



HAL
open science

Étude d'écrans supraconducteurs à haute température critique massifs. Application à la réalisation d'une machine électrique de conception originale.

Philippe Masson

► **To cite this version:**

Philippe Masson. Étude d'écrans supraconducteurs à haute température critique massifs. Application à la réalisation d'une machine électrique de conception originale.. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2002. Français. NNT: . tel-00119753

HAL Id: tel-00119753

<https://theses.hal.science/tel-00119753>

Submitted on 11 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

U.F.R. des Sciences et Techniques Mathématiques, Informatique, Automatique de l'Université Henri Poincaré, Nancy I.

Ecole doctorale I.A.E+M.

Département de Formation Doctorale « Electrotechnique et Electronique »

Thèse

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy I
en Génie Electrique

par **Philippe MASSON**

**Étude d'écrans supraconducteurs à haute température critique massifs.
Application à la réalisation d'une machine électrique
de conception originale.**

Soutenue publiquement le 17 décembre 2002

Membres du jury:

Président :	F. FOREST	Professeur, Université de Montpellier
Rapporteurs :	F. BOUILLAUT	Professeur, Université d'Orsay, Paris.
	P. TIXADOR	Directeur de recherche, C.R.T.B.T., Grenoble.
Examineurs :	R. FLUKIGER	Professeur, Université de Genève
	D. NETTER	Maître de conférence, Université Henri Poincaré, Nancy I.
	A. REZZOUG	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I.

Groupe de Recherche en Électrotechnique et Électronique de Nancy

Faculté des Sciences et Techniques , BP 239

54506 Vandoeuvre-lès-Nancy

AVANT PROPOS

Je tiens tout d'abord à remercier Mr Rezzoug, professeur à l'université Henri Poincaré et directeur du GREEN, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour m'avoir permis de mener ces travaux de recherche dans les meilleures conditions possibles.

Je remercie Mr Forest, professeur à l'université de Montpellier pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie Mr Tixador, directeur de recherche au CNRS et Mr Bouillault, professeur à l'université d'Orsay pour avoir accepté de rapporter sur mon travail.

Je remercie Mr Flukiger, professeur à l'université de Genève pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie particulièrement Mr Netter, maître de conférence à l'université Henri Poincaré, et Mr Lévêque, maître de conférence à l'université Henri Poincaré, pour avoir participé activement à ces travaux. Leur disponibilité et leurs conseils ont été un facteur essentiel dans le bon déroulement de cette thèse. J'ai énormément appris à leur contact.

Je remercie Mr Richard et Mr Brie, professeurs à l'université Henri Poincaré, pour leurs nombreux conseils concernant les méthodes de filtrage numérique, et tout particulièrement Mr Heinrich, maître de conférence à l'université Henri Poincaré, pour nos nombreuses et longues discussions à propos de la régularisation.

Je remercie Mr Mailfert pour nos discussions lors des réunions d'opération ainsi que tous les membres du GREEN qui ont rendu cette thèse humainement enrichissante et pour la bonne ambiance qui règne au laboratoire.

Je remercie Mr Hébral, directeur du CRTBT, ainsi que Mrs Boulbès et Barthélémy pour le bobinage de l'inducteur.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements à tout ceux qui ont eu la gentillesse d'assister à la soutenance de cette thèse.

Et enfin, je remercie mes parents qui m'ont toujours encouragé et mon épouse Céline pour m'avoir supporté et encouragé pendant ces années de thèse.

AVANT PROPOS

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale.....	5
Chapitre 1 : Matériaux et Structures.....	7
I Introduction.....	11
II Le matériau supraconducteur.....	11
II.1 Bref historique.....	11
II.2 Les propriétés générales.....	13
II.3 Supraconducteur et conducteur parfait.....	14
II.4 Les grandeurs critiques.....	16
II.4.a La température critique.....	16
II.4.b Les champs critiques.....	16
II.4.c La densité de courant critique.....	19
II.4.d Surface critique.....	20
II.5 Les supraconducteurs à haute température critique.....	21
III Supraconducteurs et machines électriques.....	21
III.1 Les machines classiques « cuivre → supraconducteur ».....	21
III.2 Les machines classiques avec ajout de supraconducteurs.....	22
III.2.a Amélioration des machines à réluctance variable.....	22
III.2.b Machine à plots ferromagnétiques saturés.....	23
III.3 Les machines spéciales.....	23
IV Structure proposée.....	23
IV.1 Les mécanismes du blindage magnétique.....	24
IV.1.a Principe.....	24
IV.1.b Le modèle des états critiques.....	25
IV.2 Modification de la répartition de l'induction magnétique.....	28
IV.3 Structure d'inducteur de la machine.....	30
V Comportement des SHTc pour la réalisation d' écrans magnétiques en champ faiblement variable.....	34
V.1 Stabilité du blindage.....	34
V.1.a Flux creep et flux flow.....	34
V.1.b Le saut de flux.....	35
V.2 Le BiSrCaCuO.....	36
V.2.a Le BiSrCaCuO à 77K.....	37
V.2.b Le BiSrCaCuO à 4.2 K.....	40
V.3 L'YBaCuO.....	43
V.3.a L'YBaCuO à 77K.....	44
V.3.b L'YBaCuO à 4.2K.....	46
V.4 Le MgB2.....	48
V.5 Choix du matériau.....	49
VII Conclusion.....	49
Chapitre 2 : Modélisation et Outils.....	53
I Introduction.....	55
II Modélisation du problème.....	55
II.1 Les différents types de modélisation.....	55
II.2 Modélisation coulombienne d'un aimant.....	56
II.3 Modélisation coulombienne d'un solénoïde.....	58
II.4 Modélisation d'un matériau ferromagnétique.....	61
II.5 Modélisation d'un matériau supraconducteur.....	62
II.6 Modélisation de l'inducteur 8 pôles.....	64

III Les méthodes de Monte-Carlo.....	66
III.1 Bref historique.....	66
III.2 Calcul d'intégrales multiple.....	67
III.2.a Présentation de la méthode.....	67
III.2.b Convergence de la méthode.....	68
III.2.c Exemple de calcul.....	69
III.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles stationnaires.....	70
III.3.a Position du problème.....	70
III.3.b Formulation mathématique de la méthode.....	71
III.3.c Traitement des sources et conditions de passage.....	75
III.3.d Précision et convergence de la méthode.....	78
III.4 Avantages et inconvénients.....	81
III.4.a Les inconvénients.....	81
III.4.b Les avantages.....	82
IV Estimation du gradient.....	82
IV.1 Position du problème.....	82
IV.2 Approximation par des fonctions.....	84
IV.3 Filtre fréquentiel.....	85
IV.4 Régularisation.....	87
IV.4.a Introduction de la méthode.....	87
IV.4.b Application de la méthode.....	90
IV.4.c Généralisation de la méthode.....	93
IV.5 Traitement d'une surface.....	96
V Conclusion.....	96
Chapitre 3 : Étude expérimentale d'un prototype d'inducteur.....	101
I. Introduction.....	103
II. Dimensionnement du prototype.....	103
II.1 Définition de la forme.....	103
II.1.a Choix des écrans supraconducteurs.....	103
II.1.b Choix de la forme.....	104
II.1.c Choix du fil pour les bobines de champ.....	109
II.2 Réalisation du prototype.....	111
II.2.a Calcul des efforts.....	111
II.2.b Choix du matériau pour le support.....	113
II.2.c Plan du support.....	113
II.2.d Tenue des écrans supraconducteurs.....	115
II.2.e Bobinage des solénoïdes.....	115
II.2.f Protection des bobines.....	116
III. Instrumentation.....	117
III.1 Choix des capteurs et méthode d'acquisition.....	117
III.1.a Grandeurs mesurables.....	117
III.1.b Choix des capteurs.....	117
III.1.c Méthode d'acquisition.....	119
III.2 Étalonnage des capteurs.....	120
III.3 Répartition des sondes.....	122
IV. Le prototype.....	123
V. Protocole expérimental.....	126
V.1 Matériel disponible.....	126
V.2 Aspects cryogéniques.....	126
V.3 Diagramme d'ensemble.....	127
V.4 Déroulement de l'expérience.....	127

VI. Résultats et observations.....	128
VI.1 Répartition angulaire de l'induction.....	128
VI.2 Les instabilités.....	129
VI.2.a Le « training ».....	129
VI.2.b Les sauts de flux.....	129
VII. Comparaison expérience / calcul.....	130
VII.1 Répartition angulaire de l'induction.....	130
VII.2 Champ sur supraconducteur.....	133
VIII. Conclusion.....	134
Chapitre 4 : Perspectives de Recherche.....	135
I Introduction.....	137
II Dimensionnement de l'inducteur.....	137
II.1 Position du problème.....	137
II.2 Dimensionnement des solénoïdes.....	138
II.2.a Définition des grandeurs.....	138
II.2.b Analyse dimensionnelle.....	138
II.2.c Les paramètres imposés lors du dimensionnement.....	140
II.2.d Influence de R sur la forme.....	142
II.2.e Influence de d sur la forme.....	143
II.2.f Conclusion.....	145
II.3 Étude des écrans	145
II.3.a Position du problème.....	145
II.3.b Forme et position des écrans.....	145
II.3.c Problèmes engendrés par l'insertion des écrans.....	146
II.3.d Constitution d'écrans magnétiques de grande taille.....	147
III Etude de l'induit.....	149
III.1 Position du problème.....	149
III.2 Choix du type d'induit.....	149
III.3 Modélisation de l'induit.....	149
IV Résultats numériques.....	151
IV.1 Problème et équations.....	151
IV.1.a Dimensions.....	151
IV.1.b Équations à résoudre.....	153
IV.2 Calcul de l'induction.....	153
IV.3 Calcul du couple.....	155
V Conclusion.....	156
Conclusion Générale.....	157
Annexes : Rappels sur les probabilités.....	159

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les applications des supraconducteurs sont de plus en plus présentes dans le monde industriel. Ils permettent de repousser toujours plus loin les performances des systèmes nécessitant un fort champ magnétique ou une forte puissance.

Des moteurs actuels utilisent les supraconducteurs afin de générer un couple supérieur à celui des machines classiques. Ce mémoire présente l'étude d'une structure innovante d'inducteur supraconducteur utilisant des écrans supraconducteurs à haute température critique pour concentrer le flux magnétique produit par deux solénoïdes en opposition.

Cette étude a été possible grâce à la forte évolution des céramiques supraconductrices à haute température critique, notamment l' YBaCuO qui est capable de générer des densités de courant supérieures au millier d'ampères par millimètre carré.

Lorsque ces matériaux sont refroidis à champ extérieur nul, ils ont la capacité de s'opposer aux variations de champ extérieur et peuvent ainsi être utilisés pour blinder une zone de l'espace par rapport à un champ magnétique.

Ce mémoire comporte quatre parties:

La première, après une introduction des matériaux supraconducteurs, présente la structure de l'inducteur. Le principe du blindage magnétique est expliqué par le modèle des états critiques de Bean. Nous validons le principe de la concentration de flux en effectuant une expérience à l'azote liquide.

Le blindage rend possible la concentration du champ magnétique qui est à la base de la structure étudiée. Afin de déterminer le matériau idéal pour la réalisation de ce type d'inducteur, nous discutons les caractéristiques des trois principaux matériaux généralement utilisés. Les capacités de ces supraconducteurs dépendent beaucoup de la température, nous présentons donc leur étude à 77K et à 4.2K.

Le deuxième chapitre traite des outils de calcul développés pour simuler le système étudié. Ne disposant pas de logiciel de calcul de champ au laboratoire, nous avons décidé de développer un outil de calcul de champ probabiliste en 3D. Après avoir réalisé une modélisation coulombienne du système, nous avons choisi une méthode de Monte-Carlo utilisant les chaînes de Markov. L'étude de cette méthode se découpe en deux parties concernant:

- Le calcul du potentiel scalaire magnétique.

Comme dans toute méthode probabiliste, le résultat obtenu est une estimation qui comporte une certaine erreur. Les erreurs produites en chaque point génèrent un bruit superposé au potentiel. La grandeur que nous cherchons à obtenir est le champ magnétique qui provient du gradient du potentiel. Se pose alors le problème de la dérivation de signaux bruités qui est l'objet de la partie suivante.

- La dérivation du potentiel.

Notre démarche a été d'essayer différentes méthodes allant de l'approximation polynomiale à la régularisation.

Une fois les outils de calcul opérationnels, nous avons dimensionné, fabriqué et testé un prototype d'inducteur. L'expérience nous a permis de valider le principe de fonctionnement ainsi que l'outil de calcul que nous avons développé. C'est l'objet du troisième chapitre.

Le prototype a été fabriqué avec des écrans d'YBaCuO disponibles dans le commerce qui, au moment de la fabrication, ne dépassaient guère 3 cm de diamètre. Depuis l'expérience, ce matériau a beaucoup évolué. Nous avons alors décidé, dans le quatrième chapitre, d'affiner le dimensionnement de l'inducteur et de voir les performances que nous pourrions obtenir avec des écrans deux fois plus grand que ceux utilisés lors de l'expérience. La taille des écrans étant la grandeur limitant les performances de l'inducteur, nous présentons des structures permettant d'obtenir des écrans de grandes tailles à partir d'éléments massifs ou de pastilles multicouches.

CHAPITRE 1 : MATÉRIAUX ET STRUCTURES

TABLE DES MATIÈRES DU CHAPITRE 1

I Introduction.....	11
II Le matériau supraconducteur.....	11
II.1 Bref historique.....	11
II.2 Les propriétés générales.....	13
II.3 Supraconducteur et conducteur parfait.....	14
II.4 Les grandeurs critiques.....	16
II.4.a La température critique.....	16
II.4.b Les champs critiques.....	16
II.4.c La densité de courant critique.....	19
II.4.d Surface critique.....	20
II.5 Les supraconducteurs à haute température critique.....	21
III Supraconducteurs et machines électriques.....	21
III.1 Les machines classiques « cuivre → supraconducteur ».....	21
III.2 Les machines classiques avec ajout de supraconducteurs.....	22
III.2.a Amélioration des machines à réductance variable.....	22
III.2.b Machine à plots ferromagnétiques saturés.....	23
III.3 Les machines spéciales.....	23
IV Structure proposée.....	23
IV.1 Les mécanismes du blindage magnétique.....	24
IV.1.a Principe.....	24
IV.1.b Le modèle des états critiques.....	25
IV.2 Modification de la répartition de l'induction magnétique.....	28
IV.3 Structure d'inducteur de la machine.....	30
V Comportement des SHTc pour la réalisation d' écrans magnétiques en champ faiblement variable.....	34
V.1 Stabilité du blindage.....	34
V.1.a Flux creep et flux flow.....	34
V.1.b Le saut de flux.....	35
V.2 Le BiSrCaCuO.....	36
V.2.a Le BiSrCaCuO à 77K.....	37
V.2.b Le BiSrCaCuO à 4.2 K.....	40
V.3 L'YBaCuO.....	43
V.3.a L'YBaCuO à 77K.....	44
V.3.b L'YBaCuO à 4.2K.....	46
V.4 Le MgB ₂	48
V.5 Choix du matériau.....	49
VII Conclusion.....	49

I INTRODUCTION

Les supraconducteurs sont des matériaux étonnants. Leur capacité à conduire le courant sans dissipation d'énergie ainsi que leur diamagnétisme permet la confections de systèmes électrotechniques plus performants.

L'objectif de cette partie est de présenter la structure de l'inducteur que nous allons étudier.

Pour cela, nous commencerons par présenter brièvement les propriétés des supraconducteurs d'un point de vue phénoménologique.

De nombreux ouvrages ont été rédigés sur les supraconducteurs dont voici quelques références [TIX95] [BAI98] [WIL83] [POO95] [BRU].

Dans les applications électrotechniques, ces matériaux sont utilisés sous différentes formes : câble multifilamentaire, éléments massifs, ruban, en fonction de l'effet désiré. Nous présenterons rapidement les grandes familles de moteurs supraconducteurs pour arriver à la structure de notre machine.

La structure de la machine proposée étant basée sur la concentration du flux magnétique, nous nous intéresserons plus particulièrement aux supraconducteurs à haute température critique en vue de leur utilisation en blindage de champ magnétique.

Nous mettrons en avant les matériaux à haute température critique les plus intéressants pour le blindage magnétique.

II LE MATÉRIAU SUPRACONDUCTEUR

II.1 Bref historique

Quel électrotechnicien n'a pas rêvé d'un conducteur de courant électrique ne dissipant pas d'énergie ? C'est en 1911 que, pour la première fois, un tel conducteur a été mis à jour. Kammerling Onnes, ayant réussi à atteindre des températures de inférieures à 4 Kelvins en liquéfiant de l'hélium, décida de tester différents conducteurs de l'électricité à très basse température. Aidé par G. Holtz, il s'aperçut que la résistance électrique du mercure devenait brutalement non mesurable lorsque la température devenait inférieure à 4 K, cette température à laquelle le matériau devient supraconducteur est appelée température critique. La supraconductivité était découverte.

C'est en 1933 que Meissner et Ochsenfeld découvrent la deuxième signature des supraconducteurs : le diamagnétisme. Un supraconducteur soumis à un champ magnétique extérieur l'expulse de son volume. Les recherches sur la supraconductivité se sont poursuivies et de nombreuses théories essayant d'expliquer le phénomènes ont vu le jour, mais ce n'est qu'en 1957 qu'une théorie parvint à expliquer le phénomène de manière convaincante: la théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS). La plus haute température en dessous de laquelle la supraconductivité existait alors était de l'ordre de 23 K avec un alliage à base de niobium.

En 1986, une révolution dans le monde de la supraconductivité arriva. Berdnoz et Müller découvrent que certaines céramiques à base d'oxyde de cuivre deviennent supraconductrices, et ce, jusqu'à des températures de l'ordre de 100 K. La température de l'azote liquide étant dépassée, les activités de recherche autour de cette supraconductivité dite à « haute température critique » se multiplient. La supraconductivité a déjà donné lieu à quatre prix Nobel.

Le tableau suivant indique les dates importantes dans la recherche autour de la supraconductivité [TIX95].

<i>Année</i>	<i>Faits ayant marqué la recherche autour de la supraconductivité</i>
1908	Liquéfaction de l'hélium par K. Onnes
1911	Découverte de la supraconductivité par K. Onnes et G. Holst sur un échantillon de mercure dans un bain d'hélium liquide
1913	Échec du premier aimant supraconducteur
1933	Mise en évidence du diamagnétisme des supraconducteurs par Meissner et Ochsenfeld
1954	Premier aimant supraconducteur (Nb)
1957	Théorie microscopique de la supraconductivité par Bardeen Cooper et Schrieffer
1958	Mise au point de conducteurs NbZr et Nb ₃ Sn
1960	Découverte des fortes densités de courant sous induction élevée
1962	B. Josephson prédit les effets quantiques qui portent son nom (effet Josephson)
1964	Première application significative des supraconducteurs à Argonne
1965	Premiers cryoalternateurs
1968	Définition du brin multifilamentaire par le laboratoire Rutherford
1974	Mise en service de la chambre à bulle BEBC au CERN
1982	Premières images IRM, et première application industrielle et commerciale des supraconducteurs
1983	Mise au point des câbles multifilamentaires supraconducteurs alternatifs par Alcatel Alsthom Recherche et GEC Alsthom. Premier accélérateur supraconducteur (TEVATRON)
1986	Berdnoz et Muller découvrent la supraconductivité à haute température critique de céramiques à base d'oxyde
1987	Envolée des températures critiques (YBaCuO, 93 K) Démarrage de TORE SUPRA à Cadarache
1988	Mise en fonctionnement de T15 (Nb ₃ Sn, 6.4 T, 4.5 K)
1989	Mise en fonctionnement du système de champ toroïdale de TORE SUPRA
1999	Test du premier système RMN à 900 MHz
1999	Test des bobines modèles d'ITER
1999	Début de construction du LHC

Tableau 1: événements ayant marqué l'histoire de la supraconductivité[TIX95]

L'utilisation des supraconducteurs permet un gain de performance considérable par rapport aux systèmes électrotechniques traditionnels, et ce, malgré un environnement cryogénique difficile à mettre en œuvre et relativement coûteux. C'est pourquoi les applications des supraconducteurs se situent dans la gamme des fortes puissances. Cet aspect freine le développement des applications industrielles. De ce fait, une grande partie de la recherche sur ce matériau concerne le moyen d'obtenir des supraconducteurs toujours plus « chauds ». La figure suivante montre l'évolution des températures critiques depuis la découverte des supraconducteur jusqu'à aujourd'hui.

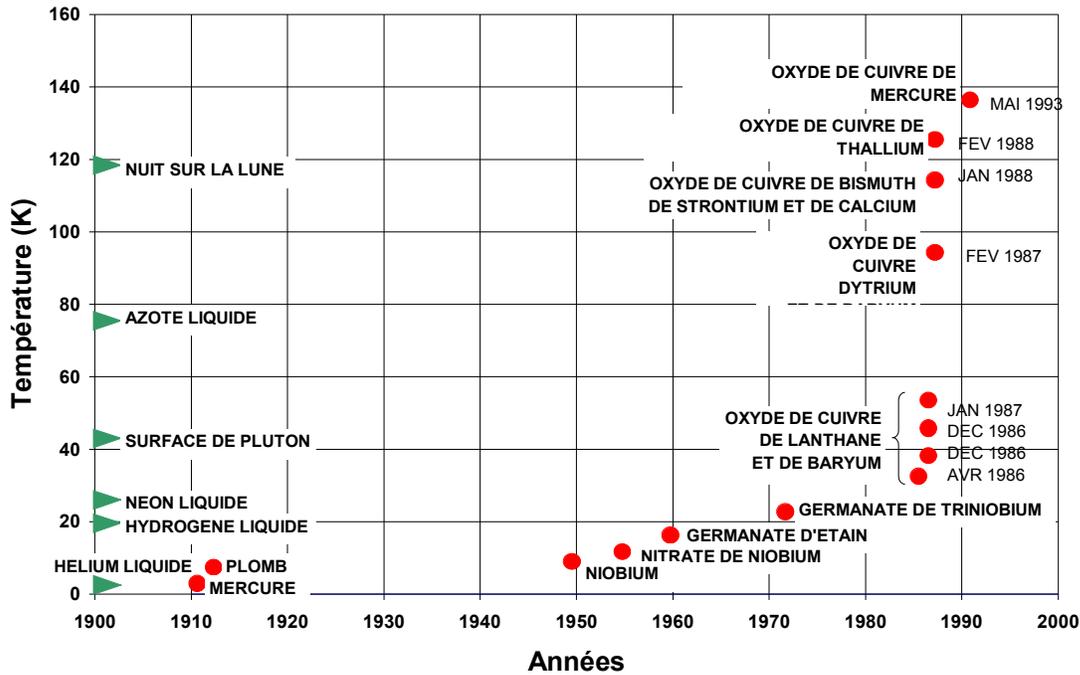


Figure 1: évolution des températures critiques ($B=0T$)

II.2 Les propriétés générales

Un supraconducteur est un matériau qui voit ses caractéristiques magnéto-électriques se modifier lorsque la température devient inférieure à une certaine valeur appelée température critique (T_c) et que le champ magnétique extérieur est inférieur à une valeur appelée champ critique (H_c) :

- sa résistivité devient non mesurable en courant continu ($<10^{-25}\Omega m$).

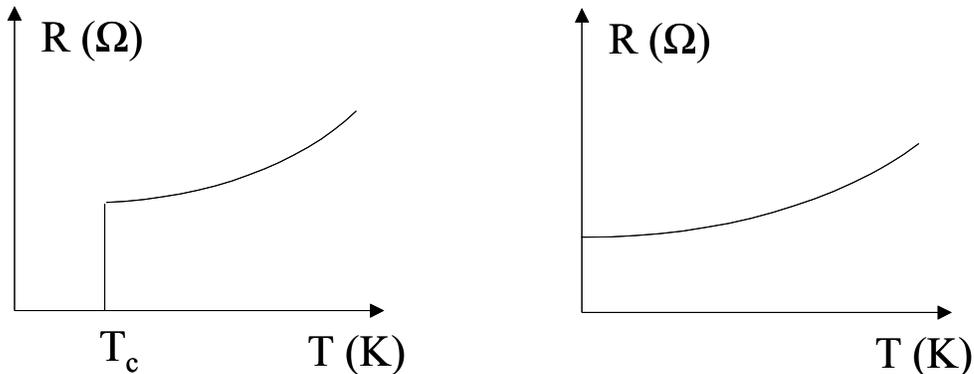


Figure 2 : évolution des résistances électriques pour un conducteur (b) et un supraconducteur (a) en fonction de la température

- son diamagnétisme tend à devenir parfait: lorsque le supraconducteur est refroidi. Il expulse alors le champ magnétique de son volume.

C'est l'effet Meissner-Ochsenfeld. Nous détaillons un peu plus loin dans ce chapitre ces caractéristiques qui varient suivant le type de matériau.

II.3 Supraconducteur et conducteur parfait

Peut-on considérer un supraconducteur comme un conducteur parfait ? Un conducteur parfait pourrait être défini comme ayant une résistance électrique nulle ($R=0$).

Le diamagnétisme serait donc la différence fondamentale entre un supraconducteur et un conducteur parfait. Nous allons nous intéresser au comportement magnétique d'un matériau supraconducteur lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué.

Tout d'abord, voyons la cas du refroidissement sous champ:

étape 1: le champ magnétique est appliqué

étape 2: le matériau est refroidi en dessous de sa température critique

étape 3: le champ magnétique extérieur s'annule.

La figure suivante représente la comparaison entre un conducteur parfait et un supraconducteur lors d'un refroidissement sous champ.

	Étape 1 Sous champ $B=B_{max}$	Étape 2 Sous champ $B=B_{max}$	Étape 3 Hors champ $B=0$
Conducteur parfait			
Supra-conducteur	 $T > T_c$	 $T < T_c$	 $T < T_c$

Figure 3 : comparaison entre un conducteur parfait et un supraconducteur de type I lors d'un refroidissement sous champ

Nous pouvons constater que lors de l'étape 1, les deux matériaux sont dans la même configuration.

Dans l'étape 2, le supraconducteur expulse le champ magnétique de son volume, il est dans l'état Meissner. Le conducteur parfait voit le champ magnétique dans tout son volume.

Pendant l'étape 3, lors de l'annulation du champ magnétique, le supraconducteur se retrouve dans l'état de l'étape 1, alors que le conducteur parfait a piégé le flux du champ magnétique extérieur qui le pénétrait dans l'étape 2.

Voyons maintenant le comportement de ces matériaux lors d'un refroidissement en champ extérieur nul.

Étape 1: la température est supérieure à la température critique du supraconducteur et le champ magnétique extérieur est nul.

Étape 2: la température descend en dessous de la température critique du matériau et, une fois le matériau dans l'état supraconducteur, le champ magnétique est appliqué.

Étape 3: le champ magnétique extérieur est annulé.

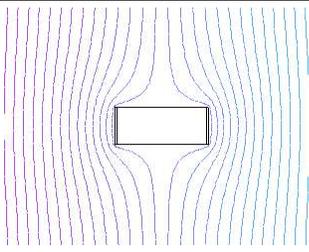
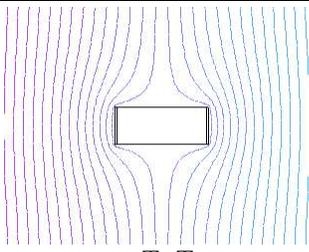
	Étape 1 Hors champ $B=0$	Étape 2 Sous champ $B=B_{max}$	Étape 3 Hors champ $B=0$
Conducteur parfait			
Supra-conducteur			
	$T > T_c$	$T < T_c$	$T < T_c$

Figure 4: comparaison entre un conducteur parfait et un supraconducteur lors d'un refroidissement hors champ

Nous voyons que le supraconducteur et le conducteur parfait ont le même comportement lors d'un refroidissement hors champ.

C'est à dire que même si l'état Meissner n'existait pas, un supraconducteur refroidi hors champ expulserait le champ magnétique de son volume.

Dans ce cas, le phénomène mis en jeu est la loi de Lenz : des courant se créent pour s'opposer à toute variation de flux magnétique.

Ces courant n'étant pas amortis, ils circulent et maintiennent le conducteur à une valeur de flux constante.

D'après cette loi, un conducteur parfait ne peut pas voir de variation de flux magnétique.

Nous verrons que l'état Meissner est détruit lorsque le champ magnétique extérieur dépasse quelques milliteslas.

En conclusion, si nous voulons modifier la répartition spatiale du champ magnétique à l'aide de supraconducteurs, nous devons utiliser un refroidissement hors champ.

II.4 Les grandeurs critiques

II.4.a La température critique

La température critique est la température en dessous de laquelle la supraconductivité apparaît. Cette température est différente pour chaque matériau et dépend de la densité de courant et du champ magnétique appliqué.

Les supraconducteurs à basse température critique ont des températures critiques inférieures à 23K, par exemple pour le NbTi, $T_c=11K$.

Les supraconducteurs à haute température critique ont une température critique nettement supérieure, par exemple pour l'YBaCuO, $T_c=92K$, le BiSrCaCuO, $T_c=110K$.

II.4.b Les champs critiques

On distingue deux familles de supraconducteurs.

- Supraconducteurs de type I.

Les supraconducteurs de type I sont, en général, des corps simples tels que l'étain ou le plomb. Ce sont les premiers supraconducteurs à avoir été découverts.

Ce type de matériau présente un diamagnétisme parfait tant que l'état supraconducteur subsiste.

L'état supraconducteur peut être détruit par l'application d'un champ extérieur. La valeur du champ pour laquelle le matériau revient à l'état normal est appelée champ critique et notée H_c . La figure 5 illustre le phénomène.

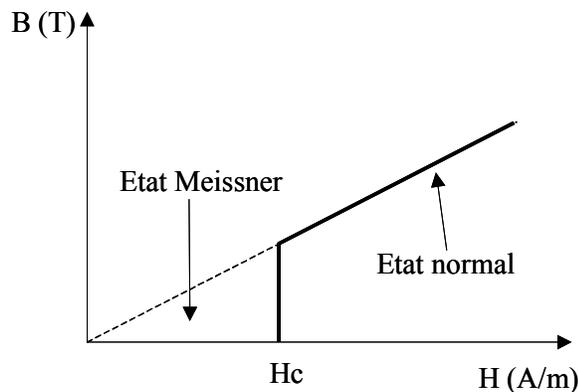


Figure 5: illustration de champ critique pour un supraconducteur de type I

Lorsque le champ magnétique extérieur est inférieur à H_c , le champ magnétique dans le volume du supraconducteur est nul, sauf dans une petite zone de circulation des courants.

La largeur de cette zone est égale à la longueur de London λ_L définie sur la figure suivante.

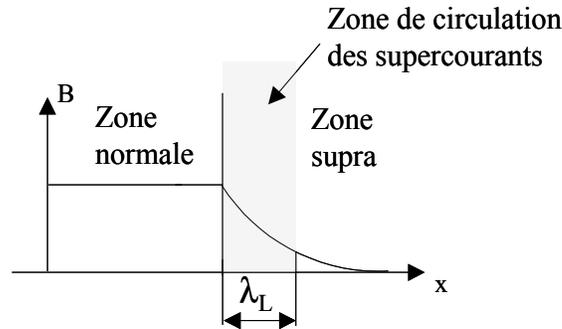


Figure 6: longueur de London

- Supraconducteurs de type II.

Il existe des supraconducteurs pour lesquels il est énergétiquement favorable de créer une cohabitation de zones normales et de zones supraconductrices lorsque le champ magnétique dépasse une certaine valeur appelée H_{c1} . Au delà de cette valeur de champ, le matériau est toujours supraconducteur, mais dans un état mixte.

L'état supraconducteur est maintenu jusqu'à une certaine valeur du champ magnétique appelée H_{c2} au delà de laquelle la supraconductivité disparaît.

Ces supraconducteurs dits de type II sont, en général, des alliages ou des corps composés de plusieurs éléments comme, par exemple, le NbTi ou le BiSrCaCuO.

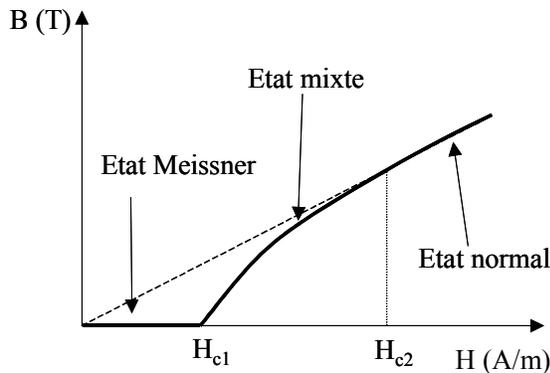


Figure 7 : courbe $B(H)$ pour un supraconducteur de type II

Lorsque le supraconducteur est dans l'état mixte, une partie du champ magnétique le traverse. Il coexiste donc des zones normales et des zones supraconductrices. Ces zones normales appelées *vortex* laissent passer un quantum de flux ϕ_0 . Avec, si h est la constante de Plank et e la charge de l'électron,

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.10^{-15} \text{ Wb}$$

La figure 8 illustre la constitution d'un vortex.

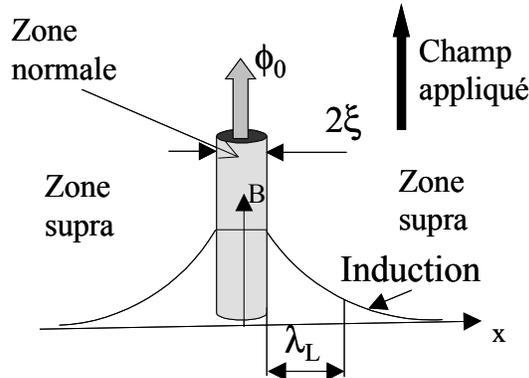


Figure 8 : constitution d'un vortex

Les supercourants circulent dans l'épaisseur de valeur λ_L autour des vortex. Un vortex possède un rayon égal à la longueur de cohérence ξ . Les vortex se repoussent et se placent donc selon une organisation régulière conduisant à un niveau d'énergie minimal, souvent selon un réseau triangulaire.

Dans le cas d'un refroidissement sous champ, les vortex se créent, laissant passer du flux magnétique à travers le matériau comme le représente la figure suivante:

$T > T_c$ $B = B_{max}$ <i>État normal sous champ</i>	$T < T_c$ $B = B_{max}$ <i>État mixte</i>

Il serait intéressant de quantifier le flux magnétique qui traverse le matériau.

Nous voyons que, si par l'expérience on peut déterminer la densité des vortex. Il est aisé d'obtenir un ordre de grandeur de la valeur du flux magnétique traversant un supraconducteur en effectuant un refroidissement sous champ d'un massif supraconducteur.

La distance d entre deux vortex est donnée par la relation suivante [BRU] :

$$d = \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\phi_0}{B} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (I.1)$$

A partir de cette expression, nous pouvons retrouver le flux qui traverse le supraconducteur.

Si on considère une induction extérieure uniforme et de valeur 5T, la distance d vaut alors environ 23nm.

$$B = 5 \text{ T} \Rightarrow d = 23 \text{ nm}$$

Connaissant la distance séparant les vortex, nous pouvons calculer leur densité.

On peut obtenir une bonne approximation de l'occupation moyenne d'un vortex en la prenant égale à d^2 . La densité s'écrit alors $1/d^2$.

Après application numérique, la densité de vortex est de l'ordre de $2.10^{15} /m^2$.

Chaque vortex laissant passer un quantum de flux, le flux total à travers $1 m^2$ de supraconducteur vaut:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{d^2} = 4 \text{ Wb}/m^2 \quad (I.2)$$

A travers la même surface et sans supraconducteur, le champ vaut 5 T, ce qui nous conduit à un flux de 5 Wb.

En résumé, à surface donnée, nous pouvons dire que:

- sans le matériau supraconducteur, le flux vaut 5 Wb/m².
- avec le supraconducteur refroidi sous champ, le flux vaut 4 Wb/m².

C'est à dire que le supraconducteur dans son état mixte et lors d'un refroidissement sous champ laisse passer 80% du champ magnétique. Le diamagnétisme est donc très partiel.

Si nous désirons empêcher le flux magnétique de traverser le matériau supraconducteur, un refroidissement sous champ n'est pas envisageable. Il faut donc effectuer un refroidissement hors champ.

Dorénavant, toute manipulation correspond à un refroidissement hors champ.

II.4.c La densité de courant critique

- Supraconducteur de type I.

Pour les supraconducteurs de type I, il existe une valeur pour la densité de courant au delà de laquelle le supraconducteur transite dans l'état normal. Cette valeur définit la densité de courant critique.

- Supraconducteur de type II.

Au dessus de H_{c1} , des vortex se développent. Si un courant se met à circuler dans le matériau, des forces de Laplace vont s'appliquer aux vortex et donc provoquer la mise en mouvement de tout le réseau.

Ce déplacement des vortex génère une dissipation d'énergie pouvant provoquer la transition du matériau. Avec ce raisonnement, un supraconducteur de type II ne pourrait pas transporter de courant, et donc, la densité de courant serait nulle.

Pour remédier à ce problème, des sites d'ancrage pour les vortex sont insérés volontairement dans le matériau sous la forme d'impuretés ou de dislocations. Il suffit d'ancrer quelques vortex pour tenir le réseau entier, celui-ci étant relativement rigide.

Nous pouvons alors définir la densité de courant comme étant celle qui provoque le « désancrage » des vortex et donc le déplacement du réseau.

Nous pouvons donc définir deux modes de fonctionnement pour le supraconducteur:

- Si $J < J_c$, le réseau de vortex est ancré, néanmoins, des vortex passent d'un site d'ancrage à un autre sous l'action de l'agitation thermique. Ce phénomène dissipatif est appelé régime de « flux creep ».
- Si $J > J_c$, le réseau de vortex se déplace et génère des pertes faisant apparaître une résistance électrique dans le matériau supraconducteur. Ce phénomène est appelé régime de « flux flow ».

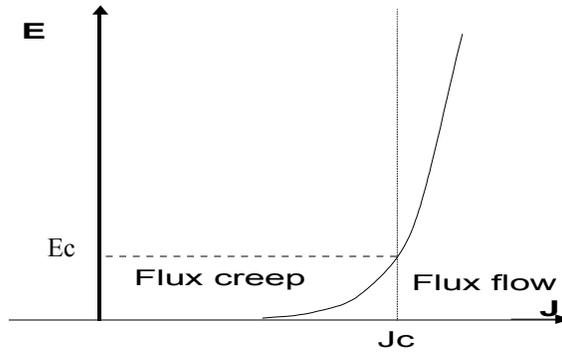


Figure 9: caractéristique $E(J)$ des supraconducteurs de type II

Les deux régimes de fonctionnement peuvent être représentés sur la caractéristique $E(J)$ présentée sur la figure 9.

La densité de courant critique peut alors être définie comme étant la limite entre le régime de flux creep et le régime de flux flow. Cette limite étant très floue, la densité critique de courant est souvent déterminée par la valeur d'un champ électrique critique E_c .

II.4.d Surface critique

Il existe des dépendances entre les grandeurs critiques que nous avons présenté. Nous pouvons alors définir une surface critique suivant les trois axes température, densité de courant et champ magnétique caractérisant l'état d'un matériau supraconducteur.

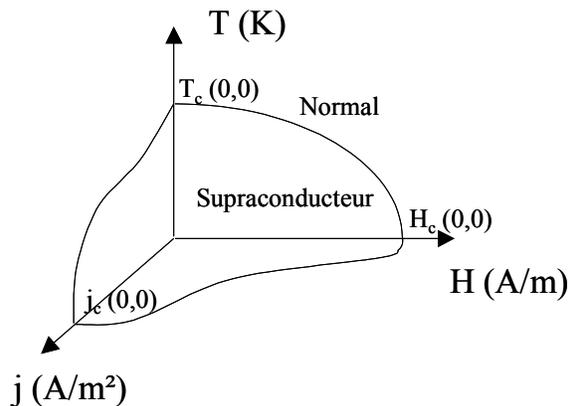


Figure 10 : surface critique (T,H,j) délimitant l'état normal de l'état supraconducteur

Si le point de fonctionnement du matériau est situé en dessous de la surface représentée plus haut, le matériau est alors dans un état non dissipatif.

II.5 Les supraconducteurs à haute température critique

Les supraconducteurs à haute température critique sont des céramiques. Certains sont constitués d'un matériau fritté, c'est à dire qu'ils sont constitués de grains qui ont été compressés. Les plus utilisés sont les BiSrCaCuO (Bi-2223 et Bi-2212).

Dans ce type de matériau, il convient de considérer deux densités de courant différentes : la densité de courant intra-grain et la densité inter-grains [VAN99].

Pour les différentes applications de ces supraconducteurs, la densité à prendre en considération est la densité de courant inter-grains. En effet, les grains sont en général de très petite taille et les courants dominants sont ceux qui passent d'un grain à l'autre.

La densité de courant inter-grains est beaucoup plus faible que la densité intra-grain, elle peut être améliorée en texturant le matériau, c'est à dire en orientant les grains composant l'échantillon et ainsi, en favorisant une direction pour le courant. Cette texturation peut être réalisée par laminage ou par l'application d'un champ magnétique pendant certaines phases de fabrication.

Ces matériaux frittés ne possèdent pas d'anisotropie lors de leur fabrication, néanmoins, lors de leur texturation une anisotropie en terme de circulation du courant apparaît. L'axe de la texturation devra donc être choisi en fonction de l'utilisation du matériau.

D'autres matériaux, tels que l'YBaCuO, peuvent être constitués d'un monodomaine. La densité de courant à considérer est alors la densité intra-grain. Le monodomaine d'YBaCuO permet donc de développer une densité de courant très élevée, néanmoins, un monodomaine ne peut pas être produit avec une grande dimension, le diamètre maximale actuel est d'environ 50mm et au delà de 100mm en laboratoire.

Ce matériau possède naturellement une forte anisotropie en ce qui concerne la densité de courant.

III SUPRACONDUCTEURS ET MACHINES ÉLECTRIQUES

Depuis la découverte de la supraconductivité, de très nombreux moteurs supraconducteurs ont été construits. En effectuer une classification n'est pas une chose aisée tant leurs structures sont différentes. Cette partie a pour objectif de donner un aperçu non exhaustif des différents types de moteurs supraconducteurs existant.

III.1 Les machines classiques « cuivre → supraconducteur »

Les supraconducteurs étant capables de transporter le courant électrique sans dissipation d'énergie, la première idée a été de remplacer les fils de cuivre par des fils supraconducteurs. Dans un premier temps, les câbles à basse température critique ne supportant pas les variations du champ magnétique, ces derniers ont été utilisés pour générer les champs d'inducteur des machines synchrones.

L'arrivée du fil alternatif a permis la réalisation de machines synchrones entièrement supraconductrices avec inducteur supraconducteur ou à aimants permanents [TIX99].

Ces machines fonctionnent comme des machines traditionnelles, le supraconducteur sert à augmenter les performances, car, grâce à son absence de résistance électrique, des courants très élevés peuvent être utilisés.

Le refroidissement des éléments supraconducteurs nécessite l'utilisation d'un cryostat qui augmente la taille de l'entrefer. L'induction au niveau de l'entrefer reste aux alentours du tesla. Le gain de performance provient du fort taux de remplissage des conducteurs de l'induit.

III.2 Les machines classiques avec ajout de supraconducteurs

III.2.a Amélioration des machines à réluctance variable

Dans les machines synchro-réductantes, le rotor se place dans la direction favorisant une valeur de flux maximum. Le couple produit par ces moteurs est proportionnel à la différence des inductances d'axe d et d'axe q. Il est possible d'amplifier cette différence, donc le couple, en plaçant un matériau ferromagnétique dans un axe et un matériau diamagnétique dans l'autre axe. Cette amélioration permet un gain conséquent au niveau du couple électromagnétique [OSW99]. La figure suivante présente un rotor de machine synchro-réductante à deux pôles avec un induit sans fer [BAR99].

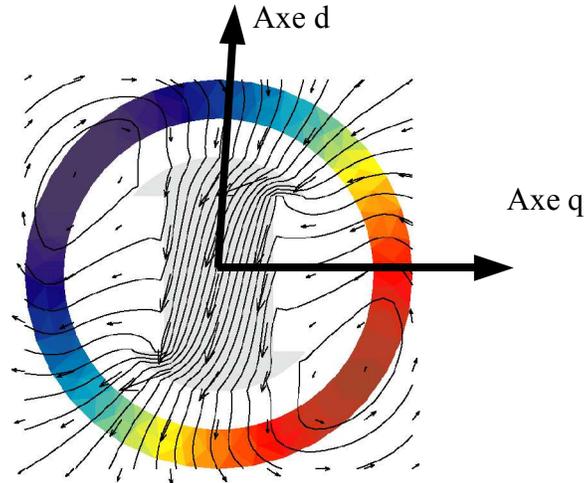


Figure 11 : lignes de champs dans un rotor de moteur synchro-réductant [BAR99]

Nous pouvons voir l'existence de lignes de champs indésirables sur les parties où l'entrefer est le plus élevé. Ces lignes qui ne passent pas par le rotor ne créent pas de couple.

Afin de pallier ce problème, des écrans supraconducteurs peuvent être insérés entre les pôles afin d'augmenter le nombre de lignes de champ créant du couple, le flux dans le matériau ferromagnétique augmente, comme le montre la figure suivante [BAR99].

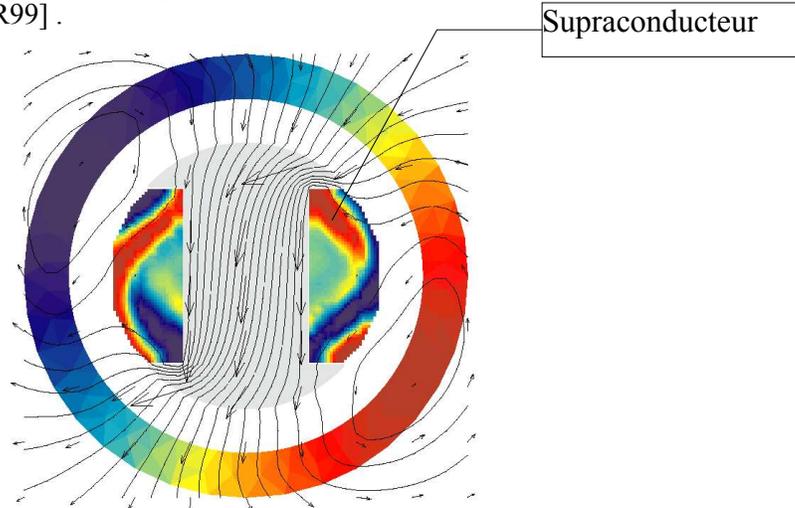
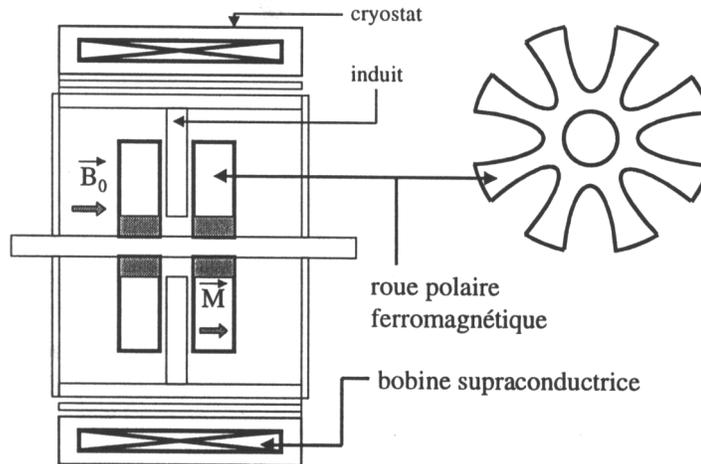


Figure 12 : lignes de champ dans le rotor d'un moteur synchro-réductant amélioré par deux écrans supraconducteurs [BAR99].

De nombreuses autres structures découlent de ce type de machine. Par exemple, au lieu de placer les écrans supraconducteurs entre les pôles magnétiques, on peut créer un rotor à pans coupée comme celui présenté précédemment, ou à pôles lisses, mais un réalisant un feuilletage de celui-ci en alternant un couche de matériau ferromagnétique et une couche de matériau supraconducteur.

III.2.b Machine à plots ferromagnétiques saturés

Une machine à plots ferromagnétiques peut être améliorée par une aimantation due à un champ magnétique extérieur. C'est le cas pour la machine « supersat » qui utilise la saturation de plots ferromagnétiques à l'aide de bobines supraconductrices [REZ87].



Les avantages de ce type de moteur résident dans sa simplicité de fabrication : un solénoïde supraconducteur fixe et des roues dentées ferromagnétiques taillées dans la masse.

III.3 Les machines spéciales

Il existe de nombreuses structures innovantes utilisant des supraconducteurs à haute température critique pour leur propriété de transport du courant ou de lévitation magnétique.

Un exemple de machine qui exploite le comportement magnétique des supraconducteurs est celui de la machine à hystérésis. Ce moteur fonctionne grâce au comportement magnétique hystérétique des supraconducteurs à haute température critique. Le rotor composé de céramique supraconductrice massive est refroidi à champ nul, puis placé dans un champ tournant, les supraconducteurs développent des courants qui, au bout d'une période transitoire, polarisent magnétiquement le rotor qui peut alors interagir avec le champ tournant et créer ainsi du couple [BAR00].

IV STRUCTURE PROPOSÉE

Nous avons vu qu'il existe de nombreuses structures de moteur supraconducteur qui utilisent les deux caractéristiques fondamentales du matériau supraconducteur. Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à une structure utilisant le matériau supraconducteur pour diriger et concentrer le champ magnétique.

Nous allons tout d'abord expliquer le principe du blindage magnétique par refroidissement hors champ des supraconducteurs.

Nous présentons ensuite une expérience montrant qu'on peut modifier la répartition spatiale de l'induction magnétique à l'aide de supraconducteurs refroidis à champ nul, et ainsi augmenter la valeur de l'induction magnétique par concentration du flux.

Nous aboutirons à la structure de l'inducteur que nous allons étudier et qui fonctionne sur le principe de la concentration du flux magnétique.

IV.1 Les mécanismes du blindage magnétique

Nous appelons blindage magnétique la capacité d'un supraconducteur refroidi hors champ à repousser les lignes de champ magnétique. Nous présentons dans cette partie le principe du blindage ainsi que le modèle des états critiques de Bean qui permet d'avoir une approche simple du phénomène.

IV.1.a Principe

D'après la loi de Lenz, lorsqu'un circuit conducteur est soumis à une variation du flux magnétique à travers sa section, celui-ci développe des courants qui s'opposent à la variation de flux et donc au phénomène qui a créé la variation de flux. Par exemple, la figure 13 présente un anneau conducteur devant lequel, un aimant permanent est avancé. Des courants se développent dans l'anneau afin de s'opposer à la variation du flux et génèrent donc une force qui s'oppose au déplacement de l'aimant.

Dans un conducteur résistif, les courants induits s'amortissent.

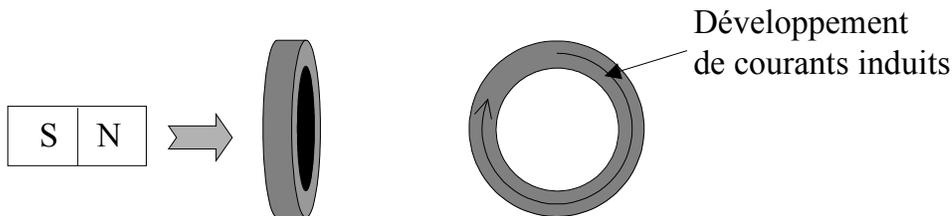


Figure 13: illustration de la loi de Lenz

Un élément supraconducteur soumis à une variation de champ magnétique extérieur développe des courants qui s'opposent à la variation du flux magnétique dans le volume de l'élément. Ces courants, non amortis, maintiennent la valeur du flux constante.

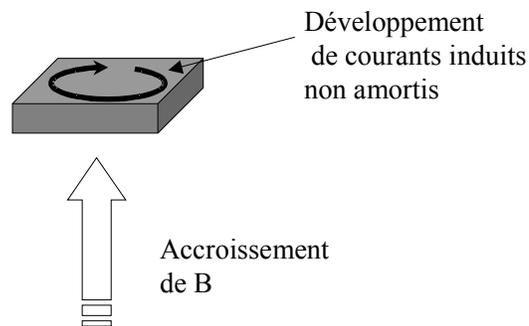


Figure 14: principe du blindage par supraconducteur massif

Un supraconducteur ne peut pas voir de variation de flux dans son volume. La figure 14 illustre le principe du blindage magnétique par supraconducteur massif.

Si un supraconducteur est refroidi à champ nul, il va « essayer », dans les limites de ses capacités (essentiellement en terme de densité de courant) de garder un champ nul dans son volume. Tout champ magnétique imposé de l'extérieur est donc repoussé et les lignes d'induction contournent le matériau.

IV.1.b Le modèle des états critiques

Afin de mieux comprendre le phénomène de blindage magnétique ainsi que ses limites, voyons comment le modèle des états critiques de Bean prédit le développement des courants.

La figure 15 présente une plaque supraconductrice ayant pour dimension $2a$ suivant l'axe x et étant de grandes dimensions suivant les deux autres axes y et z .

En 1964, C.P. Bean [BEA64] a présenté un modèle basé sur le principe que la densité de courant dans un supraconducteur est soit nulle, soit égale à sa densité de courant critique J_c .

$$J=0 \quad \text{ou} \quad J=J_c$$

Dans des cas simples, ce modèle permet de prévoir le comportement des supraconducteurs. Nous allons présenter le cas simple d'une plaque supraconductrice.

