



# Contribution à la synthèse de commandes référencées vision 2D multi-critères

Bo Gao

## ► To cite this version:

Bo Gao. Contribution à la synthèse de commandes référencées vision 2D multi-critères. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006. Français. NNT: . tel-00119789

**HAL Id: tel-00119789**

**<https://theses.hal.science/tel-00119789>**

Submitted on 12 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ■ Thèse

Préparée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

En vue de l'obtention du Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité : Automatique

Par **Bo GAO**

Contribution à la synthèse de commandes référencées vision 2D multi-critères

Soutenue le 25 octobre 2006 devant le jury :

|                     |                                 |
|---------------------|---------------------------------|
| Président           | J.L. CALVET                     |
| Directeurs de thèse | S. TARBOURIECH<br>P. SOUÈRES    |
| Rapporteurs         | M. DE MATHELIN<br>E.R. DE PIERI |
| Examineur           | J. DAAFOUZ                      |
| Invité              | J.M. BIANNIC                    |



# Résumé

Cette thèse concerne la synthèse de lois commande référencées vision 2D, multi-critères, pour le positionnement, par rapport à une cible fixe ou mobile, d'une caméra orientable en lacet en mouvement dans le plan horizontal. La fréquence et la qualité des informations délivrées par les caméras CCD qui équipent aujourd'hui les robots rend en effet possible l'alimentation directe des boucles de commande à partir des mesures visuelles de l'environnement. Le modèle considéré est défini dans le cadre du formalisme des fonctions de tâches et s'appuie sur la notion de torseur d'interaction qui permet de relier le mouvement de la caméra à la variation des indices visuels. L'objectif de ce travail est de proposer des lois de commandes permettant de stabiliser la caméra sur la base des informations bidimensionnelles issues de l'image, en tenant compte de l'incertitude sur la profondeur des points de la cible, des contraintes de visibilité et des limites en amplitude sur la vitesse et l'accélération de la caméra. La méthode proposée met en œuvre des techniques de commande avancées. Elle est basée sur la satisfaction d'une condition de secteur modifiée permettant de prendre en compte la saturation de l'accélération et la description du système en boucle fermée via un modèle polytopique des incertitudes. Cette approche permet de formuler des conditions constructives pouvant être exprimées sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs). Sur cette base, la résolution de problèmes d'optimisation convexe permet d'une part de maximiser la région de stabilité associée et d'autre part de déterminer le gain stabilisant du correcteur. La technique, initialement appliquée au problème du positionnement de la caméra par rapport à une cible fixe, est ensuite étendue au suivi d'une cible mobile en considérant la vitesse inconnue de la cible comme une perturbation bornée en énergie. L'intérêt de ce type de résultat, pour l'élaboration de stratégies de navigation d'un robot mobile par enchaînement de tâches référencées capteurs, est ensuite mis en évidence. Plusieurs exemples d'enchaînement de tâches sont tour à tour considérés et simulés sur la base d'un modèle de robot à roues muni de capteurs de proximité et supportant une caméra montée sur une platine orientable en azimut.

Mots clés : Asservissement visuel 2D, commande saturée, commande multi-critères, visibilité, perturbation  $\mathcal{L}_2$ , suivi de cible, fonction de tâche, enchaînement de tâches, robot mobile.





# Abstract

This thesis presents the design of multicriteria 2D image-based controllers to position a 3-DOF camera with respect to a fixed or mobile target. The camera is supposed to be supported by a robotic system which allows any horizontal translations and rotations about the vertical axis. The frequency and the quality of information delivered by the CCD cameras which equip today the robots make indeed possible the direct alimentation of the loops of control by visual measurements of the environment. The model considered is defined in the framework of the task function approach and is based on the concept of screw of interaction which allows linking up the movement of the camera with the variation of the visual indices. The objective of this work is to propose control laws to stabilize the camera on the basis of two-dimensional information resulting from the image, despite the uncertainty on the depth of the target points, the constraints of visibility and the limits on the camera velocity and acceleration. The proposed method implements advanced control techniques. It is based on the satisfaction of a modified sector condition to take into account the saturation of acceleration and the description of the closed-loop system via a polytopic model of uncertainties. This approach allows formulating constructive conditions which can be expressed in the form of Matrix Linear Inequalities (LMIs). From this formulation, some LMI-based convex optimization schemes are considered for computing the feedback gain that leads to the maximization of the size of the associated region of stability. The technique, initially applied to the positioning problem of the camera with respect to a fixed target, is then extended to track a moving target by regarding the unknown target velocity as a disturbance limited in energy. Then, the interest of the approach for designing control strategies, to link dynamically a sequence of sensor-based tasks for the problem of navigation of a mobile robot, is shown. Several examples of sequenced tasks are considered and simulated on the basis of a model of car-like robot equipped with the sensors of proximity and supporting a camera mounted on a directional pan-platform in azimuth.

Key words : 2D Visual servoing, saturation control, multicriteria control, visibility,  $\mathcal{L}_2$  disturbances, task sequencing, task function, target tracking, mobile robot.



# Avant-propos

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes du CNRS (LAAS), au sein du groupe Méthodes et Algorithmes en Commande (MAC). Je tiens tout d'abord à remercier Malik Ghallab, Directeur de Recherche au CNRS et directeur du laboratoire, de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je remercie également Jean-Louis Calvet, Professeur à l'université Paul Sabatier de Toulouse, d'avoir accepté de présider ce jury de thèse.

Je tiens à dire toute ma connaissance à Michel de Mathelin, Professeur à l'université Louis Pasteur de Strasbourg et l'École Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, Edson Roberto de Pieri, Professeur à l'université fédérale de Santa Catarina de Florianópolis en Brasil, pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse ainsi que leur lecture pertinente du manuscrit.

Merci également à Jean-Marc Biannic, Docteur Ingénieur à l'ONERA de Toulouse, Jamal Daafouz, Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Electricité et de mécanique de Nancy, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à Philippe Souères, Chargé de Recherche au CNRS, et Sophie Tarbouriech, Directeur de Recherche au CNRS, d'avoir accepté d'encadrer ces travaux, et pour la façon irréprochable dont ils l'ont dirigé. Leur disponibilité et leur ouverture pour toute discussion scientifique, leurs conseils, les encouragements qu'ils m'ont toujours donné ont été fondamentaux pour l'aboutissement de ma thèse pendant ces trois années.

Je remercie l'ensemble du groupe MAC, permanents, doctorants et stagiaires, et plus particulièrement ceux que j'ai souvent eu l'occasion de côtoyer pendant ma thèse, et dont j'ai pu apprécier les qualités humaines et scientifiques. Mes remerciements vont également à toutes les personnes qui, à un moment ou à un autre, m'ont apporté leur aide et contribué à rendre mon séjour au LAAS agréable. Merci à tous pour votre accueil et votre amitié.

Finalement, il me faut dire un grand MERCI à mon amour *Jie* qui était à mon côté

pendant toute cette période et qui a su me soutenir, m'encourager et même me supporter dans les moments les plus difficile ! Cette thèse est aussi un peu la sienne. Mes remerciements vont également à ma famille et mes proches qui m'ont supportée pendant les 30 dernières années sans se lasser... Sans eux, rien de tout cela n'aurait été possible...

A *Jie* et ma famille



# Table des matières

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Résumé</b>                                                           | <b>1</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                         | <b>3</b>  |
| <b>Avant-propos</b>                                                     | <b>5</b>  |
| <b>Table des matières</b>                                               | <b>8</b>  |
| <b>Table des figures</b>                                                | <b>12</b> |
| <b>Notations</b>                                                        | <b>17</b> |
| <b>Introduction</b>                                                     | <b>19</b> |
| <b>I Modélisation et état de l’art</b>                                  | <b>25</b> |
| I.1 Introduction . . . . .                                              | 25        |
| I.2 Modélisation des informations visuelles 2D . . . . .                | 27        |
| I.2.1 Modélisation de la caméra . . . . .                               | 27        |
| I.2.2 Notion de matrice d’interaction . . . . .                         | 29        |
| I.2.3 Cas d’un point 2D : equations du flot optique . . . . .           | 30        |
| I.2.4 Notion de liaison virtuelle . . . . .                             | 31        |
| I.3 Fonction de tâche et commande . . . . .                             | 32        |
| I.3.1 Le formalisme des fonctions de tâches . . . . .                   | 32        |
| I.3.2 Convergence exponentielle de la fonction de tâche . . . . .       | 35        |
| I.4 Présentation du cadre de travail de la thèse . . . . .              | 38        |
| I.4.1 Modélisation du robot . . . . .                                   | 39        |
| I.4.2 Satisfaction des contraintes dynamiques des actionneurs . . . . . | 44        |
| I.5 Conclusion . . . . .                                                | 46        |
| <b>II Concepts de base</b>                                              | <b>49</b> |
| II.1 Introduction . . . . .                                             | 49        |
| II.2 Quelques généralités sur les systèmes saturés . . . . .            | 49        |
| II.3 Invariance positive et contractivité . . . . .                     | 53        |
| II.4 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .                            | 54        |



|            |                                                                                                             |            |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| II.4.1     | Seconde méthode de Lyapunov . . . . .                                                                       | 54         |
| II.4.2     | Région d'attraction de l'origine . . . . .                                                                  | 55         |
| II.5       | Stabilité quadratique . . . . .                                                                             | 55         |
| II.6       | Stabilité locale . . . . .                                                                                  | 56         |
| II.7       | $\mathcal{L}_2$ -stabilité . . . . .                                                                        | 57         |
| II.8       | Conclusion . . . . .                                                                                        | 59         |
| <b>III</b> | <b>Tâches de positionnement du robot et d'orientation de la caméra</b>                                      | <b>61</b>  |
| III.1      | Introduction . . . . .                                                                                      | 61         |
| III.2      | Tâche d'asservissement en cap . . . . .                                                                     | 62         |
| III.2.1    | Modèle de la cible . . . . .                                                                                | 62         |
| III.2.2    | Définition d'une fonction de tâche d'asservissement en cap . . . . .                                        | 63         |
| III.2.3    | Description du problème . . . . .                                                                           | 65         |
| III.2.4    | Résultats préliminaires . . . . .                                                                           | 68         |
| III.2.5    | Conditions théoriques . . . . .                                                                             | 69         |
| III.2.6    | Problème d'optimisation . . . . .                                                                           | 73         |
| III.2.7    | Résultats numériques . . . . .                                                                              | 74         |
| III.2.8    | Conclusion . . . . .                                                                                        | 78         |
| III.3      | Tâches référencée vision de positionnement . . . . .                                                        | 78         |
| III.3.1    | Modèle de la cible . . . . .                                                                                | 78         |
| III.3.2    | Définition d'une fonction de tâche référencée vision de positionnement                                      | 80         |
| III.3.3    | Cible fixe . . . . .                                                                                        | 81         |
| III.3.4    | Cible mobile . . . . .                                                                                      | 92         |
| III.3.5    | Discussion . . . . .                                                                                        | 104        |
| III.4      | Conclusion . . . . .                                                                                        | 106        |
| <b>IV</b>  | <b>Application à la commande d'un robot mobile par enchaînement de tâches référencées capteurs</b>          | <b>107</b> |
| IV.1       | Introduction . . . . .                                                                                      | 107        |
| IV.2       | Modélisation du problème d'enchaînement de tâches référencées capteurs                                      | 109        |
| IV.3       | Enchaînement d'une tâche de suivi et d'une tâche référencée vision . . . . .                                | 112        |
| IV.3.1     | Utilisation d'une dynamique linéaire d'ordre supérieur pour la seconde tâche . . . . .                      | 115        |
| IV.3.2     | Utilisation de la loi référencée vision multi-critères pour la seconde tâche . . . . .                      | 122        |
| IV.4       | Enchaînement de tâches référencées vision . . . . .                                                         | 127        |
| IV.4.1     | Décomposition en tâches élémentaires . . . . .                                                              | 128        |
| IV.4.2     | Résultats de simulation : enchaînement dynamique des trois tâches élémentaires référencées vision . . . . . | 134        |
| IV.5       | Conclusion . . . . .                                                                                        | 140        |
|            | <b>Conclusions générales et perspectives</b>                                                                | <b>141</b> |

---

|          |                                             |            |
|----------|---------------------------------------------|------------|
| <b>A</b> | <b>Outils mathématiques</b>                 | <b>145</b> |
| A.1      | Introduction . . . . .                      | 145        |
| A.2      | Inégalités Matricielles . . . . .           | 145        |
| A.2.1    | Inégalités Matricielles Linéaires . . . . . | 145        |
| A.2.2    | Complément de Schur . . . . .               | 146        |
| A.2.3    | Lemme de majoration . . . . .               | 146        |
| A.2.4    | $\mathcal{S}$ -procédure . . . . .          | 147        |
| A.2.5    | Conditionnement d'une matrice . . . . .     | 148        |
| A.3      | Ellipsoïdes et polyèdres . . . . .          | 148        |
| A.3.1    | Ellipsoïdes . . . . .                       | 148        |
| A.3.2    | Polyèdres . . . . .                         | 149        |
| A.3.3    | Relations d'inclusion . . . . .             | 150        |
|          | <b>Références bibliographiques</b>          | <b>151</b> |



# Table des figures

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I.1    | Asservissement visuel 2D et 3D. Pour amener le repère de la caméra $R_C$ en $R_C^*$ , on utilise en asservissement visuel 2D des mesures $s$ extraites directement de l'image (à gauche). En asservissement visuel 3D, $r(t)$ représente la situation courante de la caméra par rapport à l'objet, estimée à l'issue d'une phase de traitement de l'information $s(t)$ dans l'image (à droite) . . | 27 |
| I.2    | Modèle sténopé ou pinhole de la caméra . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 28 |
| I.3    | Robot mobile muni d'une platine mobile orientable . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 39 |
| I.4    | Vue du robot superscout équipé d'une caméra orientable en lacet . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 46 |
| II.1   | Fonction saturation . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 51 |
| II.2   | Description de la non-linéarité $\phi(Kx)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 52 |
| II.3   | Représentation de $\mathcal{E}(\gamma) \subseteq \mathcal{S}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 57 |
| III.1  | Modèle de la cible et description des paramètres pour la tâche d'asservissement en cap . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 64 |
| III.2  | Schéma bloc du simulateur de la tâche d'asservissement en cap . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 75 |
| III.3  | Trajectoire du robot dans le repère de la scène $R$ (à gauche) et vitesses du robot (à droite) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 77 |
| III.4  | Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la scène $R$ (à gauche) et erreur de la tâche d'asservissement en cap (à droite) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 77 |
| III.5  | Evolution des indices visuels (à gauche) et description des composantes de la commande (à droite) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 78 |
| III.6  | Modèle de la cible et description des paramètres pour la tâche référencée vision de positionnement . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 79 |
| III.7  | Schéma bloc du simulateur de la tâche référencée vision de positionnement                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 90 |
| III.8  | Trajectoire du robot dans la scène (à gauche) et vitesses du robot (à droite)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 92 |
| III.9  | Evolution des indices visuels (à gauche) et erreurs des indices visuels (à droite) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 92 |
| III.10 | Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la scène $R$ (à gauche) et description des composantes de la commande (à droite) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 93 |

|        |                                                                                                                                                                                 |     |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| III.11 | Description du torseur cinématique $T_{E_2}$ du point $E_2$ de la cible par rapport au repère de la scène $R$ , exprimé dans le repère de la caméra $R_C$ . . . . .             | 94  |
| III.12 | Trajectoire du robot dans l'environnement (à gauche) et vitesses du robot (à droite) . . . . .                                                                                  | 104 |
| III.13 | Evolution des indices visuels (à gauche) et erreurs des indices visuels (à droite) . . . . .                                                                                    | 104 |
| III.14 | Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la scène $R$ (à gauche) et description des composantes de la commande (à droite) . . . . .               | 105 |
| IV.1   | Exemple de positionnement des capteur sur un robot à roues . . . . .                                                                                                            | 110 |
| IV.2   | Difféomorphisme local associé à la définition de chaque tâche . . . . .                                                                                                         | 110 |
| IV.3   | Structure différentielle dans l'espace $Q$ . . . . .                                                                                                                            | 111 |
| IV.4   | Robot mobile muni d'une platine mobile orientable . . . . .                                                                                                                     | 113 |
| IV.5   | Cible composée de 4 points en carrée . . . . .                                                                                                                                  | 115 |
| IV.6   | Trajectoire du robot dans le repère de la scène $R$ . . . . .                                                                                                                   | 117 |
| IV.7   | Evolution des indices visuels dans le plan image de la caméra . . . . .                                                                                                         | 118 |
| IV.8   | Vitesse linéaire du robot $v$ (à gauche), vitesse angulaire de la base mobile $\dot{\theta}$ (au centre), vitesse angulaire de la platine $\dot{\theta}_p$ (à droite) . . . . . | 118 |
| IV.9   | Visualisation de la seconde tâche $e_2(t)$ . . . . .                                                                                                                            | 119 |
| IV.10  | Visualisation de la dérivée de la seconde tâche $\dot{e}_2(t)$ . . . . .                                                                                                        | 119 |
| IV.11  | Fonctionnement de la deuxième tâche $e_2$ . . . . .                                                                                                                             | 121 |
| IV.12  | Bloc de la deuxième tâche $e_2$ . . . . .                                                                                                                                       | 122 |
| IV.13  | Visualisation de la dérivée seconde de la deuxième tâche $\ddot{e}_2(t)$ . . . . .                                                                                              | 122 |
| IV.14  | Visualisation de la dérivée de la deuxième tâche $\dot{e}_2(t)$ . . . . .                                                                                                       | 123 |
| IV.15  | Visualisation de la deuxième tâche $e_2(t)$ . . . . .                                                                                                                           | 123 |
| IV.16  | Vitesse linéaire du robot $v$ (à gauche), vitesse angulaire de la base mobile $\dot{\theta}$ (au centre), vitesse angulaire de la platine $\dot{\theta}_p$ (à droite) . . . . . | 124 |
| IV.17  | Trajectoire du robot dans le repère de la scène $R$ (à gauche) et Evolution des indices visuels dans le plan image de la caméra (à droite) . . . . .                            | 124 |
| IV.18  | Trajectoire du robot (à gauche) et vitesses du robot (à droite) . . . . .                                                                                                       | 126 |
| IV.19  | Evolution des indices visuels (à gauche) et de la tâche référencée vision $e_2(t)$ (à droite) . . . . .                                                                         | 126 |
| IV.20  | Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport à la scène (à gauche) et zoom sur les composantes de la commande pour la tâche référencée vision (à droite) . . . . . | 127 |
| IV.21  | Simulateur de l'enchaînement des trois tâches élémentaires . . . . .                                                                                                            | 136 |
| IV.22  | Trajectoire du robot dans le repère de la scène $R$ . . . . .                                                                                                                   | 137 |
| IV.23  | Vitesses du robot $\dot{q}$ (à gauche) et évolution du torseur cinématique $T$ de la caméra par rapport au repère de la scène $R$ (à droite) . . . . .                          | 138 |
| IV.24  | Evolution des indices visuels (à gauche) et évolution des composantes de la deuxième tâche $e_{2(i)}$ (à droite) . . . . .                                                      | 138 |

|       |                                                                                                                                                       |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| IV.25 | Descriptions de la commande saturante pour la première tâche (à gauche)<br>et descriptions de la commande saturante pour la deuxième tâche (à droite) | 139 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|



