



**HAL**  
open science

# Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne

Aurélien Djament

► **To cite this version:**

Aurélien Djament. Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2006. Français. NNT: . tel-00119635

**HAL Id: tel-00119635**

**<https://theses.hal.science/tel-00119635>**

Submitted on 11 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13 - Institut Galilée  
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

*N° attribué par la bibliothèque*  
|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|

## THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

*Discipline : Mathématiques*

présentée et soutenue publiquement par :

**Aurélien DJAMENT**

le 8 décembre 2006

# Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne

## Jury

M. Vincent FRANJOU,	professeur	(Nantes).	
M. Jean LANNES,	professeur	(École polytechnique).	
M. Jean-Louis LODAY,	directeur de recherche	(Strasbourg),	<i>rapporteur.</i>
M. Teimuraz PIRASHVILI,	professeur	(Leicester)	<i>président.</i>
M. Geoffrey POWELL,	chargé de recherche	(Paris 13),	<i>co-</i>
			<i>directeur.</i>
M. Lionel SCHWARTZ,	professeur	(Paris 13),	<i>directeur.</i>

## Autre rapporteur

M. Henning KRAUSE, professeur, Paderborn.



# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mes directeurs Messieurs Geoffrey Powell et Lionel Schwartz pour l'intérêt du sujet qu'ils m'ont proposé et la qualité scientifique et humaine de leur encadrement. Tout en me faisant bénéficier de leurs points de vue complémentaires sur les modules instables ou les catégories de foncteurs, ainsi que sur maints autres domaines dont le lien avec le sujet de cette thèse n'était initialement pas toujours clair pour moi, ils m'ont laissé une grande liberté dans mes recherches.

Je suis particulièrement reconnaissant à Lionel Schwartz de m'avoir fait partager son intuition sur les opérations de Steenrod, et à Geoffrey Powell de la vision conceptuelle des catégories de foncteurs qu'il m'a communiquée et de sa très grande disponibilité comme de sa bienveillante exigence.

Je remercie vivement Messieurs Henning Krause et Jean-Louis Loday pour leur promptitude à avoir écrit un rapport précis et synthétique sur ce texte de 280 pages.

Je suis également honoré de la présence dans mon jury de Messieurs Vincent Franjou, Jean Lannes et Teimuraz Pirashvili.

Avant mon doctorat, plusieurs enseignants-chercheurs en mathématiques ont répondu avec compétence et disponibilité à mes nombreuses interrogations, notamment Messieurs Frédéric Paulin, Fabien Morel et François Loeser, que je tiens à remercier. Encore auparavant, Messieurs Romain Krust et Jacques Chevallet ont été d'excellents enseignants de classe préparatoire à l'écoute de mes questions mathématiques, je leur en sais gré.

Ma gratitude va également aux membres du laboratoire, le LAGA, et notamment à l'équipe de topologie algébrique qui m'ont accueilli. J'ai apprécié la qualité de l'environnement scientifique qu'ils m'ont fourni.

Grâce à la compétence et à l'affabilité des personnels IATOS du laboratoire, cette thèse s'est déroulée dans de bonnes conditions administratives et informatiques.

Je suis aussi reconnaissant aux doctorants et anciens doctorants du LAGA pour leur convivialité et leurs encouragements. Je remercie spécialement Christine Vespa pour ses conseils et ses discussions sur les catégories de foncteurs.

J'exprime aussi ma gratitude à Patricia Chwat pour ses encouragements et sa relecture.

Enfin, je sais gré à mes amis et aux membres de ma famille, notamment mes parents, ma sœur et mon beau-frère, du soutien qu'ils m'ont apporté pendant cette thèse.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>25</b>
<b>1</b>	<b>Rappels généraux sur les catégories</b>	<b>27</b>
1.1	Notations et exemples . . . . .	27
1.2	Adjonctions . . . . .	30
1.2.1	Adjonctions et algèbre homologique . . . . .	31
1.2.2	Adjonctions et (co)monades . . . . .	32
1.3	Propriétés de régularité des catégories abéliennes . . . . .	33
1.4	Catégories abéliennes quotients . . . . .	37
1.4.1	Quotient d'une catégorie abélienne par une sous-catégorie épaisse . . . . .	37
1.4.2	Diagrammes de recollement . . . . .	39
1.5	Dualité . . . . .	40
1.6	Catégories abéliennes tensorielles . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Notions de finitude dans les catégories abéliennes</b>	<b>47</b>
2.1	Objets de type fini, noethériens . . . . .	48
2.1.1	Généralités . . . . .	48
2.1.2	Rôle des projectifs de type fini . . . . .	50
2.1.3	Type-finitude et commutation aux colimites . . . . .	51
2.2	Objets de présentation finie . . . . .	52
2.2.1	Objets pf . . . . .	52
2.2.2	Objets $pf_n$ . . . . .	54
2.2.3	Utilisation de foncteurs exacts . . . . .	55
2.3	Catégories localement noethériennes . . . . .	56
2.4	Notions duales . . . . .	59
2.5	Sous-catégories de Serre stables par colimites . . . . .	63
2.6	Objets finis . . . . .	67
2.7	Objets semi-simples . . . . .	70
2.8	Notions de finitude et catégories quotients . . . . .	75
2.8.1	Généralités . . . . .	75
2.8.2	Filtration de Krull . . . . .	76
2.8.3	Objets simples et diagrammes de recollement . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Catégories de foncteurs</b>	<b>79</b>
3.1	La catégorie abélienne tensorielle $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ . . . . .	79
3.1.1	Généralités . . . . .	79
3.1.2	Générateurs projectifs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$ . . . . .	83
3.1.3	Dualité dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ . . . . .	85
3.2	Foncteurs hom internes et foncteurs de division . . . . .	86
3.3	Lien entre différentes catégories de foncteurs . . . . .	89
3.3.1	Recollement de catégories de foncteurs . . . . .	89
3.3.2	Produit tensoriel extérieur . . . . .	92

<b>4</b>	<b>La catégorie <math>\mathcal{F}</math> et la conjecture artinienne</b>	<b>97</b>
4.1	La catégorie abélienne tensorielle $\mathcal{F}$ . . . . .	98
4.2	Foncteurs finis . . . . .	99
4.2.1	Foncteurs polynomiaux . . . . .	99
4.2.2	Quelques classes de foncteurs finis . . . . .	105
4.2.3	Foncteurs simples et représentations des groupes symétriques . . . . .	108
4.3	La conjecture artinienne : premiers énoncés, motivations . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Les catégories <math>\mathcal{F}_{surj}</math> et <math>\mathcal{F}_{inj}</math></b>	<b>117</b>
5.1	Préliminaires . . . . .	118
5.2	Structures tensorielles sur $\mathcal{F}_{surj}$ . . . . .	119
5.3	Objets finis . . . . .	121
5.4	Liens avec la catégorie $\mathcal{F}$ . . . . .	124
5.4.1	Les foncteurs adjoints $o$ et $\varpi$ . . . . .	124
5.4.2	La catégorie $\mathcal{F}_{surj}$ et la conjecture artinienne . . . . .	126
5.4.3	Foncteurs de Powell . . . . .	127
5.5	Liens avec les systèmes de coefficients . . . . .	128
5.6	Propriétés des foncteurs d'oubli $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ . . . . .	131
5.6.1	Résultats d'annulation cohomologique . . . . .	131
5.6.2	Le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(\mathbb{F}_2, \cdot)$ et l'algèbre $\mathbf{A}_{G_r}$ . . . . .	132
5.6.3	La catégorie $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ . . . . .	135
<b>II</b>	<b>Catégories de foncteurs en grassmanniennes</b>	<b>137</b>
<b>6</b>	<b>Définition des catégories <math>\mathcal{F}_{G_r, I}</math>, <math>\tilde{\mathcal{F}}_{G_r, I}</math> et <math>\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}</math></b>	<b>139</b>
6.1	Catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole . . . . .	139
6.1.1	La catégorie de comodules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ . . . . .	140
6.1.2	Recollements de catégories de comodules . . . . .	142
6.1.3	Situation duale . . . . .	144
6.2	Les catégories $\mathcal{E}_{G_r, I}^f$ , $\tilde{\mathcal{E}}_{G_r, I}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ . . . . .	145
6.2.1	Définition des catégories et foncteurs utilisés . . . . .	146
6.2.2	Propriétés des foncteurs fondamentaux . . . . .	150
6.2.3	Propriétés de structure des catégories $\mathcal{E}_{G_r}^f$ , $\tilde{\mathcal{E}}_{G_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ . . . . .	151
6.3	Les catégories de foncteurs en grassmanniennes . . . . .	154
6.3.1	La catégorie $\mathcal{F}_{G_r, I}$ . . . . .	155
6.3.2	La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$ . . . . .	158
6.3.3	La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{G_r, I}$ . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Adjonctions et descriptions alternatives des catégories de foncteurs en grassmanniennes</b>	<b>163</b>
7.1	La conjecture artinienne dans $\mathcal{F}_{G_r, I}$ . . . . .	164
7.2	La catégorie $\mathcal{F}_{G_r, I}$ comme catégorie de modules . . . . .	164
7.3	L'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n} \simeq \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$ . . . . .	170
<b>8</b>	<b>Propriétés fondamentales des catégories <math>\mathcal{F}_{G_r, I}</math></b>	<b>177</b>
8.1	Objets polynomiaux . . . . .	178
8.2	Objets finis . . . . .	183
8.3	Structures tensorielles sur $\mathcal{F}_{G_r}$ . . . . .	186
8.4	Foncteurs hom internes et foncteurs de division . . . . .	189
8.4.1	Comparaison entre les différentes catégories $\mathcal{F}_{G_r, I}$ . . . . .	189
8.4.2	Propriétés formelles . . . . .	191
8.4.3	Le morphisme $h_F^X : \omega(\mathbf{Hom}_{G_r}(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X))$ . . . . .	194

8.5	Propriétés cohomologiques du foncteur $\omega$ . . . . .	197
8.5.1	Préliminaires . . . . .	198
8.5.2	L'isomorphisme $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(F), \omega(X)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(F, \mathcal{I}(X))$ ( $F$ analytique) . . . . .	200
8.5.3	Le foncteur $\omega$ et la conjecture artinienne . . . . .	201
8.5.4	Retour sur la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$ . . . . .	205

### III Avancées sur la conjecture artinienne 211

<b>9</b>	<b>Foncteur <math>\omega</math> et <math>\nabla</math>-nilpotence</b> . . . . .	<b>213</b>
9.1	La catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ . . . . .	213
9.2	Les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de Powell . . . . .	217
9.3	Deuxième résultat d'annulation cohomologique . . . . .	219
9.4	Estimation de $\tilde{\nabla}_n \omega_n$ . . . . .	223
9.5	Théorème de simplicité généralisé . . . . .	227
9.6	Foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ -adaptés . . . . .	230
<b>10</b>	<b>Facteurs de composition des foncteurs <math>\omega(X)</math></b> . . . . .	<b>233</b>
10.1	Le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \tilde{G}_0^f(\mathcal{F})$ . . . . .	235
10.2	Les foncteurs $(\cdot : \Lambda^1)$ et $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ . . . . .	239
10.3	Préliminaires liés aux représentations des groupes symétriques . . . . .	242
10.3.1	Liens formels entre les endofoncteurs $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ et $(\cdot : \Lambda^1)$ de $\mathcal{F}$ et les représentations des groupes symétriques . . . . .	242
10.3.2	Quelques lemmes techniques . . . . .	244
10.3.3	Hom interne et division par $\Lambda^1$ des foncteurs de Weyl . . . . .	247
10.3.4	Partitions Weyl-séparantes et alternées . . . . .	248
10.4	Détection de facteurs de composition par division par $\Lambda^1$ . . . . .	250
10.4.1	Préliminaires formels . . . . .	251
10.4.2	Détection de facteurs de degré maximal dans un foncteur fini . . . . .	254
10.4.3	Détection dans $\tilde{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda$ . . . . .	255
10.5	Application à la structure de $\omega_2(X)$ . . . . .	257
10.5.1	Facteurs de composition des foncteurs $\tilde{D}(2)$ et $L(2)$ . . . . .	257
10.5.2	Facteurs de composition des $\tilde{D}(2)$ -modules finis . . . . .	261
10.5.3	Foncteur $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ et structure des $\tilde{G}(2)$ -comodules finis . . . . .	266
	Index des Notations . . . . .	275
	Index . . . . .	279





# Introduction

Soit  $k$  un corps commutatif, notons  $\mathcal{E}_k$  la catégorie des espaces vectoriels sur  $k$  et  $\mathcal{E}_k^f$  la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie. On désigne par  $\mathcal{F}(k)$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{E}_k^f$  vers  $\mathcal{E}_k$ .

Notre objectif est d'étudier la structure globale de la catégorie  $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$  relative au corps à deux éléments  $\mathbb{F}_2$ , qui sera simplement notée  $\mathcal{F}$  par la suite (de même, nous noterons  $\mathcal{E}^f$  et  $\mathcal{E}$  pour  $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_2}^f$  et  $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_2}$  respectivement). La quasi-totalité de nos résultats se généraliseraient sans aucune difficulté au cas d'un corps *fini*, voire dans un cadre plus vaste pour certains d'entre eux, qui utilisent uniquement la structure abélienne de la catégorie source  $\mathcal{E}^f$ . Ainsi, dans notre prépublication [Dja06a], nous exposons les résultats de la deuxième partie de cette thèse dans le cadre de la catégorie  $\mathcal{F}(k)$ , où  $k$  est un corps fini arbitraire.

Nous avons notamment cherché à progresser dans l'étude de la conjecture suivante, initialement émise par Lannes et Schwartz, à partir de considérations relatives aux modules instables sur l'algèbre de Steenrod (cf. infra).

**Conjecture 1** (Conjecture artinienne). *La catégorie  $\mathcal{F}$  est localement noethérienne.*

Rappelons quelques notions usuelles de finitude dans les catégories abéliennes. Un objet est dit *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets stationne. Il est dit *artinien* si toute suite décroissante de sous-objets stationne, *fini* s'il est à la fois noethérien et artinien, *localement fini* s'il est colimite d'objets finis. Une catégorie abélienne est *localement noethérienne* si elle possède un ensemble de générateurs noethériens.

Faisons maintenant quelques rappels sur les catégories de foncteurs. Si  $\mathcal{I}$  est une catégorie essentiellement petite, la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  des foncteurs de  $\mathcal{I}$  vers  $\mathcal{E}_k$  est une catégorie abélienne qui possède assez d'objets projectifs et assez d'objets injectifs : les foncteurs  $P_A^{\mathcal{I}} = k[\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(A, \cdot)]$  constituent, par le lemme de Yoneda, une famille de générateurs projectifs, dits *standard*, et les foncteurs  $I_A^{\mathcal{I}} = k^{\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(\cdot, A)}$  une famille de cogénérateurs injectifs, également dits *standard*. En particulier, on peut faire de l'algèbre homologique dans la catégorie abélienne  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  — on parle de *(co)homologie des foncteurs*. De plus, la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  possède les propriétés de régularité usuelles (colimites filtrantes exactes) et est munie d'un produit tensoriel, calculé au but.

Dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , on dispose aussi d'un foncteur de dualité  $D$ , donné par  $DF(V) = F(V^*)^*$ , où  $*$  désigne le foncteur de dualité des espaces vectoriels ; le foncteur  $D$  échange les projectifs standard et les injectifs standard. On voit ainsi que la conjecture 1, qui signifie que les foncteurs projectifs standard  $P_V^{\mathcal{E}^f}$ , notés simplement  $P_V$ , sont noethériens, équivaut à dire que les foncteurs injectifs standard  $I_V^{\mathcal{E}^f}$ , notés simplement  $I_V$ , sont artiniens, d'où l'appellation de *conjecture artinienne*. Les origines topologiques de l'étude de la catégorie  $\mathcal{F}$ , que nous allons rappeler, expliquent pourquoi s'intéresser plutôt aux  $I_V$  qu'aux  $P_V$ .

## Les motivations à l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$

Bien qu'elles constituent l'un des exemples les plus simples et fondamentaux de catégories de foncteurs, les catégories  $\mathcal{F}(k)$  n'ont été étudiées de manière intrinsèque et approfondie que depuis les années 1990. Mentionnons quelques travaux précurseurs significatifs, réalisés d'un point de vue

différent de celui des catégories  $\mathcal{F}(k)$ . Tout d’abord, la cohomologie des anneaux introduite par Mac Lane dans [ML57] a été identifiée comme un cas particulier de cohomologie des foncteurs par l’article [JP91] de Jibladze et Pirashvili. Breen a effectué des calculs importants en la matière dans [Bre78]; les travaux de Bökstedt dans les années 1980 sur l’homologie de Hochschild topologique (non publiés — cf. [PW92] à ce sujet) sont également très liés aux catégories  $\mathcal{F}(k)$ . Toutes ces recherches utilisaient cependant des méthodes fort différentes de celles de la cohomologie des foncteurs.

Le cas où le corps  $k$  est infini, qui diffère profondément du cas des corps finis, n’a guère été considéré : il est alors plus naturel de se restreindre aux foncteurs polynomiaux, la catégorie  $\mathcal{F}(k)$  possédant un comportement assez « pathologique » à plusieurs égards (elle n’est en particulier pas localement noethérienne, car l’anneau  $k[k^\times]$  n’est pas noethérien). Cela revient à étudier, plutôt que  $\mathcal{F}(k)$ , la catégorie  $\mathcal{P}(k)$  des *foncteurs polynomiaux stricts* de Friedlander et Suslin ([FS97]), étroitement liée aux représentations polynomiales des groupes linéaires (cf. [Gre80]). Cette approche s’inscrit dans la lignée des travaux de Schur : la catégorie  $\mathcal{P}(k)$  peut se décrire à partir des représentations des algèbres de Schur.

## Motivations topologiques

Dans l’article [HLS93], Henn, Lannes et Schwartz définissent un foncteur  $f$  de la catégorie  $\mathcal{U}$  des modules instables sur  $\mathcal{A}_p$  vers la catégorie  $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ . Ici,  $p$  désigne un nombre premier, et  $\mathcal{A}_p$  l’algèbre de Steenrod des opérations stables de la cohomologie modulo  $p$ . Cet article montre que le foncteur  $f$  induit une équivalence de catégories entre le quotient de la catégorie  $\mathcal{U}$  par la sous-catégorie épaisse *Nil* des modules instables nilpotents et la sous-catégorie pleine  $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{F}_p)$  des *foncteurs analytiques* (i.e. localement finis) de  $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ . L’image par le foncteur  $f$  de la cohomologie  $H^*V$  modulo  $p$  d’un  $p$ -groupe abélien élémentaire  $V$  est le foncteur injectif  $I_V$ , ce qui explique l’attention portée à ces foncteurs plutôt qu’aux foncteurs  $P_V$ , qui ne sont analytiques que lorsque  $V$  est nul. La profondeur de l’équivalence de catégories que nous avons mentionnée est illustrée par l’observation suivante : l’injectivité des objets  $I_V$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$  est un résultat formel immédiat, tandis que l’injectivité des objets  $H^*V$  de  $\mathcal{U}$ , démontrée par Carlsson, Miller, Lannes et Zarati (cf. [LZ86]), et qui peut se déduire formellement de l’injectivité des foncteurs  $I_V$  par les résultats de [HLS93], comme l’a observé Kuhn (cf. [Kuh94a]), constitue un résultat tout-à-fait non trivial et topologiquement significatif.

Nous donnerons néanmoins nos énoncés en termes des foncteurs  $P_V$  plutôt que des foncteurs  $I_V$ . En effet, ce choix s’avère plus naturel dès lors que l’on cherche à préciser la conjecture artinienne par des énoncés relatifs à des catégories quotients, qu’il est usuel d’étudier relativement à des sous-catégories localisantes plutôt que co-localisantes. De plus, bien que des considérations sur la catégorie  $\mathcal{U}$  aient parfois joué un rôle intuitif important dans cette thèse, cette catégorie ne sera pas utilisée explicitement. Nous traduirons également, pour la cohérence de notre exposé, la plupart des résultats antérieurs relatifs aux foncteurs  $I_V$  en termes des foncteurs  $P_V$ .

L’absence de mention explicite à la catégorie  $\mathcal{U}$  ne signifie nullement que les interactions entre cette catégorie et les résultats de cette thèse soient indignes d’intérêt. D’une part, le dictionnaire donné par [HLS93] permet d’obtenir des énoncés sur les modules instables à partir d’énoncés dans la catégorie  $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ , qui sont donc susceptibles de donner lieu à des applications topologiques (cf. [Sch94]). D’autre part, comme nous le détaillerons dans l’introduction de la section 6.1, les catégories de foncteurs que nous introduirons pour étudier la conjecture artinienne sont liées à des catégories construites à partir de la catégorie  $\mathcal{U}$  pour aborder des problèmes topologiques particuliers, notamment autour de la cohomologie équivariante.

## Motivations algébriques : (co)homologie des groupes linéaires

L’autre principale motivation à l’étude de la catégorie  $\mathcal{F}$  (externe à la théorie des catégories) provient de ses liens féconds avec la théorie des représentations modulaires et la cohomologie des groupes, notamment linéaires sur  $\mathbb{F}_2$ . C’est pourquoi Kuhn a nommé catégorie des *représentations*

*génériques des groupes linéaires*  $GL_n(k)$  la catégorie  $\mathcal{F}(k)$ . De fait, l'évaluation sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$  d'un foncteur  $F$  est un  $GL(V)$ -module ; si la théorie des représentations constitue un outil précieux pour étudier les catégories  $\mathcal{F}(k)$ , à l'inverse, les méthodes spécifiques aux catégories de foncteurs peuvent aboutir à des résultats sur les représentations et la (co)homologie des groupes inaccessibles par les seules techniques internes à ces domaines.

Avant d'énoncer le résultat le plus important dans cette voie, établi indépendamment par Suslin dans l'appendice de [FFSS99] et par Betley dans [Bet99], donnons quelques notations. Soient  $A$  un anneau,  $\mathbf{L}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules à gauche libres de type fini et  $T : \mathbf{L}(A)^{op} \times \mathbf{L}(A) \rightarrow \mathbf{Ab}$  (catégorie des groupes abéliens) un foncteur. La *K-théorie stable* de  $A$  à coefficients dans  $T$  est la colimite  $K_*^s(A; T)$  des groupes abéliens  $H_*(GL_n(A), T(A^n, A^n))$  relativement aux morphismes induits par les flèches  $T(A^n, A^n) \rightarrow T(A^{n+1}, A^{n+1})$  procurées par la projection  $A^{n+1} \rightarrow A^n$  sur les  $n$  premiers facteurs et l'inclusion  $A^n \hookrightarrow A^{n+1}$  des  $n$  premiers facteurs. Un cas particulier fondamental d'un tel foncteur s'obtient ainsi : on part de deux foncteurs covariants  $F$  et  $G$  des  $A$ -modules vers  $\mathbf{Ab}$ , et l'on définit  $T = \mathcal{H}om(F, G)$  comme le foncteur composé de  $(F^{op}, G) : \mathbf{L}(A)^{op} \times \mathbf{L}(A) \rightarrow \mathbf{Ab}^{op} \times \mathbf{Ab}$  et du foncteur  $\text{hom} : \mathbf{Ab}^{op} \times \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

**Théorème 2** (Betley, Suslin). *Soient  $k$  un corps fini et  $F$  et  $G$  deux objets finis de la catégorie  $\mathcal{F}(k)$ . La K-théorie stable  $K_*^s(k, \mathcal{H}om(F, G))$  est naturellement isomorphe au groupe d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(F, G)$ .*

Scorichenko a étendu ce résultat, donnant une description analogue de la *K-théorie stable* de tout anneau à coefficients dans un bifoncteur de degré d'Eilenberg-MacLane fini en chaque variable — voir le dernier chapitre de [FFPS03], et le chapitre 13 de [Lod98]. Il existe une variante cohomologique évidente.

Outre son intérêt théorique intrinsèque, le théorème 2 permet d'effectuer des calculs de *K-théorie stable*, car l'on dispose de nombreux outils d'algèbre homologique dans les catégories  $\mathcal{F}(k)$ . Notamment, la structure *exponentielle graduée* de nombreux foncteurs usuels (puissances symétriques, extérieures...) constitue une aide précieuse pour simplifier des calculs de groupes d'extensions mettant en jeu des produits tensoriels, comme l'illustrent les articles [Fra96] et [FFSS99]. De plus, l'existence d'adjonctions entre foncteurs *exacts* s'avère précieuse — essentiellement, on utilise les adjoints à droite et à gauche au foncteur différence  $\Delta$  (dont la définition est rappelée plus loin). Ces arguments d'adjonction, remarquablement simples et efficaces, et souvent combinés à l'emploi de structures exponentielles, ont été initiés par Pirashvili (cf. [JP91], ou son article dans le volume [FFPS03] pour une exposition plus récente), puis utilisés abondamment par différents auteurs ; une application importante est fournie par Franjou, Lannes et Schwartz dans [FLS94]. Les résultats d'annulation cohomologique que nous avons obtenus, et que nous évoquerons en détails ultérieurement, s'inscrivent dans cette lignée.

## Les motivations à l'étude des propriétés de finitude d'une catégorie abélienne

Si le lien entre le caractère localement noethérien conjectural de la catégorie  $\mathcal{F}$  et les considérations précédentes n'est pas patent à première vue, il apparaît clairement lorsqu'on se penche sur les méthodes développées pour établir des cas particuliers de la conjecture 1. De fait, rares sont les objets dont on sait démontrer le caractère noethérien sans déterminer leur structure plus précisément.

Dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , c'est la notion suivante qui sera utile pour étudier la structure des objets de type fini.

**Définition 3** (cf. [Pow00a] pour la notion duale). On définit par récurrence sur  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  la notion d'objet *simple noethérien de type  $n$*  et d'objet *noethérien de type  $n$*  ainsi.

- Un objet est simple noethérien de type  $-1$  s'il est nul.

- Un objet est simple noethérien de type  $n$  s'il n'est pas noethérien de type  $n - 1$  mais que tous ses quotients stricts le sont.
- Un objet est noethérien de type  $n$  s'il possède une filtration finie dont les quotients sont simples noethériens de types  $\leq n$ .

Très vite s'est imposée la forme renforcée suivante de la conjecture artinienne (cf. [Pow98c]).

**Conjecture 4** (Conjecture artinienne, forme forte). *Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ , le foncteur  $P_V$  est noethérien de type  $n$ .*

Nous utiliserons aussi la notion classique suivante, voisine de la précédente, pour estimer la « taille » d'un objet.

**Définition 5** (cf. [Gab62]). La *filtration de Krull* d'une catégorie abélienne avec colimites  $\mathcal{A}$  est la suite croissante de sous-catégories  $(\mathcal{K}_n(\mathcal{A}))$  définie par récurrence comme suit.

- Pour  $n < 0$ ,  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A}) = \{0\}$ .
- Pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$  est l'image réciproque par le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$  de la plus petite sous-catégorie épaisse, stable par colimites et contenant les objets finis<sup>1</sup> de  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ .

Le lien entre les définitions 3 et 5 vient de ce qu'un objet est noethérien de type  $n$  dans  $\mathcal{A}$  si et seulement s'il est noethérien et appartient à  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ . Le caractère fondamental de la notion de filtration de Krull d'une catégorie abélienne est illustré par le fait que la dimension de Krull d'un anneau commutatif est la borne à partir de laquelle la filtration de Krull de la catégorie des  $A$ -modules stationne. Nous avons présenté de manière assez détaillée, au chapitre 2, les rudiments relatifs aux différentes notions de finitude que nous aurons à utiliser dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , dans le cadre des catégories de Grothendieck. En effet, ces résultats élémentaires et connus ne semblent pas avoir fait l'objet d'une présentation intrinsèque systématique.

Comme nous l'expliquerons dans la suite de cette introduction, nos recherches se sont orientées en grande partie vers la compréhension, encore grandement conjecturale, de la filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Il ne s'agit donc pas seulement de montrer que cette catégorie n'est pas trop « pathologique », mais d'en étudier en profondeur la structure globale, obtenant ce faisant des renseignements « concrets » sur la structure de certains foncteurs. En outre, les outils que nous avons développés nous ont permis d'établir des résultats d'algèbre homologique puissants dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , intimement liés au théorème 2.

## La structure élémentaire des catégories de foncteurs usuelles

### Pourquoi s'intéresser à d'autres catégories de foncteurs ?

Limitons-nous aux catégories de foncteurs dont le but est  $\mathcal{E}$  et la source une catégorie essentiellement petite dont les ensembles de morphismes sont finis (les autres se comportant de manière très différente de  $\mathcal{F}$ ). *Certaines de ces catégories ne sont pas localement noethériennes* ; l'exemple 4.3.3 en donne un cas très simple. Il serait déterminant conceptuellement de disposer d'une conjecture générale sur le caractère localement noethérien de catégories de foncteurs. À défaut, il importe de comparer les propriétés élémentaires de plusieurs de ces catégories.

De surcroît, l'étude de la catégorie  $\mathcal{F}$  fait naturellement apparaître d'autres catégories de foncteurs. Nous évoquerons ultérieurement les plus complexes d'entre elles, les catégories de foncteurs en grassmanniennes, qui constituent le principal outil nouveau de cette thèse. De ce fait, si  $\mathcal{F}$  joue un rôle central parmi les catégories de foncteurs de but  $\mathcal{E}$  (ne serait-ce que par la post-composition par un foncteur de  $\mathcal{F}$ ), d'autres catégories occupent une place de choix dans les différentes questions algébriques soulevées par l'étude de la conjecture artinienne et des questions de représentations modulaires connexes.

---

<sup>1</sup>On prendra garde au fait qu'en général, la sous-catégorie des objets localement finis de  $\mathcal{A}$  n'est *pas* épaisse. C'est cependant le cas si les objets simples de  $\mathcal{A}$  sont de présentation finie (cf. chapitre 2).

La tendance à l’ubiquité de l’homologie des foncteurs parmi les théories homologiques constitue un autre motif majeur d’intérêt pour diverses catégories de foncteurs. Ainsi, dans [Pir03], Pirashvili montre que la cohomologie d’André-Quillen est un cas particulier de cohomologie fonctorielle ; dans [Pir00] (généralisé dans [PR02]), il établit un résultat analogue pour l’homologie de Hochschild et l’homologie cyclique, qui utilise les  $\Gamma$ -modules (qui sont les objets d’une certaine catégorie de foncteurs). On pourra consulter aussi l’ouvrage [Lod98] sur ces questions.

## L’outil de base de la catégorie $\mathcal{F}$ : le foncteur différence

Le chapitre 4 rappelle les principaux résultats connus sur la structure élémentaire de la catégorie  $\mathcal{F}$ . On peut en trouver les démonstrations d’origine dans [Kuh94a], [Pir95] ou [Sch94], par exemple. Nous nous sommes attachés à présenter les propriétés et les démonstrations que nous avons détaillées de la façon la plus formelle possible, afin d’en mettre en évidence les sous-basements conceptuels, dans l’optique de l’étude globale des propriétés de finitude de la catégorie  $\mathcal{F}$  et de la généralisation de certaines propriétés à d’autres catégories de foncteurs (sur lesquelles nous faisons quelques rappels généraux dans le chapitre 3). Ainsi, l’important résultat, dû à Schwartz, selon lequel les objets finis de  $\mathcal{F}$  possèdent une résolution projective de type fini, apparaît comme une conséquence formelle de leur caractère *polynomial*, i.e. nilpotent pour le foncteur différence  $\Delta$ , et des propriétés élémentaires de celui-ci. Rappelons que ce foncteur, qui constitue l’un des plus importants outils dont on dispose dans  $\mathcal{F}$ , est défini par le scindement naturel

$$F(V \oplus \mathbb{F}_2) \simeq \Delta F(V) \oplus F(V)$$

qui utilise la structure additive de la catégorie source  $\mathcal{E}^f$  de  $\mathcal{F}$ . Le foncteur  $\Delta$  est adjoint à droite à  $\cdot \otimes \bar{P}$  et à gauche à  $\cdot \otimes \bar{I}$ , où le foncteur  $\bar{P}$  est la couverture projective du foncteur identité et  $\bar{I}$  son enveloppe injective.

C’est grâce au caractère polynomial des foncteurs finis de  $\mathcal{F}$  que l’on comprend aisément les objets simples, en bijection avec les représentations (sur  $\mathbb{F}_2$ ) des différents groupes symétriques. On obtient un système fondamental de représentants  $S_\lambda$  des objets simples de  $\mathcal{F}$  indexé, par les partitions 2-régulières  $\lambda$ . On dispose à partir de là de nombreux résultats sur les foncteurs simples de la catégorie  $\mathcal{F}$  ; l’absence d’analogie élémentaire au foncteur exact  $\Delta$  qui soit approprié à l’étude des foncteurs infinis participe de la difficulté de la conjecture artinienne.

## Les catégories $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$

Le chapitre 5 présente des résultats similaires à ceux que nous venons d’évoquer pour les catégories notées  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$ . Ce sont les catégories de foncteurs de but  $\mathcal{E}$  et de sources respectives  $\mathcal{E}_{surj}^f$  et  $\mathcal{E}_{inj}^f$ , sous-catégories de  $\mathcal{E}^f$  ayant les mêmes objets, mais dont les morphismes sont respectivement les épimorphismes et les monomorphismes. Les catégories  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$  sont *duales* en un sens que nous définissons dans la section 1.5, adapté aux catégories de foncteurs : si  $\mathcal{F}_{inj}$  n’est pas équivalente à la catégorie  $(\mathcal{F}_{surj})^{op}$ , elle lui « ressemble » beaucoup, et nombre de raisonnements peuvent se mener « comme si » ces deux catégories étaient équivalentes.

Les foncteurs d’inclusion  $\mathcal{E}_{surj}^f \hookrightarrow \mathcal{E}^f$  et  $\mathcal{E}_{inj}^f \hookrightarrow \mathcal{E}^f$  induisent respectivement, par précomposition, des foncteurs d’oubli notés  $o : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$  et  $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ . L’adjoint à gauche au foncteur  $o$  est un foncteur exact explicite, de même que l’adjoint à droite à  $o_{inj}$ , dualement (cf. § 5.4.1).

La catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  intervient dans la généralisation de Scorichenko du théorème 2 (présentée dans le dernier chapitre de [FFPS03], où cette catégorie est notée  $\mathbb{E}$ ) ; elle utilise l’adjonction fondamentale entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$  dont nous venons de parler. La catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  est, pour sa part, équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des *systèmes de coefficients* de Dwyer ([Dwy80]). Bien que nombre des résultats du chapitre 5 soient implicites dans la littérature, les catégories  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$  ne semblent pas avoir été étudiées de manière systématique.

On peut mener une étude des objets finis de ces catégories analogue à celle de la catégorie  $\mathcal{F}$ , le foncteur différence étant remplacé par un foncteur de décalage. Leurs objets simples sont

naturellement paramétrisés par les représentations simples des différents groupes linéaires. Leur structure globale est aussi mystérieuse que celle de la catégorie  $\mathcal{F}$  : si la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  est localement noethérienne, il en est de même pour  $\mathcal{F}$ , par un argument formel d'adjonction.

L'intérêt spécifique que nous portons aux catégories  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$  est double. D'une part, l'une des étapes essentielles de la démonstration de Suslin du théorème 2 repose sur le résultat suivant.

**Proposition 6** (Suslin). *Soient  $F$  et  $G$  deux objets de  $\mathcal{F}$ ,  $F$  étant supposé fini. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}(F), o_{inj}(G))$$

*est un isomorphisme.*

Nos méthodes permettront de généraliser cette proposition.

D'autre part, les progrès accomplis par Powell dans l'étude de la conjecture artinienne à l'aide des foncteurs qu'il a baptisés *foncteurs co-Weyl* se traduisent très efficacement en termes de la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$ , comme nous allons le voir.

## Historique de la conjecture artinienne

Le premier dévissage naturel des foncteurs projectifs  $P_V$  consiste en leur décomposition en somme directe de projectifs indécomposables. Comme l'anneau d'endomorphismes de  $P_V$  s'identifie à l'algèbre de monoïde finie  $\mathbb{F}_2[\mathrm{End}(V)]$ , il s'agit d'un problème algébrique « fini » ; il est abordé dans [HK88]. Explicitons les premiers cas : on a  $P_0 = \mathbb{F}_2$  (foncteur constant), qui est simple, et  $P_{\mathbb{F}_2} \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \bar{P}$ . Ensuite,  $P_{\mathbb{F}_2 \oplus 2} \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \bar{P}^{\oplus 2} \oplus P_{(2,1)}^{\oplus 2} \oplus P_{(2)}$ , où  $P_{(2)}$  est la couverture projective de la seconde puissance extérieure  $\Lambda^2$  et  $P_{(2,1)}$  celle du foncteur simple  $S_{(2,1)}$ , que l'on peut caractériser par le scindement  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \simeq \Lambda^3 \oplus S_{(2,1)}$ , ou encore par le fait que  $S_{(2,1)}(\mathbb{F}_2^{\oplus 2})$  est la représentation tautologique  $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$  de  $GL_2(\mathbb{F}_2)$  et que  $S_{(2,1)}(\mathbb{F}_2) = 0$ .

La structure du foncteur  $\bar{P}$  est élémentaire : il est *unisériel*, c'est-à-dire que l'ensemble de ses sous-objets est totalement ordonné pour l'inclusion. Précisément, il en existe une filtration décroissante  $(k_n \bar{P})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $k_n \bar{P} / k_{n+1} \bar{P} \simeq \Lambda^n$  pour  $n > 0$ , et  $k_0 \bar{P} \simeq \bar{P}$ . Cette filtration est duale de la filtration polynomiale de  $\bar{I}$ . Les sous-foncteurs de  $\bar{P}$  sont les  $k_n \bar{P}$  et 0. Ainsi,  $\bar{P}$  est un exemple de foncteur *simple noethérien de type 1* : il est infini, mais tous ses quotients non nuls sont finis. La conjecture 4 est donc aisée pour les projectifs  $P_V$  si  $\dim V \leq 1$  ; elle devient en revanche très difficile ensuite, et reste ouverte pour  $\dim V \geq 3$ .

De fait, le cas des foncteurs projectifs indécomposables  $P_{(2)}$  et  $P_{(2,1)}$  s'avère très significativement plus complexe. Auparavant a été étudiée la structure des foncteurs  $\bar{P} \otimes \Lambda^n$ . Celle-ci est motivée par le fait que la filtration de  $\bar{P}^{\otimes 2}$  par les  $\bar{P} \otimes k_n \bar{P}$  a pour quotients les  $\bar{P} \otimes \Lambda^n$ . Piriou a démontré dans [Pir97] que ces foncteurs sont noethériens de type 1 et en a donné la structure dans la catégorie  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ . Il employait des méthodes assez explicites issues de la théorie des représentations des groupes symétriques. Powell a généralisé ce résultat dans [Pow00b] en montrant le caractère noethérien de type 1 du produit tensoriel entre  $\bar{P}$  et un foncteur fini. Sa méthode n'en donne pas la structure explicite dans la catégorie  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ .

La structure de  $\bar{P}$  peut se déterminer à l'aide du foncteur différence, qui s'est révélé insuffisant pour l'étude des projectifs indécomposables plus « gros ». Powell a accompli une avancée importante en introduisant, dans [Pow00a], des endofoncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  généralisant le foncteur  $\Delta$ , dont ils sont des sous-quotients. Leur maniement plus délicat tient à leur inexactitude. Cependant, ils préservent épimorphismes et monomorphismes, et possèdent deux vertus fondamentales. D'une part, ils constituent un outil efficace de calcul *global* sur les objets simples de  $\mathcal{F}$  : si  $\lambda$  est une partition régulière de longueur  $n$ , on a  $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda) = S_{(\lambda_1-1, \dots, \lambda_n-1)}$ . D'autre part, les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  accroissent moins rapidement — et ce d'autant que  $n$  augmente — la taille des foncteurs infinis que le foncteur différence. On a par exemple  $\tilde{\nabla}_n(P_V) = 0$  si  $\dim V < n$ , et  $\tilde{\nabla}_n(P_V) \simeq P_V$  si  $\dim V = n$ .

Powell a obtenu le caractère noethérien de type 1 de  $\bar{P} \otimes F$ , pour  $F$  fini, par la combinaison de constructions explicites issues de la théorie des représentations et des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ . Il a également

démontré le caractère noethérien de type 2 des foncteurs  $P_{(2)}$  et  $P_{(2,1)}$  dans [Pow98a], grâce à un outil supplémentaire, qu'il a introduit dans [Pow98c] et nommé foncteurs *co-Weyl*, que nous appellerons *foncteurs de Powell*. Ces foncteurs de  $\mathcal{F}$  sont les images des foncteurs simples de  $\mathcal{F}_{surj}$  par l'adjoint à gauche  $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$  au foncteur d'oubli  $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ . On obtient ainsi des foncteurs  $Q_\lambda$  paramétrisés par les partitions régulières  $\lambda$ . Les projectifs indécomposables de type fini de  $\mathcal{F}$  possèdent une filtration finie dont les quotients sont des foncteurs de Powell. Le résultat principal sur la structure de ces foncteurs est le suivant.

**Théorème 7** (Théorème de simplicité de Powell, [Pow98c]). *Si  $\lambda$  est une partition régulière telle que  $\lambda_1 = n$ , alors  $Q_\lambda$  n'est pas  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent, mais tous ses quotients stricts le sont.*

C'est en étudiant les foncteurs de type fini annihilés par le foncteur  $\tilde{\nabla}_2$ , et en s'appuyant sur la structure de  $\bar{P} \otimes \Lambda^n$ , que Powell a pu déduire de ce résultat le caractère noethérien de type 2 de  $P_{(2)}$  et  $P_{(2,1)}$ , donc de  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$ . Il a émis la conjecture suivante.

**Conjecture 8** (Conjecture artinienne, forme très forte). *Pour toute partition régulière  $\lambda$ , le foncteur de Powell  $Q_\lambda$  est simple noethérien de type  $\lambda_1$ .*

Pour plus de détails sur les progrès accomplis sur la conjecture artinienne, nous renvoyons à [Pow00a] et à notre section 4.3.

La première avancée que nous avons obtenue sur la conjecture artinienne réside dans le résultat suivant.

**Théorème 9** ([Dja06c]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}} \otimes \Lambda^n$  est noethérien de type 2.*

Il s'agit d'une étape pour l'étude de la structure du foncteur  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 3}}$ , pour la même raison que les  $\bar{P} \otimes \Lambda^n$  interviennent dans la structure de  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$ . Une version plus générale de ce théorème est exposée dans le chapitre 10 suivant la méthode employée dans [Dja06c]; elle requiert cependant des outils supplémentaires par rapport au seul théorème 9.

Le théorème 9 se démontre à partir du théorème 7 et de l'endofoncteur hom interne  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$  de  $\mathcal{F}$ , adjoint à droite à  $\cdot \otimes \Lambda^1$  — nous en utilisons en fait l'adjoint à gauche ( $\cdot : \Lambda^1$ ), car nous travaillons sur les injectifs de  $\mathcal{F}$  dans [Dja06c]. Le foncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$  est un sous-foncteur du foncteur différence, mais dont le comportement diffère de celui des foncteurs  $\tilde{\nabla}_2$ , puisqu'il s'agit d'un foncteur *exact à gauche* (mais non exact). Nous renvoyons à l'introduction de [Dja06c] pour plus de détails sur cette méthode.

Les difficultés techniques rencontrées pour l'étendre au produit tensoriel entre  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$  et un foncteur fini quelconque nous ont amenés à chercher une approche plus conceptuelle pour construire les « briques élémentaires » de ces produits tensoriels. Notre attention s'est focalisée sur le fait que toutes les constructions utilisées jusqu'à présent pour dévisser les foncteurs  $\bar{P} \otimes F$  (pour  $F$  fini) fournissaient des foncteurs munis d'une structure de  $\bar{P}$ -comodule, et pour  $\bar{P}^{\otimes 2} \otimes F$ , une structure de  $\bar{G}(2)$ -comodule, où le foncteur  $\bar{G}(2)$  est introduit ci-après.

## Des $\bar{D}(n)$ -modules à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$

Le foncteur  $P_{\mathbb{F}_2}$  est construit comme la composée d'un foncteur  $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$  (le foncteur d'oubli) et du foncteur de linéarisation  $\mathbb{F}_2[\cdot] : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{E}$ . Ce foncteur est à valeurs dans les coalgèbres coïnitaires, coassociatives et cocommutatives, par la diagonale  $[x] \mapsto [x] \otimes [x]$  (où l'on note  $[x] \in \mathbb{F}_2[X]$  le générateur correspondant à  $x \in X$ ); cette structure est duale de la structure d'algèbre de Boole standard sur le foncteur  $X \mapsto \mathbb{F}_2^X : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ . On en déduit sur le foncteur  $\bar{P} = P_{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2$  une structure de coalgèbre non coïnitare, coassociative et cocommutative. De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si l'on note  $\mathcal{G}r_n(V)$  la grassmannienne des sous-espaces de dimension  $n$  d'un espace vectoriel  $V$ , le foncteur de Powell  $\bar{G}(n) : V \mapsto \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V)] \simeq \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V) \amalg \{*\}]/\mathbb{F}_2$  est muni d'une telle structure, à partir du foncteur  $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathbf{Ens} \quad V \mapsto \mathcal{G}r_n(V) \amalg \{*\}$  dont l'action sur les morphismes est donnée comme suit. Si  $f : V \rightarrow V'$  est un morphisme de  $\mathcal{E}^f$ , la flèche



$f_* : \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V) \amalg \{*\}] \rightarrow \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V') \amalg \{*\}]$  associe  $[f(W)]$  à  $[W]$  si  $W \in \mathcal{G}r_n(V)$  est tel que  $\dim f(W) = n$ , et  $[*]$  à  $[*]$  et à  $[W]$  si  $\dim f(W) < n$ .

Les foncteurs en algèbre de Boole, duaux de ce type de foncteurs, apparaissent dans la deuxième partie de [HLS93]. Le cas précis des  $\bar{D}(n)$ -modules (notion duale des  $\bar{G}(n)$ -comodules) est brièvement considéré dans la section 7 de [Pow98c]; nos travaux sur les  $\bar{G}(n)$ -comodules constituent de fait la continuation des travaux de Powell sur la conjecture artinienne.

Le point de départ de notre étude de ces catégories de (co)modules est la proposition suivante, formelle mais féconde.

**Proposition 10.** *Soient  $\mathcal{I}$  une catégorie essentiellement petite et  $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur. Notons  $\mathcal{I}_{\setminus X}$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(A, u)$  formés d'un objet  $A$  de  $\mathcal{I}$  et d'un élément  $u$  de  $X(A)$ .*

*Il existe un foncteur exact et fidèle  $\Omega_X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E})$  vers  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$ , appelé foncteur d'intégrale, donné sur les objets par*

$$\Omega_X(F)(A) = \bigoplus_{u \in X(A)} F(A, u).$$

*Ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E})$  et la sous-catégorie de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$  des comodules sur le foncteur en coalgèbres de Boole  $\mathbb{F}_2[X]$ .*

Nous détaillons ce type de construction dans la section 6.1, où nous traitons également le cas d'un foncteur en coalgèbres de Boole sans coïunité, qui est celui de  $\bar{G}(n)$ .

Les catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole de la proposition 10, ou, dualement, les catégories de modules sur un foncteur en algèbres de Boole, présentent des analogies avec les catégories de modules sur des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod considérées par différents auteurs (cf. [Rec84], [HLS95] et [LZ95]). De fait, dans le dictionnaire de [HLS93] entre foncteurs et modules instables, les algèbres instables correspondent aux foncteurs obtenus par linéarisation de foncteurs ensemblistes, c'est-à-dire aux foncteurs en algèbres de Boole — voir l'introduction de la section 6.1 pour plus de détails.

Il s'est avéré fort utile, pour étudier les  $\bar{G}(n)$ -comodules, de considérer une catégorie « globale » utilisant la grassmannienne de tous les sous-espaces d'un espace vectoriel, et pas seulement ceux d'une dimension donnée. Cela nous amène à poser la définition suivante.

**Définition 11** (Les catégories de foncteurs  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ ). Soit  $\mathcal{G}r : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur associant à un espace vectoriel l'ensemble de ses sous-espaces et à une application linéaire  $f : V \rightarrow V'$  la fonction  $\mathcal{G}r(V) \rightarrow \mathcal{G}r(V') \quad W \mapsto f(W)$ . La catégorie  $(\mathcal{E}^f)_{\setminus \mathcal{G}r}$  sera notée  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$  formée des objets  $(V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$  tels que  $\dim W = n$ .

On définit les *catégories de foncteurs en grassmanniennes*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f, \mathcal{E})$$

et

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f, \mathcal{E}).$$

Nous introduirons par la suite d'autres catégories de foncteurs en grassmanniennes, mais celles que nous venons de définir sont les plus importantes. À côté du foncteur de restriction  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ , on dispose d'un foncteur de *prolongement par zéro*  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  qui permet d'identifier  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  à la sous-catégorie pleine des foncteurs  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  tels que  $X(V, W) = 0$  si  $\dim W \neq n$ .

Le foncteur d'intégrale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}$  de la proposition 10 sera noté  $\omega$ ; on désignera par  $\omega_n$  sa restriction à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ . Ces foncteurs sont appelés *foncteurs d'intégrale en grassmanniennes*. La proposition 10 et sa variante non coïtitaire procurent le résultat suivant.

**Corollaire 12.** *1. Le foncteur  $\omega$  établit une équivalence entre la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  et la catégorie des  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ -comodules.*

*2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $\omega_n$  établit une équivalence entre la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  et la catégorie des  $\bar{G}(n)$ -comodules fidèles, i.e. dont la comultiplication est injective.*

# La structure algébrique des catégories de foncteurs en grassmanniennes

Nous indiquons maintenant les propriétés d'usage courant de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . Elles sont établies dans le paragraphe 6.3.1 et les sections 8.1 et 8.2. Pour la notion de diagramme de recollement dans les catégories abéliennes, nous renvoyons à [Kuh94b], § 2.

**Proposition 13.** *Il existe une filtration de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  par des sous-catégories épaisses  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$  possédant les propriétés suivantes.*

1. Pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un diagramme de recollement

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n-1} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} .$$

2. Tout objet de type fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  appartient à l'une des sous-catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$ .

Cette proposition clarifie le lien entre la catégorie globale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ . Par la suite, nous ne détaillerons guère que les propriétés relatives à la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

- Il existe deux foncteurs exacts et fidèles  $\xi$  et  $\theta : \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , fournis par la précomposition par les foncteurs  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f$  donnés par  $(V, W) \mapsto (V, W)$  et  $(V, W) \mapsto (V/W, W)$  respectivement. De plus, le foncteur  $\theta$  est plein, et son image est stable par sous-quotients.

La catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f, \mathcal{E})$  sera notée  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  dans la suite; les raisons de cette convention sont rappelées dans le paragraphe 3.3.2.

On a de même, par restriction, des foncteurs  $\xi_n$  et  $\theta_n : \mathcal{F}_{GL_n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , où  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$  désigne la catégorie des  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -modules à gauche.

- Le foncteur  $\kappa : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  donné par la précomposition par  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  ( $(V, W) \mapsto V/W$ ) est exact et pleinement fidèle; son image est stable par sous-quotients.
- Le foncteur  $\sigma : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  de précomposition par  $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  ( $(A, B) \mapsto (A \oplus B, B)$ ) est exact et fidèle. Il est adjoint à droite à  $\xi$ .

De surcroît, la composition  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  est isomorphe à l'identité.

Grâce aux foncteurs adjoints  $\xi$  et  $\sigma$ , on peut penser à la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  comme à une sorte de « produit tensoriel tordu » des catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$  (voir le paragraphe de cette introduction relatif à la structure monadique). De façon analogue, la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  constitue une sorte de « produit tensoriel tordu » des catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$ .

La structure élémentaire de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  se déduit ainsi aisément de celle de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$ , comme l'illustrent les propriétés suivantes.

- Le foncteur  $\iota : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  de précomposition par le foncteur  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  d'oubli du sous-espace de base est exact et fidèle; il est adjoint à droite au foncteur  $\omega$ .
- Soient  $\rho : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $\varepsilon : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$  les foncteurs de précomposition par  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f$  ( $(V, W) \mapsto W$ ) et  $\mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  ( $V \mapsto (V, V)$ ) respectivement. Le foncteur  $\rho$  est adjoint à gauche à  $\varepsilon$ , et l'unité  $id \rightarrow \varepsilon\rho$  est un isomorphisme.
- La composition  $\mathcal{F}_{surj} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\omega} \mathcal{F}$  est isomorphe à  $\varpi$ . Cela permet de voir les foncteurs de Powell comme des  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$ -comodules particuliers.
- Si  $V$  est un objet de  $\mathcal{E}^f$  et  $W$  un objet de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ , les foncteurs projectifs et injectifs standard de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  associés à l'objet  $(V \oplus W, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ , notés respectivement  $P_{(V \oplus W, W)}^{\mathcal{G}_r}$  et  $I_{(V \oplus W, W)}^{\mathcal{G}_r}$ , vérifient

$$P_{(V \oplus W, W)}^{\mathcal{G}_r} \simeq \iota(P_V) \otimes \rho(P_W^{surj}),$$

où  $P_W^{surj}$  est le projectif standard de  $\mathcal{F}_{surj}$  associé à  $W$ , et

$$I_{(V \oplus W, W)}^{\mathcal{G}_r} \simeq \kappa(I_V) \otimes I_{(W, W)}^{\mathcal{G}_r}.$$

- Il existe des isomorphismes naturels

$$\omega(P_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}) \simeq P_V \quad (1)$$

dans  $\mathcal{F}$  et

$$\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r} \quad (2)$$

dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

Comme dans  $\mathcal{F}$ , on définit le *foncteur de décalage* par un objet  $E$  de  $\mathcal{E}^f$  comme étant l'endo-foncteur  $\Delta_E^{\mathcal{G}_r}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  de précomposition par  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \quad (V, W) \mapsto (V \oplus E, W)$ . Il est adjoint à droite à  $\cdot \otimes \iota(P_V)$  et à gauche à  $\cdot \otimes \kappa(I_V)$ .

On a un scindement  $\Delta_{\mathbb{F}_2}^{\mathcal{G}_r} \simeq id \oplus \Delta^{\mathcal{G}_r}$ , où  $\Delta^{\mathcal{G}_r}$  est appelé le *foncteur différence*. Le noyau de ce foncteur exact est égal à l'image du foncteur  $\rho$ ; ses objets sont appelés *foncteurs pseudo-constants*.

Si l'on pense à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  comme à un « produit tensoriel tordu » de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$ , le foncteur différence  $\Delta^{\mathcal{G}_r}$  est le produit tensoriel (tordu) entre le foncteur différence de  $\mathcal{F}$  et l'identité de  $\mathcal{F}_{surj}$ . Cela explique que ce foncteur possède un comportement très analogue au foncteur différence  $\Delta$  de la catégorie  $\mathcal{F}$ . On définit dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  comme dans  $\mathcal{F}$  la notion de foncteur polynomial de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ ; les propriétés formelles de ces foncteurs sont similaires dans les deux catégories.

De plus, le caractère polynomial des objets finis persiste dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  :

**Proposition 14.** *Un foncteur  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  est fini si et seulement s'il vérifie les trois propriétés suivantes :*

1.  $X$  est un foncteur polynomial ;
2.  $X(V, W)$  est nul si  $\dim W$  est assez grande ;
3.  $X$  prend des valeurs de dimension finie.

On en déduit formellement que les foncteurs introduits plus haut, *sauf les foncteurs d'intégrale en grassmanniennes*, conservent les objets finis.

Parmi les nombreuses conséquences de l'importante proposition 14, citons le résultat suivant.

**Proposition 15.** *1. Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  est simple ;
  - (b) l'objet  $\sigma(X)$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  est simple ;
  - (c) il existe un objet simple  $F$  de  $\mathcal{F}$  et un objet simple  $R$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  tels que  $X$  est isomorphe à  $\kappa(F) \otimes \rho(R)$ .
2. Les foncteurs exacts  $\sigma$  et  $\theta$  induisent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre les groupes de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r})$  et  $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}) \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$  des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ .

## Structures tensorielles

La structure tensorielle de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  possède de riches propriétés. Ainsi, de nombreux arguments d'adjonction permettent de relier les foncteurs hom internes et les foncteurs de division (adjoints à droite et à gauche respectifs au produit tensoriel) dans les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $\mathcal{F}$ . Citons trois exemples.

**Proposition 16.** *Soient  $F, G$  deux objets de  $\mathcal{F}$  et  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . On a des isomorphismes naturels :*

$$\begin{aligned} \omega(X : \iota(F)) &\simeq (\omega(X) : F), \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}(\kappa(F), \kappa(G)) &\simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}(\iota(F), \kappa(G)) \simeq \kappa(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G)), \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}(\iota(F), \iota(G)) &\simeq \iota(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G)). \end{aligned}$$

Le premier de ces isomorphismes est particulièrement important lorsque  $F$  est un objet injectif standard de  $\mathcal{F}$ . Dans ce cas, il se lit comme  $\Delta_V \circ \omega \simeq \omega \circ (\cdot : \iota(I_V))$ . Le scindement (2) de  $\iota(I_V)$  procure alors un scindement explicite de  $\Delta_V \circ \omega$ , qui reflète une partie importante du comportement du foncteur  $\omega$ .

Citons enfin une propriété moins formelle de la structure tensorielle usuelle de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

**Proposition 17.** *Les foncteurs  $\omega \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}(\iota(q_k \bar{P}), \cdot)$  et  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k \bar{P}, \cdot) \circ \omega$  sont isomorphes pour tout entier  $k$ .*

Ici, les foncteurs  $q_k \bar{P}$  sont les quotients non triviaux de  $\bar{P}$ ; le cas le plus important est celui de  $q_1 \bar{P} \simeq \Lambda^1$ . Cette propriété ne se généralise pas lorsqu'on remplace  $q_k \bar{P}$  par un foncteur quelconque. Elle nous permet de revenir sur l'approche du théorème 9 utilisant le foncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$  : grâce à elle et à la proposition 16, on obtient des calculs internes à  $\mathcal{F}$  très difficiles à mener directement dans le cas général. C'est ainsi que l'on a pu généraliser, dans le chapitre 10 de cette thèse, la méthode d'étude de la structure de  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}} \otimes \Lambda^n$  de notre article [Dja06c] (qui ne fait pas usage des catégories de foncteurs en grassmanniennes) au cas du produit tensoriel entre  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$  et un foncteur fini quelconque.

À côté de la structure tensorielle usuelle sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  existe une autre structure tensorielle, que nous avons nommée *produit tensoriel total* et notée  $\tilde{\otimes}$ . Il est donné sur les objets par la formule

$$(X \tilde{\otimes} Y)(V, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} X(V, A) \otimes Y(V, B).$$

Deux principales raisons ont motivé son introduction.

- Parmi les foncteurs que nous avons considérés dans cette section, tous commutent au produit tensoriel usuel, à l'exception notable du foncteur d'intégrale en grassmanniennes  $\omega$ . On a en revanche un isomorphisme naturel  $\omega(X \tilde{\otimes} Y) \simeq \omega(X) \otimes \omega(Y)$ .
- Le produit tensoriel usuel de deux injectifs standard de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  est une somme directe finie d'injectifs standard, mais le produit tensoriel usuel se comporte mal relativement aux projectifs de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . En revanche, il existe un isomorphisme naturel  $P_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r} \tilde{\otimes} P_{(A',B')}^{\mathcal{G}_r} \simeq P_{(A \oplus A', B \oplus B')}^{\mathcal{G}_r}$ .

De plus, nombre des propriétés de « régularité » du produit tensoriel usuel de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  persistent pour le produit tensoriel total, notamment l'exactitude et la préservation des objets finis.

Les considérations relatives aux structures tensorielles sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  sont présentées dans les sections 8.3 et 8.4; un avant-goût du produit tensoriel total apparaît dans le cadre de la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$ , dans la section 5.2.

## Structure monadique

L'équivalence de catégories du corollaire 12 provient essentiellement de l'adjonction entre les foncteurs exacts et fidèles  $\omega$  et  $\iota$ . Mais il existe une autre adjonction, tout aussi fondamentale, entre les foncteurs exacts et fidèles  $\xi$  et  $\sigma$ . Pour des raisons formelles, on en déduit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et la catégorie des *modules* sur une certaine monade explicite de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ , ou dans le cas de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , sur  $\mathcal{F}_{GL_n}$  (qui possède l'avantage d'être plus directement liée à  $\mathcal{F}$ ). Comme nous le montrons dans la section 7.2, cette équivalence de catégories possède des conséquences intéressantes : elle permet d'introduire très naturellement l'adjoint à gauche au foncteur  $\theta$ , et fournit une *résolution canonique* d'un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  par des objets de l'image de  $\xi$ . Le début de cette résolution joue d'ailleurs un rôle essentiel dans la démonstration de la proposition 14, dont l'autre ingrédient est le caractère polynomial des objets finis de  $\mathcal{F}$ . Nous esquissons également les aspects homologiques de cette description monadique de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , suivant [BB69].

Dans une catégorie de foncteurs très proche de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , notée  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  et introduite au § 6.3.2, cette approche peut être poursuivie. La source de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  est constituée des couples  $(V, u)$  constitués d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$  et d'un monomorphisme  $u : \mathbb{F}_2^{\oplus n} \hookrightarrow V$ , son but est  $\mathcal{E}$ . Du fait que la grassmannienne  $\mathcal{G}_r(V)$  est le quotient de l'ensemble de ces monomorphismes par l'action libre du groupe  $GL_n$ , la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  apparaît comme une catégorie de

«  $GL_n$ -modules tordus » dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ . Dans la section 7.3, nous établissons, à partir d'une description monadique de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  analogue à celle mentionnée pour  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ , le résultat suivant.

**Proposition 18.** *La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est équivalente à la catégorie des comodules sur  $I_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}$ . La structure de coalgèbre sur ce foncteur est la structure duale de la structure d'algèbre sur  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}$  obtenue en regardant  $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}(V) \simeq \mathbb{F}_2[V^{\oplus n}]$  comme l'algèbre du groupe abélien  $V^{\oplus n}$ .*

Parmi les conséquences de cette proposition, nous donnons une description de l'adjoint à droite au foncteur  $\theta_n$ , transitant par son analogue dans la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , lié au produit cotensoriel par le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$ . Ce produit cotensoriel contient manifestement des informations sur la structure algébrique fine des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

## La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$

Nous aurons à considérer une dernière catégorie de foncteurs en grassmanniennes, définie de la manière suivante.

**Définition 19** (cf. § 6.3.3). Soit  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$  la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$  et dont les morphismes sont donnés par

$$\text{hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f}((V, W), (V', W')) = \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}^f}(V, V') \mid f(W) \subset W'\}.$$

On introduit la catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} = \mathbf{Fct}(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f, \mathcal{E})$ .

Cette catégorie possède une structure assez différente de celle de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ , qu'il conviendra d'explorer en détails. Un foncteur important  $(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r})^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$ , qui n'a pas d'analogue dans les autres catégories de foncteurs en grassmanniennes, est la *dualité*, notée  $D$ , comme celle de  $\mathcal{F}$ . Elle est donnée sur les objets par  $(DX)(V, W) = X(V^*, W^\perp)^*$ . Le résultat qui suit, établi dans le § 8.5.4, est relatif au foncteur  $\tilde{\omega} : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}$  composé du foncteur d'oubli  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  (foncteur de précomposition par l'inclusion  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ ) et du foncteur  $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}$ .

**Proposition 20.** *Le foncteur  $\tilde{\omega}$  commute à la dualité.*

Comme  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$  est l'image par  $\tilde{\omega}$  du foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$ , cette propriété fournit le corollaire suivant.

**Corollaire 21.** *Le foncteur  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$  est auto-dual.*

Comme  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$  est un foncteur en coalgèbres de Boole, cela montre que c'est également un foncteur en algèbres de Boole. Les deux structures sont compatibles : c'est un *foncteur en algèbres de Hopf*.

Nous avons également obtenu, au chapitre 5, d'autres résultats sur la structure du foncteur  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r] \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$ , dont le rôle fondamental est souligné par le corollaire 12. Nous les résumons maintenant.

**Proposition 22.** 1. *Le foncteur  $\overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$  est une extension essentielle du foncteur  $\bar{P}$ .*

2. *L'anneau d'endomorphismes de  $\overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$  est isomorphe à un anneau de séries formelles en une indéterminée  $\mathbb{F}_2[[\tau]]$ .*

## La propriété d'annulation cohomologique fondamentale et la conjecture artiniennne extrêmement forte

Tous les foncteurs entre les catégories  $\mathcal{F}$  ou  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{F}_{surj}}$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  introduits précédemment préservent les objets localement finis, à la notable exception du foncteur d'intégrale en grassmanniennes  $\omega$ . C'est ce qui fait la richesse de son comportement et permet de réaliser le lien entre la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$

et la conjecture artinienne. L'isomorphisme (1) (page 18) montre d'ailleurs qu'un foncteur projectif standard  $P_V$  de  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\omega(P_{(V,V)}^{\mathcal{G}_r})$ , et  $P_{(V,V)}^{\mathcal{G}_r}$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ ; la forme la plus forte de la conjecture artinienne que nous présenterons dira que l'on peut retrouver, en un sens précis, tous les objets de type fini de la catégorie  $\mathcal{F}$  à partir de l'image par le foncteur  $\omega$  des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , c'est-à-dire les  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$ -comodules finis, par le corollaire 12.

Nous allons voir que l'on peut ramener les calculs de groupes d'extensions dans  $\mathcal{F}$  entre l'image par  $\omega$  de deux objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  à un calcul de groupes d'extensions entre deux objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  (plus gros que ceux dont on est parti, en général). Cela fournit un outil décisif pour manipuler ces foncteurs.

**Définition 23.** On définit un endofoncteur  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  par

$$\mathcal{I}(X)(V, W) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}_r(W)} X(V, B).$$

Ce foncteur commute au foncteur différence, et préserve donc les objets localement finis. On dispose de monomorphismes canoniques  $id \hookrightarrow \mathcal{I} \hookrightarrow \iota \circ \omega$ ; le premier d'entre eux s'interprète comme l'unité d'une adjonction entre les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$  (cf. § 6.3.3).

Dans le paragraphe 8.5.2, nous établissons le théorème suivant.

**Théorème 24.** Soient  $F$  et  $X$  deux objets de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ ,  $F$  étant supposé localement fini. Il existe un isomorphisme naturel

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(F), \omega(X)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}^*(F, \mathcal{I}(X)).$$

Nous utilisons le plus souvent ce théorème par l'intermédiaire du corollaire suivant, qui s'en déduit formellement à l'aide des diagrammes de recollement reliant  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et les  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ .

**Corollaire 25.** Soient  $k$  et  $n$  deux entiers naturels,  $F$  un objet localement fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$  et  $X$  un objet quelconque de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ .

1. Si  $k < n$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_k(F), \omega_n(X)) = 0$ .
2. Si  $k = n$ , alors le morphisme gradué naturel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}}^*(F, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_n(F), \omega_n(X))$  induit par  $\omega_n$  est un isomorphisme.

La démonstration du théorème 24 repose, comme tous les résultats analogues antérieurs, sur un argument d'adjonction utilisant le foncteur différence (de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ ) — la proposition 14 est donc fondamentale. Cette démonstration justifie à elle seule l'introduction de la catégorie globale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , car la preuve directe du corollaire 25 s'avère nettement moins aisée qu'en transitant par le théorème 24. On utilise d'ailleurs, dans la démonstration de ce théorème, une catégorie de foncteurs auxiliaire encore plus « grosse » que  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

La première partie du corollaire 25 contient un grand nombre de théorèmes d'annulation cohomologique précédemment connus dans la catégorie  $\mathcal{F}$ . Mentionnons, parmi eux, l'annulation de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \bar{P})$  lorsque  $F$  est un foncteur fini, due à Franjou. Ce résultat, qui constitue un cas très particulier du corollaire 25, joue un rôle important dans la détermination de la structure de  $\bar{P}^{\otimes 2}$  par Powell ([Pow98a]).

Le corollaire 25 suggère la conjecture suivante, que nous introduisons et discutons au § 8.5.3.

**Conjecture 26** (Conjecture artinienne, version extrêmement forte). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $\omega_n$  induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine des objets localement finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  et le quotient  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  de la filtration de Krull de  $\mathcal{F}$ .

Autrement dit, le foncteur  $\omega_n$  transforme un objet simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  en un objet simple noethérien de type  $n$ , on obtient ainsi, modulo les objets noethériens de type  $n - 1$ , tous les objets simples noethériens de type  $n$  de  $\mathcal{F}$ , et le foncteur  $\omega_n$  est pleinement fidèle dans le quotient.

Cette conjecture implique toutes les formes antérieurement émises de la conjecture artinienne, ainsi que d'autres conjectures très difficiles dans la catégorie  $\mathcal{F}$ . Parmi ces dernières, mentionnons les deux suivantes :

- si  $F$  est un objet de type fini de  $\mathcal{F}$ , alors  $\mathbf{Hom}(T^n, F) = 0$  pour  $n$  assez grand, où  $T^n$  désigne la  $n$ -ième puissance tensorielle;
- pour tout foncteur de type fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , il n'y a qu'un nombre fini d'objets simples  $S$  (à isomorphisme près) tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S, F) \neq 0$ .

L'apport du corollaire 25 à la conjecture 26 s'observe clairement en cherchant à aborder cette conjecture par récurrence sur  $n$  : si l'assertion relative à  $\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  est vérifiée, la première partie du corollaire en question montre que l'on a  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega_n(X)) = 0$  pour tout objet  $F$  de  $\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ ; par conséquent, la deuxième partie du corollaire montre que le morphisme canonique  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}}^*(F, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})}^*(\overline{\omega_n(F)}, \overline{\omega_n(X)})$  est un isomorphisme, où l'on désigne par  $\overline{A}$  l'image dans la catégorie quotient  $\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  d'un objet  $A$  de  $\mathcal{F}$ . Par conséquent, elle réduit la conjecture 26 à l'étape  $n$  à l'énoncé suivant.

**Conjecture 27.** *L'image du foncteur  $\overline{\omega}_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  est stable par quotients.*

Avant d'expliquer les méthodes d'approche de ce problème extrêmement ardu, mentionnons une autre conséquence importante du théorème 24, établie dans le paragraphe 8.5.4.

**Théorème 28.** *Soient  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,k}}$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ .*

- Si  $k < n$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega_k(X), o_{inj}\omega_n(Y)) = 0$ .
- Si  $k = n$ , le foncteur exact  $o_{inj}\omega_n$  induit un isomorphisme naturel gradué

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}}^*(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega_n(X), o_{inj}\omega_n(Y)).$$

L'autre ingrédient pour démontrer ce résultat est la proposition 20. Pour  $n = 0$ , la seconde partie du théorème 28 fournit la proposition 6. C'est une autre illustration de la puissance du théorème 24.

Pour compléter les propriétés cohomologiques de la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$ , signalons le résultat suivant, plus élémentaire, que nous établissons par une méthode directe dans le paragraphe 5.6.1.

**Proposition 29.** *Soient  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{F}_{inj}$  et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$ . On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(X, o_{inj}(F)) = 0.$$

Par analogie avec la situation que nous avons décrite dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , le théorème 28 et la proposition 29 suggèrent la conjecture suivante.

**Conjecture 30** (Conjecture artinienne extrêmement forte dans  $\mathcal{F}_{inj}$ ). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $o_{inj}\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$  induit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}^{lf}$  et  $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$ .*

Si la conjecture 26 est vérifiée, cet énoncé équivaut au suivant.

**Conjecture 31.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $o_{inj}$  induit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  et  $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$ .*

## Le théorème de simplicité généralisé et la conjecture artinienne pour $I^{\otimes 2} \otimes F$ , avec $F$ fini

Pour progresser dans l'étude de la conjecture 26, nous aurons besoin des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  de Powell, grâce auxquels il a démontré la conjecture artinienne pour  $I_{\mathbb{F}_2 \oplus 2}$ , via son théorème de simplicité (théorème 7). Au chapitre 9, nous en établissons la généralisation suivante. On y désigne par  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  la plus petite sous-catégorie localisante de  $\mathcal{F}$  contenant les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotents (lesquels forment déjà une sous-catégorie épaisse, d'après [Pow98b]).

**Théorème 32** (Théorème de simplicité généralisé). *Le foncteur*

$$\overline{\omega}_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \xrightarrow{\omega_n} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$$

*induit une équivalence entre la catégorie des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$  et une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ . En particulier, il envoie un foncteur simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$  sur un objet simple de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ .*

La démonstration repose sur trois ingrédients principaux. Tout d’abord, des résultats d’annulation cohomologique : la seconde partie du corollaire 25 intervient, mais sa première partie n’est pas adaptée à la situation. Nous avons besoin de la variante suivante de cette première partie.

**Proposition 33** (cf. §9.3). *Pour tout foncteur  $F$  de  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  et tout foncteur  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega_n(X)) = 0$ .*

Des estimations du foncteur  $\tilde{\nabla}_n \omega_n$  sont également nécessaires. On établit ainsi (§9.4) qu’il existe un épimorphisme naturel  $\tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \rightarrow \omega_n(X)$ , dont le noyau est « plus petit » que  $\omega_n(X)$  lorsque le foncteur  $X$  est fini. On examine à cet effet le scindement du foncteur  $\Delta\omega$  que nous avons mentionné dans le paragraphe de cette introduction relatif aux structures tensorielles.

Le dernier outil que nous employons suit la démarche de Powell pour le théorème 7, tout en présentant des difficultés techniques supplémentaires, dues à ce que le contrôle dont on dispose sur  $\tilde{\nabla}_n \omega_n(X)$  est beaucoup moins rigide en général que sur l’image par  $\tilde{\nabla}_n$  d’un foncteur de Powell (associé à une partition régulière de premier terme  $n$ ). Il s’agit de l’étape la plus concrète de la démonstration : on considère explicitement l’effet du foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  sur des éléments des espaces vectoriels  $\omega_n(X)(V)$ . Fait remarquable, l’itération du foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  sur un sous-foncteur d’un  $\tilde{G}(n)$ -comodule  $\omega_n(X)$  permet de retrouver le plus petit sous- $\tilde{G}(n)$ -comodule de  $\omega_n(X)$  contenant ce sous-foncteur.

Dans le cas où  $n = 1$ , le théorème 32 démontre une partie de la conjecture 26, puisque  $\tilde{\nabla}_1 = \Delta$ . En particulier, il permet de retrouver les résultats de [Pow00b] sur le caractère noethérien de type 1 du produit tensoriel entre  $\tilde{P}$  et un foncteur fini, et les précise en donnant une description de la catégorie de ces foncteurs modulo les foncteurs (localement) finis. En revanche, il semble particulièrement difficile d’établir que *tous* les foncteurs simples noethériens de type 1 de  $\mathcal{F}$  sont isomorphes, modulo les foncteurs finis, à un  $\tilde{P}$ -comodule fidèle.

Nous donnons, au paragraphe 5.6.3, une description partielle analogue des objets noethériens de type 1 de la catégorie  $\mathcal{F}_{in_j}$  (cf. conjecture 30) : nous montrons que le foncteur d’oubli  $o_{in_j} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{in_j}$  induit un foncteur pleinement fidèle de la sous-catégorie des objets finis de  $\mathcal{F}$  sur une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}_{in_j}/\mathcal{F}_{in_j}^{lf}$  (quotient par la sous-catégorie épaisse des foncteurs localement finis). Le principe de la démonstration est le même que celui du théorème 32, mais sa mise en œuvre est très nettement simplifiée par le maniement aisé du foncteur décalage, qui joue le même rôle que le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ . Il semble d’ailleurs probable qu’il existe un analogue du théorème 32 lié à la description conjecturale de toute la filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{F}_{in_j}$ .

Le théorème de simplicité généralisé ramène toute la difficulté de la conjecture artinienne à un problème de compréhension des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotents — la conjecture 26 est équivalente aux égalités  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_{n+1}}$ , grâce à ce théorème. Powell a décrit dans [Pow98a] les foncteurs de type fini annihilés par  $\tilde{\nabla}_2$ , ce qui lui a permis d’établir le caractère noethérien de type 2 de  $P_{\mathbb{F}_2 \oplus 2}$ . En utilisant ce résultat sur  $\tilde{\nabla}_2$ , nous démontrons au chapitre 9 la généralisation suivante du théorème 9.

**Théorème 34.** *Pour tout foncteur fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , le foncteur  $P_{\mathbb{F}_2 \oplus 2} \otimes F$  est noethérien de type 2.*

Il s’agit du meilleur résultat connu sur la conjecture artinienne à ce jour.

## Groupes de Grothendieck

Les difficultés pour étudier les foncteurs de type fini annihilés par  $\tilde{\nabla}_3$  s’avèrent considérables. En effet, dans le cas de  $\tilde{\nabla}_2$ , Powell s’est appuyé sur le fait que les seuls foncteurs simples annihilés par  $\tilde{\nabla}_2$  sont les puissances extérieures, et qu’il existe « peu » d’extensions entre deux puissances extérieures, que l’on sait de plus décrire très explicitement. De tels calculs sont exclus pour les foncteurs simples annihilés par  $\tilde{\nabla}_3$ . L’étude directe des quotients  $\tilde{\nabla}_3$ -nilpotents d’un foncteur de type fini, par exemple  $\tilde{G}(3)$  (pour prendre l’exemple intéressant le plus simple) est théoriquement possible dans la mesure où il en existe, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un plus grand quotient annihilé par  $(\tilde{\nabla}_3)^n$  (cf. [Pow98b]), donné par le conoyau d’une flèche explicite. Malheureusement, l’étude directe de ce



conoyau pose également des problèmes de nature combinatoire très délicats. On peut cependant espérer que l’usage du foncteur  $\omega$ , en rigidifiant nombre de calculs dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , aidera à mieux comprendre les quotients de cette filtration par  $\tilde{\nabla}_3$ -nilpotence.

Quelle que soit l’approche employée, les obstacles qu’il reste à surmonter pour établir la conjecture artinienne extrêmement forte, dont tous les travaux sur la catégorie  $\mathcal{F}$  suggèrent la véracité, relèvent du *contrôle qualitatif global des représentations modulaires des groupes symétriques ou linéaires*. Précisément, la différence homologique majeure entre la catégorie  $\mathcal{F}$  et la catégorie des *foncteurs polynomiaux stricts*, plus directement reliée aux représentations (cf. [FS97]), réside dans l’existence d’extensions non scindées entre foncteurs de différents degrés. De fait, les extensions non scindées entre foncteurs de degrés consécutifs apparaît comme une règle « générique » dans les foncteurs de type fini, selon les travaux de Piriou et Schwartz comparant les filtrations polynomiale et par les socles itérés dans un foncteur de co-type fini, i.e. dual d’un foncteur de type fini (cf. [PS02b] et [PS02a]). Qu’il s’agisse de l’approche de Powell à l’aide des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ , de l’approche de Piriou à l’aide de calculs d’algèbre homologique, ou de notre approche du théorème 9 utilisant  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  ou  $(\cdot : \Lambda^1)$  (cf. [Dja06c]), les avancées sur la conjecture artinienne ont nécessité des renseignements précis sur le comportement de facteurs de composition dans les foncteurs étudiés. Seul notre méthode pour établir le caractère noethérien de type 1 du produit tensoriel entre  $\tilde{P}$  et un foncteur fini à l’aide du théorème 32 semble échapper à cette remarque, mais dès lors que l’on cherche à la généraliser en utilisant ce théorème pour  $n > 1$ , les problèmes de théorie des représentations réapparaissent via les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ . Il en est ainsi de la démonstration du théorème 34.

En termes de groupes de Grothendieck, on peut préciser comme suit certaines des questions que nous venons de soulever. Notons  $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  le groupe abélien  $\mathbb{Z}^{\mathfrak{p}}$ , où  $\mathfrak{p}$  désigne l’ensemble des partitions régulières, qui indexe les objets simples de  $\mathcal{F}$ , et  $G_0^{tf}(\mathcal{F})$  le groupe de Grothendieck des objets de type fini de  $\mathcal{F}$ . Le groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r})$  a été introduit dans la proposition 15, où il a été décrit : il « contient » (en deux copies, l’une venant de  $\mathcal{F}$ , l’autre de  $\mathcal{F}_{surj}$ ) toutes les représentations simples des différents groupes linéaires (ou symétriques). Le foncteur exact  $\omega$  induit un morphisme de groupes abéliens  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F})$ , qui devient un morphisme d’anneaux si l’on munit le groupe source de la multiplication induite par le produit tensoriel *total* (on notera d’ailleurs que le comportement de celui-ci en termes de représentations est nettement plus délicat que le produit tensoriel usuel de  $\mathcal{F}$ , qui relève de la règle de Littlewood-Richardson). Pour considérer des facteurs de composition de foncteurs du type  $\omega(X)$ , on est amené à composer ce morphisme par le morphisme canonique  $G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  obtenu en associant à un foncteur de type fini ses facteurs de composition. La flèche  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  qu’on en déduit constitue un objet d’étude important ; les problèmes globaux de représentations modulaires que nous avons évoqués se ramènent à cette étude. Par exemple, la méthode développée dans [Dja06c] s’appuie fortement sur quelques propriétés très particulières de ce morphisme.

**Théorème 35.** *Le morphisme  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  est injectif.*

Ce théorème, qui fait l’objet de la section 10.1, utilise à la fois un outil global spécifique à la catégorie  $\mathcal{F}$ , les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ , et des propriétés non triviales des représentations des groupes linéaires, utilisant la représentation de Steinberg. Son rôle fondamental devrait d’ailleurs pouvoir encore être exploité pour poursuivre l’étude de ce morphisme.

Le théorème 35 montre en particulier que le morphisme  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F})$  induit par  $\omega$  est injectif. Comme la conjecture artinienne extrêmement forte implique que ce morphisme est surjectif, elle entraîne que c’est un *isomorphisme*, i.e. donne une description « explicite » de l’anneau de Grothendieck  $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ . On voit aussi grâce au théorème 35 que la conjecture 26 implique l’injectivité du morphisme canonique  $G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ , résultat totalement hors d’atteinte même en admettant la conjecture artinienne très forte 8. Ces observations illustrent à la fois la puissance considérable de la conjecture artinienne extrêmement forte et la nature des difficultés qu’il faudra vraisemblablement surmonter pour la démontrer.

Première partie

**Préliminaires**



# Chapitre 1

## Rappels généraux sur les catégories

Ce chapitre donne nos notations et rappelle des résultats bien connus sur les objets généraux que nous utiliserons le plus couramment. Notre référence principale sera [ML71] pour ce qui concerne les catégories quelconques ; pour les catégories abéliennes, nous suivons [Pop73] (à l'exception des catégories abéliennes quotients, pour lesquels nous avons utilisé [Gab62]). Pour l'algèbre homologique, nous renvoyons plutôt à [ML63].

Après avoir fourni une liste de notations et de conventions (§ 1.1), nous rappelons dans la deuxième section des faits formels sur les adjonctions qui interviendront fréquemment dans la suite, les foncteurs adjoints avec de « bonnes propriétés » abondant dans les catégories de foncteurs que nous étudierons. Les deux sections suivantes traitent de catégories abéliennes ; la section 1.5 introduit un langage simple pour formaliser des raisonnements de dualité dans des catégories de foncteurs.

Nous terminons ce chapitre par des rappels sur les catégories abéliennes munies d'une structure supplémentaire (produit tensoriel) qui apparaîtra très souvent par la suite ; nombre des catégories que nous introduirons dans la deuxième partie pourront même se comprendre uniquement en ces termes (catégories de (co)modules) à partir de catégories connues.

### 1.1 Notations et exemples

**Notation 1.1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie.

- Nous désignerons par  $\text{Ob}\mathcal{C}$  la classe des objets de  $\mathcal{C}$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont des objets de  $\mathcal{C}$ , nous noterons  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  l'ensemble des morphismes de source  $A$  et de but  $B$ . L'indice  $\mathcal{C}$  sera omis lorsqu'aucune confusion n'est possible.
- La flèche identique d'un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  vers lui-même sera notée  $id_A$ , ou  $id$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Si  $f$  et  $g$  sont deux morphismes de  $\mathcal{C}$  tels que la source de  $f$  égale le but de  $g$ , nous noterons  $f \circ g$  ou  $fg$  leur composée.

*Remarque 1.1.2.* Dans une catégorie générale, la classe des morphismes entre deux objets n'est pas forcément un ensemble. Nous n'aurons cependant pas à considérer de telles catégories. Nous renvoyons le lecteur à [ML71] pour ce qui concerne les questions axiomatiques et ensemblistes que la considération de catégories peut amener (mais dont aucune ne se posera réellement dans cette thèse).

Nous emploierons également les notations suivantes pour les classes de morphismes usuelles dans une catégorie.

**Notation 1.1.3.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $X, Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ .

- Nous noterons  $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$  le monoïde  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  des endomorphismes de  $X$ . Le groupe des automorphismes de  $X$  sera désigné par  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ .
  - Nous désignerons par  $\text{Pl}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  l'ensemble des monomorphismes de  $X$  dans  $Y$  (que nous appellerons aussi, indifféremment, injections ou plongements).
  - Nous noterons  $\text{Epi}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  l'ensemble des épimorphismes de  $X$  vers  $Y$  (que nous appellerons aussi, indifféremment, surjections).
  - Enfin,  $\text{Iso}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  désignera l'ensemble des isomorphismes de  $X$  vers  $Y$ .
- Là encore, les indices  $\mathcal{C}$  seront omis quand aucune confusion ne peut en résulter.

Ces conventions posées, nous introduisons nos notations pour quelques exemples élémentaires classiques.

**Notation 1.1.4.** – Nous noterons  $\mathcal{C}^{op}$  la catégorie opposée d'une catégorie  $\mathcal{C}$ .

- Nous noterons  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  le produit de deux catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ ; plus généralement, si  $I$  est un ensemble et  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$  une famille de catégories indexée par  $I$ ,  $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$  désignera le produit des catégories  $\mathcal{C}_i$ , c'est-à-dire la catégorie donnée par

$$\text{Ob} \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i = \prod_{i \in I} \text{Ob} \mathcal{C}_i$$

et

$$\text{hom}_{\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i}((X_i), (Y_i)) = \prod_{i \in I} \text{hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i)$$

la composition étant déduite de celle des catégories  $\mathcal{C}_i$ .

**Notation 1.1.5.** 1. Nous noterons **Ens** la catégorie des ensembles; **Ens**<sup>f</sup> sera la sous-catégorie pleine dont les objets sont les ensembles finis.

2. Nous désignerons par **Ab** la catégorie des groupes abéliens.
3. Si  $A$  est un anneau, nous désignerons par **Mod** <sub>$A$</sub>  la catégorie des  $A$ -modules à droite, et par  ${}_A\mathbf{Mod}$  la catégorie des  $A$ -modules à gauche. Le produit tensoriel au-dessus de  $A$  peut être vu comme un foncteur  $\mathbf{Mod}_A \times {}_A\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . Lorsque  $A$  est commutatif, nous ne ferons naturellement aucune différence entre les catégories **Mod** <sub>$A$</sub>  et  ${}_A\mathbf{Mod}$ , canoniquement isomorphes (nous aurons plutôt tendance à noter l'action de  $A$  à gauche, même si nous notons **Mod** <sub>$A$</sub>  la catégorie des  $A$ -modules).
4. Si  $k$  est un corps, la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels à droite sera plutôt notée  $\mathcal{E}_k$ . La sous-catégorie pleine des espaces vectoriels de dimension finie sera notée  $\mathcal{E}_k^f$ . Lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter, notamment pour  $k = \mathbb{F}_2$  dans la plupart de la suite, nous omettrons l'indice  $k$ .

*Remarque 1.1.6.* Si  $(A_i)$  est une famille finie d'anneaux, les catégories  $\mathbf{Mod}_{\prod A_i}$  et  $\prod_i \mathbf{Mod}_{A_i}$  sont naturellement équivalentes.

**Définition 1.1.7.** Le foncteur de  $A$ -linéarisation (à droite), noté  $A[\cdot] : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Mod}_A$  (on a un analogue évident vers  ${}_A\mathbf{Mod}$ ), est donné comme suit.

- Sur les objets :  $A[X]$  est le  $A$ -module libre construit sur  $X$ ; il a donc une base indexée par les éléments de  $X$ . Dans la suite, nous noterons toujours  $[x]$  l'élément de la base canonique de  $A[X]$  correspondant à un élément  $x$  de  $X$ .
- Sur les morphismes : si  $u : X \rightarrow Y$  est une flèche de **Ens**,  $A[u]$  est l'unique application linéaire  $A[X] \rightarrow A[Y]$  telle que  $\forall x \in X \quad A[u]([x]) = [u(x)]$ .

Dans le cas  $A = \mathbb{F}_2$ , nous ferons un usage très fréquent de ce foncteur.

*Remarque 1.1.8.* Les catégories à un seul objet sont uniquement déterminées par le monoïde d'endomorphismes de celui-ci; réciproquement, si  $M$  est un monoïde, nous noterons  $\underline{M}$  la catégorie à un seul objet de monoïde d'endomorphismes  $M$ .

Comme d'habitude, nous appellerons *squelette* d'une catégorie  $\mathcal{C}$  toute sous-catégorie  $\mathcal{D}$  pleine de  $\mathcal{C}$  telle que chaque objet de  $\mathcal{C}$  est isomorphe à un et un seul objet de  $\mathcal{D}$ . Il nous arrivera d'utiliser implicitement le passage d'une catégorie à un squelette (qui est unique à isomorphisme près) dans certains raisonnements, notamment, de travailler sur des catégories *essentiellement petites* (i.e. équivalentes à une petite catégorie, ou dont le squelette est petit) comme sur des catégories petites (i.e. dont les objets forment un ensemble).

**Notation 1.1.9.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $I$  une catégorie petite (ou, plus généralement, essentiellement petite).

- Nous noterons  $\mathbf{Fct}(I, \mathcal{C})$  la catégorie dont les objets sont les foncteurs de  $I$  vers  $\mathcal{C}$  et les morphismes sont les transformations naturelles (l'hypothèse de petitesse de  $I$  permet d'assurer que la classe des transformations naturelles entre deux foncteurs est un ensemble).
- Si un objet  $F$  de  $\mathbf{Fct}(I, \mathcal{C})$  possède une colimite (i.e. une limite inductive, ou directe), nous la noterons  $\text{colim } F$ , ou, par abus,  $\text{colim}_{i \in I} F(i)$ .
- Si un objet  $F$  de  $\mathbf{Fct}(I, \mathcal{C})$  possède une limite (i.e. une limite projective, ou inverse), nous la noterons  $\text{lim } F$ , ou, par abus,  $\text{lim}_{i \in I} F(i)$ .

On notera que ces conventions supposent effectué un choix de la (co)limite, définie à isomorphisme près. De même, on notera  $A \times B$  « le » produit dans  $\mathcal{C}$  de  $A$  et  $B$ , lorsqu'il existe, et  $A \amalg B$ , ou  $A \oplus B$  quand  $\mathcal{C}$  est additive, « le » coproduit dans  $\mathcal{C}$  de deux objets  $A$  et  $B$ , lorsqu'il existe (des notations analogues seront employées pour les (co)produits de plus de deux objets).

Les catégories  $\mathbf{Fct}(I, \mathcal{C})$  seront étudiées au chapitre 3, surtout dans le cas où  $\mathcal{C}$  est la catégorie  $\mathcal{E}$  des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels.

*Exemple 1.1.10.* Si  $M$  est un monoïde et  $\mathcal{C}$  une catégorie, nous noterons  $\mathcal{C}_M$  la catégorie  $\mathbf{Fct}(M, \mathcal{C})$ . C'est la catégorie des *objets de  $\mathcal{C}$  munis d'une action de  $M$* . En effet, les objets de  $\mathcal{C}_M$  sont les objets  $X$  de  $\mathcal{C}$  munis d'un morphisme de monoïdes  $M \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ . Nous noterons  $O_M^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur d'oubli.

**Définition 1.1.11** (Catégorie linéarisée). Soient  $A$  un anneau et  $\mathcal{C}$  une catégorie. Nous noterons  $A[\mathcal{C}]$  la catégorie, appelée *catégorie  $A$ -linéarisée de  $\mathcal{C}$* , dont les objets sont ceux de  $\mathcal{C}$  et les morphismes sont donnés par  $\text{hom}_{A[\mathcal{C}]}(X, Y) = A[\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)]$ , la composition des morphismes étant l'unique application  $A$ -bilinéaire prolongeant la composition de  $\mathcal{C}$ .

*Remarque 1.1.12.* –  $A[\mathcal{C}]$  n'est pas une catégorie additive en général. Il faut la compléter par l'ajout de sommes directes formelles pour la rendre additive. La catégorie additive ainsi obtenue est en général hautement non abélienne.

- On dispose d'un foncteur d'inclusion  $\mathcal{C} \rightarrow A[\mathcal{C}]$ .

Nous rappelons la propriété immédiate suivante, qui justifie la terminologie de *catégorie linéarisée*.

**Proposition et définition 1.1.13.** Soient  $A$  un anneau et  $\mathcal{C}$  une catégorie.

1. Une catégorie  $A$ -linéaire est une catégorie  $\mathcal{A}$  munie d'un foncteur  $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Mod}_A$  faisant commuter (à isomorphisme près) le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{hom}_{\mathcal{A}}} & \mathbf{Ens} \\
 & \searrow & \uparrow \text{oubli} \\
 & & \mathbf{Mod}_A
 \end{array}$$

Ce foncteur sera encore noté  $\text{hom}_{\mathcal{A}}$  par abus.

2. La catégorie  $A[\mathcal{C}]$  possède la propriété universelle suivante :
  - elle est  $A$ -linéaire,

- pour tout foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers une catégorie  $A$ -linéaire  $\mathcal{A}$ , il existe un unique foncteur  $A$ -linéaire (i.e. induisant des applications  $A$ -linéaires entre les  $A$ -modules de morphismes)  $\tilde{F} : A[\mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$  faisant commuter (à isomorphisme près) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\ \text{oubli} \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ A[\mathcal{C}] & & \end{array}$$

*Remarque 1.1.14.* Lorsque l'anneau  $A$  est *solide* (i.e. si  $\mathbf{Mod}_A$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ab}$ ) — en particulier si  $A$  est le corps  $\mathbb{F}_2$  — le foncteur  $\text{hom}_A : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Mod}_A$  est uniquement déterminé par la catégorie  $\mathcal{A}$ . En général, c'est une donnée supplémentaire qui est sous-entendue lorsqu'on parle de catégorie  $A$ -linéaire.

Nous terminons cette section par un exemple de construction catégorique qui nous sera utile par la suite.

**Notation 1.1.15.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $F$  un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathbf{Ens}$ . On définit une catégorie  $\mathcal{C}_{\setminus F}$  de la manière suivante.

- Les objets de  $\mathcal{C}_{\setminus F}$  sont les couples  $(X, x)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $x$  un élément de  $F(X)$ .
- Les morphismes dans  $\mathcal{C}_{\setminus F}$  sont donnés par

$$\text{hom}_{\mathcal{C}_{\setminus F}}((X, x), (Y, y)) = \{u \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \mid F(u)(x) = y\}.$$

- La composition des morphismes dans  $\mathcal{C}_{\setminus F}$  est induite par celle de  $\mathcal{C}$ .
- Le foncteur d'oubli évident  $\mathcal{C}_{\setminus F} \rightarrow \mathcal{C}$  sera noté  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}, F}$ .

*Exemple 1.1.16.* Si  $F$  est un foncteur représentable  $\text{hom}(A, \cdot)$ , la catégorie obtenue, qui sera notée simplement  $\mathcal{C}_{\setminus A}$ , est la catégorie des objets en-dessous de  $A$ .

*Remarque 1.1.17.* 1. Cette construction est un cas particulier d'une construction présentée dans [ML71], ch. II, §6. Précisément, il s'agit, avec les notations de cet ouvrage, de la catégorie  $(\mathcal{C} \downarrow *)$  (où  $*$  désigne un ensemble à un élément).

- Supposons que  $\mathcal{C}$  possède un objet final  $*$  et que  $F(*)$  est un singleton  $\{a\}$ . Alors  $(*, a)$  est objet final de  $\mathcal{C}_{\setminus F}$ .

**Notation 1.1.18.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $F$  un foncteur de  $\mathcal{C}^{op}$  vers  $\mathbf{Ens}$ . Nous noterons  $\mathcal{C}_{/F}$  la catégorie  $((\mathcal{C}^{op})_{\setminus F})^{op}$ . Le foncteur d'oubli  $\mathcal{C}_{/F} \rightarrow \mathcal{C}$  sera noté  $\mathcal{O}^{\mathcal{C}, F}$ .

*Exemple 1.1.19.* Si  $F$  est un foncteur représentable  $\text{hom}(\cdot, A)$ , la catégorie obtenue, qui sera notée simplement  $\mathcal{C}_{/A}$ , est la catégorie des objets au-dessus de  $A$ .

## 1.2 Adjonctions

Dans cette section, nous rappelons sans démonstration des propriétés formelles élémentaires bien connues des adjonctions. Pour les propriétés générales, on pourra se reporter à [ML71] (ch. IV, §1).

**Convention 1.2.1.** Dans toute cette section, nous considérons deux catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  et des foncteurs  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tels que  $F$  est adjoint à droite à  $G$  (nous dirons, indifféremment, que  $G$  est adjoint à gauche à  $F$ ), de sorte que l'on a une bijection

$$u_{X, Y} : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X, F(Y)) \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{B}}(G(X), Y)$$

naturelle en les objets  $X$  de  $\mathcal{A}$  et  $Y$  de  $\mathcal{B}$ .

**Notation 1.2.2.** Nous noterons dans ce paragraphe  $\eta$  la transformation naturelle  $id_{\mathcal{A}} \rightarrow F \circ G$  telle que, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ ,  $u_{X, G(X)}(\eta_X) = id_{G(X)}$  (unité de l'adjonction), et  $\gamma$  la transformation naturelle  $G \circ F \rightarrow id_{\mathcal{B}}$  telle que, pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\gamma_Y = u_{F(Y), Y}$  (coïunité de l'adjonction).

*Remarque 1.2.3.* Si l'on remplace  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  par les catégories opposées, on conserve les adjonctions, en échangeant adjoint à droite et adjoint à gauche, unité et coïunité. Cela permet d'obtenir des énoncés « duaux » sur les adjonctions.

L'exemple suivant est fondamental.

*Exemple 1.2.4.* Si  $A$  est anneau, le foncteur de linéarisation  $A[\cdot] : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Mod}_A$  est adjoint à gauche au foncteur d'oubli  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

**Proposition 1.2.5** (Composition des adjonctions). *Soient  $\mathcal{C}$  une autre catégorie,  $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $G' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  des foncteurs tels que  $F'$  est adjoint à droite à  $G'$ . Alors  $F \circ F'$  est adjoint à droite à  $G' \circ G$ . L'unité et la coïunité correspondantes s'obtiennent en composant respectivement l'unité et la coïunité des deux adjonctions initiales.*

**Corollaire 1.2.6.** *Conservons les hypothèses de la proposition, et supposons de plus  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ . Alors  $F$  et  $F'$  commutent à isomorphisme naturel près si et seulement s'il en est de même pour  $G$  et  $G'$ .*

### 1.2.1 Adjonctions et algèbre homologique

On rappelle que la convention 1.2.1 s'applique ici comme dans toute la section.

**Proposition 1.2.7** (Adjonctions et exactitude). 1. (a) *Le foncteur  $F$  commute aux limites, i.e. si  $\lim_i Y_i$  existe dans  $\mathcal{B}$ ,  $\lim_i F(Y_i)$  existe dans  $\mathcal{A}$  et est isomorphe à  $F(\lim_i Y_i)$ .*

(b) *Le foncteur  $G$  commute aux colimites.*

2. *Supposons les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  abéliennes.*

(a) *Le foncteur  $F$  est exact à gauche, et  $G$  est exact à droite (en particulier,  $F$  et  $G$  sont additifs).*

(b) *Si  $F$  est exact,  $G$  préserve les objets projectifs. La réciproque est vraie si  $\mathcal{A}$  possède suffisamment d'objets projectifs.*

(c) *Si  $G$  est exact,  $F$  transforme un objet injectif en un objet injectif. La réciproque est vraie si  $\mathcal{B}$  possède suffisamment d'objets injectifs.*

**Corollaire 1.2.8** (Adjonctions et algèbre homologique). *Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont abéliennes et possèdent soit toutes deux suffisamment d'objets injectifs, soit toutes deux assez d'objets projectifs. Si  $F$  et  $G$  sont exacts, alors l'isomorphisme naturel  $\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X, F(Y)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(G(X), Y)$  s'étend en un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, F(Y)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^*(G(X), Y).$$

*Réciproquement, l'existence d'un tel isomorphisme gradué implique l'exactitude de  $F$  et  $G$ .*

Les propriétés ici mentionnées relatives au cas de catégories abéliennes sont contenues dans le lemme 1.4. de l'article de Pirashvili « *Introduction to functor homology* » du livre [FFPS03], où sont données des applications aux catégories de foncteurs. Les propriétés d'annulation cohomologique liées aux adjonctions dans des catégories de foncteurs que nous démontrerons suivent le principe inauguré par Pirashvili; elles reposent sur le corollaire 1.2.8 et ses conséquences suivantes.

**Corollaire 1.2.9.** *Les hypothèses sont les mêmes que dans le corollaire 1.2.8; on suppose  $F$  et  $G$  exacts. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $G(X) = 0$  et  $A$  un objet de  $\mathcal{A}$  tel qu'il existe une suite exacte du type*

$$0 \rightarrow A \rightarrow F(Y_1) \rightarrow F(Y_2) \rightarrow \cdots \rightarrow F(Y_n) \rightarrow \cdots$$

*où les  $Y_n$  sont des objets de  $\mathcal{B}$ . Alors  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, A) = 0$ .*



Nous changeons légèrement de notations dans l'énoncé qui suit pour le rendre plus intelligible.

**Corollaire 1.2.10.** *Supposons que :*

1.  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux catégories abéliennes,  $\mathcal{A}$  possédant assez d'injectifs ou de projectifs ;
2.  $F$  et  $G$  sont deux endofoncteurs exacts de  $\mathcal{A}$ , avec  $G$  adjoint à gauche à  $F$  ;
3.  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  est un foncteur exact ;
4.  $K$  est un endofoncteur de  $\mathcal{B}$  tel que  $F \circ H \simeq H \circ K$  ;
5. il existe une transformation naturelle injective  $j : id_{\mathcal{B}} \hookrightarrow K$ .

Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G^n(X) = 0$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{B}$ . On a  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, H(Y)) = 0$ .

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $F$  par  $F^n$ ,  $G$  par  $G^n$  et  $K$  par  $K^n$ , on peut supposer  $n = 1$ .

Pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{B}$ , on a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{f_1} K(Y_1) \xrightarrow{f_2} K(Y_2) \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} K(Y_n) \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

où  $Y_1 = Y$  et  $f_1 = j_Y$ , et pour  $n > 1$ ,  $Y_n = \text{coker } f_{n-1}$  et  $f_n$  est la composée  $K(Y_{n-1}) \twoheadrightarrow Y_n \xrightarrow{j_{Y_n}} K(Y_n)$ . En appliquant le foncteur exact  $H$  à cette suite exacte et en utilisant l'isomorphisme  $F \circ H \simeq H \circ K$ , on en déduit une résolution de  $H(Y)$  par les objets  $F(H(Y_i))$ . Le corollaire précédent donne donc la conclusion.  $\square$

## 1.2.2 Adjonctions et (co)monades

**Définition 1.2.11** (Monades et comonades). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie.

- Une *monade* sur  $\mathcal{C}$  est un triplet  $(T, \eta, \mu)$  formé d'un endofoncteur  $T$  de  $\mathcal{C}$  et de transformations naturelles  $\eta : id_{\mathcal{C}} \rightarrow T$  et  $\mu : T^2 \rightarrow T$  telles que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta_T} & T^2 & \xleftarrow{T(\eta)} & T \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & T & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T(\mu)} & T^2 \\ \mu_T \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

commutent. La transformation naturelle  $\mu$  est appelée *multiplication* de la monade.

- Une *comonade* sur  $\mathcal{C}$  est une monade sur  $\mathcal{C}^{op}$ , i.e. un triplet  $(T, \gamma, \delta)$  formé d'un endofoncteur  $T$  de  $\mathcal{C}$  et de transformations naturelles  $\gamma : T \rightarrow id_{\mathcal{C}}$  et  $\delta : T \rightarrow T^2$  telles que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \swarrow & \downarrow \delta & \searrow \\ T & & T^2 & \xrightarrow{T(\gamma)} & T \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & T^2 \\ \delta \downarrow & & \downarrow T(\delta) \\ T^2 & \xrightarrow{\delta_T} & T^3 \end{array}$$

commutent.

Pour cette définition et la proposition suivante, nous renvoyons à [ML71], ch. VI, § 1.

**Proposition 1.2.12.** *L'adjonction entre  $F$  et  $G$  détermine :*

- une monade  $(FG, \eta, F(\gamma_G))$  sur  $\mathcal{A}$  ;
- une comonade  $(GF, \gamma, G(\eta_F))$  sur  $\mathcal{B}$ .

**Définition 1.2.13** (Module sur une monade, comodule sur une comonade).

- Soit  $(T, \eta, \mu)$  une monade sur une catégorie  $\mathcal{C}$ . Un *module* sur cette monade est la donnée d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et d'un morphisme  $m : T(X) \rightarrow X$  tel que  $m \circ \eta_X = id_X$  et  $m \circ T(m) = m \circ \mu_X : T^2(X) \rightarrow X$ .
- Soit  $(T, \gamma, \delta)$  une comonade sur une catégorie  $\mathcal{C}$ . Un *comodule* sur cette comonade est un module sur la monade de  $\mathcal{C}^{op}$  associée, i.e. un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  muni d'un morphisme  $c : X \rightarrow T(X)$  tel que  $\gamma_X \circ c = id_X$  et  $T(c) \circ c = \delta_X \circ c : X \rightarrow T^2(X)$ .

On définit de façon évidente la notion de morphismes de modules sur une monade, ou de comodules sur une comonade. Nous renvoyons à [ML71], ch. VI, § 2 pour plus de détails ; le lecteur prendra garde au fait que nous nommons *module* (resp. *comodule*) ce que Mac Lane appelle *algèbre* (resp. *coalgèbre*).

**Proposition 1.2.14.** *Il existe un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers la catégorie des comodules sur la comonade  $(GF, \gamma, G(\eta_F))$  ; il s'obtient sur les objets en munissant  $G(X)$  (où  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ) de la structure de comodule donnée par le morphisme  $G(\eta_X) : G(X) \rightarrow GFG(X)$ .*

La proposition précédente est contenue dans le théorème 1 de [ML71], chapitre VI, § 3. Elle possède une variante duale en terme de monade.

**Proposition 1.2.15.** *Faisons les hypothèses suivantes :*

- les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont abéliennes ;
- le foncteur  $G$  est exact et fidèle.

*Alors le foncteur de la proposition précédente de  $\mathcal{A}$  vers la catégorie des comodules sur la comonade déterminée par l'adjonction entre  $F$  et  $G$  est une équivalence de catégories.*

C'est un cas particulier du théorème de Beck démontré dans [ML71] (chapitre VI, § 7, théorème 1). Dualement, on a le résultat suivant :

**Proposition 1.2.16.** *Faisons les hypothèses suivantes :*

- les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont abéliennes ;
- le foncteur  $F$  est exact et fidèle.

*Alors la catégorie  $\mathcal{B}$  est équivalente à la catégorie des modules sur la monade déterminée par l'adjonction entre  $F$  et  $G$ .*

## 1.3 Propriétés de régularité des catégories abéliennes

Nous donnons dans cette section, sans démonstration, une liste de propriétés d'usage courant des catégories abéliennes vérifiant certaines hypothèses usuelles.

**Convention 1.3.1.** Dans cette section,  $\mathcal{A}$  désigne une catégorie abélienne possédant des colimites.

Cette hypothèse simplificatrice n'est pas utile pour nombre de considérations de cette section, mais elle sera presque toujours vérifiée dans les catégories que nous étudierons.

**Définition 1.3.2.** – Une catégorie  $I$  est dite *filtrante à droite* si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. Pour tous objets  $i, j$  de  $I$ , il existe un objet  $k$  de  $I$  tel que  $\text{hom}_I(i, k)$  et  $\text{hom}_I(j, k)$  sont non vides.

2. Pour tous objets  $i, j$  de  $I$  et tous morphismes  $f, g \in \text{hom}_I(i, j)$ , il existe un objet  $k$  de  $I$  et un morphisme  $h \in \text{hom}_I(j, k)$  tels que  $hf = hg$ .

- La colimite d'un foncteur est dite *filtrante* si la catégorie à la source est filtrante à droite.
- Une catégorie est dite *filtrante à gauche* si la catégorie opposée est filtrante à droite.
- La limite d'un foncteur est dite *filtrante* si la catégorie à la source est filtrante à gauche.

**Notation 1.3.3.** Soient  $M$  un objet de  $A$  et  $(N_i)_{i \in I}$  une famille de sous-objets de  $M$ .

- Nous noterons  $\sum_{i \in I} N_i$  la *somme* des  $N_i$ , c'est-à-dire l'image dans  $M$  du morphisme  $\bigoplus_{i \in I} N_i \rightarrow M$  dont les composantes sont les inclusions.
- Lorsque la famille  $(N_i)_{i \in I}$  est filtrante croissante (i.e. que la catégorie associée à cette famille ordonnée par inclusion est filtrante à droite), nous désignerons aussi cette somme comme la *réunion* des  $N_i$  et la noterons  $\bigcup_{i \in I} N_i$ .
- Supposons l'ensemble  $I$  fini. L'*intersection* de la famille est le noyau, noté  $\bigcap_{i \in I} N_i$ , du morphisme  $M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M/N_i$  dont chaque composante est la projection.
- Dans le cas général, l'intersection des  $N_i$  (toujours notée de la même manière) est la limite (filtrante), lorsqu'elle existe, des intersections des sous-familles finies de  $(N_i)_{i \in I}$ , relativement aux inclusions. Celle-ci s'identifie canoniquement à un sous-objet de  $M$  par exactitude à gauche de la limite.

En revanche, le morphisme évident de la colimite (relativement aux inclusions) d'une famille filtrante croissante de sous-objets d'un objet de  $\mathcal{A}$  vers cet objet (dont l'image est par définition la réunion de la famille) n'est pas en général injectif. La proposition suivante indique une condition suffisante (qui est aussi nécessaire) pour qu'il en soit ainsi.

**Hypothèse 1.3.4.** Les colimites filtrantes sont exactes dans  $\mathcal{A}$ , i.e. si  $I$  est une petite catégorie filtrante à droite et  $A, B, C$  sont des objets de  $\mathbf{Fct}(I, \mathcal{C})$  munis de transformations naturelles  $A \xrightarrow{u} B$  et  $B \xrightarrow{v} C$  telles que pour tout  $i \in I$ , la suite  $A(i) \xrightarrow{u(i)} B(i) \xrightarrow{v(i)} C(i)$  de  $\mathcal{A}$  est exacte, alors la suite  $\text{colim } A \rightarrow \text{colim } B \rightarrow \text{colim } C$  induite par  $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$  est exacte.

**Proposition 1.3.5.** Si l'hypothèse précédente est satisfaite, alors pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{A}$  et toute famille filtrante croissante  $(N_i)$  de sous-objets de  $M$  :

- le morphisme canonique  $\text{colim}_i N_i \rightarrow M$  est un monomorphisme, ce qui permet d'identifier cette colimite avec  $\bigcup_{i \in I} N_i$  ;
- si  $A$  est un autre sous-objet de  $M$ , le morphisme canonique

$$\bigcup_i (N_i \cap A) \rightarrow \left( \bigcup_i N_i \right) \cap A$$

est un isomorphisme.

Cette proposition est incluse dans le théorème 8.6 de [Pop73], § 2.8.

*Remarque 1.3.6.* En revanche, l'exactitude à droite des colimites montre que le quotient d'un objet  $X$  par une réunion (filtrante croissante) de sous-objets  $N_i$  s'identifie toujours canoniquement à la colimite (filtrante) des quotients  $X/N_i$  (cf. [Pop73], § 2.8, lemme 8.7).

Une autre hypothèse de régularité utile est la suivante.

**Hypothèse 1.3.7.** Il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de générateurs, i.e. un ensemble  $E$  d'objets de  $\mathcal{A}$  tel que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  et tout sous-objet strict  $Y$  de  $X$ , il existe un morphisme d'un élément de  $E$  vers  $X$  dont l'image n'est pas incluse dans  $Y$ .

*Remarque 1.3.8.* 1. Cette notion n'est pas spécifique aux catégories abéliennes, mais nous ne l'utiliserons que dans ce cadre.

2. Comme la catégorie  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes quelconques par hypothèse, un ensemble  $E$  d'objets de  $\mathcal{A}$  est générateur si et seulement si, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un épimorphisme d'une somme directe d'objets de  $\mathcal{A}$  appartenant à  $E$  vers  $A$ . Dans la suite, c'est plutôt ce critère que nous utiliserons.
3. L'hypothèse 1.3.7 est équivalente à l'existence d'un **un** générateur dans  $\mathcal{A}$  (considérer la somme directe des éléments de l'ensemble), mais nous avons préféré cette définition car dans les exemples que nous rencontrerons, il est beaucoup plus naturel de s'intéresser à certains ensembles de générateurs qu'à leur somme (cela permet en particulier de ne pas considérer d'objets trop « gros »).
4. Un objet projectif  $P$  engendre  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(P, X) \neq 0$  pour tout objet non nul  $X$  de  $\mathcal{A}$  (en effet, si  $Y$  est un sous-objet strict de  $X$ , tout relèvement à  $X$  d'un morphisme non nul de  $P$  vers  $X/Y$  a une image non incluse dans  $Y$ ).
5. Si  $\mathcal{A}$  admet un générateur projectif  $P$ , alors les objets de  $\mathcal{A}$  possèdent une résolution projective fonctorielle. En effet, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ , le morphisme naturel  $P^{\oplus \text{hom}(P, X)} \rightarrow X$  est alors surjectif (si  $E$  est un ensemble et  $A$  un objet de  $\mathcal{A}$ , nous notons  $A^{\oplus E}$  la somme directe de copies de  $A$  indexées par  $E$ ).

**Définition 1.3.9.** On appelle *catégorie de Grothendieck* toute catégorie abélienne avec colimites vérifiant les hypothèses 1.3.4 et 1.3.7.

La catégorie  $\mathbf{Ab}$  et les catégories de modules sont des catégories de Grothendieck. En revanche, dans la catégorie  $\mathbf{Ab}^{op}$ , l'hypothèse 1.3.4 tombe en défaut. Les considérations de la section 1.5 seront, entre autre, destinées à pallier cette difficulté.

**Définition 1.3.10.** La catégorie  $\mathcal{A}$  est dite *localement petite* si pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , la classe des sous-objets de  $A$  forme un ensemble.

Le résultat qui suit est démontré dans [Gab62], chapitre I, §6 (proposition 5).

**Proposition 1.3.11.** *Si la catégorie  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse 1.3.7, elle est localement petite.*

Cette propriété et la proposition 1.3.5 (ainsi que d'autres analogues) permettent essentiellement de manipuler les opérations usuelles sur les sous-objets d'un objet d'une catégorie abélienne vérifiant 1.3.4 et 1.3.7 comme dans  $\mathbf{Ab}$  (signalons toutefois l'existence de la condition Ab 6 de Grothendieck — cf. [Pop73], §2.8 — vérifiée par les groupes abéliens, mais pas par toutes les catégories abéliennes satisfaisant à 1.3.4 et 1.3.7).

Nous nous intéresserons aussi quelquefois à la notion duale de 1.3.7.

**Hypothèse 1.3.12.** Il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de cogénérateurs, i.e. un ensemble  $E$  d'objets de  $\mathcal{A}$  tel que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  et tout sous-objet non nul  $Y$ , il existe un morphisme de  $X$  vers un élément de  $E$  dont le noyau ne contient pas  $Y$ .

**Définition 1.3.13.** – Une *enveloppe injective* (qui est unique à isomorphisme près) d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est un objet injectif  $I$  muni d'un monomorphisme essentiel  $j : X \hookrightarrow I$  (i.e. tel que pour tout morphisme  $u$  de source  $I$  dans  $\mathcal{A}$ , si  $u \circ j$  est injectif, alors  $u$  est injectif).  
– Dualement, une *couverture projective* (qui est unique à isomorphisme près) d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est un objet projectif  $P$  muni d'un épimorphisme essentiel  $q : P \twoheadrightarrow X$  (i.e. tel que pour tout morphisme  $u$  de but  $P$  dans  $\mathcal{A}$ , si  $q \circ u$  est surjectif, alors  $u$  est surjectif).  
– On dit que  $\mathcal{A}$  est une catégorie avec enveloppes injectives, ou possède des enveloppes injectives, si tout objet de  $\mathcal{A}$  admet une enveloppe injective. En particulier,  $\mathcal{A}$  a alors assez d'injectifs, ce qui permet de définir les groupes d'extensions dans  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 1.3.14.** *Si  $\mathcal{A}$  satisfait aux hypothèses 1.3.4 et 1.3.7, alors  $\mathcal{A}$  possède des enveloppes injectives.*

Cette importante propriété est établie dans [Gab62], chapitre II, §6 (théorème 2).

**Corollaire 1.3.15.** *Si  $\mathcal{A}$  vérifie les hypothèses 1.3.4 et 1.3.7, alors  $\mathcal{A}$  possède un cogénérateur injectif. Elle vérifie en particulier l'hypothèse 1.3.12.*

Cet énoncé se déduit du précédent grâce au lemme 7.12 de [Pop73], § 3.7.

Mentionnons à présent une autre propriété importante des catégories de Grothendieck, établie dans [Pop73] (§ 3.7, corollaire 7.10).

**Proposition 1.3.16.** *Si  $\mathcal{A}$  vérifie les hypothèses 1.3.4 et 1.3.7, alors  $\mathcal{A}$  possède des produits (donc des limites) quelconques.*

Cela permet notamment de montrer l'existence de limites dans des catégories quotients (cf. section suivante) où celle-ci n'est souvent nullement triviale, les limites ne s'exprimant en général pas simplement à partir de la catégorie abélienne initiale.

*Remarque 1.3.17.* Le corollaire 1.3.15 et la proposition 1.3.16 montrent que tout objet  $X$  d'une catégorie de Grothendieck possède une résolution injective *fonctorielle* : si  $I$  est un cogénérateur injectif, le morphisme naturel  $X \rightarrow I^{\text{hom}(X,I)}$  est injectif (cf. remarque 1.3.8.5).

**Corollaire 1.3.18.** *On suppose que  $\mathcal{A}$  vérifie les hypothèses 1.3.4 et 1.3.7, et l'on se donne un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  est une catégorie (quelconque).*

1. *Si  $F$  commute aux limites, alors  $F$  admet un adjoint à gauche.*
2. *Si  $F$  commute aux colimites, alors  $F$  admet un adjoint à droite.*

Cette propriété découle du résultat général d'existence d'adjoints exposé dans [ML71], chapitre V, § 8 (corollaire du théorème 2, lui-même déduit du théorème de Freyd) et des résultats précédemment énoncés.

*Remarque 1.3.19.* Si  $\mathcal{B}$  est aussi une catégorie abélienne, la commutation aux limites (resp. aux colimites) équivaut à l'exactitude à gauche (resp. à droite) et à la préservation des produits (resp. sommes directes) quelconques.

### Groupes de Grothendieck

L'un des intérêts des hypothèses assurant qu'une catégorie abélienne n'a pas « trop » d'objets réside dans la possibilité de considérer de nombreux groupes de Grothendieck, notion dont nous rappelons la définition dans un cadre totalement général et sur laquelle nous reviendrons plus en détail ultérieurement dans certains cas particuliers.

**Définition 1.3.20** (Groupe de Grothendieck). Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine et *petite* de  $\mathcal{A}$  contenant  $0$  (mais pas nécessairement abélienne). On appelle *groupe de Grothendieck* de  $\mathcal{C}$  relativement à  $\mathcal{A}$  le groupe abélien noté  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$  défini par générateurs et relations de la manière suivante.

- **Générateurs** : un générateur  $[A]$  pour chaque objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ .
- **Relations** :  $[A] = [B] + [C]$  pour toute suite exacte courte  $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$  de  $\mathcal{A}$  dont tous les objets  $A, B, C$  sont dans  $\mathcal{C}$  (en particulier,  $[0] = 0$ , et  $[E \oplus F] = [E] + [F]$  lorsque  $E, F$  et  $E \oplus F$  sont objets de  $\mathcal{C}$ ).

On constate que l'on a  $[A] = [B]$  dans  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$  si  $A$  et  $B$  sont deux objets isomorphes de  $\mathcal{C}$ , ce qui permet de définir ce groupe lorsque  $\mathcal{C}$  est seulement *essentiellement petite*.

*Remarque 1.3.21.* – Cette construction possède des propriétés de fonctorialité qu'on laisse au lecteur le soin d'explicitier.

- Lorsque  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie abélienne de  $\mathcal{A}$  et que l'inclusion est un foncteur exact,  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$  s'identifie naturellement à  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{C})$ .
- Si l'on a dans  $\mathcal{A}$  une suite exacte

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

dont tous les objets sont dans  $\mathcal{C}$ , on a dans  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$  l'égalité  $\sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i] = 0$ .

## 1.4 Catégories abéliennes quotients

### 1.4.1 Quotient d'une catégorie abélienne par une sous-catégorie épaisse

**Convention 1.4.1.** Dans tout ce paragraphe,  $\mathcal{A}$  désigne une catégorie abélienne localement petite.

Nous rappelons la définition des sous-catégories de  $\mathcal{A}$  qui permettent d'en réaliser de bons quotients abéliens.

**Définition 1.4.2.** Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{A}$ . Nous dirons que  $\mathcal{C}$  est :

- une *sous-catégorie de Serre* de  $\mathcal{A}$  si c'est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  stable par sommes directes finies (ce qui implique en particulier que  $0$  est objet de  $\mathcal{C}$ ), par sous-objets et par quotients.
- une sous-catégorie *épaisse* de  $\mathcal{A}$  si c'est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par extensions, cette condition signifiant que si dans une suite exacte

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$$

$B$  et  $C$  sont objets de  $\mathcal{C}$ , il en est de même pour  $A$ .

*Remarque 1.4.3.* 1. Une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  est abélienne, et le foncteur d'oubli est exact.

2. Une sous-catégorie pleine non vide  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$  est épaisse si et seulement si pour toute suite exacte  $B \rightarrow A \rightarrow C$  avec  $B$  et  $C$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $A$  est objet de  $\mathcal{C}$ .
3. Par abus, nous dirons parfois qu'une sous-catégorie de  $\mathcal{A}$  est épaisse (resp. de Serre) si elle est équivalente à une sous-catégorie de  $\mathcal{A}$  ayant cette propriété.
4. La notion de sous-catégorie épaisse (resp. de Serre) est auto-duale : on obtient la même notion en remplaçant  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{A}^{op}$ .
5. Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{A}$ . La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  dont les objets sont les sous-quotients des sommes directes finies d'objets de  $\mathcal{C}$  est la plus petite sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{C}$ .
6. On dispose d'une notion de plus petite sous-catégorie épaisse  $\mathcal{C}'$  contenant une sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ . Par ce qui précède, on peut supposer que  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie de Serre. Les objets de  $\mathcal{C}'$  sont alors les objets  $X$  de  $\mathcal{A}$  possédant une filtration finie

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = X$$

dont les quotients  $F_i/F_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) appartiennent à  $\mathcal{C}$ .

7. On notera en particulier que la plus petite sous-catégorie épaisse engendrée par une sous-catégorie de Serre essentiellement petite est essentiellement petite lorsqu'on peut faire de l'algèbre homologique dans  $\mathcal{A}$  (de sorte que les extensions entre deux objets donnés forment à isomorphisme près un ensemble).

On constate aussitôt que le noyau d'un foncteur *exact*  $F$  de  $\mathcal{A}$  vers une catégorie abélienne  $\mathcal{B}$  (i.e. la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  dont les objets sont les  $X$  tels que  $F(X) = 0$ ) est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ . La solution du problème réciproque est exposée dans [Gab62], ouvrage auquel nous renvoyons pour la démonstration des assertions qui suivent.

**Proposition et définition 1.4.4** (Catégorie abélienne quotient). *Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ . On définit une catégorie **abélienne**, appelée catégorie quotient de  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{C}$  et notée  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ , de la manière suivante.*

- **Objets** :  $\text{Ob } \mathcal{A}/\mathcal{C} = \text{Ob } \mathcal{A}$ .
- **Morphismes** :  $\text{hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(X, Y) = \text{colim } \text{hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y')$ , la colimite (filtrante) étant prise sur les sous-objets  $X'$  de  $X$  tels que  $X/X' \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et sur les sous-objets  $Y' \in \text{Ob } \mathcal{C}$  de  $Y$ .
- La composition est induite par celle de  $\mathcal{A}$ .

Le foncteur d'oubli évident  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  (qui sera souvent noté  $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ ) est exact et a pour noyau  $\mathcal{C}$  ; de plus, si  $F$  est un foncteur exact de  $\mathcal{A}$  vers une catégorie abélienne  $\mathcal{B}$ , qui est nul sur  $\mathcal{C}$ , il existe un et un seul foncteur (qui est exact)  $\mathcal{A}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  faisant commuter (à isomorphisme près) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{A}/\mathcal{C} & & \end{array}$$

Ce résultat est établi dans la section 1 du chapitre III de [Gab62].

*Remarque 1.4.5.* Cette notion, qui est la seule dont nous nous servirons, est un cas particulier de la localisation d'une catégorie relativement à un ensemble de morphismes (on inverse ici les morphismes dont noyau et conoyau appartiennent à  $\mathcal{C}$ ), qui joue un rôle fondamental en topologie. Un exposé catégorique général peut être trouvé dans [Bor94].

*Exemple 1.4.6.* – La sous-catégorie pleine  $\mathbf{Ab}_{\text{tor}}$  de  $\mathbf{Ab}$  des groupes de torsion est épaisse ; le foncteur  $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$  induit une équivalence de catégories  $\mathbf{Ab}/\mathbf{Ab}_{\text{tor}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ .

– Un cas fondamental de catégorie abélienne quotient en topologie algébrique est celui fourni par la localisation, dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, loin des modules nilpotents. Le lecteur pourra se référer à [HLS93] et [LZ86] à ce sujet.

**Convention 1.4.7.** Dans la suite de ce paragraphe,  $\mathcal{C}$  désigne une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ . Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$ , on notera  $\bar{A}$  l'image de  $A$  par le foncteur  $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ .

*Remarque 1.4.8.* Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Tout sous-objet de  $\bar{X}$  est du type  $\bar{A}$ , où  $A$  est un sous-objet de  $X$ . En effet, un monomorphisme (dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ ) d'un objet  $\bar{Y}$  vers  $\bar{X}$  est un morphisme  $u$  (dans  $\mathcal{A}$ ) d'un sous-objet  $Z$  de  $Y$  vers un quotient  $X/C$  de  $X$  avec  $Y/Z$ ,  $C$  et  $\ker u$  objets de  $\mathcal{C}$ . Quitte à remplacer  $Y$  par  $Z/\ker u$  (qui ont des images dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  isomorphes), on peut supposer que  $u$  est injectif et que  $Z = Y$ . Le produit fibré de  $u : Y \hookrightarrow X/C$  et de la projection  $X \twoheadrightarrow X/C$  fournit ensuite un monomorphisme  $i : A \hookrightarrow X$  ; dans le carré commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{u} & X/C \end{array}$$

les flèches verticales induisent des isomorphismes dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ , de sorte que notre sous-objet  $\bar{Y}$  de  $\bar{X}$  est égal à  $\overline{im\ i}$ .

*Remarque 1.4.9.* La remarque précédente entraîne que  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  est, comme  $\mathcal{A}$ , localement petite. Elle montre aussi que si  $\mathcal{A}'$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$ , son image directe par le foncteur  $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ .

*Remarque 1.4.10.* – Si  $\mathcal{C}'$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{C}$ , alors l'image  $\mathcal{C}'/\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}'$  par le foncteur  $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  (i.e. la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  dont la classe d'objets est l'image de celle de  $\mathcal{C}'$  — ou mieux, celle des objets isomorphes à un objet de cette image) est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ , et le quotient  $(\mathcal{A}/\mathcal{C})/(\mathcal{C}'/\mathcal{C})$  s'identifie naturellement à  $\mathcal{A}/\mathcal{C}'$ .

– Réciproquement, si  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ , alors l'image réciproque  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{D}$  par le foncteur  $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  (i.e. la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets dont l'image dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{D}$ ) est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{C}'/\mathcal{C}$  s'identifie naturellement à  $\mathcal{D}$ .

**Proposition et définition 1.4.11.** Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , l'application canonique  $\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(\bar{A}, \bar{X})$  est un isomorphisme ;
2. pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$  (ce qui équivaut,  $\mathcal{C}$  étant épaisse, à dire que  $X$  n'a pas de sous-objet non nul dans  $\mathcal{C}$ ) et  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(C, X) = 0$  (condition à comprendre comme signifiant que toute suite exacte  $0 \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$  est scindée s'il y a des difficultés à définir ce groupe d'extensions).

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que  $X$  est un objet  $\mathcal{C}$ -fermé de  $\mathcal{A}$ .

Cette proposition est démontrée à la section 2 du chapitre III de [Gab62].

**Proposition et définition 1.4.12.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  admet des colimites et que  $\mathcal{C}$  est stable par colimites filtrantes.*

1. Si  $\mathcal{A}$  possède des colimites, il en est de même pour  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ .
2. L'image dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  d'une classe de générateurs de  $\mathcal{A}$  est une classe de générateurs de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ .
3. Si  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse 1.3.7, il en est de même pour  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ .
4. Si  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse 1.3.4, il en est de même pour  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ .
5. Supposons que  $\mathcal{A}$  satisfait aux hypothèses 1.3.4 et 1.3.7.
  - (a) Le foncteur  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  commute aux colimites. Il préserve les enveloppes injectives (qui existent dans  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  par la proposition 1.3.14) pour les objets de  $\mathcal{A}$  sans sous-objet non nul dans  $\mathcal{C}$  ; de plus, les injectifs de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  sont exactement les images des injectifs de  $\mathcal{A}$  ne contenant pas de sous-objet non nul dans  $\mathcal{C}$ .
  - (b) Le foncteur  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  admet un adjoint à droite, appelé foncteur section ; sur les objets, il associe à un objet  $\bar{X}$  un objet  $\mathcal{C}$ -fermé  $X'$  tel que  $\bar{X}$  et  $\bar{X}'$  sont isomorphes.

Ces assertions sont établies dans les sections 2, 3 et 4 du chapitre III de [Gab62].

*Remarque 1.4.13.* On a des faits analogues à ceux de la remarque 1.4.10 en remplaçant à chaque fois le terme « sous-catégorie épaisse » par « sous-catégorie épaisse stable par colimites ».

**Proposition et définition 1.4.14.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  possède des colimites et satisfait aux hypothèses 1.3.4 et 1.3.7, et que  $\mathcal{C}$  est stable par colimites filtrantes. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$  et  $n$  un entier naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Pour tout entier  $k \leq n$  et tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , le morphisme naturel  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^k(A, X) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}^k(\bar{A}, \bar{X})$  est un isomorphisme.
2. Pour tout entier  $i \leq n + 1$  et tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(C, X) = 0$ .

Lorsqu'elles sont vérifiées, nous dirons que  $X$  est  $\mathcal{C}$ -bon d'ordre  $n$ . Si  $X$  est  $\mathcal{C}$ -bon d'ordre  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous dirons que  $X$  est  $\mathcal{C}$ -parfait.

*Démonstration.* Supposons l'une des conditions de l'énoncé vérifiée. On a  $\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$  pour  $C \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$  (appliquer la première condition avec  $k = 0$  et  $A$  dans  $\mathcal{C}$ , ou la seconde avec  $i = 0$ ). Si  $I$  est une enveloppe injective de  $X$  et  $Q$  désigne le conoyau de  $X \hookrightarrow I$ , il existe des isomorphismes  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, X) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{i-1}(A, Q)$  pour  $i > 1$ , mais aussi  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}^i(\bar{A}, \bar{X}) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}^{i-1}(\bar{A}, \bar{Q})$  grâce à la proposition 1.4.12. La conclusion découle ensuite, par récurrence sur  $n$ , de la proposition 1.4.11.  $\square$

## 1.4.2 Diagrammes de recollement

Comme dans les autres situations algébriques où l'on considère des quotients, l'un des objectifs de ces constructions consiste à « dévisser » une catégorie abélienne en ramenant son étude à celle d'une sous-catégorie épaisse et du quotient correspondant. Dans cette optique, la notion de recollement joue un rôle important. Nous renvoyons, pour plus de détails à ce sujet, à l'article [Kuh94b] de Kuhn, qui le premier a appliqué les recollements de catégories abéliennes aux catégories de foncteurs. Dans [FP04], Franjou et Pirashvili étudient certaines situations de recollement présentant des liens avec celles considérées par Kuhn.



**Définition 1.4.15** (Recollements). Un *diagramme de recollement* est un diagramme du type

$$\begin{array}{ccccc} & & q & & l \\ & & \leftarrow & & \leftarrow \\ \mathcal{C} & \xrightleftharpoons{i} & \mathcal{A} & \xrightleftharpoons{e} & \mathcal{B} \\ & & p & & r \end{array}$$

dans lequel :

- $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des catégories abéliennes.
- Le foncteur  $l$  est adjoint à gauche à  $e$  et  $e$  est adjoint à gauche à  $r$  (en particulier,  $e$  est exact).
- L'unité  $id_{\mathcal{B}} \rightarrow el$  et la coïunité  $er \rightarrow id_{\mathcal{B}}$  sont des isomorphismes.
- Le foncteur  $q$  est adjoint à gauche à  $i$  et  $i$  est adjoint à gauche à  $p$  (en particulier,  $i$  est exact).
- L'unité  $id_{\mathcal{C}} \rightarrow pi$  et la coïunité  $qi \rightarrow id_{\mathcal{C}}$  sont des isomorphismes.
- Le foncteur  $i$  est un plongement pleinement fidèle d'image  $\ker e$  (en particulier,  $i$  identifie  $\mathcal{C}$  à une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ ).

On vérifie aisément que dans cette situation, le foncteur  $e$  induit une équivalence  $\mathcal{A}/\mathcal{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}$ .

## 1.5 Dualité

Cette section introduit des notions *ad hoc* destinées à faciliter les raisonnements de dualité dont nous aurons besoin.

**Définition 1.5.1.** – Nous appellerons *classe d'objets bien échelonnés* d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  toute sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$  épaisse, essentiellement petite et dont les objets engendrent  $\mathcal{A}$ .

- Nous nommerons *catégorie abélienne bien échelonnée* toute catégorie abélienne possédant des colimites, vérifiant l'hypothèse 1.3.4 et munie d'une classe d'objets bien échelonnés.
- Une *catégorie abélienne très bien échelonnée* sera une catégorie abélienne bien échelonnée vérifiant les conditions suivantes.
  1. La sous-catégorie  $\mathcal{C}$  des objets bien échelonnés est cogénératrice de  $\mathcal{A}$ .
  2. Les limites filtrantes sont exactes dans  $\mathcal{C}$  lorsqu'elles existent.

*Remarque 1.5.2.* 1. Si la catégorie  $\mathcal{A}$  possède une classe d'objets bien échelonnés, alors elle vérifie l'hypothèse 1.3.7 : tout squelette de la sous-catégorie des objets bien échelonnés forme un ensemble de générateurs de  $\mathcal{A}$ .

2. Dans une catégorie bien échelonnée, tout objet est colimite filtrante de ses sous-objets bien échelonnés.
3. Supposons que  $\mathcal{C}$  est une classe d'objets bien échelonnés dans  $\mathcal{A}$ . Une limite d'objets de  $\mathcal{C}$  existe dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si la même limite calculée dans  $\mathcal{A}$  appartient à  $\mathcal{C}$  ; les limites sont alors les mêmes (il est clair que si la limite calculée dans  $\mathcal{A}$  appartient à  $\mathcal{C}$  c'est aussi une limite dans  $\mathcal{C}$  ; une limite dans  $\mathcal{C}$  est aussi une limite dans  $\mathcal{A}$  parce que  $\mathcal{C}$  engendre  $\mathcal{A}$ ). On notera en particulier que les intersections existent toujours dans  $\mathcal{C}$ .
4. Si  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne bien échelonnée  $\mathcal{A}$ , la proposition 1.4.12 et les remarques 1.4.9 et 1.4.3.7 montrent que la catégorie quotient  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  est également bien échelonnée, la sous-catégorie épaisse engendrée par l'image dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  de la sous-catégorie des objets bien échelonnés de  $\mathcal{A}$  fournissant une classe d'objets bien échelonnés de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ .

