



HAL
open science

Etude d'un problème d'interaction fluide-structure : Application au flux artériel.

Bernard Giudicelli

► **To cite this version:**

Bernard Giudicelli. Etude d'un problème d'interaction fluide-structure: Application au flux artériel..
Mathématiques [math]. Université Pascal Paoli, 2006. Français. NNT : . tel-00119545

HAL Id: tel-00119545

<https://theses.hal.science/tel-00119545>

Submitted on 11 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



U.M.R. 6134 - Ecole doctorale de l'Université de Corse - Equipe fluide-structure

U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES

Thèse de Doctorat de l'Université de Corse,
Mathématiques appliquées et applications des mathématiques

Présenté le 2 mai 2006 à 14h30 par

Bernard GIUDICELLI

Étude d'un problème d'interaction fluide-structure :
Application au flux artériel

Soutenue devant le jury composé de

MM.	Christian BOURDARIAS	Examineur
	Didier BRESCH	Rapporteur
	Benoît DESJARDINS	Rapporteur
	Bernard DI MARTINO	Examineur
	Fabien FLORI	Co-directeur
	Pierre ORENGA	Directeur

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur Jacque-Henri BALBI directeur de l'UMR-CNRS 6134 - "Systèmes physiques de l'environnement", qui m'a permis de réaliser ces travaux au sein de cette unité de recherche.

J'exprime mes remerciements à monsieur Pierre ORENGA, qui a dirigé ma thèse. Il a su, par ses compétences et son expérience, guider mes recherches.

Ma gratitude s'exprime plus particulièrement à l'égard de Fabien FLORI qui m'a encadré. Je lui sais gré de son aide précieuse et de sa pédagogie.

J'adresse mes plus vifs remerciements à messieurs Benoît DESJARDINS et Didier BRESCH qui me font l'honneur de rapporter sur ce travail de thèse.

Que monsieur Christian BOURDARIAS trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour sa participation à ma commission d'examen.

Je remercie vivement monsieur Bernard DI MARTINO pour sa précieuse collaboration, son assistance et le soutien qu'il m'a apporté durant ces années.

J'associe à ces remerciements l'ensemble des personnes de la faculté des sciences de l'Université de Corse, en particulier les membres de l'UMR, pour leur aide et leur amitié.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à mon épouse, mes parents, mes beaux-parents ainsi qu'à l'ensemble de ma famille et de mes amis. En particulier j'adresse un "*grand merci*" à Claudine, ma très professionnelle correctrice.

Pour finir, je remercie la Collectivité territoriale de Corse, qui a financé ces travaux dans le cadre d'une bourse régionale.

Table des matières

Introduction	5
1 Modélisation	12
1.1 Eléments de Biomécanique - Flux Sanguin	12
1.2 Artère: Une structure visco-élastique	15
1.2.1 Modèle de coque cylindrique	15
1.2.2 Modèle axisymétrique	16
1.3 Modèle de sang	19
1.4 Conditions aux limites des problèmes fluide	21
1.4.1 Conditions aux limites du problème (F)	22
1.4.2 Conditions aux limites du problème (F_L)	23
1.4.3 Conditions aux limites du problème (P)	24
1.5 Problèmes couplés	24
2 Étude de modèles linéaires	29
2.1 Résultat d'existence	29
2.2 Analyse numérique	33
2.2.1 Approche numérique: méthode itérative	33
2.2.2 Résolution numérique	37
Discrétisation en espace.	37
Discrétisation temporelle.	40
2.2.3 Solutions analytiques	41
2.2.4 Résultats	43
Comparaison analytique-numérique	44

Résultats avec un flux imposé	47
Comparaison Modèle en Pression - Stokes linéaire.	52
3 Problème non-linéaire	57
3.1 Estimations a priori	59
3.1.1 Majorations d'énergie lorsque $\gamma = 1$	60
3.1.2 Majorations d'énergie pour $\gamma > 1$	64
3.1.3 Résultats de compacité.	68
3.1.4 Passage à la limite	73
Cas $\gamma = 1$	73
Cas $\gamma > 1$	73
Condition au bord sur ρ	78
3.2 Construction des solutions approchées	78
3.2.1 Régularisation	79
3.2.2 Discrétisation lagrangienne	80
3.2.3 Majorations a priori.	83
3.3 Passage à la limite dans la discrétisation lagrangienne	88
3.4 Point fixe: Fluide-Structure.	93
4 Analyse numérique	97
4.1 Méthode des domaines fictifs	97
4.1.1 Présentation	97
4.1.2 Application	99
4.2 Méthode Arbitraire Euler Lagrange	104
Discrétisation temporelle	109
Discrétisation spatiale	110
Domaine fluide et déformations	111
Bibliographie	123
Annexes	129
A Majorations a priori	132

B	Convergence point fixe numérique	137
C	Equation de la chaleur - Domaines fictifs	141

Introduction

L'étude des problèmes d'interaction fluide-structure revêt un intérêt croissant depuis quelques dernières années. Divers domaines de la recherche sont confrontés à ces problématiques, que ce soit dans l'aéronautique, le génie civil ou la construction navale. L'évolution de l'imagerie médicale ainsi que les avancées en biomécanique, ont ouvert de nouvelles problématiques dont celle du flux artériel qui possède toutes les caractéristiques d'un problème d'interaction fluide-structure. Ce problème est l'objet de cette thèse, plus précisément on s'intéresse à l'analyse de l'écoulement sanguin dans une artère. Ces travaux s'insèrent dans la thématique "fluide structure" de l'UMR-CNRS 6134 de l'Université de Corse. L'équipe du professeur P. Orenaga a acquis une expérience dans l'étude mathématique des problèmes d'interaction fluide-structure. Ces travaux ont été initiés par la thèse de R. Papi [62] traitant d'un problème de plaque couplée à un modèle linéaire de fluide, puis par celle de F. Flori [26] dans laquelle est étudié un modèle de fluide compressible dans un domaine variable délimité par une plaque mince. Une synthèse des différentes avancées mathématiques réalisées par cette équipe est présentée dans l'habilitation à diriger les recherches de F. Flori [27].

La modélisation du flux artériel comprend deux types de couplage fluide-structure. D'une part l'évolution de solides déformables représentant les globules dans le plasma, d'autre part les déformations de l'artère soumise aux contraintes musculaires ainsi qu'à la pression du flux sanguin. Pour ce qui suit, seul le deuxième phénomène sera pris en compte, car le comportement des globules sera englobé dans la modélisation du sang qui sera considéré comme un fluide homogène. Cependant le lecteur peut notamment se référer aux travaux de C. Grandmont et Y. Maday [38], de M. Bou-

lakia [8] ou de B. Desjardins et M.J. Esteban [17] pour des résultats d'existence de solutions aux problèmes d'interactions de solides au sein d'un fluide.

En ce qui concerne l'étude des équations de Navier-Stokes incompressibles dans des domaines délimités par une structure déformable, on peut citer les travaux de A.Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont [12] qui montrent l'existence de solutions faibles pour un fluide couplé à une plaque. Pour un fluide compressible, dans [32] F .Flori et P. Orenca montrent l'existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes compressibles couplées à un opérateur de plaque. Enfin, on peut citer H. Beirao da Veiga [15] qui montre l'existence de solutions fortes locales en temps pour un problème de flux artériel.

Le premier chapitre est consacré à la modélisation biomécanique du flux artériel. Nous présentons quelques éléments de biomécanique permettant d'obtenir un modèle de sang incluant les globules et un modèle d'artère dérivant d'un opérateur de coque. Dans le second chapitre, nous effectuons l'analyse numérique du problème couplé en utilisant un modèle de sang simplifié. Cette étude a pour but de mettre en évidence les difficultés numériques liées au couplage. Le troisième chapitre constitue la partie centrale de cette thèse. On y présente un résultat d'existence lorsque le fluide est modélisé par un modèle de Navier-Stokes compressible. Enfin le dernier chapitre est consacré à la résolution numérique du problème compressible à frontières variables à l'aide d'une formulation A.L.E. couplée à la méthode de Galerkin.

Chapitre 1

Modélisation

Dans ce premier chapitre nous présentons les différents modèles mathématiques de couplage sang artère étudiés dans le cadre de cette thèse.

Dans un premier temps, nous donnons quelques notions de biomécanique. En particulier nous présentons les principes de modélisation du flux sanguin et des artères. Nous déterminons dans quel cadre l'écoulement du sang dans une artère peut être associé à la solution des équations de Navier-Stokes couplées à un modèle de coque cylindrique de Donnell.

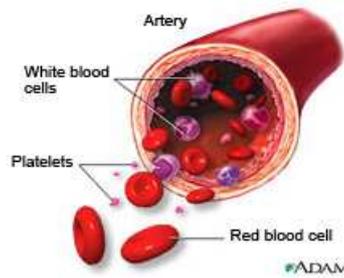
Ce chapitre n'a pas pour but d'exposer la construction d'un modèle biomécanique des plus réalistes mais simplement de proposer un modèle mathématique pouvant traduire le comportement d'une partie du système vasculaire humain. Mathématiquement, le modèle obtenu contient les difficultés liées à l'étude des équations de Navier-Stokes non-linéaires compressibles dans un domaine évoluant au cours du temps. Les variations du domaine sont liées au couplage entre les solutions du problème fluide et celles du problème de structure. La régularité de la frontière du domaine fluide dépend de la solution du problème couplé puisque la frontière mobile est décrite par le déplacement de la structure. Ce lien est la principale difficulté des problèmes de couplage fluide-structure.

1.1 Eléments de Biomécanique - Flux Sanguin

Au cours de ces trente dernières années, la biomécanique a connu une grande évolution. Cette discipline est devenue un élément indispensable de la médecine mo-

derne. Les applications sont multiples et se divisent principalement en deux familles, d'une part la modélisation biomécanique qui est utilisée pour mieux traiter certaines pathologies et d'autre part le développement d'outils de prédiction et de diagnostic. Un des éléments importants de la biomécanique est l'étude des écoulements des biofluides dans les différents systèmes circulatoires (vasculaire, pulmonaire ...). La modélisation de l'écoulement du flux sanguin dans une artère est l'un des problèmes de biofluide les plus étudiés. Les différents travaux réalisés sur ce sujet ont pour principal objectif la compréhension de la formation ainsi que l'évolution des sténoses qui sont la cause de nombreux accidents vasculaires cérébraux ou d'infarctus (de nombreuses études sont également consacrées au comportement des anévrismes vasculaires).

Il est très difficile de caractériser le comportement du flux sanguin. Les propriétés rhéologiques du sang sont complexes et elles varient en fonction de nombreux paramètres. Il est notamment important de remarquer que le sang n'est pas un fluide homogène. Il est principalement composé de plasma dans lequel sont contenues différentes particules (notamment les globules). Sous certaines conditions, le comportement du sang peut être assimilé à celui d'un fluide newtonien. En effet, lorsque le diamètre de l'artère est " bien plus grand " que celui des globules, alors le comportement de l'écoulement est newtonien [34]. En effet, la proportion des constituants du sang en suspension dans le plasma (qui lui est un fluide newtonien) est d'environ un globule blanc pour 30 plaquettes et 600 globules rouges [20]. Ainsi, le comportement des globules rouges, qui constituent $\sim 45\%$ du volume sanguin, influence principalement celui du sang. Plus l'hématocrite (concentration des globules rouges dans le sang) est élevée, plus la viscosité du sang est grande. A titre indicatif, on remarque que lorsque le sang possède un comportement newtonien, sa viscosité est en moyenne trois fois supérieure à celle du plasma, mais ce rapport peut changer sous l'influence de la déformabilité et de la viscosité interne des hématies qui peuvent varier notamment sous l'action d'un traitement médical.

FIG. 1.1 – *Le sang*¹

De nombreuses études utilisent les équations de Navier-Stokes avec un modèle de fluide newtonien pour simuler le comportement du flux sanguin dans les artères : on peut citer par exemple [4, 21, 53, 70, 77]. Pour le comportement non-newtonien, on peut citer [34, 63] dans lesquels sont présentés différents modèles de viscosité.

En ce qui concerne les artères, les parois artérielles ont un comportement visco-élastique [2]. Ainsi dans le cas d'une section rectiligne, il est possible de modéliser le problème de couplage sang-artère en utilisant d'une part les équations de Navier-Stokes pour décrire le comportement du fluide et d'autre part un modèle de coque de Donnell avec un amortissement de Kelvin-Voigt [76] pour la structure. Ce modèle de structure correspond a priori aux besoins de modélisation d'une artère souple sans bifurcation et ayant un comportement visco-élastique.

En supposant que le déplacement de la paroi est symétrique par rapport à l'axe de la coque cylindrique, ce modèle de structure peut être simplifié en considérant un déplacement bi-dimensionnel qui ne dépend que de la position le long de l'axe.

Différents travaux ayant pour objet ce type de problème ont déjà utilisé des modèles analogues couplant les équations de Navier-Stokes à divers modèles de structure de type coque cylindrique ou membrane : on peut citer par exemple [43, 15, 33, 52, 54].

Pour une exploration plus approfondie des problèmes de modélisation et de résolution numérique du couplage sang artère et plus généralement du couplage entre le flux sanguin et le système vasculaire, on peut se référer aux travaux de A. Quarteroni M. Tuveri et A. Veneziani [68, 69].

1. source : www.adam.com

1.2 Artère : Une structure visco-élastique

Nous présentons dans cette section les conditions d'utilisation d'un modèle de coque visco-élastique pour décrire le mouvement d'une artère lorsqu'on ne prend pas en compte les forces extérieures (pesanteur, contractions musculaires, ...) qui soumettent l'artère à des effets de translation et de rotation.

1.2.1 Modèle de coque cylindrique

On suppose que l'artère est un solide élastique homogène isotrope occupant le domaine compris entre deux cylindres co-axiaux de longueur L et de rayon $R-h/2$ et $R+h/2$. On considère l'épaisseur h très petite devant R et L ce qui, en procédant à un développement asymptotique (en h), permet de se ramener à un modèle de coque mince cylindrique de type Donnell. Les équations du modèle linéaire de Donnell s'écrivent en coordonnées cylindriques sur le domaine de référence Ω_s (correspondant à la position de l'artère au repos) de la manière suivante :

$$R\rho_c h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix} - EhA_s \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_\theta \\ F_r \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

où $\begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix}$ représente le déplacement de l'artère par rapport à la configuration de

référence Ω_s et où $A_s = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{x\theta} & A_{xr} \\ A_{\theta x} & A_{\theta\theta} & A_{\theta r} \\ A_{rx} & A_{r\theta} & A_{rr} \end{pmatrix}$ est l'opérateur symétrique d'élasticité de composantes

$$A_{xx} = \left(\frac{R}{(1-\nu_c^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2R(1+\nu_c)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right),$$

$$A_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{R(1-\nu_c^2)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2(1+\nu_c)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right),$$

$$A_{x\theta} = A_{\theta x} = \left(\left(\frac{\nu_c}{1-\nu_c^2} + \frac{1}{2(1+\nu_c)} \right) \frac{\partial}{\partial x \partial \theta} \right),$$

$$A_{xr} = A_{rx} = \left(\frac{\nu_c}{R(1-\nu_c^2)} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad A_{\theta r} = A_{r\theta} = \left(\frac{1}{R(1-\nu_c^2)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

$$A_{rr} = -\frac{h^2}{12} \left(\frac{R}{1-\nu_c^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{R^3(1-\nu_c^2)} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r} \frac{2-\nu_c}{1-\nu_c^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) + \frac{1}{R(1-\nu_c)}.$$

Les paramètres ν_c, E et ρ_c sont respectivement le coefficient de Poisson, le module de Young et la masse volumique de l'artère.

	Valeurs moyennes
Module de Young	$100kPa$
Coefficient de Poisson	0.27
Masse volumique	$1.2g/cm^3$

TAB. 1.1 – Valeurs moyennes des grandeurs biomécaniques des artères

Les composantes des forces extérieures F_x, F_θ et F_r sont exprimées sur la configuration de référence et seront décrites à la section 1.4. On note Γ_s la déformée de Ω_s .

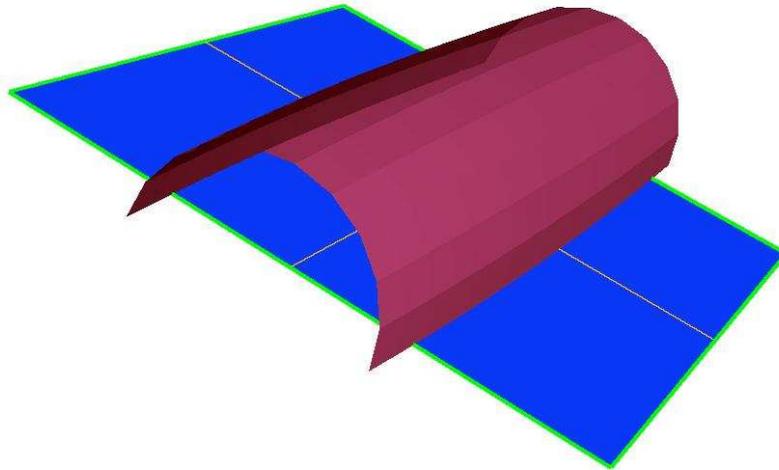
On complète ce modèle en introduisant un terme d'amortissement traduisant le comportement visco-élastique de l'artère. Un des termes les plus utilisés est l'amortissement de Kelvin-Voigt [2, 76]. Le modèle de coque viscoélastique s'écrit [71] :

$$(S) \left\{ R\rho_c h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix} - Eh\mathbf{A}_s \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix} - C_d h \mathbf{A}_s \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_\theta \\ F_r \end{pmatrix}, \quad (1.2) \right.$$

où $C_d > 0$ est le coefficient d'amortissement de Kelvin-Voigt.

1.2.2 Modèle axisymétrique

En l'absence d'action externe, on fait l'hypothèse que les contraintes appliquées à l'artère sont axisymétriques ce qui permet de supposer que les déformations le sont aussi.



Eqn: $-1x = 0$

FIG. 1.2 – Plan de coupe

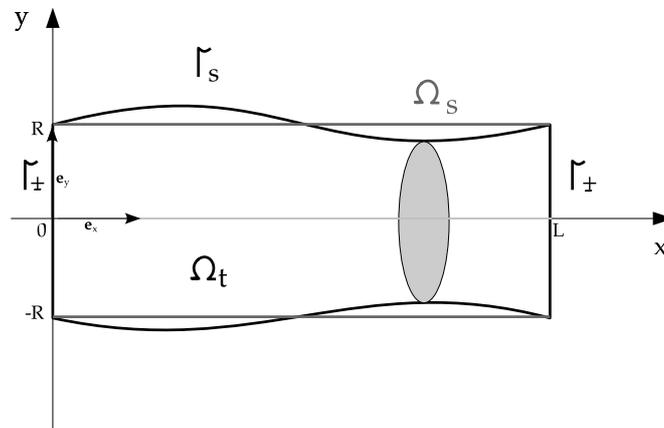


FIG. 1.3 – Coupe longitudinale de la coque cylindrique

Il est alors possible de s'affranchir de la dépendance en θ et de se ramener à un modèle bidimensionnel dans lequel l'opérateur A_s s'écrit :

$$A_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \nu_c \frac{\partial}{\partial x} \\ -\nu_c \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

On munit l'opérateur A_s des conditions aux bords $\xi_x = \xi_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial x} = 0$ sur $\partial\Omega_s$ (conditions d'encastrement).

Remarque 1.1. Dans le problème couplé (C_2) (c.f. section 1.5) on applique des conditions différentes $\xi_y = \frac{\xi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = 0$ sur $\partial\Omega_s$ dans le but d'obtenir, sous certaines conditions, une solution analytique du problème couplé.

La déformée de la coque cylindrique définit le contour d'un domaine fluide compressible à frontière libre. Pour pouvoir résoudre les équations du fluide, il est clair que la frontière doit avoir suffisamment de régularité. Pour cela, plusieurs pistes peuvent être explorées. L'une d'entre elles consiste à régulariser l'équation de coque avec un terme pénalisant. Une autre, que nous utilisons ici, consiste à modéliser le déplacement par sa projection sur les premiers modes propres élastiques.

Soit

$$D(A_s) = \left\{ (\xi_x, \xi_y) \in (H^1(\Omega_s) \times H^2(\Omega_s)) / \xi_x = \xi_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial x} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_s \right\}, \quad (1.4)$$

le domaine de l'opérateur d'élasticité A_s . En remarquant que pour tout $\phi \in D(A_s)$ on a :

$$\chi \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \nu_c \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \phi_y \right)^2 dx + (1 - \nu_c) \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \phi_y^2 dx \geq 0,$$

on définit sur $D(A_s)$, le produit scalaire suivant :

$$(\phi, \psi)_{D(A_s)} = \int_{\Omega_s} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \nu_c \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \psi_x + \chi \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \phi_y \psi_y + \nu_c \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \psi_y dx.$$

Muni de ce produit scalaire, $D(A_s)$ est un espace de Hilbert qui s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega_s)^2$. De plus, on montre trivialement que l'opérateur A_s est autoadjoint. On note $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la suite croissante formée par les valeurs propres de A_s ; les vecteurs propres unitaires associés $\{\varrho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega_s)$.

Le comportement élastique de la structure est régi par les modes propres de l'opérateur A_s . En conséquence, de manière analogue à B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec [18], on modélise le déplacement ξ de la structure, par

sa projection sur les N_s premiers modes propres de A_s , pour N_s fixé dans $(\mathbb{N}^* \setminus +\infty)$.

On pose :

$$\xi(t, x) \equiv \xi_{N_s}(t, x) = \sum_{i=1}^{N_s} c_i(t) \varrho_i(x), \quad (1.5)$$

où les $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont des fonctions ne dépendant que du temps.

En choisissant cette modélisation de la structure, la régularité de la frontière est suffisante et permet en particulier de définir la normale sur la frontière Γ_s . En effet, puisque le domaine de référence de la structure Ω_s est un ouvert C^∞ , alors les vecteurs propres $\{\varrho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et ξ sont $C^\infty(\Omega_s)$.

On définit l'application Ξ suivante :

$$\begin{aligned} \Xi : \quad \Omega_s &\rightarrow \Gamma_s, \\ (x, y) &\mapsto (x + \xi_x(x), y + \xi_y(x)) \end{aligned}$$

On note $|\mathcal{J}_\Xi| = 1 + \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$ le déterminant de la matrice jacobienne associée à Ξ . Pour que cette transformation ait un sens il faut que $|\mathcal{J}_\Xi| \neq 0$. On vérifie au chapitre 3 que cette condition est satisfaite lorsque les données du problème sont "bien choisies".

1.3 Modèle de sang

Dans cette section nous présentons les équations modélisant le comportement du sang. On note T la période d'étude du problème. Quel que soit $t \in (0, T)$, on note Ω_t le domaine occupé par le fluide et $Q = \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t$. On décompose la frontière de Ω_t de la manière suivante $\partial\Omega_t = \Gamma_s \cup \Gamma_\pm \cup \Gamma_a$. Le bord Γ_s représente la partie mobile de la frontière, Γ_\pm est la partie fixe à travers laquelle s'écoule le fluide et Γ_a représente l'axe de révolution de la coque.

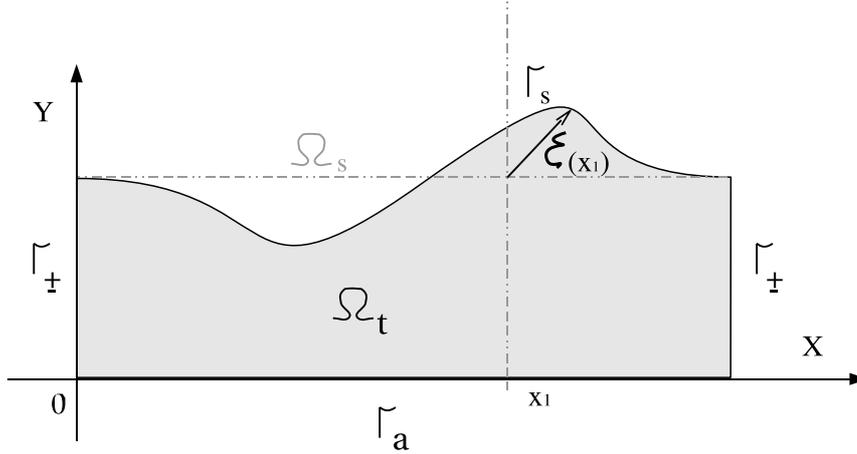


FIG. 1.4 – *Domaine d'étude*

On se place dans le cas d'un fluide isentropique où l'on suppose que la pression p ne dépend que de la densité ρ :

$$p = a\rho^\gamma, \quad a > 0, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \geq 1,$$

où C_p et C_v sont respectivement les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant, γ est le coefficient adiabatique.

On considère un modèle dérivé des équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques NSCI [48].

$$(F) \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F} - a \nabla \rho^\gamma + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} & \text{dans } Q, \quad (1.6) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 & \text{dans } Q, \quad (1.7) \end{cases}$$

où le coefficient de viscosité vérifie $\nu > 0$.

Dans [47], P.L. Lions établit rigoureusement des passages à la limite pour des modèles de fluides visqueux, compressibles et isentropiques. En particulier en utilisant des résultats d'existence et de compacité obtenus dans [45] et [46], il montre qu'asymptotiquement on peut déduire le système linéarisé autour d'un écoulement constant

$$(F_L) \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Sans difficulté, on obtient :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \nu \Delta \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

qui correspond à l'équation d'onde visqueuse. Lorsque $\nu = 0$, ce type de modèle est classiquement utilisé en acoustique et a déjà fait l'objet d'une étude par R.Papi dans le cadre d'un couplage dynamique avec un opérateur de plaque mince [62].

Remarque 1.2. On verra par la suite (chapitre 3) que lorsque le problème (F) est couplé au problème (S) il est nécessaire de prendre en compte les déformations du domaine (même si elles sont petites) pour obtenir la conservation de la masse et de l'énergie. Lorsqu'on s'intéresse à un modèle de type (F_L) où (P) couplé à (S) , il n'est pas utile de prendre en compte les variations du domaine et l'étude peut être réalisée sur le domaine fixe $\Omega \equiv \Omega_0$ (chapitre 2). Toutefois ce type de modèle n'est utilisable que pour de faibles perturbations (comme en acoustique par exemple).

1.4 Conditions aux limites des problèmes fluide

Nous décrivons ci-dessous les différentes conditions aux limites, des problèmes F , F_L et P , utilisées par la suite.

1.4.1 Conditions aux limites du problème (F)

Sur les parties fixes du domaine, on applique la condition :

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } (0, T) \times (\Gamma_{\pm} \cup \Gamma_a), \quad (1.11)$$

que l'on complète par une condition sur $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$.

Pour respecter l'axisymétrie, on applique la condition $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\Sigma_a = (0, T) \times \Gamma_a$.

On décompose Γ_{\pm} en deux parties, le sous-domaine Γ_+ à travers lequel le flux est positif $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$ (*i.e.* fluide sortant) et Γ_- où le flux est négatif $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ (*i.e.* fluide entrant).

Les conditions aux limites traduisant le flux sont les suivantes

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = G_{\pm} = G_+ \geq 0, \quad \text{sur } \Sigma_+ = (0, T) \times \Gamma_+, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = G_{\pm} = G_- < 0, \quad \text{sur } \Sigma_- = (0, T) \times \Gamma_-, \quad (1.13)$$

où G_{\pm} est une fonction définie sur $\Sigma_{\pm} = (0, T) \times \Gamma_{\pm}$. Cette fonction représente le flux à travers les deux sections circulaires de la coque.

Les conditions aux limites pour le flux sont complétées en imposant sur Γ_- , les conditions suivantes :

$$a\rho^{\gamma}|_{\Gamma_-} = P_i^{\gamma} \quad \text{sur } \Sigma_- \quad \text{si } \gamma > 1, \quad (1.14)$$

$$(\rho \log \rho - \rho)|_{\Gamma_-} = P_i \log P_i - P_i \quad \text{sur } \Sigma_- \quad \text{si } \gamma = 1. \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

Les modèles du sang (F) et de l'artère (S) sont recouplés en imposant la continuité des vitesses à l'interface :

$$\mathbf{u}(\Xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{dans } Q_s = (0, T) \times \Omega_s \quad (1.17)$$

et en modélisant la contrainte du fluide sur la structure par :

$$\mathbf{F} = -\sigma \cdot \mathbf{n}(\Xi)|_{\mathcal{J}_{\Xi}} \quad \text{dans } Q_s, \quad (1.18)$$

où σ est le tenseur des contraintes du fluide. Cette condition permet de prendre en compte le fait que l'action du fluide s'applique sur la structure déformée, mais elle doit être exprimée sur Ω_s . En effet il est nécessaire d'exprimer la contrainte du fluide sur la configuration de référence de la coque (car le comportement de la structure est exprimé en Lagrangien, donc par rapport à la configuration initiale). On obtient en utilisant la condition (1.17), l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{F} \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \int_{\Omega_s} \sigma(\Xi) \cdot \mathbf{n}(\Xi) \mathbf{u}(\Xi) |J_{\Xi}| = - \int_{\Gamma_s} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}. \quad (1.19)$$

1.4.2 Conditions aux limites du problème (F_L)

Le problème (F_L) est utilisé dans le cas de faibles perturbations et dans un domaine fixe Ω . La modélisation du couplage est donc différente de celle appliquée au problème (F) puisque la frontière du fluide est constituée de la coque au repos ($\Gamma_s \equiv \Omega_s$).

On impose la condition

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } (0, T) \times (\Gamma_a \cup \Gamma_{\pm} \cup \Omega_s). \quad (1.20)$$

On complète cette condition en imposant la vitesse normale de la manière suivante :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = G_{\pm}, \quad \text{sur } \Sigma_{\pm} = \Sigma_+ \cup \Sigma_-, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_a, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } Q_s. \quad (1.23)$$

Remarque 1.3. Dans le repère cartésien formé par l'axe $(0, x)$ de la coque et par l'axe $(0, y)$ qui lui est perpendiculaire (*c.f.* fig.1.4), la condition (1.23) s'écrit $\mathbf{u}_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial t}$.

La condition $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ sur Q_s permet de justifier la forme de la contrainte σ appliquée par le sang sur Ω_s [30] :

$$\mathbf{F}_x = 0, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{F}_y = -\sigma(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p - \frac{4\nu}{3} \text{div } \mathbf{u}. \quad (1.25)$$

1.4.3 Conditions aux limites du problème (P)

Pour satisfaire la continuité des vitesses normales, on dérive par rapport au temps l'égalité (1.23), pour obtenir grâce à (1.8)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} = \left(\nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } Q_s.$$

De plus, l'utilisation de (1.9) et (1.20) conduit à la condition :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{4}{3} \nu \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } Q_s. \quad (1.26)$$

La continuité des contraintes imposée par (1.24-1.25) devient

$$\mathbf{F}_x = 0, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{F}_y = -\sigma(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p - \frac{4\nu}{3} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.28)$$

1.5 Problèmes couplés

Pour conclure ce chapitre de présentation, nous exposons les trois problèmes de couplage que l'on étudie par la suite. Dans le chapitre 2 on présente un résultat d'existence ainsi qu'une méthode de résolution du problème suivant :

$$C_1 \left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \text{dans } Q_f, \\
\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } Q_f, \\
\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - B \nu_c \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - B' \frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^2 \partial t} - B' \nu_c \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial t} = 0, \quad \text{dans } Q_s, \\
\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} + B \chi \frac{\partial^4 \xi_x}{\partial x^4} + B \nu_c \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + B \xi_y \\
+ B' \chi \frac{\partial^5 \xi_x}{\partial x^4 \partial t} + B' \nu_c \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} + B' \frac{\partial \xi_y}{\partial t} = \left(p - \frac{4}{3} \nu \operatorname{div} \mathbf{u} \right)_{\Omega_s}, \quad \text{dans } Q_s, \\
\xi_y = \xi_x = \frac{\partial \xi_y}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\{0\} \cup \{L\}), \\
\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } (0, t) \times (\Gamma_a \cup \Gamma_{\pm} \cup \Gamma_s), \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = G_{\pm}, \quad \text{sur } \Sigma_{\pm}, \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_a, \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \quad \text{sur } Q_s, \\
\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \quad p(t=0) = \rho_0, \quad \text{sur } \Omega, \\
\xi(t=0) = \xi_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(t=0) = \xi'_0, \quad \text{sur } \Omega_s,
\end{array} \right.$$

où $Q_f = (0, T) \times \Omega$, B et B' sont des constantes de rigidité de la coque.

Dans la deuxième partie du chapitre 2, nous proposons une méthode de résolution du problème couplé en suivant :

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \nu \Delta \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = 0 \quad \text{dans } Q, \\
& \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - B \nu_c \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - B' \frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^2 \partial t} - B' \nu_c \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial t} = 0, \quad \text{dans } Q_s, \\
& \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} + B \chi \frac{\partial^4 \xi_y}{\partial x^4} + B \nu_c \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + B \xi_y \\
& \quad + B' \chi \frac{\partial^5 \xi_y}{\partial x^4 \partial t} + B' \nu_c \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} + B' \frac{\partial \xi_y}{\partial t} = \left(p - \frac{4}{3} \nu \frac{\partial p}{\partial t} \right)_\Gamma, \quad \text{dans } Q_s, \\
& \xi_y = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial \Omega_s, \\
& \left(\frac{4}{3} \nu \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} \quad \text{sur } Q_s, \\
& \left(\frac{4}{3} \nu \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_a, \\
& \left(\frac{4}{3} \nu \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial G_\pm}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma_\pm, \\
& p(t=0) = \rho_0, \quad \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{sur } \Omega, \\
& \xi(t=0) = \xi_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(t=0) = \xi'_0, \quad \text{sur } \Omega_s.
\end{aligned} \right\} C_2$$

Finalement, nous présentons le troisième problème qui est étudié au chapitre 3 et pour lequel des méthodes de résolution numérique sont développées au chapitre 4. Ce problème est le suivant :

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F} - a \nabla \rho^\gamma + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \text{dans } Q, \\
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } Q, \\
 & \frac{\partial^2 \xi_{N_s x}}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \xi_{N_s x}}{\partial x^2} - B \nu_c \frac{\partial \xi_{N_s y}}{\partial x} - B' \frac{\partial^3 \xi_{N_s x}}{\partial x^2 \partial t} \\
 & \quad - B' \nu_c \frac{\partial^2 \xi_{N_s y}}{\partial x \partial t} = (-\sigma \cdot \mathbf{n}(\Xi_{N_s}) | \mathcal{J}_{\Xi_{N_s}} |)_x, \quad \text{dans } Q_s, \\
 & \frac{\partial^2 \xi_{N_s y}}{\partial t^2} + B \chi \frac{\partial^4 \xi_{N_s y}}{\partial x^4} + B \nu_c \frac{\partial \xi_{N_s x}}{\partial x} + B \xi_{N_s y} \\
 & + B' \chi \frac{\partial^5 \xi_{N_s y}}{\partial x^4 \partial t} + B' \nu_c \frac{\partial^2 \xi_{N_s x}}{\partial x \partial t} + B' \frac{\partial \xi_{N_s y}}{\partial t} = (-\sigma \cdot \mathbf{n}(\Xi_{N_s}) | \mathcal{J}_{\Xi_{N_s}} |)_y, \quad \text{dans } Q_s, \\
 & \xi_{N_s x} = \xi_{N_s y} = \frac{\partial \xi_{N_s y}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\{0\} \cup \{L\}), \\
 & \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } (0, t) \times (\Sigma_\pm \cup \Sigma_a), \\
 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = G_\pm, \quad \text{sur } \Sigma_\pm, \\
 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_a, \\
 & \mathbf{u}(\Xi_{N_s}) = \frac{\partial \xi_{N_s}}{\partial t} \quad \text{sur } Q_s, \\
 & a \rho^\gamma |_{\Gamma_-} = P_i^\gamma \quad \text{sur } \Sigma_- \quad \text{si } \gamma > 1, \\
 & (\rho \log \rho - \rho) |_{\Gamma_-} = P_i \log P_i - P_i \quad \text{sur } \Sigma_- \quad \text{si } \gamma = 1, \\
 & + \text{Conditions initiales.}
 \end{aligned} \right\} C_3$$

Chapitre 2

Étude de modèles linéaires

Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles linéaires (C_1) et (C_2) (*c.f.* section 1.5). Bien que ne revêtant pas un caractère délicat d'un point de vue mathématique, ces modèles fournissent dans certaines situations une bonne approximation de la réalité et permettent le développement de codes numériques peu coûteux.