# Notations

|                           |                                                                                              |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\approx$                 | : approximativement égal.                                                                    |
| $\ll (\gg)$               | : très inférieur (supérieur) à.                                                              |
| $\in$                     | : appartient.                                                                                |
| $\notin$                  | : n'appartient pas.                                                                          |
| $\subset$                 | : contenu.                                                                                   |
| $\subseteq$               | : contenu ou égal.                                                                           |
| $\cap$                    | : intersection.                                                                              |
| $\forall$                 | : quel que soit.                                                                             |
| $\exists$                 | : il existe.                                                                                 |
| $\Longleftrightarrow$     | : est équivalent à.                                                                          |
| $\implies$                | : implique.                                                                                  |
| $\times$                  | : produit vectoriel.                                                                         |
| $\bullet$                 | : produit de torseurs.                                                                       |
| $\star$                   | : un bloc induit par symétrie.                                                               |
| $\mathbb{R}^n$            | : espace $\mathbb{R}^n$ .                                                                    |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$ | : espace des matrices réelles de dimension $n \times m$ .                                    |
| $\mathbb{R}^+$            | : espace réel positif.                                                                       |
| $\mathcal{C}$             | : ensemble des nombres complexes.                                                            |
| $Re(z)$                   | : partie réelle d'un nombre complexe.                                                        |
| $x_{(i)}$                 | : $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur $x$ .                                                  |
| $A_{(i)}$                 | : $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $A$ .                                                 |
| $A_{(i,j)}$               | : élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $A$ . |
| $A'$                      | : matrice transposée de $A$ .                                                                |
| $A^{-1}$                  | : matrice inverse de $A$ (pour $A$ carré et de rang plein).                                  |
| $A^*$                     | : matrice complexe conjuguée transposée de $A$ .                                             |
| $ A $                     | : matrice composée des valeurs absolues des éléments de la matrice $A$ .                     |
| $\ A\ $                   | : norme euclidienne de la matrice $A$ .                                                      |
| $A > (\geq) 0$            | : la matrice $A$ est définie (semi-définie) positive.                                        |
| $A < (\leq) 0$            | : la matrice $A$ est définie (semi-définie) négative.                                        |
| $A > (\geq) B$            | : matrice $A - B$ est définie (semi-définie) positive.                                       |
| $A < (\leq) B$            | : matrice $A - B$ est définie (semi-définie) négative.                                       |
| $x \succeq 0$             | : tous les éléments du vecteur $x$ sont non négatives.                                       |
| $x \succeq y$             | : inégalité élément à élément.                                                               |



|                  |                                                                       |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $Ker(A)$         | : noyau de la matrice $A$ .                                           |
| $\lambda_i(A)$   | : $i^{\text{ème}}$ valeur propre de $A$ .                             |
| $Tr(A)$          | : trace de la matrice $A$ .                                           |
| $\det(A)$        | : déterminant de la matrice $A$ .                                     |
| $rang(A)$        | : rang de la matrice $A$ .                                            |
| $D(x)$           | : matrice diagonale obtenue à partir du vecteur $x$ .                 |
| $I_n$            | : matrice identité d'ordre $n$ .                                      |
| $0_{n \times m}$ | : matrice de dimension $n \times m$ avec tous les éléments égaux à 0. |
| $0_n$            | : vecteur de dimension $n$ avec tous les éléments égaux à 0.          |
| $Co\{\cdot\}$    | : enveloppe convexe.                                                  |

# Introduction

En robotique mobile, les informations délivrées par les capteurs extéroceptifs sont d'un intérêt fondamental pour la perception et la commande. Elles permettent au robot de construire une représentation de son environnement et de se localiser, mais également de réguler son déplacement relativement à certains éléments caractéristiques de la scène, appelés amers. Parmi les capteurs usuellement embarqués sur un robot, la vision fournit des informations particulièrement riches. La fréquence et la qualité des données délivrées par les caméras CCD qui équipent aujourd'hui les robots, rend en effet possible l'alimentation directe des boucles de commande à partir des mesures visuelles de l'environnement. Cette approche, dite *commande référencée vision*, ou *asservissement visuel* constitue le domaine d'étude de cette thèse.

Initialement, les informations visuelles qui peuvent être extraites du plan image de la caméra sont bidimensionnelles. Cependant, différentes approches ont été proposées pour la définition des boucles de commande. L'asservissement visuel 2D consiste à définir l'erreur à réguler directement à partir d'informations planaires, telles que les coordonnées de points dans l'image. A l'opposé, l'asservissement visuel 3D repose sur une étape de reconstruction tridimensionnelle de la situation relative de la caméra par rapport à l'amer, basée sur la mesure d'informations bidimensionnelles extraites de l'image. Outre l'asservissement visuel 2D et 3D, des approches intermédiaires ont été proposées, telles que l'asservissement visuel  $2D\frac{1}{2}$  [71], [74], [23] ou d2D/dt [25], [26]. Dans le cadre de cette thèse, nous ne considérons que l'asservissement visuel 2D.

La définition d'une tâche robotique référencée vision 2D repose sur le choix d'informations visuelles adéquates et l'élaboration d'une loi de commande en boucle fermée sur ces informations. La première phase revient à définir une fonction d'erreur, la seconde à réguler cette erreur à zéro. Le formalisme des fonctions de tâches offre un cadre mathématique rigoureux pour la définition de telles fonctions d'erreurs [99]. Il permet également de définir un schéma simple pour l'élaboration de lois de commande. Les fonctions de tâches représentent une classe particulière de fonctions de sortie qui définissent localement un lien différentiel régulier avec le vecteur de coordonnées généralisées du robot. Cette approche, initialement développée pour la commande des bras manipulateurs [18], [34], a ensuite été étendue aux robots mobiles [90], [13]. Elle repose sur le calcul de la matrice d'interaction qui permet de relier la variation des informations visuelles dans l'image au mouvement de la caméra. Sur la base de ce formalisme, le schéma de commande usuellement considéré pour l'exécution de la tâche, consiste à imposer une décroissance

exponentielle de la fonction de tâche. Dans la pratique cependant, à cause de l'incertitude sur certains paramètres, le comportement du système en boucle fermée peut s'écarter fortement du comportement nominal et la stabilité peut être perdue. D'autre part, la faisabilité de la tâche robotique repose sur un ensemble de contraintes additionnelles, telles que la conservation de la visibilité de la cible, ou la limite de puissance délivrée par les actionneurs qui induit des bornes sur la vitesse et l'accélération de la caméra. Pour répondre à ce problème, plusieurs approches ont été proposées dans la communauté, dans le but de compléter le schéma nominal de l'asservissement visuel 2D.

L'utilisation de fonctions de Lyapunov, définies comme la combinaison de l'énergie cinétique du robot et d'une erreur quadratique dans l'image, a été proposée dans [61]. Cette approche, basée sur la connaissance du modèle dynamique du robot, permet d'assurer la convergence asymptotique locale du système en présence d'erreurs sur l'orientation de la caméra, d'incertitudes sur les paramètres intrinsèques de la caméra et de faibles distorsions de l'image. L'approche, initialement développée pour commander un bras manipulateur à partir d'un système de vision déporté, a ensuite été étendue au cas d'un système embarqué. Pour étendre le domaine de stabilité des lois d'asservissement visuel 2D, limitées par la présence de minima locaux, une approche basée sur la commutation entre différents potentiels a été proposée dans [50]. Des propriétés de stabilité robuste et la garantie d'évitement de minima locaux ont également été obtenues en utilisant la notion de coordonnée 2D étendue qui repose sur l'information de profondeur des points et un modèle estimé de la caméra [100]. Dans le cas où les configurations initiale et finale de la caméra sont éloignées, une simple consigne de convergence des indices visuels peut entraîner la perte de visibilité de la cible. Pour pallier ce problème, certains auteurs ont proposé de combiner le schéma de base de l'asservissement 2D avec des techniques de planification de trajectoires dans l'image [81]. L'approche proposée dans [118] permet de considérer simultanément l'incertitude sur les paramètres du système de vision et le problème de la visibilité. La méthode proposée, basée sur la planification d'une trajectoire dans l'image et l'adaptation en ligne du gain de commande, permet de garantir la stabilité du système en boucle fermée, la visibilité de la cible et la bornitude des erreurs de suivi malgré l'incertitude des paramètres. Toutefois, les travaux réalisés dans [76] sur le schéma classique de l'asservissement visuel 2D ont permis de montrer que l'incertitude sur la profondeur des points de la cible réduit très fortement la taille du domaine de stabilité de la caméra.

Dans la plupart des travaux, l'amélioration de la robustesse résulte de l'ajout d'informations géométriques qui permettent de compléter les mesures locales dans l'image. Cependant, bien que la géométrie occupe une place essentielle dans ce problème, le choix de la commande est également d'un intérêt capital pour garantir la satisfaction de contraintes. Paradoxalement, dans une grande majorité des travaux, la commande est obtenue en imposant à la fonction de tâche, une décroissance exponentielle dont le gain est choisi de manière empirique.

Dans le but de tirer profit de techniques d'automatique avancées, un cadre général a été proposé dans [107] pour modéliser l'asservissement visuel multi-critères. L'approche proposée était basée sur la combinaison de méthodes quadratiques robustes et la représentation

de la non-linéarité des saturations au moyen d'inclusions différentielles. Le principal inconvénient de l'approche était que les conditions étaient obtenues sous formes d'Inégalités Matricielles Bilinéaire (BMIs). Une modélisation sous forme d'un système à Paramètres Linéaires Variables (LPV) à été proposée dans [70] pour synthétiser un système de vision active robuste par rapport aux bruits de l'image. Un cadre général pour la synthèse et l'analyse de lois de commandes référencées vision multi-critères a également été proposé dans [6], [27]. Cette approche est basée sur une représentation d'état rationnelle du système, définie sous forme d'inclusions différentielles linéaires structurées normées. Basée sur cette représentation d'état rationnelle, dans [28], une autre approche pour l'analyse de lois de commandes référencées vision multi-critères a été proposée en considérant les différentes contraintes par la définition d'une fonction de Lyapunov biquadratique à travers la  $\mathcal{S}$ -procédure et le lemme Finsler.

Le travail que nous présentons dans cette thèse vise à contribuer de manière originale à ce problème en proposant des lois de commande robustes multi-critères pour l'asservissement visuel 2D. Pour limiter la complexité du problème, tout en conservant l'essentiel de la non-linéarité de l'asservissement visuel 2D lié à la projection perspective dans le plan image, nous limitons notre étude au mouvement d'une caméra à trois degrés de liberté : deux degrés de liberté en translation dans le plan horizontal et un degré de liberté en rotation selon l'axe vertical. Nous considérons le modèle sténopé d'une caméra, fixée sur une platine orientable en lacet, et montée sur un robot à roues de type char, selon le modèle introduit dans [90]. Pour ce modèle, l'objectif que nous nous fixons est de développer des lois de commande référencées vision 2D permettant de garantir la stabilité du système en boucle fermée, malgré la présence d'incertitudes bornées sur la profondeur des points de la cible, et telles que la visibilité de la cible et le respect des contraintes dynamiques des actionneurs soient assurés durant l'exécution de la tâche.

Nous considérons tout d'abord le cas d'une cible fixe. Pour ce problème, nous présentons deux lois de commande. La première que nous appelons *asservissement en cap*, permet de conduire le robot en direction de la cible en suivant une vitesse de référence. La seconde permet de positionner la caméra face à la cible. Dans les deux cas, nous considérons une représentation polytopique des incertitudes, et nous utilisons une condition de secteur modifiée pour prendre en compte les saturations. Sur la base de cette représentation, nous montrons que la condition de stabilité et le respect des différents critères peuvent être exprimés sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs). Les gains des correcteurs sont ensuite caractérisés à l'aide de méthodes d'optimisation qui permettent de déterminer la région de stabilité maximale du système en boucle fermée.

Nous considérons ensuite le problème de suivi d'une cible en mouvement dont la vitesse est inconnue. Pour ce problème, nous utilisons la même représentation des incertitudes que pour la première tâche et nous modélisons la vitesse inconnue de la cible comme une perturbation bornée en énergie. Dans ce cas, nous montrons que les trajectoires du système convergent vers un ensemble compact contenant l'origine. La convergence asymptotique vers la configuration finale est ensuite garantie lorsque la cible s'immobilise.

Nous présentons ensuite un second volet de notre travail dans lequel nous considérons

le problème d'enchaînement de tâches référencées capteurs. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet *Egocentre* supporté par le programme interdisciplinaire *Robea* du CNRS, [1, 2, 3]. Pour modéliser ce problème nous introduisons un cadre mathématique permettant de choisir les conditions initiales des tâches successives de sorte à conserver la continuité des vitesses du robot [102]. Sur cette base, nous étudions deux problèmes d'enchaînement de tâches.

Le premier consiste à enchaîner une tâche de suivi de mur, réalisée sur la base de mesures de proximité, et une tâche de positionnement référencée vision de la caméra. Pour ce problème nous considérons deux approches. La première consiste à modéliser la dynamique de la seconde fonction de tâche sous forme d'un système linéaire d'ordre supérieur, au lieu d'utiliser l'approche classique consistant à faire décroître l'erreur de manière exponentielle. Nous considérons successivement une dynamique du second puis du troisième ordre permettant d'assurer la continuité des vitesses, puis des accélérations. Cette première approche ne permettant pas de borner les variations de ces grandeurs lors de la transition entre tâches, nous proposons ensuite l'utilisation d'une loi de commande multi-critères pour la seconde tâche. Outre la satisfaction des contraintes dynamiques, ce correcteur permet la prise en compte de l'incertitude sur certains paramètres et la garantie de la visibilité.

Le second problème que nous étudions est de stabiliser simultanément la position de la caméra et de la base mobile par rapport à la cible. Dans ce cas, le robot étant initialement éloigné de la configuration finale, nous proposons de réaliser le déplacement en enchaînant trois tâches référencées vision, de sorte à contraindre progressivement les degrés de liberté du robot. La première tâche permet d'asservir le mouvement du robot en direction de la cible, en régulant sa vitesse à une valeur de référence. La seconde stabilise la caméra face à la cible sans imposer de contrainte particulière sur le mouvement de la base. Enfin, la troisième tâche achève la stabilisation du système complet au moyen d'une commande par retour d'état instationnaire, selon le modèle proposé dans [113], [112]. Pour cette dernière tâche, les données visuelles sont utilisées pour reconstruire l'état du système dans un voisinage de la configuration finale.

Le manuscrit est organisé de la manière suivante. Le premier chapitre présente les modèles de la caméra et du robot mobile et résume les notions de base de l'asservissement visuel 2D et le formalisme des fonctions de tâche qui nous serviront à modéliser nos travaux. Les schémas de commande classiques d'asservissement visuel 2D sont également rappelés dans ce chapitre. Le chapitre II présente un ensemble d'éléments sur la stabilité des systèmes et la représentation des saturations qui seront utilisés directement ou indirectement dans le chapitre suivant. La synthèse des lois de commande multi-critères, référencées vision 2D, est ensuite présentée au chapitre III. Ce chapitre constitue la contribution principale de la thèse. Le chapitre IV décrit nos travaux relatifs à l'enchaînement de tâche qui constituent en partie une application des résultats développés au chapitre III. Des résultats de simulation sont présentés tout au long du manuscrit afin d'illustrer la réponse du système robotique aux différentes loi de commande que nous proposons.

Le manuscrit contient également une annexe, dans laquelle sont présentés un ensemble

de définitions et de lemmes de base qui permettent d'aborder la résolution numérique de nombreux problèmes d'automatique exprimés sous forme d'inégalités linéaires matricielles.



---

# Chapitre I

## Modélisation et état de l'art

---

### I.1 Introduction

En robotique mobile, l'utilisation de capteurs extéroceptifs est d'un intérêt fondamental pour renseigner le robot sur l'environnement dans lequel il évolue. Leur utilisation est indispensable dès qu'il s'agit d'accomplir des tâches dans un environnement variable, non parfaitement connu. Ils permettent également de corriger d'éventuelles erreurs ou imprécisions dans l'identification des modèles géométriques et dynamiques des robots. Toutefois, ces capteurs sont principalement utilisés pour localiser le robot dans son environnement sur la base de la perception d'amers caractéristiques de l'environnement [94], [95]. Ces capteurs sont de nature différente. Les capteurs proximétriques, utilisant par exemple des ultrasons, fournissent une information sur la distance aux objets les plus proches. Ils sont particulièrement bien adaptés pour l'évitement d'obstacles [64]. Les capteurs de vision ou les télémètres laser permettent une perception plus globale de l'environnement. Ils peuvent être employés aussi bien pour des tâches de localisation, de navigation ou d'exploration.

La reconstruction 3D a longtemps été considérée comme une étape préalable, indispensable et indépendante à tout module de génération de mouvement d'un robot dans un environnement imparfaitement connu. En vision par ordinateur, cette idée longtemps justifiée par les temps de calcul prohibitifs des algorithmes de traitement d'images, a donné lieu à de nombreux et fructueux travaux, notamment dans le domaine de la stéréovision [36], [17], [31], [67].

La performance technologique des capteurs et des systèmes de calcul embarqués permet aujourd'hui de relier dynamiquement les données perceptuelles aux commandes des actionneurs. Il est alors possible de commander le mouvement d'un robot en intégrant



directement les mesures capteurs dans les boucles de commande, sans qu'il soit nécessaire de relocaliser le robot. Cette approche, dite "commande référencée-capteur" a été particulièrement développée dans le domaine de la vision. La richesse des informations visuelles et la cadence de plus en plus élevée des images délivrées par les caméras ont permis l'élaboration de méthodes performantes. Les techniques d'asservissement visuel permettent de commander les déplacements d'un système robotique à partir d'une ou plusieurs caméras fixes ou mobiles [34], [87] et [118], [75]. Une application particulièrement intéressante en robotique mobile consiste à embarquer le capteur de vision à bord du robot. La tâche de commande peut alors être définie comme le positionnement de la caméra par rapport à des objets dont la localisation n'est pas nécessairement connue dans l'espace de travail du robot. Il peut également s'agir de suivre des objets en mouvement [39], [116]. Dans tous les cas, l'asservissement est basé sur la régulation d'un vecteur de paramètres  $s(t)$ , provenant de l'extraction de motifs dans l'image, en nombre suffisamment pour permettre le contrôle des degrés de liberté souhaités. L'objectif de la commande est d'amener le vecteur  $s(t)$  vers une valeur désirée, notée  $s^*(t)$ .

Initialement, les données brutes extraites du plan image des caméras sont bidimensionnelles. Toutefois, différentes approches, reposant sur la reconstruction de grandeurs de dimensions différentes, ont été proposées en asservissement visuel. L'asservissement visuel 2D consiste à définir l'erreur à réguler directement à partir de mesures planes telles que les coordonnées de points caractéristiques dans l'image. A l'opposé, l'asservissement visuel 3D repose sur un module de localisation qui permet de construire la situation relative de la caméra par rapport à l'amer visuel, à partir des mesures extraites de l'image à chaque itération (voir figure I.1). Entre ces deux approches, des méthodes intermédiaires ont été proposées, permettant de combiner les informations 2D et 3D. Il s'agit d'une part de l'asservissement visuel  $2D\frac{1}{2}$  proposé par E. Malis et F. Chaumette dans [71] et [74] et de l'asservissement visuel  $d2D/dt$  [25] et [26].

