of combinatorial area was designed to satisfy a Gauss–Bonnet relationship.

Proposition 4.2.11. *Let $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ be a surface in normal form. Then*

$$a(S) = -2\pi\chi(S).$$

Proof. Consider the decomposition of S into its components of intersection S_1, \dots, S_n with the various blocks. Let $S' = S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}$ be a (possibly disconnected) union of some S_i glued along some (not necessarily all) of their common edges: S' is a manifold with polygonal boundary. Define the interior angle of S' at a boundary vertex to be the sum of the interior angles of the adjacent S_{i_α} , and the exterior angle as the complement to π of the interior angle. It is enough to prove that

$$\sum_{\alpha=1}^k a(S_{i_\alpha}) = \sum_{\partial S'} \varepsilon_i - 2\pi\chi(S'), \quad (4.1)$$

where the ε_i are the exterior angles of S' : the result will follow by taking $S' = S$ (the union of all S_i glued along all their edges), because all ε_i are then equal to $\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0$. Since M is orientable, up to replacing S with the boundary of its tubular neighborhood, we can restrict to the case where S is orientable.

We prove (4.1) by induction on the number of gluing edges, where the set of involved components S_{i_α} is chosen once and for all. When no edges are glued, (4.1) follows from Definition 4.2.9. It remains to check that the right hand side of (4.1) is unchanged when two edges are glued together. In what follows,

- ν is the number of boundary vertices of S' ,
- θ is the sum of all *interior* angles along $\partial S'$, and
- χ is the Euler characteristic of S' .

Thus the right hand side of (4.1) is $\nu\pi - \theta - 2\pi\chi$.

If we glue edges ab and cd , where a, b, c, d are distinct vertices of S' , then θ is unchanged, but ν goes down by 2 and χ goes down by 1 : (4.1) is preserved.

If we glue edges ab and bc by identifying a and c , where a, b, c are distinct vertices, then θ goes down by 2π , because b becomes an interior vertex, while ν goes down by 2 and χ is unchanged : (4.1) is preserved.

If we glue two different edges of the form ab , closing off a bigon boundary component of S' , then θ goes down by 4π because both a and b become interior vertices. Since ν goes down by 2, and χ goes up by 1, again (4.1) is preserved.

If we glue an edge ab to a monogon boundary component cc , where a, b, c are distinct vertices, then θ is unchanged, while ν goes down by 2 and χ goes down by 1. If we glue two boundary monogons aa and bb together (where $a \neq b$), then θ goes down by 2π , while ν goes down by 2 and $\chi(S')$ is unchanged. In all cases, (4.1) is preserved. \square

We are now ready to complete the proof of Theorem 4.1.1.

Theorem 4.1.1. *Let $(M, \partial M)$ be an orientable 3–manifold with an angled decomposition. Then ∂M consists of tori, and the interior of M is hyperbolic.*

Proof. Each component of ∂M is tiled by boundary faces of the blocks. Just inside each boundary face, a block has a normal disk of area 0. These vertex links glue up to form a closed, boundary–parallel normal surface S of area 0. By Proposition 4.2.11, $\chi(S) = 0$, and since M (hence also ∂M) is orientable, the boundary–parallel surface S must be a torus. Thus ∂M consists of tori.

By Thurston’s hyperbolization theorem [T2], the interior of M carries a complete finite–volume hyperbolic metric if and only if M contains no essential spheres, disks, annuli, or tori. By Proposition 4.2.8, if M has such an essential surface, then it has one in normal form. A normal sphere or disk has positive Euler characteristic, hence negative area. Thus it cannot occur.

A normal torus $T \subset M$ has area 0 and thus, by Lemma 4.2.10, must be composed of normal disks of area 0. Since T has no boundary, these must all be vertex links, which glue up to form a boundary–parallel torus. Similarly, a normal annulus $A \subset M$ must be composed entirely of bigons, since a bigon cannot be glued to a vertex link. But a chain of bigons forms a tube around an edge of M , which is certainly not essential. Thus we can conclude that M is hyperbolic. \square

4.3 A simplification algorithm for arborescent links

Recall, from the introduction, that a generalized arborescent link is constructed by gluing together a number of d -bracelets, for some d 's. In this section, we describe an algorithm that takes a particular link and simplifies its bracelet presentation into a reduced form. This algorithm, directly inspired by Bonahon and Siebenmann's work [BS], has several uses. Firstly, if a given generalized arborescent link is composite, the algorithm will decompose it into its prime arborescent pieces. Secondly, the simplified bracelet description will allow us to rapidly identify the non-hyperbolic arborescent links listed in Theorem 4.1.5. In particular, the algorithm recognizes the unknot from among the family of generalized arborescent links. Finally, the simplified bracelet form of an arborescent link turns out to be the right description for the block decomposition of the link complement that we undertake in Section 4.4.

4.3.1 Slopes on a Conway sphere

Whenever two bracelets are glued together, they are joined along a 2-sphere that intersects the link K in 4 points. This type of sphere, called a *Conway sphere*, defines a 4-punctured sphere in the link complement. Our simplification algorithm is guided by the way in which gluing maps act on arcs in Conway spheres.

Definition 4.3.1. Let S be a 4-punctured sphere. An *arc pair* $\gamma \subset S$ consists of two disjoint, properly embedded arcs γ_1 and γ_2 , such that γ_1 connects two punctures of S and γ_2 connects the remaining two punctures of S . A *slope* on S is an isotopy class of arc pairs, and is determined by any one of the two arcs.

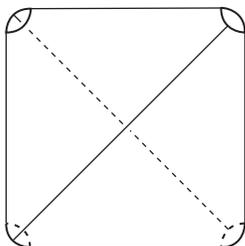


FIG. 4.3.1 – Arcs of slope 0, 1, and ∞ give an ideal triangulation of a 4-punctured sphere S .

To visualize slopes, it helps to picture S as a pillowcase in \mathbb{R}^3 surrounding the unit square of \mathbb{R}^2 , with punctures at the corners. (See Figure 4.3.1.) Any arc pair on the pillowcase can then be straightened so that its intersections with the front of the pillow have a well-defined Euclidean slope. A *marking* of S (that is, a fixed homeomorphism between S and the pillowcase of Figure 4.3.1) induces a bijection between slopes on S and elements of $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Slopes on 4-punctured spheres can be neatly represented by the *Farey complex* \mathcal{F} , shown in Figure 4.3.2. Vertices of \mathcal{F} correspond to slopes, edges of \mathcal{F} to disjoint slopes, and triangles to triples of disjoint slopes. Observe that a choice of three disjoint arc pairs of different slopes gives an ideal triangulation of S . Figure 4.3.2 also illustrates that up to a homeomorphism, \mathcal{F} can be identified with the Poincaré disk and endowed with a hyperbolic metric, making the triangles of \mathcal{F} into straight ideal triangles. The dual of \mathcal{F} is an infinite trivalent planar tree.

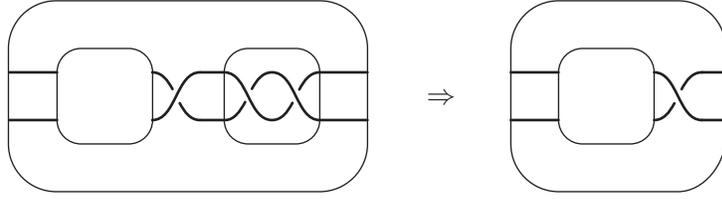


FIG. 4.3.3 – Removing a needless 1-bracelet.

that was glued to a Conway sphere of B_d will instead be glued to its own 1-bracelet, whose slope on the gluing sphere is given by the crossing segments of B_d .

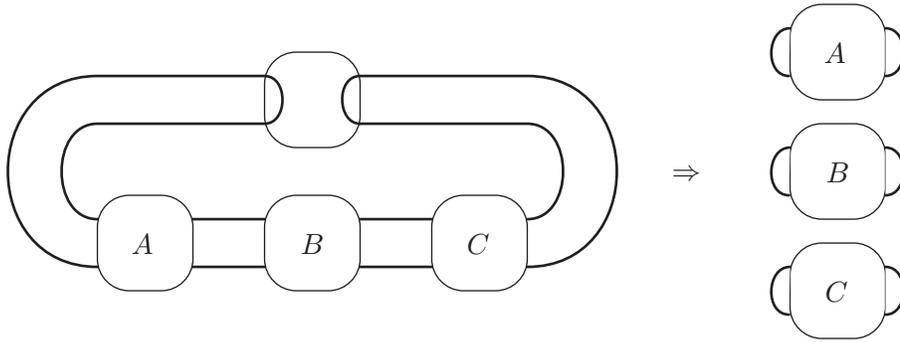


FIG. 4.3.4 – Special 1-bracelets decompose a link as a connected sum.

After this cutting operation, we will work separately with each of the $d - 1$ new links. That is : we will apply the reduction algorithm to simplify the bracelet presentation of each of these links. The algorithm may reveal that one or more of the new links is actually the unknot (see Theorem 4.3.8), and thus that we have undone a trivial connected sum. In this case, we may simply throw away the trivial pieces, having still gained the benefit of a simpler bracelet presentation of K .

- iv – Repeat steps i–iii, as necessary. Note that removing a needless 1-bracelet can create a new 2-bracelet (as in Figure 4.3.3), and removing a 2-bracelet can change the gluing map of a 1-bracelet. However, since each of the above steps reduces the total number of Conway spheres in the construction of K , eventually we reach a point where none of these reductions is possible (in any connected-sum component).

Definition 4.3.3. Let $A \subset \mathbb{S}^3$ be an unknotted band, and define the open solid torus $T := \mathbb{S}^3 \setminus A$. Let L_n be a link consisting of n parallel, unlinked copies of the core of T .

Recall from Definition 4.1.2 that a d -bracelet B_d is the pair (M_d, K_d) , where M_d is the complement of a regular neighborhood of d disjoint crossing segments of A , and $K_d = M_d \cap \partial A$. We define an n -augmented d -bracelet to be $B_{d,n} = (M_d, K_d \cup L_n)$. Thus a traditional d -bracelet B_d corresponds to taking $n = 0$. When $n \geq 1$, for all positive d (including $d = 1$), the *preferred slope* of $B_{d,n}$ at a boundary (Conway) sphere is the slope of the crossing segments of A at this sphere.

Augmented bracelets naturally arise from certain configurations of d -bracelets. We continue our algorithm as follows.

- v – Create augmented bracelets. Let B_3 be a 3–bracelet glued to 1–bracelets B_1 and B'_1 . Suppose that there is a marking of the boundary spheres of B_3 such that the preferred slope of B_3 is ∞ and the preferred slopes of B_1 and B'_1 are in $\mathbb{Z} + 1/2$. (More intrinsically : the slopes of B_3 and B_1 (resp. B'_1) are not Farey neighbors, but they share exactly two common Farey neighbors.) In this situation, we will replace $B_3 \cup B_1 \cup B'_1$ by a once-augmented 1–bracelet $B_{1,1}$, as in Figure 4.3.5. Note that the closed loop in $B_{1,1}$ can be isotoped to lie on the boundary sphere S . Up to isotopy, there is exactly one arc pair on S that is disjoint from this loop ; its slope is the preferred slope of $B_{1,1}$ (distinct from the preferred slope on the outer Conway sphere of the original B_3).

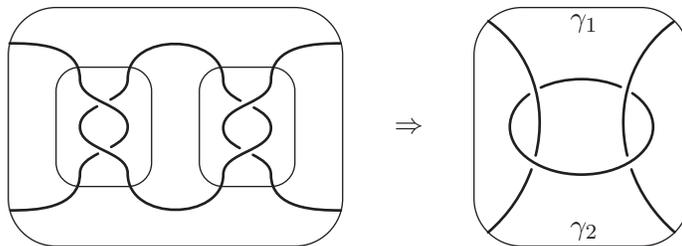


FIG. 4.3.5 – Creation of an augmented 1–bracelet. The arc pair $\gamma_1 \cup \gamma_2$ defines the preferred slope of $B_{1,1}$. Note : if we change the slope in one of the trivial tangles by an integer (e.g. by inverting the two crossings in the left trivial tangle, which will turn its slope $-1/2$ into $+1/2$: a change of $+1$), then the 3–dimensional picture is the same up to a homeomorphism (a certain number of half–twists in the “main” band of the bracelet B_3).

Remark : If B_3 is glued to three different 1–bracelets, each with slope $\pm 1/2$ (so the link contains no other bracelets than these four), we break the symmetry by choosing two of the 1–bracelets for augmentation.

Definition 4.3.4. A (possibly augmented) bracelet $B_{d,n}$ is *large* if $d \geq 3$ or $n \geq 1$.

- vi – Combine large bracelets when possible. Suppose that large bracelets $B_{d,n}$ and $B_{d',n'}$ are glued together along a Conway sphere, with their preferred slopes equal. Then we will combine them into a single $(d+d'-2)$ –bracelet, augmented $(n+n')$ times. Note that at the beginning of this step, the only augmented bracelets are of the form $B_{1,1}$, created in step v. However, under certain gluing maps, several bracelets of this form may combine with other large bracelets to form n –augmented d –bracelets, with d and n arbitrarily large.
- vii – Form 0–bracelets and augmented 0–bracelets. Consider a 1–bracelet B_1 , with preferred slope s . For any arc pair $\gamma \subset \partial B_1$ whose slope is a Farey neighbor of s , we can construct a rectangular strip in B_1 with boundary $K_1 \cup \gamma$. Therefore, when bracelets B_1 and B'_1 are glued together and their preferred slopes share a common neighbor in \mathcal{F} (i.e. are at distance 2 or less), we can glue these two rectangular strips to form an annulus or Möbius band whose boundary is $K_1 \cup K'_1$. In this situation, we replace $B_1 \cup B'_1$ by a single 0–bracelet.

In a similar fashion, an augmented 1–bracelet $B_{1,n}$ contains a rectangular strip whose intersection with the boundary sphere defines the preferred slope of $B_{1,n}$. Therefore, when $B_{1,n}$ is glued to a 1–bracelet B_1 and their preferred slopes are Farey neighbors, we once again have an annulus or

Möbius band. In this situation (similar to step ii), we replace $B_1 \cup B_{1,n}$ by a single augmented bracelet $B_{0,n}$, as in Figure 4.3.6.

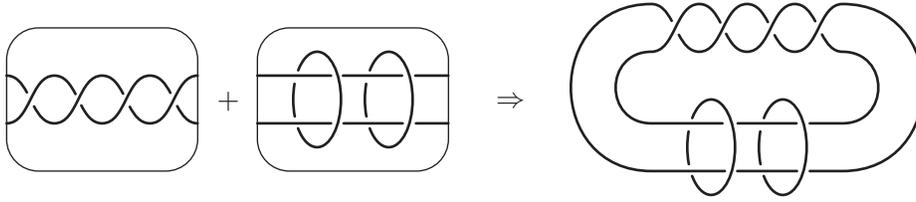


FIG. 4.3.6 – Creating an augmented 0-bracelet.

The following result summarizes the output of the simplification algorithm.

Proposition 4.3.5. *For every generalized arborescent link given as input, the algorithm above produces several “output links”, of which the input was a connected sum. Let K be such an output link. Then K is expressed as a gluing of (possibly augmented) bracelets, in which all 2-bracelets are augmented.*

Furthermore, suppose that bracelets B and B' are glued along a Conway sphere. Any path through the 1-skeleton of the Farey complex connecting the preferred slope of B to the preferred slope of B' must contain at least the following number of edges :

	$B'_{1,0}$	$B'_{d,n}$ large
$B_{1,0}$	3	2
$B_{d,n}$ large	2	1

4.3.3 Analyzing the output

We are now ready to recognize the non-hyperbolic arborescent links listed in Theorem 4.1.5. After the simplification algorithm, they can appear in one of four ways :

- (1) Bracelets augmented more than once. A bracelet $B_{d,n}$, where $n \geq 2$, will contain two isotopic link components, as in Figure 4.3.6. Each of these parallel components bounds a disk that is punctured twice by the strands of K_d . Thus any link containing such a bracelet falls in exceptional family II.
- (2) 0-bracelets. By Definition 4.1.2, the link contained in a 0-bracelet is the boundary of an unknotted band. These links fall in exceptional family I.
- (3) Once-augmented 0-bracelets. Let K be the link contained in an augmented 0-bracelet with r half-twists. By reflecting K if necessary, we may assume that $r \geq 0$. Now, we consider three cases :
 - (a) $r = 0$. Then K is the link depicted in Figure 4.3.7(a). We note that K is composite, and thus not arborescent by Definition 4.1.4.

In fact, we claim that the reduction algorithm will have cut this link into its prime components (two copies of the Hopf link). The augmented 0-bracelet was created in step vii from a 1-bracelet B_1 and an augmented bracelet $B_{1,1}$, which in turn was created from a 3-bracelet B_3 in step v. However, B_3 must have been glued to B_1 with their preferred slopes equal, so in step iii the algorithm will have recognized K as a connected sum.

- (b) $r = 1$. Then, as Figure 4.3.7(b) shows, K is the boundary of an unknotted band with 4 half-twists, which falls in exceptional family I.
- (c) $r \geq 2$. Then, as Figure 4.3.7(c) shows, K is the pretzel link $P(r, 2, 2, -1)$. Because $r \geq 2$ and $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} > 1$, K falls in exceptional family III.

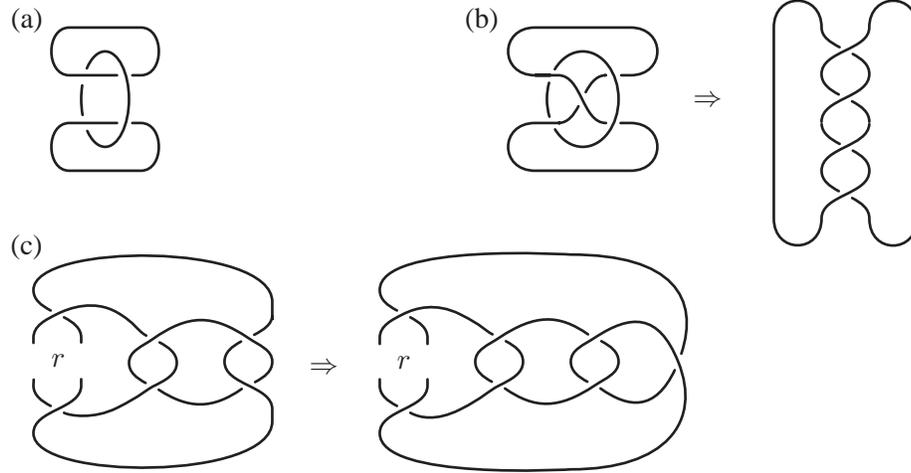


FIG. 4.3.7 – Augmented 0-bracelets form exceptional links in three different ways.

- (4) Exceptional Montesinos links. Recall, from the introduction, that a Montesinos link can be constructed by gluing a bracelet B_d to d different 1-bracelets. Consider such a link K , with $d \geq 3$. By Proposition 4.3.5, we may assume that the preferred slope of B_d is not a Farey neighbor of the preferred slope of any of the 1-bracelets. Thus there is a marking of each Conway sphere, in which the preferred slope of B_d is ∞ and the preferred slope of the 1-bracelet glued to that Conway sphere is not in \mathbb{Z} .

Once the markings are chosen, there is a unique unknotted band consisting of the arcs of K_d and arcs of slope 0 along the Conway spheres. We define the *number of half-twists* in the band of B_d to be the number of half-twists in this band. If we modify the marking on some sphere by $k/2$ Dehn twists about the preferred slope of B_d , the slope of the 1-bracelet glued to that sphere goes up by k , while the number of half-twists in the band goes down by k . Thus, by employing Dehn twists of this sort, we can choose markings in which the preferred slope of B_d is still ∞ and the preferred slope of each 1-bracelet is in the interval $(0, 1)$.

We perform two final normalizations. The edge pairs of slopes $0, 1, \infty$ decompose each Conway sphere into four triangles. The orientation of the bracelet B_d induces an orientation for each of the d Conway spheres of ∂B_d . We stipulate that the edges of any triangle of any Conway sphere S have slope $0, 1, \infty$, in that clockwise order, for the induced orientation of S .⁽¹⁾ This can be assumed, up to changing the marking of some of the Conway spheres by an orientation-reversing homeomorphism, exchanging the slopes $0, 1$ and fixing ∞ . Finally, up to reflecting the link K , we can ensure that at least one of the 1-bracelet slopes falls in the interval $(0, 1/2]$. Now, we can recognize the exceptional links :

¹We recommend that the reader disregard all orientation issues at a first reading.