**Proposition 1.5.3.** Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie très bien échelonnée et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $\mathcal{A}$  dont le produit est bien échelonné. Alors le morphisme canonique

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Sous la seule hypothèse 1.3.4, ce morphisme est un monomorphisme, puisque c'est la colimite filtrante des inclusions

$$\bigoplus_{i \in J} A_i = \prod_{i \in J} A_i \hookrightarrow \prod_{i \in I} A_i,$$

$J$  parcourant l'ensemble des parties finies de  $I$ .

Cela montre déjà qu'avec l'hypothèse de l'énoncé, tous les  $A_i$  et leur somme directe sont bien échelonnés.

On constate maintenant que l'on peut également voir notre morphisme comme la limite filtrante des projections

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in J} A_i = \prod_{i \in J} A_i,$$

$J$  parcourant l'ensemble des parties finies de  $I$ , de sorte qu'il suffit d'appliquer l'hypothèse d'exactitude des limites filtrantes bien échelonnées pour conclure.  $\square$

*Remarque 1.5.4.* Pour cette propriété, la condition 1 requise dans la définition 1.5.1 n'est pas nécessaire.

Dans la définition suivante, si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un foncteur, nous notons  $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$  le foncteur lui correspondant canoniquement. Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}^{op}$ , nous notons  $F(A)$  pour  $F^{op}(A)$  pour alléger.

**Définition 1.5.5.** On appelle *bonne dualité* entre deux catégories abéliennes bien échelonnées  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  et  $(\mathcal{A}', \mathcal{C}')$  la donnée de deux foncteurs (dits de dualité)  $D : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{A}'$  et  $D' : \mathcal{A}'^{op} \rightarrow \mathcal{A}$  tels que :

1. le foncteur  $D$  est adjoint à droite à  $D'^{op}$  (on notera qu'il revient au même d'exiger que  $D'$  est adjoint à droite à  $D^{op}$ );
2. les foncteurs de dualité sont exacts;
3. les foncteurs de dualité préservent les objets bien échelonnés;
4. si  $X$  (resp.  $X'$ ) est un objet bien échelonné de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}'$ ), alors l'unité de l'adjonction entre  $D$  et  $D'^{op}$  (resp. entre  $D'$  et  $D^{op}$ )  $X \rightarrow D'DX$  (resp.  $X' \rightarrow DD'X'$ ) est un isomorphisme;

Lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$  et  $D = D'$ , on parle de *bonne auto-dualité*.

Ainsi, le foncteur  $D$  (resp.  $D'$ ) induit une équivalence de catégories  $\bar{D}$  (resp.  $\bar{D}'$ ) entre les classes d'objets bien échelonnés des deux catégories; de plus,  $\bar{D}$  et  $\bar{D}'$  sont réciproques l'une de l'autre.

On notera également que les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  jouent le même rôle; dans la suite, nous nous contenterons donc d'énoncer les résultats pour l'une des deux.

*Exemple 1.5.6.* Soit  $k$  un corps commutatif. La catégorie  $\mathcal{E}_k$ , munie de la classe d'objets bien échelonnés  $\mathcal{E}_k^f$ , a une bonne auto-dualité fournie par le foncteur usuel  $(\cdot)^* = \text{hom}(\cdot, k)$ .

**Proposition 1.5.7.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont des catégories abéliennes en bonne dualité (on conserve les notations de la définition précédente).*

1. Les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont très bien échelonnées.
2. Les foncteurs de dualité sont fidèles.
3. L'unité de l'adjonction  $X \rightarrow D'DX$  est un monomorphisme pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ .
4. Si  $P$  est un objet projectif de  $\mathcal{A}$ , alors  $DP$  est un objet injectif de  $\mathcal{A}'$ .
5. Le foncteur  $D$  commute aux limites (i.e. transforme colimites dans  $\mathcal{A}$  en limites dans  $\mathcal{A}'$ ).

*Démonstration.* Les assertions 4 et 5 sont contenues dans la proposition 1.2.7.

La fidélité des foncteurs de dualité découle des trois observations suivantes.

1. Leur restriction aux objets bien échelonnés est fidèle.
2. Ils sont exacts.

3. Tout objet non nul contient un sous-objet bien échelonné non nul.

On en déduit alors formellement l'injectivité de l'unité  $X \rightarrow D'DX$ .

Montrons que  $\mathcal{C}$  est cogénératrice de  $\mathcal{A}$ . Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$  et  $Y$  un sous-objet non nul de  $X$ . Comme  $D$  est un foncteur exact et fidèle, l'inclusion  $Y \hookrightarrow X$  induit un épimorphisme  $DX \twoheadrightarrow DY$  dont le noyau  $Z$  est un sous-objet strict de  $DX$ . Il existe donc un morphisme  $u$  d'un objet bien échelonné  $C'$  de  $\mathcal{A}'$  vers  $DX$  dont l'image n'est pas incluse dans  $Z$ . Autrement dit, la composée  $C' \xrightarrow{u} DX \twoheadrightarrow DY$  est non nulle. Soit  $C = D'C'$  et  $a : X \rightarrow C$  le morphisme adjoint à  $u$  : l'objet  $C$  est bien échelonné, et la composée  $Y \hookrightarrow X \xrightarrow{a} C$  est non nulle, comme souhaité.

L'exactitude des limites filtrantes bien échelonnées d'objets bien échelonnés s'obtient en appliquant le foncteur de dualité, en utilisant l'hypothèse d'exactitude des colimites filtrantes puis en appliquant (l'autre) foncteur de dualité (tenir compte de la remarque 1.5.2.3).

Cela termine la démonstration.  $\square$

Nous avons établi en détail cette proposition très simple; dans le reste de cette thèse, les arguments de dualité analogues seront la plupart du temps utilisés sans démonstration.

C'est cette proposition qui a motivé l'introduction de la notion de catégorie très bien échelonnée, que nous ne rencontrerons que dans des situations de bonne dualité.

Signalons également qu'il existe des notions de dualité (cf. [Pop73], chapitre 6) qui décrivent en termes de catégories usuelles les catégories opposées de catégories abéliennes suffisamment régulières; ces considérations, plus satisfaisantes conceptuellement que celles de cette section, sont cependant inadaptées aux situations de catégories de foncteurs que nous rencontrerons.

Nous terminons cette section en introduisant la notion d'objet auto-dual.

**Définition 1.5.8** (Objets auto-duaux). Soient  $(\mathcal{A}, D)$  une catégorie munie d'une bonne auto-dualité et  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Nous noterons  $t_X : \text{hom}(X, DX) \rightarrow \text{hom}(X, DX)$  l'isomorphisme (involutif) donné par l'adjonction entre les foncteurs  $D$  et  $D^{op}$ .

- On appelle structure *auto-duale* sur  $X$  tout isomorphisme  $u : X \rightarrow DX$  tel que  $t_X(u) = u$ . On dit que  $X$  est *auto-dual* s'il existe sur  $X$  une structure auto-duale (laquelle sera en général sous-entendue si cela ne porte pas à confusion).
- Si  $X$  est muni d'une structure auto-duale, on définit l'*orthogonal* d'un sous-objet  $A$  de  $X$  comme le sous-objet, noté  $A^\perp$ , donné par

$$A^\perp = \text{im}(D(X/A) \xrightarrow{D\pi} DX \xrightarrow{u^{-1}} X),$$

où  $\pi : X \twoheadrightarrow X/A$  désigne la projection. On notera que l'on a  $A^{\perp\perp} = A$ .

*Exemple 1.5.9.* Se donner une structure auto-duale sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$  revient à se donner une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $V$ . L'orthogonalité correspond alors à la notion usuelle.

## 1.6 Catégories abéliennes tensorielles

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de structure tensorielle dans le seul cas qui nous sera utile, celui de catégories *abéliennes* pour lesquelles la structure est *symétrique*.

**Définition 1.6.1** (Catégories tensorielles). Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Une structure *tensorielle* (ou *monoïdale symétrique*) sur  $\mathcal{A}$  est la donnée :

- d'un foncteur biadditif  $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  appelé en général produit tensoriel;
  - d'isomorphismes naturels  $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$ ,
  - d'isomorphismes naturels  $\beta_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$
  - d'un objet  $\mathbf{F}$ , appelé *unité*, et d'un isomorphisme naturel  $\gamma_A : A \otimes \mathbf{F} \xrightarrow{\cong} A$
- astreints à vérifier des conditions de cohérence pour lesquelles nous renvoyons à [ML71], ch. VII.

*Exemple 1.6.2.* Si  $A$  est un anneau *commutatif*, la catégorie  $\mathbf{Mod}_A$  munie du produit tensoriel usuel est tensorielle.

- Remarque 1.6.3.*
1. La catégorie opposée d'une catégorie (abélienne) tensorielle est encore tensorielle.
  2. Nous appellerons *équivalence tensorielle* une équivalence de catégories entre deux catégories tensorielles qui commute naturellement au produit tensoriel.
  3. Par la suite, les isomorphismes structuraux seront omis (i.e. assimilés à des égalités); [ML71] montre précisément en quoi cet abus est licite : quitte à modifier à équivalence tensorielle près la catégorie, on peut « faire comme si les isomorphismes structuraux étaient des égalités ».
  4. Considérons deux catégories abéliennes munies d'une bonne dualité, avec les mêmes notations que dans la définition 1.5.5. Nous dirons que la dualité est *tensorielle* si le produit tensoriel de deux objets bien échelonnés est bien échelonné et si l'on s'est donné des morphismes naturels  $DA \otimes DB \rightarrow D(A \otimes B)$  et  $D'X \otimes D'Y \rightarrow D'(X \otimes Y)$  vérifiant les conditions de cohérence appropriées et qui sont des isomorphismes lorsque l'un des objets considérés ( $A$  par exemple dans le premier cas,  $X$  par exemple dans le second) est bien échelonné. Ainsi, la bonne auto-dualité naturelle sur  $\mathcal{E}_k$  est tensorielle.
  5. Dans une catégorie tensorielle munie d'une bonne auto-dualité tensorielle, le produit tensoriel de deux objets auto-duaux est naturellement un objet auto-dual.

**Convention 1.6.4.** Dans la suite de ce paragraphe,  $\mathcal{A}$  désigne une catégorie abélienne tensorielle.

**Définition 1.6.5** (Foncteurs de division, foncteurs hom internes). Soit  $A$  un objet de  $\mathcal{A}$ . On appelle *foncteur hom interne* de source  $A$ , et l'on note  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \cdot)$ , tout endofoncteur de  $\mathcal{A}$  (unique à isomorphisme près s'il existe) adjoint à droite au foncteur  $\cdot \otimes A$ .

Si  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \cdot)$  existe toujours, on dit que la catégorie tensorielle  $\mathcal{A}$  est *fermée*.

Dualement, on appelle *foncteur de division* par  $A$ , et l'on note  $(\cdot : A)_{\mathcal{A}}$ , tout endofoncteur de  $\mathcal{A}$  (unique à isomorphisme près s'il existe) adjoint à gauche au foncteur  $\cdot \otimes A$ .

Lorsqu'ils sont définis pour tout objet de  $\mathcal{A}$ , ces foncteurs seront considérés comme des bifoncteurs  $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , de manière à avoir des isomorphismes

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A, \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A \otimes B, C)$$

et

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}((A : B)_{\mathcal{A}}, C) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(A, B \otimes C)$$

naturels en les objets  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{A}$ .

*Remarque 1.6.6.* – On emploiera ces notations bifonctorielles même lorsque la division n'est définie que sur une sous-classe d'objets de  $\mathcal{A}$ . En pratique, il faudra souvent se restreindre à des objets bien échelonnés.

- Comme d'habitude, les indices  $\mathcal{A}$  seront omis si aucune ambiguïté ne peut en résulter.
- Une première obstruction à l'existence des foncteurs hom internes ou de division peut venir de l'inexactitude du produit tensoriel. Nous dirons qu'une structure tensorielle est *exacte* (resp. *exacte à gauche*, *exacte à droite*) si le foncteur  $\cdot \otimes A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  possède cette propriété d'exactitude pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ .
- La catégorie tensorielle  $\mathbf{Ab}$  est fermée : le foncteur  $\mathrm{hom} : \mathbf{Ab}^{op} \times \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$  est aussi un foncteur hom interne.

La propriété qui suit est une conséquence immédiate de la proposition 1.2.5; nous l'utiliserons souvent tacitement.

**Proposition 1.6.7.** *On a des isomorphismes*

$$\mathbf{Hom}(A, \mathbf{Hom}(B, C)) \simeq \mathbf{Hom}(A \otimes B, C) \simeq \mathbf{Hom}(B, \mathbf{Hom}(A, C))$$

et

$$((A : B) : C) \simeq (A : B \otimes C) \simeq ((A : C) : B)$$

naturels en les objets  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{A}$ , lorsque chacun des termes est défini.

**Définition 1.6.8** (Anneau de Grothendieck). Supposons que la structure tensorielle de  $\mathcal{A}$  est exacte et que  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie essentiellement petite, pleine, stable par produit tensoriel et contenant 0 et l'unité  $\mathbf{F}$ . On munit le groupe de Grothendieck  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$  d'une structure d'anneau commutatif, appelé *anneau de Grothendieck* de  $\mathcal{C}$  relativement à  $\mathcal{A}$  (et que l'on notera toujours de la même manière), en posant  $[A].[B] = [A \otimes B]$  (cette définition est licite par exactitude du produit tensoriel; l'unité de l'anneau est  $[\mathbf{F}]$ ).

### Algèbres, coalgèbres, modules et comodules

**Définition 1.6.9** (Algèbres et coalgèbres). Une *algèbre sans unité* dans  $\mathcal{A}$  est un objet  $A$  muni d'un morphisme  $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$  et appelé *multiplication* que l'on suppose *associatif* — c'est-à-dire que les morphismes  $\mu_A \circ (id_A \otimes \mu_A)$  et  $\mu_A \circ (\mu_A \otimes id_A)$  de  $A \otimes A \otimes A$  vers  $A$  coïncident. On dit que  $A$  est *commutative* si  $\mu_A = \mu_A \circ \tau$ , où  $\tau$  est l'endomorphisme de  $A \otimes A$  échangeant les deux facteurs du produit tensoriel.

Une *algèbre* dans  $\mathcal{A}$  est une algèbre sans unité  $(A, \mu_A)$  munie d'un morphisme  $\eta_A : \mathbf{F} \rightarrow A$  appelé *unité* tel que  $\mu_A \circ (id_A \otimes \eta_A) = \mu_A \circ (\eta_A \otimes id_A) = id_A$ .

Une *coalgèbre sans coïunité* dans  $\mathcal{A}$  est un objet  $C$  muni d'un morphisme  $\delta_C : C \rightarrow C \otimes C$  et appelé *comultiplication*, ou *diagonale*, que l'on suppose *coassociatif* — c'est-à-dire que les morphismes  $(id_C \otimes \delta_C) \circ \delta_C$  et  $(\delta_C \otimes id_C) \circ \delta_C$  de  $C$  vers  $C \otimes C \otimes C$  coïncident. On dit que  $C$  est *cocommutative* si  $\delta_C = \tau \circ \delta_C$ , où  $\tau$  a la même signification que ci-dessus.

Une *coalgèbre* dans  $\mathcal{A}$  est une coalgèbre sans coïunité  $(C, \delta_C)$  munie d'un morphisme  $\epsilon_C : C \rightarrow \mathbf{F}$  appelé *coïunité* tel que  $(id_C \otimes \epsilon_C) \circ \delta_C = (\epsilon_C \otimes id_C) \circ \delta_C = id_C$ .

*Remarque 1.6.10.* – L'ouvrage [ML71], qui se place dans un cadre général, emploie le terme de monoïde au lieu d'algèbre, appellation plus naturelle dans le contexte abélien qui est le nôtre.

- Les notions d'algèbres et coalgèbres sont duales en ce sens qu'un objet  $C$  muni de deux morphismes  $C \rightarrow C \otimes C$  et  $C \rightarrow \mathbf{F}$  de  $\mathcal{A}$  est une coalgèbre si et seulement s'il est une algèbre dans la catégorie tensorielle  $\mathcal{A}^{op}$ .
- Lorsque  $\mathcal{A}$  est une catégorie de modules sur un anneau commutatif, on retrouve la notion habituelle de (co)algèbre.
- On a une notion évidente de morphismes d'algèbres sans unité et de morphismes d'algèbres (supposés conserver l'unité). Les algèbres sans unité forment une catégorie  $\mathcal{A}\text{-alg}'$ , les algèbres une catégorie  $\mathcal{A}\text{-alg}$ .
- Le foncteur d'oubli  $\mathcal{A}\text{-alg} \rightarrow \mathcal{A}\text{-alg}'$  admet un adjoint à gauche  $-^+ : \mathcal{A}\text{-alg}' \rightarrow \mathcal{A}\text{-alg}$ . Il est donné sur les objets par  $A^+ = \mathbf{F} \oplus A$ , l'unité étant l'inclusion évidente et la multiplication la flèche  $(\mathbf{F} \oplus A) \otimes (\mathbf{F} \oplus A) \simeq \mathbf{F} \oplus A^{\oplus 2} \oplus (A \otimes A) \rightarrow \mathbf{F} \oplus A$  donnée par l'inclusion évidente sur le facteur  $\mathbf{F}$  et chaque facteur  $A$ , et par  $\mu_A$  (composée avec l'inclusion) sur le facteur  $A \otimes A$ .
- Dualement, on dispose de catégories de coalgèbres  $\mathcal{A}\text{-coalg}$  et de coalgèbres sans unité  $\mathcal{A}\text{-coalg}'$ , et d'un adjoint à droite  $-^+ : \mathcal{A}\text{-coalg}' \rightarrow \mathcal{A}\text{-coalg}$  au foncteur d'oubli donné sur les objets par  $A^+ = \mathbf{F} \oplus A$  avec un structure de coalgèbre qu'on laisse au lecteur le soin d'explicitier.

**Définition 1.6.11** (Modules et comodules). Soit  $A$  une algèbre sans unité dans  $\mathcal{A}$ . Un *pseudo- $A$ -module à droite* est un objet  $M$  de  $\mathcal{A}$  muni d'une flèche  $\phi_M : M \otimes A \rightarrow M$ , appelée *multiplication*, tel que les morphismes  $\phi_M \circ (\phi_M \otimes id_A)$  et  $\phi_M \circ (id_M \otimes \mu_A)$  de  $M \otimes A \otimes A$  vers  $M$  coïncident.

Si  $A$  est une algèbre dans  $\mathcal{A}$ , un  *$A$ -module à droite* est un pseudo- $A$ -module à droite  $M$  tel que  $\phi_M \circ (id_M \otimes \eta_A) = id_M$ .

On définit dualement les notions de *pseudo-comodule à droite* sur une coalgèbre sans coïunité  $C$  (ce sont les objets  $M$  munis d'un morphisme  $\psi_M : M \rightarrow M \otimes C$  tel que  $(\psi_M \otimes id_C) \circ \psi_M = (id_M \otimes \delta_C) \circ \psi_M$ ), et de *comodule à droite* sur une coalgèbre.

- Remarque 1.6.12.*
1. On a une notion claire de morphismes de (pseudo-)modules à droite. Nous noterons  $\mathbf{Mod}'_A$  la catégorie des pseudo-modules à droite sur une algèbre sans unité  $A$ , et  $\mathbf{Mod}_A$  la catégorie des pseudo-modules à droite sur une algèbre  $A$ , généralisant le symbole introduit pour les catégories de modules usuelles (sur un anneau). Noter que  $\mathbf{Mod}_A$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Mod}'_A$ .
  2. Dualement, on dispose de la catégorie  $\mathbf{Comod}'_C$  des pseudo-comodules à droite sur une coalgèbre sans coïunité  $C$ , et dans le cas où  $C$  est une coalgèbre, de la sous-catégorie pleine  $\mathbf{Comod}_C$  des comodules.
  3. On dispose d'une équivalence de catégories  $\mathbf{Comod}'_C \simeq \mathbf{Comod}_{C^+}$  naturelle en la coalgèbre sans coïunité  $C$ . On a un énoncé dual évident.
  4. On a des notions analogues de (pseudo-)modules et de (pseudo-)comodules à gauche; nous noterons  ${}_A\mathbf{Mod}$ ,  ${}_C\mathbf{Comod}$  etc. les catégories analogues ainsi obtenues. Lorsque la (co)algèbre de base est (co)commutative, il n'y a pas lieu de distinguer les (co)modules à droite et à gauche.
  5. Lorsque la structure tensorielle considérée est *exacte*, les différentes catégories de modules et de comodules introduites sont abéliennes, et le foncteur d'oubli vers  $\mathcal{A}$  est exact.

**Convention 1.6.13.** Lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter, nous parlerons simplement de modules pour désigner les pseudo-modules, et omettrons l'exposant ' dans la notation de la catégorie correspondante; de même pour les comodules.

**Définition 1.6.14** (Produit (co)tensoriel de (co)modules au-dessus d'une (co)algèbre). Soient  $A$  une algèbre sans unité dans  $\mathcal{A}$ ,  $M$  un  $A$ -module à droite et  $N$  un  $A$ -module à gauche. Le *produit tensoriel de  $M$  et  $N$  au-dessus de  $A$*  (ou sur  $A$ ), noté  $M \otimes_A N$ , est le coégalisateur des deux flèches  $\phi_M \otimes N$  et  $M \otimes \phi_N$  de  $M \otimes A \otimes N$  vers  $M \otimes N$ .

Dualement, le produit cotensoriel de deux comodules  $M$  et  $N$  ( $M$  à droite,  $N$  à gauche) sur une coalgèbre sans coïunité  $C$  est l'égalisateur  $M \square_C N$  des flèches  $\psi_M \otimes N$  et  $M \otimes \psi_N$  de  $M \otimes N$  vers  $M \otimes C \otimes N$ .

*Remarque 1.6.15.* – Ces notions sont bifonctorielles en un sens clair.

- Supposons la structure tensorielle exacte. Sur une algèbre *commutative*  $A$ , le produit tensoriel sur  $A$  de deux  $A$ -modules est naturellement un  $A$ -module. Cela fournit une structure tensorielle (exacte à droite) sur la catégorie abélienne  $\mathbf{Mod}_A$ . Dualement, la catégorie des comodules sur une coalgèbre *cocommutative*  $C$  munie de  $\square_C$  est tensorielle (exacte à gauche).

Nous terminons cette section par un exemple d'équivalence de catégories où interviennent ces notions. Une généralisation de cette propriété en termes de catégories de foncteurs (cf. chapitre 6, section 6.1) constituera un point crucial de cette thèse.

*Remarque 1.6.16.* Soient  $k$  un corps commutatif et  $X$  un ensemble. Le  $k$ -espace vectoriel  $k[X]$  possède une structure naturelle de  $k$ -coalgèbre cocommutative. Sa diagonale  $\delta : k[X] \rightarrow k[X] \otimes k[X]$  est donnée par  $\delta([x]) = [x] \otimes [x]$  et sa coïunité  $\epsilon : k[X] \rightarrow k$  par  $\epsilon([x]) = 1$  pour tout  $x \in X$ .

**Proposition 1.6.17.** *La sous-catégorie  $\mathbf{Comod}_{k[X]}$  de  $\mathcal{E}_k$  est naturellement équivalente à la catégorie  $\mathcal{E}_k^{X-gr}$  des  $k$ -espaces vectoriels  $X$ -gradués. Précisément, on définit des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre de la manière suivante :*

- l'équivalence  $\mathcal{E}_k^{X-gr} \rightarrow \mathbf{Comod}_{k[X]}$  s'obtient en munissant un espace vectoriel gradué  $M = \bigoplus_{x \in X} M_x$  de la comultiplication donnée par  $m = (m_x)_{x \in X} \mapsto \sum_{x \in X} m_x \otimes [x]$  (les morphismes gradués d'espaces vectoriels coïncident alors avec les morphismes de  $k[X]$ -comodules);
- l'équivalence  $\mathbf{Comod}_{k[X]} \rightarrow \mathcal{E}_k^{X-gr}$  s'obtient en graduant un  $k[X]$ -comodule  $(M, \psi_M)$  par  $M_x = \ker(\psi_M - id_M \otimes [x])$  (les morphismes de  $k[X]$ -comodules coïncident alors avec les morphismes d'espaces vectoriels gradués).

Cette propriété se vérifie par inspection.



## Chapitre 2

# Notions de finitude dans les catégories abéliennes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de finitude habituellement rencontrées dans les catégories abéliennes : objets noethériens, de type fini, de longueur finie, de présentation finie, artiniens etc. et rappelons les liens entre les différentes classes d'objets étudiées. Les démonstrations se fondent sur les propriétés élémentaires de la théorie des ensembles (lemme de Zorn) et de l'algèbre homologique. Les résultats présentés sont bien connus ; la plupart se trouvent dans [Pop73]. Nous nous sommes également référés à [Gab62], [Ben91], [Bou80], [Bou58] ou [CR90]. Nous avons rédigé ces rappels en détail car il n'existe pas, à notre connaissance, d'ouvrage les présentant de manière systématique.

**Convention 2.0.1.** Dans tout ce chapitre,  $\mathcal{A}$  désigne une catégorie de Grothendieck, i.e. une catégorie abélienne possédant des colimites et vérifiant les hypothèses 1.3.4 et 1.3.7 (cf. section 1.3).

En particulier,  $\mathcal{A}$  est localement petite (proposition 1.3.11) et possède des limites (proposition 1.3.16) ; de plus, il y a assez d'injectifs dans  $\mathcal{A}$  (cf. proposition 1.3.14) et on peut y faire de l'algèbre homologique.

Nous verrons que même ces hypothèses de régularité n'évitent pas des phénomènes désagréables (objets finis qui ne sont pas de présentation finie etc.) ; la notion de *catégorie localement noethérienne* apparaît propre à en éviter la plupart.

Le but des considérations de ce chapitre n'est pas seulement d'assurer une bonne « régularité » de la catégorie  $\mathcal{A}$ , mais aussi d'exposer des outils susceptibles de faciliter la compréhension de sa structure. Ainsi, la filtration de Krull introduit une stratification des objets de taille « raisonnable » de  $\mathcal{A}$  ; elle constitue le meilleur cadre conceptuel pour énoncer nombre de résultats et conjectures sur les catégories de foncteurs que nous présenterons par la suite.

Nous n'avons pas toujours cherché à optimiser les propriétés de régularité nécessaires aux résultats énoncés (notamment, la restriction aux catégories de Grothendieck n'est pas toujours indispensable) : nous avons donné un cadre qui s'applique aux catégories de foncteurs et aux « bonnes » catégories quotients de celles-ci.

Nous avons également insisté sur les relations entre les propriétés de finitude d'un objet de  $\mathcal{A}$  et celles de son image par un foncteur assez régulier.

Ce chapitre se découpe ainsi. La première section rappelle les différentes définitions des objets de type fini et en donne les propriétés de base, ainsi que celles des objets noethériens. Le rôle des projectifs de type fini est souligné. La deuxième section introduit les objets de ( $n$ -)présentation finie et leurs propriétés homologiques élémentaires. Ensuite, nous introduisons la notion de catégorie localement noethérienne, avec ses caractérisations en terme de finitude et homologique.



Dans la section 2.4, nous introduisons les notions formellement duales de celles des sections précédentes, moins répandues dans la littérature, mais tout aussi utiles dans le cadre des catégories de foncteurs, où les raisonnements de dualité abondent. La cinquième section rappelle des propriétés élémentaires de localisation ; signalons à ce propos que des procédés beaucoup plus complexes de localisation interviennent de façon essentielle en topologie (cf. [HPS97]). Nous introduisons ensuite les objets simples et de longueur finie, dits simplement *finis* par la suite (section 2.6), puis semi-simples (section 2.7), avec les foncteurs de (co)localisation associés — socle et cosocle. La dernière section aborde quelques aspects des questions finitudes dans des catégories quotients, notamment la *filtration de Krull* et la description des objets simples dans une situation de recollement.

## 2.1 Objets de type fini, noethériens

### 2.1.1 Généralités

**Définition 2.1.1.** Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est dit :

- de *type fini* (en abrégé *tf*) si toute suite croissante de sous-objets de  $X$  de réunion  $X$  stationne ;
- *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets de  $X$  est stationnaire.

**Notation 2.1.2.** Nous désignerons par  $\mathcal{A}^{tf}$  et  $\mathcal{A}^{noet}$  les sous-catégories pleines de  $\mathcal{A}$  formées respectivement des objets de type fini et noethériens.

*Remarque 2.1.3.* 1. Soit  $A$  un anneau commutatif (unitaire). Le  $A$ -module  $A$  est toujours un objet tf de  $\mathbf{Mod}_A$  ; c'est un objet noethérien si et seulement si  $A$  est un anneau noethérien.

2. Un espace vectoriel sur un corps  $k$  est un objet noethérien ou de type fini de  $\mathcal{E}_k$  si et seulement s'il est de dimension finie.
3. Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.
  - (a) L'objet  $X$  est noethérien.
  - (b) Toute famille filtrante croissante de sous-objets de  $X$  stationne.
  - (c) Toute famille non vide de sous-objets de  $X$  possède un élément maximal pour l'inclusion.
4. De même, toute famille filtrante croissante de sous-objets d'un objet tf  $X$  de réunion  $X$  stationne (i.e. contient  $X$ ).

La démonstration est la même que dans le cas des anneaux noethériens.

**Proposition 2.1.4.** 1. La catégorie  $\mathcal{A}^{noet}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ .

2. Soit  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{A}$ .

(a) Si  $X$  est tf, alors  $B$  est tf.

(b) Si  $A$  et  $B$  sont tf, il en est de même pour  $X$ . En particulier, une somme directe finie d'objets tf est tf.

3. Un objet de  $\mathcal{A}$  est noethérien si et seulement si tous ses sous-objets sont tf. En particulier, un objet noethérien est tf.

*Démonstration.* Le dernier point est évident ; le premier est analogue au second, et plus facile, ou se déduit des deux autres. Nous nous bornerons donc à établir le second.

Pour la première assertion de celui-ci, il suffit de constater que l'image inverse par  $p$  d'une suite croissante de sous-objets de  $B$  de réunion  $B$  est une suite croissante de sous-objets de  $X$  de réunion  $X$ .

Établissons la seconde : on suppose  $A$  et  $B$  tf, et l'on considère une suite croissante  $(Y_n)$  de sous-objets de  $X$  de réunion  $X$ . Alors  $(Y_n \cap A)$  est une suite croissante de sous-objets de  $A$  de réunion  $A$  (d'après la proposition 1.3.5), donc elle stationne. Autrement dit, pour  $n$  assez grand,  $Y_n$  contient  $A$ . Maintenant, la suite  $(Y_n/A)$  de sous-objets de  $B$  stationne également, ce qui entraîne la même propriété pour  $(Y_n)$  et achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.1.5.** *Soient  $\mathcal{B}$  une catégorie de Grothendieck et  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur exact et fidèle.*

1. *Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est noethérien dans  $\mathcal{B}$ , alors  $X$  est noethérien dans  $\mathcal{A}$ .*
2. *Si  $F$  commute aux colimites filtrantes et si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est tf, alors  $X$  est tf.*
3. *Supposons que  $F$  est plein et que son image est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{B}$ . Si  $X$  est un objet noethérien (resp. tf) de  $\mathcal{A}$ , alors  $F(X)$  est un objet noethérien (resp. tf) de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Supposons  $F(X)$  noethérien et considérons une suite croissante  $(A_n)$  de sous-objets de  $X$ . La suite d'objets  $(F(A_n))$  de  $\mathcal{B}$  s'identifie canoniquement, par exactitude de  $F$ , à une suite croissante de sous-objets de  $F(X)$ , cette suite stationne donc. La fidélité de  $F$  montre ensuite que la suite  $(A_n)$  stationne elle-même (en effet,  $F(A_{n+1}/A_n) \simeq F(A_{n+1})/F(A_n)$  est nul par exactitude de  $F$ ), ce qui prouve la première assertion.

La seconde est entièrement analogue.

Démontrons à présent la dernière assertion. On considère cette fois une suite croissante  $(B_n)$  de sous-objets de  $F(X)$ , où  $X$  est supposé noethérien. Comme  $F$  s'identifie à l'inclusion dans  $\mathcal{A}$  d'une sous-catégorie de Serre, il existe une suite croissante  $(A_n)$  de sous-objets de  $X$  telle que  $B_n \simeq F(A_n)$ . Puisque  $X$  est noethérien, la suite  $(A_n)$  stationne, donc aussi  $(B_n)$ . Le cas de la type-finitude s'établit de la même façon (en effet, l'hypothèse sur  $F$  implique que ce foncteur commute aux réunions), d'où la proposition.  $\square$

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de catégories de Grothendieck. Un objet  $(A_i)_{i \in I}$  de  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est noethérien (resp. tf) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  est un objet noethérien (resp. tf) de  $\mathcal{A}_i$  ;*
- *les  $A_i$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.*

*Remarque 2.1.7.* Il convient de constater que  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est une catégorie de Grothendieck ; de plus, les foncteurs évidents  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$  sont exacts et commutent aux colimites.

*Démonstration.* La nécessité de la seconde condition provient de ce que l'objet  $(A_i)_{i \in I}$  est réunion filtrante croissante des sous-objets  $A'_J$ , où  $(A'_J)_i = A_i$  si  $i \in J$ , 0 sinon,  $J$  parcourant les parties finies de  $I$ . La nécessité de la première condition est évidente compte-tenu de la remarque précédente. La suffisance est tout aussi immédiate.  $\square$

**Proposition 2.1.8.** *Soient  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $\mathcal{A}$  et  $X$  un quotient tf de  $\bigoplus_{i \in I} A_i$ . Il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $X$  est isomorphe à un quotient de  $\bigoplus_{i \in J} A_i$ .*

*Démonstration.* Pour toute partie  $J$  de  $I$ , notons  $Y_J$  l'image dans  $X$  de  $\bigoplus_{i \in J} A_i$ . Alors  $X$  est la réunion filtrante croissante des  $Y_J$ ,  $J$  décrivant l'ensemble des parties finies de  $I$ . On conclut en utilisant la remarque 2.1.3.  $\square$

On déduit aussitôt de cette proposition l'utile corollaire suivant (le premier point s'appuie sur l'hypothèse 1.3.7 et le caractère localement petit de  $\mathcal{A}$ ).

**Corollaire 2.1.9.** *- La catégorie  $\mathcal{A}^{tf}$  (et donc  $\mathcal{A}^{noet}$ ) est essentiellement petite.  
- Supposons que  $\mathcal{A}$  possède une classe d'objets bien échelonnés. Tout objet tf de  $\mathcal{A}$  est bien échelonné.*

Cela permet de définir le groupe de Grothendieck introduit dans la notation suivante.

**Notation 2.1.10.** Le groupe de Grothendieck  $G_0(\mathcal{A}^{tf}; \mathcal{A})$  sera noté  $G_0^{tf}(\mathcal{A})$ .

Nous terminons cette section en introduisant une hypothèse de finitude « globale » de la catégorie  $\mathcal{A}$  dont la satisfaction conditionnera certains énoncés ultérieurs.

**Définition 2.1.11.** Nous dirons que la catégorie  $\mathcal{A}$  est *localement de type fini* (ou *localement tf*) s'il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de générateurs tf.

### 2.1.2 Rôle des projectifs de type fini

Nous énonçons ici quelques propriétés très simples qui permettent, pour de nombreuses questions, de ramener des problèmes de type-finitude à la seule considération des objets *projectifs tf*. Elles n'ont pas d'équivalent en termes d'objets noethériens et rendent de ce fait la manipulation des objets tf souvent plus simple que celle des objets noethériens.

**Hypothèse 2.1.12.** Il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de générateurs projectifs tf.

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $X$  un objet tf de  $\mathcal{A}$ .*

1. *Si  $X$  admet une couverture projective  $\pi : P \rightarrow X$ , alors  $P$  est tf.*
2. *Si l'hypothèse 2.1.12 est satisfaite, alors il existe un épimorphisme d'un objet projectif tf sur  $X$ .*

*Démonstration.* Pour la première assertion, considérons une suite croissante  $(A_n)$  de sous-objets de  $P$  de réunion  $P$ . La suite  $(\pi(A_n))$  est une suite croissante de sous-objets de  $X$  de réunion  $X$ , donc pour  $n$  assez grand,  $\pi(A_n) = X$ . Cela implique  $A_n = P$  par définition de la couverture projective, de sorte que  $P$  est tf.

La seconde assertion est une conséquence directe de la proposition 2.1.8. □

*Exemple 2.1.14.* Si  $A$  est un anneau,  $A$  est un générateur projectif tf de  $\mathbf{Mod}_A$ . La proposition 2.1.13 montre donc que la notion de  $A$ -module de type fini obtenue par la définition générale coïncide avec la notion usuelle.

La proposition entraîne aussitôt le résultat suivant, qui constitue le principal outil dont on dispose pour traiter de la type-finitude des produits tensoriels.

**Corollaire 2.1.15.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est munie d'une structure tensorielle exacte à droite et qu'il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de générateurs projectifs tf stable par produit tensoriel. Alors le produit tensoriel de deux objets tf est tf.*

*Exemple 2.1.16.* Soit  $A$  un anneau commutatif. Le produit tensoriel (sur  $A$ ) de deux  $A$ -modules tf est tf. De façon analogue, le produit tensoriel d'un  $A$ -module noethérien et d'un  $A$ -module tf est noethérien.

Mentionnons que le principe, ici employé pour le produit tensoriel, selon lequel, sous l'hypothèse 2.1.12, un foncteur exact à droite (ou plus généralement un foncteur additif préservant les quotients) qui envoie les générateurs projectifs tf sur des objets tf, envoie tout objet tf sur un objet tf s'avère utile en maints contextes.

**Notation 2.1.17.** Nous noterons  $K_0(\mathcal{A})$  le groupe de Grothendieck  $G_0(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  où  $\mathcal{C}$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets projectifs tf (laquelle est essentiellement petite d'après le corollaire 2.1.9).

- Remarque 2.1.18.*
1. Comme toute suite exacte dont les objets sont projectifs est scindée, deux générateurs canoniques  $[P]$  et  $[P']$  de  $K_0(\mathcal{A})$  sont égaux si et seulement si  $P$  et  $P'$  sont *stablement isomorphes*, i.e. s'il existe un objet projectif tf  $Q$  tel que  $P \oplus Q$  et  $P' \oplus Q$  soient isomorphes.
  2. L'inclusion de la catégorie des projectifs tf de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}^{tf}$  induit un morphisme de groupes abéliens  $K_0(\mathcal{A}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{A})$ .

3. Supposons que  $\mathcal{A}$  est munie d'une structure tensorielle *exacte* et qu'il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de générateurs projectifs tf contenant l'unité  $\mathbf{F}$  (si cette condition n'est pas satisfaite, on peut aussi ajouter formellement une unité). Alors les groupes  $G_0^{tf}(\mathcal{A})$  et  $K_0(\mathcal{A})$  héritent d'une structure d'anneau commutatif conformément à la définition 1.6.8; le morphisme de la remarque précédente est un morphisme d'anneaux. Cette situation se produit par exemple dans la catégorie tensorielle  $(\mathbf{Mod}_A, \otimes_k)$ , où  $A$  est une algèbre sur un corps commutatif  $k$  qui est de dimension finie comme  $k$ -espace vectoriel.

### 2.1.3 Type-finitude et commutation aux colimites

Nous introduisons à présent une autre caractérisation aussi utile qu'élémentaire des objets tf (qui repose fortement sur l'hypothèse de régularité 1.3.4). Comme au paragraphe précédent, il n'y a pas d'équivalent pour les objets noethériens.

**Notation 2.1.19.** Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $I$  une petite catégorie et  $F$  un foncteur de  $I$  dans  $\mathcal{A}$ . Nous noterons  $\mathrm{Hom}(X, F)$  le foncteur composé  $I \xrightarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{hom}(X, \cdot)} \mathbf{Ab}$  et  $\Phi_F^X$  le morphisme canonique de groupes abéliens  $\mathrm{colim} \mathrm{Hom}(X, F) \rightarrow \mathrm{hom}(X, \mathrm{colim} F)$  (obtenu à partir des morphismes  $F(i) \rightarrow \mathrm{colim} F$  en appliquant  $\mathrm{hom}(X, \cdot)$  et en passant à la colimite).

**Proposition 2.1.20.** *Étant donné  $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{A}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'objet  $X$  est de type fini ;*
2. *pour tout foncteur  $F$  d'une petite catégorie filtrante à droite dans  $\mathcal{A}$ ,  $\Phi_F^X$  est injectif ;*
3. *pour tout foncteur  $F$  d'une petite catégorie filtrante à droite  $I$  dans  $\mathcal{A}$  tel que pour toute flèche  $i \xrightarrow{\alpha} j$  de  $I$ ,  $F(i) \xrightarrow{F(\alpha)} F(j)$  est un monomorphisme,  $\Phi_F^X$  est un isomorphisme ;*
4. *pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'objets de  $\mathcal{A}$ , le morphisme canonique*

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{hom}(X, A_i) \rightarrow \mathrm{hom}\left(X, \bigoplus_{i \in I} A_i\right)$$

*est bijectif.*

*Remarque 2.1.21.* On notera que les réunions (filtrantes croissantes) de sous-objets entrent dans le cadre du troisième point, et qu'elles sont, à isomorphisme près, les seules.

*Démonstration.* 1 implique 2. Soit  $F : I \rightarrow \mathcal{A}$  un foncteur, où  $I$  est une petite catégorie filtrante à droite, et  $a \in \ker \Phi_F^X$ . Représentons  $a$  par un morphisme  $f$  de  $X$  dans  $F(i)$  pour un certain  $i \in I$ , et notons  $A_t = \ker(F(t) \circ f)$  pour toute flèche  $i \xrightarrow{t} j$  de  $I$  de source  $i$ . Les  $A_t$  forment une famille filtrante croissante de sous-objets de  $X$  (car  $I$  est filtrante à droite), et l'hypothèse  $\Phi_F^X(a) = 0$  assure que sa réunion est  $X$ . Cette famille est donc stationnaire : on a une flèche  $i \xrightarrow{t} j$  de  $I$  telle que  $F(t) \circ f = 0$ , ce qui établit la nullité de  $a$  et donc l'injectivité de  $\Phi_F^X$ .

2 implique 3. Soit  $F$  comme dans 3; il s'agit de montrer que  $\Phi_F^X$  est surjectif. Pour cela, soit  $G$  le foncteur (qui ensuite sera noté simplement *coker* ( $F \hookrightarrow \mathrm{colim} F$ )) de  $I$  dans  $\mathcal{A}$  donné par  $G(i) = \mathrm{coker}(F(i) \hookrightarrow \mathrm{colim} F)$  (le morphisme canonique est injectif grâce à 1.3.4 et à l'injectivité des  $F(i) \rightarrow F(j)$ ), l'action de  $G$  sur les morphismes étant induite par celle de  $F$ . La colimite (filtrante) de  $G$  est nulle (par exactitude à droite de la colimite), donc 2 établit que  $\mathrm{colim} \mathrm{Hom}(X, G)$  est nulle. Il en résulte que pour tout morphisme  $X \xrightarrow{f} \mathrm{colim} F$ , il existe  $i \in I$  tel que la composée  $X \xrightarrow{f} \mathrm{colim} F \rightarrow G(i)$  est nulle. Autrement dit, on peut factoriser  $f$  par l'inclusion  $F(i) \hookrightarrow \mathrm{colim} F$ , ce qui prouve bien que  $f$  est dans l'image de  $\Phi_F^X$ .

3 implique 4. Il suffit d'appliquer l'hypothèse à la petite catégorie associée à l'ensemble ordonné (par inclusion) des parties finies de  $I$  et au foncteur qui à une telle partie  $J$  associe  $\bigoplus_{i \in J} A_i$ .

4 implique 1. Soit  $(F_n)$  une suite croissante de sous-objets de  $X$  de réunion  $X$ . On considère les morphismes

$$a_n : F_n \rightarrow \bigoplus_{k \leq n} X/F_k \hookrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} X/F_k$$

dont les composantes sont les flèches  $F_n \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/F_k$ . Comme la suite  $(F_k)$  est croissante,  $a_m$  est un prolongement de  $a_n$  pour  $n \geq m$ , ces morphismes fournissent donc par passage à la colimite un morphisme  $f : X \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} X/F_k$ . L'hypothèse implique qu'il existe un entier  $n$  et une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} X/F_k \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \bigoplus_{k \leq n} X/F_k \end{array}$$

qui montre que  $X/F_k = 0$  pour  $k > n$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2.2 Objets de présentation finie

### 2.2.1 Objets pf

Le paragraphe précédent suggère l'introduction de la notion suivante, plus forte que la type-finitude.

**Définition 2.2.1.** Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est dit *de présentation finie* (en abrégé *pf*) si  $\Phi_F^X$  est un isomorphisme pour tout foncteur  $F$  d'une petite catégorie filtrante à droite vers  $\mathcal{A}$ . Nous noterons  $\mathcal{A}^{pf}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  des objets pf.

**Proposition 2.2.2.** Soient  $X$  un objet tf de  $\mathcal{A}$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  une famille filtrante de sous-objets de  $X$  et  $T$  sa réunion. Si  $X/T$  est pf, alors la famille  $(A_i)$  est stationnaire.

*Démonstration.* Comme  $X/T$ , qui est colimite filtrante des  $X/A_i$ , est pf, il existe  $j \in I$  tel que la projection  $X/A_j \twoheadrightarrow X/T$  possède une section  $s : X/T \rightarrow X/A_j$  (appliquer la définition à  $id_{X/T}$ ). Soit  $Y$  l'image réciproque de  $im s$  par la projection  $X \twoheadrightarrow X/A_j$  : on a  $Y \cap T = A_j$  et  $Y + T = X$ . Cette dernière égalité montre que  $X$  est réunion filtrante croissante des  $Y + A_i$ , donc il existe  $i$  tel que  $Y + A_i = X$  puisque  $X$  est tf. Mais comme  $Y \cap T = A_j$ , cela implique que  $T$  égale  $A_i + A_j$ , ce qui, la famille  $(A_i)$  étant filtrante, achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.2.3.** 1. Tout objet projectif tf est pf.

2. Soit  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{A}$ . Si  $X$  est pf et  $B$  tf,  $A$  est tf.

3. Soit  $N \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{A}$ . Si  $N$  et  $P$  sont pf,  $A$  est pf.

*Démonstration.* Soit  $F$  un foncteur d'une petite catégorie filtrante à droite dans  $\mathcal{A}$ .

Si  $P$  est un objet projectif tf de  $\mathcal{A}$ , on a

$$\operatorname{coker} \Phi_F^P = \operatorname{colim} \operatorname{coker} (\operatorname{Hom}(P, F) \rightarrow \operatorname{hom}(P, \operatorname{colim} F)) = \operatorname{colim} \operatorname{Hom}(P, \operatorname{coker}(F \rightarrow \operatorname{colim} F))$$

(la dernière égalité vient de ce que  $P$  est projectif). Maintenant, la type-finitude de  $P$  entraîne que ce conoyau se plonge dans

$$\operatorname{hom}(P, \operatorname{colim} \operatorname{coker}(F \rightarrow \operatorname{colim} F)) = \operatorname{hom}(P, \operatorname{coker}(\operatorname{colim} F \xrightarrow{id} \operatorname{colim} F)) = 0$$

ce qui prouve la surjectivité de  $\Phi_F^P$ , donc sa bijectivité ( $P$  est par hypothèse tf). Cela démontre le premier point.

Le deuxième n'est qu'une reformulation de la proposition précédente.

Enfin, la dernière assertion est une conséquence formelle de l'exactitude à gauche du foncteur  $\text{hom}$ , de l'exactitude des colimites filtrantes dans  $\mathbf{Ab}$  et du lemme des cinq (cet argument est détaillé dans un cas plus général dans la démonstration de la proposition 2.2.9 ci-après).  $\square$

Nous prouvons maintenant une réciproque de la seconde assertion.

**Proposition 2.2.4.** *On suppose que  $\mathcal{A}$  est localement de type fini. Soit  $X$  un objet tf de  $\mathcal{A}$  tel que pour toute suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow 0$  avec  $B$  tf,  $A$  est tf. Alors  $X$  est pf.*

*Démonstration.* Soient  $I$  une petite catégorie filtrante à droite,  $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(I, \mathcal{A})$  et  $u \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X, \text{colim } F)$ . Il s'agit de montrer l'existence de  $i \in I$  et d'une factorisation

$$\begin{array}{ccc} & & F(i) \\ & \nearrow \text{---} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & \text{colim } F \end{array}$$

(la flèche verticale étant le morphisme canonique).

Notons  $A_i$  le produit fibré des morphismes  $u$  et  $F(i) \rightarrow \text{colim } F$  : l'objet  $X$  est la colimite filtrante des  $A_i$ . Comme celui-là est de type fini, il existe  $j \in I$  tel que le morphisme canonique  $A_j \rightarrow X$  est un *épimorphisme*, dont nous noterons  $K$  le noyau.

Nous supposons d'abord que  $A_j$  est tf. Alors  $K$  est aussi tf par hypothèse. Par ailleurs, pour toute flèche  $j \xrightarrow{t} i$  de  $I$ , le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{t_*} & A_i \\ \downarrow & \searrow & \\ X & & \end{array}$$

Nous désignerons par  $N_t$  le noyau de la flèche  $t_*$ . Comme  $X$  est colimite filtrante des  $A_i$ , l'objet  $K$  est la réunion filtrante croissante des  $N_t$ . Par type-finitude de  $K$ , cela entraîne l'existence d'une flèche  $j \xrightarrow{t} i$  de  $I$  telle que  $N_t = K$ , ce qui signifie que la flèche canonique  $A_i \rightarrow X$  est un isomorphisme ; la flèche canonique  $A_i \rightarrow F(i)$  fournit donc la factorisation recherchée.

Traisons maintenant le cas général. L'existence d'une classe de générateurs tf dans  $\mathcal{A}$  et la proposition 2.1.8 fournissent un sous-objet tf  $A'$  de  $A_j$  tel que la composée  $A' \hookrightarrow A_j \twoheadrightarrow X$  est surjective. On raisonne alors comme précédemment en remplaçant  $K$  par le noyau  $K'$  de la composée précédente et, pour toute flèche  $j \xrightarrow{t} i$  de  $I$ ,  $A_t$  par l'image  $A'_t$  de  $A' \hookrightarrow A_j \xrightarrow{t_*} A_i$  : on obtient un isomorphisme entre  $X$  et un certain  $A'_t$ , de sorte que le morphisme  $A'_t \hookrightarrow A_i \rightarrow F(i)$  (où  $i$  désigne le but de  $t$ ) fournit la factorisation souhaitée, ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.2.5.** *On suppose que l'hypothèse 2.1.12 est vérifiée. Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est pf si et seulement s'il existe une suite exacte  $P' \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$  avec  $P$  et  $P'$  projectifs tf.*

*Démonstration.* Supposons  $X$  pf. La proposition 2.1.13 fournit un épimorphisme  $P \twoheadrightarrow X$  avec  $P$  projectif tf ; la proposition 2.2.3 (assertions 1 et 2) montre que son noyau  $N$  est tf. On applique ensuite la proposition 2.1.13 pour obtenir un épimorphisme  $P' \twoheadrightarrow N$  avec  $P'$  projectif tf, d'où la suite exacte  $P' \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$  recherchée.

La réciproque découle de la proposition 2.1.13 (assertions 1 et 3).  $\square$

*Remarque 2.2.6.* – Une telle suite est appelée *présentation projective de type fini* de  $X$ , ce qui justifie la terminologie d'objet de présentation finie.

– En particulier, dans les catégories de modules, on retrouve la notion usuelle.

### 2.2.2 Objets $\text{pf}_n$

**Notation 2.2.7.** Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $I$  une petite catégorie,  $F$  un foncteur de  $I$  dans  $\mathcal{A}$  et  $n$  un entier naturel. Nous noterons  $\Phi_F^X(n)$  le morphisme canonique de groupes abéliens  $\text{colim Ext}^n(X, F) \rightarrow \text{Ext}^n(X, \text{colim } F)$  (de sorte que  $\Phi_F^X = \Phi_F^X(0)$ ;  $\text{Ext}^n(X, F)$  désigne comme dans le cas de  $\Phi_F^X$ , par abus, le foncteur composé évident).

**Définition 2.2.8.** Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$  et  $n > 0$  un entier. Nous dirons que  $X$  est de *n-présentation finie*, ou, en abrégé, que  $X$  est  $\text{pf}_n$ , si  $\Phi_F^X(i)$  est un isomorphisme pour tout foncteur  $F$  d'une petite catégorie filtrante à droite vers  $\mathcal{A}$  et tout entier  $i < n$ . Si l'objet  $X$  est  $\text{pf}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous dirons qu'il est  $\text{pf}_\infty$  (ainsi, un projectif tf est  $\text{pf}_\infty$ ).

Nous noterons  $\mathcal{A}^{\text{pf}, k}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  des objets  $\text{pf}_k$  de  $X$ , où  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ .

Dans le cas de la catégorie de foncteurs  $\mathcal{F}$ , la plupart des considérations qui suivent sont contenues dans [FFPS03], « *Introduction to functor homology* », § 2.3.

La généralisation suivante du corollaire 2.2.5 justifie la terminologie.

**Proposition 2.2.9.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  satisfait l'hypothèse 2.1.12. Pour tout entier positif  $n$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ , les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'objet  $X$  est  $\text{pf}_n$ .*
2. *Il existe une suite exacte*

$$P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

*où les  $P_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) sont des objets projectifs tf de  $\mathcal{A}$ .*

*De façon analogue,  $X$  est  $\text{pf}_\infty$  si et seulement si l'objet possède une résolution projective tf, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte*

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

*où les  $P_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) sont des objets projectifs tf.*

*Démonstration.* Si  $X$  est un objet pf, considérons une suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$  avec  $P$  projectif tf : on a pour tout entier  $i > 1$  un isomorphisme de foncteurs  $\text{Ext}^i(X, \cdot) \simeq \text{Ext}^{i-1}(N, \cdot)$  qui identifie  $\Phi_F^X(i)$  à  $\Phi_F^N(i-1)$  (où  $F$  est un foncteur d'une petite catégorie filtrante à droite vers  $\mathcal{A}$ ), et l'on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \text{colim Hom}(X, F) & \longrightarrow & \text{colim Hom}(P, F) & \longrightarrow & \text{colim Hom}(N, F) & \longrightarrow & \text{colim Ext}^1(X, F) \longrightarrow 0 \\ \simeq \downarrow \Phi_F^X & & \simeq \downarrow \Phi_F^P & & \downarrow \Phi_F^N & & \downarrow \Phi_F^X(1) \\ \text{hom}(X, \text{colim } F) & \longrightarrow & \text{hom}(P, \text{colim } F) & \longrightarrow & \text{hom}(N, \text{colim } F) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(X, \text{colim } F) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.1)$$

(la ligne supérieure est exacte par exactitude dans  $\mathbf{Ab}$  des colimites filtrantes; les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes parce que  $X$  et  $P$  sont pf, et le diagramme commute par naturalité des morphismes  $\Phi$ ). Le lemme des cinq montre donc que  $\Phi_F^X(1)$  est un isomorphisme si et seulement si  $\Phi_F^N$  en est un.

La proposition résulte ensuite d'une récurrence sur  $n$  (le cas  $\text{pf}_\infty$  se déduisant des autres), en constatant que chacune des deux conditions entraîne que  $X$  est pf.  $\square$

*Remarque 2.2.10.* 1. L'implication  $2 \Rightarrow 1$  est vraie sans hypothèse sur  $\mathcal{A}$ .

2. On peut affaiblir l'hypothèse 2.1.12, en la remplaçant par la suivante : *tout objet tf est quotient d'un projectif tf* (la démonstration précédente reste valable).

**Proposition 2.2.11.** *Soient  $n$  un entier strictement positif et  $X$  un objet  $\text{pf}_n$  de  $\mathcal{A}$ . Pour tout foncteur  $F$  d'une petite catégorie filtrante à droite  $I$  vers  $\mathcal{A}$ ,  $\Phi_F^X(n)$  est un monomorphisme. Si de plus  $F$  envoie toutes les flèches de  $I$  sur des monomorphismes, alors  $\Phi_F^X(n)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Il existe un foncteur  $J : I \rightarrow \mathcal{A}$  tel que les  $J(i)$  sont des objets injectifs de  $\mathcal{A}$  et une transformation naturelle injective  $F \hookrightarrow J$  (cf. remarque 1.3.17), dont nous noterons  $G$  le conoyau. La suite exacte longue de cohomologie associée à  $\text{hom}(X, \cdot)$  donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \text{colim Ext}^{n-1}(X, J) & \longrightarrow & \text{colim Ext}^{n-1}(X, G) & \longrightarrow & \text{colim Ext}^n(X, F) & \longrightarrow & 0 (= \text{colim Ext}^n(X, J)) \\ \simeq \downarrow \Phi_J^X(n-1) & & \simeq \downarrow \Phi_G^X(n-1) & & \downarrow \Phi_F^X(n) & & \\ \text{Ext}^{n-1}(X, \text{colim } J) & \longrightarrow & \text{Ext}^{n-1}(X, \text{colim } G) & \longrightarrow & \text{Ext}^n(X, \text{colim } F) & & \end{array} \quad (2.2)$$

aux lignes exactes, qui montre, par une chasse au diagramme élémentaire, que  $\Phi_F^X(n)$  est une injection.

Supposons maintenant que  $F$  envoie les flèches de  $I$  sur des monomorphismes. On note  $H = \text{coker}(F \hookrightarrow \text{colim } F)$  : comme la colimite de  $H$  est nulle, on a  $\text{colim Ext}^n(X, H) = 0$  d'après ce qui précède. La suite exacte de cohomologie associée à  $\text{hom}(X, \cdot)$  pour les suites exactes courtes  $0 \rightarrow F(i) \rightarrow \text{colim } F \rightarrow H(i) \rightarrow 0$  montre ainsi, par passage à la colimite, que le morphisme  $\Phi_F^X(n) : \text{colim Ext}^n(X, F) \rightarrow \text{Ext}^n(X, \text{colim } F)$  est surjectif (ce raisonnement est une généralisation de l'implication  $2 \Rightarrow 3$  de la proposition 2.1.20). Cela termine la démonstration.  $\square$

*Remarque 2.2.12.* Cette propriété justifie que l'on nomme quelquefois  $\text{pf}_0$  un objet tf.

Le résultat suivant généralise en quelque sorte la proposition 2.2.9 (qui s'en déduit par récurrence) au cas d'objets non projectifs.

**Proposition 2.2.13.** *Soient  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{A}$  et  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .*

1. *Si  $B$  et  $C$  sont respectivement  $\text{pf}_k$  et  $\text{pf}_{k+1}$ , alors  $A$  est  $\text{pf}_k$ .*
2. *Si  $A$  et  $C$  sont  $\text{pf}_k$ , alors  $B$  est  $\text{pf}_k$ .*
3. *Si  $A$  et  $B$  sont respectivement  $\text{pf}_k$  et  $\text{pf}_{k+1}$ , alors  $C$  est  $\text{pf}_{k+1}$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser (cf. proposition 2.2.9) la suite exacte longue de cohomologie et la version générale du lemme des cinq (cf. lemme 3.1 de [ML63], ch. XII, § 3), en exploitant le résultat de la proposition 2.2.11 pour obtenir les monomorphismes nécessaires.  $\square$

### 2.2.3 Utilisation de foncteurs exacts

**Convention 2.2.14.** Dans tout ce paragraphe, nous supposons que l'hypothèse 2.1.12 est vérifiée.

**Proposition 2.2.15.** *Soient  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et  $F$  un foncteur exact à droite de  $\mathcal{A}$  dans une catégorie de Grothendieck, transformant les générateurs projectifs tf en des objets  $\text{pf}_k$ . Alors  $F$  conserve les objets  $\text{pf}_i$  pour  $i \leq k$  si  $k \in \{0, 1\}$  ou que  $F$  est exact.*

*Démonstration.* On montre d'abord que  $F$  préserve les objets tf, et les objets pf si  $k \geq 1$ . En effet, si  $X$  est un objet tf (resp. pf), il existe une suite exacte  $P \rightarrow X \rightarrow 0$  (resp.  $P' \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$ ) où  $P$  (resp.  $P$  et  $P'$ ) est une somme directe finie de générateurs projectifs tf. Il suffit ensuite d'appliquer  $F$  et la proposition 2.1.4.2 (a) (resp. la proposition 2.2.3.3).

Supposons maintenant que  $F$  est exact et préserve les objets  $\text{pf}_j$  pour  $j < i$ , où  $i \in \{2, \dots, k\}$ . On montre que  $F$  transforme tout  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}^{\text{pf}, i}$  en un objet  $\text{pf}_i$ . Considérons une suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$ , où  $P$  est une somme directe finie de générateurs projectifs tf :  $N$  est  $\text{pf}_{i-1}$  par la proposition 2.2.13, donc  $F(N)$  est aussi  $\text{pf}_{i-1}$ . D'autre part, l'hypothèse montre que  $F(P)$  est  $\text{pf}_i$ , donc  $F(X)$  est bien  $\text{pf}_i$  (toujours par la proposition 2.2.13). Cela conclut, par induction sur  $k$  (le cas  $k = \infty$  se déduit des autres), la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.2.16.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est munie d'une structure tensorielle exacte telle que le produit tensoriel de deux générateurs projectifs tf est un objet projectif tf ou, plus généralement, un objet  $\text{pf}_\infty$ . Alors le produit tensoriel de deux objets  $\text{pf}_k$  est  $\text{pf}_k$ .*



*Démonstration.* On applique la proposition en deux étapes, en montrant d'abord que le produit tensoriel par un projectif tf préserve les objets  $\text{pf}_k$ .  $\square$

Nous terminons ce paragraphe avec un autre résultat simple d'utilisation de foncteurs exacts pour tester le caractère  $\text{pf}_k$  d'un objet.

**Proposition 2.2.17.** *Soient  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  et  $F$  un foncteur exact et fidèle de  $\mathcal{A}$  dans une catégorie de Grothendieck, commutant aux colimites filtrantes, et transformant les générateurs projectifs tf en des objets  $\text{pf}_{k-1}$ . Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est  $\text{pf}_i$  avec  $i \leq k$ , alors  $X$  est  $\text{pf}_i$ .*

*Démonstration.* La proposition 2.1.5 établit l'assertion pour  $i = 0$ . On procède ensuite par récurrence sur  $i \leq k$  : on suppose  $i > 0$  et on considère un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est  $\text{pf}_i$ .

Comme  $X$  est tf d'après ce qui précède, on peut trouver une suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$ , où  $P$  est une somme directe finie de générateurs projectifs tf. L'exactitude de la suite  $0 \rightarrow F(N) \rightarrow F(P) \rightarrow F(X) \rightarrow 0$  montre, via la première assertion de la proposition 2.2.13, que  $F(N)$  est  $\text{pf}_{i-1}$ . L'hypothèse de récurrence entraîne alors le caractère  $\text{pf}_{i-1}$  de  $N$ , ce qui termine la démonstration par la dernière assertion de la proposition 2.2.13.  $\square$

## 2.3 Catégories localement noethériennes

**Définition 2.3.1.** La catégorie  $\mathcal{A}$  est dite *localement noethérienne* s'il existe dans  $\mathcal{A}$  un ensemble de générateurs noethériens.

**Proposition 2.3.2.** *Si  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne, alors tout objet tf de  $\mathcal{A}$  est noethérien et de présentation finie.*

*Démonstration.* La proposition 2.1.8 montre qu'un objet tf de  $\mathcal{A}$  est un quotient d'une somme directe finie de générateurs noethériens de  $\mathcal{A}$ . La proposition 2.1.4 permet alors de voir qu'un objet tf de  $\mathcal{A}$  est noethérien. Pour obtenir le caractère pf d'un objet tf, il suffit d'appliquer la proposition 2.2.4 en notant qu'un sous-objet d'un objet tf de  $\mathcal{A}$  est tf d'après ce que l'on vient de démontrer.  $\square$

*Remarque 2.3.3.* Le caractère localement tf est fréquemment satisfait pour des raisons formelles dans les catégories usuelles, contrairement au caractère localement noethérien. L'exemple suivant, qui s'appuie sur la proposition précédente, illustre ce phénomène.

*Exemple 2.3.4.* Soit  $A$  un anneau commutatif. La catégorie  $\mathbf{Mod}_A$ , dont  $A$  est un générateur tf, est localement noethérienne si et seulement si  $A$  est un anneau noethérien.

*Remarque 2.3.5.* – Un produit de catégories localement noethériennes est localement noethérien.  
– Si  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne et si  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{C}$  est localement noethérienne. En effet, les objets de  $\mathcal{C}$  qui sont quotients d'une somme directe finie de générateurs noethériens de  $\mathcal{A}$  forment un ensemble  $E$  d'objets noethériens de  $\mathcal{C}$ . Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $X$  est réunion filtrante croissante de sous-objets qui sont quotients de sommes directes finies de générateurs noethériens de  $\mathcal{A}$ . Mais ces sous-objets sont dans  $\mathcal{C}$ , puisque  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$ , donc ils appartiennent à  $E$ , ce qui montre que  $E$  engendre  $\mathcal{C}$ .

La propriété suivante donne une réciproque à la proposition 2.3.2.

**Proposition 2.3.6.** *Si  $\mathcal{A}$  est localement de type fini, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la catégorie  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne ;*
2. *tout objet tf de  $\mathcal{A}$  est noethérien ;*
3. *tout sous-objet d'un objet tf de  $\mathcal{A}$  est tf ;*
4. *tout objet tf de  $\mathcal{A}$  est pf ;*
5. *tout objet noethérien de  $\mathcal{A}$  est pf.*

*Démonstration.*  $1 \Rightarrow 2$  est inclus dans la proposition 2.3.2.

$2 \Rightarrow 3$  grâce à la proposition 2.1.4.3.

$3 \Rightarrow 4$  découle de la proposition 2.2.4.

$4 \Rightarrow 5$  est clair.

$5 \Rightarrow 1$  : comme  $\mathcal{A}$  est localement de type fini, il suffit de vérifier qu'un objet de  $\text{tf } P$  de  $\mathcal{A}$  est noethérien. Supposons par l'absurde qu'il existe un objet  $\text{tf } X$  possédant un sous-objet  $Y$  non  $\text{tf}$ . Considérons l'ensemble  $E$  des sous-objets  $A$  de  $X$  tels que  $X/A$  n'est pas  $\text{pf}$ . Cet ensemble est non vide, car il contient  $Y$  grâce à la proposition 2.2.3. De plus, il est stable par réunion filtrante croissante : lorsque cette réunion stationne, c'est évident, dans le cas contraire, on applique la proposition 2.2.2 ; en particulier,  $E$  est *inductif*. Le lemme de Zorn assure l'existence d'un élément maximal  $A$  dans  $E$ .

L'objet  $X/A$  est noethérien, car si  $Y/A$  (où  $A \subset Y \subset X$ ) en est un sous-objet non nul,  $Y/A$  est  $\text{tf}$  puisque  $X/Y$  est  $\text{pf}$  (appliquer la proposition 2.2.3 à la suite exacte  $0 \rightarrow Y/A \rightarrow X/A \rightarrow X/Y \rightarrow 0$ ) par maximalité de  $A$ . L'hypothèse montre alors que  $X/A$  est  $\text{pf}$ , i.e. que  $A$  n'appartient pas à  $E$ . Cette contradiction achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 2.3.7.** Soient  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  et  $F : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un foncteur tels que :

- les objets de  $\mathcal{C}$  engendrent  $\mathcal{A}$  ;
- la restriction de  $F$  à  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  est exacte ;
- $F$  commute aux limites (i.e. transforme les colimites dans  $\mathcal{A}$  en des limites dans  $\mathbf{Ab}$ ).

Alors  $F$  est exact.

*Démonstration.* Considérons une suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow 0$  de  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$ , la première condition montre que  $X$  est réunion d'une famille filtrante croissante  $(X_i)_{i \in I}$  de sous-objets appartenant à  $\mathcal{C}$ . Posons  $A_i = A \cap X_i$  : alors  $A$  est la réunion filtrante croissante de  $(A_i)_{i \in I}$  (proposition 1.3.5). Si l'on note  $B_i$  l'image de  $A_i$  dans  $B$ ,  $B$  est également réunion filtrante croissante de  $(B_i)_{i \in I}$ .

La deuxième hypothèse et les suites exactes  $0 \rightarrow A_i \rightarrow X_i \rightarrow B_i \rightarrow 0$  fournissent des suites exactes  $0 \rightarrow F(B_i) \rightarrow F(X_i) \rightarrow F(A_i) \rightarrow 0$ . Par exactitude à gauche de la limite, on en déduit déjà que  $F$  est exact à gauche.

Pour établir la surjectivité de  $F(X) \rightarrow F(A)$ , on commence par traiter le cas où il existe un sous-objet  $C$  de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}$  tel que  $X = A + C$ . Dans ce cas, la dernière hypothèse et le diagramme cocartésien d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} A \cap C & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

fournissent un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} F(A \cap C) & \longleftarrow & F(C) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F(A) & \longleftarrow & F(X) \end{array}$$

dans lequel la flèche horizontale supérieure est un épimorphisme par la seconde hypothèse, ce qui montre que la flèche horizontale inférieure est également un épimorphisme, comme souhaité.

Revenons maintenant au cas général. Considérons un élément  $f$  de  $F(A)$  et l'ensemble  $E$  formé des couples  $(J, g)$ , où  $J$  est une partie de  $I$  et  $g$  un élément de  $F(A + X_J)$  (où l'on note  $X_J = \sum_{i \in J} X_i$ ) s'envoyant sur  $f$  par le morphisme  $F(A + X_J) \rightarrow F(A)$  induit par l'inclusion. On ordonne  $E$  en déclarant  $(J, g)$  inférieur à  $(J', g')$  si  $J \subset J'$  et que le morphisme  $F(A + X_{J'}) \rightarrow F(A + X_J)$  applique  $g'$  sur  $g$ . La commutation de  $F$  aux limites montre que  $E$  est *inductif*, ce qui, par le lemme de Zorn, entraîne que  $E$  possède un élément *maximal*  $(J, g)$ , puisque  $E$  contient  $(\emptyset, f)$ .

On constate que pour tout  $i \in I$ , le morphisme  $F(A + X_J + X_i) \rightarrow F(A + X_J)$  est surjectif d'après le cas particulier traité précédemment. On en déduit, par maximalité, que  $X_J$  égale  $X$ . On a ainsi montré que  $F(X) \rightarrow F(A)$  est surjectif, ce qui établit le lemme.  $\square$

La proposition suivante montre l'intérêt fondamental des catégories localement noethériennes en algèbre homologique.

**Proposition 2.3.8.** *Si  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne, toute colimite filtrante d'objets injectifs de  $\mathcal{A}$  est injective. En particulier, toute somme directe d'injectifs de  $\mathcal{A}$  est injective.*

*Démonstration.* Le lemme 2.3.7 montre qu'un objet  $I$  de  $\mathcal{A}$  tel que la restriction à  $(\mathcal{A}^{\text{noet}})^{\text{op}}$  du foncteur  $\text{hom}(\cdot, I)$  est exacte est injectif. La proposition est alors une conséquence formelle de la proposition 2.3.2 (et de l'exactitude des colimites filtrantes dans  $\mathbf{Ab}$ ).  $\square$

Nous mentionnons maintenant l'important résultat de structure des objets injectifs dans une catégorie localement noethérienne. Le lecteur pourra se reporter à [Gab62], ch. IV, §2 (th. 2) ou [Bou80], §1, n°10, th. 3 (dans le cas des modules) pour une démonstration. Pour une discussion détaillée de ce genre d'énoncés (décomposition de Krull-Schmidt), voir [Pop73], ch. 5.

**Proposition 2.3.9.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne. Alors tout objet injectif de  $\mathcal{A}$  est somme directe d'objets injectifs indécomposables. Cette décomposition est de plus unique à l'ordre des facteurs et à isomorphisme près, ce qui signifie que si deux familles  $(I_e)_{e \in E}$  et  $(J_f)_{f \in F}$  d'injectifs indécomposables ont des sommes directes isomorphes, il existe une bijection  $\alpha : E \rightarrow F$  telle que  $I_e$  et  $J_{\alpha(e)}$  sont isomorphes pour tout  $e \in E$ .*

Nous indiquons ensuite une amélioration de la proposition 2.3.2 qui découle facilement de la proposition 2.3.8.

**Proposition 2.3.10.** *Si la catégorie  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne, tout objet de type fini  $X$  de  $\mathcal{A}$  est  $\text{pf}_\infty$ .*

*Démonstration.* On établit par récurrence sur l'entier  $n > 0$  que  $X$  est  $\text{pf}_n$ . Pour  $n = 1$ , la proposition 2.3.2 donne le résultat. Le pas de la récurrence se prouve ensuite comme dans la première partie de la démonstration de la proposition 2.2.11 : une colimite filtrante d'injectifs étant injective, la flèche horizontale inférieure droite du diagramme (2.2) (page 55) est surjective, de sorte que le morphisme  $\Phi_F^X(n)$  est *bijectif* (par le lemme des cinq) si  $X$  est  $\text{pf}_n$ , ce qui implique le caractère  $\text{pf}_{n+1}$  de  $X$  et termine la démonstration.  $\square$

Nous établissons à présent une réciproque à la proposition 2.3.8.

**Proposition 2.3.11.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est localement *tf* et telle que toute somme directe dénombrable d'objets injectifs de  $\mathcal{A}$  est injective.*

*Alors  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne.*

*Démonstration.* Il suffit, compte-tenu de la première hypothèse, de montrer que tout objet *tf* de  $\mathcal{A}$  est noethérien. Donnons-nous pour cela un objet *tf*  $X$  de  $\mathcal{A}$  et une suite croissante  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-objets de  $X$ . La proposition 1.3.14 fournit des enveloppes injectives  $A_n/A_{n-1} \hookrightarrow I_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ); nous noterons  $a_n$  le morphisme composé  $A_n \twoheadrightarrow A_n/A_{n-1} \hookrightarrow I_n$ . Comme  $I_n$  est injectif, ce morphisme admet un prolongement à  $X$ , dont nous noterons  $\bar{a}_{n,m}$  la restriction à  $A_m$ . Celle-ci est nulle si  $m < n$ .

On considère ensuite, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le morphisme

$$u_k : \bigoplus_{1 \leq m \leq k} A_m \rightarrow \bigoplus_{1 \leq n \leq k} I_n$$

dont la composante  $A_m \rightarrow I_n$  est  $\bar{a}_{n,m}$ . Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{1 \leq m \leq k} A_m & \hookrightarrow & \bigoplus_{1 \leq m \leq k+1} A_m \\ u_k \downarrow & & \downarrow u_{k+1} \\ \bigoplus_{1 \leq n \leq k} I_n & \hookrightarrow & \bigoplus_{1 \leq n \leq k+1} I_n \end{array}$$

commutent, de sorte que l'on obtient, par passage à la colimite, un morphisme

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{N}^*} A_m \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$$

qui fournit, par passage au quotient, un morphisme

$$B \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$$

où  $B$  désigne la réunion des  $A_n$ . L'hypothèse d'injectivité des sommes directes dénombrables d'injectifs permet de prolonger ce morphisme en un morphisme

$$f : X \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$$

La proposition 2.1.20 et le caractère tf de  $X$  entraînent que, pour  $N$  assez grand, la composée

$$X \xrightarrow{f} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \twoheadrightarrow I_N$$

est nulle, ce qui implique la nullité de  $u_N$  (restreindre à  $A_N$ ). On en déduit la nullité de  $A_N/A_{N-1}$ , donc la suite  $(A_n)$  stationne.

Ainsi  $X$  est noethérien, d'où la conclusion.  $\square$

*Remarque 2.3.12.* Dans [Gab62], chapitre II, §4, Gabriel donne une description des catégories localement noethériennes en termes de catégories de foncteurs exacts à gauche : il montre que, si  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne,  $\mathcal{A}$  est équivalente à la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}((\mathcal{A}^{noet})^{op}, \mathbf{Ab})$  des foncteurs exacts à gauche. Cela permet souvent de démontrer simplement certains énoncés non triviaux sur les catégories localement noethériennes.

## 2.4 Notions duales

Dans cette section, nous présentons des notions « duales » des précédentes. Nous mettons entre guillemets cet adjectif car les hypothèses de régularité que nous avons faites ne sont pas auto-duales, de sorte que si la plupart des phénomènes sont analogues aux précédents (c'est pourquoi nous présentons ces résultats avec beaucoup moins de détails), il faut parfois adapter les hypothèses sur la catégorie  $\mathcal{A}$ , ou les démonstrations.

On rappelle également que d'après la proposition 1.3.16, toutes les limites existent dans  $\mathcal{A}$ .

**Définition 2.4.1.** Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est dit :

- de *co-type fini* (en abrégé *co-tf*) si toute suite décroissante de sous-objets de  $X$  d'intersection nulle stationne ;
- *artinien* si toute suite décroissante de sous-objets de  $X$  stationne.

**Notation 2.4.2.** Nous désignerons par  $\mathcal{A}^{cotf}$  et  $\mathcal{A}^{art}$  les sous-catégories pleines de  $\mathcal{A}$  formées respectivement des objets de co-type fini et artiniens.

- Remarque 2.4.3.* 1. Soit  $A$  un anneau commutatif (unitaire). C'est un objet artinien de  $\mathbf{Mod}_A$  si et seulement si c'est un anneau artinien au sens usuel du terme. L'objet  $A$  de  $\mathbf{Mod}_A$  n'est pas en général un objet co-tf (considérer par exemple l'anneau  $\mathbb{Z}$ ).
2. Dans une catégorie d'espaces vectoriels  $\mathcal{E}_k$ , un objet est artinien (resp. co-tf) si et seulement s'il est de dimension finie.
3. Etant donné  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ , il y a équivalence entre les énoncés suivants :
- (a) l'objet  $X$  est artinien ;
  - (b) toute famille filtrante décroissante de sous-objets de  $X$  stationne ;
  - (c) toute famille non vide de sous-objets de  $X$  possède un élément minimal pour l'inclusion.
4. De même, toute famille filtrante décroissante de sous-objets d'un objet tf  $X$  de réunion  $X$  stationne (i.e. contient  $X$ ).
- Ces deux dernières assertions, immédiates, sont duales de la remarque 2.1.3.

**Proposition 2.4.4.** 1. La catégorie  $\mathcal{A}^{art}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ .

2. Soit  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{A}$ .
- (a) Si  $X$  est co-tf, alors  $A$  est co-tf.
  - (b) Si  $A$  et  $B$  sont co-tf, il en est de même pour  $X$ . En particulier, une somme directe finie d'objets co-tf est co-tf.
3. Un objet de  $\mathcal{A}$  est artinien si et seulement si tous ses quotients sont co-tf. En particulier, un objet artinien est co-tf.

*Démonstration.* Cette proposition élémentaire étant analogue à la proposition 2.1.4, nous nous contenterons d'établir 2(a). Soit  $(F_n)$  une suite décroissante de sous-objets d'intersection nulle de  $X$  :  $(F_n \cap A)$  est une suite décroissante d'objets de  $A$  d'intersection nulle, donc pour  $n$  assez grand,  $F_n \cap A$  est nul, ce qui entraîne que le morphisme  $F_n \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$ , dont nous noterons  $G_n$  l'image, est injectif. Les  $G_n$  forment une suite décroissante de sous-objets de  $B$  d'intersection nulle, donc pour  $n$  assez grand,  $G_n = 0$ , d'où  $F_n = 0$  et la conclusion.  $\square$

**Proposition 2.4.5.** L'enveloppe injective d'un objet co-tf est co-tf.

*Démonstration.* Soient  $X \hookrightarrow I$  une enveloppe injective d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}^{cotf}$  et  $(A_n)$  une suite décroissante de sous-objets de  $I$  d'intersection nulle. Comme  $(A_n \cap X)$  est une suite décroissante de sous-objets de  $X$  d'intersection nulle, il existe  $n$  tel que  $A_n \cap X = 0$ . La composée  $X \hookrightarrow I \twoheadrightarrow I/A_n$  est donc injective, ce qui, par définition de l'enveloppe injective, entraîne que  $A_n$  est nul. Par conséquent,  $I$  est co-tf.  $\square$

**Corollaire 2.4.6.** Un objet de  $\mathcal{A}$  est co-tf si et seulement s'il se plonge dans un injectif co-tf.

*Démonstration.* Il suffit de combiner les propositions 1.3.14 et 2.4.5.  $\square$

**Proposition 2.4.7.** Soient  $\mathcal{B}$  une catégorie de Grothendieck et  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur exact et fidèle.

1. Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est artinien dans  $\mathcal{B}$ ,  $X$  est artinien dans  $\mathcal{A}$ .
2. Si  $F$  commute aux limites filtrantes et si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est co-tf, alors  $X$  est co-tf.
3. Supposons que  $F$  est plein et que son image est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{B}$ . Si  $X$  est un objet artinien (resp. co-tf) de  $\mathcal{A}$ , alors  $F(X)$  est un objet artinien (resp. co-tf) de  $\mathcal{B}$ .

La démonstration est entièrement analogue à celle de la proposition 2.1.5.

**Définition 2.4.8.** Nous dirons qu'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est *de co-présentation finie* — en abrégé *co-pf* s'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow J$  avec  $I$  et  $J$  injectifs co-tf.

Plus généralement, si  $n$  est un entier positif, nous dirons que  $X$  est *co-pf<sub>n</sub>* s'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow X \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_n$$

où les  $I_k$  sont des injectifs tf. On dira que  $X$  est *co-pf<sub>∞</sub>* s'il est *co-pf<sub>n</sub>* pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Remarque 2.4.9.* Cette définition est équivalente à la définition inductive suivante : les objets *co-pf<sub>0</sub>* sont les objets co-tf, et un objet  $X$  est *co-pf<sub>n</sub>* pour  $n \in \mathbb{N}^*$  si et seulement s'il existe un plongement de  $X$  dans un injectif co-tf dont le conoyau est *co-pf<sub>n-1</sub>*.

*Remarque 2.4.10.* Si  $X$  est *co-pf<sub>∞</sub>*, il possède une résolution injective co-tf, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow X \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_n \rightarrow \cdots$$

où les  $I_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont des objets injectifs co-tf.

**Proposition 2.4.11.** Soient  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{A}$  et  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

1. Si  $B$  est *co-pf<sub>k</sub>* et  $A$  *co-pf<sub>k+1</sub>*, alors  $C$  est *co-pf<sub>k</sub>*.  
En particulier, le quotient d'un objet co-tf par un sous-objet *co-pf* est co-tf.
2. Si  $A$  et  $C$  sont *co-pf<sub>k</sub>*, alors  $B$  est *co-pf<sub>k</sub>*.
3. Si  $C$  est *co-pf<sub>k</sub>* et  $B$  *co-pf<sub>k+1</sub>*, alors  $A$  est *co-pf<sub>k+1</sub>*.

*Démonstration.* Établissons d'abord la seconde assertion par récurrence sur  $k$  : pour  $k = 0$ , c'est un cas particulier de la proposition 2.4.4. Pour le cas général, on plonge  $A$  (resp.  $C$ ) dans un injectif co-tf  $I$  (resp.  $J$ ) de manière à ce que  $I/A$  (resp.  $J/C$ ) soit *co-pf<sub>k-1</sub>* (cf. remarque 2.4.9, que l'on utilise dans toute cette démonstration). En utilisant l'injectivité de  $I$ , on peut prolonger le plongement de  $A$  dans  $I$  en un morphisme  $B \rightarrow I$ , ce qui fournit un diagramme commutatif (hormis en ce qui concerne la flèche en pointillé)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I \oplus J & \longrightarrow & J \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I/A & \longrightarrow & (I \oplus J)/B & \longrightarrow & J/C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes (l'exactitude de la dernière ligne résulte du « lemme  $3 \times 3$  » — cf. [ML63], ch. XII, § 3, lemme 3.2). Comme  $I/A$  et  $J/C$  sont *co-pf<sub>k-1</sub>*, on en déduit que  $(I \oplus J)/B$  est également *co-pf<sub>k-1</sub>*, ce qui implique que  $B$  est *co-pf<sub>k</sub>*.

La troisième assertion se déduit de la seconde : on plonge  $B$  dans un injectif co-tf  $I$  de sorte que  $I/B$  soit *co-pf<sub>k</sub>*. On a une suite exacte  $0 \rightarrow C \rightarrow I/A \rightarrow I/B \rightarrow 0$  avec  $C$  et  $I/B$  *co-pf<sub>k</sub>*, donc  $I/A$  est *co-pf<sub>k</sub>*, et  $B$  est *co-pf<sub>k+1</sub>*.

Établissons maintenant la première assertion : on plonge  $A$  (resp.  $B$ ) dans un injectif co-tf  $I$  (resp.  $J$ ) de sorte que  $I/A$  (resp.  $J/B$ ) soit *co-pf<sub>k</sub>* (resp. *co-pf<sub>k-1</sub>*). Notons  $u : B \rightarrow I$  un prolongement du plongement  $A \hookrightarrow I$ , puis posons  $K = I \oplus J$  : c'est un injectif co-tf. Le plongement  $B \hookrightarrow K$  dont la composante sur  $I$  est  $u$  et la composante sur  $J$  le plongement initial a un conoyau  $Q$  isomorphe

à  $I \oplus J/B$  (on a une suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow Q \rightarrow J/B \rightarrow 0$  et  $I$  est injectif), qui est  $\text{co-pf}_{k-1}$ , et la composée  $A \hookrightarrow B \hookrightarrow K$  a, de même, un conoyau isomorphe à  $I/A \oplus J$ , qui est  $\text{co-pf}_k$ . Il suffit pour conclure d'utiliser la suite exacte  $0 \rightarrow C \rightarrow K/B \rightarrow K/A \rightarrow 0$  et la dernière assertion.  $\square$

Il existe des propriétés analogues à celles détaillées dans les paragraphes précédents en termes d'objets  $\text{pf}_n$  sur l'utilisation de foncteurs exacts et l'application à des catégories tensorielles.

**Proposition 2.4.12.** *Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de catégories de Grothendieck. Un objet  $(A_i)_{i \in I}$  de  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est artinien (resp. co-tf, co-pf<sub>n</sub>) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  est un objet artinien (resp. co-tf, co-pf<sub>n</sub>) de  $\mathcal{A}_i$  ;
- les  $A_i$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

**Proposition 2.4.13.** *Soient  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $\mathcal{A}$  et  $X$  un sous-objet co-tf de  $\prod_{i \in I} A_i$ . Il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $X$  est isomorphe à un sous-objet de  $\prod_{i \in J} A_i$ .*

La démonstration des deux propositions précédentes et des corollaires qui suivent (le premier s'appuie sur le fait que  $\mathcal{A}$  satisfait, d'après le corollaire 1.3.15, l'hypothèse 1.3.12) est laissée au lecteur.

**Corollaire 2.4.14.** *La catégorie  $\mathcal{A}^{\text{cotf}}$  est essentiellement petite.*

**Corollaire 2.4.15.** *Si la catégorie  $\mathcal{A}$  est très bien échelonnée, tout objet de co-type fini de  $\mathcal{A}$  est bien échelonné.*

*Remarque 2.4.16.* En revanche, la notion de classe d'objets bien échelonnés n'étant pas auto-duale, il n'est pas vrai en général qu'un objet co-tf (ni même artinien) est bien échelonné si  $\mathcal{A}$  est bien échelonné.

*Exemple 2.4.17.* La sous-catégorie  $\mathbf{Ab}^{\text{noet}}$  est une classe d'objets bien échelonnés de  $\mathbf{Ab}$  : on sait déjà qu'elle est épaisse et essentiellement petite (proposition 2.1.4 et corollaire 2.1.9), et elle engendre  $\mathbf{Ab}$ , car  $\mathbb{Z}$ , qui est un anneau, donc un  $\mathbb{Z}$ -module, noethérien, engendre déjà  $\mathbf{Ab}$ . Considérons à présent un nombre premier  $p$  et le groupe abélien  $M = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ . Il n'est pas bien échelonné (il n'est même pas de type fini), mais est *artinien*. En effet, tous ses sous-groupes stricts sont des groupes finis  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ .

*Remarque 2.4.18.* L'exactitude des limites filtrantes bien échelonnées permet de caractériser, dans une catégorie très bien échelonnée, le caractère co-tf ou co-pf d'un objet  $X$  par l'injectivité ou la bijectivité de l'application naturelle  $\text{colim Hom}(F, X) \rightarrow \text{hom}(\lim F, X)$ , où  $F$  est un foncteur d'une petite catégorie filtrante à gauche vers la catégorie  $\mathcal{C}$  des objets bien échelonnés dont la limite est un objet de  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 2.4.19.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux catégories en bonne dualité. Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est co-tf (resp. artinien, tf, noethérien, pf<sub>n</sub>, co-pf<sub>n</sub>) si et seulement si  $DX$  est un objet tf (resp. noethérien, co-tf, artinien, co-pf<sub>n</sub>, pf<sub>n</sub>) de  $\mathcal{A}'$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $(G_n)$  est une suite croissante de sous-objets de  $DX$ , où  $X$  est un objet co-tf de  $\mathcal{A}$ , de réunion  $DX$  dans  $\mathcal{A}'$ . Comme  $X$  est bien échelonné, l'application du foncteur de dualité  $D'$  aux inclusions  $G_n \hookrightarrow DX$  fournit des surjections  $X \twoheadrightarrow D'G_n$ , dont nous noterons  $F_n$  le noyau. Ainsi  $DX \simeq \text{colim } G_n$ , puis  $X \simeq \lim D'G_n$ , d'où l'on déduit la nullité de l'intersection des  $F_n$  (cf. remarque 1.3.6). Par conséquent, il existe  $n$  tel que  $F_n = 0$ , d'où  $D'G_n = X$  et  $G_n = DX$ . Ainsi  $DX$  est tf.

Les autres implications de l'énoncé s'obtiennent de manière analogue, ou s'en déduisent, à l'exclusion de l'assertion relative au dual d'un objet pf<sub>n</sub>, qui découle de la proposition 2.2.9 (combinée à la remarque 2.2.10.2) et du lemme ci-après.  $\square$

**Lemme 2.4.20.** *On conserve les hypothèses de la proposition 2.4.19.*

1. *Le dual d'un objet injectif co-tf  $I$  de  $\mathcal{A}'$  est un objet projectif tf de  $\mathcal{A}$ .*
2. *Tout objet tf de  $\mathcal{A}$  est quotient d'un objet projectif tf.*

*Démonstration.* Comme on sait que  $I$  est bien échelonné, la restriction à la classe  $\mathcal{C}$  d'objets bien échelonnés de  $\mathcal{A}$  du foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, \cdot)$  est exacte. D'autre part, ce foncteur commute aux colimites filtrantes parce que  $D'I$  est tf (appliquer ensuite la proposition 2.1.20), d'après ce que l'on vient de démontrer. Si  $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $\mathcal{A}$ , on écrit, comme dans la démonstration du lemme 2.3.7,  $X$  comme colimite filtrante de sous-objets bien échelonnés  $X_i$ , et l'on pose  $A_i = A \cap X_i$  et  $B_i = \text{im}(X_i \hookrightarrow X \twoheadrightarrow B)$ . On en déduit des suites exactes  $0 \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, A_i) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, X_i) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, B_i) \rightarrow 0$ , ce qui, par passage à la colimite filtrante, implique l'exactitude de  $0 \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, A) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, X) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(D'I, B) \rightarrow 0$  et établit la première assertion.

La seconde assertion se déduit de la première via le corollaire 2.4.6.  $\square$

*Remarque 2.4.21.* Le lemme montre également qu'un objet tf (dans le cas d'une bonne dualité) possède une couverture projective (considérer le dual d'une enveloppe injective du dual).

**Définition 2.4.22.** Nous dirons que  $\mathcal{A}$  est *co-localement artinienn*e si elle possède un ensemble de cogénérateurs artiniens.

*Exemple 2.4.23.* Il est classique que  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est cogénérateur de  $\mathbf{Ab}$ , d'où l'on déduit par décomposition primaire que la famille des  $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ ,  $p$  parcourant l'ensemble des nombres premiers, est également cogénératrice. Ces groupes abéliens étant artiniens (exemple 2.4.17), la catégorie des groupes abéliens est co-localement artinienne.

Nous signalons maintenant quelques critères simples pour tester le caractère co-localement artinienn de  $\mathcal{A}$ . Ce sont des conséquences directes des résultats précédents.

**Proposition 2.4.24.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La catégorie  $\mathcal{A}$  est co-localement artinienn*e.
2. *Il existe un ensemble de cogénérateurs co-tf dans  $\mathcal{A}$  et tout objet co-tf de  $\mathcal{A}$  est artinien.*
3. *Il existe un ensemble de cogénérateurs co-tf dans  $\mathcal{A}$  et tout objet injectif co-tf de  $\mathcal{A}$  est artinien.*
4. *Il existe un ensemble de cogénérateurs co-tf dans  $\mathcal{A}$  et tout objet co-tf de  $\mathcal{A}$  est co-pf.*
5. *Il existe un ensemble de cogénérateurs co-tf dans  $\mathcal{A}$  et tout objet co-tf de  $\mathcal{A}$  est co-pf $_{\infty}$ .*

La proposition 2.4.19 fournit le résultat suivant.

**Proposition 2.4.25.** *Lorsque deux catégories abéliennes sont en bonne dualité, l'une est localement noethérienn*e si et seulement si l'autre est co-localement artinienne.

**Notation 2.4.26.** Nous désignerons  $K'_0(\mathcal{A})$  le groupe de Grothendieck  $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$ , où  $\mathcal{C}$  désigne la sous-catégorie pleine des objets injectifs co-tf de  $\mathcal{A}$  (il est bien défini grâce au corollaire 2.4.14).

**Proposition 2.4.27.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont des catégories en bonne dualité. Les foncteurs de dualité induisent un isomorphisme de groupes  $K'_0(\mathcal{A}) \simeq K'_0(\mathcal{A}')$ .*

Cette propriété découle de la proposition 2.4.19.

## 2.5 Sous-catégories de Serre stables par colimites

Cette section fournit principalement des préliminaires aux sections 2.6 et 2.7.



**Proposition 2.5.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$ . On note  $\mathcal{C}^+$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets qui sont somme de sous-objets appartenant à  $\mathcal{C}$ . La catégorie  $\mathcal{C}^+$  est la plus petite sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  qui est stable par colimites et contient  $\mathcal{C}$ .*

*Si la sous-catégorie  $\mathcal{C}$  est épaisse dans  $\mathcal{A}$  et constituée d'objets de présentation finie, alors  $\mathcal{C}^+$  est épaisse ; c'est la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  stable par colimites et contenant  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* La stabilité de  $\mathcal{C}^+$  par sous-objets résulte de la proposition 1.3.5, puisqu'un objet de  $\mathcal{C}^+$  est réunion filtrante croissante de sous-objets appartenant à  $\mathcal{C}$ . La stabilité par quotients est formelle, de même que la stabilité par sommes directes quelconques de  $\mathcal{C}^+$ . Comme une colimite est un quotient d'une somme directe, on en déduit la première assertion.

On suppose maintenant  $\mathcal{C}$  épaisse et constituée d'objets pf. Considérons une suite exacte  $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0$ , où  $A$  et  $Y$  sont des objets de  $\mathcal{C}^+$ .

On commence par montrer que  $X$  est objet de  $\mathcal{C}^+$  dans le cas où  $A$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Comme  $A$  est pf, l'application de la proposition 2.2.11 à l'élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A, Y)$  associé à l'extension précédente fournit un sous-objet  $B$  de  $Y$  appartenant à  $\mathcal{C}$  et une extension  $0 \rightarrow B \rightarrow X' \rightarrow A \rightarrow 0$  (on a donc  $X' \in \text{Ob } \mathcal{C}$  par épaisseur de  $\mathcal{C}$ ) telle qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel le carré de gauche est *cocartésien*. Ainsi,  $X$  est un quotient de  $Y \oplus X'$ . Comme  $Y$  et  $X'$  sont des objets de  $\mathcal{C}^+$ , il en est de même pour  $X$ .

Pour en déduire le cas général, il suffit de noter que si, pour tout sous-objet  $B$  de  $A$ , on note  $X_B$  l'image réciproque de  $B$  par la projection  $X \rightarrow A$ , alors  $X$  est la réunion filtrante croissante des  $X_B$ , où  $B$  parcourt l'ensemble des sous-objets de  $A$  appartenant à  $\mathcal{C}$ , objets dont nous venons de montrer qu'ils sont dans  $\mathcal{C}^+$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

On remarque que, pour la première partie de l'énoncé, on peut affaiblir l'hypothèse en supposant que  $\mathcal{C}$  est seulement stable par sous-quotients (mais pas forcément par sommes directes finies).

En revanche, l'exemple 2.6.22 ci-après montre que  $\mathcal{C}^+$  n'est pas toujours épaisse même si  $\mathcal{C}$  est épaisse et constituée d'objets de type fini.

**Convention 2.5.2.** Dans toute la suite de cette section,  $\mathcal{C}$  désigne une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par colimites.

**Proposition et définition 2.5.3.** *Étant donné un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ , notons  $L_{\mathcal{C}}(X)$  la somme des sous-objets de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}$ .*

1. *L'objet  $L_{\mathcal{C}}(X)$  est le plus grand sous-objet de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}$ .*
2. *Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathcal{A}$ , alors  $f(L_{\mathcal{C}}(X)) \subset L_{\mathcal{C}}(Y)$ . Ainsi,  $L_{\mathcal{C}}$  définit un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{C}$ .*
3. *Ce foncteur commute aux colimites et est adjoint à droite au foncteur d'oubli. On l'appelle foncteur de localisation dans  $\mathcal{A}$  relativement à  $\mathcal{C}$ . La co-unité de l'adjonction est l'inclusion  $L_{\mathcal{C}}(X) \subset X$ .*
4. *Si  $A$  est un sous-objet de  $X$ , on a  $L_{\mathcal{C}}(A) = L_{\mathcal{C}}(X) \cap A$ .*

*Démonstration.* La stabilité par colimites de  $\mathcal{C}$  entraîne que  $L_{\mathcal{C}}(X)$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , c'est donc forcément le plus grand sous-objet de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est stable par quotients, si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathcal{A}$ , alors  $f(L_{\mathcal{C}}(X))$  est un sous-objet de  $Y$  appartenant à  $\mathcal{C}$ , il est donc inclus dans  $L_{\mathcal{C}}(Y)$ .

Comme  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$ , les considérations précédentes impliquent formellement l'adjonction entre  $L_{\mathcal{C}}$  et le foncteur d'oubli  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Pour la dernière, on note que  $L_{\mathcal{C}}(A)$  est un sous-objet de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}$  et contenu dans  $A$ , il est donc inclus dans  $L_{\mathcal{C}}(X) \cap A$ . L'inclusion inverse résulte de ce que  $L_{\mathcal{C}}(X) \cap A \subset L_{\mathcal{C}}(X)$  est un objet de  $\mathcal{C}$  inclus dans  $A$ .  $\square$

*Remarque 2.5.4.* Par abus, nous noterons souvent aussi  $L_{\mathcal{C}}$  l'endofoncteur de  $\mathcal{A}$  donné par la composition  $\mathcal{A} \xrightarrow{L_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathcal{A}$ .

**Proposition 2.5.5.** *La sous-catégorie  $\mathcal{C}$  est épaisse dans  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $L_{\mathcal{C}}(X/L_{\mathcal{C}}(X)) = 0$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\mathcal{C}$  épaisse. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $Y = L_{\mathcal{C}}(X/L_{\mathcal{C}}(X))$  et  $Z$  le produit fibré de l'inclusion  $Y \hookrightarrow X/L_{\mathcal{C}}(X)$  et de la projection  $X \rightarrow X/L_{\mathcal{C}}(X)$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow L_{\mathcal{C}}(X) \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ , qui montre que  $Z$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , par épaisseur de  $\mathcal{C}$ . Comme  $L_{\mathcal{C}}(X)$  est le plus grand sous-objet de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}$ , on en déduit  $Z = L_{\mathcal{C}}(X)$  et  $Y = 0$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{C}$  vérifie  $L_{\mathcal{C}}(X/L_{\mathcal{C}}(X)) = 0$ . Considérons une suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow 0$ , avec  $A$  et  $B$  objets de  $\mathcal{C}$ . Alors  $L_{\mathcal{C}}(X)$  contient  $A$ , de sorte que  $X/L_{\mathcal{C}}(X)$  est un quotient de  $B$ , donc un objet de  $\mathcal{C}$ . On en conclut la nullité de  $X/L_{\mathcal{C}}(X)$ , i.e.  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , d'où la proposition.  $\square$

Nous poursuivons cette section par quelques considérations sur les sous-catégories *épaisses* stables par colimites, dont l'intérêt est illustré par la proposition 1.4.12.

**Notation 2.5.6.** Nous désignerons par  $\overline{\mathcal{C}}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets  $X$  tels que, pour tout sous-quotient  $A$  de  $X$ , la nullité de  $L_{\mathcal{C}}(A)$  entraîne la nullité de  $A$ .

**Proposition 2.5.7.** *La catégorie  $\overline{\mathcal{C}}$  est la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  stable par colimites et contenant  $\mathcal{C}$ . De plus,  $\overline{\mathcal{C}}$  contient tous les objets  $X$  de  $\mathcal{A}$  tels que, pour tout sous-objet strict  $Y$  de  $X$ , on a  $L_{\mathcal{C}}(X/Y) \neq 0$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{C}$  est stable par sous-quotients et que  $L_{\mathcal{C}}$  coïncide avec l'identité sur  $\mathcal{C}$ , il est clair que  $\overline{\mathcal{C}}$  contient  $\mathcal{C}$ . Il est également immédiat que  $\overline{\mathcal{C}}$  est stable par sous-quotients.

Montrons la stabilité de  $\overline{\mathcal{C}}$  par extensions. Soit  $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow 0$  une suite exacte, où  $A$  et  $B$  sont objets de  $\overline{\mathcal{C}}$ . Si  $X'$  est un sous-quotient de  $X$ , il existe une suite exacte  $0 \rightarrow A' \rightarrow X' \rightarrow B' \rightarrow 0$  où  $A'$  et  $B'$  sont des sous-quotients de  $A$  et  $B$  respectivement. Supposons  $L_{\mathcal{C}}(X') = 0$  : on en déduit  $L_{\mathcal{C}}(A') = 0$ , donc  $A' = 0$  puisque  $A \in \text{Ob } \overline{\mathcal{C}}$ . Par conséquent,  $L_{\mathcal{C}}(B') = 0$ , donc  $B' = 0$ . Finalement  $X' = 0$ , ce qui montre que  $X$  est objet de  $\overline{\mathcal{C}}$ .

Établissons maintenant la stabilité de  $\overline{\mathcal{C}}$  par réunions filtrantes croissantes (ce qui implique la stabilité par toutes les colimites pour une sous-catégorie de Serre). Comme tout sous-quotient d'une réunion filtrante croissante de sous-quotients d'objets de  $\overline{\mathcal{C}}$  est réunion filtrante croissante d'objets de  $\overline{\mathcal{C}}$  (cf. proposition 1.3.5), il suffit de montrer que si  $X$  est non nul et réunion filtrante croissante de sous-objets appartenant à  $\overline{\mathcal{C}}$ , alors  $L_{\mathcal{C}}(X)$  est non nul. Cela résulte de ce que  $X$  contient un sous-objet non nul  $Y$  appartenant à  $\overline{\mathcal{C}}$ , lequel vérifie  $L_{\mathcal{C}}(Y) \neq 0$ .

Supposons enfin que  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  stable par colimites et contenant  $\mathcal{C}$ . On montre que si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que pour tout sous-objet strict  $Y$  de  $X$ , on a  $L_{\mathcal{C}}(X/Y) \neq 0$ , alors  $X$  est objet de  $\mathcal{D}$ . En effet, on a  $L_{\mathcal{D}}(X/L_{\mathcal{D}}(X)) = 0$  d'après la proposition 2.5.5. Comme  $\mathcal{D}$  contient  $\mathcal{C}$ , on en déduit  $L_{\mathcal{C}}(X/L_{\mathcal{D}}(X)) = 0$ , donc  $X/L_{\mathcal{D}}(X) = 0$ , soit  $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$ . Cela termine la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.5.8.** *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Notons  $c(X)$  la classe des objets  $A$  de  $\mathcal{A}$  tels que  $\text{Ext}^*(A, X) = 0$ , et  $e(X)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets dont tous les sous-objets sont dans  $c(X)$ .*

1. *Si dans une suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ , deux des trois objets  $A, B, C$  sont dans  $c(X)$ , il en est de même pour le troisième.*
2. *La sous-catégorie  $e(X)$  est épaisse dans  $\mathcal{A}$ .*
3. *La classe  $c(X)$  est stable par colimites filtrantes.*
4. *La sous-catégorie  $e(X)$  est stable par colimites.*

*Démonstration.* Le premier point provient de la suite exacte longue de cohomologie, il entraîne le troisième. Le second se déduit du théorème 4.2 de [Jen72] (énoncé dans des catégories de modules, ce résultat n'utilise en fait que l'hypothèse 1.3.4 et l'existence d'assez d'injectifs, conditions qui sont vérifiées dans  $\mathcal{A}$ ); il implique le dernier par épaisseur de  $e(X)$  (qui permet de ne considérer que des réunions filtrantes croissantes) et la proposition 1.3.5.  $\square$

Les propositions 2.5.7 et 2.5.8 ont l'utile conséquence suivante.

**Corollaire 2.5.9.** *Soit  $\mathcal{B}$  une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ . Tout objet  $\mathcal{B}$ -parfait de  $\mathcal{A}$  est  $\overline{\mathcal{B}^+}$ -parfait.*

Nous terminons cette section en introduisant des généralisations du foncteur  $L_{\mathcal{C}}$  qui permettent de retrouver la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{C}$ .

**Définition 2.5.10.** Etant donné un entier  $n$ , on définit  $\mathcal{C}_n$  comme étant la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets  $X$  possédant une filtration

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = X$$

telle que chaque quotient  $F_i/F_{i-1}$  appartienne à  $\mathcal{C}$ . Ainsi  $\mathcal{C}_n$  est réduite à l'objet nul pour  $n \leq 0$ , et  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ .

On constate que la réunion des sous-catégories  $\mathcal{C}_n$  est la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{C}$ .

**Proposition et définition 2.5.11.** *Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{C}_n$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par colimites. De plus, les foncteurs  $L_{\mathcal{C}_n}$  peuvent se définir inductivement à partir de  $L_{\mathcal{C}}$  via la relation  $L_{\mathcal{C}_{n+1}}(X)/L_{\mathcal{C}_n}(X) = L_{\mathcal{C}}(X/L_{\mathcal{C}_n}(X))$ .*

*Démonstration.* On définit par récurrence une suite d'endofoncteurs  $(L_n)$  de  $\mathcal{A}$  tels que pour tout  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,  $(L_n(X))$  est une suite croissante de sous-objets de  $X$ , par  $L_n = 0$  si  $n \leq 0$  et  $L_{n+1}(X)/L_n(X) = L_{\mathcal{C}}(X/L_n(X))$ .

On montre que  $\mathcal{C}_n$  est une sous-catégorie de Serre stable par colimites et que  $L_n = L_{\mathcal{C}_n}$ , par récurrence sur l'entier  $n$ . Pour  $n \leq 0$ , il n'y a rien à faire.

On suppose le résultat établi pour  $\mathcal{C}_n$  et l'on note  $\mathcal{C}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets  $X$  tels que  $L_{n+1}(X) = X$ . Il est clair que  $\mathcal{C}'$  est incluse dans  $\mathcal{C}_{n+1}$ . Pour établir l'inclusion inverse, soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}_{n+1}$ : il existe une suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$ , où  $C$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $A$  un objet de  $\mathcal{C}_n$ . Par conséquent,  $L_n(X)$  contient  $A$ , et  $X/L_n(X)$  est un quotient de  $C$ , donc appartient à  $\mathcal{C}$ , de sorte que  $L_{\mathcal{C}}(X/L_n(X)) = X/L_n(X)$ , i.e.  $L_{n+1}(X) = X$ .

Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}'$  et  $A$  un sous-objet de  $X$ . Comme  $L_n(A) = L_n(X) \cap A$  grâce à l'hypothèse de récurrence et à la proposition 2.5.3,  $A/L_n(A)$  est un sous-objet de  $X/L_n(X)$  qui appartient à  $\mathcal{C}$  puisque  $X$  appartient à  $\mathcal{C}'$ . Donc  $L_{\mathcal{C}}(A/L_n(A)) = A/L_n(A)$ , ce qui implique  $L_{n+1}(A) = A$ , i.e.  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ . Comme  $L_n(X)/L_n(A)$  est un sous-objet de  $L_n(X/A)$  ( $L_n$  est exact à gauche),  $(X/A)/(L_n(X/A))$  est un quotient de  $X/L_n(X)$ , donc par le même argument,  $X/A \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ . Enfin,  $L_n$  commutant aux sommes directes quelconques (car il en est ainsi pour  $L_{\mathcal{C}}$ ),  $\mathcal{C}'$  est stable par sommes directes quelconques.  $\mathcal{C}'$  est donc une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par colimites.

Il reste à établir l'égalité  $L_{n+1} = L_{\mathcal{C}'}$ . Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ ,  $L_{n+1}(X)$  est un sous-objet de  $X$  appartenant à  $\mathcal{C}'$ , il est donc inclus dans  $L_{\mathcal{C}'}(X)$ . Pour l'autre inclusion, noter que  $L_{n+1}(L_{\mathcal{C}'}(X)) = L_{\mathcal{C}'}(X)$  (par définition de  $\mathcal{C}'$ ) est inclus dans  $L_{n+1}(X)$ . En effet,  $L_{n+1}$  préserve les injections: l'hypothèse de récurrence montre que  $L_{n+1}/L_n$  les préserve (une chasse au diagramme montre que le conoyau d'un monomorphisme entre foncteurs exacts à gauche préserve les injections), d'où l'on déduit le résultat par une autre chasse au diagramme (une extension de deux foncteurs préservant les injections préserve les injections).  $\square$

*Remarque 2.5.12.* Notons  $\mathcal{D} = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n)^+$ . Alors  $L_{\mathcal{D}}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{\mathcal{C}_n}(X)$  pour tout objet  $X$ .

## 2.6 Objets finis

**Définition 2.6.1.** Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est dit :

- *simple* s'il est non nul et ne possède aucun sous-objet strict non nul ;
- *de longueur finie*, ou *fini* s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et une filtration finie

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = X$$

telle que les quotients  $F_i/F_{i-1}$  sont simples pour tout  $1 \leq i \leq n$  (une telle filtration s'appelle une *suite de composition* de  $X$ ). Le plus petit entier  $n$  qui convient s'appelle alors la *longueur* de  $X$ , elle sera notée  $\text{lg}(X)$ .

**Notation 2.6.2.** Nous noterons  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  un système fondamental de représentants des objets simples de  $\mathcal{A}$  (modulo l'isomorphie) et  $\mathcal{A}^f$  la sous-catégorie pleine des objets finis de  $\mathcal{A}$ .

*Remarque 2.6.3.* 1. La catégorie  $\mathcal{A}^f$  est la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  contenant tous les objets simples (cf. remarque 1.4.3.6).

2. La catégorie  $\mathcal{E}_k$  des  $k$ -espaces vectoriels possède un unique objet simple (à isomorphisme près), à savoir  $k$ . Ainsi les espaces vectoriels de longueur finie sont les espaces vectoriels de dimension finie, de sorte que la notation  $\mathcal{E}_k^f$  introduite au chapitre 1, section 1.1 est compatible avec la convention générale ici adoptée pour les objets finis.
3. Plus généralement, si  $A$  est un anneau commutatif, les  $A$ -modules simples sont les modules isomorphes à  $A/\mathfrak{m}$ , où  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal de  $A$ .
4. En particulier, les groupes abéliens de longueur finie sont exactement les groupes abéliens finis au sens ensembliste.
5. Tout morphisme non nul dont la source est simple est un monomorphisme ; tout morphisme non nul dont le but est simple est un épimorphisme. En particulier, si  $S$  et  $S'$  sont deux éléments distincts de  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ , on a  $\text{hom}(S, S') = 0$ , et l'anneau  $\text{End } S$  est un corps (non commutatif en général).

**Lemme 2.6.4.** Soit  $X$  un objet non nul de type fini de  $\mathcal{A}$ . Il existe un épimorphisme de  $X$  sur un objet simple.

*Démonstration.* Soit  $E$  l'ensemble des sous-objets stricts de  $X$ , ordonné par l'inclusion. Il est non vide car  $X$  est non nul. Il est *inductif* car la réunion filtrante croissante d'une famille de sous-objets stricts de  $X$  est distincte de  $X$  puisque cet objet est tf. Le lemme de Zorn fournit donc un élément maximal  $A$  de  $E$ , et  $X/A$  est un quotient simple de  $X$ .  $\square$

On établit de la même façon le résultat suivant.

**Proposition 2.6.5.** Tout objet co-tf non nul de  $\mathcal{A}$  possède un sous-objet simple.

**Proposition 2.6.6.** Un objet de  $\mathcal{A}$  est fini si et seulement s'il est artinien et noethérien.

*Démonstration.* Il est clair qu'un objet simple est artinien et noethérien. Comme  $\mathcal{A}^{art}$  et  $\mathcal{A}^{noet}$  sont des sous-catégories épaisses de  $\mathcal{A}$ , on en déduit que tout objet fini est artinien et noethérien.

Réciproquement, soit  $X$  un objet artinien et noethérien. Supposons  $X$  infini : il existe alors un sous-objet infini *minimal*  $Y$  dans  $X$  (puisque  $X$  est artinien). Comme  $Y$  est tf (car  $X$  est noethérien) et non nul, il existe un épimorphisme de  $X$  sur un objet simple (lemme 2.6.4), dont nous noterons  $N$  le noyau :  $N$  est un sous-objet strict de  $Y$ , et il est infini, car sinon la suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow Y \rightarrow S \rightarrow 0$  entraînerait la finitude de  $Y$ . Cette contradiction avec la minimalité de  $Y$  achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 2.6.7.* Un objet dont l'ensemble des sous-objets est fini est forcément fini. La réciproque est erronée — considérer un espace vectoriel de dimension finie strictement supérieure à 1 sur un corps infini, par exemple.

En revanche, si les corps d'endomorphismes des objets simples de  $\mathcal{A}$  sont *finis*, l'ensemble des sous-objets d'un objet fini est fini. Dans le cas où les simples n'ont pas d'endomorphismes non triviaux, le nombre de sous-objets d'un objet fini de longueur  $n$  est compris entre  $n + 1$  (atteint pour un objet fini unisériel — i.e. dont la suite de composition est unique) et le cardinal de l'ensemble des sous-espaces vectoriels du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\mathbb{F}_2^{\oplus n}$  (atteint pour la somme directe de  $n$  copies d'un objet simple).

*Remarque 2.6.8.* Un objet fini n'est pas forcément de présentation finie (c'est cependant le cas dans une catégorie localement noethérienne d'après la proposition 2.3.2). Considérons par exemple un corps commutatif  $k$  et la  $k$ -algèbre  $A = k[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$  des polynômes en une infinité dénombrable de variables sur  $k$ . Le  $A$ -module  $k$  (l'action d'un polynôme  $P$  étant donnée par la multiplication par  $P(0)$ ) est *simple*, mais il n'est pas pf. En effet, le noyau de l'épimorphisme d'augmentation  $A \rightarrow k$  (donné par  $P \mapsto P(0)$ ) est l'idéal  $I$  engendré par les  $X_i$ , qui n'est pas de type fini; il suffit ensuite d'appliquer la proposition 2.2.3.

La remarque précédente amène à introduire deux hypothèses (duales) évitant certaines pathologies.

**Hypothèse 2.6.9.** Tout objet simple de  $\mathcal{A}$  est pf (tous les objets finis sont alors pf).

**Hypothèse 2.6.10.** Tout objet simple de  $\mathcal{A}$  est co-pf (tous les objets finis sont alors co-pf).

La proposition 2.6.6 implique en particulier que  $\mathcal{A}^f$  est essentiellement petite (par le corollaire 2.1.9), donc que  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  est un ensemble. Cela permet d'introduire la notation suivante.

**Notation 2.6.11.** Le groupe de Grothendieck  $G_0(\mathcal{A}^f; \mathcal{A})$  sera noté  $G_0^f(\mathcal{A})$ .

**Proposition 2.6.12.** *Le morphisme de groupes abéliens  $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\mathcal{A})] \rightarrow G_0^f(\mathcal{A})$  envoyant le générateur  $[S]$  de  $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\mathcal{A})]$  sur le générateur  $[S]$  de  $G_0^f(\mathcal{A})$  est un isomorphisme de groupes abéliens. De plus, l'image réciproque d'un générateur canonique  $[X]$  de  $G_0^f(\mathcal{A})$  par cet isomorphisme est un élément positif de  $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\mathcal{A})]$  (muni de l'ordre compatible avec sa structure de groupe pour lequel les générateurs canoniques sont positifs), et elle s'envoie sur  $\lg(X)$  par le morphisme de groupes  $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\mathcal{A})] \rightarrow \mathbb{Z}$  associant 1 aux générateurs canoniques.*

Cette propriété classique, que nous admettrons (cf. [Ben91], ch. I, §1 par exemple pour une démonstration dans le cas des modules; le cas général n'est pas différent), est équivalente au fait que deux suites de composition d'un objet fini font apparaître, à isomorphisme et à l'ordre des facteurs près, les mêmes sous-quotients simples (comptés avec multiplicité).

**Notation 2.6.13.** Soit  $X$  un objet fini de  $\mathcal{A}$ ; nous écrivons la décomposition de  $[X]$  dans  $G_0^f(\mathcal{A})$  sous la forme

$$[X] = \sum_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} m_S(X)[S].$$

L'entier (positif)  $m_S(X)$  est appelé *multiplicité de  $S$  dans  $X$* . On dit que  $S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  est *facteur de composition* de  $X$  si  $m_S(X) > 0$ ; on dit que c'est un facteur de composition *simple* si  $m_S(X) = 1$ , *multiple* si  $m_S(X) > 1$ .

*Remarque 2.6.14.* Dans nombre de cas usuels où  $\mathcal{A}$  est munie d'une structure tensorielle exacte, le produit tensoriel de deux objets finis est fini, ce qui permet de munir  $G_0^f(\mathcal{A})$  d'une structure d'anneau commutatif (si l'unité n'est pas un objet fini, on peut ajouter formellement une unité). En revanche, il est exceptionnel que le produit tensoriel de deux objets simples reste simple, et la détermination de la loi multiplicative sur  $G_0^f(\mathcal{A})$  peut s'avérer très difficile même lorsque la structure de groupe abélien est bien connue. Cette situation se rencontre dans la catégorie tensorielle  $(\mathbf{Mod}_A, \otimes_k)$ , où  $A$  est une algèbre sur un corps commutatif  $k$  qui est de dimension finie comme  $k$ -espace vectoriel; le cas particulier le plus important est fourni par la théorie des représentations des groupes finis.

**Proposition 2.6.15.** *Soient  $\mathcal{B}$  une catégorie de Grothendieck et  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur exact.*

1. *Supposons  $F$  fidèle. Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(X)$  est fini dans  $\mathcal{B}$ , alors  $X$  est fini dans  $\mathcal{A}$ . De plus,  $\text{lg}(X) \leq \text{lg}(F(X))$ .*
2. *Supposons que  $F$  est plein et que son image est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{B}$ . Si  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{A}$ , alors  $F(X)$  est un objet fini de  $\mathcal{B}$ , et  $\text{lg}(F(X)) \leq \text{lg}(X)$  (il y a donc égalité si  $F$  est de plus fidèle).*

*Démonstration.* Dans le premier cas, on sait que  $X$  est noethérien et artinien par les propositions 2.1.5 et 2.4.7, donc fini (proposition 2.6.6). Si l'on applique le foncteur  $F$  à une suite de composition de  $X$ , on obtient une filtration de  $F(X)$  de longueur  $\text{lg}(X)$  dont les quotients sont non nuls (par exacte fidélité de  $F$ ), ce qui prouve que la longueur de  $F(X)$  est au moins égale à celle de  $X$ .

Pour la seconde assertion, on commence par remarquer que si  $S$  est un objet simple de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(S)$  est non nul, alors  $F(S)$  est simple. En effet, considérons un monomorphisme  $j : B \hookrightarrow F(S)$  dans  $\mathcal{B}$  avec  $A$  non nul : comme l'image de  $F$  est une sous-catégorie de Serre, il existe un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(A) \simeq B$ . Vu que  $F$  est plein, il existe un morphisme  $i : A \rightarrow S$  tel que  $F(i) \simeq j$ . Puisque  $i$  est, comme  $j$ , non nul, ce morphisme est surjectif ( $S$  est simple), donc  $F(i) = j$  est surjectif par exactitude de  $F$ , ce qui entraîne que  $j$  est un isomorphisme. Ainsi  $F(S)$  est simple, ce qui prouve la seconde assertion pour un objet  $X$  de longueur 1 ; le cas général s'en déduit par récurrence sur la longueur.  $\square$

**Définition 2.6.16.** Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est dit :

- *localement fini* — en abrégé *lf* — s'il est réunion d'un ensemble filtrant croissant de sous-objets finis.
- *co-localement fini* — en abrégé *co-lf* — s'il existe un ensemble filtrant décroissant de sous-objets *co-finis* de  $X$  (i.e. tels que le quotient de l'inclusion canonique est fini) d'intersection nulle.

**Notation 2.6.17.** Nous désignerons par  $\mathcal{A}^{lf}$  (resp.  $\mathcal{A}^{co-lf}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets lf (resp. co-lf).

Ainsi  $\mathcal{A}^{lf}$  égale  $(\mathcal{A}^f)^+$ , avec les notations de la proposition 2.5.1, qui fournit le résultat suivant.

**Proposition 2.6.18.**  *$\mathcal{A}^{lf}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par colimites. Elle est épaisse lorsque l'hypothèse 2.6.9 est satisfaite.*

*Remarque 2.6.19.*  $\mathcal{A}^{lf}$  est donc une catégorie abélienne possédant des colimites et vérifiant 1.3.4 ; elle a de plus, par définition, un ensemble de générateurs noethériens, à savoir  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ . C'est donc une catégorie localement noethérienne.

*Remarque 2.6.20.* L'exemple 2.6.22 montrera que sans hypothèse,  $\mathcal{A}^{lf}$  n'est pas toujours épaisse dans  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 2.6.21.** *Un objet *tf* et *lf* est fini.*

*Démonstration.* Un objet lf est réunion filtrante croissante de ses sous-objets finis, s'il est tf, il est égal à l'un d'entre eux.  $\square$

*Exemple 2.6.22.* Conservons les notations de la remarque 2.6.8. Tout  $A$ -module sur lequel l'idéal d'augmentation  $I$  agit trivialement est lf. En effet, un tel module est un  $k$ -espace vectoriel, c'est donc une somme de copies du  $A$ -module simple  $k$ . Par exemple, le  $A$ -module  $I/I^2$  est lf ; il n'est en revanche pas fini (sinon ce serait un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, or la famille des images des indéterminées  $X_i$  dans  $I/I^2$  est  $k$ -libre).

Le  $A$ -module  $A/I^2$  n'est pas lf, car sinon il serait fini d'après la proposition 2.6.21, ce qui impliquerait que le sous-module  $I/I^2$  de  $A/I^2$  est fini.

On constate maintenant que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow A/I^2 \rightarrow k \rightarrow 0$$

dans laquelle  $I/I^2$  est lf,  $k$  est fini, donc a fortiori lf, et  $A/I^2$  n'est pas lf. Ainsi  $(\mathbf{Mod}_A)^{lf}$  n'est pas une sous-catégorie épaisse de  $\mathbf{Mod}_A$ .

Nous énonçons, pour finir cette section, les résultats « duaux » des propositions 2.6.18 et 2.6.21, ainsi que le comportement des notions introduites sous l'effet d'une bonne dualité, dont nous laissons la démonstration au lecteur.

**Proposition 2.6.23.**  *$\mathcal{A}^{colf}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par limites.*

**Proposition 2.6.24.** *Un objet co-tf et co-lf est fini.*

**Proposition 2.6.25.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux catégories abéliennes en bonne dualité.*

1. *Le dual d'un objet simple (resp. fini) de  $\mathcal{A}$  est un objet simple (resp. fini) de  $\mathcal{A}'$ .*
2. *Les foncteurs de dualité induisent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre  $G_0^f(\mathcal{A})$  et  $G_0^f(\mathcal{A}')$ .*
3. *Le dual d'un objet localement fini de  $\mathcal{A}$  est un objet co-localement fini de  $\mathcal{A}'$ .*
4. *Le dual d'un objet bien échelonné co-localement fini de  $\mathcal{A}$  est un objet localement fini de  $\mathcal{A}'$ .*

## 2.7 Objets semi-simples

**Proposition et définition 2.7.1.** *Étant donné un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ , les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'objet  $X$  est isomorphe à la somme directe d'une famille d'objets simples de  $\mathcal{A}$ .*
2. *L'objet  $X$  est somme d'une famille de sous-objets simples.*
3. *Tout sous-objet de  $X$  est facteur direct et  $X$  est localement fini.*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, nous dirons que  $X$  est un objet semi-simple de  $\mathcal{A}$ .*

*Si de plus tous les sous-objets simples de  $X$  sont isomorphes à un même objet  $S$ , nous dirons que  $X$  est semi-simple isotypique de type  $S$ .*

*Démonstration.* Supposons la deuxième hypothèse satisfaite et notons  $(S_i)_{i \in I}$  une famille de sous-objets simples de  $X$  de somme  $X$ . Nous allons montrer que, pour tout sous-objet  $A$  de  $X$ , il existe une partie  $J$  de  $I$  telle que  $X$  soit la somme directe de  $A$  et des  $S_i$  pour  $i \in J$ . Pour cela, on considère l'ensemble  $E$ , ordonné par inclusion, des parties  $J$  de  $I$  telles que les sous-objets  $A$  et  $S_i$  ( $i \in J$ ) soient en somme directe. Il est non vide (il contient  $\emptyset$ ) et inductif. En effet, grâce à la proposition 1.3.5 et à la proposition 8.12 de [Pop73] (§2.8), qui montrent qu'une famille de sous-objets de  $X$  est en somme directe si et seulement s'il en est de même pour toutes ses sous-familles finies, l'hypothèse 1.3.4 assure que  $E$  est stable par réunion filtrante croissante. Le lemme de Zorn fournit alors un élément maximal  $J$  dans  $E$ . Notons  $Y$  la somme de  $A$  et des  $S_i$  ( $i \in J$ ) : pour tout  $j \in I$ , l'intersection de  $S_j$  et de  $Y$  est non nulle, car sinon  $A$  et les  $S_i$  ( $i \in J \cup \{j\}$ ) seraient en somme directe, contredisant la maximalité de  $J$ . Comme  $S_j$  est simple, cela entraîne  $Y \supset S_j$  pour tout  $j \in I$ , donc  $Y = X$ .

Cela implique que si la deuxième hypothèse est satisfaite, il en est de même pour la première (prendre  $A = 0$ ) et la dernière. Comme la première implique la seconde, il suffit de montrer que la dernière implique la seconde.

Supposons que  $X$  vérifie 3. Notons  $Y$  la somme des sous-objets simples de  $X$ . Par hypothèse, il existe un sous-objet  $Z$  de  $X$  tel que  $X = Y \oplus Z$ . Si  $Z$  était non nul, il contiendrait un sous-objet simple  $S$ , puisque  $Z$  est, comme  $X$ , localement fini. Cela entraînerait  $S \subset Y \cap Z = 0$ , contradiction qui montre que  $Y$  égale  $X$  et achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 2.7.2.* On peut affaiblir, dans la troisième assertion, l'hypothèse de finitude locale de  $X$ . Nous n'aurons pas usage de ces raffinements.

**Notation 2.7.3.** Nous noterons  $\mathcal{A}^{ss}$  la sous-catégorie pleine des objets semi-simples de  $\mathcal{A}$ ; si  $S$  est un élément de  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ , nous noterons  $\mathcal{A}_S^{ss}$  la sous-catégorie pleine des objets semi-simples isotypiques de type  $S$ .

**Proposition 2.7.4.** *La catégorie  $\mathcal{A}^{ss}$  est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{A}$  stable par colimites; il en est de même pour  $\mathcal{A}_S^{ss}$ , où  $S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ .*

*Démonstration.* La première caractérisation des objets semi-simples montre qu'une somme directe quelconque de tels objets est encore semi-simple. La dernière montre que si  $X$  est semi-simple et  $Y$  est un sous-objet de  $X$ ,  $Y$  est semi-simple ( $Y$  est comme  $X$  localement fini, et si  $A'$  est un supplémentaire dans  $X$  d'un sous-objet  $A$  de  $Y$ ,  $A' \cap Y$  est un supplémentaire de  $A$  dans  $Y$ ), de même que  $X/Y$  (qui est isomorphe à un sous-objet de  $X$ ). Cela montre la proposition pour ce qui concerne  $\mathcal{A}^{ss}$ ; le cas isotypique s'en déduit aussitôt.  $\square$

**Proposition 2.7.5.** *Les catégories  $\mathcal{A}^{ss}$  et  $\prod_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{E}_{\text{End } S}$  sont équivalentes. Plus précisément, les foncteurs suivants sont des équivalences réciproques l'une de l'autre :*

$$\mathcal{A}^{ss} \rightarrow \prod_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{E}_{\text{End } S}$$

de composantes données par  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(S, \cdot)$  (on note que  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(S, X)$  est un  $\text{End } S$ -espace vectoriel à droite naturellement en l'objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ ), et

$$\prod_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{E}_{\text{End } S} \rightarrow \mathcal{A}^{ss}$$

donné sur les objets par

$$(V_S)_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mapsto \bigoplus_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} V_S \otimes_{\text{End } S} S$$

et défini de façon analogue sur les morphismes.

Dans ces équivalences,  $\mathcal{A}_S^{ss} \simeq \mathcal{E}_{\text{End } S}$ .

Cette propriété (qui se déduit aisément de la proposition 2.7.1) est établie dans [Pop73], § 5.2.

*Remarque 2.7.6.* Le produit tensoriel qui apparaît dans le second foncteur est défini de façon analogue à la définition 1.6.14;  $\mathcal{E}_{\text{End } S} \rightarrow \mathcal{A} \quad E \mapsto E \otimes_{\text{End } S} S$  est un foncteur qui à un espace vectoriel de dimension  $n$  associe la somme directe de  $n$  copies de  $S$ . Nous renvoyons à [Pop73], § 3.7 pour plus de détails à ce sujet.

**Proposition 2.7.7.** *Un objet  $tf$  (resp.  $co\text{-}tf$ ) et semi-simple de  $\mathcal{A}$  est fini.*

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de la proposition 2.7.5, et des propositions 2.1.6 et 2.4.12 combinées respectivement aux remarques 2.1.3 et 2.4.3 sur la (co)-type finitude dans une catégorie d'espaces vectoriels.  $\square$

*Remarque 2.7.8.* Le cas «  $tf$  » de la proposition résulte aussi directement de la proposition 2.6.21; en revanche, le cas «  $co\text{-}tf$  » est moins formel (et nécessite l'emploi des hypothèses de régularité sur  $\mathcal{A}$ ).

Nous appliquons maintenant les constructions de la section 2.5 à la sous-catégorie de Serre stable par colimites  $\mathcal{A}^{ss}$ .

**Définition 2.7.9** (Socle). Le *socle* est le foncteur  $L_{\mathcal{A}^{ss}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{ss}$ . Il est noté  $\text{soc}$ . Plus généralement, étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , le  *$n$ -ième socle itéré* est le foncteur  $\text{soc}_n = L_{\mathcal{A}_n^{ss}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_n^{ss}$ .



La proposition suivante est une conséquence directe des considérations précédentes.

**Proposition 2.7.10.** *Le foncteur soc s'identifie à*

$$\bigoplus_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \text{hom}(S, \cdot) \otimes_{\text{End } S} S.$$

On s'intéresse maintenant à la catégorie  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$  en relation avec les notions de finitude que nous avons introduites précédemment. On note que  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$  est aussi la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  stable par colimites et contenant  $\mathcal{A}^f$ ; en particulier,  $\mathcal{A}^{lf}$  est incluse dans  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$ , et lui est égale lorsque l'hypothèse 2.6.9 est satisfaite (par la proposition 2.5.1) — donc en particulier lorsque  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne.

**Proposition 2.7.11.** *Un objet noethérien  $X$  de  $\mathcal{A}$  qui appartient à  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$  est fini.*

*Démonstration.* En effet, étant noethérien,  $X$  possède un sous-objet fini maximal  $F$ . Alors  $X/F$  ne contient aucun objet fini non nul (car  $\mathcal{A}^f$  est épaisse dans  $\mathcal{A}$ ), donc aussi aucun objet semi-simple non nul, ce qui entraîne, par définition de  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$ , que  $X/F$  est nul. Ainsi  $X$  est fini.  $\square$

**Proposition 2.7.12.** *Tout objet artinien de  $\mathcal{A}$  appartient à  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$ .*

*Démonstration.* Comme tout sous-quotient d'un objet artinien est artinien, il suffit de montrer qu'un objet artinien non nul contient un objet fini non nul. Cela résulte de la proposition 2.6.5.  $\square$

**Proposition 2.7.13.** *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ .*

1. *Si  $X$  est co-tf, tout sous-objet  $A$  de  $X$  tel que  $A \cap \text{soc } X = 0$  est nul. De plus,  $\text{soc } X$  est fini.*
2. *Si  $X$  est un objet de  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$  (en particulier, si  $X$  est localement fini) et que  $\text{soc } X$  est fini, alors  $X$  est co-tf.*
3. *Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée.*
  - (a) *L'objet  $X$  est artinien.*
  - (b) *L'objet  $X$  est co-tf et  $\mathcal{A}$  satisfait l'hypothèse 2.6.10.*

*Alors  $\text{soc}_n(X)$  est fini pour tout entier  $n$ .*

*Démonstration.* Le début de la première assertion résulte de la proposition 2.6.5, puisque si  $A$  est un sous-objet de l'objet co-tf  $X$ , alors  $A$  est co-tf, et  $A \cap \text{soc } X = \text{soc } A$ . La fin découle de la proposition 2.7.7 et de ce qu'un sous-objet d'un objet co-tf est co-tf.

Supposons à présent que  $X$  est un objet de  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$  de socle fini. Si  $(A_n)$  est une suite décroissante d'intersection nulle de sous-objets de  $X$ , alors  $(A_n \cap \text{soc } X)$  est une suite décroissante d'intersection nulle de l'objet fini  $\text{soc } X$ , donc il existe un entier  $n$  tel que  $A_n \cap \text{soc } X = 0$ , donc  $A_n = 0$  par définition de  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$ . Cela montre que  $X$  est co-tf, d'où le troisième point (on notera que cette démonstration est identique à celle de la proposition 2.4.5).

La dernière assertion s'établit par récurrence sur  $n$  : supposons que  $\text{soc}_n(X)$  est fini. Alors  $X/\text{soc}_n(X)$  est artinien si  $X$  l'est, et est co-tf si  $X$  est co-tf et que  $\mathcal{A}$  satisfait l'hypothèse 2.6.10 (utiliser la proposition 2.4.11). Donc  $\text{soc}(X/\text{soc}_n(X)) = \text{soc}_{n+1}(X)/\text{soc}_n(X)$  est fini (utiliser la deuxième assertion), ce qui prouve que  $\text{soc}_{n+1}(X)$  est fini et achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 2.7.14.* Un objet noethérien a toujours un socle fini. Il n'en est pas forcément de même pour un objet tf.

*Exemple 2.7.15.* Reprenons les notations de l'exemple 2.6.22. Le  $A$ -module tf  $M = A/I^2$  a pour socle  $I/I^2$ , qui est infini. On notera également que l'on a  $M = \text{soc}_2(M)$ , ce qui montre que la proposition 2.7.11 ne se généralise pas aux objets tf appartenant à  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$ .

La proposition précédente rend naturelle la considération de l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 2.7.16.** Les objets co-tf de  $\mathcal{A}$  appartiennent à  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$ .

On constate que cette hypothèse est toujours vérifiée lorsque  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne en vertu de la proposition 2.7.12.