Nous donnons un résultat d'existence et nous proposons une méthode de résolution basée sur une approche itérative pour laquelle nous donnons un critère de convergence. Enfin, nous présentons quelques simulations obtenues avec cette méthode.

2.1 Résultat d'existence

Dans le théorème suivant, nous donnons des conditions sur les données du problème, permettant d'établir un résultat d'existence pour le problème (C_1) (*c.f.* section 1.5).

Théorème 2.1. *Si les conditions initiales sont telles que \mathbf{u}_0 , ρ_0 , ξ_{x0} , ξ_{y0} , $\frac{\partial \xi_{x0}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \xi_{y0}}{\partial t}$ sont respectivement bornés dans $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega_s)$, $H_0^2(\Omega_s)$, $L^2(\Omega_s)$ et $L^2(\Omega_s)$ et si G_{\pm} est borné dans $L^\infty(0,T; H^{1/2}(\Gamma_{\pm}))$, alors le problème couplé (C_1) admet une solution $\mathbf{u} \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $p \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $\xi_x \in W^{1,\infty}(0,T, L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T, H_0^1(\Omega_s))$, $\xi_y \in W^{1,\infty}(0,T, L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T, H_0^2(\Omega_s))$.*

Démonstration On cherche \mathbf{u} , p , ξ_x et ξ_y solutions du problème variationnel :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \phi + \frac{4\nu}{3} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \phi + \nu \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \phi - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \int_{\Omega_s \cup \Gamma_{\pm}} \left(-p + \frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \phi \cdot \mathbf{n}, \forall \phi \in W = \{ \phi \in H^1(\Omega) / \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \phi' + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \phi' = 0, \quad \forall \phi' \in L^2(\Omega), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} \psi_x + B \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \psi_x \\ & + B' \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial t} \psi_x = 0 \quad \forall \psi_x \in H_0^1(\Omega_s), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} \psi_y + B\chi \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B \int_{\Omega_s} \xi_y \psi_y + B\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \psi_y + B' \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \psi_y \\ & + B'\chi \int_{\Omega_s} \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \psi_y = 0 \quad \forall \psi_y \in H_0^2(\Omega_s), \end{aligned} \quad (2.4)$$

On montre aisément (*c.f.* Annexe A) que :

ξ_x est borné dans $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T;H_0^1(\Omega_s))$,

ξ_y est borné dans $W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(\Omega_s)) \cap H^1(0,T;H_0^2(\Omega_s))$,

\mathbf{u} est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W)$,

p est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$,

et les bornes ne dépendent que des données du problème.

Cette compacité est suffisante pour passer à la limite dans les équations (qui sont linéaires). On ne détaille ici que le passage à la limite sur le terme de contrainte $\left(p - \frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right)_{\Gamma}$. Pour donner un sens à cette contrainte, on commence par poser $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \bar{\mathbf{w}}$ où $\bar{\mathbf{w}} \in L^\infty(0,T;H^{3/2}(\Omega))$ est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{w}} - \frac{\nu}{3} \nabla \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} = 0 & \text{dans } Q_f = (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{w}} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega_s)) & \text{sur } Q_c, \\ \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} = G_{\pm} \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma_{\pm})) & \text{sur } \Sigma_{\pm}, \\ \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_a, \\ \bar{\mathbf{w}}(t=0) = \bar{\mathbf{w}}_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On vérifie sans peine que :

$$(\operatorname{div} \bar{\mathbf{w}})_\Gamma \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma)). \quad (2.5)$$

De plus, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ où \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 sont les uniques fonctions vérifiant $\operatorname{div} \mathbf{w}_2 = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{w}_1 = 0$ et $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $(0, T) \times \Gamma$ [16]. Ainsi, on peut découpler l'équation des moments en une équation potentielle et une rotationnelle.

$$\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t} - \nabla \left(\frac{4}{3} \nu \operatorname{div} \mathbf{w}_1 - p \right) = 0 \text{ dans } Q_f, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial t} + \nu \operatorname{Rot}(\operatorname{rot} \mathbf{w}_2) = 0 \text{ dans } Q_f. \quad (2.7)$$

Classiquement on montre que :

$$\mathbf{w}_1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Par conséquent d'après l'égalité (2.6), on obtient :

$$\nabla \left(p - \frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \mathbf{w}_1 \right) \in H^{-1}(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.8)$$

Finalement, avec (2.5) on donne un sens à :

$$\left(p - \frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \mathbf{w}_1 \right)_\Gamma + \left(-\frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right)_\Gamma \text{ dans } H^{-1}(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)) + L^2(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)). \quad (2.9)$$

On définit $\theta_n = \begin{pmatrix} p_n \\ w_{1n_x} \\ w_{1n_y} \end{pmatrix}$ une suite vérifiant l'équation (1.9), alors on a :

$$\operatorname{div}_{t,x,y}(\theta_n) = \frac{\partial p_n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{w}_n = \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}}_n \in L^2(Q_f)$$

Donc on obtient

$$(\theta_n, \operatorname{div}_{t,x,y}(\theta_n)) \in (L^2(Q_f))^2$$

et par conséquent

$$\theta_n \in H_{\operatorname{div}}(Q_f).$$

Grâce à la continuité de l'application trace on a :

$$(\theta_n)_\Gamma \rightharpoonup (\theta)_\Gamma \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}((0,T) \times \Gamma)$$

et en particulier

$$(p_n)_\Gamma \rightharpoonup (p)_\Gamma \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}((0,T) \times \Gamma). \quad (2.10)$$

Avec (2.9) on peut conclure, par unicité de la limite, que

$$(\operatorname{div} \mathbf{w}_{1n})_\Gamma \rightharpoonup (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)_\Gamma \quad \text{dans } H^{-1}((0,T) \times \Gamma).$$

Solutions approchées - Point fixe Nous construisons les solutions approchées du problème couplé en utilisant un processus itératif. On ne détaille pas la construction des solutions approchées du problème fluide vérifiant les majorations a priori car ce travail a déjà fait l'objet de diverses études et nous renvoyons à ce qui est fait dans [30]. Pour éviter des difficultés inutiles, on pose $G_\pm \equiv 0$.

Les équations du fluide et celles de la structure sont succesivement résolues de manière indépendante. Le problème étant linéaire, on construit des solutions approchées à l'aide d'un point fixe de Picard. On note ξ_{iy} , ρ_i , \mathbf{u}_i les valeurs de ξ_y , ρ et \mathbf{u} à la $i^{\text{ème}}$ itération. On fixe $\frac{\partial \xi_{1y}}{\partial t}$ dans $E \equiv L^2(0,T; H_0^2(\Omega_s))$ et on résout le problème fluide :

$$F : E \rightarrow H^{-1}(0,T; L^2(\Gamma)),$$

$$\frac{\partial \xi_{1y}}{\partial t} \mapsto \left(\rho_1 - \frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \right)_\Gamma$$

On résout ensuite le problème de coque :

$$S : H^{-1}(0,T; L^2(\Gamma)) \rightarrow E,$$

$$\left(\rho_1 - \frac{4\nu}{3} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \right)_\Gamma \mapsto \frac{\partial \xi_{2y}}{\partial t}.$$

On montre que l'application $(S \circ F)$ définit une contraction (*c.f.* Annexe B).

2.2 Analyse numérique

Cette section est consacrée à la résolution numérique du problème de couplage (C_2) (*c.f.* section 1.5). La partie fluide de ce problème dérive du problème F_L [47] que l'on formule en pression. Ce modèle de couplage a pour vertu d'être analytiquement résolvable lorsque le fluide n'est pas visqueux ($\nu = 0$).

Pour résoudre ce problème on utilise une méthode itérative qui découple les problèmes du fluide et de la structure. Le problème fluide est résolu par la méthode des éléments finis couplée à un schéma de Newmark pour la résolution temporelle. Pour la coque, on utilise la méthode de Galerkin avec une base propre associée, elle aussi, à un schéma de Newmark en temps.

2.2.1 Approche numérique : méthode itérative

L'utilisation d'une méthode itérative découple l'équation du fluide de celle de la structure.

Le couplage est réalisé en effectuant un point fixe et se traduit par l'application de simples forces. On discrétise tout d'abord la période d'étude T en k pas de temps $\Delta t = T/k$. On suppose que le problème est résolu jusqu'à l'instant $t_i = i\Delta t$ et on raisonne sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$.

On résout tout d'abord le problème de la coque en prenant une pression approchée p_1 pour le terme de contrainte sur la structure (on peut prendre par exemple $p_1 = p(t_i) + \Delta t \frac{\partial p(t_i)}{\partial t}$ et $\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial p(t_i)}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial^2 p(t_i)}{\partial t^2}$, où $\frac{\partial^2 p(t_i)}{\partial t^2}$ est ap-

proché à l'aide du schéma de Newmark, pour une bonne approximation). En prenant p_1 suffisamment régulière, les équations

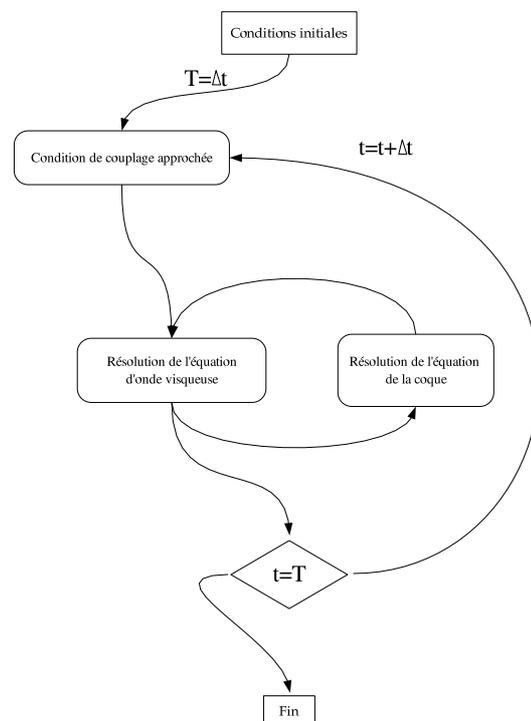


FIG. 2.1 – *Algorithme*

de la coque admettent une unique solution ξ_1 . Puis on résout le problème fluide avec cette solution pour obtenir une solution p_2 . Cette séquence est réitérée jusqu'à convergence.

Nous ne rappelons pas les résultats classiques qui permettent de montrer l'existence des solutions du problème fluide (du type équation d'onde visqueuse) et du problème de coque : le lecteur peut notamment se référer à [10, 16].

Afin d'étudier la convergence de la méthode itérative sur chaque pas de temps, nous comparons l'erreur commise après n itérations avec celle commise après $n + 1$ itérations.

On pose $q_n = p - p_n$, $\vartheta_n = \xi - \xi_n$, solutions du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{nx}}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 \vartheta_{nx}}{\partial x^2} - B\nu_c \frac{\partial \vartheta_{ny}}{\partial x} - B' \frac{\partial^3 \vartheta_{nx}}{\partial x^2 \partial t} - B'\nu_c \frac{\partial^2 \vartheta_{ny}}{\partial x \partial t} = 0, \quad \text{dans } Q_s, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \vartheta_{ny}}{\partial t^2} + B\chi \frac{\partial^4 \vartheta_{nx}}{\partial x^4} + B\nu_c \frac{\partial \vartheta_{nx}}{\partial x} + B\vartheta_{ny} \\ & + B'\chi \frac{\partial^5 \vartheta_{nx}}{\partial x^4 \partial t} + B'\nu_c \frac{\partial^2 \vartheta_{nx}}{\partial x \partial t} + B' \frac{\partial \vartheta_{ny}}{\partial t} = \left(q_n - \frac{4}{3} \nu \frac{\partial q_n}{\partial t} \right)_{\Omega_s}, \quad \text{dans } Q_s, \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 q_{n+1}}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \nu \Delta \frac{\partial q_{n+1}}{\partial t} - \Delta q_{n+1} = 0 \quad \text{dans } Q_f, \quad (2.13)$$

$$\vartheta_{nx} = \vartheta_{ny} = \frac{\partial^2 \vartheta_{ny}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times (\{0\} \cup \{L\}), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{ny}}{\partial t^2} = \left(\frac{4}{3} \nu \nabla \frac{\partial q_{n+1}}{\partial t} + \nabla q_{n+1} \right) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } Q_s, \quad (2.15)$$

$$q_n(t=0) = q_{n+1}(t=0) = p_0, \quad \text{sur } \Omega, \quad \vartheta_1(t=0) = 0. \quad (2.16)$$

On établit le résultat suivant :

Lemme 2.2. *Pour tout pas de temps suffisamment petit, il existe une constante ($K_\nu < 1$) telle que*

$$\|q_{n+1}\|_{H^1(0, \Delta t; H^1(\Omega_s))}^2 \leq K_\nu \|q_n\|_{H^1(0, \Delta t; H^1(\Omega_s))}^2.$$

Démonstration Pour simplifier l'étude nous travaillons sur l'intervalle de temps $(0, \Delta t)$ et nous comparons l'erreur commise à la première et à la deuxième itérations.

Ce résultat peut facilement être prolongé à tous les intervalles $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ de la période d'étude. La formulation variationnelle associée à l'équation (2.13) est la suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial q_2}{\partial t} \phi + \frac{4\nu}{3} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial q_2}{\partial t} \nabla \phi + \int_{\Omega} \nabla q_2 \nabla \phi = \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t^2} \phi, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (2.17)$$

En prenant $\phi = \frac{\partial q_2}{\partial t}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial q_2}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0, \Delta t; L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla q_2\|_{L^\infty(0, \Delta t; L^2(\Omega))}^2 + \frac{8\nu}{3} \left\| \nabla \frac{\partial q_2}{\partial t} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega))}^2 \\ = 2 \int_0^{\Delta t} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \right) \frac{\partial q_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En utilisant le théorème de trace et l'inégalité de Young, pour Δt suffisamment petit et $\nu > 0$, il vient :

$$\nu \|q_2\|_{H^1(Q_f)}^2 < K \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega_s))} \|q_2\|_{H^1(Q_f)},$$

où K est la constante issue de la continuité de l'application trace. Finalement on obtient, pour $0 < \epsilon < \frac{\nu}{K}$, la majoration suivante :

$$\|q_2\|_{H^1(Q_f)}^2 < \frac{C_\epsilon K}{\nu - \epsilon K} \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega_s))}^2. \quad (2.19)$$

On utilise l'équation de coque afin de majorer ϑ_1 par q_1 . On multiplie (2.12) par $\frac{\partial^2 \xi_{y1}}{\partial t^2}$ puis on intègre sur $(0, t') \times \Omega_s$, avec $t' \in (0, \Delta t)$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} B\chi \int_0^{t'} \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \vartheta_{1y}}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{B'\chi}{2} \left\| \frac{\partial^3 \vartheta_{1y}}{\partial t \partial x^2}(t') \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{B'}{2} \left\| \frac{\partial \vartheta_{1y}}{\partial t}(t') \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\ + \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, t'; L^2(\Omega_s))}^2 = - \int_0^{t'} \int_{\Omega_s} \left(q_1 + \nu \frac{\partial q_1}{\partial t} + B\xi_{y1} + B\nu_c \frac{\partial \vartheta_{1x}}{\partial x} + B'\nu_c \frac{\partial^2 \vartheta_{1x}}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ce qui conduit à l'estimation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, t'; L^2(\Omega_s))}^2 + \frac{B'\chi}{2} \left\| \frac{\partial^3 \vartheta_{1y}}{\partial t \partial x^2}(t') \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left(\frac{B'}{2} - \epsilon_2 B \right) \left\| \frac{\partial \vartheta_{1y}}{\partial t}(t') \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \left(\|q_1\|_{H^1(0, t'; L^2(\Omega_s))}^2 + \left\| B\nu_c \frac{\partial \vartheta_{1x}}{\partial x} + B'\nu_c \frac{\partial^2 \vartheta_{1x}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(0, t'; L^2(\Omega_s))}^2 \right) \\ + B\chi \left\| \frac{\partial^3 \vartheta_{1y}}{\partial t \partial x^2} \right\|_{L^2(0, t'; L^2(\Omega_s))}^2 + B\Delta t(1 + C_{\epsilon_2}) \left\| \frac{\partial \vartheta_{1y}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0, \Delta t; L^2(\Omega_s))}^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $\epsilon_2 < \frac{B'}{2B}$. On peut donc écrire l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,t';L^2(\Omega_s))}^2 + \chi \left(\frac{B'}{2} - 2B\Delta t \right) \left\| \frac{\partial^3 \vartheta_{1y}}{\partial t \partial x^2} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 \\ & + \left(\frac{B'}{2} - B(\epsilon_2 + \Delta t(1 + C_{\epsilon_2})) \right) \left\| \frac{\partial \vartheta_{1y}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 \leq \|q_1\|_{H^1(0,t';L^2(\Omega_s))}^2 \\ & + B\nu_c \Delta t \left\| \frac{\partial \vartheta_{1x}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 + B'\nu_c \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1x}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(0,t';L^2(\Omega_s))}^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

en choisissant un pas de temps vérifiant :

$$\Delta t < \text{Min} \left(\frac{B' - 2B\epsilon_2}{2B(1 + C_{\epsilon_2})}, \frac{B'}{4B} \right). \quad (2.23)$$

De même, l'équation (2.11) conduit à l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \Delta t \nu_c (B + B') \right) \left\| \frac{\partial \vartheta_{1x}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 + \frac{B}{2} \left\| \frac{\partial \vartheta_{1x}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_s))}^2 \\ & + 2B' \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1x}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 \leq \Delta t \nu_c \left(B \left\| \frac{\partial \vartheta_{1y}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 + B' \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t \partial x} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

En choisissant un pas de temps qui vérifie (2.23) et

$$\Delta t < (2\nu_c(B + B'))^{-1}, \quad (2.25)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & B \left\| \frac{\partial \vartheta_{1x}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_s))}^2 + B' \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1x}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 \\ & \leq 2\Delta t \nu_c \left(B \left\| \frac{\partial \vartheta_{1y}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 + B' \left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1y}}{\partial t \partial x} \right\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Finalement, si Δt satisfait $\Delta t < 1$ et (2.23,2.25), alors on peut écrire :

$$\left\| \frac{\partial^2 \vartheta_{1y1}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 < K' \|q_1\|_{H^1(Q_f)}^2, \quad (2.27)$$

où K' est une constante définie par la continuité de l'application trace sur Ω_s .

Pour conclure, (2.19) et (2.27) permettent d'écrire l'estimation suivante :

$$\|q_2\|_{H^1(Q_f)}^2 < K_\nu \|q_1\|_{H^1(Q_f)}^2, \quad (2.28)$$

où $K_\nu = \frac{C_\epsilon K K'}{\nu - \epsilon K}$. On montre trivialement que si $\nu > \text{Max} \left(K\sqrt{K'}, \sqrt{\frac{K'K}{7}} \right)$ alors on peut choisir ϵ tel que $K_\nu < 1$.

Remarque 2.3. Dans le cas non visqueux (*i.e.* $\nu = 0$), on obtient

$$\|q_2\|_{H^1(Q_f)}^2 < \Delta t K_d \|q_1\|_{H^1(Q_f)}^2, \quad (2.29)$$

où K_d est une constante ne dépendant que des données. En outre, dans le cas non-visqueux, il existe une solution analytique au problème fluide (*c.f.* section 2.2.3), ce qui nous permettra de valider nos résultats. □

2.2.2 Résolution numérique

Discrétisation en espace.

Pour mettre en œuvre la méthode présentée dans la section précédente 2.2.1, on résout l'équation du fluide en utilisant une discrétisation par éléments finis et le problème de la structure est discrétisé par la méthode de Galerkin.

On souhaite approcher la solution du problème faible suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1x}}{\partial t^2} \psi_x + B \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_{1x}}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_{1y}}{\partial x} \psi_x \\ + B' \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1x}}{\partial x \partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1y}}{\partial x \partial t} \psi_x = 0 \quad \forall \psi_x \in \mathcal{W}_x \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1y}}{\partial t^2} \psi_y + B\chi \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1y}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B \int_{\Omega_s} \xi_y \psi_y + B\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \psi_y + B' \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \psi_y \\ + B'\chi \int_{\Omega_s} \frac{\partial^3 \xi_{1y}}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1x}}{\partial x \partial t} \psi_y = \int_{\Omega_s} \left(p_1 - \frac{4\nu}{3} \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) \psi_y \quad \forall \psi_y \in \mathcal{W}_y \end{aligned} \quad (2.31)$$

et

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p_2}{\partial t} \phi + \frac{4\nu}{3} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial p_2}{\partial t} \nabla \phi + \int_{\Omega} \nabla p_2 \nabla \phi = \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{1y}}{\partial t^2} \phi, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \quad (2.32)$$

où $\mathcal{W}_x = H_0^1(\Omega_s)$ et $\mathcal{W}_y = \{\psi_y \in H_0^2(\Omega_s) / \psi_y = \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_s\}$.

Pour ce faire, on approche respectivement les espaces \mathcal{W}_x , \mathcal{W}_y et $H^1(\Omega)$ par $W_{kx} = \langle \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_k} \rangle$, $W_{ky} = \langle \phi_{y_1}, \dots, \phi_{y_k} \rangle$ et $V_k = \langle \psi_1, \dots, \psi_k \rangle$.

Pour le problème fluide, les vecteurs de bases ψ_i sont issus de la méthode des éléments finis. Nous utilisons des éléments de type Hermite sur un maillage raffiné près des frontières sur lesquelles on applique un gradient de pression (*figure 2.2* - maillage du demi-domaine inférieur en triangle et éléments *2P3D* du logiciel ©*Modulef*¹). On approche la solution du problème variationnel (2.32) par $p_k = \sum_{i=1}^k a_i \psi_i$.

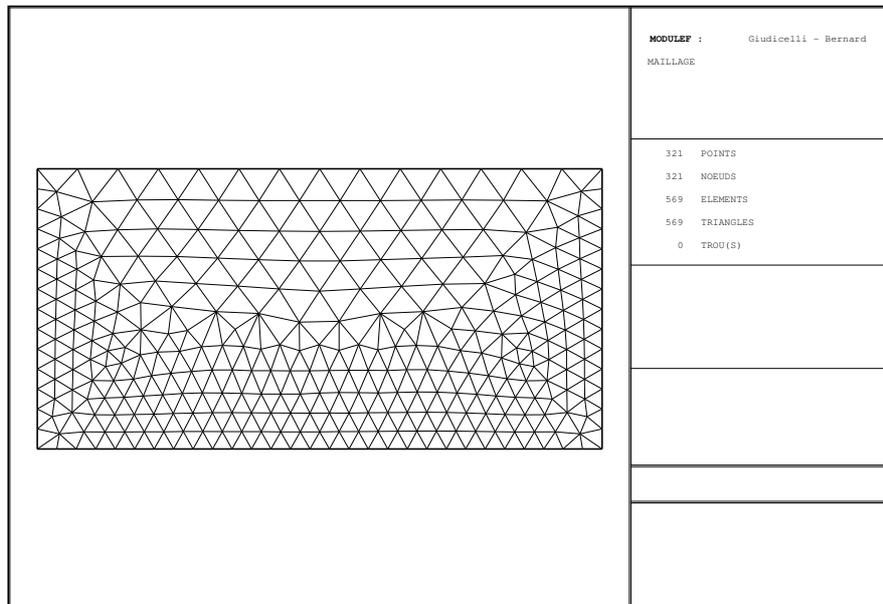


FIG. 2.2 – Maillage du demi-domaine inférieur

En ce qui concerne la structure, on choisit les bases propres $\phi_{x_k}(x) = \sqrt{2} \cos(k\pi x)$ et $\phi_{y_k}(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$. Les solutions de (2.30-2.31) sont approchées par $\xi_{x_k} = \sum_{i=0}^k b_i \cos(i\pi x)$ et $\xi_{y_k} = \sum_{i=1}^k c_i \sin(i\pi x)$.

1. Logiciel *I.N.R.I.A. - Simulog*©

Les fonctions a_i , b_i et c_i ne dépendent que du temps et sont telles que p_k , ξ_{xk} et ξ_{yk} soient solutions des problèmes suivants :

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{ki}^1}{\partial t^2} \phi_{xi} + B \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_{xk}^1}{\partial x} \frac{\partial \phi_{xi}}{\partial x} + B\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_{yk}^1}{\partial x} \phi_{xi} + B' \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{xk}^1}{\partial x \partial t} \frac{\partial \phi_{xi}}{\partial x} + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{yk}^1}{\partial x \partial t} \phi_{xi} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad (2.33)$$

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{yk}^1}{\partial t^2} \phi_{yi} + B\chi \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{yk}^1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{yi}}{\partial x^2} + B \int_{\Omega_s} \xi_{yk}^1 \phi_{yi} + B\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_{xk}^1}{\partial x} \phi_{yi} + B' \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_{yk}^1}{\partial t} \phi_{yi} + B'\chi \int_{\Omega_s} \frac{\partial^3 \xi_{yk}^1}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 \phi_{yi}}{\partial x^2} + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{xk}^1}{\partial x \partial t} \phi_{yi} = \int_{\Omega_s} \left(p_1 - \frac{4\nu}{3} \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) \phi_{yi}, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.34)$$

et

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p_k^2}{\partial t} \psi_i + \frac{4\nu}{3} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial p_k^2}{\partial t} \nabla \psi_i + \int_{\Omega} \nabla p_k^2 \nabla \psi_i = \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \xi_{yk}^1}{\partial t^2} \psi_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad (2.35)$$

où l'exposant représente le numéro de l'itération du processus de couplage.

Finalement, on écrit (2.33)(2.34) et (2.35) sous la forme du système différentiel suivant :

$$\overline{\overline{M}}_{c1} \frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} + B \overline{\overline{K}}_c \bar{a} + B\nu_c \overline{\overline{M}}_{c3} \bar{b} + B' \overline{\overline{K}}_c \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + B'\nu_c \overline{\overline{M}}_{c3} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = 0, \quad (2.36)$$

$$\overline{\overline{M}}_{c1} \frac{d^2 \bar{b}}{dt^2} + B\chi \overline{\overline{M}}_{c2} \bar{b} + B \overline{\overline{M}}_{c1} \bar{b} + B\nu_c \overline{\overline{M}}_{c3} \bar{a} + B'\chi \overline{\overline{M}}_{c2} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + B' \overline{\overline{M}}_{c1} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + B'\nu_c \overline{\overline{M}}_{c3} \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \bar{r}_s \quad (2.37)$$

et

$$\overline{\overline{M}} \frac{d^2 \bar{c}}{dt^2} + \frac{4\nu}{3} \overline{\overline{K}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \overline{\overline{K}} \bar{c} = \bar{r}_f, \quad (2.38)$$

$$\text{où les inconnues sont } \bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Les matrices du problème de structure sont définies par :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M}}_{c1} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{M}}_{c2} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^4}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{16\pi^4}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k^4\pi^4}{2} \end{bmatrix}, \\ \overline{\overline{M}}_{c3} &= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{K}}_c = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & \pi^2 & \frac{3\pi^2}{2} & \dots & \frac{k\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \dots & \dots & \dots & k\pi^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{k\pi^2}{2} & \dots & \dots & \dots & \frac{k^2\pi^2}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices de masse et de raideur du fluide sont :

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} (\psi_1)^2 & \dots & \int_{\Omega} \psi_1 \psi_k \\ \int_{\Omega} \psi_2 \psi_1 & \dots & \int_{\Omega} \psi_2 \psi_k \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\Omega} \psi_k \psi_1 & \dots & \int_{\Omega} (\psi_k)^2 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} (\nabla \psi_1)^2 & \dots & \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla \psi_k \\ \int_{\Omega} \nabla \psi_2 \nabla \psi_1 & \dots & \int_{\Omega} \nabla \psi_2 \nabla \psi_k \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\Omega} \nabla \psi_k \nabla \psi_1 & \dots & \int_{\Omega} (\nabla \psi_k)^2 \end{bmatrix}.$$

Toutes ces matrices ne sont calculées qu'une seule fois, et ne dépendent pas de l'itération.

Les vecteurs seconds membres \bar{r}_s et \bar{r}_f sont respectivement les projections de la trace de $\sum_{i=1}^k c_i \psi_i - \frac{4\nu}{3} \sum_{i=1}^k \frac{dc_i}{dt} \psi_i$ sur $\{\phi_j\}_{j \in (1, \dots, k)}$ et de $\sum_{j=1}^k \frac{d^2 b_j}{dt^2} \phi_j$ sur $\{(\psi_i)_{\Omega_s}\}_{i \in (1, \dots, k)}$.

Discretisation temporelle.

Pour résoudre les systèmes différentiels (2.36), (2.37) et (2.38), on utilise le schéma d'ordre deux de Newmark. Le choix de cette technique est conduit par sa stabilité. Cette discrétisation consiste à exprimer les inconnues et les dérivées premières de ces dernières, en fonction de la dérivée seconde. Soit le système différentiel d'ordre deux suivant :

$$\overline{\overline{A}} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \overline{\overline{B}} \frac{d\eta}{dt} + \overline{\overline{C}} \eta = F. \quad (2.39)$$

On note $\eta^{n+1} = \eta(t_{n+1})$. On considère α et β les deux coefficients de Newmark, alors le schéma numérique est le suivant :

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \Delta t \frac{d\eta^n}{dt} + \Delta t^2 \left(\beta \frac{d^2\eta^{n+1}}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \frac{d^2\eta^n}{dt^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (2.40)$$

$$\frac{d\eta^{n+1}}{dt} = \frac{d\eta^n}{dt} + \Delta t \left(\alpha \frac{d^2\eta^{n+1}}{dt^2} + (1 - \alpha) \frac{d^2\eta^n}{dt^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (2.41)$$

En insérant (2.40) et (2.41) dans (2.39) on obtient :

$$\overline{\overline{A_N}} \frac{d^2\eta^{n+1}}{dt^2} = F', \quad (2.42)$$

où

$$F' = F - \overline{\overline{B}} \left(\frac{d\eta^n}{dt} + \Delta t(1 - \alpha) \frac{d^2\eta^{n+1}}{dt^2} \right) - \overline{\overline{C}} \left(\eta^n + \Delta t \frac{d\eta^n}{dt} + \Delta t^2(1 - \beta) \frac{d^2\eta^{n+1}}{dt^2} \right),$$

et

$$\overline{\overline{A_N}} = \overline{\overline{A}} + \alpha \Delta t \overline{\overline{B}} + \beta \Delta t^2 \overline{\overline{C}}.$$

Finalement, le système différentiel (2.39) est approché par k systèmes matriciels de type (2.42).

Le schéma de Newmark semble donc bien adapté à la résolution des systèmes (2.36-2.37-2.38). De plus, on dispose de résultats classiques sur la stabilité de ce schéma. En particulier si les coefficients α et β vérifient :

$$\alpha \geq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (2.43)$$

alors le schéma de Newmark est stable [19].

2.2.3 Solutions analytiques

Dans l'objectif de valider le code de calcul développé à partir de la méthode précédemment présentée, nous avons déterminé une solution analytique lorsque la coque a un comportement purement élastique et lorsque le fluide est non visqueux. Nous résolvons tout d'abord le problème en régime harmonique. On fixe une force d'excitation de la forme $\mathbf{F}_{\text{ext}}(x,t) = (0, f(x)\sin(\omega t))$, et nous recherchons la solution sous la forme $\xi_y(x,t) = \varsigma_y(x)\sin(\omega t)$, $\xi_x(x,t) = \varsigma_x(x)\sin(\omega t)$, $p(x,y,t) = p(x,y)\sin(\omega t)$.

Dans le cas particulier d'un fluide non visqueux ($\nu = 0$) couplé à une coque dont le comportement est purement élastique ($B' = 0$), on se ramène à l'étude du problème stationnaire suivant :

$$\Delta p + \omega^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\pm}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a. \quad (2.46)$$

La condition de couplage devient :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\omega^2 \varsigma_y \quad \text{sur } \Omega_s. \quad (2.47)$$

En ce qui concerne le problème de coque, il s'écrit sous la forme suivante :

$$\omega^2 \varsigma_x + B \frac{\partial^2 \varsigma_x}{\partial x^2} + B\nu_c \frac{\partial \varsigma_y}{\partial x} = 0, \quad (2.48)$$

$$(B - \omega^2) \varsigma_y + B\chi \frac{\partial^4 \varsigma_y}{\partial x^4} + B\nu_c \frac{\partial \varsigma_x}{\partial x} = f - p, \quad (2.49)$$

avec les conditions aux limites

$$\varsigma_y = \Delta \varsigma_y = \frac{\partial \varsigma_x}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_s. \quad (2.50)$$

Nous utilisons la base de $L_0^2(\Omega_s)$ composée des $X_n = \sin(n\pi x)$ pour obtenir la solution du déplacement sous la forme de série. La force appliquée s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot X_n(x).$$

On recherche les solutions sous la forme :

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot X_n(x) \cdot Y_n(y),$$

$$\varsigma_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma_{yn} \cdot X_n(x),$$

où $Y_n(y) = \text{ch}(\alpha_n(y - R))$. Pour le déplacement longitudinal ς_x , nous projetons sur une base de cosinus afin de vérifier la condition aux limites, soit :

$$\varsigma_x(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma_{xn} \cdot \cos(n\pi x),$$

La recherche de la solution se résume donc à la résolution des systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} D\chi n^4 \pi^4 + D - \alpha n^2 \pi^2 \omega^2 - \frac{D^2 \nu_c^2 n^2 \pi^2}{D n^2 \pi^2 - m h \omega^2} - m h \omega^2 & ch(\alpha_n R) \\ \omega^2 & \alpha_n sh(\alpha_n R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_{yn} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha_n = \sqrt{n^2 \pi^2 - \omega^2}$.