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de nous focaliser sur l'asservissement visuel 2D. L'inconvénient majeur de cette approche est la perte de l'information de profondeur qui résulte de la projection du motif dans le plan image. Pour répondre à ce problème, certains auteurs ont proposé de reconstruire cette information à partir d'un système de mesure annexe, tel qu'un télémètre laser, ou d'estimer cette grandeur en ligne [88], [76] ou encore de la reconstruire grâce à la connaissance de la géométrie de l'objet d'intérêt en résolvant un problème inverse [30], [111]. Le choix d'amers et de motifs visuels bien appropriés pour réaliser une tâche donnée pose un problème délicat. Il existe en effet un grand nombre d'informations dans l'image pouvant être exploitées pour l'asservissement visuel. Dans la plupart des applications robotiques utilisant la vision, des cibles visuelles facilement reconnaissables (marques contrastées) sont utilisées. Ces cibles sont généralement constituées d'éléments géométriques, disposés de sorte à faciliter le traitement des images. Les éléments géométriques les plus simples à utiliser sont naturellement des points, ou marques circulaires. Le traitement d'image consiste alors à extraire les coordonnées des centres des images de ces points. L'objectif de cette thèse étant l'élaboration de techniques de commande robuste pour l'asservissement visuel 2D, nous avons choisi de nous limiter à ce type de motif ponctuel, pour lequel le problème de traitement visuel est

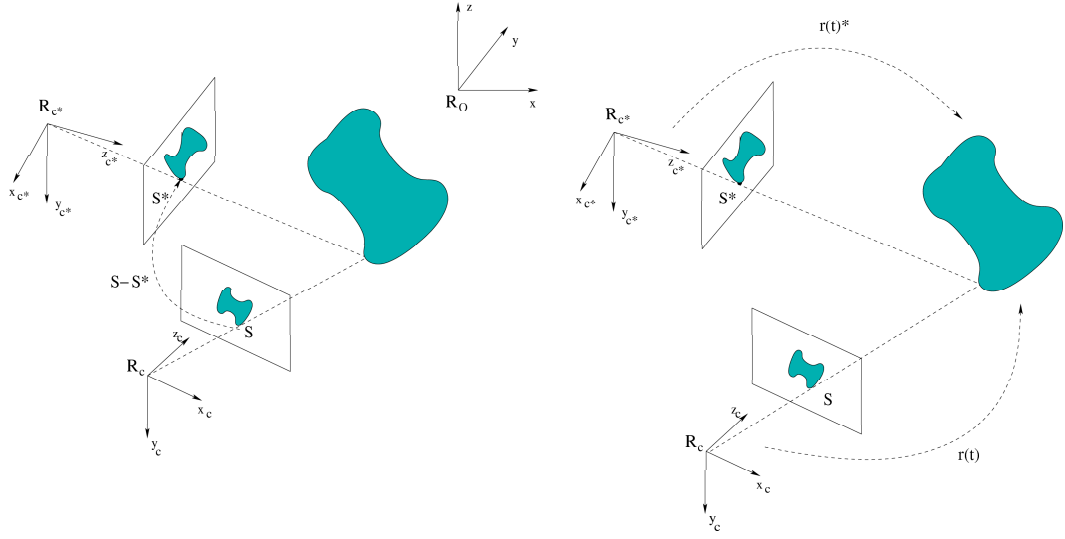


FIG. I.1: Asservissement visuel 2D et 3D. Pour amener le repère de la caméra  $R_C$  en  $R_C^*$ , on utilise en asservissement visuel 2D des mesures  $s$  extraites directement de l'image (à gauche). En asservissement visuel 3D,  $r(t)$  représente la situation courante de la caméra par rapport à l'objet, estimée à l'issue d'une phase de traitement de l'information  $s(t)$  dans l'image (à droite)

simple.

Pour aborder le problème de commande, il est avant tout nécessaire de modéliser la relation qui lie la variation des informations visuelles  $s(t)$  aux variables de contrôle. Cette modélisation est présentée en détail dans la section suivante.

## I.2 Modélisation des informations visuelles 2D

Cette section décrit les notions de base permettant d'introduire le problème d'asservissement visuel 2D que nous avons considéré. Nous introduisons tout d'abord un modèle géométrique de la caméra, puis nous rappelons le calcul de la matrice d'interaction dans le cas du point.

### I.2.1 Modélisation de la caméra

Nous considérons le modèle sténopé, ou "pinhole", de la caméra (voir figure I.2) dans lequel le plan image de la caméra est situé à  $1m$  du centre optique. Le repère  $R_C(x_c, y_c, z_c)$  est attaché à la caméra. Son origine est le centre optique  $C$  de la caméra, l'axe  $Cz_c$  est confondu avec l'axe optique, et l'axe  $Cx_c$  est vertical, dirigé vers le bas. Un point de la scène  $p \in \mathbb{R}^3$  se projette en un point image  $P$  sur le plan image de la caméra au moyen d'une projection perspective. Ainsi, si  $x_p = (x \ y \ z)'$  représente les coordonnées du point  $p$  par rapport au repère  $R_C$ ,  $z$  représente la profondeur de  $p$  par rapport à  $R_C$  et sa projection  $P$  dans le plan image est décrite par ses coordonnées homogènes métriques :

$$\begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix}' \text{ avec } X = \frac{x}{z}, \quad Y = \frac{y}{z} \quad (\text{I.1})$$

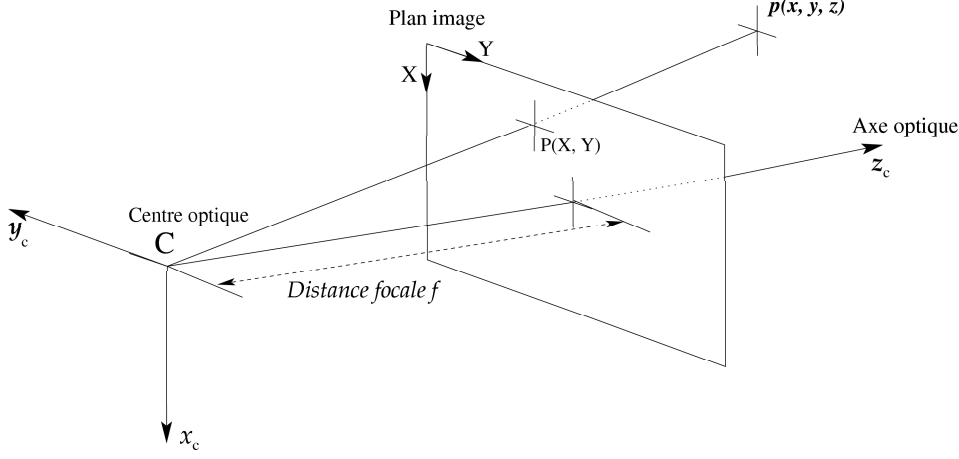


FIG. I.2: Modèle sténopé ou pinhole de la caméra

En pratique, les mesures sur le plan image de la caméra sont données en pixels [36], [52], et la distance focale  $f$  de la caméra est très petite devant 1. La matrice des paramètres intrinsèques de la caméra permet de relier l'expression des coordonnées homogènes en pixels  $\begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix}'$ , aux coordonnées homogènes métriques  $\begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix}'$ , de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice des paramètres intrinsèques}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

Dans cette relation,  $(u_0, v_0)$  désigne les coordonnées pixels de la projection orthogonale du centre optique  $C$  de la caméra sur le plan d'image, alors que les scalaires  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$  sont définis par :

$$\alpha_u = \frac{f}{d_x} \quad \alpha_v = \frac{f}{d_y} \quad (\text{I.3})$$

$f$  est la distance focale de l'objectif et  $d_x$  et  $d_y$  désignent respectivement la dimension d'un pixel selon les lignes et les colonnes de l'image [52]. Ce modèle, qui est très largement utilisé en commande référencée-vision, sera considéré tout au long de la thèse. Pour pouvoir l'exploiter, il est nécessaire de connaître les paramètres intrinsèques de la caméra :  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$ . Ces paramètres peuvent être estimés au préalable en utilisant des procédures de calibrage [7], [96] et [109].

### I.2.2 Notion de matrice d'interaction

Comme nous l'avons expliqué plus haut, la commande référencée vision consiste à asservir le mouvement du robot sur la base de la variation d'un vecteur de données visuelles  $s(t) \in \mathbb{R}^k$  relative au mouvement de la caméra. Ce vecteur de données visuelle est généralement issu du paramétrage d'une ou plusieurs primitives géométriques (points, lignes, ellipses, sphères, etc). A chaque instant, la situation de la caméra par rapport à un référentiel  $R$ , lié à la scène, peut être décrite par une fonction  $r(t)$  à valeur dans le groupe special euclidien  $SE_3$ . Considérons tout d'abord le cas d'une cible statique par rapport à  $R$ , perçue par une caméra en mouvement. Une condition nécessaire pour la définition d'une tâche référencée vision est que le vecteur  $s$  définisse une fonction différentielle d'un voisinage de  $r(t)$  de  $SE_3$  dans  $\mathbb{R}^k$  :

$$s = s(r(t)) \quad (\text{I.4})$$

A chaque configuration  $r(t)$ , la vitesse de la caméra par rapport à  $R$  définit un torseur de dimension 6, appelé torseur cinématique, et pouvant être interprété comme un élément de l'algèbre de Lie  $se_3$  (espace tangent à  $SE_3$  en l'identité). D'autre part, chacune des composantes  $s_j$  du vecteur  $s$  définit une application différentielle de  $SE_3$  dans  $\mathbb{R}$ . La différentielle d'une fonction analytique d'une variété dans  $\mathbb{R}$  pouvant être interprétée comme un élément de l'espace cotangent, il s'ensuit que la différentielle  $ds_j|_r$  peut également être interprétée comme un torseur. En conséquence, la relation reliant la dérivée temporelle de la fonction  $s_j$  à la vitesse de la caméra peut être interprétée comme un produit de torseurs [18], [34] :

$$\dot{s}_j = \frac{ds_j}{dt} = \frac{\partial s_j}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial s_j}{\partial r} T_{R_C/R} = H_j \bullet T_{R_C/R} \quad (\text{I.5})$$

Dans cette relation,  $H_j$  définit le torseur d'interaction associé au signal  $s_j$ ,  $T_{R_C/R}$  est le torseur cinématique de la caméra par rapport au repère  $R$  usuellement exprimé dans le repère de la caméra  $R_C$  et le symbole  $\bullet$  indique un produit de torseurs.

En utilisant la représentation matricielle  $L_{s_j}$  du torseur d'interaction  $H_j$ , la relation (I.5) peut également s'écrire :

$$\dot{s}_j = L_{s_j} T_{R_C/R} \quad \text{avec} \quad L_{s_j} = H_j \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.6})$$

**Définition I.1** La représentation matricielle  $L_s = (L'_{s_1} \dots L'_{s_k})'$  de l'ensemble des torseurs  $\{H_1 \dots H_k\}$  est appelée **matrice d'interaction** associée au vecteur de données  $s$ .

La matrice  $L_s$  peut être interprétée comme le jacobien du vecteur  $s$ , i.e. l'opérateur associant la variation des informations visuelles  $s$  (sortie du capteur) au déplacement relatif de la caméra. A ce stade, en introduisant le jacobien du robot  $J(q)$ , dont l'expression matricielle permet de relier le mouvement de la caméra à la variation du vecteur de coordonnées généralisées  $q(t)$ , il vient :

$$\dot{s} = L_s T_{R_C/R} = L_s J \dot{q} \quad (\text{I.7})$$

où  $J$  est le jacobien du robot exprimé dans le repère de la caméra  $R_C$  en son origine  $C$  et  $\dot{q}$  est la vitesse du robot. Ce résultat peut être aisément étendu au cas d'une cible mobile où le signal capteur dépend à la fois de la situation de la caméra et du temps :

$$s = s(r(t), t)$$

La relation précédente (I.7) se généralise alors en l'expression suivante :

$$\dot{s} = L_s T_{R_C/R} + \frac{\partial s}{\partial t} = L_s J \dot{q} + \frac{\partial s}{\partial t} \quad (\text{I.8})$$

le terme  $\frac{\partial s}{\partial t}$  représente la variation de  $s$  consécutive au mouvement propre de l'objet.

### I.2.3 Cas d'un point 2D : equations du flot optique

Dans cette partie nous rappelons la construction de la matrice d'interaction associée au *point*, qui constitue le motif géométrique le plus simple. Considérons un point  $p$  de composantes  $(x \ y \ z)'$  par rapport à  $R_C$ . Dans ce cas, le vecteur  $s$  de dimension  $k = 2$  est défini par la projection des deux composantes du point  $P$  dans le plan image :

$$s(r(t)) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

En différenciant par rapport au temps les composantes (I.9) définies par l'expression (I.1), on peut relier la vitesse du point  $P$  par rapport à  $R_C$  à la vitesse  $\mathbf{V}(p) = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})'$  du point  $p$  par rapport à  $R_C$ . Il vient :

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \end{pmatrix} \mathbf{V}(p) \quad (\text{I.10})$$

Considérons le cas où le point  $p$  est immobile par rapport à la scène (repère  $R$ ) et où la caméra (repère  $R_C$ ) se déplace avec une vitesse décrite par son torseur cinématique :

$$T_{R_C/R} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{R_C/R} \\ \boldsymbol{\Omega}_{R_C/R} \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

Ici,  $\mathbf{V}_{R_C/R} \in \mathbb{R}^3$  représente la vitesse de translation du point  $C$  par rapport au repère  $R$  et  $\boldsymbol{\Omega}_{R_C/R} \in \mathbb{R}^3$  représente la vitesse de rotation de  $R_C$  par rapport à  $R$ . Par rapport au repère  $R_C$ , tout se passe comme si la caméra était immobile et si tous les points de la scène étaient solidairement animés (comme dans le cas un solide). Par rapport à  $R_C$ , la vitesse du point de la scène qui coïncidant avec l'origine  $C$  de la caméra est alors décrite par le torseur :

$$T_{R/R_C} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_{R_C/R} \\ -\boldsymbol{\Omega}_{R_C/R} \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Sur cette base, il est alors possible, à l'aide de l'expression du champ de vitesse d'un solide, d'exprimer la vitesse de n'importe quel point de la scène par rapport à  $R_C$ . En particulier, au point  $p$ , on obtient :

$$\mathbf{V}(p) = -\mathbf{V}_{R_C/R} - \boldsymbol{\Omega}_{R_C/R} \times x_p = -\mathbf{V}_{R_C/R} + Sk(x_p)\boldsymbol{\Omega}_{R_C/R} = \begin{pmatrix} -I_3 & Sk(x_p) \end{pmatrix} T_{R_C/R} \quad (\text{I.13})$$

où  $Sk(x_p)$  représente la matrice antisymétrique (skew matrix) de pré-produit vectoriel associée au vecteur  $x_p$ . L'équation (I.10) peut alors se simplifier, en utilisant les relations (I.1), sous la forme :

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = L_s T_{R_C/R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} & 0 & \frac{X}{z} & XY & -(1+X^2) & Y \\ 0 & -\frac{1}{z} & \frac{Y}{z} & 1+Y^2 & -XY & -X \end{pmatrix} T_{R_C/R} \quad (\text{I.14})$$

Cette dernière relation décrit l'équation du flot optique. Elle permet de construire la matrice d'interaction pour tout un ensemble de primitives géométriques (voir [18]). Il est intéressant de noter que, dans la matrice d'interaction du point, les termes induits par les mouvements de rotation ne dépendent que des mesures  $X$  et  $Y$  dans le plan image de la caméra, alors que les termes induits par les mouvements de translation sont inversement proportionnels à la profondeur  $z$  du point  $p$ . La connaissance de la matrice d'interaction  $L_s$  nécessite donc une estimation de la profondeur qui peut être obtenue, soit à partir d'un algorithme de calcul, soit par mesure directe (utilisation d'un capteur télémétrique laser). En asservissement visuel 2D, il faudra donc injecter une valeur réelle ou estimée de la profondeur, dès que le contrôle des degrés de liberté en translation de la caméra sera nécessaire. Certains travaux, visant à l'application de techniques d'asservissement visuel en robotique, proposent d'estimer les paramètres incertains de la matrice d'interaction à partir de la mesure d'informations visuelles géométriques. Ces méthodes peuvent être réalisées soit hors ligne par apprentissage [97], soit en ligne au cours de l'asservissement [57], [21], [53], [65] et [8].

### I.2.4 Notion de liaison virtuelle

Lorsque la matrice d'interaction  $L_s \in \mathbb{R}^{k \times 6}$  est de rang inférieur à six, il est possible de caractériser les mouvements de la caméra laissant invariant le vecteur  $s$  d'informations visuelles :  $\dot{s} = 0$ . Dans ce cas, si on note  $T_{R_C/R}^*$  l'expression générique du torseur des vitesses relatif à ce type de déplacement, il vient :

$$\dot{s} = L_s T_{R_C/R}^* = 0 \quad (\text{I.15})$$

Ce qui entraîne :

$$T_{R_C/R}^* \in \text{Ker}(L_s) \quad (\text{I.16})$$

où  $\text{Ker}(L_s)$  désigne le noyau de la matrice d'interaction  $L_s$ . Le sous-espace engendré par les torseurs d'expression générique  $T_{R_C/R}^*$  correspond donc à l'ensemble des mouvements de la caméra laissant invariantes les informations visuelles dans le plan d'image. En une configuration  $r(t)$  de la caméra, pour laquelle la contrainte  $s(r(t)) - s^* = 0$  est vérifiée,

on dira que la tâche d'asservissement visuel définit une *liaison virtuelle* de classe  $N = 6 - \text{rang}(L_s)$  entre le repère de la caméra  $R_C$  et le repère  $R$ . Pour obtenir une liaison rigide, i.e. de classe 0, entre une caméra complètement actionnée et un amer visuel, il est donc nécessaire de disposer au moins de 6 informations visuelles indépendantes. En théorie, une cible plane de 3 points non alignés permet de réaliser ce positionnement. Pour des raisons de robustesse et afin d'éviter de possibles singularités, la plupart des travaux en asservissement visuel 2D considèrent une cible plane de 4 points non alignés [82], [86]. Différents types de motifs géométriques ont été considérés pour réaliser des tâches référencées vision de classes différentes [22], [20].

Dans le cas de l'asservissement visuel 2D, comme  $s$  est un vecteur de données planaires, la valeur désirée  $s^*$  se déduit aisément des équations de projection perspectives, en considérant la position souhaitée de la caméra. Toutefois, avec une approche calculatoire, toute erreur de modélisation sur les paramètres extrinsèques ou intrinsèques de la caméra peut entraîner des erreurs sur la situation finale. En d'autres termes, la condition  $s = s^*$  peut être vérifiée, sans que la caméra soit correctement positionnée. Il est donc souvent préférable d'utiliser une méthode d'apprentissage expérimentale consistant à conduire manuellement la caméra à la position désirée, puis à enregistrer les valeurs de référence des motifs projetés à la position d'équilibre. Dans ce cas, même en présence d'erreurs de modélisation, la convergence de  $s$  vers la valeur de référence  $s^*$  assurera un mouvement du robot vers la position escomptée. Plusieurs travaux utilisant la propriété de répétabilité d'algorithmes de vision, indépendants de l'étape de calibration, ont ainsi été proposés [72], [73]. Parallèlement, de nombreux auteurs ont cherché à augmenter la robustesse des méthodes de calibration de la caméra, [46] et [110].

## I.3 Fonction de tâche et commande

Nous venons de rappeler le calcul de la matrice d'interaction dans le cas simple d'un motif ponctuel. Sur cette base, plusieurs types de tâches robotiques peuvent être définies à partir d'un vecteur d'informations issues de la vision. Le formalisme des fonctions de tâches offre un cadre mathématique formel, couramment utilisé en asservissement visuel pour modéliser ce problème [99], [34]. Nous rappelons les fondements de cette approche dans la section suivante. Nous expliquerons ensuite comment le problème de commande est généralement traité sur la base de ce formalisme.