**Corollaire 2.7.17.** *Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$  et  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .*

– *Si  $X$  est co- $pf_n$ , alors*

$$\sum_{S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \dim_{\text{End } S} \text{Ext}^k(S, X) < \infty$$

*pour tout entier  $k \leq n$ .*

– *La réciproque est vraie si  $X$  appartient à  $\overline{\mathcal{A}^{ss}}$  et que l'hypothèse 2.7.16 est satisfaite.*

*Démonstration.* Le cas  $n = 0$  découle de la description du foncteur soc donnée dans la proposition 2.7.10 (qui montre que la condition de l'énoncé équivaut à la finitude de  $\text{soc } X$ ) et de la proposition 2.7.13. Le cas général s'en déduit par récurrence en appliquant la proposition 2.4.9.  $\square$

**Corollaire 2.7.18.** *Soient  $I$  un objet injectif et  $S$  un objet simple de  $\mathcal{A}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'enveloppe injective de  $S$  est (isomorphe à)  $I$ .*
2. *L'objet  $I$  est co-tf et  $\text{soc } I \simeq S$ .*
3. *L'objet  $I$  est indécomposable et  $S$  se plonge dans  $I$ .*

*Démonstration.* La première assertion entraîne que  $I$  est co-tf en vertu de la proposition 2.4.5; la définition de l'enveloppe injective montre d'autre part qu'un sous-objet non nul de  $I$  rencontre toujours  $S$ , ce qui montre que le socle de  $I$  est réduit à  $S$ .

La seconde assertion entraîne que  $I$  est indécomposable grâce à la proposition 2.7.13 (si  $I = J \oplus K$ , l'un des deux objets  $J$  et  $K$  ne rencontre pas  $S$ , donc il est nul).

Enfin, la troisième assertion entraîne la première, car si  $J$  est une enveloppe injective de  $S$ , le plongement  $S \hookrightarrow I$  se prolonge (par injectivité de  $I$ ) en un *plongement* (par définition de l'enveloppe injective)  $J \hookrightarrow I$ , qui fait de  $J$  un facteur direct de  $I$  (par injectivité de  $J$ ), indécomposable, d'où  $J \simeq I$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.7.19.** *Les groupes abéliens  $K'_0(\mathcal{A})$  et  $G_0^f(\mathcal{A})$  sont canoniquement isomorphes. Plus précisément, les morphismes donnés par*

$$K'_0(\mathcal{A}) \rightarrow G_0^f(\mathcal{A}) \quad [I] \mapsto [\text{soc } I]$$

et

$$G_0^f(\mathcal{A}) \rightarrow K'_0(\mathcal{A}) \quad [F] \mapsto [I_F]$$

où  $I_F$  désigne une enveloppe injective de  $F$  sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de la proposition 2.6.12, du corollaire 2.7.18 et du fait que si  $I$  et  $I'$  sont des enveloppes injectives de  $A$  et  $A'$  respectivement, alors  $I \oplus I'$  est une enveloppe injective de  $A \oplus A'$ .  $\square$

*Remarque 2.7.20.* Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est munie d'une structure tensorielle qui induit une structure d'anneau sur les groupes de Grothendieck considérés, l'isomorphisme du corollaire n'est pas en général un isomorphisme d'anneaux.

**Définition 2.7.21** (Radical, cosocle). Le *radical* d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est l'intersection des sous-objets stricts maximaux  $M$  de  $X$  (i.e. des sous-objets  $M$  de  $X$  tels que  $X/M$  est simple); on la note  $\text{rad } X$ . Plus généralement, si  $n$  est un entier, le  *$n$ -ième radical itéré* de  $X$ , noté  $\text{rad}_n(X)$  est défini par récurrence par  $\text{rad}_n(X) = X$  si  $n \leq 0$  et  $\text{rad}_n(X) = \text{rad}(\text{rad}_{n-1}(X))$  sinon.

Le *cosocle* de  $X$  est le quotient  $\text{cosoc } X = X/\text{rad } X$ ; plus généralement, son  *$n$ -ième cosocle itéré* est  $\text{cosoc}_n(X) = X/\text{rad}_n(X)$ .

On dit que  $X$  est *sans radical* si  $\text{rad } X = 0$ .

- Proposition 2.7.22.** 1. Un objet de  $\mathcal{A}$  est sans radical si et seulement s'il se plonge dans un produit d'objets simples.
2. Un objet semi-simple est sans radical.
3. Un objet co-tf et sans radical est semi-simple fini.
4. Si  $\mathcal{A}$  est très bien échelonnée, alors tout objet bien échelonné sans radical de  $\mathcal{A}$  est semi-simple.
5. Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\text{cosoc} X$  est le plus grand quotient sans radical de  $X$ . Cela permet de voir  $\text{cosoc}$  comme un foncteur de  $\mathcal{A}$  vers la sous-catégorie des objets sans radical, qui est une sous-catégorie de Serre stable par limites. Ce foncteur est adjoint à gauche au foncteur d'oubli.
6. Si  $X$  est un objet de type fini de  $\mathcal{A}$ , alors  $\text{cosoc} X$  est fini, et est nul seulement si  $X$  est nul.

*Démonstration.* Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ; notons  $\mathfrak{M}$  (resp.  $\mathfrak{C}$ ) l'ensemble des sous-objets maximaux (resp. cofinis) de  $X$ . Si  $X$  est sans radical, le morphisme évident

$$X \rightarrow \prod_{M \in \mathfrak{M}} X/M \quad (2.3)$$

est injectif, de sorte que  $X$  se plonge dans un produit d'objets simples.

Réciproquement, si  $X$  est un sous-objet du produit d'une famille  $(S_i)_{i \in I}$  d'objets simples, notons

$$M_i = A \cap \prod_{j \in I \setminus \{i\}} S_j.$$

Alors soit  $M_i = A$ , soit  $M_i \in \mathfrak{M}$ , de sorte que

$$\text{rad} X \subset \bigcap_{i \in I} M_i \subset \bigcap_{i \in I} \left( \prod_{j \in I \setminus \{i\}} S_j \right) = 0.$$

La proposition 2.4.13 montre qu'un objet sans radical et co-tf se plonge dans un produit fini d'objets simples, c'est-à-dire un objet semi-simple fini.

Supposons maintenant que  $\mathcal{A}$  est très bien échelonnée et que  $X$  est sans radical. Comme le produit apparaissant dans (2.3) est naturellement isomorphe à la limite *filtrante* des quotients  $X/C$ ,  $C$  décrivant l'ensemble ordonné (par inclusion)  $\mathfrak{C}$  (observer que si  $M$  et  $M'$  sont deux éléments distincts de  $\mathfrak{M}$ , alors le morphisme évident  $X/(M \cap M') \rightarrow X/M \times X/M'$  est un isomorphisme, et que  $\mathfrak{C}$  est l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $\mathfrak{M}$ ), l'hypothèse d'exactitude des limites filtrantes bien échelonnées montre que le monomorphisme (2.3) est un isomorphisme. Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.5.3 pour voir que  $X$  est semi-simple.

La fin de la proposition s'obtient par des arguments formels duaux de ceux de la section 2.5.  $\square$

*Remarque 2.7.23.* L'exemple du groupe abélien  $\mathbb{Z}$  illustre qu'un objet noethérien sans radical n'est pas nécessairement semi-simple. Cela montre qu'il n'existe aucune classe d'objets bien échelonnés dans  $\mathbf{Ab}$  qui en fasse une catégorie très bien échelonnée.

On peut naturellement tirer de la proposition 2.7.22 des conséquences analogues à celles de la proposition 2.7.13; nous nous bornerons à indiquer les liens entre socle et cosocle en situation de bonne dualité.

**Corollaire 2.7.24.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux catégories abéliennes en bonne dualité.*

1. *Il existe des isomorphismes  $\text{soc}_n(DX) \simeq D(\text{cosoc}_n X)$  et  $\text{cosoc}_n(DX) \simeq D(\text{soc}_n X)$  naturels en l'objet bien échelonné  $X$  de  $\mathcal{A}$ .*
2. *Un objet projectif de  $\mathcal{A}$  est de type fini si et seulement si son cosocle est fini.*
3. *Les groupes abéliens  $K_0(\mathcal{A})$  et  $G_0^f(\mathcal{A})$  sont canoniquement isomorphes, les isomorphismes étant induits par le cosocle et la couverture projective.*

Ce résultat se déduit des propositions précédentes et des résultats de la section 2.4 concernant les catégories en bonne dualité.

## 2.8 Notions de finitude et catégories quotients

### 2.8.1 Généralités

**Proposition 2.8.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ . L'image d'un objet noethérien (resp. artiniën) de  $\mathcal{A}$  par le foncteur canonique  $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{C}$  est noethérienne (resp. artiniën).*

*Démonstration.* Soient  $X$  un objet noethérien de  $\mathcal{A}$  et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de sous-objets de  $X$  telle que la suite  $(\pi(A_n))$  de sous-objets de  $\pi(X)$  est croissante. La famille des sommes des sous-familles finies non vides de  $(A_n)$  étant filtrante croissante dans  $X$ , elle stationne : il existe une partie finie non vide  $P$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $A_n \subset \sum_{k \in P} A_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit par application du foncteur exact  $\pi$  l'inclusion  $\pi(A_n) \subset \sum_{k \in P} \pi(A_k) = \pi(A_m)$  dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $m$  désigne le plus grand élément de  $P$ . Cela montre que la suite  $(\pi(A_n))$  stationne. On en conclut que  $\pi(X)$  est noethérien par application de la remarque 1.4.8.

Le cas artiniën se traite de façon similaire.  $\square$

**Corollaire 2.8.2.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est localement noethérienne et que  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  stable par colimites filtrantes. Alors  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  est localement noethérienne.*

Ce résultat découle de la proposition précédente et de la commutation du foncteur canonique aux colimites dans le cas considéré. Dans [Gab62], ch. III, § 4 (cor. 1), est également établi que, sous les hypothèses du corollaire, le foncteur section commute aux colimites filtrantes.

En revanche, l'image par le foncteur canonique d'un objet tf n'est pas en général tf, même lorsque la sous-catégorie épaisse considérée est stable par colimites.

*Exemple 2.8.3.* Reprenons l'exemple de la remarque 2.6.8; notons  $\mathcal{N}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Mod}_A$  formée des modules  $M$  tels que pour

$$\forall x \in M \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (X_i)^n \cdot x = 0.$$

On vérifie aussitôt que  $\mathcal{N}$  est épaisse et stable par colimites. Cependant, le foncteur canonique  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_A/\mathcal{N}$  ne conserve pas les objets tf. En effet, l'image  $\bar{A}$  du  $A$ -module  $A$  n'est pas tf. Pour le voir, on considère la suite croissante d'idéaux  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  donnée par  $J_i = (X_1, \dots, X_i)$ . D'une part, la réunion des images  $\bar{J}_i$  des  $J_k$  dans  $\mathbf{Mod}_A/\mathcal{N}$  est égale à  $\bar{A}$ , car la réunion des  $J_i$  est l'idéal  $I$ , et  $A/I \simeq k$  est un objet de  $\mathcal{N}$ . D'autre part, la suite  $(\bar{J}_k)$  ne stationne pas, car le quotient  $J_i/J_{i-1}$  est isomorphe au  $A$ -module  $X_i \cdot k[X_i]$  (où l'action de  $X_n$  est triviale pour  $n \neq i$ ), qui n'est jamais un objet de  $\mathcal{N}$ , l'action de  $(X_i)^n$  sur l'élément  $X_i$  de ce module n'étant nulle pour aucune valeur de  $n$ .

**Proposition 2.8.4.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est localement de type fini, que  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  stable par colimites, et que  $A$  est un objet de type fini de  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ . Il existe un objet tf  $X$  de  $\mathcal{A}$  dont l'image par le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$  est isomorphe à  $A$ .*

*Démonstration.* Soient  $Y$  l'objet de  $\mathcal{A}$  sous-jacent à  $A$  et  $\pi : \bigoplus_{i \in I} G_i \twoheadrightarrow Y$  un épimorphisme, où  $(G_i)_{i \in I}$  est une famille d'objets tf de  $\mathcal{A}$ . La commutation du foncteur canonique aux colimites et la proposition 2.1.8 montrent qu'il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que la composée

$$\bigoplus_{i \in J} G_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} G_i \xrightarrow{\pi} Y$$

induit un épimorphisme dans  $\mathcal{A}/\mathcal{C}$  : son image  $X$  est un objet tf de  $\mathcal{A}$  et l'inclusion  $X \hookrightarrow Y$  induit un isomorphisme dans la catégorie quotient, d'où la proposition.  $\square$

## 2.8.2 Filtration de Krull

**Définition 2.8.5** (Filtration de Krull). La *filtration de Krull* de la catégorie  $\mathcal{A}$  est la suite croissante de sous-catégories épaisses stables par colimites  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  définie inductivement comme suit.

- La catégorie  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$  est réduite à l'objet nul pour  $n < 0$ .
- Pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$  est l'image réciproque de la sous-catégorie (épaisse et stable par colimites)  $(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A}))^{ss}$  de  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$  par le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$  (cf. remarques 1.4.10 et 1.4.13).

*Remarque 2.8.6.* On peut étendre de manière claire la définition de la filtration de Krull à tout ordinal (cf. [Gab62]) ; nous n'avons introduit que les termes indicés par  $\mathbb{N}$  car eux seuls interviendront dans nos investigations ultérieures.

**Définition 2.8.7** (Objets (simples) noethériens de type  $n$ ). On définit par récurrence sur  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  la notion d'objet *simple noethérien de type  $n$*  — en abrégé *SNT  $n$* , ou *SNT( $n$ )* — et d'objet *noethérien de type  $n$*  — en abrégé *NT  $n$* , ou *NT( $n$ )* — de  $\mathcal{A}$  de la façon suivante.

- Un objet est simple noethérien de type  $-1$  s'il est nul.
- Un objet  $X$  est noethérien de type  $n$  s'il possède une filtration finie  $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = X$  telle que, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , le quotient  $F_i/F_{i-1}$  est simple noethérien de type  $a(i)$ , pour un certain entier  $a(i) \leq n$ .
- Un objet est simple noethérien de type  $n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  si et seulement s'il n'est pas noethérien de type  $n - 1$  et que tous ses quotients stricts sont noethériens de type  $n - 1$ .

**Notation 2.8.8.** Nous désignerons par  $\mathcal{A}_{\mathbf{NT}n}$ , ou  $\mathcal{A}_{\mathbf{NT}(n)}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets noethériens de type  $n$ . Elle est épaisse.

**Proposition 2.8.9.** Soient  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  et  $X$  un objet noethérien de type  $n$  de  $\mathcal{A}$ . Alors  $X$  est noethérien, appartient à  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$  et son image dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$  (si  $n \geq 0$ ) est finie. Elle est même simple si  $X$  est simple noethérien de type  $n$ .

Réciproquement, un objet noethérien de  $\mathcal{A}$  qui appartient à  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$  est noethérien de type  $n$ .

On peut donc résumer une partie de la proposition par l'égalité

$$\mathcal{A}^{noet} \cap \mathcal{K}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_{\mathbf{NT}n}.$$

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = -1$ , il n'y a rien à faire.

On suppose donc  $n \geq 0$  et l'assertion établie pour les objets (simples) noethériens de type  $k$ , où  $k < n$ . Soit  $X$  un objet simple noethérien de type  $n$  et  $(A_i)$  une suite croissante de sous-objets de  $X$ , que nous supposons non constante en  $0$  : il existe  $j$  tel que  $A_j \neq 0$ . Alors  $(A_i/A_j)_{i \geq j}$  est une suite croissante de sous-objets de  $X/A_j$ , qui est noethérien de type  $n - 1$ , donc noethérien par hypothèse de récurrence. Par conséquent, cette suite stationne, ce qui entraîne que la suite  $(A_i)$  stationne et établit la noethérianité de  $X$ .

L'hypothèse de récurrence implique également que tous les quotients stricts de  $X$  sont finis dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-2}(\mathcal{A})$  (si  $n > 0$ ), donc nuls dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ . Il suffit donc, pour montrer que  $X$  est simple dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ , d'établir qu'il y est non nul. Enfin, si tel n'était pas le cas,  $X$  serait objet de  $\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ , donc de  $\mathcal{A}_{\mathbf{NT}(n-1)}$  en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la noethérianité de  $X$ .

On en déduit aussitôt que les objets *NT  $n$*  de  $\mathcal{A}$  sont finis dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ , ils appartiennent donc en particulier à  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ .

Supposons enfin que  $X$  est un objet noethérien de  $\mathcal{A}$  qui appartient à  $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ . Les propositions 2.8.1 et 2.7.11 montrent que l'image  $X'$  de  $X$  dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$  est finie. Si elle est nulle, l'hypothèse de récurrence montre que  $X$  est objet de  $\mathcal{A}_{\mathbf{NT}(n-1)} \subset \mathcal{A}_{\mathbf{NT}n}$ .

Si elle est simple, considérons un sous-objet *NT( $n - 1$ )* maximal  $A$  de  $X$ . Alors  $Y = X/A$  n'a pas de sous-objet *NT( $n - 1$ )* non trivial (car  $\mathcal{A}_{\mathbf{NT}(n-1)}$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$ , donc l'image réciproque dans  $X$  d'un sous-objet *NT( $n - 1$ )* de  $X/A$  est *NT( $n - 1$ )*), et son image dans  $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$  est simple, ce qui implique tout quotient strict  $Q$  de  $Y$  est nulle dans le quotient,

i.e. est objet de  $\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ . Comme  $Q$  est noethérien, l'hypothèse de récurrence montre que  $Q$  est  $NT(n-1)$ , ce qui entraîne que  $Y$  est  $SNTn$ , donc que  $X$  est  $NTn$ .

Dans le cas général, on conclut que  $X$  est objet de  $\mathcal{A}_{NTn}$  par récurrence sur la longueur de  $X'$  en utilisant la remarque 1.4.8 (qui permet de relever une suite de composition de  $X'$  en une filtration de  $X$ ), ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 2.8.10.* – Là encore, on a une notion plus générale d'objet (simple) noethérien de type  $\alpha$ , où  $\alpha$  est un ordinal.

- Les objets noethériens de type 0 sont exactement les objets finis.
- Il est plus usuel dans la littérature de considérer la notion duale d'objet (*simple*) *artinien de type  $n$*  — cf. [Pow00a].
- Un objet est  $SNT1$  si et seulement s'il est infini mais que tous ses quotients stricts sont finis.

*Exemple 2.8.11.* – Soient  $k$  un corps commutatif et  $A$  l'anneau  $k[X]$ . On vérifie aisément qu'un  $A$ -module est fini si et seulement si le  $k$ -espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie. Cela montre que  $A$  est un  $A$ -module  $SNT1$  : il est de  $k$ -dimension finie, mais tous ses quotients stricts sont de  $k$ -dimension finie.

On en déduit aussitôt que tout  $A$ -module de type fini est  $NT1$ . Par conséquent, pour tout entier  $n > 0$ , les  $A$ -modules  $NTn$  sont exactement les  $A$ -modules tf.

- Les considérations précédentes se généralisent aussitôt à tout anneau *principal*  $A$  qui n'est pas un corps. Ceci est équivalent au fait qu'un tel anneau est de dimension 1 (au sens usuel de l'algèbre commutative). Le lecteur pourra se reporter à [Gab62] pour la définition de la dimension de Krull d'une catégorie abélienne (ch. IV, § 1) et des exemples moins triviaux dans les catégories de modules (ch. V).
- L'exemple 2.4.17 montre que les groupes abéliens  $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$  ( $p$  étant un entier premier) sont simples artiniens de type 1 : ils sont infinis mais tous leurs sous-groupes stricts sont finis.

### 2.8.3 Objets simples et diagrammes de recollement

**Convention 2.8.12.** Dans tout ce paragraphe, on se donne un diagramme de recollement (cf. définition 1.4.15)

$$\begin{array}{ccccc} & & q & & \\ & & \leftarrow & & \leftarrow \\ \mathcal{C} & \xleftrightarrow{i} & \mathcal{A} & \xleftrightarrow{e} & \mathcal{B} \\ & & p & & r \end{array}$$

**Définition 2.8.13.** On appelle *prolongement* d'un objet  $X$  de  $\mathcal{B}$  la donnée d'un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  et d'un isomorphisme  $e(A) \xrightarrow{\cong} X$ .

L'isomorphisme sera souvent omis lorsqu'il est évident.

*Exemple 2.8.14.* Les objets  $l(X)$  et  $r(X)$  sont des prolongements de  $X$ .

**Proposition et définition 2.8.15** (Prolongement intermédiaire). *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{B}$  ; notons  $\gamma_X : l(X) \rightarrow r(X)$  le morphisme adjoint à l'inverse de la coünité  $er(X) \xrightarrow{\cong} X$  et  $c(X)$  l'image de  $\gamma_X$ . Noter que l'on a ainsi défini un foncteur  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .*

1. Le morphisme  $ec(X) \rightarrow er(X) \simeq X$ , dont la première flèche est induite par l'inclusion  $c(X) \rightarrow r(X)$ , fait de  $c(X)$  un prolongement naturel de  $X$ . On l'appelle prolongement intermédiaire de  $X$ .
2. Si  $e(A) \xrightarrow{\cong} X$  est une extension de  $X$ , alors  $c(X)$  est isomorphe à un sous-quotient de  $A$ .
3. L'objet  $c(X)$  n'a pas de sous-quotient non nul dans  $\mathcal{C}$  ; c'est le seul prolongement (à isomorphisme près) à posséder cette propriété.
4. Le foncteur  $c$  préserve les injections et les surjections.

**Proposition 2.8.16** (Objets simples en situation de recollement). *Le prolongement intermédiaire d'un objet simple de  $\mathcal{B}$  est un objet simple de  $\mathcal{A}$ .*

*De plus, l'application  $\mathcal{S}(\mathcal{C}) \amalg \mathcal{S}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{A})$  définie par  $S \mapsto i(S)$  (on sait que  $i$  envoie un objet simple de  $\mathcal{C}$  sur un objet simple de  $\mathcal{A}$  par la proposition 2.6.15) sur  $\mathcal{S}(\mathcal{C})$  et par  $S \mapsto c(S)$  sur  $\mathcal{S}(\mathcal{B})$  est bijective.*

Nous renvoyons à [Kuh94b] pour la démonstration de ces propriétés élémentaires.

Les propositions 2.8.16 et 2.6.12 fournissent le corollaire suivant.

**Corollaire 2.8.17.** *On a un isomorphisme de groupes  $G_0^f(\mathcal{A}) \simeq G_0^f(\mathcal{B}) \oplus G_0^f(\mathcal{C})$ .*

# Chapitre 3

## Catégories de foncteurs

Dans ce chapitre, nous exposons les propriétés générales dont nous aurons besoin des catégories de foncteurs dont la source est une catégorie essentiellement petite et le but une catégorie d'espaces vectoriels. Une telle catégorie possède de très bonnes propriétés de régularité : c'est une catégorie abélienne (avec toutes les propriétés de régularité du § 1.3) tensorielle exacte fermée, avec une bonne dualité si la catégorie source satisfait une hypothèse de finitude que vérifieront toutes les catégories auxquelles nous appliquerons les résultats de ce chapitre.

L'outil principal de ces considérations très formelles, hormis nombre d'arguments qui n'utilisent pas la structure de la catégorie but, est le lemme de Yoneda, grâce auquel on dispose d'un ensemble de générateurs projectifs de type fini explicites dans une catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , où  $\mathcal{I}$  est une catégorie essentiellement petite et  $k$  un corps commutatif.

La première section décrit la structure générale d'une telle catégorie. La deuxième s'intéresse aux adjoints au produit tensoriel, tandis que la dernière examine quelques liens formels entre catégories de foncteurs, par le biais de diagrammes de recollement et du produit tensoriel extérieur.

Les résultats de ce chapitre sont bien connus, mais ne semblent pas avoir fait l'objet d'une exposition systématique dans la littérature. Des références, non exhaustives, sont données au fur et à mesure de l'exposition.

### 3.1 La catégorie abélienne tensorielle $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$

**Convention 3.1.1.** Dans toute cette section,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  désignent des catégories essentiellement petites,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  des catégories,  $A$  un anneau et  $k$  un corps commutatif.

#### 3.1.1 Généralités

**Notation 3.1.2.** – Nous noterons  $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  le *foncteur de précomposition* par un foncteur  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ . Il est donné par  $X \mapsto X \circ F$  sur les objets et associant à une transformation naturelle  $\varphi : X \rightarrow Y$  la transformation naturelle  $F^*\varphi : X \circ F \rightarrow Y \circ F$  telle que  $(F^*\varphi)_E = \varphi_{F(E)}$  pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{J}$ .

– Nous désignerons par  $G_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$  le *foncteur de postcomposition* par un foncteur  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Il est donné sur les objets par  $X \mapsto G \circ X$  et associant à une transformation naturelle  $\varphi : X \rightarrow Y$  la transformation naturelle  $G_*\varphi : G \circ X \rightarrow G \circ Y$  telle que  $(G_*\varphi)_E = G \circ \varphi_E$  pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ .

*Remarque 3.1.3.* – L'associativité de la composition montre que les foncteurs de précomposition commutent aux foncteurs de postcomposition ; autrement dit, si  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$  et  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$



sont des foncteurs, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{F^*} & \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) \\ G_* \downarrow & & \downarrow G_* \\ \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B}) & \xrightarrow{F^*} & \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{B}) \end{array}$$

commute.

- Les constructions de précomposition et de postcomposition ont des propriétés de functorialité qu'on laisse au lecteur le soin d'explicitier (cf. aussi [ML71] ou [Bor94]).

*Remarque 3.1.4.* Il existe un isomorphisme canonique de catégories  $\mathbf{Fct}(*, \mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}$ , où  $*$  désigne la catégorie à un seul objet et un seul morphisme. Nous serons également amenés à rencontrer les catégories  $\mathbf{Fct}(\underline{M}, \mathcal{A})$ , où  $M$  est un monoïde (pour la notation  $\underline{M}$ , voir la remarque 1.1.8). On constate qu'il existe des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{Fct}(\underline{M}, {}_A\mathbf{Mod}) \simeq {}_{A[M]}\mathbf{Mod} \quad (3.1)$$

et

$$\mathbf{Fct}(\underline{M}, \mathbf{Mod}_A) \simeq \mathbf{Mod}_{A[M^o]} \quad (3.2)$$

où  $M^o$  désigne le monoïde opposé à  $M$  et  $A[M]$  la  $A$ -algèbre du monoïde  $M$ . Cela permet de donner la définition suivante.

**Définition 3.1.5.** Soit  $E$  un objet de  $\mathcal{I}$ . Nous noterons  $ev_E : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  et  $ev_E : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A) \rightarrow \mathbf{Mod}_{A[M^o]}$  les *foncteurs d'évaluation* en  $E$ , donnés par la précomposition par le foncteur  $*$   $\rightarrow \mathcal{I}$  d'image  $E$  et par le foncteur pleinement fidèle  $\mathbf{End}_{\mathcal{I}}(E) \rightarrow \mathcal{I}$  d'image  $E$  respectivement. Nous noterons aussi  $ev_E$  le foncteur analogue  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, {}_A\overline{\mathbf{Mod}}) \rightarrow {}_{A[M]}\mathbf{Mod}$ .

**Lemme 3.1.6.** *On a des isomorphismes naturels*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})).$$

**Proposition 3.1.7.** *Supposons que tout foncteur de  $\mathcal{J}$  vers  $\mathcal{A}$  possède une limite (de sorte que l'on dispose d'un foncteur  $\lim : \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ). Alors :*

- tout foncteur de  $\mathcal{J}$  vers  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  possède une limite ; de plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})) & \xrightarrow{\lim} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \\ \simeq \downarrow & \nearrow \lim_* & \\ \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})) & & \end{array}$$

commute ;

- les foncteurs de précomposition commutent aux limites ;
- les foncteurs d'évaluation commutent aux limites ; autrement dit, les limites se calculent « argument par argument » dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ .

Cette propriété se trouve démontrée dans [ML71], ch. V, §3. Celle qui suit est duale.

**Proposition 3.1.8.** *Supposons que tout foncteur de  $\mathcal{J}$  vers  $\mathcal{A}$  possède une colimite (de sorte que l'on dispose d'un foncteur  $\text{colim} : \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ). Alors :*

- tout foncteur de  $\mathcal{J}$  vers  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  possède une colimite ; de plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})) & \xrightarrow{\text{colim}} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \\ \simeq \downarrow & \nearrow \text{colim}_* & \\ \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})) & & \end{array}$$

commute ;

- les foncteurs de précomposition commutent aux colimites ;
- les foncteurs d'évaluation ; autrement dit, les colimites se calculent « argument par argument » dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ .

Le caractère abélien d'une catégorie se testant sur certaines limites et colimites, on en déduit l'important corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.9.** *Supposons que la catégorie  $\mathcal{A}$  est abélienne. Alors  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  est une catégorie abélienne. De plus, les foncteurs de précomposition sont exacts. En particulier, les foncteurs d'évaluation sont exacts.*

*Plus précisément, l'exactitude se teste « argument par argument » : une suite  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  est exacte si et seulement si la suite  $X(E) \rightarrow Y(E) \rightarrow Z(E)$  est exacte dans  $\mathcal{A}$  pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ .*

*Si  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse 1.3.4, il en est de même pour  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ .*

*Enfin, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie  $A$ -linéaire,  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  hérite d'une structure de catégorie  $A$ -linéaire.*

Nous donnons maintenant quelques propriétés formelles des foncteurs de postcomposition. Dans le cas de la catégorie  $\mathcal{F}$  que cette thèse étudie, Troesch a établi des propriétés beaucoup plus subtiles de certains de ces foncteurs dans [Tro05], et dans [Tro02], où il les utilise à des fins homologiques.

**Proposition 3.1.10** (Propriétés des foncteurs de postcomposition). *Supposons les catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  abéliennes. Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur.*

1. *Si  $F$  est exact (resp. additif, exact à gauche, exact à droite), il en est de même pour  $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ .*
2. *Si  $F$  est fidèle,  $F_*$  est fidèle.*
3. *Si  $F$  est pleinement fidèle,  $F_*$  est pleinement fidèle. Si de plus l'image de  $F$  est une sous-catégorie de Serre (resp. épaisse) de  $\mathcal{B}$ , alors l'image de  $F_*$  est une sous-catégorie de Serre (resp. épaisse) de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ .*
4. *Si  $F$  possède un adjoint à gauche  $G$ , alors  $G_*$  est adjoint à gauche à  $F_*$ .*

*Démonstration.* La première assertion découle des propositions 3.1.7 et 3.1.8 (et de leur corollaire).

On a d'autre part, pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ , un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}(X, Y) & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathrm{Ob} \mathcal{I}} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, Y_i) & \longrightarrow & \prod_{\substack{i, j \in \mathrm{Ob} \mathcal{I} \\ f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(i, j)}} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, Y_j) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})}(F_* X, F_* Y) & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathrm{Ob} \mathcal{I}} \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(X_i), F(Y_i)) & \longrightarrow & \prod_{\substack{i, j \in \mathrm{Ob} \mathcal{I} \\ f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(i, j)}} \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(X_i), F(Y_j))
\end{array} \tag{3.3}$$

dont les flèches verticales sont induites par  $F$  (on a ici supposé, ce qui est loisible quitte à la remplacer par un squelette, que la catégorie  $\mathcal{I}$  est petite, et l'on a noté  $X_i$  pour  $X(i)$  pour alléger). Le lemme des cinq fournit alors la seconde assertion et le début de la première, dont la fin s'obtient par un argument direct (pour le cas épais, on peut aussi remarquer que l'image de  $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$  est égale au noyau du foncteur exact de postcomposition par le foncteur canonique  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{A}$ ).

La dernière assertion s'établit en considérant le diagramme commutatif aux lignes exactes suivant

(où  $X$  est un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  et  $Y$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ ), analogue de (3.3).

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}(X, G_*Y) & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathrm{Ob} \mathcal{I}} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, G(Y_i)) & \longrightarrow & \prod_{\substack{i, j \in \mathrm{Ob} \mathcal{I} \\ f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(i, j)}} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, G(Y_j)) \\
& & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})}(F_*X, Y) & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathrm{Ob} \mathcal{I}} \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(X_i), Y_i) & \longrightarrow & \prod_{\substack{i, j \in \mathrm{Ob} \mathcal{I} \\ f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(i, j)}} \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(F(X_i), Y_j)
\end{array} \tag{3.4}$$

□

*Remarque 3.1.11.* L'unité et la coïunité de l'adjonction entre  $F_*$  et  $G_*$  s'obtiennent à partir de celles de l'adjonction entre  $F$  et  $G$  par functorialité de la postcomposition. On peut d'ailleurs établir la dernière partie de cette proposition en faisant intervenir uniquement l'unité et la coïunité de l'adjonction initiale (cf. démonstration de la proposition 3.1.14 ci-après).

**Lemme 3.1.12.** *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B}).$$

**Proposition 3.1.13.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne tensorielle. Le bifoncteur*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \xrightarrow{\otimes_*} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$$

définit une structure tensorielle sur  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ . Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie tensorielle exacte (resp. exacte à droite, à gauche), il en est de même pour  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ .

Cette proposition découle de la proposition 3.1.10 et du lemme précédent, lui-même transparent.

**Proposition 3.1.14** (Propriétés des foncteurs de précomposition — cf. [Ves05], annexe A). *Soit  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$  un foncteur. On suppose que  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne.*

1. *Le foncteur  $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  est exact.*
2. *Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie tensorielle,  $F^*$  commute au produit tensoriel.*
3. *Si  $F$  est essentiellement surjectif,  $F^*$  est fidèle.*
4. *Si  $F$  est plein et essentiellement surjectif,  $F^*$  est pleinement fidèle, et son image est une sous-catégorie de Serre de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  stable par limites et colimites.*
5. *Si  $F$  possède un adjoint à gauche  $G$ , alors  $G^*$  est adjoint à droite à  $F^*$ .*

*Démonstration.* La première assertion, incluse dans le corollaire 3.1.9, résulte de la commutation de  $F^*$  à toutes les limites et colimites ; la seconde provient de la commutation entre  $F^*$  et les foncteurs de postcomposition.

Pour la troisième, on note que si  $X$  est un foncteur de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{A}$  tel que  $F^*X = 0$ , alors  $X = 0$ . En effet, pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{I}$ , il existe un objet  $D$  de  $\mathcal{J}$  tel que  $F(D) \simeq C$ , d'où  $X(C) \simeq X(F(D)) = F^*X(D) = 0$ . Comme  $F^*$  est exact, cela entraîne sa fidélité.

Supposons maintenant  $F$  essentiellement surjectif et plein.

Soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  et  $u \in \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})}(F^*X, F^*Y)$ . Étant donné un objet  $C$  de  $\mathcal{I}$ , choisissons un objet  $D$  de  $\mathcal{J}$  tel qu'il existe un isomorphisme  $F(D) \xrightarrow{\phi} C$ , et définissons un morphisme  $v(C) \in \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X(C), Y(C))$  comme la composée

$$X(C) \xrightarrow{X(\phi^{-1})} X(F(D)) = F^*X(D) \xrightarrow{u(D)} F^*Y(D) = Y(F(D)) \xrightarrow{Y(\phi)} Y(C).$$

Montrons que  $v$  définit une transformation naturelle de  $X$  vers  $Y$ . Soit  $C \xrightarrow{f} C'$  un morphisme de  $\mathcal{I}$  et  $F(D) \xrightarrow{\phi} C$  et  $F(D') \xrightarrow{\phi'} C'$  les isomorphismes utilisés précédemment. Comme  $F$  est plein, il existe  $g \in \text{hom}_{\mathcal{J}}(D, D')$  tel que

$$F(g) = F(D) \xrightarrow{\phi} C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{\phi'^{-1}} F(D'). \quad (3.5)$$

Pour conclure, on constate que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X(C) & \xrightarrow{X(\phi^{-1})} & X(F(D)) & \xlongequal{\quad} & F^*X(D) & \xrightarrow{F^*X(g)} & F^*X(D') & \xlongequal{\quad} & X(F(D')) & \xrightarrow{X(\phi')} & X(C') \\ v(C) \downarrow & & & & u(D) \downarrow & & u(D') \downarrow & & & & v(C') \downarrow \\ Y(C) & \xrightarrow{Y(\phi^{-1})} & Y(F(D)) & \xlongequal{\quad} & F^*Y(D) & \xrightarrow{F^*Y(g)} & F^*Y(D') & \xlongequal{\quad} & Y(F(D')) & \xrightarrow{Y(\phi')} & Y(C') \end{array}$$

commute (les carrés extérieurs par définition de  $v$  et le carré central par naturalité de  $u$ ), ce qui montre que  $v$  est une transformation naturelle puisque la composée horizontale supérieure (resp. inférieure) est égale, par functorialité de  $X$  (resp.  $Y$ ), à  $X(f)$  (resp.  $Y(f)$ ) — on notera que ce raisonnement montre aussi que la définition de  $v$  ne dépend en fait pas du choix des isomorphismes provenant de l'essentielle surjectivité de  $F$ .

Soit à présent  $X$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  et  $T$  un sous-objet de  $F^*X$ ; nous noterons  $T \xrightarrow{i} F^*X$  le monomorphisme correspondant. Pour un objet  $C$  de  $\mathcal{I}$ , choisissons comme précédemment un isomorphisme  $F(D) \xrightarrow{\phi} C$  et définissons un objet de  $\mathcal{A}$  par  $Y(C) = T(D)$ . Si  $C \xrightarrow{f} C'$  est un morphisme de  $\mathcal{I}$  et  $F(D) \xrightarrow{\phi} C$  et  $F(D') \xrightarrow{\phi'} C'$  sont les isomorphismes choisis pour définir  $Y$  sur les objets, définissons un morphisme  $Y(f) : Y(C) \rightarrow Y(C')$  par  $Y(f) = T(g)$ , où  $g \in \text{hom}_{\mathcal{J}}(D, D')$  satisfait (3.5). On note que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} Y(C) & \xlongequal{\quad} & T(D) & \xrightarrow{i(D)} & X(F(D)) & \xrightarrow{X(\phi)} & X(C) \\ Y(f) \downarrow & & T(g) \downarrow & & X(F(g)) \downarrow & & X(f) \downarrow \\ Y(C') & \xlongequal{\quad} & T(D') & \xrightarrow{i(D')} & X(F(D')) & \xrightarrow{X(\phi')} & X(C') \end{array}$$

commute, et le fait que les flèches horizontales sont des monomorphismes entraîne que la flèche  $Y(f)$  ne dépend pas du choix de  $g$  vérifiant (3.5).

Il est alors immédiat que  $Y$  définit bien un foncteur tel que  $F^*Y \simeq T$ , ce qui établit la quatrième assertion puisque  $F^*$  commute toujours aux limites et aux colimites (propositions 3.1.7 et 3.1.8).

Pour le dernier point, soient  $X$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  et  $Y$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ . L'unité  $id \rightarrow FG$  de l'adjonction fournit un morphisme naturel  $Y \rightarrow G^*F^*Y$ , d'où une application naturelle

$$\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})}(F^*Y, X) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}(G^*F^*Y, G^*X) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}(Y, G^*X).$$

On obtient de même en considérant la coïunité une application naturelle

$$\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}(Y, G^*X) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})}(F^*Y, F^*G^*X) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})}(F^*Y, X);$$

on vérifie (en utilisant la proposition 1.2.12) que ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre, ce qui achève la démonstration.  $\square$

### 3.1.2 Générateurs projectifs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$

Nous ne nous intéresserons désormais pratiquement plus qu'au cas où  $\mathcal{A}$  est la catégorie  $\mathbf{Mod}_A$  des  $A$ -modules à droite; quitte à remplacer  $A$  par l'anneau opposé, les mêmes considérations s'appliquent à  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, {}_A\mathbf{Mod})$ .

**Notation 3.1.15.** Etant donné un objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , nous noterons  $P_E^{\mathcal{I}}$  (il n'y aura jamais d'ambiguïté possible sur l'anneau  $A$  dans les situations que nous considérerons), ou parfois  $P_E$  lorsque nulle confusion ne peut en résulter, l'objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  donné par

$$P_E^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \xrightarrow{\text{hom}_{\mathcal{I}}(E, \cdot)} \mathbf{Ens} \xrightarrow{A[\cdot]} \mathbf{Mod}_A$$

(on rappelle que le foncteur de linéarisation  $A[\cdot]$  a été introduit dans la définition 1.1.7).

La bifonctorialité de  $\text{hom}_{\mathcal{I}}$  permet de considérer  $E \mapsto P_E^{\mathcal{I}}$  comme un foncteur  $\mathcal{I}^{op} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$ .

*Remarque 3.1.16.* Supposons l'anneau  $A$  commutatif. Si deux objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{I}$  possèdent une somme, on a un isomorphisme évident  $P_V \otimes_A P_W \simeq P_{V \amalg W}$ .

**Proposition 3.1.17** (Lemme de Yoneda, version linéarisée). *Il existe un isomorphisme*

$$\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(P_E^{\mathcal{I}}, F) \simeq F(E)$$

naturel en les objets  $E$  de  $\mathcal{I}$  et  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$ .

*Démonstration.* Le lemme de Yoneda ordinaire (cf. [ML71], ch. III, §2) fournit un isomorphisme naturel

$$\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Ens})}(\text{hom}_{\mathcal{I}}(E, \cdot), O_*F) \simeq F(E),$$

où  $O : \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Ens}$  désigne le foncteur d'oubli. Comme  $O$  est adjoint à droite à  $A[\cdot]$ ,  $O_*$  est adjoint à droite à  $A[\cdot]_*$  (proposition 3.1.10), donc on en déduit un isomorphisme naturel

$$\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(A[\cdot]_* \text{hom}_{\mathcal{I}}(E, \cdot), F) \simeq F(E)$$

comme souhaité.  $\square$

Par la suite, nous noterons simplement  $A[F]$  la  $A$ -linéarisation  $A[\cdot]_*F$  d'un foncteur ensemble  $F$ .

*Remarque 3.1.18.* Explicitement, l'isomorphisme de la proposition est donné de la manière suivante :

- de  $F(E)$  vers  $\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(P_E^{\mathcal{I}}, F)$  : à  $x \in F(E)$  est associée la transformation naturelle donnée sur les générateurs canoniques par  $[E \xrightarrow{f} A] \mapsto F(f)(x)$ , où  $A$  est un objet de  $\mathcal{I}$  ;
- de  $\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(P_E^{\mathcal{I}}, F)$  vers  $F(E)$  : à une transformation naturelle  $P_E^{\mathcal{I}} \xrightarrow{\phi} F$  on associe l'élément  $\phi(id_E)$  de  $F(E)$ .

Cette proposition a la conséquence fondamentale suivante.

**Proposition et définition 3.1.19** (Générateurs projectifs standard). *Les objets  $P_E^{\mathcal{I}}$  forment un ensemble de générateurs projectifs de type fini de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  lorsque  $E$  parcourt un squelette de  $\mathcal{I}$ . On les appelle générateurs projectifs standard de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$ .*

*Démonstration.* Les  $P_E$  sont projectifs car les foncteurs  $\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(P_E, \cdot) \simeq ev_E$  sont exacts (cf. corollaire 3.1.9), et de type fini parce qu'ils commutent aux colimites (cf. propositions 3.1.8 et 2.1.20). Ils engendrent la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  parce que le foncteur

$$\left( \prod_{E \in \text{Ob } \mathcal{I}} ev_E \right) : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A) \rightarrow \mathbf{Mod}_A$$

(où l'on a implicitement remplacé  $\mathcal{I}$  par un squelette) est fidèle.  $\square$

*Remarque 3.1.20.* On peut également établir la type-finitude de  $P_E$  en notant qu'un sous-foncteur  $F$  de  $P_E$  tel que  $id_E \in F(E)$  est égal à  $P_E$ .

En particulier (on sait que  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  vérifie l'hypothèse 1.3.4 par le corollaire 3.1.9) :

**Corollaire 3.1.21.** *La catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  est une catégorie de Grothendieck vérifiant l'hypothèse 2.1.12.*

**Corollaire 3.1.22.** *Pour tout foncteur  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ , le foncteur de précomposition*

$$F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_A)$$

*admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche.*

Cela découle de la commutation de  $F^*$  aux limites et aux colimites, du corollaire précédent et du corollaire 1.3.18. Les *extensions de Kan* (cf. [ML71], ch. X) permettent de donner une construction des adjoints ; nous n'en aurons pas usage.

**Corollaire 3.1.23.** *On a un isomorphisme de  $A$ -modules*

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(P_V, P_W) \simeq A[\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(W, V)]$$

*naturel en les objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{I}$ . En particulier, l'anneau  $\mathrm{End}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)}(P_V)$  est naturellement isomorphe à la  $A$ -algèbre  $A[\mathrm{End}_{\mathcal{I}}(V)]$  du monoïde  $\mathrm{End}_{\mathcal{I}}(V)$ .*

**Corollaire 3.1.24.** *Supposons que  $A$  est commutatif et que  $\mathcal{I}$  possède des sommes finies. Alors le produit tensoriel  $\otimes_A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  préserve :*

- les objets projectifs ;
- les objets de type fini.

*Démonstration.* Combiner la proposition 3.1.19, le corollaire 2.1.15 et la remarque 3.1.16.  $\square$

### 3.1.3 Dualité dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$

Nous montrons maintenant comment transporter la dualité usuelle des espaces vectoriels à certaines catégories de foncteurs. Cela repose sur le lemme, immédiat, suivant.

**Lemme 3.1.25.** *Pour toute catégorie  $\mathcal{A}$ , on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})^{op} \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{A}^{op}).$$

**Proposition et définition 3.1.26** (Dualité entre catégories de foncteurs). *Notons*

$$D_{\mathcal{I}, k} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)^{op} \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k^{op}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k)$$

*le foncteur composé de l'isomorphisme du lemme précédent et de la postcomposition par le foncteur de dualité  $(\cdot)^* = \mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(\cdot, k) : \mathcal{E}_k^{op} \rightarrow \mathcal{E}_k$  (l'indice  $k$ , voire  $\mathcal{I}$ , sera omis dans l'écriture de ce foncteur quand aucune confusion n'est possible), et  $D'_{\mathcal{I}, k} = D_{\mathcal{I}^{op}, k} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k)^{op} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .*

1. *Les foncteurs  $D_{\mathcal{I}, k}$  et  $D'_{\mathcal{I}, k}$  sont exacts et fidèles.*
2. *Le foncteur  $D_{\mathcal{I}, k}$  est adjoint à droite à  $(D'_{\mathcal{I}, k})^{op}$ .*

*Ces foncteurs seront appelés foncteurs de dualité.*

*Démonstration.* Cela découle des propriétés analogues de la dualité des espaces vectoriels et de la proposition 3.1.10.  $\square$

Ce résultat entraîne formellement, via la proposition 3.1.17 (et 3.1.19), la propriété suivante.

**Proposition et définition 3.1.27** (Cogénérateurs injectifs standard). *Pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , nous noterons  $I_E^{\mathcal{I}}$  (ou simplement  $I_E$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'objet  $D'_{\mathcal{I}, k}(P_E^{\mathcal{I}^{op}})$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  (ainsi, on a  $I_E(V) = k^{\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, E)}$ ). Cette construction est fonctorielle contravariante en  $E$ .*

1. On a un isomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(F, I_E^{\mathcal{I}}) \simeq F(E)^*$$

naturel en les objets  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $E$  de  $\mathcal{I}$ .

2. Les  $I_E^{\mathcal{I}}$  forment un ensemble de cogénérateurs injectifs lorsque  $E$  décrit un squelette de  $\mathcal{I}$ . On les appelle cogénérateurs injectifs standard de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .

Nous introduisons maintenant une hypothèse de finitude essentielle sur la catégorie source.

**Hypothèse 3.1.28.** Les ensembles  $\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, W)$  sont finis pour tous objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{I}$ .

Cette hypothèse, combinée au lemme évident qui suit, permet d'assurer que la dualité introduite ci-dessus est bonne au sens du chapitre 1, § 1.5. Le comportement d'une catégorie de foncteurs diffère grandement selon que sa source satisfait ou non l'hypothèse 3.1.28; toutes celles que nous rencontrerons la vérifieront.

**Lemme 3.1.29.** Si la catégorie  $\mathcal{A}$  est essentiellement petite, il en est de même pour  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ .

**Proposition 3.1.30.** Supposons l'hypothèse 3.1.28 satisfaite. Alors le foncteur de postcomposition par le foncteur d'inclusion  $\mathcal{E}_k^f \hookrightarrow \mathcal{E}_k$  fait de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  une classe d'objets bien échelonnés dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ . De plus, les foncteurs  $D_{\mathcal{I}, k}$  et  $D'_{\mathcal{I}, k}$  définissent une bonne dualité entre les catégories  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k)$ . Enfin, cette dualité est tensorielle.

*Démonstration.* La proposition 3.1.10 montre que  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  est toujours une sous-catégorie épaisse de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ . Le lemme 3.1.29 montre qu'elle est essentiellement petite. Maintenant, l'hypothèse 3.1.28 montre que les générateurs projectifs standard appartiennent à  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$ , qui est donc une classe d'objets bien échelonnés. La conclusion s'en déduit aussitôt via la proposition 3.1.26.  $\square$

*Remarque 3.1.31.* La proposition 2.1.8 montre que l'hypothèse 3.1.28 est également nécessaire pour que  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  soit une classe d'objets bien échelonnés dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ . Comme cette classe est exactement la classe des foncteurs pour lesquels l'injection naturelle vers le bidual est un isomorphisme, on en déduit que la dualité n'est bonne que sous l'hypothèse 3.1.28.

Les propositions 3.1.30, 2.4.19 et 3.1.19 fournissent le résultat suivant.

**Corollaire 3.1.32.** Lorsque l'hypothèse 3.1.28 est satisfaite, les injectifs standard de la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  sont de co-type fini.

## 3.2 Foncteurs hom internes et foncteurs de division

**Convention 3.2.1.** Dans toute cette section,  $k$  désigne un corps commutatif et  $\mathcal{I}$  une catégorie essentiellement petite. Par la suite, la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  sera toujours considérée comme une sous-catégorie épaisse de la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  via le foncteur de postcomposition par l'inclusion.

La terminologie de foncteur *hom interne* est standard en théorie des catégories (cf. [ML71], chapitre VII, § 7). Le terme de *foncteur de division* a quant à lui été introduit par Lannes dans le cadre des modules instables sur l'algèbre de Steenrod dans l'article [Lan92], dont les considérations sont voisines de celles où nous emploierons — cf. [Pow98b], § 3, pour le lien entre des endofoncteurs de la catégorie de foncteurs  $\mathcal{F}$  que nous rencontrerons ultérieurement et le foncteur  $T$  de Lannes, le cas le plus important de foncteur de division de [Lan92]. On pourra aussi se reporter au chapitre 3 de [Sch94].

**Proposition et définition 3.2.2** (Foncteurs hom internes et foncteurs de division dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ ).

1. Pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , l'endofoncteur  $\cdot \otimes X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  admet un adjoint à droite, noté  $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(X, \cdot)$  conformément à la définition 1.6.5; on dispose ainsi d'un foncteur hom interne

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)^{op} \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k).$$

Ainsi, la catégorie tensorielle  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est fermée.

2. Ce foncteur est donné par l'isomorphisme naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(X, Y)(E) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(P_E^{\mathcal{I}} \otimes X, Y), \quad (3.6)$$

où  $E$  est un objet de  $\mathcal{I}$  et  $X$  et  $Y$  sont des objets de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ ; la functorialité s'obtient à partir de celle de  $\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}$  et des projectifs standard.

3. Pour tout objet  $A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$ , l'endofoncteur  $\cdot \otimes A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  admet un adjoint à gauche, noté  $(\cdot : A)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}$  conformément à la définition 1.6.5; on dispose ainsi d'un foncteur de division

$$(\cdot : \cdot)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)^{op} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k).$$

4. Les foncteurs hom internes et les foncteurs de division sont liés par l'isomorphisme de dualité

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(X, D'_{\mathcal{I}, k} Y) \simeq D'_{\mathcal{I}, k}(Y : D_{\mathcal{I}, k} X)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k)}$$

naturel en les objets  $X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  et  $Y$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k)$ .

*Démonstration.* Si  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel, l'endofoncteur  $\cdot \otimes V$  de  $\mathcal{E}_k$  commute aux colimites, et il commute aux limites si  $V$  est de dimension finie. Par conséquent, l'endofoncteur  $\cdot \otimes A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  commute aux colimites pour tout objet  $A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , et commute aux limites si  $A$  appartient à  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  (cf. propositions 3.1.8 et 3.1.7). Les corollaires 3.1.21 et 1.3.18 donnent alors l'existence des adjoints.

L'isomorphisme (3.6) s'obtient à partir de la proposition 3.1.17, qui donne des isomorphismes naturels

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(X, Y)(E) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(P_E^{\mathcal{I}}, \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(X, Y)) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(P_E^{\mathcal{I}} \otimes X, Y).$$

Enfin, l'isomorphisme de dualité provient du lemme de Yoneda et de la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{hom}(A, \mathbf{Hom}(X, D'_{\mathcal{I}} Y)) &\simeq \text{hom}(A \otimes X, D'_{\mathcal{I}} Y) \simeq \text{hom}(Y, D_{\mathcal{I}}(A \otimes X)) \simeq \text{hom}(Y, D_{\mathcal{I}} A \otimes D_{\mathcal{I}} X) \\ &\simeq \text{hom}(Y : D_{\mathcal{I}} X, D_{\mathcal{I}} A) \simeq \text{hom}(A, D'_{\mathcal{I}}(Y : D_{\mathcal{I}} X)) \end{aligned}$$

naturels en les objets  $A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ ,  $X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$  et  $Y$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_k)$ .  $\square$

*Remarque 3.2.3.* On peut démontrer l'existence des foncteurs hom internes sans faire appel au corollaire 1.3.18 : une vérification directe montre que la formule (3.6) fournit des foncteurs qui conviennent.

**Proposition 3.2.4.** *Supposons que  $F$  est un objet de type fini de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et que  $\mathcal{I}$  possède des sommes finies. Alors l'endofoncteur  $\mathbf{Hom}(F, \cdot)$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  préserve la sous-catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$ .*

*Démonstration.* La type-finitude de  $F$  entraîne que  $F$  est un quotient d'une somme directe finie de générateurs projectifs standard. L'exactitude à gauche en la première variable du bifoncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(\cdot, \cdot)$  permet alors de se ramener au cas où  $F$  est un projectif standard. La conclusion résulte alors du corollaire 3.1.24.  $\square$

*Remarque 3.2.5.* Un argument de dualité permet d'en déduire que si  $\mathcal{I}$  vérifie l'hypothèse 3.1.28, que  $F$  est un objet de type fini de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et que  $\mathcal{I}$  possède des produits finis, alors l'endofoncteur  $(\cdot : F)$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  préserve  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$ .

Nous nous intéressons maintenant à un cas particulier important, celui où un foncteur hom interne ou un foncteur de division coïncide avec un foncteur de précomposition.

**Proposition 3.2.6.** *Soient  $F$  un endofoncteur de  $\mathcal{I}$  et  $T$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Ens})$  tels qu'il existe une bijection*

$$\text{hom}_{\mathcal{I}}(F(V), W) \simeq \text{hom}_{\mathcal{I}}(V, W) \times T(W)$$

naturelle en les objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{I}$ .

Alors le foncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(k[T], \cdot)$  est isomorphe au foncteur de précomposition  $F^*$ ; autrement dit,  $F^*$  est adjoint à droite à  $\cdot \otimes k[T]$ .



*Démonstration.* On a un isomorphisme

$$k[\mathrm{hom}(V, W)] \otimes k[T](W) \simeq k[\mathrm{hom}(F(V), W)]$$

naturel en les objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{I}$ , d'où en prenant le dual et en utilisant la proposition 3.1.17 des isomorphismes naturels

$$\mathrm{hom}(P_V \otimes k[T], I_W) \simeq ((P_V \otimes k[T])(W))^* \simeq (F^* I_W)(V) \simeq \mathrm{hom}(P_V, F^* I_W),$$

ce qui fournit par (3.6) un isomorphisme naturel  $\mathbf{Hom}(k[T], I_W) \simeq F^* I_W$ . Comme les  $I_W$  forment un ensemble de cogénérateurs de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  (proposition 3.1.27) et que chacun des foncteurs  $\mathbf{Hom}(k[T], \cdot)$  et  $F^*$  commute aux limites, on en déduit qu'ils sont isomorphes, d'où la proposition.  $\square$

Un cas particulier fondamental de cette proposition est le cas où  $A$  est un objet de  $\mathcal{I}$  tel que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{I}$ ,  $A$  et  $X$  possèdent une somme : les foncteurs  $F = \cdot \amalg A$  et  $T = \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(A, \cdot)$  conviennent alors. Le foncteur  $F^*$  s'appelle alors *foncteur de  $\amalg$ -décalage par  $A$* .

La proposition suivante est la variante duale de la proposition 3.2.6 ; elle se démontre de la même façon.

**Proposition 3.2.7.** *Soient  $F$  un endofoncteur de  $\mathcal{I}$  et  $T$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathbf{Ens}^f)$  tels qu'il existe une bijection*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, F(W)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, W) \times T(V)$$

*naturelle en les objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{I}$ .*

*Alors le foncteur  $(\cdot : k^T)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}$  est isomorphe au foncteur de précomposition  $F^*$  ; autrement dit,  $F^*$  est adjoint à gauche à  $\cdot \otimes k^T$ .*

Dans cet énoncé, nous avons noté  $k^T$  l'image de  $T^{op}$  par le foncteur de précomposition par  $(\mathbf{Ens}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}_k^f \quad E \mapsto k^E$ .

Un cas particulier fondamental est donné par  $F = \cdot \times A$  (dans le cas où tout objet de  $\mathcal{I}$  possède un produit avec  $A$ ) et  $T = \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(\cdot, A)$ . Le foncteur  $F^*$  s'appelle alors *foncteur de  $\times$ -décalage par  $A$* .

Dans le cas où les deux endofoncteurs  $\cdot \amalg A$  et  $\cdot \times A$  existent et coïncident (notamment, si  $\mathcal{I}$  est une catégorie additive), on parle simplement de *foncteur de décalage par  $A$* .

Nous terminons cette section en rappelant (cf. [Ben91], § 3.1 ou [CR90], § 10 D) la description des foncteurs hom internes dans une catégorie de modules sur l'algèbre d'un *groupe* fini (qui ne se généralise pas au cas d'un monoïde quelconque). Elle entre dans le cadre des catégories de foncteurs par la remarque 3.1.4.

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $G$  un groupe fini. Le foncteur hom interne*

$$\mathbf{Hom}_{k[G]} : (k[G]\mathbf{Mod})^{op} \times (k[G]\mathbf{Mod}) \rightarrow k[G]\mathbf{Mod}$$

*de la catégorie  $k[G]\mathbf{Mod} \simeq \mathbf{Fct}(\underline{G}, \mathcal{E}_k)$  s'obtient en munissant l'espace vectoriel  $\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_k}(M, N)$  de l'action de  $G$  donnée par  $(g.\phi)(m) = g.\phi(g^{-1}.m)$ , où  $M$  et  $N$  sont des  $k[G]$ -modules. De plus, si l'on note  $M^* = \mathbf{Hom}_{k[G]}(M, k)$  le  $k[G]$ -module contragrédient de  $M$ , il existe un monomorphisme naturel  $M^* \otimes N \rightarrow \mathbf{Hom}_{k[G]}(M, N)$  qui est un isomorphisme si  $M$  ou  $N$  est fini.*

*Remarque 3.2.9.* Le module  $M^*$  est le dual de  $M$  au sens de la dualité des catégories de foncteurs introduite au paragraphe 3.1.3, modulo l'identification entre  $k[G]\mathbf{Mod}$  et  $k[G^o]\mathbf{Mod}$  obtenue à partir de l'isomorphisme de groupes entre  $G$  et  $G^o$  donné par le passage à l'inverse.

### 3.3 Lien entre différentes catégories de foncteurs

Dans cette section, nous exposons quelques méthodes simples destinées à ramener la compréhension d'une catégorie à celle de catégories de foncteurs plus « petites ».

Les « briques élémentaires » sont constituées par les catégories de modules sur l'algèbre d'un monoïde, correspondant au cas où la catégorie source n'a qu'un seul objet — cf. remarque 3.1.4. La théorie des représentations des monoïdes (en particulier, des groupes) apparaît ainsi comme un cas particulier de l'étude des catégories de foncteurs.

Mentionnons également le principe très simple suivant, qui permet, sans modifier une catégorie de foncteurs, de diminuer la taille de la catégorie source.

**Proposition 3.3.1.** *Soient  $\mathcal{I}$  une catégorie essentiellement petite,  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne et  $\mathcal{J}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{I}$  telle que tout objet de  $\mathcal{I}$  est un rétracte d'un objet de  $\mathcal{J}$ . Alors le foncteur de restriction (précomposition par l'inclusion)  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* On établit que tout foncteur  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  se prolonge de manière unique (à isomorphisme près) en un foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ , ce qui implique facilement le résultat. Etant donné un objet  $X$  de  $\mathcal{I}$ , donnons-nous un objet  $Y_X$  de  $\mathcal{J}$  et des morphismes  $i : X \rightarrow Y_X$  et  $r : Y_X \rightarrow X$  tels que  $r \circ i = id$ ; nous noterons  $e_X$  l'endomorphisme idempotent  $i \circ r$  de  $Y_X$ . On constate que l'on a un isomorphisme naturel  $\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(X, X') \simeq e_{X'} \cdot \mathrm{hom}_{\mathcal{J}}(Y_X, Y_{X'}) \cdot e_X$ .

Ainsi un prolongement  $G$  de  $F$  associe forcément à  $X$  un objet isomorphe à  $\mathrm{im}(F(e_X))$ , et à une flèche  $f : X \rightarrow X'$  une flèche isomorphe à  $\mathrm{im}(F(e_X)) \hookrightarrow F(Y_X) \xrightarrow{F(f)} F(Y_{X'}) \rightarrow \mathrm{im}(F(e_{X'}))$  (on a noté encore  $f$  l'élément lui correspondant dans l'isomorphisme naturel ci-dessus). Réciproquement, on vérifie que l'on définit ainsi un foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  qui prolonge  $F$ .  $\square$

*Remarque 3.3.2.* Cette proposition est un cas particulier d'équivalence de Morita. Nous renvoyons le lecteur à [Kuh94a], § 2 et [Pop73], chapitre 3, corollaire 6.4 pour plus de détails sur ce sujet.

#### 3.3.1 Recollement de catégories de foncteurs

**Convention 3.3.3.** Dans ce paragraphe,  $\mathcal{I}$  désigne une catégorie essentiellement petite et  $\mathcal{A}$  un anneau.

**Proposition 3.3.4.** *Soit  $i : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$  un foncteur pleinement fidèle. Notons  $G$  et  $H$  les foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$  adjoints respectivement à gauche et à droite au foncteur de restriction  $i^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$  (cf. corollaire 3.1.22). Alors l'unité  $id \rightarrow i^*G$  de la première adjonction et la coïunité  $i^*H \rightarrow id$  de la seconde sont des isomorphismes.*

*En particulier,  $i^*$  est essentiellement surjectif, et transforme un objet simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$  en un objet nul ou simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$ .*

*Démonstration.* Pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{J}$ , on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})}(G(P_E^{\mathcal{J}}), X) &\simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})}(P_E^{\mathcal{J}}, i^*X) \\ &\simeq (i^*X)(E) = X(i(E)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})}(P_{i(E)}^{\mathcal{I}}, X) \end{aligned}$$

naturels en l'objet  $X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$  (par la proposition 3.1.17), d'où par le lemme de Yoneda  $G(P_E^{\mathcal{J}}) \simeq P_{i(E)}^{\mathcal{I}}$ . La pleine fidélité de  $i$  fournit d'autre part un isomorphisme canonique  $i^*P_{i(E)}^{\mathcal{I}} \simeq P_E^{\mathcal{J}}$ , ce qui montre que l'unité  $X \rightarrow i^*G(X)$  est un isomorphisme lorsque  $X$  est un projectif standard de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$ . Comme les foncteurs  $i^*$  et  $G$  commutent à toutes les colimites et que les projectifs standard engendrent  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}})$ , on en déduit la première assertion (utiliser une présentation de  $X$  par des sommes directes de projectifs standard et le lemme des cinq).

L'assertion relative à l'adjoint à droite  $H$  se montre de façon analogue en utilisant les cogénérateurs injectifs standard.

Comme  $i^*$  a un inverse à gauche, il est essentiellement surjectif. Si  $S$  est un objet simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$  et  $X \rightarrow i^*S$  un morphisme de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_A)$ , avec  $X$  non nul, l'adjoint  $G(X) \rightarrow S$  est surjectif car non nul, donc en appliquant le foncteur exact  $i^*$ , on en déduit un épimorphisme  $i^*G(X) \rightarrow i^*(S)$ , qui via l'isomorphisme  $X \simeq i^*G(X)$  s'identifie au morphisme initial. Cela prouve que  $i^*S$  est soit nul soit simple.  $\square$

*Remarque 3.3.5.* La considération des générateurs projectifs standard montre de même que  $G$  est pleinement fidèle ( $H$  l'est également si l'hypothèse 3.1.28 est satisfaite).

**Corollaire 3.3.6.** *Pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , le foncteur d'évaluation  $ev_E$  est essentiellement surjectif et envoie un foncteur simple sur une représentation nulle ou simple du monoïde  $\text{End}_{\mathcal{I}}(E)$ .*

C'est le cas particulier du plongement pleinement fidèle  $\underline{\text{End}}_{\mathcal{I}}(E) \hookrightarrow \mathcal{I}$  d'image  $E$  dans l'énoncé précédent.

On constate que la proposition 3.3.4 fournit la « moitié droite » d'un diagramme de recollement.

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A) \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{i^*} \\ \xleftarrow{H} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_A)$$

Nous nous présentons maintenant des cas où l'on peut obtenir à partir de là un diagramme de recollement complet.

**Définition 3.3.7.** Soit  $\mathcal{J}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{I}$ . Nous dirons que  $\mathcal{J}$  est une

- sous-catégorie complète à gauche de  $\mathcal{I}$  si pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ ,  $E$  est objet de  $\mathcal{J}$  dès que  $\text{hom}_{\mathcal{I}}(E, X) \neq \emptyset$  pour un objet  $X$  de  $\mathcal{J}$  ;
- sous-catégorie complète à droite de  $\mathcal{I}$  si pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ ,  $E$  est objet de  $\mathcal{J}$  dès que  $\text{hom}_{\mathcal{I}}(X, E) \neq \emptyset$  pour un objet  $X$  de  $\mathcal{J}$  (i.e.  $\mathcal{J}^{op}$  est une sous-catégorie complète à gauche de  $\mathcal{I}^{op}$ ).

**Proposition et définition 3.3.8** (Prolongement par zéro). *Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne et  $\mathcal{J}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{I}$ . Nous noterons  $\mathcal{K}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{I}$  dont la classe d'objets est le complémentaire de celle de  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  le foncteur de restriction.*

1. Supposons que  $\mathcal{J}$  est complète, à gauche ou à droite, dans  $\mathcal{I}$ . On définit un foncteur

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$$

(noté simplement  $\mathcal{P}$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) appelé prolongement par zéro en posant  $\mathcal{P}(F)(E) = F(E)$  ( $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ ) si  $E \in \text{Ob } \mathcal{J}$ , 0 si  $E \in \text{Ob } \mathcal{K}$ ;  $\mathcal{P}(F)(t) = F(t)$  si  $t$  est une flèche de  $\mathcal{J}$ , 0 si c'est une autre flèche de  $\mathcal{I}$ ; et  $\mathcal{P}(T)_E = T_E$  si  $T$  est une flèche de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  et  $E$  un objet de  $\mathcal{J}$ , 0 sinon.

2. Supposons  $\mathcal{J}$  complète à gauche (ce qui équivaut à  $\mathcal{K}$  complète à droite).

(a) Le foncteur  $\mathcal{P}$  est adjoint à droite à  $\mathcal{R}$ .

(b) Si  $\mathcal{A}$  admet des produits quelconques, le foncteur  $\mathcal{P}$  est adjoint à gauche au foncteur  $\mathcal{N} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  défini comme suit :

- pour tout foncteur  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{J}$ ,

$$\mathcal{N}(F)(X) = \ker \left( F(X) \xrightarrow{\prod F(f)} \prod_{\substack{X \xrightarrow{f} Y \\ Y \in \text{Ob } \mathcal{K}}} F(Y) \right);$$

- si  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  est un foncteur, pour toute flèche  $X \xrightarrow{u} X'$  de  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{N}(F)(u)$  est induite par  $F(u)$ ;

- si  $T : F \rightarrow G$  est une flèche de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ ,  $\mathcal{N}(T)_X$  est induite par  $T_X$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{J}$ .

3. Supposons  $\mathcal{J}$  complète à droite (ce qui équivaut à  $\mathcal{K}$  complète à gauche).

- (a) Le foncteur  $\mathcal{P}$  est adjoint à gauche à  $\mathcal{R}$ .
- (b) Si  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes quelconques, le foncteur  $\mathcal{P}$  est adjoint à droite au foncteur  $\mathcal{N}' : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  défini comme suit :
  - pour tout foncteur  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{J}$ ,

$$\mathcal{N}'(F)(X) = \text{coker} \left( \bigoplus_{\substack{Y \xrightarrow{f} X \\ Y \in \text{Ob } \mathcal{K}}} F(Y) \xrightarrow{\bigoplus F(f)} F(X) \right);$$

- si  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  est un foncteur, pour toute flèche  $X \xrightarrow{u} X'$  de  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{N}'(F)(u)$  est induite par  $F(u)$ ;
- si  $T : F \rightarrow G$  est une flèche de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ ,  $\mathcal{N}'(T)_X$  est induite par  $T_X$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{J}$ .

*Démonstration.* Supposons  $\mathcal{J}$  complète à gauche. On vérifie que pour tout foncteur  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{P}(F)$  est bien un foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ . Il s'agit de montrer que, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

de  $\mathcal{I}$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F)(X) & \xrightarrow{\mathcal{P}(F)(f)} & \mathcal{P}(F)(Y) \\ & \searrow \mathcal{P}(F)(h) & \downarrow \mathcal{P}(F)(g) \\ & & \mathcal{P}(F)(Z) \end{array}$$

de  $\mathcal{A}$  commute.

Si  $X, Y$  et  $Z$  sont objets de  $\mathcal{J}$ , cela résulte de la functorialité de  $F$ . Sinon, par complétude à gauche de  $\mathcal{J}$ ,  $Z$  est forcément objet de  $\mathcal{K}$ , de sorte que  $\mathcal{P}(F)(Z) = 0$ , et la commutation est automatique. On en déduit aussitôt le premier point.

Montrons maintenant l'adjonction entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$ . Soient  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $G : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  des foncteurs. Une transformation naturelle  $\mathcal{R}(F) \rightarrow G$  est une famille de morphismes  $(F(X) \xrightarrow{u_X} G(X))_{X \in \text{Ob } \mathcal{J}}$  tels que  $G(f) \circ u_X = u_Y \circ F(f)$  pour tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathcal{J}$ , tandis qu'une transformation naturelle  $F \rightarrow \mathcal{P}(G)$  est une famille de morphismes  $(F(X) \xrightarrow{u_X} G(X))_{X \in \text{Ob } \mathcal{I}}$  tels que  $G(f) \circ u_X = u_Y \circ F(f)$  pour tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathcal{J}$  et que  $\mathcal{P}(G)(f) \circ u_X = u_Y \circ F(f)$  pour tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathcal{I}$  tel que  $X \in \text{Ob } \mathcal{K}$  (en effet, si  $Y$  est objet de  $\mathcal{J}$ ,  $X$  aussi). Mais dans ce cas,  $\mathcal{P}(G)(X) = 0$ , de sorte que la dernière condition est vide. On a donc un isomorphisme naturel  $\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})}(\mathcal{R}(F), G) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})}(F, \mathcal{P}(G))$ .

Traisons maintenant l'adjonction entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}'$  (la vérification que  $\mathcal{N}'$  définit bien un foncteur  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  est laissée au lecteur). Si  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $G : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  sont des foncteurs, une transformation naturelle  $u : \mathcal{P}(G) \rightarrow F$  est entièrement déterminée par les  $u_X$ , où  $X$  est objet de  $\mathcal{J}$ , puisque  $\mathcal{P}(G)(Y) = 0$  si  $Y \in \text{Ob } \mathcal{K}$ ; et une famille de morphismes  $(G(X) \xrightarrow{u_X} F(X))_{X \in \text{Ob } \mathcal{J}}$  détermine une transformation naturelle  $\mathcal{P}(G) \rightarrow F$  si et seulement si c'est une transformation

naturelle  $G \rightarrow \mathcal{R}(F)$  et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{u_X} & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow F(f) \\ G(Y) = 0 & \longrightarrow & F(Y) \end{array}$$

commute pour toute flèche  $X \xrightarrow{f} Y$  avec  $Y \in \text{Ob } \mathcal{K}$  (puisque l'existence d'une telle flèche entraîne  $X \in \text{Ob } \mathcal{J}$  si  $Y \in \text{Ob } \mathcal{J}$ ). Cette condition équivaut à  $\text{im } u_X \subset \mathcal{N}(F)(X)$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{J}$ , ce qui établit la deuxième assertion.

Le cas où  $\mathcal{J}$  est complète à droite s'en déduit en remplaçant toutes les catégories par les catégories opposées et en utilisant le lemme 3.1.25.  $\square$

*Remarque 3.3.9.* On peut définir un foncteur de prolongement par zéro dans un cadre plus général (qui peut s'obtenir par combinaison des cas des sous-catégories complètes à gauche et à droite), celui d'une sous-catégorie pleine  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{I}$  telle que si  $A$  et  $B$  sont deux objets de  $\mathcal{J}$  et  $X$  un objet de  $\mathcal{I}$  tels que  $\text{hom}_{\mathcal{I}}(A, X) \neq \emptyset$  et  $\text{hom}_{\mathcal{I}}(X, B) \neq \emptyset$ , alors  $X$  est objet de  $\mathcal{J}$ .

**Corollaire 3.3.10.** *On conserve les notations précédentes. Si la sous-catégorie  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{I}$  est complète à gauche, on a un diagramme de recollement*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_A) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \xleftarrow{\mathcal{N}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{K}, \mathbf{Mod}_A)$$

Dans le cas où  $\mathcal{J}$  est complète à droite, on a un diagramme de recollement

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathbf{Mod}_A) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{N}'} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \xleftarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{K}, \mathbf{Mod}_A).$$

*Démonstration.* Compte-tenu des propositions 3.3.4 et 3.3.8, il suffit de vérifier (dans le premier cas ; le second est analogue) que l'unité  $id \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{P}$  et la coïunité  $\mathcal{R}\mathcal{P} \rightarrow id$  sont des isomorphismes, ce qui découle des définitions des foncteurs en question.  $\square$

### 3.3.2 Produit tensoriel extérieur

Nous présentons maintenant l'analogie dans le cadre des catégories de foncteurs du produit tensoriel extérieur de modules (sur des anneaux différents). Nous renvoyons le lecteur à [CR90], chapitre 1, §10E pour les résultats de base sur ce produit tensoriel extérieur usuel en théorie des représentations ; ils contiennent les propriétés ci-après dans le cas où les catégories  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  n'ont qu'un seul objet.

**Convention 3.3.11.** Dans ce paragraphe,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  sont deux catégories essentiellement petites et  $k$  un corps commutatif. Nous noterons  $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$  et  $\pi_{\mathcal{J}} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  les foncteurs de projection.

**Définition 3.3.12** (produit tensoriel extérieur). On appelle *produit tensoriel extérieur* le foncteur

$$\boxtimes : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}^* \times \pi_{\mathcal{J}}^*} \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\otimes} \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k).$$

Autrement dit, si  $F$  et  $G$  sont des objets respectifs de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ ,  $A$  et  $B$  des objets respectifs de  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ , on a  $(F \boxtimes G)(A, B) = F(A) \otimes G(B)$ .

Le produit tensoriel extérieur est donc un bifoncteur exact commutant aux colimites. Il commute également à la dualité sur les foncteurs prenant des valeurs de dimension finie. Ses propriétés justifient l'emploi de la notation suivante.

**Notation 3.3.13.** Nous désignerons parfois par  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \otimes \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ , par abus, la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ .

*Remarque 3.3.14.* Lorsque  $\mathcal{J} = \underline{M}$ , où  $M$  est un monoïde, la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \otimes \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  est canoniquement isomorphe à la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)_M$  des objets de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  munis d'une action de  $M$  (cf. exemple 1.1.10).

**Lemme 3.3.15.** *On a un isomorphisme*

$$P_{(A,B)}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \simeq P_A^{\mathcal{I}} \boxtimes P_B^{\mathcal{J}}$$

naturel en les objets  $A$  de  $\mathcal{I}$  et  $B$  de  $\mathcal{J}$ .

Cette propriété immédiate a les conséquences suivantes.

**Proposition 3.3.16.** 1. *L'image du foncteur produit tensoriel extérieur engendre la catégorie abélienne  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ .*

2. *Le produit tensoriel extérieur d'un objet projectif de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et d'un objet projectif de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  est un objet projectif de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ .*

3. *Le produit tensoriel extérieur d'un objet de type fini de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et d'un objet de type fini de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  est un objet de type fini de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ .*

4. *On a un isomorphisme naturel en les objets  $F, F'$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $G, G'$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$*

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}^n(F \boxtimes G, F' \boxtimes G') \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^i(F, F') \otimes \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}^j(G, G') \quad (3.7)$$

pour  $n < m$  lorsque  $F$  et  $G$  sont  $\mathrm{pf}_m$

Si  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  possèdent des sommes finies, on a un isomorphisme naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}(F \boxtimes G, F' \boxtimes G') \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(F, F') \boxtimes \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}(G, G') \quad (3.8)$$

dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  dès que  $F$  et  $G$  sont de présentation finie.

*Démonstration.* Les trois premières assertions découlent du lemme 3.3.15, de la proposition 3.1.19 et de l'exactitude du produit tensoriel.

La formule (3.7) résulte du lemme 3.3.15 dans le cas où  $F$  et  $G$  sont des projectifs standard ; le cas général s'en déduit par les propositions 3.1.19 et 2.2.9 : si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des résolutions projectives de  $F$  et  $G$  respectivement, où  $P_n$  et  $Q_n$  sont pour  $n \leq m$  des sommes directes finies de projectifs standard, le complexe total

$$\left( \bigoplus_{i+j=n} P_i \boxtimes Q_j \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

construit sur le produit tensoriel extérieur de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une résolution projective de  $F \boxtimes G$  qui donne le résultat. Quant à l'isomorphisme (3.8), il s'obtient à partir de (3.7), (3.6) et de la remarque 3.1.16, d'où la proposition.  $\square$

*Remarque 3.3.17.* Dans le cas où  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  vérifient l'hypothèse 3.1.28, on a un isomorphisme naturel  $I_{(A,B)}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \simeq I_A^{\mathcal{I}} \boxtimes I_B^{\mathcal{J}}$ , ce qui permet de remplacer dans la proposition précédente les hypothèses de finitude sur  $F$  et  $G$  par les hypothèses duales sur  $F'$  et  $G'$ .

**Proposition 3.3.18** (Simples de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ ). 1. *Si  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  vérifient l'hypothèse 3.1.28, pour tout objet simple  $S$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ , il existe un objet simple  $S_1$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , un objet simple  $S_2$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  et un épimorphisme  $S_1 \boxtimes S_2 \rightarrow S$ .*

2. *Soient  $S$  un objet simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $S'$  un objet simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  tel que le corps  $\mathrm{End}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}(S')$  est réduit à  $k$ . Alors  $S \boxtimes S'$  est un objet simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ .*

3. Soient  $S_1, S_2$  deux objets simples de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $S'_1, S'_2$  deux objets simples de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ . Si  $S_1 \boxtimes S'_1 \simeq S_2 \boxtimes S'_2$ , alors  $S_1 \simeq S'_1$  et  $S_2 \simeq S'_2$ .

*Démonstration.* Pour le premier point, considérons un objet  $(A, B)$  de  $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$  tel que  $S(A, B) \neq \emptyset$ . On a alors, par simplicité de  $S$  (en utilisant le lemme 3.3.15), un épimorphisme  $X \boxtimes Y \twoheadrightarrow S$  avec  $X = P_V^{\mathcal{I}}$  et  $Y = P_W^{\mathcal{J}}$ , qui sont bien échelonnés (cf. hypothèse 3.1.28). Quitte à remplacer  $X$  par  $X/N$ , où  $N$  est le plus grand sous-objet de  $X$  tel que la composée  $N \boxtimes Y \hookrightarrow X \boxtimes Y \twoheadrightarrow S$  est nulle, on peut supposer que pour tout sous-objet non nul  $X'$  de  $X$ , la composée  $X' \boxtimes Y \hookrightarrow X \boxtimes Y \twoheadrightarrow S$  est non nulle, donc surjective. On en déduit, par exactitude des limites filtrantes bien échelonnées, que si  $S_1$  désigne l'intersection des sous-objets non nuls de  $X$  (de sorte que  $S_1$  est nulle ou simple), la composée  $S_1 \boxtimes Y \hookrightarrow X \boxtimes Y \twoheadrightarrow S$  est surjective. De même, on trouve un sous-quotient simple  $S_2$  de  $Y$  tel que la composée  $S_1 \boxtimes S_2 \hookrightarrow S_1 \boxtimes Y \twoheadrightarrow S$  est surjective.

Pour la seconde assertion, on utilise l'isomorphisme canonique  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k))$  : l'image de  $S \boxtimes S'$  dans la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k))$  appartient en fait à l'image de  $i_*$ , où  $i$  désigne l'inclusion  $(\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k))_{S'}^{ss} \hookrightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  (cf. section 2.7). Or  $(\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k))_{S'}^{ss} \simeq \mathcal{E}_{\text{End}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}(S')}$  (cf. proposition 2.7.5), et l'objet correspondant à  $S \boxtimes S'$  dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  via ces équivalences est l'objet simple  $S$ . Ainsi,  $S \boxtimes S'$  est simple dans l'image de  $i_*$ , qui est une sous-catégorie de Serre de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  (par les propositions 2.7.4 et 3.1.10), c'est donc aussi un objet simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ .

Pour la dernière assertion, on choisit un objet  $E$  de  $\mathcal{J}$  tel que l'espace vectoriel  $V = S'_1(E)$  est non nul : alors  $S_1 \otimes V \simeq S_2 \otimes W$ , où  $W = S'_2(E)$  ; comme  $S_1$  et  $S_2$  sont simples, cela entraîne qu'ils sont isomorphes. De même,  $S'_1 \simeq S'_2$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 3.3.19** (Groupe de Grothendieck de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ ). *Supposons que  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  vérifient l'hypothèse 3.1.28 et que les corps d'endomorphismes des objets simples de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$  sont réduits à  $k$ . Le produit tensoriel extérieur induit des isomorphismes de groupes abéliens*

$$G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)) \simeq G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)) \otimes G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k))$$

et

$$K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)) \simeq K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)) \otimes K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)).$$

### Foncteurs exponentiels

Le produit tensoriel extérieur permet d'introduire la notion simple mais fondamentale de foncteur exponentiel. Nous en donnerons ultérieurement des exemples et des applications. Ces définitions et les conséquences suivantes apparaissent (dans le cas de la catégorie  $\mathcal{F}$ ) dans [FFSS99] et [Fra96].

**Définition 3.3.20** (Foncteurs exponentiels). 1. Supposons que la catégorie  $\mathcal{I}$  possède des sommes finies, de sorte que l'on dispose d'un foncteur  $\Pi : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ . Un foncteur  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}_k$  est dit  $\Pi$ -*exponentiel* s'il existe dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  un isomorphisme  $\Pi^* F \simeq F \boxtimes F$  compatible aux isomorphismes de commutativité et d'associativité de  $\Pi$  et  $\otimes$ . Un foncteur gradué  $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est dit  $\Pi$ -*exponentiel gradué* s'il est à valeurs de dimension finie, que  $F_0 \simeq k$  (foncteur constant) et que l'on dispose d'un tel isomorphisme gradué, i.e.

$$\Pi^* F_n \simeq \bigoplus_{i+j=n} F_i \boxtimes F_j.$$

2. Supposons que la catégorie  $\mathcal{I}$  possède des produits finis, de sorte que l'on dispose d'un foncteur  $\times : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ . Un foncteur  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}_k$  est dit  $\times$ -*exponentiel* s'il existe un isomorphisme  $\times^* F \simeq F \boxtimes F$  compatible aux isomorphismes de commutativité et d'associativité de  $\times$  et  $\otimes$ . Un foncteur gradué  $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est dit  $\times$ -*exponentiel gradué* s'il est à valeurs de dimension finie, que  $F_0 \simeq k$  et que l'on dispose d'un tel isomorphisme gradué, i.e.

$$\times^* F_n \simeq \bigoplus_{i+j=n} F_i \boxtimes F_j.$$

3. Lorsque la catégorie  $\mathcal{I}$  est additive, les notions de foncteur  $\Pi$ -exponentiel (gradué) et  $\times$ -exponentiel (gradué) coïncident ; on parlera alors seulement de foncteur exponentiel (gradué).

La propriété suivante découle des définitions.

**Proposition 3.3.21.** 1. Supposons que  $\mathcal{I}$  possède des produits finis.

- (a) Pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , le foncteur  $P_E^{\mathcal{I}}$  est  $\times$ -exponentiel.  
(b) Le produit tensoriel de deux foncteurs  $\times$ -exponentiels (resp. d'un foncteur  $\times$ -exponentiel et d'un foncteur  $\times$ -exponentiel gradué) est un foncteur  $\times$ -exponentiel (resp.  $\times$ -exponentiel gradué).

2. Supposons que  $\mathcal{I}$  possède des sommes finies.

- (a) Si l'hypothèse 3.1.28 est satisfaite, pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , le foncteur  $I_E^{\mathcal{I}}$  est  $\Pi$ -exponentiel.  
(b) Le produit tensoriel de deux foncteurs  $\Pi$ -exponentiels (resp. d'un foncteur  $\Pi$ -exponentiel et d'un foncteur  $\Pi$ -exponentiel gradué) est un foncteur  $\Pi$ -exponentiel (resp.  $\Pi$ -exponentiel gradué).

**Lemme 3.3.22.** Notons  $\delta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{I}$  le foncteur diagonal.

1. Si  $\mathcal{I}$  possède des sommes finies, le foncteur  $\Pi : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  est adjoint à gauche à  $\delta$ . Par conséquent,  $\Pi^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est adjoint à droite à  $\delta^*$ .  
2. Si  $\mathcal{I}$  possède des produits finis, le foncteur  $\times : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  est adjoint à droite à  $\delta$ . Par conséquent,  $\times^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est adjoint à gauche à  $\delta^*$ .  
3. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) & \xrightarrow{\boxtimes} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \\ & \searrow \otimes & \downarrow \delta^* \\ & & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \end{array}$$

commute.

Ce lemme immédiat permet d'établir la proposition suivante, grâce à laquelle les foncteurs exponentiels s'avèrent souvent utiles pour simplifier des calculs d'algèbre homologique.

**Proposition 3.3.23.** Supposons que  $\mathcal{I}$  possède des produits finis. Si  $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est un foncteur  $\times$ -exponentiel gradué tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est  $pf_\infty$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  un isomorphisme gradué

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(F_n, X \otimes Y) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(F_i, X) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(F_j, Y) \quad (3.9)$$

naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ . Si  $\mathcal{I}$  possède également des sommes finies, on a un isomorphisme naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(F_n, X \otimes Y) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(F_i, X) \otimes \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}(F_j, Y) \quad (3.10)$$

dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .

*Démonstration.* Le lemme 3.3.22, combiné au corollaire 1.2.8, fournit des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(F, X \otimes Y) &= \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(F, \delta^*(X \boxtimes Y)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(\times^* F, X \boxtimes Y) \\ &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, \mathcal{E}_k)}^*(F \boxtimes F, X \boxtimes Y), \end{aligned}$$

de sorte que l'isomorphisme (3.7) fournit (3.9).

Quant à (3.9), il s'en déduit en appliquant ce qui précède (pour  $*$  = 0) aux foncteurs exponentiels  $\times$ -gradués  $(P_E^{\mathcal{I}} \otimes F_n)_n$  (cf. proposition 3.3.21) et en utilisant la remarque 3.1.16 et (3.6).  $\square$



*Remarque 3.3.24.* 1. On a un énoncé analogue pour un foncteur exponentiel non gradué.

2. Dans le cas où l'hypothèse 3.1.28 est vérifiée, on a un analogue dual en remplaçant  $\times$ -exponentiel par  $\Pi$ -exponentiel. On obtient ainsi notamment que si  $\mathcal{I}$  possède des sommes et des produits finis et que  $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est un foncteur  $\Pi$ -exponentiel gradué tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est  $\text{co-pf}_\infty$ , on a un isomorphisme

$$(X \otimes Y : F_n) \simeq \bigoplus_{i+j=n} (X : F_i) \otimes (Y : F_j) \quad (3.11)$$

naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k^f)$ .

## Chapitre 4

# La catégorie $\mathcal{F}$ et la conjecture artinienne

Nous introduisons dans ce chapitre la catégorie  $\mathcal{F}$  des *représentations génériques* des groupes linéaires sur le corps  $\mathbb{F}_2$ .

**Définition 4.0.1.** Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{F}_2}$  la catégorie des espaces vectoriels sur le corps à deux éléments; ainsi  $\mathcal{E}^f = \mathcal{E}_{\mathbb{F}_2}^f$  désignera la sous-catégorie pleine essentiellement petite des espaces de dimension finie. La catégorie  $\mathcal{F}$  est la catégorie de foncteurs

$$\mathcal{F} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{E}).$$

Ces notations seront conservées dans toute la suite de cette thèse; sauf mention expresse du contraire, tous les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels sur  $\mathbb{F}_2$ .

La principale motivation qui a amené plusieurs mathématiciens à étudier systématiquement la catégorie  $\mathcal{F}$  depuis les années 1990 est *topologique*: les travaux de Henn, Lannes et Schwartz (cf. [HLS93] et [Sch94]) ont mis en évidence les liens étroits entre  $\mathcal{F}$  et l'algèbre de Steenrod des opérations stables de la cohomologie modulo 2. En topologie, parmi les corps premiers, les corps finis donnent lieu aux structures les plus riches. De plus, la caractéristique 2 présente quelques particularités techniques intéressantes qui rendent naturel de lui accorder un intérêt spécial: les puissances réduites suffisent à engendrer l'algèbre de Steenrod, et les conditions de commutativité graduée se muent en une commutativité stricte. Enfin, sur  $\mathbb{F}_2$ , les homothéties sont triviales, ce qui évite de distinguer entre les différentes variantes de groupes linéaires. C'est pourquoi la catégorie de foncteurs  $\mathcal{F}$  définie sur  $\mathbb{F}_2$  a fait l'objet d'une attention particulière.

Lorsque l'on remplace  $\mathbb{F}_2$  par un autre corps *fini*, on obtient une catégorie dont le comportement est très analogue. La plupart de nos considérations ultérieures peut, au prix parfois de quelques raffinements techniques, mineurs, être généralisée à ce cas (cf. [Dja06a]). Les propriétés de base de la catégorie  $\mathcal{F}$ , exposées dans les trois articles de Kuhn [Kuh94a], [Kuh94b] et [Kuh95] et la thèse de Piriou [Pir95] (chapitres 1 à 3), y sont d'ailleurs démontrées, pour l'essentiel, avec ce degré de généralité. Les phénomènes nouveaux qui apparaissent (décomposition scalaire, action du morphisme de Frobenius pour un corps fini non premier) se traitent en effet de manière élémentaire, tandis que les problèmes ardues liés à la structure globale de la catégorie de foncteurs ou aux représentations modulaires se présentent en les mêmes termes que sur  $\mathbb{F}_2$ . Les considérations d'extension du corps de base présentent quant à elles des subtilités qu'il convient d'étudier en termes de foncteurs *strictement polynomiaux* (cf. [FFSS99]), dont nous n'aurons pas usage.

Le début de ce chapitre est consacré à la structure élémentaire de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Après quelques généralités (section 4.1), nous étudions les foncteurs finis de  $\mathcal{F}$ . Le résultat principal réside dans leur

caractère *polynomial*, i.e. nilpotent pour le foncteur différence  $\Delta$ , dont la définition est rappelée dans le § 4.2.1. Cela permet d'utiliser les méthodes classiques de théorie des représentations des groupes symétriques, via leur action sur les foncteurs puissances tensorielles par permutation des facteurs. Les références bibliographiques sur le sujet abondent ; contentons-nous de citer le chapitre 5 de [Sch94] et [Pir95]. Dans [Kuh94b], Kuhn suit une méthode proche, mais utilise les représentations des groupes linéaires sur  $\mathbb{F}_2$  plutôt que celles des groupes symétriques (nous y reviendrons au chapitre suivant — cf. proposition 5.3.17).

Dans la section 4.3, nous discuterons différentes variantes de l'énoncé suivant, dont nous avons donné ici la forme minimale.

**Conjecture 4.0.2** (Conjecture artinienne). *La catégorie  $\mathcal{F}$  est co-localement artinienne.*

Ce problème a été posé initialement par Lannes et Schwartz. Kuhn en a discuté les aspects de base dans [Kuh94b], § 3. Cette question s'est vite avérée l'une des plus difficiles à résoudre sur la catégorie  $\mathcal{F}$  et reste largement ouverte.

## 4.1 La catégorie abélienne tensorielle $\mathcal{F}$

Nous rappelons dans cette section quelques résultats simples sur la structure de  $\mathcal{F}$  que nous avons établis au chapitre 3 (avec des conséquences découlant des résultats du chapitre 2). On note que l'hypothèse 3.1.28 est vérifiée, et que le foncteur de dualité induisant une équivalence de catégories entre  $(\mathcal{E}^f)^{op}$  et  $\mathcal{E}^f$ , on dispose d'une *auto-dualité* dans  $\mathcal{F}$ . De plus, le caractère additif de la catégorie source  $\mathcal{E}^f$  permet d'assurer un bon comportement du produit tensoriel (cf. corollaire 3.1.24, paragraphe 3.3.2 etc.).

**Proposition 4.1.1.** 1. *La catégorie  $\mathcal{F}$  est une catégorie abélienne vérifiant les hypothèses 1.3.4 et 2.1.12. Elle est engendrée par les projectifs de type fini standard  $P_V = \mathbb{F}_2[\text{hom}(V, \cdot)]$  ( $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ).*

2. *C'est une catégorie tensorielle exacte fermée munie d'une bonne auto-dualité  $D : \mathcal{F}^{op} \rightarrow \mathcal{F}$ . Ce foncteur est obtenu par la composition (commutative) du foncteur de précomposition par  $(\cdot)^* : (\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$  et du foncteur de postcomposition par  $(\cdot)^* : \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$  ; on a ainsi  $(DF)(V) = F(V^*)^*$  pour tous  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$  et  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ . Les duaux  $I_V = DP_{V^*}$  des projectifs standard forment une famille de cogénérateurs injectifs de co-type fini (injectifs standard) ; explicitement, on a  $I_V(E) \simeq \mathbb{F}_2^{\text{hom}(E, V)}$ .*

3. *On a des isomorphismes naturels*

$$P_V \otimes P_W \simeq P_{V \oplus W}, \quad I_V \otimes I_W \simeq I_{V \oplus W} \quad (V, W \in \text{Ob } \mathcal{E}^f).$$

4. *Le produit tensoriel préserve :*

- les objets projectifs ;
- les objets de type fini ;
- les objets  $pf_n$  ;
- les objets injectifs de co-type fini ;
- les objets de co-type fini ;
- les objets  $co-pf_n$ .

*Remarque 4.1.2.* On peut étendre canoniquement un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}$  en un foncteur  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , en associant à un espace vectoriel  $V$  la colimite des  $F(W)$  (pour les monomorphismes induits par les inclusions),  $W$  parcourant l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de  $V$ . On obtient ainsi une correspondance bijective entre  $\mathcal{F}$  et les foncteurs  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  qui commutent aux colimites filtrantes. Rappelons que l'on évite de considérer la catégorie de tous ces foncteurs parce que  $\mathcal{E}$  n'est pas essentiellement petite ; la seule considération des foncteurs  $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  n'est pas non plus suffisante car cette catégorie ne possède pas toutes les (co)limites, et n'a pas assez de projectifs ni d'injectifs.

En particulier, on peut *composer* les objets de  $\mathcal{F}$  (dans la plupart des cas, nous ne considérerons que des foncteurs à valeurs de dimension finie, ce qui évite d'avoir à considérer le prolongement précédent pour définir cette composition), ou plus généralement un objet de  $\mathcal{F}$  et un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$ , où  $\mathcal{I}$  est une catégorie essentiellement petite.

**Notation 4.1.3.** – Le projectif  $P_{\mathbb{F}_2}$  sera noté (sauf ambiguïté possible) simplement  $P$  par la suite. De même, l'injectif  $I_{\mathbb{F}_2}$  sera noté  $I$ .  
– La sous-catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{E}^f)$  des objets bien échelonnés de  $\mathcal{F}$  sera notée  $\mathcal{F}^{df}$ .

La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  des foncteurs constants (que nous identifierons à  $\mathcal{E}$  dans la suite) est *épaisse* — il résulte de la proposition 3.1.14 que c'est une sous-catégorie de Serre, puisque l'unique foncteur  $\mathcal{E}^f \rightarrow *$  est plein et essentiellement surjectif, et elle est stable par extensions parce que  $\mathbb{F}_2 = P_0$  est projectif dans  $\mathcal{F}$ . La proposition suivante, dont la vérification est immédiate, complète cette remarque.

**Proposition et définition 4.1.4.** *On a des isomorphismes*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(F, i(V)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(F(0), V) \quad \text{et} \quad \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(i(V), F) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(V, F(0))$$

*naturels en les objets  $F$  de  $\mathcal{F}$  et  $V$  de  $\mathcal{E}$ , où  $i : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$  désigne le foncteur associant à un espace vectoriel  $V$  le foncteur constant en  $V$ . Dans la suite, nous noterons simplement  $V$  pour  $i(V)$ , par abus.*

*On a de plus une décomposition naturelle*

$$F \simeq \bar{F} \oplus F(0)$$

*où  $\bar{F} = \ker(F \rightarrow F(0))$  (la notation  $\bar{F}$  sera conservée dans toute la suite) est appelé la partie sans terme constant de  $F$  et  $F(0)$  le terme constant de  $F$ .*

*Remarque 4.1.5.* Cette proposition fournit une équivalence de catégories  $\mathcal{F} \simeq \mathcal{E} \times \bar{\mathcal{F}}$ , où  $\bar{\mathcal{F}}$  est la sous-catégorie pleine des foncteurs sans terme constant. Lorsqu'on remplace  $\mathbb{F}_2$  par un autre corps fini, cette équivalence se généralise en la *décomposition scalaire* (cf. [Kuh94a], § 3.3).

Un cas particulier d'usage très courant est celui des décompositions  $P \simeq \bar{P} \oplus \mathbb{F}_2$  et  $I \simeq \bar{I} \oplus \mathbb{F}_2$ . Pour tout  $V \in \mathrm{Ob} \mathcal{E}^f$ , le sous-espace vectoriel  $\bar{P}(V)$  de  $P(V)$  admet une base formée des  $[0] + [v]$ , où  $v \in V \setminus \{0\}$ . Si l'on considère plutôt  $\bar{P}$  comme un quotient de  $P$ , une base de  $\bar{P}(V)$  est formée des images des générateurs  $[v]$  pour  $v \in V \setminus \{0\}$ , que par abus nous noterons encore parfois  $[v]$ .

## 4.2 Foncteurs finis

Le premier paragraphe de cette section présente les propriétés formelles du foncteur différence et des foncteurs polynomiaux ; on y rappelle le caractère co-localement polynomial des objets projectifs de type fini de  $\mathcal{F}$  et ses conséquences fondamentales. Le deuxième paragraphe expose des considérations beaucoup plus concrètes sur les foncteurs finis usuels de  $\mathcal{F}$  : puissances tensorielles, extérieures, symétriques... Enfin, le paragraphe 4.2.3 rappelle les liens entre les foncteurs polynomiaux de  $\mathcal{F}$  et les représentations des groupes symétriques sur  $\mathbb{F}_2$ .

### 4.2.1 Foncteurs polynomiaux

**Définition 4.2.1** (Foncteurs de décalage). Étant donné un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , nous désignerons par  $\Delta_V$  l'endofoncteur de  $\mathcal{F}$  de précomposition par le foncteur  $\cdot \oplus V : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  de somme directe avec  $V$ . On l'appelle *foncteur de décalage* par  $V$  (cf. section 3.2).

*Remarque 4.2.2.* – Le caractère bifonctoriel de  $\oplus$  montre que cette construction est fonctorielle en  $V$ .

- On a un isomorphisme naturel  $\Delta_{V \oplus W} \simeq \Delta_V \circ \Delta_W$ . En particulier, si  $V$  est de dimension  $n$ , le foncteur  $\Delta_V$  est isomorphe à  $(\Delta_{\mathbb{F}_2})^n$ .

**Définition 4.2.3** (Foncteur différence). Le foncteur  $\Delta_{\mathbb{F}_2}$  sera noté  $\tilde{\Delta}$ . Le noyau de la transformation naturelle  $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta_0 = id_{\mathcal{F}}$  induite par le morphisme  $\mathbb{F}_2 \rightarrow 0$  de  $\mathcal{E}^f$  est appelé *foncteur différence*; il se note  $\Delta$ .

*Remarque 4.2.4.* Le foncteur  $\Delta$  est également le conoyau de la transformation naturelle  $id \rightarrow \tilde{\Delta}$  induite par  $0 \rightarrow \mathbb{F}_2$ , de sorte que l'on a un scindement canonique

$$\tilde{\Delta} \simeq \Delta \oplus id. \quad (4.1)$$

Ce scindement est analogue à celui de la proposition 4.1.4.

**Proposition 4.2.5** (Adjoints aux foncteurs décalage et différence). *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie.*

- *Le foncteur de décalage  $\Delta_V$  est adjoint à droite à  $\cdot \otimes P_V$ . En particulier,  $\tilde{\Delta}$  est adjoint à droite à  $\cdot \otimes P$ .*
- *Le foncteur de décalage  $\Delta_V$  est adjoint à gauche à  $\cdot \otimes I_V$ . En particulier,  $\tilde{\Delta}$  est adjoint à gauche à  $\cdot \otimes I$ .*
- *Le foncteur différence  $\Delta$  est adjoint à droite à  $\cdot \otimes \bar{P}$  et à gauche à  $\cdot \otimes \bar{I}$ .*

*Remarque 4.2.6.* Ces adjonctions sont naturelles en  $V$ .

*Démonstration.* Les assertions relatives aux foncteurs de décalage découlent des propositions 3.2.6 et 3.2.7, le cas du foncteur différence s'en déduit par le scindement (4.1).  $\square$

*Remarque 4.2.7.* Explicitement, la coïunité de l'adjonction  $P \otimes \tilde{\Delta}F \rightarrow F$  est donnée, sur l'objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ , par

$$[v] \otimes x \mapsto F(id_V \oplus v)(x)$$

où  $v \in V$  et  $x \in F(V \oplus \mathbb{F}_2)$  (on a noté par abus encore  $v$  l'application linéaire  $\mathbb{F}_2 \rightarrow V$  déterminée par  $v$ ).

La coïunité  $\bar{P} \otimes \Delta F \rightarrow F$  s'obtient par restriction de celle-ci.

**Proposition 4.2.8.** 1. *On a des isomorphismes naturels*

$$\Delta_E(P_V) \simeq P_V(E) \otimes P_V \quad \text{et} \quad \Delta_E(I_V) \simeq I_V(E) \otimes I_V \quad (V, E \in \text{Ob } \mathcal{E}^f). \quad (4.2)$$

2. *Les foncteurs de décalage commutent naturellement au produit tensoriel; on a de plus un isomorphisme de foncteurs  $D \circ \Delta_V \simeq \Delta_{V^*} \circ D$  naturel en  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  (donc un isomorphisme, non naturel,  $D \circ \Delta_V \simeq \Delta_V \circ D$ ).*
3. *Le foncteur différence commute naturellement à la dualité. On a un isomorphisme*

$$\Delta(F \otimes G) \simeq (\Delta F \otimes G) \oplus (F \otimes \Delta G) \oplus (\Delta F \otimes \Delta G) \quad (4.3)$$

*naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}$ .*

4. *Les foncteurs de décalage et le foncteur différence préservent :*

- (a) *les objets projectifs et les objets injectifs;*
- (b) *les objets de type fini,  $pf_n$ , co-tf et co- $pf_n$ .*

5. *Soit  $F$  un foncteur tel que  $F(0)$  est de dimension finie et que  $\Delta F$  est de type fini (resp. fini,  $pf_n$ , co-tf, co- $pf_n$ ). Alors  $F$  est de type fini (resp. fini,  $pf_n$ , co-tf, co- $pf_n$ ).*

*Démonstration.* Le premier point résulte de ce que les foncteurs  $P_V$  et  $I_V$  sont naturellement *exponentiels*. Un foncteur de précomposition commute toujours au produit tensoriel, et si l'on note  $s_V = \cdot \oplus V$  l'endofoncteur de  $\mathcal{E}^f$  de translation par  $V$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}^f)^{op} & \xrightarrow{(s_V)^{op}} & (\mathcal{E}^f)^{op} \\ (\cdot)^* \downarrow & & \downarrow (\cdot)^* \\ \mathcal{E}^f & \xrightarrow{s_V^*} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

commute (à isomorphisme naturel près), ce qui fournit le second point. Le troisième s'en déduit aisément via (4.1). Par exemple, (4.3) s'obtient en constatant que, si l'on note  $p_F : \tilde{\Delta}F \rightarrow F$  la projection canonique, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}(F \otimes G) & \xrightarrow{p_F \otimes p_G} & F \otimes G \\ \simeq \downarrow & \nearrow p_F \otimes p_G & \\ \tilde{\Delta}F \otimes \tilde{\Delta}G & & \end{array}$$

commute, et en identifiant les noyaux.

La première partie de la quatrième assertion découle des propositions 4.2.5 et 1.2.7. La seconde partie provient, compte-tenu des deux premiers points, des propositions 2.2.15 et 2.4.19.

On observe maintenant que le foncteur  $\Delta \times ev_0 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  est exact, commute aux colimites, et est *fidèle*. En effet, si  $\Delta F = 0$ , on a  $F(V \oplus \mathbb{F}_2) \simeq F(V)$  pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ , de sorte que  $F$  est constant, ce qui entraîne sa nullité si  $F(0) = 0$ . Par la proposition 2.1.5, on en déduit que si  $F$  est un foncteur tel que  $(\Delta F, ev_0(F))$  est un objet tf de  $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ , i.e. tel que  $\Delta F$  est un objet tf de  $\mathcal{F}$  et  $F(0)$  un espace vectoriel de dimension finie, alors  $F$  est tf. Les propositions 2.2.17 et 2.6.15 démontrent de même la dernière assertion dans les cas où  $F$  est respectivement  $pf_n$  et fini. Les cas où  $F$  est co-tf ou co- $pf_n$  s'en déduisent par dualité, d'où la proposition.  $\square$

**Définition 4.2.9** (Foncteurs polynomiaux, (co)analytiques). Un foncteur  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$  est dit :

- *polynomial* s'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $\Delta^n F = 0$ ;
- *analytique* s'il est réunion de ses sous-foncteurs polynomiaux;
- *coanalytique* s'il est limite de ses quotients polynomiaux.

Le *degré* d'un foncteur polynomial non nul  $F$  est le plus grand entier positif  $n$  tel que  $\Delta^n F \neq 0$ , on le note  $\text{deg } F$ ; on pose également  $\text{deg } 0 = -\infty$ .

**Notation 4.2.10.** Étant donné  $n \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $\mathcal{F}_n$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  formée des foncteurs polynomiaux de degré au plus  $n$ . Ainsi, pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_n$  est le noyau du foncteur exact  $\Delta^{n+1}$ , c'est donc une sous-catégorie *épaisse* de  $\mathcal{F}$ .

Nous désignerons par  $\mathcal{F}_\omega$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  des foncteurs analytiques.

*Remarque 4.2.11.* – Pour  $n < 0$ ,  $\mathcal{F}_n$  est la sous-catégorie réduite à 0;  $\mathcal{F}_0 \simeq \mathcal{E}$  est la catégorie des foncteurs constants.

- Notons  $d_F$ , où  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}^{df}$ , la fonction  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  donnée par  $d_F(n) = \dim F(\mathbb{F}_2^{\oplus n})$ . On a alors  $d_{\Delta F} = \delta(d_F)$ , où  $\delta$  désigne l'opérateur donné par  $\delta(f)(n) = f(n+1) - f(n)$ .

Comme une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  est polynomiale de degré au plus  $n$  si et seulement si  $\delta^{n+1}(f) = 0$ , on voit que le foncteur  $F$  à valeurs de dimension finie est polynomial si et seulement si la fonction  $d_F$  est polynomiale (et leurs degrés coïncident alors), ce qui justifie la terminologie.

- Les isomorphismes (4.2) montrent qu'un objet projectif ou injectif n'est polynomial que lorsqu'il est constant.
- Il est également usuel de définir la notion de foncteur polynomial à partir des « effets croisés », ou « déviations » (cf. [Fra96]). Nous n'utiliserons pas ce point de vue, strictement équivalent à celui donné ici (qui est par exemple employé dans [Sch94]).

- Le dual d'un foncteur analytique est coanalytique ; le dual d'un foncteur coanalytique à valeurs de dimension finie est analytique.

*Exemple 4.2.12.* Supposons que  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un foncteur exponentiel gradué de  $\mathcal{F}$ . On a un isomorphisme

$$\Delta F_n \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} F_{n-i}(\mathbb{F}_2) \otimes F_i \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Cela montre que pour tout  $n$ ,  $F_n$  est polynomial de degré au plus  $n$ , et de degré exactement  $n$  si  $F_1 \neq 0$  (on a alors  $F_1(\mathbb{F}_2) \neq 0$  car  $F_1$  est un foncteur additif).

**Proposition 4.2.13.** 1. *Le dual d'un foncteur polynomial est polynomial de même degré.*

2. *Si  $F$  et  $G$  sont deux foncteurs polynomiaux, alors  $F \otimes G$  est un foncteur polynomial, et  $\deg(F \otimes G) = \deg F + \deg G$ .*

3. *Le produit tensoriel de deux foncteurs analytiques est analytique.*

4. *Un foncteur  $F$  est polynomial si et seulement si  $\Delta F$  est polynomial ; si de plus  $F$  est non constant, on a  $\deg(\Delta F) = \deg F - 1$ .*

*Démonstration.* Le premier point résulte de la commutation entre  $\Delta$  et  $D$ , le second de (4.3), et le troisième s'en déduit par passage à la colimite. Le dernier découle de la définition.  $\square$

*Remarque 4.2.14.* En revanche, la notion de foncteur analytique est fortement non auto-duale. Nous verrons ainsi que les injectifs standard  $I_V$  sont toujours analytiques, mais que leur dual  $P_V^*$  ne l'est que si  $V$  est nul.

La proposition suivante, dont la démonstration est purement formelle, revêt une importance particulière dans le cadre de l'étude des propriétés de finitude dans  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 4.2.15** (Schwartz). *Supposons que  $F$  est un foncteur polynomial à valeurs de dimension finie. Alors  $F$  est fini,  $pf_\infty$  et  $co\text{-}pf_\infty$ .*

*Démonstration.* Il suffit de combiner la dernière assertion de la proposition 4.2.8 et une récurrence sur le degré.  $\square$

*Remarque 4.2.16.* L'inégalité sous-jacente à la démonstration de la finitude d'un foncteur polynomial  $F$  de  $\mathcal{F}^{df}$  est la borne  $\lg(F) \leq \lg(\Delta F) + \dim F(0)$ . Celle-ci est très mauvaise ; donner des renseignements précis sur les facteurs de composition de  $\Delta S$ , où  $S$  est un foncteur simple, est en général très difficile (cf. [PS98], § 3, pour des résultats partiels à ce sujet).

**Proposition et définition 4.2.17** (Foncteurs  $p_n$  et  $q_n$ ). *Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ .*

1. *Notons  $q_n(F)$  le conoyau du morphisme naturel  $\bar{P}^{\otimes n} \otimes \Delta^n F \rightarrow F$  (coïunité d'une adjonction dérivée de la proposition 4.2.5). Pour  $n < 0$ , on pose  $q_n(F) = 0$ . Alors  $q_n(F)$  est un foncteur polynomial de degré au plus  $n$  ; c'est le plus grand quotient de  $F$  ayant cette propriété. Tout morphisme  $F \rightarrow G$  de  $\mathcal{F}$  induit un morphisme  $q_n(F) \rightarrow q_n(G)$ , ce qui permet de voir  $q_n$  comme un foncteur  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_n$ . Celui-ci est adjoint à gauche au foncteur d'oubli  $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ .*

2. *Notons  $p_n(F)$  le noyau du morphisme naturel  $F \rightarrow \bar{I}^{\otimes n} \otimes \Delta^n F$  (unité d'une adjonction dérivée de la proposition 4.2.5). Pour  $n < 0$ , on pose  $p_n(F) = 0$ . Alors  $p_n(F)$  est le plus grand sous-foncteur polynomial de degré au plus  $n$  de  $F$ . Tout morphisme  $F \rightarrow G$  de  $\mathcal{F}$  induit un morphisme  $p_n(F) \rightarrow p_n(G)$ , ce qui permet de voir  $p_n$  comme un foncteur  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_n$ . Celui-ci est adjoint à droite au foncteur d'oubli  $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ .*

3. *Les foncteurs  $p_n$  et  $q_n$  sont liés par les isomorphismes naturels de dualité*

$$p_n(DF) \simeq D(q_n(F)) \quad \text{et} \quad q_n(DF) \simeq D(p_n(F)).$$

## 4. Posons

$$p_\infty(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n(F).$$

Alors  $p_\infty(F)$  est le plus grand sous-foncteur analytique de  $F$ . On obtient ainsi un foncteur  $p_\infty$  adjoint à droite au foncteur d'oubli  $\mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}$ .

**Définition 4.2.18.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}$  est dit :

- homogène de degré  $n$  s'il est polynomial de degré  $n$  (donc  $F = p_n(F)$ ) et que  $p_{n-1}(F) = 0$  ;
- cohomogène de degré  $n$  s'il est polynomial de degré  $n$  (donc  $F = q_n(F)$ ) et que  $q_{n-1}(F) = 0$ .

*Remarque 4.2.19.* Un foncteur fini non nul de degré  $n$  est homogène (resp. cohomogène) si et seulement si son socle (resp. son cosocle) n'est constitué que d'objets simples de degré  $n$ .

**Proposition et définition 4.2.20** (Filtration (co)polynomiale). Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ .

## 1. La filtration naturelle

$$0 = p_{-1}(F) \subset p_0(F) = F(0) \subset \dots \subset p_n(F) \subset \dots$$

de  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$  est appelée filtration polynomiale de  $F$ . Ses sous-quotients sont notés

$$p_n^{\text{hom}} = p_n/p_{n-1} \tag{4.4}$$

(où l'on note encore  $p_i$ , par abus, pour la composée de  $p_i$  et du foncteur d'oubli  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ ). Le foncteur  $p_n^{\text{hom}}(F)$  est le plus grand quotient homogène de degré  $n$  de  $p_n(F)$  s'il est non nul ; on l'appelle partie homogène de degré  $n$  de  $F$ .

2. On définit des endofoncteurs  $k_n$  de  $\mathcal{F}$  par  $k_n = \ker(\text{id} \rightarrow q_{n-1})$ , de sorte que l'on obtient une filtration décroissante naturelle

$$F = k_0(F) \supset k_1(F) \supset \dots \supset k_n(F) \supset \dots$$

du foncteur  $F$ , appelée filtration copolynomiale de  $F$ . Ses sous-quotients sont notés

$$q_n^{\text{hom}} = k_n/k_{n+1} \simeq \ker(q_n \rightarrow q_{n-1}).$$

Le foncteur  $q_n^{\text{hom}}(F)$  est le plus grand sous-objet cohomogène de degré  $n$  de  $q_n(F)$  s'il est non nul ; on l'appelle partie cohomogène de degré  $n$  de  $F$ .

Les propositions/définitions 4.2.17 et 4.2.20 sont implicites dans [HLS93], et explicites dans [Pir95].

**Proposition 4.2.21.** Soient  $F, G \in \text{Ob } \mathcal{F}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 1. On a

$$p_n(F \otimes G) = \sum_{i+j=n} p_i(F) \otimes p_j(G).$$

## 2. Le produit tensoriel de deux foncteurs homogènes (resp. cohomogènes) est homogène (resp. cohomogène).

3. De plus,  $p_\infty(F \otimes G) = p_\infty(F) \otimes p_\infty(G)$ .

## 4. On a des isomorphismes naturels

$$p_n^{\text{hom}}(F \otimes G) \simeq \bigoplus_{i+j=n} p_i^{\text{hom}}(F) \otimes p_j^{\text{hom}}(G)$$

et

$$q_n^{\text{hom}}(F \otimes G) \simeq \bigoplus_{i+j=n} q_i^{\text{hom}}(F) \otimes q_j^{\text{hom}}(G).$$



Pour la démonstration, voir [Pir95], proposition 1.3.1.

*Remarque 4.2.22.* Un foncteur homogène et cohomogène de degré  $n$  peut avoir un sous-quotient non nul de degré strictement inférieur à  $n$ . Ainsi, le foncteur fini  $T^2$  introduit dans le paragraphe 4.2.2 ci-après est homogène et cohomogène de degré 2, mais possède un facteur de composition de degré 1.

La proposition suivante, contenue initialement dans [HLS93] (cf. aussi [Kuh94a], § 4), est fondamentale.

**Proposition 4.2.23.** *Les cogénérateurs injectifs standard de  $\mathcal{F}$  sont analytiques. Dualement, les générateurs projectifs standard de  $\mathcal{F}$  sont coanalytiques.*

*Démonstration.* La stabilité de  $\mathcal{F}_\omega$  par produit tensoriel montre qu'il suffit d'établir que  $I$  est analytique, ou encore que  $P$  est coanalytique, puisque c'est un objet de  $\mathcal{F}^{df}$ . Pour cela, on note

$$s_V = \sum_{a \in V} [a] \in P(V)$$

pour tout objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ . Nous allons montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ,  $k_n(P)(V)$  est le sous-espace vectoriel de  $P(V)$  engendré par les  $s_W$ , où  $W$  est un sous-espace de dimension  $n$  de  $V$ . On aura ainsi  $k_n(P)(V) = 0$  pour  $\dim V < n$ , ce qui impliquera

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} k_n(P) = 0$$

i.e. que  $P$  est coanalytique.

Pour cela, on note que la coïunité  $\bar{P}^{\otimes n} \otimes P \rightarrow P$  de l'adjonction entre  $\Delta^n$  et  $\bar{P}^{\otimes n} \otimes \cdot$  ( $\Delta P \simeq P$  par la proposition 4.2.8) est donnée, sur  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ , par

$$\left( \bigotimes_{i=1}^n ([0] + [u_i]) \right) \otimes [v] \longmapsto s(u_1, \dots, u_n; v) = \sum_{\epsilon \in \mathbb{F}_2^n} \left[ v + \sum_{i=1}^n \epsilon_i u_i \right]$$

où les  $u_i$  et  $v$  sont des éléments de  $V$  (appliquer la remarque 4.2.7). On constate ensuite que  $s(u_1, \dots, u_n; v) = 0$  si la famille  $(u_i)$  est liée, que sinon  $s(u_1, \dots, u_n; 0) = s_W$ , où  $W$  désigne l'espace vectoriel engendré par les  $u_i$ , que  $s(u_1, \dots, u_n; v) = s(u_1, \dots, u_n; 0) + s(u_1, \dots, u_n; v; 0)$ , et enfin que  $s_W$  est la somme des  $s_H$ , où  $H$  parcourt les hyperplans de  $W$ , lorsque  $\dim W \geq 2$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 4.2.24.* – La variante « duale » de cette démonstration consiste à établir que  $p_n I(V)$  est l'espace vectoriel des fonctions  $V^* \rightarrow \mathbb{F}_2$  polynomiales de degré au plus  $n$ .

– Ce résultat persiste lorsqu'on remplace  $\mathbb{F}_2$  par un autre corps fini ; il tombe en revanche en défaut sur un corps commutatif infini.

Nous donnerons plus précisément la structure de  $P$  et de  $I$  dans le paragraphe suivant.

**Corollaire 4.2.25** (cf. [Sch94], corollaire 5.3.7). *Un objet de  $\mathcal{F}$  est de co-type fini si et seulement s'il est analytique et de socle fini. En particulier, l'hypothèse 2.7.16 est vérifiée dans  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* La proposition 2.7.13 (assertion 2) montre qu'un objet analytique et de socle fini est co-tf. Réciproquement, un objet co-tf de  $\mathcal{F}$  se plonge dans une somme directe finie d'injectifs standard (cf. proposition 2.4.13), il est donc analytique par la proposition 4.2.23 ; il est également de socle fini par la proposition 2.7.13 (assertion 1), d'où la conclusion.  $\square$

**Corollaire 4.2.26.** *Un objet de  $\mathcal{F}$  est fini si et seulement s'il est polynomial et à valeurs de dimension finie.*

*Démonstration.* Soient  $S$  un objet simple de  $\mathcal{F}$  et  $V$  un espace vectoriel de dimension finie tel que  $S(V) \neq 0$ . Alors il existe un monomorphisme de  $S$  dans  $I_V$  (cf. proposition 3.1.27); comme  $S$  est de type fini, on en déduit que  $S$  se plonge dans un foncteur polynomial à valeurs de dimension finie  $p_n(I_V)$ . Un argument d'épaisseur montre alors que tous les objets finis de  $\mathcal{F}$  sont polynomiaux et dans  $\mathcal{F}^{df}$ . La réciproque est contenue dans la proposition 4.2.15, d'où le corollaire.  $\square$

Ce corollaire montre que, dans  $\mathcal{F}$ , les objets analytiques (resp. coanalytiques) sont exactement les objets localement finis (resp. co-localement finis).

*Remarque 4.2.27.* Le foncteur  $P_V$  n'est analytique que si  $V = 0$ . En effet, si  $P_V$  est analytique, il est fini par les propositions 4.2.23 et 2.6.21, donc polynomial, ce qui n'advient que pour  $V = 0$  par (4.2). Dualement,  $I_V$  n'est coanalytique que pour  $V = 0$ .

**Corollaire 4.2.28.** – *Le produit tensoriel de deux objets finis de  $\mathcal{F}$  est fini.*

- *Si  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$  est fini, alors  $\Delta F$  est fini.*
- *Un objet fini de  $\mathcal{F}$  est  $\text{pf}_\infty$  et  $\text{co-pf}_\infty$ . En particulier,  $\mathcal{F}$  satisfait aux hypothèses 2.6.9 et 2.6.10.*
- *La sous-catégorie  $\mathcal{F}_\omega$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse.*

*Démonstration.* Les trois premières assertions résultent du corollaire 4.2.26, combiné aux propositions 4.2.13 et 4.2.15. La dernière se déduit de la précédente via la proposition 2.6.18.  $\square$

## 4.2.2 Quelques classes de foncteurs finis

**Notation 4.2.29.** – Nous noterons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n$  le foncteur  $n$ -ième puissance tensorielle de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire le produit tensoriel de  $n$  copies du foncteur d'oubli  $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}$ . Ainsi  $T^n(V) = V^{\otimes n}$  pour  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ .

- Notons  $\Sigma_n = \text{Aut}_{\mathbf{Ens}}\{1, \dots, n\}$  le groupe symétrique sur  $n$  lettres. On remarque que  $\Sigma_n$  agit naturellement à droite sur  $T^n$  par permutation des facteurs du produit tensoriel.
- Le foncteur obtenu en prenant les co-invariants de  $T^n$  sous l'action de  $\Sigma_n$ , appelé  $n$ -ième puissance symétrique, sera noté  $S^n$ .
- Le foncteur obtenu en prenant les invariants de  $T^n$  sous l'action de  $\Sigma_n$ , appelé  $n$ -ième puissance divisée, sera noté  $\Gamma^n$ .
- Nous désignerons par  $\Lambda^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $n$ -ième puissance extérieure.

Par convention, les foncteurs  $T^0$ ,  $S^0$ ,  $\Gamma^0$  et  $\Lambda^0$  sont égaux au foncteur constant  $\mathbb{F}_2$ ; nous étendrons aussi les notations  $T^n$ ,  $S^n$ ,  $\Gamma^n$  et  $\Lambda^n$  à  $n < 0$  en convenant que ces foncteurs sont alors nuls.

Pour les propriétés générales de ces foncteurs que nous utiliserons (souvent implicitement), nous renvoyons à [Bou70], chapitre III (§ 5, 6 et 7) et [Bou81], chapitre IV (§ 5). On a notamment la propriété fondamentale suivante, qui est à la base de très nombreux calculs d'algèbre homologique dans  $\mathcal{F}$  (cf. notamment [Fra96] et [FFSS99]).

**Proposition 4.2.30.** *Les foncteurs gradués  $(\Lambda^n)$ ,  $(\Gamma^n)$  et  $(S^n)$  sont exponentiels.*

*Remarque 4.2.31.* 1. Les foncteurs  $T^n$  et  $\Lambda^n$  sont auto-duaux. Les foncteurs  $S^n$  et  $\Gamma^n$  sont duaux l'un de l'autre.

2. On a des monomorphismes canoniques  $\Lambda^n \hookrightarrow \Gamma^n \hookrightarrow T^n$  et, dualement, des épimorphismes canoniques  $T^n \twoheadrightarrow S^n \twoheadrightarrow \Lambda^n$  (comme nous sommes sur  $\mathbb{F}_2$ , l'algèbre extérieure  $\Lambda^*(V)$  sur  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  s'identifie canoniquement au quotient de l'algèbre symétrique  $S^*(V)$  par l'idéal engendré par les carrés).
3. Grâce à l'exemple 4.2.12, on a des isomorphismes

$$\Delta \Lambda^n \simeq \Lambda^{n-1}, \quad (4.5)$$

$$\Delta S^n \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} S^i, \quad (4.6)$$

$$\Delta\Gamma^n \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} \Gamma^i. \quad (4.7)$$

4. En particulier,  $\Lambda^n$ ,  $S^n$  et  $\Gamma^n$  sont des foncteurs finis de degré  $n$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ).
5. Le foncteur gradué  $(T^n)$  n'est pas exponentiel. Mais  $T^n$  est également un foncteur fini de degré  $n$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) par la proposition 4.2.13. Explicitement, on a des isomorphismes

$$\Delta T^n \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} (T^i)^{\oplus C_n^i} \quad (4.8)$$

où  $C_n^i$  désigne le coefficient binomial.

6. Le foncteur  $\Gamma^n/\Lambda^n$  est de degré strictement inférieur à  $n$ . On le voit par récurrence sur  $n$  en utilisant le foncteur différence.
7. Pour  $n \geq 0$ , le foncteur  $\Lambda^n$  est *simple*. Cela résulte par récurrence sur  $n$  de la proposition 2.6.15 et de (4.5). Cette démonstration particulièrement élémentaire de simplicité ne s'applique essentiellement qu'aux puissances extérieures; nous décrirons tous les foncteurs simples de  $\mathcal{F}$  à partir des puissances extérieures au paragraphe suivant.
8. Pour  $n > 0$ ,  $T^n$  est homogène et cohomogène de degré  $n$ . Le foncteur  $S^n$  (resp.  $\Gamma^n$ ) est cohomogène (resp. homogène) de degré  $n$ , mais en général non homogène (resp. cohomogène).
9. Le morphisme de Frobenius fournit des morphismes  $S^i \rightarrow S^{2i}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Dualement, on obtient des morphismes  $\Gamma^{2i} \rightarrow \Gamma^i$  appelés traditionnellement *Verschiebung* (décalage).
10. La structure exponentielle de  $\Lambda^*$  fournit des morphismes  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{i+j}$  et  $\Lambda^{i+j} \rightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^j$  appelés respectivement *produit* et *coproduit*, donnés sur un espace  $V$  par les compositions suivantes :

$$(\Lambda^i \otimes \Lambda^j)(V) \hookrightarrow \Lambda^{i+j}(V \oplus V) \rightarrow \Lambda^{i+j}(V),$$

la seconde flèche étant induite par l'addition  $V \oplus V \rightarrow V$ , et

$$\Lambda^{i+j}(V) \hookrightarrow \Lambda^{i+j}(V \oplus V) \rightarrow (\Lambda^i \otimes \Lambda^j)(V),$$

la première flèche étant induite par la diagonale.

On a des morphismes analogues pour tous les foncteurs exponentiels gradués, en particulier  $\Gamma^*$  et  $S^*$ .

Avant de préciser la structure de  $\bar{I}$  (cf. [Kuh94b], théorème 7.8), rappelons la définition suivante (cf. [ARS97], chapitre IV, § 2).

**Définition 4.2.32.** Un objet d'une catégorie abélienne est dit *unisériel* si l'ensemble de ses sous-objets est totalement ordonné pour l'inclusion.

**Proposition 4.2.33** (Kuhn). *Le foncteur  $\bar{P}$  est unisériel, et l'on a  $q_n^{\text{hom}}(\bar{P}) \simeq \Lambda^n$  pour  $n > 0$ . Dualement, le foncteur  $\bar{I}$  est unisériel, et l'on a  $p_n^{\text{hom}}(\bar{I}) \simeq \Lambda^n$  pour  $n > 0$ .*

*Démonstration.* Montrons que les seuls sous-objets non nuls de  $\bar{P}$  sont les  $k_n(\bar{P})$ . Soit  $F$  un sous-foncteur non nul de  $\bar{P}$ ; pour  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $x \in F(V)$ , écrivons

$$x = \sum_{v \in V \setminus \{0\}} \alpha_v(x)([0] + [v])$$

et notons  $d(x)$  la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{Supp}(x)$  de  $V$  engendré par les  $v$  tels que  $\alpha_v(x) = 1$ . Considérons un espace vectoriel  $V$  et un élément  $x$  de  $F(V)$  tel que l'entier  $n = d(x)$  soit non nul et *minimal*. Nous allons montrer que  $x = s_{\text{Supp}(x)}$ , où la notation  $s_W$  a la même signification que dans la démonstration de la proposition 4.2.23.

Soit  $v \in V \setminus \{0\}$  tel que  $\alpha_v(x) = 1$ . Notons  $y \in F(V/v)$  l'image de  $x$  par la projection  $F(V \twoheadrightarrow V/v) : \text{pour tout } w \in (V/v) \setminus \{0\}, \text{ on a } \alpha_w(y) = \alpha_a(x) + \alpha_b(x), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont les deux antécédents de } w \text{ par la projection } V \twoheadrightarrow V/v. \text{ Cela montre que } \text{Supp}(y) \subset \text{Supp}(x)/v, \text{ donc par minimalité de } d(x), y = 0. \text{ Autrement dit, pour tout élément } u \text{ de } V \setminus \{0, v\}, \alpha_u(x) = \alpha_{u+v}(x). \text{ Par conséquent, la réunion de } \{0\} \text{ et des éléments } u \text{ de } V \setminus \{0\} \text{ tels que } \alpha_u(x) = 1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } V, \text{ qui est donc } \text{Supp}(x), \text{ ce qui établit } x = s_{\text{Supp}(x)} \text{ comme souhaité.}$

Si  $V'$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $W$  un sous-espace de dimension  $n$  de  $V'$ , il existe une application linéaire  $f : V \rightarrow V'$  qui induit un isomorphisme entre  $\text{Supp}(x)$  et  $W$ , et  $F(f)$  envoie  $x$  sur  $s_W$ . Ainsi  $F$  contient  $k_n(\bar{P})$ .

On montre à présent que  $F$  est inclus dans  $k_n(\bar{P})$  par récurrence sur  $n = n(F)$ . Pour  $n(F) = 1$ , c'est clair puisque  $k_1(\bar{P}) = \bar{P}$ . On constate ensuite que si l'on note  $G$  l'image de  $\Delta F \hookrightarrow \Delta \bar{P} \simeq P \twoheadrightarrow \bar{P}$ , alors  $n(G) \geq n(F) - 1$ . En effet, si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $t$  un élément de  $G(V)$ , notons  $x$  l'élément de  $F(V \oplus \mathbb{F}_2)$  image de  $t$  par l'inclusion  $G(V) \hookrightarrow (\Delta F)(V) \hookrightarrow F(V \oplus \mathbb{F}_2) : \text{ on a } \text{Supp}(t) \subset \text{Supp}(x) \oplus \mathbb{F}_2, \text{ donc } d(t) \leq d(x), \text{ or pour tout élément non nul } x \text{ d'un } F(W), \text{ il existe une décomposition } W \simeq V \oplus \mathbb{F}_2 \text{ telle que l'image } t \text{ de } x \text{ dans } G(V) \text{ est non nulle (parce que } F \text{ est comme } \bar{P} \text{ sans terme constant), d'où } n(F) \leq n(G) + 1. \text{ L'hypothèse de récurrence entraîne donc } G \subset k_{n(F)-1}(\bar{P}), \text{ d'où } \Delta F \subset k_{n(F)-1}(\Delta \bar{P}) \text{ et le résultat puisque } F \text{ est sans terme constant } (\Delta(F/k_{n(F)-1}(\bar{P}))) \text{ doit être nul car } \Delta(k_{n(F)-1}(\bar{P})) \supset k_{n(F)}(\Delta \bar{P}).$

Il reste, pour conclure, à voir que  $q_n^{\text{hom}}(\bar{P}) \simeq \Lambda^n$  pour  $n > 0$ . Pour cela, on considère le morphisme  $a_n : \bar{P} \rightarrow \Gamma^n$  donné par  $[0] + [v] \mapsto v^{\otimes n}$ . Si  $W$  est un sous-espace de dimension  $n$  de  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de  $W$ , alors  $a_n(V) : \bar{P}(V) \rightarrow \Gamma^n(V)$  envoie  $s_W$  sur l'élément  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$  de  $\Lambda^n(V) \hookrightarrow \Gamma^n(V)$ , et annihile  $s_W$  pour  $\dim W > n$ , ce qui montre que  $a_n$  induit un épimorphisme  $q_n^{\text{hom}}(\bar{P}) \twoheadrightarrow \Lambda^n$ . Mais les considérations précédentes montrent que  $q_n^{\text{hom}}(\bar{P})$  ne peut être que nul ou simple, de sorte que la proposition est démontrée.  $\square$

Cette proposition montre en particulier que tout quotient strict de  $\bar{P}$ , qui est infini, est fini. Autrement dit, avec la terminologie de la définition 2.8.7, on a le résultat suivant.

**Corollaire 4.2.34.** *Le foncteur  $\bar{P}$  est simple noethérien de type 1. Il est en particulier noethérien. Dualement,  $\bar{I}$  est simple artinien de type 1 ; c'est en particulier un foncteur artinien.*

**Corollaire 4.2.35.** *Si  $X$  est un objet projectif tf de  $\mathcal{F}$ , on a  $p_\infty(X) = X(0)$ . Autrement dit,  $X$  n'a pas de sous-objet fini non constant.*

*Dualement, un objet injectif co-tf de  $\mathcal{F}$  n'a pas de quotient fini non constant.*

*Démonstration.* Le cas où  $X = P$  est fourni par la proposition 4.2.33. Comme le foncteur  $p_\infty$  commute au produit tensoriel (cf. proposition 4.2.21), on en déduit l'assertion pour tout projectif standard. La classe des foncteurs sans sous-objet fini non constant étant stable par sommes directes finies et facteurs directs, on en déduit le corollaire.  $\square$

**Corollaire 4.2.36.** *Notons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n : \bar{P} \rightarrow \Gamma^n$  le morphisme donné sur un espace vectoriel  $V$  par  $[0] + [v] \mapsto v^{\otimes n}$  (pour  $v \in V \setminus \{0\}$ ).*

1. *Le morphisme  $a_n$  induit un monomorphisme  $q_n(\bar{P}) \hookrightarrow \Gamma^n$ .*
2. *Le morphisme  $a_2$  est un épimorphisme ; il induit un isomorphisme  $q_2(\bar{P}) \simeq \Gamma^2$ .*
3. *Le morphisme*

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} a_n : \bar{P} \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n$$

*est un monomorphisme.*

*Démonstration.* La proposition précédente montre que le socle de  $q_n(\bar{P})$  s'identifie à  $\Lambda^n$  et que tous ses autres facteurs de composition sont de degré strictement inférieur à  $n$ . Comme  $\Gamma^n$  est homogène de degré  $n$  et que  $a_n$  est non nul, cela prouve la première assertion.

Le deuxième point résulte du précédent et de ce que  $\Gamma^2(V)$  est engendré par les éléments du type  $a \otimes a$  et  $a \otimes b + b \otimes a = a \otimes a + b \otimes b + (a + b) \otimes (a + b)$ .