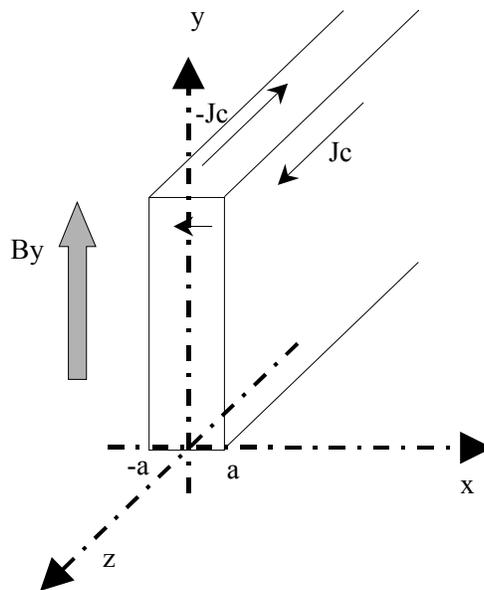


Figure 15: plaque supraconductrice infiniment longue

Si un champ extérieur croissant (B_y) est appliqué suivant l'axe y , des courants sont induits afin de s'opposer à la variation du flux à l'intérieur de la plaque. Ces courants sont très proches des courants de Foucault à l'exception près qu'ils ne s'amortissent pas, car le supraconducteur ne présente pas de résistance électrique.

La figure suivante représente le profil de la distribution de l'induction à l'intérieur de la plaque supraconductrice pour différentes valeurs de la composante suivant l'axe y du champ appliqué.

Considérons un accroissement ΔB partant de $B=0T$. Cet accroissement de champ va produire le développement de courants dans une zone de largeur Δp . Dans cette zone, nous avons développement de courants de densité J_c et donc pénétration de l'induction. Le reste du volume reste à courant et à champ nul.

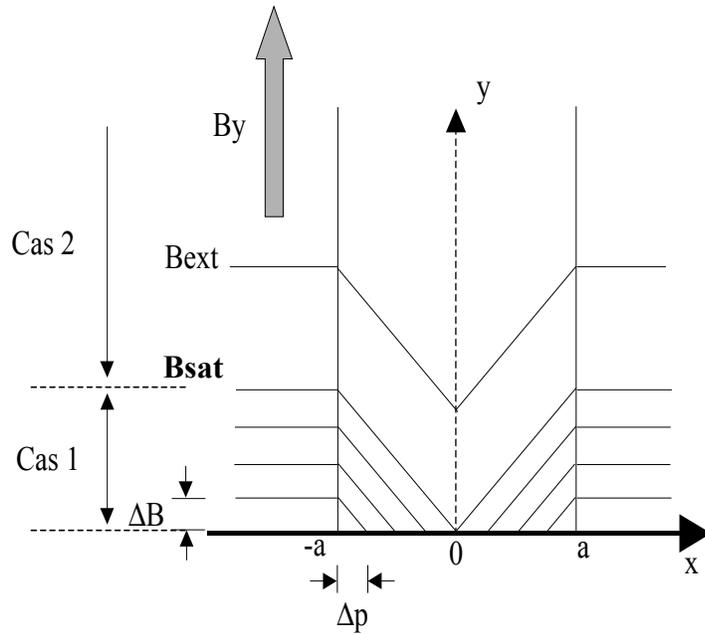


Figure 16: modèle des états critiques

Les courants se développent donc de l'extérieur du matériau vers l'intérieur. Lorsque le courant occupe tout le volume du supraconducteur, un accroissement supplémentaire du champ extérieur ne peut être contrôlé par la création d'un courant supplémentaire, l'accroissement de champ pénètre donc le supraconducteur.

Nous appellerons ce cas la saturation en courant. C'est la limite de la capacité de blindage du matériau.

Pour une application de blindage magnétique, le supraconducteur est refroidi à champ extérieur nul. Ensuite, le champ magnétique croît jusqu'à la valeur désirée. Le supraconducteur n'est alors soumis qu'à un accroissement du champ permettant le développement des courants de blindage.

En s'appuyant sur la figure 16, on fait apparaître deux cas:

- cas 1 : le supraconducteur n'est pas saturé en courant.

Si on représente un cycle de champ magnétique $B=0 \text{ T} \Rightarrow B=B_{\text{max}} \Rightarrow B=0 \text{ T}$. Le cas non saturé correspond à $B_{\text{max}} < B_{\text{sat}}$.

B_{sat} étant la valeur de l'induction nécessaire pour saturer le supraconducteur en courant.

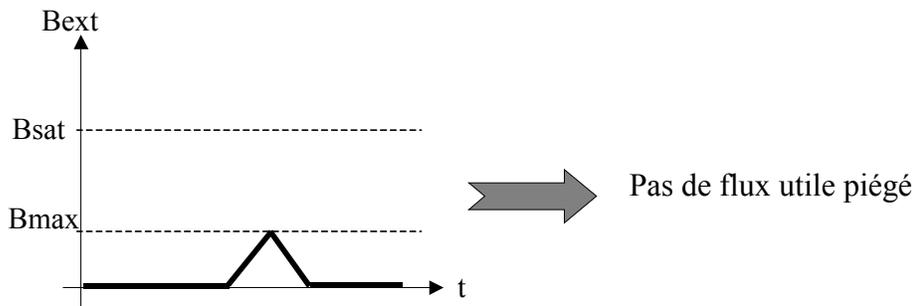


Figure 17: cycle de champ inférieur à B_{sat}

Dans ce cas, aucun flux magnétique utile n'est piégé, néanmoins, des courants antagonistes circulent dans le supraconducteur comme nous pouvons le constater sur la figure 18 et il existe un flux résiduel dans le matériau. Ces courants ont été créés par la montée et la descente du champ extérieur.

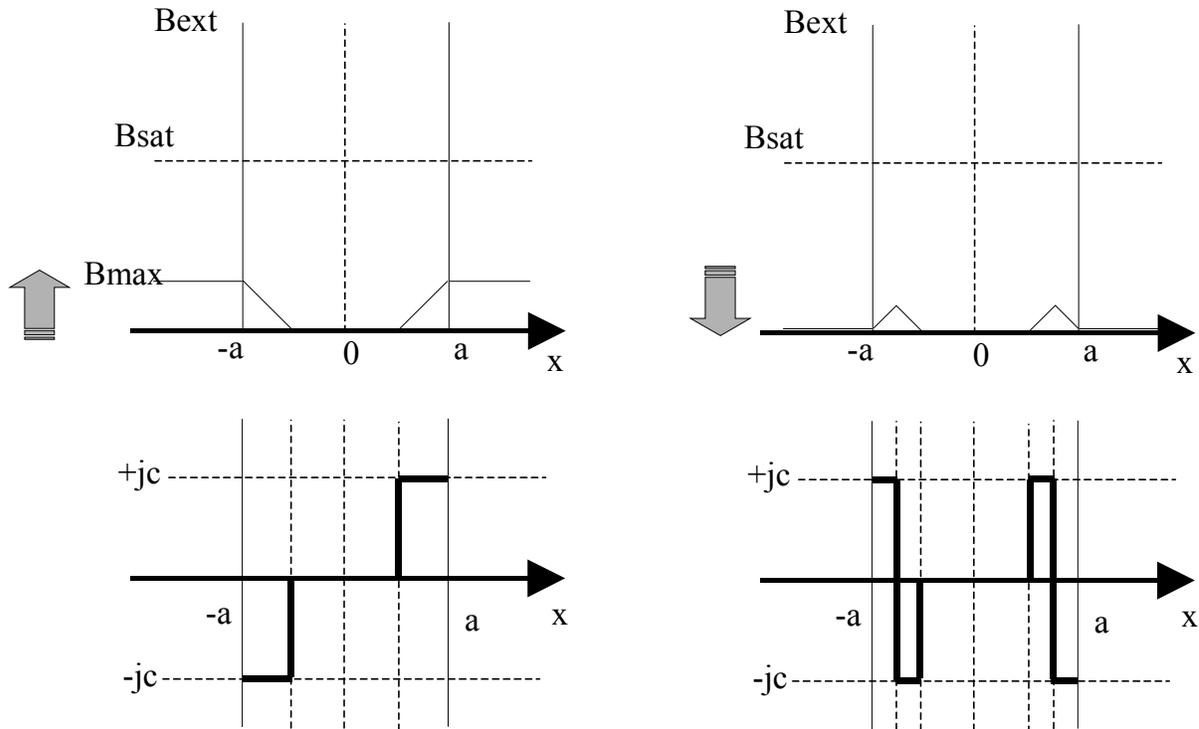


Figure 18: modèle des tas de sable pour un supraconducteur non saturé.

Les courants antagonistes créés lors du cycle ont une contribution en champ très faible vu de l'extérieur du matériau.

- Cas 2 : le supraconducteur est saturé en courant.

Ce cas est représenté par $B_{max} > B_{sat}$. Nous avons représenté sur la figure 19 un cycle de champ magnétique extérieur en fonction du temps.

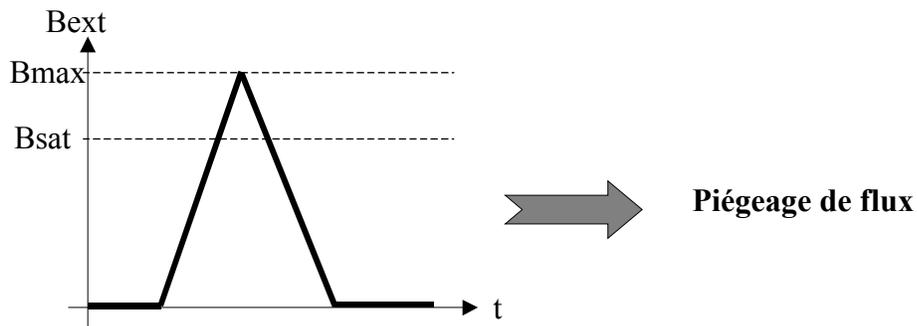


Figure 19: cycle de champ magnétique conduisant à la saturation du supraconducteur.

Le champ magnétique extérieur ayant continué à augmenter au delà de la valeur de saturation, un flux magnétique a pénétré le supraconducteur et donc, conformément à la loi de Lenz, ce flux a été piégé. Le supraconducteur est alors saturé en courant.

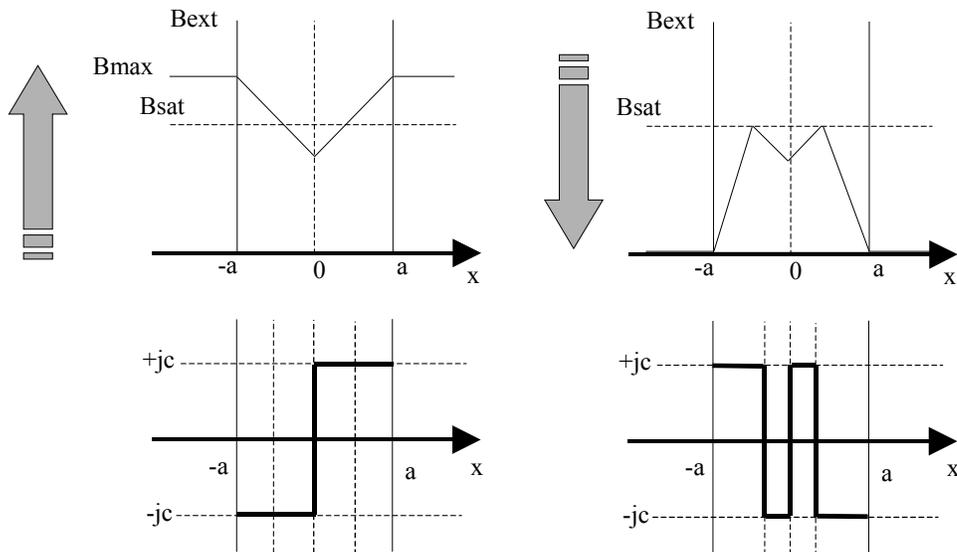


Figure 20: modèle des tas de sable pour un supraconducteur saturé en courant.

Nous pouvons constater dans ce cas que lorsque le champ magnétique extérieur est revenu à zéro, les courants qui circulent dans le matériau ne se compensent pas. Le matériau a donc piégé du flux.

La valeur du champ magnétique extérieur conduisant à la saturation en courant du matériau est une donnée très importante lorsqu'on désire obtenir un blindage magnétique efficace. Cette valeur dépend de la densité critique du courant et constitue un critère de choix pour le matériau.

Plus la densité de courant critique est élevée, plus la valeur de B_{sat} est élevée.

IV.2 Modification de la répartition de l'induction magnétique

Nous avons vu le principe du blindage magnétique par supraconducteurs massifs. Les supraconducteurs, refroidis à champ nul, s'opposent aux variations du champ magnétique. Cette réaction des supraconducteurs déforment les lignes de champ qui ont tendance à contourner matériau. Nous pouvons utiliser ce phénomène pour réaliser une concentration de l'induction.

Deux bobines en série et de même axe créent un champ magnétique tel que celui représenté sur la figure 22. La figure 21 donne une idée de la valeur de l'induction dans une telle structure. Les zones sombres sont les zones dans lesquelles l'induction est la plus élevée.

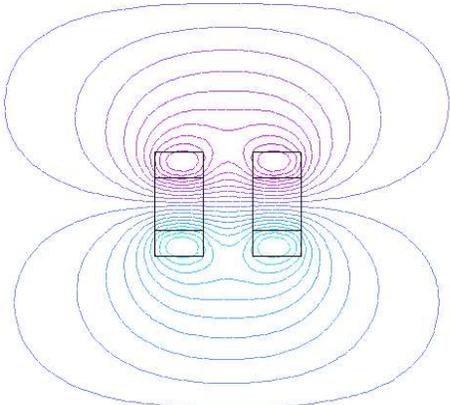


Figure 22 : lignes de champ dans un système de deux bobines en série.

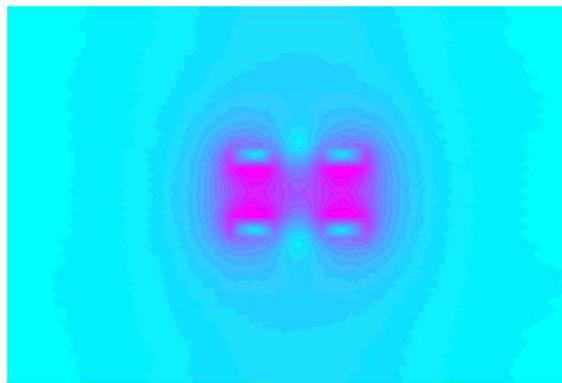


Figure 21 : induction dans un système de deux bobines en série.

Si nous plaçons deux plaques supraconductrices de part et d'autre de l'axe entre les deux bobines, les lignes de champ passant d'une bobine à l'autre vont avoir un espace réduit pour le faire. Elles se trouveront alors plus serrées, et donc, la valeur de l'induction sera augmentée entre les deux plaques, comme l'illustre la figure suivante.

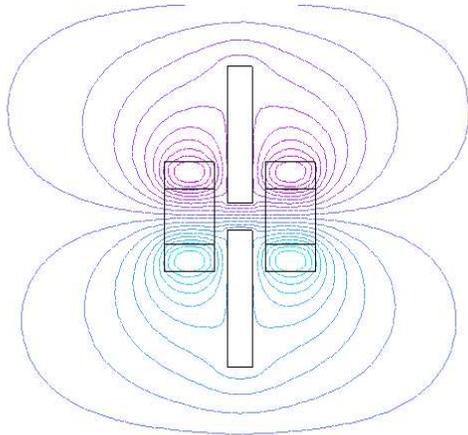


Figure 23 : lignes de champ après concentration de l'induction

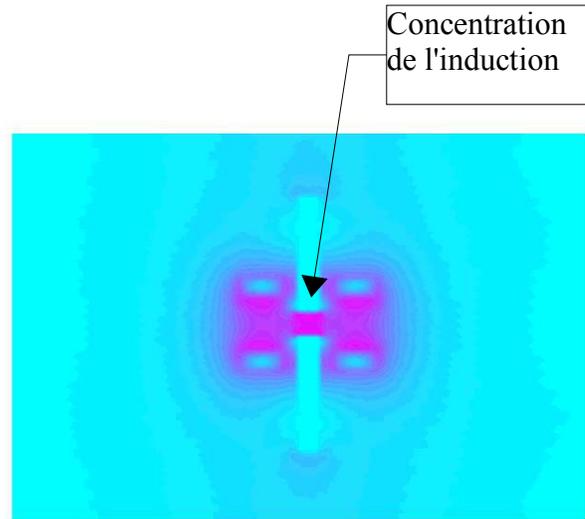


Figure 24 : induction après concentration

Nous pouvons voir que les lignes sont effectivement plus serrées entre les plaques diamagnétiques (figure 23) et que, par conséquent l'induction magnétique est plus élevée (figure 24).

Afin de valider cette propriété, nous avons mis en oeuvre une manipulation à l'azote liquide. Le schéma du système est donné sur la figure suivante.

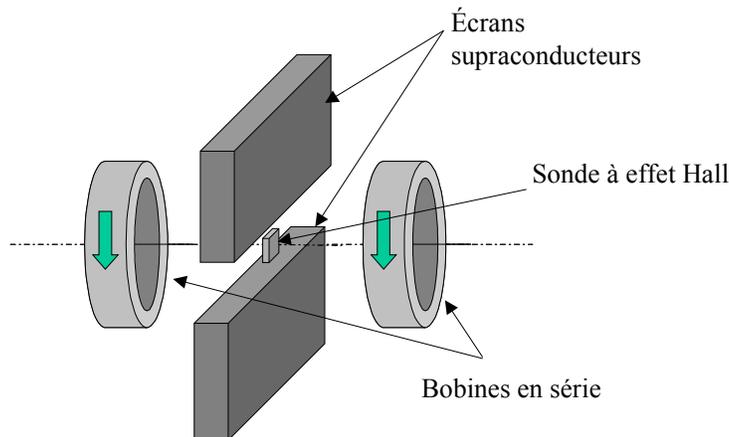


Figure 25 : schéma expérimental pour la concentration de flux

Nous utilisons deux pastilles supraconductrices à haute température critique mesurant 20mm*20mm*5mm en Bi-2223 ($\text{Bi}_{1,8}\text{Pb}_{0,26}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$).

Nous devons travailler à une valeur d'induction inférieure aux capacités de blindage des pastilles supraconductrices, de manière à ne pas saturer les pastilles en courant

La figure suivante présente les mesures effectuées à température ambiante ($T=300\text{K}$) et dans l'azote liquide ($T=77\text{K}$).

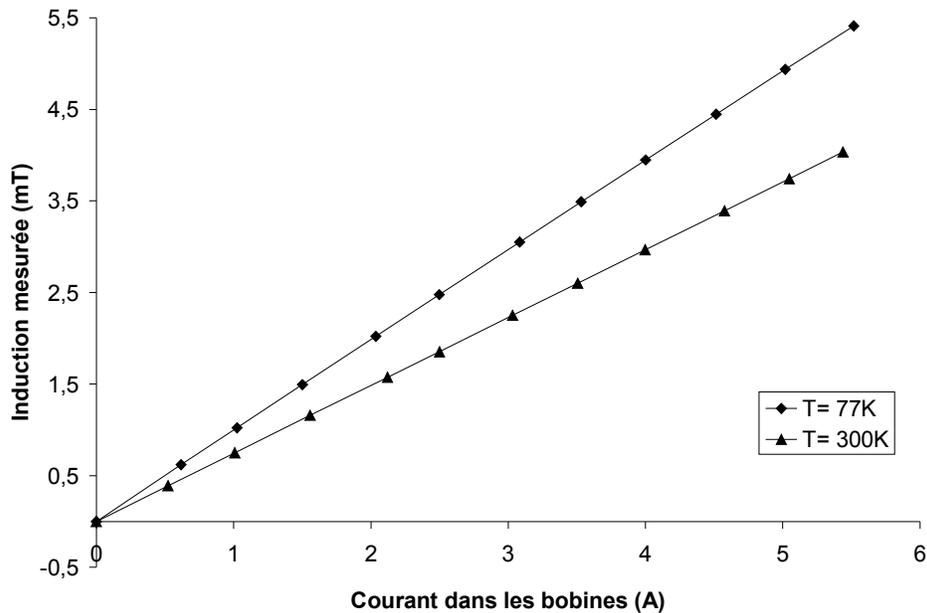


Figure 26 : résultats expérimentaux montrant la concentration de l'induction

Nous voyons que les pentes des deux droites obtenues sont différentes. L'induction magnétique a donc été concentrée entre les deux écrans supraconducteurs. Entre la manipulation à température ambiante et celle dans l'azote liquide, La valeur de l'induction magnétique a été multipliée par 1,3.

Cette expérience nous a permis de montrer qu'il était possible d'utiliser des supraconducteurs massifs dans le but de concentrer un flux magnétique. Voyons maintenant comment utiliser cela pour la conception d'un inducteur de moteur.

IV.3 Structure d'inducteur de la machine

Nous pouvons modifier la répartition spatiale de champ magnétique en utilisant des écrans supraconducteurs. L'objet de cette étude est de concevoir la structure d'un inducteur pouvant être utilisé dans une machine classique. L'objectif est donc d'obtenir une variation angulaire du champ produit par l'inducteur.

Partons d'une structure produisant une répartition de champ indépendante de la position angulaire autour de l'axe des bobines.

Une telle répartition peut être générée par deux solénoïdes de même axe et en opposition. Sur la figure 27 nous pouvons voir qu'entre les solénoïdes, le champ créé au niveau du rayon extérieur des bobines est radial et ne dépend pas de la position angulaire du système.

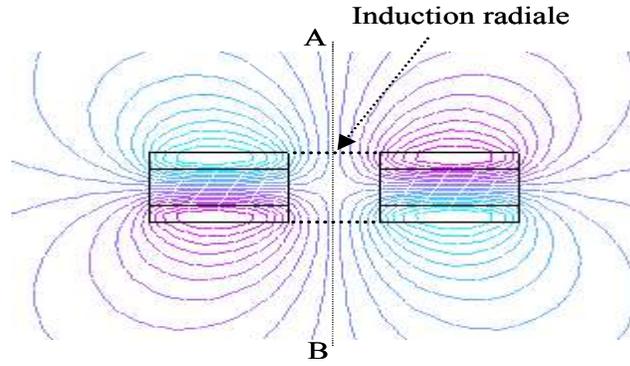


Figure 27 : lignes de champ produites par deux solénoïdes en opposition

Dans le plan A-B de la figure 27, nous avons donc une induction radiale représentée sur la figure 28.

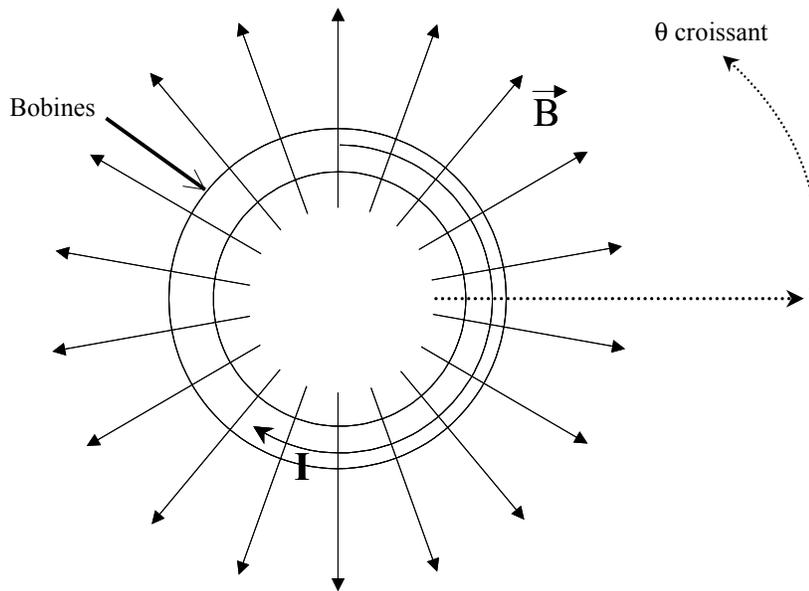


Figure 28 : vue de face des lignes de champ produites par deux solénoïdes en opposition

Nous avons représenté la valeur de l'induction radiale en fonction de θ sur la figure 29.

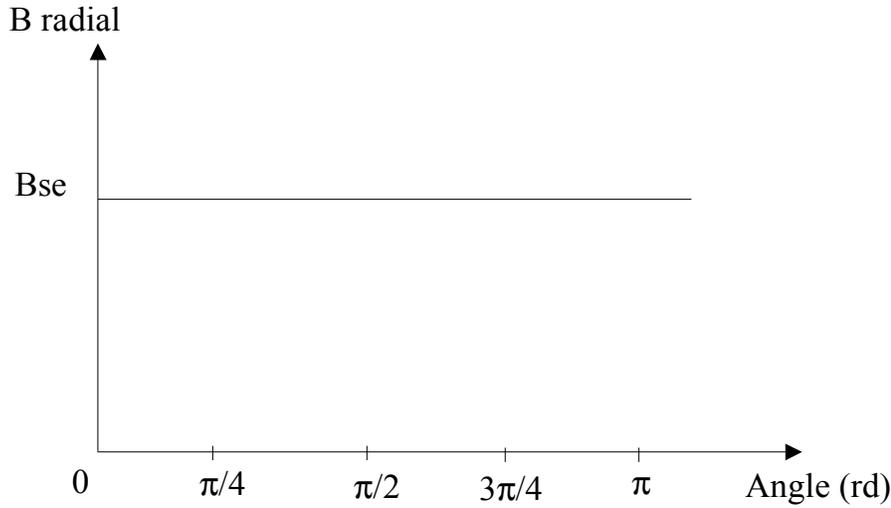


Figure 29 : répartition angulaire de B_r pour deux solénoïdes en opposition

Nous devons rendre cette induction dépendante de θ . Pour cela, nous pouvons annuler par endroits le champ magnétique en utilisant des écrans supraconducteurs. Nous avons représenté schématiquement les lignes de champ produites par les deux solénoïdes en opposition et perturbées par quatre écrans supraconducteurs (figure 30).

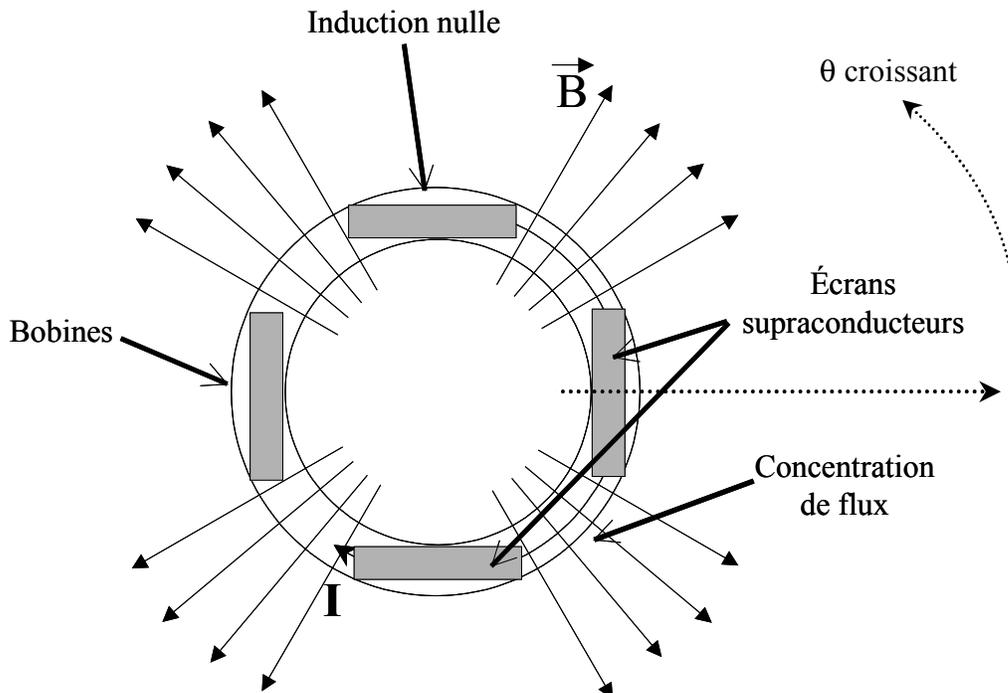


Figure 30 : lignes de champs produites par l'inducteur (schéma)

Nous avons, en théorie, créé des zones à induction nulle, et donc diminué la surface de passage du champ. La conservation du flux conduit à l'augmentation de la valeur de l'induction magnétique. Le flux est donc concentré par les écrans supraconducteurs. Nous avons représenté sur la figure 31 la courbe idéale représentant la valeur de B radial en fonction de θ ainsi obtenue.

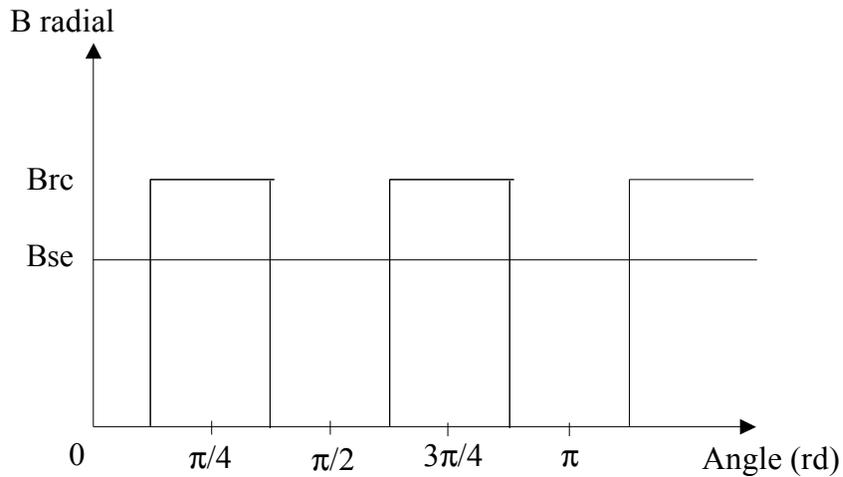


Figure 31 : répartition angulaire de l'induction produite par l'inducteur

Brc représente l'induction radiale concentrée et Bse l'induction sans écran.

Les écrans supraconducteurs perturbent le champ magnétique essentiellement d'un point de vue radial, mais aussi suivant le direction de l'axe, ceci créant probablement des fuites, c'est pourquoi nous avons choisi de représenter $Brc < 2 * Bse$. Nous calculerons, par la suite, le facteur de concentration théorique.

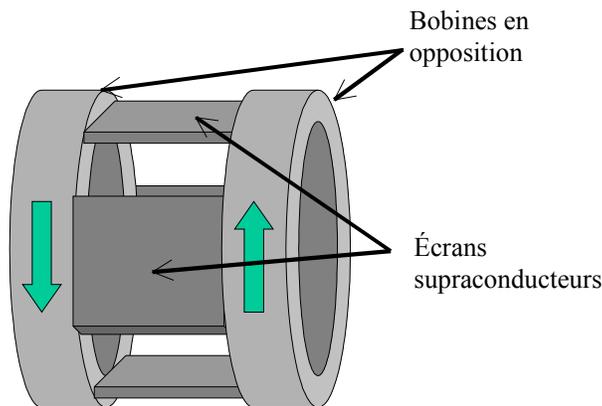


Figure 32 : structure de l'inducteur, vue en 3D

Nous avons représenté la structure de l'inducteur en 3D sur la figure 32. Pour que ce type de structure soit intéressant, il faut qu'il puisse générer une variation d'induction intéressante pour les applications électrotechniques.

Un moteur classique voit une induction d'environ ± 1 T dans son entrefer, ce qui correspond à une variation de l'induction de 2 T. Afin que notre structure soit intéressante, nous devons générer une variation de l'induction supérieure à 2 T.

Les bobines devront alors être capables de produire une induction de plusieurs Teslas. Reste maintenant à faire le choix du matériau pour la réalisation des écrans.

V COMPORTEMENT DES SHTC POUR LA RÉALISATION D' ÉCRANS MAGNÉTIQUES EN CHAMP FAIBLEMENT VARIABLE

Nous avons vu que les supraconducteurs à haute température critique sont des supraconducteurs de type II. Ils se trouvent le plus souvent dans leur état mixte, c'est à dire que pour blinder un champ magnétique intense, il faut effectuer un refroidissement à champ nul.

Il est évident que chaque matériau aura une capacité de blindage magnétique différente. Ce paragraphe décrit, en s'appuyant sur différents articles parus sur le sujet ainsi que sur quelques manipulations effectuées au laboratoire, les mécanismes et les limites du blindage.

La densité de courant est le facteur prépondérant pour quantifier la capacité de blindage. Ce facteur dépend beaucoup de la température. Nous effectuerons une étude des différents matériaux à la température de l'azote liquide et à celle de l'hélium liquide.

Nous étudierons aussi la stabilité du blindage et aboutirons au type de matériau à utiliser pour notre système.

V.1 Stabilité du blindage

Le principe du blindage magnétique a été présenté dans la partie précédente. Il existe plusieurs phénomènes qui peuvent modifier la qualité du blindage. Nous rappellerons les phénomènes de flux creep et de flux flow. Puis, nous aborderons un problème d'instabilité magnéto-thermique appelé saut de flux.

V.1.a Flux creep et flux flow

Tout d'abord, les supraconducteurs à haute température critique fonctionnent pour la plupart des applications à la température de l'azote liquide. A cette température l'agitation thermique est suffisante pour déloger des vortex, qui, sous l'action de la chaleur, passent d'un site de piégeage à un autre.

Le déplacement d'un vortex induit un champ électrique, et par conséquent des pertes.

Cette dissipation d'énergie fait chuter localement la densité de courant. Ce phénomène fait apparaître une résistance électrique apparente et de ce fait entraîne une décroissance des courants. Ce phénomène est appelé flux creep.[MUR89]

Dans le cas de l'utilisation en blindage, le supraconducteur ne se voit pas imposer de courant de transport. Lors d'une brusque variation du champ magnétique extérieur, les courants induits dans le supraconducteur peuvent être très importants, les forces appliquées aux vortex peuvent dépasser les forces d'ancrage et faire bouger tout le réseau. C'est le régime de flux flow. Ce régime est très dissipatif et peut entraîner la transition de l'élément supraconducteur.

Ces deux phénomènes générant des pertes doivent être pris en compte dans les applications de blindage.

Le flux creep peut être diminué en abaissant la température. Malheureusement, le fait d'abaisser la température peut entraîner d'autres instabilités telles que les sauts de flux.

Le flux flow n'est, à priori, pas un problème pour le blindage. Il suffit de contrôler la vitesse de montée en champ et d'éviter les régimes transitoires violents en champ extérieur.

V.1.b Le saut de flux

Nous avons vu que, dans la mesure où le supraconducteur n'est pas saturé en courant, une faible variation de l'induction magnétique extérieure ne perturbe pas la qualité du blindage. Néanmoins, un brusque apport d'énergie peut engendrer une instabilité magnéto-thermique : le saut de flux.

L'apport d'énergie peut être une brusque variation du champ magnétique extérieur, une variation de température ou un choc mécanique. Le saut de flux a pour origine une diminution locale de la densité de courant, et par conséquent, une réorganisation de la distribution des courants. Cette réorganisation dissipe de l'énergie, ce qui a tendance à diminuer la densité de courant, etc... Nous voyons qu'un saut de flux peut conduire jusqu'à la transition du matériau. Sans aller jusque là, lorsqu'un saut de flux se produit, le champ magnétique pénètre localement à l'intérieur du matériau, où il reste piégé. La figure 33 présente le saut de flux sous la forme d'un organigramme [BRU].

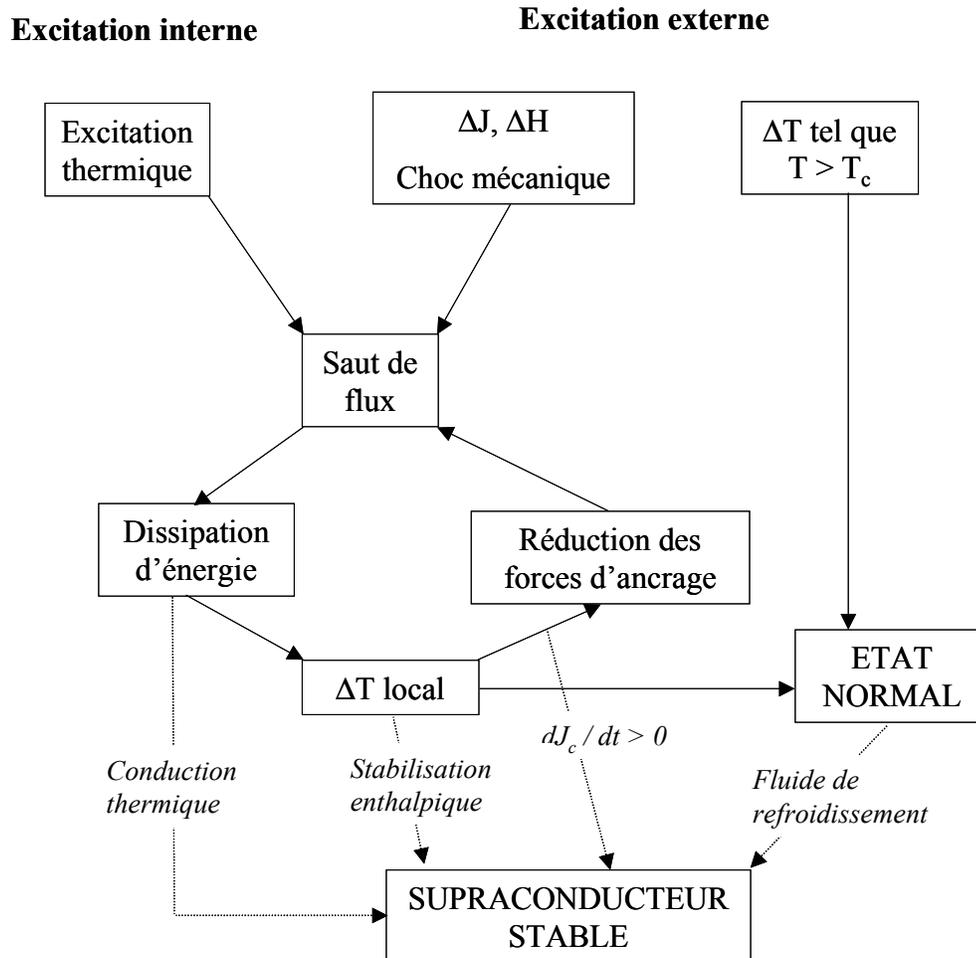


Figure 33 : schéma représentant le principe des sauts de flux dans les supraconducteurs[BRU]

Le saut de flux dépend principalement des paramètres suivants:

- la vitesse de variation du champ magnétique
- la chaleur spécifique du matériau
- la température de travail

La figure 34 [XU97] représente un cycle d'aimantation d'une pastille d'YBaCuO à la température de 5K. La pastille est plongée dans un champ uniforme qui décrit un cycle $0 \text{ T} \rightarrow 5,5 \text{ T} \rightarrow 0 \text{ T}$.

La grandeur représentée est l'aimantation M du matériau.

Nous pouvons constater que lorsque le champ extérieur arrive aux alentours de 2T, une brusque variation de l'aimantation est mesurée. Cette variation correspond à la pénétration du champ dans le matériau à cause d'un saut de flux.

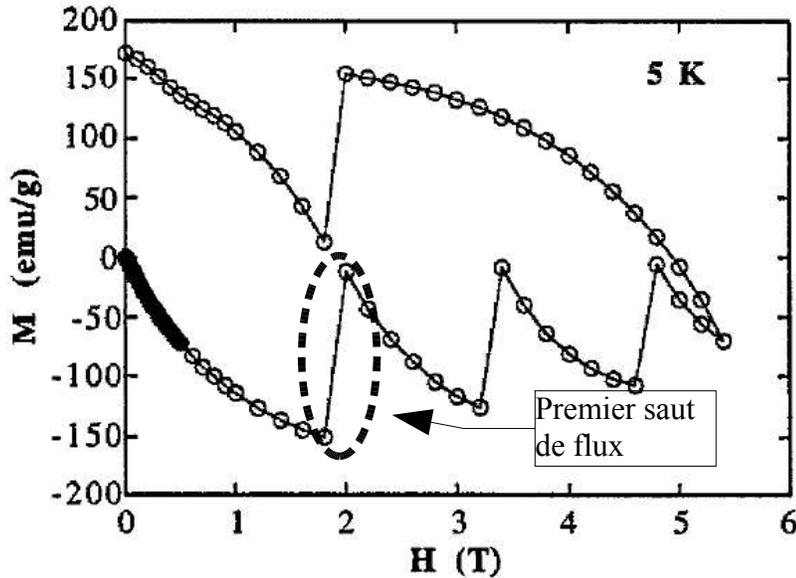


Figure 34 : courbe de l'aimantation spécifique d'un monodomaine d'YBaCuO présentant des sauts de flux. $1 \text{ emu/g} \rightarrow 1 \text{ A.m}^2 / \text{kg}$.

Nous pouvons constater que lorsqu'un saut de flux a eu lieu, le flux magnétique qui a pénétré le matériau reste piégé.

Après avoir présenté les différents problèmes liés au blindage magnétique par des écrans supraconducteurs, nous allons voir quel type de matériau utiliser pour réaliser le blindage d'un champ intense. Les deux matériaux les plus utilisés sont le BiSrCaCuO et l'YBaCuO, nous présenterons leurs caractéristiques et parlerons brièvement du MgB_2 , un matériau récemment découvert.

V.2 Le BiSrCaCuO

Ce matériau est très utilisé pour les application à 77K, en effet, son mode de fabrication permet la réalisation d'objets de différentes formes. C'est un matériau constitué de poudre compressée. On le trouve souvent sous la forme de tubes massifs servant d'amenées de courant ou de blindage magnétique [CAN]. Ce matériau permet la fabrication de câbles multifilamentaires supraconducteurs à haute température critique sous la forme de ruban, les filaments supraconducteurs sont noyés dans une matrice d'argent.

Nous commencerons par étudier ce matériau à la température de l'azote liquide, puis, nous chercherons à voir si le gain de performance est intéressant à la température de l'hélium liquide.

V.2.a Le BiSrCaCuO à 77K

Afin d'étudier la capacité de blindage de ce matériau, nous pouvons mettre en oeuvre une expérience à l'azote liquide. Nous plaçons une pastille supraconductrice de Bi-2223 mesurant $20\text{mm} \times 20\text{mm} \times 5\text{mm}$ à la sortie d'un

solénoïde en cuivre, comme indiqué sur la figure 35. Nous mesurons la valeur de l'induction magnétique derrière la pastille à l'aide d'une sonde à effet Hall.

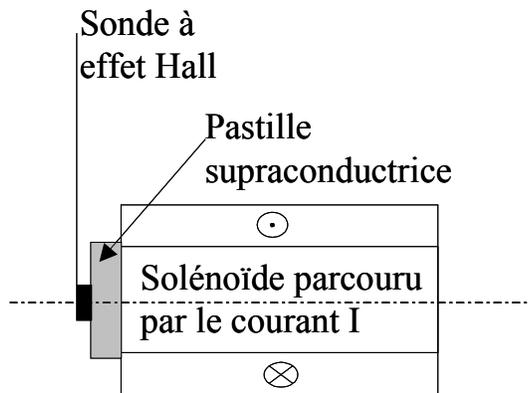


Figure 35 : schéma expérimental pour tester le blindage d'une pastille en BiSrCaCuO

Après avoir refroidi l'ensemble dans un bain d'azote liquide, nous faisons croître le courant dans la bobine de 0A à 5A.

La courbe expérimentale est donnée sur la figure 36.

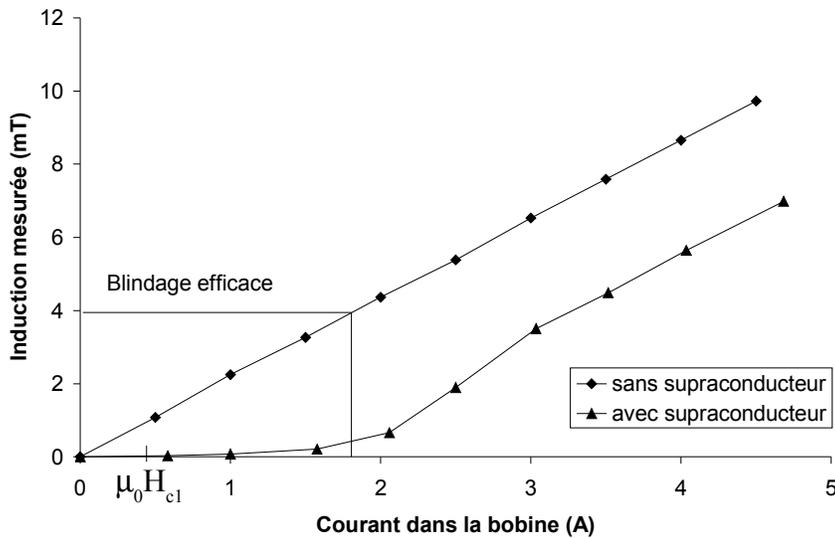


Figure 36 : courbe expérimentale représentant la capacité de blindage magnétique d'une pastille de Bi-2223

Nous pouvons constater que jusqu'à 2A, la sonde à effet Hall mesure une induction quasi nulle. Les courants se développent et blindent le champ. Au delà de ce courant, le matériau supraconducteur est saturé en courant, et le champ magnétique le pénètre. A 77k, le Bi-2223 ne peut pas blinder efficacement une induction de plus de 4mT.

Nous avons vu que lors de son utilisation en blindage magnétique, des courants ayant pour densité de courant $\pm j_c$ se développent dans le matériau. Lorsque le champ magnétique devient trop important, le supraconducteur

devient saturé en courant. Un nouvel accroissement du champ extérieur ne peut plus être compensé par les courants induits et un flux magnétique pénètre le supraconducteur. Conformément à la loi de Lenz, ce flux est piégé dans le supraconducteur. Le comportement magnétique des supraconducteurs est donc hystérétique.

Nous avons tracé expérimentalement un cycle magnétique pour une pastille supraconductrice en $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}$ (Bi-2223) non texturé à 77K.

Le système consiste en une pastille supraconductrice placée à la sortie d'un solénoïde. Nous effectuons ensuite le cycle de courant suivant 0, +4.5A, -4.5A, +4.5A. L'induction magnétique est mesurée à l'aide d'une sonde à effet hall du type HHPNP (AREPOC®).

Nous appelons B_{bobine} l'induction créée par la bobine. C'est donc la valeur de l'induction lorsque la pastille supraconductrice est absente.

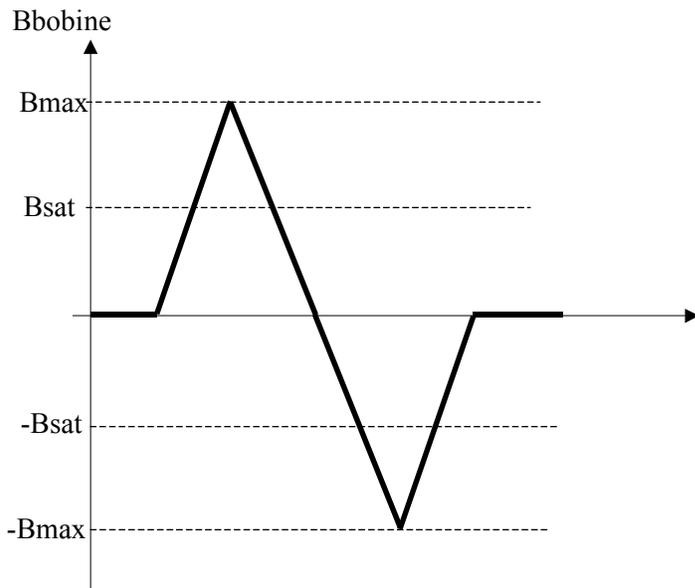


Figure 37: Cycle d'induction imposé à la pastille supraconductrice.

La figure 38 présente le cycle obtenu.

Nous pouvons voir que ce type de matériau devient saturé en courant lorsqu'il est soumis à une induction de l'ordre de 4mT (B_{sat}), ce qui est une valeur trop faible pour une utilisation électrotechnique. La pastille mise en oeuvre a piégé environ 4 mT. Nous retrouvons bien une adéquation entre la capacité de blindage du matériau et sa capacité de piégeage de flux.

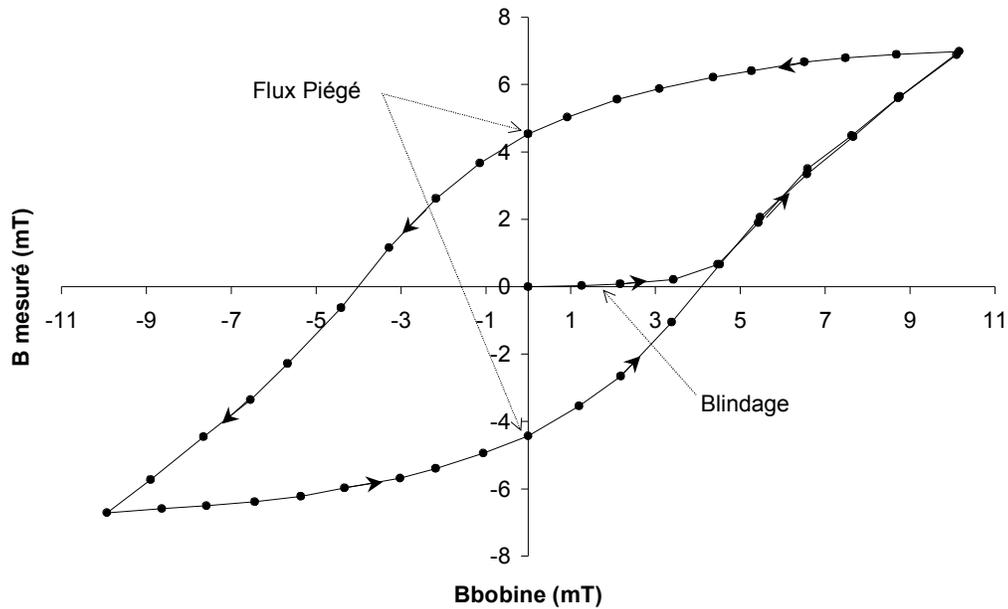


Figure 38 : cycle d'aimantation d'une pastille de Bi-2223

Le parcours de cycles d'hystérésis magnétique lors de l'utilisation des supraconducteurs engendre des pertes pouvant fortement dégrader la valeur de la densité de courant critique.

Nous pouvons mettre en évidence le phénomène de "flux creep" pour ce matériau en réalisant l'expérience suivante.

Soit un tube supraconducteur en Bi-2223 dans lequel nous avons piégé un certain flux magnétique en le refroidissant sous champ.

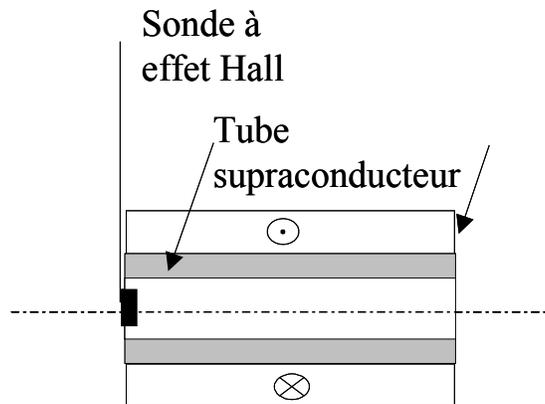


Figure 39 : schéma expérimental permettant de piéger du flux dans un tube supraconducteur

Nous avons refroidi le tube à 77K sous le champ de la bobine parcourue par un courant de 3,5A. Après avoir coupé le courant, nous observons la valeur de l'induction piégée en fonction du temps.

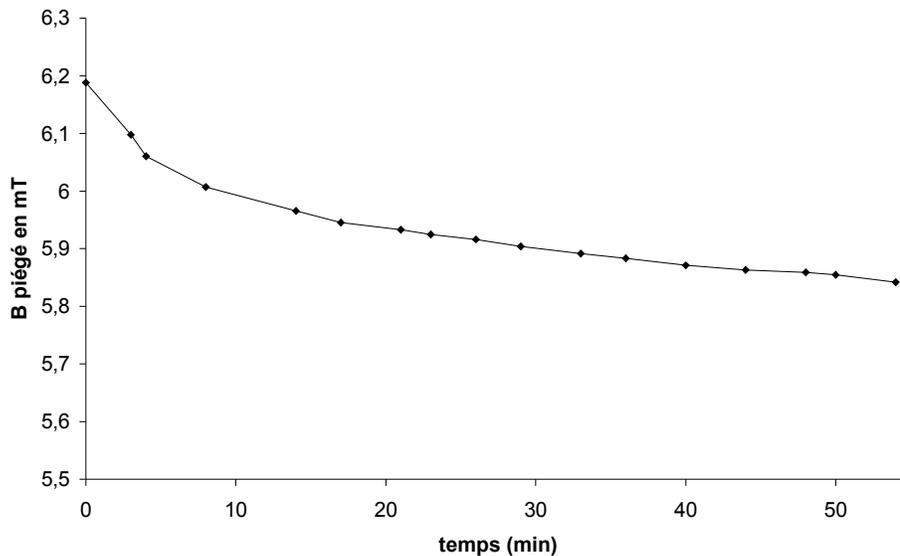


Figure 40 : courbe expérimentale montrant le flux creep dans un tube de Bi-2223

Nous pouvons aisément constater la décroissance, due au "flux creep", du flux piégé dans le tube supraconducteur

Nous obtenons une décroissance de l'ordre de 3mT par minute. C'est une décroissance considérable qui permet d'affirmer que ce matériau n'est pas adapté à une application de stockage d'énergie à cette température.