### I.3.1 Le formalisme des fonctions de tâches

Le formalisme des fonctions de tâches est basé sur la définition d'une classe particulière de fonctions de sorties de classe  $C^1$ , appelées *fonctions de tâches*, de même dimension  $n$  que le vecteur  $q(t)$  de coordonnées généralisées du robot. Dans le cas de l'asservissement visuel 2D, le positionnement de la caméra par rapport à une cible visuelle, est caractérisée par un vecteur  $s(t)$  de  $k \geq 6$  informations issues de l'image. La fonction de tâche est

généralement définie sous la forme suivante :

$$e(r(t), t) = C(s(r(t), t) - s^*) \quad (\text{I.17})$$

où  $s(r(t), t)$  exprime le fait que les données visuelles à l'instant courant dépendent de la situation de la caméra mais également du temps si la cible est animée d'un mouvement propre,  $s^*$  représente la valeur que  $s$  doit atteindre pour que la tâche soit correctement réalisée, et  $C$  est une matrice de dimension  $n \times k$  dite *matrice de combinaison*, permettant de prendre en compte d'un nombre d'indices visuels  $k \geq n$  de sorte à accroître la précision de la tâche. Rappelons que le jacobien du robot  $J(q)$  exprime le lien différentiel entre la situation  $r(t)$  de la caméra et le vecteur de coordonnées généralisées  $q(t)$  :

$$\dot{r}(t) = J(q)\dot{q}$$

Par conséquent, la fonction de tâche (I.17) peut également être exprimée sous la forme suivante :

$$e(q(t), t) = C(s(q(t), t) - s^*) \quad (\text{I.18})$$

Ainsi définie, la fonction de tâche apparaît comme une fonction d'erreur et le problème de commande consiste à amener cette erreur à zéro et à l'y maintenir. Toutefois, pour que ce problème de commande soit bien défini, il est nécessaire d'assurer l'existence d'un lien régulier entre l'espace d'état et l'espace de sortie. Une petite variation de la tâche autour de la position d'équilibre doit correspondre à une petite variation de l'état autour de la trajectoire de référence. La notion de  $\rho$ -admissibilité, définie dans [99], permet d'établir des conditions suffisantes de régularité pour que cette condition soit assurée.

Considérons une tâche robotique associée à la définition d'une fonction de tâche  $e(q(t), t)$ . Pour que cette tâche soit parfaitement exécutée sur l'horizon temporel  $[0, T]$ , la condition  $e(q(t), t) = 0, \forall t \in [0, T]$  doit être réalisée. Une trajectoire du robot,  $q_r(t)$ , vérifiant cette condition sera dite trajectoire solution. Une première condition nécessaire pour garantir l'existence d'un lien régulier entre l'espace de sortie (ou espace de la tâche dans lequel est défini la fonction  $e$ ), et l'espace d'état dans lequel est défini le vecteur  $q(t)$ , est que cette trajectoire solution  $q_r(t)$  soit unique. La résolution de l'équation  $e(q(t), t) = 0$  n'étant en général pas unique, il est de plus nécessaire d'introduire une condition initiale du type :  $q_r(0) = q_0$ , telle que  $e(q_0, 0) = 0$ . Une trajectoire solution vérifiant cette condition additionnelle est dite trajectoire idéale, [99]. Cette dernière condition est encore insuffisante pour assurer la condition de régularité recherchée. Il est en effet nécessaire, pour que le problème soit bien posé, que le jacobien de la tâche  $\partial e / \partial q$  soit non singulier. D'autre part, outre l'unicité de la trajectoire solution, il est nécessaire de s'assurer que la convergence de la fonction de tâche vers 0 assure celle de  $q$  vers  $q_r$ , et qu'à une petite variation de  $e$  corresponde une petite variation de  $q$ . La propriété de  $\rho$ -admissibilité garantit l'ensemble de ces conditions puisqu'elle permet d'assurer l'existence d'un difféomorphisme local  $\mathcal{F}$  entre un ensemble de couples  $(q, t)$ , incluant la condition initiale  $q_0$ , et l'ensemble des couples  $(e, t)$  correspondants. Cette propriété largement commentée dans [99] est brièvement rappelée ci-dessous.



**Définition I.2** Soit  $C_{\rho,T}$  l'ensemble des couples  $(q, t)$  et  $B_\rho$  une boule fermée de centre 0 et de rayon  $\rho$ . Si  $T < +\infty$ , la propriété de  $\rho$ -admissibilité est équivalente aux trois assertions suivantes :

1.  $C_{\rho,T}$  est une composante connexe par arc non vide de  $F^{-1}(B_\rho \times [0, T])$ ,
2.  $C_{\rho,T}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,
3. Pour tout couple  $(q, t)$  appartenant à  $C_{\rho,T}$  :

**a**  $\det \left( \frac{\partial e}{\partial q'}(q, t) \right) \neq 0,$

**b**  $\left\| \left( \frac{\partial e}{\partial q'} \right)^{-1} \right\| < m_{\rho,T} < \infty,$

**c**  $\left\| \frac{\partial e}{\partial t} \right\| < m'_{\rho,T} < \infty,$

Si  $T = +\infty$ , ces conditions sont seulement suffisantes.

La détermination de la composante connexe  $C_{\rho,T}$  qui apparaît dans la condition 1 est liée au choix de la condition initiale  $q_0$ . La propriété 3 – a et les conditions 2 et 3 assurent l'existence du difféomorphisme local  $\mathcal{F}$  entre deux ensembles fermés. Enfin, les constantes  $m_{\rho,T}$  et  $m'_{\rho,T}$  garantissent que l'inverse de la jacobienne de la tâche et la dérivée de  $e$  par rapport au temps restent bornées, assurant qu'une petite variation autour de la valeur de référence, dans l'un des deux espaces, se traduit par une petite variation dans l'autre.

Bien que cette définition permette de définir des conditions suffisantes pour l'existence d'un lien régulier entre l'espace de la tâche et l'espace d'état, elle n'est pas facilement utilisable en pratique. Le théorème suivant, proposé par Samson *et al.* dans [99], est d'un intérêt pratique beaucoup plus grand. Il permet de garantir la  $\rho$ -admissibilité au voisinage d'une trajectoire de référence, à partir de la condition essentielle de régularité du jacobien de la tâche.

**Théorème I.1** Soit  $\{e(q(t), t); q_0\}$  une tâche admettant une trajectoire idéale  $q_r(t)$  définie sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Si  $e(q(t), t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , si la matrice jacobienne de la tâche  $\frac{\partial e}{\partial q'}$  est inversible au voisinage de  $q_r(t)$ , et enfin si l'horizon de temps reste fini ( $T < +\infty$ ), il existe un  $\rho > 0$  tel que la tâche considérée est  $\rho$ -admissible.

La condition de  $\rho$ -admissibilité garantissant l'existence d'un difféomorphisme local  $\mathcal{F}$  est d'un intérêt fondamental pour la commande. En effet, cette propriété permet de raisonner de manière équivalente dans l'espace l'état ou dans l'espace de la tâche pour la synthèse du correcteur. Comme nous le rappellerons dans la section suivante, la plupart des lois de commande référencées-vision, visant à faire exécuter au robot une trajectoire de référence  $q_r(t)$ , consistent à réguler à zéro la fonction de tâche, à l'aide de techniques souvent très rudimentaires. Bien que la simplicité de telles approches permette dans de nombreux cas d'apporter une solution satisfaisante au problème, elle est toutefois limitée dans son champ d'application. L'objectif de ce travail de thèse est précisément de proposer des solutions plus performantes, basées sur des techniques de commande avancées, et permettant de prendre en compte un ensemble de critères essentiels liés à la perception et à la dynamique des actionneurs dès la synthèse du correcteur.

### I.3.2 Convergence exponentielle de la fonction de tâche

Comme nous venons de le décrire, la notion de fonction de tâche permet d'établir un difféomorphisme local entre l'espace d'état du robot et l'espace de la tâche de même dimension. Sur cette base, la convergence de la fonction de tâche vers zéro garantit l'exécution du mouvement de la caméra vers la position désirée. Nous décrivons ici quelques approches classiques du problème de commande tirant profit de ce résultat, et visant à imposer une décroissance exponentielle de la fonction de tâche du type :

$$\dot{e} = -\lambda e$$

Si l'on fait l'hypothèse que la matrice  $C$  est constante, la dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche (I.18) s'écrit :

$$\dot{e} = C\dot{s} \quad (\text{I.19})$$

En utilisant (I.7), il vient alors :

$$\dot{e} = CL_s T_{R_C/R} \quad (\text{I.20})$$

ou bien, dans le cas plus général, en considérant (I.8) :

$$\dot{e}(r(t), t) = C\dot{s}(r(t), t) = CL_s T_{R_C/R} + \frac{\partial e}{\partial t} \quad (\text{I.21})$$

où  $\frac{\partial e}{\partial t} = C \frac{\partial s}{\partial t}$  représente les variations de  $e$  dues au mouvement propre de la cible visuelle. Si on souhaite contrôler la situation complète de la caméra, il est nécessaire de disposer d'au moins six informations visuelles indépendantes ( $k \geq 6$ ) pour pouvoir contrôler les six degrés de liberté du système (trois degrés de liberté pour la position et trois pour l'orientation). Dans ce cas, la matrice d'interaction  $L_s$  sera de rang 6. Une loi de commande classiquement utilisée et garantissant la décroissance exponentielle de la fonction de tâche  $e$  est la suivante :

$$T_{R_C/R} = (CL_s)^{-1} \left( -\lambda e - \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (\text{I.22})$$

dans laquelle  $\lambda > 0$  est un gain scalaire positif. Dans ce cas, le torseur cinématique  $T_{R_C/R}$  est considéré comme une entrée de commande du système. Comme nous l'avons expliqué plus haut, la matrice d'interaction dépend généralement de paramètres mal connus tels que l'information de profondeur de la cible par rapport au repère de la caméra. De même, le terme  $\frac{\partial e}{\partial t}$  représentant le mouvement propre de la cible est généralement inconnu. Pour cette raison, l'expression (I.22) est usuellement réécrite en faisant apparaître des valeurs estimées de ces deux grandeurs de la manière suivante :

$$T_{R_C/R} = (C\widehat{L}_s)^{-1} \left( -\lambda e - \frac{\widehat{\partial e}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.23})$$

Si cette commande est parfaitement réalisée, en utilisant (I.23) dans (I.21), on obtient :

$$\dot{e} = -\lambda CL_s(\widehat{CL_s})^{-1}e - CL_s(\widehat{CL_s})^{-1}\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t} \quad (\text{I.24})$$

Dans le cas d'une cible fixe ( $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} = 0$ ), la condition de positivité :

$$CL_s(\widehat{CL_s})^{-1} > 0 \quad (\text{I.25})$$

apparaît directement comme une condition suffisante pour assurer la décroissance de l'erreur  $e$ . D'autre part, la décroissance exponentielle de la fonction de tâche peut également être retrouvée sans cette hypothèse, sous les conditions :  $\widehat{L_s} = L_s$  et  $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t}$ . Différents choix ont été proposés pour les matrices  $C$  et  $\widehat{L_s}$  dans le cas de l'asservissement visuel 2D. Pour simplifier les développements, nous ferons à nouveau l'hypothèse que la cible est fixe ( $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} = 0$ ).

### Cas où $k = 6$

Le cas d'un vecteur  $s$  de dimension 6 est obtenu dans le cas d'une cible constituée de 3 points non alignés. Dans ce cas, on peut faire le choix simple  $C = I_6$ . Le comportement de  $s$  est alors exactement le même que celui de  $e$ , toutes les composantes de  $s$  ont une décroissance exponentielle découplée. La loi de commande devient :

$$T_{R_C/R} = -\lambda \widehat{L_s}^{-1}e = -\lambda \widehat{L_s}^{-1}(s - s^*) \quad (\text{I.26})$$

avec comme condition de stabilité :

$$L_s \widehat{L_s}^{-1} > 0 \quad (\text{I.27})$$

S'il est possible d'estimer correctement la valeur courante de  $L_s$  à chaque itération de la loi de commande, la dynamique de l'erreur se rapproche alors du comportement exponentiel idéal :

$$\dot{s} = -\lambda L_s \widehat{L_s}^{-1}(s - s^*) \quad (\text{I.28})$$

La trajectoire du système en boucle fermée est alors donnée par :

$$s = s^* + (s_0 - s^*)e^{-\lambda L_s \widehat{L_s}^{-1}t} \approx s^* + (s_0 - s^*)e^{-\lambda t}, \quad (\text{I.29})$$

où  $s_0$  est la valeur initiale des coordonnées des points dans le plan d'image. Cette équation représente l'équation paramétrique d'une droite dans l'espace de mesure (l'espace de sortie de la caméra), le mouvement résultant de la caméra dans l'espace Euclidien n'étant cependant pas directement contrôlé. Outre le problème de mesure et d'estimation pour le calcul de la matrice d'interaction, deux difficultés limitent l'application de cette méthode :

- Il existe certaines configurations où la matrice  $L_s$  est singulière [82], [86]. Il est donc difficile d'assurer que, quelle que soit la position initiale choisie, la trajectoire du robot ne rencontrera pas une singularité isolée pour laquelle la condition de stabilité (I.27) n'est plus valide.
- La fonction de tâche peut être nulle ( $e = s - s^*$ ) sans que la situation désirée n'ait été atteinte. Une même image contenant la projection de trois points de la cible peut en effet être obtenue pour plusieurs situations différentes de la caméra [32].

Pour y remédier, une solution pratique consiste à restreindre l'espace de travail à des voisinages de la situation désirée ne comportant pas de situations singulières isolées et où la minimisation de  $\|s - s^*\|$  garantit le déplacement de la caméra vers sa position désirée.

### Cas où $k > 6$

Pour éviter les problèmes décrits dans le paragraphe précédent, on utilise généralement des informations visuelles 2D redondantes, en considérant au moins 4 points non alignés ( $k > 6$ ). On recherche une matrice  $C$  constante, de dimension  $6 \times k$  et de rang 6. Une première approche consiste à choisir pour  $C$  la pseudo-inverse d'une approximation de la matrice d'interaction à la position désirée [34] :

$$C = \widehat{L}_{s|s=s^*}^+ \quad (\text{I.30})$$

Avec cette expression de la matrice  $C$ , la loi de commande (I.23) s'écrit :

$$T_{R_C/R} = -\lambda \left( \widehat{L}_{s|s=s^*}^+ \widehat{L}_s \right)^{-1} e \quad (\text{I.31})$$

et l'équation en boucle fermée devient :

$$\dot{s} = -\lambda L_s \left( \widehat{L}_{s|s=s^*}^+ \widehat{L}_s \right)^{-1} \widehat{L}_{s|s=s^*}^+ (s - s^*) \quad (\text{I.32})$$

En choisissant pour  $\widehat{L}_s$  la pseudo inverse à droite de  $C$ , on obtient finalement :

$$\dot{s} = -\lambda L_s \widehat{L}_{s|s=s^*}^+ (s - s^*) \quad (\text{I.33})$$

Dans le cas où  $s - s^*$  appartient au noyau de  $\widehat{L}_{s|s=s^*}^+$ , l'annulation de  $e = \widehat{L}_{s|s=s^*}^+ (s - s^*)$  ne permet pas de garantir la convergence de  $s$  vers  $s^*$ . Dans ce cas, la condition de stabilité (I.27) ne peut être assurée que dans un voisinage de la configuration désirée  $s^*$ . Il est donc possible, si la position initiale est éloignée de la position désirée, que les trajectoires obtenues dans le plan image ne permettent pas d'amener la caméra à la position escomptée. En pratique, ces cas de figure ne se retrouvent que si de forts mouvements en rotation sont nécessaires [19]. Pour éviter ces problèmes deux alternatives ont été proposées :

- La première consiste à définir la matrice  $C$  comme la matrice identité  $I_k$  d'ordre  $k$ . Dans ce cas, pour la définition de la loi de commande, on utilise une expression similaire à la relation (I.23) mais en remplaçant le calcul de l'inverse de la matrice d'interaction par sa pseudo-inverse [48] :  $\widehat{L}_s^+ = \left( \widehat{L}_s' \widehat{L}_s \right)^{-1} \widehat{L}_s'$ .

- La deuxième consiste à définir directement  $C$  comme la pseudo-inverse de la matrice d'interaction à l'instant courant :  $C = \widehat{L}_s^+$ .

Dans les deux cas, le torseur cinématique de la caméra vérifie la relation :

$$T_{R_C/R} = -\lambda \widehat{L}_s^+ (s - s^*) \quad (\text{I.34})$$

Pour la seconde méthode, la condition de stabilité (I.27) ne peut plus s'appliquer directement puisque la matrice  $C$  n'est plus constante. Il est en effet nécessaire de considérer les variations de  $C$  dans le calcul de  $\dot{e}$  (I.21), ce qui conduit à des calculs d'une grande complexité. Si l'on considère le comportement de  $s$ , les deux méthodes conduisent à la même dynamique en boucle fermée :

$$\dot{s} = -\lambda L_s \widehat{L}_s^+ (s - s^*) \quad (\text{I.35})$$

Cette fonction de tâche ne vérifie plus la condition de  $\rho$ -admissibilité que nous avons définie plus haut [99]. La convergence de  $s$  vers  $s^*$  ne permet plus alors de garantir la stabilisation de la caméra à la situation désirée.

Enfin, il est important de souligner l'importance du conditionnement de la matrice d'interaction et de la matrice de combinaison dans le comportement du système. Un bon conditionnement de ces matrices garantit une bonne précision du lien entre les informations sensorielles et le mouvement de la caméra. Toutefois, ces matrices sont en pratique toutes deux dépendantes des erreurs de mesure et d'estimation (sauf dans le cas où  $C = I_k$ ). Les estimations sont donc biaisées et il est préférable de disposer de lois de commande robustes permettant de s'affranchir de ce problème. La présence d'erreurs sur certains paramètres entraîne des dégradations du comportement nominal du système [33]. La section suivante présente un résumé de travaux dédié à l'élaboration de lois de commande robustes pour l'asservissement visuel.

## I.4 Présentation du cadre de travail de la thèse

Comme nous l'avons expliqué précédemment, le calcul de la matrice d'interaction  $L_s$ , et dans certains cas de la matrice de combinaison  $C$ , requiert la mesure de données visuelles 2D et de la profondeur de la cible dans le repère de la caméra. Dans la pratique, en raison de l'incertitudes sur certains paramètres, le comportement du système en boucle fermée peut s'écarter fortement du comportement nominal correspondant à la décroissance exponentielle de la fonction de tâche. D'autre part, la faisabilité d'une tâche d'asservissement visuel repose sur la satisfaction d'un ensemble de contraintes additionnelles telles que, des contraintes liées à la visibilité de la cible (conservation des motifs visuels dans le plan image), et les contraintes dynamiques (limitation de la puissance disponible des actionneurs) [19], [56]. Pour pallier ces problèmes, différentes techniques ont été proposées dans la communauté pour compléter le schéma nominal d'asservissement visuel que nous avons décrit dans la section précédente. Ces techniques ont été rappelées dans l'introduction.

Le travail que nous avons mené dans le cadre cette thèse vise à contribuer de manière originale à ce problème en proposant des lois de commande robustes multi-critères pour l'asservissement visuel 2D. Étant donnée la complexité du problème nous avons décidé de concentrer notre étude sur le problème de stabilisation d'une caméra orientable en azimut, en mouvement dans le plan horizontal. Le modèle retenu permet de conserver l'essentiel de la non-linéarité du problème, liée à la projection perspective, tout en permettant un allègement des calculs. Les méthodes que nous avons développées, basées sur des techniques d'automatique avancées, ont permis d'élaborer des lois de commandes stabilisantes, robustes par rapport aux incertitudes sur la profondeur des motifs visuels, et garantissant la visibilité de la cible et le respect des contraintes dynamiques des actionneurs.

Nous considérons le cas d'une caméra possédant trois degrés de liberté : deux degrés de liberté en translation dans le plan horizontal et un degré en rotation par rapport à l'axe vertical. Afin que son mouvement puisse être commandé, la caméra est fixée sur une platine orientable en lacet, montée sur un robot à roues de type char évoluant sur sol horizontal. Les travaux menés dans [90] ont montré que l'introduction d'un degré de liberté additionnel apporté par la platine orientable permet de libérer la caméra de la contrainte non-holonyme de roulement sans glissement qui limite à chaque instant l'ensemble des vitesses accessibles de la base mobile. Ainsi, il est possible de commander la caméra pour réaliser n'importe quel mouvement élémentaire selon les trois degrés de liberté que nous avons décrits. Un schéma du robot supportant la caméra est décrit à la figure I.3.