Quant au dernier, il se déduit du premier et de la proposition 4.2.23, que l'on peut reformuler (pour le cas de  $\bar{P}$ ) en disant que le morphisme canonique  $\bar{P} \rightarrow \prod q_n(\bar{P})$  est injectif.  $\square$

*Exemple 4.2.37.* Le foncteur  $T^2$  est donc unisériel, de suite de composition  $\Lambda^2, \Lambda^1, \Lambda^2$ ;  $\Gamma^2$  est son sous-objet de suite de composition  $\Lambda^2, \Lambda^1$ , et  $S^2$  son quotient de suite de composition  $\Lambda^1, \Lambda^2$ . Cela illustre la remarque 4.2.22.

Le rôle fondamental joué par les puissances symétriques et divisées parmi les foncteurs finis est également illustré par le résultat suivant. Pour une démonstration, on se reportera à [Kuh94a], théorème 5.1.

**Proposition 4.2.38** (Théorème de plongement de Kuhn). *Tout objet fini de  $\mathcal{F}$  se plonge dans une somme directe finie de foncteurs puissances symétriques.*

*Dualement, tout objet fini de  $\mathcal{F}$  est quotient d'une somme directe finie de foncteurs puissances divisées.*

**Proposition 4.2.39.** *Le morphisme d'algèbres  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n] \rightarrow \text{End}_{\mathcal{F}}(T^n)$  procuré par l'action de  $\Sigma_n$  sur  $T^n$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$  et  $x$  l'élément  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$  de  $T^n(V)$ . On munit  $V$ , puis  $T^n(V)$  par functorialité, de la structure de  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ -module à droite induite par l'action des endomorphismes de permutation (dans la base considérée) : le sous- $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ -module  $M$  de  $T^n(V)$  engendré par  $x$ , qui est *libre*, a pour espace vectoriel sous-jacent l'intersection des noyaux des endomorphismes de  $T^n(V)$  induits par les endomorphismes diagonaux non inversibles de  $V$ . On en déduit que pour tout morphisme  $f : T^n \rightarrow T^n$  de  $\mathcal{F}$ ,  $f(V) : T^n(V) \rightarrow T^n(V)$  préserve  $M$ . Comme  $f(V)$  est  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ -linéaire, on en déduit un morphisme d'anneaux  $\text{End}_{\mathcal{F}}(T^n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}(M) \simeq \mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ . On vérifie aussitôt que ce morphisme et celui de l'énoncé sont réciproques l'un de l'autre (cf. [PS98], § 1.3, lemme 1.9).  $\square$

*Remarque 4.2.40.* On peut également calculer les anneaux d'endomorphismes  $\text{End}(\Gamma^*)$  et  $\text{End}(S^*)$  (qui sont duaux). Ils héritent d'une structure d'algèbre de Hopf grâce à la structure exponentielle de  $\Gamma^*$  et  $S^*$  (cf. remarque 4.2.31.10); ils sont étroitement liés à l'algèbre de Steenrod (les carrés de Steenrod correspondant aux morphismes de Frobenius). Nous renvoyons pour cela à [Kuh94a], [Kuh95], [HLS93] et [Sch94]. Un cadre algébrique général englobant l'algèbre de Steenrod usuelle sous l'angle des catégories de foncteurs est fourni dans [Pow05].

### 4.2.3 Foncteurs simples et représentations des groupes symétriques

**Notation 4.2.41.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Nous noterons  $s_n : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$  le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(T^n, \cdot)$ , qu'on munit d'une structure de  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ -module à droite en faisant agir  $\Sigma_n$  à *gauche* sur  $T^n$ .
- Nous noterons  $r_n : \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} \rightarrow \mathcal{F}_n$  le foncteur  $\cdot \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} T^n$ ; ainsi sur les objets

$$r_n(M) = \text{coker}(M \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} T^n \rightarrow M \otimes T^n)$$

la flèche étant la somme des deux morphismes obtenus en faisant agir  $\Sigma_n$  sur  $M$  et sur  $T^n$ .

La proposition que nous rappelons maintenant est démontrée, dans un cadre plus général, dans [Kuh02] (théorème 1.4).

**Proposition 4.2.42.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un diagramme de recollement*

$$\mathcal{F}_{n-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{q_n} \\ \xrightarrow{i_n} \\ \xleftarrow{p_n} \end{array} \mathcal{F}_n \begin{array}{c} \xleftarrow{r_n} \\ \xrightarrow{s_n} \\ \xleftarrow{r'_n} \end{array} \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$$

où l'on a noté par abus encore  $p_n$  et  $q_n$  la restriction de ces foncteurs à  $\mathcal{F}_n$ , et  $i_n$  le foncteur d'inclusion. En particulier,  $s_n$  induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}.$$

*Démonstration.* Les propriétés requises sur  $i_n$ ,  $p_n$  et  $q_n$  résultent de la proposition 4.2.17.

L'adjonction entre  $s_n$  et  $r_n$  s'obtient par la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(r_n(M), F) &\simeq \ker(\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(M \otimes T^n, F) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(M \otimes \mathbb{F}_2[\Sigma_n] \otimes T^n, F)) \\ &\simeq \ker(\mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(M, s_n(F)) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(M \otimes \mathbb{F}_2[\Sigma_n], s_n(F))) \simeq \mathrm{hom}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}(M, s_n(F)) \end{aligned}$$

naturels en  $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_n$  et  $M \in \mathrm{Ob} \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$ .

On note ensuite que  $s_n$  est exact et commute aux colimites. L'exactitude provient de l'isomorphisme  $T^n \simeq q_n(\bar{P}^{\otimes n})$  (cf. proposition 4.2.21), dont on déduit un isomorphisme  $\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_n}(T^n, F) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\bar{P}^{\otimes n}, F)$  naturel en l'objet  $F$  de  $\mathcal{F}_n$  (par la proposition 4.2.17), et du caractère projectif de  $\bar{P}^{\otimes n}$ . La commutation aux colimites filtrantes (qui entraîne la commutation à toutes les colimites par ce qui précède) vient de la type-finitude de  $T^n$ .

Le corollaire 1.3.18 implique alors l'existence d'un adjoint à droite  $r'_n$  à  $s_n$ .

Pour montrer que l'unité de l'adjonction  $id \rightarrow s_n r_n$  est un isomorphisme, il suffit de le faire sur le générateur  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$  de  $\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$  (puisque  $r_n$  et  $s_n$  commutent aux colimites), cas qui découle de la proposition 4.2.39.

La démonstration que la coïunité  $r'_n s_n \rightarrow id$  est un isomorphisme est analogue : il suffit de vérifier sur le  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ -module  $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ . Cela se vérifie en notant que l'application bilinéaire naturelle de composition  $\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(T^n, F) \times \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(F, T^n) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{F}}(T^n)$  est non dégénérée dans  $\mathcal{F}_n$  et en utilisant un argument de dualité (cf. [PS98], proposition 1.12, pour plus de détails).

Il reste à voir que le noyau de  $s_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ . En effet, pour un objet  $F$  de  $\mathcal{F}_n$ , la condition  $\mathrm{hom}(T^n, F) = 0$  équivaut à  $\mathrm{hom}(\bar{P}^{\otimes n}, F) = 0$  (cf. début de la démonstration), soit à  $\Delta^n F(0) = 0$ . Mais  $\Delta^n F$  est un foncteur constant, donc cela revient à dire que  $F$  est de degré strictement inférieur à  $n$ .  $\square$

*Remarque 4.2.43.* Si  $A$  et  $B$  sont deux foncteurs polynomiaux non nuls de degrés respectifs  $n$  et  $m$ ,  $s_{n+m}(A \otimes B)$  s'identifie canoniquement au  $\Sigma_{n+m}$ -module induit (relativement à l'inclusion évidente  $\Sigma_n \times \Sigma_m \hookrightarrow \Sigma_{n+m}$ ) par le  $\Sigma_n \times \Sigma_m$ -module produit tensoriel extérieur de  $s_n(A)$  et  $s_m(B)$ . On peut voir cette propriété comme un succédané à la propriété exponentielle pour le foncteur gradué  $(T^n)_n$ .

*Remarque 4.2.44.* La catégorie  $\mathcal{P}$  des foncteurs *strictement polynomiaux* présente également des liens étroits avec les représentations des groupes symétriques ; l'analogue de la proposition 4.2.42 est plus simple, car la catégorie  $\mathcal{P}$  se scinde en somme directe des catégories de foncteurs strictement polynomiaux homogènes. Pour une approche en caractéristique nulle, voir l'appendice A du chapitre I de [Mac95] ; pour le cas général, on pourra se reporter à [FS97] et à [Pir02], §2. Le corollaire 3.7 et le théorème 3.10 de [FFSS99] donnent des résultats puissants de comparaison cohomologique entre les catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}$ .

Le corollaire 4.2.26 et les propositions 2.8.16 et 4.2.42 montrent que les classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\mathcal{F}$  sont en bijection canonique avec la réunion des classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

*Remarque 4.2.45.* La catégorie  $\mathcal{F}$  est également très liée à la théorie des représentations des groupes linéaires qu'à celle des groupes symétriques (cf. [Kuh94b]). Cependant, les représentations des groupes linéaires pouvant se décrire à partir de celles des groupes symétriques (cf. [Jam78]), il est souvent commode d'utiliser ces dernières pour les considérations explicites sur les foncteurs simples de  $\mathcal{F}$ .

Nous rappelons maintenant sans démonstration, dans le contexte de la catégorie  $\mathcal{F}$ , les définitions et propriétés fondamentales de la théorie des représentations des groupes symétriques.

- Définition 4.2.46.** – Une *partition* est une suite décroissante  $\lambda$  d'entiers, indexée par  $\mathbb{N}^*$ , qui stationne en 0.
- La *longueur* d'une partition  $\lambda$  est le plus grand entier  $r$ , noté,  $l(\lambda)$ , tel que  $\lambda_r > 0$ . Si  $\lambda$  est identiquement nulle, on convient que  $l(\lambda) = 0$ . Par la suite, on identifiera une partition  $\lambda$  et le  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  si  $n \geq l(\lambda)$ .
  - Une partition  $\lambda$  est dite *2-régulière* si  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$  pour  $1 \leq i < l(\lambda)$ ; le corps de base étant fixé à  $\mathbb{F}_2$ , nous parlerons par la suite simplement de partition *régulière*. Nous désignerons par  $\mathfrak{p}$  l'ensemble des partitions régulières.
  - Le *degré* d'une partition  $\lambda$  est l'entier positif  $|\lambda| = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$ . Une partition de  $n \in \mathbb{N}$  est par définition une partition de degré  $n$ .
  - Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux partitions de même degré, nous noterons  $\lambda \leq \mu$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

**Notation 4.2.47.** Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  est un  $r$ -uplet d'entiers, on notera  $\Lambda^\lambda$ , ou  $\Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ , le foncteur

$$\Lambda^\lambda = \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_r} = \bigotimes_{1 \leq i \leq r} \Lambda^{\lambda_i}.$$

On étendra ces notations de façon évidente à une suite infinie  $\lambda$  d'entiers stationnant en 0.

*Remarque 4.2.48.* La relation  $\leq$  définit un ordre *partiel* sur les partitions, appelé parfois *ordre de dominance* (cf. [Jam78], §3).

*Remarque 4.2.49.* Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de même degré.

- L'assertion  $\lambda \leq \mu$  est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i \geq n} \lambda_i \geq \sum_{i \geq n} \mu_i.$$

- Si  $\lambda \leq \mu$ , alors  $l(\lambda) \geq l(\mu)$ .

**Notation 4.2.50.** – Soient  $i, j$  et  $t$  trois entiers positifs tels que  $t \leq j$ . Nous désignerons par  $\theta_{i,j,t} : \Lambda^i \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^t \otimes \Lambda^{j-t} \rightarrow \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t}$  la flèche composée du coproduit sur le deuxième facteur tensorisé par  $\Lambda^i$  et du produit sur les deux premiers facteurs tensorisé par  $\Lambda^{j-t}$ . Par auto-dualité des puissances extérieures, nous identifierons  $D\theta_{i,j,t}$  à un morphisme  $\Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} \rightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^j$ .

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous omettrons les indices pour les morphismes  $\theta$  et  $D\theta$ .

- Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $r$ . On note, pour  $1 \leq i \leq r-1$  et  $1 \leq t \leq \lambda_{i+1}$ ,

$$\psi_\lambda^{i,t} = \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}} \otimes \theta_{\lambda_i, \lambda_{i+1}, t} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r} : \Lambda^\lambda \rightarrow \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}$$

puis

$$\psi_\lambda = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r-1 \\ 1 \leq t \leq \lambda_{i+1}}} \psi_\lambda^{i,t} : \Lambda^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r-1 \\ 1 \leq t \leq \lambda_{i+1}}} \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}.$$

**Définition 4.2.51.** Soit  $\lambda$  une partition. On définit le *foncteur de Weyl* associé à  $\lambda$ , et noté  $W_\lambda$  (ou encore  $W_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  pour  $n \geq l(\lambda)$ ) par

$$W_\lambda = \ker \psi_\lambda \subset \Lambda^\lambda.$$

*Remarque 4.2.52.* Si  $i \geq j$ ,

$$W_{i,j} = \bigcap_{1 \leq t \leq j} \ker \theta_{i,j,t}$$

et pour une partition  $\lambda$  de longueur quelconque  $r$

$$W_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r-1} \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}} \otimes W_{\lambda_i, \lambda_{i+1}} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r} \subset \Lambda^\lambda.$$

*Remarque 4.2.53.* Pour toute partition  $\lambda$ ,  $W_\lambda$  est non nul, c'est donc un foncteur homogène de degré  $|\lambda|$ . En revanche, le foncteur défini par le noyau analogue à celui qui fournit  $W_\lambda$  est nul sur une suite d'entiers qui n'est pas une partition (cf. [PS98]).

**Théorème et définition 4.2.54** (Objets simples de  $\mathcal{F}$ ). *Soit  $\lambda$  une partition régulière.*

1. *Le radical de  $W_\lambda$  est donné par*

$$\text{rad } W_\lambda = W_\lambda \cap W_\lambda^\perp$$

*où  $\Lambda^\lambda$  est muni de sa structure auto-duale canonique.*

2. *Le cosocle de  $W_\lambda$  est un objet simple de  $\mathcal{F}$ , appelé foncteur de Schur associé à  $\lambda$  et noté  $S_\lambda$  (ou encore  $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  pour  $n \geq l(\lambda)$ ). Celui-ci est de degré  $|\lambda|$ ; en particulier,  $W_\lambda$  est cohomogène.*

3. *Les foncteurs de Schur sont auto-duaux.*

*De plus, les foncteurs de Schur associés aux partitions régulières forment un système complet de représentants des objets simples de  $\mathcal{F}$ .*

L'importance de cette description générale relativement explicite des objets simples de la catégorie  $\mathcal{F}$ , y compris pour étudier sa structure globale, sera illustrée au chapitre 10.

**Théorème 4.2.55.** *Les facteurs de composition de  $\Lambda^\lambda$ , où  $\lambda$  est une partition de longueur  $r$  de  $n \in \mathbb{N}$ , sont :*

- *les  $S_\mu$ , où  $\mu$  parcourt les partitions régulières de  $n$  telles que  $\mu \geq \lambda$ ,*
  - *des simples du type  $S_\mu$  avec  $|\mu| < n$ ,  $l(\mu) < r$ ,  $\mu_1 \geq \lambda_1$  et  $\mu_{r-1} \leq \lambda_r$ .*
- En outre,  $S_\lambda$  est facteur de composition unique de  $\Lambda^\lambda$ .*

Nous renvoyons le lecteur à [PS98], [Kuh94b] et [Jam78] pour les deux résultats précédents. Il pourra également consulter le chapitre 3 de [Pir95] pour une exposition complète des résultats fondamentaux sur les objets simples de  $\mathcal{F}$ .

Nous terminons ce paragraphe en mentionnant l'important résultat suivant (qui s'exprime, dans la terminologie de la théorie des représentations, en disant que  $\mathbb{F}_2$  est un *corps de décomposition* pour  $\mathcal{F}$ ). Ce résultat est établi dans [Kuh02] (prop. 7.4) à partir du résultat analogue pour la catégorie  $\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$  et du diagramme de recollement de la proposition 4.2.42.

**Proposition 4.2.56.** *Pour tout objet simple  $S$  de  $\mathcal{F}$ , le corps  $\text{End } S$  est réduit à  $\mathbb{F}_2$ .*

**Notation 4.2.57.** *Étant donnée une partition régulière  $\lambda$ , nous noterons  $I_\lambda$  l'enveloppe injective du foncteur simple  $S_\lambda$ , et  $P_\lambda$  sa couverture projective.*

Ainsi,  $P_\lambda$  et  $I_\lambda$  sont des foncteurs indécomposables duaux, respectivement de type fini et de co-type fini.

**Corollaire 4.2.58.** *Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $F$  un objet fini de  $\mathcal{F}$ . La multiplicité de  $S_\lambda$  dans  $F$  est donnée par  $m_{S_\lambda}(F) = \dim \text{hom}_{\mathcal{F}}(P_\lambda, F) = \dim \text{hom}_{\mathcal{F}}(F, I_\lambda)$ .*

Cela amène à poser la définition suivante.

**Définition 4.2.59** (Facteurs de composition, multiplicité). *Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}^{df}$ . Nous appellerons *multiplicité de  $S_\lambda$  dans  $F$*  l'entier naturel  $m_\lambda(F) = \dim \text{hom}_{\mathcal{F}}(P_\lambda, F)$ . Nous dirons que  $S_\lambda$  est *facteur de composition* de  $F$  si  $m_\lambda(F) > 0$ .*



L'espace vectoriel  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(P_\lambda, F)$  est fini pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}^{\text{df}}$ , car  $P_\lambda$  est quotient d'un projectif standard  $P_V$ , de sorte que  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(P_\lambda, F)$  s'injecte dans  $F(V)$ .

**Notation 4.2.60.** Étant donné une partition régulière  $\lambda$  et un foncteur  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}^{\text{df}}$ , nous abrégons l'assertion  $S_\lambda$  est facteur de composition de  $F$  en  $\lambda \vdash F$ .

**Proposition 4.2.61.** Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}^{\text{df}}$ .

1. Le foncteur simple  $S_\lambda$  est facteur de composition de  $F$  si et seulement s'il existe un sous-quotient de  $F$  isomorphe à  $S_\lambda$ .
2. La multiplicité  $m_\lambda(F)$  est aussi égale à  $\dim \text{hom}_{\mathcal{F}}(F, I_\lambda)$ .
3. Si  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  est une suite exacte courte de  $\mathcal{F}^{\text{df}}$ , on a  $m_\lambda(B) = m_\lambda(A) + m_\lambda(C)$ .
4. Il existe une filtration finie

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = F$$

de  $F$  dont les quotients  $A_i/A_{i-1}$  sont soit isomorphes à  $S_\lambda$ , soit sans facteur de composition  $S_\lambda$ . La multiplicité  $m_\lambda(F)$  est égale au nombre de quotients de la filtration isomorphes à  $S_\lambda$ .

Cette proposition, qui se vérifie par inspection, facilite le maniement courant de la définition 4.2.59.

### 4.3 La conjecture artinienne : premiers énoncés, motivations

Nous commençons par donner des versions de la conjecture artinienne dont l'équivalence avec l'énoncé 4.0.2 s'établit formellement.

**Proposition 4.3.1.** Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La catégorie  $\mathcal{F}$  est co-localement artinienne (conjecture 4.0.2).
2. Les injectifs standard  $I_V$  sont des objets artiniens de  $\mathcal{F}$ .
3. Les injectifs indécomposables de co-type fini de  $\mathcal{F}$  sont artiniens.
4. Le produit tensoriel de deux objets artiniens de  $\mathcal{F}$  est artinien.
5. Le cosocle d'un objet de co-type fini de  $\mathcal{F}$  est fini.
6. La catégorie  $\mathcal{F}$  est localement noethérienne.
7. Les projectifs standard  $P_V$  sont des objets noethériens de  $\mathcal{F}$ .
8. Les projectifs indécomposables de type fini de  $\mathcal{F}$  sont noethériens.
9. Le produit tensoriel de deux objets noethériens de  $\mathcal{F}$  est noethérien.
10. Le socle d'un objet de type fini de  $\mathcal{F}$  est fini.

*Démonstration.* L'équivalence entre les assertions 1 et 6 provient de la proposition 2.4.25 ; de même, un argument d'auto-dualité établit l'équivalence entre 2 et 7, 3 et 8, 4 et 9, 5 et 10 (tous les objets en jeu dans ces assertions sont forcément à valeurs de dimension finie).

L'assertion 1 implique qu'un objet co-tf de  $\mathcal{F}$  est artinien, donc en particulier 3. Cette dernière assertion implique 2 parce qu'un injectif standard est co-tf donc somme directe finie d'injectifs indécomposables co-tf (cf. corollaires 2.7.18 et 2.7.19).

Comme les injectifs standard forment un ensemble de cogénérateurs de  $\mathcal{F}$ , 2 implique 1.

D'autre part, 1 entraîne que tous les objets co-tf de  $\mathcal{F}$  sont artiniens. Comme un produit tensoriel d'objets co-tf est co-tf, cela implique 4.

Par ailleurs, 4 implique 2 à cause de l'isomorphisme  $I_V \simeq I^{\otimes n}$  pour  $V$  de dimension  $n$  et du corollaire 4.2.34.

Supposons maintenant que 1 n'est pas vérifiée : il existe un objet  $X$  de co-type fini de  $\mathcal{F}$  possédant un sous-objet  $Y$  tel que  $X/Y$  n'est pas de co-type fini. Comme  $X/Y$  est, comme  $X$ , analytique, cela implique que le socle  $S$  de  $X/Y$  est infini (corollaire 4.2.25). Soit  $Z$  l'image réciproque de  $S$  par

la projection  $X \rightarrow X/Y : Z$  est comme  $X$  de co-type fini, et il se projette sur l'objet semi-simple infini  $S$ , donc son cosocle est infini. Ainsi 5 n'est pas vérifiée.

Réciproquement, 1 implique 5 parce que le cosocle d'un objet artinien est fini. Cela termine la démonstration.  $\square$

Afin d'illustrer la difficulté de la conjecture artinienne, mentionnons deux des questions ouvertes les plus classiques auxquelles elle apporterait aussitôt une réponse affirmative (parce que les énoncés analogues obtenus en remplaçant « noethérien » par « de type fini » sont eux faciles).

- Si  $A$  est un objet noethérien et  $F$  un objet fini de  $\mathcal{F}$  (il suffit de traiter le cas  $F = \Lambda^1$ ), le foncteur  $A \otimes F$  est-il noethérien ?
- Si  $F$  est un objet noethérien de  $\mathcal{F}$ ,  $\Delta F$  est-il noethérien ?

*Remarque 4.3.2.* Il est naturel de poser la question du caractère localement noethérien ou co-localement artinien d'autres catégories de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$ , où  $\mathcal{I}$  est une catégorie essentiellement petite vérifiant l'hypothèse 3.1.28. On ne saurait obtenir une réponse affirmative en général, comme le montre l'exemple élémentaire suivant. Cependant, toutes les catégories de foncteurs que nous rencontrerons par la suite semblent « très probablement », comme  $\mathcal{F}$ , localement noethériennes.

*Exemple 4.3.3.* Soit  $\mathcal{I}$  la petite catégorie telle que  $\text{Ob}\mathcal{I} = \mathbb{N}$  et  $\text{hom}_{\mathcal{I}}(n, m) = *$  (ensemble à un élément) si  $n = 0$  ou  $n = m$ ,  $\emptyset$  sinon, de sorte qu'il n'y a aucune composition non triviale dans  $\mathcal{I}$ . Le projectif standard de type fini  $P_0^{\mathcal{I}}$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$  est le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$ , puisque 0 est objet initial de  $\mathcal{I}$ . Ce n'est pas un objet noethérien. En effet, pour tout entier  $n > 0$ , l'image  $A_i$  du monomorphisme  $\bigoplus_{0 < i \leq n} P_i^{\mathcal{I}} \rightarrow P_0^{\mathcal{I}}$  dont chaque composante  $P_i^{\mathcal{I}} \rightarrow P_0^{\mathcal{I}}$  est induite par le morphisme  $0 \rightarrow i$  associée à l'objet  $i$  l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_2$  si  $0 < i \leq n$ , 0 sinon. Aussi  $(A_i)_{i > 0}$  est-elle une suite strictement croissante de sous-objets de  $P_0^{\mathcal{I}}$ .

*Remarque 4.3.4.* La catégorie  $\mathcal{I}$  de l'exemple précédente est un *carquois* : aucun objet de  $\mathcal{I}$  n'a d'endomorphisme non identique. Une catégorie de foncteurs dont la source est un carquois et le but  $\mathcal{E}$  se comprend aisément ; ses objets simples sont en bijection naturelle avec les objets du carquois initial. Pour une présentation de ces phénomènes du point de vue de la théorie des représentations, nous renvoyons à [ARS97], chapitre III, § 1.

La conjecture artinienne originelle 4.0.2 est posée en termes d'injectifs et non de projectifs en raison du rôle joué par la sous-catégorie  $\mathcal{F}_{\omega}$  en relation avec les modules instables sur l'algèbre de Steenrod (cf. [HLS93]). Avant d'expliquer en quoi il est indispensable de ne pas restreindre la compréhension des foncteurs à celle des foncteurs analytiques, insistons sur le fait que la catégorie  $\mathcal{F}_{\omega}$  est tautologiquement localement noethérienne (cf. remarque 2.6.19). Ses objets injectifs sont aisément compréhensibles (modulo la théorie des représentations modulaires), comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 4.3.5.** – *Les objets injectifs de  $\mathcal{F}_{\omega}$  sont (à isomorphisme près) les sommes directes d'injectifs indécomposables du type  $I_{\lambda}$ .*

- *Les deux assertions suivantes sont chacune équivalentes à la conjecture artinienne.*

1. *Les objets injectifs de  $\mathcal{F}_{\omega}$  restent injectifs dans  $\mathcal{F}$ .*
2. *Toute somme directe d'injectifs indécomposables du type  $I_{\lambda}$  est injective dans  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Le premier point résulte de la proposition 2.3.9 et du fait qu'un objet injectif non nul de  $\mathcal{F}_{\omega}$  contient au moins un objet simple  $S_{\lambda}$ , donc un facteur direct  $I_{\lambda}$ .

L'équivalence des deux assertions du second point en découle. La conjecture artinienne implique la seconde grâce à la proposition 2.3.8. Pour la réciproque, considérons un objet de type fini  $F$  de  $\mathcal{F}$  ; écrivons son socle sous la forme  $\bigoplus_{i \in E} S_{\lambda_i}$  pour une certaine famille  $(S_{\lambda_i})_{i \in E}$  de partitions régulières.

Comme  $\bigoplus_{i \in E} I_{\lambda_i}$  est injectif par hypothèse, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in E} S_{\lambda_i} & \hookrightarrow & \bigoplus_{i \in E} I_{\lambda_i} \\ \downarrow & \nearrow f & \\ F & & \end{array}$$

Chaque morphisme  $F \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in E} I_{\lambda_i} \rightarrow I_{\lambda_j}$  est non nul; comme  $F$  est tf, cela entraîne (cf. proposition 2.1.20) que  $E$  est fini, i.e. que  $\text{soc } F$  est fini. On conclut par l'implication  $10 \Rightarrow 1$  de la proposition 4.3.1.  $\square$

*Remarque 4.3.6.*  $\mathcal{F}$  possède « beaucoup » d'objets injectifs « pathologiques », ne contenant aucun objet fini non nul (regarder les objets injectifs de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  — cf. proposition 1.4.12). Il en est ainsi de l'enveloppe injective de  $\bar{P}$ , par exemple.

*Exemple 4.3.7.* On ignore si le foncteur

$$\Phi^{-1}S^n = \text{colim} (S^n \rightarrow S^{2n} \rightarrow \dots \rightarrow S^{2^i n} \rightarrow S^{2^{i+1} n} \rightarrow \dots)$$

(les flèches étant les morphismes de Frobenius), qui est injectif dans  $\mathcal{F}_\omega$  (cf. [Kuh95]), est injectif dans  $\mathcal{F}$ .

La considération de la catégorie  $\mathcal{F}_\omega$  n'est pas de nature, loin s'en faut, à contourner tous les problèmes de structure profonds rencontrés dans  $\mathcal{F}$ . D'une part, cette catégorie n'a pas assez de projectifs (cf. [Kuh94a], corollaire B.7), elle perd la dualité de  $\mathcal{F}$ . D'autre part,  $\mathcal{F}_\omega$  est localement noethérienne, mais son caractère co-localement artinien est équivalent à la conjecture artinienne, puisque les injectifs standard de  $\mathcal{F}$  sont analytiques.

De fait, la conjecture artinienne soulève le problème plus explicite (identique dans  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_\omega$ ) de déterminer la structure des injectifs indécomposables de co-type fini de  $\mathcal{F}$  : les résultats partiels connus sur la conjecture artinienne ont apporté des renseignements précieux sur ces injectifs (cf. [Pow98c] et [Pow98a]). Dans cette optique, Powell a été amené à énoncer des versions fortes beaucoup plus précises de la conjecture artinienne, et les avancées que nous présenterons ultérieurement suggéreront des résultats encore plus rigides sur la structure de la catégorie  $\mathcal{F}$  et de ses injectifs de co-type fini, ou dualement de ses projectifs de type fini. Ainsi, la structure de l'anneau de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F})$  est bien comprise grâce à la théorie des représentations, au moins ce qui concerne la structure additive — cf. § 4.2.3; la structure multiplicative est plus délicate car on ne sait pas décrire de façon générale les facteurs de composition d'un produit tensoriel de foncteurs simples, mais l'on dispose de résultats précis. Signalons également que  $G_0^f(\mathcal{F})$  hérite d'une structure d'algèbre de Hopf; elle est analysée dans [Kuh94b], § 6. En revanche, la structure (même additive) de l'anneau de Grothendieck  $G_0^{tf}(\mathcal{F})$  est étroitement liée à la structure fine des projectifs standard; la conjecture la plus forte que nous émettrons qui généralise la conjecture artinienne impliquera l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens  $G_0^{tf}(\mathcal{F}) \simeq G_0^f(\mathcal{F})^{\otimes 2}$ .

Indiquons à présent les résultats partiels déjà connus sur la conjecture artinienne, qui sont tous beaucoup plus délicats que le corollaire 4.2.34.

La première avancée remonte à Piriou ([Pir97]). On rappelle que la notion d'objet noethérien de type  $n$  a été introduite dans la définition 2.8.7.

**Théorème 4.3.8** (Piriou). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $P \otimes \Lambda^n$  est noethérien de type 1.*

La démonstration originelle, assez explicite, repose sur l'étude de facteurs de composition de ces foncteurs en liaison avec la théorie des représentations linéaires des groupes symétriques. Piriou obtient en fait un résultat plus précis, décrivant  $\bar{P} \otimes \Lambda^n$  comme extension de deux objets simples noethériens de type 1 explicites.

Powell a proposé dans [Pow97] une approche différente, plus conceptuelle, qu'il a généralisée dans [Pow00b] pour obtenir le résultat ci-dessous (dont la démonstration ne fournit pas de filtration explicite des foncteurs considérés par des simples noethériens de type 1), reposant sur l'utilisation d'endofoncteurs de  $\mathcal{F}$ , sous-quotients du foncteur différence (introduits dans [Pow98b]; nous y reviendrons dans le paragraphe 9.2), permettant une détection efficace de certains facteurs de composition dans  $\mathcal{F}$ .

**Théorème 4.3.9** (Powell). *Pour tout objet fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , le foncteur  $P \otimes F$  est noethérien de type 1.*

Nous préciserons ultérieurement ce résultat en donnant une description théorique plus explicite de la structure de ces objets à l'aide d'une catégorie auxiliaire. Il est naturel de conjecturer que tous les objets simples noethériens de type 1 sont isomorphes dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  à un sous-quotient de  $\bar{P} \otimes S_\lambda$  pour une partition régulière  $\lambda$  convenable, mais aucun résultat dans cette direction ne semble avoir été obtenu jusqu'à présent.

En utilisant un résultat de structure « global » sur les injectifs indécomposables (cf. [Pow98c]), que nous généraliserons, et le théorème 4.3.8 (qui donne la structure de  $P \otimes q_n(P)$ ), Powell a également établi dans [Pow98a] le résultat suivant (plus précisément, il fournit une filtration explicite de sous-quotients simples noethériens de type 1 ou 2).

**Théorème 4.3.10** (Powell). *Le foncteur  $P^{\otimes 2}$  est noethérien de type 2.*

Nous démontrerons dans cette thèse que pour tout foncteur fini  $F$ ,  $P^{\otimes 2} \otimes F$  est noethérien de type 2.

**Conjecture 4.3.11** (Conjecture artinienne forte). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $P^{\otimes n}$  est noethérien de type  $n$ .*

Powell énonce aussi dans [Pow98c] une version très forte de la conjecture artinienne dont nous parlerons dans le paragraphe 5.4.3. Un autre renforcement naturel de la version forte précédente réside dans l'énoncé suivant.

**Conjecture 4.3.12.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout objet fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , le foncteur  $P^{\otimes n} \otimes F$  est noethérien de type  $n$ . De plus, tout foncteur simple noethérien de type  $n$  est isomorphe dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$  (cf. notation 2.8.8) à un sous-quotient d'un tel objet.*

Là encore, nos investigations ultérieures suggéreront un énoncé plus précis sur la filtration de Krull de  $\mathcal{F}$ , la *conjecture artinienne extrêmement forte* (cf. § 8.5.3).

Pour achever cette section introductive à la conjecture artinienne, indiquons quelques autres problèmes ouverts dont la difficulté paraît de même nature que ladite conjecture; la conjecture artinienne extrêmement forte donnerait une réponse positive à ces problèmes. Nous y reviendrons au paragraphe 8.5.3.

**Conjecture 4.3.13.** *Pour tout foncteur de co-type fini  $X$  de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble*

$$\{\lambda \mid \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(X, S_\lambda) \neq 0\}$$

*(où  $\lambda$  est une partition régulière) est fini.*

Cette conjecture est à rapprocher de la forme suivante de la conjecture artinienne.

**Proposition 4.3.14.** *La conjecture artinienne 4.0.2 équivaut à l'énoncé suivant : pour tout foncteur de co-type fini  $X$  de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble*

$$\{\lambda \mid \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_\lambda, X) \neq 0\}$$

*(où  $\lambda$  est une partition régulière) est fini.*

*Démonstration.* Cela découle des corollaires 2.7.17 et 4.2.25, compte-tenu de ce que les espaces vectoriels  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_\lambda, X)$  sont toujours finis pour  $X$  à valeurs de dimension finie (utiliser que les simples de  $\mathcal{F}$  sont  $\mathrm{pf}_\infty$ ).  $\square$

Un autre résultat vérifié par tous les objets de type fini apparus lors des travaux sur la catégorie  $\mathcal{F}$  est le suivant.

**Conjecture 4.3.15.** *Pour tout objet de type fini  $X$  de  $\mathcal{F}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(T^n, F) = 0$ .*

Les énoncés très « naturels » 4.3.13 et 4.3.15 ne résultent nullement de la conjecture artinienne sous sa forme minimale (ou même forte — conjecture 4.3.11).

# Chapitre 5

## Les catégories $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$

Dans ce chapitre, nous introduisons des catégories de foncteurs  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$  étroitement liées à la catégorie  $\mathcal{F}$ . Elles nous permettront de donner des variantes plus précises de la conjecture artienne, et surtout d'exposer rapidement des structures et des foncteurs importants entre catégories de foncteurs, que nous généraliserons en détails lorsque nous étudierons, dans la deuxième partie de cette thèse, les catégories de foncteurs en grassmanniennes. De fait, la catégorie de foncteurs en grassmanniennes globale  $\mathcal{F}_{Gr}$  (définie au chapitre 6) constitue une sorte de « produit tensoriel tordu » entre les catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$ .

On rappelle que les symboles Epi et Pl ont été introduits à la notation 1.1.3.

**Définition 5.0.1.** 1. Nous désignerons par  $\mathcal{E}_{surj}^f$  (resp.  $\mathcal{E}_{inj}^f$ ) la sous-catégorie de  $\mathcal{E}^f$  qui a les mêmes objets que  $\mathcal{E}^f$  et dont les morphismes sont donnés par  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{surj}^f}(V, W) = \text{Epi}_{\mathcal{E}^f}(V, W)$  (resp.  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{inj}^f}(V, W) = \text{Pl}_{\mathcal{E}^f}(V, W)$ ).

2. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}_{surj}^f$  dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension au plus  $n$ .
3. On introduit enfin les catégories de foncteurs

$$\mathcal{F}_{surj} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^f, \mathcal{E}),$$

$$\mathcal{F}_{inj} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{inj}^f, \mathcal{E}),$$

$$\mathcal{F}_{surj}^{\leq n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}, \mathcal{E}).$$

*Remarque 5.0.2 (Dualité).* Le foncteur de dualité  $(\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$  induit une équivalence de catégories entre  $(\mathcal{E}_{surj}^f)^{op}$  et  $\mathcal{E}_{inj}^f$ . On en déduit une bonne dualité entre les catégories  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$  (proposition 3.1.30). Par conséquent, nous nous bornerons souvent à énoncer les résultats relatifs à l'une des deux catégories.

La considération d'une seule d'entre elle n'aurait néanmoins pas suffi à nos investigations ultérieures : la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  intervient dans l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes que nous introduirons dans la deuxième partie de cette thèse (c'est pourquoi la plupart des résultats des premières sections sont énoncés pour  $\mathcal{F}_{surj}$ ); la filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  est un objet intéressant qui apparaîtra dans la section 5.6.3 (nous la retrouverons d'ailleurs dans la deuxième partie, § 8.5.4), alors que celle de  $\mathcal{F}_{surj}$  est triviale (nous verrons que cette catégorie est localement finie).

Les trois premières sections de ce chapitre donnent la structure de base des catégories  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$ . Comme dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , leurs objets finis sont caractérisés, parmi les foncteurs prenant

des valeurs de dimension finie, par leur nilpotence pour un endofoncteur exact remarquable; il s'agit ici d'un foncteur de décalage, au lieu du foncteur différence, qui n'a pas d'analogue du fait qu'il n'existe aucun scindement dans les sources des catégories de foncteurs  $\mathcal{F}_{surj}$  ou  $\mathcal{F}_{inj}$ . A l'aide d'un diagramme de recollement (proposition 5.1.2), on décrit leurs objets simples à partir des représentations simples des groupes linéaires (sur  $\mathbb{F}_2$ ). Avant cela, le paragraphe 5.2 introduit une deuxième structure tensorielle sur  $\mathcal{F}_{surj}$  (le cas de  $\mathcal{F}_{inj}$  serait analogue). En effet, si le produit tensoriel usuel de  $\mathcal{F}_{surj}$  préserve les objets injectifs de co-type fini, il se comporte mal vis-à-vis des objets projectifs, auxquels le *produit tensoriel total* que nous définirons est adapté.

Dans la quatrième section, nous étudions une adjonction fondamentale entre les catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$ , cadre dans lequel s'insère naturellement les considérations de Powell sur les objets qu'il a nommés « foncteurs co-Weyl » (cf. [Pow98c]), et grâce auxquels il a obtenu les avancées les plus significatives connues jusqu'alors sur la conjecture artiniennne, que la suite de cette thèse généralisera.

La cinquième section expose l'équivalence, élémentaire mais fort utile dans la compréhension conceptuelle des catégories de foncteurs, entre la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  et une sous-catégorie pleine de la catégorie des « systèmes de coefficients » que Dwyer utilise dans son article fondamental [Dwy80], sans toutefois l'étudier intrinsèquement; nous donnons quelques résultats reliés à cette équivalence de catégories, qui suggère que le lien entre les représentations des groupes linéaires et les catégories  $\mathcal{F}_{inj}$  ou  $\mathcal{F}_{surj}$  est beaucoup plus direct qu'avec la catégorie  $\mathcal{F}$ .

La dernière section présente des résultats sur le foncteur oubli  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$  qui possèdent un intérêt intrinsèque, comme en témoigne la proposition 5.6.4, étape essentielle d'un théorème important de Betley et Suslin. Notre démonstration de cette proposition est repoussée à la fin de la seconde partie de cette thèse, qui fournira un outil très efficace pour obtenir des résultats d'annulation cohomologique dans la catégorie  $\mathcal{F}$ . Le paragraphe 5.6.3 constitue pour sa part un avant-goût du chapitre 9. Il nous permet d'exposer la méthode utilisée dans la section 9.1 dans un cadre beaucoup plus simple techniquement. Nous étudions également dans la section 5.6 un « gros » foncteur de  $\mathcal{F}$  (il n'est ni analytique, ni coanalytique) qui jouera un rôle fondamental dans la deuxième partie.

*Remarque 5.0.3.* L'idée d'étudier une catégorie de foncteurs en utilisant la catégorie de foncteurs auxiliaire obtenue en ne conservant comme morphismes à la source que les épimorphismes est due à Scorichenko. Elle est exposée (dans une perspective différente de la nôtre, mais les concepts sous-jacents sont très analogues) dans l'article « *Stable K-theory is bifunctor homology* » (§ 4) de Franjou et Pirashvili du volume [FFPS03].

L'utilisation d'autres catégories de surjection apparaît dans divers contextes plus ou moins connexes. Par exemple, dans [Pir00] (§ 1.9), Pirashvili emploie ce procédé pour les  $\Gamma$ -modules.

## 5.1 Préliminaires

**Notation 5.1.1.** 1. Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie, nous noterons simplement

$P_V^{surj}$  le projectif standard  $P_V^{\mathcal{E}_{surj}^f}$ , et  $I_V^{surj}$  l'injectif standard  $I_V^{\mathcal{E}_{surj}^f}$ . Nous noterons de même  $P_V^{inj}$  et  $I_V^{inj}$  pour  $P_V^{\mathcal{E}_{inj}^f}$  et  $I_V^{\mathcal{E}_{inj}^f}$  respectivement.

2. L'espace vectoriel  $\mathbb{F}_2^{\oplus n}$  de dimension  $n$  sera noté  $E_n$ .

3. Nous noterons  $ev_n = ev_{E_n} : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{E}$  et  $ev_n = ev_{E_n} : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$  les foncteurs d'évaluation sur l'espace vectoriel  $E_n$ . Nous noterons aussi  $ev_n$  et  $ev_n$  les foncteurs analogues de source  $\mathcal{F}_{inj}$ .

Les considérations du paragraphe 3.3.1 fournissent le résultat suivant.

**Proposition 5.1.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la sous-catégorie  $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n-1}$  est une sous-catégorie complète à droite de  $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$  (cf. définition 3.3.7). Par conséquent (cf. corollaire 3.3.10), on a un diagramme de recollement*

$$\mathcal{F}_{surj}^{\leq n-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathcal{F}_{surj}^{\leq n} \begin{array}{c} \xleftarrow{ev_n} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$$

où  $\mathcal{R}$  est le foncteur de restriction et  $\mathcal{P}$  le prolongement par zéro.

Les foncteurs notés tous  $\mathcal{P}$ , pour des raisons de lisibilité, dans les parties gauche et droite du diagramme sont évidemment distincts.

*Remarque 5.1.3.* Vespa a étudié (cf. [Ves05], chapitre 3 et [Ves06], § 4) une catégorie de foncteurs  $\mathcal{F}_{iso}$  dont la source s'obtient à partir d'une catégorie d'espaces quadratiques dont toutes les flèches sont des monomorphismes, et de ce fait très analogue à  $\mathcal{E}_{inj}^f$ . Elle utilise une construction de foncteurs de Mackey qui permet d'éviter une bonne part des « pathologies » des catégories  $\mathcal{F}_{inj}$  ou  $\mathcal{F}_{surj}$  (qui participent de la complexité structurelle de la catégorie  $\mathcal{F}$ , en lien avec la conjecture artiniennne), et qui fait que le diagramme de recollement analogue à celui de la proposition 5.1.2 est trivial dans  $\mathcal{F}_{iso}$  (i.e. que la catégorie qui apparaît au centre du diagramme se scinde en le produit des deux autres catégories — cf. [Ves06], théorème 4.2), contrairement à ce qui advient dans  $\mathcal{F}_{surj}$  ou  $\mathcal{F}_{inj}$ . Ce phénomène est à rapprocher de ce que  $\mathcal{F}_{iso}$  possède une bonne auto-dualité, alors que  $\mathcal{F}_{inj}$  a un comportement « fortement non auto-dual » (très différent de celui de  $\mathcal{F}_{surj}$ ), comme nous le verrons par la suite.

**Notation 5.1.4.** Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , nous désignerons par  $i_n^! : \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$  le foncteur de prolongement par zéro. Il s'obtient en considérant la sous-catégorie complète à gauche des objets de dimension  $n$  de  $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$ , et en composant le prolongement par zéro  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$  qui s'en déduit avec le prolongement par zéro associé à l'inclusion de la sous-catégorie complète à droite  $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$  (cf. remarque 3.3.9). On a ainsi un isomorphisme

$$i_n^!(M)(V) \simeq \mathbb{F}_2[\text{Iso}(E_n, V)] \otimes_{\mathbb{F}_2[GL_n]} M$$

naturel en  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $M \in \text{Ob } \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$ .

Par abus, nous désignerons de la même façon les foncteurs analogues dans  $\mathcal{F}_{inj}$ .

Nous noterons enfin  $\text{Is}_n$  l'objet  $i_n^!(\mathbb{F}_2[GL_n])$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ , et  $S_n^{surj} = i_n^!(\mathbb{F}_2)$ .

Ainsi,  $\text{Is}_0 \simeq S_0^{surj}$  (resp.  $\text{Is}_1 \simeq S_1^{surj}$ ) est le foncteur de  $\mathcal{F}_{surj}$  égal à  $\mathbb{F}_2$  évalué sur l'espace vectoriel 0 (resp.  $\mathbb{F}_2$ ) et nul sur les espaces non nuls (resp. de dimension  $\neq 1$ ).

*Remarque 5.1.5.* Les endofoncteurs  $i_n^! \circ \text{ev}_n$  et  $\cdot \otimes S_n^{surj}$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  sont isomorphes.

## 5.2 Structures tensorielles sur $\mathcal{F}_{surj}$

Outre sa structure tensorielle usuelle (cf. section 3.1), la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  possède une structure tensorielle qui a l'avantage sur la précédente de préserver les objets projectifs, et de bien se comporter à l'égard du foncteur fondamental  $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$  que nous introduirons dans la section 5.4.

**Définition 5.2.1** (Produit tensoriel total). Étant donnés deux objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ , on appelle *produit tensoriel total* de  $F$  et  $G$  le foncteur noté  $F \tilde{\otimes} G$  et défini comme suit.

– Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ , on pose

$$(F \tilde{\otimes} G)(A) = \bigoplus_{\substack{V, W \subset A \\ V+W=A}} F(V) \otimes G(W).$$

– Si  $u : A \rightarrow A'$  est un morphisme de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ , le morphisme

$$(F \tilde{\otimes} G)(u) : (F \tilde{\otimes} G)(A) \rightarrow (F \tilde{\otimes} G)(A')$$

est défini comme la somme directe sur les sous-espaces  $V$  et  $W$  de  $A$  tels que  $V + W = A$  des morphismes

$$F(V) \otimes G(W) \xrightarrow{F(u) \otimes G(u)} F(u(V)) \otimes G(u(W)) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{V', W' \subset A' \\ V'+W'=A'}} F(V') \otimes G(W')$$



où l'on note encore, par abus,  $u$  pour les morphismes  $V \rightarrow u(V)$  et  $W \rightarrow u(W)$  induits par  $u$ .

Cette définition fait sens puisque  $u(V) + u(W) = u(V + W) = u(A) = A'$ .

Le produit tensoriel total définit un bifoncteur  $\mathcal{F}_{surj} \times \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ , le produit tensoriel de  $\mathcal{E}$  étant bifonctoriel.

**Proposition 5.2.2.** – *Le produit tensoriel total définit sur  $\mathcal{F}_{surj}$  une structure tensorielle exacte d'unité  $\text{Iso}_0$ .*

– *Il existe un monomorphisme  $F \otimes G \hookrightarrow F \tilde{\otimes} G$  naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ .*

La première assertion se vérifie par inspection. Le monomorphisme de la seconde assertion est donné, sur un espace vectoriel  $V$ , par l'inclusion du facteur  $F(V) \otimes G(V)$  de  $(F \tilde{\otimes} G)(V)$  indexé par la décomposition  $V + V = V$ . Ce monomorphisme illustre qu'intuitivement  $\tilde{\otimes}$  procure la plus « grosse » structure tensorielle « raisonnable » sur  $\mathcal{F}_{surj}$ , ce qui justifie la terminologie de *produit tensoriel total*.

Par la suite, lorsque nous nous référerons à des notions dépendant d'une structure tensorielle sur  $\mathcal{F}_{surj}$ , nous utiliserons l'adjectif *total* lorsqu'il s'agira de la structure définie par  $\tilde{\otimes}$ , l'absence de qualificatif signifiant qu'il s'agit de la structure tensorielle usuelle définie par  $\otimes$ .

Le lemme suivant, qui découle de ce qu'une somme directe d'épimorphismes (resp. de monomorphismes) est un épimorphisme (resp. un monomorphisme), sous-tend grand nombre de structures de la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$ .

**Lemme 5.2.3.** *Il existe un unique foncteur  $\mathcal{E}_{surj}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f$  tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{surj}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f & \longrightarrow & \mathcal{E}_{surj}^f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f & \xrightarrow{\oplus} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

*commute. Il sera encore noté  $\oplus$  par abus.*

*On a un résultat analogue dans la catégorie  $\mathcal{E}_{inj}^f$ .*

**Proposition 5.2.4.** *Il existe un isomorphisme  $P_V^{surj} \tilde{\otimes} P_W^{surj} \simeq P_{V \oplus W}^{surj}$  naturel en les objets  $V$  et  $W$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ .*

*Démonstration.* Cette proposition s'obtient en linéarisant l'isomorphisme ensembliste du lemme suivant. □

**Lemme 5.2.5.** *Il existe une bijection*

$$\text{Epi}_{\mathcal{E}}(A \oplus B, E) \simeq \coprod_{\substack{V, W \subset E \\ V + W = E}} \text{Epi}_{\mathcal{E}}(A, V) \times \text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)$$

*naturelle en les objets  $A$ ,  $B$  et  $E$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ .*

Ce résultat élémentaire sera établi en détails sous une forme plus générale ultérieurement (cf. paragraphe 6.2.3).

**Corollaire 5.2.6.** *Le produit tensoriel total de deux objets projectifs de  $\mathcal{F}_{surj}$  est projectif.*

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de la proposition 5.2.4 et de la commutation du produit tensoriel total aux sommes directes quelconques (qui découle de la même propriété relative au produit tensoriel de  $\mathcal{E}$ ). □

### 5.3 Objets finis

Le lemme 5.2.3 permet d'introduire l'analogie suivant aux foncteurs de décalage de la catégorie  $\mathcal{F}$ .

**Définition 5.3.1** (Foncteurs de décalage). Étant donné un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , on appelle *foncteur de décalage par  $V$  dans  $\mathcal{F}_{surj}$*  (resp.  $\mathcal{F}_{inj}$ ) l'endofoncteur de précomposition par  $\cdot \oplus V$ .

**Notation 5.3.2.** Nous noterons  $\delta_V^{surj}$  (resp.  $\delta_V^{inj}$ ) l'endofoncteur de décalage par un espace  $V$  de la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  (resp.  $\mathcal{F}_{inj}$ ). Lorsque  $V = \mathbb{F}_2$ , ce foncteur sera simplement noté  $\delta^{surj}$  (resp.  $\delta^{inj}$ ). De plus, l'exposant *surj* (resp. *inj*) sera omis lorsqu'aucune confusion ne pourra en résulter.

Ainsi, l'association  $V \mapsto \delta_V$  est fonctorielle ; si  $V$  est de dimension  $n$ , les foncteurs  $\delta_V$  et  $\delta^n$  sont isomorphes.

Les foncteurs de décalage commutent aux limites, aux colimites et au produit tensoriel (usuel).

**Proposition 5.3.3** (Adjoint à gauche à  $\delta^{surj}$ ). *Il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X \tilde{\otimes} P_A^{surj}, Y) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, \delta_A^{surj}(Y))$$

naturel en les objets  $X, Y$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $A$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ .

*Démonstration.* On définit un morphisme naturel  $X \rightarrow \delta_A^{surj}(X \tilde{\otimes} P_A^{surj})$  par les inclusions

$$X(V) \xrightarrow{X(V) \otimes [id_A]} X(V) \otimes P_A^{surj}(A) \hookrightarrow \bigoplus_{W_1+W_2=V \oplus A} X(W_1) \otimes P_A^{surj}(W_2).$$

On vérifie, grâce à la proposition 5.2.4, que l'application naturelle

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X \tilde{\otimes} P_A^{surj}, Y) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, \delta_A^{surj}(Y))$$

que l'on en déduit est un isomorphisme lorsque  $X$  est un projectif standard. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite.  $\square$

**Proposition 5.3.4.** *Il existe dans  $\mathcal{F}_{surj}$  un isomorphisme*

$$\delta_A(I_B^{surj}) \simeq \bigoplus_{W_1+W_2=B} I_{W_1}^{surj} \otimes I_{W_2}^{surj}(A)$$

naturel en les objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ .

*Démonstration.* Cette proposition s'obtient par linéarisation de la bijection du lemme 5.2.5 (ou à partir de la proposition précédente et du lemme de Yoneda).  $\square$

**Corollaire 5.3.5.** 1. *Les foncteurs de décalage de  $\mathcal{F}_{surj}$  préservent les objets injectifs de co-type fini et les objets de co-type fini.*

2. *Les foncteurs de décalage de  $\mathcal{F}_{inj}$  préservent les objets projectifs de type fini et les objets de type fini.*

**Lemme 5.3.6.** 1. *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  tel que  $X(0)$  est de dimension finie et  $\delta(X)$  fini dans  $\mathcal{F}_{surj}$ . Alors  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{surj}$ .*

2. *Soient  $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{inj}$  tel que  $X(0)$  est de dimension finie et  $\delta(X)$  fini dans  $\mathcal{F}_{inj}$ . Alors  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{inj}$ .*

*Démonstration.* Le foncteur

$$(\delta^{surj}, ev_0) : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{surj} \times \mathcal{E}$$

est exact et fidèle. Le premier point résulte donc de la proposition 2.6.15.

Pour le second, on utilise le foncteur  $(\delta^{inj}, ev_0) : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathcal{F}_{inj} \times \mathcal{E}$ , qui est exact et fidèle, commute aux colimites et conserve les objets projectifs de type fini (cf. corollaire 5.3.5). La conclusion est donc donnée par la proposition 2.2.17.  $\square$

**Proposition 5.3.7** (Objets finis, de type fini de  $\mathcal{F}_{surj}$ ). *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'objet  $X$  est fini ;*
2. *l'objet  $X$  est de type fini ;*
3. *l'objet  $X$  est à valeurs de dimension finie et nilpotent pour le foncteur décalage  $\delta$  (cette dernière condition signifiant encore que  $X(V) = 0$  si  $\dim V$  est assez grande).*

On peut reformuler la dernière condition en

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \dim ev_n(X) < \infty.$$

*Démonstration.* Il est clair que 1 implique 2.

Le foncteur projectif standard  $P_V^{surj}$  associé à un espace  $V$  de dimension  $n$  est à valeurs de dimension finie et annihilé par le foncteur  $\delta^{n+1}$ , puisque  $\text{Epi}(V, W) = 0$  si  $\dim W \geq n + 1$ . Cela montre que la deuxième assertion implique la troisième.

Enfin, la troisième implique la première par le lemme 5.3.6.  $\square$

Dualement, on a le résultat suivant.

**Proposition 5.3.8** (Objets finis, de co-type fini de  $\mathcal{F}_{inj}$ ). *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{inj}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'objet  $X$  est fini ;*
2. *l'objet  $X$  est de co-type fini ;*
3. *l'objet  $X$  est à valeurs de dimension finie et nilpotent pour le foncteur décalage  $\delta$  (cette dernière condition signifiant encore que  $X(V) = 0$  si  $\dim V$  est assez grande).*

**Corollaire 5.3.9.** 1. *Tout objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  est localement fini ; en particulier,  $\mathcal{F}_{surj}$  est une catégorie localement noethérienne.*

2. *Tout objet de  $\mathcal{F}_{inj}$  est co-localement fini ; en particulier,  $\mathcal{F}_{inj}$  est une catégorie co-localement artinienne.*

**Corollaire 5.3.10.** 1. *Les objets finis de  $\mathcal{F}_{inj}$  sont  $pf_\infty$ .*

2. *Les objets finis de  $\mathcal{F}_{surj}$  sont  $co-pf_\infty$ .*

*Démonstration.* La première assertion s'obtient en combinant le lemme 5.3.6 et la proposition 5.3.8. La seconde s'en déduit par dualité.  $\square$

**Corollaire 5.3.11** (Filtration canonique dans  $\mathcal{F}_{surj}$ ). *Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $T_n$  l'endofoncteur de  $\mathcal{F}_{surj}$  composé du foncteur de restriction  $\mathcal{R} : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$  et du prolongement par zéro  $\mathcal{P} : \mathcal{F}_{surj}^{\leq n} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$  ; la co-unité de l'adjonction entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{P}$  fournit un monomorphisme  $T_n \rightarrow id$ .*

*Pour tout objet  $F$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ ,  $(T_n(F))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de sous-objets de  $F$  de réunion  $F$ . Si  $F$  est à valeurs de dimension finie, alors les  $T_n(F)$  sont finis.*

*Remarque 5.3.12.* Cette filtration est similaire à la filtration polynomiale dans  $\mathcal{F}$ . Par analogie avec le cas de  $\mathcal{F}$ , nous noterons  $T_n^{hom} = T_n/T_{n-1}$ . Il existe un isomorphisme canonique  $T_n^{hom}(X) \simeq X \otimes S_n^{surj}$ .

Contrairement à ce qui advient pour la filtration polynomiale dans  $\mathcal{F}$ , les foncteurs  $T_n$  et  $T_n^{hom}$  sont exacts.

**Proposition 5.3.13** (Objets simples de  $\mathcal{F}_{surj}$ ). *Soit  $S$  un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $S$  est simple ;
2. il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{ev}_n(S)$  est un  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module simple et que  $\text{ev}_k(S) = 0$  pour  $k \neq n$  ;
3.  $S$  est isomorphe à  $i_n^!(R)$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  et un certain  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module simple  $R$ .

*Exemple 5.3.14.* Les objets  $S_n^{surj}$  sont simples dans  $\mathcal{F}_{surj}$ .

*Démonstration.* Un objet simple dans une sous-catégorie épaisse  $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$  reste simple dans  $\mathcal{F}_{surj}$  ; réciproquement, la proposition 5.3.7 montre qu'un objet simple de  $\mathcal{F}_{surj}$  appartient à une sous-catégorie  $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$ . La conclusion s'obtient alors en combinant les propositions 5.1.2 et 2.8.16.  $\square$

*Remarque 5.3.15.* On peut formaliser ce raisonnement en notant que  $\mathcal{E}_{surj}^f$  est la colimite filtrante (en un sens à préciser) des sous-catégories  $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$ , et que par conséquent  $\mathcal{F}_{surj}$  est la limite filtrante (en un sens à préciser) des  $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$ . Kuhn détaille (dans le cadre analogue de la catégorie  $\mathcal{F}$ ) cet argument dans [Kuh94b], § 2.

**Corollaire 5.3.16.** *Dans  $\mathcal{F}_{surj}$ , le produit tensoriel total, donc a fortiori le produit tensoriel usuel, de deux objets finis, est fini. Cela munit le groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$  d'une structure d'anneau commutatif sans unité (le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  n'étant pas fini) via  $\otimes$ , et d'une structure d'anneau commutatif (unitaire, le foncteur  $\text{Is}_0$  étant fini) via  $\tilde{\otimes}$ . Il est isomorphe, pour la première structure, à l'idéal*

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$$

de l'anneau produit

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$$

(chaque facteur étant muni de la structure d'anneau induite par le produit tensoriel sur  $\mathbb{F}_2$ ).

La proposition suivante montre que le groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  est isomorphe au groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F})$ . Pour la démonstration, nous renvoyons à [Kuh94b] (§ 2 et 4) (cf. aussi [Pow98c], § 2.2).

**Proposition 5.3.17** (Kuhn). *Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $n \in \mathbb{N}$ .*

1. Si  $n = \lambda_1$ , alors  $S_\lambda(E_n)$  est un  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module à gauche simple ; nous le noterons  $R_\lambda$ .
2. Les  $R_\mu$  forment un système complet de représentants des  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -modules simples lorsque  $\mu$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{p}$  tels que  $\mu_1 = n$ .
3. Le  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module  $S_\lambda(E_n)$  est nul si  $\lambda_1 > n$ , égal à  $R_\lambda$  si  $\lambda_1 = n$  et isomorphe à  $R_{(n, \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_r)}$  (où  $r = l(\lambda)$ ) si  $\lambda_1 < n$ .

*Remarque 5.3.18.* En revanche, les structures multiplicatives sur  $G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$  et  $G_0^f(\mathcal{F})$  semblent fort délicates à comparer.

Signalons enfin l'important résultat suivant sur les objets simples, classique en théorie des représentations (cf. [Kuh94b], § 5.1 et [Kuh02], § 7 pour le point de vue fonctoriel).

**Proposition 5.3.19.** *Si  $\mathcal{A}$  est l'une des catégories  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) ou  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $S$  un objet simple de  $\mathcal{A}$ , alors le corps  $\text{End}(S)$  est réduit à  $\mathbb{F}_2$ .*

## 5.4 Liens avec la catégorie $\mathcal{F}$

Nous montrons dans cette section comment une adjonction formelle entre les catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$  illumine certains problèmes internes à la catégorie  $\mathcal{F}$ , notamment la conjecture artinienne.

### 5.4.1 Les foncteurs adjoints $o$ et $\varpi$

**Proposition et définition 5.4.1.** *Il existe un foncteur exact et fidèle, noté  $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$ , donné de la façon suivante.*

– Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $V$  un objet de  $\mathcal{E}^f$ , on pose

$$(\varpi(F))(V) = \bigoplus_{W \subset V} F(W)$$

la somme directe étant prise sur tous les sous-espaces vectoriels  $W$  de  $V$ .

- Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $V \xrightarrow{f} V'$  une flèche de  $\mathcal{E}^f$ , et si  $W$  et  $W'$  sont des sous-espaces respectifs de  $V$  et  $V'$ , la composante  $F(W) \rightarrow F(W')$  de  $(\varpi(F))(f)$  est égale à  $F(g)$  si  $f(W) = W'$ , où  $g$  est l'épimorphisme  $W \rightarrow W'$  induit par  $f$ , et nulle sinon.
- Si  $F \xrightarrow{u} G$  est une flèche de  $\mathcal{F}_{surj}$ , le morphisme  $\varpi(u) : \varpi(F) \rightarrow \varpi(G)$  de  $\mathcal{F}$  est défini, sur l'espace vectoriel de dimension finie  $V$ , comme la somme directe sur les sous-espaces  $W$  de  $V$  des morphismes  $u(W) : F(W) \rightarrow G(W)$ .

**Notation 5.4.2.** Le foncteur de précomposition par le foncteur d'inclusion  $\mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  sera noté  $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ .

Ce foncteur est exact et fidèle.

**Proposition 5.4.3.** 1. *Le foncteur  $o$  est adjoint à droite au foncteur  $\varpi$ .*

2. *Pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie, on a un isomorphisme  $\varpi(P_V^{surj}) \simeq P_V$ .*

3. *Pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie, on a un isomorphisme  $o(I_V) \simeq \bigoplus_{W \subset V} I_W^{surj}$*

(la somme directe étant prise sur tous les sous-espaces vectoriels  $W$  de  $V$ ).

4. *Le foncteur  $o$  préserve les objets de co-type fini et, plus généralement, les objets co- $\text{pf}_i$ , où  $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .*

5. *Il existe un isomorphisme  $\varpi(F \tilde{\otimes} G) \simeq \varpi(F) \otimes \varpi(G)$  naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ .*

*Démonstration.* Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$ . Un morphisme  $\varpi(X) \rightarrow F$  est la donnée, pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et tout sous-espace  $W$  de  $V$ , d'une application linéaire  $u_{V,W} : X(W) \rightarrow F(V)$  de sorte que, pour tout  $f \in \text{hom}_{\mathcal{E}^f}(V, V')$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(W) & \xrightarrow{u_{V,W}} & F(V) \\ \downarrow X(f) & & \downarrow F(f) \\ X(W') & \xrightarrow{u_{V',W'}} & F(V') \end{array} \quad (5.1)$$

commute, où l'on a posé  $W' = f(W)$ . Les applications linéaires  $u_{V,W}$  fournissent en particulier un morphisme  $X \rightarrow o(F)$  dans  $\mathcal{F}_{surj}$ .

Réciproquement, si  $a : X \rightarrow o(F)$  est une flèche de  $\mathcal{F}_{surj}$ , définissons, pour  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $W \subset V$ , une application linéaire  $u_{V,W} : X(W) \xrightarrow{a_W} F(W) \hookrightarrow F(V)$ , la dernière flèche étant induite par l'inclusion. Il est clair que les diagrammes (5.1) commutent, de sorte que  $u$  fournit un morphisme  $\varpi(X) \rightarrow F$  dans  $\mathcal{F}$ . On vérifie aussitôt que les deux applications naturelles entre  $\text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, o(F))$  et  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(\varpi(X), F)$  définies précédemment sont réciproques l'une de l'autre, ce qui établit le premier point.

Les assertions 2 et 3 s'obtiennent par adjonction à partir du lemme de Yoneda : on a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\varpi(P_V^{surj}), F) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(P_V^{surj}, o(F)) \simeq o(F)(V) = F(V) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(P_V, F)$$

et

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, o(I_V)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\varpi(X), I_V) \simeq \varpi(X)(V) = \bigoplus_{W \subset V} X(W) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, \bigoplus_{W \subset V} I_W^{surj}).$$

La quatrième assertion provient de 3 et de l'exactitude de  $o$ .

La dernière s'obtient à partir de la décomposition ensembliste naturelle des couples de sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$  suivante :

$$\{(A, B) \mid A, B \subset V\} = \coprod_{W \subset V} \{(A, B) \mid A, B \subset W, A + B = W\}.$$

□

*Remarque 5.4.4.* L'isomorphisme de la dernière assertion est adjoint au monomorphisme canonique  $F \tilde{\otimes} G \hookrightarrow o(\varpi(F) \otimes \varpi(G))$  donné sur l'espace  $A$  par l'injection du facteur direct

$$\bigoplus_{V+W=A} F(V) \otimes G(W) \hookrightarrow \bigoplus_{V, W \subset A} F(V) \otimes G(W).$$

**Proposition 5.4.5.** *Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .*

1. *Si  $o(F)$  est artinien, alors  $F$  est artinien.*
2. *Si  $o(F)$  est co-pf<sub>i</sub>, alors  $F$  est co-pf<sub>i</sub>.*

*Démonstration.* Le foncteur  $o$  est exact et fidèle, ce qui fournit la première assertion (cf. proposition 2.4.7). De plus, il commute aux limites et transforme les cogénérateurs injectifs de  $\mathcal{F}_{surj}$  en des objets injectifs co-tf. La variante duale de la proposition 2.2.17 donne donc la deuxième partie de la proposition. □

Nous donnons maintenant la traduction dans le cadre de la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  de certaines assertions de la proposition 5.4.3.

**Proposition et définition 5.4.6** (Notions duales). 1. *Nous noterons  $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$  le foncteur d'oubli (précomposition par l'inclusion  $\mathcal{E}_{inj}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ ); il est exact et fidèle. De plus, il préserve les objets de type fini.*

2. *Il existe un foncteur exact et fidèle  $\varpi_{inj} : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathcal{F}$  donné sur les objets par*

$$\varpi_{inj}(X)(V) = \bigoplus_{W \subset V} X(V/W),$$

*le morphisme  $\varpi_{inj}(X)(V) \rightarrow \varpi_{inj}(X)(V')$  induit par une application linéaire  $f : V \rightarrow V'$  ayant pour composante  $X(V/W) \rightarrow X(V'/W')$  l'application  $X(\bar{f})$ , où  $\bar{f}$  est le monomorphisme  $V/W \rightarrow V'/W'$  induit par  $f$ , si  $W = f^{-1}(W')$ , 0 sinon.*

3. *Le foncteur  $\varpi_{inj}$  est adjoint à droite à  $o_{inj}$ .*

### 5.4.2 La catégorie $\mathcal{F}_{surj}$ et la conjecture artinienne

**Conjecture 5.4.7.** *La catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  est co-localement artinienne.*

Cette conjecture équivaut au caractère localement noethérien de  $\mathcal{F}_{inj}$ , par la proposition 2.4.25.

**Proposition 5.4.8.** *La conjecture 5.4.7 implique la conjecture artinienne 4.0.2.*

*Démonstration.* Si la conjecture 5.4.7 est vérifiée,  $o(I_V)$  est artinien pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  (cf. proposition 5.4.3. 3) ; la proposition 5.4.5 montre que les injectifs standard  $I_V$  de  $\mathcal{F}$  sont alors également artiniens.  $\square$

*Remarque 5.4.9.* Il ne semble en revanche exister aucun argument formel pour obtenir la réciproque de la proposition 5.4.8.

**Notation 5.4.10.** Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , nous noterons  $\tilde{P}_n$  l'objet  $\varpi(\text{Is}_n)$  de  $\mathcal{F}$ .

On a ainsi un isomorphisme canonique  $\tilde{P}_n(V) \simeq \mathbb{F}_2[\text{Pl}_{\mathcal{E}}(E_n, V)]$  pour  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ .

**Lemme 5.4.11.** – *Étant donné un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ , les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'objet  $X$  est de co-type fini.*
2. *L'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{hom}(\text{Is}_n, X) \neq 0\}$$

*est fini et  $X$  est à valeurs de dimension finie.*

3. *Le socle de  $X$  est fini.*

– *Étant donné un objet co-tf  $X$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ , les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'objet  $X$  est co-pf.*
2. *L'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}^1(\text{Is}_n, X) \neq 0\}$$

*est fini.*

*Démonstration.* Supposons que l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  est de co-type fini. Alors  $X$  se plonge dans une somme directe finie d'injectifs standard  $I_V^{surj}$ . Comme  $I_V^{surj}$  est à valeurs de dimension finie et que  $\text{hom}(\text{Is}_n, I_V^{surj}) \simeq \text{Is}_n(V) = 0$  pour  $n \neq \dim V$ , on en déduit que  $X$  vérifie la seconde assertion du premier point. Celle-ci implique la troisième en raison des deux constats suivants.

- Si  $R$  est une représentation simple de  $GL_n$ , alors  $R$  est un quotient de  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ , donc  $i_n^!(R)$  est un quotient de  $\text{Is}_n$ . Ainsi  $i_n^!(R)$  ne peut apparaître dans le socle de  $X$  que si  $\text{hom}(\text{Is}_n, X) \neq 0$ .
- Si  $X$  est à valeurs de dimension finie, le socle de  $\text{ev}_n(X)$  est fini, donc les simples de  $\mathcal{F}_{surj}$  associés aux représentations simples de  $GL_n$  apparaissant dans le socle de  $X$  (comptés avec multiplicité) sont en nombre fini.

Enfin, comme tout objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  est localement fini, la troisième assertion entraîne la première (cf. proposition 2.7.13).

Le deuxième point du lemme se déduit du premier et du corollaire 2.7.17.  $\square$

**Proposition 5.4.12.** *La conjecture artinienne 4.0.2 équivaut à l'assertion suivante : pour tout objet de co-type fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\tilde{P}_n, F) \neq 0\}$$

*est fini.*

*Démonstration.* Il existe un isomorphisme naturel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\tilde{P}_n, F) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^1(\text{Is}_n, o(F))$  (obtenu en combinant la proposition 5.4.3 et le corollaire 1.2.8), de sorte que si  $F$  est un objet co-tf de  $\mathcal{F}$ , la condition de l'énoncé équivaut au caractère co-pf de  $o(F)$  par le lemme 5.4.11 ( $o(F)$  est co-tf par la proposition 5.4.3). Mais  $o(F)$  est co-tf si et seulement si  $F$  est co-tf (cf. propositions 5.4.3 et 5.4.5), donc l'assertion de l'énoncé équivaut au caractère co-localement artinien de  $\mathcal{F}$ , comme souhaité.  $\square$

### 5.4.3 Foncteurs de Powell

Nous introduisons maintenant des objets fondamentaux pour l'étude de la conjecture artinienne ; ils constituent en quelque sorte les « briques élémentaires » des projectifs standard de  $\mathcal{F}$  (ils sont plus « petits » que les projectifs indécomposables de type fini, insuffisants pour l'étude générale des foncteurs  $P_V$ ), et permettent de préciser l'énoncé de la conjecture artinienne en relation avec la filtration de Krull de  $\mathcal{F}$ .

**Définition 5.4.13** (Foncteurs et filtrations de Powell). Nous appellerons *foncteur de Powell* associé à une partition régulière  $\lambda$  l'objet  $Q_\lambda = \varpi(i_{\lambda_1}^!(R_\lambda))$  de  $\mathcal{F}$ . Le foncteur dual  $DQ_\lambda$  sera noté  $J_\lambda$ .

Nous nommerons *filtration de Powell* d'un objet  $F$  de  $\mathcal{F}$  toute filtration finie

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = F$$

de  $F$  dont les sous-quotients  $A_i/A_{i-1}$  sont des foncteurs de Powell  $Q_\lambda$ . Une *filtration de Powell duale* sera une filtration finie dont les sous-quotients sont des foncteurs du type  $J_\lambda$ .

*Exemple 5.4.14.* Un cas particulièrement fondamental est celui des foncteurs associés à la représentation triviale de  $GL_n$ , notés  $\bar{G}(n) = i_n^!(S_n^{surj}) = Q_{(n)}$  et  $\bar{D}(n) = J_{(n)} = D\bar{G}(n)$ .

Un autre cas particulier intéressant est celui des foncteurs associés aux partitions de Steinberg  $\langle n \rangle = (n \ n-1 \ \dots \ 1)$  : on a  $Q_{\langle n \rangle} \simeq P_{\langle n \rangle}$  et  $J_{\langle n \rangle} = I_{\langle n \rangle}$ , injectif qui est noté traditionnellement  $L(n)$  (cf. [Pow98c]).

L'identification entre la représentation de Steinberg de  $GL_n$  et  $R_{\langle n \rangle}$  (qui jouera un rôle important au chapitre 10) est établie dans [Mit86].

Pour  $n = 1$ , on a  $\bar{G}(1) = \bar{P}$  et  $\bar{D}(1) = L(1) = \bar{I}$ .

Pour  $n = 2$ , on a la décomposition  $\bar{P}^{\otimes 2} \simeq P_{\langle 2 \rangle}^{\oplus 2} \oplus P_{(2)}$  ; la couverture projective  $P_{(2)}$  de  $\Lambda^2$  possède une filtration de quotients  $\bar{P}$ ,  $\bar{G}(2)$ ,  $\bar{G}(2)$  (cf. [Pow98c], ex. 4.1). Nous reviendrons explicitement sur ces foncteurs au paragraphe 10.5.1.

*Remarque 5.4.15.* Le foncteur  $Q_\lambda$  a pour cosocle  $S_\lambda$  ; on dispose donc d'un (unique) épimorphisme  $P_\lambda \twoheadrightarrow Q_\lambda$  (cf. [Pow98c]). Une manière de le voir consiste à remarquer que si  $n = \lambda_1$  et si  $\mu$  est une partition régulière, on a

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(Q_\lambda, S_\mu) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(i_n^!(R_\lambda), o(S_\mu)) \simeq \mathrm{hom}_{GL_n}\left(R_\lambda, \ker\left(S_\mu(E_n) \rightarrow \bigoplus_{e \in E_n \setminus \{0\}} S_\mu(E_n/e)\right)\right)$$

et à constater que le  $GL_n$ -module de droite est nul si  $\mu_1 \neq n$  et isomorphe à  $R_\mu$  sinon.

Les foncteurs  $J_\lambda$  ont été introduits par Powell dans [Pow98c] (§3), sous le nom de *foncteurs co-Weyl* ; les objets admettant une filtration de Powell (resp. une filtration de Powell duale) y sont baptisés *foncteurs DJ-bons* (resp. *foncteurs J-bons*). L'une des principales motivations de Powell était d'adapter dans le cadre de la catégorie  $\mathcal{F}$  la machinerie des *catégories de poids supérieurs* de [CPS88].

La version très forte suivante de la conjecture artinienne est formulée dans [Pow98c].

**Conjecture 5.4.16** (Conjecture artinienne très forte). *Pour toute partition régulière  $\lambda$ , le foncteur de Powell  $Q_\lambda$  est simple noethérien de type  $\lambda_1$ .*

L'exactitude du foncteur  $\varpi$  fournit le résultat suivant.

**Proposition 5.4.17.** *Si  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{surj}$ , alors  $\varpi(X)$  admet une filtration de Powell.*

**Corollaire 5.4.18.** *Le produit tensoriel de deux foncteurs de  $\mathcal{F}$  possédant une filtration de Powell admet une filtration de Powell.*

*Démonstration.* Cela provient de la dernière assertion de la proposition 5.4.3, du corollaire 5.3.16 et de l'exactitude du produit tensoriel de  $\mathcal{F}$ .  $\square$



En combinant cette propriété avec l'assertion 2 de la proposition 5.4.3 (et en notant que la classe des foncteurs admettant une filtration de Powell est stable par facteur direct et sommes directes finies — cf. [Pow98c] th. 3.2.6), on obtient l'important résultat suivant (th. 4.0.1 de [Pow98c]).

**Corollaire 5.4.19** (Powell). *Les projectifs de type fini de  $\mathcal{F}$  admettent une filtration de Powell.*

Comme les partitions  $\lambda$  qui apparaissent dans une filtration de Powell de  $P^{\otimes n}$  vérifient  $\lambda_1 \leq n$ , on en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 5.4.20.** *La conjecture artinienne très forte 5.4.16 implique la conjecture artinienne forte 4.3.11.*

**Proposition 5.4.21** (Powell). *Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}$  admet une filtration de Powell si et seulement s'il existe un entier  $n$  et une résolution projective*

$$\cdots \rightarrow P_i \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow F \rightarrow 0$$

dans laquelle chaque  $P_i$  est une somme directe finie de projectifs standard de la forme  $P_V$  avec  $\dim V \leq n$ .

Cette caractérisation homologique fondamentale (que nous n'emploierons toutefois pas), est le théorème 5.0.1 de [Pow98c], auquel nous renvoyons pour la démonstration.

## 5.5 Liens avec les systèmes de coefficients

Nous rappelons la définition de Dwyer de la catégorie des systèmes de coefficients ([Dwy80]).

**Notation 5.5.1.** Dans cette section, on note  $R_n : \mathbb{F}_2[GL_{n+1}]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur de restriction des scalaires,  $I_n : \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_{n+1}]\mathbf{Mod}$  le foncteur d'induction et  $C_n : \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_{n+1}]\mathbf{Mod}$  le foncteur de coinduction. Le groupe  $GL_n$  est comme d'habitude plongé dans  $GL_{n+1}$  par

$$\alpha_n : M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note, si  $n \leq m$  sont des entiers,  $S_{n,m}$  le sous-groupe de  $GL_m$  des automorphismes  $g$  de  $E_m$  tels que  $g(x) = x$  pour  $x \in E_n$  (où  $E_n$  est plongé dans  $E_m$  de la façon standard). On note aussi  $T_{n,m}$  le sous-groupe de  $GL_m$  image de  $S_{n,m}$  par la transposition.

*Remarque 5.5.2.* Comme le sous-groupe  $GL_n$  de  $GL_m$  normalise  $S_{n,m}$ , on peut voir le foncteur  $M \mapsto M^{S_{n,m}}$  (invariants sous l'action de  $S_{n,m}$ ) défini sur les  $GL_m$ -modules comme un sous-foncteur de la restriction  $R_n \dots R_{m-1} : \mathbb{F}_2[GL_m]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$ .

Dualement, on peut voir le foncteur  $M \mapsto M_{T_{n,m}}$  comme un quotient de cette restriction.

**Définition 5.5.3.** – On appelle *système de coefficients* une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $M_n$  est un  $GL_n$ -module à gauche, munie de morphismes de  $GL_n$ -modules  $M_n \rightarrow R_n(M_{n+1})$ .

– Un *morphisme de systèmes de coefficients* de  $((M_n), (r_n))$  vers  $((N_n), (s_n))$  est une suite  $(u_n)$  de morphismes  $u_n : M_n \rightarrow N_n$  de  $GL_n$ -modules rendant commutatif, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{r_n} & R_n(M_{n+1}) \\ u_n \downarrow & & \downarrow R_n(u_{n+1}) \\ N_n & \xrightarrow{s_n} & R_n(N_{n+1}). \end{array}$$

Cela permet de définir la *catégorie des systèmes de coefficients*, que nous noterons  $\mathit{Coef}$ .

**Proposition 5.5.4.** *Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}_{inj}$ , la suite  $(ev_n(F))$ , munie des morphismes  $F(E_n) \rightarrow F(E_{n+1})$  induits par l'inclusion  $l_n : E_n \hookrightarrow E_{n+1} \quad x \mapsto (x, 0)$ , est un système de coefficients, noté  $C(F)$ .*

*La functorialité de  $ev_n : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$  fait de  $C : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathbf{Coef}$  un foncteur. Ce foncteur est pleinement fidèle ; son image est constituée des systèmes de coefficients  $((M_n), (r_n))$  tels que  $im r_m r_{m-1} \dots r_n \subset M_{n+1}^{S_{n,m+1}}$  pour tous entiers  $n$  et  $m$  tels que  $0 \leq n \leq m$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de l'observation suivante : le squelette de la catégorie  $\mathcal{E}_{inj}^f$  constitué des espaces  $E_n$  est engendré par les inclusions  $l_n$  et les éléments des différents  $GL_n$ , soumis aux relations  $\alpha_n(g) \circ l_n = l_n \circ g$  pour  $g \in GL_n$ ,  $g \circ h = gh$  pour  $g, h \in GL_n$  et  $g \circ l_m \circ \dots \circ l_n = l_m \circ \dots \circ l_n$  pour  $g \in S_{n,m+1}$  (cf. [ML71], chapitre II, § 8).  $\square$

*Remarque 5.5.5.* Tous les systèmes de coefficients appartenant à l'image du foncteur  $C$  sont *centraux* au sens de [Dwy80], § 2.

**Proposition 5.5.6.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^1(i_n^!(M), i_{n+1}^!(N)) \simeq \mathrm{hom}_{GL_n}(M, N^{S_{n,n+1}})$$

*naturel en le  $GL_n$ -module  $M$  et le  $GL_{n+1}$ -module  $N$ .*

*De plus, l'épimorphisme de l'extension correspondant à un  $GL_n$ -morphisme  $a : M \rightarrow N^{S_{n,n+1}}$  est essentiel si et seulement si l'adjoint  $I_n(M) \rightarrow N$  au morphisme  $M \xrightarrow{a} N^{S_{n,n+1}} \hookrightarrow R_n(N)$  est surjectif.*

*Démonstration.* Par la proposition 5.5.4, une extension entre  $i_n^!(M)$  et  $i_{n+1}^!(N)$  correspond à un système de coefficients  $(A_i)$  tel que  $A_n \simeq M$ ,  $A_{n+1} \simeq N$ ,  $A_i = 0$  sinon, et que l'image de  $A_n$  dans  $R_n(A_{n+1})$  est incluse dans  $A_{n+1}^{S_{n,n+1}}$ . Un tel système de coefficients est déterminé, à isomorphisme près, par le morphisme structural  $A_n \rightarrow R_n(A_{n+1})$  à valeurs dans  $A_{n+1}^{S_{n,n+1}}$ , d'où la première partie de la proposition.

Étant donné un morphisme  $a : M \rightarrow N^{S_{n,n+1}}$ , notons  $u$  la composée  $M \xrightarrow{a} N^{S_{n,n+1}} \hookrightarrow R_n(N)$ . Un quotient de l'extension correspondante est la donnée d'un quotient  $M'$  de  $M$ , d'un quotient  $N'$  de  $N$  et d'un morphisme  $u' : M' \rightarrow R_n(N')$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & R_n(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{u'} & R_n(N') \end{array}$$

commute (en effet, par surjectivité des flèches verticales, cela impose  $im u' \subset N'^{S_{n,n+1}}$ ). Si  $M' = 0$ , cette condition équivaut à la nullité de la composée  $M \xrightarrow{u} R_n(N) \twoheadrightarrow R_n(N')$ , ou encore de l'adjoint  $I_n(M) \rightarrow N \twoheadrightarrow N'$ . Par conséquent, il existe un quotient de notre extension tel que  $M' = 0$  et  $N' \neq 0$  si et seulement si l'adjoint  $I_n(M) \rightarrow N$  à  $u$  est non surjectif, d'où la proposition.  $\square$

On peut donner une variante duale de la proposition 5.5.4 : la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  est équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des systèmes de coefficients « homologiques » (cf. [Dwy80]) ; la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  à une sous-catégorie pleine de la catégorie des systèmes de coefficients « cohomologiques ». Nous nous bornerons à donner la version duale de la proposition 5.5.6 et à en tirer quelques conséquences simples.

**Corollaire 5.5.7.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^1(i_{n+1}^!(M), i_n^!(N)) \simeq \mathrm{hom}_{GL_n}(M_{T_{n,n+1}}, N)$$

*naturel en le  $GL_{n+1}$ -module  $M$  et le  $GL_n$ -module  $N$ .*

*De plus, l'extension correspondant à un morphisme  $GL_n$ -équivariant  $a : M_{T_{n,n+1}} \rightarrow N$  est essentielle si et seulement si l'adjoint  $M \rightarrow C_n(N)$  à la composée  $R_n(M) \twoheadrightarrow M_{T_{n,n+1}} \xrightarrow{a} N$  est injectif.*

À titre d'application, nous donnons la structure du foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ .

**Notation 5.5.8.** Dans ce paragraphe,  $\mathbb{F}_2^{\geq i}$  désignera l'image du foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  de  $\mathcal{F}_{surj}^{\geq i}$  par le foncteur de prolongement par zéro  $\mathcal{P} : \mathcal{F}_{surj}^{\geq i} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ .

**Corollaire 5.5.9.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une suite exacte  $0 \rightarrow S_n^{surj} \rightarrow \mathbb{F}_2^{\geq n} \rightarrow \mathbb{F}_2^{\geq n+1} \rightarrow 0$ . De plus,  $S_n^{surj}$  est le socle de  $\mathbb{F}_2^{\geq n}$ .

Ainsi, l'objet  $\mathbb{F}_2$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  est unisériel, de suite de composition  $S_0^{surj}, S_1^{surj}, \dots, S_n^{surj}, \dots$

Ce résultat est à comparer avec le résultat fondamental sur la structure du foncteur  $\bar{I}$  de  $\mathcal{F}$  : la filtration polynomiale de ce foncteur est son unique suite de composition, et son  $n$ -ième quotient est  $p_n^{hom}(\bar{I}) \simeq \Lambda^n$ , qui correspond à la représentation triviale de  $GL_n$ . De plus,  $\bar{I}$  est le « plus petit » injectif indécomposable non constant de  $\mathcal{F}$ . Le foncteur  $\mathbb{F}_2 \simeq I_0^{surj}$  est le « plus petit » injectif indécomposable de  $\mathcal{F}_{surj}$  ; sa filtration canonique est son unique suite de composition, et son  $n$ -ième quotient est  $T_n^{hom}(\mathbb{F}_2) \simeq S_n^{surj}$  (cf. corollaire 5.3.11 et remarque 5.3.12), qui correspond à la représentation triviale de  $GL_n$  (noter qu'ici on a également un facteur pour  $n = 0$ ).

Le corollaire 5.5.9 interviendra de façon cruciale au paragraphe 8.5.1.

**Proposition 5.5.10.** Soient  $n$  un entier strictement positif,  $X$  (resp.  $Y$ ) un objet de  $\mathcal{F}_{surj}$  concentré en dimension  $n + 1$  (resp.  $n$ ), avec action de  $GL_{n+1}$  (resp.  $GL_n$ ) triviale. L'application

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^1(X, Y) \xrightarrow{\varpi_*} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\varpi(X), \varpi(Y))$$

induite par le foncteur exact  $\varpi$  est injective.

De plus, elle préserve les extensions essentielles.

*Démonstration.* Notons  $M = X(E_{n+1})$  et  $N = Y(E_n)$ . Soient  $u : M \rightarrow N$  une application linéaire et  $0 \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$  l'extension associée selon le corollaire 5.5.7 (puisque les actions des groupes linéaires sont triviales). Considérons un morphisme  $f : \varpi(A) \rightarrow F$  de  $\mathcal{F}$  dont la restriction à  $\varpi(Y)$  est injective.

On suppose dans un premier temps que  $u$  est injectif, ce qui équivaut à dire que l'extension associée est essentielle par le corollaire 5.5.7 (toujours en utilisant la trivialité des actions des groupes linéaires), et l'on établit que l'application linéaire  $f_V : \varpi(A)(V) \rightarrow F(V)$  est injective pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  par récurrence sur  $\dim V$ . C'est clair si  $\dim V \leq n$ , nous supposons donc  $\dim V > n$ .

Soit  $a$  un élément de  $\ker f_V$  ; si  $W$  (resp.  $B$ ) est un sous-espace de dimension  $n + 1$  (resp.  $n$ ) de  $V$ , notons  $x_W$  (resp.  $y_B$ ) l'élément de  $M$  (resp.  $N$ ) correspondant à la composante de  $a$  dans  $X(W) \simeq M$  (resp.  $Y(B) \simeq N$ ). Pour tout élément  $v$  non nul de  $V$ , l'hypothèse de récurrence montre que l'image de  $a$  dans  $\varpi(A)(V/v)$  est nulle. Soient  $H$  un sous-espace de dimension  $n$  de  $V/v$  et  $W$  son image réciproque dans  $V$  : la composante dans  $A(H)$  de cette image est

$$u(x_W) + \sum_{\substack{B \subset V \\ W = B \oplus v}} y_B = 0.$$

Étant donné un sous-espace  $W$  de dimension  $n + 1$  de  $V$ , faisons la somme des relations ainsi obtenues pour  $v \in W \setminus \{0\}$  : on obtient

$$u(x_W) + \sum_{\substack{v \in W \setminus \{0\}, B \subset W \\ W = B \oplus v}} y_B = 0,$$

soit

$$u(x_W) = \sum_{B \subset W} \text{Card}(W \setminus B) y_B$$

(somme prise sur les sous-espaces  $B$  de dimension  $n$  de  $W$ ).

Mais comme  $n > 0$ , les cardinaux qui apparaissent dans cette somme, égaux à  $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ , sont *pairs*, d'où  $u(x_W) = 0$ .

Comme  $u$  est supposé injectif, cela donne  $x_W = 0$ ; autrement dit,  $a \in \varpi(Y)(V)$ . Puisque la restriction à  $\varpi(Y)(V)$  de  $f_V$  est par hypothèse injective, il vient finalement  $a = 0$ . Ainsi, l'application  $\varpi_*$  de l'énoncé respecte les extensions essentielles.

Pour démontrer qu'elle est injective, on raisonne de façon analogue en supposant que  $f : \varpi(A) \rightarrow \varpi(Y)$  est une rétraction de  $\varpi(Y) \hookrightarrow \varpi(A)$ ; on voit que l'image de  $\ker f_{E_{n+1}}$  par la projection  $\varpi(A)(E_{n+1}) \twoheadrightarrow \varpi(Y)(E_{n+1}) \simeq M$  est incluse dans  $\ker u$ , ce qui impose la nullité de  $u$  i.e. la trivialité de l'extension initiale.  $\square$

*Remarque 5.5.11.* Le corollaire 5.5.9 et la proposition 5.5.10 s'interprètent naturellement en introduisant le carquois (cf. remarque 4.3.4) associé à l'ensemble ordonné  $\mathbb{N}$  : ses objets sont les entiers naturels,  $\text{hom}_{\mathbb{N}}(i, j)$  a un élément si  $i \leq j$  et zéro sinon (nous noterons encore  $\mathbb{N}$  cette catégorie). En effet, le foncteur  $\mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathbb{N}^{op}$  qui associe à un espace vectoriel sa dimension induit par précomposition un foncteur  $\mathbf{Fct}(\mathbb{N}^{op}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$  dont l'image est constituée des foncteurs  $F$  tels que le  $GL_n$ -module  $\text{ev}_n(F)$  est trivial pour tout entier  $n$ . Pour l'étude de ces foncteurs, la difficulté, intrinsèque à la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$ , liée aux représentations des groupes linéaires disparaît, ce qui permet d'utiliser des raisonnements purement combinatoires.

**Corollaire 5.5.12.** *Le monomorphisme  $\bar{P} \hookrightarrow \overline{\varpi(\mathbb{F}_2)}$  est essentiel.*

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient en combinant la proposition 5.5.10 et le corollaire 5.5.9.  $\square$

## 5.6 Propriétés des foncteurs d'oubli $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$

L'idée fondamentale développée dans les paragraphes 5.6.1 et 5.6.3 est que modulo les objets localement finis de  $\mathcal{F}_{inj}$ , les objets de l'image du foncteur d'oubli  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$  sont de bons foncteurs qui se comportent comme dans  $\mathcal{F}$ . Le paragraphe 5.6.2 revient sur le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  via son image par le foncteur  $\varpi$ .

### 5.6.1 Résultats d'annulation cohomologique

**Lemme 5.6.1.** *Il existe dans  $\mathcal{F}_{surj}$  un épimorphisme scindé  $o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj} \twoheadrightarrow o(F)$  naturel en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$  et  $F$  de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* On définit un morphisme naturel  $o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj} \rightarrow o(F)$  comme l'adjoint de la projection canonique

$$\varpi(o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}) \simeq \varpi(o(F)) \otimes \varpi(P_V^{surj}) \simeq \varpi(o(F)) \otimes P_V \twoheadrightarrow \varpi(o(F)) \rightarrow F$$

déduit de l'épimorphisme  $P_V \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$  et de la coïté de l'adjonction, via la proposition 5.4.3.

D'autre part, l'épimorphisme  $V \twoheadrightarrow 0$  induit un morphisme  $\text{Is}_0 \simeq P_0^{surj} \rightarrow P_V^{surj}$  dans  $\mathcal{F}_{surj}$ , d'où un morphisme naturel  $o(F) \simeq o(F) \tilde{\otimes} \text{Is}_0 \rightarrow o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}$ .

Le morphisme composée  $o(F) \rightarrow o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj} \rightarrow o(F)$  est adjoint à la flèche

$$\varpi o(F) \rightarrow \varpi(o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}) \simeq \varpi o(F) \otimes P_V \rightarrow F$$

composée du morphisme induit par l'inclusion  $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow P_V$  et du morphisme décrit précédemment. Comme la composée  $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow P_V \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$  est l'identité, cette composée est la coïté de l'adjonction, ce qui établit le lemme.  $\square$

**Proposition 5.6.2.** *Soient  $X$  un objet fini de  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$ . On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F), X) = 0.$$

*Démonstration.* Par la proposition 5.3.7, il existe un espace vectoriel de dimension finie  $V$  tel que  $\delta_V(X) = 0$ . La proposition 5.3.3 et le corollaire 1.2.8 montrent alors que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F) \otimes P_V^{surj}, X) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F), \delta_V(X)) = 0$ . Mais  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F), X)$  est facteur direct de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F) \otimes P_V^{surj}, X)$  par le lemme 5.6.1, d'où la proposition.  $\square$

Dans la suite, nous traitons de la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$ , plus naturelle que  $\mathcal{F}_{surj}$  pour les considérations du paragraphe suivant. On note  $\mathcal{F}_{inj}^{lf}$  pour  $(\mathcal{F}_{inj})^{lf}$  la sous-catégorie des objets localement finis de  $\mathcal{F}_{inj}$ . Celle-ci est *épaisse* parce que les objets finis de  $\mathcal{F}_{inj}$  sont de présentation finie (cf. corollaire 5.3.10), de sorte que l'on peut appliquer la proposition 2.5.1.

**Proposition 5.6.3.** *Soient  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{F}_{inj}$  et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$ . On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(X, o_{inj}(F)) = 0.$$

*Autrement dit,  $o_{inj}(F)$  est  $\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ -parfait.*

*Démonstration.* Le cas où  $X$  est fini est dual du précédent. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite, d'après le corollaire 2.5.9.  $\square$

**Proposition 5.6.4** (Suslin). *Soient  $F$  et  $G$  deux objets de  $\mathcal{F}$ ; on suppose  $F$  fini. Alors le morphisme gradué naturel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}(F), o_{inj}(G))$  est un isomorphisme.*

Nous établirons cette propriété à l'aide des catégories de foncteurs en grassmanniennes dans la deuxième partie (§ 8.5.4) — le lecteur notera que la section 5.6 n'y est pas utilisée. Y apparaîtra la raison pour laquelle il nous est indispensable de considérer à la fois les catégories  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F}_{inj}$ .

La première démonstration de ce résultat est donnée par Suslin dans l'appendice de [FFSS99]; il s'agit de l'une des deux étapes pour établir l'isomorphisme entre l'homologie dans  $\mathcal{F}$  et l'homologie stable du groupe linéaire (ou  $K$ -théorie stable) pour les systèmes de coefficients associés à des foncteurs finis (résultat établi indépendamment par Betley dans [Bet99]). Scorichenko a généralisé le résultat de Suslin; sa méthode, plus conceptuelle, utilise également la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$  — cf. remarque 5.0.3.

## 5.6.2 Le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(\mathbb{F}_2, \cdot)$ et l'algèbre $A_{Gr}$

Nous avons donné au paragraphe 5.5 la structure de base du foncteur non nul le plus simple de l'image de  $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ , le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$ . Nous nous proposons maintenant d'étudier les endomorphismes de son image par le foncteur  $\varpi$ .

**Proposition 5.6.5.** *Le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(\mathbb{F}_2, \cdot)$  est isomorphe à  $\lim_{n \in \mathbb{N}} \text{ev}_n^{GL_n}$ , où :*

- l'on désigne par  $\text{ev}_n^{GL_n}$  le foncteur obtenu en prenant les invariants de  $\text{ev}_n$  sous l'action naturelle de  $GL_n$ ,
- la limite est relative aux transformations naturelles  $\text{ev}_n^{GL_n} \rightarrow \text{ev}_m^{GL_m}$  (pour  $n \geq m$ ) induites par la projection  $E_n \rightarrow E_m$  sur les  $m$  premières coordonnées.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de l'énoncé dual de la proposition 5.5.4.  $\square$

*Remarque 5.6.6.* On déduit de cette proposition une suite exacte

$$0 \rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}}^1 H^{i-1}(GL_n, \text{ev}_n(X)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^i(\mathbb{F}_2, X) \rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} H^i(GL_n, \text{ev}_n(X)) \rightarrow 0$$

naturelle en  $X$  pour tout entier  $i$ .

Lorsque  $X$  est l'image par le foncteur  $o$  d'un objet fini de  $\mathcal{F}$ , le résultat fondamental de stabilisation de Dwyer (dans sa variante cohomologique) — proposition 1.1 de [Dwy80] — montre que ces groupes de cohomologie stabilisent; en particulier, le terme en  $\lim^1$  s'annule. Par la proposition 5.6.4, on en déduit alors que  $H^i(GL_n, \text{ev}_n(X)) = 0$  pour  $i$  assez grand (à  $n$  fixé). C'est le cas des coefficients constants dans le théorème de Suslin (théorème A.1 de [FFSS99]; voir aussi [FS97]).

**Définition 5.6.7** (Algèbre en grassmanniennes). On appelle *algèbre en grassmanniennes*, et l'on note  $A_{\mathcal{G}_r}$ , la  $\mathbb{F}_2$ -algèbre  $\text{End}_{\mathcal{F}}(\varpi(\mathbb{F}_2))$ . L'*algèbre en grassmanniennes réduite*, notée  $\overline{A}_{\mathcal{G}_r}$ , est définie comme  $\text{End}_{\mathcal{F}}(\overline{\varpi(\mathbb{F}_2)})$ .

Le scindement  $\varpi(\mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \overline{\varpi(\mathbb{F}_2)}$  fournit donc un isomorphisme d'algèbres  $A_{\mathcal{G}_r} \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \overline{A}_{\mathcal{G}_r}$ .

Pour déterminer explicitement ces algèbres, nous emploierons le lemme combinatoire élémentaire suivant.

**Lemme 5.6.8.** *Soient  $d$  et  $i$  deux entiers naturels.*

1. *Soit  $a$  un élément non nul de  $E_d$ . Les classes d'équivalences de la relation définie par  $W \sim W'$  si  $W + a = W' + a$  sur l'ensemble des sous-espaces  $W$  de  $E_d$  de dimension  $i$  ne contenant pas  $a$  sont de cardinal  $2^i$ , donc pair si  $i > 0$ .*
2. *Si  $i \leq d$ , l'ensemble des sous-espaces de dimension  $i$  de  $E_d$  est de cardinal impair.*

*Démonstration.* Pour le premier point, on note que le groupe  $GL(W \oplus a, a)$  des automorphismes  $u$  de  $W \oplus a$  tels que  $u(a) = a$  opère transitivement sur la classe d'équivalence de  $W$ , le stabilisateur de  $W$  étant  $GL(W)$ . Le cardinal de cette classe est donc celui de  $GL(W \oplus a, a)/GL(W)$ , soit  $2^{\dim W} = 2^i$ .

D'autre part, le cardinal de l'ensemble  $L_i(d)$  des familles libres ordonnées à  $i$  éléments de  $E_d$  est

$$\prod_{j=0}^{i-1} (2^d - 2^j).$$

Comme l'ensemble  $G_i(d)$  des sous-espaces de dimension  $i$  de  $E_d$  s'identifie au quotient de  $L_i(d)$  par l'action libre de  $GL_i$ , on a

$$\text{Card } G_i(d) = \frac{\text{Card } L_i(d)}{\text{Card } GL_i} = \frac{\text{Card } L_i(d)}{\text{Card } L_i(i)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{2^d - 2^j}{2^i - 2^j} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{2^{d-j} - 1}{2^{i-j} - 1}$$

qui est un entier impair pour  $i \leq d$ . □

**Proposition 5.6.9.** *La loi  $*$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  définie par*

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} f(i)g(j) + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j > 0}} f(i)g(j)$$

*fait de  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre isomorphe à  $A_{\mathcal{G}_r}$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 5.4.3, on a un isomorphisme (linéaire) d'adjonction

$$A_{\mathcal{G}_r} = \text{End}_{\mathcal{F}}(\varpi(\mathbb{F}_2)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(\mathbb{F}_2, \sigma\varpi(\mathbb{F}_2)).$$

Le  $GL_n$ -module  $\text{ev}_n(\sigma\varpi(\mathbb{F}_2))$  est librement engendré comme  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel par les sous-espaces vectoriels de  $E_n$ , sur lesquels  $GL_n$  agit tautologiquement. Le sous-espace vectoriel  $\text{ev}_n(\sigma\varpi(\mathbb{F}_2))^{GL_n}$  de  $\varpi(\mathbb{F}_2)(E_n)$  a pour base  $s_0^n, s_1^n, \dots, s_n^n$ , où  $s_i^n$  désigne la somme des générateurs canoniques  $[B]$  associés à un sous-espace  $B$  de dimension  $i$  de  $E_n$ . L'application linéaire induite par la projection  $E_{n+1} \rightarrow E_n$  envoie  $s_i^{n+1}$  sur  $s_{i-1}^n$  si  $i > 0$  et  $s_0^{n+1}$  sur  $s_0^n$ , grâce à la première assertion du lemme 5.6.8.

Par la proposition 5.6.5, on en déduit une identification entre  $A_{\mathcal{G}_r}$  et la limite  $L$  des espaces vectoriels  $\mathbb{F}_2^{n+1}$  (dont nous continuerons à noter  $s_0^n, s_1^n, \dots, s_n^n$  une base privilégiée; nous noterons  $l_0^n, l_1^n, \dots, l_n^n$  la base duale) relativement aux applications linéaires  $f_n : \mathbb{F}_2^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}_2^n$  données par  $s_i^n \mapsto s_{i-1}^{n-1}$  pour  $i > 0$  et  $s_0^n \mapsto s_0^{n-1}$ .

L'application linéaire

$$a : L \rightarrow \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (l_0^n(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

est bijective ; sa réciproque est donnée par

$$b : \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \rightarrow L \quad (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left( t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n \right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

En effet,  $b$  prend bien ses valeurs dans  $L$  parce que

$$f_n \left( t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n \right) = t_n s_0^{n-1} + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^{n-1} = t_{n-1} s_0^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{n-1-j} + t_{n-j}) s_j^{n-1} ,$$

l'égalité  $a \circ b = id$  est immédiate, et  $b \circ a = id$  se déduit facilement des remarques précédentes.

On a ainsi obtenu une identification de  $A_{G_r}$  et  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  comme *espaces vectoriels* ; il reste à lire la structure multiplicative de  $A_{G_r}$  dans les isomorphismes précédents.

Soient  $u$  un endomorphisme de  $\varpi(\mathbb{F}_2)$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'élément de  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  correspondant. L'application linéaire  $u_{E_n}$  envoie le générateur  $[E_n] = s_n^n$  sur  $t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n$ , d'après ce qui précède. Par conséquent, pour tout sous-espace  $W$  de  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ , le générateur  $[W]$  de  $\varpi(\mathbb{F}_2)(V)$  est envoyé par  $u(V)$  sur  $t_m s_0^m + \sum_{i=1}^m (t_{m-i} + t_{m-i+1}) s_i^m$ , où  $m = \dim W$  et  $s_i(W)$  est la somme des générateurs de  $\varpi(\mathbb{F}_2)(V)$  associés aux sous-espaces de dimension  $i$  de  $V$ . On en déduit que  $u_{E_n}$  envoie  $s_m^n$  sur  $t_m s_0^n + \sum_{i=1}^m (t_{m-i} + t_{m-i+1}) s_i^n$  par la seconde assertion du lemme 5.6.8, puisque le coefficient d'un générateur  $[B]$  (où  $\dim B = i$ ) dans cette image est égal au cardinal de l'ensemble des sous-espaces  $W$  de  $E_n$  de dimension  $m$  contenant  $B$ , multiplié par  $t_0$  si  $i = 0$ ,  $t_{m-i} + t_{m-i+1}$  si  $1 \leq i \leq m$ , et 0 sinon. Le cardinal qui intervient n'est autre que celui des sous-espaces de dimension  $m - i$  de  $E_n/B$ , impair d'après le point invoqué, d'où notre assertion.

Soient  $u'$  un autre endomorphisme de  $\varpi(\mathbb{F}_2)$  et  $u'' = u'u$  ; notons  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t''_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les éléments de  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  correspondant à  $u'$  et  $u''$  respectivement. On a

$$u''(E_n)([E_n]) = u' \left( t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n \right) = t_n t'_0 s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) \left( t'_i s_0^n + \sum_{j=1}^i (t'_{i-j} + t'_{i-j+1}) s_j^n \right) ,$$

d'où en identifiant le coefficient de  $s_0^n$

$$t''_n = t_n t'_0 + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) t'_i = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} t_i t'_j + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j > 0}} t_i t'_j ,$$

ce qui achève la démonstration. □

**Corollaire 5.6.10.** *La loi  $*$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}^*}$  définie par*

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} f(i)g(j) + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j \geq 1}} f(i)g(j)$$

*fait de  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}^*}$  une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre isomorphe à  $\overline{A}_{G_r}$ .*

*Démonstration.* Dans l'isomorphisme précédent,  $\overline{A}_{G_r}$  correspond à l'idéal de  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  des fonctions nulles en 0. □

Dans la suite, nous *identifierons* les algèbres  $A_{G_r}$  et  $\overline{A}_{G_r}$  à  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  et  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}^*}$  (munies de la loi  $*$ ) respectivement.

**Corollaire 5.6.11.** *L'algèbre  $\overline{A}_{G_r}$  est une algèbre de séries formelles sur l'élément  $\tau$  donné par la fonction  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{F}_2$  associant 0 à 1 et 1 à  $n \geq 2$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $f \in \overline{A}_{G_r}$ , on a  $\tau f(n) = f(n-1)$  si  $n \geq 2$  et  $\tau f(1) = 0$ . On en déduit que  $\tau^k$  est la fonction  $n \mapsto 1$  si  $n \geq k+1$ , 0 sinon. Cela fournit aussitôt le résultat. □

Explicitement, l'isomorphisme est donné par

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \tau^i \mapsto \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

*Remarque 5.6.12.* 1. En reprenant la démonstration de la proposition 5.6.9, on voit que l'endomorphisme  $\tau$  envoie un générateur canonique  $[W]$  sur

$$\sum_{\substack{B \subset W \\ \text{codim}_W B=1}} [B].$$

2. Le corollaire 5.6.11 montre que le foncteur  $\overline{\varpi}(\mathbb{F}_2)$  est indécomposable, ce qui découle aussi du corollaire 5.5.12.

3. Malgré le corollaire 5.6.11, il pourra être utile de conserver la description de  $A_{G_r}$  donnée à la proposition 5.6.9. Cela apparaîtra clairement à la remarque 8.5.38.3.

### 5.6.3 La catégorie $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$

Ce paragraphe repose essentiellement sur le § 5.6.1 et l'observation immédiate suivante.

**Lemme 5.6.13.** *Il existe dans  $\mathcal{F}_{inj}$  un isomorphisme  $\delta o_{inj}(F) \simeq o_{inj} \tilde{\Delta}(F) \simeq o_{inj}(F) \oplus o_{inj}(\Delta F)$  naturel en l'objet  $F$  de  $\mathcal{F}$ .*

**Notation 5.6.14.** Nous désignerons par  $p_F^{inj} : \delta o_{inj}(F) \rightarrow o_{inj}(F)$  l'épimorphisme scindé donné par le lemme précédent.

Si  $n$  est un entier positif, nous noterons  $p_{n,F}^{inj} : \delta^n o_{inj}(F) \rightarrow o_{inj}(F)$  le morphisme

$$\delta^n o_{inj}(F) \xrightarrow{\delta^{n-1}(p_F^{inj})} \delta^n o_{inj}(F) \xrightarrow{\delta^{n-2}(p_F^{inj})} \dots \xrightarrow{\delta(p_F^{inj})} \delta o_{inj}(F) \xrightarrow{p_F^{inj}} o_{inj}(F).$$

On peut aussi le voir comme la projection  $\delta^n o_{inj}(F) \simeq o_{inj}(\tilde{\Delta}^n F) \rightarrow o_{inj}(F)$  induite par l'épimorphisme  $\tilde{\Delta}^n F \simeq \Delta_{E_n} F \rightarrow \Delta_0 F \simeq F$  procuré par l'application linéaire  $E_n \rightarrow 0$ .

**Proposition 5.6.15.** *Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $X$  un sous-objet de  $o_{inj}(F)$ .*

1. *La suite  $(p_{n,F}^{inj}(\delta^n(X)))_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-objets de  $o_{inj}(F)$  est croissante; nous noterons  $Y$  sa réunion. De plus, cette suite stationne si  $F$  est un objet noethérien de  $\mathcal{F}$ .*
2. *Il existe un sous-objet  $G$  de  $F$  tel que  $o_{inj}(G) = Y$ . De plus,  $Y$  est le plus petit sous-objet de  $o_{inj}(F)$  de cette forme contenant  $X$ .*
3. *Si  $F$  est localement fini, on a  $\text{hom}(\delta^n(Y/X), o_{inj}(A)) = 0$  pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{F}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* Pour tous  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{inj}^f$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n,F}^{inj}(\delta^n(X))(V)$  est l'image du morphisme

$$X(V \oplus E_n) \hookrightarrow F(V \oplus E_n) \twoheadrightarrow F(V).$$

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X(V \oplus E_n) & \hookrightarrow & F(V \oplus E_n) & \twoheadrightarrow & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ X(V \oplus E_m) & \hookrightarrow & F(V \oplus E_m) & \twoheadrightarrow & F(V) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont induites par l'inclusion  $E_n \hookrightarrow E_m$  (où  $m \geq n$ ) commute, cela montre que la suite  $(p_{n,F}^{inj}(\delta^n(X)))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Admettant la seconde assertion, si  $F$  est noethérien,



alors  $G$  est de type fini, donc  $o_{inj}(G)$  aussi (cf. proposition 5.4.6), ce qui entraîne que cette suite stationne.

Comme toute flèche de  $\mathcal{E}^f$  se factorise en épimorphisme, qui est toujours isomorphe à une projection  $V \oplus E_n \rightarrow V$ , suivi d'un morphisme de  $\mathcal{E}_{inj}^f$ , les sous-foncteurs de  $F$  s'identifient canoniquement aux sous-foncteurs  $X$  de  $o_{inj}(F)$  tels que  $p_{n,F}^{inj}(\delta^n(X)) \subset X$  pour tout  $n$ . On en déduit la deuxième assertion, puisque  $p_{m,F}^{inj}(\delta^m(p_{n,F}^{inj}(\delta^n(X)))) = p_{n+m,F}^{inj}(\delta^{n+m}(X))$ .

Supposons maintenant  $F$ , donc  $G$ , localement fini. Soient  $A$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $u : Y/X \rightarrow o_{inj}(A)$  un morphisme de  $\mathcal{F}_{inj}$ . Par la proposition 5.6.4, le morphisme  $o_{inj}(G) = Y \rightarrow Y/X \xrightarrow{u} o_{inj}(A)$  est induit par une flèche  $v : G \rightarrow F$  de  $\mathcal{F}$ . La nullité de la composée  $X \hookrightarrow o_{inj}(G) \xrightarrow{o_{inj}(v)} o_{inj}(F)$  et l'exactitude de  $o_{inj}$  donnent  $X \subset o_{inj}(\ker v)$ . Par la deuxième assertion, on en déduit  $G \subset \ker v$ , i.e.  $v = 0$ , donc  $u = 0$ . Cela démontre la dernière assertion dans le cas  $n = 0$ . Le cas général s'en déduit en considérant le sous-objet  $\delta^n(X)$  de  $\delta^n(o_{inj}(F)) \simeq o_{inj}(\tilde{\Delta}^n F)$ . En effet,  $p_{m,\tilde{\Delta}^n F}^{inj}(\delta^m(\delta^n X)) = \delta^n(p_{m,F}^{inj}(\delta^m(X)))$  — évalués sur un espace  $V$ , ces deux foncteurs sont l'image de

$$X(V \oplus E_n \oplus E_m) \hookrightarrow F(V \oplus E_n \oplus E_m) \twoheadrightarrow F(V \oplus E_n).$$

Cela termine la démonstration.  $\square$

**Lemme 5.6.16.** *Le foncteur  $\delta$  induit un endofoncteur exact et fidèle de  $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ .*

*Démonstration.* L'endofoncteur  $\delta$  de  $\mathcal{F}_{inj}$  préserve les objets finis (cf. proposition 5.3.8) et commute aux colimites, il conserve donc  $\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ . Comme il est exact, il induit un endofoncteur exact de  $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ .

Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{inj}$  tel que  $\delta(X)$  est localement fini. Si  $X$  est de type fini, alors il en est de même pour  $\delta(X)$  par le corollaire 5.3.5. Mais un objet localement fini et de type fini est fini (proposition 2.6.21), et la proposition 5.3.8 montre que  $X$  est fini.

Dans le cas général, ce raisonnement montre que tout sous-objet de type fini de  $X$  est fini. Comme  $X$  est réunion de ses sous-objets de type fini, on en déduit que  $X$  est localement fini, ce qui établit la fidélité de l'endofoncteur exact de  $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$  induit par  $\delta$ .  $\square$

**Théorème 5.6.17.** *Le foncteur  $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$  induit un foncteur exact et pleinement fidèle de  $\mathcal{F}^f$  sur une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ .*

*Démonstration.* Si  $F$  et  $G$  sont deux objets finis de  $\mathcal{F}$ , les morphismes naturels

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}(F), o_{inj}(G)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}}^*(\overline{o_{inj}(F)}, \overline{o_{inj}(G)})$$

(où l'on note  $\bar{A}$  l'image dans  $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$  d'un objet  $A$  de  $\mathcal{F}_{inj}$ ) sont des isomorphismes — le premier grâce au résultat de Suslin 5.6.4, le second par la proposition 5.6.3. Par conséquent, le foncteur exact  $\mathfrak{I} : \mathcal{F}^f \rightarrow \mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$  induit par  $o_{inj}$  est pleinement fidèle et son image est stable par extensions. Il suffit donc de montrer que pour tout foncteur fini  $F$  de degré  $d$  de  $\mathcal{F}$  et tout sous-objet  $X$  de  $o_{inj}(F)$ , il existe un foncteur fini  $G$  de degré  $d$  tel que  $\mathfrak{I}(G) \simeq \bar{X}$ , assertion que l'on établit par récurrence sur  $d$ . L'assertion étant triviale pour  $d < 0$ , on suppose  $d \geq 0$ .

Soient  $G$  et  $Y = o_{inj}(G)$  les sous-objets de  $F$  et  $o_{inj}(G)$  respectivement associés à  $X$  comme dans la proposition 5.6.15. Comme  $F$  est fini, donc noethérien, il existe un entier  $n$  tel que  $p_{n,F}^{inj}(\delta^n(X)) = Y = p_{n,F}^{inj}(\delta^n(Y))$ . Par conséquent,  $\delta^n(Y)/\delta^n(X) \simeq \delta^n(Y/X)$  est un sous-quotient de  $\ker p_{n,F}^{inj} \simeq o_{inj}(\tilde{\Delta}^n F/F)$ . Comme  $F$  est non nul, le degré de  $\tilde{\Delta}^n F/F$  est strictement inférieur à  $d$ , donc l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un objet fini  $H$  de  $\mathcal{F}$  de degré strictement inférieur à  $d$  tel que  $o_{inj}(H) \simeq \delta^n(Y/X)$ .

Mais on a

$$\text{hom}_{\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}}(\overline{\delta^n(Y/X)}, \overline{o_{inj}(H)}) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}_{inj}}(\delta^n(Y/X), o_{inj}(H)) = 0$$

par les propositions 5.6.3 et 5.6.15, d'où  $\overline{\delta^n(Y/X)} = 0$ . Par le lemme 5.6.16, on en déduit  $\bar{Y/X} = 0$ , soit  $\bar{X} \simeq \overline{o_{inj}(G)}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Deuxième partie

Catégories de foncteurs en  
grassmanniennes



## Chapitre 6

# Définition des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ , $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r,I}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$

Ce chapitre introduit des catégories de foncteurs étroitement reliées à  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$  par l'intermédiaire de nombreux foncteurs ayant de « bonnes propriétés » ; nous les avons appelées *catégories de foncteurs en grassmanniennes*, car leur source fait intervenir, outre un espace vectoriel de dimension finie, un élément d'une de ses grassmanniennes (ou d'un ensemble analogue). Le résultat formel et élémentaire, mais fondamental, selon lequel la catégorie des  $\bar{G}(n)$ -comodules est canoniquement équivalente à une catégorie de foncteurs explicite, nous a amenés à étudier de manière approfondie ces nouvelles catégories et à comprendre leur rôle dans l'étude de la conjecture artinienne.

L'importance de l'existence d'une structure d'algèbre de Boole sur les foncteurs  $\bar{D}(n)$  (duals des  $\bar{G}(n)$ ) associés aux grassmanniennes et de la structure de  $\bar{D}(n)$ -module sur certains foncteurs a été mise en évidence par Powell dans [Pow98c] (§ 7). Les foncteurs d'*intégrale en grassmanniennes* introduits dans ce chapitre fourniront au chapitre 8 un cadre naturel et efficace pour énoncer des versions très fortes de la conjecture artinienne et améliorer les résultats connus sur le sujet.

La première section présente dans un cadre général la description fonctorielle de catégories de comodules, évoquées ci-dessus pour les foncteurs  $\bar{G}(n)$ . La deuxième section introduit les catégories sources des catégories de foncteurs en grassmanniennes, tandis que la dernière section donne la définition et les premières propriétés de ces catégories de foncteurs, dont les plus importantes entrent dans le cadre développé dans la section 6.1.

### 6.1 Catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole

L'étude de catégories de modules ou de comodules dans des contextes analogues à celui de la catégorie  $\mathcal{F}$ , et dont nous présentons un cas particulier fondamental, celui où la (co)algèbre de base est une (co)algèbre de Boole, dans le cadre de catégories de foncteurs quelconques, remonte aux travaux des années 90 sur les modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo  $p$ . Ici,  $p$  désigne un nombre premier ; dans cette section, nous ne nous limitons plus à la caractéristique 2, les constructions que nous développons étant indépendantes du corps de base.

Dans [LZ95], Lannes et Zarati considèrent la catégorie des modules instables  $M$  munis d'une structure de module sur la cohomologie  $H^*V$  d'un  $p$ -groupe abélien élémentaire  $V$ , les deux structures étant astreintes à satisfaire la condition de compatibilité suivante : l'action  $H^*V \otimes M \rightarrow M$  de  $H^*V$  sur  $M$  est linéaire sur l'algèbre de Steenrod. L'introduction de cette catégorie est motivée par le fait que la cohomologie équivariante (modulo  $p$ ) d'un espace topologique muni d'une action

de  $V$  hérite naturellement d'une structure de  $H^*V$ -module vérifiant cette condition.

Soit  $\mathcal{U}$  la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod ; Lannes et Zarati notent  $H^*V\text{-}\mathcal{U}$  la catégorie de  $H^*V$ -modules précédente. Le foncteur  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  de [HLS93] commutant au produit tensoriel, tout morphisme  $H^*V \otimes M \rightarrow M$  de  $\mathcal{U}$  induit un morphisme  $I_V \otimes f(M) \rightarrow f(M)$  dans  $\mathcal{F}$  — on rappelle que  $f(H^*V) = I_V$ . Ainsi,  $f$  induit un foncteur de la catégorie  $H^*V\text{-}\mathcal{U}$  vers la catégorie des  $I_V$ -modules de  $\mathcal{F}$ . On remarque que la structure d'algèbre de la cohomologie  $H^*V$  induit via  $f$  la structure d'algèbre de Boole standard sur l'injectif  $I_V : E \mapsto \mathbb{F}_2^{\text{hom}(E,V)}$  (cf. [HLS93], partie II). On peut même voir facilement que l'équivalence de catégories  $\mathcal{F}_\omega \simeq \mathcal{U}/\mathcal{N}il$  induite par  $f$  (cf. [HLS93], partie I) induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie des  $I_V$ -modules de  $\mathcal{F}_\omega$  et le quotient de  $H^*V\text{-}\mathcal{U}$  par la sous-catégorie épaisse des objets dont le module instable sous-jacent est nilpotent (tout se passe bien car le module instable  $H^*V$  est *nilfermé*). Comme les résultats de [LZ95] montrent que la catégorie  $H^*V\text{-}\mathcal{U}$  possède un comportement analogue à  $\mathcal{U}$ , on s'attend à ce que la catégorie des  $I_V$ -modules de  $\mathcal{F}$  soit raisonnablement intelligible à partir de la catégorie  $\mathcal{F}$ .

Dans [HLS95], Henn, Lannes et Schwartz s'intéressent, à la suite de travaux de Rector ([Rec84]), à des catégories similaires, également dans le but d'étudier la cohomologie équivariante. Ils considèrent notamment (§4) la catégorie  $\mathcal{S}(K)$  suivante associée à une algèbre instable  $K$  sur l'algèbre de Steenrod — rappelons que l'on note traditionnellement  $\mathcal{K}$  la catégorie de ces algèbres. Les objets de  $\mathcal{S}(K)$  sont les paires  $(V, \varphi)$  formées d'un objet  $V$  de  $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}^f$  (regardé comme un  $p$ -groupe abélien élémentaire) et d'un morphisme  $\varphi : K \rightarrow H^*V$  de  $\mathcal{K}$ . Les morphismes  $(V_1, \varphi_1) \rightarrow (V_2, \varphi_2)$  de  $\mathcal{S}(K)$  sont les morphismes  $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$  de  $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}^f$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi_1} & H^*V_1 \\ & \searrow \varphi_2 & \uparrow \alpha^* \\ & & H^*V_2 \end{array}$$

commute. Autrement dit, selon notre notation 1.1.18,  $\mathcal{S}(K)$  est la catégorie  $(\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}^f)_{/hK}$ , où  $hK : (\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}^f)^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  désigne le foncteur composé de  $H^* : (\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{K}$  et de  $\text{hom}_{\mathcal{K}}(K, \cdot) : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . La catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{S}(K), \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p})$  apparaît comme catégorie auxiliaire dans le §4 de [HLS95] (où elle est notée  $\mathcal{E}_\infty^{\mathcal{S}(K)}$ ) ; c'est le type même de catégorie que nous considérerons dans notre §6.1.3.

Les idées sous-jacentes relatives aux algèbres instables booléennes présentes dans les articles [HLS93] et [LZ95] sont dues à J. Lannes, qui les a inaugurées dans l'appendice de [LZ87].

**Convention 6.1.1.** Dans toute cette section,  $k$  désigne un corps commutatif et  $\mathcal{I}$  une catégorie essentiellement petite.

### 6.1.1 La catégorie de comodules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$

**Convention 6.1.2.** Dans ce paragraphe,  $X$  désigne un foncteur de  $\mathcal{I}$  vers  $\mathbf{Ens}$ .

On rappelle que la catégorie  $\mathcal{I}_{\setminus X}$  des objets  $E$  de  $\mathcal{I}$  munis d'un élément de  $X(E)$  a été définie dans la notation 1.1.15 ; elle est munie d'un foncteur d'oubli  $\mathcal{O}_{\mathcal{I}, X} : \mathcal{I}_{\setminus X} \rightarrow \mathcal{I}$ .

**Notation 6.1.3.** Nous désignerons par  $\Upsilon_X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  le foncteur de précomposition par  $\mathcal{O}_{\mathcal{I}, X}$ .

Ainsi (cf. proposition 3.1.14),  $\Upsilon_X$  est un foncteur exact qui commute aux limites, aux colimites et au produit tensoriel. Dans le cas où  $X$  prend ses valeurs dans les ensembles non vides,  $\mathcal{O}_{\mathcal{I}, X}$  est essentiellement surjectif, donc  $\Upsilon_X$  est fidèle.

**Proposition et définition 6.1.4.** Il existe un foncteur exact et fidèle, appelé foncteur de  $X$ -intégrale et noté  $\Omega_X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , défini de la façon suivante.

– Si  $F$  est un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  et  $E$  un objet de  $\mathcal{I}$ , on pose

$$(\Omega_X(F))(E) = \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x).$$

- Si  $F$  est un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  et  $E \xrightarrow{f} E'$  une flèche de  $\mathcal{I}$ , et si  $x$  et  $x'$  sont des éléments respectifs de  $X(E)$  et  $X(E')$ , la composante  $F(E, x) \rightarrow F(E', x')$  de  $(\Omega_X(F))(f)$  est égale à  $F(f)$  si  $X(f)(x) = x'$ , et à 0 sinon.
- Si  $F \xrightarrow{u} G$  est une flèche de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ , le morphisme  $\Omega_X(u) : \Omega_X(F) \rightarrow \Omega_X(G)$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est défini, sur l'objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , comme la somme directe sur les éléments  $x$  de  $X(E)$  des morphismes  $u_{(E,x)} : F(E, x) \rightarrow G(E, x)$ .

*Exemple 6.1.5.* On a  $\Omega_X(k) = k[X]$  dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , où le foncteur  $k$  du membre de gauche est le foncteur constant.

*Remarque 6.1.6.* Lorsque le foncteur  $X$  prend ses valeurs dans les ensembles finis, on peut remplacer la somme directe par un produit, de sorte que le foncteur  $\Omega_X$  commute aux limites.

**Proposition 6.1.7.** *Le foncteur  $\Omega_X$  est adjoint à gauche à  $\Upsilon_X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ .*

*Démonstration.* Soient  $F$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  et  $A$  un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ . Un morphisme de  $\Omega_X(A)$  vers  $F$  est une collection d'applications linéaires  $a_{E,x} : A(E, x) \rightarrow F(E)$ , pour  $(E, x)$  objet de  $\mathcal{I}_{\setminus X}$ , telle que pour tout morphisme  $f : E \rightarrow E'$  de  $\mathcal{I}$  et tout  $x \in X(E)$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(E, x) & \xrightarrow{a_{E,x}} & F(E) \\ A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ A(E', X(f)(x)) & \xrightarrow{a_{E', X(f)(x)}} & F(E') \end{array}$$

commute. Cela signifie exactement que les  $a_{E,x}$  définissent un morphisme (dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ ) de  $A$  dans  $\Upsilon_X(F)$ , d'où la proposition.  $\square$

Le lecteur notera la grande analogie entre ces considérations et celles du paragraphe 5.4.1 reliant les catégories  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$  via les foncteurs adjoints  $o$  et  $\varpi$ .

**Proposition 6.1.8.** – *L'endofoncteur  $\Omega_X \Upsilon_X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est isomorphe à  $\cdot \otimes k[X]$ . Plus généralement, on a un isomorphisme*

$$\Omega_X(A \otimes \Upsilon_X(F)) \simeq \Omega_X(A) \otimes F$$

*naturel en les objets  $A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  et  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .*

- *La coïunité  $\Omega_X \Upsilon_X \rightarrow id$  de l'adjonction de la proposition 6.1.7 s'identifie au produit tensoriel par le morphisme  $k[X] \rightarrow k$  obtenu en appliquant cette coïunité au foncteur constant  $k$ .*

*Démonstration.* Le premier point provient de la distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe. Pour le second, on note que la coïunité en question, évaluée sur un objet  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  puis sur un objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , est le morphisme

$$\bigoplus_{x \in X(E)} F(E) \rightarrow F(E)$$

dont chaque composante est l'identité (cf. démonstration précédente), qui s'identifie canoniquement au produit tensoriel de l'augmentation  $k[X(E)] \rightarrow k$  et de  $F(E)$ .  $\square$

**Proposition 6.1.9.** *Les injections diagonales*

$$\Omega_X(F \otimes G)(E) = \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, x) \hookrightarrow \bigoplus_{x, y \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, y) \simeq (\Omega_X(F) \otimes \Omega_X(G))(E)$$

fournissent un monomorphisme  $\Omega_X(F \otimes G) \hookrightarrow \Omega_X(F) \otimes \Omega_X(G)$  naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ . Celui-ci est compatible aux isomorphismes d'associativité et de commutativité du produit tensoriel.

La vérification de cette proposition est immédiate.

Appliquée aux isomorphismes canoniques  $F \xrightarrow{\simeq} F \otimes k$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ , elle donne le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1.10.** – *Le foncteur  $k[X] = \Omega_X(k)$  est canoniquement une coalgèbre cocommutative dans la catégorie tensorielle  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .  
– Pour tout objet  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$ ,  $\Omega_X(F)$  est naturellement un  $k[X]$ -comodule. Autrement dit, on peut compléter le diagramme suivant.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k) & \xrightarrow{\Omega_X} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \\ & \searrow \text{dotted} & \uparrow \text{oubli} \\ & & \mathbf{Comod}_{k[X]} \end{array}$$

**Proposition 6.1.11.** *Le foncteur  $\Omega_X$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  et  $\mathbf{Comod}_{k[X]}$ .*

*Démonstration.* On applique la proposition 1.2.15, de sorte qu'il suffit de constater qu'un  $k[X]$ -comodule est un comodule sur la comonade déterminée par l'adjonction entre  $\Omega_X$  et  $\Upsilon_X$ . Cela découle de la proposition 6.1.8 et du corollaire 6.1.10.  $\square$

*Remarque 6.1.12.* 1. Dans l'équivalence de catégories de la proposition, le produit tensoriel de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  correspond au produit cotensoriel de  $k[X]$ -comodules.  
2. L'image du foncteur  $\Upsilon_X$  correspond aux comodules libres.  
3. La proposition 1.6.17 est le cas particulier où  $\mathcal{I}$  est la catégorie  $*$  à un seul objet et un seul morphisme.  
4. Inversement, on peut établir la proposition 6.1.11 de façon directe en vérifiant que l'équivalence de catégories de la proposition 1.6.17 est fonctorielle.  
5. La structure de coalgèbre sur  $k[X]$  généralise celle de l'algèbre d'un groupe, puisque sa diagonale est donnée par les applications linéaires  $[x] \mapsto [x] \otimes [x]$  (cf. point 3).

*Remarque 6.1.13.* Les considérations de ce paragraphe sont fonctorielles en  $X$  en le sens suivant. Toute transformation naturelle de foncteurs ensemblistes  $X \rightarrow X'$  induit un foncteur  $\mathcal{I}_{\setminus X} \rightarrow \mathcal{I}_{\setminus X'}$ , donc par précomposition un foncteur  $i : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X'}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$  (qui généralise  $\Upsilon_X$ ). Via l'équivalence de catégories de la proposition 6.1.11, ce foncteur correspond à la coïnduction : pour tous objets  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X'}, \mathcal{E}_k)$  et  $E$  de  $\mathcal{I}$ , le  $k[X(E)]$ -comodule  $\Omega_X(i(F))(E)$  est le produit cotensoriel du  $k[X'(E)]$ -comodule  $\Omega_{X'}(F)(E)$  et de  $k[X(E)]$  (vu comme un  $k[X'(E)]$ -comodule par le morphisme de coalgèbres  $k[X(E)] \rightarrow k[X'(E)]$  déduit de la transformation naturelle  $X \rightarrow X'$ ).

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les propriétés de functorialité en  $X$  de  $\Omega_X$  et  $\Upsilon_X$ .

## 6.1.2 Recollements de catégories de comodules

**Convention 6.1.14.** Dans ce paragraphe,  $X$  désigne un foncteur de  $\mathcal{I}$  vers la catégorie  $\mathbf{Ens}$  et  $Y$  un sous-foncteur de  $X$ .

Nous désignerons par  $\mathcal{I}_{X, Y}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{I}_{\setminus X}$  dont les objets sont les couples  $(E, x)$  pour lesquels  $x \in X(E) \setminus Y(E)$ .

- Remarque 6.1.15.* 1. On prendra garde que  $X \setminus Y$  n'est pas en général un foncteur ensembliste. Nous noterons cependant, par abus,  $k[X \setminus Y]$  le conoyau du monomorphisme  $k[Y] \hookrightarrow k[X]$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  induit par l'inclusion  $Y \hookrightarrow X$ .
2. On a un scindement canonique

$$k[X/Y] \simeq k[X \setminus Y] \oplus k \quad (6.1)$$

obtenu en constatant que le foncteur ensembliste  $X/Y$  se relève canoniquement en un foncteur vers les ensembles pointés (utiliser l'image de  $Y$  dans  $X/Y$  comme point de base — on convient que  $E/\emptyset = E \amalg \{*\}$ , pour tout ensemble  $E$ ).

3. Comme l'épimorphisme  $k[X/Y] \twoheadrightarrow k$  est la coïunité du foncteur en coalgèbres  $k[X/Y]$ , le foncteur  $k[X \setminus Y]$  est une coalgèbre sans coïunité dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ ; nous y reviendrons à la proposition 6.1.22.

Dans le lemme suivant, nous nommons *sous-catégorie complémentaire* d'une sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}$  d'une catégorie  $\mathcal{A}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  dont la classe d'objets est le complémentaire de celle de  $\mathcal{B}$ .

**Lemme 6.1.16.** *La catégorie  $\mathcal{I}_{\setminus Y}$  s'identifie canoniquement à une sous-catégorie pleine complète à droite de  $\mathcal{I}_{\setminus X}$ , dont la catégorie complémentaire est  $\mathcal{I}_{X, Y}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que si  $f : (E, x) \rightarrow (E', x')$  est un morphisme de  $\mathcal{I}_{\setminus X}$ , où  $x \in Y(E)$ , alors on a  $x' = X(f)(x) = Y(f)(x) \in Y(E')$  puisque  $Y$  est un sous-foncteur de  $X$ .  $\square$

Appliquant le corollaire 3.3.10, on en déduit l'important résultat suivant.

**Proposition 6.1.17.** *Il existe un diagramme de recollement*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus Y}, \mathcal{E}_k) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X, Y}, \mathcal{E}_k)$$

où  $\mathcal{P}$  désigne le prolongement par zéro et  $\mathcal{R}$  la restriction.

Nous adaptons maintenant certains résultats de la section précédente à la catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X, Y}, \mathcal{E}_k)$ .

**Notation 6.1.18.** Nous noterons  $\Upsilon_{X, Y}$  le foncteur composé

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\Upsilon_X} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X, Y}, \mathcal{E}_k).$$

Autrement dit,  $\Upsilon_{X, Y}$  est le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli  $\mathcal{I}_{X, Y} \rightarrow \mathcal{I}$ .

**Définition 6.1.19.** Le foncteur de  $X \setminus Y$ -intégrale, noté  $\Omega_{X, Y}$ , est défini comme la composée

$$\Omega_{X, Y} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X, Y}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\Omega_X} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k).$$

*Remarque 6.1.20.* – On a un isomorphisme canonique  $\Omega_{X, Y}(k) \simeq k[X \setminus Y]$ .