Dans le cas où le déterminant du système matriciel précédent n'est pas nul, les solutions uniques sont

$$p_n = \frac{\omega^2 f_n}{\omega^2 \alpha_n sh(\alpha_n R) - ch(\alpha_n R) \left(D\chi n^4 \pi^4 + D - \alpha n^2 \pi^2 \omega^2 - \frac{D^2 \nu_c^2 n^2 \pi^2}{D n^2 \pi^2 - m h \omega^2} - m h \omega^2 \right)},$$

$$\varsigma_{yn} = -\frac{\alpha_n sh(\alpha_n R)}{\omega^2} p_n.$$

Les valeurs de ω pour lesquelles le déterminant est nul correspondent aux fréquences propres du système couplé. Ainsi, les fréquences de résonance sont les solutions de l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \sqrt{\pi^2 - \omega^2} \sinh \left(\sqrt{\pi^2 - \omega^2} R \right) \left[\alpha \pi 2 \omega^2 - \frac{D^2 \nu_c^2 \pi^2}{D^2 \pi^2 - m h \omega^2} - m h \omega^2 \right] \\ & - \omega^2 \cosh \left(\sqrt{\pi^2 - \omega^2} R \right) + \sqrt{\pi^2 - \omega^2} \sinh \left(\sqrt{\pi^2 - \omega^2} R \right) [D\chi \pi^4 + D] = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Il est important de déterminer les valeurs de ces fréquences, car elles sont un des éléments de validation des résultats. De plus, dans le cas d'applications industrielles, il est important de connaître ces fréquences afin d'éviter la rupture des systèmes.

2.2.4 Résultats

Dans cette section nous présentons différents résultats numériques. Dans un premier temps on a réalisé une série de tests numériques permettant la comparaison avec la solution analytique (*c.f.* section (2.2.3)). Puis nous présentons les résultats obtenus lorsqu'on impose un flux (G_{\pm}). Nous avons ensuite élaboré un code de calcul résolvant le problème C_1 afin de comparer les résultats. Finalement, nous présentons quelques tests réalisés à partir du code résolvant le problème C_1 .

Comparaison analytique-numérique

Lors de la mise en application du code numérique, on procède au calage des différents paramètres. Pour la coque, il faut obtenir la dérivée seconde en temps avec le minimum d'erreur, car celle-ci constitue le terme d'excitation du fluide. Il y a une forte influence du choix des coefficients de Newmark sur la qualité de ce terme source. Ce calage délicat est facilité par l'utilisation de la solution analytique.

Dans cette section, nous présentons une partie des différents tests effectués. Les premiers tests sont réalisés sans flux ($G_{\pm} \equiv 0$), en appliquant sur la coque, une force de type pulsation sinusoïdale de la forme

$$F = \sin(\pi x)\sin(\omega t).$$

Cette série de tests peut donc être directement comparée avec les solutions analytiques. On présente les résultats numériques et la solution analytique obtenue pour différentes fréquences.

Les courbes suivantes représentent l'évolution au cours du temps, de la pression en un point central du domaine fluide ($x = L/2, y = R/2$).

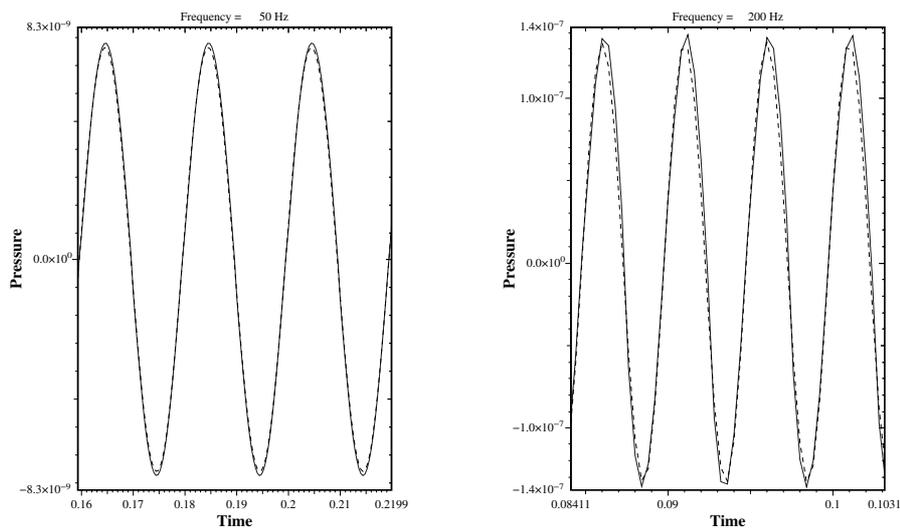


FIG. 2.3 – Pression intérieure pour $\omega = 50\text{Hz}$ et $\omega = 200\text{Hz}$

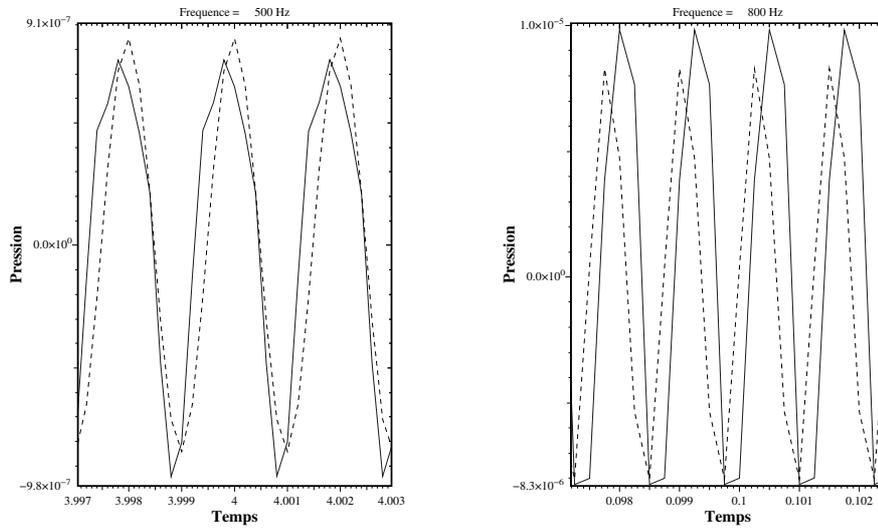


FIG. 2.4 – Pression intérieure pour $\omega = 500\text{Hz}$ et $\omega = 800\text{Hz}$

Le tracé continu correspond au résultat obtenu par simulation et la courbe en pointillés représente la solution analytique. Toujours pour cette série de tests, nous donnons le déplacement au point ($x = L/2$) milieu de la coque.

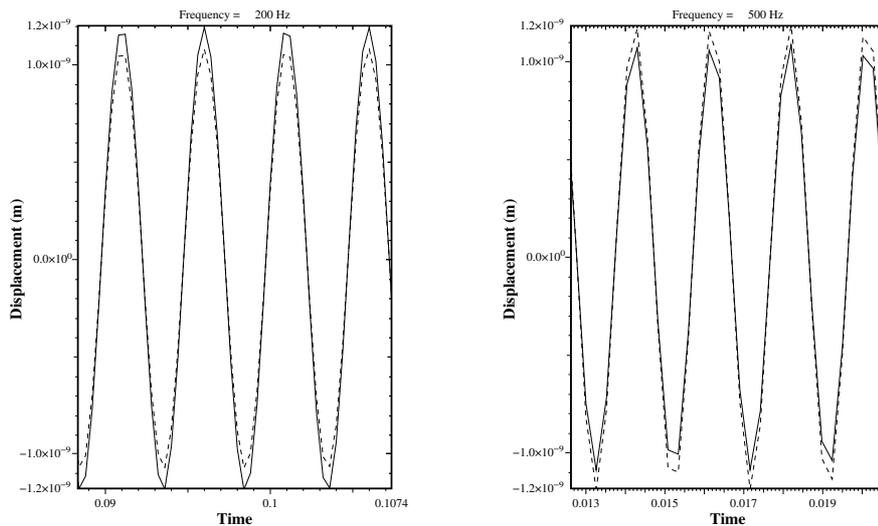


FIG. 2.5 – Déplacement Structure à 200Hz et 500Hz

Nous remarquons que la solution numérique du déplacement est très proche de la solution analytique. Par contre, en ce qui concerne la pression à l'intérieur du domaine fluide, l'erreur numérique semble plus importante à haute fréquence, pour devenir instable (voir figure 2.4). Au delà de 500 Hz le pas de temps Δt devient très difficile à caler. Le code numérique ne supporte pas des pas de temps trop petits, ce qui ne permet pas de tester des fréquences supérieures à 1000 Hz car il est nécessaire de discrétiser une période avec suffisamment de pas de temps pour prendre en compte le comportement du système.

Les champs de pression calculés correspondent quantitativement aux champs théoriques. D'un point de vue qualitatif, le gradient de pression correspond bien à la physique du problème. Nous présentons ici les champs de pression et de gradient de pression obtenus pendant les phases de compression et d'aspiration (*i.e.* déplacement positif et négatif).

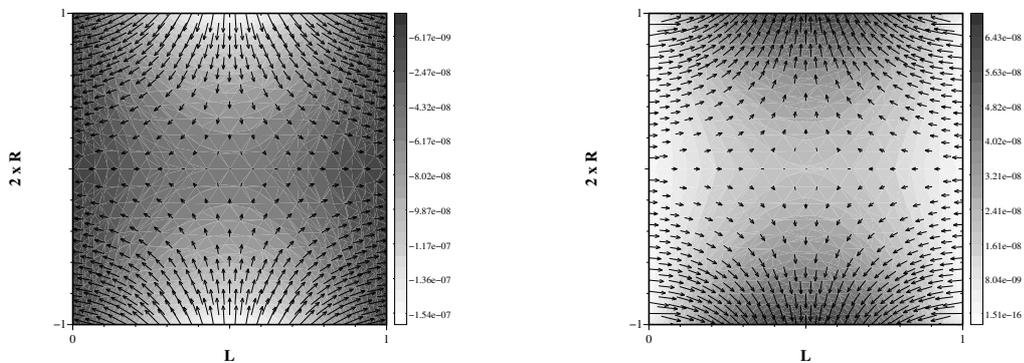


FIG. 2.6 – Champs de pression et gradient de pression - Compression et extension

Afin d'apporter une nouvelle validation de notre code de calcul, nous avons observé numériquement le comportement du système couplé par le biais de ses fréquences propres. Toujours dans le cas d'une action extérieure sinusoïdale, en choisissant des conditions initiales nulles, on observe une phase transitoire avant l'apparition du régime stationnaire (*figure 2.7*).

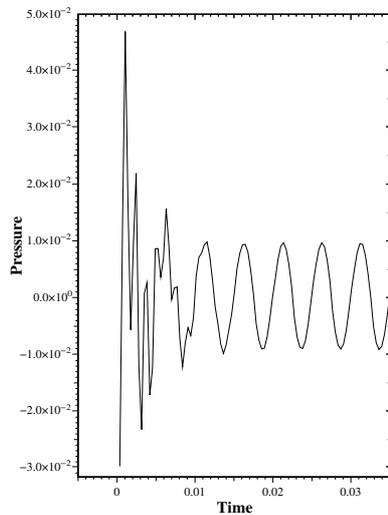


FIG. 2.7 – Evolution du point
($x = L/2$) de la structure

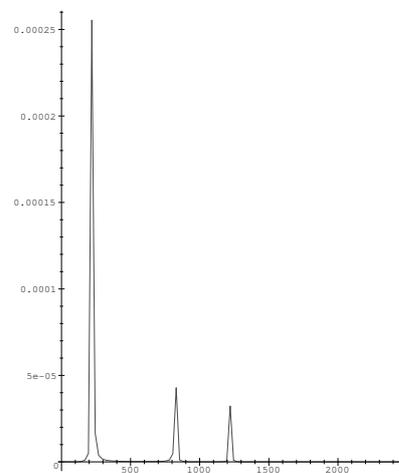


FIG. 2.8 – Spectre en fréquence
du déplacement

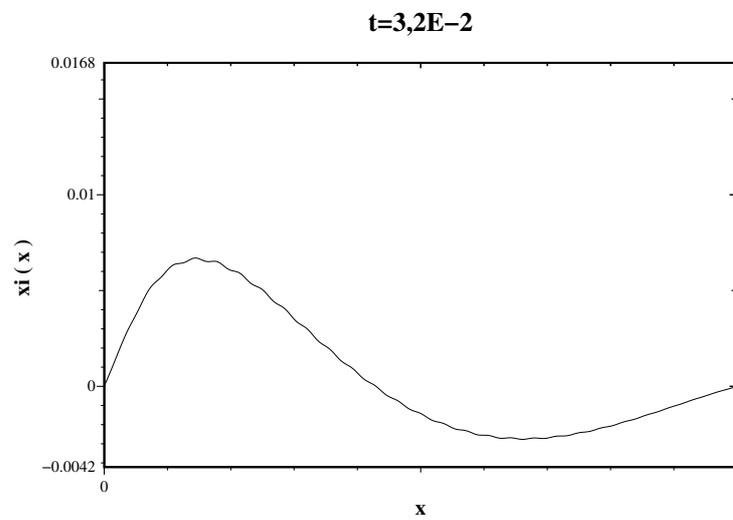
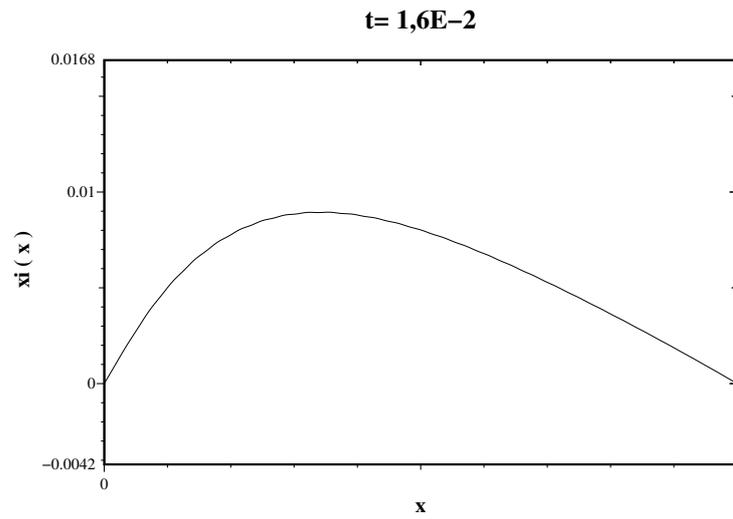
L'analyse modale par transformation de Fourier rapide (F.F.T.) de ce signal permet d'obtenir le spectre en fréquence *figure 2.8*. Nous observons distinctement le pic relatif à la fréquence d'excitation de 200 Hz , mais également les deux pics correspondant aux deux premières fréquences de résonance. Les fréquences observées correspondent aux fréquences analytiquement obtenues en résolvant (2.51) (la résolution de (2.51) est effectuée par le biais du logiciel de calcul scientifique *Maple*®²). Nous avons effectué de nombreux tests avec différentes fréquences propres et ils ont tous été concluants. Nous remarquons cependant qu'étant donné la valeur relativement importante de ces fréquences, nous ne pouvons observer que les premières fréquences propres (le code ne supportant pas les pas de temps trop petits), car le pas de temps doit être ajusté afin d'avoir une fréquence d'échantillonnage satisfaisante.

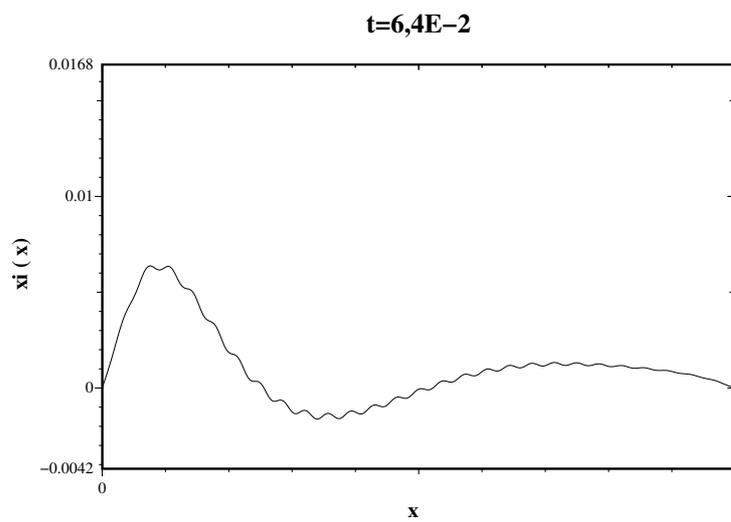
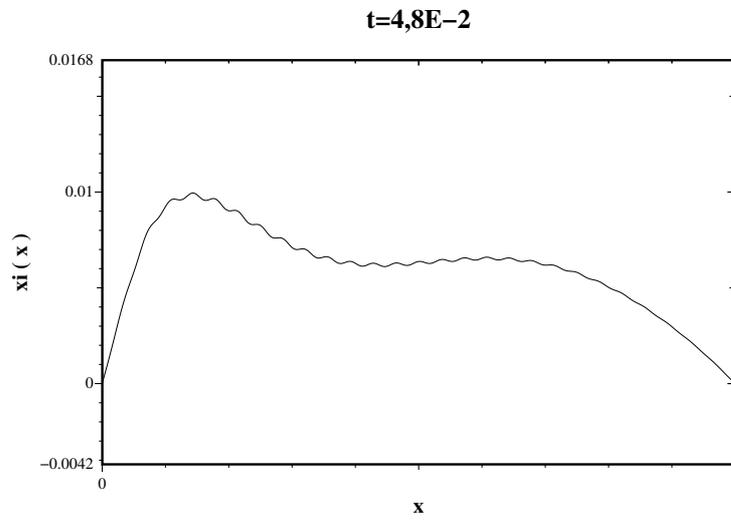
Résultats avec un flux imposé

On effectue une série de tests sans forçage sur la coque, mais en imposant une différence de pression entre les deux sections circulaires (section d'entrée-sortie).

2. Logiciel *I.N.R.I.A.* - *MapleSoft* ©

Comme précédemment, une période transitoire précède un régime stationnaire. La série de résultats suivants représente l'évolution de la structure à différents instants de la phase de transition.





Ces tests permettent également d'effectuer une série d'analyses modales qui valident elles aussi les résultats en les comparant aux fréquences propres analytiques.

La série suivante présente la reconstitution 3D de la coque pour le même type de test (le déplacement y est amplifié et la palette de couleur le représente)

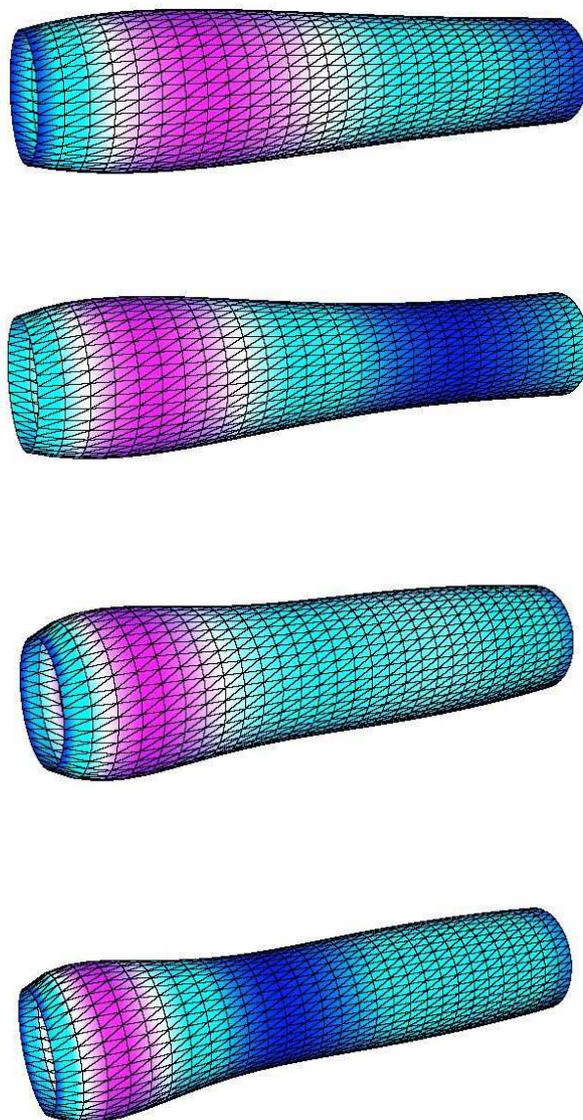


FIG. 2.9 – Coque à différents instants de la phase initiale

Ces différentes expérimentations numériques permettent de valider notre méthode de résolution en comparant les solutions obtenues avec les résultats analytiques (cette comparaison a notamment permis un calage optimum des paramètres numériques du schéma de Newmark).

Pour finir, les résultats suivants représentent la coque à différents instants, lorsque l'on impose une condition aux limites traduisant une pulsation cardiaque (*i.e.* $P = K \sin \omega t$ sur Γ_+)

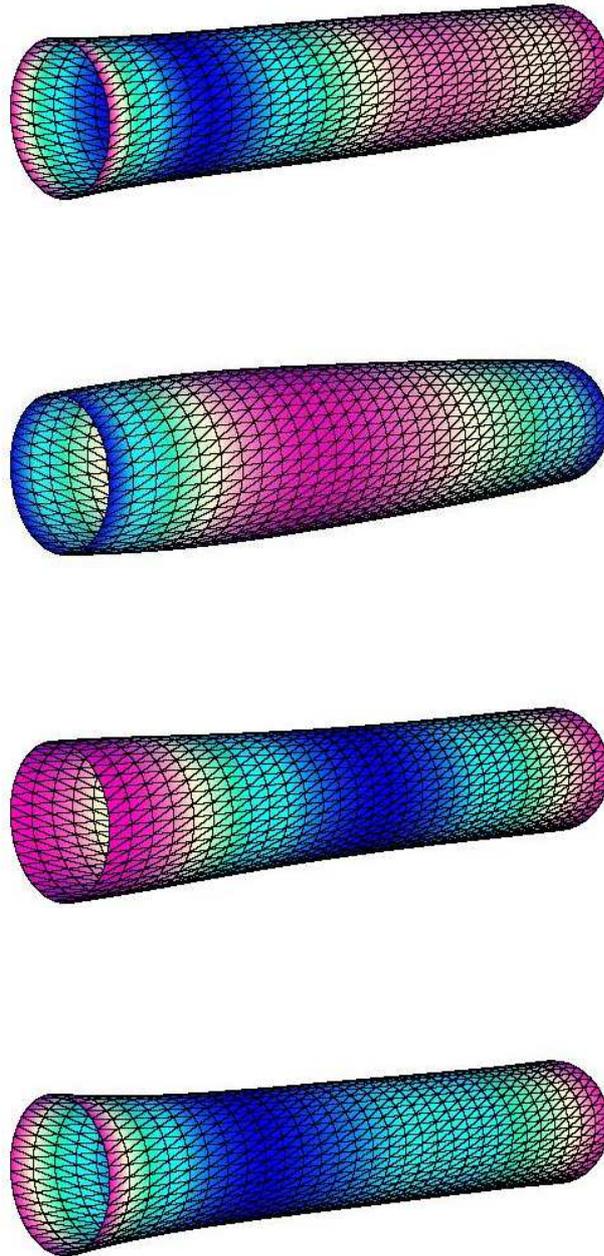


FIG. 2.10 – Coque à différents instants en régime pulsatif

Il reste à éprouver notre modèle afin de déterminer le domaine de validité de l'approximation fluide irrotationnel. En effet, il faut déterminer dans quels cas le modèle en pression peut être utilisé pour simuler de manière acceptable le flux d'un fluide linéaire.

Comparaison Modèle en Pression - Stokes linéaire.

Dans le but de définir un domaine de validité du code de calcul issu du modèle

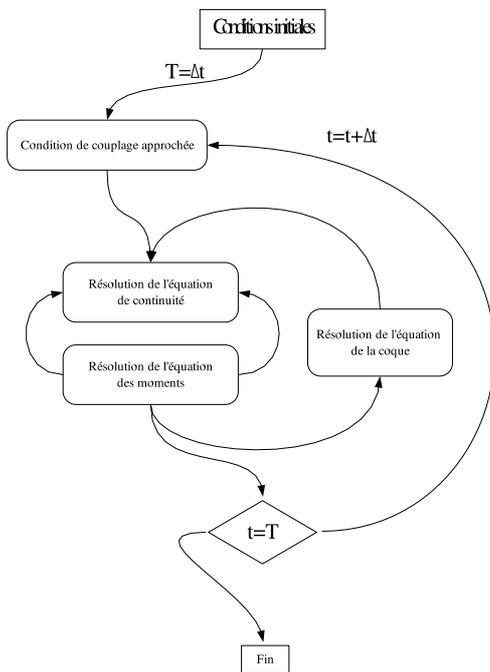


FIG. 2.11 – *Algorithme*

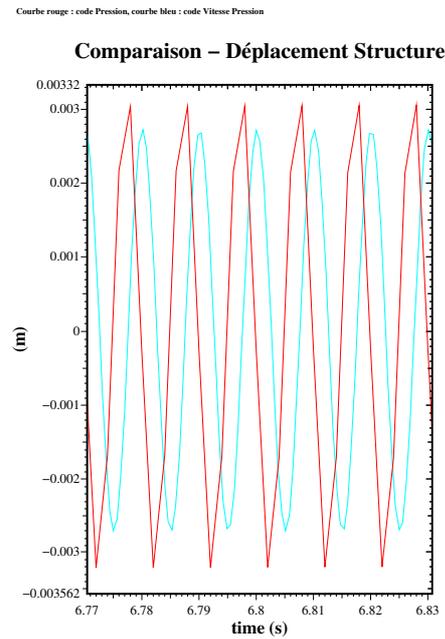
en pression (C_2), nous avons développé un code de simulation basé sur le modèle de Stokes linéaire (C_1).

La méthode utilisée pour résoudre le problème fluide est toujours la méthode des éléments finis couplée à un schéma de Newmark, mais dans ce cas on effectue un point fixe entre l'équation des moments et l'équation de continuité.

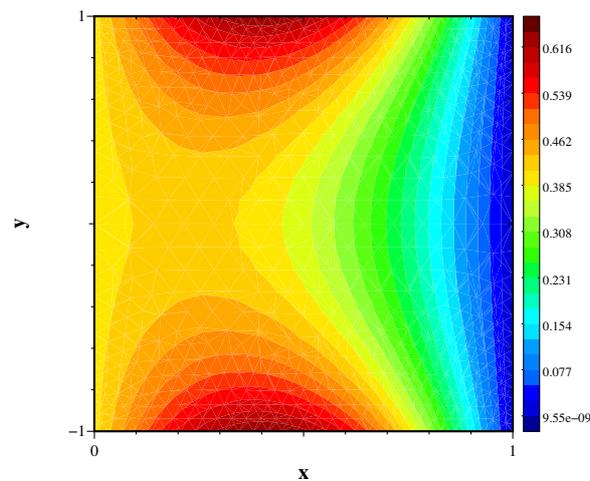
Afin de bien comparer les résultats, on conserve le même maillage que celui utilisé pour la résolution du modèle en pression.

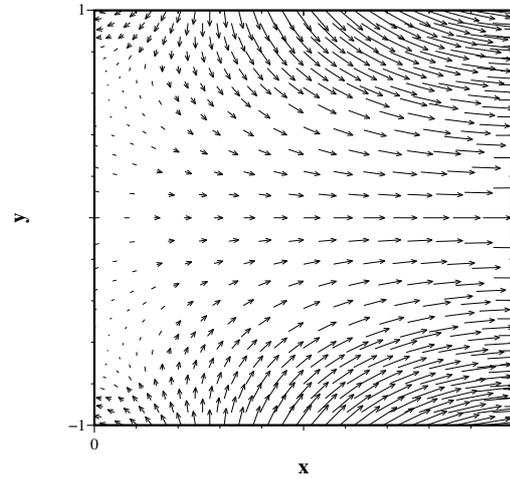
Il s'avère que la résolution numérique des deux modèles est très sensible aux données du problème et l'intersection des domaines de stabilité des deux codes est petite. Les valeurs de la viscosité, la rigidité de la structure et du pas de temps pour lesquelles les deux codes sont stables ne permettent malheureusement pas d'établir une série de tests probants.

Les résultats obtenus mettent en évidence la complémentarité des modèles, mais ne peuvent pas sensiblement être comparés. Nous présentons cependant le résultat suivant qui représente les déplacements de la structure obtenus avec les deux codes de calcul pour des données permettant la stabilité des deux codes.

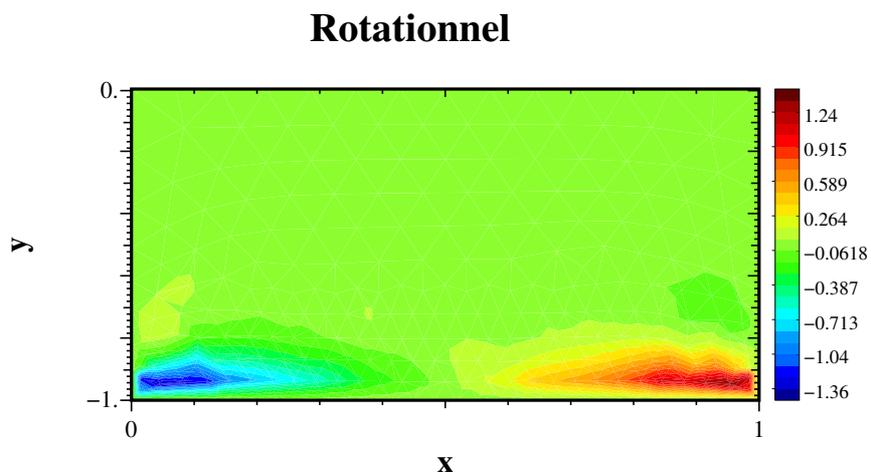
FIG. 2.12 – *Fréquence = 100 Hz*

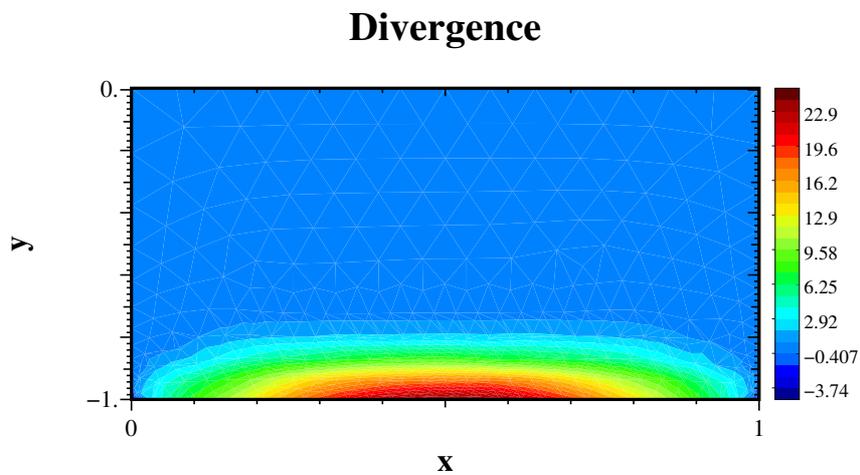
Le code en vitesse pression du modèle de Stokes fut éprouvé par la réalisation de divers tests. Ils ont notamment permis de déterminer le domaine de stabilité. Nous présentons les résultats obtenus dans le cas où la structure est soumise à un forçage sinusoïdal et le fluide subit un écoulement forcé.

FIG. 2.13 – *Champ de pression*

FIG. 2.14 – *Champ de vitesse*

Lorsque le fluide est seulement soumis à une action de la coque, on présente le rotationnel de la vitesse du fluide ainsi que la divergence dans le demi-domaine inférieur (la coque est située en $y = -1$).

FIG. 2.15 – *Rotationnel de la vitesse*

FIG. 2.16 – *Divergence de la vitesse*

En conclusion, les deux modèles sont complémentaires puisqu'ils ne couvrent pas les mêmes plages de valeur des données. Le code en pression semble être bien adapté aux simulations de fluide faiblement visqueux et supporte mieux les amplitudes du déplacement de la structure. Par contre, le code de résolution du modèle de Stokes opère pour des fluides visqueux dans le cas de très faibles perturbations.

Chapitre 3

Problème non-linéaire

Prévoir et contrôler le comportement d'un fluide couplé à une structure élastique est une question primordiale dans de nombreux domaines : aérodynamique, biomécanique, acoustique. La variation du domaine fluide n'étant pas connue a priori, il s'agit d'un problème de frontière libre dont l'étude génère une littérature mathématique abondante.

Pour des solides élastiques plongés dans des fluides visqueux incompressibles, il convient de citer les travaux de B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec [18] qui montrent un résultat de solutions faibles. Ce travail a été suivi en dimension deux par un résultat de C. Grandmont, Y. Maday et P. Métier [39] qui proposent une modélisation plus fine du mouvement du solide.

Enfin, plus récemment, M. Boulakia [6] a complété cette modélisation des déplacements du solide en proposant un modèle valide dans un plus grand nombre de situations physiques.

Pour des solides élastiques plongés dans un fluide compressible, citons à nouveau les travaux de M. Boulakia [9] qui donne un résultat d'existence de solutions faibles en dimension trois.

Pour des fluides visqueux incompressibles couplés à des structures élastiques minces, citons les travaux de A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont qui donnent un résultat d'existence de solutions faibles dans le cas tridimensionnel lorsque la structure est une plaque mince [12]. Il convient aussi de citer H. Beirao da Veiga [15] qui montre l'existence pour des données petites de solutions

fortes locales en temps pour un problème de flux artériel.

Enfin, pour des fluides compressibles couplés à des structures élastiques minces, on citera les travaux de F. Flori et P. Orenca [32] qui donnent un résultat d'existence pour un modèle de fluide compressible tridimensionnel ($\gamma = 1$) de type Stokes couplé à une plaque mince. Notons que les auteurs obtiennent aussi l'unicité de la solution en dimension deux [31].

Ce chapitre, qui a fait l'objet d'une publication [29], est consacré à l'étude d'un problème de couplage entre un modèle de fluide compressible bidimensionnel ($\gamma \geq 1$) de type Stokes et un opérateur de coque cylindrique de type Donnell (modèle C3). Nous donnons un résultat d'existence de solutions faibles pour des données petites et proposons une méthode de construction de solutions approchées basée sur une discrétisation lagrangienne des équations.

La principale difficulté des problèmes d'interaction fluide-structure faisant intervenir des structures élastiques est généralement liée à l'absence de régularité des mouvements de la frontière donnée par les modèles classiques de l'élasticité. Or, si l'on veut que les modèles étudiés aient un sens, il convient de travailler avec des déplacements suffisamment réguliers pour éviter d'être confrontés à trois situations physiques délicates. La première de ces situations concerne exclusivement les solides élastiques plongés dans des fluides visqueux pour lesquels les résultats d'existence sont toujours locaux en temps (tant qu'il n'y a pas de chocs). Pour ce type de problème, si on ne contrôle pas la vitesse des déplacements dans $L^2(0, T ; L^\infty(\Omega))$, il peut y avoir des chocs instantanés. L'autre situation à éviter est l'interpénétration. En effet, pour que notre étude ait un sens, il faudra s'assurer de la bijection entre la configuration de référence et la configuration déformée. Là encore, il faudra que les déplacements soient suffisamment réguliers. En particulier, on devra contrôler $\nabla \xi$ dans $L^\infty(Q)$. Le contrôle de $\nabla \xi$ sera utile pour éviter la troisième situation physique indésirable, la non préservation de l'orientation. En particulier on devra montrer que le déterminant de la matrice jacobienne vérifie $|\mathcal{J}_\Xi| > 0$.