- (a) If $d = 4$, and the slope of every 1-bracelet is $1/2$, and there are 2 half-twists in the band of B_d , then K is the pretzel link $P(2, -2, 2, -2)$, as in Figure 4.3.8. Thus K falls in exceptional family II.
- (b) If $d = 3$, and the slope of every 1-bracelet is of the form $1/n$, and there is 1 half-twist in the band of B_d , then K is the pretzel link $P(p, q, r, -1)$. If $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$, K falls in exceptional family III.

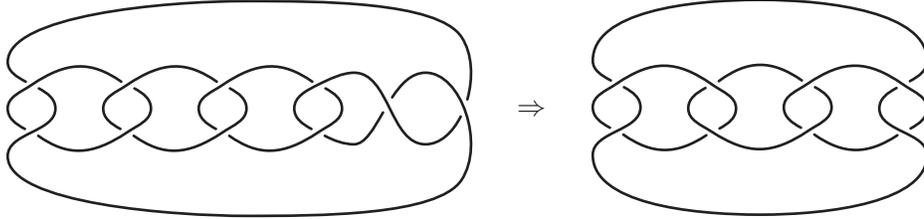


FIG. 4.3.8 – The pretzel link $P(2, -2, 2, -2)$ falls in exceptional family II.

Definition 4.3.6. An arborescent link K is called a *candidate link* if it can be constructed from (possibly augmented) bracelets in the following fashion :

- K is not a 0-bracelet or augmented 0-bracelet.
- All bracelets are either unaugmented or augmented once.
- All 2-bracelets are augmented once.
- The gluing maps of bracelets along Conway spheres satisfy the minimum-distance table of Proposition 4.3.5.
- If K has exactly one large bracelet $B_{d,0}$, the normalization process of (4a-b) above does not reveal K as an exceptional Montesinos link.

So far, we have proved that every link K contained in the output of the algorithm (and thus, in particular, every arborescent link) either falls into one of the three exceptional families, or else is a candidate link. To complete the proof of Theorem 4.1.5, it remains to show the following.

Theorem 4.3.7. *Let K be a candidate link. Then $\mathbb{S}^3 \setminus K$ admits a decomposition into angled blocks. Thus, by Theorem 4.1.1, every candidate link is hyperbolic.*

The proof of Theorem 4.3.7 occupies Sections 4.4 and 4.5. In the meantime, we record the following consequence of Theorem 4.3.7, which shows that our reduction algorithm does more than merely sort generalized arborescent links into hyperbolic and non-hyperbolic bins.

Theorem 4.3.8. *Let K be a generalized arborescent link, given in any presentation as a union of unaugmented bracelets. If we apply the simplification algorithm to K , it will output several links K_1, \dots, K_n , with the following properties :*

- (1) $K = K_1 \# \dots \# K_n$, a connected sum of the output links,
- (2) every K_i is prime, and
- (3) if some K_i is the unknot, it appears as a 0-bracelet with ± 1 half-twist.

Therefore, this algorithm recognizes the unknot and factors a link into its prime summands.

Proof. To prove (1), observe that the reduction algorithm only changes the topological type of K in step iii, where it cuts K into (possibly trivial) connected summands. Thus the output links do in fact sum to K .

To prove (2), let K_i be a link produced in the output of the algorithm. By Proposition 4.3.5 and the discussion that follows it, K_i is either a candidate link or a known exception. By Theorem 4.3.7 (which we have yet to prove), the candidate links are hyperbolic, and thus prime. As we mentioned in the introduction, the exceptional links in families I and III are also prime. When K_i is in exceptional family II, we can identify every group of isotopic components to a single circle, producing a new link K'_i that is either hyperbolic or in families I or III. By the cases already discussed, K'_i is prime, and thus K_i is prime also.

To prove (3), suppose that K_i is the unknot. Again, it is easy to check that apart from the 0–bracelet with ± 1 half-twist, all the exceptional knots discussed above are non-trivial. By Theorem 4.3.7, the candidate links are hyperbolic — hence also non-trivial. Thus the unknot K_i can in fact be recognized as a 0–bracelet with ± 1 half-twist. \square

Remark 4.3.9. To solve the general link isotopy problem for arborescent links, Bonahon and Siebenmann [BS] developed a special type of calculus on weighted trees representing links. Our algorithm for simplifying bracelet presentations is directly inspired by their algorithm for simplifying trees (the latter only keeps more careful track of the order of Conway spheres along each band). The main result of [BS], which uses the machinery of double branched covers and equivariant JSJ decompositions, can be paraphrased as follows : for every generalized arborescent link (with a handful of exceptions), any two bracelet presentations produce the same output under the algorithm above, up to the number of trivial components in the connected sum. The few exceptions include for instance the pretzel link $P(2, -2, 2, -2)$ depicted in Figure 4.3.8, which can appear either in pretzel form (as a 4–bracelet glued to four 1–bracelets), or as a twice–augmented 0–bracelet (in two different ways). Thus, by the results of [BS], the algorithm can be said to essentially classify all arborescent links.

4.4 Block decomposition of the link complement

In this section, we consider a candidate link K (see Definition 4.3.6) and devise a block decomposition of $\mathbb{S}^3 \setminus K$ (note that the algorithm of Section 4.3 provides a bracelet presentation of K that satisfies the conditions of Definition 4.3.6). Typically, we will use one “large” block for each large bracelet $B_{d,n}$ ($d \geq 3$ or $n = 1$). The Farey combinatorics involved in gluing these blocks to one another and to 1–bracelets will be encoded in a certain number of ideal tetrahedra in the decomposition.

Consider a large d –bracelet $B_{d,n}$ (where $n = 0$ or 1), and recall that its underlying space M_d is \mathbb{S}^3 minus d open balls. Denote by $K_{d,n}$ the tangle (union of arcs) contained in $B_{d,n}$. Between any pair of consecutive Conway spheres, M_d contains a rectangular strip consisting of crossing segments ; we call this strip a *crossing rectangle*. The boundary of each crossing rectangle consists of two arcs of K_d and two arcs on Conway spheres, which define the preferred slopes of these two Conway spheres.

The large block $\mathcal{P}_{d,n}$ corresponding to the large bracelet $B_{d,n}$ will be constructed in Section 4.4.3 : $\mathcal{P}_{d,n}$ will be a solid torus whose boundary is decomposed into ideal polygons, and some pairs of edges (or even faces) of $\mathcal{P}_{d,n}$ will be identified in the block decomposition of $\mathbb{S}^3 \setminus K$ (in addition, the core curve of the solid torus $\mathcal{P}_{d,n}$ will be removed if $n = 1$). More precisely, each crossing rectangle in $\mathbb{S}^3 \setminus K$

will eventually be collapsed to a crossing edge, which will be realized as an ideal edge of $\mathcal{P}_{d,n}$ (in fact, as a pair of identified edges of $\mathcal{P}_{d,n}$ — see Figure 4.4.2 for a preview). Because of this collapsing operation, we need to be very careful that we do not change the nature of the manifold $\mathbb{S}^3 \setminus K$ up to homeomorphism. This will be proved in due course (Section 4.4.2) before actually constructing $\mathcal{P}_{d,n}$ (Section 4.4.3). Meanwhile, we simply insist that the arc pairs of preferred slope (defined e.g. by crossing rectangles) in a Conway sphere of a large bracelet will be realized as ideal edges of the corresponding large blocks. This fact motivates the whole construction of Section 4.4.1, where we describe all the small blocks (ideal tetrahedra).

4.4.1 Gluings through tetrahedra

In this section, we use the Farey complex \mathcal{F} in order to encode the gluing homeomorphisms between the boundary spheres of two bracelets into sequences (layers) of ideal tetrahedra, glued at the interface between large bracelets. This essentially follows Section 1.4. We also realize trivial tangles as gluings of ideal tetrahedra, following the ideas of Sections 2.1.1–2.1.2 and [GF, Appendix].

Gluing of two large bracelets

Consider two large bracelets $B_{d,n}$ and $B_{d',n'}$ glued to one another along a Conway sphere. If $K_{d,n}$ denotes the union of arcs contained in $B_{d,n}$, define $\mathcal{C} := M_d \setminus K_{d,n}$ and $\mathcal{C}' := M_{d'} \setminus K_{d',n'}$. For the later purpose of realizing (a retract of) \mathcal{C} as a polyhedral block, we assume that all the arc pairs of preferred slope are marked on the Conway spheres of $\partial\mathcal{C}$ (and similarly for \mathcal{C}'). We will now enhance these graphs on $\partial\mathcal{C}, \partial\mathcal{C}'$ to filling graphs (Definition 4.2.1), then glue \mathcal{C} to \mathcal{C}' via a union of ideal tetrahedra attached to the Conway spheres of $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ (thus realizing the gluing homeomorphism between $B_{d,n}$ and $B_{d',n'}$).

Let s and s' be the preferred slopes of \mathcal{C} and \mathcal{C}' , respectively (see Definition 4.3.2). By Proposition 4.3.5, we know that $s \neq s'$. The obstruction to gluing \mathcal{C} to \mathcal{C}' directly is that arcs of slopes s and s' may have high intersection number. We regard $s, s' \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ as vertices in the Farey diagram.

Consider the simplest case, where s and s' are Farey neighbors. Then the four arcs of slope s and s' define a subdivision of a Conway sphere of $\partial\mathcal{C}$ into two ideal squares. Similarly the arcs of slope s' and s subdivide a Conway sphere of $\partial\mathcal{C}'$ into two ideal squares. In this special case, we may glue $\partial\mathcal{C}$ directly to $\partial\mathcal{C}'$ along these two squares.

If s, s' are not Farey neighbors, we need to consider the sequence of Farey triangles (T_0, \dots, T_m) crossed by the geodesic line from s to s' (where $m \geq 1$, and s [resp. s'] is a vertex of T_0 [resp. T_m]). For each $0 \leq i \leq m$, the vertices of T_i define 3 slopes, and the corresponding arc pairs provide an ideal triangulation τ_i of the Conway sphere S . Moreover, if x, y are the ends of the Farey edge $T_i \cap T_{i+1}$, the two arc pairs whose slopes are x and y define a subdivision σ of the 4-punctured sphere S into two ideal squares : both triangulations τ_i and τ_{i+1} are refinements of σ . In fact, τ_{i+1} is obtained from τ_i by a pair of *diagonal exchanges* : remove two opposite edges of τ_i (thus liberating two square cells, the cells of σ , of which the removed edges were diagonals) ; then insert back the other diagonals. Each of these two diagonal exchanges defines (up to isotopy) a topological *ideal tetrahedron* in $S \times I$: more precisely, the union of these two ideal tetrahedra is bounded by two *pleated surfaces* S_i, S_{i+1} isotopic to $S \times \{*\}$ in $S \times I$, which are pleated along the edges of τ_i and τ_{i+1} , and intersect each other precisely along the edges of σ (see Figure 4.4.1). Doing the same construction for all $0 \leq i < m$, we thus obtain an ideal triangulation of a strong deformation retract of $S \times I$, whose bottom (resp. top) is pleated along an ideal triangulation of S containing the arc pair of slope s (resp. s').

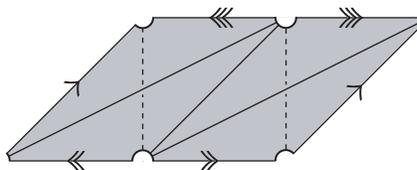


FIG. 4.4.1 – A layer of two tetrahedra, caught between two pleated surfaces S_i, S_{i+1} . Edges with identical arrows are identified.

Finally, the remaining two pairs of edges in the triangulation τ_0 (in addition to the pair of slope s) define a subdivision of the boundary of the space \mathcal{C} . The same occurs for \mathcal{C}' . We have completed our aim of gluing \mathcal{C} to \mathcal{C}' , with boundaries suitably triangulated, using a sequence of (pairs of) ideal tetrahedra as an interface. Note that the choice of “suitable” boundary triangulations of $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ is forced by the gluing homeomorphism itself.

Definition 4.4.1. The family of ideal tetrahedra between \mathcal{C} and \mathcal{C}' is called a *product region*. The same term also refers to the union of that family. Topologically, the product region is a deformation retract of $S \times I$; when s and s' have no common Farey neighbors, the product region is homeomorphic to $S \times I$.

Gluing a large bracelet to a trivial tangle

Consider a gluing of a large bracelet $B_{d,n}$ to a trivial tangle $B_{1,0}$ along a Conway sphere. As before, define $\mathcal{C} := M_d \setminus K_{d,n}$. and $\mathcal{C}' := M_1 \setminus K_{1,0}$. We will triangulate the Conway sphere S of \mathcal{C} and attach ideal tetrahedra to S to realize a space homeomorphic to $\mathcal{C} \cup_S \mathcal{C}'$. (Note : we will not need to attach a copy of \mathcal{C}' itself, only ideal tetrahedra.)

Let s and s' be the preferred slopes of \mathcal{C} and \mathcal{C}' , respectively. By the minimum–distance table of Proposition 4.3.5, we know that s and s' are not equal and are not Farey neighbors. We can thus consider the sequence of Farey triangles (T_0, \dots, T_m) from s to s' , where $m \geq 1$. We perform the same construction as in 4.4.1 above, using pleated surfaces S_0, \dots, S_{m-1} whose triangulations are given by T_0, \dots, T_{m-1} (note the omission of T_m). To realize the trivial tangle complement \mathcal{C}' , we will now glue the faces of the pleated surface S_{m-1} together in pairs, following Sakuma and Weeks’ construction in [SW2].

Without loss of generality, we may assume that the vertices of T_{m-1} and T_m are $0, 1, \infty$ and $0, 1, \frac{1}{2}$ respectively. Each face (ideal triangle) f of S_{m-1} has exactly one edge e of slope ∞ , shared with another face f' . We simply identify f and f' by a homeomorphism respecting e . The result is shown in Figure 2.1.1 page 34 : it is straightforward to check that the simple closed curve in S_{m-1} of slope $s' = \frac{1}{2}$ becomes contractible. The gluing thus realizes a 1–bracelet of slope $s' = \frac{1}{2}$.

Remark 4.4.2. If $m = 1$, note that the Conway sphere of \mathcal{C} , made of four ideal triangles, is S_{m-1} and has been directly collapsed to two ideal triangles, without gluing any tetrahedra. More generally, for any m , all 4 edges whose slopes are Farey neighbors of s' are collapsed to just one edge (the horizontal edge in the last panel of Figure 2.1.1) : though none of these four edges can have slope s (because s, s' are not Farey neighbors), some of them may belong to the Conway sphere in $\partial\mathcal{C}$. In spite of these collapsings, for any candidate link K , we can realize the space $\mathbb{S}^3 \setminus K$ with a well-defined *manifold* structure by gluings of the type above, because the Conway spheres of \mathcal{C} are pairwise disjoint.

Gluing two trivial tangles together

Finally, when two trivial tangles are glued to one another, we obtain a 2-bridge link K . The strands in each bracelet can be isotoped to proper pairs of arcs in the Conway sphere, of slopes s and s' . If s, s' are sufficiently far apart in the Farey diagram, we can perform the gluing operation above both near \mathcal{C} and near \mathcal{C}' . The resulting decomposition into tetrahedra was constructed by Sakuma and Weeks [SW2], and also described in the Appendix to [GF] (see Section 2.1.2 for a summary). For completeness, we include

Proposition 4.4.3. *If s, s' have no common Farey neighbors (i.e. satisfy the minimum-distance table of Proposition 4.3.5), the union of the tetrahedra defined by the construction above is a triangulated manifold homeomorphic to $\mathbb{S}^3 \setminus K$, where K is a 2-bridge link.*

Proof. First, the path of Farey triangles (T_0, \dots, T_m) from s to s' satisfies $m \geq 3$: indeed, if $m = 2$, then two vertices of T_1 are Farey neighbors of s , and two are Farey neighbors of s' — so s and s' have a common neighbor. Therefore the first and last pleated surfaces S_1 and S_{m-1} are distinct, and there is at least one layer of tetrahedra. Consider the union of all tetrahedra *before* folding S_1 and S_{m-1} onto themselves. Denote by x, y the ends of the Farey edge $T_1 \cap T_2$, and thicken the corresponding tetrahedron layer between S_1 and S_2 by replacing each edge whose slope is x or y with a bigon. The resulting space is homeomorphic to $S_1 \times [0, 1]$: therefore, after folding S_1 and S_{m-1} , we do obtain the manifold $\mathbb{S}^3 \setminus K$. It remains to collapse the four bigons back to ordinary edges, without turning the space into a non-manifold.

Recall (Remark 4.4.2) that the folding of S_1 (resp. S_{m-1}) identified all 4 edges whose slopes are ends of $T_0 \cap T_1$ (resp. $T_m \cap T_{m-1}$) to one edge, and caused no other edge identifications. At most one of x, y belongs to the Farey edge $T_0 \cap T_1$; at most one of x, y belongs to $T_m \cap T_{m-1}$; and none of x, y belongs to both Farey edges simultaneously (s, s' have no common neighbors). So under the folding of S_1 and S_{m-1} , the two bigons of slope x may become glued along one edge; the two bigons of slope y may become glued along one edge, and no further identifications occur between points of the 4 bigons. When two bigons are identified along one edge, consider their union as just one bigon. All (closed) bigons are now disjointly embedded in $\mathbb{S}^3 \setminus K$, so we can collapse each of them to an ideal segment without changing the space $\mathbb{S}^3 \setminus K$ up to homeomorphism. \square

Thus, by the results of Chapter 2.1 (Theorem 2.1.2), we already know that 2-bridge links admit angle structures (and are hyperbolic) if and only if they are candidate links.

4.4.2 Collapsing

At the beginning of Section 4.4, we defined the *crossing rectangles*: a large bracelet $B_{d,n}$ has d crossing rectangles $R \simeq [0, 1] \times [0, 1]$, such that two opposite sides $\{0, 1\} \times [0, 1]$ of R define the preferred slopes in two consecutive Conway spheres, and the two other sides $[0, 1] \times \{0, 1\}$ belong to the tangle (union of arcs) contained in $B_{d,n}$.

In a candidate link K containing at least one large bracelet, we collapse each crossing rectangle $R \simeq [0, 1] \times [0, 1]$ as above to a segment $\{*\} \times [0, 1]$.

Proposition 4.4.4. *The space obtained after collapsing the crossing rectangles to segments is still homeomorphic to the manifold $\mathbb{S}^3 \setminus K$.*

Proof. As in Proposition 4.4.3, it is enough to check that the closed crossing rectangles, before collapsing, are disjointly embedded. First, consider a gluing between two large bracelets: since the two preferred

slopes are distinct (by the minimum–distance table of Proposition 4.3.5), no points of the adjacent crossing rectangles get identified. Then, consider a gluing between a large bracelet (with preferred slope s) and a trivial tangle (with preferred slope s'): in Remark 4.4.2, we observed that none of the edges which undergo identifications have slope s , because s, s' are not Farey neighbors. Therefore, no points of any crossing rectangles are identified. Since the (closed) crossing rectangles are disjointly embedded in $\mathbb{S}^3 \setminus K$, we can collapse each of them to a segment without changing the space $\mathbb{S}^3 \setminus K$ up to homeomorphism. \square

4.4.3 Blocks associated to large bracelets

In this section, we construct the blocks associated to large bracelets. We begin by considering a large *non-augmented* bracelet B_d (where $d \geq 3$) and set out to construct an ideal polyhedron version of the space \mathcal{C} , now defined as $M_d \setminus K_d$ with crossing rectangles collapsed to (ideal) segments. We will construct \mathcal{C} as a polyhedral solid torus (or block) \mathcal{P} with some edge identifications.