– Le foncteur  $\Omega_{X, Y}$  est exact et fidèle.

On a donc  $\Omega_{X, Y}(F)(E) = \bigoplus_{x \in X(E) \setminus Y(E)} F(E, x)$  pour  $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X, Y}, \mathcal{E}_k)$  et  $E \in \text{Ob } \mathcal{I}$ . On prendra garde que les foncteurs  $\Upsilon_{X, Y}$  et  $\Omega_{X, Y}$  ne sont généralement pas adjoints.

La proposition 6.1.8 entraîne le résultat suivant, puisque les foncteurs de restriction et de prolongement par zéro commutent canoniquement au produit tensoriel.

**Proposition 6.1.21.** *L'endofoncteur  $\Omega_{X, Y} \Upsilon_{X, Y}$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est isomorphe à  $\cdot \otimes k[X \setminus Y]$ . Plus généralement, on a un isomorphisme*

$$\Omega_{X, Y}(A \otimes \Upsilon_{X, Y}(F)) \simeq \Omega_{X, Y}(A) \otimes F$$

naturel en les objets  $A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X, Y}, \mathcal{E}_k)$  et  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .



De même, la proposition 6.1.9 et le corollaire 6.1.10 procurent le résultat suivant.

**Proposition 6.1.22.** 1. Les injections diagonales fournissent un monomorphisme  $\Omega_{X,Y}(F \otimes G) \hookrightarrow \Omega_{X,Y}(F) \otimes \Omega_{X,Y}(G)$  naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_k)$ . Celui-ci est compatible aux isomorphismes d'associativité et de commutativité du produit tensoriel.

2. Le foncteur  $k[X \setminus Y]$  est canoniquement une coalgèbre cocommutative sans coïunité dans la catégorie tensorielle  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ ; le morphisme canonique  $k[X] \rightarrow k[X \setminus Y]$  est un morphisme de coalgèbres sans coïunité.

3. Pour tout objet  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_k)$ ,  $\Omega_{X,Y}(F)$  est naturellement un  $k[X \setminus Y]$ -comodule.

**Proposition 6.1.23.** Le foncteur  $\Omega_{X,Y}$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_k)$  et la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Comod}_{k[X \setminus Y]}$  formée des  $k[X \setminus Y]$ -comodules à droite  $(C, \psi_C)$  (que nous nommerons fidèles) tels que la comultiplication  $\psi_C$  est injective, notée  $\mathbf{Comod}_{k[X \setminus Y]}^{fid}$ .

*Démonstration.* On commence par observer que le scindement (6.1) permet d'identifier les catégories de comodules sur  $k[X \setminus Y]$  et  $k[X/Y]$  (cf. remarque 1.6.12.3). Le foncteur de prolongement par zéro et la proposition 6.1.11 identifient alors  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_k)$  à la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Comod}_{k[X \setminus Y]}$  des comodules  $(C, \psi_C)$  tels que le produit fibré de l'inclusion  $C \hookrightarrow C \oplus (C \otimes k[X \setminus Y])$  et du morphisme  $(id_C, \psi_C) : C \rightarrow C \oplus (C \otimes k[X \setminus Y])$  est nul. Ce produit fibré étant égal à  $\ker \psi_C$ , cette condition équivaut à la fidélité de  $\psi_C$ , ce qui établit la proposition.  $\square$

### 6.1.3 Situation duale

**Convention 6.1.24.** Dans ce paragraphe,  $X$  désigne un foncteur de la catégorie  $\mathcal{I}^{op}$  vers la catégorie  $\mathbf{Ens}^f$  des ensembles finis.

Toutes les propriétés de ce paragraphe s'établissent de façon analogue à celles du paragraphe 6.1.1, c'est pourquoi nous omettrons leurs démonstrations. Nous reviendrons en fin de paragraphe sur la comparaison avec le §6.1.1.

On rappelle que la catégorie  $\mathcal{I}_{/X}$  des objets  $E$  de  $\mathcal{I}$  munis d'un élément de  $X(E)$  a été introduite dans la notation 1.1.18; elle est munie d'un foncteur d'oubli  $\mathcal{O}^{\mathcal{I}, X} : \mathcal{I}_{/X} \rightarrow \mathcal{I}$ .

**Notation 6.1.25.** Nous désignerons par  $\Upsilon^X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_k)$  le foncteur de précomposition par  $\mathcal{O}^{\mathcal{I}, X}$ .

Ainsi (cf. proposition 3.1.14),  $\Upsilon^X$  est un foncteur exact qui commute aux limites, aux colimites et au produit tensoriel. Dans le cas où  $X$  prend ses valeurs dans les ensembles non vides,  $\mathcal{O}^{\mathcal{I}, X}$  est essentiellement surjectif, donc  $\Upsilon^X$  est fidèle.

**Proposition et définition 6.1.26.** Il existe un foncteur exact et fidèle, appelé foncteur de  $X$ -intégrale et noté  $\Omega^X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ , défini de la façon suivante.

– Si  $F$  est un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_k)$  et  $E$  un objet de  $\mathcal{I}$ , on pose

$$(\Omega^X(F))(E) = \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x).$$

– Si  $F$  est un objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_k)$  et  $E \xrightarrow{f} E'$  une flèche de  $\mathcal{I}$ , et si  $x$  et  $x'$  sont des éléments respectifs de  $X(E)$  et  $X(E')$ , la composante  $F(E, x) \rightarrow F(E', x')$  de  $(\Omega^X(F))(f)$  est égale à  $F(f)$  si  $X(f)(x') = x$ , et à 0 sinon.

– Si  $F \xrightarrow{u} G$  est une flèche de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_k)$ , le morphisme  $\Omega^X(u) : \Omega^X(F) \rightarrow \Omega^X(G)$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est défini, sur l'objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , comme la somme directe sur les éléments  $x$  de  $X(E)$  des morphismes  $u_{(E,x)} : F(E, x) \rightarrow G(E, x)$ .

*Exemple 6.1.27.* On a  $\Omega^X(k) = k^X$ .

**Proposition 6.1.28.** *Le foncteur  $\Omega^X$  est adjoint à droite à  $\Upsilon^X$ .*

**Proposition 6.1.29.** – *L'endofoncteur  $\Omega^X \Upsilon^X$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$  est isomorphe à  $\cdot \otimes k^X$ . Plus généralement, on a un isomorphisme*

$$\Omega^X(A \otimes \Upsilon^X(F)) \simeq \Omega^X(A) \otimes F$$

*naturel en les objets  $A$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_k)$  et  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .*

– *L'unité  $\text{id} \rightarrow \Omega^X \Upsilon^X$  de l'adjonction de la proposition 6.1.28 s'identifie au produit tensoriel par le morphisme  $k \rightarrow k^X$  obtenu en appliquant cette unité au foncteur constant  $k$ .*

**Proposition 6.1.30.** *Les projections canoniques*

$$(\Omega^X(F) \otimes \Omega^X(G))(E) \simeq \bigoplus_{x, y \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, y) \rightarrow \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, x) = \Omega^X(F \otimes G)(E)$$

*fournissent un épimorphisme  $\Omega^X(F) \otimes \Omega^X(G) \twoheadrightarrow \Omega^X(F \otimes G)$  naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_k)$ . Celui-ci est compatible aux isomorphismes d'associativité et de commutativité du produit tensoriel.*

Cette proposition, appliquée aux isomorphismes canoniques  $F \otimes k \xrightarrow{\simeq} F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_k)$ , procure le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1.31.** – *Le foncteur  $k^X = \Omega^X(k)$  est canoniquement une algèbre commutative dans la catégorie tensorielle  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ .*

– *Pour tout objet  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_k)$ ,  $\Omega^X(F)$  est naturellement un  $k^X$ -module. Autrement dit, on peut compléter le diagramme suivant.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_k) & \xrightarrow{\Omega^X} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \\ & \searrow & \uparrow \text{oubli} \\ & & \mathbf{Mod}_{k^X} \end{array}$$

**Proposition 6.1.32.** *Le foncteur  $\Omega^X$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_k)$  et  $\mathbf{Mod}_{k^X}$ .*

L'hypothèse de finitude des ensembles  $X(E)$  permet d'assurer que, dans la définition de  $\Omega^X$ , on peut remplacer la somme directe par un produit, ce qui est nécessaire pour établir la proposition 6.1.28. Il est en revanche obligatoire de considérer une somme directe pour disposer des propriétés de commutation avec le produit tensoriel. Cela explique pourquoi nous avons dû nous restreindre à des foncteurs  $X$  à valeurs finies, contrairement à la situation du paragraphe 6.1.1.

On peut pousser plus loin l'analogie et notamment « dualiser » les résultats du paragraphe 6.1.2.

Pour terminer, justifions la terminologie employée dans le titre de la section 6.1 : pour  $k = \mathbb{F}_2$ , le foncteur  $k^X$  est un *foncteur en algèbres de Boole* au sens où, pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{I}$ , la structure de  $\mathbb{F}_2$ -algèbre sur  $\mathbb{F}_2^{X(E)}$  induite par la structure d'algèbre sur  $\mathbb{F}_2^X$  est la structure usuelle d'algèbre produit, qui est donc une algèbre de Boole. On pourra se reporter, pour plus de détails sur les foncteurs en algèbre de Boole (dans le cas de la catégorie  $\mathcal{F}$ ), à [HLS93], partie II, et [Pow98c], § 7.

## 6.2 Les catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_{1,n}}^f$

**Convention 6.2.1.** Dans toute la suite de cette thèse, le corps de base implicite sera à nouveau  $\mathbb{F}_2$ .

Cette section introduit les sources des catégories de foncteurs en grassmanniennes, présentées dans la section 6.3. Attachons-nous à la plus importante de ces catégories sources, la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  : il s'agit de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie munis d'un sous-espace, auquel on pensera comme une « base » ; les morphismes sont astreints à induire des épimorphismes entre les bases. A partir de là, de nombreux foncteurs apparaissent naturellement : on peut oublier la base, considérer le quotient de l'espace vectoriel par sa base, construire un objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  par somme directe d'un objet de  $\mathcal{E}^f$  et d'un objet de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ , qui sera considéré comme la base, etc. On obtient ainsi une structure très riche sur la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  et les autres catégories analogues introduites ; les propriétés de cette section, pour élémentaires qu'elles soient, sous-tendent les résultats puissants dans les catégories de foncteurs associées, comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

Très formelles, la plupart des constructions de cette section pourrait être généralisées en remplaçant  $\mathcal{E}^f$  par une catégorie abélienne essentiellement petite.

### 6.2.1 Définition des catégories et foncteurs utilisés

**Définition 6.2.2.** Nous désignerons par  $\mathcal{G}_r : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur qui à un espace vectoriel  $V$  associe l'ensemble  $\mathcal{G}_r(V)$  de ses sous-espaces et à une application linéaire  $f : V \rightarrow V'$  associe la fonction  $\mathcal{G}_r(V) \rightarrow \mathcal{G}_r(V') \quad W \mapsto f(W)$ .

**Définition 6.2.3** (Catégories  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  et  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ). Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ .

1. Étant donné un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , nous noterons  $\mathcal{G}_{r_I}(V)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_r(V)$  constitué des sous-espaces de  $V$  dont la dimension appartient à  $I$ .
2. Nous désignerons par  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  la catégorie donnée comme suit.
  - Les objets de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  sont les couples  $(V, W)$ , où  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $W$  un élément de  $\mathcal{G}_{r_I}(V)$ .
  - Les morphismes de  $(V, W)$  vers  $(V', W')$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  sont les applications linéaires  $f : V \rightarrow V'$  telles que  $f(W) \subset W'$ .
  - La composition des morphismes s'obtient par composition des applications linéaires sous-jacentes.
3. Nous noterons  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  la sous-catégorie de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont donnés par

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}((V, W), (V', W')) = \{f \in \text{hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f}((V, W), (V', W')) \mid f(W) = W'\}.$$

4. Nous désignerons par  $\widetilde{\text{incl}}_I$  le foncteur (fidèle et essentiellement surjectif) d'inclusion de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ .

Lorsque la partie  $I$  est égale à  $\mathbb{N}$ , nous omettrons l'indice  $I$  dans la notation de ces catégories et des foncteurs où elles interviennent.

**Notation 6.2.4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Nous emploierons les abréviations suivantes pour désigner des parties de  $\mathbb{N}$  :

- $n = \{n\}$ ,
- $\leq n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ ,
- $\geq n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq n\}$ .

*Remarque 6.2.5.* On notera que  $\mathcal{G}_{r_I}$  est un sous-foncteur de  $\mathcal{G}_r$  si et seulement si  $I$  est de la forme  $\leq n$  ou  $\mathbb{N}$ .

La catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_{1,n}}^f$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) que nous définissons maintenant constitue un analogue de la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ , où l'on « rigidifie la base » par le choix d'un isomorphisme avec l'espace vectoriel  $E_n$ .

**Notation 6.2.6** (Catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_{1,n}}^f$ ). Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Étant donné un objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ , nous noterons  $\mathbf{P}1_n(V)$  l'ensemble  $\text{Pl}_{\mathcal{E}}(E_n, V)$  des monomorphismes  $E_n \hookrightarrow V$ .
2. Nous désignerons par  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  la catégorie définie ainsi.
  - Les objets de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  sont les couples  $(V, u)$  formés d'un objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et d'un élément  $u$  de  $\mathbf{P}1_n(V)$ .
  - Les morphismes dans  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  de  $(V, u)$  vers  $(V', u')$  sont les applications linéaires  $f : V \rightarrow V'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{u} & V \\ & \searrow u' & \downarrow f \\ & & V' \end{array}$$

- La composition des morphismes est induite par la composition des applications linéaires.

*Remarque 6.2.7.* – Si  $I$  est une partie du type  $\leq n$  ou  $\mathbb{N}$ , alors  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  est la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ .

- Avec les notations du paragraphe 6.1.2,  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  est la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r \leq n, \mathcal{G}_r \leq n-1}^f$ .
- L'association  $V \mapsto \mathbf{P}1_n(V)$  n'est pas fonctorielle, mais si l'on note  $\text{hom}_{\leq i}(E, V)$  le sous-ensemble de  $\text{hom}_{\mathcal{E}}(E, V)$  formé des applications linéaires de rang au plus  $i$ , alors  $\text{hom}_{\leq i}(E_n, \cdot)$  est un sous-foncteur de  $\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(E_n, \cdot)$ . La catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  s'identifie ainsi à  $\mathcal{E}_{\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(E_n, \cdot), \text{hom}_{\leq n-1}(E_n, \cdot)}^f$ .
- L'ensemble  $\mathcal{G}_r(V)$  s'identifie canoniquement au quotient de  $\mathbf{P}1_n(V)$  par l'action à droite libre du groupe  $GL_n$ .
- Les catégories  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, 0}^f$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, 0}^f$  et  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, 0}^f$  s'identifient canoniquement à  $\mathcal{E}^f$ .
- Les catégories  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, 1}^f$  et  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, 1}^f$  sont canoniquement isomorphes (car le corps de base est  $\mathbb{F}_2$ ).
- Toutes les catégories introduites vérifient l'hypothèse 3.1.28.

La notation suivante introduit les inclusions standard d'une catégorie dans une autre.

**Notation 6.2.8** (Foncteurs d'oubli). – Si  $I$  et  $J$  sont deux parties de  $\mathbb{N}$  telles que  $I \subset J$ ,  $\text{incl}_{I, J} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$  désignera le foncteur (pleinement fidèle) d'oubli.

- Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , nous désignerons par  $\text{incl}_n^{\mathbf{P}1}$  le foncteur (fidèle et essentiellement surjectif) d'oubli du plongement  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  associant à un objet  $(V, E_n \xrightarrow{u} V)$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  l'objet  $(V, \text{im } u)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  et égal à l'inclusion évidente sur les morphismes.

**Définition 6.2.9** (Foncteurs de translation). Soient  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On définit comme suit des foncteurs, appelés *foncteurs de translation*,  $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ,  $\mathcal{E}^f \times \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  et  $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ , notés  $\boxplus$ . Sur les objets, on pose

$$V \boxplus (A, B) = (V \oplus A, B)$$

dans  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  et  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , et

$$V \boxplus (A, u : E_n \hookrightarrow A) = (V \oplus A, E_n \xrightarrow{u} A \hookrightarrow V \oplus A)$$

dans  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ . L'action sur les morphismes se déduit de la functorialité de  $\oplus : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ .

*Remarque 6.2.10.* On a des isomorphismes  $0 \boxplus X \simeq X$  et  $(V' \oplus V) \boxplus X \simeq V' \boxplus (V \boxplus X)$  naturels en les objets  $V, V'$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $X$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  (resp.  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ,  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ ), vérifiant des propriétés de cohérence qu'on laisse au lecteur le soin d'explicitier. Ainsi, on peut voir  $\boxplus$  comme un foncteur d'action de la catégorie additive  $\mathcal{E}^f$  sur  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  (resp.  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ,  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ ).

**Notation 6.2.11.** Si  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , nous noterons  $\mathcal{E}^I$  (resp.  $\mathcal{E}_{surj}^I$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}^f$  (resp.  $\mathcal{E}_{surj}^f$ ) des espaces vectoriels dont la dimension appartient à  $I$ . Nous noterons également  $\mathcal{F}^I = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^I, \mathcal{E})$  et  $\mathcal{F}_{surj}^I = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{E})$ .

*Remarque 6.2.12.* On notera que la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$  introduite dans la section 5 est un cas particulier de cette notation. De plus, la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}^n$  s'identifie canoniquement à  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$ .

**Définition 6.2.13** (Foncteurs fondamentaux de source  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  ou  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ ). Soient  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Le foncteur d'oubli principal  $\tilde{\mathfrak{D}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  est le foncteur associant à un objet  $(V, W)$  de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  l'espace vectoriel  $V$ , et à un morphisme l'application linéaire sous-jacente.
2. On appelle également *foncteurs d'oubli principaux* les foncteurs composés

$$\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\widetilde{incl}_I} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{D}}_I} \mathcal{E}^f$$

et

$$\bar{\mathfrak{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f \xrightarrow{inc_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}_n} \mathcal{E}^f.$$

3. Le foncteur *base*  $\mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^I$  est défini sur les objets par  $\mathfrak{B}_I(V, W) = W$ , et associe à un morphisme  $f : (V, W) \rightarrow (V', W')$  l'application linéaire (surjective par définition de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ )  $W \rightarrow W'$  induite par  $f$ .
4. Le foncteur d'oubli secondaire  $\tilde{\mathfrak{B}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^I$  associe à un objet  $(V, W)$  l'espace vectoriel  $W$  et à un morphisme  $(V, W) \rightarrow (V', W')$  l'application linéaire induite  $W \rightarrow W'$ .
5. Le foncteur de *réduction*  $\tilde{\mathfrak{R}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  est donné par  $(V, W) \mapsto V/W$  sur les objets et associe à un morphisme l'application linéaire induite.
6. On appelle également *foncteurs de réduction* les foncteurs composés

$$\mathfrak{R}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\widetilde{incl}_I} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{R}}_I} \mathcal{E}^f$$

et

$$\bar{\mathfrak{R}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f \xrightarrow{inc_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f \xrightarrow{\mathfrak{R}_n} \mathcal{E}^f.$$

On rappelle que l'indice  $I$  sera omis dans toutes ces notations lorsque  $I = \mathbb{N}$ .

*Remarque 6.2.14.* – Si  $I$  et  $J$  sont deux parties de  $\mathbb{N}$  telles que  $I \subset J$ , le foncteur composé

$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{incl_{I, J}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}_J} \mathcal{E}^f$  est égal à  $\mathfrak{D}_I$ . De même, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f & \xrightarrow{\mathfrak{B}_I} & \mathcal{E}_{surj}^I \\ \downarrow incl_{I, J} & & \downarrow \\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f & \xrightarrow{\mathfrak{B}_J} & \mathcal{E}_{surj}^J \end{array}$$

commute. On a d'autres propriétés analogues de compatibilité à l'extension de la partie  $I$  avec les différents foncteurs introduits.

– Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f & \xrightarrow{\widetilde{incl}_I} & \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \\ \mathfrak{B}_I \downarrow & & \downarrow \tilde{\mathfrak{B}}_I \\ \mathcal{E}_{surj}^f & \xrightarrow{oubli} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

commute.

- Les foncteurs base ou d'oubli secondaire n'ont pas d'analogue non trivial en terme de la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  ; le rôle de cette catégorie est justement de simplifier certaines des considérations relatives à  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  en « rendant la base canoniquement isomorphe à  $E_n$  » .

*Remarque 6.2.15.* Le foncteur  $\mathfrak{K}_I$  est le conoyau de la transformation naturelle injective tautologique  $\mathfrak{B}_I \rightarrow \mathfrak{D}_I$  (où l'on note par abus  $\mathfrak{B}_I$  pour la composée de ce foncteur avec l'inclusion  $\mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}^f$ ) ; un constat analogue vaut pour  $\tilde{\mathfrak{K}}_I$  et  $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ .

**Proposition 6.2.16.** *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ . On a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(V \boxplus X, Y) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, \mathfrak{D}_I(Y)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(X, Y) \quad \text{et} \\ \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(X, V \boxplus Y) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{K}_I(X), V) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(X, Y) \end{aligned}$$

naturels en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $X, Y$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ .

On a des énoncés similaires dans  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  et  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$

*Démonstration.* Les deux isomorphismes étant très analogues, nous nous bornerons à montrer le second, qui s'obtient par la suite d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(X, V \boxplus Y) &\simeq \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}_I(X), V \oplus \mathfrak{D}_I(Y)) \mid f(\mathfrak{B}_I(X)) = \mathfrak{B}_I(Y)\} \simeq \\ &\{(a, b) \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}_I(X), V) \times \text{hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}_I(X), \mathfrak{D}_I(Y)) \mid a(\mathfrak{B}_I(X)) = 0 \text{ et } b(\mathfrak{B}_I(X)) = \mathfrak{B}_I(Y)\} \\ &\simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{K}_I(X), V) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(X, Y). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 6.2.17.** *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  contenant 0. Le foncteur d'inclusion  $\mathcal{E}^f \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, 0}^f \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  est adjoint à droite à  $\mathfrak{K}_I$ .*

**Définition 6.2.18** (Foncteurs fondamentaux de but  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  ou  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ ). Soient  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Les foncteurs de *plongement diagonal* sont les foncteurs  $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  et  $\tilde{\mathfrak{D}}_I : \mathcal{E}^I \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  donnés sur les objets par  $V \mapsto (V, V)$  et par le plongement évident sur les morphismes.
2. Les foncteurs de *plongement relatif* sont les foncteurs composés

$$\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \xrightarrow{\mathcal{E}^f \times \mathfrak{D}_I} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\boxplus} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$$

et

$$\tilde{\mathfrak{L}}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^I \xrightarrow{\mathcal{E}^f \times \tilde{\mathfrak{D}}_I} \mathcal{E}^f \times \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\boxplus} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f.$$

Ces foncteurs sont donc donnés sur les objets par  $(A, B) \mapsto (A \oplus B, B)$ .

3. Le foncteur de *décalage pointé*  $\mathfrak{S}_n : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  associe à un objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  l'objet  $(V \oplus E_n, E_n \hookrightarrow V \oplus E_n)$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$  et à une application linéaire  $u$  le morphisme  $u \oplus E_n$ .

*Remarque 6.2.19.* 1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f & \xrightarrow{\tilde{\text{incl}}_I} & \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \\ \mathfrak{D}_I \uparrow & & \uparrow \tilde{\mathfrak{D}}_I \\ \mathcal{E}_{surj}^f & \xrightarrow{\text{oubli}} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

commute.

2. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^f & \hookrightarrow & \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^n \\ \mathfrak{S}_n \downarrow & & \downarrow \mathfrak{L}_n \\ \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f & \xrightarrow{inc_n^{\mathbf{P}1}} & \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f \end{array}$$

commute, où l'inclusion supérieure est donnée par  $V \mapsto (V, E_n)$ .

*Remarque 6.2.20.* Le plongement évident  $\underline{GL}_n \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^n$  étant une équivalence de catégories, nous commettrons parfois des abus de notation consistant à l'assimiler à une égalité pour les foncteurs mettant en jeu  $\mathcal{E}_{surj}^n$ .

## 6.2.2 Propriétés des foncteurs fondamentaux

Nous explicitons dans ce paragraphe les comportements mutuel et propre des foncteurs introduits dans les définitions 6.2.13 et 6.2.18.

**Proposition 6.2.21** (Adjonctions fondamentales). *Soient  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .*

1. *Le foncteur de plongement diagonal  $\mathfrak{D}_I$  est adjoint à gauche à  $\mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^I$ .*
2. *Le foncteur de plongement diagonal  $\tilde{\mathfrak{D}}_I$  est adjoint à gauche à  $\tilde{\mathfrak{B}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^I$ .*
3. *Le foncteur de plongement relatif  $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  est adjoint à gauche au foncteur  $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$ .*
4. *Le foncteur de plongement relatif  $\tilde{\mathfrak{L}}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^I \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  est adjoint à gauche au foncteur  $\tilde{\mathfrak{D}}_I \times \tilde{\mathfrak{B}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^I$ .*
5. *Le décalage pointé  $\mathfrak{S}_n : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  est adjoint à gauche à  $\bar{\mathfrak{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ .*

*Démonstration.* Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{E}_{surj}^I$  et  $(V, W)$  un objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , on a un isomorphisme canonique

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f}(\mathfrak{D}_I(A), (V, W)) = \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(A, V) \mid f(A) = W\} \simeq \text{Epi}_{\mathcal{E}}(A, W),$$

d'où la première assertion. La troisième assertion s'en déduit en utilisant la proposition 6.2.16.

Les deuxième et quatrième points se traitent pareillement.

Établissons le dernier : si  $A$  est un objet de  $\mathcal{E}^f$  et  $(V, u : E_n \hookrightarrow V)$  un objet de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ , on a un isomorphisme canonique

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f}(\mathfrak{S}_n(A), (V, u)) = \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(A \oplus E_n, V) \mid f|_{E_n} = u\} \simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(A, V).$$

Cela achève la démonstration. □

La proposition suivante jouera un rôle fondamental par la suite.

**Proposition 6.2.22** (Compositions fondamentales). *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Les foncteurs composés*

$$\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \xrightarrow{\mathfrak{L}_I} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\mathfrak{R}_I \times \mathfrak{B}_I} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$$

et

$$\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^I \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{L}}_I} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{R}}_I \times \tilde{\mathfrak{B}}_I} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^I$$

sont canoniquement isomorphes aux foncteurs identités.

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'isomorphisme canonique  $(A \oplus B)/B \simeq A$ . □

**Proposition 6.2.23.** *Soient  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .*

1. *Les foncteurs d'oubli principaux  $\mathfrak{D}_I$ ,  $\tilde{\mathfrak{D}}_I$  et  $\bar{\mathfrak{D}}_n$  sont fidèles.*
2. *Le foncteur  $\bar{\mathfrak{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  induit un foncteur essentiellement surjectif  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}^{\geq n}$ . Si  $I$  a pour plus petit élément  $n$ ,  $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{D}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ ) induit un foncteur essentiellement surjectif  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^{\geq n}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^{\geq n}$ ).*
3. *Les foncteurs de plongement relatif  $\mathfrak{L}_I$  et  $\tilde{\mathfrak{L}}_I$  sont fidèles et essentiellement surjectifs. Il en est de même pour le décalage pointé  $\mathfrak{S}_n$ .*
4. *Les foncteurs  $\mathfrak{K}_I \times \mathfrak{B}_I$  et  $\tilde{\mathfrak{K}}_I \times \tilde{\mathfrak{B}}_I$  sont pleins et essentiellement surjectifs. En particulier, les foncteurs  $\mathfrak{K}_I$ ,  $\mathfrak{B}_I$ ,  $\tilde{\mathfrak{K}}_I$  et  $\tilde{\mathfrak{B}}_I$  sont pleins et essentiellement surjectifs*
5. *Les foncteurs de plongement diagonal  $\mathfrak{D}_I$  et  $\tilde{\mathfrak{D}}_I$  sont pleinement fidèles.*

*Démonstration.* Les deux premières assertions s'établissent par inspection. L'essentielle surjectivité des foncteurs de plongement relatif et de décalage pointé découle de ce que tout sous-espace d'un espace vectoriel est facteur direct ; leur fidélité est claire. La quatrième assertion s'obtient en combinant la proposition 6.2.22 et l'essentielle surjectivité des plongements relatifs. La dernière s'obtient à partir des deux premières adjonctions de la proposition 6.2.21 et du constat que leurs unités  $id \rightarrow \mathfrak{B}_I \mathfrak{D}_I$  et  $id \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}_I \tilde{\mathfrak{D}}_I$  sont des isomorphismes.  $\square$

### 6.2.3 Propriétés de structure des catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ , $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$

Les catégories qui nous intéresseront le plus par la suite sont les  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ . Les propriétés qui suivent montrent que, par certains côtés, les catégories  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$  ont une structure plus « régulière », c'est pourquoi nous serons parfois amenés à travailler dans ces catégories auxiliaires.

**Proposition 6.2.24.** *La catégorie  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$  est additive. De plus, les foncteurs d'oubli principal et secondaire sont additifs — autrement dit, il existe un isomorphisme*

$$(V, W) \oplus (V', W') \simeq (V \oplus V', W \oplus W')$$

*naturel en les objets  $(V, W)$  et  $(V', W')$  de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ . En particulier, il existe un isomorphisme  $E \boxplus (V, W) \simeq (E, 0) \oplus (V, W)$  naturel en les objets  $E$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $(V, W)$  de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ .*

Cette propriété, que nous n'utiliserons pas explicitement, se vérifie par inspection.

*Remarque 6.2.25.* La catégorie  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$  n'est pas abélienne. En effet, on vérifie que pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ , le morphisme  $(V, 0) \rightarrow (V, V)$  de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$  dont l'application linéaire sous-jacente est l'identité est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. En revanche, ce n'est pas un isomorphisme, si  $V$  est non nul.

**Proposition et définition 6.2.26** (Dualité dans  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ ). *Le foncteur de dualité  $(\cdot)^* : (\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$  induit une équivalence de catégories  $(\cdot)^\vee : (\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f)^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$  donnée sur les objets par*

$$(V, W)^\vee = (V^*, W^\perp).$$

*Démonstration.* Comme  $(\cdot)^*$  est une équivalence de catégories, le seul point à vérifier est que le foncteur  $(\cdot)^\vee$  est bien défini sur les morphismes, ce qui résulte de l'observation suivante : si  $f : V \rightarrow V'$  est une application linéaire,  $W$  un sous-espace de  $V$  et  $W'$  un sous-espace de  $V'$  tels que  $f(W) \subset W'$ , alors  ${}^t f(W'^\perp) \subset {}^t f(f(W)^\perp) \subset W^\perp$ , où l'on désigne par  ${}^t f$  la transposée de  $f$ .  $\square$

Cette proposition, comme la précédente, ne s'étend ni aux catégories  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , ni aux catégories  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$ .

**Proposition 6.2.27.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ .*



- La catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$  possède des sommes finies.
- Son objet initial est  $(E_n, id_{E_n})$ .
- La somme  $(A, a) \amalg (B, b)$  de deux objets  $(A, a)$  et  $(B, b)$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$  s'obtient en formant le carré cocartésien d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \oplus_{E_n} B \end{array}$$

et en munissant l'espace vectoriel  $A \oplus_{E_n} B$  du plongement donné par la diagonale du carré.

- Deux objets  $(A, a)$  et  $(B, b)$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$  possèdent toujours un produit. Il est donné par

$$(A, a) \times (B, b) = (A \oplus B, (a, b) : E_n \hookrightarrow A \oplus B).$$

- On a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n(V) \amalg X &\simeq V \boxplus X \quad \text{et} \\ \mathfrak{S}_n(V) \times X &\simeq \mathfrak{S}_n(V \oplus \bar{\mathfrak{D}}_n(X)) \end{aligned}$$

naturels en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $X$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$ .

Nous laissons au lecteur la démonstration de cette propriété élémentaire, que nous n'emploierons pas explicitement.

*Remarque 6.2.28.* – Si  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$  contenant 0, alors  $(0, 0)$  est objet final de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , et tout objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  admet un produit avec  $(V, 0)$  (où  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ), qui est donné par le foncteur  $V \boxplus \cdot$ .

- En revanche, on vérifie facilement que deux objets  $(V, W)$  et  $(V', W')$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  tels que  $W$  et  $W'$  sont non nuls ne possèdent jamais de somme ni de produit.

Les propriétés que nous allons maintenant exposer fournissent un substitut à l'absence de sommes (proposition 6.2.30) et de produits (proposition 6.2.32) dans  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ ; elles reposent sur le lemme simple et très utile suivant.

**Lemme 6.2.29.** *Soient  $(A, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  et  $A' \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ . Il existe une bijection naturelle*

$$\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(A, A') \simeq \prod_{B' \in \mathcal{G}_r(A')} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (A', B')).$$

La functorialité doit être comprise dans le sens suivant :

- pour le terme de gauche, on considère le foncteur

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f)^{op} \times \mathcal{E}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}^{op} \times \mathcal{E}^f} (\mathcal{E}^f)^{op} \times \mathcal{E}^f \xrightarrow{\text{hom}} \mathbf{Ens};$$

- pour le terme de droite, la functorialité en  $(A, B)$  provient de manière usuelle du foncteur  $\text{hom}$ ; pour la functorialité en  $A'$ , on fait correspondre à une application linéaire  $u : A' \rightarrow A''$  et à un élément  $f$  de  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (A', B'))$  (où  $B' \in \mathcal{G}_r(A')$ ) la flèche  $(A, B) \rightarrow (A'', B'')$ , où  $B'' = u(B')$ , donnée par  $u \circ f : A \rightarrow A''$ .

*Démonstration.* Cette bijection s'obtient en faisant correspondre à une application linéaire  $f : A \rightarrow A'$  le sous-espace  $B' = f(B)$  de  $A'$  et le morphisme  $(A, B) \rightarrow (A', B')$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  induit par  $f$ .  $\square$

**Proposition 6.2.30.** *Soient  $(A, B)$ ,  $(A', B')$  et  $(V, W)$  des objets de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ . Il existe une bijection naturelle*

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A \oplus A', B \oplus B'), (V, W)) \simeq \prod_{\substack{W_1, W_2 \in \mathcal{G}_r(W) \\ W_1 + W_2 = W}} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V, W_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V, W_2)).$$

La functorialité doit être comprise dans le sens suivant :

- sur les ensembles  $\text{hom}$ , on utilise la functorialité usuelle ;
- pour  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$   $((A, B), (A', B')) \mapsto (A \oplus A', B \oplus B')$ , on associe à un morphisme  $(u, v)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  le morphisme  $u \oplus v$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  (cf. lemme 5.2.3) ;
- dans le terme de droite, la functorialité en  $(V, W)$  s'obtient comme suit. Si  $u : (V, W) \rightarrow (V', W')$  est un morphisme de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  et  $W_1, W_2$  deux sous-espaces de  $W$  tels que  $W_1 + W_2 = W$ , on pose  $W'_i = f(W_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), de sorte que  $W'_1 + W'_2 = f(W) = W'$ . Le morphisme induit par  $u$  s'obtient par somme sur les  $(W_1, W_2)$  des morphismes  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V, W_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V, W_2)) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V', W'_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V', W'_2))$  induits par  $u$ .

*Démonstration.* On a, par le lemme 6.2.29, une bijection naturelle

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\mathcal{E}}(A \oplus A', V) \simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(A, V) \times \text{hom}_{\mathcal{E}}(A', V) \\ & \simeq \coprod_{W_1, W_2 \in \mathcal{G}_r(V)} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V, W_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V, W_2)) \end{aligned}$$

obtenue en associant à des applications linéaires  $f_1 : A \rightarrow V$  et  $f_2 : A' \rightarrow V$  les sous-espaces  $W_1 = f_1(B) \in \mathcal{G}_r(V)$  et  $W_2 = f_2(B') \in \mathcal{G}_r(V)$ , et les morphismes correspondant à  $f_1$  et  $f_2$  dans  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V, W_1))$  et  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V, W_2))$  respectivement.

L'image du sous-ensemble  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A \oplus A', B \oplus B'), (V, W))$  de  $\text{hom}_{\mathcal{E}}(A \oplus A', V) \simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(A, V)$  par cette bijection est le terme de droite de la formule de l'énoncé, puisque l'image de  $W$  par  $f_1 \oplus f_2 : A \oplus A' \rightarrow V$  est égale à  $f_1(B) + f_2(B')$ .  $\square$

**Notation 6.2.31.** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Nous noterons  $Gr(V, W)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_r(V \oplus W)$  formé des sous-espaces  $E$  de  $V \oplus W$  tels que les morphismes  $E \hookrightarrow V \oplus W \rightarrow V$  et  $E \hookrightarrow V \oplus W \rightarrow W$  soient surjectifs.

On définit ainsi un foncteur  $Gr : \mathcal{E}_{surj}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$ , l'action sur les morphismes étant obtenue par un biais analogue à celui détaillé précédemment.

**Proposition 6.2.32.** Soient  $(A, B)$ ,  $(A', B')$  et  $(V, W)$  des objets de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ . Il existe une bijection naturelle

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A, B)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A', B')) \simeq \coprod_{C \in Gr(B, B')} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A \oplus A', C)).$$

La functorialité repose ici sur celle de  $Gr$  (d'une manière similaire à celle explicitée pour la proposition 6.2.30).

*Démonstration.* On a, par le lemme 6.2.29, une bijection naturelle

$$\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A) \times \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A') \simeq \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A \oplus A') \simeq \coprod_{C \in Gr(A \oplus A')} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A \oplus A', C))$$

obtenue en faisant correspondre à une application linéaire  $f : V \rightarrow A \oplus A'$  le sous-espace  $C = f(W)$  de  $A \oplus A'$  et le morphisme  $(V, W) \rightarrow (A \oplus A', C)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  donné par  $f$ . L'image du sous-ensemble  $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A, B)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A', B'))$  de  $\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A) \times \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A')$  par cette bijection est exactement le terme de droite de la formule de l'énoncé.  $\square$

*Remarque 6.2.33.* Les propositions 6.2.30 et 6.2.32 sont spécifiques à la catégorie « globale »  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  ; elles n'ont pas d'analogue dans  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ , par exemple.

Nous terminons cette section par une remarque qui indique en quoi les catégories que nous considérons sont naturelles en termes de représentations génériques des groupes linéaires : les groupes d'automorphismes dans ces catégories permettent de retrouver les sous-groupes triangulaires des groupes linéaires.

*Remarque 6.2.34.* Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels, considérons les monoïdes suivants :

$$M_{\mathbf{P1}}(m, n) = \text{End}_{\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f}(E_{n+m}, E_n \hookrightarrow E_{n+m}),$$

$$M_{G_r}(m, n) = \text{End}_{\mathcal{E}_{G_r,n}^f}(E_{n+m}, E_n),$$

$$\widetilde{M}_{G_r}(m, n) = \text{End}_{\widetilde{\mathcal{E}}_{G_r,n}^f}(E_{n+m}, E_n).$$

Matriciellement, on a

$$M_{\mathbf{P1}}(m, n) = \begin{pmatrix} I_n & \mathcal{M}_{n,m} \\ 0 & \mathcal{M}_m \end{pmatrix} \subset M_{G_r}(m, n) = \begin{pmatrix} GL_n & \mathcal{M}_{n,m} \\ 0 & \mathcal{M}_m \end{pmatrix} \subset \widetilde{M}_{G_r}(m, n) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n & \mathcal{M}_{n,m} \\ 0 & \mathcal{M}_m \end{pmatrix},$$

où l'on désigne par  $\mathcal{M}_{n,m}$  l'espace vectoriel des matrices  $n \times m$ , par  $\mathcal{M}_m$  l'algèbre des matrices carrées  $m \times m$  et par  $I_n \in GL_n$  la matrice identité.

On a donc des suites exactes scindées de monoïdes

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,m}, +) \longrightarrow M_{\mathbf{P1}}(m, n) \xrightarrow{\leftarrow \cdots \leftarrow} (\mathcal{M}_m, \cdot) \longrightarrow 1,$$

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,m}, +) \longrightarrow M_{G_r}(m, n) \xrightarrow{\leftarrow \cdots \leftarrow} GL_n \times (\mathcal{M}_m, \cdot) \longrightarrow 1,$$

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,m}, +) \longrightarrow \widetilde{M}_{G_r}(m, n) \xrightarrow{\leftarrow \cdots \leftarrow} (\mathcal{M}_n, \cdot) \times (\mathcal{M}_m, \cdot) \longrightarrow 1.$$

Si l'on considère les groupes d'automorphismes correspondants, que nous noterons respectivement  $G_{\mathbf{P1}}(m, n)$ ,  $G_{G_r}(m, n)$  et  $\widetilde{G}_{G_r}(m, n)$ , on a

$$G_{\mathbf{P1}}(m, n) = \begin{pmatrix} I_n & \mathcal{M}_{n,m} \\ 0 & GL_m \end{pmatrix} \subset G_{G_r}(m, n) = \begin{pmatrix} GL_n & \mathcal{M}_{n,m} \\ 0 & GL_m \end{pmatrix} = \widetilde{G}_{G_r}(m, n);$$

il existe des suites exactes scindées de groupes analogues aux précédentes.

### 6.3 Les catégories de foncteurs en grassmanniennes

Les catégories de foncteurs associées aux catégories de la section précédente héritent d'une structure très riche : outre les nombreux foncteurs obtenus par précomposition à partir de ceux de la section 6.2, les considérations de la section 6.1 procurent des foncteurs d'intégrale. Nous exposons ici les propriétés élémentaires de ces catégories et de ces foncteurs ; les deux chapitres suivants approfondiront cette étude.

**Définition 6.3.1** (Catégories de foncteurs en grassmanniennes). Étant donné une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit les catégories de foncteurs

$$\mathcal{F}_{G_r, I} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{G_r, I}^f, \mathcal{E}),$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{G_r, I} = \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{E}}_{G_r, I}^f, \mathcal{E}),$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathbf{P1}, n}^f, \mathcal{E}).$$

Ces catégories seront appelées *catégories de foncteurs en grassmanniennes*.

Comme précédemment, nous noterons simplement  $\mathcal{F}_{G_r}$  et  $\widetilde{\mathcal{F}}_{G_r}$  pour  $\mathcal{F}_{G_r, \mathbb{N}}$  et  $\widetilde{\mathcal{F}}_{G_r, \mathbb{N}}$  respectivement.

Les seuls cas que nous considérerons sont ceux où  $I = \mathbb{N}$ ,  $\leq n$  ou  $n$ .

### 6.3.1 La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$

**Notation 6.3.2.** – Soit  $J$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Nous abrègerons la notation des espaces vectoriels  $\text{hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}}$  en  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}$ , et utiliserons une convention analogue pour les groupes d'extensions ou les hom internes. De même, nous noterons les projectifs standard  $P_X^{\mathcal{G}_r, J}$  (où  $X \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ ) plutôt que  $P_X^{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f}$ , et les injectifs standard  $I_X^{\mathcal{G}_r, J}$  plutôt que  $I_X^{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f}$ . L'exposant  $J$  sera omis pour  $J = \mathbb{N}$ .

– Soient  $I$  et  $J$  deux parties de  $\mathbb{N}$  telles que  $J \subset I$ . Nous noterons  $\mathcal{R}_{I, J} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  le foncteur de restriction  $(\text{incl}_{J, I})^*$ . Le foncteur de prolongement par zéro, lorsqu'il est défini (cf. paragraphe 3.3.1), sera noté  $\mathcal{P}_{J, I} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . Les indices seront omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

La proposition 6.1.17 fournit le résultat suivant, dans lequel nous omettons les indices des foncteurs de restriction et de prolongement par zéro (de sorte que la notation  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{P}$  désigne à chaque fois deux foncteurs différents).

**Proposition 6.3.3.** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un diagramme de recollement*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} .$$

**Définition 6.3.4** (Foncteurs fondamentaux  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ ). Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ .

1. On définit le foncteur de *plongement standard*  $\iota_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  comme le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli principal  $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ .
2. Le foncteur de *plongement réduit*  $\kappa_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est le foncteur de précomposition par le foncteur de réduction  $\mathfrak{K}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ .

Explicitement, on a

$$\iota_I(F)(V, W) = F(V)$$

et

$$\kappa_I(F)(V, W) = F(V/W)$$

pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$  et  $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ .

L'indice  $I$  sera omis quand  $I = \mathbb{N}$ ; des conventions analogues vaudront dans les notations suivantes.

*Remarque 6.3.5.* Les foncteurs  $\iota_{\leq n}$  et  $\iota$  s'identifient, avec la notation du paragraphe 6.1.1, aux foncteurs  $\Upsilon_{\mathcal{G}_r, \leq n}$  et  $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}$  respectivement. De même, le foncteur  $\iota_n$  est, selon la convention du paragraphe 6.1.2, le foncteur  $\Upsilon_{\mathcal{G}_r, \leq n, \mathcal{G}_r, \leq n-1}$ .

**Définition 6.3.6** (Foncteurs d'intégrale en grassmanniennes). Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Le foncteur  $\Omega_{\mathcal{G}_r, \leq n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n} \rightarrow \mathcal{F}$  sera noté  $\omega_{\leq n}$ .
- Le foncteur  $\Omega_{\mathcal{G}_r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$  sera noté  $\omega$ .
- Le foncteur  $\Omega_{\mathcal{G}_r, \leq n, \mathcal{G}_r, \leq n-1} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \rightarrow \mathcal{F}$  sera désigné par  $\omega_n$ .

Ces foncteurs seront appelés *foncteurs d'intégrale en grassmanniennes*.

On a ainsi  $\omega_I = \omega_J \circ \mathcal{P}_{I, J}$ , si  $I$  et  $J$  sont deux parties de  $\mathbb{N}$  de la forme  $n, \leq n$  ou  $\mathbb{N}$  telles que  $I \subset J$ .

Les résultats des paragraphes 6.1.1 et 6.1.2 se traduisent comme suit.

**Proposition 6.3.7.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ .*

1. *Le foncteur  $\omega_{\leq n}$  est adjoint à gauche à  $\iota_{\leq n}$ . Il induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$  et la sous-catégorie  $\mathbf{Comod}_{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r, \leq n]}$  de  $\mathcal{F}$ .*
2. *Le foncteur  $\omega$  est adjoint à gauche à  $\iota$ . Il induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et la sous-catégorie  $\mathbf{Comod}_{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]}$  de  $\mathcal{F}$ .*

3. Le foncteur  $\omega_n$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  et la sous-catégorie  $\mathbf{Comod}_{\bar{G}(n)}^{fid}$  de  $\mathcal{F}$  des  $\bar{G}(n)$ -comodules fidèles.
4. On a un isomorphisme

$$\omega_I(X \otimes \iota_I(F)) \simeq \omega_I(X) \otimes F$$

naturel en les objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  et  $F$  de  $\mathcal{F}$ , où  $I = \mathbb{N}$ ,  $\leq n$  ou  $n$ .

**Définition 6.3.8** (Foncteurs fondamentaux entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  et  $\mathcal{F}_{surj}^I$ ). Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ .

1. Le foncteur de *plongement secondaire*  $\rho_I : \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  est le foncteur de précomposition par le foncteur base  $\mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^I$ .
2. Le foncteur d'évaluation généralisée  $\varepsilon_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^I$  est la précomposition par le foncteur de plongement diagonal  $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ .

Explicitement, on a

$$\rho_I(F)(V, W) = F(W)$$

pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj}^I$  et  $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ , et

$$\varepsilon_I(X)(V) = X(V, V)$$

pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  et  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$ .

*Remarque 6.3.9.* Avec l'abus de la remarque 6.2.20, le foncteur  $\varepsilon_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n] \mathbf{Mod}$  s'identifie au foncteur d'évaluation  $\text{ev}_{(E_n, E_n)}$ , ce qui justifie la terminologie employée.

On peut de même voir  $\rho_n$  comme un foncteur  $\mathbb{F}_2[GL_n] \mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ ; il est donné par  $\rho_n(X)(V, W) = \text{Iso}(E_n, W) \otimes_{\mathbb{F}_2[GL_n]} M$ .

Dans la suite, on désigne par  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  la catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{E})$ , selon la notation 3.3.13.

**Définition 6.3.10** (Foncteurs fondamentaux entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  et  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ ). Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ .

1. Le foncteur de *plongement complet*  $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  est la précomposition par le foncteur  $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$ .
2. Le foncteur de *plongement total*  $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  est la précomposition par le foncteur  $\mathfrak{K}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$ .
3. On définit le foncteur de *décalage en grassmanniennes*  $\sigma_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  comme le foncteur de précomposition par le foncteur de plongement relatif  $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ .

Ainsi, on a

$$\xi_I(F)(V, W) = F(V, W),$$

$$\theta_I(F)(V, W) = F(V/W, W)$$

pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  et  $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ , et

$$\sigma_I(X)(A, B) = X(A \oplus B, B)$$

pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ ,  $A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$ .

*Remarque 6.3.11.* Le foncteur  $\theta_I$  et les morphismes  $\theta$  introduits dans la notation 4.2.50 pour définir les foncteurs de Weyl n'interviendront jamais simultanément, il n'y aura donc pas de confusion possible.

On peut considérer (cf. remarque 3.3.14)  $\xi_n$  et  $\theta_n$  comme des foncteurs  $\mathcal{F}_{GL_n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  (et de même  $\sigma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n}$ ).

**Proposition 6.3.12.** *Soit  $J$  une partie de  $\mathbb{N}$ . On a des isomorphismes*

$$P_{\mathcal{E}_J(V,W)}^{\mathcal{G}_r,J} \simeq \iota_J(P_V) \otimes \rho_J(P_W^{\mathcal{E}_{surj}^J}) \quad (6.2)$$

et

$$I_{\mathcal{E}_J(V,W)}^{\mathcal{G}_r,J} \simeq \kappa_J(I_V) \otimes I_{\mathcal{D}_J(W)}^{\mathcal{G}_r,J} \quad (6.3)$$

naturels en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $W$  de  $\mathcal{E}_{surj}^J$ .

*Démonstration.* Le premier isomorphisme est une conséquence formelle de la troisième adjonction de la proposition 6.2.21, le second du second isomorphisme de la proposition 6.2.16.  $\square$

*Remarque 6.3.13.* – Comme le foncteur de plongement relatif est essentiellement surjectif, cette proposition décrit tous les projectifs et tous les injectifs standard de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,J}$ .

- Les injectifs du type  $I_{\mathcal{D}_J(V)}^{\mathcal{G}_r,J}$  ne se ramènent pas facilement à des injectifs de catégories plus simples.

La propriété suivante des foncteurs projectifs et injectifs standard de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  (qui n'a pas d'équivalent dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,I}$  pour  $I \neq \mathbb{N}$ ) est analogue aux assertions 2 et 3 de la proposition 5.4.3.

**Proposition 6.3.14.** – *Il existe un isomorphisme  $\omega(P_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}) \simeq P_V$  naturel en l'objet  $(V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ .*

- *Il existe un isomorphisme  $\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}$  naturel en l'objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ .*

*Démonstration.* Ces deux assertions proviennent par linéarisation du lemme 6.2.29.  $\square$

**Proposition 6.3.15.** *Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{N}$ .*

1. *Les foncteurs  $\iota_I, \sigma_I, \xi_I$  et  $\varepsilon_I$  sont exacts; ils commutent au produit tensoriel, aux limites et aux colimites. De surcroît, les foncteurs  $\iota_I, \sigma_I$  et  $\xi_I$  sont fidèles.*
2. *Les foncteurs  $\kappa_I, \rho_I$  et  $\theta_I$  sont exacts et pleinement fidèles; ils commutent au produit tensoriel, aux limites et aux colimites. De plus, leurs images sont des sous-catégories de Serre de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,I}$ .*

*Démonstration.* On applique la proposition 3.1.14 combinée à la proposition 6.2.23, en utilisant également la proposition 3.3.1 pour la fidélité de  $\iota_I$  et  $\xi_I$ .  $\square$

**Proposition 6.3.16.** *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Le foncteur composé*

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \xrightarrow{\theta_I} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,I} \xrightarrow{\sigma_I} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$$

*est canoniquement isomorphe au foncteur identique.*

Cette propriété découle de la proposition 6.2.22.

**Proposition 6.3.17.** *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Le foncteur  $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,I}$  est adjoint à gauche au foncteur  $\sigma_I$ .*

Ce résultat et le suivant s'obtiennent en combinant les propositions 6.2.21 et 3.1.14. 5.

**Proposition 6.3.18.** *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Le foncteur  $\rho_I : \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,I}$  est adjoint à gauche au foncteur  $\varepsilon_I$ . De surcroît, l'unité  $id \rightarrow \varepsilon_I \rho_I$  de l'adjonction est un isomorphisme.*

Le corollaire 6.2.17 et la proposition 3.3.8 fournissent les adjonctions suivantes.

**Proposition 6.3.19.** *Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  contenant 0. Le foncteur  $\mathcal{R}_{I,0} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,I} \rightarrow \mathcal{F}$  est adjoint :*

- à gauche à  $\kappa_I$ ;
- à droite à  $\mathcal{P}_{0,I}$ .

**Proposition 6.3.20.** *Le foncteur composé  $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}_{surj}$  s'identifie canoniquement au foncteur d'oubli  $o$  du chapitre 5.*

*Démonstration.* En effet, le foncteur composé  $\mathcal{E}_{surj}^f \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{E}^f$  s'identifie au foncteur d'inclusion.  $\square$

Par adjonction, on en déduit (cf. propositions 6.3.7, 6.3.18, 5.4.3 et 1.2.5) le corollaire suivant, que l'on peut évidemment établir par une vérification directe.

**Corollaire 6.3.21.** *Le foncteur  $\omega \circ \rho : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$  est canoniquement isomorphe à  $\varpi$ .*

### 6.3.2 La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$

**Convention 6.3.22.** Dans tout ce paragraphe,  $n$  désigne un entier naturel.

Nous noterons encore  $E_n$ , pour abrégé, l'objet initial  $(E_n, id)$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$ .

Nous introduisons maintenant des foncteurs analogues aux précédents dans le cas  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  et en donnons les propriétés élémentaires. Les démonstrations, entièrement semblables aux précédentes, sont laissées au lecteur.

**Notation 6.3.23.** Nous abrégons respectivement en  $\text{hom}_{\mathbf{P}1,n}$ ,  $P_X^{\mathbf{P}1,n}$ ,  $I_X^{\mathbf{P}1,n}$  les expressions  $\text{hom}_{\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}}$ ,  $P_X^{\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f}$  et  $I_X^{\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f}$ .

**Définition 6.3.24.** 1. Le foncteur de *restriction sans plongement*  $\gamma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est défini comme étant le foncteur de précomposition par  $\text{inc}_n^{\mathbf{P}1}$ .

2. Le foncteur de *plongement standard*  $\iota_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli principal  $\bar{\mathcal{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ .

3. Le foncteur de *plongement réduit*  $\kappa_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est le foncteur de précomposition par  $\bar{\mathfrak{K}}_n$ .

4. On définit le foncteur de *décalage en grassmanniennes*  $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  comme le foncteur de précomposition par le foncteur de décalage pointé  $\mathfrak{S}_n : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$ .

Explicitement, on a

$$\gamma_n(X)(V, u) = X(V, im\ u),$$

$$\iota_n^{\mathbf{P}1}(F)(V, u) = F(V),$$

$$\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)(V, u) = F(\text{coker } u),$$

$$\sigma_n^{\mathbf{P}1}(A)(W) = A(W \oplus E_n, E_n \hookrightarrow W \oplus E_n)$$

pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}$ ,  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ ,  $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ ,  $(V, u : E_n \hookrightarrow V) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$  et  $W \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ .

**Remarque 6.3.25.** 1. Le foncteur  $\iota_n^{\mathbf{P}1}$  est égal à la composition  $\gamma_n \iota_n$ . De même,  $\kappa_n^{\mathbf{P}1} = \gamma_n \kappa_n$ .

2. Nous ne donnons pas de notation pour les foncteurs d'intégrale  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$ , qui ne revêtent pas la même importance que les foncteurs d'intégrale en grassmanniennes précédemment définis.

**Proposition 6.3.26.** 1. *Les foncteurs  $\gamma_n$ ,  $\iota_n^{\mathbf{P}1}$ ,  $\sigma_n^{\mathbf{P}1}$  et  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$  sont exacts et fidèles; ils commutent au produit tensoriel, aux limites et aux colimites.*

2. *Le foncteur  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$  est de plus plein, et son image est une sous-catégorie de Serre de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .*

3. *La composition  $\mathcal{F} \xrightarrow{\kappa_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\sigma_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}$  est canoniquement isomorphe au foncteur identique.*

4. *Le foncteur  $\iota_n^{\mathbf{P}1}$  est adjoint à gauche à  $\sigma_n^{\mathbf{P}1}$ .*

5. *On a des isomorphismes  $P_{\mathfrak{S}_n(V)}^{\mathbf{P}1,n} \simeq \iota_n^{\mathbf{P}1}(P_V)$  et  $I_{\mathfrak{S}_n(V)}^{\mathbf{P}1,n} \simeq \kappa_n^{\mathbf{P}1}(I_V) \otimes I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n}$  naturels en l'objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ .*

6. Le foncteur composé  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod} \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\gamma_n} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , où la première flèche est le foncteur d'oubli de l'action de  $GL_n$  et le second le plongement canonique (donné par les foncteurs constants).

Nous terminons ce paragraphe en donnant d'autres liens entre les catégories de foncteurs en grassmanniennes et  $\mathcal{F}$  en termes de (co)modules (la proposition 6.3.7 ci-avant exposant le cas le plus fondamental).

**Proposition 6.3.27.** *La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est équivalente à la sous-catégorie  $\mathbf{Comod}_{P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ .*

*Démonstration.* Le foncteur

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f)_{\backslash \text{hom}((E_n, E_n), \cdot)} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \quad ((V, W), u) \mapsto (V, u)$$

(associant à un morphisme le morphisme ayant même application linéaire sous-jacente) est une équivalence de catégories, où la catégorie source dérive de la notation 1.1.15. La proposition est donc un cas particulier de la proposition 6.1.11.  $\square$

*Remarque 6.3.28.* Le foncteur  $\text{hom}_{\mathcal{G}r,n}((E_n, E_n), \cdot)$  est canoniquement isomorphe à la composée  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\mathfrak{B}_n} \mathcal{E}_{\text{surj}}^n \xrightarrow{\text{hom}(E_n, \cdot)} \mathbf{Ens}$ . Comme  $\mathcal{E}_{\text{surj}}^n \simeq GL_n$  est équivalente à sa catégorie opposée, on peut remplacer dans la démonstration précédente ce foncteur par un foncteur *contravariant*, et obtenir ainsi sur  $P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$  une structure d'algèbre telle que  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est équivalente à la sous-catégorie  $\mathbf{Mod}_{P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ . Ce phénomène est à rapprocher de la remarque suivante :  $P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$  s'identifie à  $\rho_n(\mathbb{F}_2[GL_n])$ , et  $\mathbb{F}_2[GL_n]$  est un objet auto-dual de  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$  (la dualité consistant à associer à une représentation linéaire la représentation contragrédiante).

**Lemme 6.3.29.** *La catégorie  $(\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)}$  est équivalente à  $\mathcal{E}^f$ .*

*Démonstration.* On vérifie aussitôt que les deux foncteurs introduits ci-après sont des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre.

- On définit un foncteur  $\mathcal{E}^f \rightarrow (\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)}$  en associant à  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  l'objet  $\mathfrak{S}_n(V)$  de  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$  muni du morphisme vers  $E_n$  donné par la projection  $V \oplus E_n \rightarrow E_n$ , et à une application linéaire  $f : V \rightarrow W$  le morphisme  $f \oplus E_n$ .
- On définit un foncteur  $(\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)} \rightarrow \mathcal{E}^f$  en associant à un objet  $((V, u : E_n \hookrightarrow V), r : V \rightarrow E_n)$  de  $(\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)}$  l'espace vectoriel  $\text{coker } u \simeq \text{ker } r$ , et à un morphisme l'application linéaire induite.

$\square$

**Proposition 6.3.30.** *La catégorie  $\mathcal{F}$  est équivalente à la sous-catégorie  $\mathbf{Mod}_{I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n}}$  de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .*

*Démonstration.* On combine le lemme précédent avec la proposition 6.1.32.  $\square$

### 6.3.3 La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r,I}$

**Convention 6.3.31.** Dans ce paragraphe,  $I$  désigne une partie de  $\mathbb{N}$ .

La catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r,I}$  possède un comportement assez différent des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  et  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  : elle n'entre pas dans le cadre étudié à la section 6.1, de sorte qu'elle ne s'interprète pas en termes de (co)modules.

Plutôt que de donner une description complète des foncteurs qui apparaissent naturellement, par précomposition, à partir des foncteurs étudiés dans la section 6.2, nous nous focaliserons sur les liens entre  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r,I}$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ .

**Notation 6.3.32.** Le foncteur de précomposition  $\widetilde{\text{incl}}_I^* : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r,I} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$  sera noté  $\mathfrak{R}_I$ .

Comme dans le cas des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ , les indices  $I$  seront omis dans le cas où  $I = \mathbb{N}$ .



Nous introduisons maintenant un foncteur très analogue au foncteur  $\varpi$ .

**Proposition et définition 6.3.33.** *Il existe un foncteur exact et fidèle  $\mathfrak{J}_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r, I}$  défini de la manière suivante :*

– action sur les objets :

$$\mathfrak{J}_I(X)(V, B) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_{r_I}(B)} X(V, W)$$

- action sur les morphismes : si  $f : (V, B) \rightarrow (V', B')$  est un morphisme de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ,  $\mathfrak{J}_I(X)(f)$  a pour composante  $X(V, W) \rightarrow X(V', W')$  (où  $W \in \mathcal{G}_{r_I}(B)$  et  $W' \in \mathcal{G}_{r_I}(B')$ ) le morphisme induit par  $f$  si  $W' = f(W)$  et 0 sinon,
- fonctorialité : si  $t : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ ,  $\mathfrak{J}_I(t) : \mathfrak{J}_I(X) \rightarrow \mathfrak{J}_I(Y)$  s'obtient sur l'objet  $(V, B)$  par somme directe des  $t(V, W)$  pour  $W \in \mathcal{G}_{r_I}(B)$ .

**Proposition 6.3.34.** *Supposons que la partie  $I$  est de la forme  $\leq n$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) ou  $\mathbb{N}$ . Le foncteur  $\mathfrak{J}_I$  est adjoint à gauche à  $\mathfrak{K}_I$ .*

La vérification de ces propriétés est élémentaire et très analogue aux propositions 5.4.1 et 5.4.3 (ou 6.1.4 et 6.1.7).

**Notation 6.3.35.** L'endofoncteur  $\mathfrak{K}_I \circ \mathfrak{J}_I$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sera noté  $\mathcal{I}_I$ .

Explicitement, on a

$$\mathcal{I}_I(X)(V, W) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}_{r_I}(W)} X(V, B)$$

pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ .

L'unité de l'adjonction de la proposition 6.3.34 procure, dans le cas où  $I$  est de la forme  $\leq n$  ou  $\mathbb{N}$ , une transformation naturelle injective canonique  $id \rightarrow \mathcal{I}_I$ .

**Définition 6.3.36.** – Le foncteur de plongement secondaire  $\mathfrak{p}_I : \mathcal{F}^I \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r, I}$  est défini comme la précomposition par le foncteur d'oubli secondaire  $\mathfrak{B}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^I$ .

- Le foncteur d'évaluation total  $\mathfrak{e}_I : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}^I$  est défini comme la précomposition par le foncteur de plongement diagonal  $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}^I \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ .

Dans la pratique, il n'y aura pas de confusion possible entre la notation  $\mathfrak{p}$  introduite ici et celle utilisée pour désigner l'ensemble des partitions régulières.

*Remarque 6.3.37.* Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{F}_{surj} \\ \mathfrak{J} \downarrow & & \downarrow \varpi \\ \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{F} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{surj} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \mathfrak{J} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \end{array}$$

commutent.

La proposition 6.2.21 fournit l'adjonction suivante.

**Proposition 6.3.38.** *Le foncteur  $\mathfrak{p}_I$  est adjoint à gauche au foncteur  $\mathfrak{e}_I$ .*

Remarque 6.3.39. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} & \xleftarrow{\iota} & \mathcal{F} \\ \mathfrak{R} \uparrow & & \searrow \mathfrak{p} \\ \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} & & \end{array}$$

commute ; en considérant les adjoints à gauche de ces foncteurs, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{F} \\ \mathfrak{J} \downarrow & & \nearrow \epsilon \\ \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} & & \end{array}$$

Cette remarque fournit, par comparaison des unités, la transformation naturelle décrite explicitement ci-dessous.

**Notation 6.3.40.** Nous noterons  $j^\omega : \mathcal{I} \rightarrow \iota \circ \omega$  la transformation naturelle donnée par les inclusions

$$\bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(B)} X(V, W) \hookrightarrow \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} X(V, W) \quad (X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}, (V, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f).$$

Cette transformation naturelle jouera un rôle essentiel au chapitre 8 (section 8.5).

Nous terminons ce paragraphe en introduisant l'auto-dualité de la catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$  que l'on déduit de la proposition/définition 6.2.26.

**Proposition et définition 6.3.41** (Auto-dualité dans  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ ). *Le foncteur  $(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r})^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ , noté  $D$  lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, donné par  $(DF)(V, W) = F((V, W)^\vee)^*$ , définit une bonne auto-dualité dans la catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ .*

Nous établirons au § 8.5.4 une importante propriété de compatibilité entre ce foncteur de dualité et celui de la catégorie  $\mathcal{F}$ .



## Chapitre 7

# Adjonctions et descriptions alternatives des catégories de foncteurs en grassmanniennes

La description de certaines catégories de foncteurs en grassmanniennes comme catégories de comodules donnée dans le chapitre précédent (proposition 6.3.7) repose sur l'adjonction entre les foncteurs exacts et fidèles  $\iota$  et  $\omega$ , via la proposition 1.2.15. Nous exploitons dans ce chapitre d'autres conséquences des adjonctions fondamentales entre les catégories de foncteurs en grassmanniennes et la catégorie  $\mathcal{F}$ , ou les catégories  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{E})$ , essentiellement de l'adjonction entre les foncteurs  $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{Gr,I}$  et  $\sigma_I : \mathcal{F}_{Gr,I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ . Cela permet en particulier de décrire les catégories  $\mathcal{F}_{Gr,I}$  comme catégories de modules sur une monade, par la proposition 1.2.16, duale de la proposition 1.2.15. Cette description, introduite dans la section 7.2, rend très naturelle la description du foncteur adjoint à gauche au foncteur  $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{Gr,I}$ . Elle sous-tend également l'importante suite exacte fonctorielle qui fournit une résolution canonique de tout objet de  $\mathcal{F}_{Gr,I}$  par des objets appartenant à l'image du foncteur  $\xi_I$  (proposition 7.2.19).

Dans le cas des catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , on peut aller plus loin dans cette direction, du fait que l'endofoncteur de  $\mathcal{F}$  apparaissant dans la monade associée à l'adjonction entre  $\iota_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  et  $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  est un foncteur de décalage, dont l'adjoint à droite est bien connu. On en déduit, dans la section 7.3, une description de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  comme catégorie de comodules sur l'injectif standard  $I_{E_n}$ , pour la structure de coalgèbre duale du foncteur en algèbres de groupe  $P_{E_n} = \mathbb{F}_2[\text{hom}(E_n, \cdot)]$ . Cela permet d'introduire commodément l'adjoint à droite au foncteur  $\kappa_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , dont on déduit ensuite l'adjoint à droite au foncteur  $\theta_n : \mathcal{F}_{GL_n} \rightarrow \mathcal{F}_{Gr,n}$ .

La section 7.1 donne quelques propositions reliant la conjecture artinienne dans  $\mathcal{F}$  à des énoncés analogues dans les catégories  $\mathcal{F}_{Gr,n}$ . Elles reposent fondamentalement sur les adjonctions mentionnées, qui mettent en jeu des foncteurs fidèles commutant aux limites et colimites.

Ces considérations, qui illustrent la richesse de la structure des catégories de foncteurs en grassmanniennes, n'ont pas encore pu être explorées plus avant. Beaucoup n'interviendront pas explicitement par la suite, mais elles semblent indispensables à une compréhension approfondie des catégories que nous avons introduites.

Une question ouverte naturelle est la description complète de l'anneau gradué (qui a bien d'autres structures)  $\text{End}_{Gr} \iota(\Gamma^*)$ . Les liens étroits entre  $\text{End}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*)$  et l'algèbre de Steenrod laissent en effet penser que l'anneau  $\text{End}_{Gr} \iota(\Gamma^*)$ , qui contient  $\text{End}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*)$ , peut constituer un objet algébrique intéressant.

## 7.1 La conjecture artinienne dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$

**Proposition 7.1.1.** 1. Si la conjecture artinienne 4.0.2 est satisfaite, alors la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , donc toutes les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , sont localement noethériennes.  
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  est localement noethérienne, la conjecture artinienne est vraie.

*Démonstration.* Supposons la conjecture artinienne vérifiée. Pour tout objet  $(A, B)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ , l'image  $P_A$  du projectif standard  $P_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r}$  par le foncteur exact et fidèle  $\omega$  (cf. proposition 6.3.14) est noethérienne. La proposition 2.1.5 montre alors que  $P_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r}$  est noethérien, donc que  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  est localement noethérienne.

Réciproquement, si une catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  est localement noethérienne, alors l'image par le foncteur exact et fidèle  $\iota_n$  d'un projectif standard de  $\mathcal{F}$  est noethérienne (cf. l'isomorphisme (6.2)), ce qui montre de même que  $\mathcal{F}$  est localement noethérienne.  $\square$

**Proposition 7.1.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La conjecture artinienne équivaut au caractère co-localement artinien de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ .

*Démonstration.* Le foncteur exact et fidèle  $\sigma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n}$  préserve les objets de co-type fini (la proposition 6.3.17 montre que l'image d'un injectif standard de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  par le foncteur  $\sigma_n$  est un injectif standard de  $\mathcal{F}_{GL_n}$ ). D'autre part, la conjecture artinienne implique que  $\mathcal{F}_{GL_n}$  est co-localement artinienne (si  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne co-localement artinienne et  $\mathcal{I}$  une catégorie vérifiant l'hypothèse 3.1.28 et dont le squelette est fini, alors  $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$  est co-localement artinienne). On en déduit ensuite, comme dans la démonstration précédente (en utilisant cette fois la proposition 2.4.7), que la conjecture artinienne implique que  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  est co-localement artinienne.

La réciproque se traite de manière analogue, en considérant le  $\iota_n : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  et la proposition 6.3.14 (et en constatant que la restriction à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  d'un objet de co-type fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  est également de co-type fini).  $\square$

*Remarque 7.1.3.* Si  $I$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ , la conjecture artinienne implique formellement que  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est co-localement artinienne. Il n'en est pas de même pour une partie infinie. Ainsi, on voit par le même genre d'arguments que si  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  est co-localement artinienne, il en est également ainsi de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ , donc de  $\mathcal{F}_{surj}$ .

*Remarque 7.1.4.* Il existe des énoncés analogues reliant la conjecture artinienne à des propriétés de finitude des catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$ .

## 7.2 La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ comme catégorie de modules

**Convention 7.2.1.** Dans cette section, on se donne une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ .

On rappelle que le foncteur  $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$  est adjoint à droite au foncteur  $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , d'où l'on déduit par précomposition que le foncteur  $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est adjoint à gauche à  $\sigma_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  (proposition 6.3.17).

**Notation 7.2.2.** Nous désignerons par  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I} = (\tilde{\Delta}_{surj}^I, u_{\mathcal{G}_r, I}, \mu_{\mathcal{G}_r, I})$  la monade sur  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  associée à l'adjonction entre les foncteurs  $\xi_I$  et  $\sigma_I$ , conformément à la proposition 1.2.12.

Ainsi :

- on a  $\tilde{\Delta}_{surj}^I = \sigma_I \circ \xi_I$ , soit  $\tilde{\Delta}_{surj}^I(F)(A, B) = F(A \oplus B, B)$  sur les objets  $(F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I, A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f, B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I)$ .
- La transformation naturelle  $u_{\mathcal{G}_r, I} : id \rightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$  est l'unité de l'adjonction.
- La transformation naturelle  $\mu_{\mathcal{G}_r, I} : (\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 \rightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$  est donnée par  $\sigma_I(v_{\xi_I})$ , où  $v$  désigne la coïunité de l'adjonction.

Analysons la monade associée à l'adjonction entre les foncteurs  $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$  et  $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  (cf. proposition 6.2.21). Son unité est la transformation naturelle  $id \rightarrow (\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I)\mathfrak{L}_I$  donnée par l'inclusion  $(A, B) \hookrightarrow (A \oplus B, B)$  (de composantes l'inclusion du facteur direct  $A$  et  $id_B$ ). Sa multiplication est donnée par le morphisme  $(A \oplus B \oplus B, B) \rightarrow (A \oplus B, B)$  induit le morphisme  $A \oplus B \oplus B \rightarrow A \oplus B$  somme directe de  $id_A$  et de la somme  $B \oplus B \rightarrow B$ , et par le morphisme identique  $B \rightarrow B$ . En effet, la coïté de l'adjonction est donnée sur l'objet  $(V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  par le morphisme  $(V \oplus W, W) \rightarrow (V, W)$  de composantes  $id_V$  et  $W \hookrightarrow V$ .

En utilisant la proposition 3.1.14, on en déduit le résultat suivant.

**Proposition 7.2.3.** *Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ .*

1. *L'unité  $u_{\mathcal{G}_r, I} : id \hookrightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$  est la transformation naturelle injective telle que  $((u_{\mathcal{G}_r, I})_F)_{(A, B)} : F(A, B) \rightarrow F(A \oplus B, B)$  est induit par le monomorphisme canonique  $(A, B) \hookrightarrow (A \oplus B, B)$  pour tous  $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ ,  $A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$ .*
2. *La multiplication  $\mu_{\mathcal{G}_r, I} : (\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 \rightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$  est fournie sur l'objet  $F$  par le morphisme  $F(A \oplus B \oplus B, B) \rightarrow F(A \oplus B, B)$  induit le morphisme  $A \oplus B \oplus B \rightarrow A \oplus B$  somme directe de  $id_A$  et de la somme  $B \oplus B \rightarrow B$ , et par le morphisme identique  $B \rightarrow B$ .*
3. *Il existe un scindement naturel*

$$F \xrightarrow{(u_{\mathcal{G}_r, I})_F} \tilde{\Delta}_{surj}^I(F) \xrightarrow{(p_{\mathcal{G}_r, I})_F} F$$

où  $(p_{\mathcal{G}_r, I})_F$  est donné sur l'objet  $(A, B)$  par le morphisme induit par l'épimorphisme canonique  $(A \oplus B, B) \twoheadrightarrow (A, B)$ , pour tous  $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ ,  $A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$ .

De plus,  $(F, (p_{\mathcal{G}_r, I})_F)$  est un module sur la monade  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

**Notation 7.2.4.** Le noyau de  $(p_{\mathcal{G}_r, I})_F$ , qui s'identifie donc au conoyau de  $(u_{\mathcal{G}_r, I})_F$ , sera noté  $\Delta_{surj}^I(F)$ . On définit ainsi un endofoncteur exact  $\Delta_{surj}^I$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ .

**Proposition 7.2.5.** *La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est équivalente à la catégorie des modules sur la monade  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ .*

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 1.2.16 (déduite du théorème de Beck).  $\square$

**Convention 7.2.6.** Dans la suite de cette section, nous *identifierons* la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  avec la sous-catégorie des modules sur  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ . Autrement dit, un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sera désormais un couple  $(X, \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  et  $\tilde{m}_X$  un morphisme tel que :

- la composée  $X \xrightarrow{(u_{\mathcal{G}_r, I})_X} \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$  est le morphisme identique ;
- les composées  $(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 X \xrightarrow{(\mu_{\mathcal{G}_r, I})_X} \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$  et  $(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 X \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{surj}^I \tilde{m}_X} \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$  coïncident.

Par abus de notation, nous noterons souvent simplement  $X$  pour  $(X, \tilde{m}_X)$ .

**Notation 7.2.7.** Nous désignerons par  $m_X$  le morphisme  $\Delta_{surj}^I X \hookrightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$ .

Avec ces conventions, les morphismes  $X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sont les morphismes  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}_{surj}^I X & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{surj}^I f} & \tilde{\Delta}_{surj}^I Y \\ \tilde{m}_X \downarrow & & \downarrow \tilde{m}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

commute (condition équivalente à la commutation du diagramme analogue sans tildes).

Le lien avec la définition originelle de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  s'obtient à partir des remarques suivantes :

- le  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ -module associé à un foncteur  $X : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}$  est  $\sigma_I(X)$  (muni de la multiplication dérivant de l'adjonction de la proposition 6.3.17) — autrement dit,  $\sigma_I$  s'identifie au foncteur d'oubli des  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ -modules vers  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  ;
- le foncteur  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}$  associé à un  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ -module  $X$  est le coégalisateur de  $\xi_I(\tilde{m}_X)$  et de la flèche canonique  $\xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I X) \rightarrow \xi_I(X)$  (adjointe à  $id_{\tilde{\Delta}_{surj}^I X}$ ).

Nous identifions maintenant le foncteur  $\theta_I$  en termes de modules sur la monade  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

**Lemme 7.2.8.** *Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , et  $(A, B)$  un objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ . Notons  $p_{A, B} : A \oplus B \rightarrow A$  et  $\pi_{A, B} : A \rightarrow A/B$  les projections canoniques et  $q_{A, B} : A \oplus B \rightarrow A$  le morphisme dont les composantes sont  $id_A$  et l'inclusion  $B \hookrightarrow A$ . La suite*

$$F(A \oplus B, B) \xrightarrow{F(p_{A, B}, id_B) + F(q_{A, B}, id_B)} F(A, B) \xrightarrow{F(\pi_{A, B}, id_B)} F(A/B, B) \rightarrow 0 \quad (7.1)$$

de  $\mathcal{E}$  est exacte.

*Démonstration.* Notons  $i : B \hookrightarrow A$  l'inclusion : on a  $\pi_{A, B} \circ i = 0$ , donc  $\pi_{A, B} \circ q_{A, B} = \pi_{A, B} \circ p_{A, B}$ , ce qui montre que la suite (7.1) est un complexe. La surjectivité de  $F(\pi_{A, B}, id_B)$  provient de ce que  $(\pi_{A, B}, id_B) : (A, B) \rightarrow (A/B, B)$  admet une section.

Pour établir l'exactitude en  $F(A, B)$ , considérons une rétraction  $r : A \rightarrow B$  de  $i$  et notons  $u : (A, B) \rightarrow (A \oplus B, B)$  le morphisme  $(id_A \oplus r, id_B)$ . Alors  $(p_{A, B}, id_B) \circ u = id_{(A, B)}$ , tandis que  $(q_{A, B}, id_B) \circ u$  est nul sur  $(B, 0)$ , donc se factorise par  $(\pi_{A, B}, id_B)$ . Par conséquent, la restriction à  $N = \ker F(\pi_{A, B}, id_B)$  de  $F(u)$  est une section du morphisme  $F(A \oplus B, B) \rightarrow N$  induit par  $F(p_{A, B}, id_B) + F(q_{A, B}, id_B)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 7.2.9.* Cette suite exacte est une partie d'une suite exacte longue dépendant d'une structure simpliciale. La proposition 7.2.19 précisera ces considérations.

On en déduit, compte-tenu des remarques précédentes sur le lien entre les deux descriptions de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , la proposition suivante.

**Proposition 7.2.10.** *Le foncteur  $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est donné sur les objets par  $\theta_I(F) = (F, (p_{\mathcal{G}_r, I})_F : \tilde{\Delta}_{surj}^I F \rightarrow F)$  — cf. proposition 7.2.3.3 — et sur les morphismes par l'égalité  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\theta_I(F), \theta_I(G)) = \text{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(F, G)$ .*

*Autrement dit,  $\theta_I$  identifie  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  à la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  formée des objets  $X$  tels que  $m_X = 0$ .*

*Remarque 7.2.11.* Ce résultat fournit une seconde démonstration de la partie de la proposition 6.3.15 relative au foncteur  $\theta_I$ .

*Exemple 7.2.12.* Pour tout objet  $F$  de  $\mathcal{F}$ , le foncteur  $\omega_1 \kappa_1(F)$  est canoniquement isomorphe au conoyau de l'application naturelle  $\bar{P} \otimes \Delta F \rightarrow \bar{P} \otimes F$  (composée de  $\bar{P} \otimes \Delta F \xrightarrow{j \otimes \Delta F} \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Delta F$ , où  $j$  est le coproduit de  $\bar{P}$ , et de  $\bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Delta F \xrightarrow{\bar{P} \otimes f} \bar{P} \otimes F$ , où  $f$  est la coünité de l'adjonction). Cet isomorphisme s'obtient en combinant la proposition 7.2.10 avec la description explicite de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  en termes de modules sur  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$  donnée précédemment et l'exactitude de  $\omega_1$ .

## Le foncteur $\eta_I$

**Définition 7.2.13** (Foncteur  $\eta_I$ ). On définit un foncteur

$$\eta_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$$

par  $\eta_I(X) = \text{coker } m_X$  sur les objets; si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ -modules,  $\eta_I(f) : \eta_I(X) \rightarrow \eta_I(Y)$  est le morphisme induit par  $f$ .

Ainsi,  $\eta_I(X)$  est naturellement un quotient de l'objet de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  sous-jacent à  $X$ , c'est-à-dire de  $\sigma_I(X)$ .

**Lemme 7.2.14.** *Pour tout foncteur  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , il existe un épimorphisme naturel  $X \rightarrow \theta_I \eta_I(X)$ . De plus,  $\theta_I \eta_I(X)$  est le plus grand quotient de  $X$  appartenant à l'image du foncteur  $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .*

*Démonstration.* Dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) & \xrightarrow{m_X} & \sigma_I(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{surj}^I \eta_I(X) & \xrightarrow{0} & \eta_I(X) \end{array}$$

commute, de sorte que la projection  $\sigma_I(X) \rightarrow \eta_I(X)$  induit un épimorphisme  $X \rightarrow \theta_I \eta_I(X)$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , par la proposition 7.2.10.

Cette proposition montre aussi qu'un morphisme  $X \rightarrow \theta_I(F)$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , où  $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , est un morphisme  $f : \sigma_I(X) \rightarrow F$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) & \xrightarrow{m_X} & \sigma_I(X) \\ \sigma_I(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta_{surj}^I F & \xrightarrow{0} & F \end{array}$$

commute, c'est-à-dire tel que  $f \circ m_X = 0$ . Un tel morphisme se factorise donc par le conoyau  $\eta_I(X)$  de  $m_X$ .  $\square$

**Proposition 7.2.15.** *Le foncteur  $\eta_I$  est adjoint à gauche au foncteur  $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du lemme précédent et de la proposition 6.3.15.  $\square$

**Proposition 7.2.16.** *Il existe des isomorphismes de foncteurs  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$*

$$\eta_I \circ \xi_I \simeq \eta_I \circ \theta_I \simeq id.$$

*Démonstration.* L'isomorphisme  $\eta_I \circ \xi_I \simeq id$  vient de ce que le foncteur  $\eta_I \circ \xi_I$  est adjoint à gauche à  $\sigma_I \circ \theta_I \simeq id$  (proposition 6.3.16).

L'isomorphisme  $\eta_I \circ \theta_I \simeq id$  découle de la définition de  $\eta_I$ , puisque  $m_{\theta_I(F)} = 0$  par la proposition 7.2.10.  $\square$

*Remarque 7.2.17.* Le diagramme naturel en l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$

$$\begin{array}{ccc} \xi_I \sigma_I(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \theta_I \sigma_I(X) & \longrightarrow & \theta_I \eta_I(X) \end{array}$$

dont la flèche supérieure est la coïté de l'adjonction, la flèche inférieure est induite par l'épimorphisme canonique  $\sigma_I(X) \rightarrow \eta_I(X)$ , la flèche de droite déduite du lemme 7.2.14 et la flèche de gauche de l'épimorphisme canonique  $\xi_I \rightarrow \theta_I$ , est commutatif *cocartésien*.

En effet, en appliquant le foncteur exact et fidèle  $\sigma_I$  à ce diagramme, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}_{surj}^I \sigma_I(X) & \xrightarrow{\tilde{m}_X} & \sigma_I(X) \\ (p_{\mathcal{G}_r, I})_{\sigma_I(X)} \downarrow & & \downarrow \\ \sigma_I(X) & \longrightarrow & \eta_I(X) \end{array}$$

(modulo les identifications déduites de  $\sigma_I \theta_I \simeq id$ ), qui est commutatif et cocartésien par définition de  $\eta_I(X)$ .



**Proposition 7.2.18.** *Il existe un isomorphisme*

$$\eta_I(X \otimes Y) \simeq \eta_I(X) \otimes \eta_I(Y)$$

naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

*Démonstration.* La commutation de  $\tilde{\Delta}_{surj}^I$  au produit tensoriel procure un isomorphisme canonique  $\Delta_{surj}^I(X \otimes Y) \simeq (\Delta_{surj}^I X \otimes Y) \oplus (X \otimes \Delta_{surj}^I Y) \oplus (\Delta_{surj}^I X \otimes \Delta_{surj}^I Y)$ , dans lequel  $m_{X \otimes Y}$  se lit comme le morphisme de composantes  $\Delta_{surj}^I X \otimes Y \xrightarrow{m_X \otimes Y} X \otimes Y$ ,  $X \otimes \Delta_{surj}^I Y \xrightarrow{X \otimes m_Y} X \otimes Y$  et  $\Delta_{surj}^I X \otimes \Delta_{surj}^I Y \xrightarrow{m_X \otimes m_Y} X \otimes Y$ . Par conséquent, l'image de  $m_{X \otimes Y}$  est la somme des sous-objets  $im(m_X) \otimes Y$ ,  $X \otimes im(m_Y)$  et  $im(m_X) \otimes im(m_Y)$  de  $X \otimes Y$ , i.e.  $im(m_X) \otimes Y + X \otimes im(m_Y) = \ker(X \otimes Y \rightarrow \eta_I(X) \otimes \eta_I(Y))$ . Ainsi,  $\text{coker } m_{X \otimes Y} = \eta_I(X \otimes Y)$  s'identifie à  $\eta_I(X) \otimes \eta_I(Y)$ .  $\square$

## Résolution canonique et algèbre homologique

**Proposition 7.2.19.** *Il existe une suite exacte*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^n \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \xi_I \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I \sigma_I(X) \rightarrow X \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

naturelle en l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

*Démonstration.* Nous revenons à la définition originelle de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , et notons  $\mathbf{E}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ens}^f$  formée des ensembles finis non vides.

On définit un foncteur  $a : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \times \mathbf{E}^{op} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  en associant à un objet  $(V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  et à un ensemble fini non vide  $E$  la somme amalgamée de  $V$  et de  $W^E$  relativement aux monomorphismes  $W \hookrightarrow V$  (inclusion) et  $W \hookrightarrow W^E$  (plongement diagonal — on utilise ici la non-vacuité de  $E$ ) muni de la base  $W$ . L'action sur les morphismes se déduit de la functorialité de l'association  $\mathcal{E}^f \times (\mathbf{Ens}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$   $(V, E) \mapsto V^E \simeq V \otimes \mathbb{F}_2^E$ . On remarque que si  $E$  est de cardinal  $n$ , l'endofoncteur  $a(\cdot, E)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  est isomorphe à la  $n - 1$ -ième itérée du foncteur  $\mathcal{L}_I \circ (\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I)$ .

Par restriction à la sous-catégorie simpliciale  $\mathbf{\Delta}$  de  $\mathbf{E}$  (squelette de la sous-catégorie des ensembles totalement ordonnés, les morphismes étant les applications croissantes), on en déduit un foncteur  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \times \mathbf{\Delta}^{op} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , puis  $c_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f)$ . Ce foncteur vérifie les propriétés suivantes :

- en degré zéro, on a  $(c_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_0 \simeq id$ ;
- en degré un, on a  $(c_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_1 \simeq \mathcal{L}_I \circ (\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I)$ ;
- plus généralement, en degré  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $(c_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_n \simeq \mathcal{L}_I \circ ((\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I) \mathcal{L}_I)^{n-1} \circ (\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I)$ .

Par précomposition, on en déduit un foncteur

$$C_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \times \mathbf{\Delta}^{op}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}).$$

Les remarques précédentes montrent que  $(C_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_0 \simeq id$  et  $(C_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_n \simeq \xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I$  pour  $n > 0$ .

Le complexe de Moore associé à cet objet simplicial fournit dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  un complexe

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^n \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \xi_I \tilde{\Delta}_{surj}^I \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I \sigma_I(X) \rightarrow X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

naturel en  $X$ . Nous allons montrer qu'il est acyclique. Évaluée sur un objet  $(V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ , sa différentielle  $\partial_n : (C_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_n \rightarrow (C_{\mathcal{G}_r, I}^{\mathbf{\Delta}})_{n-1}$  est la somme des  $n + 1$  morphismes induits par  $[v, w_0, \dots, w_n] \mapsto [v, w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n]$  (le chapeau signifiant que le terme considéré doit être omis), où l'on désigne par  $[v, w_0, \dots, w_n]$  la classe dans  $V \oplus \underset{W}{W^{n+1}}$  (espace vectoriel sous-jacent à

$(c_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_n(V, W)$  de  $(v, w_0, \dots, w_n) \in V \oplus W^{n+1}$ . On obtient donc une homotopie entre les endomorphismes nul et identique de ce complexe en considérant les morphismes induits par  $[v, w_0, \dots, w_n] \mapsto [v, w_0, \dots, w_n, \pi(v)]$ , où  $\pi : V \rightarrow W$  est un projecteur.

La suite exacte de l'énoncé s'obtient en considérant le complexe normalisé associé à  $C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta$ , qui est homotopiquement équivalent au complexe de Moore, donc également acyclique.  $\square$

*Remarque 7.2.20.* – Cette propriété repose uniquement sur la proposition 7.2.3.3 (relative au scindement naturel de la monade  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ ). Nous avons préféré en donner une démonstration directe car les objets simpliciaux de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  qui apparaissent sont particulièrement naturels, et plus parlants que la construction générale d'un objet simplicial canonique à partir d'une monade scindée.

- Les monades et les comonades (en particulier, celles qui proviennent d'adjonctions) fournissent un cadre général efficace pour faire de l'algèbre homologique, y compris dans un contexte non abélien ; la proposition 7.2.19 et les quelques conséquences que nous développons en sont un cas particulier. On trouvera dans [BB69] une exposition systématique de ces notions.

On prendra garde au fait que la notion de résolution canonique dans ce cadre général est légèrement différente (on part d'une comonade pour obtenir une résolution homologique). En appliquant le foncteur  $\sigma_I$  à la résolution de la proposition 7.2.19, on obtient la résolution canonique pour la comonade associée à l'adjonction entre  $\xi_I$  et  $\sigma_I$  qui sert de point de départ à [BB69]. La possibilité de « relever » cette résolution dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  en une résolution dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  provient du scindement de la monade  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$  ; alors que la résolution initiale dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  n'apporte essentiellement rien, la proposition 7.2.19 constitue un résultat important sur la structure de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

**Définition 7.2.21** (Résolution canonique). Le complexe concentré en degrés positifs

$$\cdots \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^n \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I(X) \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_I \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I \sigma_I(X)$$

de la proposition 7.2.19 est appelé *résolution canonique* de l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . Nous la noterons  $\mathfrak{R}_{\bullet}^{\mathcal{G}_r, I}(X)$ . Ainsi,  $\mathfrak{R}_n^{\mathcal{G}_r, I}(X) = \xi_I(\Delta_{surj}^I)^n \sigma_I(X)$  si  $n \geq 0$ , 0 sinon.

**Corollaire 7.2.22.** *Il existe une suite spectrale du premier quadrant naturelle en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  dont le terme  $E^1$  est donné par*

$$E_{p,q}^1 = \text{Ext}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}^p((\Delta_{surj}^I)^q \sigma_I(X), \sigma_I(Y))$$

et dont l'aboutissement est  $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, I}^*(X, Y)$ .

*Démonstration.* On considère les deux suites spectrales du bicomplexe  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathfrak{R}_{\bullet}^{\mathcal{G}_r, I}(X), J^*(Y))$ , où  $J^*(Y)$  désigne une résolution injective de  $Y$  (que l'on peut choisir fonctorielle en  $Y$  par la remarque 1.3.17) — cf. [ML63], ch. XI, §6. La suite spectrale obtenue en prenant d'abord la différentielle de  $\mathfrak{R}_{\bullet}^{\mathcal{G}_r, I}(X)$  dégénère au terme  $E^2$ , donné par  $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, I}^*(X, Y)$ , tandis que celle obtenue en considérant d'abord la différentielle de  $J^*(Y)$  a le terme  $E^1$  indiqué dans l'énoncé, par adjonction entre les foncteurs exacts  $\xi_I$  et  $\sigma_I$ .  $\square$

**Notation 7.2.23.** Étant donné  $n \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $h_n^{\mathcal{G}_r, I} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  le  $n$ -ième foncteur dérivé gauche de  $\eta_I$  (qui est exact à droite par la proposition 7.2.15).

*Remarque 7.2.24.* Les foncteurs dérivés de  $\eta_I$  mesurent, intuitivement, le défaut d'essentielle surjectivité du foncteur  $\theta_I$ , donc la différence homologique entre les catégories  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . Cela motive la notation employée pour ces foncteurs.

En effet, si l'on se restreint aux foncteurs finis, nous verrons au chapitre suivant que tout objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  s'obtient par extensions successives de foncteurs appartenant à l'image du foncteur  $\theta_I$ . La description de ces objets équivaut donc essentiellement au calcul de groupes d'extensions entre

deux objets de l'image de  $\theta_I$ . Ces calculs font naturellement intervenir les foncteurs  $h_n^{\mathcal{G}r,I}$  : il existe une suite spectrale du premier quadrant

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Ext}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}^p(h_q^{\mathcal{G}r,I}(X), F) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{G}_{r,I}}^*(X, \theta_I(F))$$

naturelle en les objets  $F$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ .

**Proposition 7.2.25.** *Pour tout entier  $n > 0$  et tout objet  $F$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , on a  $h_n^{\mathcal{G}r,I}(\xi_I(F)) = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $P_\bullet$  une résolution projective de  $F$ . Comme le foncteur  $\xi_I$  est exact et préserve les projectifs (son adjoint à droite  $\sigma_I$  est exact),  $\xi(P_\bullet)$  est une résolution projective de  $\xi_I(F)$ . La proposition 7.2.16 montre que  $\eta_I \xi_I(P_\bullet)$  s'identifie à  $P_\bullet$ . Ce complexe, dont l'homologie est (isomorphe à)  $h_*^{\mathcal{G}r,I}(\xi_I(F))$ , est donc acyclique en degrés strictement positifs.  $\square$

**Corollaire 7.2.26.** *Le foncteur gradué  $h_*^{\mathcal{G}r,I}$  est canoniquement isomorphe à l'homologie du complexe  $\eta_I(\mathfrak{R}_\bullet^{\mathcal{G}r,I})$  de foncteurs  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ .*

*Exemple 7.2.27* (Calcul sur les injectifs standard — cas  $I = \mathbb{N}$ ). La proposition 6.3.14 permet un calcul rapide des objets  $h_*^{\mathcal{G}r}(I_{(V,W)}^{\mathcal{G}r})$ . En effet, par les propositions 7.2.16 et 7.2.25, on a  $h_0^{\mathcal{G}r}(\iota(I_V)) \simeq I_V$ , où l'on plonge  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  par le foncteur  $\cdot \boxtimes \mathbb{F}_2$ , et  $h_n^{\mathcal{G}r}(\iota(I_V)) = 0$  si  $n \neq 0$ . Comme  $\eta(I_{(V,0)}) \simeq \eta(\kappa(I_V)) \simeq I_V$  (par les propositions 6.3.12 et 7.2.16), on obtient finalement que :

- l'objet gradué  $h_*^{\mathcal{G}r}(I_{(V,W)}^{\mathcal{G}r})$  est nul si  $\dim W > 0$ ;
- l'objet gradué  $h_*^{\mathcal{G}r}(I_{(V,0)}^{\mathcal{G}r})$  est concentré en degré 0, où il est naturellement isomorphe à  $I_V$ .

La proposition 7.2.18 fournit la formule de Künneth suivante.

**Proposition 7.2.28.** *Il existe un isomorphisme d'objets gradués de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$*

$$h_*^{\mathcal{G}r,I}(X \otimes Y) \simeq h_*^{\mathcal{G}r,I}(X) \otimes h_*^{\mathcal{G}r,I}(Y)$$

naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ .

*Démonstration.* Comme le foncteur  $\xi_I$  commute au produit tensoriel, la proposition 7.2.25 montre que le complexe total du produit tensoriel des résolutions canoniques de  $X$  et  $Y$  est une résolution  $\eta_I$ -acyclique de  $X \otimes Y$ . L'homologie de ce complexe étant naturellement isomorphe au produit tensoriel de  $h_*^{\mathcal{G}r,I}(X)$  et  $h_*^{\mathcal{G}r,I}(Y)$  (cf. [ML63], ch. V, th. 10.1 — le cas des modules projectifs se transporte sans modification à une catégorie tensorielle exacte quelconque), on en déduit la proposition.  $\square$

### 7.3 L'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \simeq \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$

L'analogie des considérations précédentes dans les catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  permet d'obtenir l'équivalence de catégories qui donne son titre à cette section. Les structures que l'on en déduit constituent une justification essentielle à l'étude des catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , dont nous verrons en fin de chapitre comment elle peut intervenir dans les catégories de type  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ .

**Convention 7.3.1.** Dans cette section, on se donne un entier naturel  $n$ .

On rappelle que le foncteur  $\iota_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est adjoint à gauche au foncteur  $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  (proposition 6.3.26.4).

**Proposition et définition 7.3.2.** *La monade de  $\mathcal{F}$  associée à l'adjonction entre les foncteurs  $\iota_n^{\mathbf{P}1}$  et  $\sigma_n^{\mathbf{P}1}$  conformément à la proposition 1.2.12, que nous désignerons par  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n} = (\Delta_{E_n}, u_{\mathbf{P}1,n}, \mu_{\mathbf{P}1,n})$ , est donnée comme suit.*

- Le foncteur  $\Delta_{E_n}$  est le foncteur de décalage de  $\mathcal{F}$  introduit au paragraphe 4.2.1.

- La transformation naturelle  $u_{\mathbf{P}1,n} : id \rightarrow \Delta_{E_n}$  (unité de l'adjonction) est induite par l'application linéaire  $0 \rightarrow E_n$ , compte-tenu de l'identification entre  $id$  et  $\Delta_0$ .
- La multiplication  $\mu_{\mathbf{P}1,n} : (\Delta_{E_n})^2 \simeq \Delta_{E_n \oplus E_n} \rightarrow \Delta_{E_n}$  est la transformation naturelle induite par la somme  $E_n \oplus E_n \rightarrow E_n$ .

En outre, il existe un scindement naturel  $id \xrightarrow{u_{\mathbf{P}1,n}} \Delta_{E_n} \xrightarrow{p_{\mathbf{P}1,n}} id$ , où  $p_{\mathbf{P}1,n}$  est induit par l'application linéaire  $E_n \rightarrow 0$ .

**Proposition 7.3.3.** *La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est équivalente à la catégorie des modules sur la monade  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n}$  de  $\mathcal{F}$ .*

Ces deux propositions se démontrent de manière analogue aux propositions 7.2.3 et 7.2.5.

**Convention 7.3.4.** Dans la suite de cette section, nous *identifierons* la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  avec la sous-catégorie des modules sur  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n}$  de  $\mathcal{F}$ . Autrement dit, un objet de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  sera désormais un couple  $(X, \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{F}$  et  $m_X$  un morphisme tel que :

- la composée  $X \xrightarrow{(u_{\mathbf{P}1,n})_X} \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X$  est le morphisme identique ;
- les composées  $(\Delta_{E_n})^2 X \xrightarrow{(\mu_{\mathbf{P}1,n})_X} \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X$  et  $(\Delta_{E_n})^2 X \xrightarrow{\Delta_{E_n} m_X} \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X$  coïncident.

Par abus, nous noterons parfois simplement  $X$  pour  $(X, m_X)$ .

**Notation 7.3.5.** Le morphisme  $X \rightarrow X \otimes I_{E_n}$  adjoint à  $m_X$  (cf. proposition 4.2.5) sera noté  $\psi_X$  dans la suite de cette section.

Nous indiquons, dans la proposition suivante, l'analogue du foncteur  $\eta_I$  de la section précédente. La démonstration, très similaire à celle des propositions 7.2.15, 7.2.16 et 7.2.18, est de ce fait omise.

**Proposition et définition 7.3.6** (Foncteur  $\eta_n^{\mathbf{P}1}$ ). *1. On définit le foncteur  $\eta_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  comme le coégalisateur des deux transformations naturelles  $p_{\mathbf{P}1,n}$  (cf. notation de la proposition 7.3.2) et  $m : \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P}1} \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1}$ .*

*2. Le foncteur  $\eta_n^{\mathbf{P}1}$  est adjoint à gauche au foncteur  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$ .*

*3. Il existe des isomorphismes*

$$\eta_n^{\mathbf{P}1} \circ \kappa_n^{\mathbf{P}1} \simeq \eta_n^{\mathbf{P}1} \circ \iota_n^{\mathbf{P}1} \simeq id.$$

*4. Le foncteur  $\eta_n^{\mathbf{P}1}$  commute au produit tensoriel à isomorphisme naturel près.*

On peut introduire, comme dans la section précédente, une notion de résolution canonique dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , grâce à laquelle on peut calculer les foncteurs dérivés du foncteur  $\eta_n^{\mathbf{P}1}$ , et relier les groupes d'extension dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  à ceux de  $\mathcal{F}$  par une suite spectrale. Plutôt que de détailler ces considérations, nous abordons des constructions plus spécifiques à la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .

*Remarque 7.3.7.* Pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie, le foncteur  $P_V$  est muni d'une structure naturelle d'algèbre commutative, dont la multiplication est le morphisme  $P_V \otimes P_V \simeq P_{V \oplus V} \rightarrow P_V$  induit par la diagonale  $V \rightarrow V \oplus V$  et l'unité  $P_V \rightarrow \mathbb{F}_2 \simeq P_0$  par  $0 \rightarrow V$ . Explicitement, la structure d'algèbre sur les espaces vectoriels  $P_V(W) = \mathbb{F}_2[\text{hom}(V, W)]$  qui s'en déduit est celle de l'algèbre du groupe abélien  $\text{hom}(V, W)$ .

En utilisant le foncteur de dualité  $D$ , on en déduit une structure naturelle de coalgèbre cocommutative sur les injectifs standard  $I_V$  de  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 7.3.8.** *Il existe une équivalence de catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$  qui factorise le foncteur  $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  à travers le foncteur d'oubli  $\mathbf{Comod}_{I_{E_n}} \rightarrow \mathcal{F}$ .*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} & \xrightarrow{\sigma_n^{\mathbf{P}1}} & \mathcal{F} \\ & \searrow \simeq & \uparrow \\ & & \mathbf{Comod}_{I_{E_n}} \end{array}$$

*Démonstration.* La proposition découle de ce qu'une flèche  $\Delta_{E_n} X \rightarrow X$  de  $\mathcal{F}$  fait de  $X$  un module sur  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n}$  si et seulement si la flèche adjointe  $X \rightarrow X \otimes I_{E_n}$  définit une structure de  $I_{E_n}$ -comodule sur  $X$ . En effet, la multiplication de  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n}$  comme la comultiplication de  $I_{E_n}$  sont induites par la somme  $E_n \oplus E_n \rightarrow E_n$ , et l'unité de  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n}$  comme la coïunité de  $I_{E_n}$  proviennent du morphisme  $0 \rightarrow E_n$ .  $\square$

*Remarque 7.3.9.* Il n'y a pas d'analogue simple à cette proposition en termes des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ , car l'adjoint à droite au foncteur  $\Delta_{surj}^I$  (qui existe par le corollaire 1.3.18) semble délicat à comprendre.

*Remarque 7.3.10.* La proposition 7.3.8 est à comparer avec l'équivalence de catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Comod}_{\tilde{P}_n}^{fid}$  (fournie par un foncteur d'intégrale) déduite de la proposition 6.1.23.

Dans  $\mathcal{F}$ , les  $\tilde{P}_n$ -comodules fidèles sont très différents des  $I_{E_n}$ -comodules; par exemple, les premiers ne sont jamais finis (hormis 0), alors que tout objet de  $\mathcal{F}$  peut être muni d'une structure de  $I_{E_n}$ -comodule (on notera qu'il n'y a plus d'hypothèse de fidélité). Cette observation est à rapprocher des structures d'algèbre très différentes obtenues par évaluation sur les duals (plus intuitifs)  $D\tilde{P}_n$  (algèbre de Boole) et  $P_{E_n}$  (algèbre d'un groupe abélien fini).

## Produit cotensoriel et foncteur $\chi_n^{\mathbf{P}1}$

**Convention 7.3.11.** Dans la suite de cette section, nous identifierons les catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  et  $\mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$ . En particulier, la coalgèbre  $I_{E_n}$  étant cocommutative, on dispose dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  d'un produit cotensoriel  $\square_{I_{E_n}}$  (cf. définition 1.6.14), qui sera noté simplement  $\square$  par la suite; c'est un bifoncteur exact à gauche.

Dans l'identification de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  à  $\mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$ , le foncteur  $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  correspond au foncteur d'oubli.

*Remarque 7.3.12.* Le coproduit  $\psi_{X \otimes Y}$  d'un produit tensoriel de deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est égal à la composée

$$X \otimes Y \xrightarrow{\psi_X \otimes \psi_Y} (X \otimes I_{E_n}) \otimes (Y \otimes I_{E_n}) \simeq (X \otimes Y) \otimes (I_{E_n} \otimes I_{E_n}) \xrightarrow{(X \otimes Y) \otimes a_n} (X \otimes Y) \otimes I_{E_n}$$

où  $a_n : I_{E_n} \otimes I_{E_n} \rightarrow I_{E_n}$  est le produit du foncteur en algèbres de Boole  $I_{E_n}$ . Ainsi, le produit tensoriel de la catégorie de comodules  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  provient de la structure d'algèbre sur  $I_{E_n}$ . Le fait que le produit tensoriel de deux  $I_{E_n}$ -comodules est naturellement un  $I_{E_n}$ -comodule provient de la compatibilité des structures d'algèbre et de coalgèbre sur  $I_{E_n}$ , qui est une *algèbre de Hopf* de la catégorie tensorielle  $\mathcal{F}$ .

**Notation 7.3.13.** Dans cette section, nous noterons  $j_F : F \hookrightarrow F \otimes I_{E_n}$ , pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ , l'inclusion canonique déduite de  $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow I_{E_n}$ .

**Proposition 7.3.14.** *Le foncteur  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$  associe à un objet  $F$  de  $\mathcal{F}$  le  $I_{E_n}$ -comodule  $(F, j_F)$ .*

*Ainsi, le foncteur  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$  identifie  $\mathcal{F}$  à la sous-catégorie de Serre des  $I_{E_n}$ -comodules  $X$  tels que  $\psi_X = j_X$ .*

*Démonstration.* De manière semblable à la proposition 7.2.10, on voit que  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)$  est le  $\mathcal{T}_{\mathbf{P}1,n}$ -module  $(F, (p_{\mathbf{P}1,n})_F)$ . La proposition se déduit alors de ce que le morphisme  $(p_{\mathbf{P}1,n})_F : \Delta_{E_n} F \rightarrow F$  est adjoint à  $j_F$ .  $\square$

**Corollaire 7.3.15.** *Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ . Les morphismes  $\psi_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F) \otimes X}$  et  $F \otimes \psi_X : F \otimes \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \rightarrow F \otimes \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes I_{E_n}$  de  $\mathcal{F}$  sont égaux.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la proposition 7.3.14 et de la remarque 7.3.12.  $\square$

*Remarque 7.3.16.* On a un monomorphisme naturel  $\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X \square Y) \hookrightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes Y) \simeq \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes \sigma_n^{\mathbf{P}1}(Y)$ ; il ne provient pas d'un morphisme naturel  $X \square Y \rightarrow X \otimes Y$ . En revanche, le corollaire 7.3.15 montre qu'il est induit par un monomorphisme naturel  $X \square Y \hookrightarrow \kappa_n^{\mathbf{P}1} \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes Y$  (et aussi, symétriquement, par un monomorphisme naturel  $X \square Y \hookrightarrow X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1} \sigma_n^{\mathbf{P}1}(Y)$ ).

**Définition 7.3.17** (Foncteur  $\chi_n^{\mathbf{P}1}$ ). On définit le foncteur  $\chi_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  par la composition suivante.

$$\chi_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\cdot \square_{\mathbb{F}_2}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\sigma_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}$$

Ainsi,  $\chi_n^{\mathbf{P}1}$  est l'égalisateur des transformations naturelles  $\psi$  et  $j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}} : \sigma_n^{\mathbf{P}1} \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1} \otimes I_{E_n}$ .

**Proposition 7.3.18.** *Le foncteur  $\chi_n^{\mathbf{P}1}$  est adjoint à droite à  $\kappa_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .*

*Démonstration.* Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $X$  un  $I_{E_n}$ -comodule. Par la proposition 7.3.14,  $\text{hom}_{\mathbf{P}1,n}(\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F), X)$  s'identifie à l'ensemble des morphismes  $f : F \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)$  de  $\mathcal{F}$  tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \\ j_F \downarrow & & \downarrow \psi_X \\ F \otimes I_{E_n} & \xrightarrow{f \otimes I_{E_n}} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes I_{E_n} \end{array}$$

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \\ j_F \downarrow & & \downarrow j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)} \\ F \otimes I_{E_n} & \xrightarrow{f \otimes I_{E_n}} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes I_{E_n} \end{array}$$

commute, la condition précédente revient à dire que le morphisme  $f$  est à valeurs dans l'égalisateur des morphismes  $j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)}$  et  $\psi_X$ , qui est  $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X)$ . Cela démontre la proposition.  $\square$

**Proposition 7.3.19.** *Il existe des isomorphismes naturels  $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)) \simeq \chi_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F$  et  $X \square \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F) \simeq \kappa_n^{\mathbf{P}1}(\chi_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F)$  pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  et  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Le foncteur  $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F))$  est l'égalisateur des flèches  $\psi_{X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)} = \psi_X \otimes F$  (par le corollaire 7.3.15) et  $j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F))} = j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)} \otimes F$ , il s'identifie donc canoniquement au produit tensoriel de  $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X)$  et  $F$ .

Par ailleurs,  $X \square \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)$  est l'égalisateur des flèches  $X \otimes F \xrightarrow{\psi_X \otimes F} X \otimes I_{E_n} \otimes F$  et  $X \otimes F \xrightarrow{X \otimes \psi_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)}} X \otimes F \otimes I_{E_n} \simeq X \otimes I_{E_n} \otimes F$ ; comme  $X \otimes \psi_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)} = X \otimes j_F \simeq j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)} \otimes F$  (modulo l'isomorphisme d'échange des facteurs du produit tensoriel), ce foncteur s'identifie (dans  $\mathcal{F}$ ) à  $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F$ . Il reste à voir que sa structure de  $I_{E_n}$ -comodule est triviale, ce qui provient de l'inclusion  $X \square \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F) \hookrightarrow \kappa_n^{\mathbf{P}1} \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F) \simeq \kappa_n^{\mathbf{P}1}(\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F)$  (cf. remarque 7.3.16).  $\square$

*Remarque 7.3.20.* On peut expliciter l'équivalence de catégories de la proposition 6.3.30 à l'aide des foncteurs  $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$  et  $\chi_n^{\mathbf{P}1}$ . Ainsi, on vérifie que les foncteurs

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\kappa_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n} \otimes \cdot} \mathbf{Mod}_{I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n}}$$

et

$$\mathbf{Mod}_{I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n}} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\chi_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}$$

sont des équivalences réciproques l'une de l'autre.

**Le foncteur**  $\chi_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n}$ 

Nous revenons maintenant à la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ , en montrant comment les résultats précédents peuvent être utilisés pour en étudier certaines propriétés.

Nous commençons par préciser le lien entre  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ .

- Proposition et définition 7.3.21.** 1. Le groupe linéaire  $GL_n$  agit à droite sur la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$  : pour tout  $g \in GL_n$ , on définit un foncteur  $\tau_g : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$  par  $(V, u) \mapsto (V, u \circ g)$  sur les objets et par l'égalité  $\text{hom}_{\mathbf{P}1,n}((V, u), (V', u')) = \text{hom}_{\mathbf{P}1,n}((V, u \circ g), (V', u' \circ g))$  sur les morphismes, et l'on a  $\tau_1 = \text{id}$  et  $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{hg}$  pour tous  $g, h \in GL_n$ .
2. Par précomposition, on en déduit une action à gauche de  $GL_n$  sur  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  : les foncteurs  $\tau_g^* : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  vérifient  $\tau_1^* = \text{id}$  et  $\tau_g^* \circ \tau_h^* = \tau_{gh}^*$ .
3. On appelle  $GL_n$ -module dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  tout objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  muni de flèches  $\tau_g^*(X) \xrightarrow{t_g} X$  (dites d'action de  $GL_n$ ) telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tau_g^* \tau_h^*(X) & \xrightarrow{\tau_g^*(t_h)} & \tau_g^*(X) \\ \parallel & & \downarrow t_g \\ \tau_{gh}^*(X) & \xrightarrow{t_{gh}} & X \end{array}$$

commute pour tous  $g, h \in GL_n$ . Un morphisme de  $GL_n$ -modules de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est un morphisme de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  compatible aux morphismes d'action de  $GL_n$ . On définit ainsi la sous-catégorie des  $GL_n$ -modules de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .

4. Le foncteur  $\gamma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  et la sous-catégorie des  $GL_n$ -modules de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .
5. Le foncteur  $\gamma_n$  admet un adjoint à gauche  $\Phi_n : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  donné sur les objets par

$$\Phi_n(X)(V, W) = \bigoplus_{u \in \text{Iso}_{\mathcal{E}}(E_n, W)} X(V, E_n \xrightarrow{u} W \hookrightarrow V).$$

*Démonstration.* Les deux premières assertions sont claires. Le dernier point est un cas particulier de la proposition 6.1.7 (cf. démonstration de la proposition 6.3.27). Comme le foncteur  $\gamma_n$  est exact et fidèle, la proposition 1.2.16 montre que  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  est équivalente à la sous-catégorie de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  des modules sur la monade associée à cette adjonction. Cette monade se décrit comme suit.

- L'endofoncteur  $\gamma_n \Phi_n$  de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  est  $\bigoplus_{g \in GL_n} \tau_g^*$ .
- L'unité est l'inclusion

$$\text{id} \hookrightarrow \bigoplus_{g \in GL_n} \tau_g^*$$

du facteur direct correspondant à  $g = 1$ .

- La multiplication est la transformation naturelle

$$\bigoplus_{h, h' \in GL_n} \tau_h^* \tau_{h'}^* \rightarrow \bigoplus_{g \in GL_n} \tau_g^*$$

dont la composante  $\tau_h^* \tau_{h'}^* \rightarrow \tau_g^*$  est l'identité si  $hh' = g$ , 0 sinon.

La proposition en résulte.  $\square$

*Remarque 7.3.22.* Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne, on peut voir la catégorie  $\mathcal{A}_{GL_n}$  (introduite dans l'exemple 1.1.10) comme une catégorie de  $GL_n$ -modules dans  $\mathcal{A}$ . La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  est quant à elle une catégorie de  $GL_n$ -modules « tordus » par l'action du groupe linéaire sur  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ . Elle présente de grandes similitudes avec  $(\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n})_{GL_n}$  mais n'y est pas équivalente.

**Convention 7.3.23.** Dans la suite de cette section, on *identifie*  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  avec la catégorie des  $GL_n$ -modules de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ .

**Définition 7.3.24.** On appelle *trivialisations* sur  $GL_n$  d'un foncteur  $\alpha$  de source  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  la donnée d'isomorphismes  $T_g : \alpha \circ \tau_g^* \rightarrow \alpha$  pour tout  $g \in GL_n$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \alpha\tau_g^*\tau_h^* & \xrightarrow{(T_g)\tau_h^*} & \alpha\tau_h^* \\ \parallel & & \downarrow T_h \\ \alpha\tau_{gh}^* & \xrightarrow{T_{gh}} & \alpha \end{array}$$

commute pour tous  $g, h \in GL_n$ .

**Proposition et définition 7.3.25.** Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne et  $\alpha : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{A}$  un foncteur muni d'une trivialisations sur  $GL_n$ . On définit un foncteur  $\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{A}_{GL_n}$  comme suit.

- Sur les objets : si  $X$  est un  $GL_n$ -module de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ , alors  $\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r}(X)$  est l'objet  $\alpha(X)$  de  $\mathcal{A}$  muni de l'action de  $GL_n$  donnée par les flèches  $\alpha(X) \simeq \alpha(\tau_g^*(X)) \rightarrow \alpha(X)$  (pour  $g \in GL_n$ ), où la première flèche est la trivialisations et la seconde est induite par la structure de  $GL_n$ -module de  $X$ .
- La flèche qu'induit un morphisme de  $GL_n$ -modules de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$  via  $\alpha$  est un morphisme de  $\mathcal{A}_{GL_n}$ , ce qui permet de déduire la functorialité de  $\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r}$  de celle de  $\alpha$ .

De plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} & \xrightarrow{\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r}} & \mathcal{A}_{GL_n} \\ \gamma_n \downarrow & & \downarrow O_{GL_n}^{\mathcal{A}} \\ \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \end{array}$$

commute (à isomorphisme canonique près), où  $O_{GL_n}^{\mathcal{A}}$  désigne le foncteur d'oubli, conformément à la notation de l'exemple 1.1.10.

- Proposition et définition 7.3.26.**
1. Le foncteur  $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$  admet une trivialisations sur  $GL_n$  pour laquelle le foncteur  $(\sigma_n^{\mathbf{P}1})_{GL_n}^{\mathcal{G}r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n}$  s'identifie à  $\sigma_n$ .
  2. La trivialisations précédente induit, via le monomorphisme canonique  $\chi_n^{\mathbf{P}1} \hookrightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1}$ , une trivialisations sur  $\chi_n^{\mathbf{P}1}$ .
  3. Nous noterons  $\chi_n$  le foncteur  $(\chi_n^{\mathbf{P}1})_{GL_n}^{\mathcal{G}r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n}$ .
  4. Le foncteur  $\chi_n$  est adjoint à droite à  $\theta_n$ .

*Démonstration.* La trivialisations canonique de  $\sigma_n^{\mathbf{P}1}$  se lit sur le foncteur de décalage pointé  $\mathfrak{S}_n$  : pour tout  $g \in GL_n$ ,  $\tau_g \mathfrak{S}_n$  est donné sur un objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  par  $(V \oplus E_n, E_n \xrightarrow{0 \oplus g} V \oplus E_n)$ , et les transformations naturelles  $\tau_g \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  données par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{0 \oplus g} & V \oplus E_n \\ & \searrow & \downarrow id \oplus g^{-1} \\ & 0 \oplus id & V \oplus E_n \end{array}$$

fournissent la trivialisations recherchée.

Pour en déduire le second point, on remarque que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \sigma_n^{\mathbf{P}1} \tau_g^* & \longrightarrow & \sigma_n^{\mathbf{P}1} \tau_g^* \otimes I_{E_n} \\ T_g \downarrow & & \downarrow T_g \otimes g^* \\ \sigma_n^{\mathbf{P}1} & \longrightarrow & \sigma_n^{\mathbf{P}1} \otimes I_{E_n} \end{array}$$



commute pour tout  $g \in GL_n$ , où  $T_g$  est l'isomorphisme de trivialisat on et les flèches horizontales sont données par la somme de  $\psi$  et de l'inclusion canonique.

La dernière assertion s'obtient à partir des trois observations suivantes.

1. La composée  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\chi_n} \mathcal{F}_{GL_n} \xrightarrow{O_{GL_n}^{\mathcal{F}}} \mathcal{F}$  est adjointe à droite à  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n} \xrightarrow{\theta_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ , où la première flèches est la postcomposition par le foncteur  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$  d'extension des scalaires. En effet, le diagramme commutatif de la proposition 7.3.25, la proposition 7.3.18 et la dernière assertion de la proposition 7.3.21 montrent que la première composée est adjointe à droite à  $\mathcal{F} \xrightarrow{\kappa_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ , qui coïncide avec  $\kappa_n \otimes P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$ , flèches à laquelle s'identifie également  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n} \xrightarrow{\theta_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ .
2. Le foncteur  $\chi_n$  est un sous-foncteur de  $\sigma_n$ . Cela découle de la première partie de la démonstration.
3. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{GL_n}}(F, \chi_n(X)) & \hookrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{GL_n}}(F, \sigma_n(X)) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{G}r,n}(\theta_n(F), X) & \hookrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathcal{G}r,n}(\xi_n(F), X) \end{array}$$

naturel en les objets  $F$  de  $\mathcal{F}_{GL_n}$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ , où la flèches verticale de droite provient de la proposition 6.3.17. L'isomorphisme en pointill e résulte des deux remarques précédentes lorsque  $F$  appartient à l'image du foncteur  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n}$  induit par l'extension des scalaires; le cas général s'en déduit par passage à la colimite, les générateurs projectifs standard de  $\mathcal{F}_{GL_n}$  appartenant à cette image.

□

## Chapitre 8

# Propriétés fondamentales des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$

Le début de ce chapitre décrit la structure générale des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . Les deux premières sections introduisent un *foncteur différence* similaire à celui de la catégorie  $\mathcal{F}$ , qui permet de décrire les objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , à partir du résultat fondamental selon lequel ils sont *polynomiaux*. On obtient ainsi, en combinant la stratification de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  par les sous-catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$  et la filtration polynomiale, que les objets simples de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  sont naturellement paramétrisés par une représentation irréductible (sur  $\mathbb{F}_2$ ) d'un groupe symétrique  $\Sigma_k$  et une représentation irréductible d'un groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{F}_2)$ .

La section 8.3, spécifique à la catégorie globale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , introduit un *produit tensoriel total* similaire à celui de la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$ ; elle repose sur la combinatoire de base de la catégorie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  exposée dans le paragraphe 6.2.3.

La section 8.4 étudie les adjoints au produit tensoriel des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , qui possèdent de nombreuses propriétés relativement aux foncteurs fondamentaux introduits au chapitre 6. Certaines d'entre elles interviendront au chapitre 10.

La section 8.5 contient les résultats les plus importants de ce chapitre. Le théorème 8.5.11 est un résultat d'annulation cohomologique puissant sur le foncteur  $\omega$ , qui contient nombre de propriétés déjà connues dans les catégories de foncteurs; nous en donnons un exemple significatif dans le paragraphe 8.5.4. Ce théorème repose sur un argument d'adjonction et des considérations explicites liées à la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}$ . Outre l'intérêt intrinsèque des propriétés d'annulation cohomologique qu'il implique, il constitue un outil puissant pour étudier la structure de la catégorie  $\mathcal{F}$  et la conjecture artinienne, dont nous donnons une version extrêmement forte (paragraphe 8.5.3) à l'aide du foncteur  $\omega$ . Nous verrons au chapitre 10 que cette conjecture implique que ce foncteur induit un isomorphisme d'anneaux entre le groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r})$  des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , muni de la structure multiplicative induite par le produit tensoriel *total*, et l'anneau de Grothendieck  $G_0^{tf}(\mathcal{F})$  des objets de type fini de  $\mathcal{F}$  (pour le produit issu du produit tensoriel usuel). Il s'agit d'une des descriptions conjecturales les plus puissantes de la structure globale de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Le chapitre 9 établira une forme affaiblie de la conjecture artinienne extrêmement forte, s'appuyant sur le théorème 8.5.11, et un autre résultat d'annulation cohomologique analogue.

Les catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  possèdent une structure de base similaire (simplifiée par l'absence d'action du groupe  $GL_n$ ) à celle des  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ ; nous en avons mentionné rapidement quelques propriétés significatives. En revanche, l'important paragraphe 8.5.2 est spécifique aux catégories de type  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

La catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$  intervient dans la section 8.5, d'abord, en filigrane par le biais du foncteur  $\mathcal{I}$ ; elle apparaît explicitement dans le paragraphe 8.5.4, qui exploite l'auto-dualité de cette catégorie pour appliquer le paragraphe 8.5.2 à la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$ .

## 8.1 Objets polynomiaux

On dispose dans les catégories de foncteurs en grassmanniennes  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  d'un *foncteur différence*, défini à partir des foncteurs de translation. Il constitue un outil fondamental, comme dans la catégorie  $\mathcal{F}$ . Non seulement ce foncteur différence possède un comportement analogue à celui de  $\mathcal{F}$ , mais il lui est aussi relié par de nombreuses propriétés de compatibilité.

Les *foncteurs polynomiaux* des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ , qui se définissent comme dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , permettent d'introduire une filtration importante de ces catégories (par le degré), dont nous identifierons les quotients en fin de section.

**Convention 8.1.1.** Dans toute cette section,  $J$  désigne une partie de  $\mathbb{N}$  et  $n$  un entier positif.

**Définition 8.1.2** (Foncteurs de décalage et foncteur différence dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ ).

- Soit  $V$  un objet de  $\mathcal{E}^f$ . Le foncteur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  de précomposition par le foncteur de translation  $V \boxplus \cdot : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$  (cf. définition 6.2.9) est appelé *foncteur de décalage* par  $V$  et se note  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$ .

On a ainsi  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J} X(A, B) = X(V \oplus A, B)$  pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  et  $(A, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ .

La bifunctorialité de  $\boxplus$  rend l'association  $V \mapsto \Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$  fonctorielle.

- Le *foncteur différence*  $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  est le noyau de la transformation naturelle  $\Delta_{\mathbb{F}_2}^{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow id$  induite par le morphisme  $\mathbb{F}_2 \rightarrow 0$  de  $\mathcal{E}^f$ .

**Notation 8.1.3.** – Le foncteur  $\Delta_{\mathbb{F}_2}^{\mathcal{G}_r, J}$  sera noté  $\tilde{\Delta}^{\mathcal{G}_r, J}$ .

- Lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter, nous noterons parfois  $\Delta_V$ ,  $\tilde{\Delta}$  et  $\Delta$  pour  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$ ,  $\tilde{\Delta}^{\mathcal{G}_r, J}$  et  $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$  respectivement.

*Remarque 8.1.4.* Si  $I$  est un sous-ensemble de  $J$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} & \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{G}_r, I}} & \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \\ \mathcal{P}_{I, J} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_{I, J} \\ \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} & \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{G}_r, J}} & \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \end{array}$$

commute à isomorphisme canonique près lorsque le prolongement par zéro est défini. Il existe une propriété analogue relative au foncteur de restriction  $\mathcal{R}_{J, I}$ .

Une grande part des considérations relatives au foncteurs de décalage et différence de  $\mathcal{F}$  se transcrivent sans changement dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ . Notons tout d'abord que la transformation naturelle  $id \rightarrow \tilde{\Delta}^{\mathcal{G}_r, J}$  procure un scindement canonique

$$\tilde{\Delta}^{\mathcal{G}_r, J} \simeq \Delta^{\mathcal{G}_r, J} \oplus id,$$

de sorte que  $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$  commute aux limites et colimites, comme les foncteurs de décalage.

**Proposition 8.1.5.** Soit  $V$  un objet de  $\mathcal{E}^f$ . Le foncteur  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$  est adjoint :

- à droite à  $\cdot \otimes \iota_J(P_V)$  ;
- à gauche à  $\cdot \otimes \kappa_J(I_V)$ .

Ces adjonctions sont naturelles en  $V$ .

*Démonstration.* Par la proposition 6.2.16, il existe un isomorphisme naturel

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f}(V \boxplus X, Y) \simeq \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f}(X, Y) \times \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, \mathfrak{D}_J(Y)).$$

En utilisant la proposition 3.2.6, on en déduit que le foncteur  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$  est adjoint à droite à  $\cdot \otimes \mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, \mathfrak{D}_J)] = \cdot \otimes \iota_J(P_V)$ . L'autre adjonction s'obtient en utilisant l'autre isomorphisme de la proposition 6.2.16 et la proposition 3.2.7. La naturalité en  $V$  dans ces adjonctions provient de la même propriété des isomorphismes de la proposition 6.2.16.  $\square$

**Corollaire 8.1.6.** *Le foncteur différence  $\Delta^{\mathcal{G}r,J}$  est adjoint :*

- à droite à  $\cdot \otimes \iota_J(\bar{P})$  ;
- à gauche à  $\cdot \otimes \kappa_J(\bar{I})$ .

**Corollaire 8.1.7.** *Les foncteurs de décalage et le foncteur différence de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$  conservent les objets projectifs et les objets injectifs.*

*Démonstration.* Ces foncteurs possèdent de chaque côté un adjoint exact, d'après ce qui précède, donc la proposition 1.2.7 donne la conclusion.  $\square$

La propriété suivante donne l'effet des foncteurs de décalage sur les foncteurs projectifs et injectifs standard.

**Proposition 8.1.8.** *Il existe des isomorphismes*

$$\Delta_V^{\mathcal{G}r,J}(P_X^{\mathcal{G}r,J}) \simeq P_{\mathfrak{R}_J(X)}(V) \otimes P_X^{\mathcal{G}r,J}$$

et

$$\Delta_V^{\mathcal{G}r,J}(I_X^{\mathcal{G}r,J}) \simeq I_{\mathfrak{D}_J(X)}(V) \otimes I_X^{\mathcal{G}r,J}$$

naturels en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $X$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de la proposition 6.2.16.  $\square$

Comme dans le cas de  $\mathcal{F}$ , cette propriété a l'utile conséquence suivante. La démonstration en est identique à celle de la cinquième assertion de la proposition 4.2.8.

**Corollaire 8.1.9.** *Les foncteurs de décalage et le foncteur différence de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$  conservent les objets de type fini, de co-type fini,  $\text{pf}_n$  et  $\text{co-pf}_n$ .*

Nous identifions à présent le noyau du foncteur différence de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ . Il ne se réduit pas aux foncteurs constants comme dans le cas de  $\mathcal{F}$ , mais se décrit très simplement.

**Lemme 8.1.10.** *Le foncteur composé  $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \rho_J : \mathcal{F}_{\text{surj}}^J \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$  est nul.*

*Démonstration.* On a en effet des isomorphismes naturels  $\Delta_V^{\mathcal{G}r,J} \circ \rho_J \simeq \rho_J$ , puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & \xrightarrow{\mathfrak{B}_J} & \mathcal{E}_{\text{surj}}^J \\ \downarrow \mathfrak{V} \boxplus \cdot & \nearrow \mathfrak{B}_J & \\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & & \end{array}$$

commute (à isomorphisme naturel près).  $\square$

**Proposition et définition 8.1.11** (Foncteurs pseudo-constants). *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *le foncteur  $\Delta^{\mathcal{G}r,J} X$  est nul ;*
2. *la coïunité  $\rho_J \varepsilon_J(X) \rightarrow X$  de l'adjonction de la proposition 6.3.18 est un isomorphisme ;*
3. *il existe un objet  $R$  de  $\mathcal{F}_{\text{surj}}^J$  tel que  $X$  est isomorphe à  $\rho_J(R)$ .*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, nous dirons que  $X$  est un foncteur pseudo-constant.*

*Démonstration.* La coïunité  $\rho_J \varepsilon_J(X) \rightarrow X$  est donnée sur l'objet  $(V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f$  par l'injection  $X(W, W) \hookrightarrow X(V, W)$  induite par le morphisme canonique  $(W, W) \rightarrow (V, W)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f$ . La première assertion signifie que le monomorphisme canonique  $X(A, B) \hookrightarrow X(A \oplus \mathbb{F}_2, B)$  est un isomorphisme pour tout objet  $(A, B)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f$ , on en déduit donc que le morphisme précédent est un isomorphisme, par récurrence sur la codimension de  $W$  dans  $V$ . Ainsi, la première assertion implique la deuxième.

Il est clair que la deuxième implique la troisième. Enfin, la troisième entraîne la première par le lemme 8.1.10.  $\square$

**Définition 8.1.12** (Foncteurs polynomiaux, analytiques). Un foncteur  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  est dit :

- *polynomial* s'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $(\Delta^{\mathcal{G}_r, J})^n X = 0$ ;
- *analytique* s'il est réunion de ses sous-foncteurs polynomiaux.

Le *degré* d'un foncteur polynomial non nul  $X$  est le plus grand entier positif  $n$  tel que  $(\Delta^{\mathcal{G}_r, J})^n X \neq 0$ , on le note  $\deg X$  ; on pose également  $\deg 0 = -\infty$ .

**Notation 8.1.13.** Nous désignerons par  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  formée des foncteurs polynomiaux de degré au plus  $k$ .

**Proposition 8.1.14.** 1. On a un isomorphisme

$$\Delta^{\mathcal{G}_r, J}(F \otimes G) \simeq (\Delta^{\mathcal{G}_r, J}F \otimes G) \oplus (F \otimes \Delta^{\mathcal{G}_r, J}G) \oplus (\Delta^{\mathcal{G}_r, J}F \otimes \Delta^{\mathcal{G}_r, J}G)$$

naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ .

2. Si  $F$  et  $G$  sont deux foncteurs polynomiaux de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ , alors  $F \otimes G$  est polynomial et  $\deg(F \otimes G) = \deg F + \deg G$ .
3. Le produit tensoriel de deux foncteurs analytiques de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  est analytique.
4. Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  est polynomial si et seulement si  $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}F$  est polynomial ; dans ce cas  $\deg(\Delta^{\mathcal{G}_r, J}F) = \deg F - 1$ , si  $F$  n'est pas pseudo-constant.

La démonstration de cette proposition est semblable à celle de la proposition 4.2.13.

*Remarque 8.1.15.* On peut de même définir les filtrations polynomiale et copolynomiale dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  et obtenir des propriétés analogues aux propositions 4.2.17, 4.2.20 et 4.2.21.

On rappelle que l'endofoncteur  $\Delta_{surj}^J$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ , introduit dans la notation 7.2.2, est caractérisé par le scindement  $\sigma_J \xi_J \simeq id \oplus \Delta_{surj}^J$ .

Comme la catégorie  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{E})$  s'identifie canoniquement à  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F})$ , on y dispose d'un endofoncteur de postcomposition par  $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . Ce foncteur sera noté  $\Delta_*$  dans la suite, conformément à nos conventions générales.

**Proposition et définition 8.1.16** (Foncteur différence et objets polynomiaux dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ ). Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$  et  $d \in \mathbb{N}$ .

1. Les assertions suivantes sont équivalentes.
  - (a) Le foncteur  $\Delta_*^d X$  est nul.
  - (b) Le foncteur  $X$  appartient à la sous-catégorie épaisse  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_{d-1})$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F})$ .

Lorsque ces conditions sont vérifiées, nous dirons que  $X$  est un foncteur polynomial de degré strictement inférieur à  $d$ .
2. Les endofoncteurs  $\Delta_*$  et  $\Delta_{surj}^J$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$  commutent à isomorphisme naturel près.
3. Si  $X$  est un foncteur polynomial non nul, alors  $\Delta_{surj}^J X$  est un foncteur polynomial de degré strictement inférieur à celui de  $X$ .

*Démonstration.* Le premier point résulte des définitions. Pour le second, il suffit d'établir que  $\tilde{\Delta}_*$  et  $\tilde{\Delta}_{surj}^J$  commutent (à isomorphisme naturel près). Cela provient de ce que ces foncteurs sont donnés par la précomposition par les endofoncteurs de  $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J$  donnés par  $(A, B) \mapsto (A \oplus \mathbb{F}_2, B)$  et  $(A, B) \mapsto (A \oplus B, B)$ , qui commutent par associativité et commutativité de la somme directe, puisque leurs deux composées sont données, sur les objets, par  $(A, B) \mapsto ((A \oplus \mathbb{F}_2) \oplus B, B)$  et  $(A, B) \mapsto ((A \oplus B) \oplus \mathbb{F}_2, B)$ .

La commutation entre  $\Delta_*$  et  $\Delta_{surj}^J$  démontrée, il suffit de voir que la nullité de  $\Delta_* X$  entraîne celle de  $\Delta_{surj}^J X$ . En effet,  $\Delta_* X = 0$  signifie que, pour tout objet  $(A, B)$  de  $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J$ , l'injection canonique  $X(0, B) \hookrightarrow X(A, B)$  est un isomorphisme, ce qui implique que le monomorphisme canonique  $X(A, B) \hookrightarrow X(A \oplus B, B)$  est également un isomorphisme et achève la démonstration.  $\square$

La propriété suivante indique que tous les foncteurs introduits au chapitre 6, à l'exception du foncteur d'intégrale en grassmanniennes, commutent aux foncteurs de décalage et différences. Cette commutation se lit dans les catégories sources.