Pour obtenir cette régularité sur ξ , deux approches sont généralement utilisées. La première consiste à régulariser les équations de l'élasticité à l'image de ce qui

est fait dans [12], [31], [32], [6] et [9]. Cette approche est justifiée par la théorie des matériaux multipolaires qui introduit avec une justification physique des tenseurs de contrainte comprenant des dérivées en espace de la vitesse d'ordre élevé. Une autre technique consiste à décomposer ξ sur les premiers modes élastiques comme dans [18] et [39]. Dans ce travail, nous penchons pour cette seconde approche qui à nos yeux est plus réaliste d'un point de vue numérique.

On se propose d'étudier le problème non linéaire (C_3) (*c.f.* chapitre 1) défini dans $Q = \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t$.

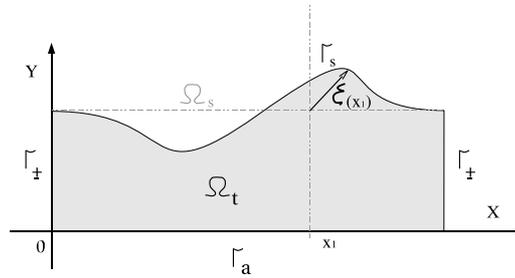


FIG. 3.1 – *Domaine d'étude*

Nous donnons un résultat d'existence pour ce problème et le chapitre s'articule autour de la démonstration de ce théorème. Dans un premier temps, nous présentons l'obtention des majorations a priori. Puis nous donnons des résultats de compacité nécessaires au passage à la limite. Finalement, nous proposons une méthode de construction des solutions approchées basée sur une discrétisation lagrangienne.

3.1 Estimations a priori

Dans cette première partie nous montrons comment obtenir des estimations d'énergie suffisantes pour passer à la limite dans les équations.

On commence par introduire un relèvement \mathbf{w}_f traduisant le flux à travers Γ_{\pm} :

$$(R_f) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{w}_f - \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{w}_f = \mathbf{F}_f \in W^{1,\infty}(Q) & \text{dans } Q \\ \mathbf{w}_f = 0 & \text{sur } \Sigma_s = \bigcup_{t \in (0,T)} \{t\} \times \Gamma_s, \\ \mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n} = G_{\pm} \in H^{p_G}(\Sigma_{\pm}), \quad p_G > 5/2, & \text{sur } \Sigma_{\pm} = (0,T) \times \Gamma_{\pm}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{w}_f = 0 & \text{sur } \Sigma_{\pm}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que \mathbf{w}_f vérifie $(\operatorname{div} \mathbf{w}_f) \in L^{\infty}(Q)$ et que $\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}, \Delta \mathbf{w}_f, (\mathbf{w}_f \cdot \nabla) \mathbf{w}_f \in L^2(Q)$.

L'utilisation d'un modèle de structure régulier, obtenu en projetant le déplacement de la coque sur les N_s premiers vecteurs de la base propre de l'opérateur de coque A_s , permet l'étude du problème de relèvement R_f dans Q .

On effectue le changement de variable $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}_f$ pour obtenir le problème :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}) - \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{3} \nu \nabla \operatorname{div} (\mathbf{v}) + a \nabla \rho^{\gamma} \\ + \nabla (\mathbf{v} \mathbf{w}_f) + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w}_f) + \operatorname{rot} \mathbf{w}_f \wedge (\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{w}_f), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho (\mathbf{v} + \mathbf{w}_f)) = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{où } \mathbf{F}(\mathbf{w}_f) = -\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{w}_f^2 - \operatorname{rot} \mathbf{w}_f \wedge (\mathbf{w}_f) - \mathbf{F}_f \in L^2(Q).$$

Les conditions aux limites deviennent $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ sur Σ_{\pm} et $\mathbf{v}(\Xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ sur Q_s .

Les cas $\gamma = 1$ et $\gamma > 1$ nécessitant des conditions différentes sur les données, nous procédons à une étude séparée de ces deux situations.

3.1.1 Majorations d'énergie lorsque $\gamma = 1$.

La relation (3.1) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{3} \nu \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \nu \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_t)}^2 \\ + a \int_{\Omega_t} \nabla \rho \mathbf{v} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \mathbf{v}^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Omega_t} \mathbf{F}(\mathbf{w}_f) \mathbf{v} + \nu \int_{\Gamma_s} (D(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} \\ + \int_{\Omega_t} \mathbf{v} \mathbf{w}_f \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\Omega_t} \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w}_f) \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \int_{\Gamma_s} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_t)}^2$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \mathbf{v}^2 \operatorname{div} \mathbf{v} \leq \frac{C_g}{2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

où C_g la constante de Gagliardo-Nirenberg vérifiant $\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega_t)}^2 < C_g \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_t)} \|\mathbf{v}\|_{H^1\Omega_t}$

En utilisant l'équation de continuité, on obtient formellement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \nabla \rho \mathbf{v} &= \int_{\Omega_t} \log(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_{\Omega_t} \log(\rho) \operatorname{div} \rho \mathbf{w}_f + \int_{\Gamma_s} \rho \log(\rho) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \log(\rho) - \rho) + \int_{\Omega_t} \log(\rho) \operatorname{div} \rho \mathbf{w}_f + \int_{\Gamma_s} \rho \log(\rho) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \nabla \rho \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\rho \log(\rho) - \rho) + \int_{\Omega_t} \rho \operatorname{div} \mathbf{w}_f \\ &\quad + \int_{\Gamma_+} (\rho \log(\rho) - \rho) G_+ + \int_{\Gamma_-} (P_i \log(P_i) - P_i) G_- + \int_{\Gamma_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Puisque $G_+ \geq 0$ alors $\int_{\Gamma_+} (\rho \log(\rho) - \rho) G_+ \geq - \int_{\Gamma_+} G_+$.

De plus, si

$$(P_i \log P_i - P_i) \in (H^{pg}(\Sigma_-))', \quad (3.5)$$

alors il existe une constante $C_{(P_i, G_-)}$ telle que :

$$\int_{\Gamma_-} (P_i \log P_i - P_i) G_- \leq C_{(P_i, G_-)}. \quad (3.6)$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left(\nu - \frac{C_g}{2} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))} \right) \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \frac{1}{3} \nu \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ + a \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\rho \log \rho - \rho) \leq a \left(C_{(P_i, G_-)} + \int_{\Gamma_+} G_+ - \int_{\Omega_t} \rho \operatorname{div} \mathbf{w}_f \right) + \int_{\Gamma_s} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \\ + \int_{\Omega_t} \mathbf{F}(\mathbf{w}_f) \mathbf{v} - \int_{\Omega_t} (\mathbf{w}_f \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w}_f)) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Or, en utilisant l'équation de conservation de la masse il vient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_t} \rho \operatorname{div} \mathbf{w}_f &\leq \| \operatorname{div} \mathbf{w}_f \|_{L^\infty(\Omega_t)} \left(\int_{\Omega_0} \rho_0 - \int_{\Sigma_-} P_i G_- \right) \\ &\leq C_{(P_i, G_\pm)}, \end{aligned}$$

de plus, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$

$$\int_{\Omega_t} F(\mathbf{w}_f) \mathbf{v} \leq \varepsilon \| \mathbf{v} \|_{H^1(\Omega_t)}^2 + C_\varepsilon \| F(\mathbf{w}_f) \|_{L^2(\Omega_t)}^2,$$

et enfin

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{w}_f \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w}_f)) \mathbf{v} \leq 2 \| \mathbf{w}_f \|_{L^\infty(\Omega_t)} \| \mathbf{v} \|_{H^1(\Omega_t)}^2.$$

Finalement, l'estimation (3.7) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left(\Pi - \frac{C_g}{2} \| \mathbf{v} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} \right) \| \mathbf{v} \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_t))}^2 \\ + a \int_{\Omega_t} \rho(t) \log \rho(t) - \rho(t) \leq C_0 + a \left(C_{(P_i, G_-)} + C_{(P_i, G_\pm)} + \int_{\Sigma_+} G_+ \right) \\ + C_\varepsilon \| F(\mathbf{w}_f) \|_{L^2(Q)}^2 + \int_{\Sigma_s} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\text{où } C_0 = \frac{1}{2} \| \mathbf{v}_0 \|_{L^2(\Omega_0)}^2 + a \int_{\Omega_0} (\rho_0 \log \rho_0 - \rho_0).$$

Les données sont choisies pour que

$$\Pi = \nu - \varepsilon - 2 \| \mathbf{w}_f \|_{L^\infty(Q)} > 0,$$

soit

$$\| \mathbf{w}_f \|_{L^\infty(Q)} < \frac{\nu}{2}. \quad (3.9)$$

Les équations de la structure conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \mathcal{B}' \left\| \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}\chi}{2} \left\| \frac{\partial^2 \xi_y(t)}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\ + \mathcal{B}' \chi \left\| \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial x^2 \partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \| \xi_y(t) \|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \mathcal{B}' \left\| \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 \\ \leq \mathcal{B}\nu_c \int_{Q_s} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right) + \mathcal{B}'\nu_c \int_{Q_s} \left(\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial t} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right) \\ - \int_{Q_s} \sigma(\Xi) \cdot \mathbf{n}(\Xi) | \mathcal{J}_\Xi | \frac{\partial \xi}{\partial t} + C'_0, \quad (3.10) \end{aligned}$$

où

$$C'_0 = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \left\| \frac{\partial(\xi_0)_x}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}\chi}{2} \left\| \frac{\partial^2(\xi_0)_y}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \|(\xi_0)_y\|_{L^2(\Omega_s)}^2.$$

En additionnant (3.8) et (3.10), on obtient grâce à (1.19), l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left(\Pi - \frac{C_g}{2} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_t))}^2 \\ & + a \int_{\Omega_t} (\rho \log \rho(t) - \rho(t)) + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}(1-\nu_c)}{2} \left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\ & + \mathcal{B}'\chi \left\| \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial x^2 \partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}\chi}{2} \left\| \frac{\partial^2 \xi_y(t)}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \mathcal{B}'(1-\nu_c) \left\| \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 \\ & + \mathcal{B}'(1-\nu_c) \left\| \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}(1-\nu_c)}{2} \|\xi_y(t)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \leq D_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $D_0 = C_0 + C'_0 + a(C_{(P_i, G_-)} + C_{(P_i, G_\pm)} + \int_{\Sigma_+} G_+) + C_\varepsilon \|F(\mathbf{w}_f)\|_{L^2(Q)}^2$.

On suppose que les données initiales vérifient :

$$D_0 < 2 \left(\frac{\Pi}{C_g} \right)^2, \quad (3.12)$$

alors on obtient (*c.f.* P. Orenga [58])

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} < \frac{2\Pi}{C_g}.$$

Ces développements montrent le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Si $\gamma = 1$, $D_0 < 2 \left(\frac{\Pi}{C_g} \right)^2$, $\Pi > 0$ et si les hypothèses (3.5,3.13) sont satisfaites, alors $\rho \log \rho \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega_t))$, $\rho \geq 0$, $\mathbf{v} \in L^2(0,T; H^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega_t))$, $\xi_x \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T; H_0^1(\Omega_s))$, $\xi_y \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T; H_0^2(\Omega_s))$.*

Remarque 3.2. Comme ξ est une combinaison linéaire des N_s premiers modes propres, il existe une constante C_{N_s} ne dépendant que du nombre de vecteurs propres sur lesquels le déplacement ξ est projeté, vérifiant l'estimation :

$$\left\| \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right\|_{L^\infty(Q_s)}^2 \leq C_{N_s} \left\| \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_s))}^2 \stackrel{\text{avec (3.11)}}{\leq} C_{N_s} D_0.$$

Si on choisit les données de telle sorte que :

$$C_{N_s} D_0 < 1, \quad (3.13)$$

alors, $\det(J(\Xi)) = 1 + \frac{\partial \xi_x}{\partial x} > 0$ ce qui implique que la transformation Ξ (définie au chapitre 1) et la frontière Γ_s sont bien définies [14].

3.1.2 Majorations d'énergie pour $\gamma > 1$

On conserve la condition aux limites $\rho = P_i$ sur Σ_- , mais on suppose dans ce cas que $P_i^\gamma \in (H^{p_G}(Q))'$. Pour obtenir les estimations, on utilise le même procédé que dans le cas $\gamma = 1$, seul le terme en $\nabla \rho^\gamma$ ($\gamma > 1$) nécessite un traitement différent pour être majoré.

En effet,

$$\int_{\Omega_t} \nabla \rho^\gamma \cdot \mathbf{v} = - \int_{\Omega_t} \rho^\gamma \operatorname{div} \mathbf{u} + \int_{\Omega_t} \rho^\gamma \operatorname{div} \mathbf{w}_f + \int_{\Gamma_s} \rho^\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.14)$$

Formellement on peut écrire (par une renormalisation analogue à celle effectuée dans [48]) :

$$-\rho^\gamma \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^\gamma \mathbf{u} \right). \quad (3.15)$$

Donc on obtient

$$\int_{\Omega_t} \nabla \rho^\gamma \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^\gamma + \int_{\Gamma_+} \rho^\gamma G_+ + \int_{\Gamma_-} P_i^\gamma G_- \right) + \int_{\Gamma_s} \rho^\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega_t} \rho^\gamma \operatorname{div} \mathbf{w}_f,$$

avec

$$\int_{\Gamma_+} \rho^\gamma G_+ \geq 0, \quad \int_{\Gamma_-} P_i^\gamma G_- \leq C_1$$

et

$$\int_{\Omega_t} \rho^\gamma \operatorname{div} \mathbf{w}_f \leq \|\operatorname{div} \mathbf{w}_f\|_{L^\infty(\Omega_t)} \|\rho\|_{L^\gamma(\Omega_t)}^\gamma.$$

En conséquence, la majoration d'énergie (lorsque $\gamma > 1$) est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left(\Pi - \frac{C_g}{2} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_t))}^2 \\ & + a' \|\rho(t)\|_{L^\gamma(\Omega_t)}^\gamma + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}(1 - \nu_c)}{2} \left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\ & + \mathcal{B}'(1 - \nu_c) \left\| \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \mathcal{B}' \chi \left\| \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial x^2 \partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \frac{\mathcal{B} \chi}{2} \left\| \frac{\partial^2 \xi_y(t)}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\ & + \mathcal{B}'(1 - \nu_c) \left\| \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_s)}^2 + \frac{\mathcal{B}(1 - \nu_c)}{2} \|\xi_y(t)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \leq D'_0, \quad (3.16) \end{aligned}$$

où

$$D'_0 = C_0 + C'_0 + \frac{a}{\gamma - 1} C_1 + C_\varepsilon \|F(\mathbf{w}_f)\|_{L^2(Q)}^2,$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_0} \rho_0^\gamma,$$

et C'_0 est la même constante que dans la section précédente.

Les données du relèvement (R_f) sont choisies telles que :

$$a' = a \left((\gamma - 1)^{-1} - \|\operatorname{div} \mathbf{w}_f\|_{L^1(0,T;L^\infty(\Omega_t))} \right) > 0. \quad (3.17)$$

De plus, si :

$$D'_0 < 2 \left(\frac{\Pi}{C_g} \right)^2, \quad (3.18)$$

on montre que :

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} < \frac{2\Pi}{C_g}.$$

Pour que Γ_s soit bien définie, on rajoute la condition suivante (similaire à (3.13)) :

$$C_{N_s} D'_0 < 1. \quad (3.19)$$

Finalement, on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Lorsque $\gamma > 1$, si $P_i^\gamma \in (H^{p_G}(\Sigma_-))'$ et si les hypothèses (3.9, 3.17, 3.18, 3.19) sont satisfaites, alors $\rho \in L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega_t))$, $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))$, $\xi_x \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T,H_0^1(\Omega_s))$, $\xi_y \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T,H_0^2(\Omega_s))$.*

Pour passer à la limite dans le cas $\gamma > 1$, on a besoin d'un résultat de compacité complémentaire :

Lemme 3.4. *Sous les hypothèses du lemme 3.3, la densité ρ est bornée dans $L^{\gamma+\theta}(0,T;L^{\gamma+\theta}(K_t))$ pour $\theta \in [1,\gamma[$ et pour tout compact $K_t \subset \Omega_t$.*

Démonstration. Grâce au modèle de structure utilisé (obtenu par projection modale sur un nombre fini de modes propres), la régularité du déplacement permet de définir $K \subset \cup_{t \in [0,T]} \Omega_t$ tel que $K \cap \Omega_t$ soit compact pour tout t . Soit $\varphi \in C^\infty([0,T];C_c^\infty(\Omega_t))$

une fonction “cut-off” définie par $\varphi \equiv 1$ sur K et $0 \leq \varphi \leq 1$ sur $\bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_t$. Donc, $\varphi \mathbf{v}$ vérifie les conditions aux limites $\text{rot } \varphi \mathbf{v} = (\varphi \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\Sigma = \Sigma_{\pm} \cap \Sigma_s$. En conséquence, il existe

$$\mathbf{v}_p = \nabla p, p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_t)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_t))$$

et

$$\mathbf{v}_q = \text{Rot}(q), q \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_t))$$

tels que $\varphi \mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q$, $\text{Supp}(\mathbf{v}_p) = \text{Supp}(\mathbf{v}_q) = \text{Supp}(\varphi)$ et où p, q sont les solutions de

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \text{div } \varphi \mathbf{v} \text{ dans } Q, \text{ avec } \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ -\Delta q &= \text{rot } \varphi \mathbf{v} \text{ dans } Q, \text{ avec } q = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation des moments par φ on obtient :

$$\frac{\partial \varphi \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta(\varphi \mathbf{v}) - \frac{\nu}{3} \nabla \text{div } \varphi \mathbf{v} + a \nabla(\varphi \rho^\gamma) = R + a \rho^\gamma \nabla \varphi - \varphi(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.20)$$

où $R = R(\mathbf{w}_f, \mathbf{v}, \varphi)$ est borné dans $L^2(Q)$. De plus, \mathbf{v}_p satisfait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi \mathbf{v}_p}{\partial t} - \nu \Delta(\varphi \mathbf{v}_p) - \frac{\nu}{3} \nabla \text{div } \varphi \mathbf{v}_p + a \nabla(\varphi \rho^\gamma) \\ = P_{\nabla} (R + \rho^\gamma \nabla \varphi - \varphi(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}), \quad (3.21) \end{aligned}$$

où P_{∇} est la projection sur $\nabla(H^1(\Omega_t))$. Puisque $\varphi(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et $\rho^\gamma \nabla \varphi$ sont respectivement bornés dans $L^1(0, T; L^{\frac{2r}{r+2}}(\Omega_t))$ et $L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t))$ pour $r \in [2, \infty[$, alors $\zeta_1 \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$, $\zeta_2 \in L^\infty(0, T; W^{1,1}(\Omega_t))$ et $\zeta_3 \in L^1(0, T; W^{1, \frac{2r}{r+2}}(\Omega_t))$. On déduit de (3.21) :

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{4\nu}{3} \Delta p + a \varphi \rho^\gamma = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \bar{\zeta}(t), \quad (3.22)$$

où $\bar{\zeta}(t) = \mathcal{f}_{\Omega_t}(\varphi \rho^\gamma + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \in L^1(0, T)$. On pose $\varphi = \phi^\gamma$ alors en multipliant (3.22) par $(\phi \rho)^\theta$ au sens des distributions on obtient :

$$\begin{aligned} a \int_Q (\phi \rho)^{\gamma+\theta} &= - \int_Q \frac{\partial (\phi \rho)^\theta p}{\partial t} + \int_Q \frac{\partial (\phi \rho)^\theta}{\partial t} p \\ &+ \frac{4}{3} \nu \int_Q (\phi \rho)^\theta \text{div}(\varphi \mathbf{v}) + \int_Q (\phi \rho)^\theta (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \int_Q (\phi \rho)^\theta \bar{\zeta}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Au moins formellement, on a :

$$\frac{\partial \rho^\theta}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^\theta \mathbf{v} = (1 - \theta) \rho^\theta \operatorname{div} \mathbf{v},$$

ce qui conduit à :

$$\int_Q \frac{\partial (\phi \rho)^\theta}{\partial t} p = \int_Q \frac{\partial \phi^\theta}{\partial t} \rho^\theta p + \int_Q \rho^\theta \mathbf{v} \nabla (\phi^\theta p) + (1 - \theta) \int_Q (\phi \rho)^\theta p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Alors l'égalité (3.23) devient :

$$\begin{aligned} a \|\phi \rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^{\gamma+\theta} &= - \int_Q \frac{\partial (\phi \rho)^\theta p}{\partial t} + \int_Q \frac{\partial \phi^\theta}{\partial t} \rho^\theta p + \int_Q \rho^\theta \mathbf{v} \nabla (\phi^\theta p) \\ &\quad + (1 - \theta) \int_Q (\phi \rho)^\theta p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{4}{3} \nu \int_Q (\phi \rho)^\theta \operatorname{div} (\varphi \mathbf{v}) \\ &\quad + \int_Q (\phi \rho)^\theta (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \int_Q (\phi \rho)^\theta \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

On déduit de $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_t))$ et $(\phi \rho)^\theta \in L^\infty(0, T; L^{\gamma/\theta}(\Omega_t))$ que $\left(\frac{\partial \phi^\theta}{\partial t} \rho^\theta p\right)$ est borné dans $L^1(Q)$ et que

$$\int_{\Omega_t} ((\phi \rho)^\theta p)(t) \in L^\infty(0, T).$$

On a $\zeta_1 \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$, donc $\zeta_1(\phi \rho)^\theta$ est borné dans $L^1(Q)$. De la même manière,

$$\zeta_3 \in L^1(0, T; W^{1, \frac{2r}{2+r}}(\Omega_t)) \hookrightarrow L^1(0, T; L^r(\Omega_t))$$

pour tout $r \in [2, \infty[$, donc $\zeta_3(\phi \rho)^\theta$ est borné dans $L^1(Q)$. De plus, $\bar{\zeta}(t) \in L^1(0, T)$ donc $\bar{\zeta}(\phi \rho)^\theta \in L^1(Q)$.

Les termes restants sont bornés de la manière suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(Q), \quad \operatorname{div} \phi \mathbf{v} \in L^2(Q), \quad p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_t)),$$

$$\zeta_2 \in L^\infty(0, T; W^{1,1}(\Omega_t)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$$

et

$$\begin{aligned} (1 - \theta) \int_Q (\phi\rho)^\theta p \operatorname{div} \mathbf{v} &\leq C_1 \|(\phi\rho)^\theta\|_{L^{\frac{\gamma+\theta}{\theta}}(Q)} \|p\|_{L^m(Q)} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq C_2 \|\phi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\theta \quad \forall m \in \left[\frac{2(\gamma+\theta)}{\gamma-\theta}, \infty \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \nu \int_Q (\phi\rho)^\theta \operatorname{div} \varphi \mathbf{v} &\leq C_3 \|(\phi\rho)^\theta\|_{L^{\frac{\gamma+\theta}{\theta}}(Q)} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C_4 \|\phi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\theta, \end{aligned}$$

$$\int_Q (\phi\rho)^\theta \zeta_2 \leq C_5 \|(\phi\rho)^\theta\|_{L^{\frac{\gamma+\theta}{\theta}}(Q)} \|\zeta_2\|_{L^2(Q)} \leq C_6 \|\phi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\theta.$$

De plus, $\rho^\theta \mathbf{v} \nabla(\phi^\theta p) = \phi^\theta \rho^\theta \mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho^\theta p \mathbf{v} \cdot \nabla \phi^\theta$ est borné dans $L^1(Q)$ si $\rho^\theta \in L^\infty(0, T; L^{\gamma/\theta}(\Omega_t))$, $\phi^\theta, \nabla \phi^\theta \in L^\infty(Q)$, $\mathbf{v} \in L^2(0, T; L^m(\Omega_t))$ pour tout $m \in [1, \infty)$, $p \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega_t))$ et $\nabla p \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$.

Finalement, (3.24) conduit à :

$$a \|\phi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^{\gamma+\theta} \leq C_7 \|\phi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\gamma + C_8,$$

ce qui nous permet de conclure. □

Bien que ce résultat local soit suffisant pour passer à la limite dans le terme $\nabla \rho^\gamma$, nous le complétons par un résultat valable jusqu'au bord. La section suivante présente deux lemmes de compacité, l'un pour $\gamma = 1$, l'autre pour $\gamma > 1$.

3.1.3 Résultats de compacité.

On introduit l'opérateur linéaire de Stokes (S)(*c.f.* [49]) de la manière suivante :

$$S(\phi) = p, \tag{3.25}$$

où p est l'unique solution vérifiant le problème de Stokes :

$$-\Delta \mathbf{u}_\phi + \nabla p = \phi \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t,$$

$$\mathbf{u}_\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_t, \quad \int_{\Omega_0} p(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0 = 0. \quad (3.26)$$

Proposition 3.5. (c.f. [7])

L'opérateur S est continu de $L^2(\Omega_t)$ dans $H^1(\Omega_t)$ et de $W^{-1,2}(\Omega_t)$ dans $L^2(\Omega_t)$.

C'est à dire, il existe une constante C telle que :

$$\|S(\phi)\|_{H^1(\Omega_t)} \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega_t)},$$

$$\|S(\phi)\|_{L^2(\Omega_t)} \leq C \|\phi\|_{W^{-1,2}(\Omega_t)}.$$

Remarque 3.6. Dans [7], M. Boulakia démontre cette proposition dans le cas d'un ouvert de classe H^3 et dans [5], Bello utilise un ouvert de classe $W^{2,\infty}$. Ici encore, on remarque l'importance du modèle de coque régulier utilisé dans le problème (C_3). En effet, cette modélisation permet d'obtenir un déplacement de la frontière suffisamment régulier pour appliquer cette proposition.

Lemme 3.7. (c.f. [7])

Soit $\phi \in C^1([0,T], L^2(\Omega_t))$, alors on a la relation :

$$S\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial S(\phi)}{\partial t} + \int_{\Omega_0} \nabla S(\phi) \cdot v(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0 + p',$$

où p' est la solution du problème de Stokes suivant :

$$-\Delta \mathbf{w} + \nabla p' = 0 \quad \text{et} \quad \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t,$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\phi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_t, \quad \int_{\Omega_0} p'(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0 = 0. \quad (3.27)$$

Démonstration. Dans [55, 56], J. Simon et F. Murat donne une méthode générale de différentiation par rapport à un domaine à frontière variable appliquée aux équations elliptiques. Nous donnons dans ce qui suit quelques éléments de démonstration.

Formellement, on dérive par rapport à t l'équation

$$-\Delta \mathbf{u}_\phi + \nabla S(\phi) = \phi$$

pour obtenir

$$-\Delta \frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t} + \nabla \frac{\partial S(\phi)}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

De même pour $\operatorname{div}(\mathbf{u}_\phi)$ qui donne $\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t}\right) = 0$. En ce qui concerne la condition sur le bord, on a

$$\langle \mathbf{u}_\phi(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\partial\Omega_0), \mathcal{D}(\partial\Omega_0)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\partial\Omega_0),$$

que l'on dérive par rapport au temps pour obtenir

$$\int_{\Omega_0} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\phi \right) \right) (\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\partial\Omega_0).$$

D'où l'on déduit la condition suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\phi \text{ sur } \partial\Omega_t.$$

De même, on dérive par rapport à t la condition sur p et on obtient :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)) = - \int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)).$$

Finalement, on a le problème de Stokes suivant :

$$-\Delta \frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t} + \nabla \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\phi}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\phi \text{ sur } \partial\Omega_t, \quad \int_{\Omega_0} \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)) = - \int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)),$$

□

Lemme 3.8. *Sous les hypothèses du lemme 3.3, lorsque $\gamma > 1$ la densité ρ est bornée dans $L^{\gamma+\theta}(Q)$, $\forall \theta \in [0, \gamma[$. En particulier, la densité ρ est bornée dans $L^2(Q)$.*

Démonstration. Pour simplifier l'écriture et pour rendre plus lisible cette démonstration nous la présentons dans le cas où le flux est nul $G_\pm \equiv 0$ (*i.e.* $\mathbf{w}_f \equiv 0$). Il est entendu que cette démonstration peut être étendue au cas $G_\pm \neq 0$ sans difficulté majeure.

Soit (\mathbf{v}_π, π) la solution du problème suivant :

$$-\Delta \mathbf{v}_\pi + \nabla \pi = -\nu \left(\Delta \mathbf{v} - \frac{1}{3} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_\pi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \quad (3.28)$$

avec

$$\mathbf{v}_\pi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_t \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_t} \pi = 0.$$

L'équation (3.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$-\Delta \mathbf{v}_\pi + \nabla (\pi + a\rho^\gamma) = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v}), \quad (3.29)$$

en utilisant l'opérateur de Stokes S , on peut écrire :

$$\pi + a\rho^\gamma + \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{3} \nu \operatorname{div} (\mathbf{v}) - a\rho^\gamma \right) = S \left(-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right). \quad (3.30)$$

On multiplie (3.30) par ρ^θ pour obtenir

$$a \int_Q \rho^{\gamma+\theta} + a \int_Q \rho^\theta \int_{\Omega_t} \rho^\gamma = - \int_Q \pi \rho^\theta - \int_Q S \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \rho^\theta - \int_Q S ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \rho^\theta. \quad (3.31)$$

De plus, grâce au lemme 3.7 (en dimension finie)

$$\int_{\Omega_t} S \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \rho^\theta = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} S(v) \rho^\theta + \theta \int_{\Omega_t} \rho^\theta \operatorname{div} (v) S(v) + \int_{\Omega_t} \rho^\theta p', \quad (3.32)$$

où $p' \in L^2(0, T; L^{2r/(2+r)}(\Omega_t)) \forall r \in [1, \infty[$ est solution du problème de Stokes (3.27).

L'égalité (3.31) devient :

$$\begin{aligned} a \int_Q \rho^{\gamma+\theta} = & -a \int_Q \rho^\theta \int_{\Omega_t} \rho^\gamma - \int_Q \pi \rho^\theta - \frac{1}{2} \int_Q S (\nabla \mathbf{v}^2) \rho^\theta - \int_Q S (\operatorname{rot} \mathbf{v} \alpha(\mathbf{v})) \rho^\theta \\ & - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} S(v) \rho^\theta - \theta \int_{\Omega_t} \rho^\theta \operatorname{div} (v) S(v) - \int_{\Omega_t} \rho^\theta p'. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Puisque \mathbf{v} est borné dans $L^2(0, T; H^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$, alors π est borné dans $L^2(Q)$, $S(v)$ est borné dans $L^2(0, T; H^2(\Omega_t)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_t)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^\infty(\Omega_t))$ et $\operatorname{rot} \mathbf{v} \alpha(\mathbf{v})$ est borné dans $L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega_t))$. De plus $\mathbf{v} \in L^4(Q)$ ce qui implique que $\nabla \mathbf{v}^2$ est borné dans $L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega_t))$.

□

Dans le cas $\gamma = 1$ nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.9. ([27]) *Lorsque $\gamma = 1$, la densité ρ est bornée dans $L^2(Q)$.*

Démonstration. Nous procédons en deux étapes. On montre tout d'abord (par analogie avec le lemme 3.4) que ρ est borné dans $L^2(0, T; L^2(K_t))$ pour tout compact $K_t \subset \Omega_t$. La deuxième étape consiste à établir que $\bar{\nabla} \rho \in H^{-1}(Q)$ où $\bar{\nabla}$ est l'opérateur gradient de Q .

On utilise le même procédé et les mêmes notations que dans la démonstration du lemme 3.4. L'égalité (3.23) s'écrit :

$$a \int_Q (\phi\rho)^2 = - \int_Q \frac{\partial\phi\rho p}{\partial t} + \int_Q \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} p + \frac{4}{3}\nu \int_Q (\phi\rho) \operatorname{div}(\varphi\mathbf{v}) + \int_Q (\phi\rho)(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \int_Q (\phi\rho)\bar{\zeta}. \quad (3.34)$$

L'équation de continuité induit

$$\int_Q \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} p = \int_Q \frac{\partial\phi}{\partial t} \rho p + \int_Q \rho\mathbf{v}\nabla(\phi p).$$

Alors l'égalité (3.34) devient

$$a \|\phi\rho\|_{L^2(Q)}^2 = - \int_Q \frac{\partial\phi\rho p}{\partial t} + \int_Q \frac{\partial\phi}{\partial t} \rho p + \int_Q \rho\mathbf{v}\nabla(\phi p) + \frac{4}{3}\nu \int_Q \phi\rho \operatorname{div}(\varphi\mathbf{v}) + \int_Q \phi\rho(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \int_Q \phi\rho\bar{\zeta}, \quad (3.35)$$

d'où l'on déduit (en utilisant l'inégalité de Young et les régularités préalablement démontrées dans les lemmes précédents) que $\|\phi\rho\|_{L^2(Q)}^2$ est borné.

On pose

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v}\nabla v_1 \\ \mathbf{v}\nabla v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = -\nu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{v})}{\partial x_1} - \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{v}}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{v})}{\partial x_2} + \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{v}}{\partial x_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_4 = a \begin{pmatrix} \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut écrire les équations des moments et de continuité sous la forme

$$a\bar{\nabla}\rho + \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4 = 0. \quad (3.36)$$

De plus, on a trivialement $\mathbf{w}_1 \in H^{-1}(0,T,L^2(\Omega_t)) \subset H^{-1}(Q)$, $\mathbf{w}_2 \in L^{4/3}(Q) \subset H^{-1}(Q)$ et $\mathbf{w}_3 \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega_t)) \subset H^{-1}(Q)$. Puisque $\rho \log \rho \in L^\infty(0,T,L^1(\Omega_t))$, alors $\rho \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$ donc $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \in H^{-1}(Q)$ d'où $\mathbf{w}_4 \in H^{-1}(Q)$.

Finalement, on a montré que $\bar{\nabla}\rho \in H^{-1}(Q)$. Par conséquent, ρ est borné dans $L^2(Q)$ puisque $\rho \in L^2_{loc}(Q)$ (c.f. [48]). \square

3.1.4 Passage à la limite

Les résultats de compacité obtenus sont suffisants pour passer à la limite dans les équations.

Cas $\gamma = 1$

Dans le cas $\gamma = 1$, une des difficultés est de passer à la limite dans le terme $\rho \mathbf{u}$ de l'équation de continuité. On utilise pour cela les travaux de P. Orenga [58] et F. Flori P. Orenga [31] dans lesquels il est montré que la régularité $\rho \log \rho \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t))$, $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$ est suffisante.

Cas $\gamma > 1$

Lorsque $\gamma > 1$, la principale difficulté est le passage à la limite dans le terme de pression $\nabla \rho^\gamma$. Le lemme suivant utilise les résultats de M. Boulakia [7] et utilise le résultat jusqu'au bord établi dans le lemme 3.8. Dans la remarque qui suit sa démonstration, on présente une approche différente de ce passage à la limite, en utilisant le résultat local du lemme 3.4 associé aux développements de P.L. Lions dans [48].

Lemme 3.10. *Lorsque $\gamma > 1$ et sous les hypothèses du lemme 3.8, ρ converge fortement dans $L^\gamma(Q)$.*

Démonstration. Cette démonstration s'inspire des travaux de M. Boulakia [7]. Pour démontrer le lemme 3.10, on établit la convergence de $\rho \log \rho$. Pour cela, on renormalise l'équation de continuité du problème fluide de C_3 .