Le "flux creep" est un phénomène qui dépend non seulement de la température, mais aussi de façon importante de la qualité de l'ancrage du réseau de vortex.

En résumé, à la température de l'azote liquide, une pastille de Bi-2223 peut blinder environ 4 mT. La décroissance des courants due au "flux creep" est importante.

Qu'en est-il à plus basse température?

V.2.b Le BiSrCaCuO à 4.2 K

En général, les supraconducteurs voient leur caractéristiques s'améliorer lorsque la température s'éloigne de leur température critique, ainsi, on peut supposer que le BiSrCaCuO qui a une température critique proche de 100K aura de bien meilleures performances à 4.2K qu'à 77K.

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de résultats expérimentaux traitant de la capacité de blindage de ce matériau à 4.2K. Nous avons donc réalisé le test de pastilles de Bi-2212 dans un bain d'hélium liquide.

Sur les conseils des chercheurs de l'équipe SUPRAS de l'université de Liège, nous avons choisi d'étudier le Bi-2212 ($T_c=90K$) car il possède des performances légèrement meilleures que celles du Bi-2223 à basse température.

Nous avons donc commandé deux pastilles supraconductrices mesurant 20mm*20mm dans deux épaisseurs différentes 5mm et 10mm afin d'étudier l'influence de l'épaisseur dans la qualité du blindage magnétique.

Les deux pastilles ont été réalisées en Bi-2212 et texturées par laminage afin d'aligner les grains dans le sens du développement du courant.



Figure 41 : les deux pastilles de Bi-2212 utilisées

Nous avons dimensionné et réalisé une bobine de champ délivrant 5T pour un courant de 250A.



Figure 42 : la bobine de champ réalisée

Longueur utile : 17 cm

Diamètre intérieur: 10 cm

Epaisseur du bobinage: 1 cm

Alimentation: 0-260 A

Induction sur l'axe ($I=250A$) : 5 T

Fil : NbTi, 320A sous 6T

Le schéma suivant présente l'expérience qui a été menée.

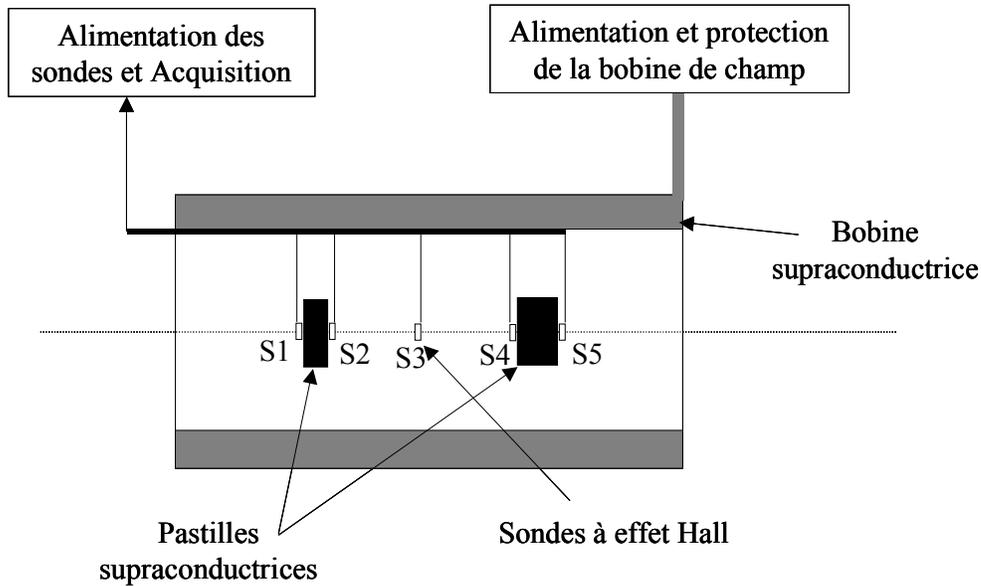


Figure 43 : système permettant la caractérisation du Bi-2212 à 4,2K

Les deux pastilles supraconductrices en Bi-2212 sont placées sur l'axe d'une bobine de champ. Des sondes à effet Hall sont placées de part et d'autre des échantillons. Nous augmentons le champ magnétique et relevons les différentes tensions délivrées par les sondes S1, S2, S3, S4, S5.

La pastille supraconductrice placée entre les sondes S1 et S2 mesure 2cm*2cm*0.5cm, celle située entre les sondes S4 et S5 mesure 2cm*2cm*1cm.

Les sondes utilisées sont des sondes HHPNP et HHPNA fabriquées par AREPOC[®], ces sondes fonctionnent à des températures comprises entre 1K et 300K, et sont linéaires pour des valeurs d'induction allant de 0 à 5T.

La figure suivante montre l'allure théorique des lignes de champ en considérant les éléments supraconducteurs comme étant parfaitement diamagnétiques.

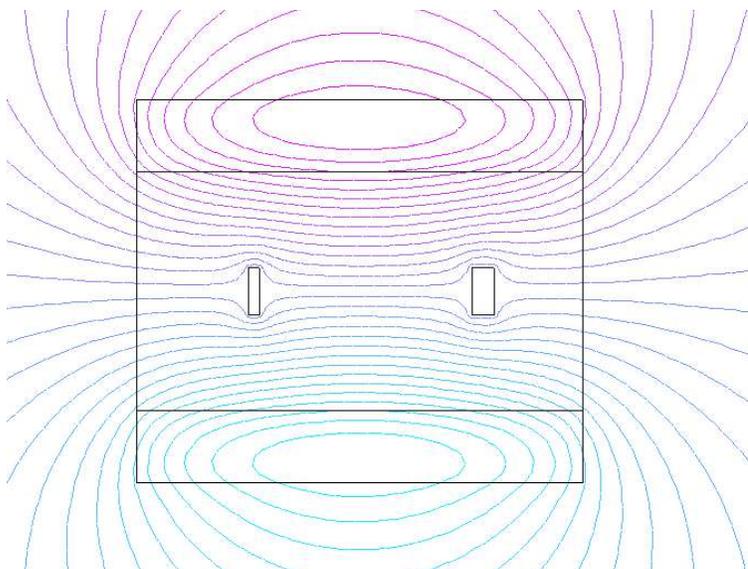


Figure 44 : lignes de champ théoriques pour la manipulation de blindage des pastilles de Bi-2212

Nous voyons bien que, tant que le matériau n'est pas saturé en courant, les sondes à effet Hall doivent voir un champ quasiment nul.

Lors de la manipulation, nous avons augmenté le courant jusqu'à la saturation des pastilles supraconductrices. La figure 45 présente les courbes expérimentales que nous avons recueillies.

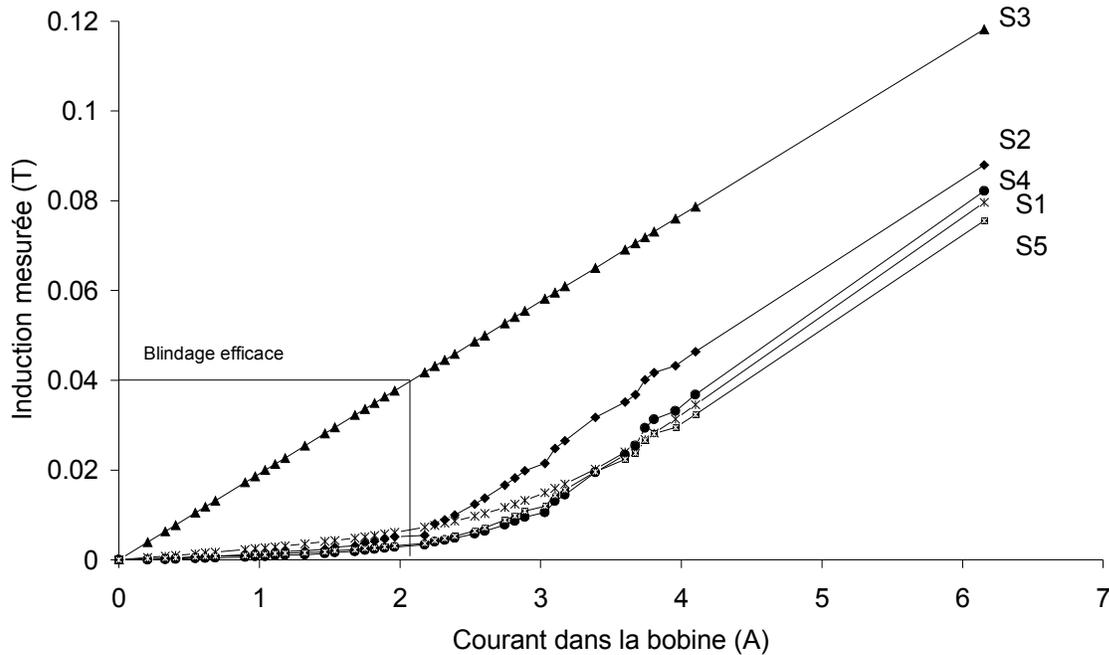


Figure 45 : résultats expérimentaux concernant le blindage du Bi-2212 à 4,2K

Nous pouvons constater que ce matériau est capable de blinder une induction magnétique inférieure ou égale à 40mT.

Nous avons vu que ce type de matériau pouvait blinder environ 4mT à la température de 77K. Le BiSrCaCuO est donc dix fois plus performant à 4.2K qu'à 77K.

Nous remarquons que l'épaisseur du matériau a peu d'importance. L'expérience menée nous montre que la pastille supraconductrice de plus grande épaisseur ne permet pas un meilleur blindage. Lors du retour à champ nul, opération qui a été relativement brutale en raison d'une transition de la bobine de champ, nous avons pu mesurer l'induction piégée dans chacune des pastilles.

Les sondes S1 et S2 ont mesuré 35mT pour la pastille la plus fine et les sondes S4 et S5, 43mT pour la pastille la plus épaisse.

En résumé, bien que les performances du matériau aient été augmentée d'un facteur dix, les capacités de blindage du BiSrCaCuO sont trop faibles pour notre application.

V.3 L'YBaCuO

L'YBaCuO sous sa forme frittée est très peu utilisé du fait que, dans ce matériau, la densité de courant inter-grains est faible devant celle du BiSrCaCuO. Il est donc essentiellement utilisé sous la forme d'un mono-domaine. L'YBaCuO en mono-domaine pose quelques problèmes: sa taille est limitée au plus à celle du creuset dans lequel le domaine croît, et, à basse température, le matériau peut subir des instabilités magnéto-thermiques (sauts de flux) allant, dans certains cas extrêmes, jusqu'à la destruction de l'échantillon.

V.3.a L'YBaCuO à 77K

A 77K, c'est le meilleur matériau supraconducteur à haute température critique du moment. Ce matériau a beaucoup évolué depuis sa découverte en 1986, en effet, de nombreuses études portant sur les procédés permettant l'amélioration du piégeage des vortex ont permis à l'YBaCuO d'acquérir des capacités impressionnantes de blindage ou de piégeage de flux.

Nous avons mis en oeuvre une expérience très simple permettant de vérifier la capacité de blindage de ce matériau: nous plaçons un monodomaine d'YBaCuO à la sortie d'un solénoïde. Nous plaçons tout le système dans un bain d'azote liquide à 77K, puis nous faisons croître le courant.

Nous utilisons un monodomaine d'YBaCuO de 28mm de diamètre et 10mm d'épaisseur.

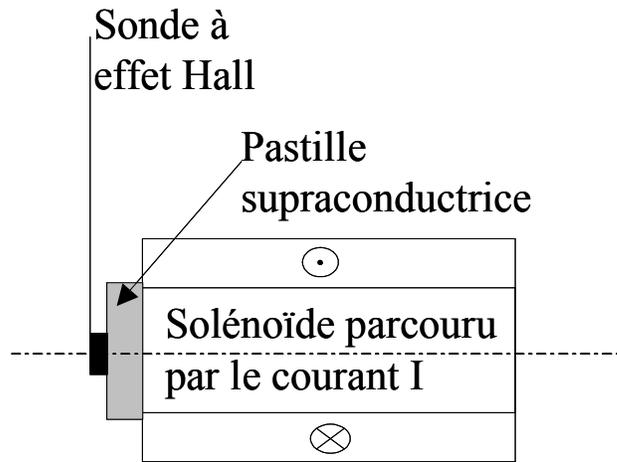


Figure 46 : schéma expérimental pour le blindage magnétique

Voici les courbes expérimentales que nous avons obtenu.

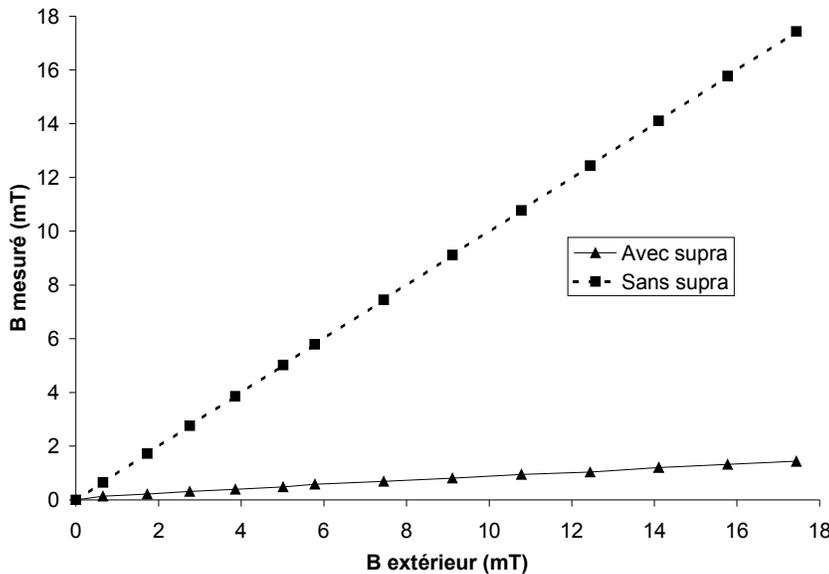


Figure 47 : courbe expérimentale de blindage d'un monodomaine d'YBaCuO à 77K

Nous voyons que l'induction magnétique est blindée par la pastille d'YBaCuO, l'induction mesurée correspond à des fuites, c'est à dire à une partie du champ magnétique qui contourne la pastille.

Nous avons réalisé cette expérience à la température de 77K, cette température est aisée à obtenir en utilisant de l'azote liquide. Néanmoins, les supraconducteurs montrent des performances bien meilleures à des températures plus basses.

Dans l'expérience précédente, nous n'avons pas pu aller jusqu'à la saturation en courant de la pastille. Dans la littérature, il existe une multitude d'articles traitant des capacités de blindage et de piégeage de flux de l'YBaCuO.

La figure 48 représente le flux piégé dans un monodomaine d'YBaCuO, mesurant 46mm de diamètre et 15mm d'épaisseur, fabriqué par la méthode QMG (Quench Melt Grown), permettant au matériau de piéger plus de 1T à 77K [MOR98].

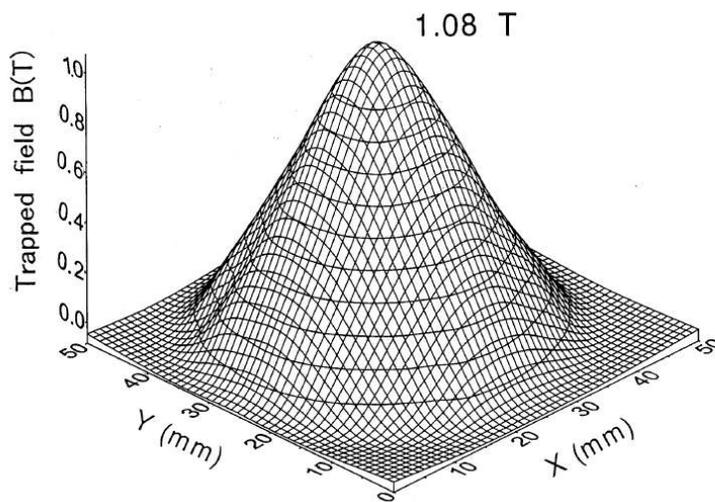


Figure 48 : induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO

Ce matériau est d'ailleurs utilisé en priorité pour des applications de lévitation magnétique telles que les paliers permettant aux rotors de moteurs de tourner sans frottement.

Les caractéristiques de l'YBaCuO dépendent beaucoup de la température, la figure 49 présente l'évolution de l'induction piégée en fonction de la température pour une pastille d'YBaCuO QMG (46mm de diamètre et 15mm d'épaisseur) [MOR98].

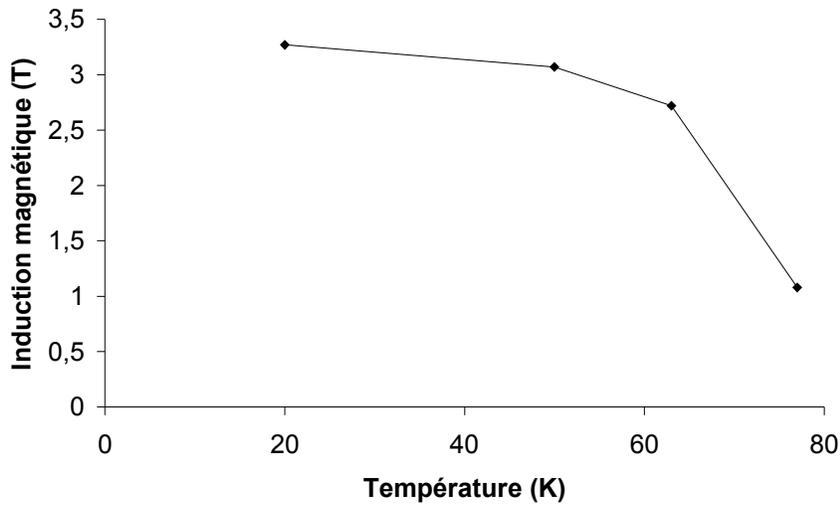


Figure 49 : évolution de la valeur maximale de l'induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO en fonction de la température

La courbe présentée n'est caractéristique que de l'échantillon étudié et ne saurait être généralisée aux autres échantillons.

V.3.b L'YBaCuO à 4.2K

Nous pouvons constater que les capacités du matériau sont grandement améliorées lorsque la température décroît. Considérons l'utilisation de ce matériau à 4.2K. C'est une température basse mais facile à obtenir en laboratoire à l'aide d'Hélium liquide. La figure suivante représente la courbe d'aimantation d'un monodomaine d'YBaCuO de 18mm de diamètre [WEN00]. La pastille a préalablement été irradiée par des protons afin de créer des sites d'ancrages efficaces pour les vortex.

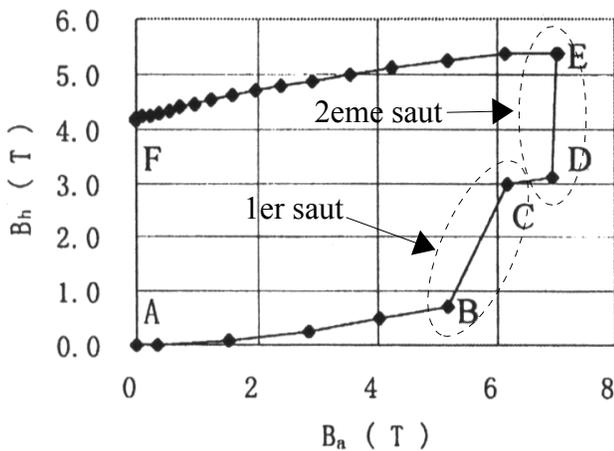


Figure 50 : induction mesurée à la surface d'un monodomaine (B_h) d'YBaCuO subissant un cycle de champ,

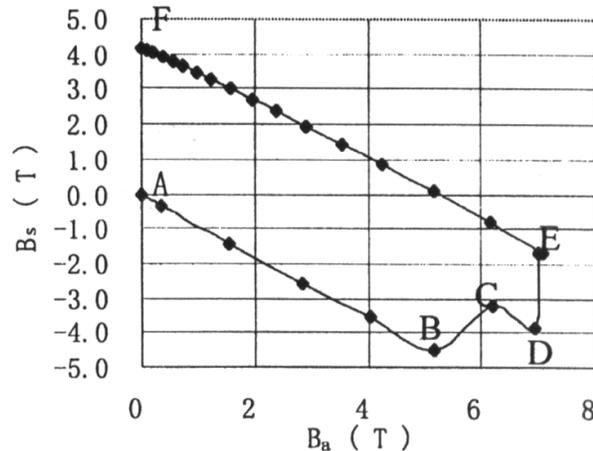


Figure 51 : aimantation d'un monodomaine d'YBaCuO (B_s) subissant un cycle de champ

La première figure représente l'induction mesurée à la surface de la pastille pendant un cycle de champ extérieur allant de 0 à 8T. La deuxième figure présente l'aimantation de la pastille pendant ce même cycle. Nous

voyons que la pastille peut blinder une induction magnétique jusqu'à 5T. Durant cette expérience, le champ a pénétré deux fois de manière brutale dans le matériau, comme le montrent les segments BC et DE. Une fois le champ revenu à zéro, la pastille a piégé plus de 4T.

Lorsque le matériau supraconducteur tel que l'YBaCuO en monodomaine développe de forts courants de blindage, un saut de flux peut générer un « crack » dans la structure cristalline et détériorer de manière irréversible la qualité du matériau. Un « crack » présente une barrière résistive au courant. Ce dernier ne peut alors plus se développer de manière uniforme dans le matériau. La figure suivante présente une image du flux piégé dans une pastille d'YBaCuO cylindrique avant et après un "crack" [FUC97] .

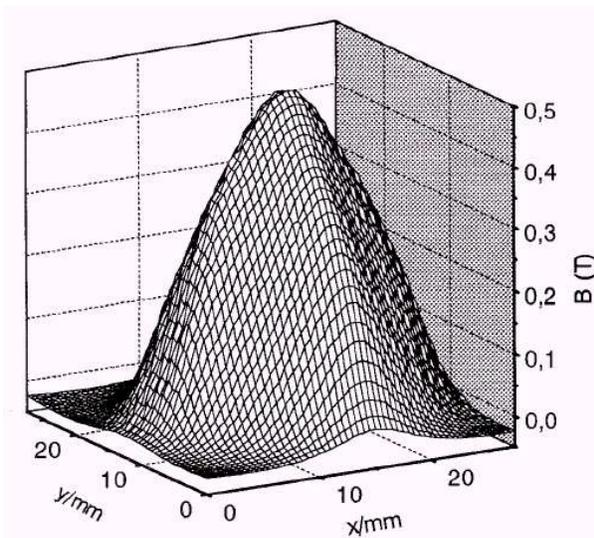


Figure 53 : induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO

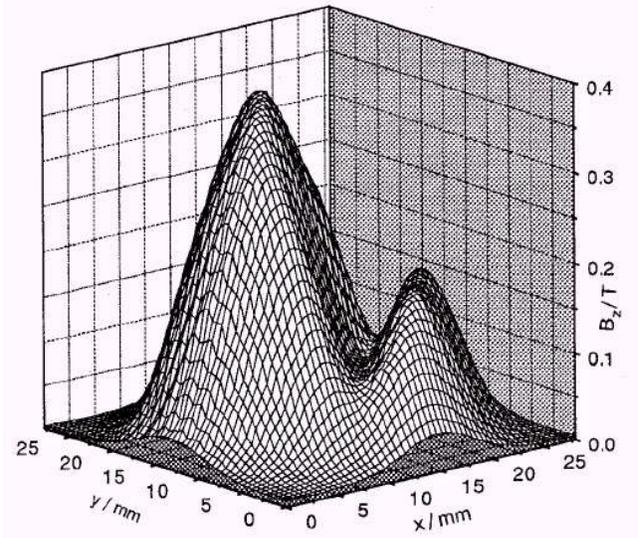


Figure 52 : induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO ayant subi un crack.

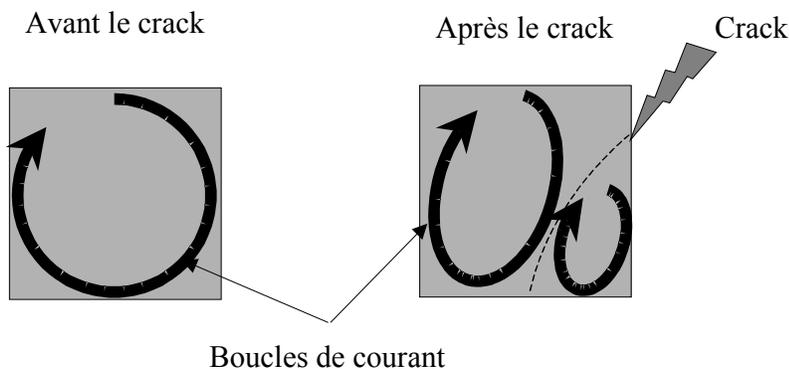


Figure 54: répartition des courants après un crack.

Nous pouvons voir que la taille des boucles de courant dans le supraconducteur a été diminuée. La valeur de l'induction piégée est moins importante. La figure 54 montre bien qu'après le crack, nous avons deux boucles de courant quasiment indépendantes.

En conclusion, l'YBaCuO semble être un matériau très performant pour le blindage magnétique.

V.4 Le MgB_2

Le MgB_2 [DOU01], [ZEH02] est un matériau très récent, avec une température critique qui se situe autour des 39K, il est clair que ce matériau est banni des applications dites « chaudes », c'est à dire à l'azote liquide. Néanmoins, ses caractéristiques sont proches de celles de l' $YBaCuO$, mais avec l'énorme avantage de pouvoir prendre n'importe quelle forme et d'être facilement usinable. C'est un matériau qui pourrait se révéler très intéressant pour les utilisation de supraconducteurs massifs à basse température. La figure suivante est tirée d'un des nombreux articles publiés sur ce matériau juste après sa découverte en Mars 2001 (à cette époque, un article par jour sur l'étude de ce matériau était soumis pour publication).

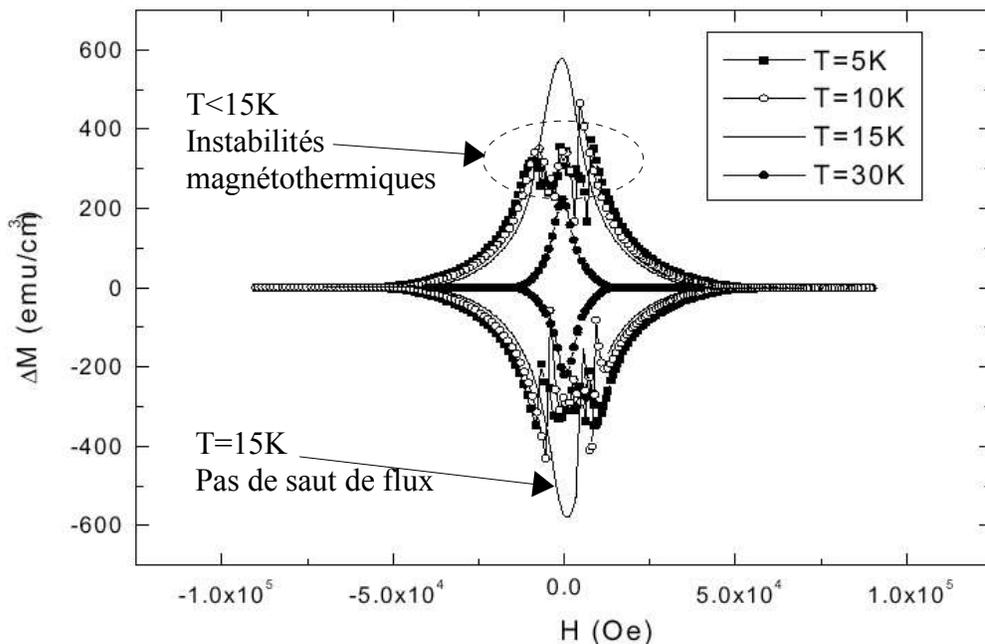


Figure 55 : courbes d'aimantation du MgB_2 à différentes températures. $1\text{emu}/\text{cm}^3 \leftrightarrow 4\pi \cdot 10^{-4} T$ [DOU01]

La courbe d'aimantation nous montre de nombreux saut de flux pour un fonctionnement à des températures inférieures à 15K. Ce matériau, dans son état actuel, est donc difficilement utilisable pour une application de blindage magnétique à très basse température. On peut néanmoins constater que le MgB_2 à 15K a des capacité de blindage magnétique proches de celles du monodomaine d' $YBaCuO$.

C'est un matériau qui pourrait être très intéressant pour les applications de blindage à 20K. Cette température demande un système de réfrigération avec une régulation de température.

Une fois le problème de la température réglé, le MgB_2 offre une solution permettant de s'affranchir de la limite de taille de l' $YBaCuO$.

V.5 Choix du matériau

Le tableau suivant résume les caractéristiques des matériaux présentés précédemment en vue de leur utilisation en blindage magnétique.

<i>Matériau</i>	<i>T_c</i>	<i>Blindage à 77K</i>	<i>Blindage à 4.2K</i>	<i>Avantages</i>	<i>Inconvénients</i>	<i>Sources</i>
BiSrCaCuO	110 K	4 mT	40 mT	- pas de limitation de taille	- fritté - difficilement usinable - capacité de blindage faible	Manipulations réalisées au laboratoire
YBaCuO	90 K	1 T	4 T	- capacité de blindage élevée - monodomaine	- taille limitée - difficilement usinable - instabilités magnéto-thermiques à basse température.	Bibliographie
MgB ₂	39 K	---	Instable	- pas de limitation de taille - facilement usinable	- doit être utilisé à basse température - instabilités magnéto-thermiques en dessous de 15K	Bibliographie

Figure 56 : résumé des capacités de blindages des différents matériaux présentés

En ce qui concerne le type de matériau à utiliser pour la réalisation des écrans magnétiques, l'YBaCuO semble être le mieux adapté pour réaliser le blindage d'une induction de plusieurs Teslas à 4.2K.

Pour une température proche de 20K, c'est certainement le MgB₂ qui offre la meilleure solution.

VII CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les propriétés du matériau supraconducteur. Nous avons vu que la supraconductivité peut apporter de réelles améliorations dans le domaine des machines électriques en permettant de générer un couple électromagnétique plus grand que dans les machines classiques.

Nous avons présenté rapidement quelques structures de moteurs supraconducteurs ayant été développées en laboratoire.

Nous avons montré, par une expérience, qu'il est possible de concentrer de l'induction magnétique en plaçant judicieusement des écrans supraconducteurs.

Nous avons proposé une structure innovante d'inducteur supraconducteur mettant en oeuvre des écrans supraconducteurs permettant une modification de la répartition spatiale de l'induction. Les écrans créent une variation angulaire de l'induction à partir d'une répartition uniforme de celle-ci, tout en effectuant une concentration du flux.

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux supraconducteurs à haute température critique pour une utilisation en blindage.

A 4.2 K, le matériau le plus performant est l'YBaCuO malgré une limitation de la taille des monodomains et les instabilités magnéto-thermiques. Nous verrons, dans une autre partie, comment mettre en oeuvre des écrans de grandes tailles à l'aide de ce matériau.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 1

[AME01] : N. Amemiya, Y. Ohta, "Mode of magnetic flux penetration into high Tc superconductors with various cross-sectional shape and their AC loss characteristics", Physica C, N° 357-360, 2001, pp1134-1143

[BAI98] : J. Baixeras, Les supraconducteurs, Eyrolles, 1998

[BAR99] : G.J. Barnes, M. McCulloch, D. Dew-Hugues, "Computer Modelling of Type II Superconductors in Applications", Supercond. Sci. Technol., Vol.12, No., 1999, Pages 518-522

[BAR00] : G.J. Barnes, D. Dew-Hugues, M.D. McCulloch, "Finite Difference Modelling of Bulk High Temperature Superconducting Cylindrical Hysteresis Machines", Supercond. Sci. Technol., Vol.13, No., 2000, Pages 229-236

[BEA64] : C. P. Bean, "Magnetization of high-field superconductors", Reviews of modern physics, Vol., No., 1964, Pages 31-39

[BRU] : Y. Brunet, Les supraconducteurs, Techniques de l'ingénieur, Traité de génie électrique, D2 700

[CAN] : site commerciale de l'entreprise CAN SUPERCONDUCTOR, <http://www.can.cz>

[DOU01] : S. X; Dou, X. L. Wang, J. Horvat, D. Milliken, A. H. Li, K. Konstantinov, E. W. Colling, M. D. Sumption, H. K. Liu, "Flux jumping and bulk-to-granular transition in the magnetization of a compacted and sintered MgB₂ superconductor", Physica C, Vol 361, 2001, pp79-83

[FUC97] : G. Fuchs, P. Stoye, T. Straiger, G. Krabbes, P. Schätzle, W. Gawalck, P. Görnert, A. Gladun, "Melt Textured Samples for Trapped Field Magnets and Levitating Bearings", I.E.E.E. Trans. ASC, Vol.7, No.2, Juin 1997, Pages 1949-1952

[GOT90] : S. Gotoh, M. Koshizuka and S. Tanaka, "Magnetization study of YBaCuO prepared by quench and melt growth process", Physica B, n°165&166, 1990, pp1379-1380.

[HAN96] : G. C. Han, K. Watanabe, S. Awaji, N. Kobayashi, K. Kimura, "Magnetization and instability in melt-textured YBa₂Cu₃O₇ at low temperature and high fields up to 23T", Physica C, 274, 1997, pp33-38

[MOR98] : M. Morita, K. Nagashima, S. Takebayachi, M. Murakami, M. Sawamura, "Trapped field of YBa₂Cu₃O₇ QMG bulk magnets", Materials Science & Engineering B, Vol.B53, No., 1998, Pages 159-163

[MUR89] : M. Murakami, M. Morita, N. Koyama, "Flux creep in high Jc YBa₂Cu₃O₇ crystals", Japanese journal of applied physics, Vol., No., 1989, Pages 1754-1756

[OSW99] : B. Oswald, M. Krone, M. Söll, T. Strasser, J. Oswald, K.-J. Best, W. Gawalek, L. Kovalev, "Superconducting Reluctance Motors with YBCO Bulk Material", I.E.E.E. Trans. A.S.C., Vol.9, No.2, 1999, Pages 1201-1204

[POO95] : C. P. Poole, Jr, H. A. Farach, R. J. Creswick, Superconductivity, Academic Press, 1995

[REZ87] : A. Rezzoug, Machine synchrone à plots ferromagnétiques aimantés à saturation par une bobine

supraconductrice. Aspect théoriques et expérimentaux, Thèse d'état, INPL, 1987

[SAZ92] : T. Sasaki, M. Tanaka, M. Morita, K. Miyamoto, M. Hashimoto, "Magnetic shielding by superconducting YbaCuO prepared by the modified quench and melt growth (QMG) process", Jpn. J. Phys., Vol.31,Part 1, N°4, april 1992, pp1026-1032

[TIX95] : P. Tixador, Les supraconducteurs,HERMES ,1995

[TIX99] : P. Tixador, F. Simon, H. Daffix, M. Deleglise, "150-kW Experimental Superconducting Permanent-Magnet Motor",I.E.E.E. Trans. A.S.C., Vol.9,No.2,Jun 1999,Pages 1205-1208

[VAN99] : Ph. Vanderbenden, R. Cloots, M. Ausloos, R.A. Doyle, A.D. Bradley, W. Lo, D.A. Cardwell, A.M. Campbell, "Intragranular and Intergranular Superconducting Properties of Bulk Melt-Textured YBCO",I.E.E.E. Trans. ASC, Vol.9,No.2,Jun 1999,Pages 2308-2311

[WEN00] : H.M. Wen, L.Z. Lin, Y.L. Jiao, M.H. Zheng, H.T. Ren, "Experimental study on a high-Tc superconducting permanent magnet",Physica C, Vol.C337,No., 2000,Pages 335-338

[WIL83] : M. N. Wilson, Superconducting Magnets,OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS ,1983

[WIL89] : J. O. Willis, M. E. McHenry, M. P. Maley, H. Sheinberg, "Magnetic shielding by superconducting YbaCuO hollow cylinders", I.E.E.E. Trans. Mag., Vol25, n°2, march 1989, pp2502-2505

[XU97] : M.Xu, H.M. Jaeger, D.G. Hinks, G.W. Crabtree, K.C. Goretta, Y. Zhao, C.H. Choi, "Flux jumps in Y-123 and La-214",Physica C, Vol.282-287,No., 1997,Pages 2359-2360

[ZEH02] : M. Zehetmayer, M. Eisterer, H. W. Weber, J. Jun, S. M. Kasakov, J. Karpinski, A. Wisniewski, "Mixed state property of superconducting MgB2 crystals", Cond-mat, Vol 1, Apr 2002.

CHAPITRE 2 : MODÉLISATION ET OUTILS

TABLE DES MATIÈRES DU CHAPITRE 2

I	Introduction.....	55
II	Modélisation du problème.....	55
	II.1 Les différents types de modélisation.....	55
	II.2 Modélisation coulombienne d'un aimant.....	55
	II.3 Modélisation coulombienne d'un solénoïde.....	57
	II.4 Modélisation d'un matériau ferromagnétique.....	61
	II.5 Modélisation d'un matériau supraconducteur.....	62
	II.6 Modélisation de l'inducteur 8 pôles.....	64
III	Les méthodes de Monte-Carlo.....	66
	III.1 Bref historique.....	66
	III.2 Calcul d'intégrales multiple.....	67
	III.2.a Présentation de la méthode.....	67
	III.2.b Convergence de la méthode.....	68
	III.2.c Exemple de calcul.....	69
	III.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles stationnaires.....	70
	III.3.a Position du problème.....	70
	III.3.b Formulation mathématique de la méthode.....	71
	III.3.c Traitement des sources et conditions de passage.....	75
	III.3.d Précision et convergence de la méthode.....	78
	III.4 Avantages et inconvénients.....	81
	III.4.a Les inconvénients.....	81
	III.4.b Les avantages.....	82
IV	Estimation du gradient.....	82
	IV.1 Position du problème.....	82
	IV.2 Approximation par des fonctions.....	84
	IV.3 Filtre fréquentiel.....	85
	IV.4 Régularisation.....	87
	IV.4.a Introduction de la méthode.....	87
	IV.4.b Application de la méthode.....	90
	IV.4.c Généralisation de la méthode.....	93
	IV.5 Traitement d'une surface.....	96
V	Conclusion.....	97

I INTRODUCTION

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles telles que l'équation de Poisson. Les méthodes les plus utilisées sont les éléments finis et les différences finies. Ces méthodes sont très performantes et sont à la base de nombreux logiciels commerciaux.

Nous proposons dans ce chapitre d'étudier une approche différente qui conduit à une estimation probabiliste de la solution de l'équation de Poisson.

La méthode de Monte-Carlo que nous nous proposons d'étudier est basée sur la génération de chaînes de Markov. En générant un certain nombre de cheminements aléatoires, nous allons pouvoir estimer la solution sans inverser de matrice et sans même avoir besoin de calculer la valeur de la fonction en tout point du maillage.

Pour analyser la méthode, nous commencerons par présenter la modélisation coulombienne des différents composants formant les systèmes électrotechniques.

Nous présenterons ensuite une approche mathématique de la méthode ainsi que sa mise en oeuvre sur un exemple simple.

La méthode de Monte-Carlo employée conduit toujours à une erreur de calcul quantifiable. L'ensemble de ces erreurs forme un bruit statistique superposé au calcul entraînant des problèmes lors du calcul du gradient de la fonction calculée.

Nous proposons donc d'améliorer la méthode en la complétant par des outils propres au traitement du signal.

II MODÉLISATION DU PROBLÈME

II.1 Les différents types de modélisation

Le système considéré est composé de circuits parcourus par des courants, sources de champ magnétique, et par des matériaux aux propriétés magnétiques diverses : diamagnétique (supraconducteurs) et ferromagnétiques.

Les équations de Maxwell en régime statique constituent le point de départ de nos calculs sachant qu'aux matériaux on peut associer deux types de modèle :

- dans le modèle Ampérien, on introduit des densités de courant volumiques et superficielles. Les calculs sont menés à partir de la détermination du potentiel-vecteur \vec{A} .
- Dans le modèle Coulombien, on introduit des densités volumiques et superficielles de masses magnétiques fictives. Les calculs sont menés à partir de la détermination d'un potentiel scalaire magnétique V .

Nous avons retenu le second type de modélisation pour conduire nos calculs.

Afin de modéliser tout système électromagnétique, nous allons partir de la modélisation d'un aimant, puis nous présenterons la modélisation des circuits de courant à travers l'exemple du solénoïde, les différents matériaux utilisés et nous terminerons par la modélisation de la structure à huit pôles présentée dans la chapitre précédent.

II.2 Modélisation coulombienne d'un aimant

Soit un aimant possédant une aimantation \vec{M} uniforme d'axe z.

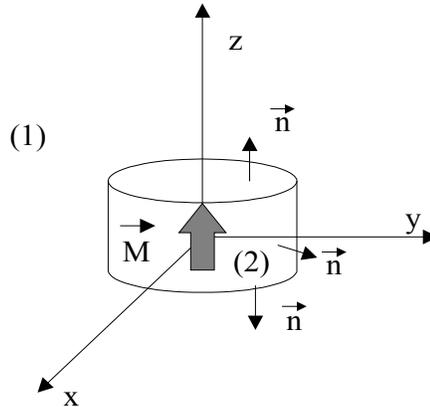


Figure 57: représentation d'un aimant.

Nous voulons calculer l'induction magnétique produite par l'aimant dans tout l'espace. Sachant qu'il n'existe de courant en aucun point de l'espace, nous allons écrire les équations de Maxwell dans chacun des milieux.

- Dans le milieu 1, les deux équations de Maxwell relatives à l'excitation et à l'induction magnétique sont:

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{0} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.2})$$

De plus,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II.3})$$

L'équation II.1 nous permet de dire que le champ \vec{H} est irrotationnel, on peut alors écrire:

$$\vec{H} = -\vec{\text{grad}} V \quad (\text{II.4})$$

La grandeur V représente le potentiel scalaire magnétique. Les équations II.2, II.3 et II. 4 amènent:

$$-\mu_0 \text{div} \vec{\text{grad}} V = 0 \quad (\text{II.5})$$

d'où,

$$\Delta V = 0 \quad (\text{II.6})$$

- Dans le milieu 2, c'est à dire dans l'aimant, il n'existe pas de courant: les équations 1 et 2 restent valables.

L'induction magnétique s'écrit alors:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{II.7})$$

La relation II.2 nous donne alors,

$$\text{div} \vec{H} = -\text{div} \vec{M} \quad (\text{II.8})$$

Nous pouvons alors définir la densité volumique de masses magnétiques fictives équivalente à l'aimantation \vec{M} telle que,

$$\rho_m = \mu_0 \operatorname{div} \vec{M} \quad (\text{II.9})$$

Pour un aimant ayant une aimantation parfaitement uniforme, ρ_m est nul dans tout le volume de l'aimant. Il convient alors de considérer une densité superficielle de charges magnétiques σ_m telle que:

$$\sigma_m = \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.10})$$

Avec \vec{n} la normale sortante aux surfaces considérées. L'aimant se ramène donc à deux surfaces uniformément chargées comme le montre la figure suivante.

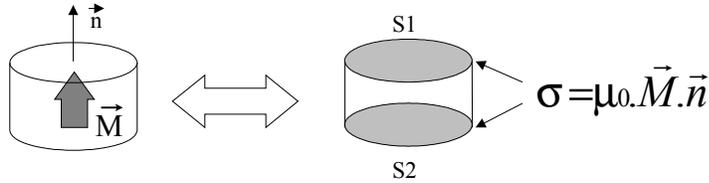


Figure 58: modélisation d'un aimant.

La discontinuité de la composante normale du champ \vec{h} au niveau d'une surface chargée nous donne la condition de passage suivante:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_2 = \sigma_m \quad (\text{II.11})$$

Les indices 1 et 2 représentent respectivement les zones avant et après la surface chargée.

En résumé, nous devons résoudre dans le cas d'un aimant le problème suivant:

Dans tout le domaine,

$$\Delta V = 0$$

au niveau des sources,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_2 = \sigma_m$$

L'induction magnétique se calcule alors,

Dans l'aimant:

$$\vec{B} = \mu_0 (-\operatorname{grad} V + \vec{M})$$

Dans le reste du domaine:

$$\vec{B} = \mu_0 (-\operatorname{grad} V)$$

II.3 Modélisation coulombienne d'un solénoïde

Soit un solénoïde parcouru par une densité de courant \vec{j} dans une épaisseur de conducteurs e et ayant pour rayon intérieur R_i et pour longueur L .

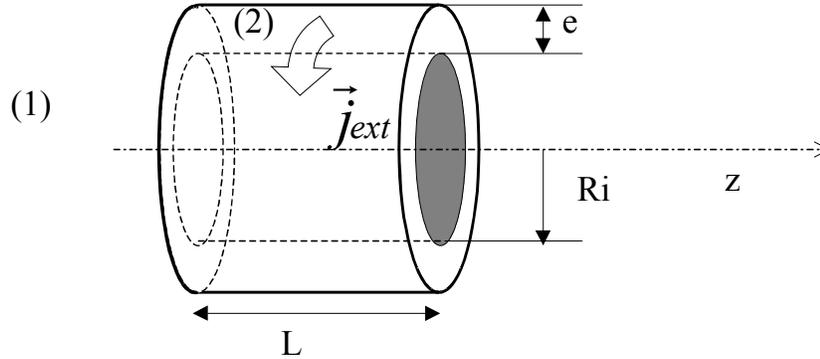


Figure 59: représentation du solénoïde

Dans le milieu 1, il n'y a pas de courant, les équations II.1 et II.2 sont valables et le potentiel obéit à l'équation de Laplace.

Dans le milieu 2, nous sommes en présence de courants, les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{ext} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{div. } \vec{B} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Posons

$$\vec{j}_{ext} = \vec{\text{rot}} \vec{P}_m \quad (\text{II.14})$$

\vec{P}_m est le vecteur de polarisation magnétique. Nous pouvons alors écrire,

$$\vec{\text{rot}} (\vec{H} - \vec{P}_m) = \vec{0} \quad (\text{II.15})$$

Le vecteur $(\vec{h} - \vec{P}_m)$ est irrotationnel, nous pouvons alors écrire,

$$(\vec{H} - \vec{P}_m) = -\vec{\text{grad}} V \quad (\text{II.16})$$

Soit,

$$\vec{H} = -\vec{\text{grad}} V + \vec{P}_m \quad (\text{II.17})$$

De plus, dans le milieu 2, l'induction magnétique s'écrit,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II.18})$$

Le champ magnétique étant à divergence nulle,

$$\text{div.} (-\vec{\text{grad}} V) + \text{div } \vec{P}_m = 0 \quad (\text{II.19})$$

Soit,

$$\Delta V + \text{div } \vec{P}_m = 0 \quad (\text{II.20})$$

Le vecteur polarisation P_m est calculé à partir du rotationnel du courant j , nous pouvons alors choisir

arbitrairement la valeur de sa divergence. Afin de simplifier les calculs, nous allons choisir $\text{div } \vec{P}_m = 0$. L'équation (II.20) devient alors l'équation de Laplace et notre problème ne comporte pas de densité volumique de charges magnétiques fictives.

Nous connaissons alors parfaitement le vecteur de polarisation par son rotationnel et sa divergence.

Calculons \vec{P}_m dans le cas du solénoïde. Nous avons $\text{rot } \vec{P}_m = \vec{j}_{\text{ext}}$.

Si on se place en coordonnées cylindrique, la densité de courant s'écrit:

$$\vec{j}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} 0 \\ j_{\text{ext}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Cette densité de courant est égale au rotationnel du vecteur \vec{P}_m .

$$\text{rot } \vec{P}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} P_{mr} \\ P_{m\theta} \\ P_{mz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

La divergence du vecteur polarisation étant nulle, le flux du vecteur \vec{P}_m à travers la surface extérieure du solénoïde est donc nul, de plus, le vecteur polarisation est orthogonal au courant, sa direction est donc obligatoirement suivant l'axe z.

Sur les surface latérales,

$$\vec{P}_m \wedge \vec{n} = \vec{0} \quad (\text{II.23})$$

Donc, à cet endroit soit le vecteur \vec{P}_m est nul, soit il est colinéaire au vecteur normal à la surface \vec{n} . Comme le vecteur \vec{P}_m ne peut pas être nul, nous en déduisons qu'il n'a qu'une composante suivant l'axe z. L'égalité entre la densité de courant et le rotationnel du vecteur polarisation nous donne:

$$\frac{\partial P_{mz}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{II.24})$$

et,

$$\frac{-\partial P_{mz}}{\partial r} = j_{\text{ext}} \quad (\text{II.25})$$

soit,

$$P_{mz} = - \int_r^{R_i+e} j_{\text{ext}} dr \quad (\text{II.26})$$

Dans l'épaisseur du solénoïde, nous pouvons écrire,

$$P_{mz} = -j_{\text{ext}}(R_i + e - r) \quad (\text{II.27})$$

A l'intérieur du solénoïde, il n'y a pas de courant, donc la composante d'axe z du vecteur \vec{P}_m est constante. Afin d'assurer la continuité de \vec{P}_m , nous prenons sa valeur à $r = R_i$ à l'intérieur du solénoïde.

Soit,

$$\begin{aligned} \vec{P}_m &= -\vec{j}_{\text{ext}}(R_i + e - r) & \text{si } R_i < r < R_i + e \\ \vec{P}_m &= -\vec{j}_{\text{ext}} e & \text{si } 0 < r < R_i \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Nous connaissons le vecteur polarisation magnétique, nous pouvons alors calculer les densités de charges magnétiques fictives équivalentes et telles que:

$$\rho_m = \text{div } \vec{P}_m \quad (\text{II.29})$$

et,

$$\sigma_m = \mu_0 \vec{P}_m \cdot \vec{n} \quad (\text{II.30})$$

Nous voyons que l'équation (II.19) entraîne que le modèle ne comporte pas de densité volumique de charges, le solénoïde se ramène donc à deux surfaces chargées comme suit:

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &= -\mu_0 \vec{j}_{\text{ext}}(R_i + e - r) & \text{si } R_i < r < R_i + e \\ \sigma_{m2} &= -\mu_0 \vec{j}_{\text{ext}} & \text{si } 0 < r < R_i \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

La figure 60 synthétise la modélisation du solénoïde.

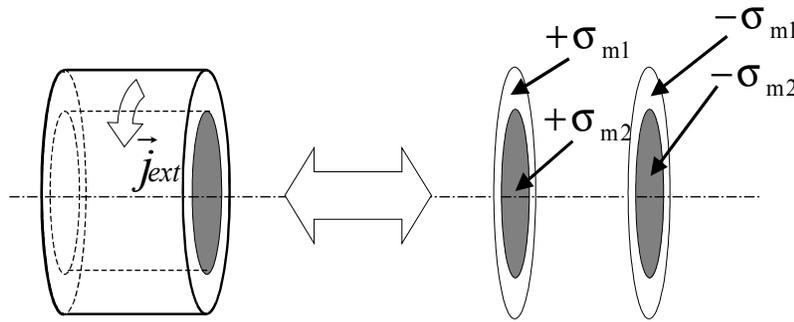


Figure 60: modélisation d'un solénoïde.

Pour calculer l'induction, nous devons alors résoudre le système suivant:

Dans tout le domaine,

$$\Delta V = 0$$

avec les conditions de passage sur les surfaces

chargées:

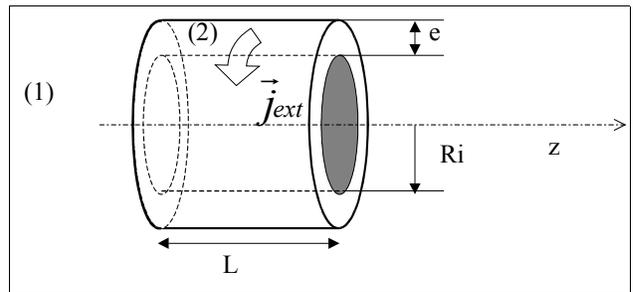
$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_2 = \sigma_m$$

Les indices 1 et 2 représentant respectivement les milieux avant et après les sources surfaciques.

Nous pouvons alors déduire la valeur de l'induction magnétique à l'aide des équations suivantes:

Dans le milieu (1), $\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}} V$.

Dans le milieu (2), $\vec{B} = \mu_0 (-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{P}_m)$.



II.4 Modélisation d'un matériau ferromagnétique.

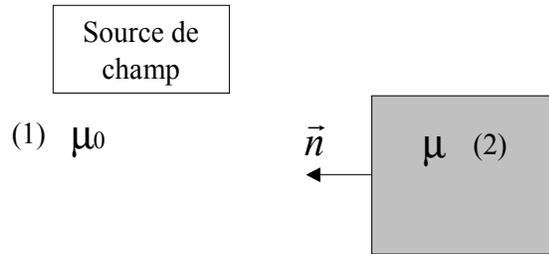


Figure 61: description d'un système comportant un élément ferromagnétique.

Dans le milieu (1), il n'y a pas de courant, nous pouvons donc écrire les équations suivantes,

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \quad (\text{II.32})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II.34})$$

Nous pouvons alors calculer l'induction magnétique en résolvant l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et en calculant:

$$\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.35})$$

Dans le milieu (2), il n'existe pas de courant, la perméabilité de ce milieu est μ , nous pouvons alors écrire que dans le milieu (2), les équations (II.32) et (II.33) sont valables avec,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.36})$$

Dans ce milieu ferromagnétique, nous pouvons donc calculer l'induction magnétique en résolvant l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et en calculant :

$$\vec{B} = -\mu \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (\text{II.37})$$

La continuité de la composante normale de l'induction magnétique nous donne la condition de passage à appliquer à l'interface $\mu_0 - \mu$, soit,

$$\mu_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_1 - \mu \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_2 = 0 \quad (\text{II.38})$$

où n représente la direction de la normale à la surface séparant les deux milieux, les indices 1 et 2 représentent respectivement les milieux 1 et 2.