Consider a (closed) solid torus $\hat{\mathcal{P}}$ with a preferred, core–parallel, simple closed curve $\hat{\gamma}$ on $\partial\hat{\mathcal{P}}$. We endow both $\hat{\mathcal{P}}$ and $\hat{\gamma}$ with orientations that will remain fixed throughout the chapter. Draw d disjoint oriented curves $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_d$ isotopic to $\hat{\gamma}$ in $\partial\hat{\mathcal{P}}$, so that $\partial\hat{\mathcal{P}}$ is the union of d annuli \hat{U}_i , each bounded by two curves, $\hat{\gamma}_i$ and $\hat{\gamma}_{i+1}$ (indices are taken modulo d). For matters of orientation, we assume that the orientation across \hat{U}_i (from a point of $\hat{\gamma}_i$), followed by the orientation of $\hat{\gamma}_i$, is equal to the orientation on $\partial\hat{\mathcal{P}}$ induced by the orientation of $\hat{\mathcal{P}}$ (Figure 4.4.2, left). Next, remove one point in each $\hat{\gamma}_i$. We still denote by $\hat{\mathcal{P}}$ the solid torus with these d points removed, and by \hat{U}_i the annuli with two boundary points removed. Each curve $\hat{\gamma}_i$ is now replaced by an ideal (oriented) arc, also denoted $\hat{\gamma}_i$, joining a puncture to itself.

To construct an ideal cellulation of $\partial\hat{\mathcal{P}}$, we must decompose each annulus \hat{U}_i into contractible ideal polygons. There are two options for doing so :

- (1) Choose an ideal arc across \hat{U}_i , connecting the puncture of $\hat{\gamma}_i$ to the puncture of $\hat{\gamma}_{i+1}$ (for each i , there is a \mathbb{Z} –worth of possible choices for such an arc). Then \hat{U}_i is an ideal square cell with a pair of opposite sides identified.
- (2) Choose two disjoint, non-isotopic ideal arcs across \hat{U}_i , decomposing \hat{U}_i into two ideal triangles. There is again a \mathbb{Z} –worth of possible choices.

Finally, consider the two-fold cyclic cover \mathcal{P} of $\hat{\mathcal{P}}$. Each $\hat{\gamma}_i$ lifts to two arcs $\dot{\gamma}_i$ and $\ddot{\gamma}_i$ in $\partial\mathcal{P}$ with the same pair of (distinct) punctures as end points. We now identify $\dot{\gamma}_i$ with $\ddot{\gamma}_i$, by an orientation–reversing homeomorphism. The resulting arc is called γ_i , and the quotient of \mathcal{P} under this identification is homeomorphic to \mathcal{C} , as defined at the beginning of this section. Each arc γ_i is a crossing segment, not endowed with any orientation. See Figure 4.4.2.

Under the identification, each band U_i (the lift of \hat{U}_i in \mathcal{P}) becomes a 4–punctured sphere included in the boundary of \mathcal{C} . Any decomposition of \hat{U}_i , as in the dichotomy above, defines a decomposition of U_i into two ideal squares or four ideal triangles. The two cases of the dichotomy correspond, as in Section 4.4.1, to the neighboring bracelet either (1) being glued directly to \mathcal{C} , using a very “simple” homeomorphism, or (2) needing an interface of ideal tetrahedra or being in fact a 1–bracelet (trivial tangle).

Recall that in each case of the dichotomy, the involved choices in \mathbb{Z} are forced by the gluing homeomorphisms (see Section 4.4.1), and essentially reflect the number of half-twists in the band of the bracelet (M_d, K_d) that defined \mathcal{C} (and the block \mathcal{P}).

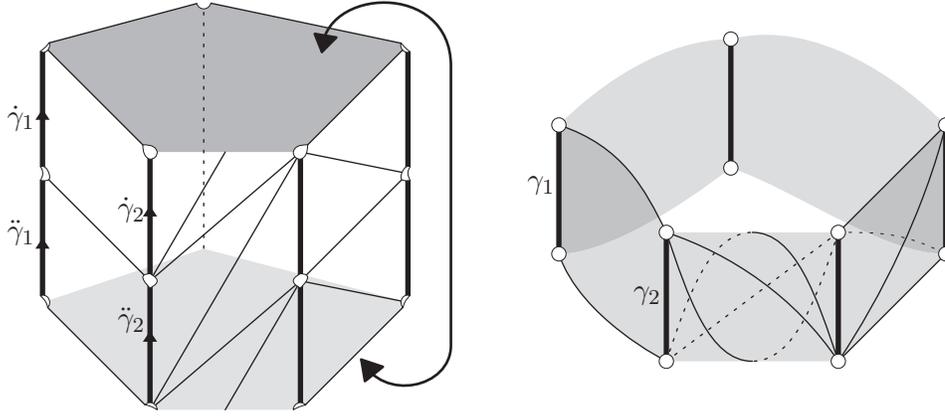


FIG. 4.4.2 – Block associated to a large (non–augmented) bracelet of degree 5. The solid torus \mathcal{P} is shown before and after the identifications $\hat{\gamma}_i \sim \check{\gamma}_i$. In the right panel, \mathcal{P} is the space *outside* the grey “ring”.

Augmented polyhedral d –bracelets ($d \geq 1$)

Topologically, the construction above is valid for all $d \geq 1$, not just $d \geq 3$; and an augmented d –block (associated to an augmented d –bracelet) is obtained by drilling out the core of the solid torus \mathcal{P} . If we denote by \mathcal{P}_{aug} the result of the drill–out, then any decomposition of $\partial\mathcal{P}$ into ideal triangles and squares (as in the dichotomy above) induces, by coning–off, a decomposition of \mathcal{P}_{aug} into contractible ideal polyhedra (tetrahedra and square–based pyramids). For the purpose of finding angle structures, it will be convenient to regard \mathcal{P}_{aug} as such a union of ideal polyhedra, rather than an elementary block *per se*.

An essential feature of our polyhedral realizations of d –blocks and augmented d –blocks is that crossing segments always arise as edges, thus defining a preferred slope on each Conway sphere of the block. If the block comes from an augmented bracelet, this slope is also the one defined by the “extra” link component living inside the augmented bracelet.

4.5 Angle structures for the link complement

In this section, we find dihedral angles for the blocks and ideal tetrahedra constructed in Section 4.4. The key property will be an explicit description (Section 4.5.2) of the space of angle structures associated to a sequence of tetrahedra forming a product region (see Definition 4.4.1) or a 1–bracelet (trivial tangle). This description (in large part borrowed from Sections 1.5 and 2.1 — see also [GF]) is sufficiently tractable that we can say exactly when the tetrahedra admit dihedral angles that match a given system of angles for the solid tori (Propositions 4.5.10 and 4.5.11). As a result, we can show that all candidate links (see Definition 4.3.6) admit angle structures. We will treat the easier case of non–Montesinos links in Section 4.5.3 and the trickier case of Montesinos links in Section 4.5.4. Montesinos links are tricky because they include the third family of exceptions to Theorem 4.1.5.

The strategy is as follows : in Section 4.5.1, we choose some dihedral angles to parametrize the deformation space of solid tori. We show (Propositions 4.5.3, 4.5.6, 4.5.7) that these dihedral angles

define valid angle structures whenever they are, in some appropriate sense, small enough. On the other hand, the same parameters need to be large enough (Proposition 4.5.11) for the trivial tangles to admit angle structures. The conflict that arises can be managed for candidate links, but causes the exceptional Montesinos links (ruled out in Definition 4.3.6) to have no angle structures.

4.5.1 Angle structures for a non-augmented large block

We consider a solid torus \mathcal{P} of degree d whose boundary is subdivided into ideal triangles and quadrilaterals, as in Section 4.4.3. In this section, we study the space of angle structures for \mathcal{P} . We restrict attention to those angle structures which are invariant under the natural fixed-point-free involution of \mathcal{P} (recall that \mathcal{P} was defined as a 2-fold covering in Section 4.4.3).

Recall the preferred direction of $\partial\mathcal{P}$, defined by the crossing arcs of the corresponding bracelet. As parameters, we will use the (exterior) dihedral angles at all those edges of $\partial\mathcal{P}$ which are *not* along the preferred direction. The angles at the edges along the preferred direction can then be recovered from the requirement that the angles around any vertex add to 2π .

For simplicity, assume that $\partial\mathcal{P}$ is decomposed into ideal triangles only. Recall from Section 4.4.3 that the preferred direction came with an orientation, which we call “upwards”. Thus, each of the d bands U_1, \dots, U_d in $\partial\mathcal{P}$ is traversed by two *ascending* and two *descending* edges. By the normalization of markings that precedes Definition 4.3.6, the slopes of the descending edges in the corresponding Conway spheres are 0, while the slopes of the ascending edges are 1, and the slopes associated to the edges along the preferred direction are ∞ .

For each $1 \leq i \leq d$, we denote by $a_i \in [0, \pi)$ the (exterior) dihedral angle at the ascending pair of edges, and $b_i \in [0, \pi)$ the angle at the descending pair. (We can recover the case where U_i is subdivided into two squares by allowing $a_i = 0$ or $b_i = 0$). If the index i is read modulo d , the exterior dihedral angle at an edge (in the preferred direction) of $U_i \cap U_{i+1}$ is

$$c_{i,i+1} = \pi - \frac{a_i + a_{i+1} + b_i + b_{i+1}}{2}. \quad (4.2)$$

To make all angles non-negative, we require

$$0 \leq a_i < \pi \text{ and } 0 \leq b_i < \pi \text{ and } 0 < a_i + b_i \leq \pi. \quad (4.3)$$

The particular choice of strong and weak inequalities here implies

Lemma 4.5.1. *Any triangular face of \mathcal{P} has at most one edge with dihedral angle 0.*

Proof. The dihedral angles of a triangular face are $a_i, b_i, c_{i,i+1}$ or $a_i, b_i, c_{i-1,i}$. If $a_i = 0$ one easily checks that $b_i, c_{i,i+1}, c_{i-1,i}$ are all positive (because $a_i + b_i = b_i < \pi$). If $b_i = 0$ the argument is the same. If $c_{i,i+1} = 0$ then $a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}$ are all positive (because their sum is 2π). \square

Thus, a block \mathcal{P} with only triangular faces and *non-negative* dihedral angles satisfying (4.3) uniquely defines an block with *positive* dihedral angles and, possibly, some quadrilateral faces. By default, we will usually consider that a block \mathcal{P} has only triangular faces and look for angle systems satisfying (4.3).

From Definition 4.2.2, recall that an *angle structure* on \mathcal{P} requires every normal simple closed curve γ in $\partial\mathcal{P}$ that bounds a disk in \mathcal{P} to have total bending number larger than 2π (the total bending number is the sum of the exterior dihedral angles at the edges encountered by γ , counted with multiplicity). Such a curve γ can be defined as a non-backtracking closed path in the dual graph.

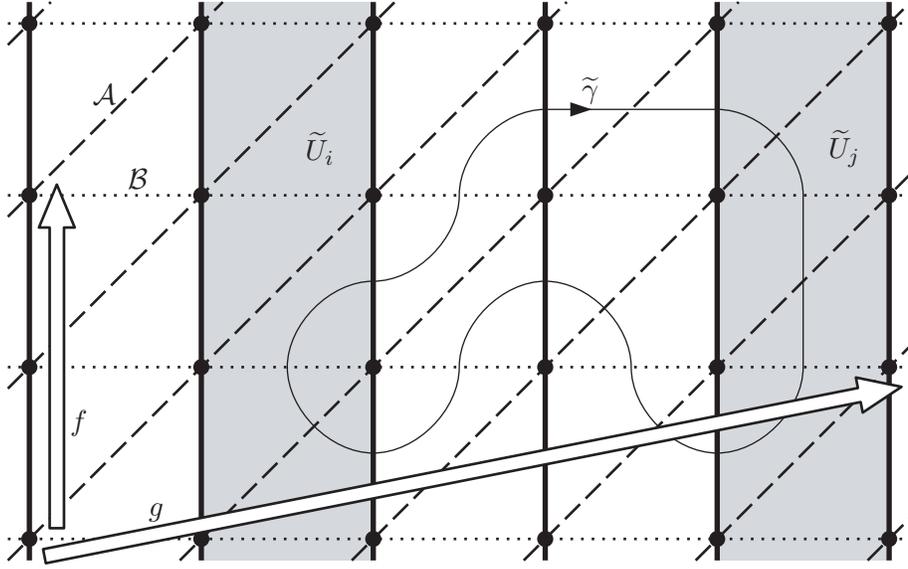


FIG. 4.5.1 – The cover $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ of $\partial\mathcal{P}$, with a closed curve $\tilde{\gamma}$.

Identify $\partial\mathcal{P}$ with $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\langle f, g \rangle$ where $f(x, y) = (x, y + 2)$ and $g(x, y) = (x + d, y + k)$, where $d \geq 3$ is the degree of \mathcal{P} and $k \in \mathbb{Z}$ is an integer such that any g -invariant straight line in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ projects in $\partial\mathcal{P}$ to the boundary of a compression disk of \mathcal{P} . (In other words, k reflects the number of half-twists in the band of the bracelet associated to \mathcal{P} .) The bands $U_i \subset \partial\mathcal{P}$ lift to a subdivision of $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ into “vertical” bands $(\tilde{U}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, where $\tilde{U}_i = (i, i + 1) \times \mathbb{R}$ (see Figure 4.5.1). Consider a normal simple closed curve γ in $\partial\mathcal{P}$ bounding a disk in \mathcal{P} , and lift γ to a curve $\tilde{\gamma}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.

Either $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0)$ (i.e. $\tilde{\gamma}$ is a closed curve), or $\tilde{\gamma}(1) = g^{\pm 1}(\tilde{\gamma}(0))$.

Lemma 4.5.2. *If $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0)$, the total bending number N_γ of γ is more than 2π , unless γ is just a loop around a puncture of $\partial\mathcal{P}$.*

Proof. If $\tilde{\gamma}$ visits exactly the vertical bands $\tilde{U}_i, \tilde{U}_{i+1}, \dots, \tilde{U}_{j-1}, \tilde{U}_j$, it is easy to see by counting the edges met by $\tilde{\gamma}$ that

$$\begin{aligned} N_\gamma &\geq (a_i + b_i) + (a_j + b_j) + 2 \sum_{k=i+1}^{j-1} \min\{a_k, b_k\} + 2 \sum_{k=i}^{j-1} c_{k,k+1} \\ &= 2\pi + 2 \sum_{k=i+1}^{j-1} \pi - \max\{a_k, b_k\}, \end{aligned}$$

using (4.2). This quantity is larger than 2π , unless $j = i + 1$ and $\tilde{\gamma}$ is (homotopic to) the boundary of a regular neighborhood of the union of r consecutive vertical edges (along the preferred direction) : in the latter case however,

$$\begin{aligned} N_\gamma &= (r + 1)(a_i + b_i) + (r + 1)(a_{i+1} + b_{i+1}) + 2c_{i,i+1} \\ &= 2\pi + r(a_i + b_i + a_{i+1} + b_{i+1}) \end{aligned}$$

is larger than 2π , unless $r = 0$ and γ is just a loop around a puncture of $\partial\mathcal{P}$. \square

There remains the case where $\tilde{\gamma}(1) = g^{\pm 1}(\tilde{\gamma}(0))$, i.e. γ bounds a compression disk of the solid torus \mathcal{P} . Then, the condition $N_\gamma > 2\pi$ (in terms of the a_i, b_i) is in general non-vacuous, and the conjunction of all these conditions (for all normal curves γ) has no nice closed-form expression in terms of the a_i, b_i . However, the following three Propositions give various sufficient conditions for $N_\gamma > 2\pi$ to hold, independently of γ .

Proposition 4.5.3. *If the block \mathcal{P} is of degree $d \geq 3$ and*

$$(d-2)\pi > \sum_{i=1}^d \max\{a_i, b_i\} \quad (\text{girth condition}) \quad (4.4)$$

then $N_\gamma > 2\pi$ for all γ , i.e. the angles $a_i, b_i, c_{i,i+1}$ define an angle structure for \mathcal{P} .

Proof. If γ bounds a compression disk in \mathcal{P} , then γ crosses all the bands U_i . Therefore,

$$N_\gamma \geq \sum_{i=1}^d \min\{a_i, b_i\} + \sum_{i=1}^d c_{i,i+1} = d\pi - \sum_{i=1}^d \max\{a_i, b_i\},$$

using (4.2). The conclusion follows. \square

Consider a normal curve $\gamma \subset \partial\mathcal{P}$ bounding a disk in \mathcal{P} . Let \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) be the union of all the ascending arcs (resp. descending arcs) across the annuli $U_i \subset \partial\mathcal{P}$, each oriented from U_{i-1} to U_{i+1} . The torus $\mathbb{T} := \mathbb{R}^2 / \langle f, g \rangle$ naturally contains $\partial\mathcal{P}$ as a subset, and the closure $\overline{\mathcal{A}}$ of \mathcal{A} (resp. $\overline{\mathcal{B}}$ of \mathcal{B}) in \mathbb{T} defines a union of oriented, parallel simple closed curves in \mathbb{T} (see Figure 4.5.1).

Definition 4.5.4. We denote by $n_{\mathcal{A}}$ (resp. $n_{\mathcal{B}}$) the absolute value of the (algebraic) intersection number of γ with $\overline{\mathcal{A}}$ (resp. $\overline{\mathcal{B}}$) in \mathbb{T} . This definition clearly does not depend on the choice of disk-bounding curve γ .

Remark 4.5.5. In the special case of Montesinos links, we defined an integer n (up to sign), called the number of half-twists in the main band, in the normalization that precedes Definition 4.3.6. Since each descending arc has slope 0 in the corresponding Conway sphere, the definition of n implies that $|n| = n_{\mathcal{B}}$ for Montesinos links.

Proposition 4.5.6. *If $n_{\mathcal{A}} \geq 3$ and $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}, (\beta_i)_{1 \leq i \leq d}$ are positive numbers such that $\alpha_i \geq \beta_i$, then setting*

$$(a_i, b_i) = (\pi - \varepsilon\alpha_i, \varepsilon\beta_i)$$

defines an angle structure for the block \mathcal{P} for all sufficiently small ε .

Proof. First, the $a_i, b_i, c_{i,i+1}$ clearly satisfy Condition (4.3) above. Any curve γ bounding a compression disk in \mathcal{P} meets at least $n_{\mathcal{A}} \geq 3$ ascending edges, whose pleating angles are all close to π : thus $N_\gamma > 2\pi$ for some small enough ε (independent of γ). A similar proposition holds when $n_{\mathcal{B}} \geq 3$. \square

Proposition 4.5.7. *Suppose the block \mathcal{P} has degree $d = 3$ and $(n_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{B}}) = (2, 1)$. Pick positive numbers $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}, (\beta_i)_{1 \leq i \leq d}$ such that $\alpha_i \geq \beta_i$. Setting $(a_i, b_i) = (\pi - \varepsilon\alpha_i, \varepsilon\beta_i)$ defines an angle structure on \mathcal{P} (for small ε) if and only if*

$$\alpha_i > \beta_{i+1} + \beta_{i-1}$$

for each $i \in \{1, 2, 3\}$ (taking indices modulo 3).

Proof. Again, Condition (4.3) is clearly satisfied. If ε is small enough, as in Proposition 4.5.6 it is enough to check $N_\gamma > 2\pi$ for those disk-bounding curves γ which cross \mathcal{A} exactly twice. There are only three such curves : each of them crosses two ascending and one descending edge, hence for some $1 \leq i \leq 3$ we have

$$N_\gamma = a_{i-1} + b_i + a_{i+1} + \sum_{i=1}^3 c_{i,i+1} = 2\pi + \alpha_i - (\beta_{i+1} + \beta_{i-1}).$$

The conclusion follows. A similar proposition holds when $(n_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{B}}) = (1, 2)$. \square

Angle structures on augmented blocks

Finally, we note that an *augmented* block with prescribed non-negative dihedral angles a_i, b_i (where (4.3) holds) can always be realized as a union of tetrahedra with positive angles : the space obtained by coning off the band U_i to the extra component (as in Section 4.4.3) is a union of 4 isometric tetrahedra of interior dihedral angles

$$\frac{\pi - a_i}{2}, \frac{\pi - b_i}{2}, \frac{a_i + b_i}{2}, \quad (4.5)$$

all positive by (4.3). The exterior dihedral angles of the augmented block are recovered as $\pi - \left(\frac{\pi - a_i}{2} + \frac{\pi - a_i}{2}\right) = a_i$, similarly $\pi - \left(\frac{\pi - b_i}{2} + \frac{\pi - b_i}{2}\right) = b_i$, and $\pi - \left(\frac{a_i + b_i}{2} + \frac{a_{i+1} + b_{i+1}}{2}\right) = c_{i,i+1}$.

In fact, if all large blocks are augmented (the candidate link K is called *totally augmented*), this decomposition falls exactly into the class studied in Section 2.3. More precisely, the augmentation component of each augmented d -block bounds d disjoint, homotopically distinct, twice-punctured disks : cutting open along all these disks (which must be totally geodesic for the hyperbolic metric) produces the manifolds \overline{M}_i of Section 2.3.