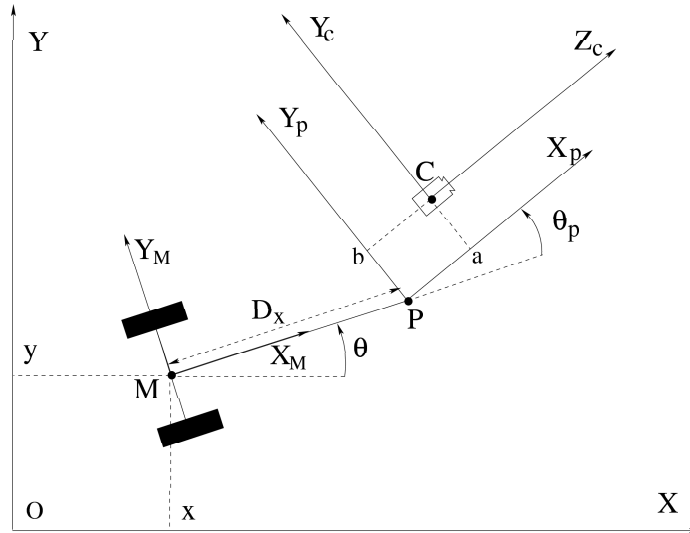


FIG. I.3: Robot mobile muni d'une platine mobile orientable

#### I.4.1 Modélisation du robot

- Pour décrire la dynamique du système nous introduisons les notations suivantes :
- $R(O, x, y, z)$  est un repère lié à l'environnement en un point fixe  $O$ .

- $R_C(C, x_C, y_C, z_C)$  est le repère lié à la caméra. Son origine  $C$  est le centre optique de la caméra,  $z_C$  est confondu avec l'axe optique et  $x_C$  est dirigé vers le bas.
- $R_M(M, x_M, y_M, z_M)$  et  $R_P(P, x_P, y_P, z_P)$  désignent respectivement les repères liés au point de référence  $M$  de la base mobile et au centre de rotation  $P$  de la platine. Les coordonnées du point  $P$  par rapport au repère  $R_M$  sont données par  $(D_x \ 0 \ h)'$ , où  $D_x$  représente la distance  $MP$  et  $h$  est la hauteur de la platine par rapport à la base mobile (la vue de dessus représentée à la figure I.3 ne permet pas de faire apparaître cette grandeur).
- l'angle  $\theta_P \in S^1$  définit l'orientation de l'axe  $x_P$  du repère  $R_P$  attaché à la platine par rapport à l'axe  $x_M$  du repère  $R_M$ .
- le vecteur  $(x \ y \ \theta)' \in \mathbb{R}^2 \times S^1$  exprime la configuration de la base mobile par rapport à l'environnement : le couple  $(x, y)$  désigne les coordonnées du point de référence  $M$  par rapport au repère  $R$  lié à l'environnement, et l'angle  $\theta$  représente l'orientation du vecteur  $x_M$  liée à la base du robot par rapport au vecteur  $x$  du repère  $R$ .
- $(a \ b \ c)'$  désignent les coordonnées du centre optique  $C$  par rapport à  $R_P$ .

L'équation cinématique du système permet d'exprimer le torseur des vitesses de la caméra par rapport au repère  $R$ ,  $T_{R_C/R}$ , en fonction du vecteur des vitesses du robot (I.7) (I.8). En suivant l'approche développée dans [91] et [90] on obtient l'expression suivante :

$$T_{R_C/R} = T_{R_C/R_M} + T_{R_M/R} + \begin{pmatrix} \Omega_{R_M/R} \times MC \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix} \quad (\text{I.36})$$

dans laquelle :

- $T_{R_C/R_M} = (V'_{R_C/R_M} \ \Omega'_{R_C/R_M})'$  est le torseur cinématique de la caméra par rapport au repère  $R_M$ ,  $V_{R_C/R_M}$  et  $\Omega_{R_C/R_M}$  représentant respectivement les vitesses de translation et de rotation du repère  $R_C$  par rapport à  $R_M$ ,
- $T_{R_M/R} = (V'_{R_M/R} \ \Omega'_{R_M/R})'$  est le torseur cinématique de la base du robot par rapport à l'environnement,  $V_{R_M/R}$  et  $\Omega_{R_M/R}$  représentant respectivement les vitesses de translation et de rotation du repère  $R_M$  par rapport à  $R$ ,
- le vecteur  $MC$  est défini par les coordonnées du centre optique  $C$  dans le repère de la base du robot  $R_M$ .

Comme la commande référencée vision 2D consiste à définir le torseur cinématique de la caméra sur la base d'informations visuelles issues du plan image de la caméra, il est pratique d'exprimer le torseur de la caméra  $T_{R_C/R}$  dans le repère caméra  $R_C$  [18]. Dans la suite, lorsque cette information sera nécessaire, nous ferons apparaître en exposant le référentiel dans lequel les composantes des vitesses sont exprimées. Le calcul de  $T_{R_C/R}^{R_C}$  est réalisé en 3 étapes :

- calcul du torseur cinématique de la base mobile  $T_{R_M/R}^R$ .
- calcul du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la base  $T_{R_C/R_M}$ .
- calcul du produit vectoriel  $\Omega_{R_M/R} \times MC$ .

Ces étapes de calculs sont décrites dans les paragraphes suivants.

### Modèle cinématique de la base mobile

En considérant la configuration de la base mobile  $(x \ y \ \theta)'$  par rapport au repère  $R$ , le modèle cinématique d'un robot de type char est classiquement défini par le système différentiel suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{I.37})$$

$v$  et  $\dot{\theta}$  désignent respectivement les vitesses linéaire et angulaire de la base mobile par rapport à  $R$ . Le torseur cinématique de la base mobile  $T_{R_M/R}^R = \begin{pmatrix} V_{R_M/R}^R & \Omega_{R_M/R}^R \end{pmatrix}'$  est donc donné par :

$$\begin{cases} V_{R_M/R}^R = (\dot{x} \ \dot{y} \ 0)' = (v \cos\theta \ v \sin\theta \ 0)' \\ \Omega_{R_M/R}^R = (0 \ 0 \ \dot{\theta})' \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

où l'exposant rattaché à l'écriture des vitesses permet de spécifier le référentiel dans lequel les composantes sont exprimées.

### Torseur cinématique de la caméra $T_{R_C/R_M}^R$

Le torseur cinématique de la caméra relativement au repère  $R_M$  est décrit par la relation suivante :

$$T_{R_C/R_M} = \begin{pmatrix} V_{R_C/R_M} \\ \Omega_{R_C/R_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{R_C/R_P} + V_{R_P/R_M} + \Omega_{R_P/R_M} \times PC \\ \Omega_{R_C/R_P} + \Omega_{R_P/R_M} \end{pmatrix} \quad (\text{I.39})$$

Cependant, les points  $C$  et  $P$  demeurant respectivement fixes par rapport aux repères  $R_P$  et  $R_M$ , les vitesses  $V_{R_C/R_P} = \frac{dPC}{dt}$  et  $V_{R_P/R_M} = \frac{dMP}{dt}$  sont identiquement nulles. De plus,  $R_C$  étant rigidement lié à  $R_P$ , il vient :  $\Omega_{R_C/R_P} = 0$ . L'équation (I.39) se réduit donc à :

$$T_{R_C/R_M} = \begin{pmatrix} \Omega_{R_P/R_M} \times PC \\ \Omega_{R_P/R_M} \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Par rapport au repère  $R_P$ , les composantes du vecteur  $PC$  s'expriment :  $(a \ b \ c)'$ . Pour clarifier le raisonnement, l'équation (I.40) sera d'abord projetée dans le repère  $R$ , avant d'être exprimée dans  $R_C$ . Les matrices  $C_{R_M R_P}$  et  $C_{R R_M}$ , qui décrivent respectivement les rotations entre  $R$  et  $R_P$  et entre  $R$  et  $R_M$ , sont données par :

$$C_{R_M R_P} = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & -\sin\theta_p & 0 \\ \sin\theta_p & \cos\theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{R R_M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

Par rapport à  $R$ , les composantes du vecteur  $PC$  s'expriment alors :

$$PC^R = C_{R R_M} C_{R_M R_P} PC^{R_P} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta + \theta_p) - b \sin(\theta + \theta_p) \\ a \sin(\theta + \theta_p) + b \cos(\theta + \theta_p) \\ c \end{pmatrix} \quad (\text{I.42})$$



Compte tenu de la géométrie du robot représentée sur la figure I.3, la vitesse de rotation de  $R_P$  par rapport à  $R_M$  peut être définie directement comme :  $\Omega_{R_P/R_M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_p \end{pmatrix}'$ . A l'aide de cette dernière équation et des relations (I.40) et (I.42), nous pouvons déduire les composantes du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la base  $R_M$ , exprimées dans le repère  $R$  :

$$T_{R_C/R_M}^R = \begin{pmatrix} -a \sin(\theta + \theta_p) - b \cos(\theta + \theta_p) \\ a \cos(\theta + \theta_p) - b \sin(\theta + \theta_p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_p \quad (\text{I.43})$$

### Produit vectoriel $\Omega_{R_M/R} \times MC$

Afin de calculer le produit vectoriel  $\Omega_{R_M/R} \times MC$ , il est nécessaire d'exprimer d'abord le vecteur vitesse de rotation de la base mobile et le vecteur  $MC$  dans le repère  $R$ . Comme  $\Omega_{R_M/R}^R$  a été déjà défini par (I.38), seule l'expression du vecteur  $MC$  reste à déterminer.

En projetant la relation de Chasles,  $MC = MP + PC$ , dans le repère  $R$ , elle devient :  $MP^R = MP^R + PC^R$ . L'expression de  $PC^R$  a été définie par (I.42) et celle de  $MP^R$  peut être déduite de la relation  $MP^R = C_{RR_M} MP^{R_M}$  où  $C_{RR_M}$  est donnée par (I.41) :  $MP^{R_M} = \begin{pmatrix} D_x & 0 & h \end{pmatrix}'$ . Après calcul, on obtient :

$$MC^R = \begin{pmatrix} D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_p) - b \sin(\theta + \theta_p) \\ D_x \sin \theta + a \sin(\theta + \theta_p) + b \cos(\theta + \theta_p) \\ h + c \end{pmatrix} \quad (\text{I.44})$$

Finalement, le produit vectoriel  $\Omega_{R_M/R} \times MC$  peut être calculé :

$$\begin{aligned} \Omega_{R_M/R} \times MC &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_p) - b \sin(\theta + \theta_p) \\ D_x \sin \theta + a \sin(\theta + \theta_p) + b \cos(\theta + \theta_p) \\ h + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -D_x \sin \theta - a \sin(\theta + \theta_p) - b \cos(\theta + \theta_p) \\ D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_p) - b \sin(\theta + \theta_p) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

Tous les éléments nécessaires au calcul du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère  $R$  sont donc réunis. En remplaçant les relations (I.38), (I.43) et (I.45), dans

l'équation (I.36), on obtient :

$$T_{R_C/R}^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -D_x \sin \theta - a \sin(\theta + \theta_p) & -a \sin(\theta + \theta_p) \\ & & -b \cos(\theta + \theta_p) & -b \cos(\theta + \theta_p) \\ 0 & 1 & D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_p) & a \cos(\theta + \theta_p) \\ & & -b \sin(\theta + \theta_p) & -b \sin(\theta + \theta_p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \quad (\text{I.46})$$

L'asservissement visuel 2D étant basé sur la régulation des informations visuelles dans le plan image de la caméra, il est maintenant nécessaire d'exprimer le torseur  $T_{R_C/R}$  dans le repère  $R_C$ . La matrice de passage entre  $R_C$  et  $R$  est définie par :

$$C_{R_C R} = C_{R_C R_P} C_{R_P R_M} C_{R_M R} \quad (\text{I.47})$$

où  $C_{R_M R}$  et  $C_{R_P R_M}$  sont respectivement les inverses des matrices  $C_{R R_M}$  et  $C_{R_M R_P}$  données par (I.41), tandis que la matrice  $C_{R_C R_P}$  traduisant le changement de base entre  $R_C$  et  $R_P$  a pour expression :

$$C_{R_C R_P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.48})$$

Finalement, torseur cinématique de la caméra par rapport à  $R_C$  est donné par :

$$T_{R_C/R_M}^{R_C} = \begin{pmatrix} C_{R_C R} & 0 \\ 0 & C_{R_C R} \end{pmatrix} T_{R_C/R}^R \quad (\text{I.49})$$

On obtient ainsi :

$$T_{R_C/R}^{R_C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta + \theta_p) & \cos(\theta + \theta_p) & D_x \cos \theta_p + a & a \\ \cos(\theta + \theta_p) & \sin(\theta + \theta_p) & D_x \sin \theta_p - b & -b \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \quad (\text{I.50})$$

Dans cette expression, la matrice jacobienne reliant le torseur cinématique au vecteur des vitesses du robot fait apparaître plusieurs lignes de zéros qui correspondent aux mouvements impossibles de la caméra. En effet, la structure mécanique que nous avons considérée ne permet ni les mouvements de translation selon l'axe  $x_c$ , ni les mouvements de rotation autour des axes  $y_c$  et  $z_c$ . En introduisant le vecteur de coordonnées généralisées  $q = (s_c \ \theta \ \theta_p)'$  où  $s_c$  désigne l'abscisse curviligne du point  $M$  par rapport à  $R$ , et

en remplaçant le vecteur  $\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\theta} \end{pmatrix}'$  par l'équation (I.37), l'équation (I.50) peut être réécrite :

$$T_{R_C/R}^{R_C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_p & D_x \cos \theta_p + a & a \\ \cos \theta_p & D_x \sin \theta_p - b & -b \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{q}, \quad (\text{I.51})$$

avec  $\dot{q} = \begin{pmatrix} v & \dot{\theta} & \dot{\theta}_p \end{pmatrix}'$ . En supprimant les lignes de zéros qui correspondent aux mouvements impossibles de la caméra on peut écrire une expression plus compacte de cette relation en introduisant un *torseur cinématique réduit*  $T_{red}^{R_C}$  ne comportant que les trois degrés de liberté de la caméra réellement commandables. L'équation (I.51) devient :

$$T_{red}^{R_C} = J_{red} \dot{q} \quad (\text{I.52})$$

où la matrice jacobienne réduite  $J_{red}$  est donnée par :

$$J_{red} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_p & D_x \cos \theta_p + a & a \\ \cos \theta_p & D_x \sin \theta_p - b & -b \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.53})$$

Un calcul direct montre que le déterminant de  $J_{red}$  est égal à la distance fixe  $D_x > 0$  entre les points  $P$  et  $M$  du robot (voir figure I.3). Cette matrice est donc régulière, démontrant qu'un difféomorphisme local existe entre le vecteur vitesse du robot et le torseur cinématique de la caméra. Cette relation prouve clairement que, grâce à l'introduction du degré de liberté en rotation apporté par la platine, l'ensemble des vitesses instantanées de la caméra n'est plus limité par la contrainte non-holonyme de la base mobile.

#### I.4.2 Satisfaction des contraintes dynamiques des actionneurs

Le torseur cinématique de la caméra  $T_{red}^{R_C}$ , défini dans l'équation (I.52), peut être considéré comme l'entrée de commande du système. Toutefois, afin de permettre la prise en compte des contraintes dynamiques des actionneurs qui limitent les vitesses et les accélérations du robot, nous avons choisi de rajouter un intégrateur au système afin de considérer comme entrée de commande le torseur d'accélération de la caméra  $\dot{T}_{red}^{R_C}$ , au lieu du torseur cinématique. Par la suite, nous considérons donc un système augmenté de dimension 6, au lieu du système initial de dimension 3. Pour traduire les limites en vitesse et en accélération du robot, il est nécessaire d'imposer des bornes sur les torseurs  $T_{red}^{R_C}$  et  $\dot{T}_{red}^{R_C}$  de la caméra. Dans la suite de cette section, nous décrivons le procédé que nous avons considéré pour définir ces bornes.

En utilisant la relation (I.52), on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} T_{red}^{R_C} \\ \dot{T}_{red}^{R_C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{red} & 0 \\ \dot{J}_{red} & J_{red} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} \quad (\text{I.54})$$

où  $\ddot{q} = (\dot{v} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\theta}_p)'$  est l'accélération généralisée du robot et  $\dot{J}_{red}$  représente la dérivée par rapport au temps de la matrice jacobienne réduite, donnée par :

$$\dot{J}_{red} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_p \cos \theta_p & -\dot{\theta}_p D_x \sin \theta_p & 0 \\ -\dot{\theta}_p \sin \theta_p & \dot{\theta}_p D_x \cos \theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.55)$$

Les limites dynamiques des actionneurs permettent de définir des bornes sur le vecteur  $(\dot{q}' \ \ddot{q}')'$  du type :

$$-\begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \quad (I.56)$$

En utilisant la propriété des inégalités vectorielles [5], [101], à partir de l'inégalité précédente on obtient :

$$-\begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} J_{red} & 0 \\ \dot{J}_{red} & J_{red} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \quad (I.57)$$

En considérant la relation (I.54), nous pouvons alors définir des bornes pour le torseur cinématique  $T_{red}^{RC}$  et le torseur d'accélération  $\dot{T}_{red}^{RC}$  de la manière suivante :

$$-\begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} T_{red}^{RC} \\ \dot{T}_{red}^{RC} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \quad (I.58)$$

Pour garantir la satisfaction des contraintes dynamiques du robot, il suffit donc d'imposer aux torseurs  $T_{red}^{RC}$  et  $\dot{T}_{red}^{RC}$  deux bornes vectorielles  $u_1 \in \mathbb{R}^3$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^3$  satisfaisant la contrainte suivante :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \quad (I.59)$$

avec

$$\begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\sin \theta_p| & |D_x \cos \theta_p + a| & |a| & 0 & 0 & 0 \\ |\cos \theta_p| & |D_x \sin \theta_p - b| & |b| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{q}_{max(3)} |\cos \theta_p| & \dot{q}_{max(3)} D_x |\sin \theta_p| & 0 & |\sin \theta_p| & |D_x \cos \theta_p + a| & |a| \\ \dot{q}_{max(3)} |\sin \theta_p| & \dot{q}_{max(3)} D_x |\cos \theta_p| & 0 & |\cos \theta_p| & |D_x \sin \theta_p - b| & |b| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.60)$$

En considérant les valeurs numériques propres aux robots superscout du LAAS-CNRS (voir figure I.4), nous avons fixé les valeurs des paramètres du problème de la manière suivante :

$$a = b = 0, D_x = 0.15m, \theta_p \in [-\pi \text{ rad}, \pi \text{ rad}]$$

et les limites des actionneurs dynamiques du système

$$\dot{q}_{max} = (1m \text{ s}^{-1} \ 1rad \text{ s}^{-1} \ 1rad \text{ s}^{-1})'$$

$$\ddot{q}_{max} = ( 5m s^{-2} \quad 1rad s^{-2} \quad 4rad s^{-2} )'$$

Finalement, pour ces valeurs, à partir de la relation (I.59) on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1m s^{-1} \\ 1m s^{-1} \\ 0.5rad s^{-1} \\ 4m s^{-2} \\ 4m s^{-2} \\ 5rad s^{-2} \end{pmatrix} \leq \min_{\theta_p} \begin{pmatrix} |J_{red}| & 0 \\ \dot{J}_{red} & -J_{red} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \quad (I.61)$$

Ceci nous permet de choisir les bornes  $u_1$  et  $u_0$  sur le torseur cinématique  $T_{red}^{R_C}$  et le torseur d'accélération  $\dot{T}_{red}^{R_C}$  de la caméra de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1m s^{-1} \\ 1m s^{-1} \\ 0.5rad s^{-1} \\ 4m s^{-2} \\ 4m s^{-2} \\ 5rad s^{-2} \end{pmatrix} \leq \min_{\theta_p} \left( \left| \begin{pmatrix} J_{red} & 0 \\ \dot{J}_{red} & -J_{red} \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{pmatrix} \right) \quad (I.62)$$

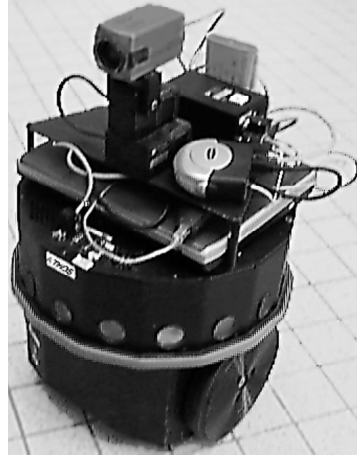


FIG. I.4: Vue du robot superscout équipé d'une caméra orientable en lacet

## I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions de base permettant d'introduire le problème d'asservissement visuel 2D que nous considérons tout au long de la thèse. Nous avons introduit tout d'abord un modèle géométrique sténopé de la caméra. Sur la base de ce modèle, nous avons rappelé la notion de matrice d'interaction et rappelé son calcul dans le cas d'un point 2D.