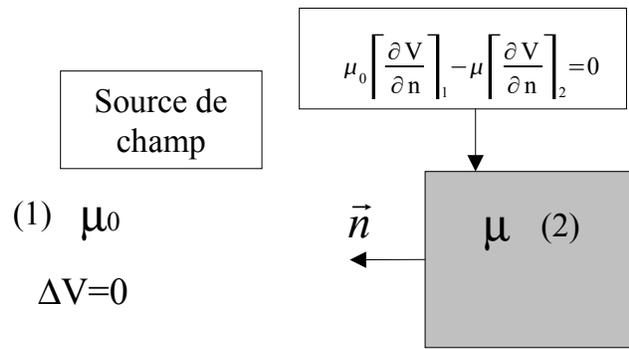


Figure 62: modélisation d'un système comportant des éléments supraconducteurs.

En résumé,

dans tout le domaine,
 $\Delta V = 0$
 avec pour condition de passage lors du changement de milieu,

$$\mu_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_1 - \mu \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_2 = 0$$

 Nous pouvons alors calculer l'induction comme suit:
 Dans le milieu (1) et en dehors de la source de champ:

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\text{grad}} V$$

 dans le milieu (2):

$$\vec{B} = -\mu \vec{\text{grad}} V$$

II.5 Modélisation d'un matériau supraconducteur

Nous avons vu dans le chapitre précédent que si la densité de courant dans le supraconducteur était suffisamment grande, alors le champ magnétique extérieur est tangent au matériau. Nous associerons ce comportement au diamagnétisme parfait.

Nous considérons que l'induction est nulle dans le matériau supraconducteur.

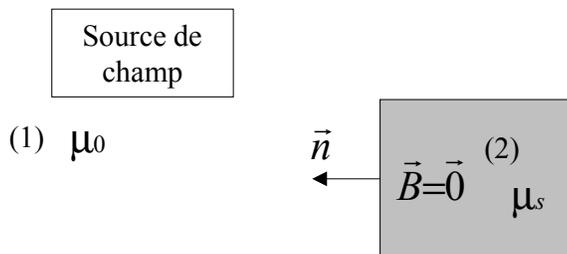


Figure 63: Représentation d'un système comportant des supraconducteurs

Dans le milieu (2), nous pouvons alors écrire:

$$\vec{B} = \mu_s \vec{H} = \vec{0} \quad (\text{II.39})$$

Nous allons alors dans une première approximation associer au supraconducteur la perméabilité μ_s . Nous obtenons alors la condition de passage suivante:

$$\mu_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_1 - \mu_s \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_2 = 0 \quad (\text{II.40})$$

soit, d'après la relation (II.39),

$$\mu_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right] = 0 \quad (\text{II.41})$$

Nous constatons que cette condition s'apparente à une condition de Neumann.

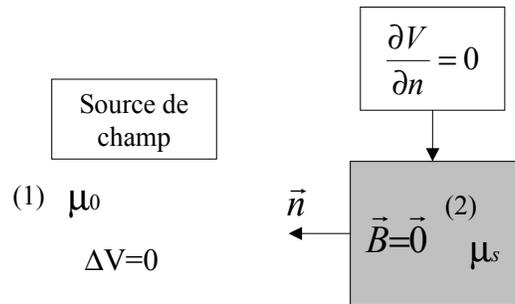


Figure 64: modélisation d'un système comportant un élément supraconducteur.

Dans le milieu (1), les équations (II.32) et (II.33) sont valables et le potentiel scalaire obéit à l'équation de Laplace.

En résumé, dans tout le domaine,

$$\Delta V = 0$$

avec pour condition aux limites au niveau du matériau supraconducteur,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

Nous pouvons alors calculer l'induction comme suit:

Dans le milieu (1):

$$\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}} V$$

dans le milieu (2):

$$\vec{B} = \vec{0}$$

II.6 Modélisation de l'inducteur 8 pôles

Nous avons présenté dans le chapitre 1 la structure de l'inducteur que nous avons étudié, cette structure est composée de deux solénoïdes en opposition et de quatre écrans supraconducteurs.

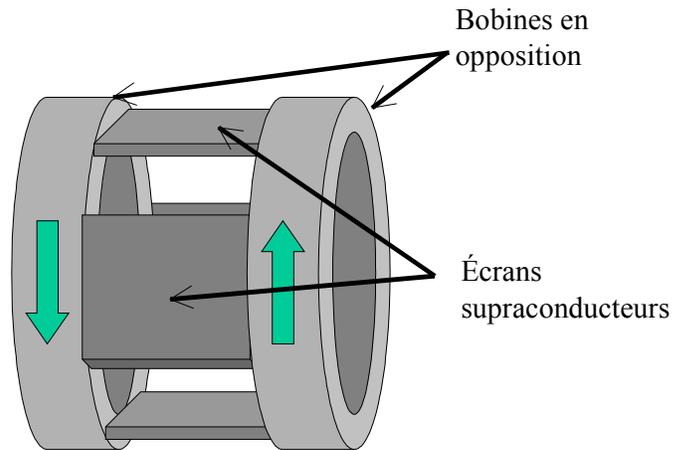


Figure 65: structure de l'inducteur 8 pôles.

La modélisation d'une telle structure est représentée sur la figure suivante.

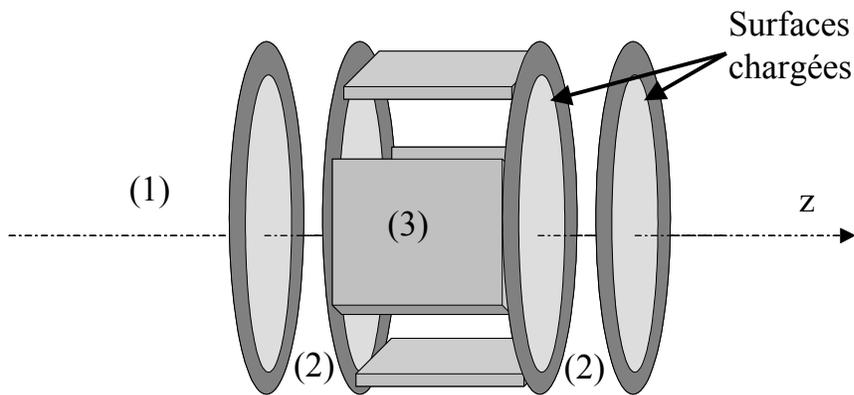


Figure 66: modélisation de l'inducteur.

Nous devons placer le modèle de la figure 66 dans un espace de travail limité afin de pouvoir résoudre le problème à l'aide de méthodes numériques. Nous plaçons donc ce modèle dans un cube suffisamment grand pour pouvoir considérer le potentiel scalaire nul sur son contour formant les frontières limites de notre espace de travail, et nous imposons sur ces frontières la condition de Dirichlet $V=0$.

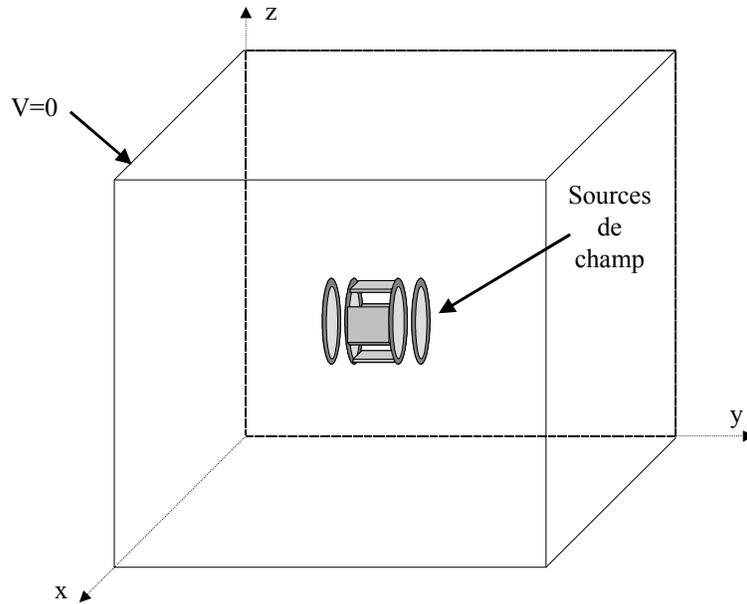


Figure 67: représentation du système pour le calcul.

En utilisant les différentes modélisations présentées plus haut, nous pouvons calculer l'induction magnétique créée par cette structure en résolvant le système décrit ci-dessous.

Dans tout l'espace,

$$\Delta V = 0$$

Les conditions de passage à travers une source superficielle sont:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_2 = \sigma_m$$

avec les indices 1 et 2 représentant respectivement les milieux avant et après les sources, et avec σ_m la densité superficielle de charges magnétiques fictives rencontrées.

Une condition de Neumann est imposée sur le contour du supraconducteur, avec n la direction de la normale à la surface du supraconducteur.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \right)$$

La frontière externe du domaine de calcul possède une condition de Dirichlet : $V=0$.

A partir du calcul du potentiel, nous pouvons calculer la valeur de l'induction magnétique:

Dans le milieu (1), c'est à dire dans l'air,

$$\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Dans le milieu (2), c'est à dire dans les solénoïdes,

$$\vec{B} = -\mu_0 (-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{P}_m)$$

avec \vec{P}_m le vecteur polarisation.

Dans le milieu (3), c'est à dire dans le matériau supraconducteur, $\vec{B} = \vec{0}$

Nous avons scindé le système à résoudre en deux parties:

- la première partie concerne les équations à résoudre pour déterminer la valeur du potentiel scalaire magnétique. Nous allons montrer comment résoudre ce problème par une méthode de Monte-Carlo utilisant les chaînes de Markov.
- La deuxième partie concerne le calcul de l'induction magnétique à partir du potentiel scalaire magnétique. Nous montrerons dans la dernière partie de ce chapitre comment, à partir du potentiel issu de la méthode de Monte-Carlo, estimer par une méthode de régularisation la valeur de l'induction.

III LES MÉTHODES DE MONTE-CARLO

Nous avons effectué la formulation coulombienne de notre problème. Nous allons maintenant voir comment le résoudre à l'aide d'une méthode stochastique.

Après un bref historique des méthodes de Monte-Carlo, nous commencerons par présenter le calcul d'intégrales multiples.

Nous montrerons ensuite comment aboutir à la solution d'une équation aux dérivées partielles en présentant les fondements mathématiques de la méthode, puis en arrivant à sa mise en application.

III.1 Bref historique

Le nom et le développement des méthodes de Monte-Carlo datent de 1944 environ. Le nom de Monte-Carlo fait référence à la principauté de Monaco connue pour les jeux de hasard, on y trouve des roulettes qui constituent des générateurs de nombres aléatoires très simples. Bien que leur développement soit très récent, ces méthodes ont été utilisées (sans analyse probabiliste) à de nombreuses occasions dans le passé. Par exemple, dans la seconde partie du dix-neuvième siècle, quelques personnes ont effectué des expériences visant à déterminer la valeur de π . L'expérience consistait à lancer de manière aléatoire une aiguille sur une table comportant des lignes parallèles. À partir de l'observation du nombre d'intersections de l'aiguille et des lignes, une estimation de la valeur de π était réalisée.

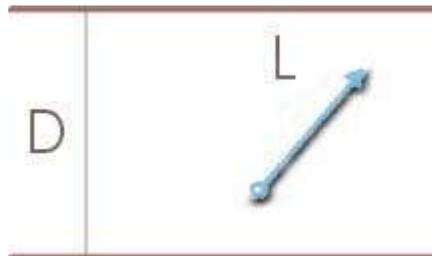


Figure 68: expérience de l'aiguille servant à estimer π .

Les lignes parallèles sont distantes de D et l'aiguille a une longueur L .

Pour des valeurs de L inférieures ou égales à D , nous pouvons écrire la probabilité pour que l'aiguille coupe les lignes:

$$P(\text{aiguille coupe les lignes}) = \frac{2L}{\pi D}$$

Si on lance l'aiguille N fois et que celle-ci a coupé les lignes R fois, nous pouvons écrire la probabilité P comme suit:

$$P(\text{aiguille coupe les lignes}) = \frac{R}{N}$$

Donc l'estimation de π à partir de l'expérience s'écrit alors:

$$\pi = \frac{2LN}{RD}$$

Un compte rendu de cette expérience a été publié dans un article par Hall (A. HALL 1873. " On an experimental determination of PI").

En 1899, Lord Rayleigh a montré qu'un cheminement aléatoire à une dimension sans conditions absorbantes pouvait estimer la solution d'une équation différentielle parabolique.

En 1908, W.S. Gosset a utilisé des expériences probabilistes pour l'aider dans sa découverte de la distribution d'un coefficient de corrélation.

En 1931, Kolmogorov a montré la relation entre les processus stochastiques de Markov et certaines équations intégro-différentielles.

Dans la première partie du vingtième siècle, les écoles britanniques enseignant les statistiques ont travaillé sur des méthodes de Monte-Carlo peu sophistiquées, la plupart de ces travaux semblent avoir été de caractère didactique et rarement utilisés pour la recherche.

La première utilisation des méthodes de Monte-Carlo en tant qu'outil pour la recherche est liée aux travaux sur la bombe atomique pendant la seconde guerre mondiale. Ces travaux nécessitaient une simulation directe du problème probabiliste de la diffusion des neutrons dans la matière fissile. Mais déjà à un stade précoce de ces recherches, Von Neumann et Ulam ont travaillé sur la résolution de problèmes déterministes. Néanmoins, le développement de ces idées a dû attendre les travaux de Harris et Hermann Kahn en 1948. Cette année là, Fermi, Metropolis et Ulam ont obtenu une estimation des valeurs propres de l'équation de Schrodinger.

Aux environs de 1970, les développements de nouvelles théories ont rendu les méthodes probabilistes crédibles auprès des chercheurs et des problèmes de dimensions importantes pour lesquels les méthodes traditionnelles étaient inefficaces ont pu être résolus par les méthodes de Monte-Carlo.

De nos jours, les méthodes probabilistes sont des outils performants et très utilisés dans le monde de la recherche pour estimer la solution de problèmes déterministes tels que le calcul d'intégrales multiples et la résolution d'équations aux dérivées partielles.

III.2 Calcul d'intégrales multiple

III.2.a Présentation de la méthode

Un problème de magnétostatique nécessite soit la résolution d'une équation aux dérivées partielles telle que l'équation de Poisson, soit celle d'une intégrale dans le cas de systèmes composés de courants ou d'aimant dans l'air, comme par exemple l'intégrale de Biot-Savart. Dans la plupart des cas de calcul d'intégrales, il est de coutume d'employer des méthodes de résolution numériques classiques telle que la méthode des trapèzes, ou de Simpson [NUM]. Néanmoins, ces méthodes traditionnelles deviennent difficiles à mettre en oeuvre lorsque l'ordre d'intégration devient élevé. Nous allons dans cette partie présenter le calcul d'intégrales multiples par une méthode de Monte-Carlo[FIS96][HAM67][COU92]. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au calcul d'une intégrale simple.

Soit I l'intégrale finie suivante,

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{II.41})$$

Soit X , une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[a, b]$. Nous pouvons alors définir la fonction de densité de probabilité $p(x)$ telle que:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } (x \in [a, b]) \\ 0 & \text{si } (x \notin [a, b]) \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Nous vérifions bien que,

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad (\text{II.43})$$

L'espérance de la fonction $f(x)$ peut alors s'écrire:

$$E(f(x)) = \int_a^b p(x) f(x) dx = \frac{I}{b-a} \quad (\text{II.44})$$

Pour calculer cette espérance, nous devons discrétiser la variable continue x , et générer des variables aléatoires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ uniformément réparties sur l'intervalle $[a, b]$ à partir de la fonction $p(x)$. Nous pouvons alors calculer la somme suivante:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) \quad (\text{II.45})$$

Cette somme pour N grand converge vers l'espérance de $f(x)$. Nous pouvons alors obtenir une estimation de l'intégrale I donnée dans l'équation suivante.

$$\hat{I} = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) \quad (\text{II.46})$$

Nous pouvons facilement généraliser cette expression pour une intégrale d'ordre supérieur. Nous présentons un exemple de calcul d'une intégrale d'ordre six un peu plus loin.

III.2.b Convergence de la méthode

Le théorème de la limite centrale (cf annexes) nous permet d'affirmer que cette estimation converge en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ quelque soit l'ordre de l'intégration. Nous pouvons définir un intervalle de confiance à 95% pour notre estimation, la valeur de l'intégrale s'écrit alors:

$$I = \hat{I} \pm \frac{2\sigma_I}{\sqrt{N}} \quad (\text{II.47})$$

Avec la variance valant,

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{N} \sum_i \lambda_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_i \lambda_i \right)^2 \quad (\text{II.48})$$

Le fait de pouvoir estimer l'erreur lors de l'estimation d'une intégrale est un des principaux avantages de cette méthode.

Le tableau suivant compare les vitesses de convergence de différents algorithmes d'intégration en fonction du nombre d'échantillons choisis.

<i>Méthode</i>	<i>Intégrales de dimension 1</i>	<i>Intégrales de dimension d</i>
Monte Carlo	$N^{-\frac{1}{2}}$	$N^{-\frac{1}{2}}$
Méthode des trapèzes	N^{-2}	$N^{-\frac{2}{d}}$
Méthode de Simpson	N^{-4}	$N^{-\frac{4}{d}}$

Tableau 2: convergence de différentes méthodes d'intégration.

La méthode de Simpson qui nécessite trois points par intervalle en réalisant une interpolation polynomiale converge plus rapidement que la méthode des trapèzes. Nous voyons que la vitesse de convergence de la méthode de Monte Carlo est indépendante de l'ordre de l'intégrale à calculer, d'où l'intérêt de cette méthode lorsque l'ordre d'intégration devient élevé.

III.2.c Exemple de calcul

Prenons l'exemple du calcul de l'énergie stockée dans un solénoïde d'axe z, de longueur L, de rayon intérieur Ri, d'épaisseur de bobinage e et parcouru par une densité volumique de courant \vec{j} . Cette intégrale d'ordre 6 est présentée dans l'équation suivante.

$$W_e = \frac{\mu_0}{8\pi} \iiint_v \iiint_{v'} \frac{\vec{j}(P) \cdot \vec{j}(P')}{PP'} dv dv' \quad (II.49)$$

avec P appartenant au volume v et P' au volume v'. Dans le cas du solénoïde, les deux volumes sont confondus.

En coordonnées cylindriques, nous pouvons écrire,

$$W_e = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{r=R_i}^{R_i+e} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{r'=R_i}^{R_i+e} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\vec{j}(P) \cdot \vec{j}(P')}{PP'} r r' dr d\theta dz dr' d\theta' dz' \quad (II.50)$$

Nous voyons que nous devons considérer six variables aléatoires. Nous allons travailler avec deux fois trois variables en considérant deux points P(r,θ,z) et P'(r',θ',z') pris aléatoirement et uniformément dans le volume des courants. Nous allons donc pouvoir estimer la valeur de l'énergie \hat{W}_e par l'équation suivante:

$$\hat{W}_e = \frac{\mu_0 4\pi^2 L^2 e^2 j^2}{8\pi N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{P_i P_i'} r_i r_i' \right) \quad (II.51)$$

Le vecteur densité de courant n'ayant qu'une composante constante en coordonnées cylindriques, nous avons pu sortir sa valeur de la somme.

Effectuons une application numérique pour un solénoïde ayant les caractéristiques suivantes:

$$R_i = 0.075 \text{ m}$$

$$e = 0.025 \text{ m}$$

$$L = 0.05 \text{ m}$$

$$j = 10^8 \text{ A/m}^2$$

Le tableau suivant présente une comparaison de la valeur estimée par la méthode présentée de l'énergie avec une valeur que nous appelons « analytique », cette valeur est celle calculée par l'intermédiaire des intégrales elliptiques sous le logiciel Mathematica[®].

N	Valeur estimée	Valeur analytique	Erreur (%)
1000	1394.12	1515.9	8
10000	1617.02	1515.9	6.66
100000	1471.32	1515.9	2.95
1000000	1520.92	1515.9	0.32

Tableau 3: convergence du calcul d'énergie.

La méthode présentée permet de calculer des intégrales multiples. Elle est parmi les plus performantes pour des intégrales d'ordre élevé. De plus, son algorithme très simple à programmer permet une mise en oeuvre rapide. Néanmoins, la génération aléatoire des points pour le calcul doit être uniforme, et est primordiale pour obtenir un résultat correct.

III.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles stationnaires

III.3.a Position du problème

En électrotechnique, les systèmes sont souvent complexes : ils contiennent des sources de champs magnétiques diverses et plusieurs matériaux aux caractéristiques différentes comme l'inducteur présenté sur la figure suivante.

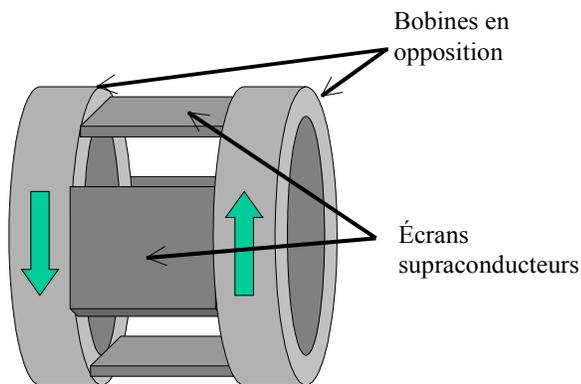


Figure 69: exemple de système à résoudre.

La figure 69 représente le système constitué de deux solénoïdes en opposition et de quatre écrans supraconducteurs.

Un calcul purement analytique de tels systèmes ne peut pas être envisagé. Nous devons alors nous tourner vers une résolution numérique. Ces systèmes électromagnétiques sont régis par les équations de Maxwell et nous amène naturellement à une équation aux dérivées partielles telles que l'équation de Poisson. La résolution numérique nous impose une discrétisation de l'espace de calcul Ω . Nous discrétisons alors l'opérateur de dérivation.

Nous appliquons à l'espace de calcul un maillage cubique avec δ comme pas de discrétisation. Nous avons vu dans la partie précédente que le potentiel scalaire magnétique obéissait à l'équation de Poisson pour un tel système. V est le potentiel scalaire magnétique et S représente le terme source.

$$\Delta V_{x,y,z} + S_{x,y,z} = 0 \quad (\text{II.52})$$

Avec, dans le cas tridimensionnel,

$$\Delta V_{x,y,z} = \frac{\partial^2 V_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{x,y,z}}{\partial z^2} \quad (\text{II.53})$$

Nous pouvons faire une approximation de la dérivée première comme suit,

$$\frac{\partial V_{x,y,z}}{\partial x} \simeq \frac{V_{x,y,z} - V_{x-\delta,y,z}}{\delta} \quad (\text{II.54})$$

La dérivée seconde s'écrit alors,

$$\frac{\partial^2 V_{x,y,z}}{\partial x^2} \simeq \frac{V_{x-\delta,y,z} - 2V_{x,y,z} + V_{x+\delta,y,z}}{\delta^2} \quad (\text{II.55})$$

En utilisant cette discrétisation du type « différences finies », nous pouvons écrire l'équation de Poisson dans le cas général.

$$\frac{V_{x-\delta,y,z} - 2V_{x,y,z} + V_{x+\delta,y,z}}{\delta^2} + \frac{V_{x,y-\delta,z} - 2V_{x,y,z} + V_{x,y+\delta,z}}{\delta^2} + \frac{V_{x,y,z-\delta} - 2V_{x,y,z} + V_{x,y,z+\delta}}{\delta^2} + S_{x,y,z} = 0 \quad (\text{II.56})$$

$S_{x,y,z}$ représente le terme source au point (x,y,z) .

Soit, nous pouvons écrire l'équation (II.56) sous la forme suivante,

$$V_{x,y,z} = p_{x+} V_{x+\delta,y,z} + p_{x-} V_{x-\delta,y,z} + p_{y+} V_{x,y+\delta,z} + p_{y-} V_{x,y-\delta,z} + p_{z+} V_{x,y,z+\delta} + p_{z-} V_{x,y,z-\delta} + \frac{\delta^2}{6} S_{x,y,z} \quad (\text{II.57})$$

Cette équation est valable pour chaque point du maillage, nous pouvons alors déterminer les valeurs des termes p_i et de S à l'aide de la discrétisation de l'équation de Poisson, des différentes conditions de passage et des conditions aux limites.

III.3.b Formulation mathématique de la méthode

L'équation II.57 pouvant s'écrire pour tous les points du domaine de calcul Ω . Notons ω les points appartenant au domaine de calcul.

Nous pouvons alors construire une représentation matricielle de notre problème. Nous construisons le vecteur $[V]$ contenant les valeurs du potentiel scalaire magnétique en chaque point du maillage, la matrice $[T]$ contenant les valeurs des termes p_i , et le vecteur $[S]$ contenant les valeurs des sources correspondantes, ce qui nous donne l'équation suivante:

$$[V] = [T][V] + [S] \quad (\text{II.58})$$

Nous appelons la matrice $[T]$ matrice de transition. Elle possède des propriétés remarquables:

Pour j et $\forall i, [T]_{i,j} \leq 1$

et,

$$\text{Pour } j \text{ donné, } \sum_i [T]_{i,j} = 1 \quad (\text{II.59})$$

L'équation II.58 possède une solution analytique qui est, si $[I]$ est la matrice identité:

$$[V] = ([I] - [T])^{-1} [S] \quad (\text{II.60})$$

Cette solution est celle obtenue par la méthode des différences finies, elle fonctionne bien tant que la matrice $[T]$ est de taille raisonnable. Si $[T]$ est trop grande, il devient difficile d'inverser la matrice $([I]-[T])$. Il faut alors trouver un autre moyen pour résoudre le problème. Tout d'abord, nous pouvons écrire l'équation II.60 sous une autre forme en effectuant un développement série de l'inverse de $([I]-[T])$. Nous pouvons alors écrire l'inverse de $([I]-[T])$ comme suit.

$$([I] - [T])^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [T]^k \quad (\text{II.61})$$

Les propriétés de la matrice de transition nous assure la convergence de cette somme.

Et donc, l'équation précédente s'écrit,

$$[V] = \sum_{k=0}^{\infty} [T]^k [S] \quad (\text{II.62})$$

Nous ne pouvons pas utiliser cette équation sous cette forme, le calcul étant encore plus lourd que pour l'inversion de $([I]-[T])$. Nous allons alors approcher le problème de façon probabiliste.

Nous pouvons alors considérer ses termes (p_i) comme étant des probabilités. Nous voyons dans l'équation II.57 qu'un point (x,y,z) est lié aux points du maillage l'entourant par les termes de la matrice de transition. Nous pouvons alors interpréter les termes (p_i) comme des probabilités de passage d'un point à un autre point du maillage.

Imaginons une particule chargée se déplaçant sur le maillage de l'espace de calcul avec des probabilités de déplacement régies par la matrice de transition. Nous générons une particule avec pour position le point A et une charge nulle.

Plaçons nous dans un cas en deux dimension:

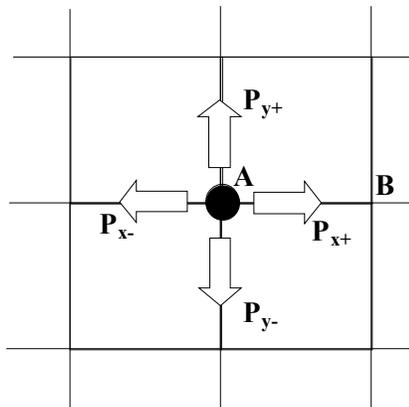


Figure 70: déplacement d'une particule sur le maillage.

La particule est représentée par le disque noir et est au point A, nous voyons que la probabilité pour la particule d'aller au point B est p_{x+} , cette probabilité représente un terme de la matrice [T]:

$$p_{x+} = [T]_{A,B} \quad (\text{II.63})$$

$[T]_{A,B}$ représente l'élément de la matrice [T] situé à l'intersection de la ligne correspondant au point A et de la colonne correspondant au point B.

La particule peut alors avoir un cheminement aléatoire dans tout l'espace de calcul Ω . De plus ce cheminement n'a pas d'effet mémoire, c'est à dire que la position de la particule ne dépend que de sa position précédente. Les positions de cette particule forment alors une chaîne de Markov. Nous appelons la chaîne de Markov associée X, qui est une suite pouvant prendre les valeurs:

$$X = (X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$$

où X_i représente la position de la particule après i déplacements. Nous pouvons écrire la probabilité p_{x+} sous la forme d'une probabilité conditionnelle:

$$p_{x+} = [T]_{A,B} = P(X_n = B / X_{n-1} = A) \quad (\text{II.64})$$

C'est à dire la probabilité pour que l'état (n) de la chaîne de Markov soit le point B si l'état (n-1) est le point A.

Si la chaîne de Markov a son point de départ au point A, la probabilité pour qu'après n déplacements elle soit le point B s'écrit $P(X_n = B / X_0 = A)$. Nous pouvons montrer que cette dernière probabilité est un élément de la matrice [T] à la puissance n:

$$P(X_n = B / X_0 = A) = [T]_{A,B}^n \quad (\text{II.65})$$

La chaîne de Markov formée par le cheminement aléatoire évolue dans l'espace de calcul Ω , dans ce même espace, existe le vecteur [S] décrivant les différentes sources du système. Nous pouvons associer à chaque position de la chaîne X une valeur du vecteur [S]. Nous pouvons alors fabriquer la fonction $F(x,y,z)$ qui associe la valeur de [S] au point considéré de telle sorte que :

$$F(\omega_i) = [S]_{\omega_i} \quad (\text{II.66})$$

Nous notons $[S]_{\omega_i}$ la composante du vecteur [S] correspondant au point ω_i .

Nous remarquons que puisque $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$, est une chaîne de Markov, la suite $F(X_0), F(X_1), \dots, F(X_n), \dots$, est aussi une chaîne de Markov. Nous connaissons les probabilités pour cette chaîne de Markov de valoir $F(X_n = B)$ au bout de n déplacements, si la chaîne X part du point A :

$$P(F(X_n = B) / X_0 = A) = P(X_n = B / X_0 = A) = [T]_{A,B}^n \quad (\text{II.67})$$

Nous pouvons alors calculer l'espérance de l'état n de la chaîne F(X) si la chaîne X commence au point A qui vaut par définition:

$$E(F(X_n) / X_0 = A) = \sum_{B \in \Omega} F(B) P(X_n = B / X_0 = A) \quad (\text{II.68})$$

Nous pouvons calculer cette espérance à l'aide de la matrice de transition et du vecteur source:

$$E(F(X_n) / X_0 = A) = \sum_{B \in \Omega} [T]_{A,B}^n [S]_B \quad (\text{II.69})$$

Le point B décrivant tous les points de maillage, l'équation précédente devient:

$$E(F(X_n) / X_0 = A) = ([T]^n [S])_A \quad (\text{II.70})$$

Or, en reprenant l'équation II.62 :

$$[V] = \sum_{k=0}^{\infty} [T]^k [S] \quad (\text{II.71})$$

Et donc, le potentiel au point A vaut:

$$[V]_A = \sum_{k=0}^{\infty} ([T]^k [S])_A \quad (\text{II.72})$$

Et donc, d'après l'équation (II.70),

$$[V]_A = \sum_{k=0}^{\infty} E(F(X_k) / X_0 = A) \quad (\text{II.73})$$

La somme des espérance de tous les états de la chaîne $F(X_i)$ représente l'espérance de la chaîne de Markov. Nous pouvons alors écrire:

$$[V]_A = \sum_{k=0}^{\infty} E(F(X_k) / X_0 = A) \quad (\text{II.74})$$

Il s'en suit que:

$$[V]_A = E(\chi_k / X_0 = A) \quad (\text{II.75})$$

avec $\chi_k = \sum_{i=0}^{\infty} F(X_i)_{,k} \quad (\text{II.76})$

Cette somme n'est pas infinie, car une particule suivant un cheminement aléatoire ne s'arrête que lorsqu'elle a une probabilité nulle de se déplacer, c'est à dire lorsqu'elle se trouve sur une frontière absorbante.

Nous pouvons alors avoir un estimateur de cette espérance en générant un grand nombre de cheminements aléatoires X issus du point A et suivant les probabilités de la matrice de transition, et donc, nous estimons le potentiel au point A par:

$$[\hat{V}]_A \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_k \quad (\text{II.77})$$

Pour une valeur de N suffisamment grande, nous pouvons obtenir une estimation du potentiel au point A sans avoir à déterminer les valeurs du potentiel aux autres points du maillage.

Nous connaissons la vitesse de convergence de cette méthode: le théorème de la limite centrale nous donne une convergence en $N^{-\frac{1}{2}}$, et nous pouvons définir un intervalle de confiance pour l'estimation. Pour un intervalle de confiance à 95%, nous pouvons écrire:

$$[V]_A \text{ est compris dans l' intervalle } [\hat{V}]_A \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{(N)}} \quad (\text{II.78})$$

avec,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_k \chi_k^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_k \chi_k \right)^2 \quad (\text{II.79})$$

III.3.c Traitement des sources et conditions de passage

Nous avons vu que le fait de générer des cheminements aléatoires sur le maillage du domaine de calcul nous permet de résoudre le système $[V]=[T][V]+[S]$ posé en II.58.

Nous allons maintenant décrire la mise en oeuvre de la méthode, c'est à dire comment remplir la matrice de transition et le vecteur source en fonction des différents éléments du systèmes.

Nous allons passer en revue tous les cas que peut rencontrer une particule lors de son déplacement sur le maillage pour le problème posé sur la figure 13.

Afin de généraliser l'utilisation de cette méthode de calcul, nous aborderons le cas d'un milieu de perméabilité quelconque.

Nous avons vu que la chaîne de Markov permettant le calcul du potentiel était la suite des termes sources rencontrés lors du déplacement aléatoire.

On peut alors associer une charge à une particule aléatoire. Charge qui évolue au fur et à mesure du déplacement sur le maillage en fonction des sources rencontrées.

Tout d'abord, nous générons une particule aléatoire à partir du point de calcul avec une charge égale à zéro.

- La particule se trouve dans un milieu homogène sans source, le potentiel obéit alors à l'équation de Laplace dont la discrétisation devient:

$$V_{x,y,z} = \frac{1}{6} V_{x+\delta,y,z} + \frac{1}{6} V_{x-\delta,y,z} + \frac{1}{6} V_{x,y+\delta,z} + \frac{1}{6} V_{x,y-\delta,z} + \frac{1}{6} V_{x,y,z+\delta} + \frac{1}{6} V_{x,y,z-\delta} \quad (\text{II.80})$$

C'est à dire que,

$$p_{x+} = p_{x-} = p_{y+} = p_{y-} = p_{z+} = p_{z-} = \frac{1}{6} \quad (\text{II.81})$$

La particule peut alors se déplacer dans les six directions avec la même probabilité. Sa charge n'est pas modifiée.

- La particule se trouve dans un milieu homogène avec une densité volumique de charges magnétiques fictives ρ_m . Le potentiel scalaire obéit à l'équation de Poisson.

$$\Delta V = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (\text{II.82})$$

La discrétisation de cette équation s'écrit alors:

$$V_{x,y,z} = \frac{1}{6} V_{x+\delta,y,z} + \frac{1}{6} V_{x-\delta,y,z} + \frac{1}{6} V_{x,y+\delta,z} + \frac{1}{6} V_{x,y-\delta,z} + \frac{1}{6} V_{x,y,z+\delta} + \frac{1}{6} V_{x,y,z-\delta} + \frac{\delta^2 \rho_m}{6 \mu_0} \quad (\text{II.83})$$

Donc,
$$p_{x+} = p_{x-} = p_{y+} = p_{y-} = p_{z+} = p_{z-} = \frac{1}{6} \quad (\text{II.84})$$

Les six directions sont équiprobables, et à chaque déplacement, la charge de la particule est augmentée de la quantité $\frac{\delta^2 \rho_m}{6 \mu_0}$, δ étant le pas de discrétisation.

- La particule arrive à l'interface de deux matériaux de perméabilités différentes. Les matériaux 1 et 2 ont respectivement pour perméabilité μ_1 et μ_2 .

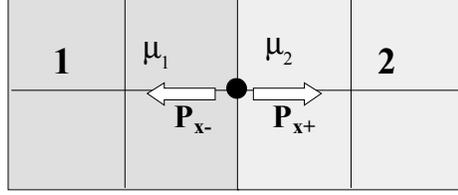


Figure 71: condition de passage entre deux milieux de perméabilités différentes

Nous devons considérer la condition de passage imposée par la continuité de la composante normale de l'induction magnétique.

À l'interface entre les deux milieux, $B_{n1} = B_{n2}$, soit,

$$\mu_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_1 - \mu_2 \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_2 = 0 \quad (\text{II.85})$$

Après discrétisation, cette relation devient,

$$V_{x,y,z} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} V_{x-\delta,y,z} + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} V_{x+\delta,y,z} \quad (\text{II.86})$$

Les probabilités de déplacement suivant l'axe x sont alors:

$$P_{x-} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \text{ et } P_{x+} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (\text{II.87})$$

La particule a une probabilité différente de passer du matériau 1 au matériau 2 que du matériau 2 au 1. La charge de la particule n'est pas modifiée.

- La particule arrive au niveau d'une surface chargée superficiellement par σ_m . Supposons que la surface rencontrée soit située dans le plan (x,y) . La condition de passage dans la direction z pour une surface chargée est donnée par le saut de la composante normale du champ magnétique.

$$\left(\frac{\partial V_{x,y,z}}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial V_{x,y,z}}{\partial z} \right)_2 = \sigma_m \quad (\text{II.88})$$

Les indices 1 et 2 représentent respectivement les domaines avant et après la surface chargée. Le même milieu se trouve de chaque côté de la surface.

La discrétisation de cette condition nous donne:

$$V_{x,y,z} = \frac{1}{2} V_{x,y,z-\delta} + \frac{1}{2} V_{x,y,z+\delta} + \frac{\delta \sigma_m}{2} \quad (\text{II.89})$$

Soit,
$$p_{z+} = \frac{1}{2} \text{ et } p_{z-} = \frac{1}{2} .$$

La particule peut alors se déplacer dans toutes les directions de manière équiprobable, le terme source $\frac{\delta \sigma_m}{2}$ est ajouté à la charge de la particule pour un déplacement suivant l'axe z .

- La particule arrive sur une frontière avec une condition de Neumann. Une telle frontière située dans le plan (x,y) est représentée par la condition suivante:

$$\frac{\partial V_{x,y,z}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.90})$$

Ce qui donne, après discrétisation,

$$V_{x,y,z} = V_{x,y,z-\delta} \quad (\text{II.91})$$

Soit, $P_{z+} = 0$ et $P_{z-} = 1$.

La particule ne peut que revenir en arrière, elle est réfléchie.

- La particule rencontre une frontière avec une condition de Dirichlet. Une telle condition s'exprime par,

$$V = V_0$$

A cet endroit, la particule a des probabilités de se déplacer égales à zéro, elle est absorbée.

$$p_{x+} = p_{x-} = p_{y+} = p_{y-} = p_{z+} = p_{z-} = 0 \quad (\text{II.92})$$

La valeur du potentiel portée par la frontière est ajoutée à la charge de la particule, et une nouvelle particule avec une charge nulle peut être émise du point de calcul.

Nous pouvons résumer cette partie par un exemple général de calcul en deux dimension. La figure 72 représente un système avec une zone S1 possédant une densité volumique de charges magnétiques fictives, une zone S2 supportant une densité superficielle de charges. Un cheminement aléatoire est représenté.

Dans tout la zone en blanc sur la figure, l'équation à résoudre est:

$$\Delta V = 0 \quad (\text{II.93})$$

Dans la zone constituée par la source S₁, l'équation à résoudre est:

$$\Delta V + \frac{\delta^2 S_1}{4} = 0 \quad (\text{II.94})$$

Au niveau de la source S₂, il faut considérer la condition de passage suivante:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_2 = S_2 \quad (\text{II.95})$$

et donc, le terme à ajouter est $\frac{\delta S_2}{2}$.

V=0 sur les contours (y=0) en partie, (y=y_{max}) et (x=x_{max}).

V=V₁ sur une partie du contour (y=0).

Une condition de Neumann est imposée sur le contour (x=0).

Soit un solénoïde supraconducteur d'axe z dans l'air avec les caractéristiques suivantes.

$$\begin{aligned} L &= 0.03 \text{ m} \\ R_i &= 0.025 \text{ m} \\ e &= 0.025 \text{ m} \\ j &= 10^9 \text{ A/m}^2 \end{aligned}$$

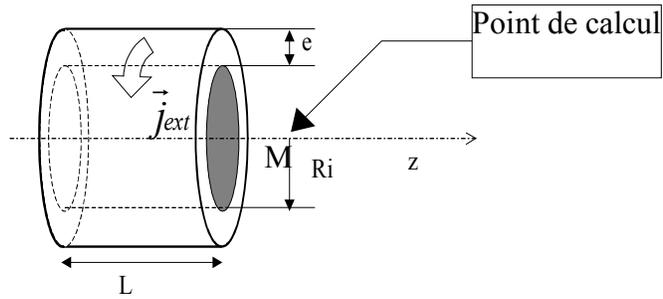


Figure 73: schéma d'un solénoïde.

Nous pouvons connaître le potentiel scalaire magnétique produit en tout point de l'espace en résolvant le système suivant:

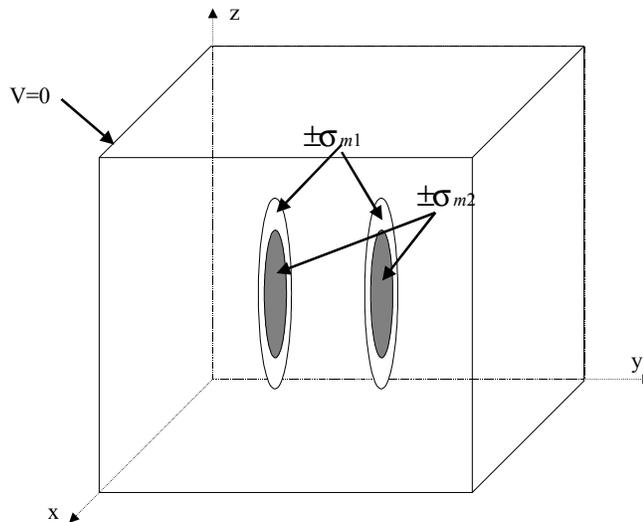


Figure 74: système pour l'étude de la convergence de la méthode de calcul.

Nous avons défini les limites du domaine d'évolution des cheminements aléatoires. Nous avons placé des frontières de Dirichlet sur le contour du domaine de calcul où le potentiel peut être considéré comme nul.

L'espace de déplacement des cheminements aléatoires et donc:

$$\begin{aligned} -0.2 \text{ m} &< x < 0.2 \text{ m} \\ -0.2 \text{ m} &< y < 0.2 \text{ m} \\ -0.2 \text{ m} &< z < 0.2 \text{ m} \end{aligned}$$

Le pas de discrétisation spatial vaut: $\delta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Le problème ainsi posé possède donc $5.12 \cdot 10^8$ inconnues. Ce problème possède un nombre de variable trop important pour être résolu par une méthode traditionnelle.

Nous nous plaçons au point $M(0,0,0.025)$, et nous calculons le potentiel avec un nombre de cheminements aléatoires croissant. La courbe suivante présente l'écart relatif entre la valeur estimée et la valeur analytique. Nous avons réalisé ces simulations avec un pas de discrétisation égale à 0.5 mm.

De même que pour la méthode d'intégration présentée précédemment, le théorème de la limite centrale nous fixe un intervalle de confiance pour le calcul. Nous appellerons erreur relative la différence entre la valeur analytique et la valeur calculée: $\text{Erreur} = 100 * (V_{\text{analytique}} - V_{\text{calculé}}) / V_{\text{analytique}}$.

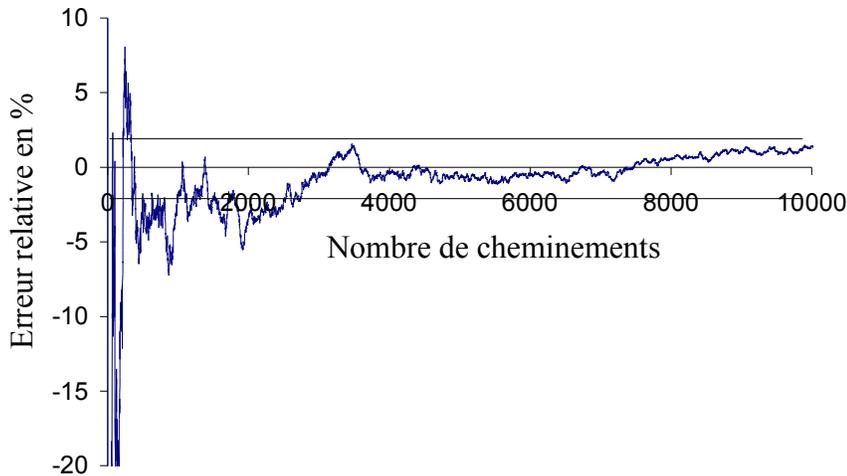


Figure 75: erreur relative en fonction du nombre de particules. $1 < N < 10000$

Nous observons que dès 3000 cheminements, nous estimons la valeur du potentiel avec moins de deux pour-cent d'erreur. Nous avons représenté cette courbe jusqu'à 10000 particules, au delà, le calcul continue à osciller autour de la solution, mais avec une amplitude moindre comme le montre la figure 76.

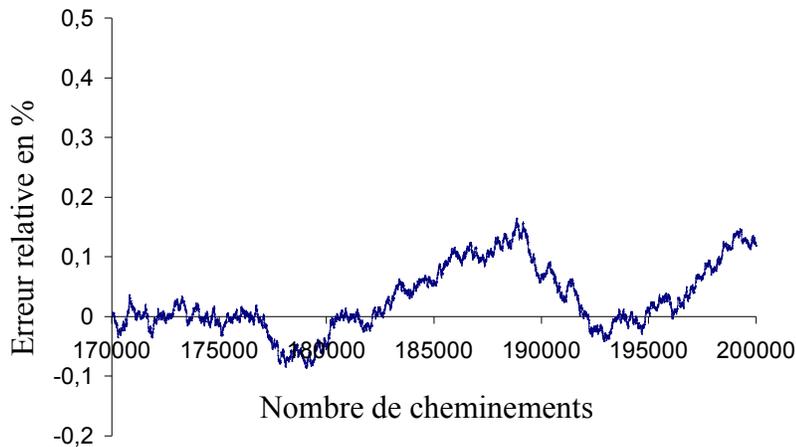


Figure 76: erreur relative pour un grand nombre de particules. $170000 < N < 200000$

Aux alentours de 200000 cheminements, l'erreur relative devient inférieure à 0.2 pour-cent. Il faut trouver le bon compromis entre le temps de calcul et la précision souhaitée. Nous remarquons que le calcul nous donne rapidement un ordre de grandeur correct de la valeur à calculer, quelques centaines de cheminements suffisent pour arriver à moins de cinq pour-cent d'erreur.

Le choix du pas de discrétisation spatial est un paramètre important, en effet, son influence se voit surtout en terme de discrétisation des sources. Dans le cas du calcul d'une structure à base d'aimants ou de solénoïdes, les sources à traiter sont des disques. Nous voyons sur la figure 77 que le bruit augmente avec le pas de discrétisation, donc la précision du calcul décroît. Cette précision décroît jusqu'à obtenir un biais qui correspond à une mauvaise représentation des sources.

La figure 77 présente la moyenne de la valeur absolue du bruit pour le calcul du potentiel sur l'axe d'un solénoïde calculée comme suit:

$$B_{\text{bruit}} = \frac{1}{N_{\text{points}}} \sum_{z=0}^{z=N_{\text{points}}*0.01} 100 * \left(\frac{V_{\text{ana}}(z) - V_{\text{calc}}(z)}{V_{\text{ana}}(z)} \right) \quad (\text{II.97})$$

Avec N_{points} le nombre de points de calcul, V_{ana} la valeur analytique du potentiel et V_{calc} sa valeur calculée.

Pour ce calcul, nous avons utilisé 2000 particules aléatoires et $N_{\text{points}} = 15$. Lorsqu'on augmente le pas de discrétisation, la majorité de l'accroissement du bruit provient du calcul proche des sources. Lorsque le pas de discrétisation est trop grand, les sources ne sont plus représentées convenablement.

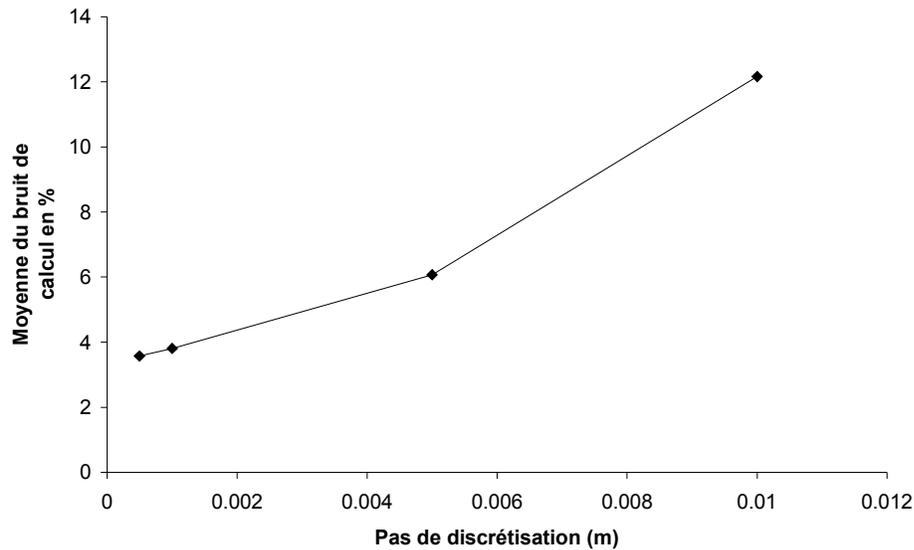


Figure 77 : influence du pas de discrétisation sur le bruit de calcul

III.4 Avantages et inconvénients

Nous avons présenté de manière très générale une méthode probabiliste de résolution de problèmes stationnaires en magnétostatique. Cette méthode est en concurrence avec d'autres méthodes très performantes. Nous devons donc spécifier les avantages et inconvénients des méthodes de Monte-Carlo.

III.4.a Les inconvénients

- Le résultat du calcul est dépendant de la qualité du générateur de nombres aléatoires. Il existe des études sur cette dépendance qui montre que des suites de nombres pas tout à fait aléatoires suffisent pour obtenir une bonne convergence de la méthode. Nous avons trouvé des algorithmes de génération de nombres aléatoires tout à fait performants.

- Ces méthodes probabilistes demande une puissance de calcul importante, ce problème est à relativiser compte tenu de l'évolution actuelle du matériel informatique: parallélisation sur plate-forme multi-processeurs, nouveaux processeurs...
- L'erreur d'estimation produit un bruit aléatoire sur le calcul. Cela constitue un problème dans notre cas, car la valeur de l'induction magnétique provient de la dérivation spatiale du potentiel. Or, le potentiel ne peut pas être dérivé dans l'état. Nous présenterons par la suite des techniques pour estimer l'induction à partir de ce potentiel bruité.

III.4.b Les avantages

- Le calcul peut être effectué en n'importe quel point choisi du maillage. Il n'y a pas obligation à résoudre le système entier.
- L'erreur sur le calcul est non cumulative, puisque chaque calcul est indépendant du calcul des autres points du maillage.
- Cette méthode permet d'avoir un intervalle de confiance pour le résultat obtenu.
- Nous n'avons besoin ni de stocker, ni d'inverser de matrice. Nous ne sommes donc pas limité en nombre de variables.
- Le pas de discrétisation peut être aussi petit que l'on veut. Il faut néanmoins trouver un compromis entre la taille du maillage et le temps de calcul.
- L'algorithme est très simple à mettre en œuvre.

IV ESTIMATION DU GRADIENT

Nous avons mis en évidence le problème de l'erreur de calcul produite par la méthode de Monte-Carlo utilisant les chaînes de Markov. Le potentiel scalaire magnétique calculé possède donc un bruit spatial qui rend problématique le calcul de la valeur du champ magnétique.

Dans cette partie, après avoir essayé de résoudre le problème par des techniques simples de filtrage numérique, nous montrerons qu'il est possible d'obtenir une estimation du gradient du potentiel en utilisant une méthode de régularisation.

IV.1 Position du problème

Nous avons vu dans la partie précédente comment calculer le potentiel scalaire magnétique V . La grandeur qui nous intéresse est l'induction magnétique, pour cela, nous devons calculer le gradient du potentiel scalaire. Le calcul du potentiel que nous effectuons comporte une erreur qui entraîne un bruit superposé aux données. Nous pouvons alors écrire la grandeur calculée comme étant la somme de la valeur du potentiel "réel" et d'un bruit n qu'il va falloir éliminer:

$$V_{\text{calculé}} = V_{\text{réel}} + n \quad (\text{II.98})$$

La dérivation numérique directe (taux d'accroissement) de la grandeur calculée n'est pas envisageable, comme nous pouvons le constater sur la figure 78 qui compare le potentiel calculé à sa valeur analytique.

La valeur de l'induction ainsi calculée s'écrit:

$$\vec{B}_{\text{calculé}} = -\mu_0 (\vec{\text{grad}} V_{\text{réel}} + \vec{\text{grad}} n) \quad (\text{II.99})$$

Le terme correspondant au gradient du bruit peut devenir prépondérant devant la valeur de l'induction.