Remark 4.5.8. Thus, we have already done much more than finding angle structures for totally augmented arborescent links K : by Theorem 2.3.1, we know the geometrically canonical decomposition for the hyperbolic structure on $\mathbb{S}^3 \setminus K$. Note that two-bridge links, having no large blocks at all, are instances of totally augmented arborescent links.

4.5.2 Angle structures for product regions and trivial tangles

In this section, we investigate the space of angle structures for the ideal tetrahedra constructed in Section 4.4.1. Tetrahedra live either at the interface of large blocks $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, or near trivial tangles. While the space of angle structures for a tetrahedron is easy to describe (a triple of positive angles summing to π), the difficulty is to deal with many tetrahedra simultaneously. However, this section again closely tracks Sections 1.5 and 2.1.2, and is to a large extent a reminder (see also [GF]).

We begin by focusing on two large blocks $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ separated by a product region (these come from large bracelets, in the sense of Definition 4.3.4). Recall from Section 4.4.1 the pleated 4-punctured spheres S_j between \mathcal{P} and \mathcal{P}' : we can endow S_j with a transverse ‘‘upward’’ orientation, from \mathcal{P} to \mathcal{P}' . Suppose that we *have* solved the problem of finding an angle structure, i.e. that the tetrahedra and solid tori are assigned dihedral angles that add up to 2π around each edge. Then we can define the *pleating angle* of the surface S_j at any edge $e \subset S_j$: namely, if the sum of all dihedral angles at e above (resp. below) S_j is $\pi + \alpha$ (resp. $\pi - \alpha$), we say that S_j has pleating angle α at e .

It will turn out that pleating angles of the S_j are very convenient parameters for the space of angle structures : thus, when no angle structure has been defined yet, we will typically look for angle structures realizing a given set of pleating angles of the S_j , and express the dihedral angles of the blocks \mathcal{P} , \mathcal{P}' and ideal tetrahedra in terms of these pleating angles.

We arbitrarily require that *the pleating angles of S_j at the 3 edges adjacent to any puncture of S_j add up to 0* (note that this property would hold in a true hyperbolic metric, where the holonomy of the loop around any puncture is a parabolic element of $\text{Isom}^+ \mathbb{H}^3$). This property easily implies that the pleating angles of S_j at opposite edges are equal. Restricting to such a subspace of solutions might (in principle) hamper our goal of finding angle structures ; however, it is technically very convenient, for reasons we are about to outline now.

Consider the 4-punctured sphere $S^{(i)}$ defined by the vertical band $U_i \subset \partial\mathcal{P}$ (by identifying the edges in ∂U_i to create the crossing arcs, as in Section 4.4.3). The pleating angles of $S^{(i)}$, in the above convention, are a_i, b_i and $-a_i - b_i$, the latter being the angle at the crossing arcs. Similarly, the 4-punctured sphere $S^{(i+1)}$ defined by the band U_{i+1} has pleating angles $a_{i+1}, b_{i+1}, -a_{i+1} - b_{i+1}$. Let e be the crossing edge $S^{(i)} \cap S^{(i+1)}$: recall that e is obtained by identification of two edges of the solid torus \mathcal{P} , both carrying an interior dihedral angle of $\pi - c_{i,i+1}$. If the dihedral angles at e above $S^{(i)}$ (resp. $S^{(i+1)}$) for the transverse orientation add up to $\pi - (a_i + b_i)$ (resp. $\pi - (a_{i+1} + b_{i+1})$), the sum of all dihedral angles at e will be

$$[\pi - (a_i + b_i)] + [\pi - (a_{i+1} + b_{i+1})] + 2[\pi - c_{i,i+1}] = 2\pi .$$

Therefore the linear gluing equation at e will automatically be satisfied.

Recall the Farey vertices $s \neq s'$ from Section 4.4.1 associated to the crossing arcs (or preferred slopes) of \mathcal{P} and \mathcal{P}' . If s, s' are Farey neighbors, \mathcal{P} and \mathcal{P}' are glued directly to one another along a 4-punctured sphere S : the edge pairs of slopes s, s' subdivide S into two ideal squares, and the bands in $\partial\mathcal{P}, \partial\mathcal{P}'$ are traversed by edges exactly as in the first member of the dichotomy of Section 4.4.3 (up to a degree 2 covering).

Proposition 4.5.9. *At the two parallel edges traversing the band of $\partial\mathcal{P}$, we put an (exterior) dihedral angle $\varepsilon > 0$. We put the same angle ε at the edges traversing the band of \mathcal{P}' . Then, the pleating angles of S at the edge pairs of slope s, s' are $-\varepsilon, \varepsilon$ respectively. \square*

The previous proposition is obvious. Moreover, observe that we can artificially select a pair of diagonals in S and define the third pleating angle to be 0 : then (4.3) is satisfied because the exterior dihedral angles a_i, b_i of \mathcal{P} (resp. \mathcal{P}') at the gluing Conway sphere are 0 and ε , though not necessarily in that order.

We now consider the case where s, s' are not Farey neighbors. The bands of $\partial\mathcal{P}, \partial\mathcal{P}'$ are now subdivided into 4 triangles each (as in the second member of the dichotomy of Section 4.4.3), defining a pair of ascending and a pair of descending edges in each of the two bands. Denote by $A \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ (resp. $B \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$) the slope of the ascending (resp. descending) edge pair in the band of $\partial\mathcal{P}$, and denote similarly by $A', B' \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ the slopes of the edges in $\partial\mathcal{P}'$. We make no assumption on the order of A, A', B, B' in $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, i.e. we favor no convention as to which pair is ascending and which is descending. Denote by a, b the exterior dihedral angles of the block \mathcal{P} at the ascending and descending edges respectively, and define a', b' in a similar way (relative to \mathcal{P}').

Proposition 4.5.10. *For any small $\varepsilon > 0$, if $a = a' = b = b' = \varepsilon$, the tetrahedra between \mathcal{P} and \mathcal{P}' admit positive dihedral angles satisfying the linear gluing equations (at all interior edges).*

Proof. Recall the Farey triangles T_0, \dots, T_m separating s from s' (here, $m \geq 1$). By definition (see Section 4.4.1), we have $T_0 = sAB$ and $T_m = s'A'B'$. Recall also the pleated surface S_i associated to T_i : under our convention (transverse orientation for S_i), the pleating angles of S_0 at the edge pairs of slopes A, B, s are $a, b, -a - b$ respectively. Similarly, the pleating angles of S_m at the edge pairs of slopes A', B', s' are $-a', -b', a' + b'$. We write these numbers in the corresponding corners of T_0 and T_m (Figure 4.5.2).

For each $0 < i < m$, the oriented line Λ from s to s' enters T_i across some Farey edge $e_i = T_i \cap T_{i-1}$, and exits through another edge e_{i+1} , either to the left or to the right: we say that Λ makes a *Left* or makes a *Right* at T_i , and encode the combinatorics of Λ into a word $\Omega = RLL\dots R$ of length $m - 1$.

No letter (R or L) is associated *a priori* to the Farey triangles T_0 and T_m . However, we will posit that the path enters T_0 through the Farey edge $e_0 := sB$, and exits T_m through the edge $e_{m+1} := s'B'$, and associate the relevant letter (R or L) to T_0 and to T_m . Hence, Ω becomes a word of length $m + 1$. This convention is totally artificial, but it will allow us to streamline the notation in our argument.

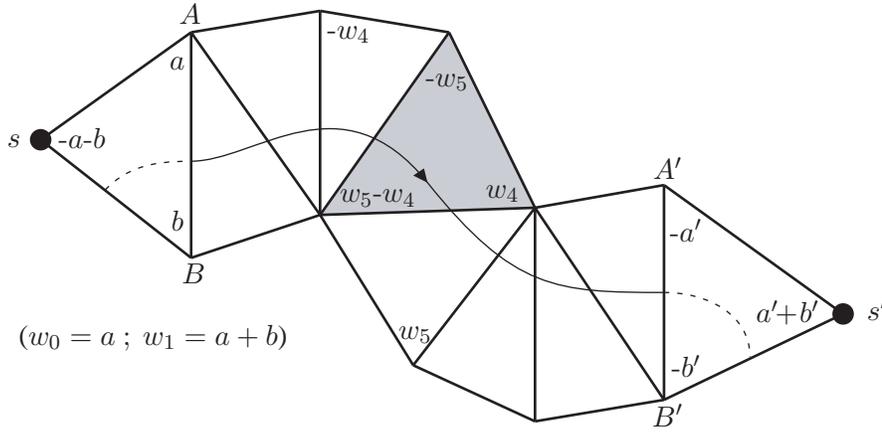


FIG. 4.5.2 – The pleating angles written in the corners of the Farey triangles T_i associated to the pleated surfaces S_i .

For $1 \leq i \leq m$, we denote by $\hat{\Delta}_i$ and $\check{\Delta}_i$ the two ideal tetrahedra separating the pleated surfaces S_i and S_{i-1} : note that $\{\hat{\Delta}_i, \check{\Delta}_i\}$ is naturally associated to the Farey edge $e_i = T_i \cap T_{i-1}$. Our goal is to define dihedral angles for $\hat{\Delta}_i$ and $\check{\Delta}_i$ such that the linear gluing conditions around all edges are satisfied. We will in fact restrict to solutions invariant under the Klein group V_4 , i.e. such that $\hat{\Delta}_i$ and $\check{\Delta}_i$ are isometric for all i (this implies in particular that the angles of $\hat{\Delta}_i$ and $\check{\Delta}_i$ at any shared edge are equal). In what follows, Δ_i refers to any one of the ideal tetrahedra $\hat{\Delta}_i, \check{\Delta}_i$.

Denote by $\pi - w_i$ the dihedral angle of Δ_i at the pair of opposite edges that is not in $S_i \cap S_{i-1}$ (i.e. the pair of edges involved in the diagonal exchange that Δ_i represents). Then S_i has one pleating angle equal to w_i while S_{i-1} has one pleating angle equal to $-w_i$. By translating indices, we find that for all $1 \leq i \leq m - 1$ the pleating angles of S_i must be

$$-w_{i+1} \quad , \quad w_i \quad \text{and} \quad w_{i+1} - w_i$$

(the value of the third pleating angle is forced upon us by the condition that the pleating angles add up to 0). Further, we can write these three pleating angles in the corners of the Farey triangle T_i associated to

S_i (this was partially done in Figure 4.5.2). In Figure 1.5.1 page 9 (top), denoting by e_i the Farey edge $T_i \cap T_{i-1}$ associated to the tetrahedra $\{\dot{\Delta}_i, \ddot{\Delta}_i\}$, we see that w_i is in the corner of T_i opposite e_i , and $-w_{i+1}$ is in the corner of T_i opposite e_{i+1} .

We repeat the same procedure for all indices $1 \leq i \leq m-1$. It also extends naturally to $i=0$ and $i=m$ if we just set $(w_0, w_1) = (a, a+b)$ and $(w_m, w_{m+1}) = (a'+b', a')$: we then recover the pleating angles of S_0 and S_m defined previously.

The bottom part of Figure 1.5.1 page 9 shows the result of the labeling for two consecutive Farey triangles T_{i-1} and T_i , whose corresponding pleated surfaces S_{i-1} and S_i bound the pair of isometric tetrahedra $\{\dot{\Delta}_i, \ddot{\Delta}_i\}$ (where $1 \leq i \leq m$). There are four possible cases, depending on the letters (R or L) living on the Farey triangles T_{i-1} and T_i . In order for Δ_i to have positive angles, assuming $0 < w < \pi$, it is necessary and sufficient that each pleating angle written just below the horizontal edge e_i be larger than the pleating angle written just above, in Figure 1.5.1 (bottom): namely, the difference between these two pleating angles (of S_i and S_{i-1}) is twice a dihedral angle of Δ_i .

Suppose $(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) = (u, w, v)$. Denoting by x_i (resp. y_i) the angle of Δ_i at the edge whose slope is given by the right (resp. left) end of e_i in Figure 1.5.1 (bottom), we thus find the following formulas for x_i, y_i, z_i (the following is just a reminder of Table 1.3):

Ω	$L \quad L$	$R \quad R$	$L \quad R$	$R \quad L$
x_i	$\frac{1}{2}(u+v)$	$\frac{1}{2}(-u+2w-v)$	$\frac{1}{2}(u+w-v)$	$\frac{1}{2}(-u+w+v)$
y_i	$\frac{1}{2}(-u+2w-v)$	$\frac{1}{2}(u+v)$	$\frac{1}{2}(-u+w+v)$	$\frac{1}{2}(u+w-v)$
z_i	$\pi-w$	$\pi-w$	$\pi-w$	$\pi-w$

(4.6)

Define a *hinge index* i as an index such that the Farey triangles adjacent to the Farey edge e_i carry different letters (R and L). From (4.6), we see that Δ_i has positive angles if and only if

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad 0 < w_i < \pi \text{ for all } 1 \leq i \leq m \text{ (range condition)}; \\ \bullet \quad w_{i+1} + w_{i-1} < 2w_i \text{ if } i \text{ is not a hinge index (concavity condition)}; \\ \bullet \quad |w_{i+1} - w_{i-1}| < w_i \text{ if } i \text{ is a hinge index (hinge condition)}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

(see Figure 1.5.2 page 10). Recall that $m \geq 1$. It is clear that there exist sequences (w_0, \dots, w_{m+1}) satisfying the above conditions such that $(w_0, w_1, w_m, w_{m+1}) = (\varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon)$: for example, set all $(w_i)_{1 \leq i \leq m}$ equal to 2ε , then perturb the non-hinge parameters among $\{w_i\}_{1 < i < m}$ to obtain strong (piecewise) concavity. \square

Trivial tangles

As in Section 2.1.2 (summarizing [GF, Appendix]), this method of constructing angle structures extends to the case when \mathcal{P} is glued to a trivial tangle (1-bracelet) of slope s' , realized by tetrahedra. Then, Figure 2.1.1 on page 34 shows the surface S_{m-1} associated to the next-to-last Farey triangle T_{m-1} . As in Figure 2.1.1, we assume (up to changing the marking of the 4-punctured Conway sphere) that $s' = \frac{1}{2}$ and $T_{m-1} = 1 \infty 0$. Gluing the faces of S_{m-1} in pairs amounts to requiring that S_{m-1} have pleating angle $-\pi$ at the edges of slope ∞ : in other words, that $w_m = \pi$. Thus, if we put $w_m = \pi$ (the Farey edge associated to w_m is $e_m = T_m \cap T_{m-1}$), Table (4.6) still allows us to derive the angles

of the tetrahedra $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$, and the positivity conditions are still given by (4.7). (In that case, there is no “artificial” letter living on T_m and no “artificial” parameter w_{m+1} . See also Section 2.1.2.) Angle structures are thus given by sequences

$$(w_0, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_m) = (a, a + b, w_2, \dots, w_{m-1}, \pi) \quad (4.8)$$

which satisfy (4.7) for $0 < i < m$. To describe for which pairs (a, b) such a sequence exists, we need some notation.

Given two rationals $q = y/x$ and $q' = y'/x'$ in reduced form in $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, define

$$q \wedge q' := \left| \begin{vmatrix} y & y' \\ x & x' \end{vmatrix} \right|$$

(absolute value of the determinant). We will use the following key property : if pqr is a Farey triangle and u, p, r, q are cyclically ordered in $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, then $u \wedge r = (u \wedge p) + (u \wedge q)$. The property is easily checked in the case $(p, q) = (0, \infty)$ (where u, r have opposite signs), and the general case follows because the \wedge -notation is invariant under $PSL_2(\mathbb{Z})$, which acts transitively on oriented Farey edges pq .

Proposition 4.5.11. *Suppose a trivial tangle complement is glued to a large block \mathcal{P} that has non-negative pleating angles a, b at the edge pairs of slope $A, B \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, satisfying (4.3). Suppose that $s, s' \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ are the preferred slopes of \mathcal{P} and of the trivial tangle, respectively. Then sAB is the Farey triangle T_0 ; the points s, A, s', B are cyclically ordered in $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, and the tetrahedra $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$ (realizing the trivial tangle complement) admit positive angles if and only if*

- $s \wedge s' = 2$ and $a + b = \pi$; or
- $s \wedge s' > 2$ and $a(B \wedge s') + b(A \wedge s') > \pi > a + b$.

Proof. The statements about the relative positions of s, A, B, s' are true by construction and were proved in Section 4.4.1. The case $s \wedge s' = 2$ corresponds to $m = 1$, with the 4-punctured sphere $S_{m-1} = S_0 \subset \partial\mathcal{P}$ being glued directly to itself (as in Figure 2.1.1 page 34). Since $m = 1$, a sequence (4.8) exists if and only if $a + b = \pi$. We now assume $s \wedge s' > 2$, and consider the sequence of Farey triangles T_0, \dots, T_m from s to s' (where $m \geq 2$). The inequality $\pi > a + b$ must clearly be true in (4.8), so we focus on the other inequality (which says that a, b are *not too small*).

For each $0 \leq i \leq m$, define q_i to be the vertex of T_i not belonging to the edge e_i (where $e_0 = sB$ and $e_i = T_i \cap T_{i-1}$ otherwise). In particular, $q_0 = A$. If

$$\alpha_i = A \wedge q_i \quad \text{and} \quad \beta_i = B \wedge q_i \quad ,$$

it is easy to check that both (α_i) and (β_i) make the concavity and hinge conditions of (4.7) *critical* in the following sense : for each $0 < i < m$,

- If i is not a hinge index, then $\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} = 2\alpha_i$ and $\beta_{i+1} + \beta_{i-1} = 2\beta_i$;
- If i is a hinge index, then $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \alpha_{i-1}$ and $\beta_{i+1} = \beta_i + \beta_{i-1}$.

(In the first case, observe that $\alpha_{i+1} - \alpha_i = A \wedge p = \alpha_i - \alpha_{i-1}$, where p is the common vertex of the Farey edges e_{i-1}, e_i, e_{i+1} . In the second case, observe that $q_{i-1}q_iq_{i+1}$ is a Farey triangle and A, q_i, q_{i+1}, q_{i-1} are cyclically ordered in $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$. Compare with Lemma 3.3.2 in Chapter 3.)

Clearly, any linear combination of the sequences (α_i) and (β_i) also makes the concavity and hinge

conditions of (4.7) critical. Define

$$v_i := a\beta_i + b\alpha_i = a(B \wedge q_i) + b(A \wedge q_i) ,$$

so that $(v_0, v_1) = (a, a + b)$.

Note that $q_m = s'$, so $v_m = a(B \wedge s') + b(A \wedge s')$ is the left member of the inequality of the Proposition.

Claim : *If v' is another sequence which satisfies the closure of (4.7) and $(v'_0, v'_1) = (v_0, v_1)$, then $v'_i \leq v_i$ and $v'_i - v'_{i-1} \leq v_i - v_{i-1}$ for all $1 \leq i \leq m$.*

The claim is true for $i = 1$, and follows in general by induction on i : if i is not a hinge index, we have

$$\begin{aligned} v'_{i+1} &\leq v'_i + (v'_i - v'_{i-1}) \leq v_i + (v_i - v_{i-1}) = v_{i+1} ; \\ v'_{i+1} - v'_i &\leq v'_i - v'_{i-1} \leq v_i - v_{i-1} = v_{i+1} - v_i \end{aligned}$$

(in each line, the first inequality is true by (4.7), and the second one by induction). Similarly, if i is a hinge index, then

$$\begin{aligned} v'_{i+1} &\leq v'_i + v'_{i-1} \leq v_i + v_{i-1} = v_{i+1} ; \\ v'_{i+1} - v'_i &\leq v'_{i-1} \leq v_{i-1} = v_{i+1} - v_i . \end{aligned}$$

Thus, if $v_m \leq \pi$, then no sequence $w = v'$ satisfies both (4.7) and (4.8), so there can be no positive dihedral angle assignment for the tetrahedra $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$. Conversely, if $v_m > \pi$, we can define $w_i := f(v_i)$ for all $1 \leq i \leq n$, where $f : [v_1, v_m] \rightarrow \mathbb{R}$ is increasing, strictly concave, 1-Lipschitz and satisfies $f(v_1) = v_1 = a + b$ and $f(v_m) = \pi$ (see Figure 4.5.3) ; it is then straightforward to check that $(a = w_0, w_1, \dots, w_m = \pi)$ satisfies (4.7) — except of course the range condition at $w_m = \pi$. \square

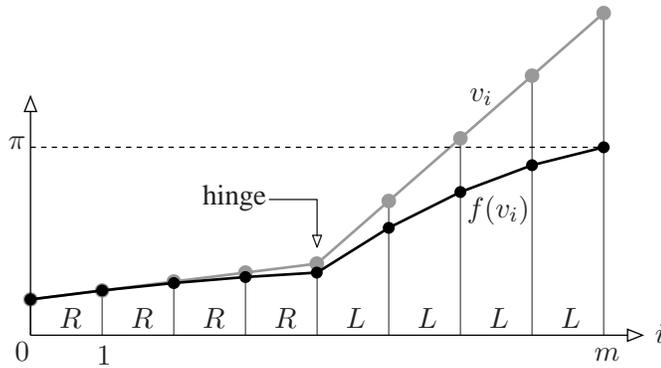


FIG. 4.5.3 – The sequences $v = (v_i)_{0 \leq i \leq m}$ and $w = f \circ v$.