**Proposition 8.1.17** (Commutation des foncteurs fondamentaux aux foncteurs différences).

1. (a) Il existe des isomorphismes canoniques  $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \iota_J \simeq \iota_J \circ \Delta$  et  $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \kappa_J \simeq \kappa_J \circ \Delta$  de foncteurs  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ .
- (b) Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}$ ,  $F$  est polynomial si et seulement si  $\iota_J(F)$  est un objet polynomial de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ . Ils ont alors même degré.
- (c) Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}$ ,  $F$  est polynomial si et seulement si  $\kappa_J(F)$  est un objet polynomial de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ . Ils ont alors même degré.
2. (a) Il existe des isomorphismes canoniques  $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \xi_J \simeq \xi_J \circ \Delta_*$  et  $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \theta_J \simeq \theta_J \circ \Delta_*$  de foncteurs  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ .
- (b) Un objet  $F$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$  est polynomial si et seulement si l'objet  $\xi_J(F)$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$  est polynomial. Ils ont alors même degré.
- (c) Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ ,  $F$  est polynomial si et seulement si  $\theta_J(F)$  est un objet polynomial de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ . Ils ont alors même degré.
3. (a) On a un isomorphisme canonique  $\Delta_* \circ \sigma_J \simeq \sigma_J \circ \Delta^{\mathcal{G}r,J}$  de foncteurs  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ .
- (b) Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ ,  $X$  est polynomial si et seulement si  $\sigma_J(X)$  est un objet polynomial de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ . Ils ont alors même degré.

*Démonstration.* Établissons par exemple le dernier point, les autres se montrant de manière analogue. Pour la première assertion, on note que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J & \xrightarrow{(\mathbb{F}_2 \oplus \cdot) \times \mathcal{E}_{surj}^J} & \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J \\ \downarrow \mathcal{L}_J & & \downarrow \mathcal{L}_J \\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & \xrightarrow{\mathbb{F}_2 \boxplus \cdot} & \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f \end{array}$$

commute à isomorphisme canonique près (cf. démonstration de la proposition 8.1.16), d'où un isomorphisme canonique  $\tilde{\Delta}_* \circ \sigma_J \simeq \sigma_J \circ \tilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,J}$  et la première assertion.

La seconde se déduit de la précédente et de la fidélité du foncteur  $\sigma_J$ .  $\square$

**Corollaire 8.1.18.** *Les foncteurs  $\iota_J$ ,  $\kappa_J$  et  $\sigma_J$  préservent les foncteurs analytiques.*

*Démonstration.* Cela découle de la proposition précédente et de la commutation aux colimites des foncteurs considérés.  $\square$

### Quotients de la filtration polynomiale de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$

Comme dans le cas de la catégorie  $\mathcal{F}$ , on peut identifier les quotients de la filtration polynomiale de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  à une catégorie de représentations sur  $\mathbb{F}_2$ .

**Lemme 8.1.19.** *Soit  $X$  un objet polynomial de degré  $d \geq 0$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ . Le noyau de l'épimorphisme canonique  $\xi_J \sigma_J(X) \rightarrow X$  (coïunité de l'adjonction de la proposition 6.3.17) est de degré strictement inférieur à  $d$ .*

*Démonstration.* La suite exacte (7.2) montre que le degré de ce noyau est inférieur à

$$\deg \xi_J(\Delta_{surj}^J \sigma_J(X)) = \deg \Delta_{surj}^J \sigma_J(X) < \deg \sigma_J(X) = d,$$

où l'on a utilisé les propositions 8.1.17 et 8.1.16, d'où le lemme.  $\square$

*Exemple 8.1.20.* Si  $F$  est un objet polynomial de degré  $d \geq 0$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ , le noyau de l'épimorphisme canonique  $\xi_J(F) \rightarrow \theta_J(F)$  est de degré strictement inférieur à  $d$ . En effet, cet épimorphisme s'identifie à la coïnnité  $\xi_J \sigma_J \theta_J(F) \rightarrow \theta_J(F)$  via l'isomorphisme canonique  $\sigma_J \theta_J \simeq id$  de la proposition 6.3.16.

Le raisonnement du lemme précédent fournit également la proposition suivante.

**Proposition 8.1.21.** *La résolution canonique (7.2) d'un foncteur polynomial  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  est finie ; sa longueur est majorée par  $\deg X + 1$  si  $X \neq 0$ .*

*Démonstration.* Cela provient de l'inégalité

$$\deg \mathfrak{R}_i^{\mathcal{G}_r, J}(x) = \deg \xi_J (\Delta_{surj}^J)^i \sigma_J(X) \leq \deg X - i.$$

□

La proposition suivante constitue le résultat principal de cette section. Elle nous permettra de décrire le groupe de Grothendieck des objets finis de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ , dans la section suivante.

**Proposition 8.1.22.** *1. Le foncteur  $\xi_J : \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  induit un foncteur  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}) \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*  
*2. Ce foncteur est une équivalence de catégories dont un inverse est donné par le foncteur  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1})$  induit par  $\sigma_J : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* Comme le foncteur  $\xi_J$  commute au foncteur différence, il induit des foncteurs exacts  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_k) \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k$  et  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}) \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Le foncteur  $\sigma_J$  induit de même un foncteur exact  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Comme  $\sigma_J \xi_J \simeq id \oplus \Delta_{surj}^J$  (cf. section 7.2), la dernière assertion de la proposition 8.1.16 montre que l'endofoncteur de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1})$  induit par  $\sigma_J \xi_J$  est isomorphe à l'identité.

Par ailleurs, le lemme 8.1.19 établit que l'endofoncteur de  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$  induit par  $\xi_J \sigma_J$  est isomorphe à l'identité. Cela achève la démonstration. □

*Remarque 8.1.23.* L'exemple 8.1.20 montre que le foncteur  $(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}) \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$  induit par  $\theta_J$  est le même que celui qu'induit  $\xi_J$  : la restriction à  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k$  l'épimorphisme canonique  $\xi_J \rightarrow \theta_J$  a un noyau à valeurs dans  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$ .

Une variante de ce raisonnement consiste à utiliser la proposition 8.1.22 et observer que le foncteur  $(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}) \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$  induit par  $\theta_J$  est inverse de celui qu'induit  $\sigma_J$ , par la proposition 6.3.16.

Les propositions 8.1.22 et 4.2.42 fournissent le corollaire suivant.

**Corollaire 8.1.24.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les catégories  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J})_{k-1}$  et  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_k]})$  sont équivalentes.*

En particulier, la catégorie  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n})_{k-1}$  est équivalente à celle des  $\mathbb{F}_2[GL_n \times \Sigma_k]$ -modules.

### Le cas de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$

La définition 8.1.2 se transcrit sans changement dans la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$ , de même qu'une grande partie des considérations de cette section. Une simplification apparaît par rapport au cas de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  : les objets de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  annulés par le foncteur différence sont les foncteurs *constants*. Les définitions et résultats précédents se transportent, moyennant cette simplification, à cette catégorie. On peut en particulier définir la notion de foncteur polynomial et de degré d'un tel foncteur de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  ; il l'on note  $(\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n})_k$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ , la sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  formée des foncteurs polynomiaux de degré inférieur à  $k$ , la proposition 8.1.22 a l'analogie suivant.

**Proposition 8.1.25.** *Pour tout entier  $k$ , les foncteurs  $\iota_n^{\mathbf{P}1}$  et  $\sigma_n^{\mathbf{P}1}$  induisent des foncteurs  $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1} \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n})_k/(\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n})_{k-1}$  et  $(\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n})_k/(\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n})_{k-1} \rightarrow \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$  qui sont des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre.*

## 8.2 Objets finis

Les résultats de la section précédente permettent de décrire les objets simples et les objets finis des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  à partir de ceux de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{surj}^I$ . Comme pour la catégorie  $\mathcal{F}$ , l'un des résultats les plus importants réside dans le caractère polynomial des objets finis. Nous ne mentionnerons les analogues en termes des catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  des résultats détaillés dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  que pour les plus importants d'entre eux.

**Convention 8.2.1.** Dans cette section,  $I$  désigne une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Lemme 8.2.2.** *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  tel que  $\Delta X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $\varepsilon_I(X)$  un objet fini de  $\mathcal{F}_{surj}^I$ . Alors  $X$  est fini.*

*Démonstration.* Cela provient, via la proposition 2.6.15, du caractère exact et fidèle du foncteur

$$(\Delta, \varepsilon_I) : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \times \mathcal{F}_{surj}^I.$$

□

*Remarque 8.2.3.* On a des résultats semblables en remplaçant dans cet énoncé *fini* par *de type fini*,  $pf_n$  ou  $co-pf_n$ .

**Définition 8.2.4** (Niveau). On appelle *niveau* d'un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  l'élément

$$\text{niv}(X) = \sup \{ \dim W \mid (V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, X(V, W) \neq 0 \}$$

de  $I \cup \{-\infty, +\infty\}$ . On dit que  $X$  est de *niveau fini* si  $\text{niv}(X) < +\infty$ .

On définit de même le *coniveau* de  $X$  comme l'élément

$$\text{coniv}(X) = \inf \{ \dim W \mid (V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, X(V, W) \neq 0 \}$$

de  $I \cup \{+\infty\}$ .

**Proposition 8.2.5.** – *Un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est fini si et seulement s'il est polynomial, à valeurs de dimension finie et de niveau fini.*

– *Soit  $n$  un entier positif. Un objet de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  est fini si et seulement s'il est polynomial et à valeurs de dimension finie.*

*Démonstration.* Soient  $S$  un objet simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $(A, B)$  un objet de  $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$  tel que  $S(\mathfrak{L}_I(A, B)) \neq 0$  (le foncteur  $\mathfrak{L}_I$  est essentiellement surjectif — cf. proposition 6.2.23), de sorte qu'il existe un épimorphisme  $P_{\mathfrak{L}_I(A, B)}^{\mathcal{G}_r, I} \simeq \iota_I(P_A) \otimes \rho_I(P_B^{\mathcal{E}_{surj}^I}) \twoheadrightarrow S$  (cf. proposition 6.3.12). Cela montre d'une part que  $S$  est à valeurs de dimension finie, et que  $S(V, W) = 0$  pour  $\dim W > \dim B$ . D'autre part, comme l'objet  $P_A$  de  $\mathcal{F}$  est coanalytique (proposition 4.2.23), il existe un objet polynomial  $F$  de  $\mathcal{F}$  et un épimorphisme  $\iota_I(F) \otimes \rho_I(P_B^{surj}) \twoheadrightarrow S$ . La proposition 8.1.17 montre que  $\iota_I(F) \otimes \rho_I(P_B^{surj})$ , donc  $S$ , est polynomial. Un argument d'épaisseur montre ensuite que tous les objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sont polynomiaux, à valeurs de dimension finie et de niveau fini.

La réciproque résulte du lemme 8.2.2 et de la proposition 5.3.7 par récurrence sur le degré polynomial.

Le cas de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  se traite de manière analogue (et plus simple). □

*Remarque 8.2.6.* La condition de finitude du niveau est vide si  $I$  est fini.

**Corollaire 8.2.7.** *Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $A$  un objet de  $\mathcal{F}_{surj}^I$ .*

1. *Si  $F$  et  $A$  sont finis, il en est de même pour l'objet  $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A)$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . La réciproque est vraie si  $A$  et  $F$  sont non nuls.*
2. *Si  $F$  et  $A$  sont finis, il en est de même pour l'objet  $\kappa_I(F) \otimes \rho_I(A)$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . La réciproque est vraie si  $A$  et  $F$  sont non nuls.*



3. Un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est fini si et seulement si l'objet  $\sigma_I(X)$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  est fini.

*Démonstration.* La proposition 8.1.17 montre que  $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A) = \xi_I(F \boxtimes A)$  est polynomial si et seulement si  $F \boxtimes A \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  l'est, ou encore si et seulement si  $\kappa_I(F) \otimes \rho_I(A)$  l'est. Si  $A$  est non nul, le caractère polynomial de  $F \boxtimes A$  équivaut à celui de  $F$  (cf. proposition/définition 8.1.16).

Lorsque  $A$  et  $F$  sont non nuls,  $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A)$  est à valeurs de dimension finie si et seulement s'il en est de même pour  $F$  et  $A$ .

Si  $F \neq 0$ , le foncteur  $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A)$  est de niveau fini si et seulement si  $A(V) = 0$  pour  $\dim V$  assez grande. La finitude de  $A$  dans  $\mathcal{F}_{surj}^I$  équivaut à la conjonction de cette condition et de celle que  $A$  est à valeurs de dimension finie (cf. proposition 5.3.7).

La proposition 8.2.5 et le corollaire 4.2.26 permettent de déduire des remarques précédentes les deux premières assertions du corollaire. La dernière s'établit de manière analogue.  $\square$

Nous désignerons par la suite par  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}^{lf}$  la sous-catégorie pleine  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})^{lf}$  (cf. notation 2.6.17) de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  formée des objets localement finis.

**Corollaire 8.2.8.** 1. Si  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , il en est de même pour  $\Delta X$ .

2. Le produit tensoriel de deux objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est fini.

3. Les objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sont  $pf_\infty$  et  $co\text{-}pf_\infty$ . En particulier,  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  satisfait aux hypothèses 2.6.9 et 2.6.10.

4. La sous-catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}^{lf}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est épaisse. Ses objets sont les foncteurs analytiques.

*Démonstration.* Elle est similaire à celle du corollaire 4.2.28.  $\square$

## Description des objets simples

Nous ramenons, grâce aux propositions 8.1.22 et 8.2.5, la description des objets simples de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  à celle des objets simples de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , qui s'obtiennent par le lemme suivant.

**Lemme 8.2.9.** Les objets simples de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  sont, à isomorphisme près, les  $S \boxtimes R$ , où  $S$  est un objet simple de  $\mathcal{F}$  et  $R$  un objet simple de  $\mathcal{F}_{surj}^I$ . Le produit tensoriel extérieur induit de plus un isomorphisme d'anneaux (sans unité si  $I$  est infini)  $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj}^I)$ .

*Démonstration.* Cela découle de la proposition 3.3.18 et de son corollaire 3.3.19, dont les hypothèses sont vérifiées grâce à la proposition 4.2.56 (ou 5.3.19).  $\square$

**Proposition 8.2.10.** 1. Étant donné un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  est simple ;

(b) l'objet  $\sigma_I(X)$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  est simple ;

(c) il existe un objet simple  $F$  de  $\mathcal{F}$  et un objet simple  $R$  de  $\mathcal{F}_{surj}^I$  tel que  $X$  est isomorphe à  $\kappa_I(F) \otimes \rho_I(R)$ .

2. Les foncteurs exacts  $\sigma_I$  et  $\theta_I$  induisent des isomorphismes d'anneaux (sans unité si  $I$  est infini) entre  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$  et  $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj}^I)$  réciproques l'un de l'autre.

*Démonstration.* La proposition 6.3.15.2 montre que le foncteur  $\theta_I$  transforme un objet simple de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  en un objet simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et induit un *monomorphisme* de groupes abéliens, compatible au produit,  $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ . Ces deux groupes sont filtrés par le degré polynomial (par le corollaire 4.2.26 et la proposition 8.2.5), qui est respecté par  $\theta_I$  (cf. proposition 8.1.17). Les morphismes

$$G_0^f((\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}) \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \rightarrow (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})_k/(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})_{k-1}$$

induits par ce monomorphisme sur les quotients de la filtration par le degré sont des isomorphismes par la proposition 8.1.22 et la remarque 8.1.23.

Ainsi,  $\theta_I$  induit un isomorphisme d'anneaux  $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\simeq} G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ . Son inverse est induit par  $\sigma_I$  grâce à la dernière assertion du corollaire 8.2.7 et à la proposition 6.3.16, d'où la seconde assertion.

De surcroît, tous les objets simples de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sont isomorphes à l'image d'un objet simple de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  par le foncteur  $\theta_I$ . Compte-tenu du lemme 8.2.9 et de la proposition 6.3.16, cela démontre les implications (a)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (b) de la première assertion. L'implication (b)  $\Rightarrow$  (a) provient de l'exacte fidélité du foncteur  $\sigma_I$  (par la proposition 2.6.15).  $\square$

La proposition suivante s'établit de façon très analogue.

**Proposition 8.2.11.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les foncteurs exacts  $\sigma_n^{\mathbf{P}^1}$  et  $\kappa_n^{\mathbf{P}^1}$  induisent des isomorphismes d'anneaux entre  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathbf{P}^1, n})$  et  $G_0^f(\mathcal{F})$  réciproques l'un de l'autre, qui respectent les classes des objets simples.*

**Corollaire 8.2.12.** *Le foncteur exact  $\xi_I$  induit un isomorphisme d'anneaux (sans unité si  $I$  est infini) entre  $G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj}^I) \simeq G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I)$  et  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ .*

*Démonstration.* Compte-tenu de la remarque 8.1.23, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 8.2.10.  $\square$

**Corollaire 8.2.13.** *Les corps d'endomorphismes des objets simples de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  sont réduits à  $\mathbb{F}_2$ . Il en est de même pour les catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}^1, n}$ .*

*Démonstration.* Soient  $S$  un objet simple de  $\mathcal{F}$  et  $R$  un objet simple de  $\mathcal{F}_{surj}^I$ . Comme le foncteur  $\xi_I$  est pleinement fidèle (cf. proposition 6.3.15), on a

$$\text{End}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(S) \otimes \rho_I(R)) \simeq \text{End}_{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(S \boxtimes R)) \simeq \text{End}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(R \boxtimes S) \simeq \text{End}_{\mathcal{F}}(S) \otimes \text{End}_{\mathcal{F}_{surj}^I}(R),$$

où l'on a utilisé l'isomorphisme (3.7) de la proposition 3.3.16 — les objets  $S$  et  $R$  sont de présentation finie par les corollaires 4.2.28 et 5.3.9.

On en conclut que  $\text{End}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(S) \otimes \rho_I(R))$  est réduit à  $\mathbb{F}_2$  par les propositions 4.2.56 et 5.3.19. Cela démontre l'assertion relative à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  grâce à la proposition 8.2.10.

Dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}^1, n}$ , on raisonne de même, sans avoir à utiliser de produit tensoriel extérieur : on applique les propositions 8.2.11 et 4.2.56 et la pleine fidélité du foncteur  $\kappa_n^{\mathbf{P}^1}$ .  $\square$

## Conséquences en terme de cosocle

**Corollaire 8.2.14.** *Il existe un isomorphisme*

$$\text{cosoc } X \simeq \theta_I(\text{cosoc } \eta_I(X))$$

*naturel en l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .*

*Démonstration.* Les propositions 8.2.10 et 6.3.15 montrent que le foncteur  $\theta_I$  induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine des objets sans radical de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  et la sous-catégorie pleine des objets sans radical de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . Le lemme 7.2.14 (ou l'adjonction de la proposition 7.2.15) donne alors la conclusion.  $\square$

**Corollaire 8.2.15.** *Pour tout objet  $F$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , on a des isomorphismes naturels*

$$\text{cosoc } \xi_I(F) \simeq \text{cosoc } \theta_I(F) \simeq \theta_I(\text{cosoc } F).$$

*Démonstration.* On combine le corollaire précédent aux isomorphismes  $\eta_I \circ \xi_I \simeq \eta_I \circ \theta_I \simeq \text{id}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}$  de la proposition 7.2.16.  $\square$

*Remarque 8.2.16.* 1. Explicitement, l'isomorphisme  $\text{cosoc } \xi_I(F) \simeq \text{cosoc } \theta_I(F)$  est induit par la projection canonique  $\xi_I(F) \rightarrow \theta_I(F)$ , et l'isomorphisme  $\text{cosoc } \theta_I(F) \simeq \theta_I(\text{cosoc } F)$  par  $F \rightarrow \text{cosoc } F$ .

2. Le premier isomorphisme montre que, pour tout objet de type fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , l'épimorphisme canonique  $\iota_I(F) \rightarrow \kappa_I(F)$  est essentiel. Son comportement est totalement différent sur les objets de co-type fini; ainsi, la proposition 6.3.14 montre que, dans le cas où  $I = \mathbb{N}$ , cet épimorphisme se scinde toujours lorsque  $F$  est un injectif standard  $I_V$  de  $\mathcal{F}$  (alors que  $\iota(I_V) \rightarrow \kappa(I_V)$  n'est un isomorphisme que pour  $V = 0$ ).

Avant d'énoncer une conséquence utile de ce corollaire, qui décrit les projectifs indécomposables de type fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , rappelons que le produit tensoriel extérieur induit un isomorphisme  $K_0(\mathcal{F}) \otimes K_0(\mathcal{F}_{surj}^I) \simeq K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I)$  (la démonstration est la même que celle du lemme 8.2.9).

**Corollaire 8.2.17.** *Le foncteur  $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  induit un isomorphisme de groupes abéliens  $K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\simeq} K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ .*

*Autrement dit, le produit tensoriel des morphismes induits par  $\iota_I$  et  $\rho_I$  fournit un isomorphisme  $K_0(\mathcal{F}) \otimes K_0(\mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\simeq} K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ .*

*Démonstration.* La proposition 6.3.12 montre que le foncteur exact  $\xi_I$  conserve les objets projectifs de type fini, il induit donc un morphisme de groupes  $K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \rightarrow K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ . Le corollaire 8.2.15 montre qu'il transporte la couverture projective d'un objet simple  $S$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  sur la couverture projective de  $\theta_I(S)$ . Le résultat se déduit donc de la proposition 8.2.10 et de la dernière assertion du corollaire 2.7.24.  $\square$

*Remarque 8.2.18.* L'inverse de cet isomorphisme ne se décrit pas simplement en termes des foncteurs fondamentaux depuis  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . Il est en de même pour l'isomorphisme du corollaire 8.2.12.

### 8.3 Structures tensorielles sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$

Il est utile d'introduire sur la catégorie de foncteurs en grassmanniennes globale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , à côté de la structure tensorielle usuelle donnée par  $\otimes$  (à laquelle nous nous référerons lorsque nous parlerons de structure tensorielle sans plus de précision) une seconde structure tensorielle, très analogue à celle donnée par le produit tensoriel total de  $\mathcal{F}_{surj}$  (cf. paragraphe 5.2).

**Définition 8.3.1** (Produit tensoriel total). Étant donnés deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , on appelle *produit tensoriel total* de  $X$  et  $Y$  le foncteur noté  $X \tilde{\otimes} Y$  et défini comme suit.

- Si  $(V, W)$  est un objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ , on pose

$$(X \tilde{\otimes} Y)(V, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} X(V, A) \otimes Y(V, B).$$

- Si  $u : (V, W) \rightarrow (V', W')$  est un morphisme de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ , on définit le morphisme  $(X \tilde{\otimes} Y)(u) : (X \tilde{\otimes} Y)(V, W) \rightarrow (X \tilde{\otimes} Y)(V', W')$  comme la somme directe sur les sous-espaces  $A$  et  $B$  de  $W$  tels que  $A + B = W$  des morphismes

$$X(V, A) \otimes Y(V, B) \xrightarrow{X(u) \otimes Y(u)} X(V', u(A)) \otimes Y(V', u(B)) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{A', B' \in \mathcal{G}_r(W') \\ A'+B'=W'}} X(V', A') \otimes Y(V', B')$$

où l'on note encore, par abus,  $u$  pour les morphismes  $(V, A) \rightarrow (V', u(A))$  et  $(V, B) \rightarrow (V', u(B))$  induits par  $u$ .

Cette définition fait sens puisque  $u(A) + u(B) = u(A + B) = u(W) = W'$ .

Le produit tensoriel total définit un bifoncteur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \times \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , le produit tensoriel de  $\mathcal{E}$  étant bifonctoriel.

Avant de préciser les liens entre ce produit tensoriel total et celui défini dans  $\mathcal{F}_{surj}$ , il sera commode de définir un produit tensoriel total dans la catégorie auxiliaire  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ .

**Définition 8.3.2.** Le produit tensoriel total sur  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  est le foncteur

$$\tilde{\otimes} : (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}) \times (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$$

donné, via l'isomorphisme  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj} \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj})$ , par

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj} \times \mathcal{F}_{surj}) \xrightarrow{\tilde{\otimes}_*} \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}).$$

Autrement dit,

$$(X \tilde{\otimes} Y)(A, B) = \bigoplus_{\substack{V, W \in \mathcal{G}_r(B) \\ V+W=B}} X(A, V) \otimes Y(A, W) \quad (A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f, B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^f).$$

**Proposition 8.3.3.** 1. Le produit tensoriel total définit sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  une structure tensorielle exacte d'unité  $\rho(\text{Is}_0)$ .

2. Il existe un monomorphisme  $X \otimes Y \hookrightarrow X \tilde{\otimes} Y$  naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

3. Les produits tensoriels totaux sur les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ ,  $\mathcal{F}_{surj}$  et  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$  vérifient les propriétés de compatibilité suivantes : il existe des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \rho(A \tilde{\otimes} B) &\simeq \rho(A) \tilde{\otimes} \rho(B) & (A, B \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj}), \\ \xi(F \tilde{\otimes} G) &\simeq \xi(F) \tilde{\otimes} \xi(G) & (F, G \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Cette proposition se vérifie par inspection. Par exemple, le dernier isomorphisme provient des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \xi(F \tilde{\otimes} G)(V, W) &\simeq (F \tilde{\otimes} G)(V, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} F(V, A) \otimes G(V, B) \\ &\simeq \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} \xi(F)(V, A) \otimes \xi(G)(V, B) = (\xi(F) \tilde{\otimes} \xi(G))(V, W) \quad ((V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f). \end{aligned}$$

□

*Remarque 8.3.4.* En revanche, les foncteurs  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $\theta$  ne commutent pas au produit tensoriel total. Par exemple, on a

$$\theta(F \tilde{\otimes} G)(V, W) \simeq (F \tilde{\otimes} G)(V/W, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} F(V/W, A) \otimes G(V/W, B)$$

tandis que

$$(\theta(F) \tilde{\otimes} \theta(G))(V, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} \theta(F)(V, A) \otimes \theta(G)(V, B) \simeq \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} F(V/A, A) \otimes G(V/B, B).$$

On voit cependant ainsi qu'il existe un épimorphisme canonique  $\theta(F) \tilde{\otimes} \theta(G) \twoheadrightarrow \theta(F \tilde{\otimes} G)$ .

**Proposition 8.3.5.** Il existe un isomorphisme  $P_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r} \tilde{\otimes} P_{(A', B')}^{\mathcal{G}_r} \simeq P_{(A \oplus A', B \oplus B')}^{\mathcal{G}_r}$  naturel en les objets  $(A, B)$  et  $(A', B')$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ .

*Démonstration.* Cet énoncé découle de la proposition 6.2.30. □

**Corollaire 8.3.6.** Le produit tensoriel total de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  préserve les objets projectifs, les objets de type fini et les objets  $pf_n$ .

- Remarque 8.3.7.* – Le corollaire 2.2.16 montre que le produit tensoriel usuel de  $\mathcal{F}_{G_r}$  préserve également les objets de type fini et  $\text{pf}_n$ , bien qu'il ne conserve pas les projectifs.
- Le produit tensoriel usuel de deux objets projectifs de  $\mathcal{F}_{G_r}$  n'est généralement pas projectif (car il en est ainsi dans  $\mathcal{F}_{\text{surj}}$  — par exemple,  $P_{\mathbb{F}_2}^{\text{surj}} \otimes P_{E_2}^{\text{surj}}$  n'est pas projectif).
  - Dans la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}^1, n}$ , le produit tensoriel de deux objets projectifs est toujours projectif. En effet, les projectifs standard de  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}^1, n}$  sont les images par le foncteur  $\iota_n^{\mathbf{P}^1}$ , qui commute au produit tensoriel, des projectifs standard de  $\mathcal{F}$ .
  - Le produit tensoriel de deux objets projectifs d'une catégorie  $\mathcal{F}_{G_r, n}$  est également projectif. En effet, il suffit (par un argument analogue au précédent) de noter que le produit tensoriel d'un  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module projectif et d'un  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module fini est projectif (cf. proposition 3.2.8).

- Proposition 8.3.8.** 1. *Il existe un isomorphisme  $\Delta_V^{G_r}(X \tilde{\otimes} Y) \simeq \Delta_V^{G_r} X \tilde{\otimes} \Delta_V^{G_r} Y$  naturel en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $X, Y$  de  $\mathcal{F}_{G_r}$ .*
2. *Il existe un isomorphisme  $\Delta^{G_r}(X \tilde{\otimes} Y) \simeq (\Delta^{G_r} X \tilde{\otimes} Y) \oplus (X \tilde{\otimes} \Delta^{G_r} Y) \oplus (\Delta^{G_r} X \tilde{\otimes} \Delta^{G_r} Y)$  naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{G_r}$ .*
3. *Si  $X$  et  $Y$  sont deux foncteurs polynomiaux de  $\mathcal{F}_{G_r}$ , alors  $X \tilde{\otimes} Y$  est polynomial. De plus,  $\deg(X \tilde{\otimes} Y) = \deg X + \deg Y$ .*
4. *Le produit tensoriel total de deux foncteurs finis de  $\mathcal{F}_{G_r}$  est fini.*

*Démonstration.* Le premier point provient de ce que les foncteurs de translation de  $\mathcal{E}_{G_r}^f$  n'agissent pas sur la base. Les suivants s'en déduisent par le même raisonnement que pour le produit tensoriel ordinaire dans  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Corollaire 8.3.9.** *Le produit tensoriel total induit des structures d'anneau commutatif (unitaire) sur les groupes de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{G_r})$  et  $K_0(\mathcal{F}_{G_r})$ . Pour ses structures, les isomorphismes des corollaires 8.2.12 et 8.2.17 sont des isomorphismes d'anneaux, où les groupes de Grothendieck de  $\mathcal{F}_{\text{surj}}$  sont munis de la structure d'anneau induit par le produit tensoriel total.*

Contrairement à la situation que nous venons d'observer pour les projectifs, le produit tensoriel total possède un comportement déplaisant sur les injectifs. En revanche, le produit tensoriel ordinaire est adapté à leur étude.

On rappelle que le symbole  $G_r$  qui intervient dans la proposition suivante a été introduit dans la notation 6.2.31.

**Proposition 8.3.10.** *Il existe un isomorphisme*

$$I_{(A, B)}^{G_r} \otimes I_{(A', B')}^{G_r} \simeq \bigoplus_{C \in G_r(B, B')} I_{(A \oplus A', C)}^{G_r}$$

*naturel en les objets  $(A, B)$  et  $(A', B')$  de  $\mathcal{E}_{G_r}^f$ .*

*Démonstration.* C'est la version linéarisée de la proposition 6.2.32.  $\square$

**Corollaire 8.3.11.** *Le produit tensoriel de  $\mathcal{F}_{G_r}$  préserve :*

- les objets injectifs de co-type fini ;
- les objets de co-type fini ;
- les objets co- $\text{pf}_n$ .

La proposition suivante (qui généralise la dernière assertion de la proposition 5.4.3) constitue la principale motivation de l'introduction du produit tensoriel total dans  $\mathcal{F}_{G_r}$ .

**Proposition 8.3.12.** *Il existe dans  $\mathcal{F}$  un isomorphisme*

$$\omega(X \tilde{\otimes} Y) \simeq \omega(X) \otimes \omega(Y)$$

*naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{G_r}$ .*

*Démonstration.* Cela provient, par linéarisation, de la décomposition ensembliste

$$\mathcal{G}r(V) \times \mathcal{G}r(V) \simeq \coprod_{W \in \mathcal{G}r(V)} \{(A, B) \in \mathcal{G}r(W) \times \mathcal{G}r(W) \mid A + B = W\}$$

naturelle en l'objet  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ . □

*Remarque 8.3.13.* Cette proposition repose sur la décomposition du foncteur  $\mathcal{G}r \times \mathcal{G}r : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$  fournie par les fibres de la transformation naturelle  $\mathcal{G}r \times \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{G}r$  donnée par  $(A, B) \mapsto A + B$ .

Cette décomposition sous-tend un grand nombre de propriétés de nature combinatoire de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ , qui se lisent dans la catégorie source  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$  (cf. § 6.2.3).

## 8.4 Foncteurs hom internes et foncteurs de division

Nous étudions à présent, de façon non exhaustive, le comportement des foncteurs hom internes et de division relativement aux foncteurs fondamentaux entre  $\mathcal{F}$  et les catégories de foncteurs en grassmanniennes  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$ . Le premier paragraphe montre comment se modifient ces foncteurs dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$  lorsqu'on réduit ou qu'on accroît la taille de l'ensemble  $I$ . En effet, il est parfois commode de travailler dans une catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ), car la catégorie  $\mathcal{F}_{surj}^n \simeq \mathbb{F}_2[GL_n] \mathbf{Mod}$  a des foncteurs hom internes et des foncteurs de division très faciles à comprendre, contrairement à ce qui advient dans  $\mathcal{F}_{surj}$ ; mais il est souvent utile de transiter par la catégorie globale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ , où l'on dispose par exemple d'adjonctions qui ne perdurent pas dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}$ .

Le deuxième paragraphe expose des propriétés qui s'appuient sur la structure des catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$  et sur le principe suivant : un foncteur possédant un adjoint qui a de bonnes propriétés de commutation à l'égard du produit tensoriel hérite d'une propriété de commutation à l'égard des foncteurs hom internes et de division.

Le troisième paragraphe est moins formel : nous nous intéressons à des propriétés de commutation entre le foncteur  $\omega$ , dont on connaît l'adjoint à droite, et les foncteurs hom internes, définis par leur adjoint à gauche. Le principe consiste alors à se ramener à la commutation entre  $\omega$  et les foncteurs de division, en s'appuyant sur le fait que les foncteurs de décalage fournissent une large classe d'endofoncteurs qui, dans les catégories de foncteurs en grassmanniennes comme dans  $\mathcal{F}$ , sont à la fois des foncteurs hom internes et des foncteurs de division (cf. proposition 8.1.5).

Il est à noter que nous ne considérons ici que le produit tensoriel *usuel*; il existe également des foncteurs hom internes (et des foncteurs de division par un foncteur à valeurs de dimension finie) dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  relativement au produit tensoriel *total*. Ils ne seront pas nécessaires à nos considérations ultérieures.

*Exemple 8.4.1.* La proposition 8.3.12 se traduit, en termes du foncteur hom interne  $\widetilde{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{G}r}$  de  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}, \widetilde{\otimes})$ , par l'existence d'un isomorphisme naturel  $\widetilde{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{G}r}(X, \iota(F)) \simeq \iota(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\omega(X), F))$  pour  $X$  objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  et  $F$  objet de  $\mathcal{F}$ .

*Remarque 8.4.2.* Le cas des catégories  $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$  est analogue.

### 8.4.1 Comparaison entre les différentes catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$

**Convention 8.4.3.** Dans ce paragraphe, on se donne deux parties  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{N}$  telles que  $I \subset J$ .

On rappelle que  $\mathcal{R}_{J, I}$  est le foncteur de restriction et  $\mathcal{P}_{I, J}$  le foncteur de prolongement par zéro — défini sous certaines conditions sur  $I$  et  $J$  — introduits dans la notation 6.3.2.

**Proposition 8.4.4.** *Supposons que tout élément de  $J$  supérieur ou égal à un élément de  $I$  appartient à  $I$ . Alors il existe dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, J}$  un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r, J}(X, \mathcal{P}_{I, J}(Y)) \simeq \mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(X), Y))$$

naturel en les objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , et dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  un isomorphisme naturel

$$\mathcal{R}_{J, I}(\mathcal{P}_{I, J}(Y) : X) \simeq (Y : \mathcal{R}_{J, I}(X))$$

si  $X$  est à valeurs de dimension finie.

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$  un isomorphisme naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, \leq n}(X, \mathcal{P}_{n, \leq n}(Y)) \simeq \mathcal{P}_{n, \leq n}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, n}(\mathcal{R}_{\leq n, n}(X), Y))$$

et, si  $X$  est à valeurs de dimension finie, un isomorphisme naturel dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$

$$\mathcal{R}_{\leq n, n}(\mathcal{P}_{n, \leq n}(Y) : X) \simeq (Y : \mathcal{R}_{\leq n, n}(X)).$$

*Démonstration.* L'hypothèse assure que  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$  est une sous-catégorie complète à gauche de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ . Par conséquent, le foncteur  $\mathcal{P}_{I, J}$  est adjoint à droite à  $\mathcal{R}_{J, I}$  (cf. proposition 3.3.8). Le premier isomorphisme de la proposition provient alors de la commutation du foncteur de restriction au produit tensoriel, comme le montrent les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(A, \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(X, \mathcal{P}_{I, J}(Y))) &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(A \otimes X, \mathcal{P}_{I, J}(Y)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(A \otimes X), Y) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(A) \otimes \mathcal{R}_{J, I}(X), Y) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(A), \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(X), Y)) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(A, \mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(X), Y))) \end{aligned}$$

(où  $A \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ ) et le lemme de Yoneda. Le second se traite de façon analogue.  $\square$

**Proposition 8.4.5.** *Il existe des isomorphismes naturels*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\iota_J(F), \mathcal{P}_{I, J}(A)) \simeq \mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), A))$$

dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ , si le prolongement par zéro est défini, et

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \mathcal{R}_{J, I}(X)) \simeq \mathcal{R}_{J, I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\iota_J(F), X))$$

dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , où  $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}$ ,  $A \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ .

*Démonstration.* Les morphismes naturels

$$\mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), A)) \otimes \iota_J(F) \simeq \mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), A) \otimes \iota_I(F)) \rightarrow \mathcal{P}_{I, J}(A)$$

(lorsque le prolongement par zéro est défini) et

$$\mathcal{R}_{J, I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\iota_J(F), X)) \otimes \iota_I(F) \simeq \mathcal{R}_{J, I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\iota_J(F), X) \otimes \iota_J(F)) \rightarrow \mathcal{R}_{J, I}(X)$$

dont les secondes flèches s'obtiennent par application du foncteur  $\mathcal{P}_{I, J}$  ou  $\mathcal{R}_{J, I}$  à la coïunité de l'adjonction fournissent, par adjonction, des morphismes naturels  $\mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), A)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\iota_J(F), \mathcal{P}_{I, J}(A))$  et  $\mathcal{R}_{J, I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\iota_J(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \mathcal{R}_{J, I}(X))$ . Ce sont des isomorphismes dans le cas où  $F$  est un projectif standard grâce à la proposition 8.1.5 (et à la remarque 8.1.4). Le cas général s'en déduit par passage à la colimite.  $\square$

**Notation 8.4.6.** Dans ce paragraphe, nous noterons  $r : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  le foncteur adjoint à gauche au foncteur  $\mathcal{R}_{J, I} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ , et  $R : \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^J$  l'adjoint à gauche au foncteur de restriction  $\mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^I$  (de tels adjoints existent par le corollaire 1.3.18).

**Lemme 8.4.7.** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} & \xrightarrow{\sigma_I} & \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}^I) \\ r \downarrow & & \downarrow R_* \\ \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} & \xrightarrow{\sigma_J} & \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}^J) \end{array}$$

commute à isomorphisme naturel près.

*Démonstration.* Soit  $a : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  le foncteur de restriction. On définit une transformation naturelle  $R_*\sigma_I \rightarrow \sigma_J r$  comme l'adjointe (cf. proposition 3.1.10) à la flèche  $\sigma_I \rightarrow a\sigma_J r \simeq \sigma_I \mathcal{R}_{J,I} r$  obtenue en composant  $\sigma_I$  et l'unité  $id \rightarrow \mathcal{R}_{J,I} r$  de l'adjonction. Cette transformation naturelle est un isomorphisme, car elle induit un isomorphisme  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\sigma_J r(X), I_{(A,B)}^{\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J}) \xrightarrow{\simeq} \text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(R_*\sigma_I(X), I_{(A,B)}^{\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J})$  pour tous  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $(A, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J$  grâce aux isomorphismes (6.3).  $\square$

**Lemme 8.4.8.** *Il existe dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$  un isomorphisme  $r(X \otimes \kappa_I(F)) \simeq r(X) \otimes \kappa_J(F)$  naturel en les objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $F$  de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* On établit, à l'aide du lemme précédent, que la transformation naturelle  $r(X \otimes \kappa_I(F)) \rightarrow r(X) \otimes \kappa_J(F)$  adjointe au morphisme  $X \otimes \kappa_I(F) \rightarrow \mathcal{R}_{J,I} r(X) \otimes \kappa_I(F) \simeq \mathcal{R}_{J,I}(r(X) \otimes \kappa_J(F))$  obtenu en tensorisant par  $\kappa_I(F)$  l'unité de l'adjonction procure un isomorphisme lorsqu'on lui applique  $\sigma_J$ . Cela provient du lemme 8.4.7 et des deux observations suivantes :

- il existe dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  un isomorphisme canonique  $\sigma_I(X \otimes \kappa_I(F)) \simeq \sigma_I(X) \otimes (F \boxtimes \mathbb{F}_2)$ , que l'on peut encore voir comme l'image de  $\sigma_I(X)$  par le foncteur  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}) \xrightarrow{(\cdot \otimes F)_*} \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F})$ ;
- le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}) & \xrightarrow{(\cdot \otimes F)_*} & \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \\ \downarrow R_* & & \downarrow R_* \\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}) & \xrightarrow{(\cdot \otimes F)_*} & \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \end{array}$$

commute (à isomorphisme canonique près).

Comme le foncteur  $\sigma_J$  est exact et fidèle, cela donne la conclusion.  $\square$

**Proposition 8.4.9.** *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\kappa_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X)) \simeq \mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\kappa_J(F), X))$$

naturel en les objets  $F$  de  $\mathcal{F}$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ .

*Démonstration.* Par le lemme 8.4.8 (dont on conserve la notation), on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(Y, \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\kappa_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X))) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(Y \otimes \kappa_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X)) \simeq \\ &\text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(r(Y \otimes \kappa_I(F)), X) \simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(r(Y) \otimes \kappa_J(F), X) \simeq \\ &\text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}(r(Y), \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\kappa_J(F), X)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(Y, \mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(\kappa_J(F), X))) \end{aligned}$$

(où  $Y \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ ), ce qui démontre la proposition.  $\square$

## 8.4.2 Propriétés formelles

### Foncteurs de division

**Proposition 8.4.10.** *Il existe dans  $\mathcal{F}$  un isomorphisme  $\omega(X : \iota(F)) \simeq (\omega(X) : F)$  naturel en les objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $F$  de  $\mathcal{F}^{\text{df}}$ . On a un résultat analogue dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$ .*

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence formelle de l'adjonction entre  $\iota$  et  $\omega$  (cf. proposition 6.3.7) et de la commutation de  $\iota$  au produit tensoriel, qui procurent des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{F}}(\omega(X : \iota(F)), G) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r}((X : \iota(F)), \iota(G)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r}(X, \iota(F) \otimes \iota(G)) \\ &\simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r}(X, \iota(F \otimes G)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(\omega(X), F \otimes G) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}((\omega(X) : F), G). \end{aligned}$$

$\square$



**Proposition 8.4.11.** *Pour toute partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ , il existe dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  un isomorphisme canonique  $(\rho_I(A) : X) \simeq \rho_I(A : \varepsilon_I(X))$  pour  $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\text{surj}}^I$ , et  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  à valeurs de dimension finie.*

*Démonstration.* Cette proposition s'établit de la même manière que la précédente, à partir de la proposition 6.3.18 et de la commutation de  $\varepsilon_I$  au produit tensoriel.  $\square$

**Proposition 8.4.12.** *Il existe un isomorphisme*

$$(X : \iota(I_V))(A, B) \simeq \bigoplus_{\substack{C \in \mathcal{G}_r(V \oplus A) \\ \text{im}(C \hookrightarrow V \oplus A \rightarrow A) = B}} X(V \oplus A, C)$$

naturel en les objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ ,  $(A, B)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

De plus, pour tout  $W \in \mathcal{G}_r(V)$ , le monomorphisme scindé naturel  $(X : I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r}) \hookrightarrow (X : \iota(I_V))$  induit par l'épimorphisme scindé  $\iota(I_V) \twoheadrightarrow I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r}$  fourni par la proposition 6.3.14 identifie  $(X : I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r})(A, B)$  au sous-espace

$$\bigoplus_{\substack{C \in \mathcal{G}_r(V \oplus A) \\ \text{im}(C \hookrightarrow V \oplus A \rightarrow A) = B \\ \text{im}(C \hookrightarrow V \oplus A \rightarrow V) = W}} X(V \oplus A, C)$$

de  $(X : \iota(I_V))(A, B)$ .

*Remarque 8.4.13.* La functorialité en  $(A, B)$  des sommes directes de cet énoncé doit être comprise en un sens analogue à celui explicité au paragraphe 6.2.3, dont nous utilisons d'ailleurs la notation  $\mathcal{G}_r$  dans la démonstration.

*Démonstration.* On a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} ((X : I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r})(A, B))^* &\simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r}((X : I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r}), I_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r}) \simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r}(X, I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r} \otimes I_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r}) \\ &\simeq \bigoplus_{C \in \mathcal{G}_r(W, B)} \text{hom}_{\mathcal{G}_r}(X, I_{(V \oplus A, C)}^{\mathcal{G}_r}) \simeq \bigoplus_{C \in \mathcal{G}_r(W, B)} X(V \oplus A, C)^* \end{aligned}$$

par la proposition 8.3.10, ce qui donne le résultat, pour  $X$  à valeurs de dimension finie, en dualisant ; le cas quelconque s'en déduit en écrivant  $X$  comme colimite de sous-foncteurs à valeurs de dimension finie.  $\square$

*Remarque 8.4.14.* On vérifie par inspection que  $\omega(X : \iota(I_V))$  s'identifie canoniquement, via la description de la proposition 8.4.12, à  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r} \omega(X)$ , ce qui par la proposition 8.1.5 permet de retrouver la proposition 8.4.10 dans le cas où  $F$  est un injectif standard de  $\mathcal{F}$ .

## Foncteurs hom internes

**Convention 8.4.15.** Dans la suite de ce paragraphe,  $I$  désigne une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 8.4.16.** *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(X, \theta_I(A)) \simeq \theta_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{\text{surj}}^I}(\eta_I(X), A))$$

naturel en les objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$  et  $A$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{\text{surj}}^I$ .

*Démonstration.* Grâce aux propositions 7.2.15 et 7.2.18, on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(Y, \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(X, \theta_I(A))) &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(Y \otimes X, \theta_I(A)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(\eta_I(Y \otimes X), A) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(\eta_I(Y) \otimes \eta_I(X), A) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(\eta_I(Y), \mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(\eta_I(X), A)) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(Y, \theta_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(\eta_I(X), A))), \end{aligned}$$

où  $Y \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ . □

**Corollaire 8.4.17.** *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\theta_I(B), \theta_I(A)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(B), \theta_I(A)) \simeq \theta_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(B, A))$$

naturel en les objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ .

*Démonstration.* On combine les propositions 8.4.16 et 7.2.16. □

**Corollaire 8.4.18.** *Il existe des isomorphismes*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\kappa_I(F), \kappa_I(G)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \kappa_I(G)) \simeq \kappa_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G))$$

naturels en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* C'est le cas particulier  $A = G \boxtimes \mathbb{F}_2$  et  $B = F \boxtimes \mathbb{F}_2$  du corollaire précédent. □

*Remarque 8.4.19.* Une approche alternative de ce corollaire consiste à traiter d'abord le cas où la partie  $I$  contient 0 à l'aide de la proposition 6.3.19, puis d'en déduire le cas général grâce à la proposition 8.4.9.

**Proposition 8.4.20.** *Il existe un isomorphisme  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \iota_I(G)) \simeq \iota_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G))$  naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\iota_I(F) = \mathcal{R}_{\mathbb{N}, I}(\iota(F))$ , la proposition 8.4.5 permet de ne traiter que le cas où  $I = \mathbb{N}$ . La conclusion provient alors, par la proposition 6.3.7, des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r}(X, \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), \iota(G))) &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r}(X \otimes \iota(F), \iota(G)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\omega(X \otimes \iota(F)), G) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\omega(X) \otimes F, G) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\omega(X), \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_r}(X, \iota(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G))). \end{aligned}$$

□

**Proposition 8.4.21.** *Il existe dans  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  un isomorphisme*

$$\sigma_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(F), X)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(F, \sigma_I(X))$$

naturel en les objets  $F$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ .

*Démonstration.* Cette propriété s'obtient à partir de la proposition 6.3.17 et de la commutation du foncteur  $\xi_I$  au produit tensoriel, par un raisonnement formel analogue aux précédents. □

La proposition suivante généralise la description très simple des foncteurs hom internes de la catégorie  $\mathbb{F}_2[GL_n] \mathbf{Mod}$  aux foncteurs pseudo-constants de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ .

**Proposition 8.4.22.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $M$  un  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module fini. Les endofoncteurs  $\cdot \otimes \rho_n(M^*)$ ,  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, n}(\rho_n(M), \cdot)$  et  $(\cdot : \rho_n(M))$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  sont naturellement isomorphes.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\cdot \otimes \rho_n(M^*)$  est adjoint à gauche à  $\cdot \otimes \rho_n(M)$ , l'autre adjonction s'en déduisant par dualité.

On définit un morphisme naturel  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, n}(X, Y \otimes \rho_n(M)) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{G}_r, n}(X \otimes \rho_n(M^*), Y)$  en associant à  $f : X \rightarrow Y \otimes \rho_n(M)$  la composée

$$X \otimes \rho_n(M^*) \xrightarrow{f \otimes \rho_n(M^*)} Y \otimes \rho_n(M) \otimes \rho_n(M^*) \simeq Y \otimes \rho_n(M \otimes M^*) \xrightarrow{Y \otimes \rho_n(u)} Y$$

où  $u : M \otimes M^* \rightarrow \mathbb{F}_2$  désigne le morphisme canonique. Les propositions 6.3.12 et 3.2.8 montrent que c'est un isomorphisme lorsque  $X$  est un projectif standard. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite.  $\square$

**Corollaire 8.4.23.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $M$  un  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ -module fini. L'endofoncteur  $\cdot \otimes \rho_n(M)$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  commute naturellement aux foncteurs hom internes et aux foncteurs de division.*

### 8.4.3 Le morphisme $h_F^X : \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X))$

Nous donnons d'abord la définition et quelques propriétés générales d'un morphisme  $h_F^X$  naturel en un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $F$  de  $\mathcal{F}$ . Notre objectif principal est d'établir que  $h_{\Lambda^1}^X$  est un isomorphisme.

**Définition 8.4.24.** Soit

$$h_F^X : \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X))$$

le morphisme naturel en les objets  $F$  de  $\mathcal{F}$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  adjoint à

$$\omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X)) \otimes F \xrightarrow{\simeq} \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X) \otimes \iota(F)) \xrightarrow{\omega(u_{F, X})} \omega(X),$$

où la première flèche est l'isomorphisme de la dernière assertion de la proposition 6.3.7 et  $u_{F, X}$  la coïtité de l'adjonction.

**Notation 8.4.25.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce paragraphe, nous noterons  $\pi_V$  l'épimorphisme canonique  $\iota(I_V) \rightarrow \kappa(I_V)$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

*Remarque 8.4.26.* L'épimorphisme  $\pi_V$  peut se lire comme la projection canonique

$$\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} I_{(V, W)} \rightarrow I_{(V, 0)} \simeq \kappa(I_V)$$

(cf. propositions 6.3.14 et 6.3.12); il est donc *scindé*.

**Lemme 8.4.27.** *Pour tous objets  $V$  de  $\mathcal{E}^f$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(P_V), X)) & \xrightarrow{\simeq} & \omega(\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X) & \xrightarrow{\simeq} & \omega(X : \kappa(I_V)) \\ \downarrow h_{P_V}^X & & & & \downarrow \omega(X : \pi_V) \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) & \xrightarrow{\simeq} & \Delta_V \omega(X) & \xrightarrow{\simeq} & (\omega(X) : I_V) \xrightarrow{\simeq} \omega(X : \iota(I_V)) \end{array}$$

*commute, où :*

- les flèches supérieures sont les isomorphismes fournis par la proposition 8.1.5 ;
- les flèches inférieures sont les isomorphismes fournis par les propositions 4.2.5 et 8.4.10.

*Démonstration.* Le morphisme

$$\omega(\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X) \simeq \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(P_V), X)) \xrightarrow{h_{P_V}^X} \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) \simeq \Delta_V \omega(X)$$

est l'adjoint du morphisme  $P_V \otimes \omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X) \rightarrow \omega(X)$  donné, sur l'espace vectoriel  $A$ , par  $[f] \otimes a \mapsto X(i_f)(a)$  pour  $f \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A)$ ,  $B \in \mathcal{G}r(A)$  et  $a \in X(A, B)$ , où l'on désigne par  $i_f : (V \oplus A, B) \rightarrow (A, B)$  le morphisme de composante  $f$  sur  $V$  et  $id_A$  sur  $A$ .

Par conséquent, la flèche  $\omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X) \simeq \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P_V), X)) \xrightarrow{h_{P_V}^X} \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) \simeq \Delta_V \omega(X)$  est donnée sur l'espace  $A$  par l'inclusion

$$\omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X)(A) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(A)} X(V \oplus A, B) \hookrightarrow \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(V \oplus A)} X(V \oplus A, B) = \Delta_V \omega(X)(A).$$

La conclusion s'obtient alors par la proposition 8.4.12.  $\square$

**Proposition 8.4.28.** *Pour tous objets  $F$  de  $\mathcal{F}$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ , le morphisme  $h_F^X$  est injectif.*

*Démonstration.* Le lemme 8.4.27 montre l'assertion lorsque  $F$  est un projectif standard  $P_V$ . On en déduit (par commutation de  $\omega$  aux limites et de  $\iota$  aux colimites) que  $h_P^X$  est également injectif lorsque  $P$  est une somme directe de projectifs standard. Le cas général s'en déduit en considérant un épimorphisme  $p$  d'un tel projectif  $P$  sur  $F$  et en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P), X)) & \xrightarrow{p^*} & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P), X)) \\ h_F^X \downarrow & & \downarrow h_P^X \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X)) & \xrightarrow{p^*} & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P, \omega(X)). \end{array}$$

$\square$

*Remarque 8.4.29.* On peut préciser ce résultat : il existe un endofoncteur  $T_F$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ , un isomorphisme naturel  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X)) \simeq \omega(T_F(X))$  et une transformation naturelle injective  $j_F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(F), \cdot) \hookrightarrow T_F$  telle que  $h_F$  s'identifie à  $\omega(j_F)$ . On le voit par un argument analogue, en considérant une présentation de  $F$  par des sommes directes de projectifs standard (cf. lemme 8.4.31 ci-après).

**Notation 8.4.30.** Soient  $V$  et  $W$  deux objets de  $\mathcal{E}^f$ . Nous noterons, dans ce paragraphe,  $\tau_{V,W} : \text{hom}_{\mathcal{F}}(P_W, P_V) \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{F}}(I_W, I_V)$  l'isomorphisme composé de  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(P_W, P_V) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, W)]$  (donné par le corollaire 3.1.23),  $\mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, W)] \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}}(W^*, V^*)]$  (induit par la dualité de  $\mathcal{E}^f$ ), et  $\mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}}(W^*, V^*)] \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{F}}(P_{V^*}, P_{W^*}) \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{F}}(I_W, I_V)$  (fourni par le corollaire 3.1.23 et la dualité de  $\mathcal{F}$ ).

**Lemme 8.4.31.** *Soient  $V$  et  $W$  deux objets de  $\mathcal{E}^f$  et  $P_W \xrightarrow{u} P_V \rightarrow F \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{F}$ . Il existe un diagramme commutatif aux lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(F), X)) & \longrightarrow & \omega(X : \kappa(I_V)) & \xrightarrow{\omega(X : \kappa(\tau_{V,W}(u)))} & \omega(X : \kappa(I_W)) \\ & h_F^X \downarrow & & \omega(X : \pi_V) \downarrow & & \omega(X : \pi_W) \downarrow \\ 0 \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X)) & \longrightarrow & \omega(X : \iota(I_V)) & \xrightarrow{\omega(X : \iota(\tau_{V,W}(u)))} & \omega(X : \iota(I_W)) \end{array}$$

naturel en l'objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ .

*Démonstration.* Par naturalité de  $h$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(F), X)) & \longrightarrow & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P_V), X)) & \xrightarrow{\omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(u), X))} & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P_W), X)) \\ & h_F^X \downarrow & & h_{P_V}^X \downarrow & & h_{P_W}^X \downarrow \\ 0 \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X)) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) & \xrightarrow{\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(u, \omega(X))} & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_W, \omega(X)) \end{array}$$

commute ; ses lignes sont exactes par exactitude des foncteurs  $\iota$  et  $\omega$  et exactitude à gauche du bifoncteur **Hom**.

On applique alors le lemme 8.4.27 : il suffit d'identifier les morphismes  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(u, \omega(X))$  et  $\omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(u), X))$  à  $\omega(X : \iota(\tau_{V,W}(u)))$  et  $\omega(X : \kappa(\tau_{V,W}(u)))$  respectivement. Par linéarité, il suffit de le faire lorsque  $u$  est le morphisme associé à une application linéaire  $V \rightarrow W$  (que nous noterons encore  $u$  par abus).

Dans  $\mathcal{F}$ , le morphisme naturel  $\Delta_{W^*}G \rightarrow \Delta_{V^*}G$  (où  $G \in \text{Ob } \mathcal{F}$ ) induit par  ${}^t u$  est adjoint à  $P_{V^*} \otimes \Delta_{W^*}G \xrightarrow{({}^t u)^* \otimes \Delta_{W^*}G} P_{W^*} \otimes \Delta_{W^*}G \rightarrow G$  (la dernière flèche étant la coïunité de l'adjonction) ; en dualisant (utiliser la proposition 4.2.8), on en déduit que le morphisme naturel  $\Delta_V G \rightarrow \Delta_W G$  induit par  $u$  est adjoint à  $G \rightarrow I_W \otimes \Delta_W G \xrightarrow{u^* \otimes \Delta_W G} I_V \otimes \Delta_W G$ . Appliqué à  $G = \omega(X)$ , cela procure l'identification entre  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(u, \omega(X))$  et  $\omega(X : \iota(\tau_{V,W}(u)))$ .

De façon analogue, dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , le morphisme  $\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \rightarrow \Delta_W^{\mathcal{G}_r} X$  induit par  $u$  est adjoint à  $X \rightarrow \kappa(I_W) \otimes \Delta_W^{\mathcal{G}_r} X \xrightarrow{u^* \otimes \Delta_W^{\mathcal{G}_r} X} \kappa(I_V) \otimes \Delta_W^{\mathcal{G}_r} X$ , d'où l'on déduit l'identification de  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(u), X)$  à  $(X : \kappa(\tau_{V,W}(u)))$  et le lemme.  $\square$

**Proposition 8.4.32.** *Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , la transformation naturelle*

$$h_{q_k(\bar{P})} : \omega \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(q_k(\bar{P})), \cdot) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k(\bar{P}), \cdot) \circ \omega$$

est un isomorphisme.

En particulier,  $h_{\Lambda^1}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* On part de la suite exacte

$$P_{E_{k+1}} \xrightarrow{u_k} P \rightarrow q_k(\bar{P}) \rightarrow 0$$

dans laquelle  $u_k$  est le morphisme correspondant à  $\sum_{t \in E_{k+1} \setminus \{0\}} [t] \in P(E_{k+1})$  via le lemme de Yoneda.

On en déduit par le lemme 8.4.31 et la proposition 6.3.14, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & 0 \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(q_k(\bar{P})), X)) & \longrightarrow & \omega(X : \kappa(I)) & \longrightarrow & \omega(X : \kappa(I_{E_{k+1}})) \\
& & \downarrow h_{q_k(\bar{P})}^X & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k(\bar{P}), \omega(X)) & \longrightarrow & \omega(X : \iota(I)) & \longrightarrow & \omega(X : \iota(I_{E_{k+1}})) \\
& & \searrow 0? & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & \omega(X : I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}_r}) & \xrightarrow{a_k^X} & \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_{r \geq 1}(E_{k+1})} \omega(X : I_{(E_{k+1}, W)}^{\mathcal{G}_r}) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes (pour les colonnes, appliquer la proposition 6.3.14).

Une chasse au diagramme montre que  $h_{q_k(\bar{P})}^X$  est un isomorphisme si  $a_k^X$  est un monomorphisme (ou encore, si la flèche en pointillé est nulle). Nous allons en fait voir que la composée

$$\omega(X : I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}_r}) \xrightarrow{a_k^X} \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_{r \geq 1}(E_{k+1})} \omega(X : I_{(E_{k+1}, W)}^{\mathcal{G}_r}) \twoheadrightarrow \omega(X : I_{(E_{k+1}, v)}^{\mathcal{G}_r})$$

est injective pour tout  $v \in \mathcal{G}r_1(E_{k+1})$ . Pour cela, on constate que, par le lemme 8.4.31, la flèche  $a_k^X$  est induite par la somme sur  $v \in E_{k+1} \setminus \{0\}$  des morphismes  $i_v : I_{E_{k+1}} \rightarrow I$  représentés par  $v$ . Or la composante  $I_{(E_{k+1}, v)}^{\mathcal{G}r} \rightarrow I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}r}$  du morphisme

$$\iota(i_v) : \iota(I_{E_{k+1}}) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(E_{k+1})} I_{(E_{k+1}, W)}^{\mathcal{G}r} \rightarrow \iota(I) \simeq I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}r} \oplus \kappa(I)$$

est le morphisme induit par l'unique flèche  $(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow (E_{k+1}, v)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$ . Cette flèche admettant une rétraction (car  $v \neq 0$ ), elle induit un monomorphisme scindé  $\omega(X : I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}r}) \hookrightarrow \omega(X : I_{(E_{k+1}, W)}^{\mathcal{G}r})$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 8.4.33.* Plus généralement, la transformation naturelle  $h_F$  est un isomorphisme dès que  $F$  est *localement fini*; cet isomorphisme s'étend aux foncteurs dérivés de  $\mathbf{Hom}$ . Ce résultat est établi dans [Dja06a], en utilisant les propriétés du foncteur  $\omega$  données dans le paragraphe 8.5.2.

**Corollaire 8.4.34.** *Soient  $n$  et  $k$  des entiers naturels et  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  du type  $\leq n$ ,  $\geq n$  ou  $n$ . Les foncteurs  $\omega_I \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r, I}(\iota_I(q_k(\bar{P})), \cdot)$  et  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k(\bar{P}), \cdot) \circ \omega_I$  de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Ce résultat se déduit des propositions 8.4.32 et 8.4.5.  $\square$

Nous terminons cette section en donnant un corollaire des résultats précédents qui décrit notamment l'image par un foncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k(\bar{P}), \cdot)$  d'un  $G(n)$ -comodule simple (cf. propositions 6.3.7 et 8.2.10).

**Corollaire 8.4.35.** *Soient  $n$  et  $k$  des entiers naturels. Il existe dans  $\mathcal{F}$  un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k(\bar{P}), \omega_n(\kappa_n(F) \otimes \rho_n(M))) \simeq \omega_n(\kappa_n(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k(\bar{P}), F)) \otimes \rho_n(M))$$

*naturel en les objets  $F$  de  $\mathcal{F}$  et  $M$  de  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}^f$ .*

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient en combinant les corollaires 8.4.18, 8.4.23 et 8.4.34.  $\square$

Ce corollaire jouera un rôle essentiel au chapitre 10, où l'on emploiera le foncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$  pour étudier la structure des  $G(2)$ -comodules finis.

## 8.5 Propriétés cohomologiques du foncteur $\omega$

Le foncteur d'intégrale en grassmanniennes  $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}$  possède un comportement assez différent des autres foncteurs fondamentaux entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  et  $\mathcal{F}$  ou  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ . Notamment, il ne préserve pas les objets localement finis, et caractériser leur image dans  $\mathcal{F}$  par le foncteur  $\omega$  s'avère un problème profond étroitement lié à la conjecture artinienne.

Nous avons déjà observé, au paragraphe 5.4, que le foncteur  $\varpi$  permet d'exprimer des versions plus précises de la conjecture artinienne, à la suite des travaux de Powell, qui en a démontré des formes affaiblies (sur lesquelles nous reviendrons dans la partie III). Il n'est donc pas étonnant que le foncteur  $\omega$ , qui généralise le foncteur  $\varpi$ , permette d'aller plus loin dans cette direction. Le paragraphe 8.5.3 précisera ces considérations. Il énonce des conjectures extrêmement puissantes sur la structure de la catégorie  $\mathcal{F}$ , qui constituent une motivation essentielle à l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

Avant d'en arriver là, nous aurons besoin d'une propriété cohomologique fondamentale du foncteur  $\omega$  (théorème 8.5.11), que nous établirons au paragraphe 8.5.2 après avoir présenté des lemmes grandement formels. Elle s'inscrit dans la lignée de nombreux résultats antérieurs d'algèbre homologique sur les catégories de foncteurs, qui reposent presque tous sur une utilisation judicieuse de foncteurs adjoints, à l'aide du corollaire 1.2.8. Le théorème 8.5.11 simplifie de manière très efficace de nombreux calculs cohomologiques dans la catégorie  $\mathcal{F}$ .

Combinée à un isomorphisme de dualité inattendu, il nous permettra également, au paragraphe 8.5.4, de démontrer et généraliser la proposition 5.6.4 et d'ainsi compléter le chapitre 5.

### 8.5.1 Préliminaires

Dans ce qui suit,  $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$  désigne comme au chapitre 5 le foncteur d'oubli; on conserve également la notation  $\mathbb{F}_2^{\geq i}$  de la section 5.5 (notation 5.5.8).

Les résultats de cette section reposent sur la structure du foncteur constant  $\mathbb{F}_2 = I_0^{surj}$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  donnée par le corollaire 5.5.9. On rappelle que ce foncteur est *unisériel*.

**Lemme 8.5.1.** *Il existe dans  $\mathcal{F}_{surj}$  un unique monomorphisme  $\mathbb{F}_2^{\geq 1} \hookrightarrow o(\bar{I})$ .*

*Démonstration.* Par l'assertion 3 de la proposition 5.4.3, il existe dans  $\mathcal{F}_{surj}$  un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} o(I_0) & \xrightarrow{\simeq} & I_0^{surj} \\ \downarrow & & \downarrow \\ o(I_{\mathbb{F}_2}) & \xrightarrow{\simeq} & I_0^{surj} \oplus I_{\mathbb{F}_2}^{surj} \end{array}$$

En identifiant les conoyaux des flèches verticales, on obtient un isomorphisme entre  $o(\bar{I})$  et  $I_{\mathbb{F}_2}^{surj}$ .

Par conséquent,  $\text{hom}(\mathbb{F}_2^{\geq 1}, o(\bar{I})) \simeq \mathbb{F}_2^{\geq 1}(\mathbb{F}_2)^* = \mathbb{F}_2$ . L'unique morphisme non nul est injectif, car sa restriction au socle de  $\mathbb{F}_2^{\geq 1}$ , l'objet simple  $S_1^{surj}$  (cf. corollaire 5.5.9), est non nulle, l'inclusion  $S_1^{surj} \hookrightarrow \mathbb{F}_2^{\geq 1}$  induisant un isomorphisme par évaluation sur  $\mathbb{F}_2$ . Cela démontre le lemme.  $\square$

*Remarque 8.5.2.* On peut établir ce résultat de manière directe et explicite comme suit.

Si  $V$  est un objet de  $\mathcal{E}^f$ , notons  $x_V$  l'élément de  $\bar{I}(V) \simeq \mathbb{F}_2^{V^* \setminus \{0\}}$  donné par la fonction  $V^* \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{F}_2$  constante en 1. Pour toute application linéaire  $f : V \rightarrow W$ ,  $\bar{I}(f)$  envoie  $x_V$  sur la fonction indicatrice de  $W^* \setminus \ker({}^t f)$  (où  ${}^t f$  désigne la transposée de  $f$ ), donc sur  $x_W$  si  $f$  est un épimorphisme. Cela montre, puisque  $x_V = 0$  si et seulement si  $V = 0$ , que les  $x_V$  définissent un monomorphisme  $\mathbb{F}_2^{\geq 0} \hookrightarrow o(\bar{I})$  de  $\mathcal{F}_{surj}$ .

*Remarque 8.5.3.* Le foncteur  $\mathbb{F}_2^{\geq 1}$  est *idempotent* pour le produit tensoriel :  $(\mathbb{F}_2^{\geq 1})^{\otimes 2} \simeq \mathbb{F}_2^{\geq 1}$ .

Avant d'exploiter le lemme 8.5.1, nous aurons besoin d'introduire des catégories de foncteurs auxiliaires (qui n'interviendront que dans ce paragraphe).

**Notation 8.5.4.** – Nous désignerons par  $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$  la catégorie  $(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f)_{\setminus \mathcal{G}_r}$ , où l'on désigne encore par  $\mathcal{G}_r$ , par abus de notation, le foncteur composé

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathcal{E}^f \xrightarrow{\mathcal{G}_r} \mathbf{Ens},$$

qui est donc donné sur les objets par  $(V, W) \mapsto \mathcal{G}_r(V)$ .

Autrement dit, les objets de  $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$  sont les triplets  $(V, B, W)$  formés d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$  et de deux sous-espaces  $B$  et  $W$  de  $V$ , et les flèches  $(V, B, W) \rightarrow (V', B', W')$  de  $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$  sont les applications linéaires  $f : V \rightarrow V'$  telles que  $f(B) = B'$  et  $f(W) = W'$ .

La catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f, \mathcal{E})$  sera notée  $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ .

– Nous désignerons par  $\mathcal{E}_{2-\mathcal{D}_r}^f$  la catégorie  $(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f)_{\setminus \mathcal{G}_r'}$ , où l'on désigne par  $\mathcal{G}_r'$  le foncteur

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{B}} \mathcal{E}^f \xrightarrow{\mathcal{G}_r} \mathbf{Ens},$$

qui est donné sur les objets par  $(V, W) \mapsto \mathcal{G}_r(W)$ .

La catégorie de foncteurs  $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{2-\mathcal{D}_r}^f, \mathcal{E})$  sera notée  $\mathcal{F}_{2-\mathcal{D}_r}$ .

– L'inclusion naturelle de foncteurs ensemblistes  $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$  identifie  $\mathcal{E}_{2-\mathcal{D}_r}^f$  à une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$ . Nous noterons  $i_{\mathcal{D}_r} : \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{2-\mathcal{D}_r}$  le foncteur de précomposition par l'inclusion.

On dispose donc, conformément aux résultats du paragraphe 6.1, d'un foncteur de plongement  $\Upsilon_{\mathcal{G}_r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$  et d'un foncteur d'intégrale  $\Omega_{\mathcal{G}_r} : \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . Sur les objets, on a  $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}(X)(V, B, W) = X(V, B)$  et  $\Omega_{\mathcal{G}_r}(A)(V, B) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} A(V, B, W)$ .

- Remarque 8.5.5.* – La catégorie  $\mathcal{E}_{bi-G_r}^f$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{E}_{(G_r, G_r)}^f$  : c'est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie munie de deux sous-espaces. Nous avons préféré donner la présentation ci-dessus « dessymétrisant les deux bases » de manière à introduire plus naturellement les foncteurs  $\Upsilon_{G_r}$ ,  $\Omega_{G_r}$  et  $i_{\mathcal{D}_r}$ .
- L'indice  $2-D_r$  utilisé est une abréviation de *2-drapeau*. On pourrait naturellement généraliser les considérations de ce paragraphe à des catégories correspondant aux espaces vectoriels munis de drapeaux de longueur fixée arbitraire.

**Définition 8.5.6.** Nous noterons  $\mathcal{N}$  la sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  noyau du foncteur exact  $i_{\mathcal{D}_r}$ . Explicitement,  $\mathcal{N}$  contient les objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  tels que  $X(V, B, W) = 0$  pour tout objet  $(V, B, W)$  de  $\mathcal{E}_{bi-G_r}^f$  tel que  $W \subset B$ .

*Remarque 8.5.7.* La catégorie  $\mathcal{F}_{2-D_r}$  n'interviendra pas en elle-même, c'est la sous-catégorie  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  qui nous intéressera.

- Lemme 8.5.8.**
1. Il existe un foncteur  $\beta : \mathcal{E}_{bi-G_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f$  tel que  $\beta(V, B, W) = W/(W \cap B)$  pour tout objet  $(V, B, W)$  de  $\mathcal{E}_{bi-G_r}^f$ .
  2. Il existe dans  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  un épimorphisme du foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  vers le foncteur  $\beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1})$  (où  $\beta^* : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-G_r}$  désigne le foncteur de précomposition par  $\beta$ ) ;  $\mathcal{N}$  est la sous-catégorie pleine des objets  $X$  de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  tels que la projection canonique  $X \twoheadrightarrow X \otimes \beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1})$  qui s'en déduit est un isomorphisme.
  3. La sous-catégorie  $\mathcal{N}$  est un idéal de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  : le produit tensoriel d'un objet de  $\mathcal{N}$  et d'un objet de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  appartient à  $\mathcal{N}$ .
  4. Le foncteur  $\beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1})$  se plonge dans  $\Upsilon_{G_r}(\kappa(\bar{I}))$ .

*Démonstration.* Toute flèche  $f : (V, B, W) \rightarrow (V', B', W')$  de  $\mathcal{E}_{bi-G_r}^f$  induit un épimorphisme  $W \twoheadrightarrow W' \twoheadrightarrow W'/(W' \cap B')$ , parce que  $f(W) = W'$  ; la restriction de morphisme à  $W \cap B$  est nulle puisque  $f(W \cap B) \subset f(W) \cap f(B) = W' \cap B'$ . Ainsi,  $f$  induit un épimorphisme  $W/(W \cap B) \twoheadrightarrow W'/(W' \cap B')$ , ce qui établit le premier point.

Le second vient de ce que la projection  $\mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2^{\geq 1}$  de  $\mathcal{F}_{surj}$  (cf. lemme 5.5.9) induit un épimorphisme  $\mathbb{F}_2 = \beta^*(\mathbb{F}_2) \twoheadrightarrow \beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1})$  dans  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$  dont l'image est nulle sur l'objet  $(V, B, W)$  si et seulement si  $\beta(V, B, W)$  est nul, i.e. si  $W \subset B$ . La troisième assertion s'en déduit aussitôt.

Pour le dernier point, on remarque que le foncteur composé  $\mathcal{E}_{bi-G_r}^f \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}_{surj}^f \hookrightarrow \mathcal{E}^f$  se plonge dans le foncteur  $\mathcal{E}_{bi-G_r}^f \xrightarrow{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{G_r, G_r}^f}} \mathcal{E}_{G_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{K}} \mathcal{E}^f$  (on rappelle que le symbole  $\mathcal{O}$  est introduit à la notation 1.1.15), via l'inclusion canonique  $\beta(V, B, W) = W/(W \cap B) \hookrightarrow V/B = \mathfrak{K}(V, B)$ . Comme les foncteurs de  $\mathcal{F}$  préservent les monomorphismes, on en déduit que le foncteur de précomposition  $\beta^* \circ o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-G_r}$  s'injecte dans  $\Upsilon_{G_r} \circ \kappa : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-G_r}$ . Le lemme 8.5.1 fournit alors un monomorphisme  $\beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1}) \hookrightarrow \beta^*(o(\bar{I})) \hookrightarrow \Upsilon_{G_r}(\kappa(\bar{I}))$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 8.5.9.** Soient  $A$  un foncteur analytique de  $\mathcal{F}_{G_r}$  et  $X$  un objet de  $\mathcal{N}$ . Le groupe d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{G_r}}^i(A, \Omega_{G_r}(X))$  est nul pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Un argument de colimite filtrante (cf. [Jen72], th. 4.2, déjà utilisé de la même façon dans la démonstration de la proposition 2.5.8) permet de se ramener au cas où  $A$  est *polynomial*, qui se traite grâce au corollaire 1.2.10.

Notons  $F$  l'endofoncteur  $\cdot \otimes \kappa(\bar{I})$  de  $\mathcal{F}_{G_r}$ ,  $G = \Delta^{G_r}$ ,  $H : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}_{G_r}$  la restriction à  $\mathcal{N}$  de  $\Omega_{G_r}$ , et  $K$  l'endofoncteur de  $\mathcal{N}$  induit par  $\cdot \otimes \Upsilon_{G_r}(\kappa(\bar{I}))$  (on utilise que  $\mathcal{N}$  est un idéal de  $\mathcal{F}_{bi-G_r}$ ). Alors :

- tous ces foncteurs sont exacts ;
- $G$  est adjoint à gauche à  $F$  par le corollaire 8.1.6 ;
- la proposition 6.1.8 fournit un isomorphisme  $F \circ H \simeq H \circ K$  ;
- grâce au lemme 8.5.8, il existe un monomorphisme  $id_{\mathcal{N}} \hookrightarrow K$ .

Le corollaire 1.2.10 donne alors la conclusion.  $\square$



Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

On rappelle que  $\text{Is}_0$  est une autre écriture pour  $S_0^{surj}$  (cf. notation 5.1.4). Le corollaire 5.5.9 fournit une injection  $\text{Is}_0 \hookrightarrow \mathbb{F}_2$ , dont on déduit un monomorphisme canonique  $X \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \hookrightarrow X$  dans  $\mathcal{F}_{bi-g_r}$ .

**Proposition 8.5.10.** *Soient  $F$  un foncteur analytique de  $\mathcal{F}_{g_r}$  et  $X$  un objet (quelconque) de  $\mathcal{F}_{bi-g_r}$ . Le morphisme naturel gradué  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{g_r}}^*(F, \Omega_{g_r}(X \otimes \beta^*(\text{Is}_0))) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_{g_r}}^*(F, \Omega_{g_r}(X))$  induit par le monomorphisme canonique  $X \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \hookrightarrow X$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On écrit la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte  $0 \rightarrow X \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \rightarrow X \rightarrow X \otimes \beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1}) \rightarrow 0$  et l'on applique le lemme précédent à l'objet  $X \otimes \beta^*(\mathbb{F}_2^{\geq 1})$  de  $\mathcal{N}$  (cf. lemme 8.5.8).  $\square$

### 8.5.2 L'isomorphisme $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(F), \omega(X)) \simeq \text{Ext}_{g_r}^*(F, \mathcal{I}(X))$ ( $F$ analytique)

Rappelons que l'endofoncteur  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{F}_{g_r}$  et la transformation naturelle  $j^\omega : \mathcal{I} \rightarrow \omega$  ont été définis au paragraphe 6.3.3.

**Théorème 8.5.11.** *Soient  $F$  un objet analytique de  $\mathcal{F}_{g_r}$  et  $X$  un objet quelconque de  $\mathcal{F}_{g_r}$ . Le morphisme naturel gradué  $(j_X^\omega)_* : \text{Ext}_{g_r}^*(F, \mathcal{I}(X)) \rightarrow \text{Ext}_{g_r}^*(F, \omega(X))$  est un isomorphisme.*

*En particulier, les adjonctions des propositions 6.3.7 et 6.3.34 fournissent des isomorphismes gradués naturels*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(F), \omega(X)) \simeq \text{Ext}_{g_r}^*(F, \mathcal{I}(X)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{g_r}}^*(\mathfrak{J}(F), \mathfrak{J}(X)).$$

*Démonstration.* Notons  $\Upsilon'_{g_r} : \mathcal{F}_{g_r} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-g_r}$  la composée de  $\Upsilon_{g_r}$  et du foncteur de précomposition par l'endofoncteur  $\mathcal{E}_{bi-g_r}^f$  « échangeant les deux bases », i.e. donné par  $(V, B, W) \rightarrow (V, W, B)$  sur les objets et sur les morphismes par l'égalité

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{bi-g_r}^f}((V, B, W), (V', B', W')) = \text{hom}_{\mathcal{E}_{bi-g_r}^f}((V, W, B), (V', W', B')).$$

Autrement dit, on a  $\Upsilon'_{g_r}(X)(V, B, W) = X(V, W)$  (tandis que  $\Upsilon_{g_r}(X)(V, B, W) = X(V, B)$ ).

Alors les endofoncteurs  $\Omega_{g_r}\Upsilon'_{g_r}$  et  $\omega$  de  $\mathcal{F}_{g_r}$  coïncident. De plus, il existe un isomorphisme  $\mathcal{I}(X) \simeq \Omega_{g_r}\Upsilon'_{g_r}(X \otimes \beta^*(\text{Is}_0))$  naturel en  $X$ , par lequel  $j_X^\omega$  s'identifie à la transformation naturelle induite par  $X \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \hookrightarrow X$ . Ainsi,  $(j_X^\omega)_*$  est un isomorphisme, par la proposition 8.5.10.

Les autres flèches considérées sont des isomorphismes par le corollaire 1.2.8.  $\square$

En utilisant l'adjonction entre foncteurs de restriction et de prolongement par zéro, on peut en déduire un résultat analogue dans les catégories  $\mathcal{F}_{g_r, \leq n}$ . Ce même principe est mis en œuvre dans le corollaire suivant.

**Corollaire 8.5.12.** *Soient  $k$  et  $n$  deux entiers naturels,  $F$  un objet analytique de  $\mathcal{F}_{g_r, k}$  et  $X$  un objet quelconque de  $\mathcal{F}_{g_r, n}$ .*

- Si  $k < n$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_k(F), \omega_n(X)) = 0$ .
- Si  $k = n$ , alors le morphisme gradué naturel  $\text{Ext}_{g_r, n}^*(F, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_n(F), \omega_n(X))$  induit par  $\omega_n$  est un isomorphisme.

On rappelle que les foncteurs de restriction  $\mathcal{R}$  et de prolongement par zéro  $\mathcal{P}$  qui interviennent dans la démonstration ci-dessous ont été définis dans la notation 6.3.2.

*Démonstration.* Le théorème 8.5.11 fournit un isomorphisme naturel gradué entre les groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_k(F), \omega_n(X))$  et  $\text{Ext}_{g_r}^*(\mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}(F), \mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(X))$ . On remarque que  $\mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(X)$  appartient à l'image de la catégorie  $\mathcal{F}_{g_r, \geq n}$  dans  $\mathcal{F}_{g_r}$  par le foncteur de prolongement par zéro. Comme  $\mathcal{E}_{g_r, \geq n}^f$  est une sous-catégorie complète à gauche de  $\mathcal{E}_{g_r}^f$ , la proposition 3.3.8 (et le corollaire 1.2.8) montrent que ce groupe d'extensions est canoniquement isomorphe à  $\text{Ext}_{g_r, \geq n}^*(\mathcal{R}_{\mathbb{N}, \geq n}\mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}(F), \mathcal{R}_{\mathbb{N}, \geq n}\mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(X))$ .

Si  $k < n$ ,  $\mathcal{R}_{\mathbb{N}, \geq n} \mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}(F)$  est nul, ce qui établit la première assertion. Si  $k = n$ , cet objet s'identifie à  $\mathcal{P}_{n, \geq n}(F)$ . Puisque  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  est une sous-catégorie complète à droite de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, \geq n}^f$ , la proposition 3.3.8 montre cette fois que ce groupe d'extensions est canoniquement isomorphe à  $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, n}^*(F, \mathcal{R}_{\mathbb{N}, n} \mathcal{I} \mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(X))$ . Pour conclure, on constate que le monomorphisme naturel  $X \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{N}, n} \mathcal{I} \mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(X)$  obtenu par restriction de  $j_{\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(X)}^\omega$  est un isomorphisme, puisque  $\mathcal{G}_r(W) = \{W\}$  pour  $\dim W = n$ .  $\square$

Dans le cas  $k = 0$ , ce corollaire s'exprime ainsi, avec la terminologie de la définition 1.4.14.

**Corollaire 8.5.13.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , le foncteur  $\omega_n(X)$  de  $\mathcal{F}$  est  $\mathcal{F}_\omega$ -parfait.*

*Remarque 8.5.14.* 1. Les premiers résultats d'annulation cohomologique dans des catégories de foncteurs remontent à Pirashvili. Ainsi, le lemme 0.4 de [FLS94] (dû à Pirashvili) s'est avéré l'un des premiers outils efficaces pour simplifier des calculs de groupes d'extensions dans  $\mathcal{F}$ .

2. Comme nous le verrons au paragraphe 8.5.4, la proposition 5.6.4, due à Suslin, est un cas particulier du théorème 8.5.11.

3. Le corollaire 8.5.13 constitue une généralisation du résultat (énoncé d'ordinaire dans sa variante duale) dû à Franjou selon lequel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \bar{P}) = 0$  si  $F$  est un foncteur fini de  $\mathcal{F}$  (cf. [Pow98a], appendice, pour une démonstration due à Schwartz). Les lemmes techniques de [Pow98a] illustrent l'intérêt de ce genre de résultat cohomologique pour aborder la conjecture artinienne.

Gaudens et Schwartz ont établi (cf. [GS05]) une généralisation du résultat de Franjou que le théorème 8.5.11 recoupe partiellement.

4. La démonstration de Schwartz du théorème de Franjou et celle de Suslin de la proposition 5.6.4 utilisent essentiellement des considérations explicites sur des foncteurs finis (puissances symétriques ou divisées). A l'inverse, l'approche de Scorichenko du théorème de Suslin et notre théorème 8.5.11 reposent sur une méthode plus globale, consistant à étudier des groupes d'extensions entre certains foncteurs à partir de catégories et de foncteurs plus « gros ». Ainsi, la démonstration du théorème de Franjou fournie par les considérations du paragraphe 8.5.1 consiste à observer que le foncteur  $\bar{P}$  se plonge dans  $\bar{P} \otimes \bar{I}$ , tandis que la méthode de Schwartz n'utilise que des foncteurs co-localement finis.

5. Nous n'utiliserons la plupart du temps le théorème 8.5.11 que par l'intermédiaire du corollaire 8.5.12. Autrement dit, nous nous placerons souvent dans les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  et non dans la catégorie globale  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . Dans une version préliminaire de ce travail, nous établissions le corollaire 8.5.12 sans passer par la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . Cependant, la démonstration était moins conceptuelle et nettement compliquée techniquement par l'inexactitude de l'adjoint à droite au foncteur  $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \rightarrow \mathcal{F}$  pour  $n > 1$ . La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  apparaît ainsi très utile théoriquement pour les calculs d'algèbre homologique, y compris dans des catégories plus petites.

### 8.5.3 Le foncteur $\omega$ et la conjecture artinienne

Tous les foncteurs de type fini de la catégorie  $\mathcal{F}$  ne sont pas l'image par le foncteur  $\omega$  d'un foncteur fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ . Il en est ainsi du foncteur  $k_2(\bar{P})$ . Cependant, nous conjecturons que l'on peut obtenir tous les foncteurs de type fini de  $\mathcal{F}$  par un nombre fini d'opérations de type extension, noyau ou conoyau à partir des images d'objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  par le foncteur  $\omega$ . Le théorème 8.5.11 joue un rôle fondamental pour manipuler les foncteurs ainsi obtenus, que nous avons nommés foncteurs *oméga-adaptés*. Ils nous permettront d'énoncer la *conjecture artinienne extrêmement forte*, qui décrit la filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Cette conjecture compare la filtration de la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  par les sous-catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$  et la filtration de Krull de  $\mathcal{F}$ , affirmant que le foncteur  $\omega$  induit une équivalence entre les quotients associés.

### Foncteurs oméga-adaptés

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à la propriété suivante d'une sous-catégorie pleine  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{F}$  :

**Hypothèse 8.5.15.** Pour toute suite exacte courte  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  de  $\mathcal{F}$ , si deux des objets  $A, B, C$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ , il en est de même du troisième.

*Remarque 8.5.16.* – Une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  est épaisse si et seulement si elle vérifie 8.5.15 et est stable par sous-objet (ou par quotient).

- Il existe une notion de plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  vérifiant 8.5.15 et contenant une sous-catégorie donnée  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{F}^{df}$  : c'est l'intersection (qui ne pose pas de problème ensembliste puisque  $\mathcal{F}^{df}$  est essentiellement petite) des sous-catégories pleines vérifiant 8.5.15 et contenant  $\mathcal{C}$ .

**Définition 8.5.17.** – Nous désignerons par  $\mathcal{F}^{\omega-ad}$  la plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  vérifiant 8.5.15 et contenant l'image de la restriction à la sous-catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}^f$  des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$  du foncteur  $\omega_k : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k} \rightarrow \mathcal{F}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Nous dirons qu'un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}$  est *oméga-adapté* s'il est objet de  $\mathcal{F}^{\omega-ad}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Nous noterons  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  la plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  vérifiant 8.5.15 et contenant l'image de la restriction à la sous-catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}^f$  du foncteur  $\omega_k : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k} \rightarrow \mathcal{F}$  pour tout entier  $k \leq n$ .

Nous dirons que  $F$  est *oméga-adapté de hauteur au plus  $n$*  s'il est objet de  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ .

**Proposition 8.5.18.** 1. Si  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , alors  $\omega(X)$  est oméga-adapté.

2. Si  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\omega(X)$  est oméga-adapté, de hauteur au plus  $n$ .

3. Pour tout foncteur oméga-adapté  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  est oméga-adapté de hauteur au plus  $n$ .

4. Le produit tensoriel de deux foncteurs oméga-adaptés  $F$  et  $G$  est oméga-adapté. De plus, sa hauteur est inférieure à la somme des hauteurs de  $F$  et  $G$ .

5. Les sous-catégories  $\mathcal{F}^{\omega-ad}$  et  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  sont stables par le foncteur différence de  $\mathcal{F}$ .

6. Tout foncteur oméga-adapté est  $\text{pf}_\infty$ .

*Démonstration.* Les assertions 1 et 2 résultent de l'exactitude du foncteur oméga et de la proposition 6.3.3.

La sous-catégorie pleine  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  contient tous les  $\omega_k(X)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}^f$ ) et vérifie l'hypothèse 8.5.15, elle contient donc  $\mathcal{F}^{\omega-ad}$ , d'où l'assertion 3.

Si  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$ , alors le produit tensoriel de  $\omega_k(X)$  et d'un objet oméga-adapté de hauteur au plus  $n$  est oméga-adapté de hauteur au plus  $n + k$ . En effet, la sous-catégorie pleine des objets de  $\mathcal{F}$  dont le produit tensoriel par  $\omega_k(X)$  est oméga-adapté de hauteur au plus  $n + k$  contient les  $\omega_i(A)$ , pour  $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, i}^f$  et  $i \leq n$ , par la proposition 8.3.12, et vérifie l'hypothèse 8.5.15. On démontre ensuite par le même raisonnement l'assertion 4.

La proposition 6.3.14 montre, par exactitude de  $\omega$ , que  $\omega$  transforme un objet  $\text{pf}_\infty$ , donc en particulier un objet fini (cf. corollaire 8.2.8), en un objet  $\text{pf}_\infty$ . Cela montre, en utilisant la proposition 2.2.13 (grâce à laquelle  $\mathcal{F}^{pf, \infty}$  vérifie l'hypothèse 8.5.15), que  $\mathcal{F}^{\omega-ad}$  est incluse dans  $\mathcal{F}^{pf, \infty}$ , d'où l'assertion 6.

Pour l'assertion 5, on considère la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_n$  des objets  $F$  de  $\mathcal{F}$  tels que  $\Delta F$  appartient à  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ . Les propositions 8.4.10 et 8.4.12 montrent que  $\mathcal{C}_n$  contient  $\omega_i(X)$  pour  $i \leq n$  et  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, i}^f$ . D'autre part, l'exactitude du foncteur différence montre que  $\mathcal{C}_n$  vérifie l'hypothèse 8.5.15, ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Exemple 8.5.19.* Les projectifs standard  $P_V = \omega(P_{(V, V)}^{\mathcal{G}_r}) = \omega(\rho(P_V^{surj}))$  de  $\mathcal{F}$  sont oméga-adaptés, de hauteur  $\dim V$  (le fait que cette hauteur n'est pas strictement inférieure à  $\dim V$  découlera des considérations du chapitre 9).

*Remarque 8.5.20.* La troisième assertion permet de définir la hauteur de tout foncteur oméga-adapté.

Nous utiliserons, dans ce paragraphe, le théorème 8.5.11 par l'intermédiaire du résultat d'annulation cohomologique suivant.

**Proposition 8.5.21.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \geq n}$  et  $F$  un objet de  $\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$ . On a  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega_{\geq n}(X)) = 0$ .*

*Démonstration.* Cette propriété s'obtient à partir du corollaire 8.5.12 et de l'observation que la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  formée des objets  $F$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega_{\geq n}(X)) = 0$  vérifie l'hypothèse 8.5.15.  $\square$

### La conjecture artinienne extrêmement forte

**Conjecture 8.5.22** (Conjecture artinienne extrêmement forte, version globale). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un quotient d'un foncteur oméga-adapté de hauteur au plus  $n$  est oméga-adapté de hauteur au plus  $n$ .*

*Remarque 8.5.23.* Il est naturel de considérer la conjecture affaiblie consistant à supposer seulement que tout quotient d'un foncteur oméga-adapté est oméga-adapté. Cependant, cet énoncé (qui implique déjà la conjecture artinienne sous sa forme minimale en raison de l'assertion  $\mathfrak{b}$  de la proposition 8.5.18), n'implique pas facilement la forme extrêmement forte ici énoncée. En effet, la question de savoir si un sous-foncteur oméga-adapté d'un foncteur oméga-adapté de hauteur  $n$  est de hauteur au plus  $n$  semble très délicate.

**Proposition 8.5.24** (Conjecture artinienne extrêmement forte et filtration de Krull). *Supposons la conjecture 8.5.22 vérifiée.*

1. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la sous-catégorie  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse. Elle est égale à la sous-catégorie  $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}$  des objets noethériens de type  $n$  de  $\mathcal{F}$ .*
2. *De plus, le foncteur  $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \rightarrow \mathcal{F}$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f$  et  $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}/\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$ .*
3. *Selon les notations de la section 2.5, désignons par  $\overline{\mathcal{F}_n^{\omega-ad}}$  la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}$  stable par colimites contenant  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ . C'est aussi la catégorie des foncteurs qui sont réunion de leurs sous-foncteurs noethériens de type  $n$ . Alors la filtration de Krull de  $\mathcal{F}$  est donnée par  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}_n^{\omega-ad}}$ , et le foncteur  $\omega_n$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^{lf}$  et  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* Comme les sous-catégories  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  sont par hypothèse stables par quotient et qu'elles vérifient 8.5.15, elles sont épaisses. La description de  $\overline{\mathcal{F}_n^{\omega-ad}}$  comme sous-catégorie pleine des objets réunion de leurs sous-objets oméga-adaptés de hauteur au plus  $n$  provient de la proposition 2.5.1 et de l'assertion  $\mathfrak{b}$  de la proposition 8.5.18.

On note ensuite que  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  est l'image réciproque par le foncteur canonique  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$  de l'image  $\mathcal{C}_n$  du foncteur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$  induit par  $\omega_n$ . En effet, la sous-catégorie des objets de  $\mathcal{F}$  dont l'image dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$  appartient à  $\mathcal{C}_n$  vérifie 8.5.15 et contient bien les  $\omega_i(X)$  pour  $i \leq n$  et  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, i}^f$ , donc elle contient  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ . Réciproquement, si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}$  isomorphe à  $\omega_n(X)$  dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$ , avec  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ , les propositions 8.5.21 et 1.4.11 prouvent qu'il existe dans  $\mathcal{F}$  un morphisme  $F \rightarrow \omega_n(X)$  dont le noyau et le conoyau appartiennent à  $\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$ , ce qui entraîne que  $F$  appartient à  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ .

On établit les autres résultats par récurrence sur l'entier  $n$ . Ils sont clairs pour  $n = 0$ . On suppose donc  $n > 0$  et la proposition vérifiée au rang  $n - 1$ .

Le foncteur  $\omega_n$  induit une équivalence entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}^f$  et la sous-catégorie épaisse  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$ , et aussi de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}^{lf}$  vers la sous-catégorie épaisse  $\overline{\mathcal{F}_n^{\omega-ad}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}}$  de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}}$  (cf. corollaire 2.5.9). Cela montre en particulier, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, que ces images sont respectivement incluses dans  $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}/\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$  et  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ .

Si  $X$  est un objet fini non nul de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,k}$ , avec  $k > n$ , alors  $\omega_k(X)$  est limite de ses quotients appartenant à  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  et n'y appartient pas lui-même, par la proposition 8.5.21. On en déduit que son image dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$  est infinie, donc que  $\omega_k(X)$  n'est pas noethérien de type  $n$ , puisque  $\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad} = \mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$  par l'hypothèse de récurrence. Cela entraîne qu'il n'y a pas, dans  $\mathcal{F}$ , d'objet noethérien de type  $n$  qui ne soit pas oméga-adapté de hauteur au plus  $n$ . On a donc  $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)} = \mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ .

Comme on suppose que l'énoncé 8.5.22 est satisfait, la catégorie  $\mathcal{F}$  est localement noethérienne, par la remarque 8.5.23. La proposition 2.8.9 donne alors  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}} = \overline{\mathcal{F}_n^{\omega-ad}}$ , d'où la proposition.  $\square$

**Conjecture 8.5.25** (Conjecture artinienne extrêmement forte, première version locale).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le foncteur exact

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n} \xrightarrow{\omega_n} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$$

induit un isomorphisme

$$G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}) \xrightarrow{\cong} G_0^f(\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F}))$$

qui préserve les classes des objets simples.

**Conjecture 8.5.26** (Conjecture artinienne extrêmement forte, seconde version locale). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout objet simple  $S$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}$ , le foncteur  $\omega_n(S)$  de  $\mathcal{F}$  est simple noethérien de type  $n$ . De plus, un foncteur de  $\mathcal{F}$  est simple noethérien de type  $n$  si et seulement s'il est isomorphe à un quotient non nul d'un tel objet.

La proposition 8.5.24 procure le corollaire suivant.

**Corollaire 8.5.27.** Les conjectures 8.5.22, 8.5.25 et 8.5.26 sont équivalentes.

**Corollaire 8.5.28.** Si la conjecture artinienne extrêmement forte est satisfaite, alors  $\mathcal{F}^{tf}$  est la plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  stable par sous-objet et par extensions et contenant  $\omega_n(X)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}^f$ .

*Démonstration.* La conjecture artinienne extrêmement forte entraîne que tout foncteur de type fini de  $\mathcal{F}$  s'obtient par extensions de foncteurs simples noethériens. Or les foncteurs simples noethériens de type  $n$  de  $\mathcal{F}$  sont inclus dans un  $\omega_n(S)$  avec  $S \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}$  simple, d'où le corollaire.  $\square$

En considérant les objets simples pseudo-constants des  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,n}$  dans la conjecture 8.5.26, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 8.5.29.** La conjecture artinienne extrêmement forte implique la conjecture artinienne très forte 5.4.16.

*Remarque 8.5.30.* Il est clair que la conjecture 8.5.26 implique la conjecture 4.3.12.

Nous terminons ce paragraphe en montrant que la conjecture artinienne extrêmement forte implique également les conjectures 4.3.13 et 4.3.15.

**Proposition 8.5.31.** Si la conjecture 8.5.22 est satisfaite, pour tout foncteur  $F$  de type fini de  $\mathcal{F}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathbf{Hom}(T^n, F) = 0$ .

*Démonstration.* Grâce au corollaire 8.5.28 et à l'exactitude à gauche du foncteur  $\mathbf{Hom}(T^n, \cdot)$ , il suffit de démontrer l'assertion lorsque  $F = \omega(X)$ , où  $X$  est un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ .

Pour cela, on emploie itérativement la proposition 8.4.32, ce qui fournit un isomorphisme  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(T^n, \omega(X)) \simeq \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(T^n), X))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs, si  $X$  est de degré polynomial  $k$  (cf. proposition 8.2.5), on a  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(T^n), X) = 0$  pour  $n > k$ , car  $T^n$  est un quotient de  $\bar{P}^{\otimes n}$ , de sorte que la conclusion s'obtient en combinant les isomorphismes (3.6) (page 87), (6.2) (page 157) et le corollaire 8.1.5.  $\square$

*Remarque 8.5.32.* Un raffinement de cette démonstration permet de voir que si  $F$  est un foncteur oméga-adapté, alors  $\mathbf{Hom}(T^n, F) = 0$  pour  $n$  assez grand. Il convient à cet effet de généraliser la proposition 8.4.32 aux foncteurs dérivés de  $\mathbf{Hom}$ .

**Proposition 8.5.33.** *Si  $F$  est un foncteur oméga-adapté de  $\mathcal{F}$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'ensemble*

$$\{\lambda \mid \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_\lambda, F) \neq 0\}$$

(où  $\lambda$  est une partition régulière) est fini.

*Démonstration.* Il suffit de montrer la propriété pour  $F$  de la forme  $\omega_n(X)$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}^f$ . Pour  $n = 0$ , cela vient de ce que les objets finis de  $\mathcal{F}$  sont co-pf $_\infty$ ; pour  $n > 0$ , tous les groupes  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_\lambda, \omega_n(X))$  sont nuls par le corollaire 8.5.12, d'où la proposition.  $\square$

### 8.5.4 Retour sur la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$

Les résultats de ce paragraphe reposent sur la proposition 8.5.35, qui fournit un isomorphisme de dualité que l'on exhibe directement. Cet isomorphisme est relatif à la composée du foncteur  $\omega$  et du foncteur d'oubli  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ . Nous en donnons ensuite quelques conséquences directes sur le foncteur  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ .

Mais la principale application de la proposition 8.5.35, donnée dans la dernière partie de ce paragraphe, concerne la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  : l'isomorphisme de dualité susmentionné et le théorème 8.5.11 se conjuguent en un résultat d'annulation cohomologique puissant dans la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  (proposition 8.5.42). Son intérêt est illustré par le fait qu'il contient la proposition 5.6.4, due à Suslin, que nous avons rappelée sans démonstration au chapitre 5.

#### Propriété de dualité du foncteur $\tilde{\omega}$

**Notation 8.5.34.** Nous désignerons par  $\tilde{\omega} : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}$  le foncteur composé

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \xrightarrow{\omega} \mathcal{F}.$$

Ainsi, pour tous objets  $X$  de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$  et  $V$  de  $\mathcal{E}^f$ , on a

$$\tilde{\omega}(X)(V) = \tilde{\omega}(X)(V) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(V)} X(V, B),$$

et pour tout morphisme  $f : V \rightarrow V'$  de  $\mathcal{E}^f$ , la composante  $X(V, B) \rightarrow X(V', B')$  de  $\tilde{\omega}(X)(f)$  est l'application induite par le morphisme  $(V, B) \rightarrow (V', B')$  induit par  $f$  si  $B' = f(B)$ , 0 sinon.

**Proposition 8.5.35.** *Le foncteur  $\tilde{\omega}$  commute à la dualité : il existe un isomorphisme*

$$\alpha : \tilde{\omega} \circ D \xrightarrow{\cong} D \circ \tilde{\omega}$$

tel que pour tout objet  $X$  de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$ , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}(D^2 X) & \xrightarrow{\alpha_{D^2 X}} & D\tilde{\omega}(DX) \\ \uparrow & & \uparrow D\alpha_X \\ \tilde{\omega}(X) & \xrightarrow{\quad} & D^2\tilde{\omega}(X), \end{array}$$

où les monomorphismes non spécifiés sont les unités de l'adjonction.

*Démonstration.* Définissons un foncteur  $\tilde{\omega}' : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \rightarrow \mathcal{F}$  par

$$\tilde{\omega}'(X)(V) = \tilde{\omega}(X)(V) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(V)} X(V, B)$$

et tel que pour tout morphisme  $f : V \rightarrow V'$  de  $\mathcal{E}^f$ , la composante  $X(V, B) \rightarrow X(V', B')$  de  $\tilde{\omega}'(X)(f)$  est l'application induite par le morphisme  $(V, B) \rightarrow (V', B')$  induit par  $f$  si  $f^{-1}(B') = B$ , 0 sinon.

Les foncteurs  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\omega}'$  sont duaux en ce sens qu'il existe des isomorphismes canoniques  $a : \tilde{\omega} \circ D \xrightarrow{\cong} D \circ \tilde{\omega}'$  et  $b : \tilde{\omega}' \circ D \xrightarrow{\cong} D \circ \tilde{\omega}$ . En effet, si  $f : V \rightarrow V'$  est un morphisme de  $\mathcal{E}^f$ ,  $W$  un élément de  $\mathcal{G}r(V)$  et  $W'$  un élément de  $\mathcal{G}r(V')$ , les conditions  $W^\perp = {}^t f(W'^\perp)$  et  $W = f^{-1}(W')$  sont équivalentes.

Nous allons maintenant montrer que les foncteurs  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\omega}'$  sont isomorphes.

Soit  $u_{X,V} : \tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}'(X)(V)$ , pour  $X \in \text{Ob } \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$  et  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ , l'application linéaire dont la composante  $X(V, W) \rightarrow X(V, B)$  (où  $W, B \in \mathcal{G}r(V)$ ) est induite par l'inclusion  $(V, W) \hookrightarrow (V, B)$  si  $W \subset B$ , 0 sinon. Alors  $u_{X,V}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, car si l'on munit  $\mathcal{G}r(V)$  d'un ordre total  $\leq$  tel que  $W \subset B$  implique  $W \leq B$ , on obtient pour  $u_{X,V}$  une matrice triangulaire par blocs, avec des blocs diagonaux identiques.

De plus, pour toute application linéaire  $f : V \rightarrow V'$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}(X)(V) & \xrightarrow{\tilde{\omega}(X)(f)} & \tilde{\omega}(X)(V') \\ u_{X,V} \downarrow & & \downarrow u_{X,V'} \\ \tilde{\omega}'(X)(V) & \xrightarrow{\tilde{\omega}'(X)(f)} & \tilde{\omega}'(X)(V') \end{array}$$

commute. En effet, la composante  $X(V, W) \rightarrow X(V', B')$  de l'application  $\tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}'(X)(V')$  obtenue en suivant la composée supérieure est la somme des applications induites par le morphisme  $(V, W) \rightarrow (V', B')$  induit par  $f$  indexée sur les  $W' \in \mathcal{G}r(V')$  tels que  $f(W) = W'$  et  $W' \subset B'$ . Autrement dit, cette composante est l'application induite par le morphisme  $(V, W) \rightarrow (V', B')$  induit par  $f$  si  $f(W) \subset B'$  et 0 sinon.

De même, la composante  $X(V, W) \rightarrow X(V', B')$  de l'application  $\tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}'(X)(V')$  obtenue en suivant la composée inférieure est l'application induite par le morphisme  $(V, W) \rightarrow (V', B')$  induit par  $f$  si  $W \subset f^{-1}(B')$  et 0 sinon, d'où la commutativité recherchée.

Par conséquent, les applications linéaires  $u_{X,V}$  définissent un isomorphisme  $u_X : \tilde{\omega}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{\omega}'(X)$  de  $\mathcal{F}$ , qui est naturel en  $X$ , d'où un isomorphisme de foncteurs  $u : \tilde{\omega} \xrightarrow{\cong} \tilde{\omega}'$ . Compte-tenu du début de la démonstration, on en déduit un isomorphisme  $\alpha : \tilde{\omega} \circ D \simeq D \circ \tilde{\omega}$ .

On remarque même que les deux composées

$$\tilde{\omega} D \xrightarrow{a} D \tilde{\omega}' \xrightarrow{Du} D \tilde{\omega}$$

et

$$\tilde{\omega} D \xrightarrow{uD} \tilde{\omega}' D \xrightarrow{b} D \tilde{\omega}$$

fournissent le même isomorphisme (car si  $W$  et  $B$  sont deux sous-espaces de  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ , les conditions  $W \subset B$  et  $B^\perp \subset W^\perp$  sont équivalentes). La condition de compatibilité entre l'isomorphisme  $\alpha$  et le foncteur de dualité s'obtient alors en observant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}(D^2 X) & \xrightarrow{a_{DX}} & D \tilde{\omega}'(DX) \\ \uparrow & & \uparrow D b_X \\ \tilde{\omega}(X) & \xrightarrow{\quad} & D^2 \tilde{\omega}(X) \end{array}$$

commute. □

Avant d'utiliser cette proposition dans la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$ , mentionnons-en quelques conséquences qui possèdent un intérêt intrinsèque.

### Premières conséquences

**Corollaire 8.5.36.** *Si  $X$  est un objet auto-dual de  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ , alors  $\widetilde{\omega}(X)$  est un objet auto-dual de  $\mathcal{F}$ .*

**Corollaire 8.5.37.** *L'objet  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$  de  $\mathcal{F}$  est auto-dual.*

*Démonstration.* En effet,  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r] = \widetilde{\omega}(\mathbb{F}_2)$ , et le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  est auto-dual dans  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ .  $\square$

*Remarque 8.5.38.* 1. La structure auto-duale de  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$  munit son algèbre d'endomorphismes  $A_{\mathcal{G}_r}$  d'une involution ; celle-ci est en fait triviale. Par le corollaire 5.6.11, il suffit de le vérifier pour l'endomorphisme  $\tau$  décrit dans la remarque 5.6.12.

Pour cela, on note que la structure auto-duale de  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$  est donnée par les formes bilinéaires

$$b_V : \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(V)] \times \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(V^*)] \rightarrow \mathbb{F}_2 \quad ([W], [H]) \mapsto 1 \text{ si } H \subset W^\perp, 0 \text{ sinon.}$$

On calcule alors, pour  $W \in \mathcal{G}_r(V)$ ,

$$b_V(\tau([W]), [H]) = \sum_{B \in \mathcal{G}_{r-1}(W)} b_V([B], [H]) =$$

$$\text{Card} \{B \in \mathcal{G}_{r-1}(W) \mid H \subset B^\perp\} = \text{Card} \mathcal{G}_{r-1}(W \cap H^\perp).$$

En utilisant le lemme 5.6.8, on voit que cet élément de  $\mathbb{F}_2$  vaut 1 si  $\dim(W \cap H^\perp) \geq n-1$ , i.e.  $\dim W - \dim(W \cap H^\perp) \leq 1$ , et 0 sinon. Comme cette condition est symétrique en  $W$  et  $H$  (modulo l'identification de  $V$  à  $V^{**}$ ), on obtient le résultat annoncé.

2. Le corollaire 8.5.37 fournit, en dualisant le coproduit du foncteur en coalgèbres de Boole  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$ , une structure d'algèbre sur ce foncteur. En reprenant la démonstration de la proposition 8.5.35 et en notant que  $B \subset W_1^\perp$  et  $B \subset W_2^\perp$  équivaut à  $B \subset (W_1 + W_2)^\perp$ , on voit qu'elle est donnée sur un espace  $V$  par

$$\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(V)] \otimes \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(V)] \rightarrow \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(V)] \quad [W_1] \otimes [W_2] \mapsto [W_1 + W_2].$$

On constate que la structure de coalgèbre de Boole sur  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(V)]$  est compatible avec cette structure d'algèbre. Ainsi,  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$  est un *foncteur en algèbres de Hopf* auto-dual.

3. On déduit de cette structure d'algèbre de Hopf une nouvelle structure d'algèbre sur  $A_{\mathcal{G}_r}$ , donnée comme suit. Si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $A_{\mathcal{G}_r}$ , leur produit  $u.v$  est le morphisme composé

$$\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r] \rightarrow \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r] \otimes \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r] \xrightarrow{u \otimes v} \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r] \otimes \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r] \rightarrow \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r],$$

où la première flèche est le coproduit et la dernière le produit (cf. [Kuh95], § 5).

Dans l'isomorphisme  $A_{\mathcal{G}_r} \simeq \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$  de la proposition 5.6.9, le produit  $\cdot$  est le produit usuel d'algèbre de Boole de l'anneau produit  $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ . Pour le voir, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 5.6.9 et de constater que, en conservant ses notations, le produit de  $s_i^n$  et de  $s_j^n$  (pour la structure d'algèbre de Boole de  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(E_n)]$ ) est  $s_0^n$  si  $i = j = 0$ , et que sinon le coefficient de  $s_0^n$  dans sa décomposition dans la base  $s_0^n, \dots, s_n^n$  de  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r(E_n)]^{GL_n}$  est nul (en fait, on a  $s_i^n \cdot s_j^n = s_{\max(i,j)}^n$ ). Avec la description du corollaire 5.6.11, on a  $\tau^i \cdot \tau^j = \tau^{\max(i,j)}$ .

4. Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , on peut munir naturellement le groupe abélien  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r}(\omega(X), \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r])$  d'une structure de module sur l'algèbre de Boole  $(A_{\mathcal{G}_r}, \cdot)$ , en utilisant la structure de  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r]$ -comodule de  $\omega(X)$  et en procédant comme au point précédent. Cela suggère une structure algébrique très riche sur ces objets, qui sont également, comme tous les groupes  $\text{hom}_{\mathcal{G}_r}(F, \mathbb{F}_2[\mathcal{G}_r])$ , des modules sur l'algèbre de séries formelles  $(A_{\mathcal{G}_r}, *) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2[[\tau]]$ .



5. La proposition 5.6.5 et l'adjonction entre  $\varpi$  et  $o$  (cf. proposition 5.4.3) fournissent un isomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r], F) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} F(E_n)^{GL_n}$$

naturel en  $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}$ . Par auto-dualité de  $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ , on en déduit des isomorphismes naturels

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(F, \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r], DF) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} DF(E_n)^{GL_n} \simeq (\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} F(E_n)_{GL_n})^*$$

(l'intérêt de la dernière écriture est de remplacer la limite par une colimite filtrante, exacte).

En dérivant les foncteurs considérés, on en déduit des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]) \simeq (\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_i(GL_n, F(E_n)))^*$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

### Application à la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$

**Corollaire 8.5.39.** *Les endofoncteurs  $\varpi_{inj} o_{inj}$  et  $\omega\kappa$  de  $\mathcal{F}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* On utilise le foncteur  $\tilde{\omega}'$  de la démonstration de la proposition 8.5.35 et le foncteur, que nous noterons  $\tilde{\kappa} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$ , de précomposition par le foncteur de réduction  $\tilde{\mathfrak{K}} : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ . On a des isomorphismes canoniques  $\varpi_{inj} o_{inj} \simeq \tilde{\omega}' \circ \tilde{\kappa}$  et  $\omega\kappa \simeq \tilde{\omega} \circ \tilde{\kappa}$ , de sorte que l'isomorphisme  $\tilde{\omega}' \simeq \tilde{\omega}$  de la proposition 8.5.35 donne la conclusion.  $\square$

On introduit maintenant un foncteur très analogue à  $\mathcal{I}$ .

**Définition 8.5.40.** On définit un endofoncteur  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  par

$$\mathcal{J}(X)(V, B) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(B)} X(V/W, B/W),$$

l'application linéaire  $\mathcal{J}(X)(f) : \mathcal{J}(X)(V, B) \rightarrow \mathcal{J}(X)(V', B')$  (où  $f : (V, B) \rightarrow (V', B')$  est une flèche de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$ ) ayant pour composante  $X(V/W, B/W) \rightarrow X(V'/W', B'/W')$  l'application linéaire induite par le morphisme  $(V/W, B/W) \rightarrow (V'/W', B'/W')$  induit par  $f$  si  $f(W) = W'$ , 0 sinon.

**Proposition 8.5.41.** *Il existe un isomorphisme de foncteurs  $\omega\kappa\omega \simeq \omega\mathcal{J}$ .*

*Démonstration.* On l'obtient par la suite d'isomorphismes naturels

$$\omega\kappa\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} \omega(X)(V/W) \simeq \bigoplus_{W \subset B \subset V} X(V/W, B/W) \simeq \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(V)} \mathcal{J}(X)(V, B) = \omega\mathcal{J}(X)(V)$$

déduits de l'identification entre  $\mathcal{G}r(V/W)$  et  $\{B \in \mathcal{G}r(V) \mid W \subset B\}$ .  $\square$

**Proposition 8.5.42.** *Soient  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ . Il existe un isomorphisme naturel gradué  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega(X), o_{inj}\omega(Y)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}}^*(X, \mathcal{I}\mathcal{J}(Y))$ .*

*Démonstration.* Le foncteur  $o_{inj}$  étant adjoint à gauche à  $\varpi_{inj}$  (proposition 5.4.6), les corollaires 1.2.8 et 8.5.39 puis la proposition 8.5.41 procurent des isomorphismes naturels gradués

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega(X), o_{inj}\omega(Y)) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \varpi_{inj} o_{inj}\omega(Y)) \\ &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \omega\kappa\omega(Y)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \omega\mathcal{J}(Y)). \end{aligned}$$

La conclusion provient alors du théorème 8.5.11.  $\square$

On rappelle que la proposition 5.6.4 affirme qu'étant donnés deux objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}$ , avec  $F$  localement fini, le morphisme naturel gradué  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}(F), o_{inj}(G))$  est un isomorphisme.

*Démonstration de la proposition 5.6.4.* On applique la proposition 8.5.42 au cas où  $X = \mathcal{P}_{0,\mathbb{N}}(F)$  (avec  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}^{lf}$ ) et  $Y = \mathcal{P}_{0,\mathbb{N}}(G)$  (où  $G \in \text{Ob } \mathcal{F}$ ) pour obtenir un isomorphisme naturel gradué

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}(F), o_{inj}(G)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}^*(\mathcal{P}_{0,\mathbb{N}}(F), \mathcal{I}\mathcal{J}(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \mathcal{R}_{\mathbb{N},0}(\mathcal{I}\mathcal{J}(Y))).$$

On conclut en observant que  $\mathcal{I}\mathcal{J}(Y)(V, 0) = \mathcal{J}(Y)(V, 0) = Y(V, 0) = G(V)$ .  $\square$

*Remarque 8.5.43.* Ainsi, pour obtenir un énoncé relatif à la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$ , nous avons transité par la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , dont l'étude requiert celle de  $\mathcal{F}_{surj}$ . Cela explique pourquoi nous avons dû introduire les deux catégories  $\mathcal{F}_{inj}$  et  $\mathcal{F}_{surj}$ .

Plus généralement, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 8.5.44.** *Soient  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ .*

- *Si  $k < n$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega_k(X), o_{inj}\omega_n(Y)) = 0$ .*
- *Si  $k = n$ , le foncteur exact  $o_{inj}\omega_n$  induit un isomorphisme naturel gradué*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}}^*(X, Y) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega_n(X), o_{inj}\omega_n(Y)).$$

*Démonstration.* On déduit ce résultat de la proposition 8.5.42 de la même façon que l'on a déduit le corollaire 8.5.12 du théorème 8.5.11. En effet, si  $A$  est un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  de coniveau au moins égal à  $n$ , l'inclusion canonique  $A \hookrightarrow \mathcal{J}(A)$  induit après application du foncteur  $\mathcal{R}_{\mathbb{N}, \leq n}$  un isomorphisme.  $\square$

Ce corollaire nous amène à formuler la conjecture suivante sur la filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{F}_{inj}$  (dont le théorème 5.6.17 a montré une partie pour  $n = 0$ ).

**Conjecture 8.5.45** (Conjecture artinienne extrêmement forte pour  $\mathcal{F}_{inj}$ ). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $o_{inj}\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$  induit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^{lf}$  et  $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$ .*

Si la conjecture artinienne extrêmement forte est satisfaite, cet énoncé équivaut au suivant.

**Conjecture 8.5.46** (Conjecture artinienne extrêmement forte pour  $\mathcal{F}_{inj}$ , version 2).

*Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $o_{inj}$  induit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$  et  $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$ .*



Troisième partie

**Avancées sur la conjecture  
artinienne**



# Chapitre 9

## Foncteur $\omega$ et $\nabla$ -nilpotence

Nous exposons dans ce chapitre les avancées les plus significatives que l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes et du foncteur  $\omega$  nous ont permis d'obtenir sur la conjecture artinienne. Le caractère noethérien de type 2 du produit tensoriel du projectif standard  $P_{E_2}$  et d'un foncteur fini en constitue le principal résultat « concret ». Il est déduit d'un théorème de structure qui donne une version affaiblie de la conjecture artinienne extrêmement forte. Ce théorème affirme que, *pour tout entier naturel  $n$* , le foncteur  $\omega_n$  induit une équivalence de catégories entre les objets finis de  $\mathcal{F}_{G_r, n}$  et une sous-catégorie épaisse d'un quotient  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  de la catégorie  $\mathcal{F}$ , construit à partir des sous-foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  du foncteur différence dont Powell a déjà montré le grand intérêt. La conjecture artinienne extrêmement forte est ainsi ramenée à comparer la filtration de  $\mathcal{F}$  par les sous-catégories  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  et sa filtration de Krull.

Après avoir rappelé les propriétés des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  dans la section 9.2, nous établissons une propriété cohomologique du foncteur  $\omega_n$ , variante des résultats du paragraphe 8.5.2 adaptée aux sous-catégories  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  (§ 9.3). Nous donnons ensuite les estimations techniques nécessaires à la manipulation des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  sur les foncteurs du type  $\omega_n(X)$  (§ 9.4). Cela nous permet de démontrer, dans la section 9.5, le théorème de structure évoqué ci-dessus, qui généralise le résultat principal de [Pow98c] (théorème de simplicité), article qui le premier a mis en évidence le rôle essentiel des  $\tilde{G}(n)$ -comodules dans la structure de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Notre théorème de simplicité présente l'avantage, comme le théorème de Powell qu'il étend, de fournir des renseignements *globaux* sur la structure de la catégorie  $\mathcal{F}$ .

La section 9.1 expose la démonstration de ce théorème pour  $n = 1$ , afin de donner un aperçu des arguments de la section 9.5 dans ce cas qui se trouve considérablement simplifié, d'un point de vue technique, par l'identification de  $\tilde{\nabla}_1$  au foncteur exact  $\Delta$ .

Nous terminons ce chapitre en montrant comment le théorème de simplicité généralisé permet d'aborder la conjecture artinienne extrêmement forte, moyennant la connaissance de résultats sur les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  encore hors de portée dans le cas général, mais connus pour  $n \leq 2$ . C'est ainsi que l'on obtient que le produit tensoriel entre  $P^{\otimes 2}$  et un foncteur fini est noethérien de type 2.

Les résultats de ce chapitre sont repris dans [Dja06b].

**Convention 9.0.1.** Dans tout ce chapitre,  $n$  désigne un entier strictement positif.

### 9.1 La catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant :

**Théorème 9.1.1.** *Le foncteur*

$$\bar{\omega}_1 : \mathcal{F}_{G_r, 1} \xrightarrow{\omega_1} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$$

*induit une équivalence entre la catégorie des objets finis de  $\mathcal{F}_{G_r, 1}$  et une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ . En particulier, il envoie un foncteur simple de  $\mathcal{F}_{G_r, 1}$  sur un objet simple de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ .*

Une autre façon de formuler ce théorème est de dire que la sous-catégorie  $\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse (cf. proposition 8.5.24).

Le théorème 9.1.1 redonne les résultats principaux de l'article [Pow00b] de Powell et les précise. Nous y reviendrons en fin de section (cf. remarque 9.1.9).

*Remarque 9.1.2.* Il semble en revanche très difficile de prouver que tous les objets simples de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  sont de ce type sans avoir démontré une version forte de la conjecture artinienne.

Avant de démontrer le théorème 9.1.1, nous établissons des résultats préliminaires décrivant le comportement du foncteur différence sur l'image par  $\omega_1$  d'un foncteur fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ . Le lecteur constatera, dans toute cette section, la grande analogie avec le paragraphe 5.6.3.

**Notation 9.1.3.** Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ . Nous désignerons par  $\pi_X : \Delta\omega_1(X) \rightarrow \omega_1(X)$  le morphisme donné sur  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  par la composée

$$\begin{aligned} \Delta\omega_1(X)(V) &\hookrightarrow \tilde{\Delta}\omega_1(X)(V) = \omega_1(X)(V \oplus \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{(v,t) \in (V \oplus \mathbb{F}_2) \setminus \{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,t)) \\ &\rightarrow \bigoplus_{v \in V \setminus \{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \rightarrow \bigoplus_{v \in V \setminus \{0\}} X(V, v) = \omega_1(X)(V), \end{aligned}$$

où la dernière flèche est induite par la projection  $V \oplus \mathbb{F}_2 \rightarrow V$ .

Si  $k$  est un entier naturel et  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ , nous noterons  $\pi_X^k : \Delta^k\omega_1(X) \rightarrow \omega_1(X)$  le morphisme  $\pi_X \circ \Delta\pi_X \circ \dots \circ \Delta^{k-1}\pi_X$ ; par convention,  $\pi_X^0 = id_X$ .

Ces notations seront utilisées uniquement dans cette section.

**Lemme 9.1.4.** *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ .*

1. *On a un isomorphisme naturel  $\Delta\omega_1(X) \simeq \sigma_1(X) \oplus \omega_1(\Delta^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X)$ .*
2. *À travers cet isomorphisme,  $\pi_X : \Delta\omega_1(X) \rightarrow \omega_1(X)$  se lit comme la composée de la projection  $\sigma_1(X) \oplus \omega_1(\Delta^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X) \rightarrow \omega_1\iota_1\sigma_1(X)$  et du morphisme obtenu en appliquant  $\omega_1$  à la coïté de l'adjonction  $\iota_1\sigma_1(X) \rightarrow X$ .*
3. *Le morphisme  $\pi_X$  est surjectif.*
4. *Si  $X$  est fini de degré  $d \geq 0$ ,  $\ker \pi_X$  est la somme directe d'un objet fini de  $\mathcal{F}$  et de l'image par  $\omega_1$  d'un objet fini de degré strictement inférieur à  $d$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ .*
5. *Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie,  $l$  une forme linéaire non nulle sur  $V$  et  $x = (x_v)_{v \in V \setminus \{0\}}$  ( $x_v \in X(V, v)$ ) un élément de  $\omega_1(X)(V)$ . Notons  $a_x : P_V \rightarrow \omega_1(X)$  le morphisme de  $\mathcal{F}$  représenté par  $x$ . Alors l'élément  $(y_v)$  de  $\omega_1(X)(V)$  représenté par le morphisme*

$$P_V \xrightarrow{u \mapsto [l] \otimes u} \mathbb{F}_2[V^* \setminus \{0\}] \otimes P_V \simeq \Delta P_V \xrightarrow{\Delta a_x} \Delta\omega_1(X) \xrightarrow{\pi_X} \omega_1(X)$$

*est donné par  $y_v = l(v)x_v$ .*

*Démonstration.* La décomposition ensembliste

$$\mathcal{G}r_1(V \oplus \mathbb{F}_2) = \{(0,1)\} \sqcup \{(v,0) \mid v \in V \setminus \{0\}\} \sqcup \{(v,1) \mid v \in V \setminus \{0\}\}$$

et l'isomorphisme naturel

$$\bigoplus_{v \in V \setminus \{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \simeq \bigoplus_{v \in V \setminus \{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (0,1))$$

induit par les isomorphismes  $(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \xrightarrow{\cong} (V \oplus \mathbb{F}_2, (0,1)) \quad (x,t) \mapsto (x+tv, t)$  fournissent un isomorphisme naturel

$$\tilde{\Delta}\omega_1(X) \simeq \sigma_1(X) \oplus \omega_1(\tilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X).$$

L'inclusion canonique  $\omega_1(X) \hookrightarrow \tilde{\Delta}\omega_1(X)$  se lit dans cet isomorphisme comme

$$\omega_1(X) \hookrightarrow \omega_1(\tilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,1}X) \hookrightarrow \sigma_1(X) \oplus \omega_1(\tilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X),$$

d'où le premier point.

Pour tout  $v \in V \setminus \{0\}$ , la composée  $X(V \oplus \mathbb{F}_2, (0, 1)) \xrightarrow{\simeq} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v, 1)) \rightarrow X(V, v)$ , où la première flèche est l'inverse de l'isomorphisme utilisé précédemment et la seconde est induite par la projection, est induite par  $V \oplus \mathbb{F}_2 \rightarrow V \quad (x, t) \mapsto x + tv$ . Le début de la section 7.2 montre que ce morphisme est bien la coïunité de l'adjonction, d'où l'assertion 2.

Le lemme 8.1.19 et l'exactitude du foncteur  $\omega_1$  permettent d'en déduire les assertions 3 et 4.

Pour établir la dernière assertion, notons  $z$  l'élément de  $\Delta\omega_1(X)(V) \subset \omega_1(X)(V \oplus \mathbb{F}_2)$  représenté par le morphisme

$$P_V \xrightarrow{u \mapsto [l] \otimes u} \mathbb{F}_2[V^* \setminus \{0\}] \otimes P_V \simeq \Delta P_V \xrightarrow{\Delta a_x} \Delta\omega_1(X).$$

On a  $z = (\omega_1(X)(i))(x) + (\omega_1(X)(i_l))(x)$ , où  $i : V \rightarrow V \oplus \mathbb{F}_2$  est l'inclusion canonique et  $i_l : V \rightarrow V \oplus \mathbb{F}_2$  le morphisme de composantes  $id_V$  et  $l$ .

On en déduit que la composante  $z_{v,1}$  ( $v \in V \setminus \{0\}$ ) de  $z$  égale  $X(i_l)(z_v)$  si  $l(v) = 1$ , 0 sinon. La conclusion provient donc de ce que la composition  $V \xrightarrow{i_l} V \oplus \mathbb{F}_2 \rightarrow V$  est l'identité.  $\square$

La proposition suivante fournit un argument de stabilisation décisif relatif aux morphismes  $\pi_X^k$ .

**Proposition 9.1.5.** *Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$  et  $F$  un sous-objet de  $\omega_1(X)$ . Pour tout entier  $k \geq 0$ , on note  $C_k = \pi_X^k(\Delta^k F)$ .*

1. *La suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  de sous-objets de  $\omega_1(X)$  est croissante ; nous noterons  $C_\infty$  sa réunion. Si  $X$  est un objet noethérien de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ , cette suite stationne.*
2. *Pour tout  $k \geq 0$ , le foncteur  $C_k$  est engendré par les éléments du type*

$$(l_1(v) \dots l_k(v)x_v)_{v \in V \setminus \{0\}} \in \omega_1(X)(V),$$

où  $V$  parcourt les espaces vectoriels de dimension finie,  $x = (x_v)_{v \in V \setminus \{0\}}$  les éléments de  $F(V)$  et  $(l_1, \dots, l_k)$  les  $k$ -uplets de formes linéaires sur  $V$ .

3. *Le foncteur  $C_\infty$  est le plus petit sous- $\bar{P}$ -comodule de  $\omega_1(X)$  contenant  $F$ . Si  $F$  est lui-même un sous- $\bar{P}$ -comodule de  $\omega_1(X)$ , on a  $C_k = F$  pour tout  $k \geq 0$ .*
4. *Si  $X$  est localement fini, pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ , on a  $\text{hom}(C_\infty/F, \omega_1(U)) = 0$ .*

*Démonstration.* L'assertion 5 du lemme 9.1.4 et la préservation des épimorphismes par le foncteur différence montrent le second point pour  $k = 1$ . Le cas général s'en déduit aussitôt par récurrence.

On en déduit que la suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  est croissante. Si  $v$  est un élément non nul d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , soient  $l_1, \dots, l_k$  les éléments de  $V^*$  tels que  $l_i(v) = 1$ . Alors la fonction polynomiale  $l_1 \dots l_k : V \rightarrow \mathbb{F}_2$  est égale à l'indicatrice de  $\{v\}$ . Si l'on note  $F^{\mathcal{G}r}(V)$  le plus petit sous-espace vectoriel  $V \setminus \{0\}$ -gradué de  $\omega_1(X)(V)$  contenant  $F(V)$ , ce qui précède montre que  $C_\infty$  est le plus petit sous-foncteur de  $\omega_1(X)$  tel que  $F^{\mathcal{G}r}(V) \subset C_\infty(V)$  pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  ; en particulier,  $C_\infty \supset F$ .

Soit  $Y$  le plus petit sous-objet de  $X$  tel que  $Y(V, v)$  contienne les composantes dans  $X(V, v)$  des éléments de  $F(V) \subset \omega_1(X)(V)$ . La proposition 6.3.7 montre d'une part que  $\omega_1(Y)$  est le plus petit sous- $\bar{P}$ -comodule de  $\omega_1(X)$  contenant  $F$ . Le paragraphe précédent montre d'autre part que  $C_\infty = \omega_1(Y)$ , d'où le troisième point.

Soit  $f : C_\infty/F \rightarrow \omega_1(U)$  un morphisme de  $\mathcal{F}$ . Si  $X$  est localement fini, il en est de même pour  $Y$ , donc le corollaire 8.5.12 montre que la composée  $g : \omega_1(Y) = C_\infty \rightarrow C_\infty/F \xrightarrow{f} \omega_1(U)$  est induite par un morphisme  $u : Y \rightarrow U$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ . Comme la composée  $F \hookrightarrow \omega_1(Y) \xrightarrow{g} \omega_1(U)$  est nulle et que  $\omega_1$  est exact,  $F$  est inclus dans  $\omega_1(\ker u)$ . D'après le troisième point, on en déduit  $\ker u = Y$ , donc  $u = 0$ , puis  $g = 0$  et  $f = 0$ , d'où la dernière assertion.

Par ailleurs, si  $X$  est noethérien, alors  $Y$  est de type fini, donc  $C_\infty = \omega_1(Y)$  est de type fini. Cela montre que la suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  est stationnaire, et achève la démonstration.  $\square$



*Début de la démonstration du théorème 9.1.1.* Le théorème 8.5.11 entraîne la pleine fidélité de  $\bar{\omega}_1$  et la stabilité par extensions de l'image, notée  $\mathcal{C}$ , de sa restriction aux objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ . Il suffit donc d'établir qu'un sous-objet d'un objet de  $\mathcal{C}$  est isomorphe à un objet de  $\mathcal{C}$ . Pour cela, on procède par récurrence sur le degré polynomial (cf. proposition 8.2.5). On se donne donc un objet fini  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$  de degré  $d \geq 0$  et l'on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.

**Hypothèse 9.1.6** (Hypothèse de récurrence). L'image par le foncteur  $\bar{\omega}_1 : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  du théorème 9.1.1 de la sous-catégorie  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}^f)_{d-1}$  des foncteurs de degré  $< d$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}^f$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ .

**Notation 9.1.7.** Dans cette section, nous noterons  $\mathcal{A}_d$  cette sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ , et  $\mathcal{Q}_d$  la catégorie quotient de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  par  $\mathcal{A}_d$ . Nous noterons également  $\mathcal{X}$  la sous-catégorie pleine des objets  $T$  de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  tels que  $\text{hom}(T, \bar{\omega}_1(U)) = 0$  pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ .

**Lemme 9.1.8.** 1. Le foncteur différence  $\Delta$  induit un endofoncteur exact et fidèle de la catégorie  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ . Il induit également un endofoncteur exact des catégories  $\mathcal{A}_d$  et  $\mathcal{Q}_d$ .

2. La sous-catégorie  $\mathcal{X}$  de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  est stable par le foncteur induit par le foncteur différence.

3. L'intersection des sous-catégories  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{A}_d$  de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  est réduite à 0.

4. Pour tout entier  $k > 0$ , le morphisme  $\pi_X^k$  induit un isomorphisme dans la catégorie  $\mathcal{Q}_d$ .

*Démonstration du lemme.* Le foncteur  $\Delta$  est exact et conserve  $\mathcal{F}_\omega$ , il induit donc un endofoncteur exact de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ . La suite exacte  $0 \rightarrow p_0(F) = F(0) \rightarrow F \rightarrow \bar{I} \otimes \Delta F$  naturelle en l'objet  $F$  de  $\mathcal{F}$  montre la fidélité de ce foncteur exact. En effet, le foncteur constant  $F(0)$  est analytique, et, comme  $\bar{I}$  est analytique, si  $\Delta F$  est objet de  $\mathcal{F}_\omega$ , il en est de même pour  $\bar{I} \otimes \Delta F$ .

Le lemme 9.1.4 montre que  $\Delta$  préserve l'image  $\mathcal{A}_d$  de  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}^f)_{d-1}$  par  $\bar{\omega}_1$ , il induit donc un endofoncteur exact de  $\mathcal{A}_d$  et  $\mathcal{Q}_d = (\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega)/\mathcal{A}_d$ . Cela achève de prouver le premier point. Le lemme 9.1.4 montre également que le noyau de l'épimorphisme  $\pi_X$  appartient à  $\mathcal{A}_d$ , puisque  $X$  est supposé de degré  $d$ . Cela établit, par récurrence sur  $k$ , la dernière assertion.

L'isomorphisme d'adjonction  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(\Delta F, \omega_1(U)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega_1(U \otimes_{\iota_1}(\bar{I})))$  (cf. propositions 4.2.5 et 6.3.7) donne le second point, puisque le corollaire 8.5.13 permet de remplacer les ensembles de morphismes considérés dans  $\mathcal{F}$  par des ensembles de morphismes analogues dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ .

Le troisième point résulte de la définition de la sous-catégorie  $\mathcal{A}_d$ .  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème 9.1.1.* Soit  $F$  un sous-objet de  $\omega_1(X)$ ; on conserve les notations de la proposition 9.1.5, et l'on se donne  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $C_\infty = C_k$  (qui est donc de la forme  $\omega_1(Y)$  pour un sous-objet  $Y$  de  $X$ ). Alors  $\Delta^k F$  et  $\Delta^k C_\infty$  ont la même image  $C_\infty$  par  $\pi_X^k$ , qui induit un isomorphisme dans  $\mathcal{Q}_d$  (dernière assertion du lemme 9.1.8), donc l'inclusion  $\Delta^k F \hookrightarrow \Delta^k C_\infty$  induit un isomorphisme dans  $\mathcal{Q}_d$ . Ainsi, l'image dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  de  $\Delta^k(C_\infty/F)$  est objet de  $\mathcal{A}_d$ . Mais c'est aussi un objet de  $\mathcal{X}$  par la dernière assertion de la proposition 9.1.5 et la deuxième assertion du lemme 9.1.8. La troisième assertion de ce lemme montre alors que l'image de  $\Delta^k(C_\infty/F)$  dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  est nulle, donc aussi l'image de  $C_\infty/F$  (par la première assertion du lemme). Cela achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 9.1.9.* Comme l'article [Pow00b], le théorème 9.1.1 signifie que les foncteurs  $P \otimes F$  ( $F$  fini) sont noethériens de type 1 et donne des renseignements sur leur structure. La méthode qu'emploie Powell dans [Pow00b] repose fortement sur les propriétés des foncteurs  $\tilde{\mathcal{V}}_n$  et certaines considérations explicites sur les représentations des groupes symétriques. La nôtre reste très générale et clarifie les calculs d'algèbre homologique entre les différents objets dont on démontre le caractère simple noethérien de type 1, entièrement ramenés à des calculs d'algèbre homologique sur des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ , qui peuvent théoriquement se comprendre à partir des représentations des groupes symétriques.

Le théorème 9.1.1 fournit également une construction plus simple de l'objet simple noethérien de type 1 et  $\mathcal{F}_\omega$ -parfait associé à une partition régulière  $\lambda$  (cf. exemple 7.2.12). Nous pouvons ainsi

montrer, sans calcul, l'égalité  $X_\lambda = K_\lambda$  conjecturée dans [Pow00b], § 4.5 : avec nos notations, elle se réduit à dire que l'image de l'unique morphisme non nul  $\iota_1(S_\lambda) \rightarrow \iota_1(S_{\hat{\lambda}})$ , où  $\hat{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_r + 1)$  si  $\lambda$  est de longueur  $r$ , est  $\kappa_1(S_\lambda)$ . En effet, cette image contient  $\kappa_1(S_\lambda) = \text{cosoc } \iota_1(S_\lambda)$ , et lorsqu'on applique le foncteur exact et fidèle  $\sigma_1$  au morphisme précédent, on obtient l'unique morphisme non nul (cf. théorème B.3 de [PS98])  $S_\lambda \oplus \Delta S_\lambda \rightarrow S_{\hat{\lambda}} \oplus \Delta S_{\hat{\lambda}}$ , dont l'image est  $S_\lambda = \sigma_1 \kappa_1(S_\lambda)$ .

Nous terminons cette section par quelques remarques orientées vers les « pathologies » de la catégorie quotient  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ .

*Remarque 9.1.10.* – Les objets finis de la catégorie  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  donnés par le théorème 9.1.1 (il n'y en a pas d'autres si la conjecture artiniennne extrêmement forte est vraie) possèdent un représentant  $\mathcal{F}_\omega$ -parfait dans  $\mathcal{F}$ . Il n'en est pas de même pour tous les objets de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ . Considérons par exemple le noyau  $A$  de l'unique morphisme non nul  $\bar{P}^{\otimes 2} \rightarrow \bar{P}$ . A partir de la suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow \bar{P}^{\otimes 2} \rightarrow \bar{P} \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow 0$$

et du corollaire 8.5.13, on obtient un isomorphisme naturel  $\text{Ext}^i(F, A) \simeq \text{Ext}^{i-2}(F, \Lambda^1)$  pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}_\omega$ . Ainsi,  $A$  est  $\mathcal{F}_\omega$ -fermé, mais non  $\mathcal{F}_\omega$ -parfait.

- L'absence de représentants parfaits pour certains foncteurs équivaut à l'inexactitude du foncteur section  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}$ . Notons néanmoins la conséquence suivante du corollaire 8.5.13, dans laquelle nous notons  $r^i$  le  $i$ -ème foncteur dérivé droit de l'endofoncteur de  $\mathcal{F}$  composé du foncteur canonique  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  et du foncteur section : pour tout foncteur oméga-adapté  $F$ , on a  $r^i(F) = 0$  pour  $i$  assez grand. Ainsi, la conjecture artiniennne extrêmement forte permettrait de contrôler le défaut d'exactitude du foncteur section.
- Même en admettant la conjecture artiniennne extrêmement forte, certains aspects de la structure globale de la catégorie  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  demeurent mystérieux. Par exemple, la description de l'enveloppe injective de l'image du foncteur  $\bar{P}$  dans cette catégorie quotient, qui en est l'objet simple le plus élémentaire, pose des problèmes très difficiles.

En général, les injectifs indécomposables de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  sont les images par le foncteur section des injectifs indécomposables sans sous-objet fini non nul de  $\mathcal{F}$  (par la proposition 1.4.12), i.e. des injectifs indécomposables « pathologiques » de  $\mathcal{F}$ . Nous conjecturons notamment que tous les foncteurs injectifs indécomposables de  $\mathcal{F}$  sont à valeurs de dimension finie. Cette conjecture est discutée dans [Dja06b].

Les difficultés inhérentes à ce problème, liées à la compréhension globale des représentations des groupes linéaires, sont conceptuellement analogues à celles que l'on rencontre pour la conjecture artiniennne extrêmement forte.

## 9.2 Les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de Powell

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les foncteurs que nous notons  $\tilde{\nabla}_n$  sont les **duaux** des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  introduits dans [Pow98b] par Powell, à qui sont dus tous les résultats de cette section. Cette convention est motivée par le fait que l'on étudie la catégorie  $\mathcal{F}$  du point de vue de ses objets de type fini, et non de co-type fini : les foncteurs considérés par Powell n'apparaîtront jamais en tant que tels dans la suite, tandis que leurs duaux joueront un rôle majeur.

**Notation 9.2.1.** Nous désignerons par  $t_n$  l'élément suivant de  $\text{hom}_{\mathbb{F}_2[\mathcal{E}^f]}(E_n, \mathbb{F}_2)$ .

$$t_n = \sum_{l \in E_n^*} [l]$$

**Définition 9.2.2.** L'endofoncteur  $\tilde{\nabla}_n$  de  $\mathcal{F}$  est défini comme l'image de la transformation naturelle  $(t_n)_* : \Delta_{E_n} \rightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2}$ .

*Exemple 9.2.3.* On a  $\tilde{\nabla}_1 = \Delta$ . Pour  $n > 1$ , le comportement de  $\tilde{\nabla}_n$  est rendu plus délicat par l'inexactitude de ce foncteur.

*Remarque 9.2.4.* Le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  préserve les sous-catégories  $\mathcal{F}^{df}$  et  $\mathcal{F}^{tf}$  de  $\mathcal{F}$ , puisque c'est un quotient de  $\Delta_{E_n}$ .

**Proposition 9.2.5.** *Le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  est égal au noyau de la transformation naturelle surjective  $\Delta_{\mathbb{F}_2} \simeq (\cdot : I) \rightarrow (\cdot : p_{n-1}(I))$  induite par l'inclusion  $p_{n-1}(I) \hookrightarrow I$ .*

Cette conséquence aisée de la suite exacte usuelle  $0 \rightarrow p_{n-1}I \rightarrow I \xrightarrow{t_n^*} I_{E_n}$  (cf. démonstration de la proposition 8.4.32) est établie en détail dans [Pow98b], § 2.

**Proposition 9.2.6.** *1. Le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  est additif ; il conserve les injections et les surjections.*  
*2. Le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  est un sous-foncteur du foncteur différence  $\Delta$  si  $n > 0$  ; c'est un quotient de  $(\Delta^n)_{\Sigma_n}$  (co-invariants de  $\Delta^n$  sous l'action du groupe symétrique).*  
*3. C'est aussi un quotient de  $(\Delta_{E_n})_{GL_n}$ .*  
*4. Deux foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  et  $\tilde{\nabla}_m$  (où  $m \in \mathbb{N}$ ) commutent toujours (à isomorphisme naturel près) ; en particulier, le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  commute au foncteur différence.*

La première assertion est incluse dans le théorème 4.0.2 de [Pow98b], la seconde partie de la deuxième et la dernière dans sa proposition 4.1.1. Les autres découlent de la définition : la transformation naturelle  $(t_n)_* : \Delta_{E_n} \rightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2}$  est invariante par l'action de  $GL_n$  sur  $\Delta_{E_n}$ , d'où la troisième assertion ; la première partie de la deuxième vient de ce que  $t_n$  est la somme d'un nombre pair, si  $n > 0$ , de transformations naturelles élémentaires  $\Delta_{E_n} \rightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2}$  (induites par une application linéaire  $E_n \rightarrow \mathbb{F}_2$ ), la composée est  $\Delta_{E_n} \xrightarrow{(t_n)_*} \Delta_{\mathbb{F}_2} \rightarrow \Delta_0$  donc nulle.

La description de la filtration co-polynomiale de  $P$  donnée dans la démonstration de la proposition 4.2.23 fournit le calcul suivant sur les projectifs standard (cf. proposition 4.0.4 de [Pow98b]).

**Proposition 9.2.7.** *Il existe dans  $\mathcal{F}$  un isomorphisme  $\tilde{\nabla}_n(P_V) \simeq k_n(P)(V^*) \otimes P_V$  naturel en l'espace vectoriel de dimension finie  $V$ . En particulier,  $\tilde{\nabla}_n(P_{E_n}) \simeq P_{E_n}$  et  $\tilde{\nabla}_n(P_{E_k}) = 0$  pour  $k < n$ .*

**Notation 9.2.8.** – Si  $\lambda$  est une partition de longueur  $r$ , nous noterons  $\lambda_-$  la partition de longueur  $\leq r$  définie par  $(\lambda_-)_i = \lambda_i - 1$  pour  $1 \leq i \leq r$ .  
– Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  est une suite finie d'entiers et  $a \in \mathbb{N}$ , on notera  $\alpha_{+a} = (\alpha_1 + a, \dots, \alpha_k + a)$ . Cette notation est étendue au cas où  $\alpha$  est une partition, en prenant  $k = l(\alpha)$  (longueur de la partition  $\alpha$ ).

L'un des grands intérêts des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ , qui explique leur efficacité dans de nombreux calculs explicites sur les foncteurs de Schur, réside dans le résultat suivant, établi dans le § 4.3 de [Pow98b].

**Proposition 9.2.9.** *Soit  $\lambda$  une partition régulière.*

1. *Le foncteur  $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda)$  est nul si et seulement si  $l(\lambda) < n$ .*
2. *Supposons  $\lambda$  de longueur  $n$ . On a  $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda) \simeq S_{\lambda_-}$ .*

**Proposition et définition 9.2.10.** *La sous-catégorie pleine des foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotents de  $\mathcal{F}$  (i.e. des foncteurs  $F$  tels qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(\tilde{\nabla}_n)^k(F) = 0$ ) est épaisse. On la note  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ .*

*Nous désignerons par  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}$  stable par colimites contenant  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ .*

C'est le théorème 4.2.3 de [Pow98b] (l'hypothèse d'analyticité imposée par Powell aux foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotents n'intervient pas dans la démonstration).

*Exemple 9.2.11.* La sous-catégorie  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_0}$  est réduite à 0 ;  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_1}$  est la sous-catégorie des foncteurs polynomiaux, donc  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_1} = \mathcal{F}_\omega$ .

La description des catégories  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$  devient très délicate pour  $n \geq 2$ . Conjecturalement, elles sont étroitement liées à la filtration de Krull de  $\mathcal{F}$ .

**Conjecture 9.2.12.** *Un objet de type fini de  $\mathcal{F}$  est noethérien de type  $n-1$  si et seulement s'il est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent.*

Cette conjecture, discutée par Powell dans [Pow00a], § 3, est une variante forte de la conjecture artinienne.

Avec le formalisme introduit dans la partie II, il nous est naturel de formuler la conjecture suivante.

**Conjecture 9.2.13.** *Un objet de type fini de  $\mathcal{F}$  est oméga-adapté de hauteur au plus  $n-1$  si et seulement s'il est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent.*

Les conjectures 9.2.13 et 8.5.22 sont équivalentes. Cela provient de l'épaisseur de  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ , de la non  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotence des foncteurs  $\omega_n(X)$  pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  non nul et de la  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotence des foncteurs  $\omega_i(X)$  pour  $i < n$  et  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, i}$  fini, que nous démontrerons à la section 9.4. Ces conjectures impliquent donc la conjecture 9.2.12.

Les conjectures 9.2.13 et 9.2.12 sont triviales pour  $n \leq 1$ . Pour  $n = 2$ , Powell a démontré les résultats partiels suivants, qui suffiront à nos investigations ultérieures. Celles-ci nous permettront d'établir la conjecture 9.2.13 pour  $n = 2$ .

**Proposition 9.2.14.** *Soit  $F$  un foncteur de type fini annihilé par  $\tilde{\nabla}_2$ . Alors  $F$  est isomorphe dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$  à une somme directe finie de copies de  $\tilde{P}$ .*

**Proposition 9.2.15.** *Soit  $F$  un foncteur  $\tilde{\nabla}_2$ -nilpotent quotient de  $\tilde{G}(2)$ . Alors  $F$  est oméga-adapté de hauteur au plus 1.*

La démonstration de la proposition 9.2.14, qui se déduit de la proposition 7.4 de [Pow98c], repose sur la proposition 9.2.9 et le calcul des groupes d'extensions  $\text{Ext}^1(\Lambda^i, \Lambda^j)$  (cf. [Fra96], § II). La proposition 9.2.15 (corollaire de la proposition 7.5 de [Pow98c]) s'en déduit par l'étude d'une filtration explicite du foncteur  $\tilde{G}(2)$  issue de la filtration copolynomiale de  $\tilde{P}$ .

Nous terminons cette section par un résultat concernant les produits tensoriels. Il est démontré dans [Pow01] (théorème 1), article qui précise en quoi la notion de  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotence fournit une « bonne » notion de dimension dans  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 9.2.16.** *Le produit tensoriel d'un foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent et d'un foncteur  $\tilde{\nabla}_m$ -nilpotent (où  $m \in \mathbb{N}$ ) est  $\tilde{\nabla}_{n+m-1}$ -nilpotent. En particulier, le produit tensoriel d'un foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent et d'un foncteur fini est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent.*

### 9.3 Deuxième résultat d'annulation cohomologique

L'utilisation du foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  dans ce chapitre repose sur la proposition suivante. Elle nous permettra d'une part d'établir la propriété d'annulation cohomologique relative aux foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  (proposition 9.3.4) qui est l'objet de cette section, et d'autre part de mener à bien les estimations essentielles de la section 9.4.

**Proposition 9.3.1.** *Il existe dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \iota(I) \\ \downarrow & & \downarrow \iota(t_n^*) \\ I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}_r} & \hookrightarrow & \iota(I_{E_n}) \end{array} \quad (9.1)$$

qui induit dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \iota_n(I) \\ \downarrow & & \downarrow \iota_n(t_n^*) \\ I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}_r, n} & \hookrightarrow & \iota_n(I_{E_n}). \end{array} \quad (9.2)$$

*Démonstration.* Le morphisme  $\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r}$  du diagramme (9.1) est l'unique flèche non nulle ; le morphisme  $\mathbb{F}_2 \rightarrow \iota(I)$  est la composée de l'unique morphisme non nul  $\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}r}$  et du monomorphisme scindé  $I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}r} \hookrightarrow \iota(I)$  donné par la proposition 6.3.14 ; le monomorphisme non spécifié provient de cette proposition également.

Comme  $\mathbb{F}_2 \simeq \rho(\mathbb{F}_2)$ , par adjonction entre les foncteurs  $\rho$  et  $\varepsilon$  (proposition 6.3.18), la commutation du diagramme (9.1) se ramène au lemme 9.3.2 ci-dessous, puisque  $\varepsilon \circ \iota \simeq o$  (proposition 6.3.20) et  $\varepsilon(I_{(V, V)}^{\mathcal{G}r}) \simeq I_V^{surj}$ .

Dans le diagramme (9.2) qu'on déduit de (9.1) par application du foncteur de restriction, la flèche verticale  $\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r, n}$  est l'unique morphisme non nul, qui est injectif parce que le foncteur constant  $\mathbb{F}_2$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}$  est simple.  $\square$

**Lemme 9.3.2.** *Le diagramme suivant de  $\mathcal{F}_{surj}$  commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & I_{\mathbb{F}_2}^{surj} \hookrightarrow o(I) \\ \downarrow & & \downarrow o(t_n^*) \\ I_{E_n}^{surj} \hookrightarrow & \longrightarrow & o(I_{E_n}) \end{array}$$

où les deux flèches de source  $\mathbb{F}_2$  sont les uniques morphismes non nuls et les deux injections non spécifiées les monomorphismes scindés donnés par la proposition 5.4.3.3.

*Démonstration.* Soit  $W$  un sous-espace de  $E_n$ . Le morphisme

$$\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{\mathbb{F}_2}^{surj} \hookrightarrow o(I) \xrightarrow{o(t_n^*)} o(I_{E_n}) \twoheadrightarrow I_W^{surj}$$

est la somme sur les formes linéaires  $l \in E_n^*$  telles que  $l(W) \neq 0$  des composées

$$\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{\mathbb{F}_2}^{surj} \xrightarrow{l^*} I_W^{surj},$$

qui sont toutes égales à l'unique morphisme non nul. Comme le cardinal de l'ensemble  $\{l \in E_n^* \mid l(W) \neq 0\} = E_n^* \setminus W^\perp$  est  $2^n - 2^{n-\dim W}$ , qui est impair si et seulement si  $\dim W = n$ , on en conclut que le morphisme  $\mathbb{F}_2 \rightarrow I_W^{surj}$  que l'on étudie est non nul si et seulement si  $W = E_n$ , d'où l'on déduit le lemme.  $\square$

Le diagramme (9.1) induit un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & (X : \iota(I)) \\ \uparrow & & \uparrow (t_n)_* \\ (X : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r}) & \longleftarrow & (X : \iota(I_{E_n})) \end{array} \quad (9.3)$$

pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ .

En appliquant le foncteur  $\omega$ , on en déduit dans  $\mathcal{F}$ , par la proposition 8.4.10, un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \omega(X) & \longleftarrow & \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega(X) \\ \uparrow & & \uparrow (t_n)_* \\ \omega(X : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r}) & \longleftarrow & \Delta_{E_n} \omega(X). \end{array} \quad (9.4)$$

Le cas qui nous intéresse est celui où l'objet  $X$  est un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  (identifiée à une sous-catégorie de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  via le prolongement par zéro). En ignorant le terme inférieur gauche, le diagramme (9.4) fournit un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega_n(X) & & \\ \uparrow (t_n)_* & \searrow \alpha_{n, X} & \\ \Delta_{E_n} \omega_n(X) & \xrightarrow{\beta_{n, X}} & \omega_n(X). \end{array} \quad (9.5)$$

Par adjonction (cf. proposition 4.2.5), on en déduit un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \omega_n(X) & \xrightarrow{a_{n, X}} & \omega_n(X) \otimes I \\ & \searrow b_{n, X} & \downarrow \omega_n(X) \otimes t_n^* \\ & & \omega_n(X) \otimes I_{E_n}. \end{array} \quad (9.6)$$

Le morphisme  $b_{n, X}$  est injectif, car ce diagramme s'obtient en tensorisant le diagramme (9.2) par  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$  et en appliquant le foncteur exact  $\omega_n$  (compte-tenu de la proposition 6.3.7. 4).

**Notation 9.3.3.** Nous désignerons par  $\pi_{n, X} : \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \rightarrow \omega_n(X)$  le morphisme déduit du diagramme (9.5). Il définit une transformation naturelle  $\pi_n : \tilde{\nabla}_n \omega_n \rightarrow \omega_n$ .

Pour  $n = 1$ , on retrouve le morphisme  $\pi_X$  de la section 9.1.

Avant d'étudier le morphisme  $\pi_{n, X}$  dans la section suivante, nous établissons une conséquence importante de la proposition 9.3.1.

On rappelle que le terme d'objet *parfait* est donné par la définition 1.4.14.

**Proposition 9.3.4.** *Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , le foncteur  $\omega_n(X)$  de  $\mathcal{F}$  est  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ -parfait.*

*Démonstration.* Grâce au corollaire 2.5.9, il suffit d'établir la nullité des groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X))$  pour un foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent  $F$ , assertion que l'on établit par récurrence sur  $i$ .

La naturalité de la transformation  $(t_n)_* : \Delta_{E_n} \rightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2}$  se traduit par la commutation des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathcal{F}}(F, G) & \xrightarrow{(\Delta_{E_n})_*} & \text{hom}_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n} F, \Delta_{E_n} G) \\ (\Delta_{\mathbb{F}_2})_* \downarrow & & \downarrow t_n(G)_* \\ \text{hom}_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathbb{F}_2} F, \Delta_{\mathbb{F}_2} G) & \xrightarrow{t_n(F)_*} & \text{hom}_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n} F, \Delta_{\mathbb{F}_2} G) \end{array}$$

pour tous objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}$ , où l'on a noté  $t_n(F)$  pour  $((t_n)_*)_F$ , pour simplifier les écritures. Comme les foncteurs  $\Delta_{E_n}$  et  $\Delta_{\mathbb{F}_2}$  sont exacts, ce diagramme s'étend en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, G) & \xrightarrow{(\Delta_{E_n})_*} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{E_n} F, \Delta_{E_n} G) \\ (\Delta_{\mathbb{F}_2})_* \downarrow & & \downarrow t_n(G)_* \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{\mathbb{F}_2} F, \Delta_{\mathbb{F}_2} G) & \xrightarrow{t_n(F)_*} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{E_n} F, \Delta_{\mathbb{F}_2} G) \end{array}$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

On forme alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X)) & \xrightarrow{(\Delta_{E_n})^*} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{E_n} F, \Delta_{E_n} \omega_n(X)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \Delta_{E_n} \omega_n(X) \otimes I_{E_n}) \\
\downarrow (\Delta_{\mathbb{F}_2})^* & & \downarrow t_n(\omega_n(X))^* & & \downarrow (t_n(\omega_n(X)) \otimes I_{E_n})^* \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{\mathbb{F}_2} F, \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega_n(X)) & \xrightarrow{t_n(F)^*} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{E_n} F, \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega_n(X)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega_n(X) \otimes I_{E_n}) \\
\downarrow (pl_F^{\nabla, n})^* & \nearrow (pr_F^{\nabla, n})^* & \downarrow (\alpha_{n, X})^* & & \downarrow (\alpha_{n, X} \otimes I_{E_n})^* \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\tilde{\nabla}_n F, \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega_n(X)) & & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Delta_{E_n} F, \omega_n(X)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X) \otimes I_{E_n}) \\
\downarrow (\alpha_{n, X})^* & \nearrow (pr_F^{\nabla, n})^* & & & \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\tilde{\nabla}_n F, \omega_n(X)) & & & & 
\end{array} \tag{9.7}$$

où  $pr_F^{\nabla, n}$  désigne la projection canonique  $\Delta_{E_n} F \rightarrow \tilde{\nabla}_n F$ , et  $pl_F^{\nabla, n} : \tilde{\nabla}_n F \hookrightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2} F$  l'inclusion canonique, et où les isomorphismes de droite dérivent de la proposition 4.2.5 et du corollaire 1.2.8.

Le morphisme  $u : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X) \otimes I_{E_n})$  obtenu en suivant le diagramme est induit par le monomorphisme  $b_{n, X} : \omega_n(X) \hookrightarrow \omega_n(X) \otimes I_{E_n}$ . En effet, la composée horizontale supérieure est induite par l'unité  $\omega_n(X) \rightarrow \Delta_{E_n} \omega_n(X) \otimes I_{E_n}$  de l'adjonction, tandis que la composée verticale de droite est induite par  $\beta_{n, X} \otimes I_{E_n}$  (par la commutation du diagramme (9.5)); on conclut par adjonction entre les morphismes  $b_{n, X}$  et  $\beta_{n, X}$ .

Comme  $b_{n, X}$  provient par application du foncteur  $\omega_n$  à un monomorphisme  $X \hookrightarrow X \otimes \iota_n(I_{E_n})$ , il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r, n}}$  et une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \omega_n(X) \xrightarrow{b_{n, X}} \omega_n(X) \otimes I_{E_n} \rightarrow \omega_n(Y) \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée et l'hypothèse de récurrence  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i-1}(F, \omega_n(Y)) = 0$  (on rappelle que  $F$  est supposé  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent) montrent que le morphisme  $u : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X) \otimes I_{E_n})$  est *injectif*. On en déduit, en considérant la colonne de gauche du diagramme (9.7), un *monomorphisme*  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X)) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\tilde{\nabla}_n F, \omega_n(X))$ , ce pour tous objets  $F$  de  $\text{Nil}_{\tilde{\nabla}_n}$  et  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r, n}}$ . Cela fournit, par récurrence sur l'indice de  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotence de  $F$ , la nullité du groupe d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \omega_n(X))$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 9.3.5.** *Si  $F$  est un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à  $n$ , alors  $F$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent.*

*Démonstration.* Si  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r, k}}$  est simple, il existe un objet simple  $F$  de  $\mathcal{F}$  et un  $GL_k$ -module simple  $S$  tels que  $X \simeq \kappa_k(F) \otimes \rho_k(S)$  (proposition 8.2.10), d'où un épimorphisme

$$P_{E_k} \otimes F \twoheadrightarrow \omega_k \rho_k(S) \otimes F \simeq \omega_k(\iota_k(F) \otimes \rho_k(S)) \twoheadrightarrow \omega_k(X).$$

Les propositions 9.2.7 et 9.2.16 montrent que  $P_{E_k} \otimes F$ , donc  $\omega_k(X)$ , est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent si  $k < n$ . On conclut grâce à la proposition 9.2.10.  $\square$

*Remarque 9.3.6.* La proposition 9.3.5 montre que la proposition 9.3.4 est une généralisation du résultat d'annulation cohomologique du corollaire 8.5.12 (dont elle ne fournit toutefois pas l'isomorphisme obtenu pour  $k = n$ ). Pour  $n = 1$ , ces deux résultats sont identiques. La démonstration est une conséquence formelle de l'injectivité du morphisme  $b_{n, X}$  du diagramme (9.6); la seule difficulté technique réside dans l'inexactitude du foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ , qui oblige à transiter par les foncteurs exacts  $\Delta_{\mathbb{F}_2}$  et  $\Delta_{E_n}$  pour passer aux groupes d'extensions. Conceptuellement, cette démonstration procède d'idées très voisines de celles employées dans la section 8.5, reposant sur des adjonctions entre foncteurs décalages et produits tensoriels convenables.

## 9.4 Estimation de $\tilde{\nabla}_n \omega_n$

Le but de cette section est de montrer (propositions 9.4.7 et 9.4.9) que, via la transformation naturelle  $\pi_n : \tilde{\nabla}_n \omega_n \rightarrow \omega_n$  introduite dans la notation 9.3.3, les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n \omega_n(X)$  et  $\omega_n(X)$  sont « du même ordre de grandeur » lorsque  $X$  est un foncteur *fini* de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ .

Dans [Dja06b], les estimations de cette section sont présentées de façon plus conceptuelle.

**Notation 9.4.1.** Dans cette section, nous noterons  $i_{(A,B)}$ , l'unique morphisme non nul  $\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r}$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , pour  $(A, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ .

On rappelle que le foncteur  $Gr : \mathcal{E}_{surj}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$ , défini dans la notation 6.2.31, est donné sur les objets ainsi : si  $V$  et  $W$  sont deux objets de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ ,  $Gr(V, W)$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_r(V \oplus W)$  formé des sous-espaces  $B$  tels que les composées  $B \hookrightarrow V \oplus W \rightarrow V$  et  $B \hookrightarrow V \oplus W \rightarrow W$  sont surjectives.

**Notation 9.4.2.** Dans cette section, nous noterons  $Z_B$  le foncteur pseudo-constant  $\rho(\mathbb{F}_2[Gr(\cdot, B)])$ , pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ .

**Lemme 9.4.3.** Soient  $(V, W)$  et  $(A, B)$  deux objets de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ . Le morphisme  $i_{(A,B)}$  induit par tensorisation par  $I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}$  un morphisme

$$I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r} \rightarrow I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r} \otimes I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r} \simeq \bigoplus_{W' \in Gr(W, B)} I_{(V \oplus A, W')}^{\mathcal{G}_r}$$

(cf. proposition 8.3.10) dont les composantes  $I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r} \rightarrow I_{(V \oplus A, W')}^{\mathcal{G}_r}$  sont induites par la projection  $V \oplus A \rightarrow V$ .

*Démonstration.* La composante  $I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r} \rightarrow I_{(V \oplus A, W')}^{\mathcal{G}_r}$  de  $i_{(A,B)} \otimes I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}$  s'obtient par application du foncteur  $E \mapsto \mathbb{F}_2^E : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$  à la transformation naturelle

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}(\cdot, (V \oplus A, W')) \hookrightarrow \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}(\cdot, (V, W)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}(\cdot, (A, B)) \twoheadrightarrow \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}(\cdot, (V, W)),$$

qui est induite par la projection  $V \oplus A \rightarrow V$ , d'où le lemme.  $\square$

Dans la suite, nous utiliserons abondamment les endofoncteurs  $(\cdot : I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r})$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , qui, d'après la proposition 8.4.12, sont donnés par l'isomorphisme naturel

$$(X : I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r})(V, W) \simeq \bigoplus_{W' \in Gr(W, B)} X(V \oplus A, W'). \quad (9.8)$$

Ces foncteurs fournissent un scindement naturel de  $\Delta_{A\omega}(X)$  (cf. remarque 8.4.14).

*Remarque 9.4.4.* On a un isomorphisme canonique  $Z_B \simeq (\mathbb{F}_2 : I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r})$ .

**Lemme 9.4.5.** Soient  $X$  un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et  $(A, B)$  un objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ .

1. Le foncteur  $(X : I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r})$  est fini, de degré et de niveau au plus égaux à ceux de  $X$ .
2. Le morphisme naturel

$$\delta_X^{(A,B)} : (X : I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r}) \rightarrow X$$

induit par le morphisme  $i_{(A,B)} : \mathbb{F}_2 \rightarrow I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r}$  est induit, sur chaque composante  $X(V \oplus A, W')$  de  $(X : I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r})(V, W)$  (où  $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  et  $W' \in Gr(W, B)$ ), par la projection  $V \oplus A \rightarrow V$ . Le morphisme  $\delta_X^{(A,B)}$  est surjectif si  $\dim B \leq \text{coniv}(X)$ .



3. Le morphisme  $\delta_X^{(A,B)}$  se factorise naturellement par  $X \otimes Z_B \xrightarrow{X \otimes \delta_{\mathbb{F}_2}^{(A,B)}} X$  en un morphisme

$$\zeta_X^{(A,B)} : (X : I_{(A,B)}^{Gr}) \rightarrow X \otimes Z_B.$$

Le degré de  $\ker \zeta_X^{(A,B)}$  est strictement inférieur à celui de  $X$  si  $X \neq 0$ .

4. Il existe un monomorphisme  $\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, \cdot) \hookrightarrow \text{Gr}(\cdot, B) \cap \mathcal{G}r_{\leq \dim B}(\cdot \oplus B)$  de foncteurs  $\mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui est une bijection sur les espaces de dimension inférieure à celle de  $B$ .

5. Supposons  $n = \dim B \geq \text{niv}(X)$ . Il existe des isomorphismes naturels  $GL(B)$ -équivariants  $(X : I_{(B,B)}^{Gr})(V, W) \simeq X(V \oplus B, B) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)]$  et  $X \otimes Z_B \simeq X \otimes \rho(P_B^{surj})$ .

Les restrictions à  $\mathcal{F}_{Gr,n}$  des foncteurs  $(X : I_{(B,B)}^{Gr})$  et  $\xi\sigma(X) \otimes \rho(P_B^{surj})$  sont naturellement isomorphes ; la restriction de  $\zeta_X^{(B,B)}$  s'identifie à la restriction du produit tensoriel par  $\rho(P_B^{surj})$  de la coïunité  $\xi\sigma(X) \rightarrow X$  de l'adjonction. La restriction du morphisme obtenu en prenant les co-invariants sous l'action de  $GL(B)$  de  $\delta_X^{(B,B)}$  s'identifie à la coïunité  $\xi\sigma(X) \rightarrow X$ .

*Démonstration.* Tous les foncteurs de division commutent (à isomorphisme naturel près) au foncteur différence, ils envoient donc un foncteur polynomial sur un foncteur polynomial de degré inférieur.

L'isomorphisme (9.8) montre que le foncteur  $(\cdot : I_{(A,B)}^{Gr})$  préserve les objets à valeurs de dimension finie et que  $\text{niv}(X : I_{(A,B)}^{Gr}) \leq \text{niv}(X)$ , d'où le premier point.

Le lemme 9.4.3 et le lemme de Yoneda montrent que le morphisme naturel  $\delta_X^{(A,B)}$  est donné, sur l'objet  $(V, W)$ , par le morphisme

$$\bigoplus_{W' \in Gr(W, B)} X(V \oplus A, W') \rightarrow X(V, W)$$

dont chaque composante est induite par la projection  $V \oplus A \twoheadrightarrow V$ . Pour tout objet  $(V, W)$  tel que  $\dim B \leq \dim W$ , il existe un élément  $W'$  de  $Gr(W, B)$  de même dimension que  $W$  ; le morphisme  $(V \oplus A, W') \rightarrow (V, W)$  de  $\mathcal{E}_{Gr}^f$  est alors un épimorphisme *scindé*, donc il induit un épimorphisme  $X(V \oplus A, W') \twoheadrightarrow X(V, W)$ . Cela montre que  $(X : I_{(A,B)}^{Gr}) \rightarrow X$  est surjectif si  $\dim B \leq \text{coniv}(X)$ .

Le morphisme  $\zeta_X^{(A,B)}$  est défini sur l'objet  $(V, W)$  par la somme directe sur  $W' \in Gr(W, B)$  des morphismes  $X(V \oplus A, W') \twoheadrightarrow X(V, W)$  induits par la projection  $V \oplus A \twoheadrightarrow V$ . On remarque que la transformation naturelle  $\zeta^{(A,B)}$  commute, à isomorphisme près, au foncteur différence, et est un isomorphisme sur les foncteurs pseudo-constants, ce qui procure la troisième assertion par récurrence sur le degré.

La fonction

$$\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W) \rightarrow Gr(W, B) \cap \mathcal{G}r_{\dim B}(W \oplus B) \quad f \mapsto \text{im}(f \oplus \text{id}_B : B \rightarrow W \oplus B)$$

est une bijection  $GL(B)$ -équivariante naturelle en l'objet  $W$  de  $\mathcal{E}_{surj}^f$ , ce qui fournit le quatrième point.

On en déduit aussitôt la première partie de 5 ; dans les isomorphismes  $(X : I_{(B,B)}^{Gr})(V, W) \simeq X(V \oplus B, B) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)]$  et  $X \otimes Z_B \simeq X \otimes \rho(P_B^{surj})$ , le morphisme  $\zeta_X^{(B,B)}$  se lit, sur l'objet  $(V, W)$ , comme

$$X(V \oplus B, B) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)] \rightarrow X(V, W) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)] \quad x \otimes [u] \mapsto X(f_u)(x) \otimes [u],$$

où  $f_u : (V \oplus B, B) \rightarrow (V, W)$  est le morphisme de composantes  $\text{id}_V$  et  $B \xrightarrow{u} W \hookrightarrow V$ . La fin de la proposition s'obtient grâce à l'isomorphisme canonique  $GL(B)$ -équivariant

$$X(V \oplus B, B) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)] \simeq X(V \oplus W, W) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)]$$

pour  $\dim W = \dim B$  : dans cet isomorphisme,  $\delta_X^{(B,B)}$  se lit comme

$$X(V \oplus W, W) \otimes \mathbb{F}_2[\text{Iso}_{\mathcal{E}}(B, W)] \rightarrow X(V, W) \quad x \otimes [u] \mapsto X(g)(x),$$

où  $g : (V \oplus W, W) \rightarrow (V, W)$  est le morphisme de composantes  $\text{id}_V$  et  $W \hookrightarrow V$ .  $\square$

**Notation 9.4.6.** Dans la suite de cette section, nous désignerons par  $\tilde{X}$  le prolongement par zéro  $\mathcal{P}_{n,\mathbb{N}}(X)$  d'un objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ .

**Proposition 9.4.7.** *Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ .*

1. *Le morphisme  $\beta_{n,X} : \Delta_{E_n} \omega_n(X) \rightarrow \omega_n(X)$  du diagramme (9.5) est donné sur l'espace vectoriel  $V$  par l'application linéaire  $\Delta_{E_n} \omega_n(X)(V) = \omega_n(X)(V \oplus E_n) \rightarrow \omega_n(X)(V)$  dont la composante  $X(V \oplus E_n, B) \rightarrow X(V, W)$  (où  $B \in \mathcal{G}r_n(V \oplus E_n)$  et  $W \in \mathcal{G}r_n(V)$ ) est induite par la projection  $V \oplus E_n \rightarrow V$  si  $B \in \mathcal{G}r(W, E_n)$  et est nulle sinon.*
2. *Le morphisme  $\pi_{n,X} : \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \rightarrow \omega_n(X)$  est surjectif.*

*Démonstration.* Le morphisme  $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \iota_n(I_{E_n})$  de la proposition 9.3.1 est la composée de l'unique morphisme non nul  $\mathbb{F}_2 \rightarrow I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$  et de l'injection  $I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n} \hookrightarrow \iota_n(I_{E_n})$  obtenue par restriction à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  du monomorphisme scindé  $I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r} \hookrightarrow \iota(I_{E_n})$  de la proposition 6.3.14. En effet, le foncteur  $\varepsilon_n$  transforme l'injection  $I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n} \hookrightarrow \iota_n(I_{E_n})$  en  $\mathbb{F}_2^{GL_n} \hookrightarrow \mathbb{F}_2^{\text{End}_{\mathcal{E}}(E_n)}$ , de sorte qu'il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 9.3.1 pour obtenir cette factorisation de  $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \iota_n(I_{E_n})$ .

Le morphisme  $\beta_{n,X}$  est donc la composée

$$\Delta_{E_n} \omega_n(X) \simeq (\omega(\tilde{X}) : I_{E_n}) \simeq \omega(\tilde{X} : \iota(I_{E_n})) \twoheadrightarrow \omega(\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r}) \xrightarrow{\omega(\delta_{\tilde{X}}^{(E_n, E_n)})} \omega(\tilde{X}) \simeq \omega_n(X),$$

où le premier isomorphisme provient de la proposition 4.2.5 et le second de la proposition 8.4.10.

Comme le morphisme  $\delta_{\tilde{X}}^{(E_n, E_n)}$  est surjectif, par la deuxième assertion du lemme 9.4.5, il en est de même pour  $\beta_{n,X}$ , donc pour  $\pi_{n,X}$ .  $\square$

**Notation 9.4.8.** Dans la proposition suivante,  $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n, < d}$  désigne la plus petite sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}$  contenant  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$  et les objets  $\omega_n(Y)$ , pour  $Y$  objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  de degré strictement inférieur à  $d$ .

Intuitivement, cette catégorie contient tous les objets qui sont « moins gros » que les foncteurs du type  $\omega_n(A)$ , où  $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  est de degré  $d$ .

**Proposition 9.4.9.** *Soient  $d \in \mathbb{N}$  et  $X$  un objet fini de degré  $d$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ .*

*Le noyau de  $\pi_{n,X} : \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \rightarrow \omega_n(X)$  appartient à  $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n, < d}$ .*

*Démonstration.* La proposition s'obtient en trois étapes à partir du scindement

$$\Delta_{E_n} \omega_n(X) \simeq \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(E_n)} \omega(\tilde{X} : I_{(E_n, B)}^{\mathcal{G}r}).$$

1. Soit  $B$  un sous-espace strict de  $E_n$ . Le lemme 9.4.10 ci-dessous montre que

$$\text{im}(\omega(\tilde{X} : I_{(E_n, B)}^{\mathcal{G}r}) \hookrightarrow \Delta_{E_n} \omega_n(X) \twoheadrightarrow \tilde{\nabla}_n \omega_n(X)) \subset \ker \zeta_X^{(\mathbb{F}_2, 0)} \oplus \ker \zeta_X^{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)},$$

où  $\zeta$  désigne le morphisme introduit au lemme 9.4.5. La troisième assertion de ce lemme montre donc que cette image est un objet de  $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n, < d}$ .

Il suffit ainsi de montrer que la restriction du morphisme  $\pi_{n,X}$  au sous-objet de  $\tilde{\nabla}_n \omega_n(X)$  image de  $r(X) : \omega(\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r}) \hookrightarrow \Delta_{E_n} \omega_n(X) \twoheadrightarrow \tilde{\nabla}_n \omega_n(X)$  a un noyau dans  $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n, < d}$ .

2. La restriction  $Y$  à  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq n-1}$  de  $(\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r})$  est un foncteur fini (cf. lemme 9.4.5. 1), donc  $\omega(Y)$  est oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à  $n$ , donc  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent (cf. proposition 9.3.5).

3. Comme  $t_n$  est invariant par  $GL_n$  (cf. proposition 9.2.6. 3), il existe une factorisation (en pointillé) dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}_r}) \hookrightarrow (\tilde{X} : \iota(I_{E_n})) \xrightarrow{(t_n)_*} (\tilde{X} : \iota(I)) & & (9.9) \\
 \downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow f(X) \\
 (\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}_r})_{GL_n} \xrightarrow{\bar{\delta}_X} \tilde{X} & & 
 \end{array}$$

dont la flèche  $\bar{\delta}_X$  est induite par  $\delta_{\tilde{X}}^{(E_n, E_n)}$  et la flèche  $f(X)$  est la composée

$$f(X) : (\tilde{X} : \iota(I)) \rightarrow (\tilde{X} : I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}_r}) \xrightarrow{\delta_{\tilde{X}}^{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}} X,$$

comme dans le diagramme (9.3). Le point 5 du lemme 9.4.5 et le lemme 8.1.19 montrent que  $\mathcal{R}_{\mathbb{N}, n}(\ker \bar{\delta}_X)$  est de degré strictement inférieur à  $d$ . Par conséquent, si l'on note  $g(X)$  la composée  $(\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}_r}) \rightarrow (\tilde{X} : \iota(I))$  du diagramme (9.9),  $\mathcal{R}_{\mathbb{N}, n}(\ker f(X)|_{\text{im } g(X)})$  est aussi de degré strictement inférieur à  $d$ .

On rassemble ces trois observations comme suit. Le début de la section 9.3 montre que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 \omega(\tilde{X} : I_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}_r}) \xrightarrow{\omega(g(X))} \omega(\tilde{X} : \iota(I)) \simeq \Delta_{\mathbb{F}_2} \omega_n(X) & & (9.10) \\
 r(X) \downarrow & \nearrow & \downarrow \omega(f(X)) \\
 \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \xrightarrow{\pi_{n, X}} \omega(\tilde{X}) \simeq \omega_n(X) & & 
 \end{array}$$

La dernière étape de la démonstration montre que  $\omega(\mathcal{R}_{\mathbb{N}, n}(\ker f(X)|_{\text{im } g(X)}))$  appartient à  $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n, < d}$ ; on en déduit par la deuxième étape qu'il en est de même pour

$$\omega(\ker f(X)|_{\text{im } g(X)}) = \ker \omega(f(X))|_{\text{im } \omega(g(X))} = \ker \pi_{n, X}|_{\text{im } r(X)},$$

où la dernière égalité s'obtient grâce à la commutation du diagramme (9.10). La première étape donne alors la conclusion.  $\square$

**Lemme 9.4.10.** *Si  $B$  est un sous-espace strict de  $E_n$ , pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ , la composée*

$$(X : I_{(E_n, B)}^{\mathcal{G}_r}) \hookrightarrow (X : \iota(I_{E_n})) \xrightarrow{(t_n)_*} (X : \iota(I)) \simeq (X : I_{(\mathbb{F}_2, 0)}^{\mathcal{G}_r}) \oplus (X : I_{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}^{\mathcal{G}_r}) \xrightarrow{\zeta_X^{(\mathbb{F}_2, 0)} \oplus \zeta_X^{(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)}} X \otimes Z_0 \oplus X \otimes Z_{\mathbb{F}_2}$$

est nulle.

*Démonstration.* Pour tout  $l \in E_n^*$ , le morphisme  $(X : I_{(E_n, B)}^{\mathcal{G}_r}) \rightarrow X \otimes Z_0 \oplus X \otimes Z_{\mathbb{F}_2}$  induit par  $l$  est donné, sur le facteur  $X(V \oplus E_n, W')$  de  $(X : I_{(E_n, B)}^{\mathcal{G}_r})(V, W)$  (où  $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$  et  $W' \in \text{Gr}(W, B)$ ), par  $x \mapsto X(p)(x) \otimes [(id_V \oplus l)(W')]$ , où  $p$  est le morphisme induit par la projection  $V \oplus E_n \rightarrow V$ . On observe alors que l'ensemble

$$\{l \in E_n^* \mid (id_V \oplus l)(W') = V'\}$$

est, pour tous  $V' \in \mathcal{G}_r(V \oplus \mathbb{F}_2)$  et  $W' \in \text{Gr}(W, B)$ , invariant par les translations de vecteurs de  $B^\perp$ , donc de cardinal *pair* puisque l'espace vectoriel  $B^\perp$  est par hypothèse non nul, ce qui fournit le lemme.  $\square$

*Remarque 9.4.11.* La proposition 9.4.9 est optimale en ce sens que si  $X$  est un objet de degré  $d > 0$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , le noyau de  $\pi_{n, X}$  n'est *jamais* un objet de  $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n, < d-1}$ . Pour  $n = 1$ , cela découle de l'assertion 2 du lemme 9.1.4.

Lorsque  $X$  est un objet simple pseudo-constant (i.e. que  $\omega_n(X)$  est un foncteur de Powell), on peut cependant calculer exactement  $\tilde{\nabla}_n \omega_n(X)$ , qui est alors isomorphe *dans*  $\mathcal{F}$  à  $\omega_n(X)$ , sauf dans le cas où  $X$  est associé à la représentation de Steinberg. C'est la proposition 6.0.4 de l'article [Pow98c] de Powell.

## 9.5 Théorème de simplicité généralisé

Le but de cette section est d'établir le théorème 9.5.5, qui constitue un succédané de la conjecture artinienne extrêmement forte, où la filtration de Krull est remplacée par la filtration par  $\nabla$ -nilpotence de  $\mathcal{F}$ . Nous suivons la même marche qu'à la section 9.1, où les assertions 3 et 4 du lemme 9.1.4 sont remplacées par les propositions 9.4.7 et 9.4.9 respectivement, et le corollaire 8.5.13 par la proposition 9.3.4.

**Notation 9.5.1.** Si  $k$  est un entier naturel et  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ , nous désignerons par  $\pi_{n, X}^k : (\tilde{\nabla}_n)^k \omega_n(X) \rightarrow \omega_n(X)$  le morphisme  $\pi_{n, X} \circ \tilde{\nabla}_n \pi_{n, X} \circ \cdots \circ (\tilde{\nabla}_n)^{k-1} \pi_{n, X}$ .

**Lemme 9.5.2.** Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie,  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ ,  $H$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $V^*$  et  $x$  un élément de  $\omega_n(X)(V)$ . Notons  $a_x : P_V \rightarrow \omega_n(X)$  le morphisme de  $\mathcal{F}$  représenté par  $x$ , et  $s_H = \sum_{h \in H} [h] \in k_n P(V^*) \subset \mathbb{F}_2[V^*]$ .

Le morphisme

$$P_V \xrightarrow{t \mapsto s_H \otimes t} k_n P(V^*) \otimes P_V \simeq \tilde{\nabla}_n P_V \xrightarrow{\tilde{\nabla}_n(a_x)} \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \xrightarrow{\pi_{n, X}} \omega_n(X)$$

représente l'élément  $\Pi_{X, V, H}^\omega(x)$  de  $\omega_n(X)(V)$ , où  $\Pi_{X, V, H}^\omega$  désigne la projection de  $\omega_n(X)(V)$  sur les facteurs directs  $X(V, W)$ , où  $W \in \mathcal{G}_r(V)$  est tel que  $H \cap W^\perp = \{0\}$ .

*Démonstration.* Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \Delta_{E_n} P_V & \xrightarrow{\Delta_{E_n} a_x} & \Delta_{E_n} \omega_n(X) & \\ & \uparrow & & \downarrow & \searrow \beta_{n, X} \\ & [(l_1, \dots, l_n)] \otimes & & & \\ P_V & \xrightarrow{s_H \otimes \cdot} & \tilde{\nabla}_n P_V & \xrightarrow{\tilde{\nabla}_n(a_x)} & \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) & \xrightarrow{\pi_{n, X}} & \omega_n(X) \end{array}$$

commute, où :

- $\{l_1, \dots, l_n\}$  désigne une base de  $H$  (on a noté  $(l_1, \dots, l_n)$  l'élément de  $\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, E_n)$  dont les composantes sont les  $l_i$ );
- l'on a identifié  $\Delta_{E_n} P_V$  à  $\mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}}(V, E_n)] \otimes P_V$  (et  $\tilde{\nabla}_n P_V$  à  $k_n P(V^*) \otimes P_V$ );
- le morphisme  $\beta_{n, X}$  est celui du diagramme (9.5).

L'élément  $[(l_1, \dots, l_n)] \otimes [id_V]$  de  $\Delta_{E_n} P_V(V)$  s'envoie par  $\Delta_{E_n} a_x$  sur l'élément de  $\Delta_{E_n} \omega_n(X)(V) = \omega_n(X)(V \oplus E_n)$  image par  $f = (id_V, l_1, \dots, l_n) : V \rightarrow V \oplus E_n$  de  $x$ .

Soit  $W \in \mathcal{G}_r(V)$ . La proposition 9.4.7 montre que la composée

$$X(V, W) \hookrightarrow \omega_n(X)(V) \xrightarrow{f_*} \omega_n(X)(V \oplus E_n) \xrightarrow{\beta_{n, X}} \omega_n(X)(V)$$

est nulle si la projection de  $f(W)$  sur  $E_n$  en est un sous-espace strict, condition équivalente à la non-inversibilité de la restriction à  $W$  de  $(l_1, \dots, l_n)$ , ou encore à  $H \cap W^\perp \neq \{0\}$ , et que sinon elle est égale à l'inclusion  $X(V, W) \hookrightarrow \omega_n(X)(V)$ , puisque la composée de  $f : V \rightarrow V \oplus E_n$  et de la projection  $V \oplus E_n \rightarrow V$  est l'identité. Cela établit le lemme.  $\square$

**Notation 9.5.3.** Dans cette section, si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $W$  un sous-espace de dimension  $n$  de  $V$  et  $H$  un sous-espace de dimension  $n$  de  $V^*$ , nous noterons  $\langle H, W \rangle$  l'élément de  $\mathbb{F}_2$  égal à 1 si  $H \cap W^\perp = \{0\}$ , 0 sinon. Autrement dit, si  $(w_1, \dots, w_n)$  (resp.  $(l_1, \dots, l_n)$ ) est une base de  $W$  (resp.  $H$ ), on a  $\langle H, W \rangle = \det(l_i(w_j))$ .

La propriété de stabilisation suivante, qui fournit la partie « concrète » de la démonstration du théorème 9.5.5, généralise la proposition 9.1.5.

**Proposition 9.5.4.** *Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$  et  $F$  un sous-objet de  $\omega_n(X)$ . Pour tout entier  $k \geq 0$ , on note  $C_k = \pi_{n,X}^k((\tilde{\nabla}_n)^k F)$ .*

1. *La suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  de sous-objets de  $\omega_n(X)$  est croissante; nous noterons  $C_\infty$  sa réunion. Si  $X$  est un objet noethérien de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ , cette suite stationne.*
2. *Pour tout  $k \geq 0$ , le foncteur  $C_k$  est engendré par les éléments du type*

$$(\langle H_1, W \rangle \cdots \langle H_k, W \rangle x_W)_{W \in \mathcal{G}_{r,n}(V)} \in \omega_n(X)(V),$$

*où  $V$  parcourt les espaces vectoriels de dimension finie,  $x = (x_W)_{W \in \mathcal{G}_{r,n}(V)}$  les éléments de  $F(V)$  et  $(H_1, \dots, H_k)$  les  $k$ -uplets d'éléments de  $\mathcal{G}_{r,n}(V^*)$ .*

3. *Le foncteur  $C_\infty$  est le plus petit sous- $\tilde{G}(n)$ -comodule de  $\omega_n(X)$  contenant  $F$ . Si  $F$  est lui-même un sous- $\tilde{G}(n)$ -comodule de  $\omega_n(X)$ , on a  $C_k = F$  pour tout  $k \geq 0$ .*
4. *Si  $X$  est localement fini, pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ , on a  $\text{hom}(C_\infty/F, \omega_n(T)) = 0$ .*

*Démonstration.* Le lemme 9.5.2 et la préservation des épimorphismes par le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  montrent le second point pour  $k = 1$ . Le cas général s'en déduit aussitôt par récurrence.

On en déduit que la suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  est croissante. Si  $W$  est un sous-espace de dimension  $n$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , soient  $H_1, \dots, H_k$  les éléments de  $\mathcal{G}_{r,n}(V^*)$  tels que  $\langle H_i, W \rangle = 1$ . Alors la fonction  $\langle H_1, \cdot \rangle \cdots \langle H_k, \cdot \rangle : \mathcal{G}_{r,n}(V) \rightarrow \mathbb{F}_2$  est égale à l'indicatrice de  $\{W\}$ . Si l'on note  $F^{gr}(V)$  le plus petit sous-espace vectoriel  $\mathcal{G}_{r,n}(V)$ -gradué de  $\omega_n(X)(V)$  contenant  $F(V)$ , ce qui précède montre que  $C_\infty$  est le plus petit sous-foncteur de  $\omega_n(X)$  tel que  $F^{gr}(V) \subset C_\infty(V)$  pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ; en particulier,  $C_\infty \supset F$ .

Soit  $Y$  le plus petit sous-objet de  $X$  tel que  $Y(V, W)$  contienne les composantes dans  $X(V, W)$  des éléments de  $F(V) \subset \omega_n(X)(V)$ . La proposition 6.3.7 montre d'une part que  $\omega_n(Y)$  est le plus petit sous- $\tilde{G}(n)$ -comodule de  $\omega_n(X)$  contenant  $F$ . Le paragraphe précédent montre d'autre part que  $C_\infty = \omega_n(Y)$ , d'où le troisième point.

Soit  $f : C_\infty/F \rightarrow \omega_n(T)$  un morphisme de  $\mathcal{F}$ . Si  $X$  est localement fini, il en est de même pour  $Y$ , donc le corollaire 8.5.12 montre que la composée  $g : \omega_n(Y) = C_\infty \rightarrow C_\infty/F \xrightarrow{f} \omega_n(T)$  est induite par un morphisme  $u : Y \rightarrow T$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ . Comme la composée  $F \hookrightarrow \omega_n(Y) \xrightarrow{g} \omega_n(T)$  est nulle,  $F$  est inclus dans  $\omega_n(\ker u)$ . D'après le troisième point, on en déduit  $\ker u = Y$ , puis  $f = 0$ , d'où la dernière assertion.

Par ailleurs, si  $X$  est noethérien, alors  $Y$  est de type fini, donc  $C_\infty = \omega_n(Y)$  est de type fini. Cela montre que la suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  est stationnaire, et achève la démonstration.  $\square$

**Théorème 9.5.5** (Théorème de simplicité généralisé). *Le foncteur*

$$\bar{\omega}_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \xrightarrow{\omega_n} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$$

*induit une équivalence entre la catégorie des objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$  et une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ . En particulier, il envoie un foncteur simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$  sur un objet simple de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ .*

*Démonstration.* Le corollaire 8.5.12 et la proposition 9.3.4 entraînent la pleine fidélité de  $\bar{\omega}_n$  et la stabilité par extensions l'image, notée  $\mathcal{C}_n$ , de sa restriction aux objets finis de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ . Il suffit donc d'établir qu'un sous-objet d'un objet de  $\mathcal{C}_n$  est isomorphe à un objet de  $\mathcal{C}_n$ . On procède par récurrence sur le degré polynomial. On se donne donc un objet fini  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$  de degré  $d \geq 0$  et l'on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.

**Hypothèse 9.5.6** (Hypothèse de récurrence). L'image par le foncteur  $\bar{\omega}_n$  de la sous-catégorie  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}^f)_{d-1}$  des foncteurs de degré  $< d$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}^f$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ .

**Notation 9.5.7.** Dans cette section, nous noterons  $\mathcal{A}_{n,d}$  cette sous-catégorie épaisse, et  $\mathcal{Q}_{n,d}$  la catégorie quotient de  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  par  $\mathcal{A}_{n,d}$ . Nous noterons également  $\mathcal{X}_n$  la sous-catégorie pleine des objets  $A$  de  $\mathcal{F}$  tels que  $\text{hom}(A, \omega_n(T)) = 0$  pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ .

**Lemme 9.5.8.** 1. Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}$  tel que  $\tilde{\nabla}_n(F)$  appartienne à  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ , alors  $F$  appartient à  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ .

2. La sous-catégorie  $\mathcal{X}_n$  de  $\mathcal{F}$  est stable par le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ .

3. Un objet de  $\mathcal{X}_n$  dont l'image dans  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  appartient à  $\mathcal{A}_{n,d}$  est objet de  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ .

4. Pour tout entier  $k > 0$ , le morphisme  $\pi_{n,X}^k$  induit un isomorphisme dans la catégorie  $\mathcal{Q}_{n,d}$ .

*Démonstration du lemme.* Soit  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}$  tel que  $\tilde{\nabla}_n F$  appartienne à  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ . Si  $F$  est de type fini,  $\tilde{\nabla}_n F$  est aussi de type fini (car c'est un quotient de  $\Delta^n F$ ), donc  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent puisqu'objet de  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ . Par conséquent,  $F$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent. Dans le cas général, on montre que  $F$  est objet de  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  en écrivant  $F$  comme colimite de ses sous-objets de type fini.

Pour le deuxième point, on remarque que la sous-catégorie  $\mathcal{X}_n$  est stable par quotient et préservée par le foncteur  $\Delta_{E_n}$ , en raison de l'isomorphisme  $\text{hom}_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n} A, \omega_n(T)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(A, \omega_n(T \otimes_{\iota_n}(I_{E_n})))$ .

Le troisième point résulte de la définition de la sous-catégorie  $\mathcal{A}_{n,d}$ .

La proposition 9.4.9 montre que le noyau de l'épimorphisme  $\pi_{n,X}$  (proposition 9.4.7) appartient à  $\mathcal{A}_{n,d}$  (on rappelle que  $X$  est de degré  $d$ ). Pour en déduire, par récurrence sur  $k$ , la dernière assertion, il suffit de noter que l'image par le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  d'un morphisme  $f$  de  $\mathcal{F}$  qui induit un isomorphisme dans  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  vérifie encore la même propriété. Ce résultat s'obtient en notant que les endofoncteurs *exacts*  $\Delta$  et  $\Delta^n$  de  $\mathcal{F}$  préservent  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  (par la dernière assertion de la proposition 9.2.6), de sorte que  $\ker(\Delta f) \simeq \Delta(\ker f)$ , dont  $\ker \tilde{\nabla}_n(f)$  est un sous-objet, et  $\text{coker}(\Delta^n f) \simeq \Delta^n(\text{coker } f)$ , dont  $\text{coker } \tilde{\nabla}_n(f)$  est un quotient, sont objets de  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ .  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème 9.5.5.* Soit  $F$  un sous-objet de  $\omega_n(X)$ ; on conserve les notations de la proposition 9.5.4, et l'on se donne  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $C_\infty = C_k$  (qui est donc de la forme  $\omega_n(Y)$  pour un sous-objet  $Y$  de  $X$ ). Alors  $(\tilde{\nabla}_n)^k F$  et  $(\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty$  ont la même image  $C_\infty$  par  $\pi_X^k$ , qui induit un isomorphisme dans  $\mathcal{Q}_{n,d}$  (dernière assertion du lemme 9.5.8), donc l'inclusion  $(\tilde{\nabla}_n)^k F \hookrightarrow (\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty$  induit un isomorphisme dans  $\mathcal{Q}_{n,d}$ . Ainsi, l'image dans  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  de  $(\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty / (\tilde{\nabla}_n)^k F$  est objet de  $\mathcal{A}_{n,d}$ . Il en est de même pour  $(\tilde{\nabla}_n)^k(C_\infty/F)$ , qui est un quotient de  $(\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty / (\tilde{\nabla}_n)^k F$  (parce que  $\tilde{\nabla}_n$  préserve injections et surjections). Mais  $(\tilde{\nabla}_n)^k(C_\infty/F)$  est aussi un objet de  $\mathcal{X}_n$  par la dernière assertion de la proposition 9.5.4 et la deuxième assertion du lemme 9.5.8. Il montre alors que  $(\tilde{\nabla}_n)^k(C_\infty/F)$  appartient à  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  (troisième assertion), donc aussi  $C_\infty/F$  (première assertion). Cela achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 9.5.9.* Le même énoncé est valable en remplaçant  $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  par  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ , et se démontre de manière totalement similaire.

L'une des conséquences principales de ce théorème est le fait que l'image d'un  $\bar{G}(n)$ -comodule simple dans la catégorie quotient  $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$  ou  $\mathcal{F}/\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$  est simple. Pour un  $\bar{G}(n)$ -comodule simple associé à un objet simple pseudo-constant de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  (i.e. pour un foncteur de Powell), ce résultat est dû à Powell (cf. [Pow98c], théorème 6.0.1, et son corollaire, la proposition 6.1.1), qui l'a nommé *théorème de simplicité*. Cela justifie la terminologie employée.

La démonstration du théorème 9.5.5 repose exactement sur le même principe que le théorème de simplicité de Powell, à savoir la considération explicite d'éléments dans les foncteurs, rendue raisonnable par le calcul aisé du foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  sur les projectifs standard, adapté aux catégories de foncteurs en grassmanniennes par les résultats préliminaires de la section 9.4.

Le théorème 9.5.5 est un résultat *global* sur la structure de la catégorie  $\mathcal{F}$  (il donne des informations sur tous ses objets de type fini); comme le théorème 9.1.1, qui en constitue le cas particulier

$n = 1$ , il n'utilise pas la théorie des représentations linéaires (la généralisation à tous les  $\tilde{G}(n)$ -comodules simples du théorème de simplicité de Powell fait disparaître les quelques considérations explicites sur les représentations de  $GL_n$  utilisées dans [Pow98c]).

## 9.6 Foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ -adaptés

La notion de foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté que nous introduisons ci-dessous est destinée à faciliter certains raisonnements de récurrence pour progresser dans l'étude de la conjecture artinienne extrêmement forte.

**Définition 9.6.1.** Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$ . On dit que  $F$  est un *foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté* si tout quotient  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent de  $F$  est oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à  $n$ .

Cette condition est évidemment très difficile à vérifier si l'on ignore si un quotient d'un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à  $n$  est encore oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à  $n$ .

La définition 9.6.1 est maniable lorsque l'hypothèse suivante est satisfaite (le but étant de démontrer l'épaisseur de  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ ); nous savons déjà qu'elle l'est pour  $n = 2$ , d'après le théorème 9.1.1.

**Hypothèse 9.6.2.** La sous-catégorie  $\mathcal{F}_i^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse pour  $i < n$ .

**Proposition 9.6.3.** Soient  $A \in \text{Ob } \mathcal{F}$  et  $F$  un objet fini de  $\mathcal{F}$ . On suppose que l'hypothèse 9.6.2 est satisfaite.

1. Si  $A$  est un foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté, il en est de même pour tous ses quotients.
2. Si  $A$  est un foncteur  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté, alors  $A \otimes F$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.
3. Si  $A$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté, alors  $(A : F)$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.

*Démonstration.* Le premier point est formel.

Pour le second, considérons un épimorphisme  $f : A \otimes F \twoheadrightarrow Q$ , où  $Q$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent. Soit  $g : A \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, Q)$  le morphisme adjoint à  $f$ . Comme  $F$  est quotient d'une somme directe finie de projectifs standard,  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, Q)$  est un sous-foncteur d'une somme directe finie de  $\Delta_V Q$ , il est donc  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent par la proposition 9.2.6. 4. Par conséquent,  $im g$  est un quotient  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent de  $A$ , c'est donc, par hypothèse, un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à  $n$ . Il en est de même pour  $im g \otimes F$  par la proposition 8.5.18. 4.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & A \otimes F & \\ & \swarrow g \otimes F & \downarrow f \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, Q) \otimes F & \longrightarrow & Q \end{array}$$

(dont la flèche horizontale est la coïunité de l'adjonction) montre que  $Q$  est un quotient de  $im g \otimes F$ ;  $Q$  est donc objet de  $\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$  grâce à ce qui précède et à l'hypothèse 9.6.2.

Le troisième point s'établit par un argument d'adjonction analogue, grâce aux deux remarques suivantes.

1. Le foncteur  $\cdot \otimes F$  préserve  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ , par la proposition 9.2.16.
2. Le foncteur de division par  $F$  préserve  $\mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$ . En effet, comme  $F$  est de co-type fini, ce foncteur est un quotient d'une somme directe finie de foncteurs décalage, de sorte que la proposition 8.5.18. 5 et l'hypothèse 9.6.2 donnent la conclusion.

□

Avant d'appliquer cette propriété à la proposition 9.6.5, nous établissons un lemme élémentaire qui ne dépend que de la première partie de cette thèse. On peut le déduire des résultats de [Kuh94b], § 4; nous donnons ici une démonstration directe.

**Lemme 9.6.4.** *Soit  $M$  un  $GL_n$ -module fini. Il existe un foncteur fini  $F$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $F(E_n)$  est isomorphe à  $M$  comme  $GL_n$ -module.*

*Démonstration.* Comme le monomorphisme d'algèbres  $\mathbb{F}_2[GL_n] \hookrightarrow \mathbb{F}_2[\text{End}_{\mathcal{E}}(E_n)]$  est *scindé*, le foncteur de restriction  $\mathbb{F}_2[\text{End}_{\mathcal{E}}(E_n)]\mathbf{Mod}^f \rightarrow \mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}^f$  est essentiellement surjectif. Par conséquent, il suffit de montrer que le foncteur  $\mathcal{F}^f \rightarrow \mathbb{F}_2[\text{End}_{\mathcal{E}}(E_n)]\mathbf{Mod}^f$  induit par l'évaluation  $\text{ev}_{E_n}$  est essentiellement surjectif.

Si  $M$  est un  $\mathbb{F}_2[\text{End}_{\mathcal{E}}(E_n)]$ -module fini, il existe un objet  $A$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $\text{ev}_{E_n}(A) \simeq M$ , par le corollaire 3.3.6. Comme  $A$  est réunion filtrante de ses sous-foncteurs de type fini, la type-finitude de  $M$  et la commutation du foncteur  $\text{ev}_{E_n}$  aux colimites montrent qu'il existe un sous-foncteur de type fini  $B$  de  $A$  tel que  $\text{ev}_{E_n}(B) \simeq M$ . De même, comme  $B$  est limite de ses quotients finis, la commutation de  $\text{ev}_{E_n}$  aux limites et la co-type-finitude de  $M$  prouvent qu'il existe un quotient fini  $F$  de  $B$  tel que  $\text{ev}_{E_n}(F) \simeq M$ .  $\square$

**Proposition 9.6.5.** *Soit  $\lambda$  une partition régulière telle que  $\lambda_1 = n$ . On suppose l'hypothèse 9.6.2 vérifiée. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. La sous-catégorie  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse.
2. Pour tout objet fini  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ , le foncteur  $\omega_n(X)$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.
3. Pour tout objet simple  $S$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ , le foncteur  $\omega_n(S)$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.
4. Le foncteur de Powell  $Q_\lambda$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.

*Lorsqu'elles sont vérifiées, pour tout foncteur fini (resp. simple)  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,k}}$ , où  $k \leq n$ , le foncteur  $\omega_k(X)$  est noethérien (resp. simple noethérien) de type  $k$ .*

*Démonstration.* Supposons l'assertion 4 vérifiée. On commence par montrer que pour tout  $GL_n$ -module simple  $S$ , le foncteur de Powell  $\omega_n \rho_n(S)$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté. Pour cela, on se donne, conformément au lemme 9.6.4, un foncteur fini  $F$  de  $\mathcal{F}$  tel que le  $GL_n$ -module  $F(E_n)$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2[GL_n]$ . Le foncteur  $\omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(F))$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté, car c'est un quotient, par la proposition 8.4.4, de  $\omega_{\leq n}(\mathcal{P}_{n,\leq n} \rho_n(R_\lambda) : \iota_{\leq n}(F)) \simeq (\omega_n \rho_n(R_\lambda) : F) = (Q_\lambda : F)$  (cet isomorphisme venant de la proposition 8.4.10), de sorte que la proposition 9.6.3 prouve ce premier point.

Par ailleurs,  $(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(F)) \simeq \rho_n(R_\lambda : \mathbb{F}_2[GL_n])$  par la proposition 8.4.11, et  $(R_\lambda : \mathbb{F}_2[GL_n]) \simeq R_\lambda \otimes \mathbb{F}_2[GL_n] \simeq \mathbb{F}_2[GL_n]^{\oplus i}$ , où  $i = \dim_{\mathbb{F}_2} R_\lambda \in \mathbb{N}^*$  par la proposition 3.2.8. Par conséquent, tout  $GL_n$ -module simple  $S$  est quotient de  $(R_\lambda : \mathbb{F}_2[GL_n])$ , donc le quotient  $\omega_n \rho_n(S)$  de  $\omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(F))$  est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.

Si  $X$  est un objet simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ , il existe un  $GL_n$ -module simple  $S$  et un objet simple  $F$  de  $\mathcal{F}$  tels que  $X \simeq \kappa_n(F) \otimes \rho_n(S)$  (proposition 8.2.10), donc  $\omega_n(X)$  est quotient de  $\omega_n(\iota_n(F) \otimes \rho_n(S)) \simeq \omega_n \rho_n(S) \otimes F$ . La proposition 9.6.3 montre à nouveau que ce foncteur est  $\tilde{\nabla}_n$ -adapté.

On a ainsi démontré que 4 implique 3.

Si l'assertion 3 est vérifiée, le théorème 9.5.5 prouve que tout sous-quotient de  $\omega_n(S)$ , où  $S$  est un objet simple de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ , est objet de  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ . Comme la sous-catégorie pleine des objets de  $\mathcal{F}$  dont tous les sous-quotients sont dans  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad}$  vérifie l'hypothèse 8.5.15, on en déduit l'assertion 1.

Il est clair que 2 entraîne 4.

Si l'assertion 1 est vérifiée, le foncteur  $\omega_n$  induit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}^f$  et  $\mathcal{F}_n^{\omega-ad} / \mathcal{F}_{n-1}^{\omega-ad}$ , donc l'assertion 2 est satisfaite.

Ainsi, les assertions de l'énoncé sont équivalentes.

La fin de la proposition se traite par récurrence sur  $k \leq n$ , à partir du fait que le foncteur  $\omega_k$  induit une équivalence entre  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,k}}^f$  et  $\mathcal{F}_k^{\omega-ad} / \mathcal{F}_{k-1}^{\omega-ad}$  (cet argument est une variante tronquée de la démonstration de la proposition 8.5.24).  $\square$

La satisfaction de l'hypothèse 9.6.2 pour  $n = 2$  et la proposition 9.2.15 permettent d'en déduire le résultat fondamental suivant.



- Théorème 9.6.6.** 1. La sous-catégorie  $\mathcal{F}_2^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse.  
 2. Tout  $\tilde{G}(2)$ -comodule fini (resp. simple) est noethérien (resp. simple noethérien) de type 2.  
 3. En particulier, pour tout objet fini  $F$  de  $\mathcal{F}$ , le foncteur  $P^{\otimes 2} \otimes F$  est noethérien.

Cette généralisation du théorème 4.3.10 de Powell semble le meilleur résultat actuellement connu concernant la conjecture artinienne.

Nous pouvons maintenant préciser la proposition 9.2.14 en montrant que la conjecture 9.2.13 est vérifiée pour  $n = 2$ .

**Proposition 9.6.7.** *Tout foncteur  $\tilde{\nabla}_2$ -nilpotent et de type fini  $F$  est oméga-adapté de hauteur au plus 1.*

*Démonstration.* On établit la proposition par récurrence sur l'indice de  $\tilde{\nabla}_2$ -nilpotence  $i$  de  $F$ . On suppose donc la propriété vérifiée pour tous les foncteurs de type fini annihilés par  $(\tilde{\nabla}_2)^{i-1}$ .

Il existe une suite exacte

$$\bar{P} \otimes \tilde{\nabla}_2(F) \rightarrow F \rightarrow Q \rightarrow 0$$

où  $\tilde{\nabla}_2(Q) = 0$  (cf. [Pow98b], §5). Comme  $Q$  est de type fini, on en déduit que  $Q$  est oméga-adapté de hauteur au plus 1 par la proposition 9.2.14. Le foncteur de type fini  $\tilde{\nabla}_2(F)$  étant annulé par  $(\tilde{\nabla}_2)^{i-1}$ , l'hypothèse de récurrence montre qu'il est également oméga-adapté de hauteur au plus 1, donc  $\bar{P} \otimes \tilde{\nabla}_2(F)$ , puis  $F$ , sont oméga-adaptés de hauteur au plus 2, par la proposition 8.5.18 et le théorème 9.6.6. En conséquence, comme le foncteur  $\omega_2$  induit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}}^f$  et  $\mathcal{F}_2^{\omega-ad}/\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ , il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow \omega_2(X) \rightarrow B \rightarrow 0$$

avec  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}}^f$  et  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ . Vu que la sous-catégorie  $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_2}$  de  $\mathcal{F}$  est épaisse (proposition 9.2.10) et que  $A, B$  et  $F$  sont  $\tilde{\nabla}_2$ -nilpotents, cela entraîne que  $\omega_2(X)$  est  $\tilde{\nabla}_2$ -nilpotent, donc que  $X = 0$  par la proposition 9.3.4.

Par conséquent,  $F$  est oméga-adapté de hauteur au plus 1, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

# Chapitre 10

## Facteurs de composition des foncteurs $\omega(X)$

Ce chapitre est consacré aux liens entre les facteurs de composition de l'image par le foncteur  $\omega$  d'un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  et la structure globale de la catégorie  $\mathcal{F}$ .

Nous présentons d'abord, dans la section 10.1, des considérations qualitatives très générales sur ces facteurs de composition. Nous effectuons ensuite des calculs explicites de facteurs de composition de  $\bar{G}(2)$ -comodules finis, qui permettent de donner des renseignements sur leur structure, redémontrant leur caractère noethérien de type 2, à partir des théorèmes antérieurement connus sur la structure de  $\bar{P}^{\otimes 2}$  et  $\bar{P} \otimes F$  (pour  $F$  fini), mais indépendamment du chapitre 9.

Une difficulté technique mineure (essentiellement typographique) alourdit ces raisonnements, l'emploi fréquent de la dualité de  $\mathcal{F}$ , notre exposé travaillant tantôt sur des  $\bar{G}(2)$ -comodules, tantôt sur les  $\bar{D}(2)$ -modules. C'est le prix à payer pour pouvoir utiliser les résultats classiques, issus de la théorie des représentations des groupes symétriques et linéaires, sur les foncteurs de Weyl et leurs générateurs semi-standard.

Le principe général de ces considérations consiste à déterminer, dans des  $\bar{D}(2)$ -modules finis, des facteurs de composition les engendrant (i.e. tels qu'un sous-foncteur les contenant également soit le foncteur initial tout entier) et se comportant bien relativement à un endofoncteur de  $\mathcal{F}$  « réduisant la taille » du  $\bar{D}(2)$ -module initial, ce qui permet de les utiliser dans des raisonnements par récurrence.

Le foncteur utilisé ici est la division par  $\Lambda^1$  pour les  $\bar{D}(2)$ -modules ou, dualement, le foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  sur les  $\bar{G}(2)$ -comodules. La pertinence de son utilisation a été mise en évidence dans le paragraphe 8.4.3 : le corollaire 8.4.35 ramène le calcul de  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  sur un  $\bar{G}(2)$ -comodule simple au calcul de ce même foncteur sur un objet simple de  $\mathcal{F}$ . Avec le corollaire 8.5.12, il s'agit pratiquement du seul résultat de la deuxième partie que nous utiliserons, mais leur intervention sera essentielle dans la démonstration finale. On peut se passer complètement des catégories de foncteurs en grassmanniennes pour l'étude des foncteurs  $\bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$  ; nous donnons une approche directe dans notre article [Dja06c]. Le cas des puissances extérieures permet également de simplifier de façon notable certaines des constructions techniques développées pour retrouver la structure de  $P^{\otimes 2} \otimes F$  lorsque  $F$  est un foncteur fini quelconque.

Ce chapitre s'organise ainsi. La première section est consacrée à la démonstration du théorème 10.1.14, qui affirme que l'image d'un objet fini  $X$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  dans le groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r})$  est déterminée par les facteurs de composition de  $\omega(X)$ . L'importance conceptuelle de ce résultat est illustrée par le corollaire 10.1.15, selon lequel le morphisme induit par  $\omega$  entre les groupes de Grothendieck  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r})$  et  $G_0^{tf}(\mathcal{F})$  est injectif, ce que nous ne sommes pas parvenus à démontrer directement. Par conséquent, la conjecture artinienne extrêmement forte implique que ce morphisme est un *isomorphisme*, ce qui donnerait une description globale particulièrement satisfaisante des objets de type fini de la catégorie  $\mathcal{F}$ . La section 10.1 repose sur deux outils principaux :

les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$ , dont nous avons déjà observé l'utilité combinée à celle des foncteurs  $\omega_n$ , et les propriétés remarquables de la *représentation de Steinberg* des groupes linéaires. En effet, si  $\lambda$  est une partition régulière telle que  $\lambda_1 = n$ , le foncteur  $\tilde{\nabla}_n$  procure des renseignements précieux sur les facteurs de composition  $S_\mu$  du foncteur de Powell  $Q_\lambda$  tels que  $l(\mu) = n$ , *dès lors que l'on possède quelques informations sur certains d'entre eux*. Malheureusement, la seule information facilement disponible en toute généralité concerne les facteurs de composition  $S_\nu$  de  $Q_\lambda$  tels que  $\nu_1 = n$ . L'unique partition régulière  $\lambda$  telle que  $\lambda_1 = l(\lambda) = n$ , la partition triangulaire  $\langle n \rangle$ , joue donc un rôle fondamental, ainsi que la représentation  $R_{\langle n \rangle}$  de  $GL_n$  qui lui est associée, la représentation de Steinberg. Pour déduire des résultats significatifs sur tous les facteurs de composition des foncteurs de Powell de ceux relatifs à cette partition et celles dont on ramène le comportement à  $\langle n \rangle$  via  $\tilde{\nabla}_n$ , on utilise un théorème profond de théorie des représentations, qui implique que la multiplication par  $[R_{\langle n \rangle}]$  dans l'anneau de Grothendieck des  $GL_n$ -modules finis est *injectif*. On passe ensuite des facteurs de composition des foncteurs de Powell à ceux des  $\mathbb{F}_2[Gr]$ -comodules finis par des arguments standard issus de la règle de Littlewood-Richardson, dont nous utilisons la forme « fonctorielle » rappelée par la proposition 10.0.2.

La section 10.2 expose quelques résultats généraux sur le foncteur de division par  $\Lambda^1$ , rendant accessible son évaluation sur nombre d'objets finis. Notamment, ce foncteur est une dérivation relativement au produit tensoriel ; sur des objets homogènes et cohomogènes, il est isomorphe à la partie homogène de plus haut degré du foncteur différence ; cela explique que l'on puisse calculer simplement  $(F : \Lambda^1)$  pour des foncteurs  $F$  pour lesquels la détermination de  $\Delta F$  est hors de portée. La section 10.3 donne des conséquences ou des analogues de résultats classiques sur les représentations des groupes symétriques qui serviront par la suite de deux manières : tout d'abord, ils donnent un contrôle sur la division par  $\Lambda^1$  de certains foncteurs simples ; d'autre part, ils fourniront une construction explicite des  $\bar{D}(2)$ -modules associés aux foncteurs de Weyl, permettant d'en contrôler les facteurs de composition.

La section 10.4 montre comment décider de la présence de facteurs de composition de sous-objets  $G$  de certains foncteurs  $F$  en testant la présence de certains (autres) facteurs de composition dans l'image du morphisme  $(G : \Lambda^1) \rightarrow (F : \Lambda^1)$  induit par l'inclusion. Après une brève partie formelle (§ 10.4.1), on utilise les résultats des sections précédentes pour obtenir un énoncé assez technique (proposition 10.4.18), mais qui s'appliquera à tous les  $\bar{D}(2)$ -modules simples.

Dans la dernière section, on examine d'abord les facteurs de composition des deux foncteurs de Powell associés aux représentations simples de  $GL_2$  (§ 10.5.1), puis aux  $\bar{D}(2)$ -modules finis associés aux foncteurs de Weyl (§ 10.5.2). On applique enfin la section 10.4 pour obtenir les résultats sur la structure des  $\bar{G}(2)$ -comodules mentionnés précédemment.

Comme le suggère la section 10.1, nombre de considérations de ce chapitre ne sont pas spécifiques aux  $\bar{G}(2)$ -comodules. On peut ainsi redémontrer le théorème 9.1.1 par la technique du paragraphe 10.5.3. Le cas des  $\bar{G}(n)$ -comodules, pour  $n > 2$ , pose des problèmes profonds, dont la difficulté réside pour une grande part dans les lacunes des connaissances *globales* sur les représentations des groupes linéaires. De fait, l'étape la plus difficile à généraliser est la détection de bons facteurs de composition dans les foncteurs de Powell. Ces écueils sont analogues à ceux que l'on rencontre en étudiant la  $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotence pour  $n > 2$  ; nous pensons ainsi que les idées conceptuelles des chapitres 9 et 10 sont toutes deux nécessaires pour progresser sur la conjecture artinienne.

Dans les raisonnements portant sur les facteurs de composition de produits tensoriels, nous emploierons fréquemment la définition et la proposition suivantes.

**Définition 10.0.1.** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de longueurs respectives  $n$  et  $r$ . Nous appellerons *partition concaténée* de  $\lambda$  et  $\mu$  la partition obtenue en réordonnant la suite d'entiers  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_r)$  ; elle sera notée  $(\lambda, \mu)$ .

**Proposition 10.0.2.** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des partitions régulières telles que la partition  $(\lambda, \mu)$  soit régulière. Alors  $m_{(\lambda, \mu)}(S_\lambda \otimes S_\mu) = 1$ .

Cette proposition est le théorème 6.17.2 de [Kuh94b] (on prendra garde au fait que Kuhn emploie des conventions différentes des nôtres dans l'indexation des foncteurs simples de  $\mathcal{F}$ ).

## 10.1 Le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$

**Notation 10.1.1.** Nous désignerons par  $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  le groupe abélien  $\mathbb{Z}^{\mathfrak{p}}$  produit de copies de  $\mathbb{Z}$  indexées par les partitions régulières.

Pour toute partition régulière  $\lambda$ , la fonction  $m_\lambda : \text{Ob } \mathcal{F}^{tf} \rightarrow \mathbb{Z}$  est *additive* en ce sens que si  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  est une suite exacte courte de  $\mathcal{F}$ , alors  $m_\lambda(B) = m_\lambda(A) + m_\lambda(C)$ . Elle induit donc un morphisme de groupes, encore noté  $m_\lambda$  par abus, de  $G_0^{tf}(\mathcal{F})$  vers  $\mathbb{Z}$ .

**Notation 10.1.2.** Nous noterons, dans cette section,  $j_G : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  le morphisme de groupes dont les composantes sont données par les  $m_\lambda$  ( $\lambda \in \mathfrak{p}$ ). Nous l'appellerons *morphisme canonique*.

*Remarque 10.1.3.* La composée  $\mathbb{Z}[\mathfrak{p}] \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_G} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}}$  (où le premier morphisme est induit par l'inclusion  $\text{Ob } \mathcal{F}^f \hookrightarrow \text{Ob } \mathcal{F}^{tf}$ ) coïncide avec l'inclusion canonique.

Le foncteur  $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$  est exact, respecte la structure tensorielle, en prenant à la source le produit tensoriel total  $\widehat{\otimes}$ , et transforme un objet fini de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$  en un objet de type fini de  $\mathcal{F}$ . Par conséquent, il induit un morphisme d'anneaux  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F})$ . Nous noterons encore, par abus,  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  le morphisme de groupes composé du morphisme précédent et du morphisme canonique  $j_G : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ .

Le lemme qui suit fait usage des notations de la définition 5.4.13 et de l'exemple 5.4.14.

**Lemme 10.1.4.** *Soient  $n > 0$  et  $i \geq 0$  des entiers et  $\lambda$  une partition régulière telle que  $\lambda_1 = n$ . Si  $\lambda = \langle n \rangle$ , alors  $m_{\langle n \rangle + i}(Q_\lambda) = 1$ , sinon  $m_{\langle n \rangle + i}(Q_\lambda) = 0$ .*

*Démonstration.* Notons  $f_\lambda(i) = m_{\langle n \rangle + i}(Q_\lambda)$ . Le lemme découle des quatre points suivants.

1. La fonction  $f_\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est décroissante pour toute partition régulière  $\lambda$  telle que  $\lambda_1 = n$ .
2. On a  $f_\lambda(0) = 1$  si  $\lambda = \langle n \rangle$ , 0 sinon.
3. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $m_{\langle n \rangle + i}(P_{E_n}) > 0$ .
4. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $m_{\langle n \rangle + i}(P_{E_n})$  est une combinaison linéaire des  $f_\lambda(i)$ ,  $\lambda$  parcourant les partitions régulières telles que  $\lambda_1 = n$ .

On commence par remarquer que si  $\mu$  est une partition régulière telle que  $\mu_1 < n$ , alors le foncteur de Powell  $Q_\mu$ , qui est un quotient de  $P^{\otimes \mu_1}$ , n'a pas de facteur de composition  $S_\nu$ , si  $\nu$  est une partition régulière de longueur  $n$ .

Comme le noyau de l'épimorphisme  $\pi_{n, \rho_n(R_\lambda)} : \widetilde{\nabla}_n Q_\lambda \rightarrow Q_\lambda$  de la section 9.3 admet une filtration finie dont les quotients sont des foncteurs de ce type (cf. §9.4), on a  $f_\lambda(i) = m_{\langle n \rangle + i}(\widetilde{\nabla}_n Q_\lambda)$ . Mais  $m_{\langle n \rangle + i}(\widetilde{\nabla}_n Q_\lambda) \geq m_{\langle n \rangle + i + 1}(Q_\lambda)$  par les propositions 9.2.9 et 9.2.6. 1, d'où le premier point.

Le second vient des égalités

$$f_\lambda(0) = \dim \text{hom}_{\mathcal{F}}(Q_{\langle n \rangle}, Q_\lambda) = \dim \text{hom}_{GL_n}(R_{\langle n \rangle}, R_\lambda)$$

(cf. [Pow98c]).

Quant au troisième, c'est une conséquence du théorème 4.2.55 (page 111).

Le dernier provient de ce que  $P_{E_n} \simeq \varpi(P_{E_n}^{surj})$  admet une filtration finie dont les quotients sont des foncteurs de Powell  $Q_\mu$  avec  $\mu_1 \leq n$  et de la remarque précédente sur les  $Q_\mu$  pour  $\mu_1 < n$ .  $\square$

*Remarque 10.1.5.* Cette section utilise lourdement certaines propriétés de la représentation de Steinberg. On pourra consulter [Hum87] pour un survol des propriétés de cette représentation. Dans [MP83], on trouvera également un rappel de propriétés de la représentation de Steinberg (§2), et des applications topologiques.

**Lemme 10.1.6.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'endomorphisme du groupe de Grothendieck  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n] \mathbf{Mod})$  induit par le produit tensoriel par la représentation de Steinberg  $R_{\langle n \rangle}$  est injectif.*

*Démonstration.* D'après un théorème de Ballard et Lusztig, l'idéal de l'anneau  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$  engendré par  $R_{<n>}$  est égal à l'image canonique de  $K_0(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$  dans  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$ . Pour une démonstration de ce résultat, voir [CR87], chapitre 8, théorème 72.10 (la proposition 9.3 de cet ouvrage montre que les groupes linéaires sur  $\mathbb{F}_2$  vérifient les hypothèses dudit théorème). On en déduit, par la théorie générale des représentations modulaires (cf. théorème 21.22 de [CR90]), que le conoyau de l'endomorphisme de  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$  induit par le produit tensoriel par  $R_{<n>}$  est *fini*. Comme  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod})$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini, cet endomorphisme est injectif.  $\square$

**Notation 10.1.7.** Étant donnés des entiers  $n$  et  $i$ , nous noterons  $\mathfrak{p}_{n,i} = \{\lambda \in \mathfrak{p} \mid \lambda_n \geq i\}$  (où l'on convient que  $\lambda_n = +\infty$  si  $n \leq 0$ ), et  $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i} = \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i}}$ . C'est donc un quotient du groupe  $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ .

Si  $d$  est un autre entier, nous poserons  $\mathfrak{p}_{n,i,\leq d} = \{\lambda \in \mathfrak{p}_{n,i} \mid |\lambda| \leq d\}$  et  $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i,\leq d} = \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}}$ .

Nous noterons enfin  $\mathfrak{p}_{<i} = \{\lambda \in \mathfrak{p} \mid \lambda_1 < i\}$ ,  $\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} = \{\lambda \in \mathfrak{p}_{n,i} \mid l(\lambda) = n\}$  et  $\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}^{\leq n} = \mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \cap \mathfrak{p}_{n,i,\leq d}$ .

**Lemme 10.1.8.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme*

$$\alpha : \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<n+1}] \rightarrow G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \quad [\lambda] \mapsto [I_\lambda(E_n)]$$

*a un conoyau fini.*

*Démonstration.* Notons  $M = (M_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \mathfrak{p}_{<n+1}}$  la matrice définie par le fait que  $I_\lambda$  possède une filtration finie dont les sous-quotients sont les  $J_\mu$  apparaissant avec la multiplicité  $M_{\lambda,\mu}$ . L'analyse effectuée dans le § 4 de l'article [Pow98c] (où la matrice  $M$  est notée  $(\alpha_{\lambda,\mu})$ ) montre que  $M$  est une matrice inversible sur  $\mathbb{Q}$ , car il en est de même pour les matrices de Cartan des groupes finis  $GL_i$ .

Les colonnes de la matrice  $M^{-1}$  ont pour images par  $\alpha \otimes \mathbb{Q}$  les images des  $J_\lambda(E_n)$  (où  $\lambda \in \mathfrak{p}_{<n+1}$ ) dans  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \otimes \mathbb{Q}$ . Comme  $J_\lambda(E_n) \simeq R_\lambda$  si  $\lambda_1 = n$ , cela montre que le morphisme  $\alpha \otimes \mathbb{Q}$  est surjectif, d'où la conclusion.  $\square$

**Notation 10.1.9.** Dans la suite de cette section, si  $\alpha$  est une partition régulière telle que  $\alpha_1 = n$ , nous noterons  $P_\alpha^{GL_n}$  la couverture projective de  $R_\alpha$  dans  $\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}$ .

Nous désignerons par  $\Delta_\mu$ , pour  $\mu \in \mathfrak{p}$ , l'endofoncteur exact  $(\cdot : I_\mu)$  de  $\mathcal{F}$ . C'est un facteur direct de  $\Delta_{E_n}$ , où  $n = \mu_1$ .

**Proposition 10.1.10.** *Le morphisme*

$$\beta : G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{<n+1}} \quad [M] \mapsto (m_{<n>+i}(\Delta_\mu \omega_n \rho_n(M)))_\mu$$

*est injectif.*

*Démonstration.* Par les propositions 8.4.10 et 8.4.4, il existe un épimorphisme

$$\Delta_\mu Q_\lambda \rightarrow \omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(I_\mu))$$

dont le noyau est l'image par  $\omega_{<n-1}$  d'un foncteur pseudo-constant de  $\mathcal{F}_{Gr,\leq n-1}^f$ . On en déduit (cf. démonstration du lemme 10.1.4) l'égalité

$$m_{<n>+i}(\Delta_\mu Q_\lambda) = m_{<n>+i}(\omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(I_\mu))).$$

On a  $(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(I_\mu)) \simeq \rho_n(R_\lambda \otimes I_\mu(E_n)^*)$  par les propositions 8.4.11 et 3.2.8. Le lemme 10.1.4 donne alors

$$m_{<n>+i}(\Delta_\mu Q_\lambda) = m_{R_{<n>}}(R_\lambda \otimes I_\mu(E_n)^*).$$

On a donc, par la proposition 5.3.19,

$$m_{<n>+i}(\Delta_\mu Q_\lambda) = \dim \operatorname{hom}_{GL_n}(R_{<n>}, R_\lambda \otimes I_\mu(E_n)^*).$$

Le lemme 10.1.8 montre alors que le noyau du morphisme  $\beta$  est inclus dans le noyau du morphisme

$$G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \dim \operatorname{hom}_{GL_n}(R_{<n>}, R_\lambda \otimes M^*)$$

pour tout  $GL_n$ -module  $M$ .

Or on a

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{hom}_{GL_n}(R_{\langle n \rangle}, R_\lambda \otimes (P_\mu^{GL_n})^*) &= \dim \operatorname{hom}_{GL_n}(R_{\langle n \rangle} \otimes P_\mu^{GL_n}, R_\lambda) \\ &= \dim \operatorname{hom}_{GL_n}(P_\mu^{GL_n}, R_\lambda \otimes R_{\langle n \rangle}) = m_{R_\mu}(R_\lambda \otimes R_{\langle n \rangle}), \end{aligned}$$

où l'on a fait usage de la proposition 3.2.8, et utilisé l'auto-dualité et la projectivité de la représentation de Steinberg (cf. [Jan03], chapitre 10, (10.1) et (10.2)).

L'injectivité du morphisme  $\beta$  découle maintenant du lemme 10.1.6  $\square$

**Lemme 10.1.11.** *Soient  $n$  et  $i$  deux entiers positifs. Il existe un entier  $d$  tel que le morphisme de groupes*

$$\gamma : G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \xrightarrow{(\omega_n \rho_n)_*} G_0^{tf}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_G} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n, \leq d}}$$

est injectif.

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \mathfrak{p}_{\langle n+1 \rangle}$ . Pour tout  $GL_n$ -module fini  $M$ , on a

$$m_{\langle n \rangle_{+i}}(\Delta_\mu \omega_n \rho_n(M)) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{p}} m_{\langle n \rangle_{+i}}(\Delta_\mu S_\lambda) m_\lambda(\omega_n \rho_n(M))$$

(somme dont seul un nombre fini des termes sont non nuls). Si  $\lambda \in \mathfrak{p}$  est telle que  $\lambda \vdash \omega_n \rho_n(M)$  et  $\langle n \rangle_{+i} \vdash \Delta_\mu S_\lambda$ , on a  $l(\lambda) \leq n$  parce que  $\omega_n \rho_n(M)$  s'obtient par extensions de quotients de  $P_{E_n}$ ; en appliquant  $(\widetilde{\nabla}_n)^i$  à la relation  $\langle n \rangle_{+i} \vdash \widetilde{\Delta}^n S_\lambda$ , on obtient, compte-tenu des propositions 9.2.6 et 9.2.9,  $(\widetilde{\nabla}_n)^i S_\lambda \neq 0$ , puis  $\lambda_n \geq i$ . Par ailleurs, comme  $l(\lambda) = n$ , si  $\nu \vdash \widetilde{\Delta}^n S_\lambda$  et  $l(\nu) = n$ , alors  $|\nu| \geq |\lambda| - n^2$  grâce à la proposition 4.3.1.2 de [Pow00b] et au théorème 4.2.55, donc  $n(n+1)/2 + ni = |\langle n \rangle_{+i}| \geq |\lambda| - n^2$ .

Par conséquent, si  $d \geq n(n+1)/2 + ni + n^2$ , on peut compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n, \leq d}} \\ \beta \downarrow & \swarrow \text{---} & \\ \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{\langle n+1 \rangle}} & & \end{array}$$

où  $\beta$  est le morphisme de la proposition 10.1.10. L'injectivité de  $\beta$  donnée par cette proposition implique donc celle de  $\gamma$ .  $\square$

**Lemme 10.1.12.** *Pour tous entiers  $n, i \geq 0$ , le morphisme de groupes*

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{\langle i \rangle}] \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}) \rightarrow G_0^f(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}]$$

composé de l'inclusion déduite de l'isomorphisme  $G_0^f(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}]$ , du produit de l'anneau  $G_0^f(\mathcal{F})$  et de la projection  $G_0^f(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}]$  déduite de l'inclusion  $\mathfrak{p}_{n,i} \hookrightarrow \mathfrak{p}$ , est injectif.

*Démonstration.* Si  $\lambda \in \mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n}$  et  $\mu \in \mathfrak{p}_{\langle i \rangle}$ , alors la partition  $(\lambda, \mu)$  est régulière et appartient à  $\mathfrak{p}_{n,i}$ . De plus, la fonction  $f : \mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{\langle i \rangle} \rightarrow \mathfrak{p}_{n,i}$  associant aux partitions  $\lambda$  et  $\mu$  la partition  $(\lambda, \mu)$  est injective, ce qui permet d'identifier cette partition au couple  $(\lambda, \mu)$ .

Soit  $a : \mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{\langle i \rangle} \rightarrow \mathbb{N}$  une bijection telle que  $a(\alpha) < a(\beta)$  si  $|\alpha| < |\beta|$  ou  $|\alpha| = |\beta|$  et  $\alpha > \beta$ , et définissons une matrice  $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  par l'égalité  $u_{a(\lambda,\mu), a(\nu)} = m_\nu(S_\lambda \otimes S_\mu)$  : c'est la matrice dans la base canonique (indexée par  $a$ ) du morphisme

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{\langle i \rangle}] \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{\langle i \rangle}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{\langle i \rangle}]$$

où la flèche centrale est celle de l'énoncé et le dernier épimorphisme est induit par  $f$ .

Le théorème 4.2.55 montre que la matrice  $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  est triangulaire, et la proposition 10.0.2 que ses coefficients diagonaux valent 1, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 10.1.13.** *Soient  $n$  et  $i$  des entiers naturels. Le morphisme*

$$G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}) \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \xrightarrow{\omega_*} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n, i}$$

*est injectif.*

*Démonstration.* Soient  $j \in \mathbb{N}$  et  $G(j)_n$  le sous-groupe de  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n})$  engendré par les classes d'objets simples de degré au plus  $j$ ; nous noterons simplement  $G(j)$  pour  $G(j)_0$ . Comme  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n})$  est la réunion croissante des sous-groupes  $G(j)_n$ , il suffit de montrer que la restriction à  $G(j)_n$  du morphisme de l'énoncé est injective pour tout  $j$ .

Les propositions 8.1.22 et 8.2.10 (ou le corollaire 8.2.12) montrent que le foncteur  $\xi_n$  induit un isomorphisme

$$G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \otimes G(j) \xrightarrow{\simeq} G(j)_n.$$

Par la proposition 6.3.7.4, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \otimes G(j) & \hookrightarrow & G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}) \\ (\omega_n \rho_n)_* \otimes G(j) \downarrow & & \downarrow (\omega_n)_* \\ G_0^{tf}(\mathcal{F}) \otimes G(j) & \longrightarrow & G_0^{tf}(\mathcal{F}) \\ j_G \otimes G(j) \downarrow & & \downarrow j_G \\ \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \otimes G(j) & & \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n, i, \leq d}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{< i}] & \hookrightarrow & \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n, i} \end{array}$$

pour  $i > j$  et un entier  $d$  convenable, dans lequel :

- les flèches horizontales sont induites par le produit tensoriel — celle du bas est injective par le lemme 10.1.12;
- les flèches verticales inférieures sont induites par les projections canoniques et l'inclusion  $G(j) \subset \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{< i}]$  déduite de l'inégalité  $i > j$  (on note que  $\mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n, i, \leq d}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{< i}] \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n, i, \leq d}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{< i}]$  par finitude des ensembles  $\mathfrak{p}_{n, i, \leq d}^{\leq n}$  et  $\mathfrak{p}_{< i}$ );
- l'entier  $d$  est choisi, conformément au lemme 10.1.11, pour que la composée verticale de gauche soit injective.

La composée  $G_0^f(\mathbb{F}_2[GL_n]\mathbf{Mod}) \otimes G(j) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n, i}$  obtenue en suivant le diagramme est donc injective (suivre la moitié gauche); elle s'identifie à la restriction à  $G(j)_n$  du morphisme de l'énoncé (suivre la moitié droite). Celle-ci est donc injective si  $i > j$ , donc pour tout  $i$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Théorème 10.1.14.** *Le morphisme de groupes  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  est injectif.*

*Démonstration.* Il suffit d'établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la composée

$$G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}) \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \xrightarrow{\omega_*} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$$

est injective, ou encore que pour tout  $n$  et tout  $j \in \mathbb{N}$ , la restriction  $f_{n, j}$  de ce morphisme au sous-groupe  $G(j)_{\leq n}$  de  $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n})$  engendré par les classes de foncteurs simples de degré au plus  $j$  est injective.

Pour  $i > j$ , la composée  $G(j)_{\leq n-1} \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n, i}$  est nulle (si  $\lambda \vdash P^{\otimes k} \otimes F$  avec  $k < n$  et  $\deg F < i$ , alors  $\lambda \notin \mathfrak{p}_{n, i}$ ). Le lemme précédent permet d'en déduire que le noyau de  $f_{n, j}$  est inclus dans  $G(j)_{\leq n-1}$ , d'où  $\ker f_{n, j} = \ker f_{n-1, j}$ . On conclut par récurrence sur  $n$ .  $\square$

**Corollaire 10.1.15.** – Le morphisme d’anneaux  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{G_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F})$  est injectif.  
 – Si la conjecture artinienne extrêmement forte est vérifiée, c’est un isomorphisme, et le morphisme de groupes  $j_G : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$  est injectif.

*Démonstration.* Comme la conjecture artinienne extrêmement forte implique que le morphisme  $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{G_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F})$  est surjectif, la conclusion découle du théorème précédent.  $\square$

## 10.2 Les foncteurs $(\cdot : \Lambda^1)$ et $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$

Nous exposons dans cette section quelques propriétés générales des endofoncteurs  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  et  $(\cdot : \Lambda^1)$  de  $\mathcal{F}$ , qui jouent un rôle particulier parmi tous les foncteurs hom internes et de division par un objet fini. Ces foncteurs sont *duaux* : il existe un isomorphisme  $D(F : \Lambda^1) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, DF)$  naturel en l’objet  $F$  de  $\mathcal{F}$  grâce à la proposition 3.2.2.4, puisque le foncteur  $\Lambda^1$  est auto-dual. De ce fait, nous donnerons souvent seulement des énoncés relatifs à l’un de ces foncteurs, un énoncé « dual » s’en déduisant pour l’autre.

**Proposition 10.2.1.** Les endofoncteurs  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  et  $(\cdot : \Lambda^1)$  de  $\mathcal{F}$  sont des dérivations en ce sens qu’on a des isomorphismes

$$\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F \otimes G) \simeq (\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \otimes G) \oplus (F \otimes \mathbf{Hom}(\Lambda^1, G))$$

et

$$(F \otimes G : \Lambda^1) \simeq ((F : \Lambda^1) \otimes G) \oplus (F \otimes (G : \Lambda^1))$$

naturels en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* Cela résulte des propositions 4.2.30 et 3.3.23.  $\square$

Dans la suite, nous noterons souvent  $(F \otimes G : \Lambda^1) \rightarrow (F : \Lambda^1) \otimes G$  sans plus de précision la projection naturelle déduite de cette proposition, de même pour le foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ .

**Proposition 10.2.2.** Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $A$  un objet homogène de degré  $k$ . Il existe un isomorphisme naturel  $\mathbf{Hom}(A, p_n(F)) \simeq p_{n-k}(\mathbf{Hom}(A, F))$  pour tout entier  $n$ .

*Démonstration.* C’est une conséquence formelle de l’adjonction entre le foncteur  $p_n$  et l’inclusion  $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \mathcal{F}$  et de l’isomorphisme naturel  $p_n(A \otimes B) \simeq A \otimes p_{n-k}(B)$  (cf. proposition 4.2.21).  $\square$

**Corollaire 10.2.3.** Il existe un isomorphisme  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n(F)) \simeq p_{n-1}(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F))$  naturel en  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$  pour tout entier  $n$ .

**Lemme 10.2.4.** Soit  $F$  un foncteur polynomial non nul de degré  $d$ . Il existe un morphisme non nul de  $T^d$  vers  $F$ .

*Démonstration.* Le foncteur  $\Delta^d F$  est non nul, et constant car  $\Delta^{d+1} F = 0$ . Il existe donc un morphisme non nul de  $\bar{P}^{\otimes d}$  vers  $F$ . Comme  $\deg F \leq d$ , il se factorise par  $\bar{P}^{\otimes d} \rightarrow q_d(\bar{P}^{\otimes d}) \simeq T^d$ , d’où le lemme.  $\square$

**Lemme 10.2.5.** Si  $F$  est un foncteur fini tel que  $F(0) = 0$  et  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) = 0$ , alors  $F = 0$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{hom}(T^n, F) \simeq \text{hom}(T^{n-1}, \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)) = 0$ . On conclut par le lemme précédent.  $\square$

*Remarque 10.2.6.* Le théorème de plongement de Kuhn montre aussitôt qu’un foncteur fini  $F$  tel que  $\mathbf{Hom}(\Gamma^n, F) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est nul. Le lemme dit qu’il suffit d’avoir cette propriété pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , en utilisant un résultat beaucoup moins fin que le théorème de plongement de Kuhn. Cela illustre que le foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  contient en quelque sorte toute l’information intéressante donnée par les différents foncteurs hom internes avec un foncteur fini.



**Proposition 10.2.7.** *Soit  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}$ . Le foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, X)$  est nul si et seulement si  $p_\infty(\overline{\Delta^n X}) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Remarque 10.2.8.* La condition  $p_\infty(\overline{F}) = 0$  signifie que le foncteur  $F$  n'a pas de sous-foncteur fini non constant.

*Démonstration.* Supposons  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, X) = 0$ . Le lemme 10.2.5 et l'exactitude à gauche du foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  impliquent que  $\overline{X}$  n'a pas de sous-objet fini non nul. La commutation de  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  et  $\Delta^n$  montre alors qu'il en est de même pour les  $\overline{\Delta^n X}$ .

Réciproquement, si les  $\overline{\Delta^n X}$  sont sans sous-objet fini non nul, il en est de même des  $\overline{\Delta_V X}$  ( $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ), donc  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, X)(V) \simeq \text{hom}(\Lambda^1, \Delta_V X) = 0$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Cette proposition fournit les importants corollaires suivants.

**Corollaire 10.2.9.** *Soit  $F$  un foncteur fini. Le foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)$  est nul si et seulement si  $F$  est constant; si  $F$  est non constant, on a  $\deg \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) = \deg F - 1$ .*

**Corollaire 10.2.10.** *Pour tout foncteur projectif de type fini  $X$  de  $\mathcal{F}$ , on a  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, X) = 0$ .*

*Démonstration.* Par le corollaire 4.2.35, un foncteur projectif tf n'a pas de sous-objet fini non constant. Comme le foncteur différence  $\Delta$  préserve les objets projectifs tf, la proposition 10.2.7 donne la conclusion.  $\square$

**Corollaire 10.2.11.** *Si  $X$  est un objet projectif tf de  $\mathcal{F}$ , les endofoncteurs  $\cdot \otimes X$  et  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  de  $\mathcal{F}$  commutent à isomorphisme canonique près.*

*Dualement, si  $Y$  est un objet injectif co-tf de  $\mathcal{F}$ , les endofoncteurs  $\cdot \otimes Y$  et  $(\cdot : \Lambda^1)$  de  $\mathcal{F}$  commutent à isomorphisme canonique près.*

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence de la proposition 10.2.1 et du corollaire 10.2.10.  $\square$

Nous donnons maintenant une propriété des foncteurs  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  et  $(\cdot : \Lambda^1)$  qui s'avère fondamentale pour effectuer des calculs sur des foncteurs finis.

**Proposition 10.2.12.** *Il existe des suites exactes naturelles en  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$*

$$0 \rightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \xrightarrow{\alpha_F} \Delta F \rightarrow \Delta^2 F \quad (10.1)$$

et

$$\Delta^2 F \rightarrow \Delta F \xrightarrow{\beta_F} (F : \Lambda^1) \rightarrow 0. \quad (10.2)$$

*De plus, si l'on note  $v_F = \beta_F \alpha_F : \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \rightarrow (F : \Lambda^1)$ , on a les résultats suivants.*

1. *Si  $F$  est de degré  $n$ , alors*

$$\ker \beta_F \subset p_{n-2}(\Delta F) \quad \text{et} \quad \ker v_F \subset p_{n-2}(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n-1}F).$$

2. *Si  $F$  est homogène,  $v_F$  est injectif.*

3. *Si  $F$  est cohomogène,  $v_F$  est surjectif.*

4. *Si  $F$  est homogène et cohomogène de degré  $n$ ,  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)$  et  $(F : \Lambda^1)$ , qui sont naturellement isomorphes via  $v_F$ , s'identifient à  $p_{n-1}^{\text{hom}}(\Delta F)$ , qui est facteur direct de  $\Delta F$ . On rappelle que la notation  $p_k^{\text{hom}}$  a été introduite dans la définition 4.2.20 par (4.4).*

*Démonstration.* On utilise la suite exacte usuelle

$$\overline{P}^{\otimes 2} \rightarrow \overline{P} \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow 0$$

et sa duale pour obtenir les suites exactes (10.1) et (10.2). L'assertion 1 découle ensuite du corollaire 10.2.3 et de ce que  $\deg \Delta^2 F = \deg F - 2$  si cet entier est positif,  $-\infty$  sinon; 2 en résulte et 3 se déduit de 2 par dualité.

Si  $F$  est homogène et cohomogène, alors  $v_F$  est un isomorphisme par 2 et 3, d'où, par définition de ce morphisme, le scindement  $\Delta F \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \oplus \ker \beta_F$ . Comme on a  $\ker \beta_F \subset p_{n-2}(\Delta F)$  et  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \cap p_{n-2}(\Delta F) = 0$ , puisque le foncteur  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)$  est homogène, la composée  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \hookrightarrow \Delta F \twoheadrightarrow p_{n-1}^{\text{hom}}(\Delta F)$  est un isomorphisme, ce qui achève de prouver 4.  $\square$

**Notation 10.2.13.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  un  $r$ -uplet d'entiers et  $1 \leq i \leq r$ . On définit  $\lambda_i^-$  (resp.  $\lambda_i^+$ ) par  $(\lambda_i^-)_j = \lambda_j$  si  $j \neq i$  et  $(\lambda_i^-)_i = \lambda_i - 1$  (resp.  $(\lambda_i^+)_j = \lambda_j$  si  $j \neq i$  et  $(\lambda_i^+)_i = \lambda_i + 1$ ).

Pour alléger ces notations, que nous étendrons de façon évidente à une suite infinie  $\lambda$  d'entiers stationnant en 0, nous simplifierons des écritures du type  $(\lambda_a^+)_b^-$  en  $\lambda_{a,b}^{+,-}$ .

**Corollaire 10.2.14.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une suite finie d'entiers. Les foncteurs  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^\lambda)$  et  $(\Lambda^\lambda : \Lambda^1)$  sont isomorphes à  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \Lambda^{\lambda_i^-}$ .

*Démonstration.* Le corollaire 10.2.1 montre qu'il suffit de vérifier l'assertion pour  $r = 1$ , auquel cas elle découle de la dernière assertion de la proposition précédente, compte-tenu de l'isomorphisme  $\Delta \Lambda^n \simeq \Lambda^{n-1}$ .  $\square$

Nous terminons cette section par un calcul explicite.

*Exemple 10.2.15.* Nous allons déterminer  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I})$  et  $(p_n \bar{I} : \Lambda^1)$ . On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une suite exacte

$$0 \rightarrow p_{n-1}I \rightarrow p_n I \rightarrow \Lambda^n \rightarrow 0$$

De plus,  $\Lambda^k$  est le cosocle de  $p_k \bar{I}$ , de sorte que, par la proposition précédente,  $v_{p_k \bar{I}}$  est surjectif. On note aussi qu'on a des morphismes  $p_{n-1}I \otimes \Lambda^1 \xrightarrow{a_n} p_n \bar{I}$ , obtenus en appliquant  $p_n$  à l'unique morphisme non nul  $I \otimes \Lambda^1 \rightarrow \bar{I}$ , tels que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccccc} p_{n-1}I \otimes \Lambda^1 & \xrightarrow{\quad} & p_n I \otimes \Lambda^1 & \twoheadrightarrow & \Lambda^n \otimes \Lambda^1 \\ a_n \downarrow & & \downarrow a_{n+1} & & \downarrow \\ p_n \bar{I} & \xrightarrow{\quad} & p_{n+1} \bar{I} & \twoheadrightarrow & \Lambda^{n+1} \end{array}$$

On en déduit par adjonction des morphismes  $p_{n-1}I \xrightarrow{b_n} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I})$  faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} p_{n-1}I & \xrightarrow{\quad} & p_n I & \twoheadrightarrow & \Lambda^n \\ b_n \downarrow & & \downarrow b_{n+1} & & \parallel \\ \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I}) & \twoheadrightarrow & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^{n+1}). \end{array}$$

On note enfin  $c_n$  le morphisme  $(p_n \bar{I} : \Lambda^1) \twoheadrightarrow (\Lambda^n : \Lambda^1) \simeq \Lambda^{n-1}$ .

**Proposition 10.2.16.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les flèches  $b_n$  et  $c_n$  sont des isomorphismes et le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I}) & \xleftarrow[\cong]{b_n} & p_{n-1}I \\ v_{p_n I} \downarrow & & \downarrow \\ (p_n \bar{I} : \Lambda^1) & \xrightarrow[\cong]{c_n} & \Lambda^{n-1} \end{array}$$

Par dualité, on a aussi des isomorphismes  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, q_n(\bar{P})) \simeq \Lambda^{n-1}$  et  $(q_n(\bar{P}) : \Lambda^1) \simeq q_{n-1}(P)$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , l'assertion est évidente. Pour déduire l'assertion pour  $n + 1$  de l'assertion pour  $n$ , on considère le diagramme commutatif aux

lignes exactes suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
p_{n-1}I & \xrightarrow{\quad} & p_n I & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^n \\
\downarrow b_n \simeq & & \downarrow b_{n+1} & & \parallel \\
\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^{n+1}) \\
\downarrow v_{p_n \bar{I}} & & \downarrow v_{p_{n+1} \bar{I}} & & \parallel \\
(p_n \bar{I} : \Lambda^1) & \xrightarrow{\quad} & (p_{n+1} \bar{I} : \Lambda^1) & \xrightarrow{c_{n+1}} & \Lambda^n \\
\downarrow c_n \simeq & & & & \\
\Lambda^{n-1} & & & & 
\end{array}$$

La commutation du carré en bas à droite entraîne que la flèche horizontale centrale de droite est surjective, ce qui permet de conclure quant à  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I})$  en appliquant le lemme des cinq à la partie supérieure du diagramme.

Maintenant, il suffit d'établir la nullité de la flèche  $(p_n \bar{I} : \Lambda^1) \rightarrow (p_{n+1} \bar{I} : \Lambda^1)$  induite par l'inclusion. Son image est de degré au plus  $n - 1$  et sans terme constant (pour  $n = 1$ , cela vient de ce que la suite exacte  $0 \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow p_2 \bar{I} \rightarrow \Lambda^2 \rightarrow 0$  est non scindée; sinon cela découle de l'hypothèse de récurrence), mais c'est aussi un quotient de  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I}) \simeq p_n I$ ; du fait que  $p_n \bar{I}$  est cohomogène de degré  $n$  (son cosocle étant  $\Lambda^n$ ), cela entraîne la nullité de ladite image.  $\square$

## 10.3 Préliminaires liés aux représentations des groupes symétriques

Cette section expose des résultats techniques (qui sont presque tous très classiques, au moins en théorie des représentations des groupes symétriques) nécessaires aux investigations sur les facteurs de composition de  $\bar{G}(2)$ -comodules que nous mènerons dans les sections suivantes. Nos références bibliographiques principales sont [Jam78] et [JK81].

Le paragraphe 10.3.1 explique en quoi les foncteurs de la section 10.2 sont naturellement liés aux groupes symétriques. Le paragraphe 10.3.2 introduit un certain nombre de morphismes, qui apparaîtront notamment dans les constructions du § 10.5.2, et dont les propriétés de base se démontrent aisément à l'aide des générateurs semi-standard des foncteurs de Weyl, dont on détermine explicitement la division par  $\Lambda^1$  au § 10.3.3. Enfin, le paragraphe 10.3.4 présente une classe de partitions, nommées *Weyl-séparantes*, dont l'intérêt relatif à la division par  $\Lambda^1$  deviendra manifeste au § 10.4.2; nous montrons que les partitions dont la parité des termes est alternée sont Weyl-séparantes.

Nous utiliserons abondamment l'ordre partiel sur les partitions introduit dans la définition 4.2.46, ainsi que différentes autres notations du paragraphe 4.2.3.

### 10.3.1 Liens formels entre les endofoncteurs $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ et $(\cdot : \Lambda^1)$ de $\mathcal{F}$ et les représentations des groupes symétriques

**Convention 10.3.1.** Dans ce paragraphe,  $n$  désigne un entier naturel. Nous désignerons par  $\text{Res} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]}$  le foncteur de restriction des scalaires, et par  $\text{Ind} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$  le foncteur d'induction.

Les foncteurs  $r_n$  et  $s_n$  qui apparaissent ci-après sont ceux du paragraphe 4.2.3.

**Proposition 10.3.2.** *Pour tout entier  $n$ , le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n & \xrightarrow{\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)} & \mathcal{F}_{n-1} \\ s_n \downarrow & & \downarrow s_{n-1} \\ \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \end{array} \quad (10.3)$$

commute à isomorphisme naturel près.

Le même résultat vaut en remplaçant  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  par  $(\cdot : \Lambda^1)$  ou par  $\Delta$ .

*Démonstration.* On établit l'assertion relative à  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ . Les autres s'en déduisent par la proposition 10.2.12.

Grâce aux adjonctions de la proposition 4.2.42 et entre Res et Ind, il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n & \xleftarrow{\cdot \otimes \Lambda^1} & \mathcal{F}_{n-1} \\ r_n \uparrow & & \uparrow r_{n-1} \\ \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xleftarrow{\text{Ind}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \end{array}$$

commute à isomorphisme naturel près.

En effet, les propriétés d'associativité du produit tensoriel procurent dans  $\mathcal{F}$  un isomorphisme

$$(M \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \mathbb{F}_2[\Sigma_n]) \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} T^n \simeq (M \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} T^{n-1}) \otimes \Lambda^1$$

naturel en l'objet  $M$  de  $\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]}$ .  $\square$

La proposition 10.3.2 montre en quoi les foncteurs  $(\cdot : \Lambda^1)$ ,  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  et  $\Delta$  généralisent le foncteur de restriction. L'énoncé qui suit suggère que le foncteur  $(\cdot : \Lambda^1)$  — et donc aussi, par dualité,  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  — en constitue une généralisation plus « fidèle » que le foncteur différence.

**Proposition 10.3.3.** *Pour tout entier  $n$ , le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \\ r_n \downarrow & & \downarrow r_{n-1} \\ \mathcal{F}_n & \xrightarrow{(\cdot : \Lambda^1)} & \mathcal{F}_{n-1} \end{array} \quad (10.4)$$

commute à isomorphisme naturel près.

*Démonstration.* La tensorisation par  $\Lambda^1$  procure un monomorphisme  $\Sigma_{n-1}$ -équivariant  $\text{hom}(T^{n-1}, F) \hookrightarrow \text{hom}(T^n, F \otimes \Lambda^1)$  naturel en l'objet  $F$  de  $\mathcal{F}_{n-1}$ . C'est un isomorphisme car l'application linéaire sous-jacente est inverse des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$s_n(F \otimes \Lambda^1) = \text{hom}_{\mathcal{F}}(T^n, F \otimes \Lambda^1) \simeq \text{hom}((T^n : \Lambda^1), F) \simeq \text{hom}(T^{n-1}, F)^{\oplus n} \simeq \text{Ind}(s_{n-1}(F)).$$

Ainsi, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xleftarrow{\text{Ind}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \\ s_n \uparrow & & \uparrow s_{n-1} \\ \mathcal{F}_n & \xleftarrow{\cdot \otimes \Lambda^1} & \mathcal{F}_{n-1} \end{array}$$

commute à isomorphisme naturel près.

La commutativité du diagramme (10.4) s'en déduit par adjonction.  $\square$

*Exemple 10.3.4.* En prenant  $M = \mathbb{F}_2$ , on obtient  $(S^n : \Lambda^1) \simeq S^{n-1}$ . On en déduit par dualité  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Gamma^n) \simeq \Gamma^{n-1}$ .

On peut montrer que  $(\Gamma^n : \Lambda^1) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Gamma^{n-2^i}$ , et donc, dualement,  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S^n) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S^{n-2^i}$ ; cela illustre la nécessité de l'hypothèse d'homogénéité et de cohomogénéité dans la proposition 10.2.12. 4.

*Remarque 10.3.5.* – Il existe un diagramme commutatif dual de (10.4). Il s'obtient en remplaçant  $r$  par  $r'$  et  $(\cdot : \Lambda^1)$  par  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ .

– Les propositions 10.3.2 et 10.3.3 sont à rapprocher de la remarque 4.2.43.

### 10.3.2 Quelques lemmes techniques

**Définition 10.3.6.** Soient  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ,  $\lambda$  une partition de longueur  $r$  et  $v_1, \dots, v_{\lambda_1} \in V$ . L'élément *semi-standard associé à  $\lambda$*  et  $v_1, \dots, v_{\lambda_1}$  est l'élément de  $\Lambda^\lambda(V)$  défini par

$$s_\lambda^{st}(v_1, \dots, v_{\lambda_1}) = \bigotimes_{i=1}^r (v_1 \wedge \dots \wedge v_{\lambda_i}).$$

**Proposition 10.3.7.** Soient  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $\lambda$  une partition (régulière ou non). L'espace vectoriel  $W_\lambda(V)$  est le sous-espace de  $\Lambda^\lambda(V)$  engendré par les éléments semi-standard  $s_\lambda^{st}(v_1, \dots, v_{\lambda_1})$  pour  $v_1, \dots, v_{\lambda_1} \in V$ .

Cette propriété, pour laquelle nous renvoyons à [Jam78] (cf. aussi [PS98], § 2, pour le cas de  $\mathcal{F}$ ), permet de simplifier de façon appréciable certains calculs sur les foncteurs de Weyl. Ils permettent notamment d'exprimer ces foncteurs, définis comme *noyaux* de morphismes, comme des *images*. Cela interviendra de façon cruciale au paragraphe 10.5.2; les autres résultats ici présentés servent de préliminaires aux deux paragraphes suivants.

**Notation 10.3.8.** – Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux suites d'entiers stationnant en 0 (nous étendrons de façon évidente la notation au cas où l'une de ces suites, ou les deux, sont des suites finies), nous noterons  $pr_{\lambda, \mu}^\Lambda : \Lambda^\lambda \otimes \Lambda^\mu \rightarrow \Lambda^{\lambda+\mu}$  le morphisme

$$\Lambda^\lambda \otimes \Lambda^\mu \simeq \bigotimes_{i \geq 1} (\Lambda^{\lambda_i} \otimes \Lambda^{\mu_i}) \rightarrow \bigotimes_{i \geq 1} \Lambda^{\lambda_i + \mu_i} = \Lambda^{\lambda+\mu}$$

obtenu par produit tensoriel des produits  $\Lambda^{\lambda_i} \otimes \Lambda^{\mu_i} \rightarrow \Lambda^{\lambda_i + \mu_i}$ .

- Si  $\lambda$  est une partition, nous noterons  $W'_\lambda$  le noyau de la projection canonique  $W_\lambda \rightarrow q_{|\lambda|-1} W_\lambda$ .
- Si  $\lambda$  est une partition, nous noterons  $\lambda'$  la partition *duale*, définie par  $\lambda'_i = \text{Card} \{j \mid \lambda_j \geq i\}$ .

*Remarque 10.3.9.* 1. On a  $(\lambda')' = \lambda$  pour toute partition  $\lambda$ .

2. On a  $\text{deg}(W_\lambda/W'_\lambda) < |\lambda|$ . En particulier,  $W'_\lambda = W_\lambda$  si  $\lambda$  est régulière.

**Notation 10.3.10.** – Si  $r$  et  $n$  sont deux entiers positifs, nous noterons  $\underline{r}_n$  la partition (non régulière!) de  $rn$  constituée de  $n$  termes égaux à  $r$ .

- Soient  $\lambda$  une partition et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  une suite finie d'entiers naturels. Nous désignerons par  $\varphi_{\mu, \lambda}^\Lambda : \Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\lambda'_{+r}} \rightarrow \Lambda^{\mu+\lambda_1} \otimes \Lambda^\lambda$ , où  $\lambda'_{+r}$  est à comprendre comme  $(\lambda')_{+r}$ , le morphisme composé de l'inclusion  $\Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\lambda'_{+r}} \hookrightarrow \Lambda^\mu \otimes \bigotimes_{j=1}^{\lambda_1} T^{r+\lambda'_j}$  et du morphisme

$$\Lambda^\mu \otimes \bigotimes_{j=1}^{\lambda_1} T^{r+\lambda'_j} \xrightarrow{\varphi_{\mu, \lambda}^T} \Lambda^{\mu+\lambda_1} \otimes \Lambda^\lambda$$

donné sur les objets par

$$\bigotimes_{i=1}^r (a_1^i \wedge \dots \wedge a_{\mu_i}^i) \otimes \bigotimes_{j=1}^{\lambda_1} (u_1^j \otimes \dots \otimes u_r^j \otimes v_1^j \otimes \dots \otimes v_{\lambda_j}^j) \mapsto \bigotimes_{i=1}^r (u_i^1 \wedge \dots \wedge u_i^{\lambda_1} \wedge a_1^i \wedge \dots \wedge a_{\mu_i}^i) \otimes \bigotimes_{j=1}^{l(\lambda)} (v_j^1 \wedge \dots \wedge v_j^{\lambda_j}).$$

*Remarque 10.3.11.* 1. Les partitions  $\underline{n}_r$  et  $\underline{r}_n$  sont duales.

2. On a  $W_{\underline{1}_n} = \Gamma^n$  et  $W'_{\underline{1}_n} \simeq \Lambda^n$  (ce dernier point résulte de ce que  $\Lambda^n$  est cohomogène et  $\deg(\Gamma^n/\Lambda^n) < n$  — cf. remarque 4.2.31.6).

**Proposition 10.3.12.** *Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions. On a  $pr_{\lambda,\mu}^\Lambda(W_\lambda \otimes W_\mu) = W_{\lambda+\mu}$ . Si de plus la partition  $\lambda$  est régulière, alors  $pr_{\lambda,\mu}^\Lambda(W_\lambda \otimes W'_\mu) = W_{\lambda+\mu}$ .*

*Démonstration.* Le premier point résulte de la proposition 10.3.7 et du calcul

$$pr_{\lambda,\mu}^\Lambda(s_\lambda^{st}(v_1, \dots, v_{\lambda_1}) \otimes s_\mu^{st}(v_1, \dots, v_{\mu_1})) = s_{\lambda+\mu}^{st}(v_1, \dots, v_{\lambda_1+\mu_1}).$$

Le second s'en déduit via la remarque 10.3.9, puisque  $W_{\lambda+\mu}$  est cohomogène (la somme d'une partition régulière et d'une partition quelconque est une partition régulière), et que  $pr_{\lambda,\mu}^\Lambda(W_\lambda \otimes W_\mu)/pr_{\lambda,\mu}^\Lambda(W_\lambda \otimes W'_\mu)$  est un quotient de  $W_\lambda \otimes (W_\mu/W'_\mu)$ , donc de degré  $< |\lambda| + |\mu|$ .  $\square$

**Corollaire 10.3.13.** *Si  $\lambda$  est une partition régulière, alors  $W_\lambda$  est l'image de la composée  $\Lambda^{\lambda'} \hookrightarrow T^{|\lambda'|} = T^{|\lambda|} \twoheadrightarrow \Lambda^\lambda$ . Si  $\lambda$  est une partition quelconque, l'image de ce morphisme est incluse dans  $W_\lambda$ .*

*Démonstration.* Si l'on pose  $r = l(\lambda) = \lambda'_1$ , le morphisme en question peut se voir comme la composée du produit tensoriel par  $\Lambda^r$  du morphisme analogue construit avec  $\lambda_-$  et de

$$\Lambda^{\lambda_-} \otimes \Lambda^r = \Lambda^{\lambda_-} \otimes W'_{\underline{1}_r} \hookrightarrow \Lambda^{\lambda_-} \otimes \Lambda^{\underline{1}_r} \xrightarrow{pr_{\lambda_- \underline{1}_r}^\Lambda} \Lambda^\lambda,$$

de sorte que la conclusion résulte de la proposition précédente, par récurrence sur  $\lambda_1$ .  $\square$

**Notation 10.3.14.** – Nous désignerons par  $Pw_\lambda$  la composée  $\Lambda^{\lambda'} \hookrightarrow T^{|\lambda'|} = T^{|\lambda|} \twoheadrightarrow \Lambda^\lambda$ , et par  $pw_\lambda : \Lambda^{\lambda'} \rightarrow W_\lambda$  le morphisme induit, qui est donc surjectif lorsque  $\lambda$  est une partition régulière.

– Soient  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  une suite d'entiers et  $\alpha$  une partition. Nous désignerons par  $\Xi_{\mu,\alpha}$  le morphisme  $\Lambda^\mu \otimes \Lambda^\alpha \xrightarrow{\Lambda^\mu \otimes Pw_{\alpha'}} \Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\alpha'} \xrightarrow{pr_{\mu,\alpha'}^\Lambda} \Lambda^{\mu+\alpha'}$ .

*Remarque 10.3.15.* Le morphisme  $\varphi_{\mu,\lambda}^\Lambda$  est égal à la composée

$$\Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\lambda'+r} = \Lambda^\mu \otimes \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} \Lambda^{\lambda'_i+r} \xrightarrow{\Lambda^\mu \otimes \bigotimes_i \theta_{0,\lambda'_i+r,r}} \Lambda^\mu \otimes \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} (\Lambda^r \otimes \Lambda^{\lambda'_i}) \simeq \Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\underline{\lambda}_1} \otimes \Lambda^{\lambda'} \xrightarrow{\Xi_{\mu,\underline{\lambda}_1} \otimes Pw_\lambda} \Lambda^{\mu+\lambda_1} \otimes \Lambda^\lambda.$$

**Proposition 10.3.16.** *Soient  $\lambda$  une partition et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  une suite finie d'entiers naturels.*

- Le morphisme  $\varphi_{\mu,\lambda}^\Lambda$  prend ses valeurs dans  $\Lambda^{\mu+\lambda_1} \otimes W_\lambda$ .
- Supposons que  $\lambda$  est régulière et que  $\mu$  est une partition régulière de longueur  $r$ . On a alors  $\varphi_{\mu,\lambda}^\Lambda(W_\mu \otimes \Lambda^{\lambda'+r}) = W_{(\mu+\lambda_1,\lambda)}$ .

*Démonstration.* La première assertion est une conséquence directe de la remarque et du corollaire précédents. Pour la seconde, il suffit, par un argument de cohomogénéité identique à celui de la démonstration de la proposition 10.3.12, de prouver que  $\varphi_{\mu,\lambda}^T(W_\mu \otimes \bigotimes_{j=1}^{\lambda_1} \Gamma^{r+\lambda'_j}) = W_{(\mu+\lambda_1,\lambda)}$ . Cela découle de la proposition 10.3.7 et du calcul

$$\varphi_{\mu,\lambda}^T\left(s_\mu^{st}(a_1, \dots, a_{\mu_1}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{\lambda_1} u_j^{\otimes(r+\lambda'_j)}\right) = s_{(\mu+\lambda_1,\lambda)}^{st}(u_1, \dots, u_{\lambda_1}, a_1, \dots, a_{\mu_1}).$$

$\square$

**Notation 10.3.17.** Nous désignerons par  $\varphi_{\mu,\lambda}^W : \Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\lambda'+r} \rightarrow \Lambda^{\mu+\lambda_1} \otimes W_\lambda$  le morphisme induit par  $\varphi_{\mu,\lambda}^\Lambda$ .

**Lemme 10.3.18.** Soient  $i, j, t$  des entiers naturels tels que  $i \geq j$ ; notons  $\tau : \Lambda^i \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^j \otimes \Lambda^i$  l'isomorphisme d'échange des deux facteurs du produit tensoriel. La restriction à  $W_{i,j}$  du morphisme  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\tau} \Lambda^j \otimes \Lambda^i \xrightarrow{\theta_{j,i,i-j}} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$  coïncide avec l'identité

*Démonstration.* Un calcul immédiat montre que le morphisme  $\theta \circ \tau$  ne modifie pas les éléments semi-standard. Le lemme résulte donc de la proposition 10.3.7.  $\square$

**Notation 10.3.19.** Pour  $i \geq j \geq 1$ , nous noterons  $\Pi_{i,j}$  et  $\Pi'_{i,j}$  les endomorphismes de  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j$  donnés respectivement par les compositions suivantes.

$$\Pi_{i,j} = \Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{D\theta} \Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^{j+1} \xrightarrow{\theta} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$$

$$\Pi'_{i,j} = \Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\theta} \Lambda^{i+1} \otimes \Lambda^{j-1} \xrightarrow{D\theta} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$$

**Lemme 10.3.20.** 1. Pour  $k+l \leq j$ , on a

$$\theta_{i+k,j-k,l} \theta_{i,j,k} = \frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \theta_{i,j,k+l}$$

2. Pour  $i \geq j \geq 1$ , on a  $\Pi_{i,j} + \Pi'_{i,j} = (i+j)id$ .

3. Soient  $i, j, k, t, u$  des entiers positifs, avec  $j \geq t+u$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t,j-t,k} \\ id \otimes D\theta \downarrow & & \downarrow id \otimes D\theta \\ \Lambda^{i,j-u,k+u} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t,j-t-u,k+u} \end{array}$$

*Démonstration.* Ces calculs sont analogues; établissons par exemple 2. Soient  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  et  $a_1, \dots, a_i; b_1, \dots, b_j$  des éléments de  $V$ . Si  $P = \{t_1 < \dots < t_k\}$  est une partie de  $\mathbf{i} = \{1, \dots, i\}$ , notons  $a^{\wedge P}$  pour  $a_{t_1} \wedge \dots \wedge a_{t_k}$ . On a alors

$$D\theta_{i-1,j+1,1}(V)(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}}) = \sum_{k=1}^i a^{\wedge \{k\}^c} \otimes (b^{\wedge \mathbf{j}} \wedge a_k)$$

où l'on note  $D\theta(V)$  pour  $(D\theta)_V$  pour simplifier l'écriture, et où l'exposant  $c$  indique le complémentaire ensembliste; puis

$$\Pi_{i,j}(V)(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}}) = \sum_{k=1}^i \left( a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}} + \sum_{l=1}^j (a^{\wedge \{k\}^c} \wedge b_l) \otimes (b^{\wedge \{l\}^c} \wedge a_k) \right).$$

De même

$$\Pi'_{i,j}(V)(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}}) = \sum_{l=1}^j \left( a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}} + \sum_{k=1}^i (a^{\wedge \{k\}^c} \wedge b_l) \otimes (b^{\wedge \{l\}^c} \wedge a_k) \right),$$

d'où l'assertion 2.  $\square$

**Proposition 10.3.21.** Soient  $i \geq j \geq 1$  des entiers.

1. Supposons  $i - j$  impair :

- (a)  $\Pi_{i,j}$  et  $\Pi'_{i,j}$  sont deux projecteurs dont la somme est l'identité;
- (b)  $\text{im } \Pi_{i,j} = \ker \Pi'_{i,j} = \text{im } \theta_{i-1,j+1,1} = \ker \theta_{i,j,1} \supset W_{i,j}$ ;
- (c)  $\text{im } \Pi'_{i,j} = \ker \Pi_{i,j} = \text{im } D\theta_{i,j,1} = \ker D\theta_{i-1,j+1,1}$ .