Le calcul du taux d'accroissement n'est pas exploitable. Nous devons alors utiliser d'autres méthodes afin d'estimer la valeur de \vec{B} à partir de du potentiel scalaire calculé.

Notre démarche a été de tester différentes méthodes:

- Nous proposons dans un premier temps, de réaliser une approximation du potentiel calculé par des fonctions polynomiales ou rationnelles.
- Dans un deuxième temps, nous proposons l'utilisation d'un filtre de type fréquentiel, qui revient à effectuer un produit de convolution entre la dérivée numérique de V et une gaussienne judicieusement choisie.
- Et enfin, nous proposons d'utiliser une méthode de régularisation qui consiste à minimiser un critère composite et permet l'estimation directe de la dérivée à partir du potentiel calculé.

Afin de tester les différentes méthodes proposées, nous utilisons des données provenant du calcul du potentiel sur l'axe du solénoïde présenté sur la figure 78.

Le solénoïde a les caractéristiques suivantes:

$$L = 0.03 \text{ m}, R_i = 0.025 \text{ m}, e = 0.025 \text{ m}, j = 10^9 \text{ A/m}$$

Cette structure très simple a le grand avantage de posséder une solution analytique à l'aide de laquelle nous pouvons comparer les différentes estimations.

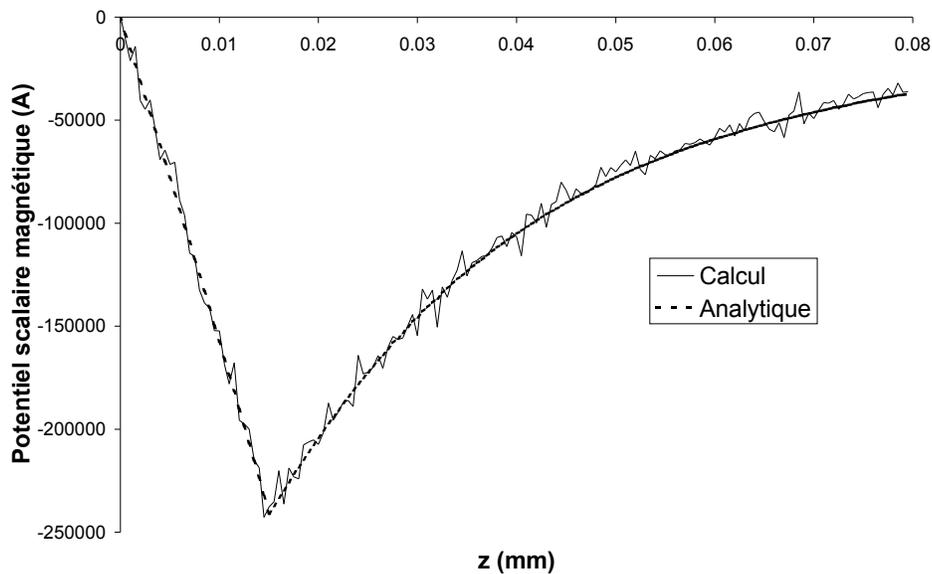


Figure 78: mise en évidence du bruit sur calcul. Comparaison avec la valeur analytique.

La figure 78 présente une comparaison entre la valeur calculée du potentiel avec 6000 cheminements aléatoires et sa valeur analytique. Nous constatons que cette courbe présente une rupture de tangente au niveau de la source. Le respect de ce brusque changement va être une contrainte quant au choix de la méthode de filtrage du bruit. La figure 79 représente la dérivée directe de ce potentiel calculé.

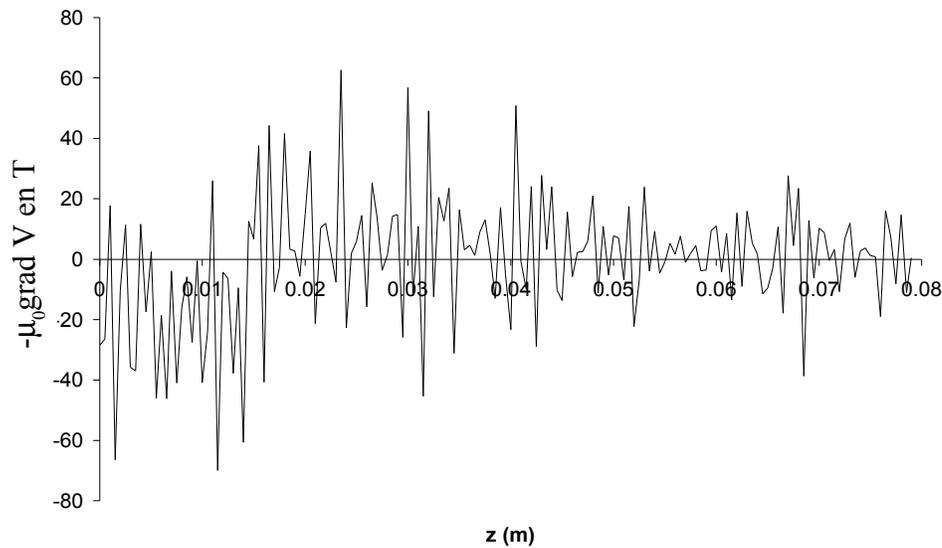


Figure 79: dérivation directe du potentiel.

Le bruit est considérablement amplifié par la dérivée. Ce résultat brut ne peut pas être utilisé sous cette forme. La dérivation par calcul des accroissements ne s'applique pas à notre problème.

IV.2 Approximation par des fonctions

La première idée pour éliminer le bruit est d'effectuer une approximation du potentiel par des fonctions. Nous pouvons réaliser une approximation polynomiale. La figure 80 représente une approximation à l'aide d'un polynôme d'ordre 20. Le polynôme réalisant la meilleure approximation a tendance à suivre le bruit et possède de nombreuses variations de tangente que nous ne pouvons maîtriser.

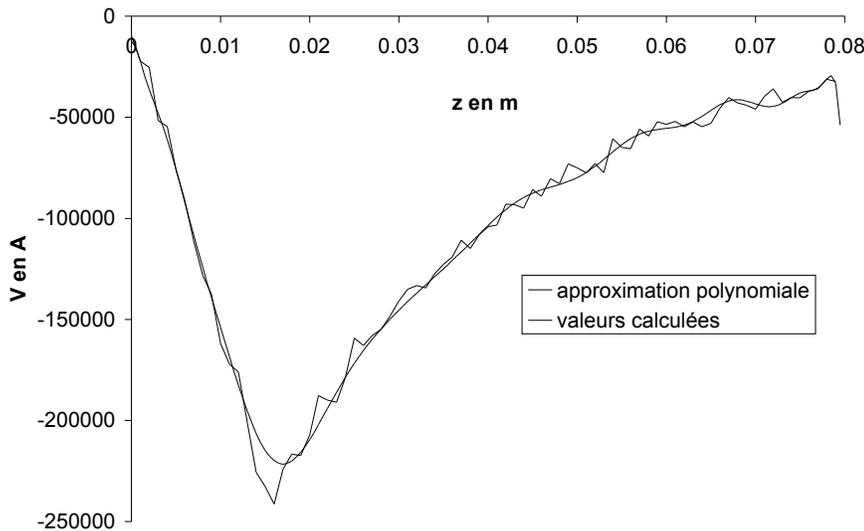


Figure 80 : approximation polynomiale du potentiel.

Une fois le polynôme dérivé, nous observons des ondulations autour de la valeur analytique. Comme nous pouvons le constater sur la figure 81, l'amplitude des ondulations est variable. Nous ne pouvons pas connaître dans ce cas l'erreur que nous faisons sur le calcul de l'induction.

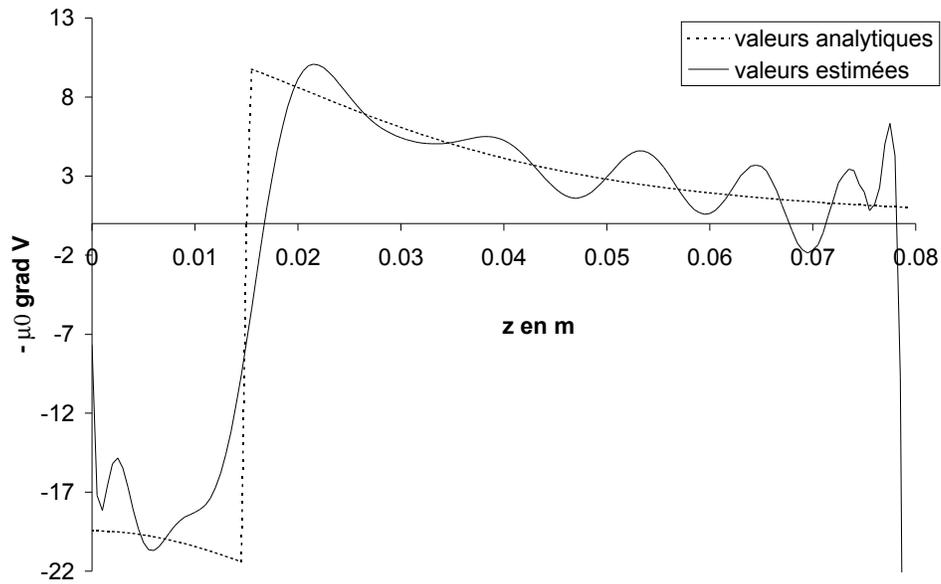


Figure 81 : estimation de l'induction à partir de l'approximation polynomiale du potentiel.

Cette première méthode, très simple à mettre en oeuvre, ne nous permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants. Nous nous sommes donc tournés vers des méthodes issues du traitement du signal.

IV.3 Filtre fréquentiel

La première approche en traitement du signal est de considérer le signal brut comme étant un signal temporel. Nous allons ensuite pouvoir lui appliquer un filtre dans le domaine fréquentiel. Nous voulons éliminer le bruit qui, dans notre cas, est représenté par des fréquences élevées dans l'espace de Fourier.

La décomposition fréquentiel du signal de la figure 79 est représentée sur la figure suivante.

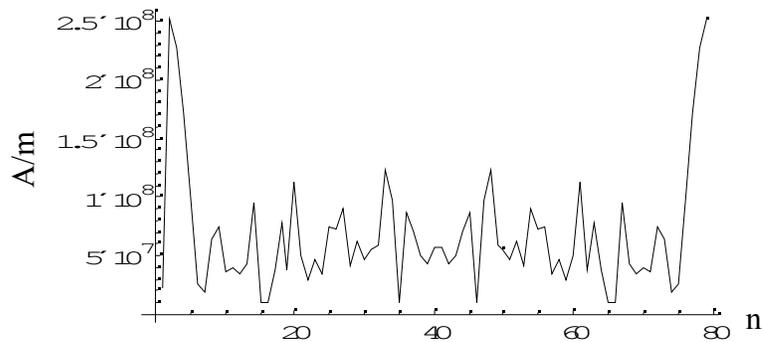


Figure 82: représentation fréquentielle de la dérivée du potentiel.

Afin d'éliminer le bruit, nous allons effectuer dans l'espace fréquentiel un produit du signal de la figure 82 avec une gaussienne ayant pour équation:

$$G = e^{-\frac{\left(n - \frac{Ne}{2}\right)^2}{N}} \quad (\text{II.100})$$

Avec n la variable fréquentielle, N le paramètre de réglage permettant d'éliminer une partie plus ou moins grande du spectre, et N_e le nombre d'échantillons temporels disponibles.

En fixant $N=7$, nous obtenons l'estimation suivante pour l'induction magnétique.

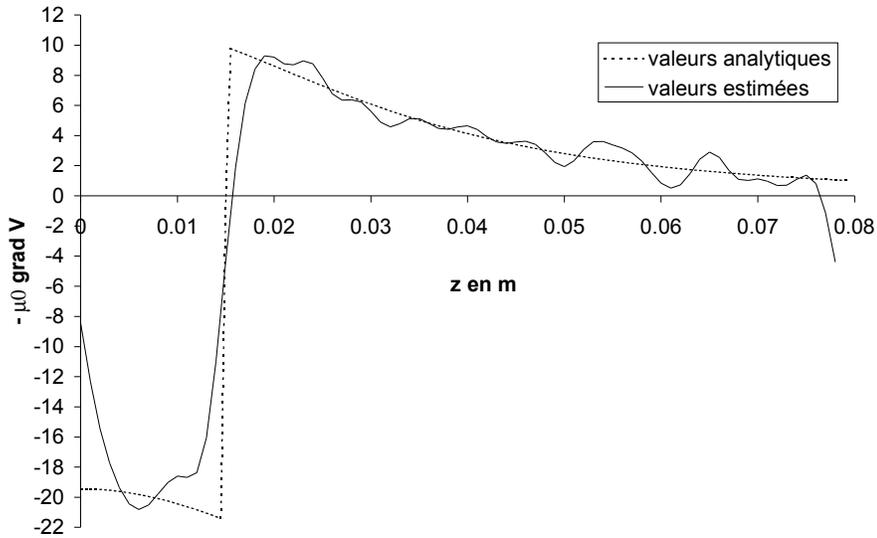


Figure 83 : estimation du gradient de V par convolution avec une gaussienne avec $N=7$

Cette estimation est nettement meilleur que celle obtenue à l'aide d'une approximation polynomiale, néanmoins, nous ne pouvons ajuster le paramètre N que de manière arbitraire. Si N est trop grand, nous éliminons une partie importante du signal et non plus seulement le bruit. Par exemple, pour $N=70$, nous obtenons l'estimation présentée sur la figure suivante.

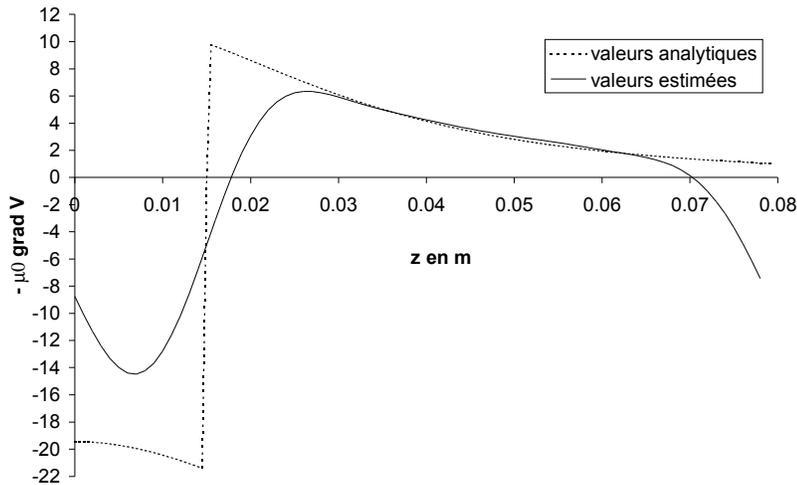


Figure 84 : estimation de l'induction par convolution avec une gaussienne avec $N=70$

Nous voyons qu'il manque une partie du signal et ce, essentiellement au niveau de la rupture qui comporte des fréquences élevées dans l'espace de Fourier. Cette méthode s'avère très efficace, mais difficilement utilisable si nous ne connaissons pas la forme exacte de la solution. Le problème est de trouver la bonne valeur de N . La

méthode n'est donc pas efficace pour notre problème.

IV.4 Régularisation

IV.4.a Introduction de la méthode

Les différentes méthodes présentées précédemment n'étant pas parfaitement adaptées à notre problème, nous avons décidé de mettre en oeuvre une technique de régularisation. Cette méthode consiste à considérer l'estimation de la dérivée de notre signal comme un problème inverse. Il s'agit de minimiser un critère composite [HEI00][BOU93] en réalisant un compromis entre la fidélité aux données et une connaissance à priori sur la solution.

Soit $[V]$ le vecteur des données.

Soit $[H]$ la solution de notre problème, c'est à dire les données sans le bruit.

Soit $[Z]$ une matrice de dégradation, par exemple une matrice de convolution.

Soit $[n]$ l'observation du bruit correspondant au modèle physique.

L'équation d'observation de nos données peut alors s'écrire comme suit:

$$[H]=[Z][V] + [n] \quad (\text{II.101})$$

En général, un problème posé de la sorte est un problème mal posé, la solution explicite de ce problème s'écrit:

$$[\hat{H}] = ([Z]'[Z])^{-1} [Z]'[V] \quad (\text{II.102})$$

Cette écriture nécessite que le produit $[Z]'[Z]$ soit inversible et conduit à une solution souvent insatisfaisante. De plus, cette estimation doit prendre en compte certaines conditions physiques concernant les données à estimer, par exemple la vitesse de variation ou le signe.

L'estimation peut être largement améliorée par l'introduction d'une connaissance à priori sur les données à estimer $[H]$.

Pour cela, une modélisation utilisant les statistiques Bayésiennes est souvent utilisée. Dans la théorie de Bayes, les inconnues $[H]$ et les données $[V]$ sont alors considérées comme des suites de nombres aléatoires avec des distributions spécifiques.

Supposons que nous connaissions une distribution $p(V/H)$ représentant la probabilité pour que $[H]$ soit la solution connaissant les données $[V]$.

Nous pouvons représenter cette distribution que nous supposons gaussienne, le maximum de cette distribution représente le cas où la probabilité que $[H]$ soit la solution connaissant $[V]$ est la plus élevée.

C'est donc le maximum de cette gaussienne qu'il va nous falloir déterminer.

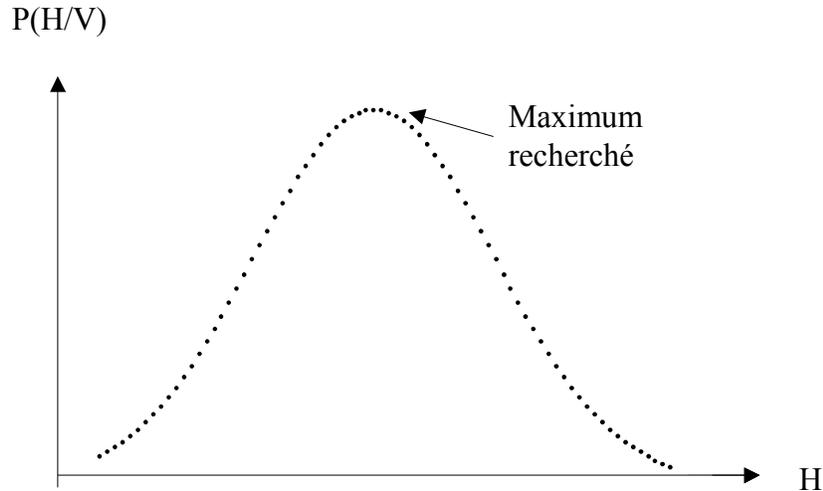


Figure 85: probabilité pour que H soit solution connaissant V

La figure 85 illustre l'estimateur Bayésien le plus souvent utilisé : le maximum *a posteriori* (MAP) tel que:

$$[\hat{H}] = \arg \max_{[H]} p(H|V) \quad (\text{II.103})$$

Nous allons écrire la probabilité $p(H/V)$ comme étant le produit de deux probabilités:

- $p(H)$ qui va coder les connaissances à priori sur $[H]$.
- $p(V/H)$ qui va coder l'adéquation aux données, c'est à dire que la solution $[H]$ correspond bien aux données $[V]$. Lorsque cette probabilité est maximum, $[H]$ correspond parfaitement à $[V]$. Il n'y a aucune modification dans le bruit des données. Le maximum de la probabilité $p(V/H)$ correspond au cas où le bruit est maximum.

Nous pouvons alors écrire:

$$p(H|V) = \frac{p(V|H) p(H)}{p(V)} \quad (\text{II.104})$$

avec

$$p(V) = \int p(V|H) p(H) dH \quad (\text{II.105})$$

$p(V)$ est un coefficient de normalisation de la distribution.

Ce qui nous amène à l'estimation cherchée connaissant les données $[V]$ en prenant l'équation II.96.

$$[\hat{H}] = \arg \max_{[H]} \left(\frac{p(V|H) p(H)}{p(V)} \right) \quad (\text{II.106})$$

Afin de pouvoir déterminer la valeur de $[H]$, nous devons définir un critère à minimiser, nous pouvons écrire l'équation suivante en prenant le logarithme de II.106.

$$[\hat{H}] = \arg_{[H]} \min (-\log p(V|H) - \log p(H)) \quad (\text{II.107})$$

Nous arrivons donc à un critère qui possède deux termes distincts.

- Nous voyons que le premier terme du critère ne concerne que l'adéquation aux données, nous appelons cette partie du critère la fonction $F_n([H],[V])$.
- Le deuxième terme ne concerne que la connaissance sur $[H]$, nous appelons cette partie du critère la fonction $F_H([H])$.

Nous pouvons alors ré-écrire l'équation II.106:

$$[\hat{H}] = \arg_{[H]} \min (F_n + F_H) \quad (\text{II.108})$$

Nous devons maintenant définir ces deux fonctions.

La fonction F_n dépend de $[V]$ et de $[H]$. Cette fonction doit être nulle lorsque $[V]$ et $[H]$ sont en parfaite adéquation. Dans notre cas, nous devons estimer la dérivée du potentiel scalaire, donc $[H]$ doit être la dérivée de $[V]$.

Nous pouvons alors écrire F_n comme suit:

$$F_n = ([H] - [Z][V])^2 \quad (\text{II.109})$$

$[Z]$ est une matrice de conditionnement représentant la liaison entre $[H]$ et $[V]$. Dans notre cas, $[Z]$ est la matrice d'intégration définie dans la partie concernant l'application de la méthode.

Nous pouvons constater que la fonction F_n est fonction du bruit que l'on cherche à éliminer. La distribution $p(V/H)$ est donc la distribution du bruit de calcul que nous avons supposé à répartition gaussienne.

La fonction F_H ne dépend que de $[H]$. Cette fonction représente les connaissances a priori sur la solution. C'est le terme de régularisation.

Notre objectif est l'élimination du bruit de calcul. La connaissance a priori sur $[H]$ est donc l'absence de bruit. Nous devons coder cela d'un point de vue mathématique. Lorsque la fonction F_H est minimum, le bruit sur $[H]$ doit être nul.

Nous avons vu que la dérivée amplifiait le bruit. Nous allons alors représenter F_H par une dérivée de $[H]$. Si nous remplaçons F_H par la dérivée première de $[H]$ le minimum correspond à F_H constante.

Si nous remplaçons F_H par la dérivée seconde de $[H]$ le minimum correspond à F_H linéaire.

$$F_H = ([D_k][H])^2 \quad (\text{II.110})$$

$[D_k]$ est la matrice dérivée d'ordre k .

Dans ces deux cas, le minimum correspond bien à l'absence de bruit sur $[H]$.

Il s'agit maintenant de faire un compromis entre l'élimination du bruit et l'adéquation aux données. Pour cela, nous utilisons un hyper-paramètre α qui va régler le compromis entre l'adéquation au données et la régularisation.

Nous pouvons alors écrire l'équation II.101 sous une nouvelle forme:

$$[\hat{H}] = \arg_{[H]} \min (c_{L2}) \quad (\text{II.111})$$

avec

$$c_{L2} = ([V] - [Z][H])^2 + \alpha ([D_k][H])^2 \quad (\text{II.112})$$

Nous pouvons constater que si nous utilisons une matrice de dérivation d'ordre 2 pour le terme de régularisation, la contribution minimum sera apportée si la solution se compose de segments de droites. Nous risquons donc d'obtenir une solution affine par morceaux.

Nous allons maintenant appliquer cette technique à la détermination de la dérivée du potentiel scalaire magnétique calculé par la méthode de Monte-Carlo.

IV.4.b Application de la méthode

Nous considérons le résultat du calcul à partir duquel nous devons estimer l'induction magnétique comme un signal comportant un potentiel « réel » auquel s'ajoute un bruit.

Soit $[V]$ le vecteur contenant les valeurs du potentiel calculé et $[H]$ le vecteur estimant la dérivée du potentiel.

Nous considérons que l'erreur sur les grandeurs à estimer possède une répartition gaussienne. Nous pouvons coder la connaissance *a priori* sur la douceur de la solution en pénalisant les différences secondes entre les différentes composantes du vecteur à estimer. L'erreur sur cet *a priori* est elle aussi représentée sous la forme d'une gaussienne.

Nous pouvons alors fabriquer le critère composite $c_{L2}(H)$ présenté précédemment de la façon suivante:

$$c_{L2}(H) = ([V] - [Z][H])^2 + \alpha ([D_k][H])^2 \quad (II.113)$$

Nous voyons apparaître les deux termes du critères: le premier terme (terme équivalent à celui des moindres carrés) assure bien l'adéquation aux données, le deuxième terme opère la régularisation et assure une dérivée seconde du signal minimum.

Un tel critère possède une solution explicite qui s'écrit:

$$[H](\alpha) = ([Z]^t[Z] + \alpha [D_k]^t[D_k])^{-1} [Z]^t[V] \quad (II.114)$$

Dans le terme d'adéquation aux données, la matrice $[Z]$ est une matrice de conditionnement qui dépend de l'estimation désirée (elle peut être une matrice identité ou une matrice de déconvolution par exemple), dans notre cas, si la matrice $[Z]$ est la matrice identité, $[H]$ sera un estimateur du potentiel. Nous désirons estimer la dérivée du potentiel $[V]$, donc, la matrice $[Z]$ doit être une matrice d'intégration telle que :

$$[Z] = \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (II.115)$$

avec δ le pas d'espace séparant deux points de calcul.

Le terme de régularisation possède une matrice $[D_k]$ qui va prendre en compte un *a priori* sur la solution. Cet *a priori* peut provenir de données physiques ou de connaissances sur la forme de la solution, par exemple, si la solution est composés de créneaux, la matrice $[D_k]$ sera la matrice dérivée première et sera appelée $[D_1]$, en effet, dans ce cas, la terme de régularisation est minimum pour les signaux constants par partie.

Dans notre cas, nous devons estimer le champ magnétique, nous savons qu'il n'est pas constant par morceaux. Nous allons, dans un premier temps, l'estimer en favorisant les solutions linéaires par morceaux.

La matrice de régularisation est alors la matrice $[D_2]$ telle que :

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & -2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.116})$$

La valeur de l'hyperparamètre est souvent choisie de manière arbitraire après plusieurs essais. Il existe néanmoins des techniques de détermination telle que la courbe en L.

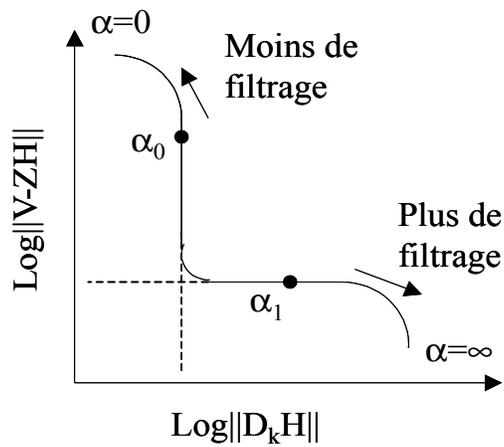


Figure 86: courbe en L

Si $\alpha = \alpha_0$, l'adéquation aux données est bonne et le filtrage faible.

Si $\alpha = \alpha_1$, le filtrage est prédominant et l'adéquation aux données peut être mal respectée.

Nous avons appliqué cette méthode de régularisation à notre signal. Dans un premier temps pour fixons $[Z]$ égale à la matrice identité, dans ce cas $[H]$ est une estimation de $[V]$. Nous obtenons alors un lissage des données comme sur la figure suivante.

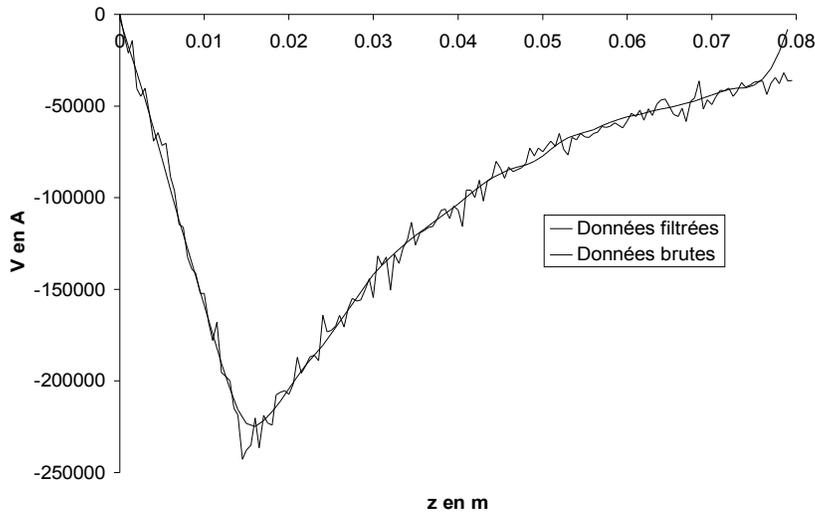


Figure 87: estimation du potentiel avec la méthode L2

Nous voyons que, comme pour les méthodes précédentes, la brusque variation de dérivée au niveau de la source est arrondie lors de l'estimation. L'hyperparamètre ne nous permet pas d'obtenir un bon compromis entre l'élimination du bruit et le respect de la rupture de tangente.

Nous désirons estimer la valeur du champ magnétique, la matrice $[Z]$ doit alors être une matrice d'intégration, dans ce cas, $[H]$ est une estimation de $\frac{\partial[V]}{\partial z}$. Après régularisation, nous obtenons la courbe suivante, l'hyperparamètre valant 0.001.

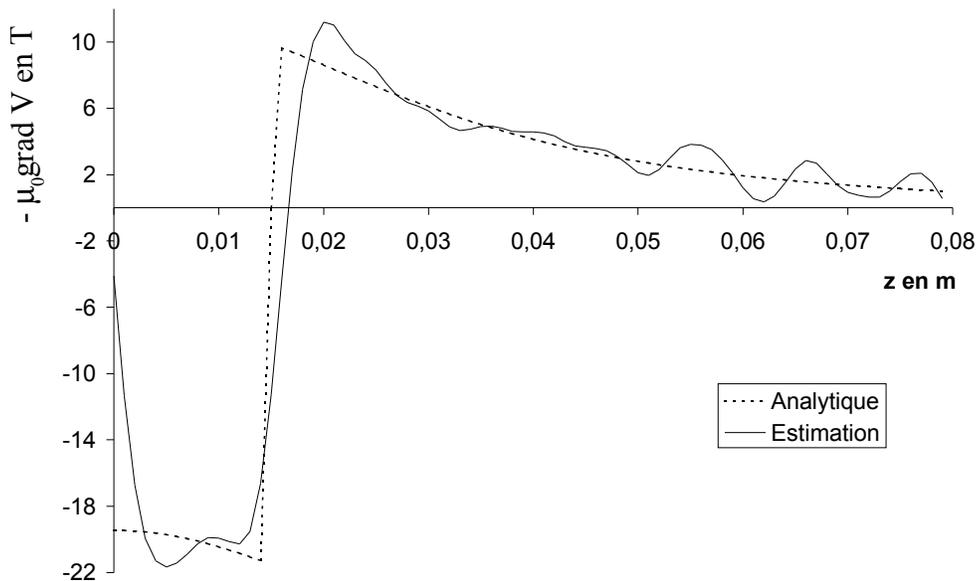


Figure 88: estimation de l'induction avec la méthode L2

Nous remarquons que cette méthode conduit à des problèmes au niveau de la rupture du signal. L'estimation possède alors une forte erreur juste après la rupture, erreur qui a tendance à s'atténuer ensuite. Pour une valeur de z supérieur à 0.03, l'estimation est correct malgré une oscillation marquée autour de la solution.

IV.4.c Généralisation de la méthode

Le critère utilisé précédemment est un critère quadratique : nous minimisons la dérivée seconde du signal élevée au carré, c'est à dire que la variation brusque du signal en $z=0.015$ prend une valeur très élevée dans le calcul du critère. C'est pourquoi messieurs Bouman et Sauer [BOU93] ont proposé, pour estimer ce genre de signal, de généraliser cette méthode en élevant le terme de régularisation à une puissance p . Cette méthode est appelée la méthode L_p .

Le critère à minimiser devient alors:

$$c_{L_p}(H) = ([V] - [Z][H])^2 + \alpha ([D_k][H])^p \tag{II.116}$$

Cette fois, le minimum n'est plus explicite, et nous devons mettre en oeuvre une méthode de minimisation telle que la méthode du gradient conjugué ou de Gauss-Seidel qui s'applique bien à ce type de problème et qui a l'avantage de ne pas nécessiter de calcul de gradient.

Nous appellerons front toute variation brusque du signal à estimer. Dans tous ces cas, lors du filtrage, ces brusques variations sont adoucies.

Représentons très schématiquement la contribution de chaque terme de $[H]$ au terme de régularisation:

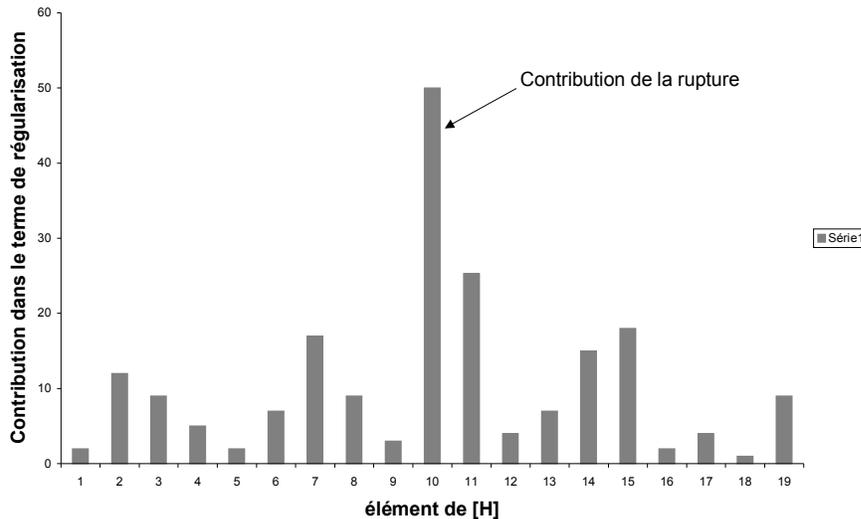


Figure 89: contribution des éléments de $[H]$ dans le terme de régularisation

Lors de la minimisation, la raie correspondant à la contribution de la rupture va voir son amplitude chuter. Ceci va avoir pour effet d'arrondir la rupture dans l'estimation. Nous avons représenté l'amplitude de la contribution de la rupture sur la figure 90.

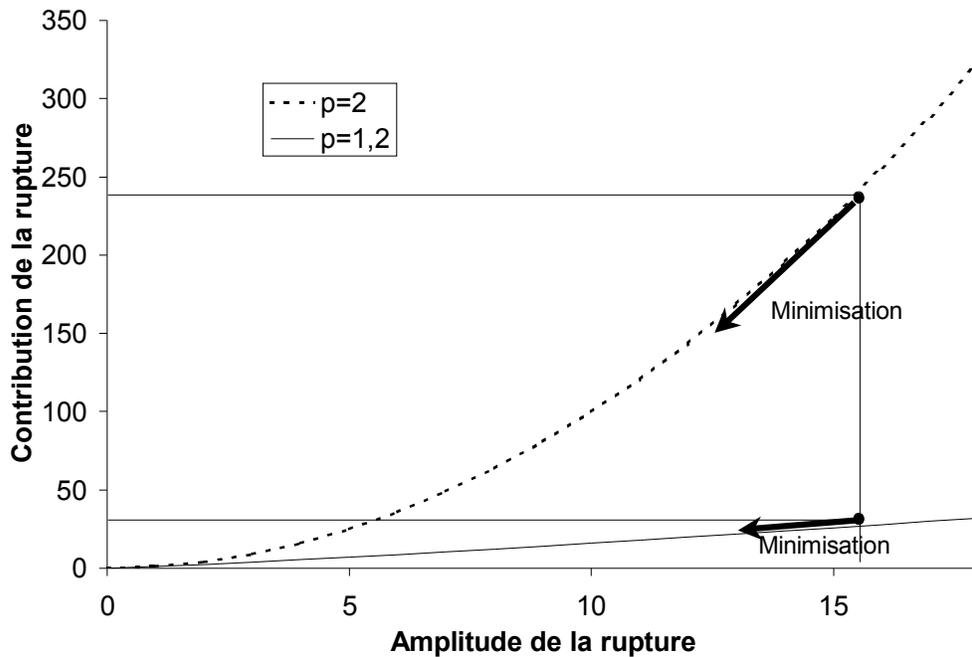


Figure 90: contribution de la rupture dans la fonction coût.

La puissance p du terme de régularisation doit être telle qu'un front dans le signal à estimer « coûte moins cher » dans le critère que la forme quadratique. Nous devons alors choisir p tel que: $1 < p < 2$. En effet, p doit être supérieur à 1 pour assurer la convexité du critère. Nous avons choisi d'utiliser $p=1,2$.

Sur la figure 90, les flèches indiquent le déplacement de l'amplitude de la contribution de la rupture lors de la minimisation, nous voyons que pour un critère quadratique, la minimisation va avoir un effet considérable sur la rupture, celle-ci va alors être adoucie, et l'estimation sera de mauvaise qualité. Dans le cas où $p=1,2$, la contribution de la rupture est peu modifiée par la minimisation et l'estimation est de meilleure qualité.

Dans le cas où la matrice $[Z]$ est la matrice identité, nous obtenons l'estimation suivante avec $p=1,2$:

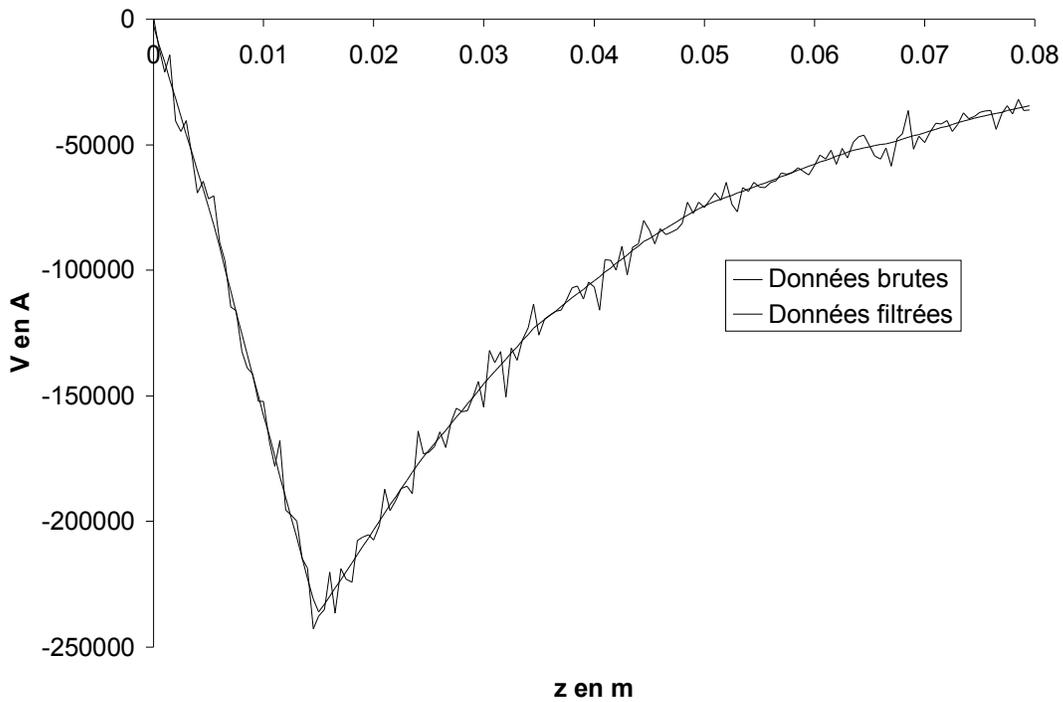


Figure 91: estimation du potentiel avec la méthode L_p .

Nous pouvons constater que la rupture de tangente est parfaitement conservée avec cette méthode. Le bruit est éliminé. Néanmoins, l'estimation est réalisée en minimisant la dérivée seconde, le signal reconstitué est donc constitué de morceaux de droites, nous ne pouvons pas le dériver sous cette forme.

Dans le cas où $[Z]$ est une matrice d'intégration, et $p=1.2$, nous obtenons l'estimation suivante comparée à la valeur analytique.

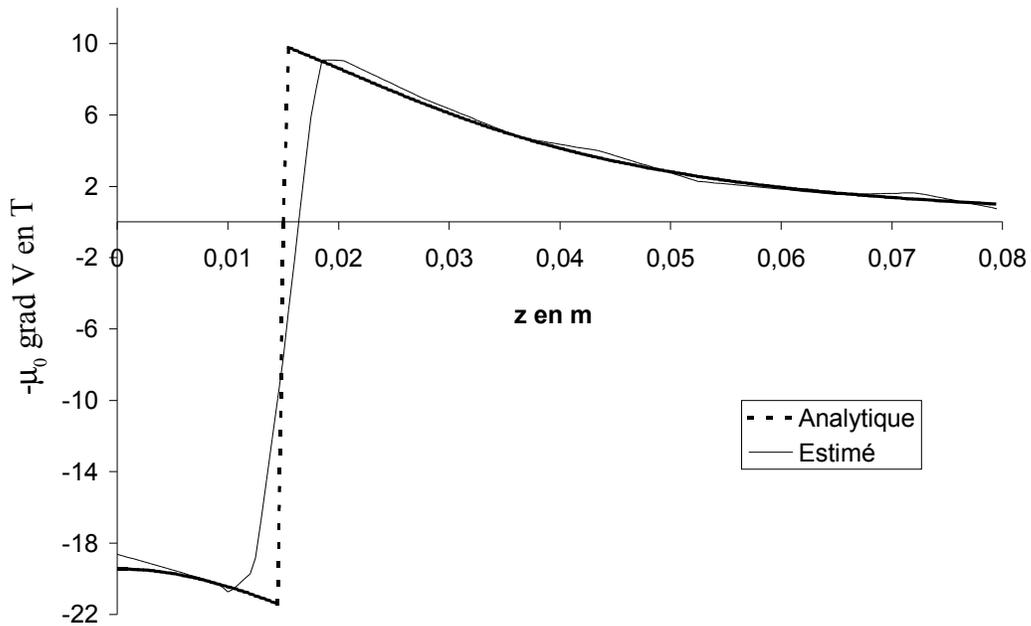


Figure 92: estimation de l'induction avec la méthode L_p .

L'estimation comporte peu de bruit tout en conservant la rupture de manière satisfaisante, comme nous pouvons le constater sur la figure 92. Il est clair que lors de l'utilisation de cette méthode de régularisation, il faut garder présent à l'esprit qu'une erreur existe au niveau des fronts.

Cette dernière méthode (Lp) générale est celle que nous retenons et que nous allons coupler au calcul du potentiel pour le calcul du champ magnétique. Cette méthode générale a de nombreux autres domaines d'applications tels que l'imagerie, l'estimation du gradient de H^2 , le traitement de signaux de capteurs...

IV.5 Traitement d'une surface

Lorsque nous désirons tracer une carte de champ, nous devons calculer le potentiel sur une surface, nous devons alors réaliser deux traitements afin de déterminer les deux composantes du champ magnétique. Nous disposons, après le calcul, d'une matrice [V] contenant les valeurs du potentiel.

A partir de cette matrice, nous pouvons estimer la valeur de la composante suivant x de l'induction magnétique en minimisant le critère suivant conformément à la méthode Lp.

$$c_{Lp}([H]) = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^M \left([H]_{i,j} - \delta \sum_{k=1}^j [V]_{i,j} \right)^2 \right\} \quad (II.117)$$

$$+ \alpha \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=2}^{M-1} \left| 4[H]_{i,j} - [H]_{i-1,j} - [H]_{i+1,j} - [H]_{i,j-1} - [H]_{i,j+1} \right|$$

Dans le cas présenté dans l'équation précédente, nous estimons la dérivée de V suivant j. La régularisation doit tout de même se faire dans les deux directions, c'est pourquoi nous minimisons les différences entre valeurs successives suivant i et j dans la partie du critère relative à la régularisation. Afin d'obtenir une estimation de la dérivée suivant i du potentiel, il suffit d'invertir les indices i et j dans le premier terme de l'équation.

V CONCLUSION

Nous avons présenté la modélisation coulombienne des différents composants d'un système électromagnétique afin de poser les équations et conditions aux limites permettant de calculer le potentiel scalaire magnétique, et donc, d'aboutir à la valeur de l'induction magnétique.

Nous avons présenté une méthode probabiliste permettant d'estimer la solution d'équations aux dérivées partielles et plus particulièrement celle de Poisson dans notre cas. Nous avons constaté que le calcul du potentiel s'accompagne d'un bruit aléatoire que nous pouvons considérer comme gaussien. De ce bruit découlent des problèmes au niveau du calcul du champ magnétique qui nécessitent une dérivation du potentiel.

Après avoir passé en revue quelques techniques de filtrage, nous avons proposé une solution au problème de la dérivation du potentiel provenant du « bruit » sur le calcul. Cette solution est une technique empruntée au domaine du traitement du signal. Elle consiste en la minimisation d'un critère composite permettant de prendre en compte une connaissance a priori sur la solution.

Une généralisation de cette méthode de régularisation est proposée afin de respecter au mieux les variations brusques au niveau des sources et des différents matériaux utilisés.

L'estimation du potentiel scalaire magnétique nécessite la génération de N particules aléatoires. La méthode convergeant en $N^{-1/2}$, N doit être élevé afin de minimiser l'erreur de calcul. Nous avons montré qu'avec une valeur de N relativement faible, nous étions en mesure d'estimer la dérivée du potentiel de manière très précise en utilisant une méthode de régularisation. L'association des deux méthodes permet alors de diminuer la valeur de N

tout en conservant une bonne précision sur l'estimation. Nous pouvons donc diminuer considérablement le temps de calcul.

Nous disposons maintenant d'outils de calcul de champ en 3D qui vont nous permettre de dimensionner l'inducteur que nous allons présenter dans le chapitre suivant.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 2

- [BEV73] R. M. BEVENSEE, “Probabilistic potential applied to electrical engineering problems”, Proc. IEEE, Vol. 61, No 4, avril 1973
- [BOB96] C. Robert, “Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov”, Paris Economica, 1996
- [BOU93] C. BOUMAN, K. SAUER, “A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation”, IEEE Trans. Image Processing, Vol. 32, No. 3, July 1993
- [COU92] I. COULIBALY, « Contributions à l'analyse numérique des méthodes quasi- Monte-Carlo », Thèse de Grenoble I, 1992
- [DUR68] E. DURAND, “Magnétostatique”, Edition MASSON, 1968.
- [EDW71] K. M. EDWARDS, R. R. KHANNA, “Feasability study of Monte Carlo modelling techniques for distributed-parameter system”, Proc. IEE, Vol. 118, No. 7, July 1971
- [FIS96] S. FISHMAN, “Monte Carlo concepts, algorithms and applications”, SPRINGER, 1996.
- [HAM67] J.M. HAMMERSLEY, D.C. HANDSCOMB, « Les méthodes de Monte-Carlo », DUNOD, 1967
- [HEI00] C. Heinrich, G. Demoment, « Minimization of a strictly convex function: an improved test based on Fenchel duality », Inverse problem, 2000, Vol. 16, pp 795-810
- [LAP98] B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, “ Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion”, SPRINGER, 1998
- [LEV99] J. LEVEQUE, A. REZZOUG, “Thermal studies of a superconducting current limiter using Monte Carlo method”, Eur. Phys. J. AP 7, 65-67, 1999
- [MAS01] P.MASSON, D. NETTER, J. LEVEQUE, A. REZZOUG , “Magnetic field concentration : comparison between several shapes of superconducting shields”, IEEE Trans. ASC, Vol. 11, No. 1, March 2001
- [MAT90] MATTHEW N. O. SADIKU, “Monte Carlo methods in an introductory electromagnetic course”, IEEE Trans. Education, Vol. 33, No. 1, February 1990

[NUM] Numerical recipes in C.

[SAN78] F. SANCHEZ-QUESADA, M. SANCHO-RUIZ, M. RODRIGEZ VIDAL, “Monte Carlo method for discrete inhomogeneous problems”, Proc. IEE, Vol. 125, No. 12, December 1978

[SAN99] S. SANDAYAM, L. UDPA, S. S. UDPA, W. LORD, “Monte Carlo methods for modelling magnetostatic NDE phenomena: a feasibility study”, IEEE Trans. Mag., Vol. 32, No. 3, May 1996

[SIA66] J. SIAM, “The floating random walks and its application to Monte Carlo solution of heat equations”, Appl. Math., Vol. 14, No 2, March 1966

CHAPITRE 3 : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE D'UN PROTOTYPE D'INDUCTEUR

TABLE DES MATIÈRES DU CHAPITRE 3

I. Introduction.....	108
II. Dimensionnement du prototype.....	108
II.1 Définition de la forme.....	108
II.1.a Choix des écrans supraconducteurs.....	108
II.1.b Choix de la forme.....	109
II.1.c Choix du fil pour les bobines de champ.....	114
II.2 Réalisation du prototype.....	117
II.2.a Calcul des efforts.....	117
II.2.b Choix du matériau pour le support.....	119
II.2.c Plan du support.....	119
II.2.d Tenue des écrans supraconducteurs.....	121
II.2.e Bobinage des solénoïdes.....	121
II.2.f Protection des bobines.....	122
III. Instrumentation.....	123
III.1 Choix des capteurs et méthode d'acquisition.....	123
III.1.a Grandeurs mesurables.....	123
III.1.b Choix des capteurs.....	123
III.1.c Méthode d'acquisition.....	126
III.2 Étalonnage des capteurs.....	126
III.3 Répartition des sondes.....	128
IV. Le prototype.....	129
V. Protocole expérimental.....	132
V.1 Matériel disponible.....	132
V.2 Aspects cryogéniques.....	133
V.3 Diagramme d'ensemble.....	133
V.4 Déroulement de l'expérience.....	134
VI. Résultats et observations.....	134
VI.1 Répartition angulaire de l'induction.....	134
VI.2 Les instabilités.....	136
VI.2.a Le « training ».....	136
VI.2.b Les sauts de flux.....	136
VII. Comparaison expérience / calcul.....	137
VII.1 Répartition angulaire de l'induction.....	137
VII.2 Champ sur supraconducteur.....	141
VIII. Conclusion.....	142

I. INTRODUCTION

Nous avons défini dans le premier chapitre une structure d'inducteur fonctionnant sur le principe de la concentration du flux par des écrans supraconducteurs à haute température critique.

Le deuxième chapitre présente les outils de calcul nécessaires au dimensionnement de l'inducteur.

Dans ce chapitre, nous allons valider expérimentalement le principe de fonctionnement de l'inducteur et les méthodes de calcul retenues.

Pour cela, dans une première partie, nous présentons le dimensionnement de l'inducteur. Le choix des écrans supraconducteurs est la base du dimensionnement.

La partie suivante va détailler la réalisation du prototype en passant en revue les différents problèmes de tenue mécanique et d'instrumentation.

Enfin, après avoir commenté les résultats de l'expérience, nous pourrons comparer les résultats obtenus avec les calculs numériques, ce qui va permettre de valider notre outil de calcul.

II. DIMENSIONNEMENT DU PROTOTYPE

Afin de pouvoir effectuer un dimensionnement du système, nous devons tout d'abord choisir les écrans. Depuis la fabrication de l'inducteur, les matériaux supraconducteurs ont connu de nombreux progrès. En particulier la dimension des mono-domaines d'YBaCuO a augmenté de façon significative. Nous présentons donc le dimensionnement tel qu'il a pu être réalisé fin 2001.

II.1 Définition de la forme

II.1.a Choix des écrans supraconducteurs

Les entreprises commercialisant des éléments supraconducteurs massifs ne sont pas très nombreuses. Nous avons choisi de commander les écrans chez CAN SUPERCONDUCTOR® (Tchécoslovaquie). Cette entreprise nous a fourni quatre blocs mono-domaines d'YBaCuO.

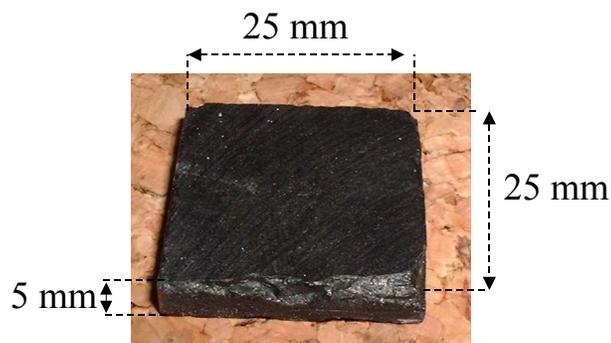


Figure 93: monodomaine d'YBaCuO

Nous disposons donc de quatre écrans supraconducteurs. Nous pouvons voir sur la photographie ci-dessus que les pastilles supraconductrices présentent un état de surface très irrégulier, ce qui montre que ce matériau est difficilement usinable.

A partir de la taille des écrans, nous pouvons définir le diamètre de l'inducteur ainsi que la distance entre les bobines. Les écrans sont placés sur un octogone régulier inscrit dans la section de l'inducteur comme indiqué sur la figure 94.