2-bridge links

When two trivial tangles are glued together, we obtain a 2-bridge link. The construction preceding Proposition 4.5.11 can be performed both near s and near s' , and we refer to Chapter 2 or [GF] for a much more complete treatment. In the remainder of this chapter, we assume that the candidate link K is not a 2-bridge link, i.e. contains at least one large bracelet.

4.5.3 Non (strongly) Montesinos links

Observe that the condition in each of the Propositions 4.5.3, 4.5.6, 4.5.7 requires that the angles a_i, b_i be, in a loose sense, *small enough*, while Proposition 4.5.11 requires them to be *large enough*. The conflict that arises causes some arborescent link complements to have no angle structures (essentially, the third family of exceptions in Theorem 4.1.5).

Definition 4.5.12. A *strongly Montesinos link* is an arborescent link which, after the reduction of Section 4.3, consists of one non-augmented d -bracelet ($d \geq 3$) attached to d trivial tangles.

Note that some very simple Montesinos links are not strongly Montesinos : for example, links with tangle slopes $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{y}{x})$ were reduced in step v of the algorithm of Section 4.3. Such links consist of an augmented 1-bracelet glued to a non-augmented 1-bracelet, and may or may not be candidate links, depending on whether the preferred slopes of the two bracelets satisfy the minimum-distance table of Proposition 4.3.5.

Proposition 4.5.13. *If the candidate link K is not strongly Montesinos, we can endow all blocks with non-negative dihedral angles satisfying (4.3) such that the girth condition (4.4) holds for all non-augmented blocks, and the condition of Proposition 4.5.11 holds at each trivial tangle. As a result, the ideal decomposition of the link complement admits angle structures, and the link is hyperbolic.*

Proof. Consider a non-augmented block \mathcal{P} : since the link is not Montesinos, \mathcal{P} is separated by a product region from some other large block (augmented or not). The dihedral angles a_k, b_k of \mathcal{P} at the boundary of that product region can be taken smaller than or equal to any small $\varepsilon_0 > 0$, and the product region will still admit positive angle structures, by Propositions 4.5.9–4.5.10. (More precisely, we take $a_k = b_k = \varepsilon_0$ [Prop. 4.5.10] except in the special case where the two blocks are glued directly to one another : then, we use the observation that follows Proposition 4.5.9 and take a_k, b_k equal to ε_0 and 0, though not necessarily in that order.)

We must now find dihedral angles for \mathcal{P} such that the girth condition (4.4) holds. Consider a trivial tangle attached to \mathcal{P} , along the band U_i . Note that

$$A \wedge s' + B \wedge s' = s \wedge s' \geq 2,$$

where the inequality follows from the table of minimal Farey distances in Proposition 4.3.5. Therefore, by Proposition 4.5.11, the tetrahedra in the trivial tangle will admit positive structures as soon as

$$a_i = b_i = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } s \wedge s' = 2, \\ \varepsilon + \frac{\pi}{s \wedge s'} & \text{if } s \wedge s' > 2, \end{cases} \quad (4.9)$$

for a small $\varepsilon > 0$. Since $\max\{a_k, b_k\} = \varepsilon_0$, under this choice of values, the right member $\sum_{i=1}^d \max\{a_i, b_i\}$ of the girth condition (4.4) is thus at most

$$\varepsilon_0 + (d-1)\frac{\pi}{2}.$$

If $d \geq 4$, this quantity is already less than the left member $(d-2)\pi$ of (4.4). If $d = 3$, recall from Section 4.3 that \mathcal{P} is not attached to two trivial tangles of slope $1/2$ (otherwise, we would have replaced

the 3–bracelet associated to \mathcal{P} by an augmented 1–bracelet in step v of the algorithm). Thus, the above upper bound can be further improved to $\varepsilon_0 + (\pi/2) + (\varepsilon + \pi/3) < (d - 2)\pi = \pi$, so the girth condition (4.4) is satisfied.

As for augmented bracelets, there is nothing to check : as soon as the a_i, b_i for an augmented block \mathcal{P} satisfy (4.3) and (near trivial tangles) the condition of Proposition 4.5.11, \mathcal{P} is realized by a union of tetrahedra with positive angles, by Equation (4.5) above. \square

4.5.4 Strongly Montesinos links

Suppose the candidate link K is strongly Montesinos, and recall the non-negative integers $n_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{B}}$ from Section 4.5.1.

Proposition 4.5.14. *If $n_{\mathcal{A}} \geq 3$ or $n_{\mathcal{B}} \geq 3$, the block decomposition admits angle structures.*

Proof. Assume $n_{\mathcal{A}} \geq 3$ (it is enough to treat this case). It is straightforward to find a pair (α, β) satisfying the condition of Proposition 4.5.6, such that $(a, b) = (\pi - \alpha\varepsilon, \beta\varepsilon)$ satisfies the condition of Proposition 4.5.11 for small ε . For example, take $\beta = \alpha$ if $s \wedge s' = 2$, and $\beta = \frac{2}{3}\alpha$ if $s \wedge s' \geq 3$ (recall $(A \wedge s') + (B \wedge s') = s \wedge s'$). \square

The next two Propositions deal exactly with the remaining strongly Montesinos links, where $\max\{n_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{B}}\} = 2$. In each Proposition, we find a few non-hyperbolic links :

- In Proposition 4.5.15, it is the link already mentioned in Figure 4.3.8 and Remark 4.3.9, which falls into the second class of exceptions of Theorem 4.1.5.
- In Proposition 4.5.16, it is exactly the strongly Montesinos links among the third class of exceptions of Theorem 4.1.5.

Recall from Remark 4.5.5 that $n_{\mathcal{B}}$ is the number of twists in the “main band” of these Montesinos links, as defined prior to Definition 4.3.6 : thus, it is a straightforward exercise to translate the current block presentations back into planar link diagrams. Recall as well that we have chosen markings for the Conway spheres of K , in which the large bracelet has preferred slope ∞ and the trivial tangles have preferred slopes in the interval $(0, 1)$. All the exceptions arising in Propositions 4.5.15–4.5.16 were preemptively ruled out by the last condition in the definition 4.3.6 of candidate links.

Proposition 4.5.15. *If $d = 4$ and $n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} = 2$, the block decomposition admits angle structures, unless all the trivial tangles have slope $1/2$.*

Proof. The quadruple (s, A, B, s') associated to a trivial tangle of slope $\frac{y}{x}$ is by definition $(\infty, 1, 0, \frac{y}{x})$: therefore, the key condition $a(s' \wedge B) + b(s' \wedge A) > \pi$ from Proposition 4.5.11 becomes

$$a(y) + b(x - y) > \pi . \tag{4.10}$$

Moreover, the denominator x of the slope $\frac{y}{x}$ of the trivial tangle is the integer $\infty \wedge \frac{y}{x} = s \wedge s'$. If at least one of these denominators is larger than 2, we can set a_i, b_i as in (4.9) above, and immediately obtain the girth condition (4.4) because $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (\varepsilon + \frac{\pi}{3}) < 2\pi$. If all denominators are 2, the link is not hyperbolic (Figure 4.3.8) and not candidate ; it belongs to the second family of exceptions of Theorem 4.1.5. \square

Proposition 4.5.16. *If $d = 3$ and $(n_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{B}}) = (2, 1)$, assume the trivial tangles have slopes $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_3}{x_3} \in (0, 1)$: the block decomposition admits angle structures, unless one has $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ and $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq 1$.*

Proof. Again, if $\sum \frac{1}{x_i} < 1$, we can set a_i, b_i as in (4.9) to obtain the girth condition (4.4). Thus, assume $\sum \frac{1}{x_i} \geq 1$ and (up to a permutation) $y_3 \geq 2$. This entails in particular that $x_3 \geq 3$.

We will set $(a_i, b_i) = (\pi - \alpha_i, \beta_i)$ for well-chosen *small* positive numbers α_i, β_i . As in (4.10) above, the key condition from Proposition 4.5.11 is still $a_i y_i + b_i(x_i - y_i) > \pi$. If $y_i > 1$, this condition is vacuous for small α_i, β_i . If $y_i = 1$, it can be written $(x_i - 1)\beta_i > \alpha_i$. Thus, the full set of conditions to be satisfied is :

- If $x_i = 2$ then $\alpha_i = \beta_i > 0$ (see Proposition 4.5.11) ;
- If $x_i > 2$ then $\alpha_i > \beta_i > 0$ (see Proposition 4.5.11) ;
- If $x_i > 2$ and $y_i = 1$ then $(x_i - 1)\beta_i > \alpha_i$ (see Proposition 4.5.11) ;
- For all $i \in \{1, 2, 3\}$, we have $\alpha_i > \beta_{i+1} + \beta_{i-1}$, taking indices modulo 3 (see Proposition 4.5.7).

(The first three conditions ensure the existence of angle structures for the trivial tangles ; the last one, for the solid torus).

If $x_1 = x_2 = x_3 = 3$, we take

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= (\varepsilon, \varepsilon, \mu\varepsilon) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= ((2 - \mu)\varepsilon, (2 - \mu)\varepsilon, M\varepsilon) \quad ; \end{aligned}$$

the conditions above are clearly satisfied if the positive parameters μ, M verify $\mu < \frac{1}{2}$ and $M > 2$. For example, $(\mu, M) = (\frac{1}{3}, 3)$.

Finally, if $x_1 = 2$, then $x_2 \geq 3$: otherwise, the 3-bracelet associated to the block \mathcal{P} would have been replaced by an augmented 1-bracelet in step v of the algorithm of Section 4.3 (so the link would not be strongly Montesinos). We thus set

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= ((1 + m)\varepsilon, \varepsilon, \mu\varepsilon) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= ((1 + m)\varepsilon, (x_2 - 1 - \mu)\varepsilon, M\varepsilon) \quad ; \end{aligned}$$

the conditions above are clearly satisfied if the positive parameters μ, m, M satisfy $\mu < m$ and $2\mu + m < 1$ and $M > 2 + m$. For instance, $(\mu, m, M) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3)$. \square

Thus, all candidate links are hyperbolic. We have proved Theorem 4.3.7, hence Theorem 4.1.5.

Chapitre 5

Les polynômes de Markoff sont totalement positifs

5.1 Introduction

Le *phénomène de Laurent* est la propriété qu’ont certaines suites de fractions rationnelles, définies par récurrence, de prendre obstinément pour valeurs des polynômes de Laurent. Fomin et Zelevinsky, qui ont baptisé le phénomène, ont expliqué sa surprenante ubiquité au moyen d’un petit lemme d’algèbre commutative, le “lemme de la chenille” [FZ]. En outre, dans les nombreux exemples qu’étudie leur article, ils notent qu’étonnamment les coefficients des polynômes obtenus semblent être tous positifs, et conjecturent qu’il en est bien ainsi en général. On ne parvient à le montrer que dans quelques cas simples, par exemple en donnant une interprétation combinatoire des coefficients (dans les exemples de Propp [Pr], les coefficients comptent une classe particulière de coloriage d’un certain graphe). Il est probable que de profonds résultats algébriques se cachent derrière la conjecture générale.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à un cas du phénomène de Laurent qui figure parmi les plus simples possibles — et se trouve inclus, en particulier, dans [Pr]. La seule nouveauté du résultat, outre sa méthode “pédestre”, est de révéler exactement quels monômes apparaissent dans le polynôme de Laurent. Rappelons le changement de cartes de Teichmüller

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^* \\ [a : b : c] &\mapsto \left[\frac{(a+b)^2}{c} : b : a \right] \end{aligned}$$

utilisé à la partie 3.7 pour exprimer le passage entre deux paramétrisations (par $\mathbb{P}^2\mathbb{R}_+^*$) de l’espace de Teichmüller \mathcal{T}_T du tore percé T , associées à deux triangulations de T séparées par un échange de diagonale. Le passage entre deux triangulations quelconques s’exprime par la composition $\hat{\psi}$ de fonctions ψ^n (où $n \in \mathbb{Z}$) et de permutations des coordonnées. Le théorème 5.1.1 ci-dessous affirme en substance que $\hat{\psi}$ est un polynôme de Laurent à coefficients positifs, et décrit quels sont les coefficients non nuls (ce qui fournit une généralisation de la proposition 3.7.6 à tous les changements de carte de \mathcal{T}_T). Signalons le long travail [FG] où sont également construites des cartes positives d’espaces de Teichmüller (généralisés) de surfaces de genre quelconque.

Applications de Markoff

Dans [Bo], Bowditch définit les applications de Markoff (*Markoff maps*), un outil élégant pour analyser le spectre des longueurs de l'ensemble \mathcal{C} des géodésiques simples fermées sur un tore percé $T \simeq (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ muni d'une métrique hyperbolique complète. Comme \mathcal{C} est naturellement en bijection avec $\mathbb{P}^1\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ par l'intermédiaire de la fonction *penne*

$$\sigma : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{Q},$$

Bowditch associe (bijectivement) à toute $c \in \mathcal{C}$ une région R_c du complémentaire d'un arbre infini trivalent \mathcal{T} proprement plongé dans le plan. Cet arbre \mathcal{T} est le dual de la triangulation de Farey du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 (voir la partie 5.2 pour les définitions) : plus précisément, R_c est la région du complémentaire de \mathcal{T} dont l'adhérence dans le disque $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ contient le point idéal $\sigma(c)$. Si \mathcal{R} est l'ensemble de toutes les régions R_c , l'application de Markoff

$$\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

associe à R_c la trace de n'importe quel élément de $SL_2(\mathbb{R})$ représentant c (on choisit une fois pour toutes un relevé à $SL_2(\mathbb{R})$ de la représentation d'holonomie $\pi_1(T) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$: c'est possible puisque $\pi_1(T)$ est libre). La définition de Φ se généralise aux représentations kleiniennes $\rho : \pi_1(T) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$, et Bowditch étudie en particulier la relation entre la quasi-fuchsianité de ρ et la propriété de Φ (ici, \mathcal{R} est muni de la topologie discrète). Les applications de Markoff fournissent aussi de nouvelles preuves, et des généralisations, de l'identité de McShane [Bo, AMS], et leurs curieuses propriétés analytiques n'ont pas encore été épuisées.

Bien entendu, une application de Markoff Φ est un objet fort redondant. Il suffit de connaître $\Phi(R_c)$ pour trois régions " R_c " deux à deux adjacentes pour reconstruire Φ entièrement. Par exemple, notons R_s la région $R_{\sigma^{-1}(s)}$ pour $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, et considérons

$$\Phi(R_0) = X \ ; \ \Phi(R_\infty) = Y \ ; \ \Phi(R_{-1}) = Z. \quad (5.1)$$

Alors, n'importe quel $\Phi(R_s)$ est donné par une formule explicite $f_s(X, Y, Z)$. En fait, il y a une relation algébrique non triviale entre les variables X, Y, Z , de sorte qu'un grand nombre de formules pour f_s coexistent. À la proposition 3.7.6, dans un contexte différent, nous avons été amené à rechercher une expression de f_s comme polynôme de Laurent de degré 1 en X, Y, Z :

$$f_s = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}} F_s(\alpha, \beta) \frac{X^{1+\alpha} Y^{1+\beta}}{Z^{1+\alpha+\beta}} \in \mathbb{Z}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}, Z^{\pm 1}]. \quad (5.2)$$

Dans la partie 5.2, nous montrons qu'une telle expression existe, pour tout $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, et que de plus l'entier $F_s(\alpha, \beta)$ est nul sauf si le couple (α, β) satisfait une condition de parité naturelle. Notre principal théorème est :

Théorème 5.1.1. *Le polynôme de Laurent f_s n'a que des coefficients positifs. De plus, tous les monômes dans le polygone de Newton de f_s qui satisfont à la condition de parité ont des coefficients non nuls.*

(Rappelons que le polygone de Newton d'un polynôme de Laurent $P = \sum a_{\nu_1 \dots \nu_n} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$ en n variables est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^n des points $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ pour lesquels $a_{\nu_1 \dots \nu_n} \neq 0$.) En

fait, nous décrirons complètement le polygone de Newton de f_s (voir (5.6) ci-après). Quelques exemples sont montrés sur la figure 5.4.1 page 146. Les nombres $f_s(1, 1, 1)$ sont les entiers de Markoff usuels rencontrés en théorie de l'approximation diophantienne [Ca].

La positivité des coefficients $F_s(\alpha, \beta)$ est déjà un énoncé non trivial même quand s est un rationnel assez simple de $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, par exemple un entier (ce cas était utilisé dans la partie 3.7, proposition 3.7.6, pour établir une certaine propriété de convergence dans l'espace de Teichmüller du tore percé).

5.2 Les fonctions f_s sont des polynômes de Laurent

Soient $T = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ le tore percé et $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ la projection naturelle. Notons \mathcal{C} l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples fermées dans T qui ne sont pas librement homotopes à un poit ou à un lacet autour du trou. Si p, q sont des entiers premiers entre eux et si ℓ est une droite de \mathbb{R}^2 de pente $s = q/p$ qui ne rencontre pas \mathbb{Z}^2 , alors $\pi(\ell)$ définit un élément c de \mathcal{C} (indépendant de ℓ). Nous appelons $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ la *pente* de c , et notons $\sigma(c) = s$. Il est bien connu que σ établit une bijection $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$. La courbe de pente s est notée c_s .

Considérons le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 muni de son bord naturel $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{P}^1\mathbb{R}$. Chaque fois que deux courbes $c, c' \in \mathcal{C}$ ont pour nombre d'intersection (minimal) 1, relient les rationnels $\sigma(c)$ et $\sigma(c')$ par une géodésique de \mathbb{H}^2 . Le résultat est la *triangulation de Farey* de \mathbb{H}^2 en une infinité de *triangles (idéaux) de Farey*. On sait que trois rationnels sont les sommets d'un triangle de Farey si et seulement s'ils s'écrivent

$$\left(\frac{q_0}{p_0}, \frac{q_0 + q_1}{p_0 + p_1}, \frac{q_1}{p_1} \right) \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix} = \pm 1$$

(par convention $\infty = \frac{\pm 1}{0}$). Géométriquement, la triangulation de Farey s'obtient à partir du triangle idéal $1\infty 0$, par réflexions itérées par rapport aux côtés 01 , 1∞ , et $\infty 0$.

Choisissons un point base $p \in T$. Soit τ l'opérateur trace sur $SL_2(\mathbb{R})$, et fixons une représentation $\rho : \pi_1(T, p) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ telle que si $\gamma \in \pi_1(T, p)$ appartient à la classe de conjugaison du lacet autour du trou, alors $\tau \circ \rho(\gamma) = -2$ (on dit que ρ respecte les paraboliques).

Proposition 5.2.1. *La trace τ induit une fonction, également notée τ , sur $\mathcal{C} \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$. Si s, s_0, s_1, s' sont des éléments de $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ tels que s_0s_1s et s_0s_1s' sont des triangles de Farey, alors $\tau(s)$ et $\tau(s')$ sont les racines du polynôme $X^2 - \tau(s_0)\tau(s_1)X + \tau(s_0)^2 + \tau(s_1)^2$.*

Démonstration. Définir τ sur \mathcal{C} est aisé, puisque chaque courbe de \mathcal{C} détermine une classe de conjugaison (ainsi que son inverse) dans l'image de ρ (et que tout élément de $SL_2(\mathbb{C})$ a la même trace que son inverse). Nous allons en outre omettre la bijection "pente" $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ et simplement considérer τ comme étant définie sur $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$.