Remarque 3.11. L'étude du problème fluide est effectuée pour un déplacement donné $\xi \in H^1(0, T; H^3(\Omega_s)) \hookrightarrow H^1(0, T; W^{1, \infty}(\Omega_s))$. Grâce à l'utilisation d'un modèle de structure projeté sur un nombre fini de modes, les variations du domaine sont très régulières et permettent de travailler dans le domaine :

$$Q^* = \bigcup_{t \in [0, T]} \{t\} \times \Omega_t.$$

La notion de renormalisation des solutions fut introduite par Di Perna et P.L. Lions [64]. En utilisant le cadre défini par E. Feireisl [24], une fonction b est admissible

si :

$$b \in C(\mathbb{R}) / \quad b'(z) = 0 \text{ pour tout } z \text{ assez grand.}$$

Dans ce cas, l'équation de continuité est vérifiée au sens des solutions renormalisées, soit :

$$\frac{\partial b(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (b(\rho)\mathbf{u}) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\operatorname{div} (\mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (3.37)$$

On souhaite obtenir un résultat de convergence forte sur $\rho \log \rho$. Puisque la fonction $z \log z$ n'est pas admissible pour l'équation de conservation de la masse renormalisée, on construit une suite de fonctions admissibles.

Soit T une fonction de troncature concave définie par :

$$\begin{cases} T \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ T(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \leq 1, \\ 2, & \text{si } z \geq 3. \end{cases} \end{cases}$$

On construit les suites de fonctions T_k et L_k de la manière suivante :

$$T_k = kT\left(\frac{z}{k}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et

$$L_k(z) = \begin{cases} z \log z, & \forall z \in (0, k], \\ z \log k + z \int_k^z \frac{T_k(\tau)}{\tau^2} d\tau, & \forall z > k. \end{cases}$$

Les fonctions $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont admissibles, de plus on a :

$$L'_k(z)z - L_k(z) = T_k(z), \forall z \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $(\rho_n, \mathbf{u}_n)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de solutions approchées convergeant vers (ρ, \mathbf{u}) et satisfaisant les majorations a priori établies à la section 3.1.2. On utilise L_k pour renormaliser l'équation de continuité et on écrit :

$$\frac{\partial L_k(\rho_n)}{\partial t} + \operatorname{div} L_k(\rho_n)\mathbf{u}_n + T_k(\rho_n)\operatorname{div} \mathbf{u}_n = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial L_k(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div} L_k(\rho)\mathbf{u} + T_k(\rho)\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (3.39)$$

Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $L_k(\rho_n)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega_t))$ indépendamment de n . Il existe donc $\overline{L_k(\rho)}$ telle que

$$L_k(\rho_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{L_k(\rho)} \text{ dans } C(0, T; L_{faible}^\gamma(\Omega_t)).$$

Quelle que soit $\psi \in \mathcal{D}(Q^*)$ et quel que soit $t \in (0, T)$, on obtient grâce à (3.38) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} L_k(\rho_n)(t)\psi(t) &= \int_{\Omega_0} L_k(\rho_0)\psi(0) \\ &\quad + \int_{Q^*} L_k(\rho_n) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u}_n \nabla \psi \right) - \int_{Q^*} T_k(\rho_n) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \psi. \end{aligned} \quad (3.40)$$

De même, grâce à (3.39), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} L_k(\rho)(t)\psi(t) &= \int_{\Omega_0} L_k(\rho_0)\psi(0) \\ &\quad + \int_{Q^*} L_k(\rho) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \psi \right) - \int_{Q^*} T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} \psi. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Puisque le déplacement de la frontière du fluide est régulier ($\xi \in H^1(0, T; H^3(\Omega_s)) \hookrightarrow H^1(0, T; W^{1, \infty}(\Omega_s))$), on peut construire un relèvement $\mathbf{w}^* \in L^2(0, T; H^{7/2}(\Omega_t))$ tel que $\mathbf{w}^*|_{\Gamma_s} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$.

On choisit ψ tel que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{w}^* \nabla \psi = 0. \quad (3.42)$$

C'est à dire

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}^{-1}(t, \mathbf{x})),$$

où $\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ est le *mapping* associé à la vitesse \mathbf{w}^* .

Remarque 3.12. Le choix de cette fonction test peut être rapproché de la méthode des “courbes de niveaux” (*level set method* en anglais). En effet, dans cette formulation, la frontière Lagrangienne est vue comme une courbe de niveau de la solution d’une équation d’advection (*c.f.* [60]).

La fonction $L_k(\rho_n)$ est bornée indépendamment de n dans $L^q(0,T;L^\gamma(\Omega_t)) \forall q \in [1,\infty)$, de même pour \mathbf{u}_n dans $L^2(0,T;H^1(\Omega_t))$. De plus, $\frac{\partial L_k(\rho_n)}{\partial t}$ est borné dans $L^1(0,T;W^{-1,1})$. Ceci nous permet d'appliquer le lemme 5.1 de compacité établi par P.L. Lions dans [48], et de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_k(\rho_n)(\mathbf{u}_n - \mathbf{w}^*)) = \overline{L_k(\rho)}(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*)$$

Ainsi, on passe à la limite dans (3.40) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \overline{L_k(\rho)}(t)\psi(t) &= \int_{\Omega_0} L_k(\rho_0)\psi(0) \\ &+ \int_{Q^*} \overline{L_k(\rho)}(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*) \nabla\psi - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q^*} T_k(\rho_n)\operatorname{div} \mathbf{u}_n\psi. \end{aligned} \quad (3.43)$$

On soustrait (3.41) à (3.43) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left(\overline{L_k(\rho)}(t) - L_k(\rho)(t) \right) \psi(t) &= \int_{Q^*} \left(\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho) \right) (\mathbf{u} - \mathbf{w}^*) \nabla\psi \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q^*} (T_k(\rho)\operatorname{div} \mathbf{u} - T_k(\rho_n)\operatorname{div} \mathbf{u}_n) \psi. \end{aligned} \quad (3.44)$$

On écrit (3.44) pour la suite de fonctions tests $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, où $\psi_m = \phi_m(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}^{-1})$ avec :

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_m \leq 1, |\nabla\phi_m| \leq 2m, \forall \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \phi_m = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega_0/d(\mathbf{x},\partial\Omega_0) \geq \frac{1}{m}. \end{cases} \quad (3.45)$$

En effectuant un changement de variable pour se ramener à Ω_0 , on écrit

$$\begin{aligned} \int_{Q^*} \left(\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho) \right) (\mathbf{u} - \mathbf{w}^*) \nabla\psi_m &= \\ \int_{(0,t) \times \Omega_0} \left(\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho) \right) (\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}) (\nabla\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*)(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*})\nabla\phi_m) \det\nabla\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_0$ on écrit :

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*)(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}(\mathbf{x}))\nabla\phi_m = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*)(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}(\mathbf{x}))}{d(\mathbf{x},\partial\Omega_0)} d(\mathbf{x},\partial\Omega_0)\nabla\phi_m(\mathbf{x}).$$

Puisque $(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*)(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_0))$, on utilise l'inégalité de Hardy pour majorer $(\mathbf{u} - \mathbf{w}^*)(\mathbf{X}_{\mathbf{w}^*}(\mathbf{x}))(d(\mathbf{x},\partial\Omega_0))^{-1}$ par une constante indépendante de m . Donc,

grâce à (3.45) on obtient la limite suivante :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q^*} \left(\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho) \right) (\mathbf{u} - \mathbf{w}^*) \nabla \psi_m = 0.$$

De plus, on peut trivialement passer à la limite sur m dans le terme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q^*} (T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} - T_k(\rho_m) \operatorname{div} \mathbf{u}_m) \psi$$

pour obtenir :

$$\int_{\Omega_t} \left(\overline{L_k(\rho)}(t) - L_k(\rho)(t) \right) = \int_{Q^*} T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q^*} T_k(\rho_m) \operatorname{div} \mathbf{u}_m \psi.$$

On applique directement les résultats de M. Boulakia (lemme 6.2 et 6.3 de [7])

pour obtenir :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_t} \left(\overline{L_k(\rho)}(t) - L_k(\rho)(t) \right) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{Q^*} (T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho_n)}) \operatorname{div} \mathbf{u} \leq 0 \forall t \in (0, T).$$

Finalement on a :

$$\int_{\Omega_t} (\overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho) (t) \leq 0 \forall t \in (0, T)$$

et donc, grâce à la convexité de $\tau \mapsto (\tau \log \tau)$ on conclut que

$$\overline{\rho \log \rho}(t, \mathbf{x}) = \rho \log \rho(t, \mathbf{x}), \forall (t, \mathbf{x}) \in Q^*.$$

On en déduit la convergence forte de ρ dans $L^\gamma(Q)$ puisque ρ est borné dans $L^{\gamma+\theta}(Q)$ pour $0 < \theta < \gamma$. \square

Remarque 3.13. Pour passer à la limite sur ρ , il est également possible d'adapter la démonstration de P.L. Lions (Théorème 5.1 [48]) dans le cas d'un domaine à frontière variable. Il faut utiliser pour cela un résultat de régularité local sur ρ (lemme 3.3). Cette compacité supplémentaire est utile pour passer à la limite dans le terme $\nabla \rho^\gamma$. En particulier, la démonstration de P.L. Lions utilise le lemme suivant :

Lemme 3.14. Soient $p_1, p_2 \in C([0, \infty))$ deux fonctions croissantes. On suppose que pour tout compact K vérifiant $((0, T) \times K) \subset Q$, $p_1(\rho), p_2(\rho)$ et $p_1(\rho)p_2(\rho)$ sont relativement compacts dans $L^1((0, T) \times K)$. Alors, en notant respectivement $\overline{p_1(\rho)}$, $\overline{p_2(\rho)}$, $\overline{p_1(\rho)p_2(\rho)}$ les limites faibles de $p_1(\rho), p_2(\rho)$ et $p_1(\rho)p_2(\rho)$ dans $L^1((0, T) \times K)$, on a l'estimation

$$\overline{p_1(\rho)} \overline{p_2(\rho)} \leq \overline{p_1(\rho)p_2(\rho)}.$$

Condition au bord sur ρ

Le dernier point concerne le sens que l'on peut donner à la condition sur la densité.

Lemme 3.15. *Soit $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{w}$ et ρ_n deux suites vérifiant (3.11) et l'équation de continuité*

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_n \mathbf{u}_n = 0,$$

alors $\rho_n|_{\Sigma_-}$ converge vers P_i dans $(W^{1,\infty}(\Sigma_-))'$.

Démonstration. On note Θ et Θ_n les vecteurs $\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \rho_n \\ \rho_n (u_n)_x \\ \rho_n (u_n)_y \end{pmatrix}$. L'équation de masse implique $\operatorname{div}_{x,t}(\Theta_n) = \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_n \mathbf{u}_n = 0 \in L^1(Q)$ et par conséquent $\Theta_n \in L^1_{\operatorname{div}}(Q) = \{\phi \in L^1(Q)^3 / \operatorname{div}_{x,t}(\phi) \in L^1(Q)\}$ et grâce au passage à la limite dans l'équation de conservation de la masse, on obtient $\Theta_n \rightarrow \Theta \in L^1(Q)^3$ -faible. Donc, en utilisant la continuité de l'application trace [13], on obtient $\Theta_n|_{\partial Q} \rightarrow \Theta|_{\partial Q}$ dans $(W^{1,\infty}(\partial Q))'$ faiblement et en particulier $\rho_n|_{\Sigma_-} \rightarrow P_i$ dans $(W^{1,\infty}(\Sigma_-))'$ faiblement. \square

De plus, en utilisant les bornes sur le déplacement ξ :

$$\xi_x \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T, H_0^1(\Omega_s)),$$

$$\xi_y \in W^{1,\infty}(0,T, L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T, H_0^2(\Omega_s)),$$

on montre $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{J_{\Xi}} \in H^{-2}(Q_s)$, ce qui permet de passer à la limite au sens des distributions dans le terme des contraintes :

$$\sigma \cdot \mathbf{n}|_{J_{\Xi}} \rightarrow \vartheta \in \mathcal{D}'(Q_s).$$

3.2 Construction des solutions approchées

Nous proposons un schéma de construction des solutions approchées dans le cas $\gamma > 1$. Le lecteur peut se référer à F. Flori, C. Giacomoni et P. Orenca [22] pour le cas $\gamma = 1$.

Globalement, la construction des solutions approchées suit une procédure de point fixe. On commence par se donner les déplacements de l'artère et on résout ensuite le problème associé au flux artériel. On obtient ainsi la contrainte appliquée par le sang à l'artère ce qui permet de résoudre le problème associé à l'artère. Les deux systèmes sont ensuite recouplés à l'aide d'une procédure de point fixe.

On discrétise l'équation des moments avec un schéma lagrangien régularisé. On pose :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \simeq \frac{\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})}{\Delta t} + \Delta t^\zeta A(\mathbf{u}_k),$$

avec $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ et A un opérateur tel que $D(A) \equiv H^3(\Omega)$. Cet opérateur permet de “ contrôler ” l'erreur due à la discrétisation lagrangienne classique et d'obtenir les estimations d'énergie suffisantes pour que le problème discret ait un sens et pour retrouver le problème continu quand Δt tend vers 0^+ .

3.2.1 Régularisation

Avant d'introduire la discrétisation du problème fluide, on régularise ce dernier en insérant le terme $\varepsilon \rho^{\gamma+1}$ dans l'équation de masse, afin d'obtenir la compacité suffisante pour passer à la limite dans l'étape de discrétisation en temps. On définit le problème (F_ε) par :

$$(F_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{u}_\varepsilon}{dt} - \nu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + a \nabla \rho_\varepsilon^\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{d\rho_\varepsilon}{dt} + \rho_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon + \varepsilon \rho^{\gamma+1} = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_\pm, \\ (\mathbf{u}_\varepsilon \circ \xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} & \text{dans } (0, T) \times \Omega_s, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(t=0) = \mathbf{u}_\varepsilon^0 \text{ and } \rho_\varepsilon(t=0) = \rho_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_0. \end{array} \right.$$

Cette régularisation ne pose pas de problème. En effet, on obtient classiquement

la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{a}{\gamma-1} \|\rho_\varepsilon(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma + \varepsilon \|\rho_\varepsilon\|_{L^{2\gamma}(Q_T)}^{2\gamma} \\ + \left(\nu - \frac{C_g}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq C, \end{aligned} \quad (3.47)$$

où C est une constante ne dépendant que des données.

L'estimation (3.47) montre que le terme $\varepsilon^{\frac{1}{2\gamma}} \rho_\varepsilon$ est borné indépendamment de ε dans $L^2(Q_T)$. Il existe donc une constante C telle que

$$\int_{Q_T} \varepsilon \rho_\varepsilon^{2\gamma} = \int_{Q_T} \left(\varepsilon^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \rho_\varepsilon^{\gamma+1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}} \int_{Q_T} (\varepsilon \rho_\varepsilon^{\gamma+1})^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} < C \quad (3.48)$$

On peut donc conclure que $\varepsilon \rho^{\gamma+1}$ tend vers zéro dans $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(Q_T)$ lorsque ε tend vers zéro. Ce résultat est suffisant pour passer à la limite sur ε . En effet, si $\gamma > 1$ alors on a $\frac{2\gamma}{\gamma+1} > 1$.

3.2.2 Discrétisation lagrangienne

La période d'étude $(0,T)$ est divisée en N pas de temps $\Delta t = T/N$. La discrétisation du temps impose celle du domaine à frontière variable. On discrétise l'équation des trajectoires comme suit :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \Delta t \mathbf{u}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}), \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}.$$

Le point \mathbf{x}_k est l'approximation de la position à l'instant $t_k = k\Delta t$ de la particule qui se trouvait en \mathbf{x}_{k-1} à l'instant t_{k-1} .

Pour simplifier les notations, on suppose que $\Gamma_s(t=0) \equiv \Omega_s$. A l'instant t_k , la discrétisation de la frontière mobile est définie par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_{s,0} &\equiv \Omega_s, \\ \Gamma_{s,k} &= \left\{ \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \Delta t \frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_{k-1}), \mathbf{x}_0 \in \Gamma_{s,0} \right\}. \end{aligned}$$

On note $\mathbf{n}_{s,k}$ la normale extérieure à cette frontière et $\mathcal{J}_{\Xi,k}$ le jacobien associé à la transformation suivante :

$$\Xi_k : \Gamma_{s,0} \rightarrow \Gamma_{s,k}.$$

De même, l'approximation du domaine est donnée par :

$$\Omega_0 = \Omega_{t=0},$$

$$\Omega_k = \{ \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \Delta t \mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}), \mathbf{x}_{k-1} \in \Omega_{k-1} \}.$$

On note

$$Q_{\Delta t} = \left\{ (t, \mathbf{x}_k), t \in [\Delta t, T[, \mathbf{x}_k \in \Omega_k \text{ lorsque } t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t] \right\}$$

On définit pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ l'application κ_k , qui est la forme discrétisée de la trajectoire, par

$$\begin{aligned} \kappa_k : \Omega_{k-1} &\rightarrow \Omega_k \\ \mathbf{x}_{k-1} &\mapsto \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \Delta t \mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}). \end{aligned}$$

On note \mathcal{J}_{k-1} le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{J}_{k-1} associée à κ_k :

$$\mathbf{J}_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \frac{\partial(\mathbf{u}_{k-1})_1}{\partial(\mathbf{x}_{k-1})_1} & \Delta t \frac{\partial(\mathbf{u}_{k-1})_1}{\partial(\mathbf{x}_{k-1})_2} \\ \Delta t \frac{\partial(\mathbf{u}_{k-1})_2}{\partial(\mathbf{x}_{k-1})_1} & 1 + \Delta t \frac{\partial(\mathbf{u}_{k-1})_2}{\partial(\mathbf{x}_{k-1})_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_{k-1} = 1 + \Delta t \operatorname{div} \mathbf{u}_{k-1} + \Delta t^2 \nabla(\mathbf{u}_{k-1})_x \cdot \operatorname{Rot}((\mathbf{u}_{k-1})_y). \quad (3.49)$$

Il est nécessaire d'établir que ce jacobien n'est jamais nul pour bien définir cette transformation. Par la suite on montre, par le biais de majorations et par l'utilisation d'un processus de récurrence, que ce jacobien est strictement positif sous certaines conditions sur les données (il apparaît déjà clairement que le pas de temps Δt devra être suffisamment petit). Cette stricte positivité permet d'écrire que $|\mathcal{J}_{k-1}| = \mathcal{J}_{k-1}$ quel que soit $k \in \{1, \dots, N\}$.

Dans l'équation de conservation de la masse pénalisée, la dérivée particulaire est approchée de la manière suivante :

$$\frac{d\rho_\varepsilon}{dt}(t_k, \mathbf{x}_k) \simeq \frac{\rho_k - \tilde{\rho}_{k-1}}{\Delta t} + \Delta t^\zeta B(\rho_k), \quad 0 < \zeta < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.50)$$

où $\rho_k = \rho(\mathbf{x}_k, t_k)$ et $\tilde{\rho}_{k-1} = \rho(\mathbf{x}_k - \Delta t \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, t_{k-1})$.

L'opérateur B a pour domaine $D(B) \subset H^1(\Omega)$.

Remarque 3.16. Pour montrer la convergence de la discrétisation lagrangienne, il n'est pas nécessaire d'imposer une condition aussi restrictive sur ζ ; il suffit de prendre $\zeta \in (0,1)$. Cependant, la condition $(0 < \zeta < \frac{1}{2})$ est issue de la technique utilisée pour coupler le problème fluide à celui de la structure. En effet, la démonstration de la convergence du point fixe utilisé (*c.f.* section 3.4), conduit à l'hypothèse $\zeta < \frac{1}{2}$.

En ce qui concerne l'équation de conservation de la quantité de mouvement, en utilisant les mêmes notations que précédemment, on approche en \mathbf{x}_k la dérivée lagrangienne de la vitesse \mathbf{u}_ε à l'instant t_k par :

$$\frac{d\mathbf{u}_\varepsilon}{dt}(t_k, \mathbf{x}_k) = \frac{\mathbf{u}_k - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}}{\Delta t} + \Delta t^\zeta A(\mathbf{u}_k) \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.51)$$

où A est un opérateur de domaine $D(A) \subset H^3(\Omega)$.

Remarque 3.17. Le terme $\Delta t^\zeta A\mathbf{u}_k$ permet d'établir le passage à la limite sur le pas de temps Δt . On utilise ce dernier terme pour montrer la positivité de \mathcal{J}_{k-1} et pour montrer qu'il n'y a pas de point qui sorte du domaine entre deux pas de temps.

Grâce à ces discrétisations le problème (F_ε) est approché par les N problèmes stationnaires suivants :

$$(F_k)_{k \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k + \Delta t^{1+\zeta} A(\mathbf{u}_k) - \Delta t \nu \Delta \mathbf{u}_k + a \Delta t \nabla (\rho_k)^\gamma = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1} \\ \rho_k(\mathbf{x}_k) + \Delta t \rho_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \Delta t^{1+\zeta} B(\rho_k) + \varepsilon \Delta t \rho_k^{\gamma+1} = \tilde{\rho}_{k-1} \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{u}_k = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\pm, \\ \mathbf{u}_k \left(\mathbf{x}_{k-1} + \Delta t \frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_{k-1}) \right) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_k) \quad \text{dans } \Gamma_{s,0}, \\ + \text{Conditions aux limites de } A \text{ et } B \text{ (incluses dans } D(A) \text{ et } D(B)). \end{array} \right.$$

Remarque 3.18. L'existence des solutions aux problèmes $(F_k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$ peut être établie en suivant la démonstration présentée dans les sections 6.5 et 6.7 de [48].

Remarque 3.19. Il est important de remarquer que la forme discrétisée de l'équation de continuité pénalisée ne permet pas de déduire directement la positivité de la den-

sité ρ . En appliquant le principe du maximum à cette équation stationnaire et dans le cas où l'opérateur B est elliptique (par exemple $B \equiv (-\Delta)$), on obtient la positivité de ρ_k quel que soit $k \in \{1, \dots, N\}$.

3.2.3 Majorations a priori.

Afin d'établir le passage à la limite (*c.f.* 3.3) dans la discrétisation temporelle, il est nécessaire d'obtenir des résultats de régularité. Les majorations que nous établissons dans cette section permettent, via un processus de récurrence, d'obtenir des bornes pour les solutions aux N problèmes stationnaires.

Dans cette section et dans la suite de ce chapitre, on considère l'opérateur :

$$(B, D(B)) \equiv (-\Delta, H_0^1).$$

Notation : Pour ne pas surcharger les notations, nous ne noterons plus le (\cdot) au dessus des variables discrétisées le long des trajectoires. Nous préciserons simplement la variable d'intégration quand cela risque de générer une ambiguïté.

On fixe $\xi \in H^{3/2}(0, T; H_0^2(\Omega_s))$ le déplacement de l'artère d'où l'on déduit, grâce à l'équation de coque, que $\sigma(\Xi_k) \cdot \mathbf{n}_{s,k}|_{\mathcal{J}_{\Xi,k}} \in H^{-1/2}(0, T; H^{-2}(\Omega_s))$. On commence par établir la majoration, en fonction des données initiales, des solutions du problème F_1 .

On multiplie, au sens du produit scalaire de $L^2(\Omega_1)$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée du problème (F_1) par \mathbf{u}_1 . Alors, en utilisant l'identité remarquable $\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0^2 + \mathbf{u}_1^2 - (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^2)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \Delta t^{1+\zeta} \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 + \Delta t \nu \|D\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_0^2 dx_1 + a \Delta t \int_{\Omega_1} \rho_1^\gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \Delta t \int_{\Gamma_{s,1}} \sigma_1(\mathbf{u}_1, \rho_1) \cdot \mathbf{n}_{s,1} \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

La continuité des contraintes se traduit par :

$$\sigma_1(\mathbf{u}_1, \rho_1) = \sigma(\Xi_1) \cdot \mathbf{n}_{s,1}|_{\mathcal{J}_{\Xi,1}}.$$

Si les données initiales sont telles que $\mathcal{J}_0 \neq 0$, on peut écrire $\int_{\Omega_1} \mathbf{u}_0^2 d\mathbf{x}_1 = \int_{\Omega_0} \mathbf{u}_0^2 |\mathcal{J}_0| d\mathbf{x}_0$.

On multiplie formellement l'équation de continuité du problème (F_1) par $\rho_1^{\gamma-1}$ pour obtenir :

$$\Delta t \rho_1^\gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = -\rho_1^\gamma + \rho_0 \rho_1^{\gamma-1} - \Delta t \varepsilon \rho_1^{2\gamma} + \Delta t^{1+\zeta} \rho_1^{\gamma-1} \Delta \rho_1. \quad (3.53)$$

En remarquant que :

$$\int_{\Omega_1} \Delta \rho_1 \rho_1^{\gamma-1} = - \int_{\Omega_1} \nabla \rho_1 \cdot \nabla \rho_1^{\gamma-1} = -4 \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \int_{\Omega_1} \left(\nabla \rho_1^{\gamma/2} \right)^2,$$

on intègre l'équation (3.53) pour obtenir

$$\begin{aligned} - \Delta t \int_{\Omega_1} \rho_1^\gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_1 d\mathbf{x}_1 &= \varepsilon \Delta t \|\rho_1\|_{L^{2\gamma}(\Omega_1)}^{2\gamma} - \frac{1}{\gamma-1} \int_{\Omega_0} \rho_0^\gamma |\mathcal{J}_0| d\mathbf{x}_0 \\ &+ \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^{1+\zeta} \left\| \nabla (\rho_1)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \int_{\Omega_1} \left(\rho_1^\gamma - \rho_1^{\gamma-1} \rho_0 + \frac{1}{\gamma-1} \rho_0^\gamma \right) d\mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

On note $T_1(\rho_k) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_k^\gamma + \frac{1}{\gamma} \rho_{k-1}^\gamma - \rho_k^{\gamma-1} \rho_{k-1} \stackrel{\text{car } \gamma > 1}{\geq} 0$, alors comme $\gamma > 1$ on peut écrire :

$$0 \leq \frac{1}{\gamma} \rho_k^\gamma + T_1(\rho_k) \leq \rho_k^\gamma + \frac{1}{\gamma-1} \rho_{k-1}^\gamma - \rho_k^{\gamma-1} \rho_{k-1}.$$

Donc, l'égalité (3.54) conduit à l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} - \Delta t \int_{\Omega_1} \rho_1^\gamma \operatorname{div} \mathbf{u}_1 d\mathbf{x}_1 &\geq \varepsilon \Delta t \|\rho_1\|_{L^{2\gamma}(\Omega_1)}^{2\gamma} + \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^{1+\zeta} \left\| \nabla (\rho_1)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ &+ \frac{1}{\gamma} \|\rho_1\|_{L^\gamma(\Omega_1)}^\gamma + \int_{\Omega_1} T_1(\rho_1) d\mathbf{x}_1 - \frac{1}{\gamma-1} \int_{\Omega_0} \rho_0^\gamma |\mathcal{J}_0| d\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Alors, en posant

$$D_1 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{2a}{(\gamma-1)} \rho_0^\gamma + \mathbf{u}_0^2 \right) |\mathcal{J}_0| d\mathbf{x}_0 + \Delta t \int_{\Gamma_{s,1}} \sigma(\Xi_1) \cdot \mathbf{n}_{s,1} |\mathcal{J}_{\Xi,1}| \frac{\partial \xi(t_1)}{\partial t},$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &+ 2\Delta t^{1+\zeta} \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 + 2\Delta t \nu \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \frac{2a}{\gamma} \|\rho_1\|_{L^\gamma(\Omega_1)}^\gamma \\ &+ \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + 2a \|T_1(\rho_1)\|_{L^1(\Omega_1)} + \frac{8a(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^{1+\zeta} \left\| \nabla (\rho_1)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ &+ 2a \Delta t \varepsilon \|\rho_1\|_{L^2(\Omega_1)}^{2\gamma} < D_1. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Cette majoration permet de majorer les solutions du problème (F_1) et montre que l'on peut choisir les données et un pas de temps Δt tel que le jacobien \mathcal{J}_1 soit strictement positif. En effet, soit $C_H = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} (C_{H,k})$ où $C_{H,k}$ est la constante d'injection de $H^3(\Omega_k)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega_k)$, alors l'inégalité (3.55) conduit à la majoration suivante :

$$\Delta t \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \Delta t C_H \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)} \leq \Delta t^{\frac{1-\zeta}{2}} C_H \left(\frac{D_1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $\mathcal{J}_1 = 1 + \Delta t \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \Delta t^2 \nabla(\mathbf{u}_1)_x \cdot \operatorname{Rot}((\mathbf{u}_1)_y)$, alors il existe Δt_{max} tel que :

$$\mathcal{J}_1 > 0, \quad \forall \Delta t < \Delta t_{max}. \quad (3.56)$$

Ce résultat est important car il permet l'obtention des majorations pour les solutions du problème (F_2) .

En utilisant un développement analogue au précédent, le problème (F_2) conduit à l'estimation :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + 2\Delta t^{1+\zeta} \|\mathbf{u}_2\|_{H^3(\Omega_2)}^2 + 2\Delta t \nu \|\mathbf{u}_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \frac{2a}{\gamma} \|\rho_2\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma \\ & + 2a \|T_1(\rho_2)\|_{L^1(\Omega)} + 2a\Delta t \varepsilon \|\rho_2\|_{L^{2\gamma}(\Omega_2)}^{2\gamma} + \frac{8a(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^{1+\zeta} \left\| \nabla(\rho_2)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \\ + \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \int_{\Omega_1} \left(\frac{2a}{\gamma-1} \rho_1^\gamma + \mathbf{u}_1^2 \right) |\mathcal{J}_1| d\mathbf{x}_1 + \Delta t \int_{\Gamma_{s,2}} \sigma(\Xi_2) \cdot \mathbf{n}_{s,2} |\mathcal{J}_{\Xi,2}| \frac{\partial \xi(t_2)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Si le pas de temps Δt satisfait la condition (3.56), alors on peut écrire (puisque (3.56) \Rightarrow $(\mathcal{J}_1 > 0)$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \rho_1^\gamma |\mathcal{J}_1| d\mathbf{x}_1 & = \int_{\Omega_1} \rho_1^{\gamma-1} (\rho_1 + \Delta t \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1) d\mathbf{x}_1 \\ & + \Delta t^2 \int_{\Omega_1} \rho_1^\gamma \nabla(\mathbf{u}_{k-1})_x \cdot \operatorname{Rot}((\mathbf{u}_{k-1})_y) d\mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

De plus (en utilisant la même technique que pour le problème (F_1)), l'équation de continuité de (F_2) et (3.58) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \rho_1^\gamma |\mathcal{J}_1| d\mathbf{x}_1 & \leq \Delta t^2 C_H^2 \|\rho_1\|_{L^\gamma(\Omega_1)}^\gamma \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 \\ & - \varepsilon \Delta t \|\rho_1\|_{L^{2\gamma}(\Omega_1)}^{2\gamma} - \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} \left\| \nabla(\rho_2)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \int_{\Omega_1} \rho_1^{\gamma-1} \rho_0 d\mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (3.59)$$

On note C_g la plus petite constante vérifiant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante :

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega_k)}^2 \leq C_g \|\phi\|_{H^1(\Omega_k)} \|\phi\|_{L^2(\Omega_k)}, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}.$$

L'estimation (3.57) conduit à :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + 2\Delta t^{1+\zeta} \|\mathbf{u}_2\|_{H^3(\Omega_2)}^2 + 2\Delta t\nu \|\mathbf{u}_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \frac{2a}{\gamma} \|\rho_2\|_{L^\gamma(\Omega_2)}^\gamma + \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + 2a \|T_1(\rho_2)\|_{L^1(\Omega_2)} + 2a\Delta t\varepsilon \|\rho_2\|_{L^{2\gamma}(\Omega_2)}^{2\gamma} + \varepsilon\Delta t \|\rho_1\|_{L^{2\gamma}(\Omega_2)}^{2\gamma} \\ & \quad + \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} \left\| \nabla (\rho_2)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \frac{8a(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^{1+\zeta} \left\| \nabla (\rho_2)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \\ & \leq \Delta t^2 C_H^2 \|\rho_1\|_{L^\gamma(\Omega_1)}^\gamma \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 + \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \Delta t C_g \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)} \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \\ & + \Delta t^2 C_H^2 \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 + \int_{\Omega_1} \rho_1^{\gamma-1} \rho_0 \, d\mathbf{x}_1 + \Delta t \int_{\Gamma_{s,2}} \sigma(\Xi_2) \cdot \mathbf{n}_{s,2} |J_{\Xi,2}| \frac{\partial \xi(t_2)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

On pose $T_2(\rho_k) = \rho_k^\gamma + \frac{1}{\gamma-1} \rho_k^{\gamma-1} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_k^{\gamma-1} \rho_{k-1}$, $T_2(\rho_k) > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, N\}$.

En additionnant la majoration des solutions du problème (F_1) et l'inégalité (3.60), on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + 2\Delta t^{1+\zeta} \|\mathbf{u}_2\|_{H^3(\Omega_2)}^2 + \frac{2a}{\gamma} \|\rho_2\|_{L^\gamma(\Omega_2)}^\gamma \\ & \quad + 2a \|T_1(\rho_2)\|_{L^1(\Omega_2)} + 2a \|T_2(\rho_1)\|_{L^1(\Omega_1)} + \Delta t \left(2\nu - C_g \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)} \right) \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \\ & + 2\Delta t\nu \|\mathbf{u}_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \Delta t^{1+\zeta} \left(2 - \Delta t^{1-\zeta} \left(C_H^2 \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{2aC_H^2}{\gamma-1} \|\rho_1\|_{L^\gamma(\Omega_1)}^\gamma \right) \right) \|\mathbf{u}_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 \\ & \quad + \frac{8a(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^\zeta \sum_{i=1}^2 \Delta t \left\| \nabla (\rho_i)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{8a}{\gamma^2} \Delta t^{1+\zeta} \left\| \nabla (\rho_1)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ & \quad + 2a\varepsilon \sum_{i=1}^2 \Delta t \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega_i)}^{2\gamma} + \Delta t \frac{2a\varepsilon}{\gamma-1} \|\rho_1\|_{L^{2\gamma}(\Omega_1)}^{2\gamma} \leq D_2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

où $D_2 = D_1 + \Delta t \int_{\Gamma_{s,2}} \sigma(\Xi_2) \cdot \mathbf{n}_{s,2} |J_{\Xi,2}| \frac{\partial \xi(t_2)}{\partial t}$.

Dans le cas du problème fluide étudié dans la section 3.1 une condition sur les données petites était nécessaire pour définir l'espace de stabilité; dans le cas discrétisé une condition analogue apparaît afin d'obtenir la positivité des termes de gauche dans l'estimation (3.61). En effet, grâce à l'estimation (3.55) on montre que

si les données sont telles que :

$$D_1 < \left(\frac{2\nu}{C_g} \right)^2, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (3.62)$$

alors $\left(2\nu - C_g \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)} \right) > 0$.

Cependant, une autre condition apparaît également sur le pas de temps. Pour satisfaire

$$2 - \Delta t^{1-\zeta} C_H^2 \left(\|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{2a}{\gamma-1} \|\rho_1\|_{L^\gamma(\Omega_1)}^\gamma \right) > 0,$$

il faut que

$$\Delta t^{1-\zeta} < \frac{2(\gamma-1)}{D_1 C_H^2 (2\gamma-1)}. \quad (3.63)$$

Cette estimation est, elle aussi, une conséquence directe de (3.55).