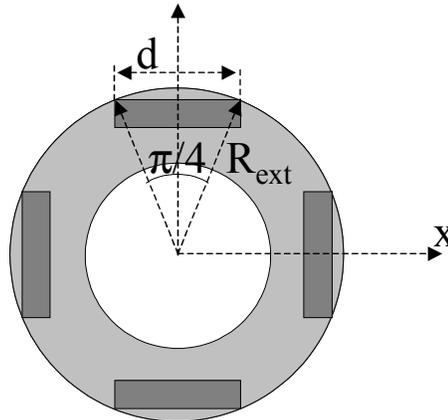


Figure 94: définition des grandeurs pour le calcul du rayon extérieur

Le rayon extérieur de l'inducteur s'écrit alors:

$$R_{ext} = \frac{d}{2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 3.3 \text{ cm}$$

Nous allons donc partir de ces deux dimensions: $d = 2.5 \text{ cm}$ et $R_{ext} = 3.3 \text{ cm}$ afin de déterminer la forme des bobines d'inducteur. Le fait de fixer la valeur de R_{ext} va fixer la valeur du flux magnétique maximum, et donc le niveau de champ auquel nous allons travailler.

II.1.b Choix de la forme

- Définition des grandeurs

L'objectif de ce paragraphe est de trouver les dimensions des deux solénoïdes en opposition. Cette partie du système permet de générer un champ radial indépendant de la position angulaire.

Nous devons tout d'abord définir un cahier des charges incluant les termes suivants:

- l'encombrement maximal de l'objet
- le type de fil utilisé
- le niveau d'induction
- les efforts supportés par les bobines

Nous avons représenté une coupe du système sur la figure 95. Ce schéma présente les différentes variables qu'il va falloir ajuster.

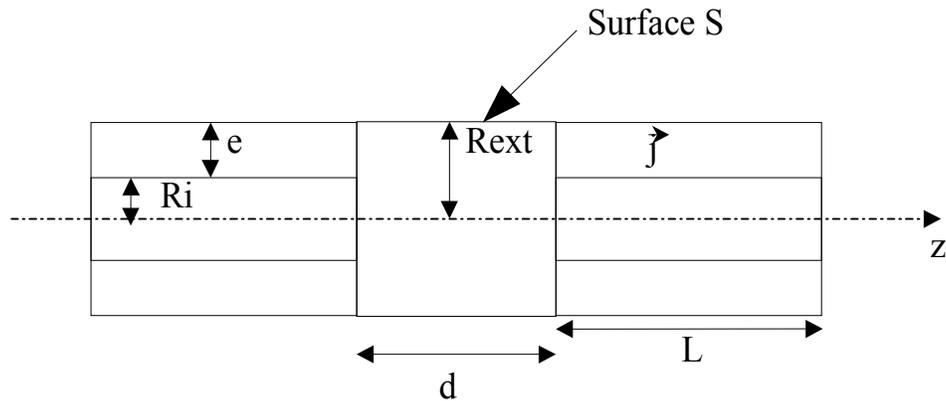


Figure 95: variables pour le dimensionnement.

Les variables du dimensionnement sont donc les suivantes:

Tableau 1: Les variables utilisées pour le dimensionnement

<i>Nom</i>	<i>Unité</i>	<i>Description</i>
R	m	Rayon extérieur
R_i	m	Rayon intérieur
e	m	Épaisseur des conducteurs
L	m	Longueur des bobines
d	m	Distance entre les bobines
j	A/m ²	Densité de courant

Nous allons tout d'abord fixer $R = R_{\text{ext}} = R_i + e$, afin que les écrans soient positionnés comme sur la figure 94.

Nous voulons obtenir une induction dont l'orientation par rapport à la surface S soit essentiellement radiale.

Nous allons alors définir les dimensions des bobines permettant d'obtenir la valeur du flux magnétique à travers la surface S la plus élevée possible.

La grandeur du dimensionnement est donc le flux magnétique à travers la surface S. Ce flux s'écrit sous la forme suivante:

$$\phi = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{III.1})$$

Nous devons donc être en mesure de calculer le flux produit par les deux solénoïdes en opposition, ce calcul du flux implique le calcul de l'induction magnétique.

Nous connaissons de manière analytique la valeur de l'induction magnétique produite par une densité de courant dans l'air. Elle est donnée par la loi de Biot-Savart énoncée ci-dessous.

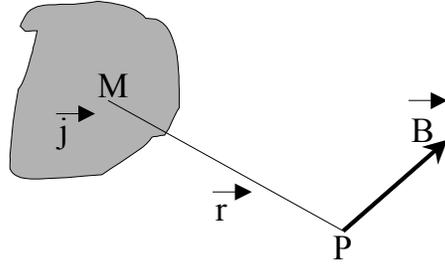


Figure 96: illustration de la loi de Biot-Savart

Au point P, l'induction

magnétique s'écrit:

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_v \left(\vec{j} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) dv \quad (\text{III.2})$$

Avec v le volume des courants.

Dans le cas d'un solénoïde, si on se place en coordonnées cylindriques, la densité de courant n'a qu'une composante suivant θ comme le montre la figure suivante.

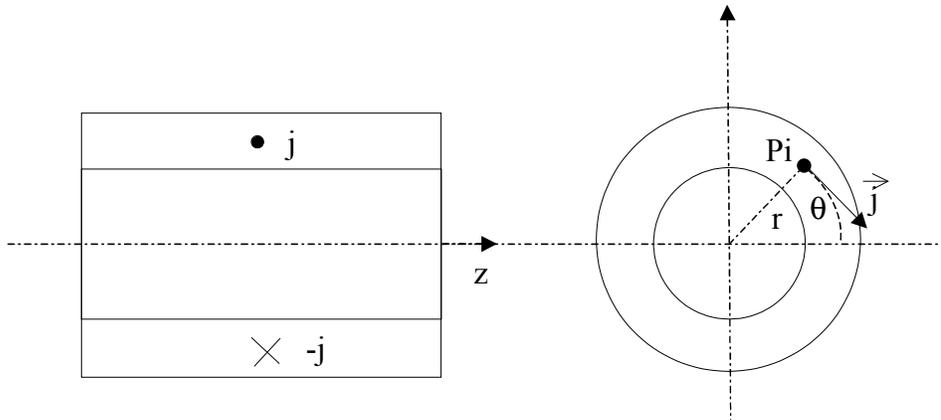


Figure 97: représentation d'un solénoïde.

Pour le solénoïde, nous pouvons écrire la loi de Biot-Savart donnant la valeur de l'induction au point P. Le point P a pour coordonnées P (r, θ , z) :

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{r=R_i}^{R_i+e} \left(\vec{j} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} r dr d\theta dz \right) \quad (\text{III.3})$$

Nous pouvons calculer cette intégrale en utilisant la méthode de Monte-Carlo présentée dans le chapitre précédent.

L'induction magnétique produite par le solénoïde peut alors s'écrire:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{j}_i \wedge \vec{P}_i \vec{M}}{\|\vec{P}_i \vec{M}\|^3} r_i \right) \quad (\text{III.4})$$

Avec P_1 un point tiré de manière aléatoire uniformément dans le volume des courants.

Nous savons calculer le champ magnétique produit par les solénoïdes. Le flux magnétique produit par la base de la structure de l'inducteur peut alors s'écrire :

$$\phi = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{III.5})$$

or le vecteur $d\vec{S}$ n'a qu'une composante suivant r , le produit scalaire considéré peut alors s'écrire:

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = B_r \cdot dS_r \quad (\text{III.6})$$

de plus, la valeur de l'induction magnétique est indépendante de θ , donc,

$$\phi = 2\pi R \int_{z=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_r(z) dz \quad (\text{III.7})$$

soit, en discrétisant l'intervalle d'intégration,

$$\phi = \frac{2\pi R d}{N} \sum_{k=1}^N B_r\left(-\frac{d}{2} + k \frac{d}{N}\right) \quad (\text{III.8})$$

Le rayon extérieur et la distance séparant les solénoïdes étant fixés, nous pouvons tracer la valeur du flux en fonction de l'épaisseur du bobinage et de la longueur des solénoïdes.

La figure 98 présente la surface obtenue.

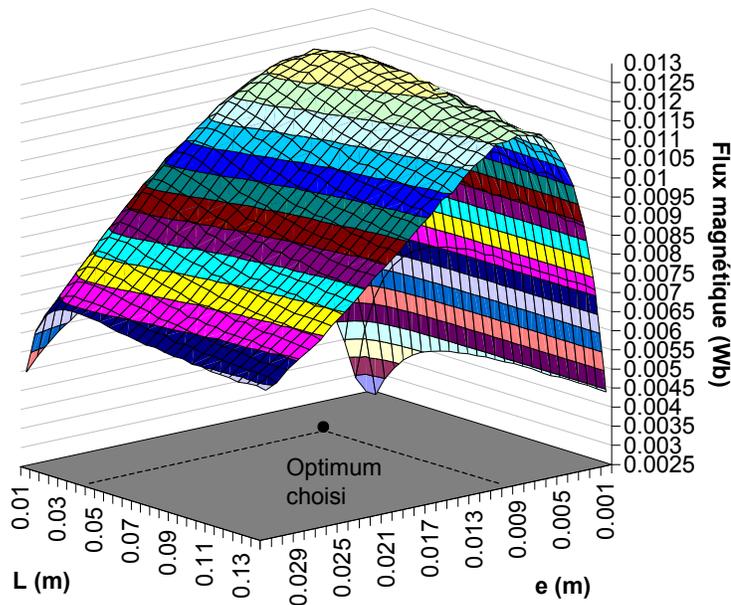


Figure 98: valeur du flux en fonction de e et L

Nous obtenons donc les valeurs de l'épaisseur et de la longueur des bobines comme étant les coordonnées du point à flux maximum:

$$L = 0.045 \text{ m et } e = 0.01 \text{ m.}$$

Nous obtenons alors la forme suivante:

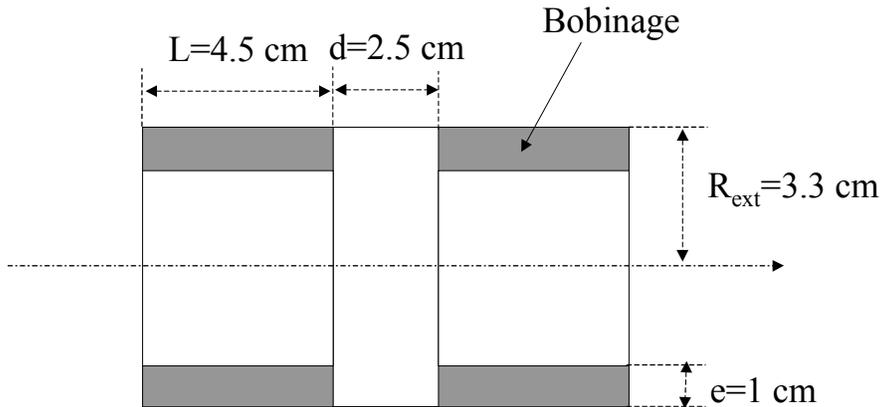


Figure 99: forme retenue pour l'inducteur

Nous obtenons une forme relativement allongée due à la faible valeur du rayon extérieur devant la distance entre les bobines, nous étudierons ultérieurement plus en détail la dépendance de la forme par rapport à la dimension du rayon extérieur.

Pour la forme conduisant au flux maximum, en considérant la caractéristique simplifiée du fil supraconducteur, le point de fonctionnement correspond à la densité de courant et à l'induction maximum sur fil :

$$j_{\text{fil}} = 6.76 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2 \quad \text{et} \quad B_{\text{max}} = 5.95 \text{ T}$$

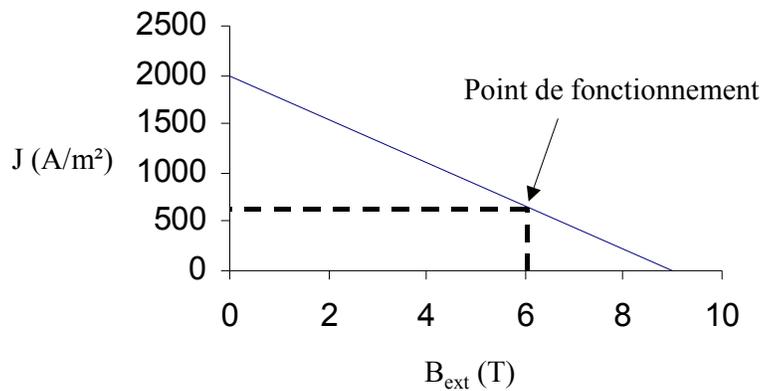


Figure 100: caractéristique $J(B)$ du fil supraconducteur

Une fois les dimensions définies, nous devons réaliser un support permettant d'accueillir les bobinages et les écrans supraconducteurs.

II.1.c Choix du fil pour les bobines de champ

Lors du dimensionnement, nous considérons une caractéristique $j_c(B)$ idéale pour le fil supraconducteur. Cette caractéristique est choisie bien en dessous de la caractéristique réelle du fil de manière à disposer d'une marge de sécurité importante pour éviter les risques de transitions dues à un dépassement de courant critique.

Nous avons prévu un courant nominal de 260 A pour les bobines de champ. A ce courant, le champ maximum sur fil vaut environ 6T.

La figure 102 représente le module de l'induction magnétique dans un des solénoïdes composant l'inducteur.

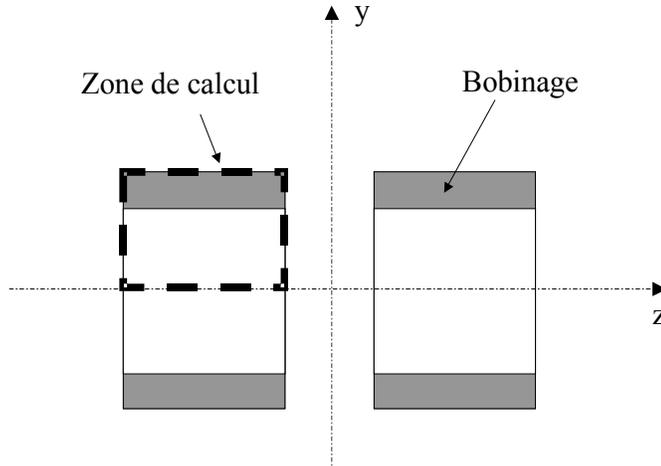


Figure 101: zone de calcul du champ sur fil

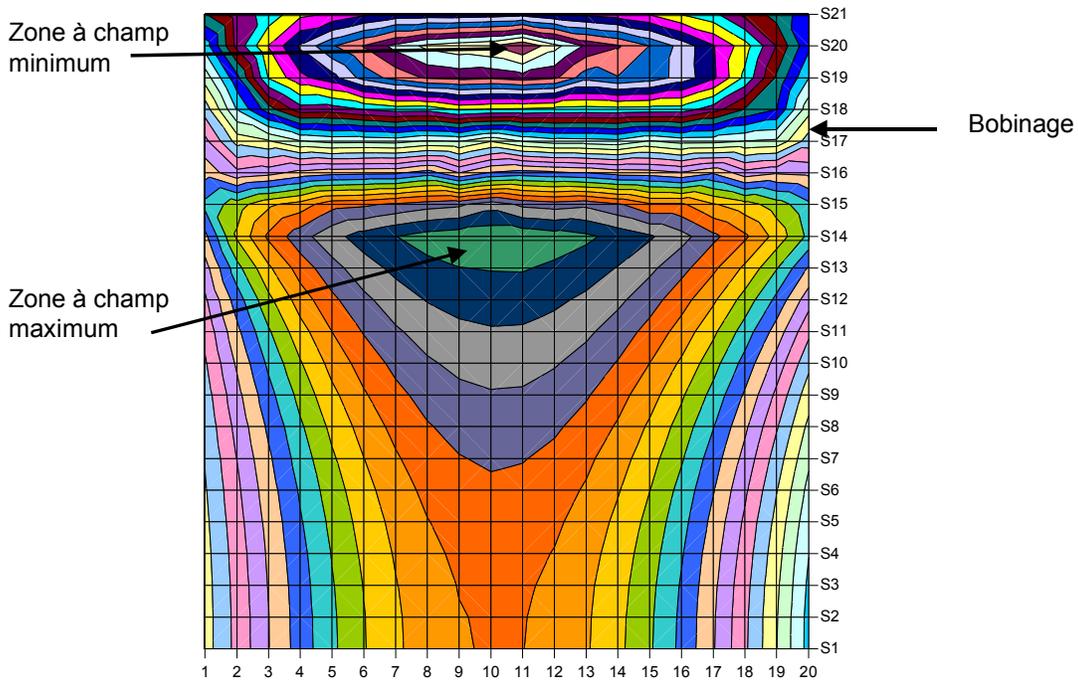


Figure 102: module de l'induction dans le solénoïde

Nous devons prendre une marge de sécurité pour le choix du fil. De plus le champ sur fil risque d'être plus élevé que prévu au niveau des écrans. Nous choisissons alors un fil commercialisé par VacuumSchmelze® et capable de transporter 320 A sous 6 T. Ce fil a un diamètre de 0.74 mm.

Notre alimentation étant capable de fournir au maximum 260 A. Si on considère le cas le plus défavorable pour le bobinage lorsque les spires se trouvent non décalées, c'est à dire que le fil occupe une section carrée, la densité de courant équivalente devient alors:

$$260 \text{ A} / 0.74 * 0.74 \text{ mm}^2 = 474.8 \text{ A/mm}^2$$

Nous pouvons alors recalculer le champ sur fil ainsi que la valeur de l'induction entre les bobines.

Le calcul montre que le champ maximum sur fil est alors de 4.2 T.

Si le fil transporte 260 A, nous avons une marge de sécurité suffisante pour pallier les problèmes de stabilité des bobines supraconductrices.

Nous pouvons calculer la valeur de l'induction magnétique entre les solénoïdes comme indiqué sur la figure suivante.

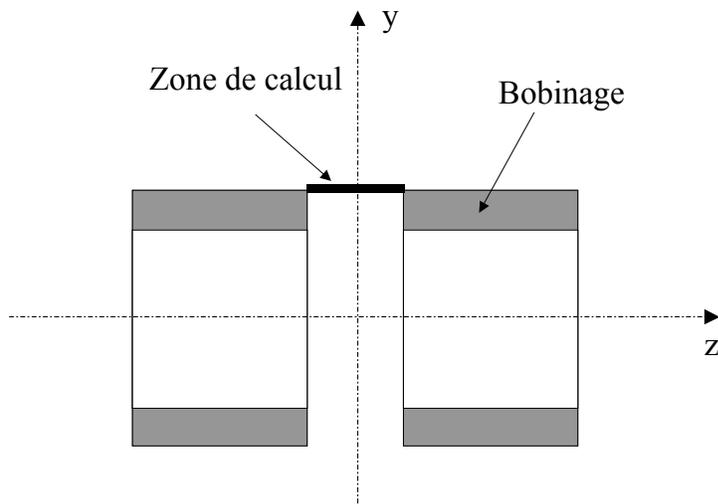


Figure 103: zone de calcul du champ avant concentration

Nous obtenons alors le profil de l'induction sans les écrans supraconducteurs.

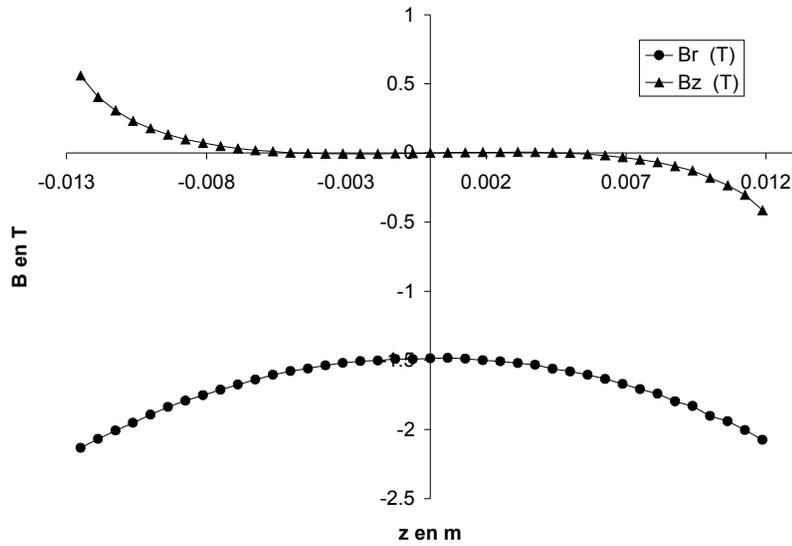


Figure 104: induction magnétique entre les deux bobines

C'est cette induction qui sera concentrée par les écrans supraconducteurs.

II.2 Réalisation du prototype

II.2.a Calcul des efforts

Afin de choisir le matériau avec lequel nous allons fabriquer le support, nous devons avoir une idée des efforts à considérer. Il est clair que les plus gros efforts vont s'exercer au niveau des deux solénoïdes en opposition.

Nous allons proposer un calcul de la force s'exerçant entre les deux bobines. Pour cela, nous devons calculer l'énergie d'interaction des deux solénoïdes. Puis, en dérivant cette énergie par rapport à z , nous pourrions connaître la valeur de la force de répulsion.

Le Lagrangien d'interaction entre deux distributions volumiques de courant s'écrit:

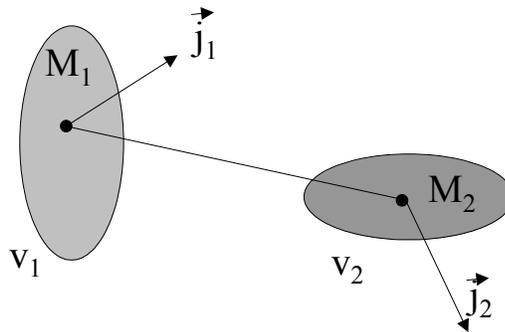


Figure 105: calcul des efforts entre deux densité de courant

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2}{M_1 \cdot M_2} dv_1 dv_2 \quad (\text{III.9})$$

Nous pouvons alors appliquer aisément cette équation à deux solénoïdes, nous connaissons les distributions de courant qui sont égales en module pour les deux bobines, ainsi que les volumes.

Nous pouvons calculer cette intégrale par une méthode de Monte-Carlo présentée dans le chapitre 2.

Nous pouvons alors tracer l'énergie d'interaction par rapport à la distance séparant les deux bobines, les bobines étant alimentées par un courant de 260 A (limite de l'alimentation disponible au laboratoire).

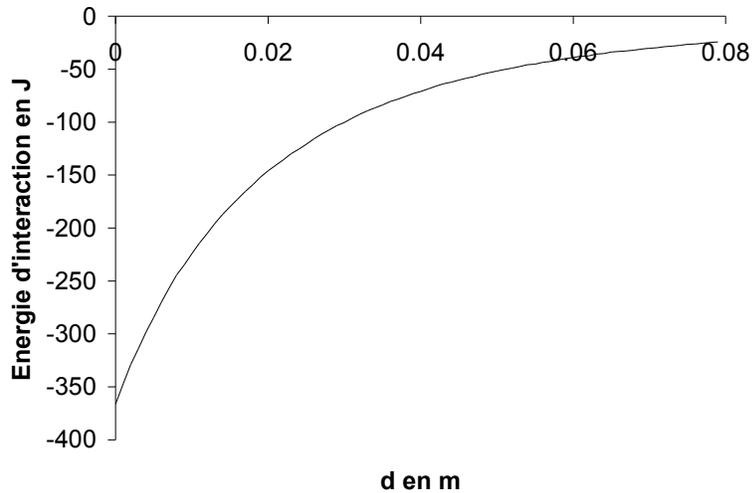


Figure 106: énergie d'interaction des deux bobines

Nous voyons qu'évidemment l'énergie d'interaction décroît avec la distance séparant les deux bobines. Nous devons maintenant dériver cette énergie par rapport à z afin de calculer les efforts à tenir.

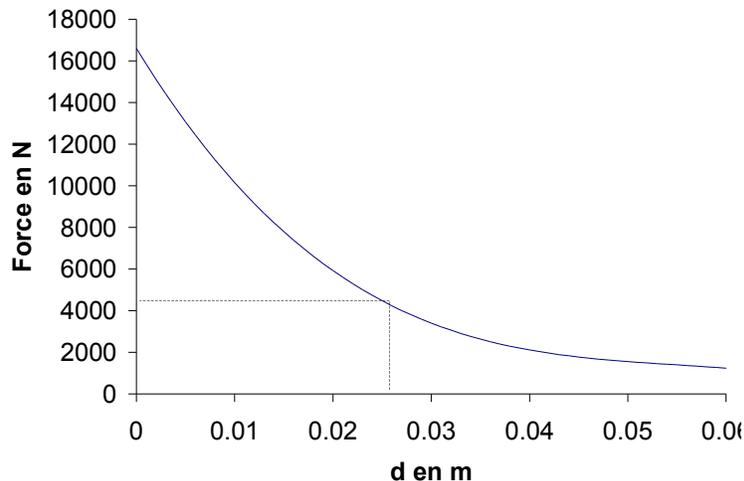


Figure 107: force de répulsion des bobines en fonction de la distance d

D'après les conventions que nous nous sommes fixées, nous constatons que la force mise en jeu est bien répulsive. Pour une distance de l'ordre de 2,5 cm, les efforts à tenir sont d'environ 5 kN.

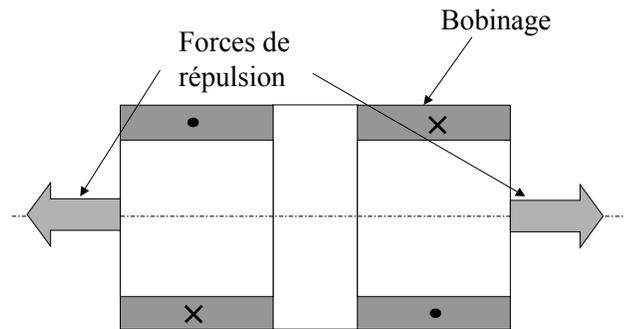


Figure 108: forces de répulsion entre les deux bobines

Les efforts vont se porter essentiellement au niveau du bobinage. Si nous ramenons les efforts à la surface mise en jeu, à savoir la surface d'appui des conducteurs qui mesure environ 17.6 cm^2 , nous obtenons une pression de 290 N/cm^2 .

II.2.b Choix du matériau pour le support

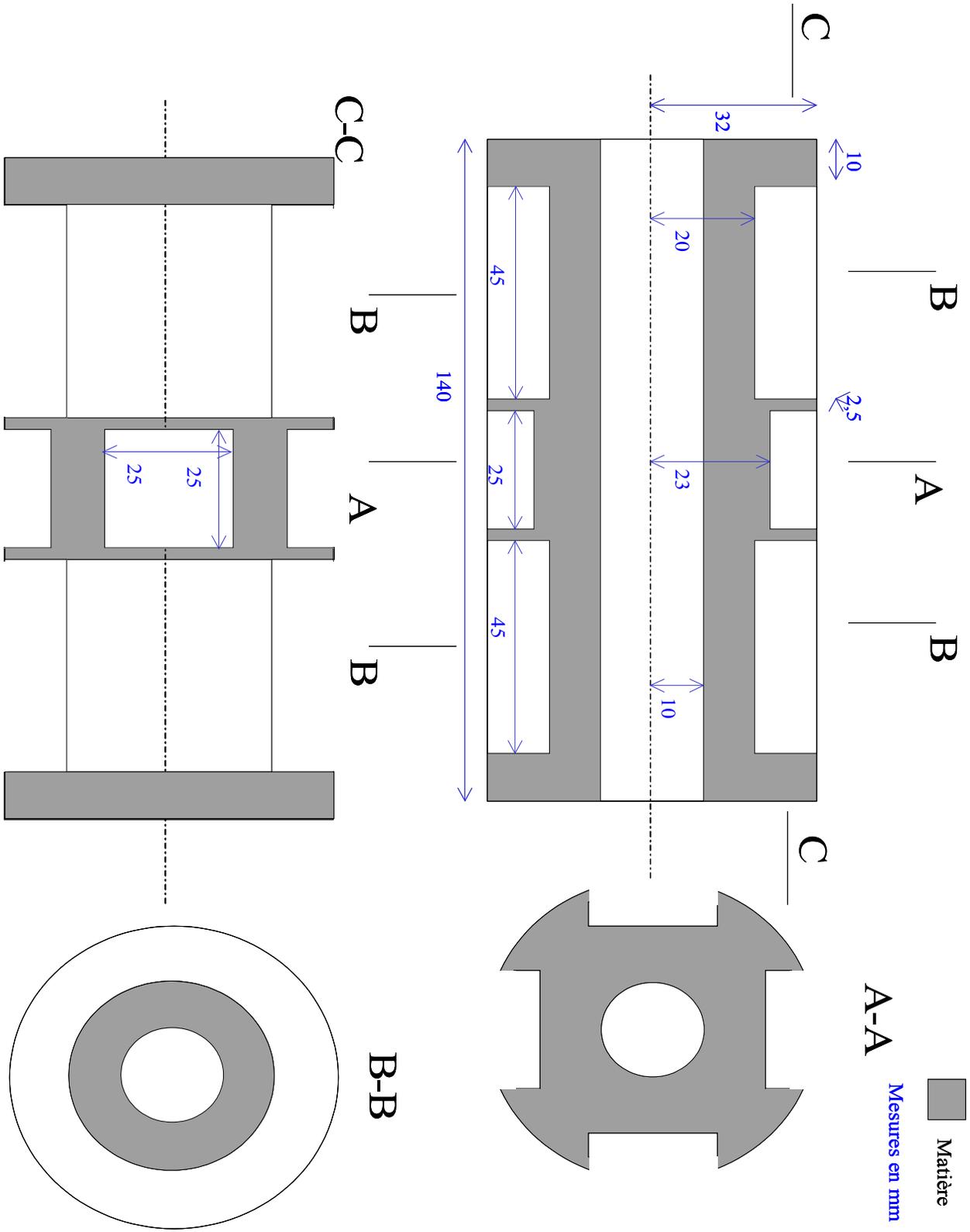
Nous devons utiliser un matériau amagnétique pour la réalisation du support. La fibre de verre-epoxy (G11) semble être un matériau résistant et facile à usiner et mettre en forme.

Les données constructeur de ce matériaux montrent une résistance à la traction de 2400 kN/cm^2 et une résistance à la compression de 1800 kN/cm^2 .

Le G11 est à même de tenir les contraintes exercées par les deux bobines sans le moindre problème avec une bonne marge de sécurité.

II.2.c Plan du support

Nous avons fait usiner un support pour le prototype de l'inducteur suivant le plan suivant.



Pour des raisons de tenue mécanique, nous avons dû laisser un espace de 0.25 cm entre les écrans et les bobines.

Il est clair que ces espaces vont générer des fuites magnétiques et conduire à une concentration du flux inférieure à celle attendue.

II.2.d Tenue des écrans supraconducteurs.

Nous devons aussi tenir les écrans supraconducteurs qui vont subir une force radiale vers l'extérieur de l'inducteur.

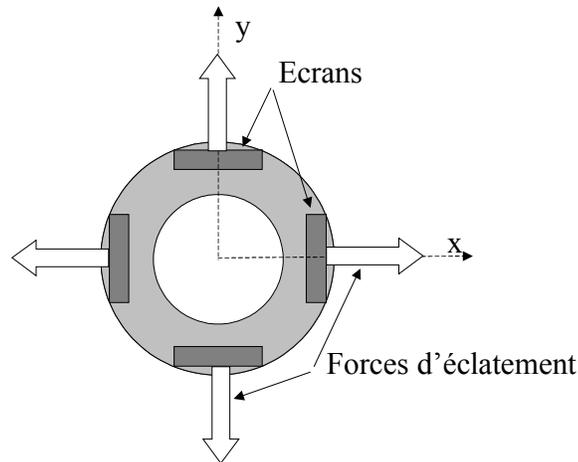


Figure 110: forces appliquées aux écrans

Nous avons décidé d'enrouler du tissu de verre autour de la partie de l'inducteur incluant les écrans, et d'effectuer une imprégnation à l'araldite.

L'imprégnation a été réalisée avec un mélange à 10% d'araldite D et d'un durcisseur HY956.

Cette méthode doit empêcher tout mouvement des écrans.

II.2.e Bobinage des solénoïdes

Le bobinage des solénoïdes a été réalisé dans les ateliers du Centre de Recherche sur les très Basses Température (C.N.R.S., Grenoble).

Le support devant accueillir le bobinage mesure 4.5 cm de long pour 1 cm de haut. Le fil utilisé possède un diamètre de 0.74 mm, ce qui fixe le nombre de spires.

Pour le calcul du nombre de spires, nous prenons le cas le plus défavorable, c'est à dire lorsque les spires s'empilent comme si elles avaient une section carrée.

Nous pouvons placer 13 couches de 60 spires, soit, un total de 780 spires.

Les deux bobines sont placées en série et bobinées en sens inverse. L'entrée et la sortie ont été doublées.

Le tableau suivant résume le bobinage réalisé.

<i>Bobine 1</i>		<i>Bobine 2</i>	
<i>N° de la couche</i>	<i>Nombre de spires (cumulé)</i>	<i>N° de la couche</i>	<i>Nombre de spires (cumulé)</i>
1	59	1	59
2	118	2	118
3	176	3	177
4	235	4	236
5	293	5	295
6	352	6	353
7	410	7	412
8	468	8	471
9	527	9	531
10	586	10	589
11	644	11	647
12	702	12	707
13	760	13	766
14	820	14	825
15	878	15	880

Nous avons décidé de bobiner deux couches de plus que prévu, le support permettant de les accueillir sans problème.

Nous pouvons constater que les deux bobines sont quasiment identiques. Le bobinage est tenu par une frette en tissus de verre imprégné.

II.2.f Protection des bobines

Les bobines supraconductrices stockent une quantité importante d'énergie. En cas de problème, le fil supraconducteur peut transiter dans l'état normal. Le fil devenant résistif, l'énergie stockée est dissipée par effet joule. Cette dissipation thermique peut détruire les bobines et vaporiser l'hélium liquide de manière très brutale. C'est pourquoi un dispositif de protection des bobines est indispensable.

Nous devons faire en sorte que l'énergie stockée se décharge dans un circuit annexe. Une solution consiste à souder une résistance en parallèle sur la bobine, lorsque celle ci transite, le courant se décharge dans la résistance.

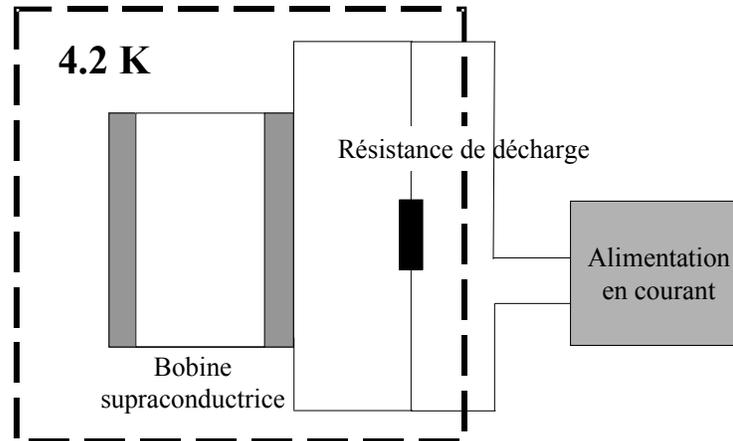


Figure 111: protection des bobines supraconductrices

III. INSTRUMENTATION

III.1 Choix des capteurs et méthode d'acquisition

III.1.a Grandeurs mesurables

Pour l'étude de l'inducteur, les deux grandeurs importantes à mesurer sont:

- la température qui doit rester suffisamment basse pour maintenir l'état supraconducteur.
- l'induction magnétique qui constitue le but en terme de résultat de notre expérience.

III.1.b Choix des capteurs

- Le capteur de température:

La température est importante, car, comme pour tout dispositif supraconducteur, elle doit rester bien inférieure à la plus basse température critique des matériaux constituant le système.

Nous allons mener notre expérience dans un bain d'hélium liquide. La température de ce bain est stable et vaut 4.2 K.

Le système doit toujours rester plongé dans le liquide, nous utiliserons alors un capteur du niveau d'hélium liquide.

Ce capteur est constitué d'une tige au bout de laquelle est fixée une résistance qui possède une valeur caractéristique à la température de l'hélium liquide. Un petit circuit mesure la valeur de cette résistance et permet d'indiquer si elle se trouve dans le liquide.

- Les capteur d'induction magnétique.

Nous utilisons, pour mesurer la valeur de l'induction magnétique, des capteurs à effet Hall. Avant d'aborder les caractéristiques de ces capteurs, rappelons brièvement son fonctionnement.

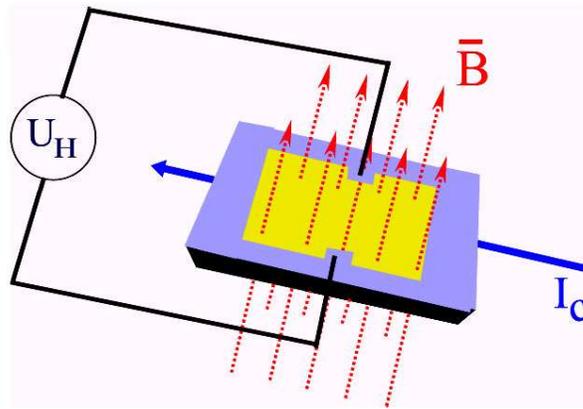


Figure 112: principe de fonctionnement de la sonde à effet Hall

L'effet Hall fut découvert par Edwin F. Hall en 1879. Une sonde à effet Hall peut se ramener à une petite couche de semiconducteur. Cette partie conductrice comporte quatre connections situées sur les quatre côtés de la couche comme indiqué sur la figure 112. Lorsqu'un courant I_C circule à travers le semiconducteur et qu'un champ magnétique extérieur B est appliqué, une différence de potentiel U_H , appelée tension de Hall, apparaît entre deux côtés de la couche.

Si le courant I_C est constant, la tension de Hall peut être proportionnelle à la valeur du champ magnétique appliqué.

La valeur de la tension de hall varie avec le décalage angulaire entre le vecteur champ magnétique et la zone sensible. Le maximum de cette tension est obtenu pour une induction orthogonale à la zone semiconductrice.

Pour notre application, nous avons besoin de sondes fonctionnant dans l'hélium liquide. La société AREPOC® distribue des sondes à effet Hall de grande linéarité pour des températures allant de 1.5 K à 350 K et des champs magnétiques de 0 T à 30 T.

Nous avons choisi d'utiliser des sondes de type LHP-NU à cause de leur faible encombrement. La figure 113 représente un schéma du type de sonde utilisée.

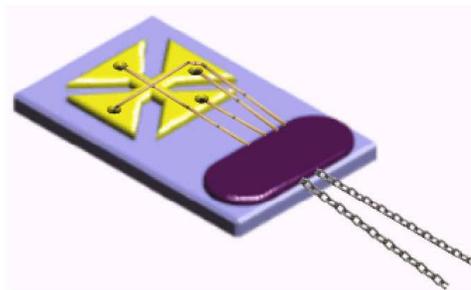


Figure 113: sonde LHPNU utilisée

La zone active mesure $1250 * 500 \mu\text{m}$ soit une surface de 0.625 mm^2 .
Les dimensions extérieures sont: $5 * 4 * 0.7 \text{ mm}$.

<i>Paramètres</i>	<i>Unité</i>	<i>Valeur</i>
Gamme de champ magnétique	T	0 – 30
Gamme de température	K	1.5 – 350
Courant nominal d'alimentation I_n	mA	100
Courant d'alimentation maximum	mA	150
Sensibilité à I_n	mV/T	> 10
Erreur de linéarité à 300K, B=0 – 1 T	%	< 0.2
Erreur de linéarité à 77K, B=0 – 0.2 T	%	< 0.1
Erreur de linéarité à 4.2K, B=0 – 5 T	%	< 1
Coefficient moyen de sensibilité à la température pour T variant de 4.2 K à 77 K	K ⁻¹	2.10 ⁻⁵
Coefficient moyen de sensibilité à la température pour T variant de 77 K à 300 K	K ⁻¹	3.10 ⁻⁵
Tension résiduelle	μV	< 50
Coefficient de température pour la tension résiduelle	μV/K	< 0.02
Résistance d'entrée à 4.2 K (B=0, incluant les connections)	Ω	0.9
Résistance d'entrée à 77 K (B=0, incluant les connections)	Ω	1.1
Résistance d'entrée à 300 K (B=0, incluant les connections)	Ω	1.5
Résistance de sortie à 4.2 K (B=0, incluant les connections)	Ω	1.3
Résistance de sortie à 77 K (B=0, incluant les connections)	Ω	1.8
Résistance de sortie à 300 K (B=0, incluant les connections)	Ω	3
Oscillations quantiques à partir de 4.2 K	T	> 2
Amplitude des oscillations quantiques à 4.2 K, B = 0 – 5 T	%	< 0.1
Surface active	mm ²	0.001
Fils du courant d'alimentation (vert, noir)	mm	, 0.1
Fils tension de Hall (orange, rouge)	mm	, 0.08

III.1.c Méthode d'acquisition

Nous devons relever les tensions délivrées par les sondes à effet Hall. Ces tension de quelques millivolts nécessitent une mesure très précise.

Nous utilisons une carte d'acquisition fabriquée spécialement pour fonctionner avec les sondes à effet Hall. Il s'agit de la carte AD25HAL produite par la société AREPOC®.

Cette carte dispose de huit entrées analogiques, d'une alimentation stabilisée à 100mA pour l'alimentation des sondes.

Le tableau suivant présente les caractéristiques de la carte.

<i>Entrées analogiques</i>	
Résolution (programmable)	20 à 26 bits
Non linéarité maximum (gain =1)	0.00%
Erreur maximum de lecture	0.000%
Nombre d'entrées analogiques	8 en différentiel
Gamme d'entrée	0-10V ou $\pm 5V$ (sélection matérielle)
Gain programmable	1 – 128 (sélection logicielle)
Résistance d'entrée	100 M Ω
<i>Source de courant</i>	
Gamme du courant de sortie	0 – 100 mA
Résolution du courant de sortie	12 bits
Tension maximum de sortie	8 V

III.2 Étalonnage des capteurs

Une fois le type de sonde choisi, nous devons mesurer leur sensibilité à la température d'utilisation, soit 4.2 K.

Bien que toutes les sondes soient fabriquées en série, leurs caractéristiques sont toutes différentes, de plus leurs sensibilités varient avec la température, c'est pourquoi nous devons réaliser l'étalonnage de chaque sonde à effet Hall à la température de travail.

Nous disposons de dix sondes que nous numérotions de S1 à S10.

Pour réaliser l'étalonnage, nous disposons d'un appareil QUANTUM DESIGN® nous permettant de contrôler la température de 300K à 4.2K et l'induction magnétique de 0T à 7T.

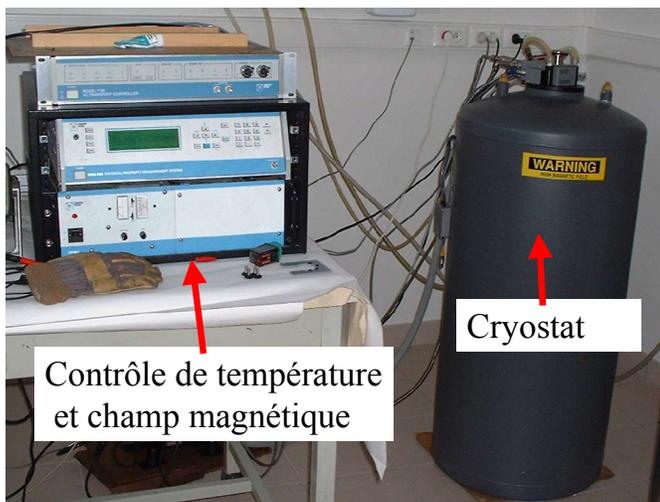


Figure 114: matériel pour l'étalonnage des sondes à effet Hall

La tension de Hall est mesurée à l'aide d'un voltmètre numérique HP34401A.

Pour étalonner une sonde, nous devons:

- fixer la sonde sur le support devant descendre dans le cryostat et y souder les amenées de courant et la prise de potentiel.

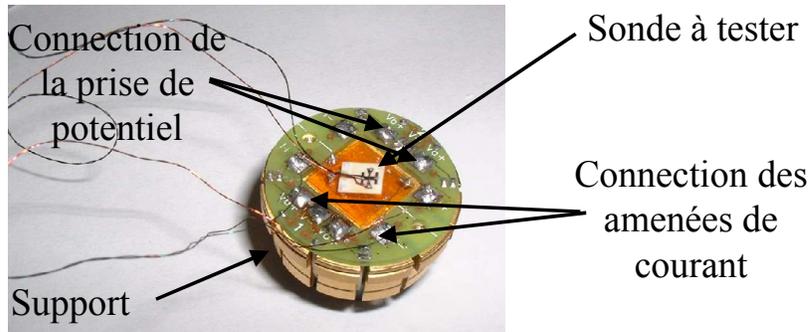


Figure 115: support de sonde pour l'étalonnage

- Descendre la sonde dans le cryostat
- descendre la température de 300K à 4.2K
- effectuer une rampe de champ magnétique en relevant la tension de Hall

La figure 116 représente la courbe $V_h(B)$ caractérisant la sonde S0.

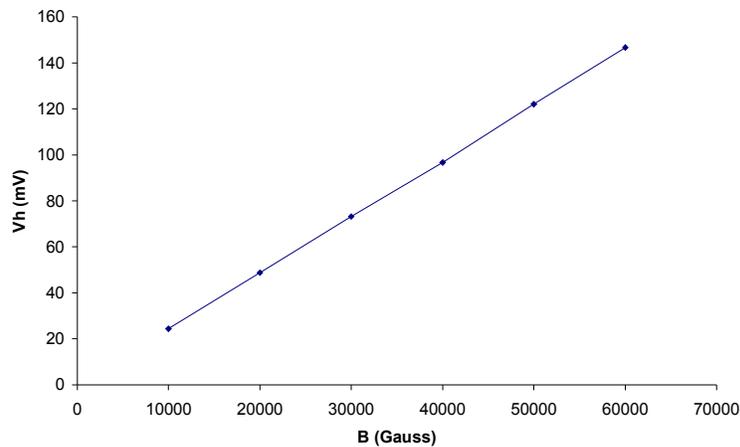


Figure 116: courbe d'étalonnage de la sonde S1

Nous avons pu vérifier que les sondes étaient parfaitement linéaires jusqu'à 7 T. Les sensibilités sont comprises entre 19 et 32 mV/T. Le tableau suivant résume les résultats de l'étalonnage.

N° de la sonde	Sensibilité à 300K mV/T	offset à 300K μV	Sensibilité à 4.2K mV/T	Offset à 4.2K μV
S1	28.6	< -20	24.44	-215
S2	29.2	<20	25.28	60

<i>N° de la sonde</i>	<i>Sensibilité à 300K mV/T</i>	<i>offset à 300K μV</i>	<i>Sensibilité à 4.2K mV/T</i>	<i>Offset à 4.2K μV</i>
S3	23	<20	19.83	31
S4	23.2	<-10	19.87	-190
S5	32.9	<20	28.12	205
S6	38.8	<20	32.75	672
S7	21.9	<20	18.55	464
S8	31	<20	26.47	355
S9	33.2	<-20	27.84	-588
S10	34.6	<-20	29.34	-590

III.3 Répartition des sondes

Afin de diminuer le coût sans compromettre l'expérience, nous avons limité le nombre des sondes à dix.

L'objectif de l'expérience est de relever la répartition angulaire de l'induction produite par l'inducteur. Nous disposons donc de dix sondes à effet Hall que nous devons disposer autour de la partie active de l'inducteur.

Nous avons plusieurs possibilités:

- Instrumenter un quart de machine.
 - Avantage: la courbe relevée serait très précise au niveau d'un écran.
 - Inconvénient: nous n'aurions aucune idée du bon fonctionnement des autres écrans.

Dans ce cas, les résultats ne seraient exploitables que dans l'expectative du bon fonctionnement de l'ensemble des écrans.

- Instrumenter l'ensemble de la machine.
 - Avantage: nous aurions la connaissance du fonctionnement de tous les écrans et de la répartition de l'induction sur 360°.
 - Inconvénient: la courbe relevée aurait une faible résolution.

Nous choisissons d'instrumenter l'ensemble de l'inducteur. Nous disposons de dix sondes. Nous répartissons les sondes comme suit:

- une sonde sur chaque pôle, ce qui correspond au relevé des extrema de la courbe $B(\theta)$.
- deux sondes supplémentaires sur un écran afin d'obtenir des informations supplémentaires sur le blindage.

La figure 117 résume la répartition des sondes à effet Hall autour de l'inducteur.

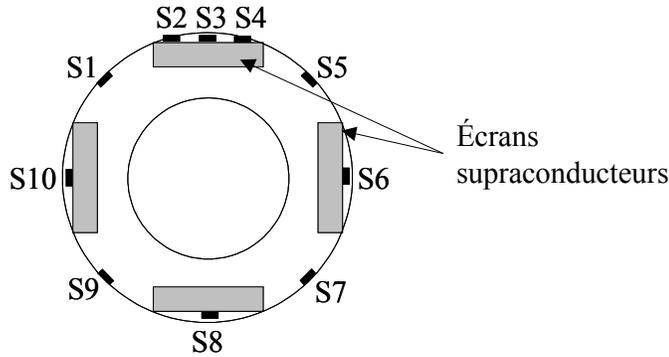


Figure 117: répartition des sondes

IV. LE PROTOTYPE

Les contraintes mécaniques ainsi que le choix du fil apportent des différences entre le dimensionnement de l'inducteur et le prototype fabriqué. La distance d entre les bobines a été augmentée de 5 mm afin de s'assurer une bonne tenue mécanique du bobinage. L'augmentation de cette distance modifie l'induction entre les bobines ainsi que le champ sur fil.

Le champ maximum sur fil est alors de 4.4 T, ce qui correspond à un accroissement de 0.2 T par rapport à la structure dimensionnée. La figure 118 représente la distribution de l'induction sur la surface séparant les deux bobines.

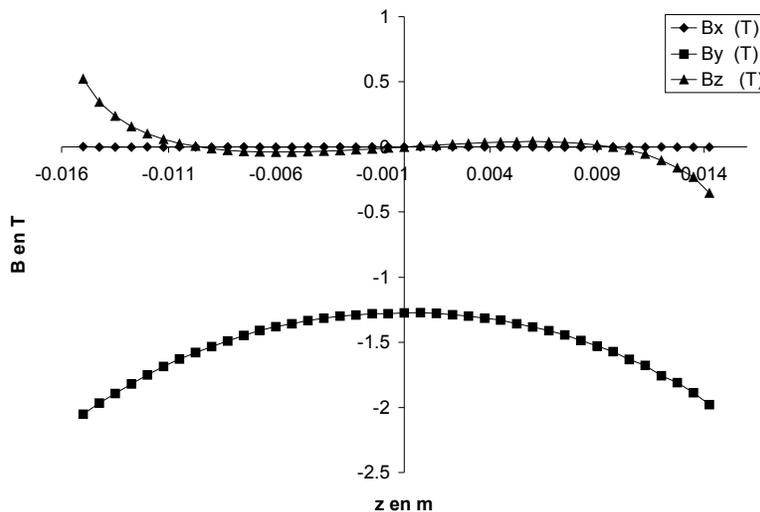
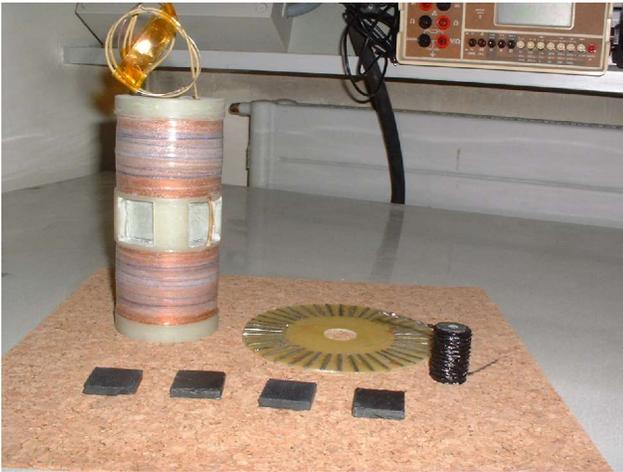


Figure 118: induction entre les bobines avant concentration

Nous pouvons constater que l'accroissement de d nous a augmenté légèrement la composante en z du champ. L'induction à $z = 0$ est passée de 1.5 T (cf figure 104) à 1.27 T.



Ensemble des constituants de l'inducteur, nous pouvons voir:

- les quatre écrans supraconducteurs
- les deux bobines sur le support
- la résistance de protection
- le disque permettant la connection des sondes à effet Hall à des cables

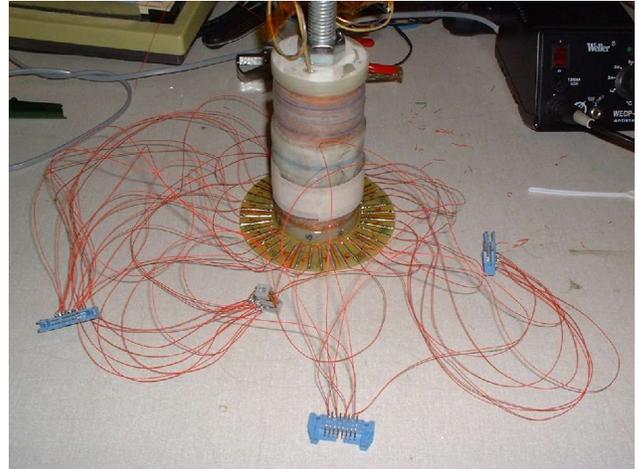
Inducteur en phase de montage:

Les écrans ont été insérés et les sondes à effet Hall collées.



Imprégnation du tissu de verre permettant la tenue mécanique des écrans supraconducteurs et des sondes à effet Hall

Inducteur terminé avec toutes les connections permettant l'alimentation et les prises de mesure des sondes.



Le prototype monté et prêt à être inséré dans le cryostat.