Le groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$ agit naturellement sur le tore percé T en préservant la classe d'isotopie du lacet autour du trou. L'action induite sur \mathcal{C} coïncide (par l'intermédiaire de σ) avec l'action de Möbius sur $\mathbb{P}^1\mathbb{Q} \subset \partial\mathbb{H}^2$, laquelle s'étend en une action sur la triangulation de Farey de \mathbb{H}^2 qui est transitive sur l'ensemble de toutes les arêtes de Farey s_0s_1 .

Munissons les deux courbes $c_{s_0}, c_{s_1} \in \mathcal{C}$ d'orientations arbitraires et disposons c_{s_0} et c_{s_1} dans T de telle manière qu'elles ne se rencontrent qu'au point base $p \in T$. Alors c_{s_0}, c_{s_1} définissent des éléments g_{s_0}, g_{s_1} de $\pi_1(T, p)$.

Observation : $[g_{s_0}, g_{s_1}]$ détermine un lacet autour du trou, et a donc pour trace -2 . Les courbes c_s et $c_{s'}$ déterminent les classes de conjugaison de $g_{s_0}g_{s_1}$ et $g_{s_0}g_{s_1}^{-1}$ (pas forcément dans cet ordre : cela dépend des orientations choisies).

Cette observation se vérifie aisément quand $(s_0, s_1) = (0, \infty)$ (d'où $\{s, s'\} = \{1, -1\}$). Le cas général s'en déduit puisque les courbes de \mathcal{C} qui ont pour nombre d'intersection 1 avec c_{s_0} et (simultanément) c_{s_1} sont toujours exactement c_s et $c_{s'}$, et l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ (transitive sur les arêtes de Farey s_0s_1) préserve les nombres d'intersection et le lacet autour du trou.

Les "relations de traces" suivantes sont vérifiées par tous $a, b \in SL_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\tau(ab) + \tau(ab^{-1}) &= \tau(a)\tau(b) \\ \tau(ab)\tau(ab^{-1}) &= \tau^2(a) + \tau^2(b) - 2 - \tau([a, b]).\end{aligned}$$

En posant $a = g_{s_0}$, $b = g_{s_1}$, on obtient la proposition. □

En utilisant les notations précédentes, définissons maintenant $f_s := \tau(s)$. Le dual de la triangulation de Farey est un arbre trivalent infini dans \mathbb{H}^2 dont les composantes R_s du complémentaire sont en bijection avec les sommets de Farey $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$. L'application de Markoff Φ est donc définie par $\Phi(R_s) = f_s$. Par la proposition 5.2.1, les variables

$$(X, Y, Z) = (f_0, f_\infty, f_{-1})$$

de (5.1) satisfont à l'équation de Markoff

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ. \tag{5.3}$$

(Cette équation définit la variété des caractères, ou variété des représentations qui respectent les paraboliques [Bo].) De plus, la proposition 5.2.1 dit que si $(A, B, C, D) = (f_{s'}, f_{s_0}, f_{s_1}, f_s)$ et A, B, C sont connus (par exemple en fonction de X, Y, Z), alors on peut toujours retrouver D par l'une quelconque des formules

$$(i) \ D = BC - A \quad \text{ou} \quad (ii) \ D = (B^2 + C^2)/A. \tag{5.4}$$

En fait, ces relations nous permettent de définir f_s (et donc Φ) par récurrence pour tout $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, en fonction de X, Y, Z . Notons que si $(a, b, c, d) = (A^2, B^2, C^2, D^2)$, la seconde des deux formules (5.4) donne $d = \frac{(b+c)^2}{a}$: on reconnaît bien la formule (3.16).

Choix. Nous souhaitons faire de chaque $f_s = \Phi(R_s)$ un *polynôme de Laurent* de degré 1 en X, Y, Z . À cette fin, nous utilisons une version modifiée de la première de ces deux formules de récurrence :

$$f_s = f_{s_0}f_{s_1} \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{XYZ} - f_{s'} \tag{5.5}$$

où s, s_0, s_1, s' sont comme dans la proposition 5.2.1. La valeur de la fraction est bien sûr 1 sur la variété des caractères.

Par exemple, $f_1 = \frac{X^2+Y^2}{Z}$. Notons que (5.5) et (5.4–ii) définissent formellement les *mêmes* fonctions rationnelles f_s : en effet, les deux définitions coïncident (par construction) sur la variété des caractères définie par (5.3), et sont homogènes de degré 1 : or pour tout $(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^{*3}$, le point $\frac{X^2+Y^2+Z^2}{XYZ}(X, Y, Z)$ appartient à la variété des caractères.

Pour tout $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$, désignons par $[s]$ l'unique élément de $\{0, -1, \infty\}$ tel que s et $[s]$ se projettent sur le même point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En particulier, $f_{[s]}$ est toujours l'une des variables X, Y, Z .

Proposition 5.2.2. *Si f_s est défini par récurrence pour tout $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ au moyen de (5.5) (ou de (5.4-ii)), alors f_s est un polynôme de Laurent en X, Y, Z . De plus il existe une fonction à support fini $F_s : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que*

$$f_s = \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}} F_s(\alpha, \beta) \frac{X^{1+\alpha} Y^{1+\beta}}{Z^{1+\alpha+\beta}} \right) \in f_{[s]} \cdot \mathbb{Z} [X^{\pm 2}, Y^{\pm 2}, Z^{\pm 2}].$$

Démonstration. Par (5.5), et par récurrence, f_s est un polynôme de Laurent. L'affirmation concernant la parité des degrés est aussi (par récurrence) une conséquence de (5.5), car $\{f_{[s_0]}, f_{[s_1]}, f_{[s]}\} = \{X, Y, Z\} = \{f_{[s_0]}, f_{[s_1]}, f_{[s']}\}$ est toujours vrai quand s, s_0, s_1, s' sont comme dans la proposition 5.2.1. \square

Dans la partie 5.3 nous montrons le théorème 5.1.1 pour tous les rationnels $s > 0$. Les cas restants ($s < -1$ et $-1 < s < 0$) s'en déduisent par un argument de symétrie (voir la partie 5.4). La partie 5.5 expose une généralisation de notre opération de "modification" (5.5) sur les relations de récurrence (5.4), et une conjecture qui généraliserait le théorème 5.1.1. Les résultats et conjectures de la partie 5.5 se trouvent déjà, comme cas particuliers, dans [FZ].

5.3 Une famille de domaines et de fonctions

Définissons $\mathcal{Q} := \mathbb{Q}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Tout point s de \mathcal{Q} s'écrit de manière unique

$$s = \frac{q}{p} \quad \text{où } p, q \in \mathbb{N} \text{ sont premiers entre eux}$$

(par convention, $\infty = \frac{1}{0}$). Pour un tel $s \in \mathcal{Q}$, définissons

$$J_s := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} \alpha \equiv q; \beta \equiv p \pmod{2} \\ \alpha \geq -q; \beta \geq -p \\ \alpha + \beta \leq p + q - 2 \\ p\alpha + q\beta \geq 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (5.6)$$

Le support de F_s s'avérera être exactement J_s . Notons que $J_0 = \{(0, -1)\}$ et $J_\infty = \{(-1, 0)\}$ et $J_1 = \{(-1, 1); (1, -1)\}$. De plus, définissons

- $Z_s = (q, p) + 2\mathbb{Z}^2$ de sorte que $J_s \subset Z_s$;
- $P_i^s = (q + 2i, -p) \in Z_s$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$;
- $Q_j^s = (-q, p + 2j) \in Z_s$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$;
- $\varphi_s(\alpha, \beta) = p\alpha + q\beta$;
- $\Lambda = \{(0, 0); (0, 2); (2, 0)\}$;
- $n\Lambda = \Lambda + \dots + \Lambda = \{(2i, 2j) \in 2\mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- Si U est une partie de Z_s , alors $\langle U \rangle_s$ désigne l'intersection avec Z_s de l'enveloppe convexe de U dans \mathbb{R}^2 .

Dans tout l'article, nous utiliserons le symbole “+” pour désigner la somme ensembliste de deux parties d'un espace vectoriel.

Fait élémentaire 5.3.1. Toute partie finie d'un espace vectoriel contient les points extrémaux de son enveloppe convexe. Si A, B sont deux convexes compacts d'un espace vectoriel, tout point extrémal du convexe compact $A + B$ est somme d'un point extrémal de A et d'un point extrémal de B .

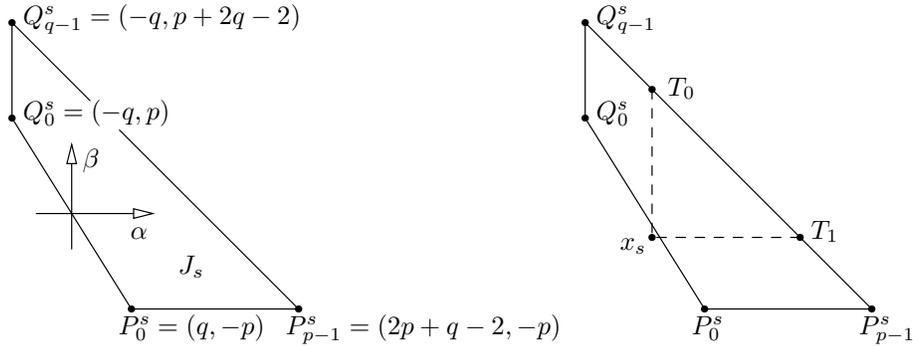


FIG. 5.3.1 – Le domaine J_s .

Lemme 5.3.2. Pour tout s dans \mathcal{Q} , on a $P_{p-1}^s, Q_{q-1}^s \in J_s$ et

$$J_s = \langle \{P_i^s \mid 0 \leq i < p\} \cup \{Q_j^s \mid 0 \leq j < q\} \rangle_s.$$

Démonstration. On vérifie les deux cas $s = 0, \infty$ séparément (l'une des familles $\{P_i^s\}, \{Q_j^s\}$ est alors vide, ce qui fait que la première affirmation ne découle pas directement de la seconde). Notons que P_0^s (resp. Q_0^s) appartient à J_s si et seulement si $s = \frac{q}{p} \neq \frac{1}{0}$ (resp. $\frac{q}{p} \neq \frac{0}{1}$). Supposons maintenant $p, q \geq 1$ et concentrons-nous sur la seconde affirmation. Notons que $P_{p-1}^s, P_0^s, Q_0^s, Q_{q-1}^s$ sont (dans cet ordre) les points extrémaux d'un quadrilatère convexe (ou d'un triangle, voire d'un segment, si $p = 1$ et/ou $q = 1$), comme dans la figure 5.3.1 (gauche). Les côtés de ce quadrilatère correspondent aux quatre inégalités qui définissent J_s , d'où le résultat. \square

Corollaire 5.3.3. Pour tout s dans \mathcal{Q} et tout n dans \mathbb{N} , on a

$$\begin{aligned} J_s + n\Lambda &= \langle \{P_i^s \mid 0 \leq i < p + n\} \cup \{Q_j^s \mid 0 \leq j < q + n\} \rangle_s \\ J_s + \Lambda &\supset [P_0^s + p\Lambda] \cup [Q_0^s + q\Lambda]. \end{aligned}$$

Démonstration. De nouveau, on vérifie les cas $s = 0, \infty$ séparément. Si $p, q \geq 1$, la première affirmation est une conséquence immédiate du lemme 5.3.2 (qui traite le cas $n = 0$), et la seconde se déduit de la première (dans laquelle on aura fixé $n = 1$) en observant que $P_0^s + p\Lambda$ et $Q_0^s + q\Lambda$ sont les enveloppes

convexes de points de $J_s + \Lambda$: par exemple,

$$\begin{aligned} P_0^s + p\Lambda &= \left\langle \left\{ P_0^s; P_p^s; (q, p) \right\} \right\rangle_s \\ &= \left\langle \left\{ P_0^s; P_p^s; \frac{qP_p^s + pQ_q^s}{q+p} \right\} \right\rangle_s. \end{aligned}$$

□

À présent, nous allons redéfinir les fonctions “coefficients” $F_s(\cdot, \cdot)$ de la proposition 5.2.2 d’un point de vue légèrement différent. Soit \mathcal{F} le \mathbb{Z} -module des fonctions $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ à support fini. On peut définir une loi de convolution sur \mathcal{F} en posant $F * G(u) = \sum_{x+y=u} F(x)G(y)$, de sorte que $\text{supp}(F * G) \subset \text{supp}(F) + \text{supp}(G)$. De plus, en notant $\mathbb{1}_U$ la fonction caractéristique d’un ensemble U , définissons les éléments suivants de \mathcal{F} :

$$F_s = \mathbb{1}_{J_s} \text{ pour } s \in \{0, 1, \infty\}.$$

On vérifie sans mal que l’égalité de la proposition 5.2.2 a lieu pour $s \in \{0, 1, \infty\}$. Enfin, pour $s \in \mathcal{Q} \setminus \{0, 1, \infty\}$, nous allons définir F_s par récurrence. Dans \mathbb{H}^2 muni de la triangulation de Farey, considérons la droite L_s qui joint à s le point $\sqrt{-1}$ de la droite 0∞ . Notons s_0, s_1 les extrémités de la première arête de Farey rencontrée par L_s (au plus près de s). Nous appelons s_0 et s_1 les *parents* de s . Quitte à échanger les indices, on peut supposer que s_1 admet pour parents s_0 et un autre point $s' \in \mathcal{Q}$ (par convention, les parents de 1 sont 0 et ∞). Voir la figure 5.3.2. En particulier, on a

$$\left. \begin{aligned} (p, q) &= (p_1, q_1) + (p_0, q_0) \\ (p', q') &= (p_1, q_1) - (p_0, q_0) \end{aligned} \right\} \text{ où } (s, s', s_0, s_1) = \left(\frac{q}{p}, \frac{q'}{p'}, \frac{q_0}{p_0}, \frac{q_1}{p_1} \right). \quad (5.7)$$

Définition 5.3.4. Pour toute configuration du type ci-dessus, on pose

$$F_s := (F_{s_0} * F_{s_1} * \mathbb{1}_\Lambda) - F_{s'} \quad \text{où } \Lambda = \{(0, 0); (0, 2); (2, 0)\}. \quad (5.8)$$

Comme le dual de la triangulation de Farey est un arbre (graphe sans cycles), cette définition n’est pas contradictoire. Par récurrence, F_s appartient à \mathcal{F} . On vérifie sans peine que (5.8) n’est qu’une reformulation de (5.5), de sorte que (5.8) coïncide avec notre première définition (prop. 5.2.2) de F_s . Les trois lemmes qui suivent (numérotés 5.3.5 – 5.3.6 – 5.3.7) ont pour but de montrer que F_s a pour support J_s et que $F_s(J_s) \subset \mathbb{Z}^{>0}$, pour tout $s \in \mathcal{Q}$. Le lecteur est invité à lire d’ores et déjà les trois énoncés (les trois démonstrations pourraient être rédigées sous la forme d’une unique récurrence sur s , portant sur la conjonction des trois énoncés).

Lemme 5.3.5. *Pour toute configuration du type ci-dessus où $s \in \mathcal{Q} \setminus \{0, 1, \infty\}$, l’ensemble $J_{s'} \setminus J_s$ est réduit à un unique point (extrémal) x_s de $J_{s'}$, et $J_{s_0} + J_{s_1} + \Lambda = J_s \sqcup \{x_s\}$.*

Remarque : si $s \in \mathcal{Q} \setminus \{0, \infty\}$, suivant le lemme 5.3.2, nous appelons “extrémaux” les points $P_0^s, P_{p-1}^s, Q_0^s, Q_{q-1}^s$ de J_s (cette liste peut comporter des répétitions). Si $s \in \{0, \infty\}$, alors J_s est réduit à un point (extrémal) $P_{p-1}^s = Q_{q-1}^s$.

Démonstration. Soit (α, β) un élément de $J_{s'}$. Par (5.7) on a $Z_{s'} = Z_s$ donc (α, β) satisfait aux conditions de congruence de (5.6). Toujours en vertu de (5.7), on a $p' \leq p$ et $q' \leq q$ donc les trois premières

inégalités de (5.6) sont aussi satisfaites en (α, β) . Pour la quatrième inégalité, considérons la forme linéaire $\varphi_s(\alpha, \beta) = p\alpha + q\beta$. Clairement, $\varphi_s(Z_s) \subset 2\mathbb{Z}$. De plus, observons que

$$\begin{aligned}\varphi_s(P_i^{s'}) &= pq' - qp' + 2ip \\ \varphi_s(Q_j^{s'}) &= qp' - pq' + 2jq \\ pq' - qp' &= 2(p_0q_1 - p_1q_0) = \pm 2 \quad (s_0, s_1 \text{ voisins dans le graphe de Farey}).\end{aligned}$$

Ainsi, si $p' = 0$ (resp. $q' = 0$), en prenant pour x_s l'unique point $Q_0^{s'}$ (resp. $P_0^{s'}$) de $J_{s'}$, on obtient $\varphi_s(x_s) = -2$. Si $p'q' > 0$, on trouve qu'exactly un point x_s parmi $\{P_0^{s'}, Q_0^{s'}\}$ satisfait $\varphi_s(x_s) = -2$ tandis que $\varphi_s(x) \geq 0$ pour tout autre point extrémal x de $J_{s'}$. Par conséquent, sur $J_{s'} \setminus \{x_s\}$ on a $\varphi_s > -2$ c'est-à-dire $\varphi_s \geq 0$. D'où la première affirmation.

Montrons à présent la seconde affirmation. Pour $(y'_0, y'_1, \lambda) \in J_{s_0} \times J_{s_1} \times \Lambda$, il est à nouveau immédiat de vérifier que $(\alpha, \beta) = y'_0 + y'_1 + \lambda$ satisfait aux conditions de congruence et aux trois premières inégalités de (5.6). Pour la quatrième, calculons

$$\begin{aligned}\varphi_s(P_i^{s_0}) &= p_1q_0 - p_0q_1 + 2ip & \varphi_s(P_i^{s_1}) &= p_0q_1 - p_1q_0 + 2ip \\ \varphi_s(Q_j^{s_0}) &= p_0q_1 - p_1q_0 + 2jq & \varphi_s(Q_j^{s_1}) &= p_1q_0 - p_0q_1 + 2jq.\end{aligned}$$

À nouveau, observons que $p_0q_1 - p_1q_0 = \pm 1$. Un argument semblable au précédent (portant cette fois sur les points extrémaux de J_{s_0}, J_{s_1} et non de $J_{s'}$) montre que φ_s prend la valeur -1 en exactement un point $y_0 \in \{P_0^{s_0}, Q_0^{s_0}\}$ (resp. $y_1 \in \{P_0^{s_1}, Q_0^{s_1}\}$) et que $\varphi_s \geq 1$ a lieu sur $J_{s_0} \setminus \{y_0\}$ (resp. $J_{s_1} \setminus \{y_1\}$). De plus, y_k appartient à J_{s_k} pour $k \in \{0, 1\}$ (c'est une conséquence immédiate du lemme 5.3.2, à moins que $p_kq_k = 0$, auquel cas la vérification est aisée). Le tableau suivant résume les deux cas possibles pour les points y_0, y_1, x_s .

	$p_0q_1 - p_1q_0$	y_0	y_1	x_s	
Cas 1	-1	$Q_0^{s_0}$	$P_0^{s_1}$	$P_0^{s'}$	(5.9)
Cas 2	1	$P_0^{s_0}$	$Q_0^{s_1}$	$Q_0^{s'}$	

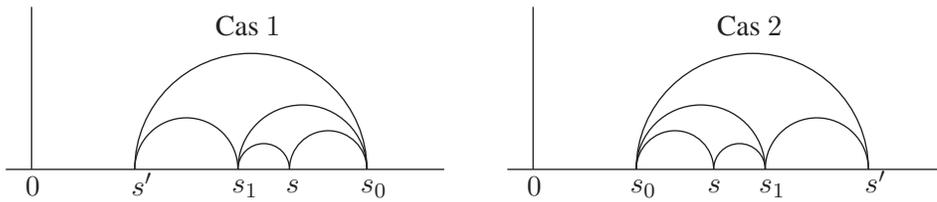


FIG. 5.3.2 – Deux cas de figure dans le diagramme de Farey.