Nous avons ensuite présenté le formalisme des fonctions de tâches en définissant la notion de  $\rho$ -admissibilité. Sur cette base, nous avons ensuite rappelé l'approche classique permettant d'élaborer une loi de commande cinématique en imposant une décroissance exponentielle de la fonction de tâche. Nous avons ensuite expliqué les limites de ce schéma nominal, liées à l'incertitude sur certains paramètres et aux contraintes de nature différente, relatives à chaque tâche.

Nous avons ensuite introduit le modèle d'un robot à roues de type char supportant une caméra orientable en lacet. Sur cette base, nous avons décrit les différents paramètres qui permettront de définir le problème de commande qui sera traité au chapitre III. L'ensemble des techniques que nous avons développées seront ensuite simulées sur la base de ce modèle.

Dans le chapitre suivant, nous présentons des concepts fondamentaux concernant la stabilité des systèmes dynamiques et quelques techniques d'automatique avancées que nous utiliserons pour la synthèse des commandes multi-critères dans le chapitre III.



---

# Chapitre II

## Concepts de base

---

### II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments sur les systèmes soumis à des saturations en amplitude. Nous abordons en particulier les notions de stabilité de ces systèmes et la représentation mathématique de la saturation.

Par la suite, nous rappelons quelques concepts fondamentaux concernant la stabilité des systèmes dynamiques à temps continu en nous basant sur les notions d'invariance positive et de stabilité au sens de Lyapunov [63].

### II.2 Quelques généralités sur les systèmes saturés

Nous définissons tout d'abord la loi de commande saturée et le système non-linéaire en boucle fermée associé qui seront les objets d'étude de cette thèse. Dans ce but, nous considérons un système linéaire continu, invariant dans le temps, décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{II.1})$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Considérons que la commande est une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire, le système est bouclé par un retour d'état du type :

$$u(t) = Kx(t) \quad (\text{II.2})$$

avec  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .



Si aucune contrainte d'amplitude n'est présente sur la commande du système (II.1), le système bouclé est donné par l'équation linéaire classique :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (\text{II.3})$$

Dans ce cas, la stabilité du système bouclé est caractérisée par les valeurs propres de  $(A + BK)$ . Si le système  $(A, B)$  est stabilisable, la matrice  $K$  peut être choisie telle que toutes les valeurs propres de  $(A + BK)$  appartiennent au demi-plan complexe gauche ouvert. La stabilité asymptotique du système linéaire (II.3) est alors garantie dans un sens global.

Supposons maintenant que la commande soit soumise à des contraintes d'amplitudes, c'est-à-dire, chaque composante  $u_{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , du vecteur de commande est comprise entre une valeur maximale et une valeur minimale. Autrement dit, à chaque instant  $t$ , le vecteur de commande  $u(t)$  doit appartenir à un ensemble polyédral  $\Omega$  défini dans l'espace de commande par :

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^m; -u_{\min} \preceq u \preceq u_{\max}\} \quad (\text{II.4})$$

avec  $u_{\min(i)}, u_{\max(i)} > 0$ , pour  $i = 1, \dots, m$ . Dans cette thèse, nous pouvons simplement supposer que les valeurs  $u_{\min(i)}$  et  $u_{\max(i)}$  sont égales comme :  $u_{\min(i)} = u_{\max(i)} = u_{0(i)}$ , avec  $u_{0(i)} > 0$ , pour  $i = 1, \dots, m$ . Ainsi, en considérant le retour d'état (II.2), si la valeur de  $K_{(i)}x(t)$  est supérieure à  $u_{0(i)}$ , la commande restera bloquée sur  $u_{0(i)}$ . De la même façon, si  $K_{(i)}x(t)$  est inférieure à  $-u_{0(i)}$ , la commande restera bloquée sur  $-u_{0(i)}$ . Dans ce cas, on dit qu'il y a **saturation de la commande**. La loi de commande effectivement appliquée au système (II.1) est donc :

$$u(t) = \text{sat}_{u_0}(Kx(t)) \quad (\text{II.5})$$

avec chaque composante  $u_{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , définie par :

$$u_{(i)}(t) = (\text{sat}_{u_0}(Kx(t)))_{(i)} = \begin{cases} u_{0(i)} & \text{si } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \\ K_{(i)}x(t) & \text{si } |K_{(i)}x(t)| \leq u_{0(i)} \\ -u_{0(i)} & \text{si } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

La loi de commande (II.5) est appelée dans la littérature **retour d'état saturé** ou **retour d'état saturant**. La fonction saturation  $u(t) = \text{sat}_{u_0}(Kx(t))$  que nous considérons est décrite par la courbe montrée dans la figure II.1.

Le système en bouclé fermée, obtenu par l'application du **retour d'état saturant** au système (II.1), est le système **non-linéaire** suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(Kx(t)) \quad (\text{II.7})$$

Désormais, nous appelons le système (II.7) comme le **système en boucle fermée avec saturation des commandes**, ou, tout simplement, **système saturé**. Il est important de souligner que le choix d'un gain  $K$ , tel que la matrice  $(A + BK)$  est Hurwitz, ne suffit

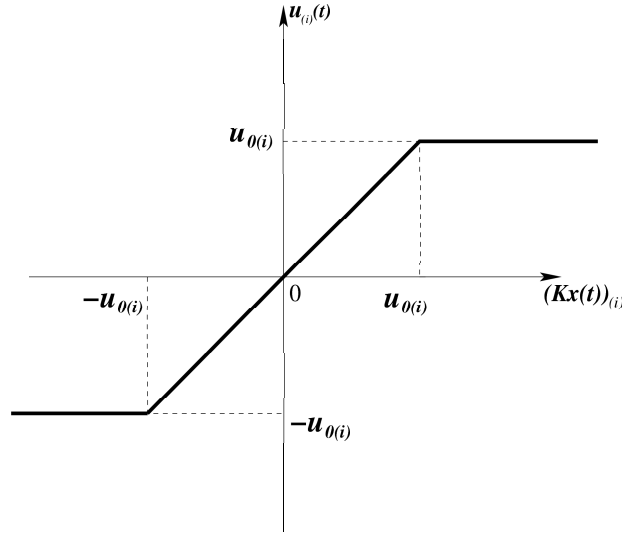


FIG. II.1: Fonction saturation

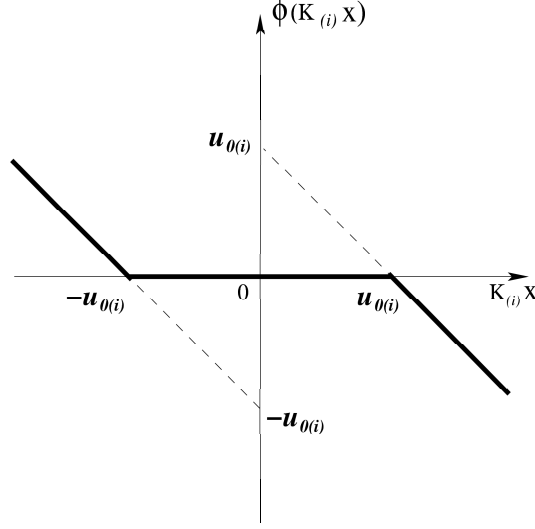
pas à garantir la stabilité globale du système (II.7) [98]. La stabilité du système (II.7) est intimement liée à la stabilité de la matrice du système en boucle ouverte et au choix fait pour la condition initiale  $x(t = 0) = x(0)$  : les contextes de stabilité globale, semi-globale ou locale peuvent alors être étudiés [104], [54], [59]. Lorsque le système en boucle ouverte n'est pas nul contrôlable [54] ou lorsque l'on considère des exigences de performances ou de robustesse, c'est la stabilité (ou stabilisation) local qui doit être considérée. Dans ce cas, un objectif implicite est d'élargir le bassin d'attraction du systèmes bouclé.

Pour donner des conditions de stabilité asymptotique pour le système saturé (II.7), nous allons besoin de donner une représentation mathématique du système saturé. Dans la littérature, différents moyens de représenter le comportement du système non-linéaire (II.7) sont utilisés :

- (A1) à partir de l'utilisation d'inclusions différentielles qui conduisent à la description d'un modèle polytopique [54], [12], [55], [41], [44].
- (A2) à partir d'une description par régions de saturation [42], [58].
- (A3) à partir de la définition d'une non-linéarité de type zone morte et de l'utilisation de la condition de secteur classique [63], [51], [85].

L'approche (A1), dans son cadre le plus récent, permet d'exprimer des conditions de stabilité de type LMIs aussi bien dans un contexte analyse que dans un contexte synthèse. Cependant la complexité numérique associée à ce type de modèle peut s'avérer très lourde en fonction du nombre d'états et de commandes. La deuxième approche permet de développer des conditions dans un contexte d'analyse, le cas de la synthèse étant trop complexe à traiter via cette modélisation.

L'un des problèmes de l'approche (A3) est qu'elle conduit à exprimer des conditions de type BMIs. Des algorithmes itératifs faisant appel à des LMIs peuvent être considérés mais restent cependant très sensible à l'initialisation.

FIG. II.2: Description de la non-linéarité  $\phi(Kx)$ 

Récemment, une condition de section modifiée a été proposée [45] permettant dans le même contexte que l'approche **(A3)** de développer des conditions LMIs, d'une complexité numérique moindre que l'approche **(A1)** et qui peuvent être résolues avec une garantie de convergence.

Dans cette thèse, nous choisis d'utiliser le formalisme décrit dans [45]. Dans ce but, nous considérons la non-linéarité  $\phi(Kx)$

$$\phi(Kx) = \text{sat}_{u_0}(Kx) - Kx \quad (\text{II.8})$$

dont chaque composante  $\phi(K_{(i)}x)$  est définie par :

$$\phi(K_{(i)}x) = \begin{cases} u_{0(i)} - K_{(i)}x & \text{si } K_{(i)}x > u_{0(i)} \\ 0 & \text{si } |K_{(i)}x| \leq u_{0(i)} \\ -u_{0(i)} - K_{(i)}x & \text{si } K_{(i)}x < -u_{0(i)} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (\text{II.9})$$

La non-linéarité  $\phi(Kx)$ , représentée sur la figure II.2, est une non-linéarité de type zone-morte, sans mémoire et décentralisée [63].  $\phi(Kx)$  satisfait une condition de secteur modifiée [45] qui est décrite dans le lemme suivant.

**Lemme II.1** [45] Soit une matrice  $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Si  $x \in S(u_0)$ , défini par :

$$S(u_0) = \{x \in \mathbb{R}^m; -u_0 \preceq (K - \mathbb{G})x \preceq u_0\} \quad (\text{II.10})$$

alors la non-linéarité  $\phi(Kx)$  satisfait la condition suivante :

$$\phi(Kx)'M(\phi(Kx) + \mathbb{G}x) \leq 0 \quad (\text{II.11})$$

pour toute matrice diagonale définie positive  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

A partir de la définition de la non-linéarité  $\phi(Kx(t))$  (II.8), le système saturé (II.7) peut s'écrire de manière équivalente comme :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + B\phi(Kx(t)) \quad (\text{II.12})$$

En utilisant la condition de secteur modifiée du lemme II.1, nous pouvons résoudre le problème de la synthèse d'un gain  $K$  stabilisant le système (II.12) et donc le système (II.7).

## II.3 Invariance positive et contractivité

L'invariance est très liée à la notion de stabilité. Considérons un système dynamique autonome décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\text{II.13})$$

où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Soient un ensemble  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ , un ensemble de conditions initiales  $x(0) \in \mathcal{R}$ , et  $\phi(t, x(0))$  la trajectoire du système (II.13) issue de  $x(0)$ . La définition suivante peut être donnée [63].

**Définition II.1** *Un ensemble  $\mathcal{R}$  est dit **positivement invariant** pour le système (II.13) si pour toute condition initiale  $x(0)$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{R}$ , la trajectoire respective  $\phi(t, x(0))$  reste confinée dans  $\mathcal{R}$  :*

$$\forall x(0) \in \mathcal{R} \Rightarrow \phi(t, x(0)) \in \mathcal{R}, \quad \forall t \geq 0$$

Un ensemble positivement invariant  $\mathcal{R}$  est dit **contractif** lorsque les trajectoires  $\phi(t, x(0))$  de cet ensemble évoluent toujours vers l'intérieur de l'ensemble ( $\forall x(0) \in \mathcal{R}$ ). Nous définissons d'abord une fonction continûment différentiable, définie dans l'ensemble  $\mathcal{R}$ ,  $V(x) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La dérivée par rapport au temps de  $V(x)$  le long de la trajectoire du système (II.13), notée  $\dot{V}(x)$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Ainsi, elle peut être exprimée par la trajectoire du système (II.13) comme :

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi(t, x(0))) \quad (\text{II.15})$$

En considérons la fonction  $V(x)$ , nous pouvons définir l'ensemble  $\mathcal{R}$  par la relation suivante :

$$\mathcal{R} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; 0 < V(x) \leq c, \quad c > 0, \quad \forall t \geq 0\}$$

alors la définition de la contractivité suivante peut être donnée.

**Définition II.2** *L'ensemble  $\mathcal{R}$  est contractif par rapport au système (II.13) si  $\dot{V}(x(t)) < 0, \quad \forall t \geq 0$ .*

Notons qu'un ensemble contractif est toujours positivement invariant mais la réciproque n'est pas vérifiée. Dans la section suivante, nous allons voir que les concepts d'ensembles positivement invariants et contractifs sont liés au concept de domaines de stabilité d'un système dynamique.

## II.4 Stabilité au sens de Lyapunov

### II.4.1 Seconde méthode de Lyapunov

Le concept de stabilité au sens de Lyapunov, et plus particulièrement la seconde méthode de Lyapunov, permet de caractériser des domaines de stabilité pour des systèmes non-linéaires. Cette notion est intimement liée à la notion de fonction de Lyapunov. La définition d'une fonction de Lyapunov est présentée comme suit.

**Définition II.3** *La fonction  $V : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de Lyapunov, si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1.  $V(x)$  est continue et ses dérivées partielles  $\dot{V}_i(x)$  ( $\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i}$ ) existent et sont continues pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
2.  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$  et  $V(0) = 0$ .

L'existence d'une fonction de Lyapunov contractive le long des trajectoires d'un système permet de garantir la stabilité de ce système, comme cela est explicité dans le théorème suivant.

**Théorème II.1** *Dans un voisinage  $D \subset \mathbb{R}^n$ , l'équilibre  $x = 0, x \in D$ , est :*

- localement stable s'il existe une fonction de Lyapunov,  $V(x)$ , telle que  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in D$ .
- localement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction de Lyapunov,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\dot{V}(x) < 0$  pour tout  $x \in D, x \neq 0$ .

Il est important de souligner que le théorème II.1 garantit la stabilité dans un sens local, c'est-à-dire dans un voisinage de l'origine contenu dans l'ensemble  $D$ . Si la convergence des trajectoires vers l'origine est garantie quel que soit  $x(0) \in D = \mathbb{R}^n$  alors le système est dit globalement asymptotiquement stable. Le théorème II.1 fournit ainsi une condition **suffisante** pour la stabilité. Par conséquent, si nous ne sommes pas capables de trouver une fonction de Lyapunov nous ne pouvons rien conclure sur la stabilité de l'origine par rapport aux trajectoires du système (II.13).

### II.4.2 Région d'attraction de l'origine

Lorsque l'origine est asymptotiquement stable, le plus grand ensemble de l'espace d'état dans lequel toute trajectoire initialisée converge vers l'origine est appelée la **région d'attraction de l'origine**. Cette région est définie comme suit.

**Définition II.4** Soit  $\phi(t, x(0))$ , la trajectoire qui part, à l'instant  $t = 0$ , de l'état initial,  $x(0)$ . La **région d'attraction de l'origine**,  $R_A$  est définie comme l'ensemble de tous les points  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que pour  $x = x(0)$  on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x(0)) = 0$ , c'est-à-dire,

$$R_A = \{x(0) \in \mathbb{R}^n; \phi(t, x(0)) \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty\}$$

Lorsque le système est globalement asymptotiquement stable, nous avons  $R_A = \mathbb{R}^n$ .

La détermination exacte de la région d'attraction de l'origine par une approche analytique est généralement impossible [63]. Néanmoins nous pouvons déterminer des approximations de la région d'attraction, c'est-à-dire, nous pouvons trouver des régions de l'espace d'état dans lesquels la convergence asymptotique des trajectoires vers l'origine est assurée. Ces estimations peuvent par exemple être caractérisées à partir de fonctions de Lyapunov. Dans le cas de fonctions quadratiques de Lyapunov, on peut associer à ces fonctions des régions ellipsoïdales. Puisque ces régions sont des estimations, il est nécessaire de considérer une étape d'optimisation afin de maximiser la taille de tels domaines pour obtenir l'estimation de la région d'attraction de l'origine la moins conservative possible.

## II.5 Stabilité quadratique

La stabilité quadratique correspond à l'application de la notion de stabilité au sens de Lyapunov lorsque l'on considère des systèmes incertains et des fonctions de Lyapunov quadratiques. Barmish [5] a formalisé ce concept de stabilité quadratique en ramenant le problème lié à la stabilisabilité d'un système incertain au problème de recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique pour le système incertain.

Si l'on considère le système incertain :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) = A(t)x(t) \quad (\text{II.16})$$

où  $A(t) = A + \Delta A$  est une matrice incertaine appartenant à un ensemble compact  $\mathcal{A}$ . Une classe de fonction de Lyapunov quadratique que l'on utilisera tout au long de cette thèse peut être décrite sous la forme suivante :

$$V(x) = x'Px \quad (\text{II.17})$$

cette fonction est définie positive si la matrice  $P$  est une matrice symétrique définie positive,  $P = P' > 0$ . Ce type de fonction s'avère être une fonction de Lyapunov du

système car elle satisfait toutes les conditions de la définition II.3. Dans ce cas, le système (II.16) est dit stable quadratiquement s'il existe une matrice  $P = P' > 0$  telle que la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique :

$$\dot{V}(x) = x'(A'(t)P + PA(t))x < 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique pour le système incertain (II.16) [119] est :

- dans le cas d'incertitudes bornées en norme avec

$$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

qu'il existe une matrice  $P = P' > 0$  telle que l'inégalité matricielle suivante soit satisfaite :

$$A_0'P + PA_0 + PDD'P + E'E < 0 \quad (\text{II.19})$$

- dans le cas d'incertitudes polytopiques avec

$$\mathcal{A} = \text{Co}\{A_1, \dots, A_{n_A}\}$$

, qu'il existe une matrice  $P = P' > 0$  telle que l'inégalité matricielle suivante soit satisfaite :

$$A_i'P + PA_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_A \quad (\text{II.20})$$

$n_A$  dénote le nombre de sommets  $A_i$ .