2. Supposons  $i - j$  pair. Alors  $\Pi_{i,j} = \Pi'_{i,j}$  a une image dont les facteurs de composition sont du type  $S_{i+t,j-t}$  avec  $1 \leq t \leq j$ .

*Démonstration.* Le point 1 du lemme 10.3.20 montre que l'on a toujours  $\Pi'_{i,j} \Pi_{i,j} = 0$ . Combiné avec le point 2 de ce même lemme, ce fait implique 1a.

On a ensuite  $\text{im } \Pi_{i,j} \subset \text{im } \theta_{i-1,j+1,1}$ , et  $\ker \Pi'_{i,j} \supset \ker \theta_{i,j,1} \supset W_{i,j}$ , d'où l'on déduit 1b via 1a et l'égalité  $\ker \theta_{i,j,1} = \text{im } \theta_{i-1,j+1,1}$  (valable car  $i > j$ ) déduite de la proposition 1.3.1 de [Fra96].

L'assertion 1c s'établit de façon analogue.

Pour le point 2, on utilise le point 2 du lemme 10.3.20 et le fait que les facteurs de composition de  $\Lambda^{i+1} \otimes \Lambda^{j-1}$ , dont  $\text{im } \Pi'_{i,j}$  est un sous-quotient, sont les  $S_{i+t,j-t}$  pour  $1 \leq t \leq j$ .  $\square$

### 10.3.3 Hom interne et division par $\Lambda^1$ des foncteurs de Weyl

Nous donnons dans ce paragraphe quelques résultats de base sur la division par  $\Lambda^1$  des foncteurs de Weyl. Ces résultats joueront un rôle fondamental pour la détection de facteurs de composition à l'aide du foncteur  $(\cdot : \Lambda^1)$ ; de fait, on ne dispose pratiquement d'aucun autre renseignement sur la division par  $\Lambda^1$  d'un foncteur simple que ceux que l'on déduit grossièrement du cas des foncteurs de Weyl.

**Proposition 10.3.22.** *Soit  $\lambda$  une partition régulière de longueur  $r$  de  $n$ .*

1. Les morphismes  $v_{W_\lambda} : \mathbf{Hom}(\Lambda^1, W_\lambda) \rightarrow (W_\lambda : \Lambda^1)$  et  $v_{S_\lambda} : \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda) \rightarrow (S_\lambda : \Lambda^1)$  sont des isomorphismes.
2. Si  $\mu$  est une partition régulière telle que  $\mu \vdash (W_\lambda : \Lambda^1)$ , on a :
  - soit  $|\mu| = n - 1$  et  $\mu \geq \lambda_1^-$ ,
  - soit  $|\mu| < n - 1$ ,  $l(\mu) < r$ ,  $\mu_1 \geq \lambda_1 - 1$  et  $\mu_{r-1} \leq \lambda_r$ .

*Démonstration.* Le foncteur  $W_\lambda$  est homogène car inclus dans  $\Lambda^\lambda$ , et cohomogène par le théorème 4.2.54. La proposition 10.2.12 fournit donc le premier point. On en déduit

$$(S_\lambda : \Lambda^1) \leftarrow (W_\lambda : \Lambda^1) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, W_\lambda) \hookrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^\lambda).$$

On conclut en appliquant le corollaire 10.2.14 et le théorème 4.2.55.  $\square$

*Remarque 10.3.23.* Le morphisme  $v_{W_\lambda}$  n'est pas forcément un isomorphisme lorsque  $\lambda$  est une partition non régulière (cf. remarque 10.3.27 ci-après).

*Remarque 10.3.24.* L'hypothèse de la seconde assertion de la proposition 10.3.22 est en particulier satisfaite si  $\mu \vdash (S_\lambda : \Lambda^1)$ .

Précisons cette proposition par l'analogie suivant du théorème de branchement de James pour la restriction des modules de Specht en théorie des représentations du groupe symétrique (cf. [Jam78]); le seul ingrédient nouveau par rapport à la théorie des représentations est la proposition 10.2.12. Nous donnons une démonstration directe fondée sur le lemme calculatoire simple suivant.

**Lemme 10.3.25.** *Soient  $i, j, t$  des entiers positifs tels que  $t \leq j$ . Le morphisme*

$$(\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j) \oplus (\Lambda^i \otimes \Lambda^{j-1}) \simeq (\Lambda^i \otimes \Lambda^j : \Lambda^1) \xrightarrow{(\theta_{i,j,t} : \Lambda^1)} (\Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} : \Lambda^1) \simeq (\Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t}) \oplus (\Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1})$$

*vérifie les propriétés suivantes :*

- sa composante  $\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t}$  est égale à  $\theta_{i-1,j,t}$ ,
- sa composante  $\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1}$  est nulle,
- sa composante  $\Lambda^i \otimes \Lambda^{j-1} \rightarrow \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1}$  est égale à  $\theta_{i,j-1,t}$ .



*Démonstration.* Par adjonction, il s'agit de vérifier la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1 \otimes \Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j & \xrightarrow{D\theta \otimes id} & \Lambda^i \otimes \Lambda^j \\ \Lambda^1 \otimes \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Lambda^1 \otimes \Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t} & \xrightarrow{D\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} \end{array}$$

pour les deux premières composantes considérées, car on peut remplacer  $(\cdot : \Lambda^1)$  par  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$  grâce à la proposition 10.3.22, et

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^i \otimes \Lambda^j & \xrightarrow{id \otimes D\theta} & \Lambda^i \otimes \Lambda^{j-1} \otimes \Lambda^1 \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \Lambda^1 \\ \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} & \xrightarrow{id \otimes D\theta} & \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1} \otimes \Lambda^1 \end{array}$$

pour la dernière.

On conclut maintenant grâce à l'assertion 3 du lemme 10.3.20.  $\square$

**Proposition 10.3.26.** *Soit  $\lambda$  une partition régulière de longueur  $r$ . Il existe une filtration*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = (W_\lambda : \Lambda^1) \quad \text{telle que} \quad F_i/F_{i-1} \simeq W_{\lambda_i^-} \quad \text{pour} \quad 0 < i \leq r.$$

*Précisément,  $F_i$  est donné par le diagramme commutatif cartésien d'inclusions*

$$\begin{array}{ccc} F_i \hookrightarrow & \bigoplus_{1 \leq j \leq i} \Lambda^{\lambda_j^-} & \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (W_\lambda : \Lambda^1) \hookrightarrow & (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \end{array}$$

*Démonstration.* La proposition 10.3.22 permettant de remplacer  $(\cdot : \Lambda^1)$  par  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ , qui est exact à gauche, le lemme précédent permet de conclure en utilisant la remarque 4.2.52.  $\square$

*Remarque 10.3.27.* La proposition est en défaut pour une partition non régulière, en raison de la non cohomogénéité du foncteur de Weyl associé. Par exemple,  $(W_{1,1} : \Lambda^1) = (\Gamma^2 : \Lambda^1) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \Lambda^1$ .

### 10.3.4 Partitions Weyl-séparantes et alternées

Afin de donner des renseignements sur la division par  $\Lambda^1$  de certains foncteurs simples, il convient, pour se ramener au foncteur de Weyl correspondant, d'éviter que celui-ci ne contienne de facteurs de composition « parasites », i.e. dont la division par  $\Lambda^1$  procure des facteurs de composition que l'on cherche à détecter dans la division par  $\Lambda^1$  du foncteur simple initial. Cela motive, à partir de la proposition 10.3.22, la définition ci-après de *partition  $n$ -Weyl-séparante*, qui sera employée dans le § 10.4.2.

La notion de *partition  $n$ -alternée* est introduite par la même occasion ; le but de ce paragraphe est d'établir qu'une partition  $n$ -alternée est  $n$ -Weyl-séparante. Ce résultat, analogue aux considérations de [Jam78], § 24 (notamment le corollaire 24.9, qui fournit une classe de foncteurs de Weyl simples définis par une condition de congruence sur les termes de la partition correspondante), donne un critère aisé pour obtenir des partitions  $n$ -Weyl-séparantes ; de fait, les seules partitions  $n$ -Weyl-séparantes que nous utiliserons seront  $n$ -alternées.

**Définition 10.3.28.** Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $\lambda$  est :

- **$n$ -Weyl-séparante** (ou  **$n$ -W-séparante**) s'il n'existe pas de partition régulière  $\mu$  de  $|\lambda|$  telle que  $\mu \leq \lambda_{1,n}^{+,-}$  et  $\mu \vdash \text{rad } W_\lambda$ ,

- $n$ -**alternée** si  $\lambda_i - \lambda_{i+1}$  est impair pour  $1 \leq i < n$ ,
- **Weyl-séparante**, ou encore **W-séparante** (resp. **alternée**) si elle est  $l(\lambda)$ -W-séparante (resp.  $l(\lambda)$ -alternée).

**Lemme 10.3.29.** Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $n \in \mathbb{N}^*$ . La partition  $\lambda$  est  $n$ -W-séparante si et seulement s'il n'existe pas de partition régulière  $\mu$  de  $|\lambda|$  telle que  $\lambda \leq \mu \leq \lambda_{1,n}^{+,-}$  et

$$\mu \vdash W_\lambda \cap \sum_{1 \leq i \leq n-1} \text{im } D\psi_\lambda^{i,1}$$

(on rappelle que le symbole  $\psi_\lambda^{i,t}$  a été introduit dans la notation 4.2.50).

*Démonstration.* On utilise le théorème 4.2.54.1, en notant que si  $\mu$  est une partition régulière de  $|\lambda|$  telle que  $\mu \vdash \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}$ , où l'on a posé  $r = l(\lambda)$ , pour un  $1 \leq i \leq r-1$  et un  $2 \leq t \leq \lambda_{i+1}$ , ou  $\mu \vdash \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+1, \lambda_{i+1}-1, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}$  avec  $n \leq i \leq r-1$ , alors  $\mu$  n'est pas inférieure à  $\lambda_{1,n}^{+,-}$  grâce au théorème 4.2.55 — en effet, la dernière condition impose  $\mu \geq \lambda_{i,i+1}^{+,-}$ , donc  $\sum_{k>i} \mu_k \leq (\sum_{k>i} \lambda_k) - 1$ , alors que  $\mu \leq \lambda_{1,n}^{+,-}$  implique  $\sum_{k>i} \mu_k \geq \sum_{k>i} \lambda_k$  pour  $n \leq i$ ; quant à la première, elle implique  $\sum_{k \leq i} \mu_k \geq \sum_{k \leq i} \lambda_k + 2$ , alors que  $\sum_{k \leq i} \mu_k \leq \sum_{k \leq i} \lambda_k + 1$  si  $\mu \leq \lambda_{1,n}^{+,-}$ .  $\square$

**Notation 10.3.30.** Soit  $L$  une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre associative et unitaire. Nous noterons, dans ce paragraphe,  $[a, b] = aba + bab$  pour  $(a, b) \in L^2$ .

*Remarque 10.3.31.* Il s'agit d'une notation *ad hoc* valable uniquement dans ce paragraphe. Elle est motivée par le fait que ce « crochet » joue intuitivement le même rôle qu'un commutateur usuel sur les endomorphismes que l'on considère dans la démonstration de la proposition 10.3.34 ci-après.

**Lemme 10.3.32.** 1. Si  $a$  et  $b$  sont deux idempotents de  $L$ , on a  $[1+a, 1+b] = [a, b]$ .

2. Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_0, \dots, u_k$  des éléments de  $L$  tels que  $u_i u_j = u_j u_i$  si  $|i-j| \geq 2$ ,  $v = u_k \dots u_1$  et  $I$  l'idéal bilatère de  $L$  engendré par les  $[u_{i-1}, u_i]$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Alors  $vu_0 v \in I + Lu_0$ .

*Démonstration.* L'assertion 1 provient du calcul suivant :  $(1+a)(1+b)(1+a) = 1+a+b+ab+ba+aba$ , et  $(1+b)(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab+ba+bab$ .

Pour l'assertion 2, on raisonne par récurrence sur  $k$ . Le cas  $k = 1$  provient de l'égalité  $u_1 u_0 u_1 = [u_0, u_1] + u_0 u_1 u_0$ , le cas  $k = 2$  de ce que

$$u_2 u_1 u_0 u_2 u_1 = u_2 u_1 u_2 u_0 u_1 = [u_1, u_2] u_0 u_1 + u_1 u_2 u_1 u_0 u_1 = [u_1, u_2] u_0 u_1 + u_1 u_2 [u_0, u_1] + u_1 u_2 u_0 u_1 u_0.$$

On a donc, en supposant maintenant  $k > 2$ ,

$$\begin{aligned} u_k \dots u_1 u_0 u_k \dots u_1 &= (u_k \dots u_2) u_1 u_0 (u_k \dots u_2) u_1 \\ &= [u_1, u_k \dots u_2] u_0 u_1 + u_1 u_k \dots u_2 [u_0, u_1] + u_1 u_k \dots u_2 u_0 u_1 u_0. \end{aligned}$$

Or l'hypothèse de récurrence montre que  $[u_1, u_k \dots u_2] \in I + Lu_1$ . Par conséquent,

$$u_k \dots u_1 u_0 u_k \dots u_1 \in I + Lu_1 u_0 u_1 + Lu_0,$$

ce qui permet de conclure grâce au cas  $k = 1$  (qui montre que  $u_1 u_0 u_1 \in I + Lu_0$ ).  $\square$

**Lemme 10.3.33.** Étant donnée une partition régulière alternée  $(i, j, k)$  de longueur 3, notons  $A$  (resp.  $B$ ) le projecteur (cf. proposition 10.3.21)  $\Pi_{i,j} \otimes \Lambda^k$  (resp.  $\Lambda^i \otimes \Pi_{j,k}$ ) de  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \otimes \Lambda^k$ . Avec la notation du lemme précédent, l'image de  $[A, B]$  n'a pas de facteur de composition  $S_\lambda$  si  $\lambda$  est une partition régulière de  $i+j+k$  telle que  $\lambda \leq (i+1, j, k-1)$ .

*Démonstration.* D'après l'assertion 1 du lemme précédent,  $[A, B] = [A', B']$  où  $A' = \Pi'_{i,j} \otimes \Lambda^k$  et  $B' = \Lambda^i \otimes \Pi'_{j,k}$ . Il suffit donc de montrer que les deux endomorphismes  $A'B'A'$  et  $B'A'B'$  ont une image sans facteur de composition du type indiqué dans l'énoncé. Considérons pour cela le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+1,j-1,k} & \xrightarrow{id \otimes \theta} & \Lambda^{i+1,j,k-1} \\
& \searrow A' & \downarrow D\theta \otimes id & \downarrow D\theta \otimes id & \searrow \Pi_{i+1,j} \otimes id \\
& & \Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{id \otimes \theta} & \Lambda^{i,j+1,k-1} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+1,j,k-1} \\
& & & \searrow B' & \downarrow id \otimes D\theta & \downarrow id \otimes D\theta & \\
& & & & \Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+1,j-1,k} \\
& & & & & \searrow A' & \downarrow D\theta \otimes id \\
& & & & & & \Lambda^{i,j,k}
\end{array}$$

Il commute (les triangles, par définition des flèches obliques, et les carrés par la propriété 3 du lemme 10.3.20), donc l'image de  $A'B'A'$  est un sous-quotient de l'image de  $\Pi_{i+1,j} \otimes \Lambda^{k-1}$ .

De même, l'image de  $B'A'B'$  est un sous-quotient de l'image de  $\Lambda^{i+1} \otimes \Pi_{j,k-1}$ .

Pour conclure, on utilise le point 2 de la proposition 10.3.21 et le théorème 4.2.55 : ils montrent que les facteurs de composition de degré  $i + j + k$  de ces images sont associés à des partitions supérieures à  $(i + 2, j - 1, k - 1)$  dans le premier cas, et à  $(i + 1, j + 1, k - 2)$  dans le second.  $\square$

**Proposition 10.3.34.** *Une partition régulière  $n$ -alternée est  $n$ - $W$ -séparante.*

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  une partition régulière  $n$ -alternée de longueur  $r$ . On définit des endomorphismes de  $\Lambda^\lambda$  par

$$p_i = \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}} \otimes \Pi_{\lambda_i, \lambda_{i+1}} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \text{et} \quad P = \prod_{i=1}^{n-1} \left( \prod_{j=1}^{n-i} p_{n-j} \right).$$

Par l'assertion 1c de la proposition 10.3.21,  $im D\psi_{i,1} = im(1 + p_i)$ . Comme l'image de chacun des projecteurs  $p_i$  contient  $W_\lambda$  (utiliser cette fois l'assertion 1b de la proposition 10.3.21), on en déduit

$$W_\lambda \cap \sum_{1 \leq i \leq n-1} im D\psi_{i,1} \subset \sum_{1 \leq i \leq n-1} im P(1 + p_i).$$

Il suffit donc d'établir, grâce au lemme 10.3.29, que  $S_\mu$  n'est facteur de composition d'aucune des images des  $P(1 + p_i)$  si  $\mu$  est une partition régulière de  $|\lambda|$  telle que  $\lambda \leq \mu \leq \lambda_{1,n}^{+,-}$ . Pour cela, on note que  $p_i$  et  $p_j$  commutent si  $|i - j| \geq 2$ , de sorte que  $P(1 + p_i)$  appartient à l'idéal bilatère de  $End \Lambda^\lambda$  engendré par  $p_{n-1} \dots p_{i+1} p_i p_{n-1} \dots p_{i+1} (1 + p_i)$ . On applique ensuite l'assertion 2 du lemme 10.3.32 pour obtenir que  $P(1 + p_i)$  appartient à l'idéal bilatère engendré par les  $[p_j, p_{j+1}]$ , puisque  $p_i(1 + p_i) = 0$ . Le lemme 10.3.33, combiné au théorème 4.2.55, permet alors de conclure.  $\square$

## 10.4 Détection de facteurs de composition par division par $\Lambda^1$

Le problème de l'effet de foncteurs remarquables sur les facteurs de composition d'objets d'une catégorie abélienne se rencontre naturellement dans divers contextes, l'étude directe des facteurs de composition s'avérant généralement ardue, voire inabordable. Le cas le plus simple d'un foncteur exact, et commutant aux colimites si l'on s'intéresse à des objets seulement localement finis, se révèle insuffisant dans  $\mathcal{F}$ .

Dans la section 10.1, nous avons utilisé les foncteurs  $\tilde{\nabla}_n$  pour détecter des facteurs de composition. Ces foncteurs préservent monomorphismes et épimorphismes (mais ne sont pas exacts), de sorte que si  $S$  est facteur de composition de  $F$ , alors  $\tilde{\nabla}_n(S)$  est un sous-quotient de  $\tilde{\nabla}_n(F)$ .

Nous nous proposons ici de détecter des facteurs de composition selon un principe différent, à l'aide du foncteur  $(\cdot : \Lambda^1)$ , qui commute aux colimites. Cela assure que si  $S$  est facteur de composition de  $(F : \Lambda^1)$ , où  $F$  est un foncteur analytique, alors il existe un facteur de composition  $S'$  de  $F$  tel que  $S$  est facteur de composition de  $(S' : \Lambda^1)$ .

Il semble cependant illusoire d'obtenir des résultats très généraux, en raison des deux écueils suivants :

1. la description des facteurs de composition de  $(S_\mu : \Lambda^1)$  est hors de portée en général;
2. un foncteur simple est en général facteur de composition de la division par  $\Lambda^1$  d'un grand nombre de foncteurs simples.

Afin de contourner ces difficultés, nous mettons deux restrictions à notre problème initial :

1. on suppose que le foncteur  $F$  est un sous-objet d'un foncteur connu  $X$ , et l'on cherche s'il contient ou non des facteurs de composition identifiés dans  $X$  ;
2. on se limite au cas où l'on maîtrise un tant soit peu l'effet de la division par  $\Lambda^1$  sur le foncteur simple que l'on cherche à détecter.

La stratégie de détection dans un sous-objet d'un objet connu est présentée dans un cadre général dans le paragraphe 10.4.1. Dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , la seconde restriction nous amènera à travailler sur les partitions Weyl-séparantes, qui ont été introduites à cette fin, comme nous le verrons au paragraphe 10.4.2. Nous terminons cette section avec un résultat technique plus global, la proposition 10.4.18, adapté à la situation des foncteurs  $\bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$  que nous avons en vue.

### 10.4.1 Préliminaires formels

**Convention 10.4.1.** Dans ce paragraphe,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux catégories de Grothendieck,  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un foncteur commutant aux colimites (en particulier, exact à droite),  $S$  (resp.  $S'$ ) un objet simple de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ).

**Définition 10.4.2.** On dit que  $S$  est *facteur de composition* d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  s'il existe un sous-quotient de  $X$  isomorphe à  $S$ .

*Remarque 10.4.3.* – Lorsque  $X$  est fini, on retrouve la notion de la définition 2.6.13. Pour  $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ , on retrouve la notion de la définition 4.2.59.

- Si  $X$  est la réunion filtrante croissante d'une famille de sous-objets  $(Y_i)$  et que  $S$  est facteur de composition de  $X$ , il existe un indice  $i$  tel que  $S$  est facteur de composition de  $Y_i$ . Cela provient de la proposition 1.3.5 (c'est là qu'intervient l'hypothèse que l'on a affaire à des catégories de Grothendieck).

**Définition 10.4.4.** On dit que l'objet simple  $S$  est  **$\Phi$ -détecté par  $S'$**  dans un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  si  $S'$  est facteur de composition de  $\Phi X$  et que  $S$  est facteur de composition de tout sous-objet  $A$  de  $X$  tel que  $S'$  est facteur de composition de  $im \Phi(A \hookrightarrow X)$ .

Plus généralement, si  $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$  est une flèche de  $\mathcal{B}$ , on dit que  $S$  est  **$\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X$  relativement à  $\pi$**  si  $S'$  est facteur de composition de  $im \pi$  et que  $S$  est facteur de composition de tout sous-objet  $A$  de  $X$  tel que  $S'$  est facteur de composition de  $\pi(im \Phi(A \hookrightarrow X))$ .

*Remarque 10.4.5.* – L'exactitude à droite de  $\Phi$  implique que la suite

$$0 \rightarrow im \Phi(A \hookrightarrow X) \rightarrow \Phi X \rightarrow \Phi(X/A) \rightarrow 0$$

est exacte. En particulier, l'hypothèse sur l'image qui intervient dans la définition est satisfaite si  $S'$  n'est pas facteur de composition de  $\Phi(X/A)$ .

- L'objet simple  $S$  est  $\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X$  relativement à  $\pi$  si et seulement si  $S'$  est facteur de composition de  $\pi(\Phi S)$ .

- La notion de  $\Phi$ -détection relativement à  $\pi$  ne dépend que de  $\ker \pi$  : composer  $\pi$  à gauche par un monomorphisme ne change pas la notion obtenue.

**Lemme 10.4.6.** *Soit  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{A}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Si un objet simple  $T$  de  $\mathcal{A}$  est facteur de composition de  $X$ ,  $S'$  n'est pas facteur de composition de  $\Phi T$ .*
2. *Si  $A$  est un sous-objet de  $X$ ,  $S'$  n'est pas facteur de composition de  $\Phi A$ .*
3. *Si  $B$  est un sous-quotient de  $X$ ,  $S'$  n'est pas facteur de composition de  $\Phi B$ .*

*Démonstration.* Il est trivial que 3 implique 1, et 2 implique 3 car  $\Phi$  est exact à droite. Supposons maintenant 1 vérifié : une récurrence sur la longueur montre que, pour tout sous-objet fini  $F$  de  $X$ ,  $\Phi F$  n'a pas de facteur de composition  $S'$  (utiliser encore l'exactitude à droite). Il suffit de passer à la colimite (en utilisant la remarque 10.4.3) pour conclure.  $\square$

**Proposition 10.4.7.** *Soient  $X$  un objet localement fini de  $\mathcal{A}$ ,  $Y$  un sous-objet de  $X$ ,  $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$ ,  $\Phi Y \xrightarrow{\pi'} B'$  et  $B' \xrightarrow{u} B$  des morphismes de  $\mathcal{B}$  vérifiant les conditions suivantes :*

1. *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Phi Y & \xrightarrow{\pi'} & B' \\ \Phi i \downarrow & & \downarrow u \\ \Phi X & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

où  $Y \xrightarrow{i} X$  désigne l'inclusion,

2. *l'objet  $\ker u$  n'a pas de facteur de composition  $S'$ ,*
3. *le simple  $S$  est  $\Phi$ -défecté par  $S'$  dans  $Y$  relativement à  $\pi'$ ,*
4. *si  $T$  est un facteur de composition de  $X/Y$ , alors  $S'$  n'est pas facteur de composition de  $\Phi T$ .*

*Alors  $S$  est  $\Phi$ -défecté par  $S'$  dans  $X$  relativement à  $\pi$ .*

*Démonstration.* Puisque  $S'$  est facteur de composition de  $\text{im } \pi'$  (par 3), la condition 2 montre que  $S'$  est facteur de composition de  $\text{im } (u \circ \pi')$ , c'est donc aussi le cas pour  $\text{im } \pi$  (qui contient  $\text{im } (u \circ \pi')$  par la condition 1).

Soit maintenant  $A$  un sous-objet de  $X$  tel que  $S'$  est facteur de composition de  $\pi(\text{im } \Phi i)$  ; posons  $A' = A \cap Y$ . Comme  $A/A' \hookrightarrow X/Y$ , le lemme 10.4.6 prouve que  $\Phi(A/A')$  n'a pas de facteur de composition  $S'$ .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Phi A' & \longrightarrow & \Phi Y & \xrightarrow{\pi'} & B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \Phi A & \longrightarrow & \Phi X & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

dont le carré de gauche est induit par les inclusions. L'objet simple  $S'$  est facteur de composition de  $\text{im } (\Phi A' \rightarrow B)$  car  $\text{im } (\Phi A \rightarrow B) / \text{im } (\Phi A' \rightarrow B)$  est un quotient de  $\text{coker } \Phi(A' \hookrightarrow A) \simeq \Phi(A/A')$ , qui n'a pas de facteur  $S'$ . A fortiori,  $S'$  est facteur de composition de  $\pi'(\text{im } (\Phi A' \rightarrow \Phi Y))$  ; il s'ensuit (par 3) que  $S$  est facteur de composition de  $A'$  (appliquer l'hypothèse 1), donc de  $A$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 10.4.8.** *Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $Y$  un sous-objet de  $X$ ,  $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$ ,  $\Phi(X/Y) \xrightarrow{\pi'} B'$  et  $B \xrightarrow{u} B'$  des flèches de  $\mathcal{B}$  vérifiant les conditions suivantes :*

1. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Phi X & \xrightarrow{\pi} & B \\ \downarrow & & \downarrow u \\ \Phi(X/Y) & \xrightarrow{\pi'} & B' \end{array} \quad (10.5)$$

2. le simple  $S$  est  $\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X/Y$  relativement à  $\pi'$ ,

3. l'objet  $\ker u$  n'a pas de facteur de composition  $S'$ .

Alors  $S$  est  $\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X$  relativement à  $\pi$ .

*Démonstration.* Le simple  $S'$  est facteur de composition de  $\pi(\Phi X)$ , puisque cet objet se projette sur  $\pi'(\Phi(X/Y))$ .

Soit à présent  $A$  un sous-objet de  $X$  tel que  $S'$  est facteur de composition de  $\pi(\text{im } \Phi(A \hookrightarrow X))$ ; on pose  $A' = A \cap Y$ . L'examen du diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} \Phi A' & \longrightarrow & \Phi A & \twoheadrightarrow & \Phi(A/A') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Phi Y & \longrightarrow & \Phi X & \twoheadrightarrow & \Phi(X/Y) \end{array}$$

montre que  $\text{im}(\Phi(A/A') \rightarrow \Phi(X/Y))$  est l'image de  $\text{im}(\Phi A \rightarrow \Phi X)$  par la projection  $\Phi X \rightarrow \Phi(X/Y)$ . Par conséquent,  $\pi'(\text{im}(\Phi(A/A') \rightarrow \Phi(X/Y)))$  est l'image de  $\pi(\text{im}(\Phi A \rightarrow \Phi X))$  par  $u$ , et la dernière condition montre alors que  $S'$  est facteur de composition de  $\pi'(\text{im}(\Phi(A/A') \rightarrow \Phi(X/Y)))$ , de sorte que  $A/A'$ , et a fortiori  $A$ , a un facteur de composition  $S$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Corollaire 10.4.9.** Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $Y$  un sous-objet de  $X$ , et  $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$  un morphisme de  $\mathcal{B}$  tels que :

1.  $S'$  est facteur de composition de  $\text{im } \pi$ ,
2.  $S'$  n'est pas facteur de composition de  $\Phi Y$ ,
3.  $X/Y \simeq S$ .

Alors  $S$  est  $\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X$  relativement à  $\pi$ .

*Démonstration.* Notons  $i$  l'inclusion  $Y \hookrightarrow X$  et  $u$  la projection  $B \rightarrow B' = B/\text{im}(\pi \circ \Phi i)$ , de sorte que  $\pi$  induit un morphisme  $\pi' : \Phi(X/Y) \rightarrow B'$  rendant commutatif le diagramme (10.5). Les deux premières hypothèses montrent que  $\ker u$  n'a pas de facteur de composition  $S'$ , tandis que  $\text{im } \pi'$  en a un, donc que  $S$  est  $\Phi$ -détecté dans  $X/Y$  relativement à  $\pi'$  grâce à la dernière hypothèse. La conclusion découle donc de la proposition 10.4.8.  $\square$

**Proposition 10.4.10.** Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $Y$  un sous-objet de  $X$ ,  $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$  et  $\Phi(X/Y) \xrightarrow{\pi'} B'$  et  $B \xrightarrow{u} B'$  des flèches de  $\mathcal{B}$  vérifiant les conditions suivantes :

1. le diagramme (10.5) commute,
2.  $S$  est  $\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X$  relativement à  $\pi$ ,
3.  $\ker u$  n'a pas de facteur de composition  $S'$ ,
4.  $S$  n'est pas facteur de composition de  $Y$ .

Alors  $S$  est  $\Phi$ -détecté par  $S'$  dans  $X/Y$  relativement à  $\pi'$ .

*Démonstration.* On a  $im \pi' = im(u \circ \pi) \simeq im \pi / (im \pi \cap ker u)$ ; comme  $im \pi$  a un facteur de composition  $S'$  et que  $ker u$  n'en a pas,  $im \pi'$  a un facteur de composition  $S'$ .

Soit  $A$  un sous-objet de  $X/Y$  tel que  $S'$  est facteur de composition de  $\pi'(im \Phi(A \hookrightarrow X/Y))$ . Notons  $A'$  le produit fibré de l'inclusion  $A \hookrightarrow X/Y$  et de la projection  $X \rightarrow X/Y$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Phi(A') & \longrightarrow & \Phi(X) & \xrightarrow{\pi} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \Phi(A) & \longrightarrow & \Phi(X/Y) & \xrightarrow{\pi'} & B' \end{array}$$

montre que  $S'$  est facteur de composition de  $\pi(im \Phi(A' \hookrightarrow B))$ . Donc  $S$  est facteur de composition de  $A'$ . Il l'est aussi de  $A \simeq A' / (A' \cap Y)$  puisqu'il ne l'est pas de  $Y$ .  $\square$

## 10.4.2 Détection de facteurs de degré maximal dans un foncteur fini

Comme le foncteur  $(- : \Lambda^1)$  est un adjoint à gauche, il commute aux colimites, ce qui permet de lui appliquer les considérations du paragraphe 10.4.1.

**Définition 10.4.11.** Soient  $\lambda$  une partition régulière,  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda_n^-$  est une partition régulière et  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}$ . Nous dirons que  $\lambda$  est  $(\Lambda^1, n)$ -**déTECTABLE** dans  $X$  si, selon la terminologie de la définition 10.4.4,  $S_\lambda$  est  $(- : \Lambda^1)$ -détecté par  $S_{\lambda_n^-}$  dans  $X$ .

Si  $\pi : (X : \Lambda^1) \rightarrow B$  est un morphisme de  $\mathcal{F}$ , nous dirons que  $\lambda$  est  $(\Lambda^1, n)$ -**déTECTABLE** dans  $X$  **relativement à**  $\pi$  si  $S_\lambda$  est  $(- : \Lambda^1)$ -détecté par  $S_{\lambda_n^-}$  dans  $X$  relativement à  $\pi$ .

**Notation 10.4.12.** Soient  $\lambda$  une partition de longueur  $r$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier au plus égal à  $r$ . On désigne par

$$\varsigma_{\lambda, n} : (W_\lambda : \Lambda^1) \rightarrow (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow \Lambda^{\lambda_n^-}$$

le morphisme composé de la flèche induite par l'inclusion et de la projection canonique.

**Lemme 10.4.13.** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions régulières,  $n$  un entier tel que  $\lambda_n^-$  est une partition régulière. Si  $\mu \vdash \Lambda^\lambda$  et  $\lambda_n^- \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$ , alors  $|\lambda| = |\mu|$  et  $\mu \leq \lambda_{1, n}^{+, -}$ .

*Démonstration.* On a  $|\lambda| \geq |\mu|$  car  $\mu \vdash \Lambda^\lambda$ , et  $|\lambda| - 1 \leq |\mu| - 1$  car  $\lambda_n^- \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$ , d'où  $|\lambda| = |\mu|$ . La proposition 10.3.22 entraîne maintenant  $\mu_1^- \leq \lambda_n^-$ , d'où  $\mu \leq \lambda_{1, n}^{+, -}$ .  $\square$

**Proposition 10.4.14.** Soient  $\lambda$  une partition régulière  $n$ -Weyl-séparante telle que  $\lambda_n^-$  est une partition régulière. Alors  $\lambda$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $W_\lambda$  relativement à  $\varsigma_{\lambda, n}$ .

*Démonstration.* On applique le corollaire 10.4.9 avec  $X = W_\lambda$  et  $Y = \text{rad } W_\lambda$ , de sorte que la dernière condition est satisfaite immédiatement (cf. théorème 4.2.54). La première est vérifiée grâce à la proposition 10.3.26 — en effet, avec les notations de cette proposition,  $F_n \cap \text{ker } \varsigma_{\lambda, n} = F_{n-1}$ , de sorte que  $F_n / F_{n-1} \simeq W_{\lambda_n^-}$  se plonge dans  $im \varsigma_{\lambda, n}$ .

La seconde condition du corollaire 10.4.9 provient de l'hypothèse de Weyl-séparation, via le lemme 10.4.6. En effet, supposons qu'elle ne soit pas satisfaite : il existerait une partition régulière  $\mu$  telle que  $\mu \vdash \text{rad } W_\lambda$  et  $\lambda_n^- \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$ , d'où  $\mu \vdash \text{rad } W_\lambda$  et  $\mu \leq \lambda_{1, n}^{+, -}$  par le lemme 10.4.13, en contradiction avec le fait que  $\lambda$  est  $n$ -W-séparante, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 10.4.15.** On conserve les hypothèses de la proposition 10.4.14. Soit  $X$  est sous-objet de  $\Lambda^\lambda$  tel que :

- $W_\lambda \subset X$ ;
- il n'existe pas de partition régulière  $\mu$  de  $|\lambda|$  telle que  $\mu \vdash X / W_\lambda$  et  $\mu \leq \lambda_{1, n}^{+, -}$ .

La partition  $\lambda$  est alors  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $W_\lambda$  relativement à la composée

$$\pi_X : (X : \Lambda^1) \rightarrow (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow \Lambda^{\lambda_n^-}.$$

*Démonstration.* On applique la proposition 10.4.7 au sous-objet  $W_\lambda$  de  $X$ . Ses deux premières conditions sont satisfaites, car le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (W_\lambda : \Lambda^1) & \xrightarrow{s_{\lambda,n}} & \Lambda^{\lambda_n^-} \\ \downarrow & & \downarrow id \\ (X : \Lambda^1) & \xrightarrow{\pi_X} & \Lambda^{\lambda_n^-} \end{array}$$

commute.

La troisième hypothèse de la proposition 10.4.7 est vérifiée par la proposition 10.4.14, la dernière par le lemme 10.4.13.  $\square$

### 10.4.3 Détection dans $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda$

En vue d'appliquer les résultats précédents à la détection de sous-foncteurs de  $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda$ , nous établissons deux lemmes simples qui permettront de passer de la détection dans une partie homogène (à laquelle la section précédente est adaptée) à la détection « globale ». Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$p_m^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = m}} \Lambda^\alpha$$

pour tout entier  $m$ , via lequel nous identifierons souvent les deux membres.

**Lemme 10.4.16.** *Soient  $r, n, k$  trois entiers strictement positifs,  $\lambda$  une partition de longueur  $n$ ,  $\alpha, \beta$  deux partitions régulières telles que  $\alpha \vdash p_k^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda)$ ,  $\beta \vdash (S_\alpha : \Lambda^1)$  et  $|\beta| < k - 1$ . Alors  $l(\beta) < r + n$  et  $\beta_{r+n-1} \leq \lambda_n$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord  $|\alpha| < k$ . On a alors  $l(\alpha) < r + n$  et  $\alpha_{r+n-1} \leq \lambda_n$  par le théorème 4.2.55. En utilisant la proposition 10.3.22, on obtient  $l(\beta) \leq l(\alpha) < r + n$  et  $\beta_{r+n-1} \leq \alpha_{r+n-1} \leq \lambda_n$ .

Supposons désormais  $|\alpha| = k$  : on a donc  $|\beta| < |\alpha| - 1$ , et la proposition 10.3.22 donne  $l(\beta) < l(\alpha)$  et  $\beta_{r+n-1} \leq \alpha_{r+n}$ , donc, par le théorème 4.2.55, on a  $l(\beta) < r + n$  et  $\beta_{r+n-1} \leq \lambda_n$ .  $\square$

**Lemme 10.4.17.** *Soient  $r, n, m, k, l$  des entiers strictement positifs tels que  $n \leq l$ ,  $\lambda$  une partition de longueur  $l$  de  $k$ ,  $X$  un sous-objet de  $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda$ ,  $\mu$  une partition régulière de  $m$  telle que  $\mu_{r+l} = \lambda_l$  et  $(\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \xrightarrow{f} F$  une flèche de  $\mathcal{F}_{k-1}$ . Si  $\mu$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $p_m^{\text{hom}}(X)$  relativement au morphisme*

$$(p_m^{\text{hom}}(X) : \Lambda^1) \rightarrow (p_m^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) \twoheadrightarrow p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \xrightarrow{p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes f} p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes F$$

dont la première flèche est induite par l'inclusion et la seconde de la proposition 10.2.1 et de l'isomorphisme  $p_m^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) \simeq p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^\lambda$ , alors  $\mu$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $X$  relativement au morphisme  $(X : \Lambda^1) \rightarrow (\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) \simeq \bar{I}^{\otimes r} \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \xrightarrow{\bar{I}^{\otimes r} \otimes f} \bar{I}^{\otimes r} \otimes F$ .

*Démonstration.* La proposition 10.4.8 prouve que  $\mu$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $p_m X$  relativement au morphisme

$$(p_m X : \Lambda^1) \rightarrow (p_m(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) \twoheadrightarrow p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \xrightarrow{p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes f} p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes F.$$

En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} (p_m X : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \xrightarrow{p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes f} & p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (p_m^{\text{hom}}(X) : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \xrightarrow{p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes f} & p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes F \end{array}$$



commute, et le noyau de la flèche verticale de droite est de degré  $< m - 1$ , donc sans facteur de composition  $S_{\mu_n^-}$ .

On termine la démonstration en utilisant la proposition 10.4.7 avec  $Y = p_m X$  : le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} (p_m X : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \xrightarrow{p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes f} & p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X : \Lambda^1) & \longrightarrow & (\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & \bar{I}^{\otimes r} \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \xrightarrow{\bar{I}^{\otimes r} \otimes f} & \bar{I}^{\otimes r} \otimes F \end{array}$$

commute (où les flèches verticales sont induites par les inclusions), et la flèche verticale de droite est injective, ce qui montre que les deux premières hypothèses de ladite proposition sont vérifiées. Nous venons de voir que la troisième l'est ; quant à la dernière, elle provient du lemme précédent : si elle était en défaut, on disposerait de  $i > m$  et d'une partition régulière  $\alpha$  telle que  $\alpha \vdash p_i^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda)$  et  $\mu_n^- \vdash (S_\alpha : \Lambda^1)$ . Donc  $l(\mu_n^-) < r + l$  et  $(\mu_n^-)_{r+l-1} \leq \lambda_l$  par le lemme 10.4.16. Mais par hypothèse  $\mu_{r+l} = \lambda_l > 0$ , donc la première inégalité entraîne  $n = r + l$ , d'où  $(\mu_n^-)_{r+l-1} = \mu_{r+l-1} > \mu_{r+l} = \lambda_l$ , en contradiction avec la seconde inégalité, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 10.4.18.** *Soient  $r, n, m, k$  des entiers strictement positifs tels que  $r < n$ ,  $\lambda$  une partition régulière de  $k$ ,  $A$  un sous-foncteur de  $\bar{I}^{\otimes r}$ ,  $X$  un sous-foncteur de  $A \otimes \Lambda^\lambda$ ,  $\mu$  une partition régulière de longueur  $r$  de  $m - k$  tels que :*

- $\mu_r > \lambda_1$ ,
- $\lambda_{n-r}^-$  est régulière,
- $(\mu, \lambda)$  est  $n$ - $W$ -séparante.

On suppose aussi qu'existe un morphisme  $\alpha : p_m^{\text{hom}}(X) \rightarrow \Lambda^{(\mu, \lambda)}$  vérifiant les propriétés suivantes.

1. Il existe un morphisme  $\beta : p_{m-k}^{\text{hom}}(A) \rightarrow \Lambda^\mu$  tel que  $\alpha$  coïncide avec la composée

$$p_m^{\text{hom}}(X) \hookrightarrow p_m^{\text{hom}}(A \otimes \Lambda^\lambda) = p_{m-k}^{\text{hom}}(A) \otimes \Lambda^\lambda \xrightarrow{\beta \otimes \Lambda^\lambda} \Lambda^\mu \otimes \Lambda^\lambda.$$

2. L'image de  $\alpha$  contient  $W_{(\mu, \lambda)}$ .
3. Il n'existe pas de partition régulière  $\nu$  de  $m$  telle que  $\nu \vdash \text{im } \alpha / W_{(\mu, \lambda)}$  et  $\nu \leq (\mu, \lambda)_{1, n}^{+, -}$ .
4. Si  $\nu$  est une partition régulière de  $m - k$  telle que  $\nu \vdash \ker \beta$ , alors  $\nu > \mu$ .

Alors  $(\mu, \lambda)$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $X$  relativement au morphisme

$$(X : \Lambda^1) \rightarrow (\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) \simeq \bar{I}^{\otimes r} \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow \bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-}.$$

*Démonstration.* Le corollaire 10.4.15 montre que  $(\mu, \lambda)$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $\text{im } \alpha$  relativement au morphisme  $(\text{im } \alpha : \Lambda^1) \rightarrow (\Lambda^{(\mu, \lambda)} : \Lambda^1) \twoheadrightarrow \Lambda^{(\mu, \lambda)_n^-}$ . On prouve maintenant que  $(\mu, \lambda)$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $p_m^{\text{hom}}(X)$  relativement au morphisme

$$(p_m^{\text{hom}}(X) : \Lambda^1) \rightarrow (p_m^{\text{hom}}(A \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) \twoheadrightarrow p_{m-k}^{\text{hom}}(A) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow p_{m-k}^{\text{hom}}(A) \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-}$$

en employant la proposition 10.4.8, avec le sous-objet  $\ker \alpha$ , et pour  $u = \beta \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-}$ .

Pour la première condition, on constate que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} (p_m^{\text{hom}}(X) : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m^{\text{hom}}(A \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}^{\text{hom}}(A) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}^{\text{hom}}(A) \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-} \\ (\alpha : \Lambda^1) \downarrow & & (\beta \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) \downarrow & & \downarrow \beta \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & & \downarrow \beta \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-} \\ (\text{im } \alpha : \Lambda^1) & \longrightarrow & (\Lambda^\mu \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & \Lambda^\mu \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & \Lambda^\mu \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-} \end{array}$$

commute.

Nous avons montré précédemment que la deuxième hypothèse de ladite proposition est vérifiée.

Pour la dernière, il s'agit d'établir que  $S_{(\mu, \lambda)_n^-}$  n'est pas facteur de composition de  $\ker \beta \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-}$ . C'est une conséquence directe de l'hypothèse 4 et du théorème 4.2.55 : si  $\nu'$  est une partition régulière de  $m-1$  telle que  $\nu' \vdash \ker \beta \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-}$ , alors  $\nu' \vdash \Lambda^{(\nu, \lambda_{n-r}^-)}$ , donc  $\nu' \geq (\nu, \lambda_{n-r}^-)$ , où  $\nu$  est une partition régulière de  $m-k$  telle que  $\nu \vdash \ker \beta$ .

Par conséquent (cf. remarque 10.4.5),  $(\mu, \lambda)$  est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $p_m^{\text{hom}}(X)$  relativement au morphisme

$$(p_m^{\text{hom}}(X) : \Lambda^1) \rightarrow (p_m^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda) : \Lambda^1) \rightarrow p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \rightarrow p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{\lambda_{n-r}^-}.$$

La conclusion résulte maintenant du lemme 10.4.17.  $\square$

## 10.5 Application à la structure de $\omega_2(X)$

Toutes les avancées sur la conjecture artinienne, décrivant la structure d'un certain foncteur de type fini  $X$ , procèdent en deux pas : on détermine une filtration finie adéquate du foncteur  $X$ , et l'on montre que les quotients de cette filtration sont simples noethériens d'un certain type.

L'étude du foncteur  $\omega$  permet de franchir de manière satisfaisante la première étape pour des foncteurs du type  $P_V \otimes F$ , où  $F$  est fini. Nous aurons cependant besoin, dans l'approche présentée dans cette section, qui généralise celle de [Dja06c], d'une description explicite des  $\bar{G}(2)$ -comodules simples, exposée (dans sa version duale) au paragraphe 10.5.2. Cette description, reposant sur des constructions issues de la théorie des représentations des groupes symétriques (à partir de la section 10.3), permet de donner les renseignements nécessaires en termes de facteurs de composition pour appliquer la méthode de la section 10.4. Pour ce faire, nous nous appuyerons également sur le paragraphe 10.5.1, qui traite le cas fondamental des deux foncteurs de Powell associés aux représentations de  $GL_2$ . Le résultat principal sur les facteurs de composition de ces foncteurs (proposition 10.5.12) se démontre simplement à l'aide du foncteur  $\tilde{V}_2$ .

Le dernier paragraphe, aboutissement des sections 10.2 à 10.5, conjugue les catégories de foncteurs en grassmanniennes et les représentations modulaires des groupes symétriques. Il montre comment dévisser le produit tensoriel du foncteur projectif  $P^{\otimes 2}$  et d'un foncteur fini par récurrence sur le degré de ce dernier, à partir des résultats de Powell sur la structure de  $P^{\otimes 2}$ .

### 10.5.1 Facteurs de composition des foncteurs $\bar{D}(2)$ et $L(2)$

#### Scindements préliminaires

**Lemme 10.5.1.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

1. *Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers naturels, le foncteur  $\omega_i \kappa_i(\bar{G}(j))$  est canoniquement isomorphe à  $\omega_{i+j} \rho_{i+j}(\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_i(E_{i+j})])$ . En particulier,  $\omega_1 \kappa_1(\bar{G}(n-1)) \simeq \omega_n \rho_n(\mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}])$ .*
2. *Le  $GL_n$ -module trivial  $\mathbb{F}_2$  est facteur direct de  $\mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}]$ .*
3. *Les facteurs de composition du  $GL_n$ -module  $\mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}]$  sont  $R_{(n)} = \mathbb{F}_2$  et les  $R_{(n,i)}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Leur multiplicité est 1.*

*Démonstration.* La première assertion provient des isomorphismes

$$\begin{aligned} \omega_i \kappa_i(\bar{G}(j))(V) &= \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r_i(V)} \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_j(V/W)] \simeq \mathbb{F}_2[\{(W, B) \in \mathcal{G}r_i(V) \times \mathcal{G}r_{i+j}(V) \mid W \subset B\}] \\ &\simeq \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r_{i+j}(V)} \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_i(B)] \simeq \omega_{i+j} \rho_{i+j}(\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_i(E_{i+j})])(V) \end{aligned}$$

naturels en  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$  obtenus par la bijection canonique entre sous-espaces de  $V/W$  (pour un sous-espace  $W$  de  $V$ ) et sous-espaces de  $V$  contenant  $W$ .

Le second point est fourni par la forme linéaire  $GL_n$ -équivariante  $\mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}] \rightarrow \mathbb{F}_2$  envoyant chaque générateur  $[e]$  (où  $e \in E_n \setminus \{0\}$ ) sur 1, que scinde l'élément  $\sum_{e \in E_n \setminus \{0\}} [e]$  de  $\mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}]^{GL_n} \simeq \text{hom}_{GL_n}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}])$ , puisque  $E_n \setminus \{0\}$  est de cardinal impair.

Pour la dernière assertion, on note que  $\mathbb{F}_2[E_n \setminus \{0\}] \simeq \bar{P}(E_n)$  admet une filtration dont les quotients sont

$$\mathbb{F}_2 = \Lambda^n(E_n), \Lambda^{n-1}(E_n), \dots, \Lambda^1(E_n)$$

d'après la proposition 4.2.33, puisque  $\Lambda^i(E_n) = 0$  pour  $i > n$ . On conclut par l'identification entre  $\Lambda^i(E_n)$  et  $R_{(n,i)}$  (où  $i < n$ ) donnée par la dernière assertion de la proposition 5.3.17.  $\square$

Ce lemme esquisse une voie pour déterminer les facteurs de composition de  $\bar{G}(n)$  (et plus généralement, des  $\bar{G}(n)$ -comodules) par récurrence sur  $n$ . Les problèmes combinatoires qui se posent deviennent cependant très rapidement d'une grande difficulté, c'est pourquoi nous nous limiterons au premier cas non trivial, celui des  $\bar{G}(2)$ -comodules, pour lequel on dispose de renseignements suffisamment précis pour approfondir l'étude de la structure de ces foncteurs.

Pour les notations de l'énoncé suivant, nous renvoyons à l'exemple 5.4.14.

**Proposition 10.5.2.** *Le morphisme  $\Pi : \Lambda^2(\bar{P}) \rightarrow \Lambda^2(\bar{P})$  donné par*

$$[u] \wedge [v] \mapsto ([u] + [v]) \wedge [u + v] \quad (V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f; u, v \in V \setminus \{0\})$$

*est un projecteur. Il induit un scindement  $\Lambda^2(\bar{P}) \simeq P_{2,1} \oplus \bar{G}(2)$ , où  $\text{im } \Pi \simeq P_{2,1} \simeq Q_{2,1}$  et  $\text{ker } \Pi \simeq \bar{G}(2)$ . Dualement,  $\Lambda^2(\bar{I}) \simeq L(2) \oplus \bar{D}(2)$ .*

*Démonstration.* Les deux dernières assertions du lemme 10.5.1 fournissent un scindement de  $GL_2$ -modules  $\mathbb{F}_2[E_2 \setminus \{0\}] \simeq \mathbb{F}_2 \oplus R_{(2,1)}$ . On applique ensuite la première assertion de ce lemme, en notant qu'il existe un isomorphisme  $\Lambda^2(\bar{P}) \simeq \omega_1 \kappa_1(\bar{P})$ , obtenu en faisant correspondre à  $[u] \wedge [v]$  (où  $(u, v)$  est une famille libre de  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ) l'élément de  $\bar{P}(V/(u+v)) \hookrightarrow \omega_1 \kappa_1(\bar{P})(V)$  donné par la classe de  $u$  ou de  $v$  dans le quotient  $V/(u+v)$ . On vérifie aussitôt que le projecteur de  $\mathbb{F}_2[E_2 \setminus \{0\}]$  d'image  $R_{(2,1)}$  induit par application du foncteur  $\omega_2 \rho_2$  est le morphisme  $\Pi$  (via les identifications précédentes), ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Remarque 10.5.3.* Soit  $U$  l'isomorphisme de  $P^{\otimes 2}$  donné par  $[u] \otimes [v] \mapsto [u] \otimes [u+v]$ . Le projecteur  $\Pi$  peut se voir comme la composée

$$\Lambda^2 \bar{P} \hookrightarrow \bar{P}^{\otimes 2} \xrightarrow{U} \bar{P}^{\otimes 2} \twoheadrightarrow \Lambda^2 \bar{P}.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous noterons  $T$  l'isomorphisme de  $I^{\otimes 2}$  dual de  $U$ .

Nous considérerons désormais plutôt les duaux  $\bar{D}(2)$  et  $L(2)$  que  $\bar{G}(2)$  et  $P_{2,1}$ . La raison en est que leurs filtrations polynomiales font naturellement apparaître les foncteurs de Weyl, qu'il est d'usage d'étudier plutôt que leurs duaux.

### Facteurs de composition uniques bien placés

Avant d'indiquer les facteurs de composition que nous utiliserons pour la  $\Lambda^1$ -détection dans  $L(2) \otimes W_\lambda$  et  $\bar{D}(2) \otimes W_\lambda$ , nous donnons deux lemmes formels.

**Lemme 10.5.4.** *Soient  $\lambda$  une partition régulière et  $X$  un foncteur analytique. Supposons que  $S_\lambda$  est facteur de composition unique de  $X$ . Alors il existe un plus petit sous-objet  $X[\lambda]$  de  $X$  tel que  $\lambda \vdash X[\lambda]$ . Il est fini, de degré supérieur à  $|\lambda|$ . De plus,  $S_\lambda$  est le cosocle de  $X[\lambda]$ , et cette propriété caractérise  $X[\lambda]$  parmi les sous-objets finis de  $X$ .*

*Démonstration.* Comme  $S_\lambda$  est facteur de composition unique de  $X$ , il existe un unique morphisme non nul  $f : P_\lambda \rightarrow X$ ; on pose  $X[\lambda] = \text{im } f$ . Le cosocle de  $P_\lambda$  étant isomorphe à  $S_\lambda$ , il en est de même de son quotient non nul  $X[\lambda]$ ; en particulier,  $\lambda \vdash X[\lambda]$ . La finitude de  $X[\lambda]$  provient de la

proposition 2.6.21, cet objet étant de type fini (quotient de  $P_\lambda$ ) et localement fini (sous-objet de  $X$ ). On a d'autre part  $\deg X[\lambda] \geq \deg S_\lambda = |\lambda|$ .

Supposons maintenant que  $Y$  est un sous-objet fini de  $X$  de cosocle isomorphe à  $S_\lambda$  et que  $Z$  est un sous-objet de  $X$  tel que  $\lambda \vdash Z$ . Alors  $\lambda \vdash Y \cap Z$ , car

$$1 = m_\lambda(X) \geq m_\lambda(Y + Z) = m_\lambda(Y) + m_\lambda(Z) - m_\lambda(Y \cap Z) = 2 - m_\lambda(Y \cap Z).$$

Cela exclut l'inclusion  $Y \cap Z \subset \text{rad } Y$  (sinon,  $S_\lambda$  serait facteur de composition au moins double de  $Y$ ) et entraîne, puisque  $Y$  est fini, que  $Z$  contient  $Y$ , d'où le lemme.  $\square$

*Exemple 10.5.5* (fondamental). Si  $\lambda$  est une partition régulière,  $S_\lambda$  est facteur de composition unique dans  $\Lambda^\lambda$  et  $\Lambda^\lambda[\lambda] = W_\lambda$ .

**Définition 10.5.6.** Soient  $X$  un foncteur analytique et  $\lambda$  une partition régulière telle que  $\lambda \vdash X$ . Nous dirons que  $S_\lambda$  est *bien placé* dans  $X$  si  $S_\lambda$  n'est pas facteur de composition de  $X/p_{|\lambda|}(X)$ .

*Remarque 10.5.7.* Si  $S_\lambda$  est facteur de composition unique de  $X$ , cela équivaut à l'inclusion  $X[\lambda] \subset p_{|\lambda|}X$ , ou encore à  $\lambda \vdash p_{|\lambda|}^{\text{hom}}X$ .

**Lemme 10.5.8.** Soient  $X$  un foncteur analytique et  $\lambda$  une partition régulière d'un entier  $n$  telle que  $S_\lambda$  est facteur de composition unique bien placé de  $X$ ,  $Y \xrightarrow{f} X$  un morphisme de  $\mathcal{F}_\omega$  et  $A$  un sous-objet fini et cohomogène de degré  $n$  de  $p_n Y$  tels que  $p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A) = (p_n^{\text{hom}}X)[\lambda]$ . Alors  $f(A) = X[\lambda]$ .

*Démonstration.* Les foncteurs  $p_i$  étant exacts à gauche et se plongeant naturellement dans le foncteur identité, on a  $p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A) \rightarrow p_n^{\text{hom}}(f(A))$ . On en déduit que  $S_\lambda \simeq \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A)$  se projette sur  $\text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f(A))$ .

D'autre part, comme  $\deg A \leq n$ , on dispose d'un épimorphisme  $f(A) \rightarrow p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A)$ , donc aussi  $\text{cosoc } f(A) \rightarrow \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A)$ .

Enfin, le quotient  $f(A)$  de  $A$  est cohomogène de degré  $n$  (ou nul), donc la projection  $f(A) \rightarrow p_n^{\text{hom}}(f(A))$  induit un isomorphisme  $\text{cosoc } f(A) \xrightarrow{\simeq} \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f(A))$ . Conséquent,  $S_\lambda \simeq \text{cosoc } f(A)$ , d'où le lemme.  $\square$

### Facteurs de composition remarquables de $\bar{D}(2)$ et $L(2)$

Pour tout entier  $n > 0$ , on a un isomorphisme

$$p_n^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I})) \simeq \left( \bigoplus_{\substack{a+b=n \\ a>b>0}} \Lambda^a \otimes \Lambda^b \right) \oplus \Lambda^2(\Lambda^{n/2}) \quad (10.6)$$

où, par convention, le dernier terme est nul si  $n$  est impair. Via cette identification, le plongement de  $p_n^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I}))$  dans

$$p_n^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes 2}) \simeq \bigoplus_{\substack{a+b=n \\ a,b>0}} (\Lambda^a \otimes \Lambda^b)$$

s'obtient comme somme des morphismes  $\Lambda^a \otimes \Lambda^b \xrightarrow{id \oplus \tau} (\Lambda^a \otimes \Lambda^b) \oplus (\Lambda^b \otimes \Lambda^a)$ , pour  $a > b > 0$  et  $a + b = n$ ,  $\tau$  désignant l'isomorphisme d'échange des deux facteurs du produit tensoriel, et de l'inclusion  $\Lambda^2(\Lambda^{n/2}) \hookrightarrow \Lambda^{n/2} \otimes \Lambda^{n/2}$ .

**Lemme 10.5.9.** Soient  $i, j, k, l, n$  des entiers tels que  $i > j > 0$ ,  $k \geq l > 0$  et  $i + j = k + l = n$ . La composée

$$\Lambda^i \otimes \Lambda^j \hookrightarrow p_n^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I})) \xrightarrow{p_n^{\text{hom}}(D\Pi)} p_n^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I})) \rightarrow \Lambda^k \otimes \Lambda^l$$

dont les première et dernière flèches sont déduites de (10.6) est la somme des morphismes :

- $\theta_{i,j,k-i}$  si  $k \geq i$  ;
- $D\theta_{k,l,i-k}$  si  $k \leq i$  ;
- $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\tau} \Lambda^j \otimes \Lambda^i \xrightarrow{\theta_{j,i,k-j}} \Lambda^k \otimes \Lambda^l$  si  $k \geq j$ , où  $\tau$  désigne la flèche échangeant les deux facteurs du produit tensoriel ;
- $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\tau} \Lambda^j \otimes \Lambda^i \xrightarrow{D\theta_{k,l,j-k}} \Lambda^k \otimes \Lambda^l$  si  $k \leq j$ .

En particulier, pour  $(i, j) = (k, l)$ , le morphisme en question est  $\theta_{j,i,i-j} \circ \tau$ .

*Démonstration.* Cela provient de la remarque 10.5.3, en utilisant que  $T$  induit au niveau de la filtration polynomiale les morphismes  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\bigoplus_{0 \leq t \leq j} \theta_{i,j,t}} \bigoplus_{0 \leq t \leq j} \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t}$  — pour le voir, noter que pour  $a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_j$  éléments d'un espace vectoriel  $V$ , l'élément  $(a_1 \wedge \dots \wedge a_i) \otimes (b_1 \wedge \dots \wedge b_j)$  de  $\Lambda^i(V) \otimes \Lambda^j(V)$  se relève en l'élément de  $p_{i+j}(I_{E_2})(V)$  donné par  $(l, l') \mapsto (\prod_{r=1}^i l(a_r)) (\prod_{s=1}^j l'(b_s))$  ( $(l, l') \in (V^*)^2$ ; on identifie ici  $I_{E_2}(V)$  et  $I^{\otimes 2}(V)$ ); ensuite développer le produit dans l'élément  $(l, l') \mapsto (\prod_{r=1}^i l(a_r)) (\prod_{s=1}^j (l(b_s) + l'(b_s)))$  de  $p_{i+j}(I_{E_2})(V)$ , qui est l'image du précédent par le morphisme induit par  $T$ .  $\square$

**Lemme 10.5.10.** Soient  $i > j > 0$  des entiers. La restriction à  $W_{i,j}$  du morphisme

$$\Lambda^i \otimes \Lambda^j \hookrightarrow p_{i+j}^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I})) \xrightarrow{p_{i+j}^{\text{hom}}(D\Pi)} p_{i+j}^{\text{hom}}\Lambda^2(\bar{I}) \twoheadrightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^j$$

coïncide avec l'identité.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des lemmes 10.5.9 et 10.3.18.  $\square$

**Notation 10.5.11.** Soit  $i \in \mathbb{N}^*$ . On note  $f_i$  la composée

$$p_{2i+1}^{\text{hom}}L(2) \hookrightarrow p_{2i+1}^{\text{hom}}\Lambda^2(\bar{I}) \twoheadrightarrow \Lambda^{i+1} \otimes \Lambda^i,$$

et  $g_i$  le morphisme

$$p_{2i+3}^{\text{hom}}\bar{D}(2) \hookrightarrow p_{2i+3}^{\text{hom}}\Lambda^2(\bar{I}) \twoheadrightarrow \Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1} \xrightarrow{\theta} \Lambda^{i+3} \otimes \Lambda^i.$$

**Proposition 10.5.12.** Soit  $i \in \mathbb{N}^*$ .

1. (a) Le foncteur  $L(2)$  possède un unique facteur de composition  $S_{i+1,i}$ , tandis que  $\bar{D}(2)$  n'en a pas.  
 (b) De plus, celui-ci est bien placé. Précisément,  $W_{i+1,i} \subset \text{im } f_i$ .  
 (c) En revanche,  $\text{im } f_i$  n'a pas de facteur de composition  $S_{i+2,i-1}$ .
2. (a) Le foncteur  $\bar{D}(2)$  possède un unique facteur de composition  $S_{i+3,i}$ .  
 (b) Celui-ci est bien placé. De plus,  $W_{i+3,i} \subset \text{im } g_i$ , donc  $\Lambda^{i+2,i+1}[i+3,i] \subset p_{2i+3}^{\text{hom}}\bar{D}(2)$ .  
 (c) En revanche,  $\text{im } g_i$  n'a pas de facteur de composition  $S_{i+4,i-1}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, l'isomorphisme (10.6) montre que les facteurs de composition de  $\bar{I}^{\otimes 2}$  sont tous bien placés.

D'autre part, pour  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{i+1,i}$  est facteur de composition unique de  $p_{2i+1}^{\text{hom}}\Lambda^2(\bar{I})$ , de sorte que 1.(a) et 1.(b) découlent du lemme 10.5.10.

Notons maintenant que les partitions  $(i+2, i+1)$  étant alternées, donc Weyl-séparantes (proposition 10.3.34),  $S_{i+3,i}$  n'est pas facteur de composition de  $W_{i+2,i+1}$ , donc est facteur de composition unique de  $\Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1}$ , et  $\theta_{i+2,i+1,1}((\Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1})[i+3,i]) = W_{i+3,i}$  (utiliser la filtration de Weyl usuelle de  $\Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1}$  — cf. [Pir97], § 1.1). Par conséquent,  $\Lambda^2(\bar{I})$  a exactement deux facteurs de composition  $S_{i+3,i}$  pour  $i \in \mathbb{N}^*$ ; le lemme 10.5.10 (qui montre notamment que l'un d'entre eux apparaît dans  $L(2)$ ) prouve qu'il suffit de voir, pour démontrer 2.(a) et 2.(b), que  $L(2)$  a un seul facteur de composition  $S_{i+3,i}$ .

Si pour un  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $L(2)$  avait deux facteurs de composition  $S_{i+3,i}$ , on en déduirait en appliquant le foncteur  $\tilde{\nabla}_2$  (qui envoie le dual  $P_{2,1}$  de  $L(2)$  sur  $P_{2,1} \oplus \bar{P}$  — cf. [Pow98c]) que  $L(2)$  a un facteur de composition  $\Lambda^3$ , ce qui n'est pas le cas puisque l'unique facteur de composition  $\Lambda^3$  de  $\Lambda^2(\bar{I})$  apparaît dans  $p_3^{hom}(\Lambda^2(\bar{I})) \simeq \Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \simeq S_{2,1} \oplus \Lambda^3$ , or dans cette décomposition  $p_3^{hom}L(2) = S_{2,1}$  et  $p_3^{hom}\bar{D}(2) = \Lambda^3$  (utiliser le lemme 10.5.9). Cela établit 2.(a) et 2.(b).

Cela prouve également 1.(c) pour  $i = 1$ . Le cas général s'en déduit encore via l'utilisation de  $\tilde{\nabla}_2$ , dont le dual (foncteur noté  $\tilde{\nabla}_2$  dans [Pow98b]) transforme la flèche  $f_{i+1}$  en  $f_i$ , donc  $im f_{i+1}$  en  $im f_i$ , de sorte que si  $(i+3, i) \vdash im f_{i+1}$ , alors  $(i+2, i-1) \vdash im f_i$ .

De même, il suffit de démontrer 2.(c) pour  $i = 1$ . Or le lemme 10.5.10 montre que  $g_1$  a la même image que  $\Pi_{4,1}$  (cf. notation 4.2.50 et proposition 10.3.21), or ce dernier morphisme s'identifie à la projection  $\Lambda^4 \otimes \Lambda^1 \rightarrow S_{4,1}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

La proposition suivante, corollaire des résultats de [Pow98a], montre que les facteurs de composition considérés « détectent » les foncteurs  $L(2)$  et  $\bar{D}(2)$ .

**Proposition 10.5.13** (Powell). — *Le foncteur  $L(2)$  est la réunion filtrante sur  $i \in \mathbb{N}^*$  des  $L(2)[i+1, i]$ . Autrement dit, un sous-foncteur  $F$  de  $L(2)$  tel que  $(i+1, i) \vdash F$  pour une infinité de  $i$  est égal à  $L(2)$ .*

— *Le foncteur  $\bar{D}(2)$  est la réunion filtrante sur  $i \in \mathbb{N}^*$  des  $\bar{D}(2)[i+3, i]$ .*

## 10.5.2 Facteurs de composition des $\bar{D}(2)$ -modules finis

### Préliminaires

**Notation 10.5.14.** — Rappelons que  $\bar{I}$  est muni d'une structure d'algèbre (associative) commutative sans unité (c'est un idéal de l'algèbre commutative unitaire  $I$ ) : l'unique morphisme non nul  $\bar{I} \otimes \bar{I} \rightarrow \bar{I}$  vérifie les propriétés d'associativité et de commutativité usuelles. On en déduit une structure d'algèbre commutative sur  $T^2\bar{I}$ , et  $\Lambda^2\bar{I}$  en est une sous-algèbre. Nous noterons  $\mu$  son produit.

- Nous noterons  $i : \Lambda^2 \hookrightarrow \Lambda^2\bar{I}$  l'inclusion canonique (obtenue en appliquant  $\Lambda^2$  à l'inclusion  $\Lambda^1 \hookrightarrow \bar{I}$ ).
- Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , nous désignerons par  $\phi_n : \Lambda^2\bar{I} \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n} \rightarrow \Lambda^2\bar{I}$  le morphisme donné par la composition

$$\Lambda^2\bar{I} \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n} \xrightarrow{\Lambda^2\bar{I} \otimes i^{\otimes n}} (\Lambda^2\bar{I})^{\otimes n+1} \rightarrow \Lambda^2\bar{I},$$

le dernier morphisme étant le produit des  $n+1$  facteurs  $\Lambda^2\bar{I}$ .

- Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $r$  (nous conserverons cette notation dans tout ce paragraphe). On définit un morphisme  $\varphi_\lambda^{\Lambda^2\bar{I}} : \Lambda^2\bar{I} \otimes \Lambda^{\lambda+2} \rightarrow \Lambda^2\bar{I} \otimes W_\lambda$  (cf. notation 10.3.8 pour la signification de  $\Lambda^{\lambda+2}$ , et notation 10.3.14 pour le morphisme  $pw_\lambda$  utilisé ci-après) comme la composée

$$\Lambda^2\bar{I} \otimes \Lambda^{\lambda+2} = \Lambda^2\bar{I} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} \Lambda^{\lambda'_i+2} \xrightarrow{id \otimes \otimes_i \theta_{0, \lambda'_i+2}} \Lambda^2\bar{I} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} (\Lambda^2 \otimes \Lambda^{\lambda'_i}) \simeq \Lambda^2\bar{I} \otimes (\Lambda^2)^{\otimes \lambda_1} \otimes \Lambda^{\lambda'} \xrightarrow{\phi_{\lambda_1} \otimes pw_\lambda} \Lambda^2\bar{I} \otimes W_\lambda.$$

*Remarque 10.5.15.* — La flèche  $\varphi_\lambda^{\Lambda^2\bar{I}}$  est un morphisme de  $\Lambda^2\bar{I}$ -modules.

- Le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2\bar{I} \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n} & \xrightarrow{\phi_n} & \Lambda^2\bar{I} \\ D\Pi \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n} \downarrow & & \downarrow D\Pi \\ \Lambda^2\bar{I} \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n} & \xrightarrow{\phi_n} & \Lambda^2\bar{I} \end{array} \quad (10.7)$$

En effet, on peut se restreindre au cas  $n = 1$  par construction de  $i$ , pour lequel l'assertion se ramène à la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 \bar{P} & \xrightarrow{c} & \Lambda^2 \bar{P} \otimes \Lambda^2 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \otimes \Lambda^2 \\ \Lambda^2 \bar{P} & \xrightarrow{c} & \Lambda^2 \bar{P} \otimes \Lambda^2 \end{array}$$

où  $c : \Lambda^2 \bar{P} \rightarrow \Lambda^2 \bar{P} \otimes \Lambda^2$  désigne le morphisme donné par  $c([u] \wedge [v]) = ([u] \wedge [v]) \otimes (u \wedge v)$ , laquelle est immédiate.

**Proposition 10.5.16.** *Si  $\lambda$  est une partition régulière, la suite*

$$\Lambda^2 \bar{I} \otimes \Lambda^{\lambda'_{+2}} \xrightarrow{\varphi_\lambda^{\Lambda^2 \bar{I}}} \Lambda^2 \bar{I} \otimes W_\lambda \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{\lambda_i^-}$$

est exacte, où la dernière flèche est la composée de l'inclusion  $\Lambda^2 \bar{I} \otimes W_\lambda \hookrightarrow \bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^\lambda$  et du produit tensoriel par  $\bar{I}$  de la flèche évidente  $\bar{I} \otimes \Lambda^\lambda \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \bar{I} \otimes \Lambda^{\lambda_i^-}$ .

*Démonstration.* Nous allons montrer que la suite duale

$$\bigoplus_{i=1}^r \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{\lambda_i^-} \rightarrow \Lambda^2 \bar{P} \otimes DW_\lambda \xrightarrow{D\varphi_\lambda^{\Lambda^2 \bar{I}}} \Lambda^2 \bar{P} \otimes \Lambda^{\lambda'_{+2}}$$

est exacte. Pour cela, on note que  $DW_\lambda = im Pw_\lambda$  admet la description suivante : soit  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base d'un espace vectoriel  $V$  ; pour toute famille  $a_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq \lambda_1$ ,  $1 \leq j \leq \lambda'_i$ ) d'éléments de  $V$ , on note

$$g^{st}((a_{i,j})) = \sum_{\sigma \in R_{\lambda'}} \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} (a_{\sigma(i,1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(i,\lambda'_i)})$$

où  $R_{\lambda'}$  désigne le groupe des permutations de l'ensemble  $E = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq \lambda_1, 1 \leq j \leq \lambda'_i\}$  laissant invariante la deuxième composante (« générateur standard » — cf. [Jam78]). Cet élément de  $\Lambda^{\lambda'}(V)$  appartient en fait à  $DW_\lambda(V)$ , dont une base est constituée des  $g^{st}((e_{f(i,j)}))$ , où  $f$  parcourt l'ensemble des fonctions  $f : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$  strictement croissantes par rapport à la première variable et croissantes par rapport à la seconde.

On constate ensuite que

$$(D\varphi^{\Lambda^2 \bar{I}}(V))([u] \wedge [v]) \otimes g^{st}((a_{i,j})) = ([u] \wedge [v]) \otimes \sum_{\sigma \in R_{\lambda'}} \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} (u \wedge v \wedge a_{\sigma(i,1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(i,\lambda'_i)}).$$

On en déduit que  $\ker D\varphi^{\Lambda^2 \bar{I}}(V)$  est le sous-espace de  $(\Lambda^2 \bar{P} \otimes DW_\lambda)(V)$  engendré par les éléments du type  $([u] \wedge [v]) \otimes g^{st}((a_{i,j}))$  où  $a_{i,1} = v$  pour un  $1 \leq i \leq r$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 10.5.17.** *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 \bar{I} \otimes \Lambda^{\lambda'_{+2}} & \xrightarrow{\varphi_\lambda^{\Lambda^2 \bar{I}}} & \Lambda^2 \bar{I} \otimes W_\lambda \\ D\Pi \otimes \Lambda^{\lambda'_{+2}} \downarrow & & \downarrow D\Pi \otimes W_\lambda \\ \Lambda^2 \bar{I} \otimes \Lambda^{\lambda'_{+2}} & \xrightarrow{\varphi_\lambda^{\Lambda^2 \bar{I}}} & \Lambda^2 \bar{I} \otimes W_\lambda \end{array}$$

*Démonstration.* Cela découle de la commutation du diagramme (10.7) et de la définition de  $\varphi_\lambda^{\Lambda^2 \bar{I}}$ .  $\square$

### Les foncteurs $D_\lambda^2$ et $L_\lambda^2$

**Notation 10.5.18.** – D'après le lemme ci-avant, le morphisme  $\Lambda^{2\bar{I}} \otimes \Lambda^{\lambda'+2} \xrightarrow{\varphi_\lambda^{\Lambda^{2\bar{I}}}} \Lambda^{2\bar{I}} \otimes W_\lambda$  s'identifie à la somme directe de deux morphismes  $L(2) \otimes \Lambda^{\lambda'+2} \rightarrow L(2) \otimes W_\lambda$  et  $\bar{D}(2) \otimes \Lambda^{\lambda'+2} \rightarrow \bar{D}(2) \otimes W_\lambda$ , que nous noterons  $\varphi_\lambda^{L(2)}$  et  $\varphi_\lambda^{\bar{D}(2)}$  respectivement.

– Nous poserons  $L_\lambda^2 = \text{im } \varphi_\lambda^{L(2)}$  et  $D_\lambda^2 = \text{im } \varphi_\lambda^{\bar{D}(2)}$ .

La proposition suivante identifie les foncteurs  $D_\lambda^2$  et  $L_\lambda^2$  à des  $\bar{D}(2)$ -modules décrits en terme du foncteur  $\omega_2 : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}} \rightarrow \mathcal{F}$ . En dépit de son caractère technique, elle présente l'intérêt conceptuel d'identifier des objets définis de façon *catégorique* (à l'aide du formalisme de la partie II) et *algébrique* (à partir de morphismes explicites). L'apparition de la dualité  $D$  provient des conventions en vigueur en théorie des représentations des groupes symétriques, qui se sont imposées dans  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 10.5.19.** *On a  $D_\lambda^2 \simeq D\omega_2\kappa_2(DW_\lambda)$  et  $L_\lambda^2 \simeq D\omega_2(\rho_2(R_{2,1}) \otimes \kappa_2(DW_\lambda))$ .*

*Démonstration.* Étant donné  $i \in \mathbb{N}$ , considérons le morphisme suivant de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}}$

$$g^i : \iota_2(\Lambda^i) \rightarrow \iota_2(\Lambda^2) \otimes \iota_2(\Lambda^i) \simeq \iota_2(\Lambda^2 \otimes \Lambda^i) \rightarrow \iota_2(\Lambda^{i+2}),$$

où la deuxième flèche s'obtient en tensorisant par  $\iota_2(\Lambda^i)$  l'unique morphisme non nul  $\mathbb{F}_2 \rightarrow \iota_2(\Lambda^2)$ , et la dernière est induite par le produit. Nous allons montrer que  $\text{im } g^i \simeq \kappa_2(\Lambda^i)$ .

En effet, soient  $(V, B)$  un objet de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_{r,2}}^f$ ,  $W$  un supplémentaire de  $B$  dans  $V$  et  $(e_1, e_2)$  une base de  $B$ . Le morphisme  $g_{(V,B)}^i : \Lambda^i(V, B) \rightarrow \Lambda^{i+2}(V, B)$  est donné par

$$(v_1 \oplus a_1) \wedge \cdots \wedge (v_i \oplus a_i) \mapsto e_1 \wedge e_2 \wedge (v_1 \oplus a_1) \wedge \cdots \wedge (v_i \oplus a_i) = e_1 \wedge e_2 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_i,$$

où l'on a identifié de  $V$  à  $W \oplus B$ , ce qui montre qu'on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^i(V) & \xrightarrow{g_{(V,B)}^i} & \Lambda^{i+2}(V) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Lambda^i(V/B) & \end{array}$$

d'où un isomorphisme canonique  $\text{im } g_{(V,B)}^i \simeq \Lambda^i(V/B) = \kappa_2(\Lambda^i)(V, B)$ , comme souhaité.

Considérons maintenant le morphisme suivant de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}}$  :

$$f : \iota_2(DW_\lambda) \hookrightarrow \iota_2(\Lambda^{\lambda'}) \simeq \bigotimes_j \iota_2(\Lambda^{\lambda'_j}) \xrightarrow{\bigotimes_j g_{\lambda'_j}^{\lambda'_j}} \bigotimes_j \iota_2(\Lambda^{\lambda'_j+2}) \simeq \iota_2(\Lambda^{\lambda'+2}).$$

La définition de  $\varphi_\lambda^{\Lambda^{2\bar{I}}}$  montre que  $D_\lambda^2$  s'identifie à  $D\omega_2(\text{im } f)$ .

Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \iota_2(DW_\lambda) & \hookrightarrow & \iota_2(\Lambda^{\lambda'}) & \xrightarrow{\bigotimes_j g_{\lambda'_j}^{\lambda'_j}} & \iota_2(\Lambda^{\lambda'+2}) \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ \kappa_2(DW_\lambda) & \hookrightarrow & \kappa_2(\Lambda^{\lambda'}) & & \end{array}$$

dont le carré de gauche est fourni par la transformation naturelle surjective  $\iota_2 \twoheadrightarrow \kappa_2$  et le triangle de droite par le début de la démonstration. Ainsi,  $\text{im } f \simeq \kappa_2(DW_\lambda)$  et  $D_\lambda^2 \simeq D\omega_2\kappa_2(DW_\lambda)$ .

Le cas de  $L_\lambda^2$  se traite de façon analogue.  $\square$



*Remarque 10.5.20.* – On peut donner des constructions analogues dans les  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nombre de considérations de ce paragraphe pourraient s'exprimer uniquement en termes de catégories de foncteurs en grassmanniennes, mais les résultats explicites qui suivent sur les facteurs de composition sont grandement facilités pas une introduction « concrète » des foncteurs utilisés, qui permet d'exploiter aussitôt la section 10.3.

- Dans le même ordre d'idées, le lecteur vérifiera que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , lorsque la partition  $\lambda$  est régulière, l'unique morphisme non nul  $\iota_n(S_\lambda) \rightarrow \iota_n(S_{\lambda+n})$  (dédit par adjonction du théorème B.3 de [PS98]) a pour image  $\kappa_n(S_\lambda)$  — cf. seconde partie de la remarque 9.1.9.

### Facteurs de composition remarquables de $D_\lambda^2$ et $L_\lambda^2$

On rappelle que le morphisme  $\varphi_{(i,j),\lambda}^W$  a été défini dans la notation 10.3.17.

**Lemme 10.5.21.** *Soient  $i > j > 0$  des entiers et  $k = i + j + |\lambda| + 2\lambda_1$ . La restriction à  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \otimes \Lambda^{\lambda+2}$  (cf. (10.6)) de  $p_k^{hom}(\varphi_\lambda^{\Lambda^2 \bar{I}})$  est égale à la composée*

$$\Lambda^{i,j} \otimes \Lambda^{\lambda+2} \xrightarrow{\varphi_{(i,j),\lambda}^W} \Lambda^{i,j} \otimes W_\lambda \hookrightarrow p_k^{hom}(\Lambda^2 \bar{I} \otimes W_\lambda).$$

*Démonstration.* Compte-tenu de la remarque 10.3.15, il suffit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la restriction à  $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n}$  de  $p_{i+j+2n}^{hom}(\phi_n)$  s'identifie à la composée

$$\Lambda^{i,j} \otimes (\Lambda^2)^{\otimes n} \xrightarrow{\Xi_{(i,j),2n}} \Lambda^{i+n,j+n} \hookrightarrow p_{i+j+2n}^{hom}(\Lambda^2 \bar{I})$$

(cf. notation 10.3.14). La définition des morphismes  $\Xi$  et  $\phi$  montre qu'il suffit de le faire pour  $n = 1$ , i.e. d'identifier  $i$  sur la filtration polynomiale avec les  $\Xi_{(i,j),2} : \Lambda^{i,j} \otimes \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^{i+1,j+1}$ , ce qui est clair, le produit sur  $\bar{I}$  induisant via les  $p_m^{hom}$  le produit évident sur les puissances extérieures.  $\square$

**Lemme 10.5.22.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  ; supposons  $\lambda$  régulière. Alors*

$$\varphi_{(k+2,k+1),\lambda}^W(\Lambda^{k+2,k+1}[k+3,k] \otimes \Lambda^{\lambda+2}) = \Lambda^{k+\lambda_1+2,k+\lambda_1+1,\lambda}[k+\lambda_1+3,k+\lambda_1,\lambda].$$

*Démonstration.* Elle est entièrement analogue à celle de la proposition 10.3.16, en notant que pour tout  $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ ,  $\Lambda^{k+2,k+1}[k+3,k](V)$  est le sous-espace vectoriel de  $\Lambda^{k+2,k+1}(V)$  engendré par les éléments du type

$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b \wedge c) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge d) + (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b \wedge d) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge c) + (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge c \wedge d) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b)$  pour  $a_1, \dots, a_k, b, c, d \in V$ .  $\square$

On rappelle que les morphismes  $f_k$  et  $g_k$  ont été introduits dans la notation 10.5.11.

**Notation 10.5.23.** Supposons que  $\lambda$  est une partition régulière, et que  $k$  est un entier  $> \lambda_1$ . On note  $A_k = (f_k \otimes \Lambda^\lambda)(p_{2k+|\lambda|+1}^{hom}(L_\lambda^2))$  et  $B_k = (g_k \otimes \Lambda^\lambda)(p_{2k+|\lambda|+3}^{hom}(D_\lambda^2))$ .

**Proposition 10.5.24.** *Supposons que  $\lambda$  est une partition régulière, et que  $k$  est un entier  $> \lambda_1$ .*

- 1. On a  $W_{(k+1,k),\lambda} \subset A_k$ .
- 2. Il n'existe pas de partition régulière  $\nu$  de  $2k + |\lambda| + 1$  telle que  $\nu \vdash A_k/W_{(k+1,k),\lambda}$  et  $\nu \leq (k+1, k, \lambda)_{1,r+2}^{+,-}$ .
- 1. On a  $W_{(k+3,k),\lambda} \subset B_k$ .
- 2. Il n'existe pas de partition régulière  $\nu$  de  $2k + |\lambda| + 3$  telle que  $\nu \vdash B_k/W_{(k+3,k),\lambda}$  et  $\nu \leq (k+3, k, \lambda)_{1,r+2}^{+,-}$ .

*Démonstration.* Les premières assertions découlent de la proposition 10.3.16, du lemme 10.5.22 et de la proposition 10.5.12.

Établissons à présent la deuxième assertion dans le cas de  $A_k$ . On note à cet effet que, grâce à la proposition 10.5.16, on a

$$A_k \subset (im f_k \otimes W_\lambda) \cap (\Lambda^{k+1} \otimes ker \theta_{k,\lambda_1,1} \otimes W_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}).$$

Posons à présent  $A'_k = A_k \cap (W_{k+1,k} \otimes W_\lambda) : A_k/A'_k$  s'injecte dans  $(im f_k/W_{k+1,k}) \otimes W_\lambda$ , qui n'a pas de facteurs de composition du type mentionné dans 2, grâce à la proposition 10.5.12. Quant à  $A'_k/W_{(k+1,k),\lambda}$ , il s'injecte dans  $\Lambda^{k+1} \otimes \left( \bigoplus_{t \geq 2} \Lambda^{k+t, \lambda_1-t} \right) \otimes W_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}$ , de sorte que le théorème 4.2.55 suffit à conclure.

Le cas de  $B_k$  est analogue, en remarquant que la proposition 10.5.16 entraîne

$$B_k \subset (im g_k \otimes W_\lambda) \cap (\Lambda^{k+3} \otimes ker \theta_{k, \lambda_1, 1} \otimes W_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}),$$

parce que le morphisme

$$\Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^\lambda \xrightarrow{\theta \otimes \Lambda^\lambda} \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^k \otimes \Lambda^\lambda \xrightarrow{\Lambda^{k+3} \otimes \theta \otimes \Lambda^{\lambda_2, \dots, \lambda_r}} \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{\lambda_1^-}$$

est la somme des morphismes

$$\Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^\lambda \simeq \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^\lambda \xrightarrow{\Lambda^{k+1} \otimes \theta \otimes \Lambda^{\lambda_2, \dots, \lambda_r}} \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^{\lambda_1^-} \simeq \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{\lambda_1^-}$$

et

$$\Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^\lambda \xrightarrow{\Lambda^{k+2} \otimes \theta \otimes \Lambda^{\lambda_2, \dots, \lambda_r}} \Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{\lambda_1^-} \xrightarrow{\theta \otimes \Lambda^\lambda} \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{\lambda_1^-}.$$

□

**Proposition 10.5.25.** *Supposons que  $\lambda$  est une partition régulière.*

1. (a) Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $L(2) \otimes \Lambda^\lambda$  et  $L(2) \otimes W_\lambda$  ont un unique facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda)$ . Il est bien placé.  
 (b) De plus,  $(L(2) \otimes W_\lambda)[i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda] = \varphi_\lambda^{L(2)}(L(2)[i + 1, i] \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}})$ .  
 (c) Le foncteur  $L_\lambda^2$  est la réunion filtrante sur  $i \in \mathbb{N}^*$  des  $(L(2) \otimes W_\lambda)[i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda]$ .
2. (a) Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $\bar{D}(2) \otimes \Lambda^\lambda$  et  $\bar{D}(2) \otimes W_\lambda$  ont un unique facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 3, i + \lambda_1, \lambda)$ . Il est bien placé.  
 (b) De plus,  $(\bar{D}(2) \otimes W_\lambda)[i + \lambda_1 + 3, i + \lambda_1, \lambda] = \varphi_\lambda^{\bar{D}(2)}(\bar{D}(2)[i + 3, i] \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}})$ .  
 (c) Le foncteur  $\bar{D}_\lambda^2$  est la réunion filtrante sur  $i \in \mathbb{N}^*$  des  $(\bar{D}(2) \otimes W_\lambda)[i + \lambda_1 + 3, i + \lambda_1, \lambda]$ .

*Démonstration.* Les assertions 1a et 2a résultent du théorème 4.2.55 et des propositions 10.0.2 et 10.5.12. Les points 1b et 2b s'en déduisent par application des lemmes 10.5.8, 10.5.21 et de la proposition 10.3.16 ou du lemme 10.5.22 (cf. démonstration précédente). Les assertions 1c et 2c s'obtiennent ensuite en utilisant le corollaire 10.5.13. □

**Corollaire 10.5.26.** *Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux partitions régulières distinctes telles que  $\mu \vdash \Lambda^\lambda$ , alors  $L_\mu^2$  n'a pas de facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda)$  pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , et  $\bar{D}_\mu^2$  n'a pas de facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 3, i + \lambda_1, \lambda)$ .*

*Démonstration.* On fait usage des résultats du § 4.2.3. Si  $|\mu| < |\lambda|$ , alors  $l(\mu) < l(\lambda)$ , et un argument de longueur permet de conclure. Sinon, on a  $\mu > \lambda$ , de sorte que  $L(2) \otimes \Lambda^\lambda$  admet une filtration dont un quotient est  $L_\mu^2$  et un autre  $L_\lambda^2$ , parce que  $\Lambda^\lambda$  admet une filtration dont un quotient est  $W_\mu$  et un autre  $W_\lambda$  (cf. [Jam78]). Si  $L_\mu^2$  avait un facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda)$ ,  $L(2) \otimes \Lambda^\lambda$  aurait au moins deux, contrairement à la proposition précédente. On raisonne de même pour  $\bar{D}_\mu^2$ . □

**Corollaire 10.5.27.** *Supposons  $\lambda$  régulière. Alors  $\omega_{2\kappa_2}(S_\lambda)$  a un unique facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda)$  pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , et  $\bar{D}_\lambda^2$  a un unique facteur de composition  $(i + \lambda_1 + 3, i + \lambda_1, \lambda)$ .*

*Démonstration.* On combine les propositions 10.5.19 et 10.5.25, le corollaire 10.5.26, le théorème 4.2.55 et l'auto-dualité des foncteurs simples de  $\mathcal{F}$ . □

### 10.5.3 Foncteur $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ et structure des $\bar{G}(2)$ -comodules finis

**Convention 10.5.28.** Dans ce paragraphe, on se donne une partition régulière non nulle  $\lambda$ .

**Notation 10.5.29.** Nous noterons  $n$  le plus petit entier tel que la partition  $\lambda_n^-$  est régulière.

Cet entier  $n$  jouera un rôle privilégié car la partition  $\lambda$  est  $n$ -alternée.

#### Introduction

Ce paragraphe généralise à tous les foncteurs du type  $P^{\otimes 2} \otimes F$  (avec  $F$  fini) l'argument final de [Dja06c] pour établir le caractère noethérien de type 2 des foncteurs  $P^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ . Avec nos notations, [Dja06c] repose essentiellement sur la proposition 10.4.18 et un argument de récurrence utilisant les isomorphismes  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2 \kappa_2(\Lambda^n)) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2 \kappa_2(\Lambda^{n-1}))$ . Remplacer les puissances extérieures par un foncteur simple quelconque  $S_\lambda$  complique l'argument de récurrence, car  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)$  n'est généralement plus simple. Nous contournerons cette difficulté grâce au théorème 8.5.11 (qui n'était pas nécessaire dans [Dja06c]), qui permet de contrôler les extensions de  $\mathcal{F}$  obtenues par application du foncteur  $\omega_2$  à partir d'extensions entre objets simples de  $\mathcal{F}_{Gr,2}$ . Nous utiliserons ce principe dans un argument de cosocle, à la fin de ce paragraphe.

En revanche, les résultats déduits de la proposition 10.4.18 exposés ci-dessous ne contiennent pas d'idée nouvelle par rapport à [Dja06c].

#### Résultats de détection

**Notation 10.5.30.** On note  $A_\lambda$  et  $A'_\lambda$  les foncteurs définis par le diagramme commutatif au carré cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} (W_\lambda : \Lambda^1) & \longrightarrow & (S_\lambda : \Lambda^1) \\ \varsigma_{\lambda,n} \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^{\lambda_n^-} & \longrightarrow & A'_\lambda \longleftarrow A_\lambda \end{array} \quad (10.8)$$

**Lemme 10.5.31.** *Le foncteur  $A_\lambda$  possède un unique facteur de composition  $S_{\lambda_n^-}$ .*

*Démonstration.* Considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} (\text{rad } W_\lambda : \Lambda^1) & \longrightarrow & (W_\lambda : \Lambda^1) & \longrightarrow & (S_\lambda : \Lambda^1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{im } \varsigma_{\lambda,n}|_{(\text{rad } W_\lambda : \Lambda^1)} & \longrightarrow & \text{im } \varsigma_{\lambda,n} & \longrightarrow & A_\lambda & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (10.9)$$

Comme  $\lambda$  est  $n$ -alternée, donc  $n$ -W-séparante grâce à la proposition 10.3.34, la proposition 10.4.14 montre que  $\lambda_n^- \vdash \text{im } \varsigma_{\lambda,n}$  et  $\lambda_n^- \not\vdash \text{im } \varsigma_{\lambda,n}|_{(\text{rad } W_\lambda : \Lambda^1)}$ , d'où  $\lambda_n^- \vdash A_\lambda$ .

L'unicité résulte de ce que  $A_\lambda$  est un sous-quotient de  $\Lambda^{\lambda_n^-}$ .  $\square$

Ce lemme permet de donner la notation suivante, dans laquelle on assimile le foncteur  $DA_\lambda$  à un sous-foncteur de  $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)$  via l'inclusion  $DA_\lambda \hookrightarrow D(S_\lambda : \Lambda^1)$  duale de l'épimorphisme du diagramme (10.8) et les isomorphismes canoniques  $D(S_\lambda : \Lambda^1) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, DS_\lambda) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)$ .

**Notation 10.5.32.** Nous noterons  $S_{\lambda_n}^{\prime-}$  le sous-objet  $(DA_\lambda)[\lambda_n^-]$  de  $DA_\lambda \subset \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)$ .

Dualement, on peut voir  $DS_{\lambda_n}^{\prime-}$  comme le plus petit quotient de  $A_\lambda$  tel que  $\lambda_n^- \vdash DS_{\lambda_n}^{\prime-}$ .

**Proposition 10.5.33.** *— Soient  $F$  un sous-foncteur de  $L_\lambda^2$  et  $a : (F : \Lambda^1) \rightarrow L(2) \otimes \Lambda^{\lambda_n^-}$  le morphisme composé de la flèche  $(F : \Lambda^1) \rightarrow (L(2) \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) \simeq L(2) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1)$  induite par l'inclusion et de la projection induite par  $(\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow \Lambda^{\lambda_n^-}$ .*

*On suppose que l'image de  $a$  contient  $L_{\lambda_n^-}^2$ .*

*Alors  $F = L_\lambda^2$ .*

- Soient  $F$  un sous-foncteur de  $D_\lambda^2$  et  $a : (F : \Lambda^1) \rightarrow \bar{D}(2) \otimes \Lambda^{\lambda_n^-}$  le morphisme composé de la flèche  $(F : \Lambda^1) \rightarrow (\bar{D}(2) \otimes \Lambda^\lambda : \Lambda^1) \simeq \bar{D}(2) \otimes (\Lambda^\lambda : \Lambda^1)$  induite par l'inclusion et de la projection induite par  $(\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \rightarrow \Lambda^{\lambda_n^-}$ .  
On suppose que l'image de  $a$  contient  $D_{\lambda_n^-}^2$ .

Alors  $F = D_\lambda^2$ .

*Démonstration.* On traite les deux cas simultanément. On établit, en utilisant la proposition 10.4.18, que pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  impair, la partition  $\mu_i = (i + \lambda_1 + 1, i + \lambda_1, \lambda)$  (resp.  $\nu_i = (i + \lambda_1 + 3, i + \lambda_1, \lambda)$ ) est  $(\Lambda^1, n)$ -détectable dans  $L_\lambda^2$  (resp.  $D_\lambda^2$ ) relativement au morphisme  $(L_\lambda^2 : \Lambda^1) \rightarrow (L(2) \otimes \Lambda^\lambda) \rightarrow L(2) \otimes \Lambda^{\lambda_n^-}$  (resp.  $(D_\lambda^2 : \Lambda^1) \rightarrow (\bar{D}(2) \otimes \Lambda^\lambda) \rightarrow \bar{D}(2) \otimes \Lambda^{\lambda_n^-}$ ). Cela impliquera la proposition à cause de l'assertion 1c (resp. 2c) la proposition 10.5.25.

Tout d'abord,  $\mu_i$  (resp.  $\nu_i$ ) est  $n$ -alternée, donc  $n$ -W-séparante. Pour les hypothèses suivantes, on utilise le morphisme  $\beta = f_{i+\lambda_1}$  (resp.  $\beta = g_{i+\lambda_1}$ ) introduit à la proposition 10.5.12 (le morphisme  $\alpha$  étant défini à partir de la condition 1 de la proposition 10.4.18). Cette proposition montre que l'hypothèse sur  $\ker \beta$  requise à la proposition 10.4.18 est satisfaite. La proposition 10.5.24 prouve quant à elle les hypothèses 2 et 3. Cela achève la démonstration.  $\square$

Dans l'énoncé du corollaire qui suit, on fait usage des isomorphismes du corollaire 8.4.35.

**Corollaire 10.5.34.** – Soit  $F$  un sous-foncteur de  $D\omega_2\kappa_2(S_\lambda)$  tel que l'image du morphisme

$$(F : \Lambda^1) \rightarrow (D\omega_2\kappa_2(S_\lambda) : \Lambda^1) \simeq D(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2\kappa_2(S_\lambda))) \simeq D\omega_2\kappa_2(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)) \rightarrow D\omega_2\kappa_2(S_\lambda'^-)$$

(le dernier morphisme étant induit par l'inclusion  $S_\lambda'^- \hookrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)$ ) contient  $D\omega_2\kappa_2(S_{\lambda_n^-})$ .  
Alors  $F = D\omega_2\kappa_2(S_\lambda)$ .

- Soit  $F$  un sous-foncteur de  $D\omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$  tel que l'image du morphisme

$$(F : \Lambda^1) \rightarrow (D\omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1})) : \Lambda^1) \simeq D(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1}))))$$

$$\simeq D\omega_2(\kappa_2(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)) \otimes \rho_2(R_{2,1})) \rightarrow D\omega_2(\kappa_2(S_\lambda'^-) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$$

contient  $D\omega_2(\kappa_2(S_{\lambda_n^-}) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$ . Alors  $F = D\omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$ .

*Démonstration.* On établit seulement la première assertion, la seconde étant entièrement analogue. Posons  $B_\lambda = \text{im}((W_\lambda : \Lambda^1) \xrightarrow{S_{\lambda,n}} \Lambda^{\lambda_n^-})$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (W_\lambda : \Lambda^1) & \longrightarrow & B_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S_\lambda : \Lambda^1) & \longrightarrow & DS_\lambda'^- \end{array}$$

obtenu à partir du diagramme (10.9) et de l'épimorphisme canonique  $A_\lambda \twoheadrightarrow DS_\lambda'^-$  induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (D_\lambda^2 : \Lambda^1) \simeq (D\omega_2\kappa_2(DW_\lambda) : \Lambda^1) & \longrightarrow & D\omega_2\kappa_2(DB_\lambda) & \hookrightarrow & \bar{D}(2) \otimes \Lambda^{\lambda_n^-} \\ \downarrow & & \downarrow u & & \\ (D\omega_2\kappa_2(S_\lambda) : \Lambda^1) & \longrightarrow & D\omega_2\kappa_2(S_\lambda'^-) & & \end{array}$$

par la proposition 10.5.19. Cela permet de conclure par le même argument de détection de facteur de composition qu'à la proposition 10.5.33, par l'usage de la proposition 10.4.10. Montrons à cet effet que les trois hypothèses de cette dernière proposition, autres que la commutation du diagramme, sont vérifiées :

- la proposition 10.5.25 et le corollaire 10.5.27 montrent que  $\ker u$  n'a pas de facteur de composition  $S_{(i+\lambda_1+1, i+\lambda_1, \lambda_n^-)}$  (la source et le but de cet épimorphisme ayant chacun un unique facteur de composition de ce type) ;
- le corollaire 10.5.26 montre que  $D\omega_2\kappa_2(D(\text{rad } W_\lambda))$  n'a pas de facteur de composition  $S_{(i+\lambda_1+1, i+\lambda_1, \lambda)}$  ;
- la proposition 10.5.25 montre qu'un sous-foncteur de  $D\omega_2\kappa_2(S_\lambda)$  contenant une infinité de facteurs de composition  $S_{(i+\lambda_1+1, i+\lambda_1, \lambda_n^-)}$  est égal à  $D\omega_2\kappa_2(S_\lambda)$ .

□

**Notation 10.5.35.** Nous désignerons par

$$j_\lambda^D : \omega_2\kappa_2(S_\lambda^-) \hookrightarrow \omega_2\kappa_2(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2\kappa_2(S_\lambda))$$

et

$$j_\lambda^L : \omega_2(\kappa_2(S_\lambda^-) \otimes \rho_2(R_{2,1})) \hookrightarrow \omega_2(\kappa_2(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)) \otimes \rho_2(R_{2,1})) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1})))$$

les composées utilisant l'isomorphisme du corollaire 8.4.35.

Cette notation nous permet de donner le résultat suivant, qui s'obtient par dualisation du corollaire 10.5.34.

**Corollaire 10.5.36.** – Soit  $G$  un quotient strict de  $\omega_2\kappa_2(S_\lambda)$ . Le quotient  $\omega_2\kappa_2(S_{\lambda_n^-})$  de  $\omega_2\kappa_2(S_\lambda^-)$  n'est pas un quotient de l'image du morphisme

$$\omega_2\kappa_2(S_\lambda^-) \xrightarrow{j_\lambda^D} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2\kappa_2(S_\lambda)) \rightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, G) \quad (10.10)$$

(dont la seconde flèche est induite par la projection  $\omega_2\kappa_2(S_\lambda) \rightarrow G$ ).

- Soit  $G$  un quotient strict de  $\omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$ . Le quotient  $\omega_2(\kappa_2(S_{\lambda_n^-}) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$  de  $\omega_2(\kappa_2(S_\lambda^-) \otimes \rho_2(R_{2,1}))$  n'est pas un quotient de l'image du morphisme

$$\omega_2(\kappa_2(S_\lambda^-) \otimes \rho_2(R_{2,1})) \xrightarrow{j_\lambda^L} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2(\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1}))) \rightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, G).$$

### Deuxième démonstration du théorème 9.6.6

Nous terminons ce chapitre en montrant comment l'on peut, à l'aide du corollaire 10.5.36, donner une nouvelle démonstration des résultats de la section 9.6 relatifs aux  $\bar{G}(2)$ -comodules, indépendante des considérations du chapitre 9. Nous aurons seulement besoin des résultats de Powell relatifs à la structure de  $\bar{I}^{\otimes 2}$  et de  $\bar{I} \otimes F$  ( $F$  fini) — ces derniers étant équivalents à l'épaisseur de la sous-catégorie  $\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$  de  $\mathcal{F}$ .

L'intérêt de la méthode que nous allons utiliser, par rapport à celle, plus conceptuelle, suivie dans le chapitre 9, réside en ce qu'elle fournit un moyen plus explicite de comprendre la structure des foncteurs  $\omega_2(X)$  (avec  $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\bar{G},2}$  fini) par récurrence sur le degré de  $X$ .

Précisément, nous redémontrerons la forme suivante des résultats de la section 9.6 sur les  $\bar{G}(2)$ -comodules.

**Rappel du théorème 9.6.6.** Le foncteur  $\mathcal{F}_{\bar{G},2} \xrightarrow{\omega_2} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{F}_{\bar{G},2}^f$  et une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ .

Commençons par une notation et un résultat élémentaire préliminaires.

**Notation 10.5.37.** Nous désignerons par  $f : \omega_2\kappa_2(S_\lambda^-) \otimes \Lambda^1 \rightarrow \omega_2\kappa_2(S_\lambda)$  le morphisme adjoint à  $j_\lambda^D$ .

**Lemme 10.5.38.** Le morphisme  $f$  est surjectif.

*Démonstration.* Par adjonction, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{G}(2) \otimes S'_\lambda \hookrightarrow \bar{G}(2) \otimes \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega_2 \kappa_2(S'_\lambda) \xrightarrow{j_\lambda^D} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \omega_2 \kappa_2(S_\lambda)) & & \end{array}$$

dont les flèches verticales proviennent de la transformation naturelle surjective  $\bar{G}(2) \otimes \cdot \simeq \omega_2 \iota_2 \rightarrow \omega_2 \kappa_2$  procure un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{G}(2) \otimes S'_\lambda \otimes \Lambda^1 \longrightarrow \bar{G}(2) \otimes S_\lambda & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega_2 \kappa_2(S'_\lambda) \otimes \Lambda^1 \xrightarrow{f} \omega_2 \kappa_2(S_\lambda). & & \end{array}$$

La flèche horizontale supérieure de ce diagramme est un épimorphisme parce qu'elle s'obtient en tensorisant par  $\bar{G}(2)$  le morphisme  $S'_\lambda \otimes \Lambda^1 \rightarrow S_\lambda$  adjoint à l'inclusion  $S'_\lambda \hookrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda)$ , morphisme qui est non nul, donc surjectif. Le morphisme  $f$  est donc surjectif.  $\square$

*Deuxième démonstration du théorème 9.6.6.* On établit par récurrence sur  $d \in \mathbb{N}$  l'assertion suivante :

le foncteur  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}} \xrightarrow{\omega_2} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$  induit une équivalence de catégories entre  $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}}^f)_d$  et une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ .

Le corollaire 8.5.12 montre qu'il suffit de voir que tout quotient strict de  $\omega_2(X)$ , où  $X$  est un objet simple de degré  $d$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,2}}$ , est objet de  $\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ .

L'initialisation de la récurrence est fournie par [Pow98a]. Nous supposons donc  $d > 0$ ; la proposition 8.2.10 montre que  $X$  est alors isomorphe à  $\kappa_2(S_\lambda)$  ou à  $\kappa_2(S_\lambda) \otimes \rho_2(R_{2,1})$  pour une partition régulière de  $d$  (donc non nulle)  $\lambda$ . Nous nous placerons dans le premier cas; le second se traite de même.

Soit  $F$  un quotient strict de  $\omega_2 \kappa_2(S_\lambda)$ . Comme  $S_{\lambda_n}$  est le cosocle de l'objet fini  $S'_\lambda$  de degré  $d-1$ , l'hypothèse de récurrence assure que  $\omega_2 \kappa_2(S_{\lambda_n})$  est le cosocle de  $\omega_2 \kappa_2(S'_\lambda)$  dans  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ . Le corollaire 10.5.36 permet d'en déduire que l'image  $G$  du morphisme (10.10) appartient à  $\mathcal{F}_1^{\omega-ad}$ .

Soit  $a : G \otimes \Lambda^1 \rightarrow F$  le morphisme adjoint à l'inclusion  $G \hookrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \omega_2 \kappa_2(S'_\lambda) \otimes \Lambda^1 \xrightarrow{f} \omega_2 \kappa_2(S_\lambda) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \otimes \Lambda^1 \xrightarrow{a} F & & \end{array}$$

qui fait usage de la notation 10.5.37 et du lemme 10.5.38 montre la surjectivité de ce morphisme  $a$ . Ainsi,  $F$  est un quotient de  $G \otimes \Lambda^1$ . Du fait que  $G$ , donc  $G \otimes \Lambda^1$  par la proposition 8.5.18, est oméga-adapté de hauteur au plus 1,  $F$  est également oméga-adapté de hauteur au plus 1 (par le théorème 9.1.1), d'où la conclusion.  $\square$



# Bibliographie

- [ARS97] M. AUSLANDER, I. REITEN & S. O. SMALØ – *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, Corrected reprint of the 1995 original.
- [BB69] M. BARR & J. BECK – « Homology and standard constructions », in *Sem. on Triples and Categorical Homology Theory (ETH, Zürich, 1966/67)*, Springer, Berlin, 1969, p. 245–335.
- [Ben91] D. J. BENSON – *Representations and cohomology. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, Basic representation theory of finite groups and associative algebras.
- [Bet99] S. BETLEY – « Stable  $K$ -theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.
- [Bor94] F. BORCEUX – *Handbook of categorical algebra. 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Basic category theory.
- [Bou58] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. 23. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples*, Actualités Sci. Ind. no. 1261, Hermann, Paris, 1958.
- [Bou70] — , *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.
- [Bou80] — , *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10 : algèbre homologique*, Masson, Paris, 1980.
- [Bou81] — , *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 4 à 7*, Masson, Paris, 1981.
- [Bre78] L. BREEN – « Extensions du groupe additif », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1978), no. 48, p. 39–125.
- [CPS88] E. CLINE, B. PARSHALL & L. SCOTT – « Finite-dimensional algebras and highest weight categories », *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), p. 85–99.
- [CR87] C. W. CURTIS & I. REINER – *Methods of representation theory. Vol. II*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1987, With applications to finite groups and orders, A Wiley-Interscience Publication.
- [CR90] — , *Methods of representation theory. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Dja06a] A. DJAMENT – « Catégories de foncteurs en grassmanniennes », arXiv :math.AT/0610598, 2006.
- [Dja06b] — , « Catégories de foncteurs en grassmanniennes et filtration de Krull », arXiv :math.RT/0611861, 2006.
- [Dja06c] — , « Foncteurs de division et structure de  $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$  dans la catégorie  $\mathcal{F}$  », arXiv :math.RT/0607595, 2006.
- [Dwy80] W. G. DWYER – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.



- [FFPS03] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI & L. SCHWARTZ – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO & A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [FLS94] V. FRANJOU, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.
- [FP04] V. FRANJOU & T. PIRASHVILI – « Comparison of abelian categories recollements », *Doc. Math.* **9** (2004), p. 41–56 (electronic).
- [Fra96] V. FRANJOU – « Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques », *J. Algebra* **179** (1996), no. 2, p. 501–522.
- [FS97] E. M. FRIEDLANDER & A. SUSLIN – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.
- [Gab62] P. GABRIEL – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.
- [Gre80] J. A. GREEN – *Polynomial representations of  $GL_n$* , Lecture Notes in Mathematics, vol. 830, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [GS05] G. GAUDENS & L. SCHWARTZ – « Un théorème d’annulation en cohomologie de Mac Lane », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), no. 2, p. 119–122.
- [HK88] J. C. HARRIS & N. J. KUHN – « Stable decompositions of classifying spaces of finite abelian  $p$ -groups », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **103** (1988), no. 3, p. 427–449.
- [HLS93] H.-W. HENN, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.
- [HLS95] —, « Localizations of unstable  $A$ -modules and equivariant mod  $p$  cohomology », *Math. Ann.* **301** (1995), no. 1, p. 23–68.
- [HPS97] M. HOVEY, J. H. PALMIERI & N. P. STRICKLAND – « Axiomatic stable homotopy theory », *Mem. Amer. Math. Soc.* **128** (1997), no. 610, p. x+114.
- [Hum87] J. E. HUMPHREYS – « The Steinberg representation », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **16** (1987), no. 2, p. 247–263.
- [Jam78] G. D. JAMES – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978.
- [Jan03] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Jen72] C. U. JENSEN – *Les foncteurs dérivés de  $\varprojlim$  et leurs applications en théorie des modules*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254.
- [JK81] G. JAMES & A. KERBER – *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 16, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981, With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.
- [JP91] M. JIBLADZE & T. PIRASHVILI – « Cohomology of algebraic theories », *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.
- [Kuh94a] N. J. KUHN – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.
- [Kuh94b] —, « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

- [Kuh95] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III », *K-Theory* **9** (1995), no. 3, p. 273–303.
- [Kuh02] — , « A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras », *K-Theory* **26** (2002), no. 1, p. 15–49.
- [Lan92] J. LANNES – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un  $p$ -groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, avec un appendice de Michel Zisman.
- [Lod98] J.-L. LODAY – *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [LZ86] J. LANNES & S. ZARATI – « Sur les  $\mathcal{U}$ -injectifs », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no. 2, p. 303–333.
- [LZ87] — , « Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation », *Math. Z.* **194** (1987), no. 1, p. 25–59.
- [LZ95] J. LANNES & S. ZARATI – « Théorie de Smith algébrique et classification des  $H^*V\mathcal{U}$ -injectifs », *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), no. 2, p. 189–223.
- [Mac95] I. G. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [Mit86] S. MITCHELL – « On the Steinberg module, representations of the symmetric groups, and the Steenrod algebra », *J. Pure Appl. Algebra* **39** (1986), no. 3, p. 275–281.
- [ML57] S. MAC LANE – « Homologie des anneaux et des modules », in *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, Georges Thone, Liège, 1957, p. 55–80.
- [ML63] — , *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [ML71] — , *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.
- [MP83] S. A. MITCHELL & S. B. PRIDY – « Stable splittings derived from the Steinberg module », *Topology* **22** (1983), no. 3, p. 285–298.
- [Pir95] L. PIRIOU – « Extensions entre foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels sur le corps premier à  $p$  éléments dans elle-même », Thèse, Université Paris 7, 1995.
- [Pir97] — , « Sous-objets de  $\bar{I} \otimes \Lambda^n$  dans la catégorie des foncteurs entre  $\mathbf{F}_2$ -espaces vectoriels », *J. Algebra* **194** (1997), no. 1, p. 53–78.
- [Pir00] T. PIRASHVILI – « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.
- [Pir02] — , « Polynomial functors over finite fields (after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin) », *Astérisque* (2002), no. 276, p. 369–388, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [Pir03] — , « André-Quillen homology via functor homology », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 6, p. 1687–1694 (electronic).
- [Pop73] N. POPESCU – *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, London, 1973, London Mathematical Society Monographs, No. 3.
- [Pow97] G. M. L. POWELL – « The structure of  $\bar{I} \otimes \Lambda^n$  in generic representation theory », *J. Algebra* **194** (1997), no. 2, p. 455–466.
- [Pow98a] — , « The Artinian conjecture for  $I^{\otimes 2}$  », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), no. 3, p. 291–310, With an appendix by Lionel Schwartz.

- [Pow98b] — , « Polynomial filtrations and Lannes'  $T$ -functor », *K-Theory* **13** (1998), no. 3, p. 279–304.
- [Pow98c] — , « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.
- [Pow00a] — , « On Artinian objects in the category of functors between  $\mathbf{F}_2$ -vector spaces », in *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000, p. 213–228.
- [Pow00b] — , « The structure of the tensor product of  $\mathbf{F}_2[-]$  with a finite functor between  $\mathbf{F}_2$ -vector spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 3, p. 781–805.
- [Pow01] — , « The tensor product theorem for  $\tilde{\mathbf{V}}$ -nilpotence and the dimension of unstable modules », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **130** (2001), no. 3, p. 427–439.
- [Pow05] — , « Unstable modules over the Steenrod algebra revisited », disponible sur <http://www.math.univ-paris13.fr/~powell/home/preprints.html>, 2005.
- [PR02] T. PIRASHVILI & B. RICHTER – « Hochschild and cyclic homology via functor homology », *K-Theory* **25** (2002), no. 1, p. 39–49.
- [PS98] L. PIRIOU & L. SCHWARTZ – « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.
- [PS02a] — , « A property of the degree filtration of polynomial functors », *Georgian Math. J.* **9** (2002), no. 4, p. 787–806, Dedicated to Professor Hvedri Inassaridze on the occasion of his 70th birthday.
- [PS02b] — , « Une propriété de la filtration du degré des foncteurs polynomiaux », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), no. 7, p. 587–590.
- [PW92] T. PIRASHVILI & F. WALDHAUSEN – « Mac Lane homology and topological Hochschild homology », *J. Pure Appl. Algebra* **82** (1992), no. 1, p. 81–98.
- [Rec84] D. L. RECTOR – « Noetherian cohomology rings and finite loop spaces with torsion », *J. Pure Appl. Algebra* **32** (1984), no. 2, p. 191–217.
- [Sch94] L. SCHWARTZ – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [Tro02] A. TROESCH – « Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques », *Comm. Algebra* **30** (2002), no. 7, p. 3351–3382.
- [Tro05] — , « Scindements de foncteurs composés », *J. Algebra* **290** (2005), no. 1, p. 221–249.
- [Ves05] C. VESPA – « La catégorie  $\mathcal{F}_{quad}$  des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur  $\mathbf{F}_2$  », Thèse, Université Paris 13, 2005, <http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011892>.
- [Ves06] — , « The functor category  $\mathcal{F}_{quad}$  », arXiv :math.AT/0606484, 2006.

## Index des Notations

- $(A : B)$ , 43, 87  
 $(V, W)^\vee$ , 151  
 $(\lambda, \mu)$  ( $\lambda, \mu$  partitions), 234  
 $A[\cdot]$ , 28, 29, 80  
 $A^\perp$ , 42  
 $F^*$ , 79  
 $G_*$ , 79  
 $M^o$ , 80  
 $X[\lambda]$  ( $X$  foncteur analytique,  $\lambda$  partition régulière), 258  
 $\mathcal{A}^f$ , 67  
 $\mathcal{A}^{art}$ , 59  
 $\mathcal{A}^{colf}$ , 69  
 $\mathcal{A}^{cotf}$ , 59  
 $\mathcal{A}^{lf}$ , 69  
 $\mathcal{A}^{noet}$ , 48  
 $\mathcal{A}^{pf,k}$ , 54  
 $\mathcal{A}^{pf}$ , 52  
 $\mathcal{A}^{ss}, \mathcal{A}_S^{ss}$ , 71  
 $\mathcal{A}^{tf}$ , 48  
 $\mathcal{A}_{\text{NT}n}, \mathcal{A}_{\text{NT}(n)}$ , 76  
 $\mathcal{C}^{op}$ , 28  
 $\mathcal{C}_M$ , 29  
 $\mathcal{C}/F$ , 30  
 $\mathcal{C}\setminus F$ , 30  
 $\alpha_{+a}$ , 218  
 $\bar{F}$ , 99  
 $\boxplus$ , 147  
 $\boxtimes$ , 92  
 $|\lambda|$  (longueur d'une partition  $\lambda$ ), 110  
 $\lambda'$  (duale d'une partition  $\lambda$ ), 244  
 $\lambda_i^+, \lambda_i^-, \lambda_{a,b}^+, \lambda_{a,b}^-$ , 241  
 $\lambda_-$ , 218  
 $\leq, \geq$  (ordre sur les partitions), 110  
 $\otimes$  (produit tensoriel de catégories de foncteurs), 93  
 $\tilde{\otimes}$ , 119, 186, 187  
 $\square$ , 45, 172  
 $\underline{M}$ , 28  
 $\mathcal{L}_n$ , 244  
 $\vdash$ , 112  
 $[A]$  ( $A$  objet d'une catégorie abélienne), 36  
 $[x]$  ( $x$  élément d'un ensemble), 28  
 $\text{A}_{Gr}, \bar{\text{A}}_{Gr}$ , **133**, 207  
 $\mathbf{Ab}$ , 28  
 $\text{Aut}$ , 28  
 $\mathfrak{B}_I$ , 148  
 $\mathfrak{B}_I$ , 148  
 $\bar{\mathcal{C}}$ , 65  
 $\text{colim}$ , 29  
 $\mathbf{Comod}^{fid}$ , 144  
 $\mathbf{Comod}_C$ , 45  
 ${}_C\mathbf{Comod}$ , 45  
 $\text{coniv}$ , 183  
 $\text{cosoc}, \text{cosoc}_n$ , 73  
 $D$ , 98, 161  
 $D_{\mathcal{L},k}, D'_{\mathcal{L},k}$ , 85  
 $\bar{D}(n)$ , 127  
 $\mathfrak{D}_I$ , 149  
 $\tilde{\mathfrak{D}}_I$ , 149  
 $\text{deg}$ , 101, 180  
 $\Delta, \bar{\Delta}, \Delta_V$ , 99–100, 178  
 $\Delta^{Gr,J}, \bar{\Delta}^{Gr,J}, \Delta_V^{Gr,J}$ , 178  
 $\Delta_*$ , 180  
 $\tilde{\Delta}_{surj}^I$ , 164  
 $\delta, \delta^{surj}, \delta^{inj}$ , 121  
 $\delta_V, \delta_V^{surj}, \delta_V^{inj}$ , 121  
 $E_n$ , 118, 158  
 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_k$ , 28  
 $\mathcal{E}^I, \mathcal{E}_{surj}^I$ , 147  
 $\mathcal{E}^f, \mathcal{E}_k^f$ , 28  
 $\mathcal{E}_{inj}^f$ , 117  
 $\mathcal{E}_{surj}^f, \mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$ , 117  
 $\mathfrak{e}_I$ , 160  
 $\mathcal{E}_{Gr,I}^f$ , 146  
 $\tilde{\mathcal{E}}_{Gr,I}^f$ , 146  
 $\text{End}$ , 28  
 $\mathbf{Ens}$ , 28  
 $\text{Epi}$ , 28  
 $\mathcal{E}_{\mathbf{PI},n}^f$ , 147  
 $\varepsilon_I$ , 156  
 $\eta_I$ , 166  
 $ev_E$ , 80  
 $ev_E$ , 80  
 $\mathcal{F}$ , 97  
 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ , 156  
 $\mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{surj}^I$ , 147  
 $\mathcal{F}^{\omega-ad}, \mathcal{F}_n^{\omega-ad}$ , 202  
 $\mathcal{F}^{df}$ , 99  
 $\mathcal{F}_\omega$ , 101  
 $\mathcal{F}_n$ , 101  
 $\mathbf{Fct}$ , 29  
 $(\mathcal{F}_{Gr,J})_k$ , 180  
 $\mathcal{F}_{Gr}, \mathcal{F}_{Gr,I}$ , 154

- $\tilde{\mathcal{F}}_{Gr}, \tilde{\mathcal{F}}_{Gr,I}$ , 154  
 $\mathcal{F}_{inj}$ , 117  
 $\mathcal{F}^{\mathbf{Pl},n}$ , 154  
 $\mathcal{F}_{surj}, \mathcal{F}^{\leq n}$ , 117
- $G_0$ , 36, 44  
 $G_0^f$ , **68**, 78, 94, 114, 184–185, 233–239  
 $G_0^{tf}$ , **49**, 233–239  
 $\Gamma^n$ , 105  
 $\bar{G}(n)$ , 127  
 $\tilde{G}_0^f(\mathcal{F})$ , 235  
 $\gamma_n$ , 158  
 $Gr$ , 153  
 $\mathcal{G}r, \mathcal{G}r_I$ , 146
- hom, 27, 29  
**Hom**, 43, 86
- $I^{\mathcal{G}r}$ , 155  
 $I_V^{inj}$ , 118  
 $I_V^{surj}$ , 118  
 $I_E$ , 85, 98  
 $I_E^I$ , 85  
 $I_\lambda$ , 111  
 $\mathcal{I}_I$ , 160  
 $inc_n^{\mathbf{Pl}}$ , 147  
 $\widetilde{incl}_I$ , 146  
 $incl_{I,J}$ , 147  
 $I_n^{\mathbf{Pl}}$ , 158  
 $\iota_I$ , 155  
 Iso, 28
- $J_\lambda$ , 127  
 $\tilde{\mathcal{J}}_I$ , 160
- $K'_0$ , **63**, 73  
 $K_0$ , **50**, 94, 186  
 $\tilde{\mathcal{K}}_n$ , 148  
 $\mathcal{K}_n$ , 76  
 $\tilde{\mathcal{K}}_I$ , 148  
 $\tilde{\mathcal{K}}_I$ , 148  
 $k_n$ , 103  
 $\kappa_I$ , 155
- $L(n)$ , 127  
 $L_C$ , 64  
 $\Lambda^n$ , 105  
 $\Lambda^\lambda, \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ , 110  
 $\underline{\mathcal{L}}_I$ , 149  
 $\tilde{\mathcal{L}}_I$ , 149  
 $l$ , 110  
 lg, 67  
 lim, 29
- $m_S$ , 68  
 $m_\lambda$ , 111  
**Mod** $_A$ , 28, 45  
 $_A\mathbf{Mod}$ , 28, 45
- $\tilde{\nabla}_n$ , 217  
 $Nil_{\tilde{\nabla}_n}, \overline{Nil}_{\tilde{\nabla}_n}$ , 218  
 niv, 183
- $\mathcal{O}_M^C$ , 29  
 $\tilde{\mathcal{O}}_n$ , 148  
 $\mathcal{O}^{C,F}$ , 30  
 $\mathcal{O}_{C,F}$ , 30  
 $\tilde{\mathcal{O}}_I$ , 148  
 $\tilde{\mathcal{O}}_I$ , 148  
 $o$ , 124  
 $o_{inj}$ , 125  
 Ob, 27  
 $\Omega^X$ , 144  
 $\Omega_X$ , 140  
 $\Omega_{X,Y}$ , 143  
 $\omega_{\leq n}, \omega, \omega_n$ , 155  
 $\tilde{\omega}$ , 205
- $P^{\mathcal{G}r}$ , 155  
 $P_V^{inj}$ , 118  
 $P_V^{surj}$ , 118  
 $P_E$ , 84, 98  
 $P_E^I$ , 84  
 $P_\lambda$ , 111  
 $\mathcal{P}$ , 90  
 $\mathcal{P}_{I,J}$ , 155  
 $\tilde{P}_n$ , 126  
 $\mathfrak{p}$ , 110  
 $\mathfrak{p}_I$ , 160  
 $p_n, p_n^{hom}$ , 102–103  
 $\Phi_F^X$ , 51  
 $\Phi_F^X(n)$ , 54  
 $\varphi_{\mu,\lambda}^W$ , 245  
 $\varphi_{\mu,\lambda}^A$ , 244  
 $\pi_{n,X}$ , 221  
 $\varpi$ , 124  
 Pl, 28  
 $\mathbf{Pl}_n$ , 147  
 $pr_{\lambda,\mu}^\Lambda$ , 244  
 $\psi_\lambda, \psi_\lambda^{i,t}$ , 110  
 $Pw_\lambda, pw_\lambda$ , 245
- $Q_\lambda$ , 127  
 $q_n, q_n^{hom}$ , 103  
 $q_n, q_n^{hom}$ , 102
- $R_\lambda$ , 123

$\mathfrak{R}^{\mathcal{G}r, I}$ , 169  
 $\mathcal{R}$ , 90  
 $\mathcal{R}_{I, J}$ , 155  
 $\mathfrak{R}_I$ , 159  
 $r_n$ , 108  
rad,  $\text{rad}_n$ , 73  
 $\rho_I$ , 156

$S^n$ , 105  
 $S_\lambda, S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ , 111  
 $\Sigma_n$ , 105  
 $\mathcal{S}(A)$ , 67  
 $s^{st}$ , 244  
 $s_n$ , 108  
 $\sigma_I$ , 156  
 $\sigma_n^{\mathbf{P}^1}$ , 158  
 $\varsigma_{\lambda, n}$ , 254  
soc,  $\text{soc}_n$ , 71

$T^n$ , 105  
 $\mathcal{T}_{\mathcal{G}r, I}$ , 164  
 $\mathcal{T}_{\mathbf{P}^1, n}$ , 170  
 $t_n$ , 217  
 $\theta_I$ , 156  
 $\theta_{i, j, t}, \theta$ , 110

$\Upsilon^X$ , 144  
 $\Upsilon_X$ , 140  
 $\Upsilon_{X, Y}$ , 143  
 $v$ , 240

$W_\lambda, W_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ , 110

$\Xi_{\mu, \alpha}$ , 245  
 $\xi_I$ , 156



# Index

- algèbre (dans une catégorie tensorielle), 44
- algèbre en grassmanniennes (réduite), **133**, 207
- analytique, 101
- anneau de Grothendieck, **44**, 51, 114, 184–185, 235–239
- artinien, 59
- auto-dual, **42**, 105, 207
  
- bien placé (facteur de composition), 259
- bon (objet  $\mathcal{C}$ -bon d'ordre  $n$ ), 39
- bonne auto-dualité, **41**, 98, 161
- bonne dualité, **41**, 62–63, 74, 86
  
- catégorie, 27
  - $A$ -linéaire, 29
  - abélienne bien échelonnée, 40
  - abélienne très bien échelonnée, 40
  - co-localement artinienne, **63**, 98, 112, 164
  - de Grothendieck, **35**, 47, 85, 251
  - filtrante, 33
  - de foncteurs en grassmanniennes, 154
  - linéarisée, 29
  - localement de type fini (ou localement tf), 50
  - localement noethérienne, **56**, 112, 164
  - localement petite, 35
  - (essentiellement) petite, 29
  - produit, 28
  - quotient, 37
  - tensorielle, 42
    - exacte, 43
    - fermée, **43**, 86
- co-fini, 69
- co-lf, 69
- co-localement fini, **69**, 105
- co-pf, co-pf $_n$ , 61
- co-présentation finie (de), 61
- co-tf, 59
- co-type fini (de), 59
- coïunité, 31, 44
- coalgèbre (dans une catégorie tensorielle), 44
- coanalytique, 101
- cogénérateurs
  - d'une catégorie, 35
  - injectifs standard, 86
- comodule
  - dans une catégorie tensorielle, 44
  - sur une comonade, 33
- comonade, 32
- coniveau, 183
  
- cosocle, 73
- cotensoriel (produit), 45, 142, 172
  
- degré
  - d'un foncteur, 101, 180
  - d'une partition, 110
- déTECTABLE (partition  $(\Lambda^1, n)$ -dÉTECTABLE dans un foncteur), 254
- dÉTECTÉ (objet  $\Phi$ -dÉTECTÉ par un objet simple), 251
  
- ÉCHELONNÉ (classe d'objets bien ÉCHELONNÉS), 40
  
- facteur de composition, 68, 111, 251
- fermé (objet  $\mathcal{C}$ -fermé), 39
- filtration (co)polynomiale, 103
- filtration de Powell, 127
- fini (objet), 67
- foncteur
  - $\tilde{\mathcal{V}}_n$ -adapté, 230
  - analytique, 180
  - base, 148
  - de décalage, 88, 99, 121, 178
  - de décalage en grassmanniennes, 156, 158
  - de décalage pointé, 149
  - différence, 100, 178
  - de division, 43, 87
  - de dualité, 41, 85
  - d'évaluation, 80
  - d'évaluation généralisée, 156
  - d'évaluation total, 160
  - exponentiel (gradué), **95**, 102
  - hom interne, 43, 86
  - de  $X$ -intégrale, 140, 143, 144
  - d'intégrale en grassmanniennes, 155
  - de localisation, 64
  - oméga-adapté, 202
  - d'oubli secondaire, 148
  - d'oubli principal, 148
  - de plongement complet, 156
  - de plongement diagonal, 149
  - de plongement réduit, 155, 158
  - de plongement relatif, 149
  - de plongement secondaire, 156, 160
  - de plongement standard, 155, 158
  - de plongement total, 156
  - polynomial, 101, 180
    - cohomogène, 103
    - homogène, 103
  - de postcomposition, 79



- de Powell, 127
- de précomposition, 79
- de prolongement par zéro, 90
- pseudo-constant, 179
- de réduction, 148
- de Schur, 111
- section, **39**, 75
- de translation, 147
- de Weyl, 110
- générateurs
  - d'une catégorie, 34
  - projectifs standard, 84
- groupe de Grothendieck, **36**, 49, 50, 63, 68, 94, 114, 184–186, 233–239
- hauteur d'un foncteur oméga-adapté, 202, 203
- injective (enveloppe), 35
- intersection, 34
- Krull (filtration de), **76**, 203–204, 209
- lf, 69
- linéarisation, 28
- localement fini, **69**, 105
- longueur, 67
  - d'une partition, 110
- module
  - dans une catégorie tensorielle, 44
  - sur une monade, 33
- monade, 32
- multiplication (d'une monade), 32
- multiplicité, 68
- niveau, 183
- noethérien, 48
  - de type  $n$ , 76
- $NTn$ ,  $NT(n)$ , 76
- orthogonal, 42
- parfait (objet  $\mathcal{C}$ -parfait), **39**, 66, 132, 201, 221
- partition, 110
  - ( $n$ -)alternée, 249
  - concaténée, 234
  - duale, 244
  - ( $n$ -)Weyl-séparante, ou ( $n$ -)W-séparante, 248–249
- pf, 52
- $pf_n$ , 54
- présentation finie (de), 52
- produit tensoriel extérieur, 92
- produit tensoriel total, 119, 186, 187
- projective (couverture), 35
- prolongement intermédiaire, 77
- puissance divisée, 105
- puissance extérieure, 105
- puissance symétrique, 105
- puissance tensorielle, 105
- régulière (partition), 110
- résolution canonique, 169
- réunion, 34
- radical, 73
- recollement (diagramme de), **40**, 77, 92
- semi-simple, 70
- semi-standard (élément), 244
- simple, 67
- $SNTn$ ,  $SNT(n)$ , 76
- socle, 71
- somme, 34
- sous-catégorie
  - complète à gauche, à droite, 90
  - de Serre, **37**, 49, 60, 63–66, 69
  - épaisse, 37
- squelette, 29
- suite de composition, 67
- système de coefficients, 128
- tensorielle
  - équivalence, 43
  - dualité, **43**, 86
  - structure, **42**, 50, 55, 82
- tf, 48
- type fini (de), 48
- unisériel, 106
- unité, 31, 42, 44



# Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne

Le but de ce travail est d'étudier la structure globale de la catégorie de foncteurs  $\mathcal{F}$  entre espaces vectoriels sur  $\mathbb{F}_2$ , notamment la *conjecture artinienne*, qui équivaut au caractère localement noethérien de cette catégorie. Nous démontrons que le produit tensoriel entre un foncteur fini et le foncteur projectif standard  $P^{\otimes 2}$  associé à un espace vectoriel de dimension 2 est noethérien.

Nous introduisons à cet effet d'autres catégories de foncteurs, nommées *catégories de foncteurs en grassmanniennes*. Elles permettent d'énoncer une forme très forte de la conjecture artinienne, décrivant la filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Notre *théorème de simplicité généralisé* établit une version faible de cette conjecture. Il permet de démontrer le résultat précédent sur la structure de  $P^{\otimes 2} \otimes F$  (avec  $F$  fini), que nous avons également obtenu par l'usage conjoint de foncteurs hom internes et de considérations issues de la théorie des représentations modulaires.

Nous décrivons la riche structure algébrique des catégories de foncteurs en grassmanniennes, équivalentes à des catégories de comodules dans  $\mathcal{F}$ . Notre théorème d'annulation cohomologique fondamental généralise un grand nombre de résultats antérieurs en cohomologie des foncteurs. Il permet également de généraliser une étape essentielle de la démonstration de Suslin de l'isomorphisme entre K-théorie stable et homologie de Mac Lane pour des systèmes de coefficients polynomiaux.

---

## Generic representations of linear groups : grassmannian functor categories, with applications to the artinian conjecture

The aim of this work is to study the global structure of the category  $\mathcal{F}$  of functors between  $\mathbb{F}_2$ -vector spaces, particularly the *artinian conjecture*, which is equivalent to the locally noetherian character of this category. We show that the tensor product between a finite functor and the standard projective functor  $P^{\otimes 2}$  associated to a vector space of dimension 2 is noetherian.

For this, we introduce other functor categories, named *grassmannian functor categories*. They permit to formulate a very strong form of the artinian conjecture, describing the Krull filtration of the category  $\mathcal{F}$ . Our *generalized simplicity theorem* proves a weak version of this conjecture. It allows to show the above result about the structure of  $P^{\otimes 2} \otimes F$  (with  $F$  finite), that we have also proved using internal hom functors and considerations from modular representations theory.

We describe the rich algebraic structure of the grassmannian functor categories, equivalent to categories of comodules in  $\mathcal{F}$ . Our main cohomological vanishing theorem generalizes a lot of known results in functor cohomology. It permits also to generalize a key step in Suslin's proof of the isomorphism between stable K-theory and Mac Lane homology for polynomial coefficients.

---

**Discipline** : Mathématiques

---

**Mots clés** : catégories de foncteurs ; groupes linéaires sur  $\mathbb{F}_2$  ; représentations modulaires ; filtration de Krull ; grassmanniennes.

*secondaires* : foncteurs hom internes ; monades ; algèbre de Steenrod ; K-théorie stable.

**Keywords** : functor categories ; linear groups over  $\mathbb{F}_2$  ; modular representations ; Krull filtration ; grassmannians.

*secondary* : internal hom functors ; monads ; Steenrod algebra ; stable K-theory.

---

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

Institut Galilée

Université Paris 13

99, avenue Jean-Baptiste Clément

93430 VILLETANEUSE