En utilisant les relations (5.7) et la définition de P_i^s et de Q_j^s , on vérifie immédiatement que $y_0 + y_1 = x_s$ dans les deux cas. Comme φ_s est linéaire, on peut enfin en déduire que x_s est le seul point de $J_{s_0} + J_{s_1} + \Lambda$ en lequel $\varphi_s < 0$. Cela donne une inclusion de l'égalité à démontrer.

Pour l'inclusion réciproque, $J_s \sqcup \{x_s\} \subset J_{s_0} + J_{s_1} + \Lambda$, nous nous contenterons de traiter le cas 1 ci-dessus (le cas 2 est semblable). Par le tableau (5.9), comme $Q_0^{s_0}$ et $P_0^{s_1}$ appartiennent à J_{s_0} et J_{s_1} , on

a $q_0, p_1 > 0$. Au vu du corollaire 5.3.3, il suffit de montrer que

$$J_s \sqcup \{x_s\} \subset (J_{s_0} + P_0^{s_1} + p_1\Lambda) \cup (J_{s_1} + Q_0^{s_0} + q_0\Lambda). \quad (5.10)$$

Toujours en vertu du corollaire 5.3.3, comme $P_0^{s_1} + Z_{s_0} = Z_s$, on a

$$\begin{aligned} J_{s_0} + P_0^{s_1} + p_1\Lambda &= \left\langle P_0^{s_1} + \left(\{P_i^{s_0} \mid 0 \leq i < p_0 + p_1\} \cup \{Q_j^{s_0} \mid 0 \leq j < q_0 + p_1\} \right) \right\rangle_s \\ &= \left\langle \{P_i^s \mid 0 \leq i < p\} \cup \{Q_0^{s_0} + P_0^{s_1}, Q_{q_0+p_1-1}^{s_0} + P_0^{s_1}\} \right\rangle_s \\ &= \left\langle \{P_i^s \mid 0 \leq i < p\} \cup \{x_s, T_0\} \right\rangle_s \\ \text{où } T_0 &= (q - 2q_0, p + 2(q_0 - 1)). \end{aligned}$$

(Pour écrire la seconde ligne, on a remplacé la liste des $Q_j^{s_0}$ par ses termes extrémaux : cela est justifié parce que $q_0 + p_1 > 0$). De même, pour l'autre terme du membre de droite de 5.10, on a

$$\begin{aligned} J_{s_1} + Q_0^{s_0} + q_0\Lambda &= \left\langle \{Q_j^s \mid 0 \leq j < q\} \cup \{x_s, T_1\} \right\rangle_s \\ \text{où } T_1 &= (q + 2(p_1 - 1), p - 2p_1). \end{aligned}$$

D'après les deux calculs ci-dessus, les P_i^s et Q_j^s qui selon le lemme 5.3.2 définissent J_s (figure 5.3.1, à droite) appartiennent tous à $J_{s_0} + J_{s_1} + \Lambda$. Notons en outre que T_0 (resp. T_1) possède la même abscisse (resp. ordonnée) que $x_s = (q', -p')$. Par conséquent, les points $Q_{q-1}^s, T_0, T_1, P_{p-1}^s$ apparaissent dans cet ordre sur le côté $E = Q_{q-1}^s P_{p-1}^s$ de J_s . Enfin, le côté $P_0^s Q_0^s$ de J_s (défini par " $\varphi_s = 0$ ") sépare x_s de E : l'union des enveloppes convexes de $\{P_0^s, P_{p-1}^s, x_s, T_0\}$ et de $\{Q_0^s, Q_{q-1}^s, x_s, T_1\}$ contient donc celle de $\{P_0^s, P_{p-1}^s, Q_0^s, Q_{q-1}^s\}$ (figure 5.3.1, à droite). On a donc bien (5.10). \square

Lemme 5.3.6. *Pour tout $s \in \mathcal{Q}$, la fonction F_s a pour support une partie de J_s , et si c est un point extrémal de J_s , alors $F_s(c) = 1$.*

Démonstration. Nous montrons les deux affirmations par récurrence simultanée. Elles sont vraies pour $s \in \{0, 1, \infty\}$; admettons-les donc pour s_0, s_1, s' et montrons-les pour s . Par (5.8), F_s a pour support une partie de $(J_{s_0} + J_{s_1} + \Lambda) \cup J_{s'} = J_s \cup \{x_s\}$, où x_s est défini comme au lemme 5.3.5. Rappelons la forme linéaire φ_s de la démonstration du lemme 5.3.5 : sur $J_{s_0}, J_{s_1}, \Lambda$, la forme φ_s atteint ses minima respectifs uniquement aux points extrémaux $y_0, y_1, 0$; par conséquent x_s est réalisé dans $J_{s_0} + J_{s_1} + \Lambda$ uniquement comme la somme $y_0 + y_1 + (0, 0)$. De là, par récurrence, $F_{s_0} * F_{s_1} * \mathbb{1}_\Lambda(x_s) = 1$. Mais x_s est aussi un point extrémal de $J_{s'}$, donc (5.8) donne $F_{s'}(x_s) = 0$: la fonction F_s a pour support une partie de J_s .

À présent, observons que le point extrémal P_{p-1}^s de J_s maximise la première coordonnée (une affirmation analogue vaut pour $J_{s_0}, J_{s_1}, J_{s'}$). Comme $P_{p-1}^s = P_{p_0-1}^{s_0} + P_{p_1-1}^{s_1} + (2, 0)$, on a par récurrence $F_{s_0} * F_{s_1} * \mathbb{1}_\Lambda(P_{p-1}^s) = 1$. De plus, P_{p-1}^s n'appartient pas à $J_{s'}$, parce que tout (α, β) de $J_{s'}$ satisfait $\alpha + \beta \leq p' + q' - 2 < p + q - 2$. Par (5.8), on trouve $F_{s'}(P_{p-1}^s) = 1$. De même, $F_{s'}(Q_{q-1}^s) = 1$. Considérons l'un des points extrémaux restants de J_s (il en reste au plus deux), par exemple P_0^s . Sans perte de généralité, on a $p \geq 2$ (autrement, le point aurait déjà été traité en tant que P_{p-1}^s). On ne saurait avoir $\{p_0, p_1\} = \{0, p\}$ à moins que $|p_0 q_1 - p_1 q_0| \geq p > 1$ (rappelons que s_0, s_1 sont voisins dans le graphe de Farey). Par conséquent $p_0, p_1 \geq 1$. Notons que les points $P_0^s, P_0^{s_0}, P_0^{s_1}$ sont les minimisateurs respectifs sur J_s, J_{s_0}, J_{s_1} de la forme $(\alpha, \beta) \mapsto \beta + \varepsilon\alpha$, où ε est très petit. Comme

$P_0^s = P_0^{s_0} + P_0^{s_1} + (0, 0)$, on trouve $F_{s_0} * F_{s_1} * \mathbb{1}_\Lambda(P_0^s) = 1$. Enfin, P_0^s ne peut pas appartenir à $J_{s'}$ à cause de sa seconde coordonnée, $-p < -p'$. Par (5.8), on en déduit $F_s(P_0^s) = 1$. De même, $F_s(Q_0^s) = 1$. \square

Lemme 5.3.7. *Pour tout $s \in \mathcal{Q}$, on a $F_s(J_s) \subset \mathbb{Z}^{>0}$. Si $s \notin \{0, \infty\}$ alors*

$$\mathbb{1}_{J_s} \cdot \sup \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s_1} & , \quad \mathbb{1}_{\{P_0^{s_1}\}} * F_{s_0} & , \\ \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} * F_{s_1} & , \quad \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_1}\}} * F_{s_0} & \end{array} \right\} \leq F_s .$$

Remarque 5.3.8. Par le corollaire 5.3.3 et le lemme 5.3.5, chaque fonction à l'intérieur des accolades a pour support une partie de $J_s \sqcup \{x_s\}$ (puisque, par exemple, $P_0^{s_0} \in J_{s_0} + \Lambda$). En d'autres termes, on peut remplacer $\mathbb{1}_{J_s}$ par $\mathbb{1}_{J_s \setminus \{x_s\}}$ sans changer la force de l'énoncé.

Démonstration. À nouveau, les deux affirmations se démontrent par récurrence simultanée. Elles valent pour $s \in \{0, 1, \infty\}$; supposons-les pour s_0, s_1, s' , et montrons-les pour s . Rappelons la convention prise : les parents de s_1 sont s_0 et s' (donc en particulier, $s_1 \neq 0, \infty$). On a vu en démontrant le lemme 5.3.5 que x_s est ou bien $P_0^{s_0} + Q_0^{s_1} = Q_0^{s'}$ ou bien $Q_0^{s_0} + P_0^{s_1} = P_0^{s'}$. De même, x_{s_1} est ou bien $P_0^{s_0} + Q_0^{s'}$ ou bien $Q_0^{s_0} + P_0^{s'}$. En fait, en utilisant (5.7) et la caractérisation générique $\varphi_\sigma(x_\sigma) = -2$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} x_{s_1} = P_0^{s_0} + Q_0^{s'} &\iff q_0 p' - p_0 q' = -1 \iff x_s = Q_0^{s'} ; \\ x_{s_1} = Q_0^{s_0} + P_0^{s'} &\iff p_0 q' - q_0 p' = -1 \iff x_s = P_0^{s'} . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Définissons, en général, $G_s = F_s * \mathbb{1}_\Lambda$. Le lemme 5.3.6 implique immédiatement $G_\sigma(P_0^\sigma) = G_\sigma(Q_0^\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{Q}$ (à nouveau, il faut vérifier cela séparément pour $\sigma = 0, \infty$). En vertu du lemme 5.3.5 et de l'hypothèse de récurrence, on a $F_{s_0} * F_{s_1} * \mathbb{1}_\Lambda > 0$ sur J_s . De plus, par (5.8),

$$\begin{aligned} F_s + F_{s'} &= F_{s_0} * F_{s_1} * \mathbb{1}_\Lambda \\ &= \sum_{\lambda \in (J_{s_0} + \Lambda)} G_{s_0}(\lambda) \cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\}} * F_{s_1} \\ &= \left[\left(\mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} + \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} \right) * F_{s_1} \right] + \sum_{\substack{\lambda \in (J_{s_0} + \Lambda) \\ \lambda \neq P_0^{s_0}, Q_0^{s_0}}} G_{s_0}(\lambda) \cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\}} * F_{s_1} . \end{aligned}$$

Ainsi, si nous parvenons à montrer

$$\mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s_1}(x) \geq F_{s'}(x) ; \quad \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} * F_{s_1}(x) \geq F_{s'}(x) \quad \text{pour tout } x \neq x_s , \quad (5.12)$$

alors nous aurons d'une part $F_s > 0$ sur J_s (en effet, $(F_s + F_{s'})(J_s) \subset \mathbb{Z}^{>0}$ par le lemme 5.3.5, et $F_s + F_{s'} \geq 2F_{s'} > 0$ sur $J_{s'} \setminus \{x_s\}$), et d'autre part $F_s \geq \sup \left\{ \mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s_1}, \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} * F_{s_1} \right\}$ sur J_s . Ce serait déjà la moitié du lemme 5.3.7.

En utilisant la relation $P_0^{s_0} = -Q_0^{s_0}$ et les égalités $\mathbb{1}_{\{\xi\}} * \mathbb{1}_{\{\eta\}} = \mathbb{1}_{\{\xi+\eta\}}$ et $\mathbb{1}_{\{\xi\}} * f(x + \xi) = f(x)$, l'équation (5.12) équivaut à

$$F_{s_1}(y) \geq \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} * F_{s'}(y) \quad \text{si } y \neq x_s + Q_0^{s_0} \quad (5.13)$$

$$F_{s_1}(y) \geq \mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s'}(y) \quad \text{si } y \neq x_s + P_0^{s_0} . \quad (5.14)$$

Pour $y \neq x_{s_1}$, ces deux inégalités sont déjà vraies par récurrence (s_0, s' sont les parents de s_1). Pour $y = x_{s_1}$, au vu de (5.11), il y a deux cas possibles :

- Si $x_s = P_0^{s'}$ alors $x_{s_1} = x_s + Q_0^{s_0}$ donc (5.13) est vraie, et (5.14) n'a plus qu'à être vérifiée en $y = x_{s_1}$. On a $F_{s_1}(x_{s_1}) = 0$ et

$$\mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s'}(x_{s_1}) = F_{s'}(x_{s_1} - P_0^{s_0}) = F_{s'}(P_0^{s'} + 2Q_0^{s_0}).$$

Toutefois, (5.7) donne $\varphi_{s'}(P_0^{s'} + 2Q_0^{s_0}) = 2(p_0q' - q_0p') = -2$; par conséquent, le point $(P_0^{s'} + 2Q_0^{s_0})$ n'appartient pas à $J_{s'}$ et $\mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s'}(x_{s_1}) = 0$.

- De même, si $x_s = Q_0^{s'}$ alors (5.14) est vrai, et pour (5.13) on n'a plus qu'à vérifier $\mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} * F_{s'}(x_{s_1}) = F_{s'}(Q_0^{s'} + 2P_0^{s_0}) = 0$ parce que $\varphi_{s'}(Q_0^{s'} + 2P_0^{s_0}) = -2 < 0$.

Il reste à montrer que $F_s \geq \sup \left\{ \mathbb{1}_{\{P_0^{s_1}\}} * F_{s_0}, \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_1}\}} * F_{s_0} \right\}$ sur J_s . Par les minoration de F_s qu'on vient d'établir, il suffit de s'assurer que

$$\mathbb{1}_{\{P_0^{s_1}\}} * F_{s_0} \leq \mathbb{1}_{\{P_0^{s_0}\}} * F_{s_1} \quad ; \quad \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_1}\}} * F_{s_0} \leq \mathbb{1}_{\{Q_0^{s_0}\}} * F_{s_1} \quad \text{sur } Z_s \setminus \{x_s\}. \quad (5.15)$$

Concentrons notre attention sur la première inégalité (la seconde se traite de même). Elle équivaut, par la même méthode que précédemment, à :

$$\mathbb{1}_{\{P_0^{s_1}\}} * F_{s_0}(y) \leq F_{s_1}(y) \quad \text{si } y \neq x_s + Q_0^{s_0}$$

(on a utilisé $P_0^{s_1} = P_0^{s_0} + Q_0^{s_0}$, une conséquence de (5.7)). Mais cette inégalité est vraie (par récurrence) du moment que $y \neq x_{s_1}$. À nouveau, au vu de (5.11), il reste deux cas possibles au point $y = x_{s_1}$:

- Si $x_s = P_0^{s'}$ alors $x_{s_1} = x_s + Q_0^{s_0}$ et il n'y a rien à montrer ;
- Si $x_s = Q_0^{s'}$, il suffit de montrer l'inégalité ci-dessus en $y = x_{s_1}$. D'une part, $F_{s_1}(x_{s_1}) = 0$; d'autre part,

$$\mathbb{1}_{\{P_0^{s_1}\}} * F_{s_0}(x_{s_1}) = F_{s_0}(x_{s_1} - P_0^{s'}) = F_{s_0}(P_0^{s_0} + 2Q_0^{s'})$$

mais, par (5.7), $\varphi_{s_0}(P_0^{s_0} + 2Q_0^{s'}) = 2(q_0p' - p_0q') = -2 < 0$ donc le point $(P_0^{s_0} + 2Q_0^{s'})$ n'appartient pas à J_{s_0} et $\mathbb{1}_{\{P_0^{s_1}\}} * F_{s_0}(x_{s_1}) = 0$.

Le théorème 5.1.1 est démontré pour tout $s \in \mathcal{Q}$. □

5.4 L'application de Markoff formelle

La figure 5.4.1 montre le domaine J_s et les valeurs de la fonction F_s pour quelques-uns des rationnels $s \in \mathcal{Q}$ les plus simples. On a disposé les domaines J_s dans les régions R_s du complémentaire d'un arbre planaire trivalent. Dans chaque cas, les points x du réseau affine Z_s ont été identifiés (par une transformation affine) aux cellules hexagonales d'un nid d'abeilles, décorées avec les nombres $F_s(x)$. Les cellules vides contiennent l'entier 0, par convention. Les coordonnées ont été pivotées de telle sorte que le côté $P_0^s Q_0^s$ du quadrilatère J_s est toujours le côté supérieur, plutôt que le côté inférieur gauche comme dans la figure 5.3.1. Après pivotement, le côté gauche de J_s est constitué de p cellules (les P_i^s); le côté droit, de q cellules (les Q_j^s). Les cellules solitaires, marquées 1, situées au dessous à gauche et au dessous à droite de la "racine" de l'arbre (gros point sombre) correspondent aux cas exceptionnels $s = 0$ et $s = \infty$. La cellule solitaire au dessus de la racine correspond à $s = -1$; nous allons bientôt souligner

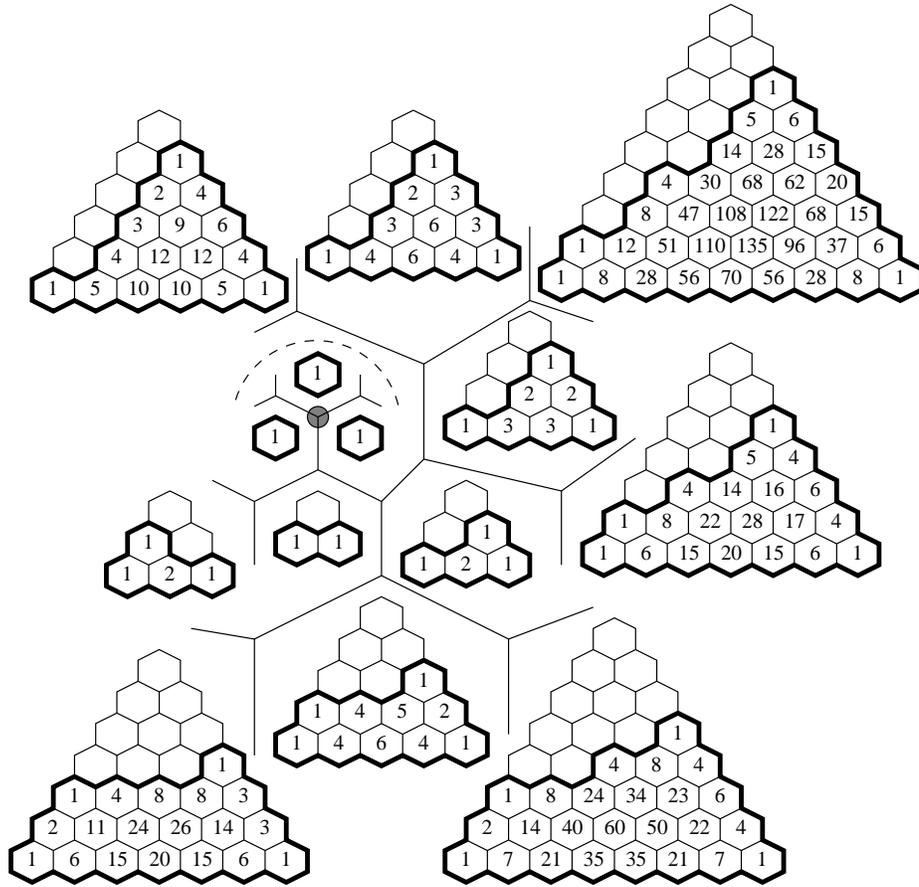


FIG. 5.4.1 – L’application de Markoff universelle (formelle). La somme des entiers $F_s(\cdot, \cdot)$ dans chaque “sac” est un nombre de Markoff.