Trivialement on montre grâce à (3.61) que $\mathcal{J}_2 > 0$. De plus la condition (3.63) est suffisante pour que l'estimation (3.61) conduise à l'inégalité suivante :

$$2 - \Delta t^{1-\zeta} C_H^2 \left(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \frac{2a}{\gamma-1} \|\rho_2\|_{L^\gamma(\Omega_2)}^\gamma \right) > 0.$$

Finalement, si le pas de temps est suffisamment petit (satisfaisant les inégalités (3.63) et $\Delta t < \Delta t_{max}$) et si les données permettent de vérifier

$$D_k < (2\nu/C_g)^2, \quad (3.64)$$

alors pour tous $k \in \{2, \dots, N\}$ on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} 0 \leq & \|\mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + 2\Delta t^{1+\zeta} \|\mathbf{u}_k\|_{H^3(\Omega_k)}^2 + 2a \|T_1(\rho_k)\|_{L^1(\Omega_k)} \\ & + 2a \sum_{i=2}^k \|T_2(\rho_{i-1})\|_{L^1(\Omega_{i-1})} + \sum_{i=2}^k \left(2\nu - C_g \|\mathbf{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega_{i-1})} \right) \Delta t \|\mathbf{u}_{i-1}\|_{H^1(\Omega_{i-1})}^2 \\ & + \Delta t^\zeta \sum_{i=2}^k \left(2 - \Delta t^{1-\zeta} \left(C_H^2 \|\mathbf{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega_{i-1})}^2 + \frac{2a C_H^2}{\gamma-1} \|\rho_{i-1}\|_{L^\gamma(\Omega_{i-1})}^\gamma \right) \right) \Delta t \|\mathbf{u}_{i-1}\|_{H^3(\Omega_{i-1})}^2 \\ & + \frac{2a}{\gamma} \|\rho_k\|_{L^\gamma(\Omega_k)}^\gamma + 2\Delta t \nu \|\mathbf{u}_k\|_{H^1(\Omega_k)}^2 + \frac{8a(\gamma-1)}{\gamma^2} \Delta t^\zeta \sum_{i=1}^k \Delta t \left\| \nabla (\rho_i)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ & + \frac{8a}{\gamma^2} \Delta t^\zeta \sum_{i=2}^k \Delta t \left\| \nabla (\rho_{i-1})^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega_{i-1})}^2 + 2a\varepsilon \sum_{i=1}^k \Delta t \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega_{i-1})}^{2\gamma} \\ & + \frac{2a\varepsilon}{\gamma-1} \sum_{i=2}^k \Delta t \|\rho_{i-1}\|_{L^{2\gamma}(\Omega_{i-1})}^{2\gamma} \leq D_k. \quad (3.65) \end{aligned}$$

Cette dernière majoration permet d'énoncer le lemme suivant qui résume les bornes obtenues pour les solutions aux $(F_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$.

De plus on remarque que pour $\xi \in H^{3/2}(0, T; H_0^2(\Omega_t))$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} D_k &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{2a}{(\gamma-1)} \rho_0^\gamma + \mathbf{u}_0^2 \right) |\mathcal{J}_0| dx_0 + \Delta t \sum_{i=2}^k \int_{\Gamma_{s,i}} \sigma(\Xi_i) \cdot \mathbf{n}_{s,i} |\mathcal{J}_{\Xi_i}| \frac{\partial \xi(t_i)}{\partial t} \\ &\leq \int_{\Omega_0} \left(\frac{2a}{(\gamma-1)} \rho_0^\gamma + \mathbf{u}_0^2 \right) |\mathcal{J}_0| dx_0 + C \|\xi\|_{H^{3/2}(0, T; H_0^2(\Omega_t))}^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Lemme 3.20. *Si les données vérifient (3.64) et si Δt satisfait les inégalités (3.63) et $\Delta t < \Delta t_{max}$, alors il existe une constante C telle que pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ on ait les majorations suivantes :*

$$\|\mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 < C, \quad \sum_{i=1}^k \Delta t \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega)}^2 < C, \quad \Delta t^\zeta \sum_{i=1}^k \Delta t \|\mathbf{u}_i\|_{H^3(\Omega)}^2 < C,$$

$$\|\rho_k\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma < C, \quad \Delta t^\zeta \sum_{i=1}^k \Delta t \left\| \nabla (\rho_i)^{\gamma/2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 < C, \quad \varepsilon \sum_{i=1}^k \Delta t \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{2\gamma} < C,$$

$$\sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 < C.$$

3.3 Passage à la limite dans la discrétisation lagrangienne

Dans cette section, nous décrivons le passage à la limite lorsque Δt tend vers zéro. Cette étape constitue l'une des étapes majeures de la construction des solutions approchées. La difficulté principale de ce passage à la limite est de retrouver les termes d'advection.

Nous définissons tout d'abord les notations qui permettent de reconstituer l'expression continue de variables discrétisées. Pour $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[$, on pose :

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_k, \quad \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = \phi_k$$

et

$$\check{\phi}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t) + (t - (k-1)\Delta t) \frac{\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

En appliquant ces notations, on exprime l'ensemble des problèmes discrétisés $(F_k)_{(k \in \{1, \dots, N\})}$ sous la forme suivante :

$$\hat{F} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial t} - \nu \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \Delta t^\zeta A \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + a \nabla \hat{\rho}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = 0, \\ \frac{\partial \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial t} + \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \Delta t^\zeta \Delta \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \varepsilon \hat{\rho}^{\gamma+1} = 0. \end{array} \right.$$

De plus, grâce à la régularité du déplacement ξ , on a $Q_{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} Q$.

Les majorations obtenues dans la section précédente, permettent d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.21. *Si les hypothèses du lemme 3.20 sont vérifiées, alors les solutions du problème (\hat{F}) convergent vers celles de (F_ε) au sens des distributions (i.e. $(\hat{F}) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} (F_\varepsilon)$ dans $D'(Q)$).*

Démonstration. Une conséquence directe du lemme 3.20 est l'existence des limites

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } \rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)) \cap L^{2\gamma}(Q)$$

tel que

$$\begin{array}{l} \hat{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible, } \hat{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *, \\ \hat{\rho} \rightarrow \rho \text{ dans } L^{2\gamma}(0, T; L^{2\gamma}(\Omega)) \text{ faible, } \hat{\rho} \rightarrow \rho \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)) \text{ faible } *. \end{array}$$

De plus, en utilisant la majoration (3.65), on écrit :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Delta t}^T \|\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t)\|_{L^2(\Omega_{t, \Delta t})}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \Delta t \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right)^{1/2} \leq C \Delta t^{1/2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

où $\Omega_{t, \Delta t} = Q_{\Delta t} \cap \{t\}$. On en déduit que $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0$ dans $L^2(Q)$ fort. Les estimations sur \mathbf{u}_k conduisent également à

$$\|\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\|_{L^2(Q_{\Delta t})} \leq C$$

et

$$\|\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\|_{L^2(Q_{\Delta t})} = \left(\sum_{k=1}^N \Delta t \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right)^{1/2} \leq C \Delta t^{1/2},$$

d'où l'on déduit

$$\check{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort ,} \quad (3.67)$$

et

$$\check{\mathbf{u}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible .} \quad (3.68)$$

De même, il existe $\rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(Q_T))$ tel que $\varepsilon \rho^{2\gamma} \in L^1(Q_T)$ et

$$\begin{aligned} \varepsilon \hat{\rho}^{2\gamma} &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} \varepsilon \rho^{2\gamma} \text{ dans } L^1(Q_T) \text{ faible,} \\ \hat{\rho} &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} \rho \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega_t)) \text{ faible * .} \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\Delta t}^T \|\hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t)\|_{L^2(\Omega_{t, \Delta t})}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \Delta t \|\rho_k - \rho_{k-1}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right)^{1/2} \leq C \Delta t^\tau \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

où $\tau = 1/2$ si $\gamma \geq 2$, $\tau = (1 - \zeta)/2$ si $\gamma < 2$.

On en déduit que $\hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0$ dans $L^2(Q)$ fort si $\gamma < 2$ et dans $L^\gamma(Q)$ fort si $\gamma \geq 2$. On a donc

$$\check{\rho} - \hat{\rho} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} 0 \text{ dans } L^\gamma(Q) \text{ fort} \quad (3.69)$$

et

$$\check{\rho} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} \rho \text{ dans } L^\gamma(Q) \text{ fort .} \quad (3.70)$$

Le point le plus important de la démonstration du lemme 3.21 est le passage à la limite des termes $\frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \check{\rho}}{\partial t}$. En effet, il faut montrer que $\frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial t}$ (respectivement $\frac{\partial \check{\rho}}{\partial t}$) converge au sens des distributions vers $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ (respectivement $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$). Ce passage fait apparaître les difficultés liées aux termes non-linéaires.

Lorsque le déplacement de la frontière est suffisamment régulier, on a $Q_{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} Q_T$. De plus, Quelle que soit $\psi \in \mathcal{D}(Q_T)$, il existe un pas de temps Δt_ψ tel que $\forall \Delta t < \Delta t_\psi$, $\text{supp}(\psi) \subset\subset Q_{\Delta t}$. En multipliant $\frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial t}$ par ψ on peut écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{Q_{\Delta t}} \frac{\partial \check{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \\ &= \int_{Q_{\Delta t}} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\Delta t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \int_{Q_{\Delta t}} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t). \end{aligned} \quad (3.71)$$

On effectue le changement de variable $t^* = t - \Delta t$ dans le deuxième terme de (3.71), et on note \mathcal{J} le déterminant de la matrice jacobienne associée à ce changement. Ce jacobien s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{J} = 1 + \Delta t \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*) + \Delta t^2 \nabla(\hat{\mathbf{u}}_x(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*)) \cdot \operatorname{Rot}(\hat{\mathbf{u}}_y(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*)).$$

Par analogie avec (3.49) et en utilisant le lemme 3.20, on montre aisément que \mathcal{J} est strictement positif lorsque Δt est suffisamment petit. En conséquence, on peut réécrire (3.71) de la manière suivante

$$(3.71) = \int_{Q_{\Delta t}} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\Delta t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \int_0^{T-\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*)}{\Delta t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t) \\ - \int_0^{T-\Delta t} \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*) \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*) \psi(\hat{\mathbf{x}}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t) - R_{\mathcal{J}},$$

où $R_{\mathcal{J}} = \Delta t \int_0^{T-\Delta t} \int_{\Omega} \nabla(\hat{\mathbf{u}}_x(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*)) \cdot \operatorname{Rot}(\hat{\mathbf{u}}_y(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*)) \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*) \psi(\hat{\mathbf{x}}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t)$. De plus, nous avons l'estimation :

$$R_{\mathcal{J}} \leq C \Delta t \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(0, T; H^3(\Omega))}^2 \|\psi\|_{L^\infty(Q_{\Delta t})}.$$

Grâce à la majoration (3.65) on obtient $\|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} = \sup_{k \in \{1, N\}} \|\mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, et $\|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(0, T; H^3(\Omega))}^2 = \sum_{k=1}^N \Delta t \|\mathbf{u}_k\|_{H^3(\Omega)}^2 \leq \Delta t^{-\zeta} C$, donc $R_{\mathcal{J}} \leq C \Delta t^{1-\zeta}$. Ceci permet d'écrire que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} R_{\mathcal{J}} = 0. \quad (3.72)$$

On réécrit (3.71) sous la forme :

$$\int_{Q_{\Delta t}} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \psi(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\ - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), t^*) \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \psi(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t) - R_{\mathcal{J}}. \quad (3.73)$$

Le premier terme de (3.73) est développé de la manière suivante

$$\int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \psi(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t} = \\ \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\ + \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t) - \psi(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (3.74)$$

où $\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \Delta t \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ et

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t) - \psi(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \int_{\Delta t}^T \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_x(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi_x(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t) - \psi_x(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\ & \quad + \int_{\Delta t}^T \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_y(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi_y(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t) - \psi_y(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Les estimations a priori établies au lemme 3.20 sont donc suffisantes pour passer à la limite dans les différents termes de (3.73). En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \psi(\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t), t + \Delta t) \\ = - \langle \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \\ = - \langle \mathbf{u}_x \operatorname{div} \mathbf{u}, \psi_x \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} - \langle \mathbf{u}_y \operatorname{div} \mathbf{u}, \psi_y \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) - \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t)}{\Delta t} = - \left\langle \mathbf{u}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}. \quad (3.76)$$

En utilisant l'injection continue de $H^3(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ on montre que, d'après (3.65), la limite de $\|\Delta t \hat{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(Q_T)}$ est égale à zéro lorsque Δt tend vers zéro. En conséquence, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}_x(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi_x(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t) - \psi_x(\hat{\mathbf{x}}(t) + \Delta t \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\ = - \left\langle (\mathbf{u}_x^2, \frac{\partial \psi_x}{\partial x}) \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} - \left\langle \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y, \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \\ = \langle \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u}_x, \psi_x \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = \langle \mathbf{u}_x \operatorname{div} \mathbf{u}, \psi_x \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \\ + \langle \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}_x, \psi_x \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_{Q_{\Delta t}} \hat{\mathbf{u}}_y(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \frac{\psi_y(\hat{\mathbf{x}}(t), t + \Delta t) - \psi_y(\hat{\mathbf{x}}(t) + \Delta t \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\ = - \left\langle (\mathbf{u}_y^2, \frac{\partial \psi_y}{\partial y}) \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} - \left\langle \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x, \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \\ = \langle \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u}_y, \psi_y \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = \langle \mathbf{u}_y \operatorname{div} \mathbf{u}, \psi_y \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \\ + \langle \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}_y, \psi_y \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

Finalement, (3.75,3.76,3.77,3.78) et (3.72) impliquent que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_{Q_{\Delta t}} \frac{\partial \check{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial t} \psi(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)},$$

ce qui montre que $\frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right)$ au sens des distributions.

On peut facilement adapter cette démonstration pour montrer que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T).$$

Donc, ces passages à la limite nous permettent d'obtenir le problème limite :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nu \Delta \mathbf{u} + a \nabla \overline{\rho^\gamma} = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \varepsilon \overline{\rho^{\gamma+1}} = 0 \end{cases}$$

où $\overline{\rho^\gamma}$ et $\overline{\rho^{\gamma+1}}$ sont respectivement les limites faibles de ρ^γ et de $\rho^{\gamma+1}$. Pour conclure la démonstration il faut établir les égalités suivantes :

$$\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma, \quad \text{et} \quad \overline{\rho^{\gamma+1}} = \rho^{\gamma+1}.$$

Pour cela, on utilise les travaux de P.L. Lions dans la Section 5 de [48]. Puisque $\hat{\rho}$ est borné dans $L^{2\gamma}(Q_T) \subset L^{\gamma+1}(Q_T)$, et que la fonction $\phi^{2\gamma}$ domine $\phi^{\gamma+1}$, on déduit que $\hat{\rho}$ converge fortement dans $L^p(Q_T)$ pour $p < 2\gamma$.

3.4 Point fixe : Fluide-Structure.

Pour conclure la construction des solutions approchées, il faut recoupler le problème fluide avec le modèle de coque. Pour ce faire, on montre la convergence d'un point fixe liant la solution du problème fluide à la solution des équations de coque régissant le déplacement de la frontière.

On montre l'existence d'un point fixe sur le premier intervalle $(0, \Delta t)$, mais ce résultat s'étend à tous les intervalles de temps $(k\Delta t, (k+1)\Delta t) \subset (0, T)$.

On utilise de nouveau la notation

$$\hat{\phi}(t) = \phi_k \text{ lorsque } t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[,$$

Pour initier le processus de point fixe, on résout le problème fluide avec un déplacement approché $\xi^1 \in H^{3/2}(0, \Delta t, H_0^2(\Omega_s))$.

Soit $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho})$ la solution obtenue. Grâce aux estimations (3.65, 3.66) et en remarquant que $\Delta t^\zeta < 1$, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \Delta t^\zeta \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(0, \Delta t; H^3(\Omega_1))}^2 + \Delta t^\zeta \left(\|\hat{\rho}\|_{L^\infty(0, \Delta t; L^\gamma(\Omega_1))}^\gamma + \|\nabla(\hat{\rho}^{\gamma/2})\|_{L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega_1))}^2 \right) \\ \leq C \left(\|\xi^1\|_{H^{3/2}(0, \Delta t; H_0^2(\Omega_s))}^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

On résout ensuite le problème de la structure :

$$\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} + \mathcal{B} \cdot A_s(\xi^2) + \mathcal{B}' A_s \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial t} \right) = -\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{s,k} | \mathcal{J}_{\Xi, k} | \quad \text{dans } (0, \Delta t) \times \Omega_s. \quad (3.80)$$

En multipliant ce problème par $\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2}$ au sens du produit scalaire de $L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega_s))$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega_s))}^2 &\leq C \left(1 + \int_0^{\Delta t} \int_{\Omega_s} -\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{s,k} | \mathcal{J}_{\Xi, k} | \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} \right) \\ &\leq C + C_\varepsilon \|\hat{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_{s,k}\|_{L^2(0, \Delta t; L^1(\Gamma_{s,k}))}^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^\infty(\Omega_s))}^2. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Grâce au modèle de coque utilisé pour décrire le déplacement de l'artère, il existe une constante K_{N_s} dépendant du nombre de modes propres utilisés, telle que :

$$\left\| \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^\infty(\Omega_s))}^2 \leq K_{N_s} \left\| \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, \Delta t; L^2(\Omega_s))}^2.$$

De plus, on a :

$$\|\hat{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_s}\|_{L^2(0, \Delta t; L^1(\Gamma_s))} \leq C \left(\|\hat{\rho}^\gamma\|_{L^2(0, \Delta t; W^{1,1}(\Omega))} + \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(0, \Delta t; H^3(\Omega))} \right) \quad (3.82)$$

et

$$\|\hat{\rho}^\gamma\|_{L^2(0,\Delta t;W^{1,1}(\Omega_1))} \leq C \left(\|\hat{\rho}\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^\gamma(\Omega_1))}^\gamma + \|\nabla(\hat{\rho}^{\gamma/2})\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega_1))}^2 \right). \quad (3.83)$$

Il existe donc une constante C telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega_s))}^2 &\leq C \left(\|\hat{\rho}\|_{L^\infty(0,\Delta t;L^\gamma(\Omega_1))}^\gamma \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla(\hat{\rho}^{\gamma/2})\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega_1))}^2 + \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,\Delta t;H^3(\Omega_1))}^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Finalement, grâce à l'estimation (3.79) et à notre modèle de coque, on obtient :

$$\Delta t^\zeta \|\xi^2\|_{H^2(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))}^2 \leq C \left(\|\xi^1\|_{H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))}^2 + 1 \right).$$

En utilisant l'injection de $H^2(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s)) \hookrightarrow H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))$ on peut conclure que si $\zeta < 1/2$, alors :

$$\|\xi^2\|_{H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))}^2 \leq \Delta t^{\frac{1}{r}-\zeta} C \left(\|\xi^1\|_{H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))}^2 + 1 \right) \quad r \in]2,\infty[/ \frac{1}{r} - \zeta > 0.$$

On construit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda : H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s)) &\rightarrow H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s)), \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial t} &\mapsto \frac{\partial \xi^2}{\partial t}. \end{aligned}$$

Quel que soit $R > 0$, si $\left\| \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right\|_{H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))}^2 < R$, alors on peut choisir un pas de temps Δt suffisamment petit tel que $\left\| \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right\|_{H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))}^2 < R$. On a donc montré que l'image, par l'opérateur continu Λ , de la boule $B(0,R)$ de $H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))$ est incluse dans elle-même. Puisque l'on est en dimension finie d'espace, cette boule est relativement compacte et on peut donc appliquer le théorème de point fixe de Schauder.

On a montré l'existence d'un point fixe dans $H^{3/2}(0,\Delta t;H_0^2(\Omega_s))$. Par continuité, on étend ce raisonnement sur tous les intervalles de temps $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]_{k \in \{1, \dots, N-1\}}$.

Chapitre 4

Analyse numérique

Dans ce chapitre nous présentons deux approches utilisées pour résoudre numériquement le problème étudié au chapitre 3.

Les difficultés intrinsèques au couplage ont été mises en évidence dans le chapitre 2 avec en particulier la nécessité d’approcher, de manière optimale, l’accélération de la structure (qui constitue la condition sur le bord pour la vitesse du fluide). Les techniques de résolution présentées ici dans le cadre d’écoulements internes, sont également applicables aux mouvements de solides (déformables ou non) dans un fluide.

La méthode des domaines fictifs, bien que séduisante au niveau théorique, présente des difficultés dans sa mise en œuvre numérique liées à l’apparition d’un type “phénomène de Gibbs”. La méthode A.L.E. couplée avec celle de Galerkin est bien adaptée à notre cas test mais revêt un aspect moins général.

4.1 Méthode des domaines fictifs

4.1.1 Présentation

Dans cette section nous présentons la méthode des domaines fictifs appelée “pénalisation de Brinkman” [41, 67] utilisée pour résoudre le problème (C_3) (*c.f.* Chapitre 1).

Globalement, le principe de la méthode consiste à étendre le domaine fluide à un domaine d’étude le contenant lui et son adhérence. En général, le domaine étendu est un domaine polyédrique convexe simple (par exemple un rectangle en dimension

2), mais on peut prendre toute géométrie ayant la régularité minimale pour que le problème prolongé soit bien posé.

La méthode de résolution utilisant les domaines fictifs a été utilisée entre autres par C.S. Peskin dans [65] pour l'étude du comportement d'une valve cardiaque (associée à une méthode A.L.E.). Une version modifiée a été utilisée dans D. Goldstein et al. [37] pour être appliquée à l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre. Ces travaux ont été suivis de nombreuses autres applications ([36, 35, 61, 72]). Parmi celles-ci, on peut citer en particulier celle utilisée par R. Glowinski dans [35, 61]. Elle consiste à modéliser l'action du fluide sur le bord réel par un multiplicateur de Lagrange qui est ajouté aux équations de Navier-Stokes.

Citons également celle introduite par P. Angot & Al.[1], qui consiste à pénaliser l'équation de conservation de la masse par un terme de porosité. Cette méthode est basée sur la loi de porosité de Brinkman (qui dérive de la loi de Darcy) et consiste à modéliser le domaine d'étude étendu comme un milieu poreux dont la porosité est nulle dans le domaine matériellement occupé par le fluide et tend vers l'infini dans le reste du domaine.

Les avantages de cette dernière méthode, également appelée "immersion du bord" ("immersed boundary approach") sont nombreux. En particulier, elle permet de travailler sur un domaine fixe avec des conditions aux limites arbitraires. De plus, le paramètre de pénalisation peut être choisi indépendamment des paramètres de discrétisation (espace et temps). Ainsi, on peut ajuster ce paramètre sans nuire au temps de calcul ni affecter la qualité de la méthode de résolution appliquée au problème étendu.

Remarque 4.1. Avant d'être utilisée pour la résolution numérique (notamment par C.S. Peskin [65]) des équations aux dérivées partielles dans des domaines à frontières variables, cette méthode de pénalisation était déjà utilisée pour étudier théoriquement l'existence de solutions de problèmes aux limites non linéaires à frontières variables. En particulier, dans [44], J.L. Lions introduit cette technique pour montrer l'existence d'un problème non linéaire sur un domaine non cylindrique.

4.1.2 Application

Dans l'équation des moments, le terme de pénalisation ou de "porosité" est choisie de la forme $\frac{M\mathbf{u}}{\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ et où $M \in C^k(\tilde{\Omega})$, $k \geq 0$ (où $\tilde{\Omega}$ est le domaine prolongé) est une fonction masque définie par:

$$M(t) \begin{cases} > 0 \text{ sur } \tilde{\Omega} \setminus \Omega_t \\ = 0 \text{ sur } \Omega_t. \end{cases}$$

Les conditions sur le domaine étendu sont $\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ sur $\partial\tilde{\Omega}$.

On construit une base spéciale sur $\tilde{\Omega}$ définie par :

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_i &= \lambda\varphi_i & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \varphi_i|_{\Gamma_0} \cdot \mathbf{n}_{\partial\tilde{\Omega}} &= \text{rot } \mathbf{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0 = \partial\tilde{\Omega} \end{aligned}$$

et on résout le problème fluide sur le domaine prolongé à l'aide de la méthode de Galerkin.

Pour ces tests, on suppose que les conditions sur le domaine réel sont $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega_t \setminus \Gamma_s = \Gamma_\pm \cup \Gamma_a$ et $\mathbf{u} = \frac{\partial\xi}{\partial t}$ sur Γ_s . Les équations pénalisées du fluide s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon + \frac{M(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{w})}{\varepsilon} = \mathbf{F} - a\nabla\rho_\varepsilon^\gamma + \nu\Delta\mathbf{u}_\varepsilon + \frac{1}{3}\nu\nabla\text{div } \mathbf{u}_\varepsilon & \text{dans } Q_T, \\ \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t} + \text{div } \rho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon = 0 & \text{dans } Q_T = (0, T) \times \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

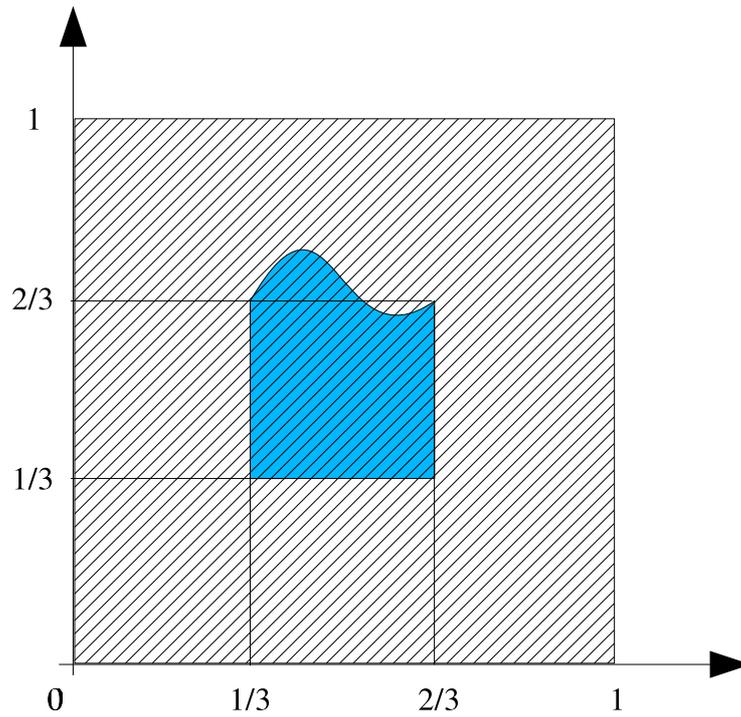
où \mathbf{w} est le prolongement d'un relèvement posé sur Ω_t vérifiant la condition $\mathbf{w} = \frac{\partial\xi}{\partial t}$ sur Γ_s et $\mathbf{w} = 0$ sur $\partial\Omega_t \setminus \Gamma_s$, M est la fonction masque

En ce qui concerne la structure, on conserve les équations de coque de Donnell du problème (C_3).

Remarque 4.2. La base spéciale obtenue sur le domaine prolongé possède de bonnes propriétés [57]. Son utilisation est rendue possible grâce à la liberté obtenue sur les conditions aux limites du domaine étendu.

On considère un carré unitaire représentant le domaine étendu. Le fluide "réel" a pour domaine initial le carré compris entre les droites $(x = 1/3, x = 2/3, y = 1/3, y = 2/3)$.

Remarque 4.3. Dans ce cas, la base est définie analytiquement.

FIG. 4.1 – *Domaine d'étude*

Comme dans le chapitre 2, on soumet la structure à une force extérieure $\mathbf{F}_{ext} = (0, F_y)$, avec $F_y = F \times \sin(\omega t) \sin(\pi x)$.

On choisit la fonction masque suivante :

$$M(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1/3 < y < 2/3 + \xi_y \text{ et } 1/3 < x < 2/3, \\ 1 & \text{si } 1/3 > y \text{ ou } y > 2/3 \text{ ou } x > 1/3, \\ \frac{1}{1/3 - \xi_y} y - \frac{2/3 + \xi_y}{1/3 - \xi_y} & \text{si } 1/3 < x < 2/3 \text{ et } y > 2/3 + \xi_y. \end{cases}$$

Les résultats suivants présentent les champs de vitesse \mathbf{u}_c en rouge et le relèvement \mathbf{w} en vert. Les deux premiers résultats montrent leur comportement dans le domaine prolongé au delà de la déformée de la structure Γ_s (courbe bleu). Le premier champ correspond à la phase ascendante et le deuxième à la phase descendante.

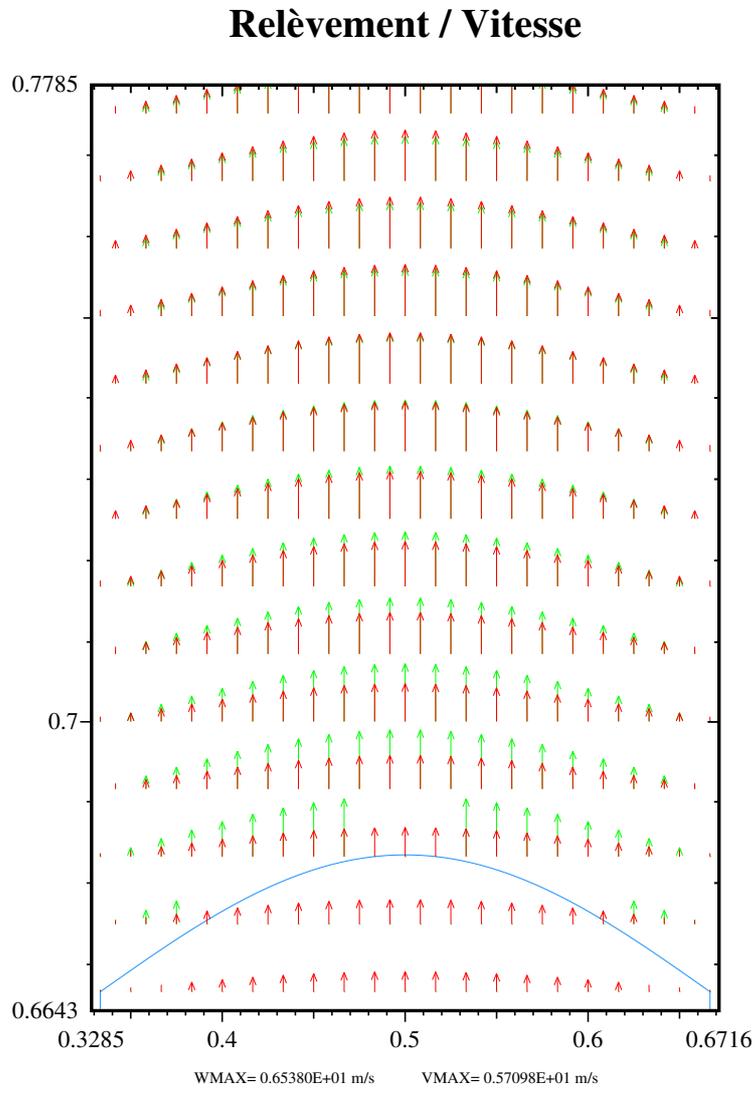


FIG. 4.2 – Phase ascendante $\mathbf{u}_{\varepsilon_y}|_{\Gamma_s} \geq 0$

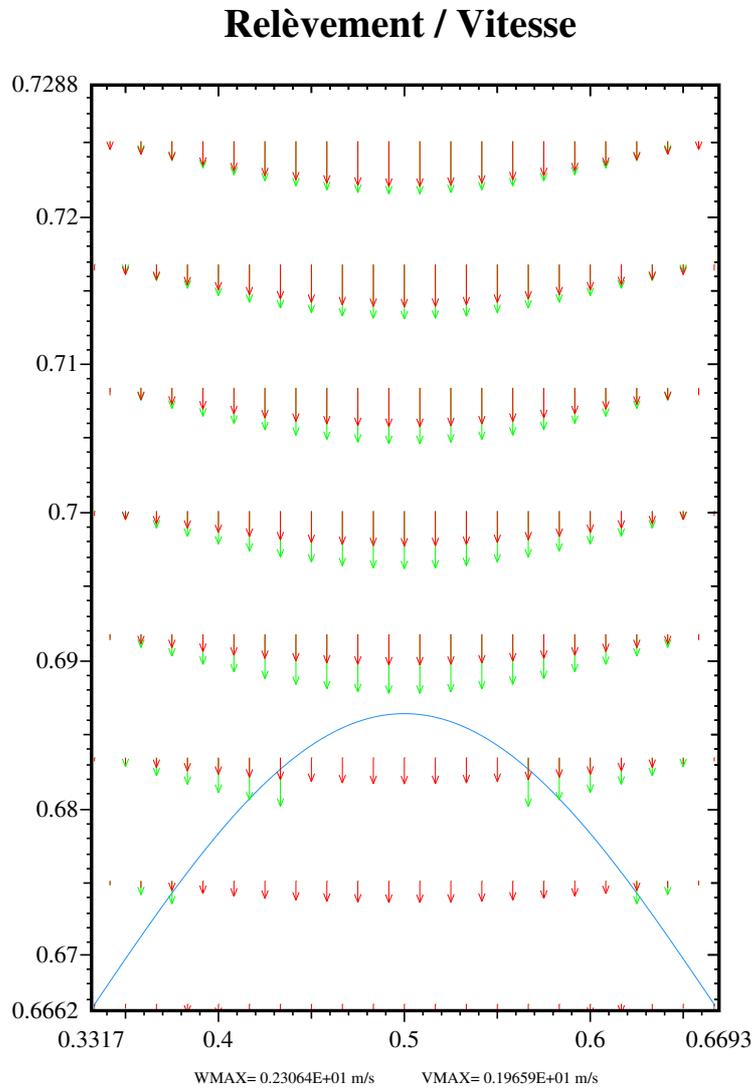


FIG. 4.3 – Phase descendante $\mathbf{u}_{\varepsilon_y}|_{\Gamma_s} \leq 0$

On observe un phénomène de “Gibbs”. En effet, les deux champs de vecteurs doivent se superposer mais au voisinage de la frontière, la solution \mathbf{u}_ε ne correspond pas à la valeur du relèvement. Il y a une oscillation de l’amplitude du déplacement vertical.

Cette erreur engendre une instabilité lorsque le problème fluide est couplé à celui

de la coque et ne permet pas de mener à terme la simulation.

Le résultat suivant montre le champ de vitesse à l'intérieur du domaine fluide "réel".