Notons que ces conditions sont uniquement suffisantes pour assurer la stabilité robuste du système incertain (II.16), c'est-à-dire sa stabilité pour toute incertitude admissible. De manière générale, la stabilité quadratique implique la stabilité robuste, mais l'inverse n'est pas vrai. La nature suffisante de la stabilité quadratique vient en particulier du fait que la matrice de Lyapunov est unique sur l'ensemble des incertitudes affectant le système.

## II.6 Stabilité locale

Les systèmes que nous considérons dans ce mémoire sont des systèmes soumis à des limitations en amplitude sur la commande. Dans ce contexte, il est bien connu que la stabilité asymptotique globale ne peut généralement pas être garantie. C'est la raison pour laquelle nous souhaitons déterminer une région de l'espace d'état dans laquelle la stabilité asymptotique du système en boucle fermée est garantie. Cette région représente donc une approximation de la région d'attraction de l'origine associée au système bouclé. Dans cette thèse, nous nous sommes focalisés sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques et donc sur des régions de stabilité asymptotique locale de type ellipsoïdal.

Si l'on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble de l'espace d'état dans lequel la représentation mathématique du système saturé est valide, on peut définir notre objectif (dans un contexte de stabilité locale) comme la détermination d'un ensemble contractif

$$\mathcal{E}(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq \gamma^{-1}, \gamma > 0\}$$

de stabilité asymptotique par rapport au système bouclé saturé tel que

$$\mathcal{E}(\gamma) \subseteq \mathcal{S}$$

où  $V(x)$  est une fonction de Lyapunov.

Si l'on considère par exemple une fonction de Lyapunov quadratique,  $V(x) = x'Px$ , le système bouclé saturé est **localement asymptotiquement stable** dans l'ensemble  $\mathcal{E}(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq \gamma^{-1}, \gamma > 0, P = P' > 0\}$  si la matrice de Lyapunov  $P = P' > 0$  est telle que :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0, \forall x \in \mathcal{E}(\gamma)$$

le long des trajectoires du système bouclé (voir figure II.3).

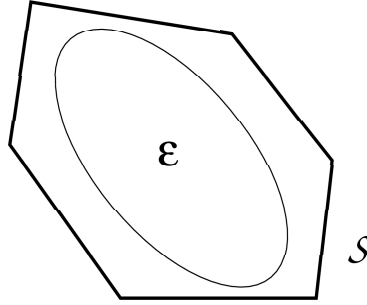


FIG. II.3: Représentation de  $\mathcal{E}(\gamma) \subseteq \mathcal{S}$

## II.7 $\mathcal{L}_2$ -stabilité

Dans cette section, nous présentons quelques éléments sur la  $\mathcal{L}_2$ -stabilité qui correspond au problème de stabilité des systèmes incertains avec des perturbations bornées en  $\mathcal{L}_2$  norme. Pour cet objectif, nous considérons un système incertain décrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)\omega(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t) \quad (\text{II.21})$$

où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont des matrices incertaines appartenant à deux ensembles compacts  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ ,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$  est un vecteur de perturbation qui est bornée en énergie de la manière suivante :

$$\|\omega(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall \delta > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{\delta} < \infty \quad (\text{II.22})$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique (II.17). Le système (II.21) est dit  $\mathcal{L}_2$ -stable s'il existe une matrice  $P = P' > 0$  telle que la dérivée par rapport au



temps de la fonction de Lyapunov quadratique vérifie la relation suivante ( $\forall A(t) \in \mathcal{A}$  et  $\forall B(t) \in \mathcal{B}$ ) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) - \omega' \omega &= x'(A'(t)P + PA(t))x + \omega' B'(t)Px + x'PB(t)\omega - \omega' \omega \\ &= \begin{pmatrix} x' & \omega' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(t)P + PA(t) & PB(t) \\ B'(t)P & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

pour toute perturbation  $\omega(t)$  satisfaisant (II.22).

En effet, si la condition (II.23) est vérifiée, nous pouvons l'intégrer comme :

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau, \quad \forall t > 0 \quad (\text{II.24})$$

soit encore :

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \quad (\text{II.25})$$

Ainsi, une condition suffisante de  $\mathcal{L}_2$ -stabilité pour le système incertain (II.21) est :

– dans le cas d'incertitudes bornées en norme avec

$$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E_1, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{B_0 + DF(t)E_2, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

qu'il existe une matrice  $P = P' > 0$  et un scalaire positive  $\epsilon$  tels que l'inégalité matricielle suivante soit satisfaite :

$$\begin{pmatrix} A_0'P + PA_0 + \epsilon PDD'P & PB_0 & E_1' \\ B_0'P & -I_q & E_2' \\ E_1 & E_2 & -\epsilon I_r \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{II.26})$$

– dans le cas d'incertitudes polytopiques avec

$$\mathcal{A} = Co\{A_1, \dots, A_{n_A}\}$$

$$\mathcal{B} = Co\{B_1, \dots, B_{n_B}\}$$

qu'il existe une matrice  $P = P' > 0$  telle que l'inégalité matricielle suivante soit satisfaite :

$$\begin{pmatrix} A_i'P + PA_i & PB_j \\ B_j'P & -I_q \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{II.27})$$

pour tout  $i = 1, \dots, n_A$  et  $j = 1, \dots, n_B$ .  $n_B$  dénote le nombre de sommets  $B_i$ .

## II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord défini quelques éléments sur les systèmes saturés. En introduisant la définition de la non-linéarité de type zone-morte sans mémoire et décentralisée, nous pouvons synthétiser une loi de commande par retour d'état pour un système saturé en utilisant une condition de secteur modifiée. Ensuite, nous avons donné les définitions d'ensembles positivement invariants et contractifs, puis nous avons donné un rapide aperçu des résultats relatifs à la stabilité au sens de Lyapunov pour des systèmes non linéaires. En particulier, nous avons rappelé la deuxième méthode de Lyapunov dans le sens local et global. Dans le cas de la stabilité asymptotique locale, nous avons défini la région d'attraction de l'origine (d'un point d'équilibre). Puisque cette région en général n'est pas analytiquement déterminable, nous avons vu qu'il était possible de déterminer des régions de stabilité asymptotique locale de type ellipsoïdal, à partir de fonctions de Lyapunov quadratique. Ces régions peuvent donc être considérées comme des approximations de la région d'attraction de l'origine. Dans le cas de fonctions quadratiques de Lyapunov, nous pouvons ainsi caractériser les conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité quadratique, pour un système incertain, soit borné en norme, soit borné dans un polytope. Nous avons également présenté rapidement la notion de  $\mathcal{L}_2$ -stabilité pour un système soumis à une perturbation additive bornée en énergie.

Ces résultats et définitions serviront de base, directement ou indirectement, pour l'étude de la stabilisation des systèmes incertains, avec saturation de la commande, qui sera menée dans cette thèse.



---

## Chapitre III

# Tâches de positionnement du robot et d'orientation de la caméra

---

### III.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre I, la commande référencée capteur permet de réguler localement le mouvement du robot sur la base de données capteurs relatives à la perception d'amers de la scène. La définition d'un lien sensoriel direct entre le capteur et son environnement permet de définir des schémas de commande plus robuste par rapport aux erreurs de modélisation que les méthodes nécessitant la relocalisation du robot. Le formalisme de fonction de tâches offre un cadre mathématique formel pour modéliser différentes tâches du robot [99]. Pour synthétiser une loi de commande référencée capteur pour stabiliser ce type de fonction de tâche, dans la littérature, de nombreux types de lois de commande ont été proposés. Par exemple, loi de commande non linéaire [49], [93], optimale de type LQ ou LQG [47], [87], fondée sur un contrôleur GPC [37], voire robuste  $H_\infty$  [60], [62] ou par retour d'état continu instationnaire [113] dans le cas de robots mobiles présentant des contraintes non holonomes.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'utilisation de techniques de commande avancées permet de prendre en compte un ensemble de contraintes lors de la synthèse du correcteur pour la commande référencée capteur. Les méthodes proposées sont appliquées à la synthèse d'une loi de commande référencées capteur consistant à asservir le mouvement du robot vers la cible avec une vitesse de référence tout en contrôlant la caméra de sorte qu'elle reste face à la cible. Ces méthodes sont également considérées pour synthétiser une loi de commande référencée vision 2D consistant à commander le mouvement d'une caméra dans le plan horizontal pour la positionner face à une cible. L'objectif

de commande est la stabilisation de la caméra, tout en tenant compte des incertitudes sur les profondeurs des points de la cible, des contraintes de visibilité et des contraintes dynamiques du système. Ces différentes conditions peuvent être énoncées de la manière suivante :

- La cible visuelle est constituée de points. Elle peut être fixe ou mobile. La profondeur des points de la cible par rapport au repère  $R_C$  de la caméra est inconnue, mais le protocole expérimental considéré permet de la borner.
- Le long du mouvement, la visibilité de la cible doit être garantie.
- Les torseurs de vitesse et d'accélération de la caméra doivent rester bornés de sorte que les contraintes dynamiques des actionneurs soient satisfaites.

Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons le modèle de la cible et les différents paramètres du problème permettant de donner un énoncé clair de ces différents objectifs. Sur cette base, nous précisons les expressions des fonctions de tâches qui vont nous permettre de résoudre ce problème. Nous nous intéressons d'abord à une tâche d'asservissement en cap puis à une tâche de positionnement par rapport à une cible composée de trois points, avec dans ce dernier cas une cible qui peut être fixe ou mobile [108], [103], [39]. Les fonctions des tâches sont toutes décrites comme un système en boucle fermée polytopique avec une non-linéarité de type zone-morte, issue de la saturation, qui satisfait une condition de secteur modifiée. Ce système permet l'expression de conditions de stabilité constructives sous forme d'équations linéaires matricielles (LMIs) en donnant une borne admissible des erreurs visuelles de la caméra. Il est alors possible d'utiliser des méthodes d'optimisation pour le calcul du gain de retour d'état conduisant à maximiser la taille du domaine de stabilité du système en boucle fermée.

Nous présentons tout d'abord dans la section III.2 la tâche d'asservissement en cap qui consiste à conduire le robot vers la cible en suivant une vitesse de référence tout en contrôlant la caméra de sorte qu'elle reste face à la cible. Dans la section III.3, nous présentons la tâche de positionnement de la caméra par rapport à une cible composée de 3 points. Dans ce cas, nous allons considérer séparément les deux cas : cible fixe et cible mobile. Après la synthèse d'une loi de commande référencée capteur par rapport à chaque fonction de tâche, les résultats sont illustrés en simulation.

Désormais, dans la suite de cette thèse, pour simplifier la notation, nous définissons simplement le torseur cinématique réduit de la caméra par rapport à la scène  $R$ , exprimé dans le repère de la caméra  $R_C$ ,  $T_{red}^{R_C}$  comme  $T$ , et la matrice jacobienne réduite  $J_{red}$  comme  $J$ .

## III.2 Tâche d'asservissement en cap

### III.2.1 Modèle de la cible

Rappelons que l'on travaille sur un modèle de robot qui est muni d'une platine mobile commandable en lacet (voir figure I.3), équipé d'un odomètre fournissant des mesures proprioceptives, d'une caméra CCD donnant les informations visuelles, et de capteurs

ultrasons traitant les données proximétriques. Comme nous l'avons expliqué dans les sections 1.2.4 et 1.3.2, pour contrôler les degrés de liberté d'un système, il est nécessaire de disposer autant d'informations des capteurs indépendantes. Dans ce cas, puisque le mouvement du robot est restreint au plan horizontal, le contrôle des deux degrés de liberté en translation de la caméra dans le plan horizontal, et d'un degré de liberté en rotation selon l'axe vertical, requiert au moins trois informations indépendantes. Pour le modèle que nous considérons, la caméra restant à une hauteur constante, une cible de trois points alignés horizontalement permet l'exécution de la tâche de positionnement. Le modèle de la cible est représenté sur la figure III.1. Cette cible est constituée de trois points alignés équidistants  $E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  appartenant au même plan horizontal que le centre optique  $C$  de la caméra. La variable  $l > 0$  dénote la distance entre deux points consécutifs de la cible,  $\alpha$  dénote l'angle entre la droite  $(E_1E_3)$  de la cible et l'axe optique  $z_C$ , et  $\eta$  est un angle entre l'axe optique  $z_C$  et la droite  $(CE_2)$ . Afin de pouvoir définir des bornes sur la profondeur des points de la cible par rapport au repère caméra, nous faisons l'hypothèse que la distance  $d_1 = CE_2$  entre la caméra et la cible est bornée à l'aide de la relation suivante :

$$d_1 \in [d_{1min}, d_{1max}] \quad (\text{III.1})$$

Par ailleurs, pour éviter les configurations singulières pour lesquelles les points de la cible se projettent en un même point sur le plan image de la caméra, on impose également la condition suivante :

$$\alpha \in [-\pi + \alpha_{min}, -\alpha_{min}] \quad (\text{III.2})$$

dans laquelle  $\alpha_{min} > 0$  est un petit angle. Nous supposons donc que la caméra est libre de se déplacer dans le large secteur défini par les relations (III.1) et (III.2). Par la suite, nous montrerons qu'il est possible, à partir de la définition de ce secteur, de caractériser des bornes sur la profondeur des points de la cible. Nous allons maintenant définir la fonction de tâche d'asservissement en cap qui sera considérée pour conduire le robot vers la cible avec la vitesse de référence tout en réalisant le centrage de la cible dans l'image de la caméra.

### III.2.2 Définition d'une fonction de tâche d'asservissement en cap

Pour réaliser l'objectif de la tâche d'asservissement visuel qui est décrit dans la section précédente, trois types de données capteurs sont considérées. L'odomètre est utilisé pour réguler la vitesse linéaire de la base mobile  $v$ , tandis que les ultrasons sont utilisés pour contrôler la vitesse angulaire de la base mobile  $\dot{\theta}$  (la dérivée par rapport au temps de l'orientation de la base mobile  $\theta$ ), et la caméra est utilisée pour contrôler la vitesse angulaire de la plateforme  $\theta_p$ . Avec ces trois données capteurs, en mesurant l'orientation de la platine  $\theta_p$ , nous pouvons contrôler implicitement la vitesse du robot  $\dot{q}$  ( $\dot{q} = \begin{pmatrix} v & \dot{\theta} & \dot{\theta}_p \end{pmatrix}'$ )

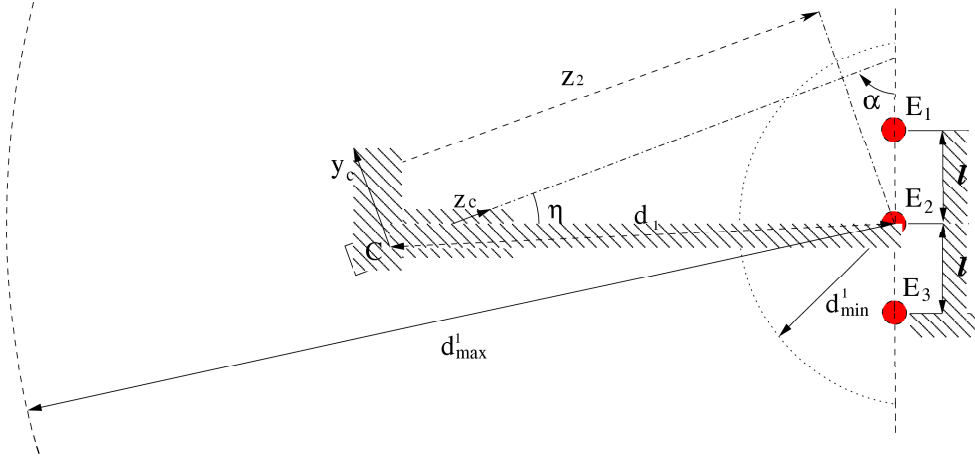


FIG. III.1: Modèle de la cible et description des paramètres pour la tâche d'asservissement en cap

avec le torseur cinématique de la caméra  $T$  en utilisant la relation (I.52). La fonction de tâche d'asservissement en cap est définie comme suit :

$$e_{cap}(t) = \begin{pmatrix} e_{cap(1)} \\ e_{cap(2)} \\ e_{cap(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{y_C} \\ s_{z_C} - v_{z_C}^* t \\ Y_2 - Y_2^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{III.3})$$

où  $s_{y_C}$  et  $s_{z_C}$  désignent respectivement l'abscisse curviligne du point  $C$  (voir figure III.1) dans l'axe  $y_C$  et l'axe  $z_C$  (en effet  $s_{y_C}$  et  $s_{z_C}$  sont les résultats des intégrations des composantes  $T_{(1)}$  et  $T_{(2)}$ );  $v_{z_C}^*$  est la vitesse constante de référence de la caméra à la direction de l'axe  $z_C$ ,  $Y_2$  représente l'ordonnée du point central  $E_2$  de la cible dans le plan image de la caméra, et  $Y_2^*$  représente son ordonnée de référence. Dans le travail de cette thèse, nous considérons que l'ordonnée de référence  $Y_2^*$  égale zéro,  $Y_2^* = 0$ . Autrement dit, le centre de la cible est toujours projeté au centre du plan image de la caméra à la position de référence de la caméra par rapport à la cible. Donc la régulation à zéro de cette fonction de tâche correspond à l'objectif de la tâche d'asservissement en cap. En calculant la dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche  $e_{cap}(t)$  à l'aide de la relation (I.14), on obtient :

$$\dot{e}_{cap}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{e_{cap(3)}}{z_2} & 1 + e_{cap(3)}^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}_1(z_2, e_{cap(3)})} T(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}_2} v_{z_C}^* \quad (\text{III.4})$$

où  $z_2$  est la profondeur du point central de la cible dans le repère de la caméra  $R_C$ .

En outre, pour garantir la visibilité de la cible, nous imposons la limite suivante à la variable  $e_{cap(3)}$  :

$$|e_{cap(3)}| \leq \beta \quad (\text{III.5})$$

où  $\beta > 0$  est un scalaire positif. En conséquence, l'angle  $\eta$  est borné par :

$$|\eta| \leq \eta_{max} = \arctan(\beta) < \pi/2 \quad (\text{III.6})$$

La profondeur  $z_2$  du point central de la cible  $E_2$  par rapport au repère de la caméra  $R_C$  (cf. la figure III.1) est définie comme suit :

$$z_2 = d_1 \cos(\eta) \quad (\text{III.7})$$

qui est bornée par la relation suivante :

$$z_2 \in [d_{1min} \cos(\eta_{max}), d_{1max}] \quad (\text{III.8})$$

Puisque la matrice  $\tilde{B}_1(z_2, e_{cap(3)})$  est toujours inversible, un lien de difféomorphisme local entre l'espace des coordonnées des capteurs et l'espace de la tâche  $e_{cap}(t)$  est bien définie. Nous pouvons conclure que cette fonction de tâche (III.3) est bien  $\rho$ -admissible (voir définition I.2) [99]. Dans la dynamique de la tâche d'asservissement en cap (III.4), nous pouvons considérer que la vitesse constante de référence  $v_{z_C}^*$  est une perturbation externe.

### III.2.3 Description du problème

Dans cette section, nous allons redéfinir notre problème d'asservissement en cap. Ainsi, notre objectif est de déterminer une loi de commande et une région de stabilité associée à la tâche d'asservissement en cap telles que les contraintes suivantes sont satisfaites :

- C1** la profondeur du point central  $E_2$  de la cible par rapport au repère de la caméra ( $z_2$ ) est bornée mais inconnue.
- C2** l'erreur  $e_{cap(3)}$  entre l'indice visuel  $Y_2$  et sa consigne  $Y_2^*$  doit rester bornée pendant la réalisation de la tâche pour assurer la visibilité de la cible.
- C3** le torseur cinématique de la caméra par rapport à la scène (soit la vitesse de la caméra)  $T$  et son accélération  $\dot{T}$  doivent être bornées pour satisfaire les contraintes dynamiques des actionneurs du système robotique.