à nouveau le sens de cette convention (déjà évoquée dans l’introduction du chapitre). Notons les 1 situés aux coins de chaque J_s , tout comme dans le lemme 5.3.6. Il est facile de montrer par récurrence (exercice laissé au lecteur) que les côtés inférieur, droit, et gauche de chaque J_s contiennent toujours des lignes du triangle de Pascal : si $v = (2, -2)$ alors

$$F_s(P_i^s) = \binom{p-1}{i}; F_s(Q_j^s) = \binom{q-1}{j}; F_s(Q_{q-1}^s + kv) = \binom{p+q-1}{k}.$$

Notons la disposition des différents J_s dans le complémentaire U d’un arbre planaire trivalent : cet arbre doit être vu comme le dual de la triangulation de Farey de \mathbb{H}^2 , de sorte que chaque composante connexe R_s de U correspond à une horoboule centrée au point rationnel s . Chaque configuration s, s_0, s_1, s' (du type étudié à la section précédente) correspond en fait à un couple de composantes R_{s_0}, R_{s_1} contiguës de U (partageant une arête), avec leurs deux voisines communes $R_s, R_{s'}$. Comme la formule (5.8) est symétrique en s, s' , on peut l’appliquer à rebours afin de définir F_s pour tout s de $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ (et pas seulement de \mathbb{Q}). On a (très) partiellement fait cela sur la figure 5.4.1 en montrant $J_{-1} = \{(-1, -1)\}$ juste au dessus de la racine. Toutefois, le dessin complet présenterait une symétrie

diédrale d'ordre 6 autour de la racine (cette symétrie correspond aux permutations des variables X, Y, Z de (5.1)), et on a donc choisi de n'explorer qu'un sixième de l'arbre sur la figure 5.4.1. Cette symétrie d'ordre 6 est aussi la raison pour laquelle on a préféré des nids d'abeilles à une autre forme géométrique (carrée par exemple) pour les cellules des domaines J_s . À titre d'exercice, le lecteur peut s'amuser à prouver par récurrence sur l'arbre, en utilisant (5.7), les formules suivantes (vraies pour tout $s \in \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$) qui expriment deux involutions engendrant le groupe de symétrie isomorphe à S_3 :

$$F_{\frac{1}{s}}(\alpha, \beta) = F_s(\beta, \alpha) \ ; \ F_{-1-s}(\alpha, \beta) = F_s(-2 - \alpha - \beta, \beta)$$

(La transformation de Möbius agissant sur l'indice s permute les rationnels $-1, 0, \infty$ tandis que les transformations affines agissant sur l'argument (α, β) permutent les singletons associés J_{-1}, J_0, J_∞ , ainsi que les points de $-\Lambda$).

5.5 Généralisation conjecturale

Le polynôme de Markoff $M = X^2 + Y^2 + Z^2 - XYZ$ rencontré à la partie 5.2 est de degré 2 en chaque variable. C'est pour cette raison que toute solution (X, Y, Z) de l'équation $M = 0$ en définit beaucoup d'autres : en regardant M comme un polynôme de degré 2 en, mettons, la variable X , on peut toujours remplacer X par la racine conjuguée. Ainsi, le produit libre G de trois copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit naturellement sur la variété $M = 0$ par isomorphismes. Une propriété analogue est encore vraie si nous remplaçons M par *n'importe quel* polynôme de degré 2 en chacune de ses variables (en autorisant des monômes tels que X^2Y^2ZT), et que nous admettions des actions par isomorphismes birationnels.

Dans cette partie, nous conjecturons une généralisation du théorème 5.1.1 à tous les polynômes M en N variables qui sont *unitaires de degré 2* en chaque variable. Plus exactement, nous montrons que certaines expressions pour l'action de G sont des polynômes de Laurent (comme dans la proposition 5.2.2), et conjecturons que les coefficients sont positifs (on trouvera dans [FZ] une conjecture plus générale). Les coefficients de M seront eux-mêmes regardés comme des variables (ci-dessous notées A_I). Nous nous plaçons sur le corps complexe \mathbb{C} .

Soit $N \geq 2$ un entier, et notons $\llbracket N \rrbracket$ l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, N\}$. Pour tout $I \subset \llbracket N \rrbracket$, fixons un paramètre formel A_I : soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos qui contient \mathbb{C} et les A_I . Considérons l'équation de type Markoff en N variables X_1, \dots, X_N sur \mathbb{K} :

$$\sum_{i=1}^N X_i^2 + \sum_{I \subset \llbracket N \rrbracket} A_I \prod_{i \in I} X_i = 0 \ . \quad (5.16)$$

Soit $V \subset \mathbb{K}^N$ le sous-ensemble algébrique affine défini par (5.16). Pour tout $k \in \llbracket N \rrbracket$ et tout point (x_1, \dots, x_N) de $V \cap \mathbb{K}^{*N}$, définissons

$$E_k(x_1, \dots, x_N) := (x_1, \dots, x_{k-1}, \overline{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_N)$$

où $\overline{x}_k = \left(\sum_{i \neq k} x_i^2 + \sum_{I \subset \llbracket N \rrbracket \setminus \{k\}} A_I \prod_{i \in I} x_i \right) / x_k \ . \quad (5.17)$

Alors E_k définit une action birationnelle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur V : en effet, $\overline{x_k}x_k$ est le produit des racines de (5.16), vu comme polynôme de degré 2 en la k -ème variable. En faisant décrire $\llbracket N \rrbracket$ par k , nous obtenons une action birationnelle sur V par le produit libre G de N copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Notons que la variable $A_{\llbracket N \rrbracket}$ est absente de la définition (5.17) de chaque générateur E_k : par conséquent, G agit sur chaque “variété de niveau” de \mathbb{K}^N définie par

$$B(x_1, \dots, x_N) := \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket} A_I \prod_{i \in I} x_i \right) / \prod_{i=1}^N x_i = \text{constante} \quad (5.18)$$

(en effet, $B(x_1, \dots, x_N)$ n’est autre que la valeur de $A_{\llbracket N \rrbracket}$ pour laquelle un point donné (x_1, \dots, x_N) satisfait (5.16), lorsque tous les $\{A_I\}_{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket}$ sont donnés). En particulier, $B(x_1, \dots, x_N)$ est invariant sous l’action de E_k sur \mathbb{K}^N : par conséquent, l’expression donnée en (5.17) pour E_k s’étend en une involution birationnelle de \mathbb{K}^N qui respecte B . Dorénavant, nous considérons G comme agissant sur \mathbb{K}^N par isomorphismes birationnels.

Proposition 5.5.1. *Pour tout g dans G et tout $x = (x_1, \dots, x_N)$ dans \mathbb{K}^N , les coordonnées de $g \cdot x$ sont des polynômes en les variables $\{x_i^{\pm 1}\}_{i \in \llbracket N \rrbracket}$ et $\{A_I\}_{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket}$ à coefficients dans \mathbb{Z} dépendant seulement de g .*

Remarque 5.5.2. Nous conjecturons que ces coefficients entiers sont positifs. Le théorème 5.1.1 correspond au cas $N = 3$ sous la spécialisation $A_I \equiv 0$: par exemple, $E_1(x, y, z) = (\frac{y^2+z^2}{x}, y, z)$.

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur G , en utilisant les générateurs E_k . Si g est l’identité de G , il n’y a rien à montrer. Supposons la proposition vraie pour g , de sorte que $g \cdot (x_1, \dots, x_N) = (y_1, \dots, y_N)$ où chaque y_j est un polynôme en les $\{x_i^{\pm 1}\}_{i \in \llbracket N \rrbracket}$ et les $\{A_I\}_{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket}$, à coefficients entiers. Il s’agit de montrer que les coordonnées de

$$E_k(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, \overline{y_k}, \dots, y_N)$$

sont également des polynômes, où $\overline{y_k}$ est donné comme en (5.17). Nous avons dit que le membre de gauche $B(x_1, \dots, x_N)$ de (5.18) est (formellement) E_k -invariant pour chaque $k \in \llbracket N \rrbracket$; par conséquent on a nécessairement $B(x_1, \dots, x_N) = B(y_1, \dots, y_N)$. En utilisant (5.17), notons que

$$\begin{aligned} \overline{y_k} &= \left(\sum_{i \neq k} y_i^2 + \sum_{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket \setminus \{k\}} A_I \prod_{i \in I} y_i \right) / y_k \\ &= \left(\left(B(y_1, \dots, y_N) \prod_{i=1}^N y_i \right) - y_k^2 - \sum_{\substack{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket \\ k \in I}} A_I \prod_{i \in I} y_i \right) / y_k \\ &= B(x_1, \dots, x_N) \left(\prod_{i \in \llbracket N \rrbracket \setminus \{k\}} y_i \right) - y_k - \sum_{\substack{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket \\ k \in I}} A_I \prod_{i \in I \setminus \{k\}} y_i . \end{aligned}$$

En insérant la formule (5.18) pour $B(x_1, \dots, x_N)$, cette dernière expression est clairement un polynôme

en les variables $\{x_i^{\pm 1}\}_{i \in \llbracket N \rrbracket}$ et $\{A_I\}_{I \subsetneq \llbracket N \rrbracket}$ à coefficients entiers. C'est là un analogue direct de (5.5). \square

Bibliographie

- [AB] Lars Ahlfors et Lipman Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. **72** (1960), 385–404.
- [Ag] Ian Agol, *communication personnelle*.
- [AH] Pekka Alestalo, Heinz Helling, *On torus fibrations over the circle*, Sonderforschungsbereich SFB-343, preprint 97-005, Bielefeld.
- [Ak] Hirotaka Akiyoshi, *On the Ford domains of once-punctured torus groups*, dans *Hyperbolic spaces and related topics*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku **1104** (1999), 109–121.
- [AMS] H. Akiyoshi, H. Miyachi, M. Sakuma, *A refinement of McShane's identity for quasifuchsian punctured torus groups*, Proceedings of the 2002 Ahlfors–Bers Colloquium III, Contemp. Math. A.M.S. **355** (2004), 21–40.
- [An] E.M. Andreev, *On convex polyhedra of finite volume in Lobačevskii space*, Math. USSR-Sb. **12**–2 (1970), 255–259 [Mat. Sbornik 83 (1970), 256–260].
- [AS] Hirotaka Akiyoshi, Makoto Sakuma, *Comparing two convex hull constructions of cusped hyperbolic manifolds*, Comptes-rendus de la conférence “Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds” (Warwick 2002), Lond. Math. Soc. Lecture Notes **299** (2003), 209–246.
- [ASWY1] Hirotaka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada, Yasushi Yamashita, *Ford domains of punctured torus groups and two-bridge knot groups*, dans *Knot Theory*, Comptes-rendus de la conférence organisée à Toronto pour le 70ème anniversaire du Pr. K. Murasugi, 1999.
- [ASWY2] Hirotaka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada, Yasushi Yamashita, *Jorgensen's picture of punctured torus groups and its refinement*, dans *Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds*, Y. Komori, V. Markovic, C. Series (Ed.), Lond. Math. Soc. Lecture Notes, **299**, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [ASWY3] Hirotaka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada, Yasushi Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups*, prépublication.
- [B1] Francis Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. of Math. **124** (1986), 71–158.
- [B2] Francis Bonahon, *Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **5** (1996), 233–297.
- [BCG] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996), 623–649.

- [BCM] Jeffrey Brock, Richard Canary, Yair Minsky, *The classification of Kleinian surface groups II : the ending lamination conjecture*, arXiv :math.GT/0412006 (2004).
- [BO] Francis Bonahon, Jean-Pierre Otal, *Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. of Math. **160** (2004), 1013–1055.
- [Bo] Brian H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **77** no. 3 (1998), 697–736.
- [Br] Martin Bridgeman, *Average bending of convex pleated planes in hyperbolic three-space*, Invent. Math. **132**, no. 3 (1998), 381–391.
- [BS] Francis Bonahon, Laurent Siebenmann, *Geometric splittings of knots, and Conway’s algebraic knots*, monographie inachevée, 1979–85.
- [Ca] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, chapitre II, Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
- [CEG] R. D. Canary, D.B.A. Epstein, R. Green, *Notes on notes of Thurston*, dans *Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space* (Epstein, éditeur), Lond. Math. Soc. Lecture notes **111**, Cambridge University Press, 1987.
- [CH] Ken Chan, *Constructing hyperbolic 3-manifolds*, mémoire de master sous la direction de Craig Hodgson, Université de Melbourne, 2002.
- [Col] Yves Colin de Verdière, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*, Inventiones Math. **104** (1991) 655–669.
- [Con] John H. Conway, *An Enumeration of Knots and Links, and Some of Their Algebraic Properties* (1967), dans *Computation Problems in Abstract Algebra* (J. Leech, éditeur), Pergamon Press, Oxford, pp. 329–358.
- [EP] David B.A. Epstein, Robert C. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Diff. Geom. **27** (1988), 67–80.
- [FG] Vladimir V. Fock, Alexander B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, arXiv :math.AG/0311149
- [FH] , William Floyd, Allen Hatcher, *Incompressible surfaces in punctured–torus bundles*, Topology Appl. **13** (1982), no 3, 263–282.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67** (SMF), 1979.
- [FZ] Sergey Fomin, Andrei Zelevinsky, *The Laurent phenomenon*, Adv. Applied Math. **28** (2002), no. 2, 119–144 ; également disponible sur arXiv :math.CO/0104241.
- [Ga] David Gabai, *Genera of the arborescent links*, Memoirs of the AMS **59** (1986), no 339, i–viii et 1–98.
- [GF] François Guéritaud, avec un appendice par David Futer, *On canonical triangulations of once–punctured torus bundles and two-bridge link complements*, Geometry & Topology **10** (2006), 1239–1284.
- [Gr] Michael Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Publ. math. IHÉS **56** (1982), 5–99.
- [Gu] François Guéritaud, *Triangulated cores of punctured-torus groups*, arXiv :math.GT/0605481, 2006.

- [Ha] Wolfgang Haken, *Theorie der Normalflächen*, Acta Math. **105** (1961), 245–375.
- [He] Heinz Helling, *The trace fields of a series of hyperbolic manifolds*, SFB-343, Preprint 99-072, Bielefeld.
- [Jø] Troels Jørgensen, *On pairs of punctured tori* (manuscrit inachevé), dans *Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds* (Y. Komori, V. Markovic, C. Series, éditeurs), Lond. Math. Soc. Lecture notes **299** (2003), 183–207.
- [KH] Anatole Katok, Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **54**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Ko] Tino Koch, *Fordsche Fundamentalbereiche hyperbolischer einfach-punktierter Torus-Bündel*, SFB-343, Preprint 99-009, Bielefeld.
- [KS] Linda Keen, Caroline Series, *Continuity of convex hull boundaries*, Pacific J. Math. **168**, no. 1 (1995), 183–206.
- [L1] Marc Lackenby, *Word hyperbolic Dehn surgery*, Invent. Math. **140** (2000), 243–282.
- [L2] Marc Lackenby, *The canonical decomposition of once-punctured torus bundles*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 363–384.
- [Me] William Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984), no. 1, 37–44.
- [Mi1] John Milnor, *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), no. 1, 9–24.
- [Mi2] John Milnor, *The Schläfli differential equality*, dans : Collected papers, vol. 1, Publish or Perish, 1994.
- [Min] Yair Minsky, *The classification of punctured-torus groups*, Annals of Math. **149** (1999), 559–626.
- [Mo] George Daniel Mostow, *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Ann. of Math. Studies **78** (Princeton University Press), 1973.
- [MP] Bruno Martelli, Carlo Petronio, *3-Manifolds with complexity at most 9*, Experimental Math. **10** (2001), 207–237, arXiv :math.GT/0005104.
- [MSW] D. Mumford, C. Series, D. Wright, *Indra’s Pearls, the Vision of Felix Klein*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [MT] K. Matsuzaki, M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Math. Monographs, 1998.
- [Mu] Kunio Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996 (traduit de l’original japonais de 1993 par Bohdan Kurpita).
- [NZ] Walter Neumann, Don Zagier, *Volume of hyperbolic 3-manifolds*, Topology **24** (1985), 307–332.
- [Oe] Ulrich Oertel, *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, Pacific J. Math. **111** (1984), 209–230.
- [Ot] Jean-Pierre Otal, *Le théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque **235**, SMF (1996).
- [PH] Robert C. Penner, John L. Harer, *combinatorics of train tracks*, Ann. of Math. Studies **125** (Princeton University Press), 1991.

- [Pr] James Propp, *The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers*, arXiv :math.CO/0511633, 2005.
- [R1] Igor Rivin, *Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), 553–580.
- [R2] Igor Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2) **143** (1996), 51–70.
- [RS] Yo'av Rieck, Eric Sedgwick, *Persistence of Heegaard structures under Dehn filling*, Topology Appl. **109** (2001), no. 1, 41–53.
- [S1] Makoto Sakuma, *The geometries of spherical Montesinos links*, Kobe J. Math. **7** (1990), no. 2, 167–190.
- [S2] Jean-Marc Schlenker, *Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary*, arXiv :math.GT/0111136, 2001.
- [S3] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brüchen*, Math. Zeitschrift **65** (1956), 133–170.
- [S4] Caroline Series, *Thurston's bending measure conjecture for once punctured torus groups*, Lond. Math. Soc. Lecture Notes **329**, Cambridge Univ. Press (2006).
- [SW1] Makoto Sakuma, Jeffrey Weeks, *The generalized tilt formula*, Geometriae Dedicata **55** (1995), 115–123.
- [SW2] Makoto Sakuma, Jeffrey Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Japan. J. Math. (N.S.) **21** (1995), no. 2, 393–439.
- [T1] William P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, notes de cours, université de Princeton (1980), disponibles sur <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
- [T2] William P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), vol. **6**, no 3 (1982), 357–381.
- [T3] William P. Thurston, *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II : Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, arXiv :math.GT/9801045.
- [W1] Masaaki Wada, *Opti*, logiciel pour l'étude des groupes du tore percé : <http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/OPTi/>.
- [W2] Jeffrey Weeks, *SnapPea*, logiciel pour l'étude des variétés hyperboliques, <http://www.geometrygames.org/SnapPea/>.
- [W3] Jeffrey Weeks, *Computation of hyperbolic structures in knot theory*, Handbook of knot theory, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, pp. 461–480.
- [W4] Ying-Qing Wu, *Dehn surgery on arborescent knots*, J. Differential Geom. **43** (1996), 171–197.

Résumé — Nous étudions certaines décompositions de M en polyèdres idéaux, où M est une variété hyperbolique à pointe(s), de dimension 3. Par un théorème d’Epstein et Penner, il existe une telle décomposition, dite “de Delaunay”, canonique en un sens géométrique.

Au chapitre 1 nous trouvons la décomposition de Delaunay quand M fibre sur le cercle avec pour fibre un tore percé. La méthode consiste à “deviner” la combinatoire de la décomposition, puis à trouver des angles dièdres positifs pour ses polyèdres combinatoires : un théorème de Rivin dit que tout point critique de la fonctionnelle volume dans l’espace de déformation des angles dièdres fournit la métrique hyperbolique. Les inégalités établies pour montrer l’existence d’un tel point critique permettent alors de vérifier que la décomposition est bien de Delaunay.

Au chapitre 2 nous étendons la méthode à certains complémentaires d’entrelacs (entrelacs à 2 ponts notamment). Au chapitre 3 nous l’étendons aux cœurs convexes de groupes quasi-fuchsien du tore percé (la décomposition est alors infinie, et certaines pièces ne sont pas des polyèdres). Nous obtenons ainsi une nouvelle preuve du théorème des laminations de plissage pour le tore percé. Au chapitre 4, nous étendons partiellement la méthode aux complémentaires d’entrelacs arborescents : sans trouver de point critique, nous caractérisons les entrelacs arborescents hyperboliques.

Au chapitre 5, qui éclaire un passage du chapitre 3, nous montrons que certains polynômes de Laurent, qui généralisent les nombres de Markoff, n’ont que des coefficients positifs.

Abstract — We study certain decompositions of M into ideal polyhedra, where M is a cusped hyperbolic 3-manifold. A result of Epstein and Penner states that such a decomposition exists : in particular, the so-called Delaunay decomposition, which is canonical in a geometric sense.

In Chapter 1, we find the Delaunay decomposition for M a punctured-torus bundle over the circle. The method is to “guess” the combinatorics of the decomposition, then find positive dihedral angles for its combinatorial polyhedra : by a theorem of Rivin, any critical point of the volume functional in the deformation space of dihedral angles gives the hyperbolic metric. The inequalities involved in showing that such a critical point exists also imply that the decomposition is indeed Delaunay.

In Chapter 2, we extend the method to certain link complements (notably, 2-bridge links). In Chapter 3 we extend it to convex cores of quasifuchsian punctured-torus groups (here the decomposition is infinite, and has some non-polyhedral pieces). As a corollary, we reprove the Pleating Lamination Theorem for punctured-torus groups. In Chapter 4, we partially extend the method to arborescent link complements : without finding critical points, we characterize hyperbolic arborescent links.

In Chapter 5, extending a proposition of Chapter 3, we show that certain Laurent polynomials, which generalize the Markoff numbers, have only positive coefficients.

Mots-clés — Géométrie hyperbolique, Triangulations idéales, Volume hyperbolique, Tore percé, Groupes quasi-fuchsien, Laminations de plissage, Entrelacs arborescents.

Codes MSC — 11B57, 51H20, 51F99, 52B99, 52C99, 57M25, 57M50, 57M60.