La salle de manipulations. On peut y voir:

- Le cryostat
- Le PC pour l'acquisition
- Les différentes alimentations
- Le support de l'inducteur



V. PROTOCOLE EXPERIMENTAL

V.1 Matériel disponible

Pour réaliser notre expérience, nous disposons au laboratoire du matériel suivant:

- une alimentation programmable et stabilisée en courant délivrant 260 A (4V max.). Cette alimentation a été conçue spécifiquement pour être utilisée avec des bobines supraconductrices.
- une alimentation régulée de 0 à 100 mA pour l'alimentation des sondes à effet hall.
- un environnement cryogénique comprenant:
 - un cryostat de diamètre interne de 200 mm fermé par une bride conçue spécialement pour cette expérience.
 - Une pompe à vide.
 - un bidon d'azote et d'hélium.
- une station d'acquisition formée d'un PC équipé de la carte AD25HAL
- deux voltmètres de précision HP.
- l'inducteur présenté précédemment.

V.2 Aspects cryogéniques

Les dispositifs à base de supraconducteurs ont besoin d'un environnement cryogénique pour fonctionner. Dans le cas de machines tournantes, afin de réduire les pertes, il est préférable autant que faire se peut de laisser les parties réfrigérées immobiles. Dans notre cas, si on considère un induit « chaud » en cuivre, l'inducteur doit être fixe.

C'est donc l'induit qui serait tournant. Les courants d'alimentation sont alors amenés par des contacts glissants.

L'inducteur doit donc être placé dans un cryostat hélium qui comporte des zones de vide ainsi qu'une garde d'azote liquide permettant de réduire les pertes thermiques. Pour ce type de moteur, l'entrefer devient rapidement de grande dimension.

La figure suivante montre la constitution d'un cryostat hélium permettant de tester des dispositifs supraconducteurs.

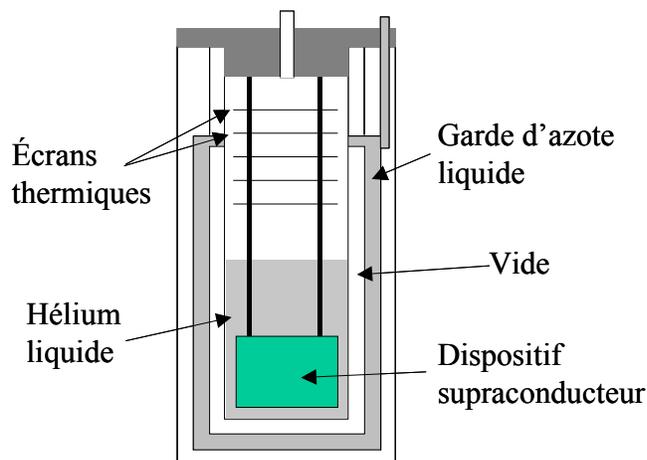
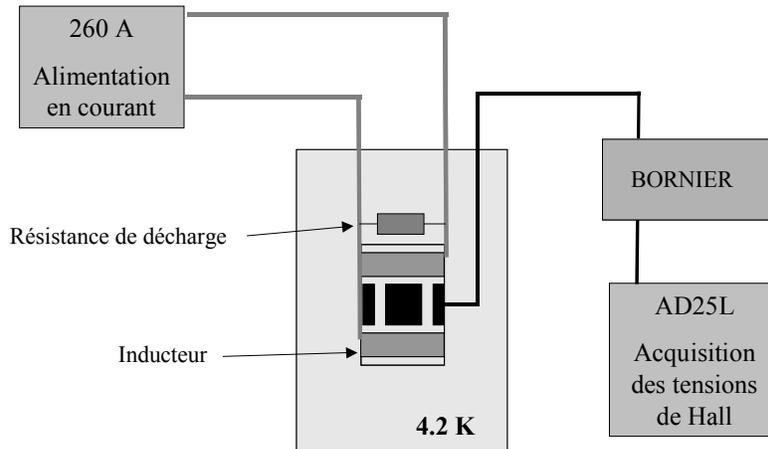


Figure 119: représentation d'un cryostat hélium.

V.3 Diagramme d'ensemble

Nous avons présenté les éléments constituant le montage, voyons l'ensemble de l'installation.



Les câbles connectés aux sondes à effet Hall sont faits de paires de fils torsadés et sont blindés. Les tensions mises en jeu sont relativement faibles (quelques millivolts) et donc, nous devons éviter au maximum les parasites.

V.4 Déroulement de l'expérience

L'objectif de l'expérience est de mesurer la répartition angulaire de l'induction magnétique produite par l'inducteur. Elle sert essentiellement à valider le principe de fonctionnement de la structure. De plus, cette expérience nous permet de pouvoir valider l'outil de calcul numérique que nous avons développé.

L'expérience se déroule en plusieurs phases:

- l'insertion du dispositif à étudier dans le cryostat
- vérification des connections (sondes et alimentations)
- réglage du logiciel d'acquisition et de l'alimentation des bobines
- mise en froid du système:
 - mise sous vide à l'aide de la pompe à vide de la partie isolation du cryostat
 - remplissage de la garde d'azote liquide
 - transfert de l'hélium liquide dans le cryostat
- déclenchement d'une rampe de courant et acquisition des tensions délivrées par les sondes.

VI. RÉSULTATS ET OBSERVATIONS

VI.1 Répartition angulaire de l'induction

Nous avons effectué une rampe de courant de 0 à 260 A. Lorsque le courant est arrivé à 260 A, nous avons mesuré la répartition de champ suivante.

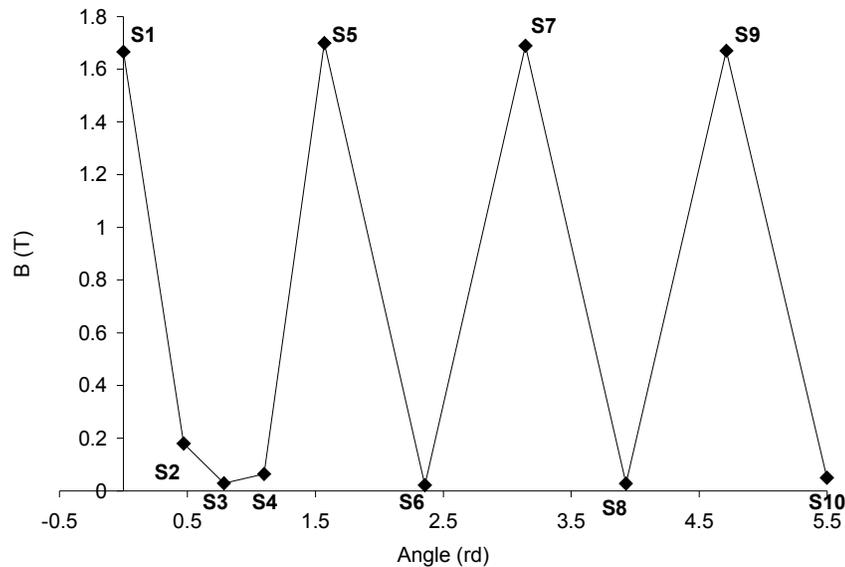


Figure 121: répartition angulaire de l'induction mesurée

Nous pouvons constater que nous obtenons une répartition angulaire variable de l'induction magnétique.

La valeur de l'induction entre les écrans est de 1.7 T. Nous avons vu figure 118 que l'induction produite par les deux bobines en opposition sans les écrans était de 1.27 T en $z = 0$.

Nous pouvons définir un facteur de concentration F_c comme suit:

$$F_c = \frac{B_{\text{concentré}}}{B_{\text{sans écran}}} = 1.338$$

Les écrans ont donc produit une augmentation de la valeur du champ de 33.8 %.

Le flux magnétique a été concentré.

Nous constatons que les écrans magnétiques remplissent bien leur rôle. L'induction derrière les écrans n'excède pas 50 mT soit moins de 3 % de la valeur de l'induction entre les écrans.

La figure suivante représente l'évolution des valeurs mesurées par les sondes S3, S6, S8, S10 en fonction du courant dans les bobines.

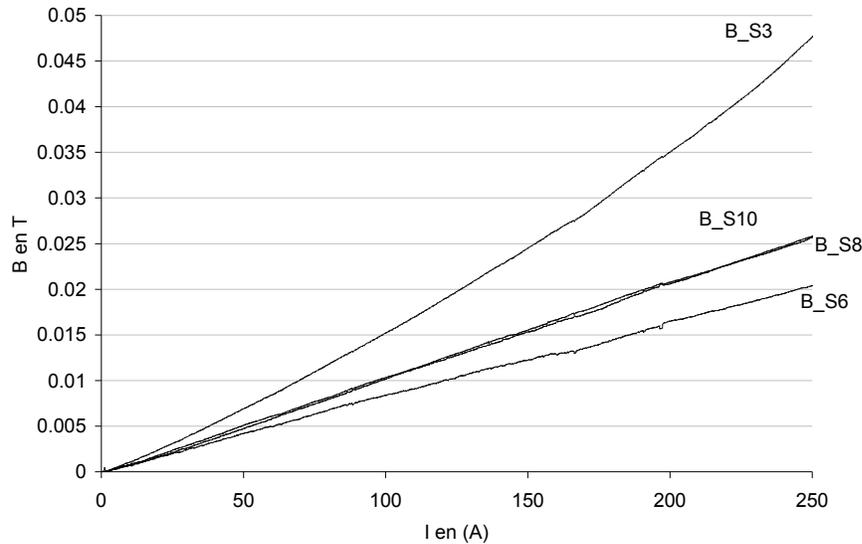


Figure 122: induction mesurée derrière les écrans

VI.2 Les instabilités

VI.2.a Le « training »

Le « training » est la transition d'une bobine supraconductrice due au déplacement de spires lors des premières montées en courant. Le champ magnétique produit des forces qui permettent une mise en place des conducteurs.

Le training n'existe que lors des premières montées en champ, une fois le régime nominal atteint, les conducteurs ne bougent plus et la bobine peut être utilisée en toute sécurité.

Lors de notre expérience, nous avons observé trois transitions avant d'arriver au courant nominal.

- Lors de la première montée en courant, les bobines ont transité à $I = 70$ A
- Lors de la deuxième montée en courant, les bobines ont transité à $I = 185$ A
- Lors de la troisième montée en courant, les bobines ont transité à $I = 230$ A
- La quatrième montée en courant s'est déroulée sans problème jusqu'au courant nominal.

VI.2.b Les sauts de flux

Comme nous l'avons présenté dans le premier chapitre, les sauts de flux résultent d'une instabilité magnéto-thermique. La figure 123 présente la valeur de l'induction mesurée par la sonde S10 pendant la troisième montée en courant.

Nous pouvons voir que lorsque le courant s'est trouvé aux alentours de 200 A, la pastille supraconductrice a laissé passer une partie du flux magnétique et l'a piégé. La sonde a alors mesuré un saut de 140 mT.

Ce saut de flux survenu à bas champ magnétique montre que l'YBaCuO n'est pas totalement stable à 4.2 K. Néanmoins, en contrôlant la vitesse de montée du champ extérieur, les sauts de flux peuvent être minimisés.

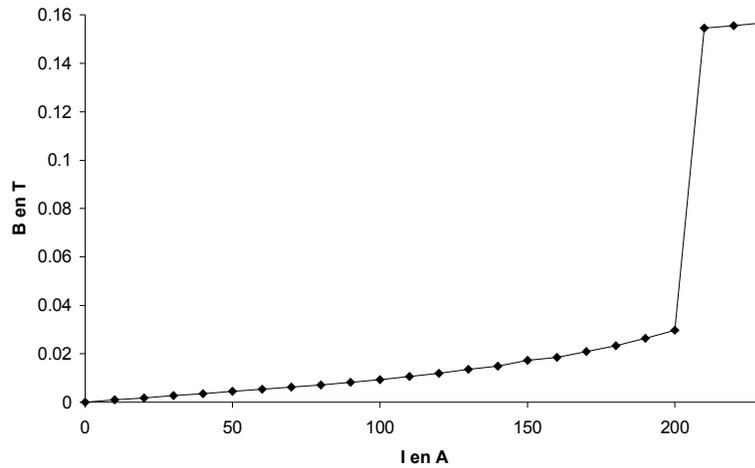


Figure 123: saut de flux mesuré sur un écran

VII. COMPARAISON EXPÉRIENCE / CALCUL

VII.1 Répartition angulaire de l'induction

Après avoir modélisé le système, nous avons calculé la valeur de l'induction magnétique aux points de mesure. Rappelons tout d'abord le problème à résoudre.

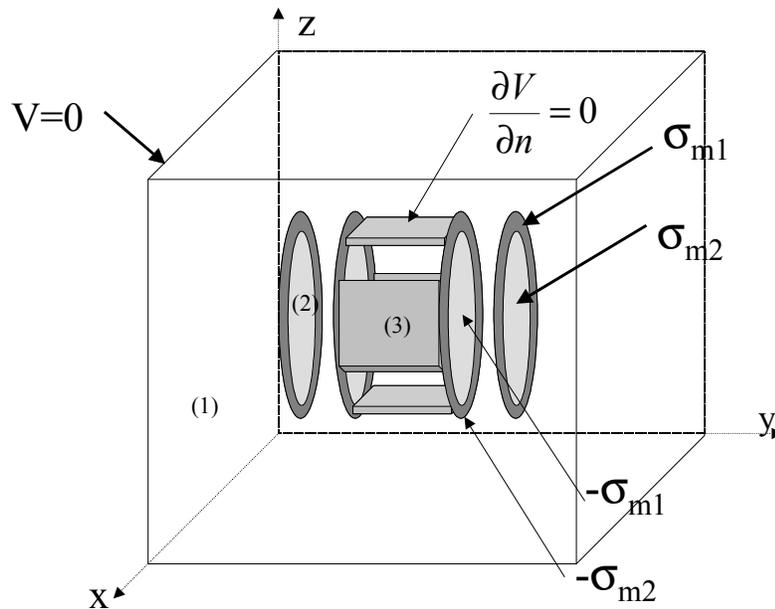


Figure 124: modélisation coulombienne du système

Rappelons les équations, les conditions de passage ainsi que les conditions aux limites du problème.

Dans tout l'espace,

$$\Delta V = 0$$

Les conditions de passage à travers une sources surfacique sont:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_1 - \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_2 = \sigma_m$$

avec les indices 1 et 2 représentant respectivement les milieux avant et après les sources, et avec σ_m la densité superficielle de charges magnétiques fictives rencontrées.

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &= -\mu_0 J (R_i + e - r) & \text{si } R_i < r < R_i + e \\ \sigma_{m2} &= -\mu_0 J e & \text{si } 0 < r < R_i \end{aligned}$$

Une condition de Neumann est imposée sur le contour du supraconducteur, avec n la direction de la normale à la surface du supraconducteur.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \right)$$

La frontière externe du domaine de calcul possède une condition de Dirichlet.

$$V = 0.$$

A partir du calcul du potentiel, nous pouvons calculer la valeur de l'induction magnétique:

Dans le milieu (1), c'est à dire dans l'air,

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\text{grad}} V$$

Dans le milieu (2), c'est à dire dans les solénoïdes,

$$\vec{B} = -\mu_0 (-\vec{\text{grad}} V + \vec{P}_m)$$

avec \vec{P}_m le vecteur polarisation des solénoïdes.

$$\begin{aligned} P_m &= -J (R_i + e - r) & \text{si } R_i < r < R_i + e \\ P_m &= -J e & \text{si } 0 < r < R_i \end{aligned}$$

Dans le milieu (3), c'est à dire dans le matériau supraconducteur,

$$\vec{B} = \vec{0}$$

Le calcul est effectué à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo utilisant des cheminements aléatoires présentée dans le chapitre 2.

Nous avons défini les dimensions de l'espace de déplacement des cheminements aléatoires, la limite étant représentée par un potentiel scalaire magnétique nul, comme suit:

$$-0.2 \text{ m} < x < 0.2 \text{ m}$$

$$-0.2 \text{ m} < y < 0.2 \text{ m}$$

$$-0.2 \text{ m} < z < 0.2 \text{ m}$$

Le domaine de calcul est donc un cube de côté 0.4 m.

Nous avons défini un pas de discrétisation $\delta = 5 * 10^{-4} \text{ m}$.

Nous utilisons 3000 cheminements aléatoires par point de calcul.

Nous avons calculé le potentiel au niveau des écrans comme l'illustre la figure 125.

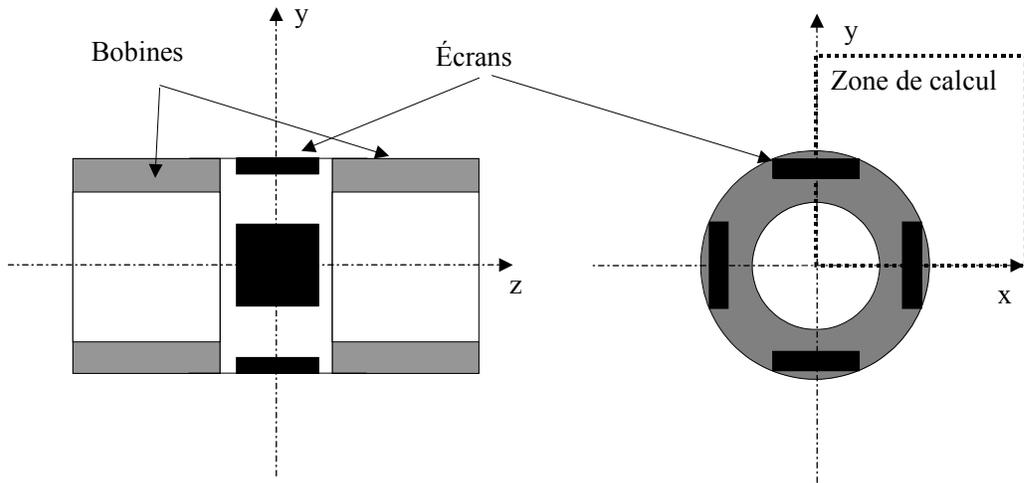


Figure 125: zone de calcul du potentiel magnétique

Le calcul brut nous a donné la surface représentée sur la figure suivante. Le calcul a été effectué tous les millimètres.

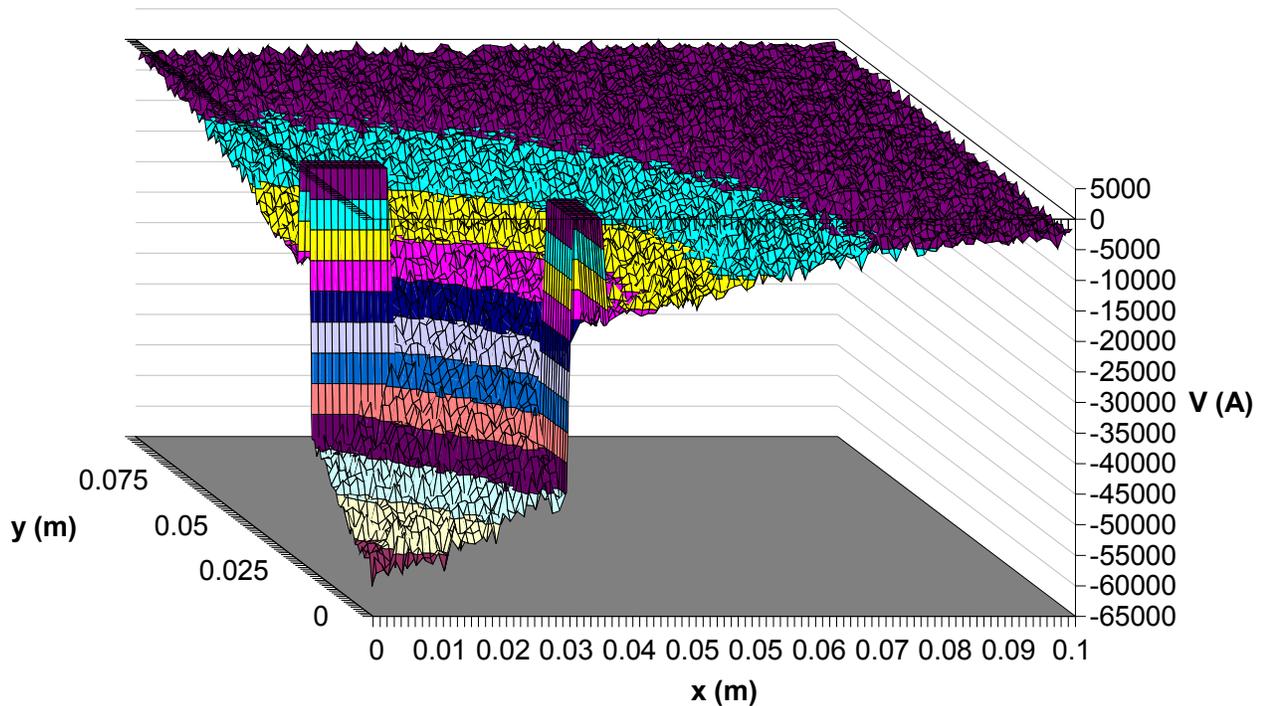


Figure 126: potentiel scalaire magnétique sur le domaine de calcul

Nous avons imposé une valeur nulle pour le potentiel à l'intérieur des écrans. Nous voyons que le potentiel varie beaucoup entre les écrans (zones à $V=0$) et très peu derrière les écrans.

Après traitement, nous avons calculé la valeur de l'induction au niveau des points de mesure. La figure 127 représente une comparaison entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées.

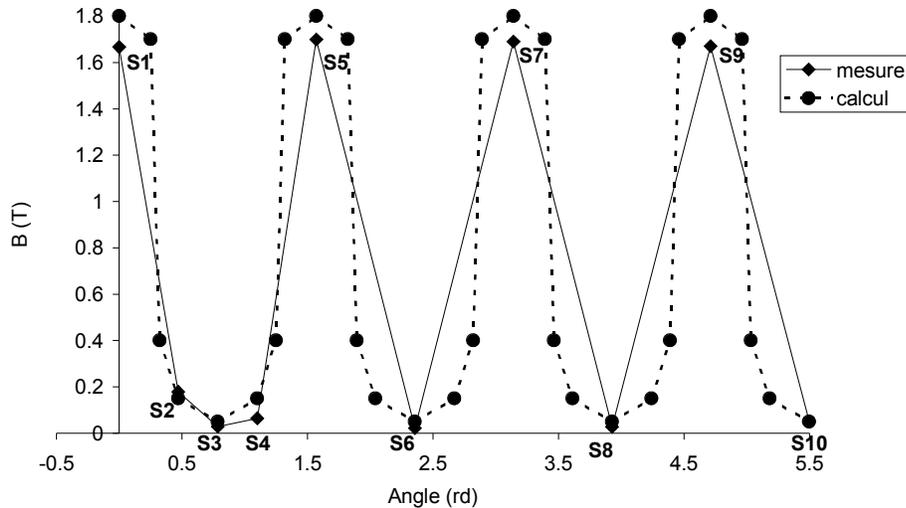


Figure 127: comparaison calcul / expérience

Nous pouvons constater que les valeurs sont très proches. Le maximum mesuré entre les écrans vaut 1.7 T alors que le calcul donne 1.8 T.

La différence entre le calcul et la mesure est donc d'environ 6%. Cette erreur, tout à fait acceptable, est sans doute due au modèle simplifié des écrans supraconducteurs.

Dans le cas présenté ici, le modèle que nous utilisons pour représenter les écrans magnétiques est donc suffisant.

Le facteur de concentration expérimental vaut alors 33,8 % et le facteur de concentration théorique est de 41 %.

VII.2 Champ sur supraconducteur

Nous avons calculé la valeur du champ magnétique tangent aux écrans supraconducteurs. Nous avons obtenu:

$$H_{\text{tangential}} = 835220 \text{ A/m}$$

Ce qui correspond à une induction de l'ordre du Tesla.

Nous pouvons alors avoir une estimation de la pénétration des courants dans le matériau.

Nous pouvons écrire :

$$H_{\text{tangential}} = e \cdot j$$

Si e est l'épaisseur de pénétration des courants et j la densité de courant dans le matériau.

A 4.2 K, la densité de courant dans un mono-domaine d'YBaCuO vaut environ $1.5 \cdot 10^9 \text{ A/m}^2$.

Donc,

$$e = 5.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Cette valeur nous montre que le courant circulant dans le matériau est très superficiel.

VIII. CONCLUSION

La réalisation d'une expérience à l'hélium liquide demande des précautions particulières. L'aspect cryogénique est très important et nécessite une préparation du cryostat et une démarche expérimentale rigoureuse.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la réalisation et le test d'un prototype d'inducteur supraconducteur. La fabrication complète a été réalisée au laboratoire.

Cette expérience nous a permis d'aboutir à quelques conclusions:

- Le principe de l'inducteur tel qu'il a été présenté dans le chapitre 1 a été validé. Nous sommes parvenu à créer une répartition angulaire du champ magnétique.
- L'induction magnétique a effectivement été concentrée entre les écrans supraconducteurs. Sa valeur a été multipliée par 1.3.
- Le matériau utilisé a bien rempli son rôle, bien qu'à champ relativement faible, des sauts de flux ont été observés.
- Nous avons pu valider l'outil de calcul de champ présenté dans le chapitre 2.

Les performances du prototype présenté reflètent les capacités des écrans que nous avons pu trouver lors de la conception de la manipulation.

Nous allons voir dans le chapitre suivant, les performances que nous pourrions attendre d'un tel système en utilisant les écrans disponibles actuellement.

CHAPITRE 4 : PERSPECTIVES DE RECHERCHE

TABLE DES MATIÈRES DU CHAPITRE 4

I Introduction.....	137
II Dimensionnement de l'inducteur.....	137
II.1 Position du problème.....	137
II.2 Dimensionnement des solénoïdes.....	138
II.2.a Définition des grandeurs.....	138
II.2.b Analyse dimensionnelle.....	138
II.2.c Les paramètres imposés lors du dimensionnement.....	140
II.2.d Influence de R sur la forme.....	142
II.2.e Influence de d sur la forme.....	143
II.2.f Conclusion.....	145
II.3 Étude des écrans	145
II.3.a Position du problème.....	145
II.3.b Forme et position des écrans.....	145
II.3.c Problèmes engendrés par l'insertion des écrans.....	146
II.3.d Constitution d'écrans magnétiques de grande taille.....	147
III Etude de l'induit.....	149
III.1 Position du problème.....	149
III.2 Choix du type d'induit.....	149
III.3 Modélisation de l'induit.....	149
IV Résultats numériques.....	151
IV.1 Problème et équations.....	151
IV.1.a Dimensions.....	151
IV.1.b Équations à résoudre.....	153
IV.2 Calcul de l'induction.....	153
IV.3 Calcul du couple.....	155
V Conclusion.....	156

I INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté l'étude expérimentale d'un inducteur. Lors de la fabrication du prototype, nous avons été limité par les dimensions réduites des écrans supraconducteurs.

L'expérience ayant validé notre outils de calcul de champ, nous allons pouvoir calculer les performances d'un inducteur disposant d'écrans de tailles différentes.

L'objectif de ce chapitre est de montrer par le calcul numérique qu'il est possible d'obtenir des performances bien supérieure à celles obtenues lors de notre essai expérimental.

Nous étudierons plus précisément le dimensionnement pour arriver à une structure faisable avec les moyens actuels.

Nous aborderons le problème de la conception d'écrans de grande dimension utilisant des supraconducteurs à haute température critique.

Après avoir mené une étude succincte de l'induit et de sa modélisation, nous finirons par le calcul d'un couple électromagnétique théorique.

II DIMENSIONNEMENT DE L'INDUCTEUR

II.1 Position du problème

Nous avons présenté dans le premier chapitre une structure d'inducteur supraconducteur possédant huit pôles et générant un champ magnétique homopolaire. Comme l'inducteur se compose de deux parties, le dimensionnement se fera en deux étapes:

- L'objet du premier dimensionnement est de définir la forme de la source produisant le champ magnétique. Il s'agit de deux solénoïdes supraconducteurs en opposition.
- La deuxième partie du dimensionnement concerne les écrans supraconducteurs qui doivent perturber le champ magnétique.

Le système complet est rappelé sur la figure suivante.

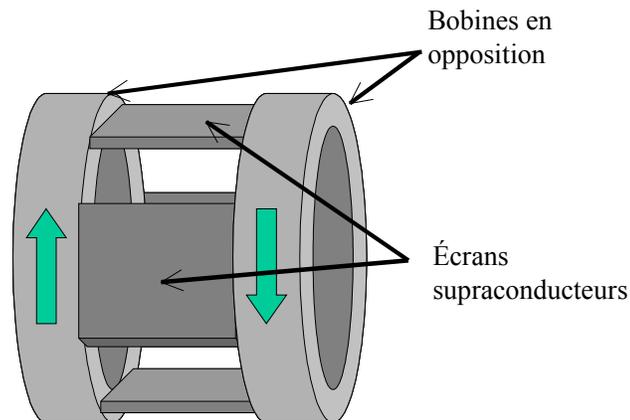


Figure 128: structure de l'inducteur.

Nous allons aborder le dimensionnement de manière générale, nous étudierons ensuite une exemple que nous traiterons de manière numérique.

II.2 Dimensionnement des solénoïdes

II.2.a Définition des grandeurs

Dans un premier temps, nous allons rappeler les grandeurs nécessaires au dimensionnement des deux solénoïdes en opposition. Cette première partie du système permet de générer un champ radial indépendant de la position angulaire.

Nous devons tout d'abord définir un cahier des charges incluant les termes suivants:

- l'encombrement maximal de l'objet
- le type de fil utilisé
- le niveau d'induction

Nous rappelons une coupe du système où apparaissent les différentes variables qu'il va falloir ajuster.

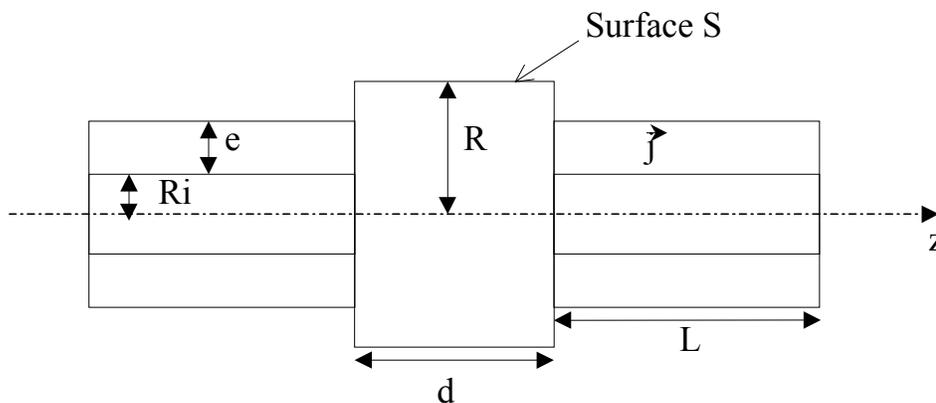


Figure 129: variables pour le dimensionnement.

Nous avons choisi le flux à travers la surface S comme critère de dimensionnement.

Afin d'étudier la dépendance de la forme des solénoïdes avec les différentes variables, nous allons effectuer une analyse dimensionnelle du flux.

II.2.b Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de diminuer le nombre de variables à étudier et définir les tendances de variation de la fonction étudiée.

Après avoir défini les grandeurs nécessaires au dimensionnement, nous pouvons mener une analyse dimensionnelle afin de définir les variables à étudier.

Nous pouvons écrire le flux magnétique comme étant fonction des différentes variables suivantes:

$$\phi = f(R_i, e, d, R, L, j, \mu_0) \quad (\text{IV.1})$$

Nous pouvons alors remplir le tableau suivant avec :

M \Leftrightarrow unité de masse

L \Leftrightarrow unité de longueur

T \Leftrightarrow unité de temps

I \Leftrightarrow unité d'intensité de courant

Tableau 5: analyse dimensionnelle du flux

	M	L	T	I	Exp
ϕ	1	2	-2	-1	
R_i	0	1	0	0	N1
L	0	1	0	0	N2
e	0	1	0	0	N3
R	0	1	0	0	N4
d	0	1	0	0	N5
J	0	-2	0	1	N6
μ_0	1	1	-2	-2	N7

Nous pouvons tirer de ce tableau les équations suivantes et déterminer une équation aux dimensions régissant le flux magnétique.

$$\left\{ \begin{array}{l} N7=1 \\ NI + N2 + N3 + N4 + N5 - 2 N6 + N7 = 2 \\ -2 N7 = -2 \\ N6 - 2 N7 = -1 \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

Nous pouvons alors écrire le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} N7=1 \\ NI + N2 + N3 + N4 + N5 = 3 \\ N6=1 \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

L'équation aux dimensions s'écrit :

$$[\phi] = [R_i^{N1} L^{N2} e^{N3} R^{N4} d^{N5} j^{N6} \mu_0^{N7}] \quad (IV.4)$$

et donc,

$$[\phi] = [R_i^{N1} L^{N2} e^{N3} R^{3-(N1+N2+N3+N4)} d^{N5} j \mu_0] \quad (IV.5)$$

$$[\phi] = \left[\left(\frac{R_i}{R} \right)^{N1} \left(\frac{L}{R} \right)^{N2} \left(\frac{e}{R} \right)^{N3} \left(\frac{d}{R} \right)^{N5} R^3 j \mu_0 \right] \quad (IV.6)$$

D'après le théorème de Vashy Buckingham,

$$\phi = \mu_0 j R^3 f \left(\frac{R_i}{R}, \frac{e}{R}, \frac{L}{R}, \frac{d}{R} \right) \quad (IV.7)$$

Nous pouvons constater que le rayon du système va énormément influencer la valeur du flux. Cette dernière équation nous permet de mener une étude en fonction de facteurs de forme adimensionnels. Nous pouvons alors définir des plages de variation pour les différents paramètres de l'équation précédente. Nous avons alors défini des facteurs de forme, et nous pouvons étudier leurs variations, par exemple, dans les plages suivantes:

$$\frac{R_i}{R} : 0.5 \rightarrow 1$$

$$\frac{e}{R} : 10^{-3} \rightarrow 0.5.$$

$$\frac{L}{R} : 0.1 \rightarrow 5$$

$$\frac{d}{R} : 0.1 \rightarrow 2$$

Maintenant que nous connaissons les variables à étudier, voyons comment calculer le flux magnétique.

II.2.c Les paramètres imposés lors du dimensionnement

Pour des raisons pratiques nous allons imposer la valeur de certaines variables.

Tout d'abord, nous devons prendre en compte la caractéristique $B(j)$ du fil supraconducteur utilisé.

La figure suivante représente une approximation linéaire de la caractéristique du fil. C'est une première approximation, et il conviendra de la remplacer par la caractéristique réelle du fil utilisé.

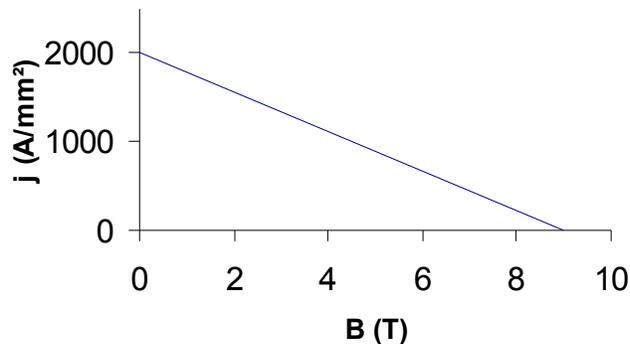


Figure 130: caractéristique $B(T)$ d'un fil supraconducteur.

Pour chaque forme, nous devons placer le point de fonctionnement du fil sur cette caractéristique. La valeur de la densité de courant n'est alors plus une variable et est imposée par le niveau d'induction.

Nous allons étudier les cas pour lesquels le rayon de l'inducteur est constant, c'est à dire dans les cas

où $R = R_i + e$.

Si $R > R_i + e$, la position des écrans supraconducteurs est au dessus des solénoïdes. Dans ce cas, nous risquons de réduire l'effet des écrans supraconducteurs et d'augmenter considérablement les fuites.

Les deux paramètres R_i et e ne sont pas indépendants.

Les variables restant à étudier sont donc R , e , L et d .

Le paramètre R sera limité par l'encombrement retenu pour l'inducteur. Nous choisirons R le plus grand possible étant donné que la valeur du flux varie avec le cube de R .

Le paramètre d est imposé par la largeur des écrans supraconducteurs, une fois le choix des écrans fait, nous devons trouver les valeurs de L et e pour lesquelles le flux magnétique à travers la surface S est maximum.

Le calcul du flux magnétique est alors effectué pour des valeurs de R et d données.

Le but est de trouver les grandes tendances d'évolution de la forme produisant le plus grand flux en fonction des variations de R et d.

Nous devons alors tracer une surface représentant la valeur du flux en fonction de e et L et déterminer graphiquement le maximum.

Nous obtenons pour d=5cm et R=10cm la surface suivante.

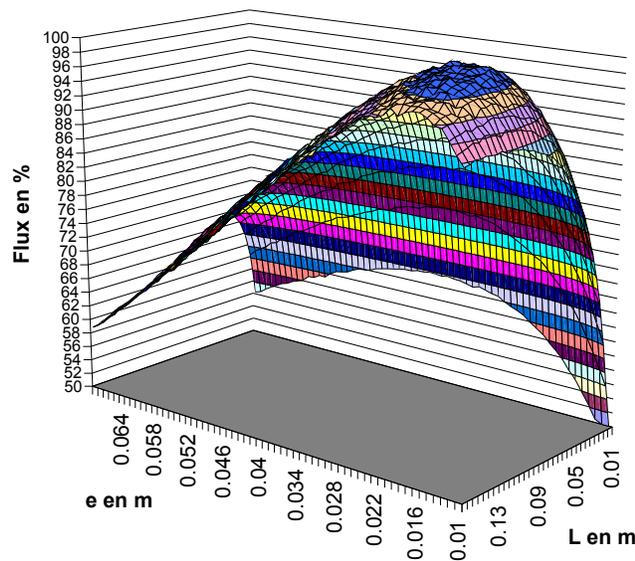


Figure 131: dépendance de la forme de l'inducteur sur le flux produit.

A partir de cette surface, nous pouvons aisément déterminer le maximum. Nous voyons que la zone supérieure de la courbe est relativement plate et étendue. Cette zone représente une variation de 2% du flux. Nous pourrions alors déplacer les valeurs de e et L dans cette zone sans trop dégrader la valeur du flux. Nous voyons sur la figure suivante que l'intervalle pour e et L pour 98% du flux maximum est:

$$0.015\text{m} < e < 0.028\text{m} \text{ et } 0.055 < L < 0.145.$$

Nous pouvons alors favoriser une forme plutôt plate ou allongée en fonctions des besoins sans perte au niveau du flux.

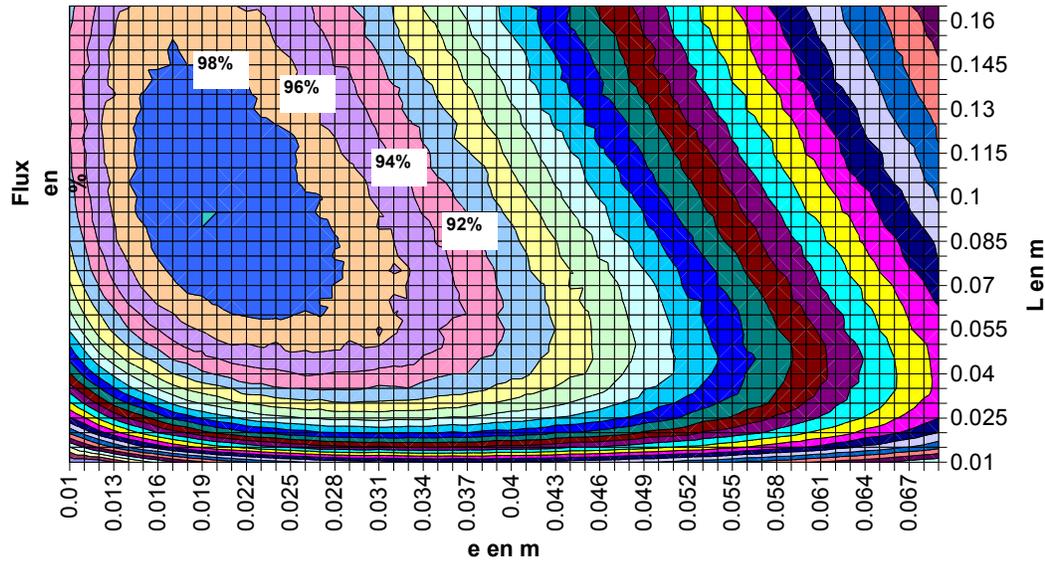


Figure 132: iso-valeurs du flux en fonction de e et L

La démarche pour la suite des calculs est alors:

- imposer R et d
- définir une plage de variation pour e et L
- pour chaque valeur de e et L
 - calculer l'induction maximale sur fil
 - trouver le point de fonctionnement du fil (calculer B et j)
 - calculer le flux magnétique

Voyons maintenant comment évolue la forme produisant le flux maximum en fonction du rayon extérieur et de la distance entre les solénoïdes.

II.2.d Influence de R sur la forme

Nous choisissons une distance d entre les bobines valant 5 cm. Nous allons étudier l'influence des valeurs du rayon extérieur R entre 4 cm et 10 cm.

La démarche est la suivante:

- Imposer la valeur de d
- Pour R valant de 4 à 10 cm
 - Imposer un domaine de variation pour les dimensions L et e
 - Tracer la surface représentant la valeur du flux en fonction de L et e
 - Déterminer graphiquement le maximum de la courbe

Nous obtenons alors la courbe suivante qui représente les facteurs de forme e/R et L/R en fonction de la valeur de R .

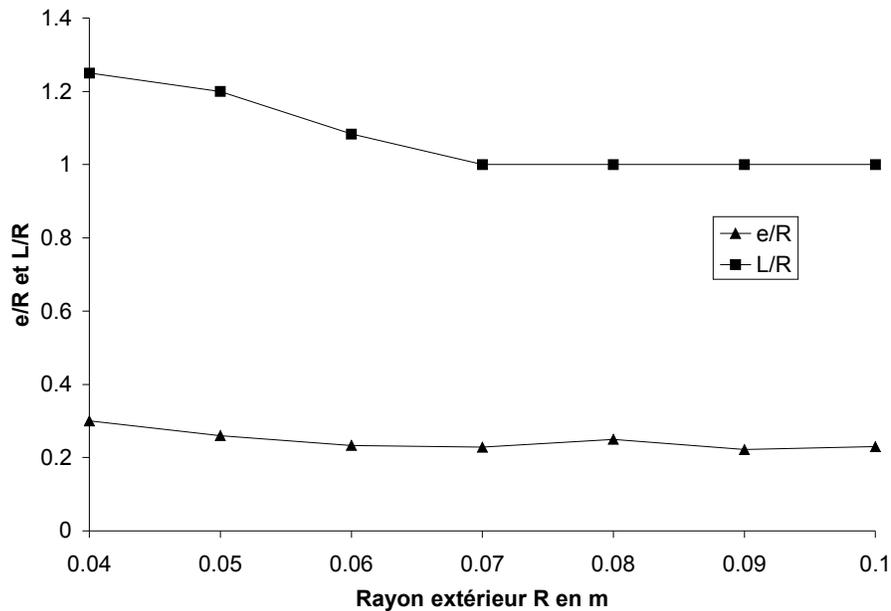


Figure 133: influence du rayon extérieur sur la forme optimale.

Nous constatons que le rapport L/R diminue avec l'accroissement de R. Plus R est élevé, plus la forme de l'inducteur est étroite.

Le rapport e/R reste sensiblement indépendant de la variation de R.

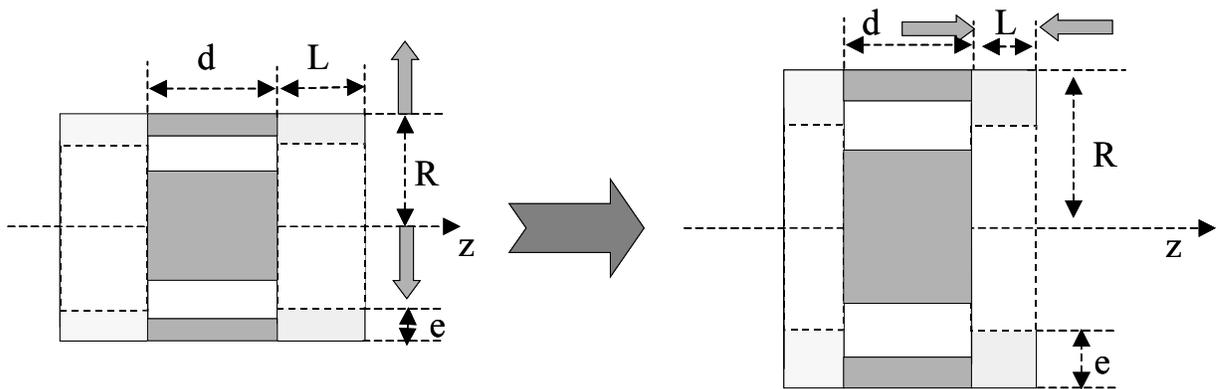


Figure 134: influence d'une variation du rayon extérieur sur la forme optimale.

II.2.e Influence de d sur la forme

Nous choisissons un rayon extérieur R constant. Nous allons étudier l'influence des valeurs de la distance d séparant les bobines entre 1 cm et 10 cm.

La démarche est la suivante:

- Imposer la valeur de R
- Pour d valant de 1 à 10 cm

- Imposer un domaine de variation pour les dimensions L et e
- Tracer la surface représentant la valeur du flux en fonction de L et e
- Déterminer graphiquement le maximum de la courbe

Nous obtenons alors la courbe suivante qui représente les facteurs de forme e/R et L/R en fonction de la valeur de d .

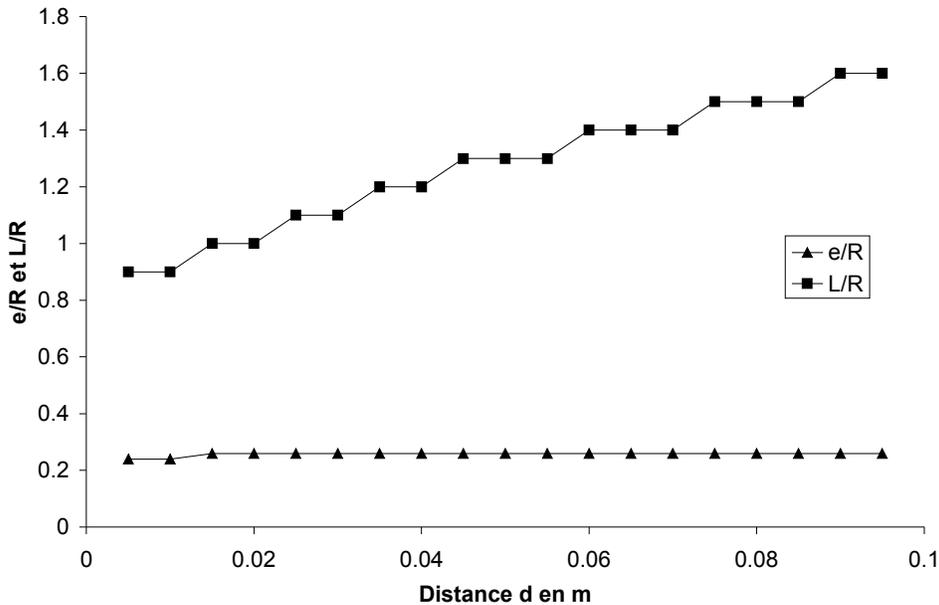


Figure 135: influence de la variation de d sur la forme optimale.

Nous constatons que le rapport L/R croît de manière quasi-linéaire avec l'augmentation de d . Donc, plus la distance d est importante, plus l'inducteur aura une forme allongée.

Le rapport e/R est quasiment indépendant de la variation de d .

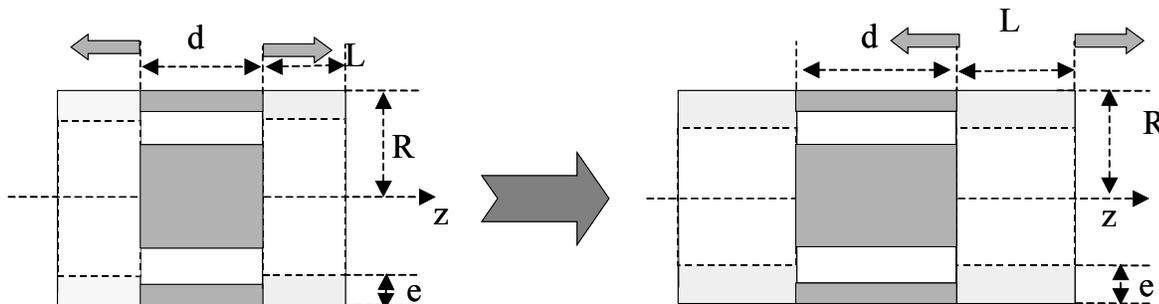


Figure 136: influence d'une variation de d sur la forme optimale.

II.2.f Conclusion

Nous avons décidé d'utiliser la valeur du flux à travers la surface délimitée par les deux bobines comme critère pour le dimensionnement de la partie produisant le champ magnétique.

L'analyse dimensionnelle a montré que la valeur de ce flux magnétique est proportionnelle au cube du rayon extérieur de l'inducteur. Il est clair que pour obtenir une induction élevée, nous devons travailler à rayon extérieur de grande taille.

Nous avons montré que plus le rayon extérieur est grand, plus la forme maximisant le flux est de faible longueur.

La valeur de l'épaisseur de bobinage varie dans les mêmes proportions que le rayon extérieur.

La distance d représente la longueur de la partie utile de l'inducteur, plus cette distance est élevée, plus l'inducteur est allongé.

L'épaisseur du bobinage est indépendante de la distance d .

Nous avons vu que si on admet une variation de 2% sur la valeur du flux par rapport au flux maximum on obtient alors des plages de variation pour l'épaisseur et la longueur des bobine permettant d'ajuster la forme ou de minimiser le volume de supraconducteur.

II.3 Étude des écrans

II.3.a Position du problème

Nous savons définir une forme de solénoïdes capable de générer un maximum de flux à travers la surface S définie précédemment. Nous devons maintenant étudier le comportement de l'ensemble solénoïdes + écrans magnétiques.

L'objet de ce dimensionnement concerne trois points:

- la forme et la position des écrans supraconducteurs en fonction des différentes contraintes liées au matériau.
- les problèmes engendrés par l'insertion d'écrans magnétiques dans la structure.
- la constitution des écrans magnétique.

II.3.b Forme et position des écrans

Nous avons défini des tendances pour la forme générale de l'inducteur. Nous devons maintenant réfléchir au positionnement des écrans et à la forme des écrans.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux écrans supraconducteurs d'un point de vue macroscopique, c'est à dire que nous considérons leurs effets sur les lignes de champs sans regarder la pénétration du champs dans le matériau. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, l'inducteur que nous étudions sert à générer une certaine répartition spatiale de l'induction magnétique de manière statique.

Mis à part les régimes transitoires, les écrans supraconducteurs ne verront pas de variation de champ. Ils ne verront donc qu'une montée en champ qui constituera la phase de blindage: c'est lors de la montée en champ que les courants vont se développer dans les écrans.

Une fois le champ stabilisé, les courants dans les écrans vont être en régime établi jusqu'à une prochaine variation de champ. Il est clair qu'une variation de la valeur du champ extérieur va engendrer des pertes dans le matériau et, de part son comportement hystérétique, la qualité du blindage peut se voir diminuer.

Donc, si nous considérons le matériau supraconducteur comme étant parfaitement diamagnétique, le contour des écrans est alors une ligne de champ. L'objectif des écrans est de diriger les lignes de champs et donc d'augmenter la valeur du flux magnétique.

D'un point de vue mécanique, l'idéal serait d'utiliser des écrans suivant la forme cylindrique de l'inducteur comme indiqué sur la figure suivante.

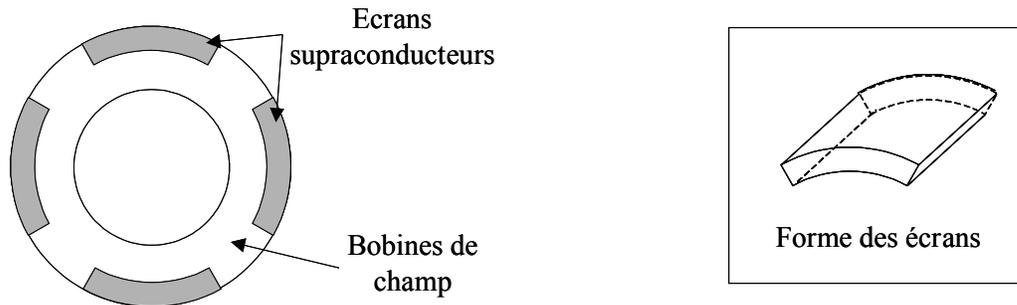


Figure 137: coupe de l'inducteur avec des écrans en forme de tuille.

Cependant, il est difficile d'obtenir des supraconducteur ayant un fort pouvoir de blindage magnétique avec des formes quelconques. Comme nous l'avons présenté dans le premier chapitre, les matériaux utilisables pour cette application sont des céramiques en mono-domaine auxquels il est difficile de donner une forme arrondie de plus l'anisotropie du matériau peut poser des problèmes en terme de développement du courant.

Nous proposons donc de positionner des écrans supraconducteurs ayant la forme de plaques plates suivant un octogone régulier inscrit dans le cercle dS , comme indiqué sur la figure suivante.