Champ de vitesse

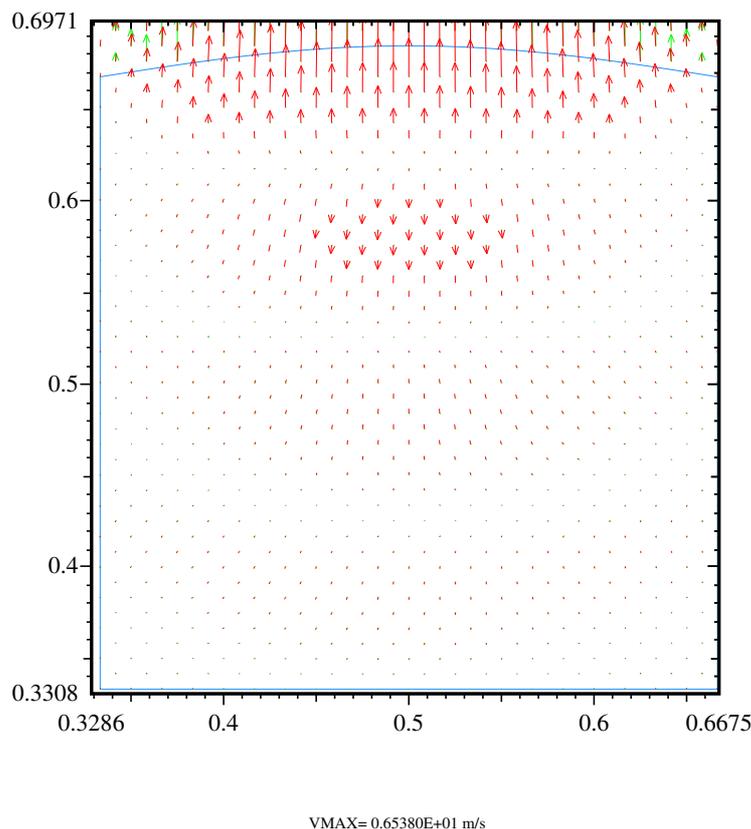


FIG. 4.4 – Intérieur du domaine réel

Dans cette partie du domaine, on observe également les oscillations de type Gibbs.

L'instabilité générée par ce phénomène ne permet pas une bonne application de cette méthode de résolution dans le cas de couplages "fluide-structure". Dans [41], Kevlahan et Ghidaglia observent ces oscillations de Gibbs dans la simulation d'un écoulement autour d'un cylindre. Pour diminuer ces oscillations, les auteurs appliquent une fonction masque plus régulière et ils observent une variation de l'action du fluide sur la paroi du cylindre. Mais l'application d'une fonction masque plus régulière n'est pas adaptée au couplage, car si l'erreur sur la vitesse diminue, celle

sur la contrainte augmente.

Pour mettre en évidence l'influence du choix de la fonction masque M (plus précisément $M\mathbf{w}$), nous avons réalisé une série de tests en dimension 1 sur l'équation de la chaleur (Annexe C).

L'approche purement spectrale de la résolution du problème pénalisé montre ses limites dans le cas d'une application aux problèmes couplés. Cependant des travaux récents basés sur l'utilisation d'ondelettes [23, 42, 73, 75] ouvrent de nouvelles perspectives qu'il serait intéressant d'explorer.

4.2 Méthode Arbitraire Euler Lagrange

Dans cette section, nous présentons les principes de la méthode A.L.E. (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Le problème est discrétisé le long des trajectoires A.L.E. puis résolu par la méthode de Galerkin. L'originalité de ce travail réside dans l'utilisation, pour la méthode de Galerkin, d'une base spéciale définie à partir d'une base propre obtenue sur un domaine fixe.

Cette technique est appliquée dans le cadre d'une étude d'un problème d'interaction fluide-structure (dérivé du problème C_3). Nous présentons un problème d'écoulement interne modélisant le comportement d'un fluide se situant dans la partie interne d'une structure élastique. De manière générale, lorsqu'on soumet la structure à une action extérieure, ou lorsque le fluide est en mouvement, la structure se déforme. Le mouvement de la structure engendre une déformation du domaine occupé par le fluide. Dans le cas de faibles perturbations, il est acceptable de négliger les déformations du domaine pour l'étude du problème fluide. Cependant, lorsque les déformations de la structure ne sont plus négligeables par rapport aux dimensions du domaine fluide, ou bien lorsqu'on prend en considération les non-linéarités de l'équation de conservation de la masse, il est nécessaire de prendre en considération l'évolution du domaine occupé par le fluide (*c.f.* Remarque A.1 Annexe A). La configuration eulérienne n'est pas adaptée à l'étude de domaine à frontière mobile car elle nécessite de construire une discrétisation spatiale (maillage) pour chaque instant. La configuration lagrangienne est mieux adaptée à l'étude des problèmes à frontières va-

riables; cependant la résolution des équations du fluide dans un référentiel lagrangien peut engendrer de nombreux problèmes numériques liés à de trop fortes distorsions du maillage (superposition des éléments, disparité de la taille des éléments, ...).

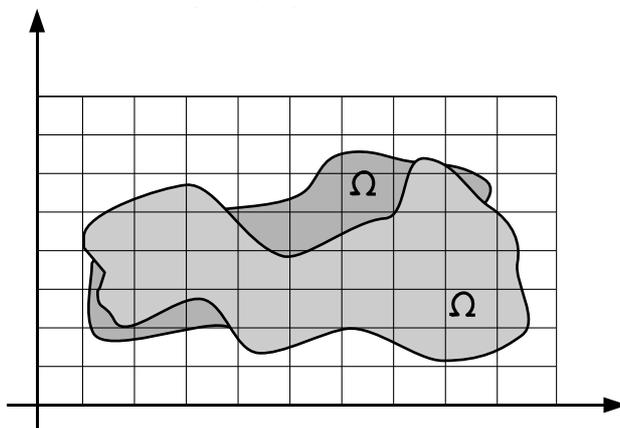


FIG. 4.5 – Maillage eulérien

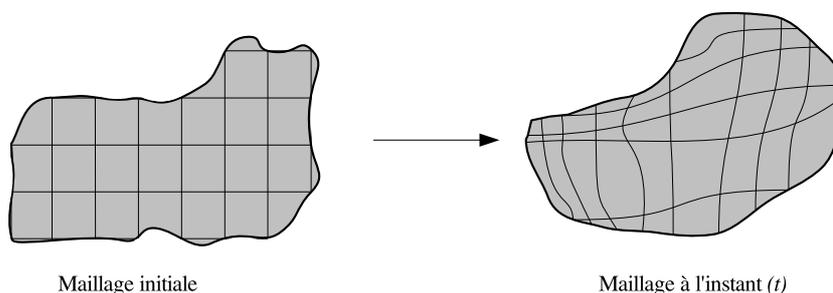


FIG. 4.6 – Evolution d'un maillage lagrangien

Ces raisons conduisent à l'utilisation d'une formulation mixte, c'est-à-dire dans un référentiel mobile mais dont la vitesse est déterminée arbitrairement en fonction du problème étudié. Cette méthode est appelée A.L.E. car l'évolution du domaine de référence est donnée de manière arbitraire, la seule contrainte étant de faire correspondre la frontière du référentiel avec la frontière réelle du domaine fluide.

Le principe de la méthode A.L.E. consiste à résoudre le problème fluide à frontières variables sur un maillage mobile qui suit exactement les déformations du domaine fluide. Il faut donc écrire les équations du fluide dans un domaine qui n'est pas le domaine physique mais un domaine de référence Ω^r .

Le domaine de référence possède une vitesse de déplacement par rapport au domaine physique; cette vitesse est notée \mathbf{c}_τ . Le choix de cette vitesse est arbitraire, la seule contrainte sur \mathbf{c}_τ est de faire correspondre, au cours du temps, les frontières du domaine de référence et du domaine réel (la vitesse de la frontière n'est pas nécessairement égale à la vitesse du fluide sur celle-ci mais il y a égalité des composantes normales). Le choix $\mathbf{c}_\tau = \mathbf{u}$, où \mathbf{u} est la vitesse des particules, revient à étudier le problème en lagrangien.

Formulation A.L.E.

Cette méthode est ici présentée appliquée aux équations de Navier-Stokes dans un domaine à frontières variables.

On note Ω_t l'ouvert de \mathbb{R}^2 correspondant au domaine occupé par le fluide à l'instant t . On décompose la frontière $\Gamma = \partial\Omega_t$ de la manière suivante : $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_m$, où Γ_f est la partie fixe de la frontière et Γ_m la partie mobile.

Remarque 4.4. Dans le cas où le déplacement de la partie mobile de la frontière Γ_m est solution d'un problème dépendant du fluide, les équations du fluide sont étudiées pour une variation de domaine donnée et les deux problèmes sont couplés par une procédure de point fixe. En conséquence, nous présentons la méthode de résolution dans le cas d'un domaine fluide dont la frontière évolue de manière indépendante.

Le comportement du fluide est supposé régi par les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques (modèle utilisé dans le problème C_3 dans lequel on néglige le terme $(\nu/3)\nabla\text{div}\mathbf{u}$ comme dans la section 3.2) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + a \nabla \rho^\gamma = 0, \text{ dans } Q = \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} = 0, \text{ dans } Q, \quad (4.2)$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \text{ sur } \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_m,$$

$$\mathbf{u} = \varphi \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_f.$$

Remarque 4.5. Ces conditions ne sont pas les seules adaptables à la méthode, mais elles permettent une meilleure lisibilité des différents développements de cette section. De plus, nous considérons par la suite le cas partiellement homogène $\varphi = 0$ (homogène sur la partie fixe de la frontière). Cette dernière hypothèse n'est pas restrictive car on peut construire un relèvement pour les conditions aux limites sur la partie fixe du domaine fluide.

Equations du problème

On écrit les équations (4.1,4.2) sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nu\Delta\mathbf{u} + a\nabla\rho^\gamma = 0, \text{ dans } Q, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \text{ dans } Q, \quad (4.4)$$

où $\frac{d}{dt}$ représente la dérivée particulaire.

Il est nécessaire de déterminer l'expression des courbes caractéristiques dans le référentiel mobile Ω^τ . On peut, en intégrant \mathbf{c}_τ , construire l'application $C(\mathbf{x}, t, \tau)$ qui relie les domaines de référence à différents instants. On définit C de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C(\cdot, t_1; t_2) : \Omega^{t_1} &\longrightarrow \Omega^{t_2} \\ \mathbf{x}_1 &\longmapsto \mathbf{x}_2 = C(\mathbf{x}_1, t_1; t_2) \end{aligned}$$

avec $C(\cdot, t_1; t)$ solution de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C(\mathbf{x}_1, t_1; t), t) &= (\mathbf{c}_t(C), 1), \\ C(\mathbf{x}_1, t_1; t_1) &= (\mathbf{x}_1, t_1). \end{aligned}$$

Par un changement de variable utilisant $C(\cdot, \cdot, \cdot)$, on définit les variables du problème dans Ω^τ . Ainsi, on note les variables A.L.E. de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(C(\mathbf{x}, \tau; t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^\tau, \quad (4.5)$$

$$p_\tau(\mathbf{x}, t) = p(C(\mathbf{x}, \tau; t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^\tau. \quad (4.6)$$

En dérivant (4.5) par rapport au temps à l'instant $t = \tau$, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \nabla \mathbf{u}_\tau,$$

De manière générale, si l'on considère f_τ une variable exprimée en formulation A.L.E., on a :

$$\frac{df_\tau}{dt} = \frac{\partial f_\tau}{\partial t} + (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{c}_\tau) \cdot \nabla f_\tau.$$

Ainsi, les équations de Navier-Stokes s'écrivent, au temps $t = \tau$, sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} + (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{c}_\tau) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau - \nu \Delta \mathbf{u}_\tau + a \nabla \rho_\tau^\gamma = 0, \text{ dans } \Omega^\tau, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \rho_\tau}{\partial t} + (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{c}_\tau) \cdot \nabla \rho_\tau + \rho_\tau \operatorname{div} \mathbf{u}_\tau = 0, \text{ dans } \Omega^\tau, \quad (4.8)$$

Vitesse du domaine de référence

Le choix de la vitesse \mathbf{c}_τ du référentiel, bien qu'arbitraire, est soumis à différentes contraintes. La vitesse du domaine de référence doit être telle que les frontières de ce dernier correspondent à celles du domaine fluide à chaque instant. De plus, la régularité de \mathbf{c}_τ doit être suffisante pour que $C(x,0,t)$ soit un difféomorphisme et définisse un changement de variables pour tout t . D'un point de vue théorique le problème non-discretisé n'impose pas d'autre contrainte; cependant la discrétisation impose des conditions supplémentaires. En effet, en fonction de la méthode de résolution utilisée (Galerkin - éléments finis, volumes finis, ...) il est nécessaire d'obtenir une discrétisation (maillage) suffisamment régulière.

La loi de conservation géométrique impose la condition partielle $\mathbf{c}_\tau \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n}$ où \mathbf{w}_b est la vitesse de la frontière du domaine fluide; la composante tangentielle possède donc une totale liberté. Dans le cas que nous présentons, on fixe $\mathbf{c}_\tau = 0$ sur Γ_f (on pourrait imposer $\mathbf{c}_\tau \cdot \mathbf{n} = 0$ et compléter par une condition de type glissement). En ce qui concerne la frontière mobile Γ_m , on fixe $\mathbf{c}_\tau = \mathbf{g}$, il serait plus intuitif de considérer la condition $\mathbf{c}_\tau \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ mais la condition de Dirichlet est plus adaptée car elle correspond aux conditions aux limites du problème fluide.

En ce qui concerne le choix de la vitesse \mathbf{c}_τ à l'intérieur du domaine, il existe de nombreuses méthodes [40]. Une méthode couramment utilisée consiste à résoudre

l'équation de Poisson $\Delta \mathbf{c}_\tau = 0$, avec des conditions aux limites adaptées. Parmi les nombreuses autres méthodes, on peut citer par exemple “the spring method” [3, 11] (méthode des ressorts) qui s'utilise principalement dans le cas d'une discrétisation par éléments finis, et dont le principe est de modéliser le comportement des nœuds du maillage comme s'ils étaient reliés entre eux par des ressorts dont la raideur peut être différente en fonction de la localisation du nœud. Cette technique est également utilisée pour les maillages adaptatifs où le raffinement de maillage.

Il est important de retenir que si la vitesse doit satisfaire la loi de conservation géométrique ainsi que celles des changements de variables, le paramètre important de la méthode réside dans le choix de cette vitesse pour obtenir une évolution de la discrétisation la plus adaptée à la méthode de résolution utilisée.

Pour notre part, la vitesse sera construite à partir d'une “dilatation” du domaine en fonction du déplacement \mathbf{g} . On précise dans la section **Discrétisation spatiale** le choix de \mathbf{c}_τ , ainsi que ses avantages et sa bonne adéquation avec la méthode de résolution choisie.

Remarque : *Afin de simplifier l'écriture, nous prenons $a = \gamma = 1$.*

Discrétisation temporelle

On applique la méthode des caractéristiques aux équations (4.7,4.8). Les courbes caractéristiques doivent être approchées dans le domaine mobile: ainsi la vitesse de convection n'est pas la vitesse eulérienne des particules, mais la vitesse exprimée dans le référentiel mobile .

Classiquement, la période d'étude $[0, T]$ est divisée uniformément en M pas de temps $\Delta t = T/M$. On note en indice, le domaine dans lequel est exprimée la variable, et en exposant le temps auquel elle est exprimée. Par exemple \mathbf{u}_m^{m+1} est la vitesse à l'instant t^{m+1} exprimée dans le domaine Ω^{t^m} . De plus si l'indice et l'exposant correspondent au même temps on ne notera que ce dernier. On utilise un schéma de discrétisation temporelle utilisant la méthode des caractéristiques (selon les trajectoires A.L.E.) pour les équations (4.7) et (4.8) et on construit le processus de résolution suivant :

Processus

A l'instant t^m , on suppose $\Omega^m = \Omega^{t^m}$, \mathbf{u}^m , ρ^m et \mathbf{c}^m connues. La discrétisation temporelle à l'ordre 1 des équations est [51]:

$$\mathbf{u}_m^{m+1} - \mathbf{u}^m(\mathbf{X}^m) - \Delta t \nu \Delta \mathbf{u}_m^{m+1} + \Delta t \nabla \rho_m^{m+1} = 0 \text{ dans } \Omega^m \quad (4.9)$$

$$\rho_m^{m+1} = \rho^m(\mathbf{X}^m) e^{\Delta t \operatorname{div} \mathbf{u}_m^{m+1}} \quad (4.10)$$

où \mathbf{X}^m vérifie:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}^m}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u}^m - \mathbf{c}^m), \\ \mathbf{X}^m(\mathbf{x}, t^{m+1}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Le système (4.11) caractérise la trajectoire d'une particule dans Ω^m . Ainsi, la particule située en \mathbf{x} à l'instant $t^{m+1} = t^m + \Delta t$ se trouvait en $\mathbf{X}^m(\mathbf{x}, t^m)$ à l'instant t^m .

Le passage de \mathbf{u}_m^{m+1} à \mathbf{u}^{m+1} s'effectue de la manière suivante:

$$\mathbf{u}^{m+1}(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{c}^m(\mathbf{x})) = \mathbf{u}_m^{m+1}(\mathbf{x}).$$

De manière analogue, on écrit:

$$\rho^{m+1}(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{c}^m(\mathbf{x})) = \rho_m^{m+1}(\mathbf{x}).$$

Le système (4.11) est approché de la manière suivante:

$$\mathbf{x} - \mathbf{X}^m = \Delta t (\mathbf{u}^m - \mathbf{c}^m)(\mathbf{X}^m). \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) permet d'obtenir une approximation de la position du "pied de la caractéristique".

Discrétisation spatiale

Pour résoudre le problème fluide discrétisé en temps, nous résolvons successivement les deux équations du fluide de manière découplée en effectuant un point fixe entre (4.9) et (4.10). La résolution de (4.9) est effectuée via une discrétisation spectrale originale. On donne tout d'abord la formulation variationnelle de (4.9): trouver $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega_m)$ et $\rho \in L^2(\Omega_m)$ tels que:

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{u} \tilde{\varphi} + \Delta t \nu \int_{\Omega_m} \nabla \mathbf{u} \nabla \tilde{\varphi} + \Delta t \int_{\Omega_m} \nabla \rho \tilde{\varphi} = \int_{\Omega_m} F \tilde{\varphi} \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega_m),$$

où $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m^{m+1}$, $\rho = \rho_m^{m+1}$ et $F = \mathbf{u}^m(\mathbf{X}^m)$.

Notations : dans la suite on note ∇_m le gradient exprimé dans le domaine mobile à l'instant t_m .

La technique numérique la plus utilisée pour approcher l'espace fonctionnel $H_0^1(\Omega_m)$ est la méthode des éléments finis. Cette dernière a pour principe la construction de fonctions de base à partir d'un maillage de discrétisation spatiale: la qualité de l'approximation est ainsi liée à la régularité du maillage. L'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution de problèmes fluides en formulation A.L.E., nécessite de choisir une vitesse d'advection de maillage très régulière afin d'obtenir pour chaque instant, un maillage le plus acceptable possible.

Notre approche a pour but de se dispenser des contraintes liées à la régularité du maillage. Le principe de notre méthode est de construire une base de $H_0^1(\Omega_m)$ à partir d'une base propre de $H_0^1(\Omega_0)$.

Domaine fluide et déformations

La méthode est présentée dans une géométrie donnée dont les caractéristiques permettent une résolution numérique simple.

Comme dans les chapitres précédents, le problème étudié modélise l'écoulement d'un fluide au sein d'une structure élastique dont la configuration au repos est un cylindre (pouvant représenter une artère ou un pipeline). On suppose que le comportement de la structure est axi-symétrique, ce qui permet l'étude de l'écoulement dans un domaine bi-dimensionnel correspondant à une coupe longitudinale du domaine fluide. Cette coupe est elle même symétrique par rapport à l'axe de révolution de la coque cylindrique: on restreint donc l'étude à un demi domaine. La résolution du problème fluide est effectuée pour un déplacement de la frontière \mathbf{g} donné (le couplage pouvant être réalisé via une technique de point fixe).

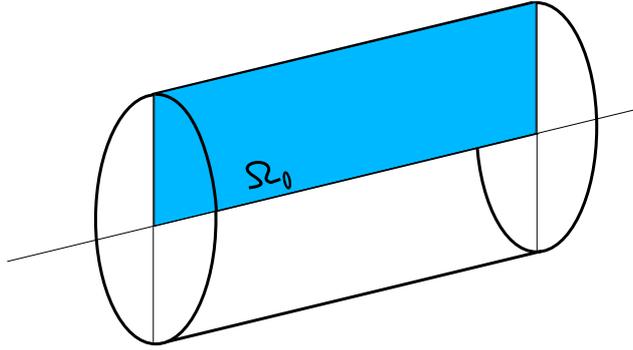


FIG. 4.7 – Géométrie du problème - Domaine initial

Le déplacement de la structure est donné en fonction de la configuration initiale de celle-ci (*i.e.* $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x_0)$).

Base de $H_0^1(\Omega_m)$

Pour construire notre base de $H_0^1(\Omega_m)$ on utilise une base de $H_0^1(\Omega_0)$, où Ω_0 est un ouvert de classe C^k avec k suffisamment grand, constituée des solutions des problèmes aux valeurs propres suivants :

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_i &= \lambda\varphi_i \quad \text{dans } \Omega_0 \\ \varphi_i|_{\Gamma_0} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 = \partial\Omega_0 \end{aligned}$$

On utilise la transformation géométrique de la formulation A.L.E. pour construire une base de $H_0^1(\Omega_m)$ à partir des $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. On note f_m le changement de variable

$$\begin{aligned} f_m = C(\cdot, t_0; t_m) : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_m \\ (x_0, y_0) &\longmapsto f_m(x_0, y_0) = (x, y), \end{aligned}$$

et on construit sur Ω_m les fonctions $\tilde{\varphi}_i$ de la manière suivante :

$$\tilde{\varphi}_i(x, y) = \varphi_i(f_m^{-1}(x, y)) = \varphi_i(x_0, y_0)$$

On considère f_m de la forme :

$$f_m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x = x_0 \\ y = y_0 + d(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

où d est une fonction scalaire. Le choix de la fonction f_m est adapté à l'exemple d'application numérique. C'est la détermination de l'application f_m qui représente

le caractère arbitraire de la méthode; il faut donc qu'elle respecte les contraintes de la formulation A.L.E.. Ainsi la fonction d doit satisfaire la loi de conservation géométrique, et doit être telle que f_m soit un difféomorphisme. On choisit d de la forme

$$d(x_0, y_0) = y_0 \times g(x_0).$$

Le jacobien associé à f_m est :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial d}{\partial x_0} & \left(1 + \frac{\partial d}{\partial y_0}\right) \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial d}{\partial y_0} = 1 + g(x_0).$$

Pour que f_m soit un difféomorphisme il faut que l'amplitude du déplacement $|g|$ de la structure soit majorée par 1 (i.e. le rayon de la structure déformée ne doit jamais être nul), et que g soit continue.

Lemme 4.6. *Si il existe $g_{max} < 1$, tel-que $|g(x)| < g_{max} \forall x \in \Gamma \cap (0, x_0)$, et si $\frac{\partial g}{\partial x_0} \in L^\infty(\Gamma \cap (0, x_0))$, alors les $\tilde{\varphi}_i$ forment une base de $H_0^1(\Omega_m)$.*

Démonstration. On définit l'application $F_m : H_0^1(\Omega_0) \longrightarrow H_0^1(\Omega_m)$
 $\varphi \longmapsto \tilde{\varphi} = \varphi \circ f_m^{-1}$.

On établit que F_m est un difféomorphisme. Puisque les φ_i forment une base de $H_0^1(\Omega_0)$, alors les $\tilde{\varphi}_i$ forment une base de $H_0^1(\Omega_m)$.

Par construction F_m est bijective. De plus nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}\right)^2 &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 (1+g) + \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 \frac{y_0}{(1+g)} \frac{\partial g}{\partial x_0} + 2 \int_{\Omega_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} y_0 \frac{\partial g}{\partial x_0}, \\ \int_{\Omega_m} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}\right)^2 &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 \frac{1}{(1+g)}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'établir les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega_m)}^2 &\leq \frac{1}{1-g_{max}} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\ \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_m)}^2 &\leq \left(1 + g_{max} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_0} \right\|_{L^\infty}\right) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \frac{2-g_{max}}{1-g_{max}} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_0} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \end{aligned}$$

que l'on complète avec l'estimation

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega_m)}^2 \leq (1 + g_{max}) \|\varphi\|_{L^2(\Omega_m)}^2.$$

L'application F_m , est donc un difféomorphisme. \square

Résolution numérique

D'après le lemme 4.6, nous pouvons utiliser les fonctions $\tilde{\varphi}_i$ comme base de $H_0^1(\Omega_m)$. Nous allons donc chercher la vitesse sous la forme $v = \sum_{i \in \mathcal{N}} a_i \tilde{\varphi}_i$. La formulation variationnelle devient :

$$a_j \int_{\Omega_m} \tilde{\varphi}_j \tilde{\varphi}_i + \Delta t \mu a_j \int_{\Omega_m} \nabla_m \tilde{\varphi}_j \nabla_m \tilde{\varphi}_i = \Delta t \int_{\Omega_m} \rho \operatorname{div} \tilde{\varphi}_i + \int_{\Omega_m} f_1 \tilde{\varphi}_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

On définit les opérateurs différentiels A et A' , $D(A) = D(A') = H^1(\Omega_0) \times H^1(\Omega_0)$ par

$$A(s_1, s_2) = (1 + g) \frac{\partial s_1}{\partial x_0} \frac{\partial s_2}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial g}{\partial x_0} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_0} \frac{\partial s_2}{\partial y_0} + \frac{\partial s_2}{\partial x_0} \frac{\partial s_1}{\partial y_0} \right) + \frac{1}{1 + g} \left(1 + y_0 \frac{\partial g}{\partial x_0} \right) \frac{\partial s_1}{\partial y_0} \frac{\partial s_2}{\partial y_0},$$

et

$$A'(s_1, s_2) = (1 + g) \frac{\partial s_1}{\partial x_0} \frac{\partial s_2}{\partial y_0} + \frac{y_0}{1 + g} \frac{\partial g}{\partial x_0} \frac{\partial s_1}{\partial y_0} \frac{\partial s_2}{\partial y_0}.$$

Par le changement de variable f_m , nous ramenons les intégrales sur le domaine Ω_0 .

Nous obtenons ainsi :

$$\int_{\Omega_m} \tilde{\varphi}_j \tilde{\varphi}_i = \int_{\Omega_0} \varphi_j \varphi_i (1 + g)$$

et

$$\int_{\Omega_m} \nabla_m \tilde{\varphi}_j \nabla_m \tilde{\varphi}_i = \int_{\Omega_0} A((\varphi_i)_{x_0}, (\varphi_j)_{x_0}) + A((\varphi_i)_{y_0}, (\varphi_j)_{y_0}) - A'((\varphi_i)_{y_0}, (\varphi_j)_{x_0}) - A'((\varphi_i)_{x_0}, (\varphi_j)_{y_0}).$$

On utilise ainsi le domaine initial Ω_0 et les fonctions propres issues de ce dernier pour construire les matrices du système.

Résultats

Les simulations sont réalisées pour un domaine fluide dont la géométrie initiale est un carré unitaire.

On soumet la structure à une force extérieure $\mathbf{F}_{ext} = (0, F_y)$, avec $F_y = F \times (1. + \sin(\omega t) \sin(\pi x))$. La série de résultats qui suit présente les champs de vitesse et de pression à différents instants pour $\omega = 3140 \text{ s}^{-1}$:

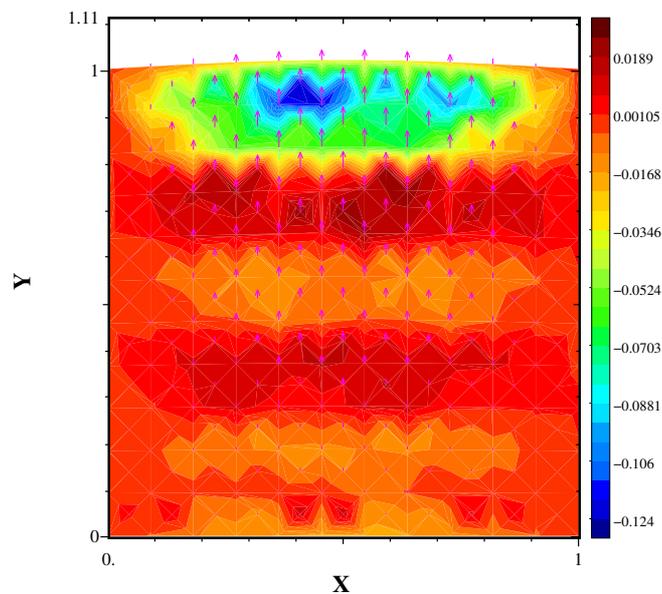
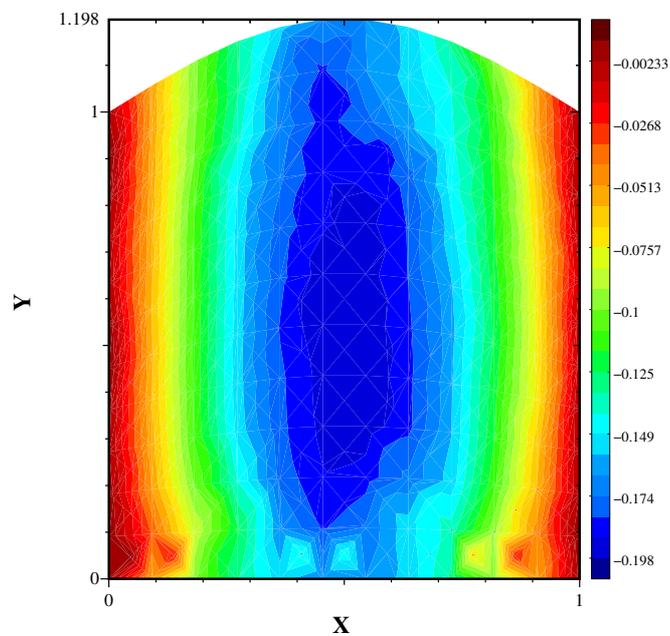


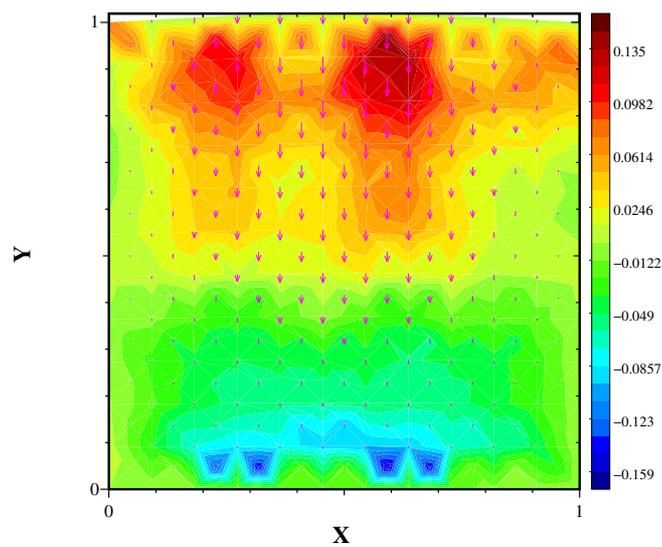
FIG. 4.8 – $t_1 = 2 \cdot 10^{-4}$

Ce premier résultat correspond à la phase d’initialisation du système (à l’état initial le fluide et la coque sont au repos). Une dépression se creuse sous la coque; les autres variations de la densité semblent imputables au phénomène de “Gibbs”.

Le deuxième résultat est obtenu lorsque le maximum du déplacement de la coque est atteint (demi période). On y observe une forte diminution du champ de vitesse (vitesse quasi nulle).

FIG. 4.9 – $t_2 = 1 \cdot 10^{-3}$

Dans le troisième résultat, la coque rejoint sa configuration initiale.

FIG. 4.10 – $t_3 = 1.8 \cdot 10^{-3}$

Ce dernier résultat est obtenu après la première période ($T = 2\pi/\omega$).

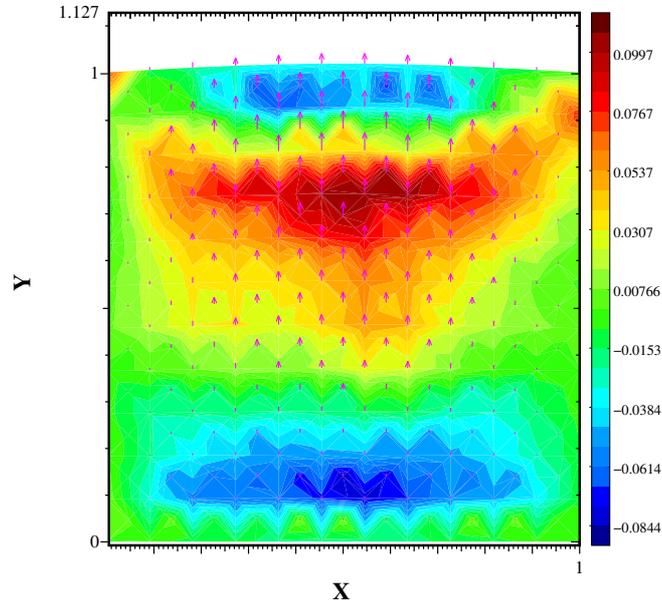


FIG. 4.11 – $t_4 = 2.2 \cdot 10^{-3}$

Le système prend en suite un régime périodique dont la fréquence est celle de la force appliquée sur la structure.

Dans le but d'obtenir un argument quantitatif de validation de notre code de calcul, le résultat suivant présente l'évolution de la masse totale du fluide à l'intérieur du domaine variable (i.e. $\int_{\Omega_t} \rho$):

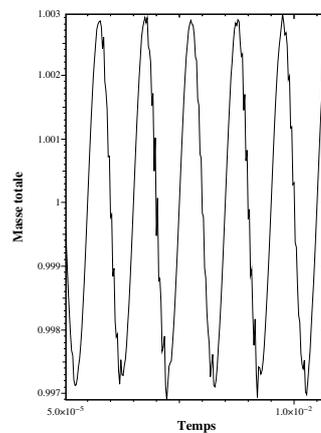


FIG. 4.12 – Evolution de la masse totale du fluide

Nous observons une erreur de l'ordre de 0.3% , alors que pour ce test l'amplitude du déplacement est de 20% de la largeur du domaine. Cette erreur est très faible et semble provenir de l'intégration numérique.

Les résultats obtenus semblent en accord, d'un point de vue qualitatif et quantitatif, avec la physique du problème.

Pour finir cette série, nous présentons un résultat représentant le champ de vitesse ainsi que celui de la densité, dans le cas où $F_y = F \times \sin(\omega t) \sin(3\pi x)$.