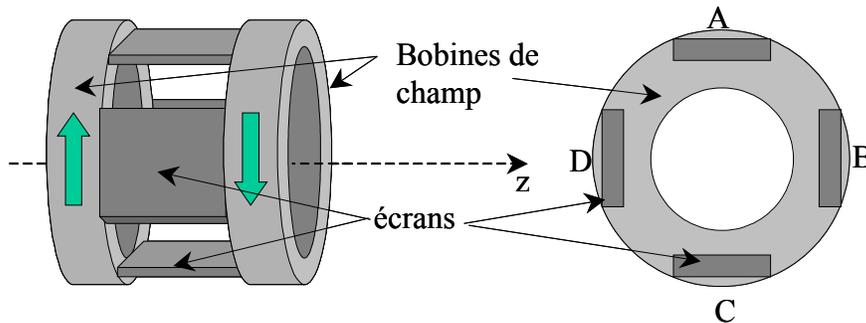


Figure 138: distribution des écrans de forme plate.

Il est clair qu'une partie du champ magnétique produit par les bobines de champ va passer au dessus des écrans au niveau des conducteurs situés aux points A, B, C et D. Cette structure va générer quelques fuites que nous quantifierons un peu plus loin.

II.3.c Problèmes engendrés par l'insertion des écrans

Le système sans les écrans supraconducteurs génère une champ indépendant de la position angulaire. En plaçant des éléments supraconducteurs massifs entre les bobines, nous allons réaliser un guidage des lignes de champ, c'est à dire que nous allons modifier la répartition spatiale de l'induction. Le schéma suivant montre les zones dans lesquelles l'élévation de l'induction va poser problème.

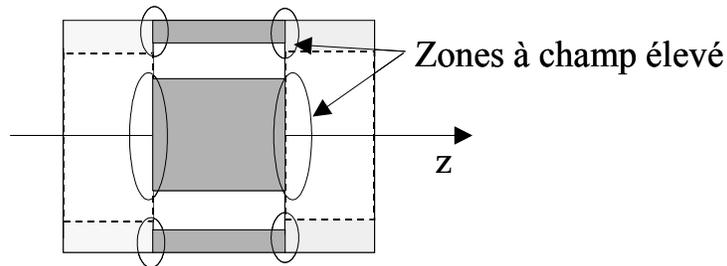


Figure 139: accroissement du champ sur fil au niveau des écrans

Nous voyons qu'une partie du bobinage supraconducteur se trouve exposé à une induction magnétique de valeur plus importante qu'avant la mise en place des écrans. Nous serons donc amenés à surdimensionner le fil.

Les écrans supraconducteurs vont développer des courants qui vont circuler sans s'amortir. Lors de régimes transitoires ou d'apport ponctuel d'énergie, ces écrans peuvent subir des instabilités magnéto-thermiques engendrant des sauts de flux. Ces brusques variation de l'induction au niveau des écrans peuvent générer une transition locale des bobines de champ. Nous devons porter une attention particulière à la stabilité des écrans massifs.

II.3.d Constitution d'écrans magnétiques de grande taille.

La constitution des écrans magnétiques relève de l'étude même des matériaux utilisables. Le matériau va dépendre fortement de la température de travail à laquelle nous désirons travailler.

La température de l'hélium liquide permet d'avoir un environnement de travail relativement simple, il ne nécessite pas de régulation de température. Le système à tester peut être plongé dans un bain d'hélium à 4.2 K.

Les matériaux possédant de bonnes caractéristiques de blindage et utilisables à cette température, sont l'YBaCuO et le MgB₂.

Nous avons vu que le MgB₂ souffrait d'importantes instabilités magnéto-thermique à 4.2 K et par conséquent était inutilisable pour une application en blindage magnétique.

A 4.2 K, nous devons utiliser de l'YBaCuO en mono-domaine. Ce matériau peut subir des sauts de flux mais reste relativement stable dans la mesure où le champ extérieur ne varie pas trop vite (Cf chapitre 1). De plus, la décroissance des courants due au phénomène de « flux creep » est négligeable. Le problème principal de ce type de matériau est sa taille limitée. En effet, les mono-domaines ne peuvent pas dépasser une dizaine de centimètres de diamètre, ce qui peut devenir un handicap si on choisit de réaliser un inducteur fonctionnant avec des écrans de grandes tailles. Différentes structures peuvent être considérées afin de pallier ce problème.

- l'assemblage de mono-domaines :

Si nous assemblons plusieurs mono-domaines comme indiqué sur la figure suivante, des fuites entre les domaines sont inévitables. En effet, les courants permettant de s'opposer au champ dans ces zones frontières ne peuvent pas se boucler à cause du contact résistif entre les éléments supraconducteur (trait en pointillés). La figure suivante représente quatre pastilles supraconductrices accolées ainsi que les différentes boucles de courant pouvant se former afin de s'opposer au champ extérieur.

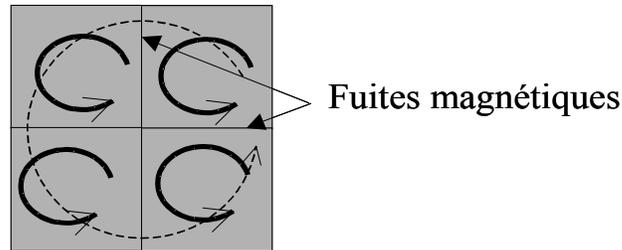


Figure 140: ajustement de pastilles supraconductrices

Nous pouvons alors considérer une structure sur deux couches décalées permettant de réduire les fuites entre les mono-domaines.

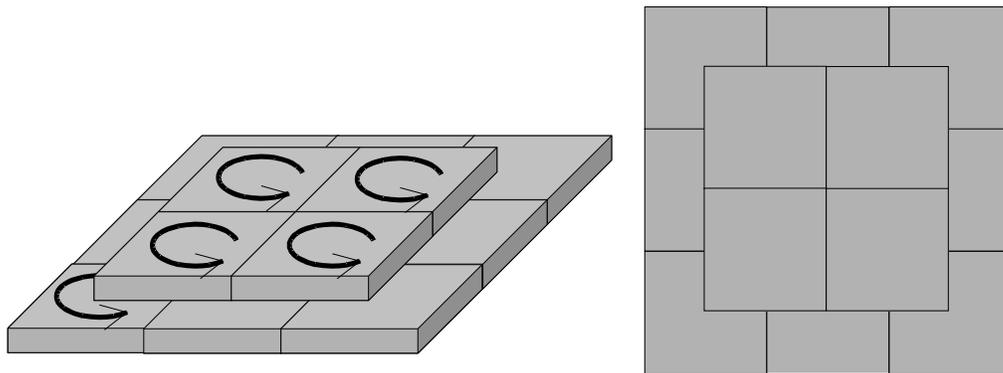


Figure 141: empilage de pastilles supraconductrices pour la réalisation d'écrans de grande taille.

Nous pouvons alors constater que les courants de la couche supérieure vont s'opposer aux fuites de la couche inférieure.

Cette structure pose tout de même un problème au niveau de la tenue mécanique et demande à être testée expérimentalement.

- Les structures multicouches:

D'après une étude réalisée sur l'YBaCuO au laboratoire CRISTMA à Caen et au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée de l'ENS Paris, il serait plus juste de parler de courant critique plutôt que de densité de courant critique. En effet, il semblerait que la densité de courant critique soit directement proportionnelle à l'inverse de l'épaisseur de l'élément supraconducteur [$j_c (1/e)$]. Cette loi est vérifiée pour des épaisseurs allant des couches minces ($0.1 \mu\text{m}$) aux monocristaux (2 mm).

De là, vient l'idée d'utiliser des écrans feuilletés dans lesquels sont alternées des couches supraconductrices et des couches de substrat. Nous pourrions alors obtenir des écrans de grande capacité de blindage équivalents à plusieurs pastilles supraconductrices empilées.

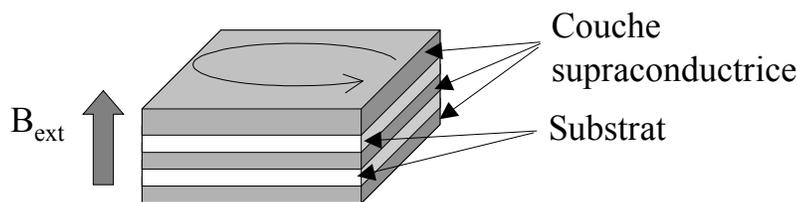


Figure 142: structure multicouche pour la réalisation d'écrans de grande taille.

Cette structure est très intéressante, car les couches minces supraconductrices peuvent être déposées sur des grandes surfaces. Les capacités de blindage et la stabilité de cette structure demandent à être étudiées expérimentalement.

III ETUDE DE L'INDUIT

III.1 Position du problème

Nous avons défini un inducteur homopolaire à huit pôles, nous devons maintenant étudier quel type d'induit pourrait permettre de créer du couple électromagnétique.

Il est clair que ce type de machine n'a d'intérêt que dans le cas où l'induction générée par l'inducteur est élevée, c'est à dire bien au delà de la saturation du fer.

Nous ne pourrions envisager qu'un induit sans encoche ferromagnétiques. Une carcasse ferromagnétique sera tout même nécessaire pour assurer la fermeture locale des lignes de champ.

III.2 Choix du type d'induit

Le problème majeur pour la constitution de l'induit est que l'inducteur possède une seule polarité, le champ produit par l'induit doit donc lui aussi posséder une seule polarité afin de créer du couple. L'interaction doit donc s'effectuer comme sur la figure suivante.

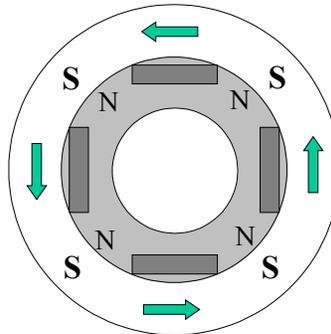


Figure 143: pôles magnétiques de l'inducteur.

Cette configuration peut être réalisée par une alimentation de type « pas à pas », les enroulements sont alimentés judicieusement en fonction de la position relative de l'inducteur par rapport à celle de l'induit. Cette configuration permet d'obtenir en permanence l'orthogonalité entre les champs rotorique et statorique et donc de produire un couple électromagnétique optimal.

III.3 Modélisation de l'induit

Nous pouvons représenter une bobine d'induit très schématiquement par un solénoïde allongé.

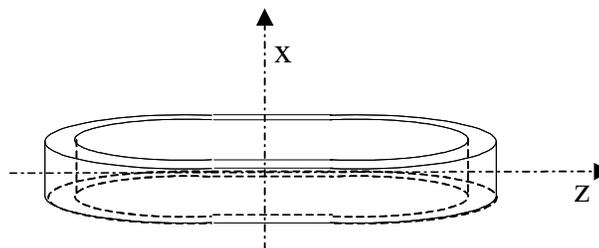


Figure 144: schéma d'une bobine élémentaire.

Nous devons répartir les bobines formant l'induit autour de la zone utile de l'inducteur, nous réalisons alors une distribution de conducteurs représentée très schématiquement sur la figure suivante.

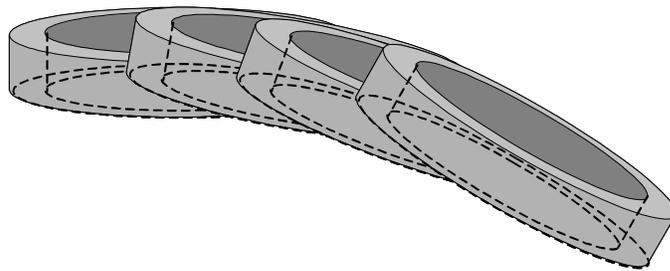


Figure 145: répartition des bobines élémentaires.

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'un solénoïde pouvait être modélisé en Coulombien par deux surfaces chargées. Si nous considérons une bobine comme étant infiniment mince, le courant y circulant peut être considéré comme une densité superficielle de courant K , sa modélisation est la suivante:

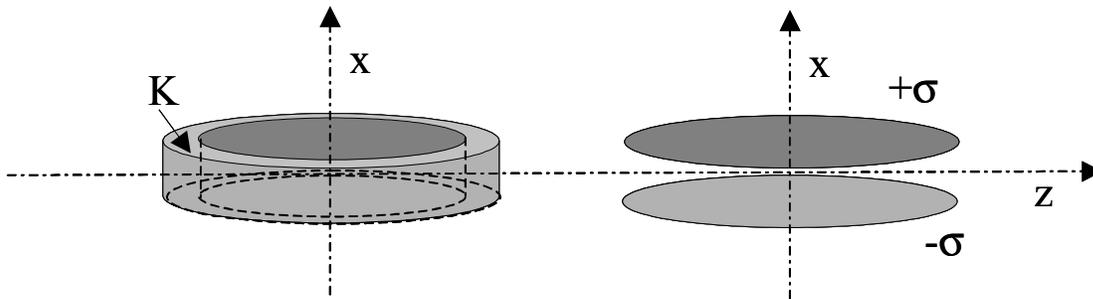


Figure 146: modélisation d'une bobine élémentaire.

La densité superficielle de charges magnétiques fictives σ équivalente vaut:

$$\sigma = \mu_0 K(t)$$

La répartition des bobines peut alors se modéliser comme suit:

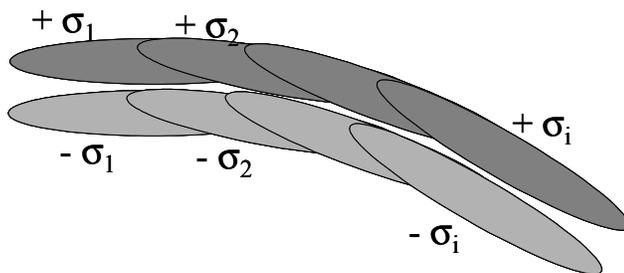


Figure 147: modélisation de la répartition de bobines.

Nous voyons que nous pouvons simplifier la modélisation présentée ci-dessus en la remplaçant par deux surfaces concentriques chargées par une densité de charges magnétiques dépendant du temps et de la position angulaire.

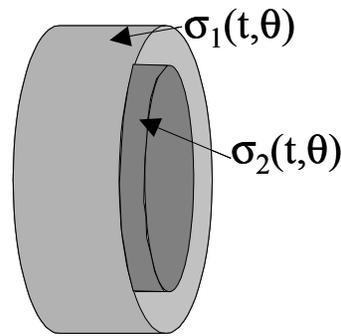


Figure 148: modélisation de l'induit.

La valeur des densités de charge est calculée en additionnant les différentes densités se superposant sur la figure 147.

IV RÉSULTATS NUMÉRIQUES

IV.1 Problème et équations

IV.1.a Dimensions

Nous devons tout d'abord définir les dimensions d'un objet à étudier. Nous avons vu que plus le diamètre de l'inducteur était grand, moins il était long. Une forme se rapprochant de celle d'une roue peut être intéressante, dans le domaine du transport par exemple.

Nous fixons le diamètre extérieur de l'inducteur à 0.1 m, la longueur des écrans à 0.05 m.

Partant de ces grandeurs, la forme donnant le flux magnétique maximum à travers la surface S nous impose la longueur des bobines, l'épaisseur du bobinage et la valeur de la densité de courant.

Nous avons vu que nous pouvions ajuster la forme de l'inducteur en considérant la zone correspondant à 98% du flux maximum. Nous choisissons alors les valeurs de e et L correspondant à 98% du flux maximum et donnant une forme la plus plate possible.

Nous obtenons alors:

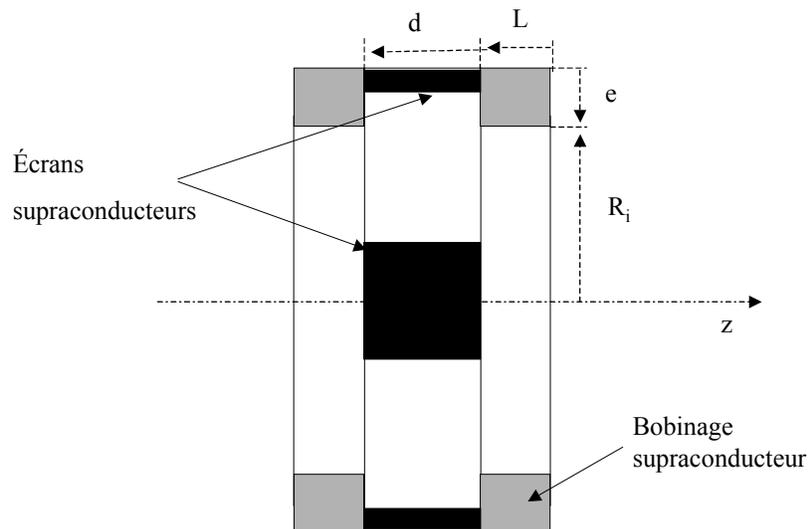


Figure 149: système étudié par calcul numérique.

Avec,

d (cm)	R_{ext} (m)	R_i (m)	e (m)	L (m)	J (A/m ²)
0.05 m	0.1 m	0.075 m	0.025 m	0.03 m	$620 \cdot 10^6$

Pour la forme présentée plus haut, le champ maximum sur fil est de 6,2 T. Nous pouvons tracer la valeur de B entre les bobines, à l'endroit où se trouveront les écrans afin de déterminer le profil du champ qui sera concentré.

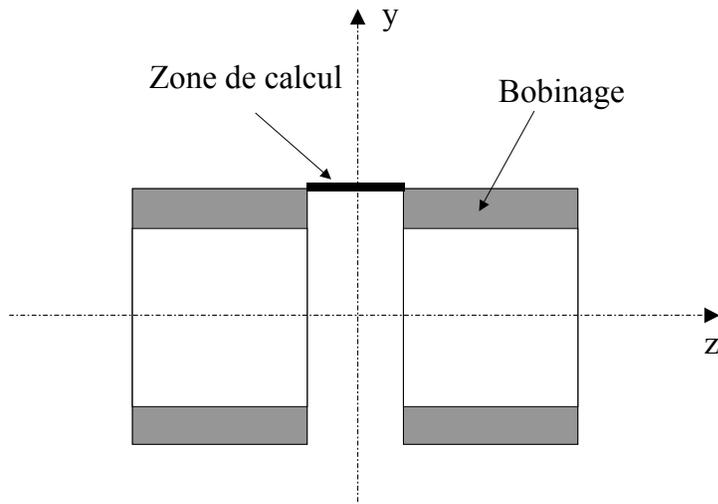


Figure 150: zone de calcul du champ avant concentration

Ce qui donne

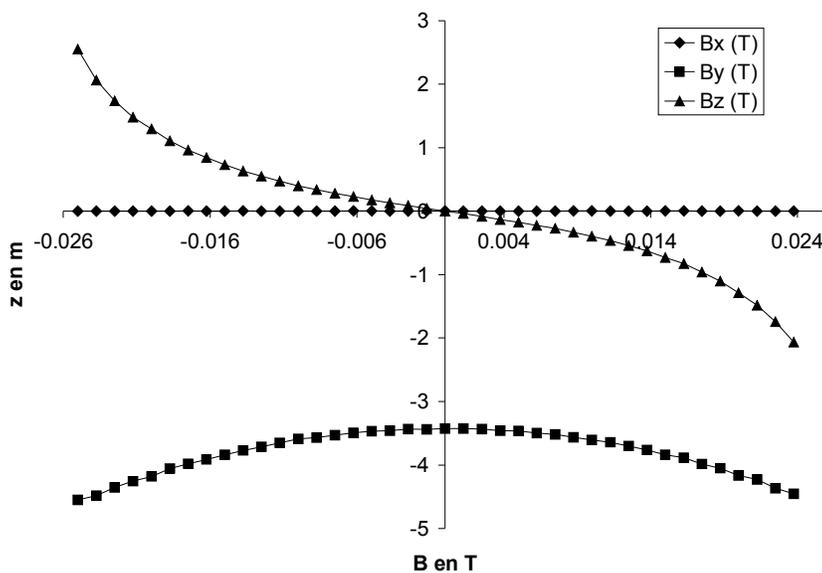


Figure 151: induction magnétique entre les bobines avant concentration.

A mi-distance des solénoïdes, l'induction radiale mesure 3,4 T. La composante de B suivant l'axe z prend des valeurs importantes lorsqu'on se rapproche des bobines. Ceci est dû au fait que la forme choisie n'est pas la forme optimale exacte.

IV.1.b Équations à résoudre

La modélisation de l'inducteur ainsi que les équations à résoudre ont été détaillées dans le chapitre 2.

Le domaine de calcul est un cube de $0.4\text{ m} * 0.4\text{ m} * 0.4\text{ m}$.

Nous avons choisi un pas de discrétisation égal à $5 * 10^{-4}\text{ m}$. La longueur du domaine de calcul est représenté par 800 points.

Le système possède donc $512 * 10^6$ inconnues.

Nous pouvons constater qu'un tel système serait très délicat à résoudre à l'aide d'une méthode aux différences finies. La méthode de Monte-Carlo présentée dans la chapitre 2 est donc tout à fait adaptée à la résolution du problème.

IV.2 Calcul de l'induction

L'objectif du calcul est de déterminer la répartition angulaire de l'induction produite par l'inducteur. Nous pouvons donc tout d'abord nous limiter au calcul du potentiel dans la zone présentée sur la figure suivante.

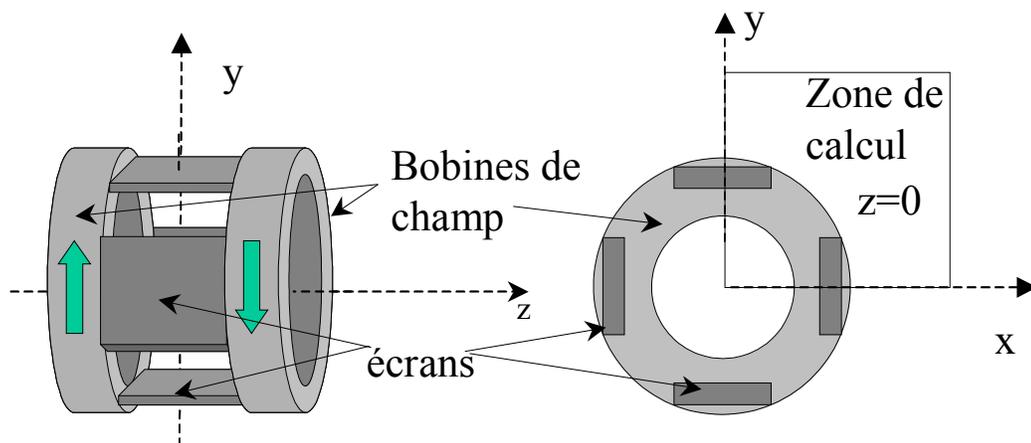


Figure 152: zone de calcul du potentiel scalaire

Nous ne pouvons pas calculer la valeur du potentiel à l'intérieur des écrans magnétiques, nous savons seulement que, d'après les hypothèses de calcul que nous nous sommes fixé, une induction nulle est imposée. Nous pouvons donc fixer une valeur constante pour le potentiel.

Nous choisissons de fixer $V=0$ à l'intérieur des écrans. De cette manière, les écrans vont être visibles lors du tracé du potentiel.

Nous utilisons 3000 cheminements aléatoires pour chaque point de calcul.

Tout d'abord nous effectuons le calcul au niveau du rayon extérieur de l'inducteur. Dans ce cas, l'induction varie de 0.5T à 5T.

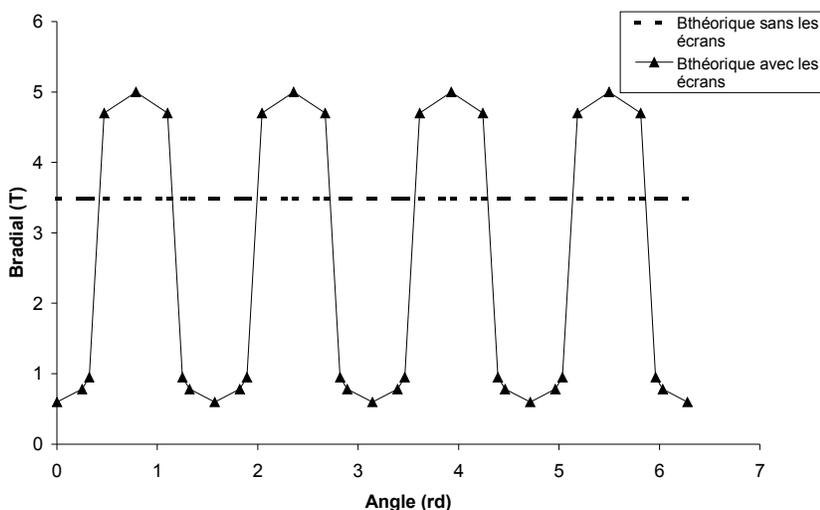


Figure 153: répartition angulaire de l'induction au niveau du rayon extérieur de l'inducteur

La valeur de l'induction produite par l'inducteur sans les écrans supraconducteurs est de 3.49T. Nous pouvons alors définir un facteur de concentration égal au rapport de la valeur du champ concentré et de celle du champ sans les écrans. Dans ce cas, le facteur de concentration théorique vaut:

$$F_c = \frac{B_{\text{concentré}}}{B_{\text{sans écran}}} = 1.43$$

L'induction a donc bien été concentrée.

En général, une machine supraconductrice possède un entrefer de grande taille. Celui-ci peut mesurer jusqu'à 1cm.

La figure suivante présente la répartition angulaire de l'induction radiale à un centimètre de l'inducteur.

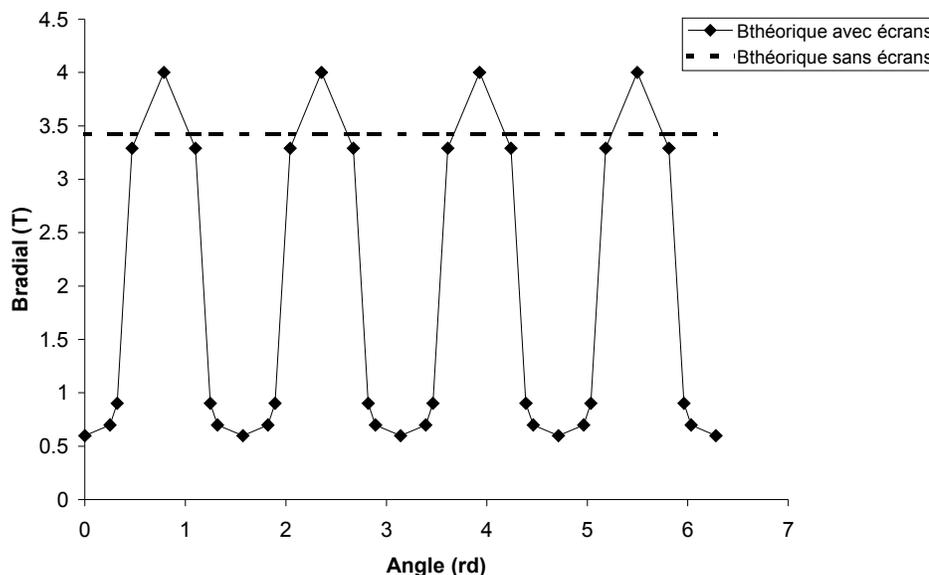


Figure 154: répartition angulaire de l'induction à $R=R_{\text{ext}}+1\text{cm}$

Nous pouvons constater que la valeur crête de l'induction a chuté d'environ 1T. Nous disposons tout de même d'une variation de 3.5T crête à crête au niveau de l'induction produite par l'inducteur.

A cette distance, le facteur de concentration du champ vaut 1.17.

IV.3 Calcul du couple

Il existe plusieurs façons de calculer le couple électromagnétique.

- Calcul à partir du potentiel scalaire magnétique.

La première méthode consiste à calculer l'énergie magnétique produite par l'induit et l'inducteur et de dériver cette énergie par rapport à la position angulaire du rotor par rapport au stator.

Nous avons effectué une modélisation coulombienne de la machine. Avec cette modélisation, le calcul de l'énergie est très délicat. En effet, l'énergie électromagnétique W s'écrit:

$$W = \iiint_{\Omega} \vec{H} \vec{dB} \quad (IV.10)$$

Ω étant tout l'espace. Cette équation peut être simplifiée en modélisation ampérienne et revient alors à une intégration sur le volume des conducteurs.

En modélisation Coulombienne, nous pouvons calculer le couple par l'intermédiaire de la force créée sur les conducteurs composant l'induit.

$$\vec{F} = - \iiint_v (\vec{P}_m \overrightarrow{grad}) \overrightarrow{grad} V \, dv \quad (IV.11)$$

Cette expression peut s'écrire:

$$\vec{F} = \iiint_v (\overrightarrow{grad} V \wedge \overrightarrow{rot} \vec{P}_m) \, dv - \iint_s (\overrightarrow{grad} V \wedge \vec{n} \wedge \vec{P}_m) \, dS \quad (IV.12)$$

avec v le volume des conducteurs, S la surface des conducteurs et \vec{P}_m le vecteur polarisation des bobines d'induit tel qu'il a été défini dans le chapitre 2.

- Calcul à partir de la répartition de l'induction.

Notre machine est une machine synchrone. Nous pouvons considérer une densité linéique de courant au niveau de l'induit de la machine. Cette densité K s'écrit alors:

$$K = \frac{q N_s k_d I}{\pi r_0} \quad (IV.13)$$

avec

q le nombre de phases

N_s le nombre de spires en série par phase

k_d le coefficient de bobinage

I le courant nominal

r_0 le rayon moyen du bobinage

Le couple électromagnétique peut alors s'écrire:

$$\Gamma = \sqrt{2} B_r^0 K \pi r_0^2 L \quad (IV.14)$$

Avec:

Γ le couple maximum

B_r^0 l'induction radiale à vide

L la longueur active

r_0 le rayon moyen du bobinage d'induit

La densité linéique pour un induit en cuivre est de l'ordre de 100 à 250 kA_{eff}/m. Pour un induit supraconducteur, elle est de l'ordre de 500 à 700 kA_{eff}/m.

Cette équation est valable pour une machine synchrone excitée. Notre inducteur étant homopolaire, nous devons prendre en compte l'amplitude de la variation de l'induction dans l'entrefer plus que la valeur de l'induction.

Nous avons alors $B_r^0 = \frac{\Delta B_i}{2}$ avec B_i la valeur de l'induction radiales au niveau de l'induit.

Nous considérons que la longueur active est la longueur des écrans.

Nous pouvons alors facilement réaliser une application numérique:

<i>Type d'induit</i>	<i>Couple théorique (Nm)</i>
Induit en cuivre K=250 kA _{eff} /m	1176
Induit supraconducteur K=700 kA _{eff} /m	3293

V CONCLUSION

L'amélioration permanente des matériaux supraconducteurs à haute température critique permet la réalisation d'écrans magnétiques de plus en plus efficaces.

Dans ce chapitre, nous avons présenté un exemple d'inducteur que nous pourrions fabriquer sans problème de nos jours.

Nous avons présenté une analyse dimensionnelle du flux magnétique qui a fait apparaître des facteurs de forme permettant l'étude des dimensions de l'inducteur.

Nous avons vu que plus le rayon extérieur de l'inducteur était grand, plus les bobines composant l'inducteur étaient courtes. La valeur du flux produit évolue avec le cube du rayon extérieur. Nous avons donc tout intérêt à utiliser un inducteur de grand diamètre.

La taille des écrans magnétiques est donc le facteur limitant les performances du moteur. Nous avons présenté deux structures qui pourraient permettre de fabriquer des écrans de grande dimension à partir de pastilles d'YBaCuO ou en multi-couches. Ces deux propositions demandent à être testées expérimentalement.

Nous avons montré par le calcul numérique que l'inducteur étudié pouvait produire une induction au niveau des conducteurs d'induit bien supérieure à celle des machines conventionnelles.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objet de ces travaux était de montrer la faisabilité d'un moteur supraconducteur utilisant une nouvelle structure d'inducteur. L'étude s'est donc portée principalement sur l'inducteur.

A partir du champ produit par deux solénoïdes en opposition, une variation angulaire de l'induction est générée par des écrans supraconducteurs.

Nous avons mené l'étude des capacités de blindage de l'YBaCuO, du BiSrCaCuO et du MgB₂ en nous appuyant sur une recherche bibliographique et sur des expériences réalisées au laboratoire.

Il en est ressorti que le BiSrCaCuO n'avait pas les propriétés requises pour notre application. Ce matériau est capable de blinder 40 mT à 4.2K, ce qui est dix fois mieux qu'à 77K. Ce résultat nous montre que la densité de courant inter-grains est faible et varie peu avec la température.

Le MgB₂ possède des propriétés très intéressantes à 20K, mais malheureusement est complètement instable à la température de l'hélium liquide. Nous avons dû éliminer ce matériau pour notre application à 4.2K.

L'YBaCuO est ressorti comme étant le candidat idéal malgré la limitation de taille du monodomaine. Ce matériau est capable de blinder une induction supérieure à 5T à 4.2K. C'est donc ce matériau que nous avons retenu pour la réalisation de l'inducteur.

Nous avons montré que l'association de la méthode de Monte-Carlo utilisant des chaînes de Markov et d'une méthode de régularisation permettait la résolution de l'équation de Poisson. Cette méthode probabiliste nous a permis de résoudre numériquement un problème possédant $512 \cdot 10^6$ inconnues, ce qui est impossible avec une méthode traditionnelle. Nous avons pu calculer le champ magnétique uniquement aux endroits intéressants.

Nous avons réalisé complètement un prototype d'inducteur à partir de deux bobinages en NbTi et de quatre pastilles d'YBaCuO. Nous avons alors pu valider le principe de fonctionnement du système.

Le système d'écrans magnétiques a concentré l'induction magnétique en accroissant sa valeur de plus de 30%.

Les écrans ont subi quelques sauts de flux. Pour remédier à ce problème, il conviendrait de travailler à une température plus élevée.

Les résultats expérimentaux ont confirmé le calcul numérique de la structure. L'expérience a ainsi pu valider notre outil de calcul.

Finalement, nous avons montré qu'il était préférable de travailler avec des écrans de grandes tailles de manière à augmenter la valeur du rayon extérieur de l'inducteur. Les bobines sont alors plus courtes et le niveau d'induction est augmenté.

Nous avons montré qu'avec des écrans de 5 cm de côté, il était possible de réaliser une variation angulaire d'induction de 0.5 à 4T au niveau des conducteurs de l'induit, ce qui représente une variation de champ presque deux fois supérieure à celle obtenue dans une machine conventionnelle.

Depuis le déroulement de ces travaux, les caractéristiques des matériaux ont bien évolué, et actuellement, il faudrait envisager un prototype fonctionnant à 20K avec des écrans en MgB_2 .

ANNEXES : RAPPELS SUR LES PROBABILITÉS

Cet annexe a pour objectif de faire un rapide résumé sur les notions de probabilité utilisées dans cette thèse.

Un événement aléatoire :

C'est un événement qui a une chance de se produire, la probabilité est la quantification numérique de cette chance. Bien que le résultat exacte d'un unique essai aléatoire soit imprévisible, un comportement global de ces événements peut être identifié après plusieurs essais. La théorie des probabilités traite les événements aléatoires de manière rigoureuse, c'est à dire que l'aléatoire ne signifie pas imprévisible mais régularité statistique. Des événements complètement imprévisibles ne montre pas de comportement particulier même pour un nombre d'échantillons élevé. Ils ne relèvent pas de la théorie des probabilités.

Un processus stochastique :

C'est une succession d'événements dont l'évolution est régit par des événements aléatoires.

Une variable aléatoire :

C'est une fonction dont le domaine est une série d'événements aléatoires, c'est à dire que la fonction prend la valeur x_i pour chaque événement i .

L'espérance d'une variable aléatoire :

C'est la moyenne stochastique de la variable aléatoire définie comme suit :

$$\langle x \rangle = E(x_i) = \sum_i p_i x_i$$

où p_i est la probabilité de l'événement x_i . Si $g(x)$ est une fonction de la variable aléatoire x , son espérance s'écrit alors :

$$E(g(x)) = \sum_i p_i g(x_i)$$

Nous pouvons définir la variance σ^2 de x comme suit :

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

La racine carrée de la variance est une mesure de la dispersion de la variable aléatoire.

La distribution Gaussienne :

Cette distribution tient une place prédominante dans les annales des statistiques. Ses origines proviennent du début du dix-huitième siècle quand les scientifiques ont remarqué que la courbe en forme de « cloche » réalisait très souvent une approximation des événements de multiples observations. Laplace (1749 – 1827) et Gauss (1777 – 1855) ont souligné les propriétés mathématique de cette distribution et en déduirent une théorie statistique.

Une distribution Gaussienne est définie sur l'axe x complet : $-\infty \leq x \leq \infty$ et a pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Le maximum de cette probabilité est donc :

$$f(x)_{max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

L'intégrale de cette probabilité est égale à 1.

La loi des grands nombres :

Supposons la suite de nombres x_1, x_2, \dots, x_n comme étant des valeurs indépendantes de la variable aléatoire x de moyenne stochastique $\langle x \rangle$ et de variance σ^2 . La moyenne de la suite s'écrit :

$$\hat{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

La loi des grands nombres dit que la moyenne de la suite converge vers la vraie moyenne stochastique quand N tend vers l'infini.

Le théorème de la limite centrale :

Bien que la théorie des grands nombres nous assure la convergence de la moyenne de la suite de N valeurs de x vers la moyenne stochastique de x pour N infini, le théorème de la limite centrale montre comment cette estimation est distribuée.

Si $\{x_i\}$ est un ensemble de N variables indépendantes de moyenne stochastique (espérance) $\langle x \rangle$ et de variance σ^2 tel que pour une valeur de N élevée, l'estimation :

$$\hat{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

tends vers une Gaussienne avec une moyenne

$$E(\hat{x}_N) = \frac{1}{N} N E(x) = E(x)$$

et une variance :

$$Var(\hat{x}_N) = Var\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} (N \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{N}$$

D'ordinaire, il est plutôt difficile d'estimer la variance avant de résoudre le problème. Néanmoins, la valeur théorique peut être remplacée par celle obtenue statistiquement comme suit :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_i x_i\right)^2$$

Ce théorème nous permet d'obtenir, conformément à la distribution Gaussienne, une évaluation de l'écart entre l'estimation et la valeur réelle. Il est ainsi possible de définir des intervalles de confiance avec un niveau de probabilité de 68,3%, 95,4% et 99,7%.

INDEX DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : évolution des températures critiques ($B=0T$)	13
Figure 2 : évolution des résistances électriques pour un conducteur (b) et un supraconducteur (a) en fonction de la température	13
Figure 3 : comparaison entre un conducteur parfait et un supraconducteur de type I lors d'un refroidissement sous champ	14
Figure 4: comparaison entre un conducteur parfait et un supraconducteur lors d'un refroidissement hors champ	15
Figure 5: illustration de champ critique pour un supraconducteur de type I	16
Figure 6: longueur de London	17
Figure 7 : courbe $B(H)$ pour un supraconducteur de type II	17
Figure 8 : constitution d'un vortex	18
Figure 9: caractéristique $E(J)$ des supraconducteurs de type II	20
Figure 10 : surface critique (T, H_c) délimitant l'état normal de l'état supraconducteur	20
Figure 11 : lignes de champs dans un rotor de moteur synchronreluctant [BAR99]	22
Figure 12 : lignes de champ dans le rotor d'un moteur synchronreluctant amélioré par deux écrans supraconducteurs [BAR99].	22
Figure 13: illustration de la loi de Lenz	24
Figure 14: principe du blindage par supraconducteur massif	24
Figure 15: plaque supraconductrice infiniment longue	25
Figure 16: modèle des états critiques	26
Figure 17: cycle de champ inférieur à B_{sat}	26
Figure 18: modèle des tas de sable pour un supraconducteur non saturé.	27
Figure 19: cycle de champ magnétique conduisant à la saturation du supraconducteur.	27
Figure 20: modèle des tas de sable pour un supraconducteur saturé en courant.	28
Figure 21 : induction dans un système de deux bobines en série.	28
Figure 22 : lignes de champ dans un système de deux bobines en série.	28
Figure 23 : lignes de champ après concentration de l'induction	29
Figure 24 : induction après concentration	29
Figure 25 : schéma expérimentale pour la concentration de flux	29
Figure 26 : résultats expérimentaux montrant la concentration de l'induction	30
Figure 27 : lignes de champ produites par deux solénoïdes en opposition	31
Figure 28 : vue de face des lignes de champ produites par deux solénoïdes en opposition	31
Figure 29 : répartition angulaire de B_r pour deux solénoïdes en opposition	32
Figure 30 : lignes de champs produites par l'inducteur (schéma)	32
Figure 31 : répartition angulaire de l'induction produite par l'inducteur	33
Figure 32 : structure de l'inducteur, vue en 3D	33
Figure 33 : schéma représentant le principe des sauts de flux dans les supraconducteurs[BRU]	35
Figure 34 : courbe de l'aimantation spécifique d'un monodomaine d' $YBaCuO$ présentant des sauts de flux. $1 \text{ emu/g} \rightarrow 1 \text{ A.m}^2 / \text{kg}$.	36
Figure 35 : schéma expérimentale pour tester le blindage d'une pastille en $BiSrCaCuO$	37
Figure 36 : courbe expérimentale représentant la capacité de blindage magnétique d'une pastille de $Bi-2223$	37
Figure 37: Cycle d'induction imposé à la pastille supraconductrice.	38
Figure 38 : cycle d'aimantation d'une pastille de $Bi-2223$	39
Figure 39 : schéma expérimentale permettant de piéger du flux dans un tube supraconducteur	39

Figure 40 : courbe expérimentale montrant le flux flow dans un tube de Bi-2223	40
Figure 41 : les deux pastilles de Bi-2212 utilisées	41
Figure 42 : la bobine de champ réalisée	41
Figure 43 : système permettant la caractérisation du Bi-2212 à 4,2K	42
Figure 44 : lignes de champ théoriques pour la manipulation de blindage des pastilles de Bi-2212	42
Figure 45 : résultats expérimentaux concernant le blindage du Bi-2212 à 4,2K	43
Figure 46 : schéma expérimentale pour le blindage magnétique	44
Figure 47 : courbe expérimentale de blindage d'un monodomaine d'YBaCuO à 77K	44
Figure 48 : induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO	45
Figure 49 : évolution de la valeur maximale de l'induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO en fonction de la température	46
Figure 50 : induction mesurée à la surface d'un	46
Figure 51 : aimantation d'un monodoamine	46
Figure 52 : induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO ayant subi un crack.	47
Figure 53 : induction piégée dans un monodomaine d'YBaCuO	47
Figure 54: répartition des courants après un crack.	47
Figure 55 : courbes d'aimantation du MgB2 à différentes températures. $1 \text{ emu/cm}^3 \leftrightarrow 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$ [DOU01]	48
Figure 56 : résumé des capacités de blindages des différents matériaux présentés	49
Figure 57: représentation d'un aimant.	56
Figure 58: modélisation d'un aimant.	57
Figure 59: représentation du solénoïde	58
Figure 60: modélisation d'un solénoïde.	60
Figure 61: description d'un système comportant un élément ferromagnétique.	61
Figure 62: modélisation d'un système comportant des éléments supraconducteurs.	62
Figure 63: Représentation d'un système comportant des supraconducteurs	62
Figure 64: modélisation d'un système comportant un élément supraconducteur.	63
Figure 65: structure de l'inducteur 8 pôles.	64
Figure 66: modélisation de l'inducteur.	64
Figure 67: représentation du système pour le calcul.	65
Figure 68: expérience de l'aiguille servant à estimer π .	66
Figure 69: exemple de système à résoudre.	70
Figure 70: déplacement d'une particule sur le maillage.	72
Figure 71: condition de passage entre deux milieux de perméabilité différentes	76
Figure 72: exemple de calcul MCMC pour un système 2D.	78
Figure 73: schéma d'un solénoïde.	79
Figure 74: système pour l'étude de la convergence de la méthode de calcul.	79
Figure 75: erreur relative en fonction du nombre de particules. $1 < N < 10000$	80
Figure 76: erreur relative pour un grand nombre de particules. $170000 < N < 200000$	80
Figure 77 : influence du pas de discrétisation sur le bruit de calcul	81
Figure 78: mise en évidence du bruit sur calcul. Comparaison avec la valeur analytique.	83
Figure 79: dérivation directe du potentiel.	84
Figure 80 : approximation polynomiale du potentiel.	84
Figure 81 : estimation de l'induction à partir de l'approximation polynomiale du potentiel.	85
Figure 82: représentation fréquentielle de la dérivée du potentiel.	85
Figure 83 : estimation du gradient de V par convolution avec une gaussienne avec $N=7$	86
Figure 84 : estimation de l'induction par convolution avec une gaussienne avec $N=70$	86

Figure 85: probabilité pour que H soit solution connaissant V	88
Figure 86: courbe en L	91
Figure 87: estimation du potentiel avec la méthode L2	92
Figure 88: estimation de l'induction avec la méthode L2	92
Figure 89: contribution des éléments de [H] dans le terme de régularisation	93
Figure 90: contribution de la rupture dans la fonction coût.	94
Figure 91: estimation du potentiel avec la méthode Lp.	95
Figure 92: estimation de l'induction avec la méthode Lp.	95
Figure 93: monodomaine d'YBaCuO	103
Figure 94: définition des grandeurs pour le calcul du rayon extérieur	104
Figure 95: variables pour le dimensionnement.	105
Figure 96: illustration de la loi de Biot-Savart	106
Figure 97: représentation d'un solénoïde.	106
Figure 98: valeur du flux en fonction de e et L	107
Figure 99: forme retenue pour l'inducteur	108
Figure 100: caractéristique J(B) du fil supraconducteur	108
Figure 101: zone de calcul du champ sur fil	109
Figure 102: module de l'induction dans le solénoïde	109
Figure 103: zone de calcul du champ avant concentration	110
Figure 104: induction magnétique entre les deux bobines	111
Figure 105: calcul des efforts entre deux densité de courant	111
Figure 106: énergie d'interaction des deux bobines	112
Figure 107: force de répulsion des bobines en fonction de la distance d	112
Figure 108: forces de répulsion entre les deux bobines	113
Figure 109	114
Figure 110: forces appliquées aux écrans	115
Figure 111: protection des bobines supraconductrices	117
Figure 112: principe de fonctionnement de la sonde à effet Hall	118
Figure 113: sonde LHPNU utilisée	118
Figure 114: matériel pour l'étalonnage des sondes à effet Hall	120
Figure 115: support de sonde pour l'étalonnage	121
Figure 116: courbe d'étalonnage de la sonde S1	121
Figure 117: répartition des sondes	123
Figure 118: induction entre les bobines avant concentration	123
Figure 119: représentation d'un cryostat hélium.	126
Figure 120: diagramme d'ensemble du système	127
Figure 121: répartition angulaire de l'induction mesurée	128
Figure 122: induction mesurée derrière les écrans	129
Figure 123: saut de flux mesuré sur un écran	130
Figure 124: modélisation coulombienne du système	130
Figure 125: zone de calcul du potentiel magnétique	132
Figure 126: potentiel scalaire magnétique sur le domaine de calcul	132
Figure 127: comparaison calcul / expérience	133
Figure 128: structure de l'inducteur.	137
Figure 129: variables pour le dimensionnement.	138
Figure 130: caractéristique B(T) d'un fil supraconducteur.	140
Figure 131: dépendance de la forme de l'inducteur sur le flux produit.	141

Figure 132: iso-valeurs du flux en fonction de e et L	142
Figure 133: influence du rayon extérieur sur la forme optimale.	143
Figure 134: influence d'une variation du rayon extérieur sur la forme optimale.	143
Figure 135: influence de la variation de d sur la forme optimale.	144
Figure 136: influence d'une variation de d sur la forme optimale.	144
Figure 137: coupe de l'inducteur avec des écrans en forme de tuille.	146
Figure 138: distribution des écrans de forme plate.	146
Figure 139: accroissement du champ sur fil au niveau des écrans	147
Figure 140: ajustement de pastilles supraconductrices	148
Figure 141: empilage de pastilles supraconductrices pour la réalisation d'écrans de grande taille.	148
Figure 142: structure multicouche pour la réalisation d'écrans de grande taille.	148
Figure 143: pôles magnétiques de l'inducteur.	149
Figure 144: schéma d'une bobine élémentaire.	149
Figure 145: répartitions des bobines élémentaires.	150
Figure 146: modélisation d'une bobine élémentaire.	150
Figure 147: modélisation de la répartition de bobines.	150
Figure 148: modélisation de l'induit.	151
Figure 149: système étudié par calcul numérique.	151
Figure 150: zone de calcul du champ avant concentration	152
Figure 151: induction magnétique entre les bobines avant concentration.	152
Figure 152: zone de calcul du potentiel scalaire	153
Figure 153: répartition angulaire de l'induction au niveau du rayon extérieur de l'inducteur	154
Figure 154: répartition angulaire de l'induction à $R=R_{ext}+1\text{ cm}$	154

NOMENCLATURE

<i>Variables</i>	<i>Définition</i>	<i>Unité</i>
α	Hyperparamètre	
λ_L	Longueur de London	m
ξ	Longueur de cohérence	m
δ	Pas de discrétisation spatial	m
Φ	Flux magnétique	Wb
ρ_m	Densité volumique de charges magnétiques fictives	A/m ²
λ_i	Variable aléatoire	
μ_0	Perméabilité du vide	
μ_i	Perméabilité du matériau i	
σ_m	Densité superficielle de charges magnétiques fictives	A/m
χ_k	Somme cumulée des sources rencontrées par une chaîne de Markov X	
\vec{B}	Vecteur induction magnétique	T
B_{\max}	Induction maximum	T
B_{sat}	Induction conduisant à la saturation du matériau	T
B_{se}	Induction sans les écrans supraconducteurs	T
B_{rc}	Induction radiale concentrée	T
C_{L2}	Critère composite pour la méthode L2	
C_{Lp}	Critère composite pour la méthode Lp	
D	Distance entre les solénoïdes de l'inducteur	m
$[D_k]$	Matrice de dérivation d'ordre k	
e	Epaisseur de bobinage d'un solénoïde	m
F_c	Facteur de concentration	
F_n	Terme d'adéquation aux données	
F_H	Terme de régularisation	
\vec{H}	Champ magnétique	A/m
H_c	Champ critique	A/m
$[H]$	Vecteur solution correspondant à la dérivée filtrée de $[V]$	
J_c	Densité de courant critique	A/m ²
J_{ext}	Densité de courant réelle	A/m ²
L	Longueur d'un solénoïde	m
\vec{M}	Aimantation du matériau	A/m

NOMENCLATURE

<i>Variables</i>	<i>Définition</i>	<i>Unité</i>
n	Bruit superposé aux données	
\vec{n}	Normales sortante à une surface	
N	Nombre de cheminements aléatoires	
p	Exposant du terme de régularisation généralisé	
\vec{P}_m	Vecteur polarisation	A/m
$p(x)$	Densité de probabilité de la variable x	
$p(H/V)$	Probabilité pour que H soit solution connaissant V	
$p_{i\pm}$	Probabilité de se déplacer dans la direction i en avant (+) ou en arrière (-)	
R	Résistance électrique	Ω
R_i	Rayon intérieur d'un solénoïde	m
$S_{x,y,z}$	Valeur de la source au point (x,y,z)	
$[S]$	Vecteurs contenant les termes sources	
T_c	Température critique	K
$[T]$	Matrice de transition contenant les valeurs $p_{i\pm}$	
$[T]_{A,B}$	Élément de la matrice $[T]$ correspondant aux points A et B	
$[T]^n$	Matrice $[T]$ à la puissance n	
V	Potentiel scalaire magnétique	A
$[V]$	Vecteur contenant les valeurs du potentiel scalaire	A
$[V]_A$	Élément du vecteur $[V]$ correspondant au point A	
X	Chaîne de Markov	
X_i	i -ème élément de la chaîne de Markov X	
W_e	Énergie électromagnétique	J
\hat{W}_e	Énergie électromagnétique estimée	J
$[Z]$	Matrice de dégradation	

Monsieur MASSON Philippe

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1
en GENIE ELECTRIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

n° 775

Nancy, le 7 Janvier 2003

Le Président de l'Université



Cl. BURLET

RESUME

Lors d'un refroidissement sous champ magnétique extérieur nul, les supraconducteurs à haute température critique ont la capacité d'expulser les lignes de champ de leur volume. Nous proposons d'utiliser cette propriété pour réaliser un inducteur de machine électrique utilisant des écrans supraconducteurs pour concentrer l'induction magnétique. L'étude théorique du système nécessitant l'utilisation d'outils de calcul numérique, nous avons utilisé une modélisation coulombienne du système et nous avons développé un logiciel de calcul du champ magnétique en 3D basé sur une méthode de Monte-Carlo à base de chaînes de Markov. Cette méthode probabiliste conduit à une erreur quantifiable de calcul que nous avons minimisé en appliquant une méthode de régularisation. Nous avons dimensionné et réalisé un inducteur modèle qui a ainsi permis de vérifier l'efficacité de la structure ainsi que les outils de calcul développés.

Mots clés : supraconductivité, écrans magnétiques, concentration de flux, méthodes de Monte-Carlo, chaînes de Markov, calcul de champ, régularisation, machine électrique, inducteur.

ABSTRACT

After a zero magnetic field cooling, high temperature superconductors are able to expel the flux lines out of their volume. We propose to use this property to make an inductor for electrical motors using superconducting shields to concentrate the flux density. As the theoretical study of this system requires the use of numerical calculation, we have developed a 3D magnetic field calculation tool based on a Markov chain Monte-Carlo method. This probabilistic method leads to a quantifiable error of calculation that we have minimized by using a signal regularization method. We have made the design of an inductor and have realized it. Thus, we have verified the efficiency of the structure and the efficiency of the calculation tools developed.

Key words : superconductivity, magnetic shields, flux density concentration, Monte-Carlo methods, Markov chains, magnetic field calculation, signal regularization, electrical motor, inductor.