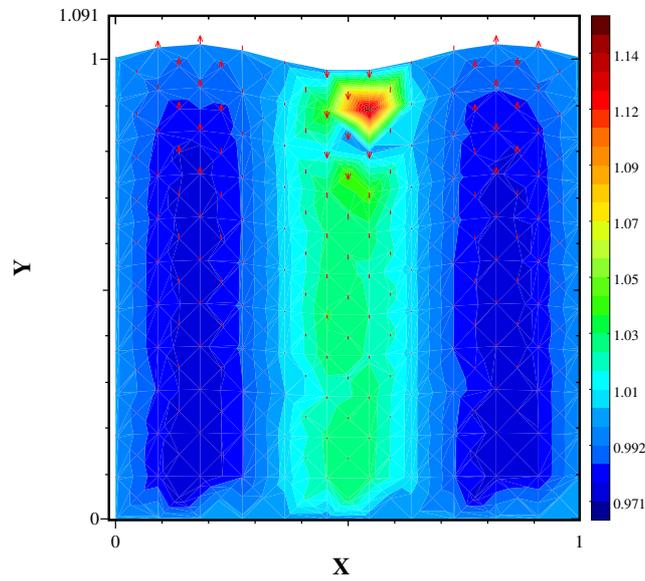


FIG. 4.13 – Champs de vitesse et de densité

Conclusions et Perspectives

Ce travail a été consacré à l'étude d'un problème d'interaction "fluide-structure" intervenant en biomécanique mais qui peut être utilisé afin d'appréhender d'autres phénomènes physiques comme l'écoulement compressible dans des conduites. Du point de vue physique, le modèle proposé permet de décrire les effets du raidissement d'une l'artère sans bifurcation sur le flux sanguin et l'action des variations de ce flux sur les parois de l'artère lorsque le sang est considéré comme un fluide newtonien. Le principal résultat est la démonstration d'un théorème d'existence proposant une construction des solutions approchées basée sur un schéma lagrangien régularisé. Numériquement, les solutions du problème associé au sang sont construites à l'aide de ce schéma et les problèmes de la structure et du flux artériel sont recouplés à l'aide d'une méthode de point fixe. Cette méthode itérative génère un coût de calcul important qui nuit à l'efficacité du code élaboré.

Actuellement, F. Flori, P. Orenca et M. Peybernes [66] travaillent au développement d'une méthode numérique mieux adaptée à la résolution des problèmes à frontières libres et ne faisant pas appel à une technique de point fixe. Notre espoir est d'étendre cette méthode à notre problème afin de se ramener à des temps de calcul raisonnables. Dans cette méthode, le problème associé à la structure n'est plus exprimé en fonction des déplacements mais de la vitesse du fluide à l'interface. Cette approche permet de considérer l'équation de la structure comme une contrainte que l'on rentre dans la formulation variationnelle du problème.

Dans la modélisation du phénomène physique, nous avons choisi d'ignorer l'action des globules sur le flux artériel. La prise en compte des particules sanguines fait intervenir un autre type de couplage lié au mouvement de solides dans le fluide.

Dans le cas où le sang est considéré comme un fluide incompressible bidimensionnel, J. Alonso San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak [50] établissent l'existence de solutions faibles globales. En particulier les auteurs donnent des estimations sur la vitesse des solides quand leur distance au bord ou leur distance mutuelle tend vers zéro. Concernant le fait que deux solides plongés dans un fluide incompressible visqueux peuvent avoir des chocs, une expérience numérique intéressante a été menée par J. San Martin de l'Université du Chili. Cette expérience montre que deux boules rigides identiques sur lesquelles on applique deux forces constantes, de même intensité et de sens opposé s'approchent mais n'entrent pas en collision. Ce phénomène est connu par les expérimentateurs sous le nom de "kiss and go" et semble aller dans le sens du résultat d'existence globale cité précédemment. Notons que si l'énergie initiale des deux boules est grande, les deux solides finiront par se rencontrer; toutefois cela n'est pas contradictoire avec les résultats théoriques, car nous sortirions alors du cadre de l'hypothèse d'incompressibilité. En effet, lorsque les deux boules se rapprochent, la pression et la vitesse augmentent considérablement ce qui est incompatible avec cette hypothèse.

Afin de proposer un modèle de flux artériel plus pertinent, il conviendrait de développer une approche dans laquelle serait pris en compte le mouvement des globules dans l'écoulement. En particulier, la gestion des chocs entre les globules ou entre les globules et la paroi de l'artère représente un champ d'investigations important.

Bibliographie

- [1] P. Angot, C.H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalisation method to take into account obstacles in viscous flow. *Numer. Math.*, 81:497–520, 1999.
- [2] R.L. Armentano and al. Respuesta en frecuencia de la pared arterial. *Revista Mexicana De Ingenieria Biomedica*, XXIV(1):45–54, 2003.
- [3] J. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Paper 89-0115-CP*, 1989.
- [4] M. Behr, D. Arora, and S. Schulte-Eistrup. Prediction of flow features in centrifugal blood pumps. *European Conference on Computational Mechanics, ECCM-2001*, 2001.
- [5] J.A. Bello. L^r regularity for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Annali di Matematica pura de applicata*, CLXX(IV):187–206, 1996.
- [6] M. Boulakia. Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I*, 336:985–990, 2003.
- [7] M. Boulakia. *Modélisation et analyse mathématique de problèmes d'interaction fluide-structure*. Phd Thesis. Univ. Versailles, 2004.
- [8] M. Boulakia. Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 84(11):1515–1554, 2005.
- [9] M. Boulakia. Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I*, 340:113–118, 2005.

- [10] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, théorie et application*. Collection appliquée pour la maîtrise. Masson, 1983.
- [11] B. Koobus C. Farhat, C. Degand and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163:231–245, 1998.
- [12] A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban, and C. Grandmont. Existence of weak solutions for an unsteady fluid-plate interaction problem. *Cahier du CEREMADE*, 0245, 2003.
- [13] F.J. Chatelon and P. Orenca. On a non-homogeneous shallow water problem. *M²AN*, 1997.
- [14] P.G. Ciarlet. *Élasticité tridimensionnelle*. RMA Masson., 1986.
- [15] H. Beirao da vega. On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem. *J.Math.Fluid.Mechanics*, 6:21–52, 2004.
- [16] R. Dautrey and J.L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. Collection C.E.A. Masson, 1984.
- [17] B. Desjardins and M.J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 146(1):59–71, 1999.
- [18] B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont, and P. Le Tallec. Weak solutions for fluid-elastic structure interaction model. *Revista Matemática U.C.M.*, 14(2):523–538, 2001.
- [19] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A., Paris, 1984.
- [20] Service d’Hémodynamique Diagnostic et Thérapeutique. *Biomecanique Coeur-Vaisseaux*. Hôpital Cardiovasculaire et Pneumologique - Lyon, 200X.
- [21] J. De Hart et Al. A computational fluid-structure interaction analysis of a fiber-reinforced stentless aortic valve. *Journal of biomechanics*, 36:699–712, 2003.
- [22] C. Giacomoni F. Flori and P. Orenca. Convergence of a characteristic-galerkin scheme for a shallow water problem. *Mathematical and Computer Modelling*, 42(3).

- [23] M. Farge and K. Schneider. Adaptative wavelet simulation of a flow around an impulsively started cylinder using penalisation. *Appl. and Comp. Harmo. Anal.*, 12:374–380, 2002.
- [24] E. Feireisl. Some recent results on the existence of global-in-time weak solutions to the Navier-Stokes equations of a general barotropic fluid. *MATHEMATICA BOHEMICA.*, 127(2):203–209, 2002.
- [25] E. Feireisl, A. Novotny, and H. Petzeltova. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 3(4):358–392, 2001.
- [26] F. Flori. *Analyse d'un problème de couplage Fluide-Structure non linéaire.* Thèse de Doctorat, Université de corse, 1998.
- [27] F. Flori. *Analyse de quelques problèmes Mathématiques de la Mécanique des Fluides et des Structures.* Habilitation à Diriger des Recherches, UMR 6134- Université de corse, 2004.
- [28] F. Flori and B. Giudicelli. Bornes sur la densité pour un problème de Navier-Stokes compressible à frontière variable avec conditions aux limites de Dirichlet. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I*, 339:251–256, 2004.
- [29] F. Flori, B. Giudicelli, and P. Orenca. An existence result for a compressible fluid pattern coupled to a cylindrical shell. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 7(2):308–318, 2006.
- [30] F. Flori and P. Orenca. On a fluid-structure interaction problem in velocity-displacement formulation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 8(4):543–572, 1997.
- [31] F. Flori and P. Orenca. On a nonlinear fluid-structure interaction problem defined on a domain depending on time. *Nonlinear Analysis*, 38:549–569, 1999.
- [32] F. Flori and P. Orenca. Fluid-structure interaction : analysis of a 3-d compressible model. *les Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, 17(6):753–777, 2000.
- [33] L. Formaggia, J.F. Gerbeau, and F. Nobile. On the coupling of 3d and 1d Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Computer Me-*

- thods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:561–582, 2001.
- [34] F. Gijzen. *Modeling of Wall Shear Stress in Large Arteries*. Phd Thesis. Eindhoven University of Technology, 1998.
- [35] R. Glowinski and Al. Wavelet and finite element solutions for the Neumann problem using fictitious domain. *J. of Comput. Phys.*, 126:40–51, 1995.
- [36] R. Glowinski, T.-W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 112:133–148, 1994.
- [37] D. Goldstein, R. Hander, and L. Sirovich. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *J. Comput. Phys.*, 105:354–366, 1993.
- [38] C. Grandmont and Y. Maday. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(3):609–636, 2000.
- [39] C. Grandmont, Y. Maday, and P. Métier. Existence of a solution for a unsteady elasticity problem in large displacement and small perturbation. *C.R.Math. Acad. Sci. Paris*, 6(334):521–526, 2002.
- [40] B. Hægland and B. Skaflestad. A survey of some methods for moving grid and grid adaptation. *Preprint Numerics*, 2/2002, 2002.
- [41] N. Kevlahan and J.M. Ghidaglia. Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkman penalization. *Eur. J. Mech. B- Fluids*, 20:333–350, 2001.
- [42] N. Kevlahan and O.V. Vasilyev. An adaptive wavelet method for fluid-structure interaction. *Direct and Large-Eddy Simulation Workshop 4: University of Twente*, pages 253–260, 2001.
- [43] A. Khalilollahi. Unsteady blood flow through stenosed arteries. *ASCE/ASME Mechanics Conference*, New-Mexico:103–106, 1985.
- [44] J.L. Lions. Une remarque sur les problèmes d’ évolution non linéaires dans des domaines non cylindriques. *Revue Roumaine de Math. Pure et Appliqués*, IX(t.):11–18, 1964.

- [45] P.L. Lions. Sur l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions d'équations différentielles. *Séminaire Equations aux dérivées Partielles, Ecole Polytechnique*, 1989.
- [46] P.L. Lions. Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317:115–120, 1993.
- [47] P.L. Lions. Limites incompressibles et acoustiques pour les fluides visqueux, compressibles et isentropiques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317:1197–1202, 1993.
- [48] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, volume 2. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [49] P.L. Lions. Bornes sur la densité pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 328(1):659–662, 1999.
- [50] J. San Martin, V. Starovoitov, and M. Tucsnak. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 161:113–147, 2002.
- [51] B. Maury. Characteristics ale method for the 3d Navier-Stokes equations with a free surface. *Int. Journal of Comp. Fluid Dyn.*, 6:175–188, 1996.
- [52] M.S. Moayeri and G.R. Zendehebudi. Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries. *J. of Biomechanics*, 32(9):959–965, 1999.
- [53] M.S. Moayeri and G.R. Zendehebudi. Effects of elastic property of the wall on flow characteristics through arterial stenoses. *J. of Biomechanics*, 36:525–535, 2003.
- [54] M.S. Moayeri and G.R. Zendehebudi. Effects of elastic property of the wall on flow characteristics through arterial stenoses. *J. of Biomechanics*, 36(4):525–535, 2003.
- [55] F. Murat and J. Simon. Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique. *Rapport du L.A. Univ. Paris VI*, 189, 1974.
- [56] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. *Pré-publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI*, n°74015, 1976.

- [57] P. Orenca. *Analyse de quelques problèmes en océanographie physique*. Thèse d'habilitation, Université de Corse, 1989.
- [58] P. Orenca. Un théorème d'existence de solution d'un problème de shallow water. *Archive Rational Mech. Anal.*, 1994.
- [59] P. Orenca and R. Papi. Analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure. *CRAS*, 317(1):1087–1090, 1993.
- [60] S. Osher and R.P. Fedkiw. Level set methods: An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 169(2):463–502, 2001.
- [61] T.W. Pan, D.D. Joseph, and R. Glowinski. Simulating the dynamics of fluid-ellipsoid interactions. *Computers and Structures*, Article In Press, 2004.
- [62] R. Papi. *Analyse d'un problème dynamique d'interaction fluide-structure*. Phd Thesis. Université de Corse, 1994.
- [63] K. Perktold and G. Rappitsch. Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model. *J. of Biomechanics*, 28:845–856, 1995.
- [64] R.J. Di Perna and P.L. Lions. Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory. *Inventiones Math.*, 98:511–547, 1989.
- [65] C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *J. Comput. Phys.*, 10:252–271, 1972.
- [66] M. Peybernes. Phd Thesis. Univ. Corse, 2006.
- [67] A.S. Piquemal, G. Chiavassa, and R. Donat. A Brinkman-penalization method for compressible viscous flows. *Submitted to Computers and Fluids*, 2004.
- [68] A. Quarteroni, M. Tuveri, and A. Veneziani. Computational vascular fluid dynamics: Problems, models and methods. *Computing and Visualization in Science*, 2(4):163–197, 2000.
- [69] A. Quarteroni and A. Veneziani. Modeling and simulation of blood flow problems. *J. Periaux et al (Eds.), Computational Science for the 21st Century*, J. Wiley and Sons, pages 369–372, 1997.

- [70] G. Rappitsch and K. Perktold. Computer simulation of convective diffusion processes in large arteries. *J. Biomechanics*, 29:207–215, 1995.
- [71] R. Del Rosario and R.C. Smith. Spline approximation of thin shell dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:2807–2840, 1997.
- [72] E.M. Saiki and S. Biringen. Simulation of boundary layer transition: effects of a spherical particle. *J. Fluid Mech.*, 345:133–164, 1997.
- [73] K. Schneider and M. Farge. Coherent vortex simulation (cvs) of 2d bluff body flows using an adaptive wavelet method with penalisation. *Numerical Flow Simulation*, 82(III):261–270, 2002.
- [74] J. Simon. Domain variations for drag in stokes flow. in control theory of distributed parameter systems and applications. *X. Li et J. Yong éd., Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, Springer, no 159:28–42, 1991.
- [75] O.V. Vasilyev and N. Kevlahan. Hybrid wavelet collocation-Brinkman penalization method for complex geometry flows. *Int. J. for Numer. Meth.in Fluids*, 40:531–538, 2002.
- [76] B.H. Yang, H.H. Asada, and Y. Zhang. Cuff-less continuous monitoring of blood pressure using a hemodynamic model. *The Home Automation and Healthcare Consortium - Progress Report*, 2 - 3:1–22, 1999.
- [77] G.R. Zendehebudi and M.S. Moayeri. Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries. *J. of Biomechanics*, 32:959–965, 1999.

Annexes

Annexe A

Majorations a priori

Pour obtenir les majorations a priori du problème couplé (C_1) , on multiplie l'équation de la coque par $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ au sens du produit scalaire de $(L^2(\Omega_s))^2$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{\partial \xi_x}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) + B \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \|\xi_y\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) \\
& + B\chi \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + B' \left(\left\| \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) + B'\chi \left\| \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial t \partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \\
& = B\nu_c \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right) + B'\nu_c \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial t} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right) \\
& \quad + \int_{\Omega_s} \left(\mathbf{F}, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega_s)} \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

Puis, on multiplie par \mathbf{u} l'équation de conservation de la quantité de mouvement du problème fluide au sens du produit scalaire de $L^2(\Omega)^2$, il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4\nu}{3} \|\text{div } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\rho, \text{div } \mathbf{u}) \\
& = \int_{\Omega_s} \left(\frac{4}{3} \nu \text{div } \mathbf{u} - \rho \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_{\pm}} \left(\frac{4}{3} \nu \text{div } \mathbf{u} - \rho \right) G_{\pm}. \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Puis en effectuant le produit scalaire de l'équation de continuité et de ρ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^2}^2 = -(\rho, \text{div } \mathbf{u}). \quad (\text{A.3})$$

Soit un instant $t \in (0, T)$, on intègre sur $(0, t)$ les égalités (A.1, A.2, A.3) puis on

somme les égalités pour obtenir, grâce à l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi_y(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) + B \left(\left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \|\xi_y(t)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) \\
& + B\chi \left\| \frac{\partial^2 \xi_y(t)}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + B'(1 - \nu_c) \left(\left\| \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_s))}^2 \right) \\
& + B'\chi \left\| \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial t \partial x^2} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_s))}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + \nu \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{4\nu}{3} (1 - K_{\pm} \varepsilon'_{G_{\pm}}) \|\text{div } \mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq B\nu_c \int_0^t \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \right) \\
& + \varepsilon_{G_{\pm}} \|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + (C_{\varepsilon_{G_{\pm}}} + \frac{4\nu}{3} C_{\varepsilon'_{G_{\pm}}}) \|G_{\pm}\|_{L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma_{\pm}))}^2 + D'_0, \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

où K_{\pm} est la constante issue de la continuité de l'application trace et D'_0 est définie de la manière suivante

$$\begin{aligned}
D'_0 = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial \xi_{x0}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi_{y0}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\rho_0\|_{L^2}^2 \right) \\
+ B\chi \left\| \frac{\partial^2 \xi_{y0}}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + B \left(\left\| \frac{\partial \xi_{x0}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \|\xi_{y0}\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right),
\end{aligned}$$

qui ne dépend que des données du problème et $(\varepsilon_{g_{\pm}}, \varepsilon'_{g_{\pm}})$ sont des paramètres arbitraires qui vérifient $\varepsilon_{g_{\pm}} < \frac{1}{2}$ et $(\varepsilon'_{g_{\pm}}) < \frac{1}{4K_{\pm}}$.

On remarque que les conditions de couplage entre le fluide et la coque permettent l'élimination des termes de trace. En effet, d'après la continuité des contraintes on a

$$\left(\left(\rho - \frac{4}{3} \nu \text{div } \mathbf{u} \right) \mathbf{n}, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega_s)} = - \left(\mathbf{F}, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega_s)}. \quad (\text{A.5})$$

De plus, en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} &= - \int_0^t \int_{\Omega_s} \xi_y \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t \partial x} \\
&= \int_0^t \int_{\Omega_s} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \int_{\Omega_s} \xi_y(t) \frac{\partial \xi_x}{\partial x}(t) + \int_{\Omega_s} \xi_{y0} \frac{\partial \xi_{x0}}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité de Young nous permet d'obtenir l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\partial \xi_y(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) + \left(B - \frac{\nu_c}{2} \right) \left(\left\| \frac{\partial \xi_x(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \|\xi_y(t)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right) \\
& + B\chi \left\| \frac{\partial^2 \xi_y(t)}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + B'(1 - \nu_c) \left(\left\| \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \left\| \frac{\xi_y}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_s))}^2 \right) \\
& + B'\chi \left\| \frac{\partial^3 \xi_y}{\partial t \partial x^2} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_s))}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + \nu \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{4\nu}{3} (1 - K_{\pm} \varepsilon'_{G_{\pm}}) \|\text{div } \mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq \varepsilon_{G_{\pm}} \|\rho\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\
& + (C_{\varepsilon_{G_{\pm}}} + \frac{4\nu}{3} C_{\varepsilon'_{G_{\pm}}}) \|G_{\pm}\|_{L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma_{\pm}))}^2 + D_0, \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

où D_0 est la constante définie par

$$D_0 = D'_0 + B\nu_c \left(\left\| \frac{\partial \xi_{x0}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \|\xi_{y0}\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \right).$$

La majoration (A.6) étant vraie pour tous les instants t de la période d'étude, on en déduit que

ξ_x est borné dans $W^{1,\infty}(0,T,L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T,H_0^1(\Omega_s))$,

ξ_y est borné dans $W^{1,\infty}(0,T,L^2(\Omega_s)) \cap H^1(0,T,H_0^2 \cap H^2(\Omega_s))$,

\mathbf{u} est borné dans $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$,

ρ est borné dans $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$,

dont les bornes ne dépendent que des données du problème.

Remarque A.1. Linéarité et domaine fixe

Lorsqu'on fait l'hypothèse de faibles perturbations, il est opportun d'étudier le problème fluide sur un domaine fixe (comme cela est le cas des problèmes (C_1) et (C_2)). Cependant, il est important de remarquer que cette simplification n'est possible que lorsque l'équation de conservation de la masse du problème fluide est linéarisée.

En effet, l'équation de conservation de la masse non linéaire (problème (F) eq. (1.7)) n'est vérifiée que si on prend en compte l'évolution du domaine fluide. En intégrant pour tout $t \in (0,T)$ l'équation(1.7) sur Ω_t on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho - \int_{\Gamma_s} \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_s} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_{\pm}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

Il est donc nécessaire de prendre en compte la vitesse $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ de la frontière Γ_s pour rendre compatible la conservation de la masse et la condition de couplage sur les vitesses. En effet, la condition $\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ est suffisante pour obtenir la forme intégrale de l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho = - \int_{\Gamma_{\pm}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Convergence point fixe numérique

Soient $\frac{\partial \xi_{1y}}{\partial t} \in E_{(t)} = L^2(0,t; H^2(\Omega_s))$ et $\frac{\partial \xi'_{1y}}{\partial t} \in E_{(t)}$ deux fonctions différentes pouvant initier le processus de construction de Picard (ayant donc les mêmes conditions initiales). On note

$$\frac{\partial \xi_{2y}}{\partial t} = (S \circ F) \left(\frac{\partial \xi_{1y}}{\partial t} \right) \text{ et } \frac{\partial \xi'_{2y}}{\partial t} = (S \circ F) \left(\frac{\partial \xi'_{1y}}{\partial t} \right).$$

et

$$g_1 = \frac{\partial \xi_{1y}}{\partial t} - \frac{\partial \xi'_{1y}}{\partial t}, \quad g_2 = \frac{\partial \xi_{2y}}{\partial t} - \frac{\partial \xi'_{2y}}{\partial t}.$$

Par un processus analogue à celui utilisé pour la majoration a priori du problème (C_1) (*c.f.* Annex A), on obtient en multipliant par \mathbf{u} l'équation de conservation de la quantité de mouvement du problème fluide et en intégrant sur $(0,t)$ ($t \in (0,T)$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4} - a_1 \frac{4\nu K_1}{3} \right) \|\mathbf{u}_1\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{4\nu}{3} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_1\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \\ & + \left(\frac{1}{4} - a_2 K_2 \right) \|\rho_1\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))}^2 \leq C_{a_1} C_{a_2} K_3 \|g_1\|_{L^1(0,t_1;H^{3/2}(\Omega_s))} \quad , \end{aligned}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des constantes positives issues de la continuité de l'application trace. Les paramètres a_1 et a_2 sont choisis tels que $a_1 < \frac{3}{16\nu K_1}$ et $a_2 < \frac{1}{4K_2}$. Donc il existe une constante K_4 ne dépendant que des données telle que :

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_1\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\rho_1\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega))}^2 \leq t K_4 \|g_1\|_{L^2(0,t_1;H^{3/2}(\Omega_s))} \quad . \quad (\text{B.1})$$

En utilisant les équations de la structure, on obtient :

$$5B'\chi \left\| \frac{\partial^3 g_2}{\partial t \partial x^2} \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_c))}^2 \leq K'_1 \left\| \rho - \frac{4}{3}\nu \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \right\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \left\| \frac{\partial g_2}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t_2;H^{1/2}(\Omega_c))}, \quad (\text{B.2})$$

où K'_1 est également une constante définie par la continuité de l'application trace sur Ω_s .

En conclusion, en combinant (B.1) et (B.2), on montre qu'il existe une constante K vérifiant

$$\|g_2\|_{L^2(0,t;H_0^2(\Omega_s))}^2 < tK \|g_1\|_{L^2(0,t;H_0^2(\Omega_s))}^2 \quad \forall t \in (0,T). \quad (\text{B.3})$$

Donc, il existe t tel que

$$\left\| \frac{\partial \xi_{2y}}{\partial t} - \frac{\partial \xi'_{2y}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;H_0^2(\Omega_s))}^2 < K_t \left\| \frac{\partial \xi_{1y}}{\partial t} - \frac{\partial \xi'_{1y}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;H_0^2(\Omega_s))}^2, \quad \text{avec } K_t < 1. \quad (\text{B.4})$$

On a ainsi montré que l'application $S \circ F$ est contractante sur $E_{(t)} = L^2(0,t;H^2(\Omega_s))$ et admet donc, grâce au théorème de Picard, un point fixe. En utilisant les majorations a priori (*c.f.* Annexe A), ce résultat peut facilement être étendu à $E = L^2(0,T;H^2(\Omega_s))$.

Remarque B.1. Le choix de l'espace E n'est pas arbitraire: il dépend de la régularité obtenue et il faut que $\frac{\partial \xi_{iy}}{\partial t} \in E$ pour $i \in \mathcal{N}$. C'est dans cet espace E que l'on applique le théorème de convergence du point fixe.

Résultat complémentaire (sur la régularité de la contrainte)

Proposition B.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et si les données initiales satisfont $\left(\mathbf{w}_1(0), \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t}(0) \right) \in H^1(\Omega)$, alors la contrainte*

$$\left(\rho - \frac{4}{3}\nu \operatorname{div} \mathbf{u} \right)_{|\Gamma} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;H^{3/2}(\Gamma)).$$

Démonstration de la proposition B.2

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on utilise la décomposition introduite dans le passage à la limite sur le terme de trace (section 2.1). L'égalité (2.6) obtenue par cette décomposition peut s'écrire sous la forme

$$\nabla \left(\rho - \frac{4}{3}\nu \operatorname{div} \mathbf{w}_1 \right) = -\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t}.$$

Formellement on écrit, en dérivant (2.6) par rapport au temps et en utilisant l'équation de continuité, l'égalité suivante

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}_1}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \nu \nabla \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{w}_1 + \bar{\mathbf{w}} = 0. \quad (\text{B.5})$$

En faisant le produit scalaire de (B.5) par $\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t}$ dans $L^2(\Omega)$ puis en intégrant sur $(0, t)$ pour $t \in (0, T)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{w}_1}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega))}^2 + \frac{2}{3} \nu \left\| \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{w}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & \frac{2}{3} \nu \left\| \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{w}_1(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_0^t \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

L'égalité (B.6) est vraie quel que soit $t \in (0, T)$, on montre donc trivialement que

$$\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial t} \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),$$

ce qui permet de conclure la démonstration. □

Annexe C

Equation de la chaleur - Domaines fictifs

Dans le but de tester l'influence du choix de la fonction masque, ainsi que le poids du paramètre de pénalisation ϵ , on teste la méthode de pénalisation en résolvant l'équation de la chaleur en dimension 1, sur un domaine à frontières variables.

On résout l'équation de la chaleur sur le domaine variable $\Omega_t = (x_1(t), x_2(t)) = (1/3 - h(t), 2/3 + h(t)) \subset \subset \tilde{\Omega} = (0,1) \forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ avec une condition aux limites sur le bord $\{x_1(t), x_2(t)\}$ qui évolue au cours du temps et où le déplacement $h(t) < 1/6 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ est donné.

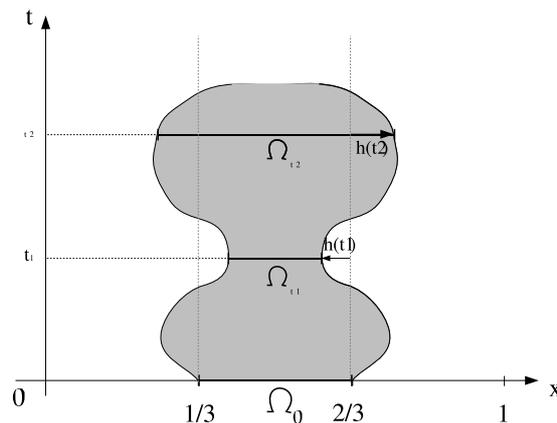


FIG. C.1 – Evolution du domaine 1-D

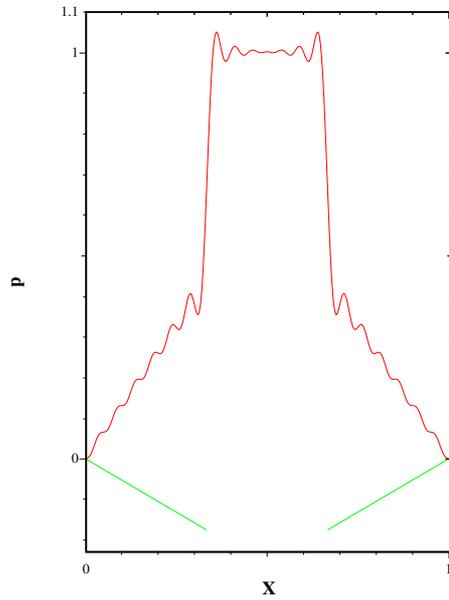
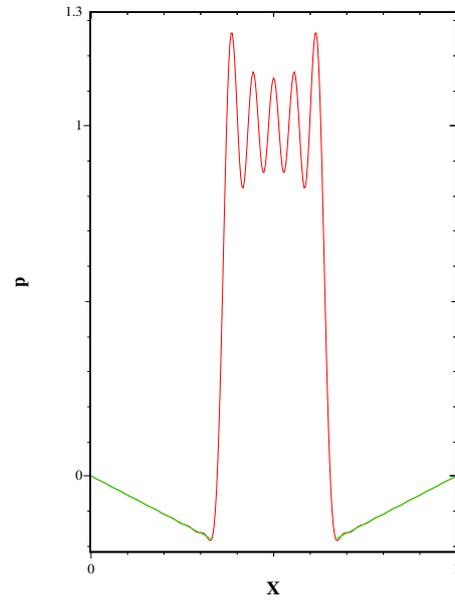
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} - \nu \Delta p = 0 \quad \text{dans } \cup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t, \\ p = g(t) \quad \text{sur } \cup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \partial \Omega_t, \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta p_\varepsilon + \frac{M}{\varepsilon} (p_\varepsilon - q) \\ = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \cup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \{0, 1\}, \end{array} \right.$$

où q est le prolongement sur $\tilde{\Omega}$ du relèvement défini sur Ω_t pour la condition aux limites $p = g(t)$ sur $\cup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \{(1/3 - h(t), 2/3 + h(t))\}$.

Le problème pénalisé est résolu par la méthode de Galerkin en utilisant une base en sinus.

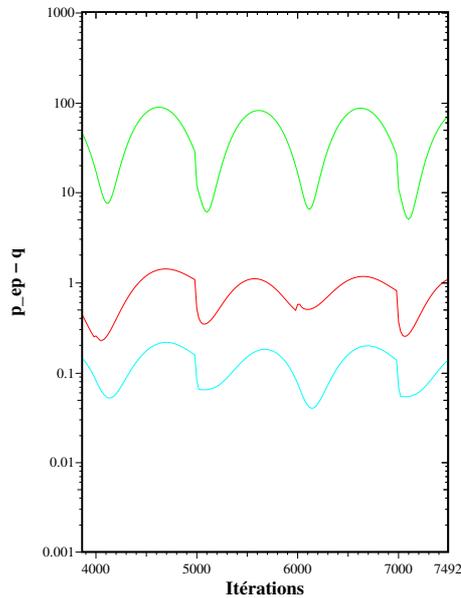
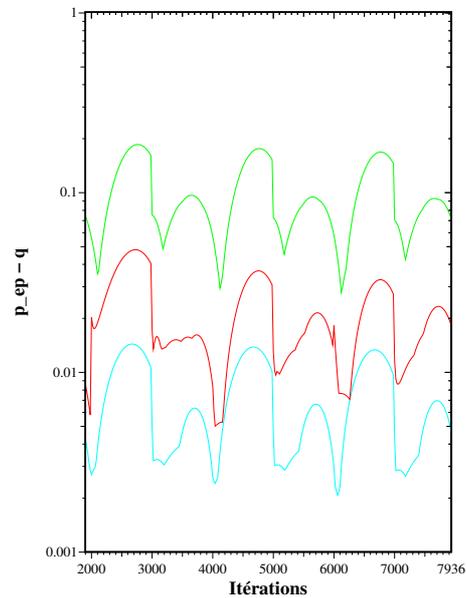
Résultats On considère la fonction masque M définie par $M(t, x) = 1$ si $x_1(t) < x < x_2(t)$ et $M(t, x) = 0$ sinon. De même, le prolongement q est donné par $q(t, x) = \frac{g(t)}{x_1(t)}x$ si $x < x_1(t)$ et $q(t, x) = \frac{g(t)}{1 - x_2(t)}(1 - x)$ si $x > x_2(t)$.

Les deux résultats suivants sont obtenus au même instant; ils représentent la valeur de la variable p (courbes rouges) avec des paramètres de pénalisation différents.

FIG. C.2 – $\varepsilon = 10^{-3}$,FIG. C.3 – $\varepsilon = 10^{-6}$.

Les résultats sont en accord avec l'analyse mathématique. Plus le paramètre ε est petit, plus la solution se rapproche du prolongement du relèvement (courbes vertes), pour les normes usuelles de $L^2(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_t)$ et $L^\infty(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_t)$.

Les résultats suivants représentent l'évolution au cours du temps de la norme de $p_\varepsilon - q$ dans $L^2(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_t)$ et $L^\infty(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_t)$. Les courbes vertes correspondent à la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$, les courbes rouges correspondent à la valeur $\varepsilon = 10^{-5}$ et les courbes bleues à la valeur $\varepsilon = 10^{-6}$.

FIG. C.4 – $\|p_\varepsilon - q\|_{L^2(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_t)}$.FIG. C.5 – $\|p_\varepsilon - q\|_{L^\infty(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_t)}$.

Lorsque ε tend vers zéro, il apparaît un phénomène de Gibbs au voisinage de “la frontière immergée” $\{(x_1(t), x_2(t))\}$. Ce comportement est classique; il résulte du manque de régularité lors du passage de la frontière réelle. Pour le diminuer, nous avons testé différentes fonctions masque M . Afin de mieux visualiser l’influence de cette fonction, nous choisissons des valeurs différentes sur les frontières gauche $\{x_1(t)\}$ et droite $\{x_2(t)\}$. Le résultat suivant présente la solution Mp (courbe rose) et la fonction Mq (courbe marron).

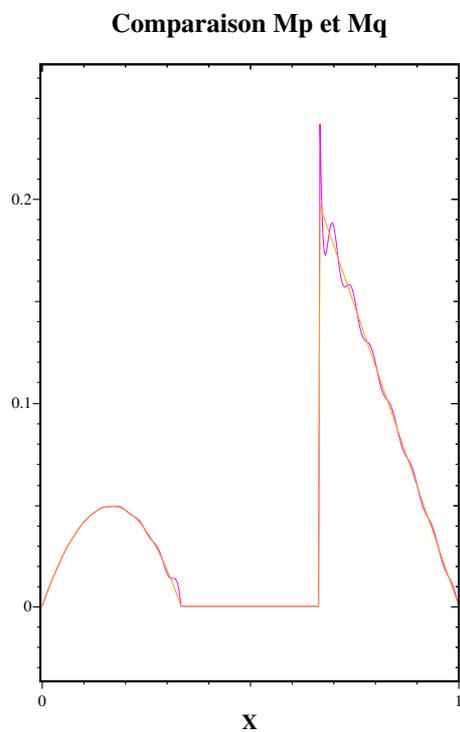


FIG. C.6 – Influence du choix de Mq

On remarque que c'est le choix de Mq (donc du prolongement du relèvement) qui influe sur le phénomène de "Gibbs".

Cette simple expérience numérique fait apparaître l'inconvénient de l'utilisation d'une base propre couplée à la méthode des domaines fictifs.