Considérons la relation (III.4), les contraintes **C1** et **C2** sur la profondeur  $z_2$  et l'erreur  $e_{cap(3)}$  sont décrites par les conditions (III.8) et (III.5). La contrainte **C3** correspondant aux contraintes dynamiques des actionneurs définies par la relation (I.62) peut être décrite en considérant les limites suivantes pour le torseur cinématique de la caméra  $T$  et sa dérivée par rapport au temps  $\dot{T}$  comme :

$$-u_1 \preceq T \preceq u_1 \quad (\text{III.9})$$

$$-u_0 \preceq \dot{T} \preceq u_0 \quad (\text{III.10})$$

Pour tenir compte des contraintes **C1**, **C2** et **C3**, nous considérons un état augmenté :

$$x(t) = \begin{pmatrix} e_{cap}(t) \\ T(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{III.11})$$



et le système complet devient :

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}_1(z_2, e_{cap(3)}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}(z_2, x)} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \dot{T}(t) + \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{pmatrix} v_{z_C}^* \quad (\text{III.12})$$

où  $\dot{T}$  est maintenant le vecteur de commande. La matrice  $\mathbb{A}(z_2, x) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est une matrice incertaine et la matrice  $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  est une matrice constante.

Rappelons-nous que l'objectif de la tâche d'asservissement en cap est de conduire le robot vers la cible avec la vitesse de référence  $v_{z_C}^*$ , tout en contrôlant la caméra afin qu'elle reste face à la cible. Ceci signifie que, dans le système augmenté (III.12), pour satisfaire cet objectif, la vitesse de la caméra  $T_{(2)}$  doit atteindre la vitesse de consigne  $v_{z_C}^*$ . Nous pouvons alors définir une erreur de tracking  $\varepsilon$  comme :

$$\varepsilon(t) = x(t) - r = \begin{pmatrix} s_{y_C} \\ s_{z_C} - v_{z_C}^* t \\ e_{cap(3)} \\ T_{(1)} \\ T_{(2)} - v_{z_C}^* \\ T_{(3)} \end{pmatrix}$$

où  $r = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_{z_C}^* \ 0) \in \mathbb{R}^6$  est un vecteur constant de référence. A partir du système (III.12), en considérant la dérivée de l'erreur  $\varepsilon$  par rapport au temps, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \mathbb{A}(z_2, \varepsilon) \varepsilon(t) + \mathbb{B} \dot{T}(t) + \mathbb{A}(z_2, \varepsilon) r + \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{pmatrix} v_{z_C}^* \\ &= \mathbb{A}(z_2, \varepsilon) \varepsilon(t) + \mathbb{B} \dot{T}(t) + \mathbb{A}(z_2, \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{B}_2 \end{pmatrix} v_{z_C}^* + \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{pmatrix} v_{z_C}^* \\ &= \mathbb{A}(z_2, \varepsilon) \varepsilon(t) + \mathbb{B} \dot{T}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e_{cap(2)}}{z_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_{z_C}^* \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Nous définissons deux matrices constantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \begin{pmatrix} I_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \\ \mathbb{C} &= \begin{pmatrix} 0 & I_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Nous pouvons alors simplifier l'écriture du système (III.13) en remarquant que le terme  $\mathbb{A}(z_2, \varepsilon)$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathbb{A}(z_2, \varepsilon)\varepsilon(t) = [\mathbb{R}'\overline{B}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R}]\varepsilon(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e_{cap_{(3)}}}{z_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_{z_C}^* \quad (\text{III.15})$$

où les matrices  $\overline{B}_1(z_2)$ ,  $\overline{B}_2(z_2)$  et  $D(e_{cap_{(3)}})$  sont définies comme :

$$\overline{B}_1(z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{B}_2(z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_2} \end{pmatrix} \quad D(e_{cap_{(3)}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{cap_{(3)}} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système (III.13) est réécrit comme le système suivant :

$$\dot{\varepsilon}(t) = [\mathbb{R}'\overline{B}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R}]\varepsilon(t) + \mathbb{B}\dot{T}(t) \quad (\text{III.16})$$

L'objectif de commande pour le système (III.16) est de déterminer une loi de commande  $\dot{T}(t)$  stabilisante telle que l'incertitude de la profondeur  $z_2$ , l'erreur de l'indice visuel  $e_{cap_{(3)}}$ , la vitesse et l'accélération de la caméra  $T$  et  $\dot{T}$  soient bornées. Plus précisément, notre objectif consiste à synthétiser une loi de commande saturante par retour d'état pour que la vitesse de la caméra dans la direction de l'axe  $z_C$ ,  $T_{(2)}$ , puisse atteindre sa valeur de référence  $v_{z_C}^*$  :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(t)) \quad (\text{III.17})$$

avec  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ . Le système (III.16) bouclé avec la commande (III.17) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = [\mathbb{R}'\overline{B}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R}]\varepsilon(t) + \mathbb{B}\text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(t)) \quad (\text{III.18})$$

Les contraintes (III.5) et (III.9) peuvent se réécrire par rapport à l'état  $\varepsilon$  du système en boucle fermée (III.18). Ainsi l'état  $\varepsilon$  doit appartenir au polyèdre  $\Omega(\varepsilon)$  :

$$\Omega(\varepsilon) = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^6; - \begin{pmatrix} \beta \\ u_{1(1)} \\ u_{1(2)} - v_{z_C}^* \\ u_{1(3)} \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} \varepsilon_{(3)} \\ \varepsilon_{(4)} \\ \varepsilon_{(5)} \\ \varepsilon_{(6)} \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} \beta \\ u_{1(1)} \\ u_{1(2)} - v_{z_C}^* \\ u_{1(3)} \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Le problème que nous souhaitons résoudre par rapport au système en boucle fermée (III.18), peut être résumé comme suit :

**Problème III.1** Déterminer un gain  $\mathbb{K}$  et une région  $\mathcal{E}$  la plus grande possible, tels que :

- la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (III.18) est garantie malgré l'incertitude sur la profondeur du point central de la cible par rapport au repère de la caméra.
- les contraintes sur l'erreur de l'indice visuel et sur la vitesse de la caméra sont satisfaites.

### III.2.4 Résultats préliminaires

Nous considérons la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$

$$\phi(\mathbb{K}\varepsilon) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon) - \mathbb{K}\varepsilon \quad (\text{III.20})$$

qui satisfait le lemme II.1 (pour plus de détail, voir la section II.2 du chapitre II). A partir de la définition de la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$ , le système en boucle fermée (III.18) s'écrit de manière équivalente comme :

$$\dot{\varepsilon}(t) = [\mathbb{R}'\overline{B}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D(e_{\text{cap}_{(3)}})\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K}]\varepsilon(t) + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon(t)) \quad (\text{III.21})$$

Par ailleurs, rappelons que la profondeur  $z_2$ , définie par (III.7), est bornée (cf. relation (III.8)). Nous pouvons donc définir un paramètre incertain, noté  $p_1$ , tel que :

$$\frac{1}{z_2} = p_1 \quad (\text{III.22})$$

où  $p_1$  satisfait  $p_{1\min} \leq p_1 \leq p_{1\max}$  avec :

$$\begin{aligned} p_{1\max} &= \frac{1}{d_{1\min} \cos(\eta_{\max})} \\ p_{1\min} &= \frac{1}{d_{1\max}} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Les matrices  $\overline{B}_1(z_2)$  et  $\overline{B}_2(z_2)$  qui interviennent dans le système bouclé (III.18) dépendent d'un seul paramètre incertain  $p_1$ . A partir de la définition de  $p_1$  et des limites  $p_{1\max}$  et  $p_{1\min}$ , nous pouvons conclure que les matrices  $\overline{B}_1(z_2)$  et  $\overline{B}_2(z_2)$  satisfont :

$$\begin{aligned} \overline{B}_1(z_2) &\in \text{Co}\{\overline{B}_{1j}, j = 1, 2\} \\ \overline{B}_2(z_2) &\in \text{Co}\{\overline{B}_{2j}, j = 1, 2\} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Le système en boucle fermée (III.21) peut ainsi être décrit par une représentation polytopique et s'écrit comme :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left( \sum_{j=1}^2 \lambda_j (\mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}) + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{\text{cap}_{(3)}})\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K} \right) \varepsilon(t) + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) \quad (\text{III.25})$$

avec  $\sum_{j=1}^2 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$ .

### III.2.5 Conditions théoriques

Pour résoudre le problème III.1, nous utilisons la théorie de Lyapunov [63]. Nous proposons donc de considérer la stratégie décrite dans le théorème suivant.

**Théorème III.1** *S'il existe une fonction définie positive  $V(\varepsilon)$  ( $V(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \neq 0$  et  $V(0) = 0$ ), un gain  $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ , une matrice définie positive diagonale  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , une matrice  $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant, pour toute valeur admissible de la profondeur  $z_2$  :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} [(\mathbb{R}' \bar{B}_1(z_2) \mathbb{C} + \mathbb{R}'(T_{(2)} \bar{B}_2(z_2) + T_{(3)} D(e_{cap(3)})) \mathbb{R} + \mathbb{B} \mathbb{K}) \varepsilon + \mathbb{B} \phi(\mathbb{K} \varepsilon)] \\ - 2 \phi(\mathbb{K} \varepsilon)' M (\phi(\mathbb{K} \varepsilon) + \mathbb{G} \varepsilon) < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$\gamma V(\varepsilon) - \varepsilon' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.27})$$

$$\gamma V(\varepsilon) - \varepsilon' \mathbb{R}'_{(3)} \frac{1}{\beta^2} \mathbb{R}_{(3)} \varepsilon \geq 0 \quad (\text{III.28})$$

$$\gamma V(\varepsilon) - \varepsilon' \mathbb{C}'_{(i)} \frac{1}{u_{1(i)}^2} \mathbb{C}_{(i)} \varepsilon \geq 0 \quad \forall i = 1, 3 \quad (\text{III.29})$$

$$\gamma V(\varepsilon) - \varepsilon' \mathbb{C}'_{(2)} \frac{1}{(u_{1(2)} - v_{z_C}^*)^2} \mathbb{C}_{(2)} \varepsilon \geq 0 \quad (\text{III.30})$$

alors le gain  $\mathbb{K}$  et la région de stabilité

$$\mathcal{E}(V, \gamma) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^6; V(\varepsilon) \leq \gamma^{-1}\} \quad (\text{III.31})$$

sont des solutions pour le problème III.1.

**Démonstration.** Considérons une fonction définie positive  $V(\varepsilon)$  ( $V(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \neq 0$  et  $V(0) = 0$ ). Nous voulons démontrer que la dérivée par rapport au temps de cette fonction,  $\dot{V}(\varepsilon)$ , est strictement négative le long des trajectoires du système en boucle fermée (III.21) pour toute valeur admissible de la profondeur  $z_2$ . Pour que la condition de secteur (II.11) du lemme II.1 soit satisfaite, nous devons montrer que la région  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  est contenue dans le domaine  $S(u_0)$  défini dans (II.10) :  $\mathcal{E}(V, \gamma) \subset S(u_0)$ . Notons que si  $\varepsilon \in S(u_0)$ , on peut écrire [9] :

$$\varepsilon' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \leq u_{0(i)}^2 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

ou encore

$$\varepsilon' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

L'inclusion de  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  dans  $S(u_0)$  revient à satisfaire l'inégalité suivante :

$$\varepsilon' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \leq \gamma V(\varepsilon) \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Donc la satisfaction de la relation (III.27) garantit l'inclusion de  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  dans  $S(u_0)$ . Ainsi  $\forall \varepsilon \in \mathcal{E}(V, \gamma)$ , la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$  satisfait la relation (II.11).

Pour tout  $\varepsilon \in \mathcal{E}(V, \gamma)$  on a :

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq \dot{V}(\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'M(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{G}\varepsilon)$$

Par définition, on a :

$$\dot{V}(\varepsilon) = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}[(\mathbb{R}'\overline{B}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'(T_{(2)}\overline{B}_2(z_2) + T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}}))\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K})\varepsilon + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon)]$$

Ceci nous permet de conclure que pour tout  $\varepsilon \in \mathcal{E}(V, \gamma)$  la satisfaction de la relation (III.26) implique :

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq \dot{V}(\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'M(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{G}\varepsilon) < 0$$

Donc on vérifie bien que pour tout  $\varepsilon \in \mathcal{E}(V, \gamma)$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\dot{V}(\varepsilon) < 0$  le long des trajectoires du système bouclé (III.21).

Par ailleurs, la satisfaction des relations (III.28), (III.29) et (III.30) signifie que l'ensemble  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  est inclus dans le polyèdre  $\Omega(\varepsilon)$  défini dans (III.19).

Nous pouvons donc conclure que l'ensemble  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  est une région de stabilité asymptotique pour le système bouclé (III.21). Ainsi, le gain  $\mathbb{K}$  et la région  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  sont des solutions du problème III.1.  $\square$

Le théorème III.1 fournit une condition suffisante pour résoudre le problème III.1. Cependant les conditions présentées ne sont pas constructives et ne permettent donc pas de synthétiser un gain  $\mathbb{K}$  stabilisant. Une des difficultés pour appliquer ce théorème réside dans le choix de la fonction de Lyapunov  $V(\varepsilon)$  afin d'obtenir des conditions constructives. Un choix adéquat consiste à considérer une fonction quadratique :

$$V(\varepsilon) = \varepsilon' P \varepsilon \quad (\text{III.32})$$

avec  $P = P' > 0$ .

En considérant le théorème III.1, la fonction  $V(\varepsilon)$  définie dans (III.32) et le système polytopique (III.25), nous pouvons décrire la proposition suivante.

**Proposition III.1** *S'il existe deux matrices symétriques définies positives  $W \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $R_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , une matrice diagonale définie positive  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deux matrices  $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  et  $Z \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deux scalaires positifs  $\gamma$  et  $\eta$  satisfaisant :*

$$\begin{pmatrix} WC'\overline{B}_{1j}'\mathbb{R} + \mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C}W + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B}' & \star & \star & \star \\ +\mathbb{R}'(R_1 + \eta u_{1(3)}^2 \beta^2 U)\mathbb{R} & & & \\ u_{1(2)}\overline{B}_{2j}'\mathbb{R}W & -R_1 & \star & \star \\ \mathbb{R}W & 0 & -\eta I_3 & \star \\ S\mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ \mathbb{R}_{(3)}W & \gamma\beta^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (\text{III.35})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ \mathbb{C}_{(i)}W & \gamma u_{1(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, 3 \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ \mathbb{C}_{(2)}W & \gamma(u_{1(2)} - v_{z_C}^*)^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (\text{III.37})$$

avec la matrice  $U = \text{Diag}(0, 0, 1)$ , alors le gain  $\mathbb{K} = YW^{-1}$  et l'ensemble

$$\mathcal{E}(W, \gamma) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^6; \quad \varepsilon'W^{-1}\varepsilon \leq \gamma^{-1}\} \quad (\text{III.38})$$

sont solutions du problème III.1.

**Démonstration.** La satisfaction de la relation (III.34) garantit que l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W, \gamma)$ , défini dans (III.38), est inclus dans l'ensemble  $S(u_0)$  défini dans (II.10). En effet, nous pouvons réécrire la condition (III.27) du théorème III.1, avec  $V(\varepsilon) = \varepsilon'P\varepsilon$  :

$$\varepsilon'\gamma P\varepsilon - \varepsilon'(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})\varepsilon \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.39})$$

En posant  $P = W^{-1}$ ,  $\mathbb{G} = ZW^{-1}$  et  $\mathbb{K} = YW^{-1}$ , après avoir utilisé le complément de Schur la relation (III.39) est équivalente à [9] :

$$\begin{pmatrix} W^{-1} & \star \\ Y_{(i)}W^{-1} - Z_{(i)}W^{-1} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.40})$$

En pré-multipliant et post-multipliant la relation (III.40) par la matrice  $\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , nous obtenons directement la condition (III.34). Ainsi, pour tout  $\varepsilon \in \mathcal{E}(W, \gamma)$ , la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$  satisfait la condition de secteur (II.11). En utilisant le même raisonnement, avec les conditions (III.28), (III.29) et (III.30) du théorème III.1, nous pouvons montrer que la satisfaction des conditions (III.35), (III.36) et (III.37) assure l'inclusion de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W, \gamma)$  dans l'ensemble polyédral  $\Omega(\varepsilon)$  défini dans (III.19).

Rappelons que pour toute profondeur  $z_2$  admissible, le système bouclé est décrit par le modèle polytopique (III.25). Ainsi, nous allons étudier la dérivée de la fonction quadratique  $V(\varepsilon) = \varepsilon'W^{-1}\varepsilon$ , le long des trajectoires du système (III.25).  $\dot{V}(\varepsilon)$  s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) = & \varepsilon'W^{-1} \left[ \sum_{j=1}^2 \lambda_j (\mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}) + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{cap(3)})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1} \right] \varepsilon \\ & + \varepsilon' \left[ \sum_{j=1}^2 \lambda_j (\mathbb{C}'\overline{B}_{1j}'\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(2)}\overline{B}_{2j}'\mathbb{R}) + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{cap(3)})\mathbb{R} + W^{-1}Y'\mathbb{B}' \right] W^{-1}\varepsilon \\ & + 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Et en posant  $M = S^{-1}$  et en utilisant la relation (II.11), on a donc pour tout  $\varepsilon \in \mathcal{E}(W, \gamma)$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) \leq & 2\varepsilon'W^{-1}\left[\sum_{j=1}^2\lambda_j(\mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}) + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1}\right]\varepsilon \\ & + 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + ZW^{-1}\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

ou de manière équivalente :

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^2\lambda_j\mathcal{L}_j(\varepsilon) \quad (\text{III.43})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\varepsilon) = & 2\varepsilon'W^{-1}(\mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1})\varepsilon \\ & + 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + ZW^{-1}\varepsilon) \end{aligned}$$

En utilisant des arguments de convexité, on peut montrer que la partie à droite de l'inégalité (III.42) ou (III.43) est définie négative si on vérifie  $\mathcal{L}_j(\varepsilon) < 0$  soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\varepsilon) = & 2\varepsilon'W^{-1}(\mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1})\varepsilon \\ & + 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + ZW^{-1}\varepsilon) < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Nous allons maintenant étudier un peu plus précisément les termes  $2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}\varepsilon$  et  $2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R}\varepsilon$ .

Rappelons que nous avons d'après (III.5) et (III.9) :

$$T_{(2)}^2 \preceq u_{1(2)}^2$$

$$T_{(3)}^2 \preceq u_{1(3)}^2$$

$$e_{cap_{(3)}}^2 \preceq \beta^2$$

Le terme  $2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}\varepsilon$  peut être majoré de la manière suivante (voir le lemme A.2 de l'annexe A ou [89]) :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}\varepsilon & \leq \varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \varepsilon'\mathbb{R}'\overline{B}_{2j}'T_{(2)}^2R_1^{-1}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}\varepsilon \\ & \leq \varepsilon'[W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + u_{1(2)}^2\mathbb{R}'\overline{B}_{2j}'R_1^{-1}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}]\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

avec  $R_1 = R_1' > 0$ .

En notant que  $D(e_{cap_{(3)}}) = e_{cap_{(3)}}U$  avec  $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , le terme  $2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}$

$D(e_{cap_{(3)}})\mathbb{R}\varepsilon$  est majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}e_{cap_{(3)}}U\mathbb{R}\varepsilon & \leq \varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}e_{cap_{(3)}}U\eta e_{cap_{(3)}}U'T_{(3)}\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \varepsilon'\mathbb{R}'\eta^{-1}\mathbb{R}\varepsilon \\ & \leq \varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'\eta T_{(3)}^2e_{cap_{(3)}}^2UU'\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \eta^{-1}\varepsilon'\mathbb{R}'\mathbb{R}\varepsilon \\ & \leq \varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'\eta u_{1(3)}^2\beta^2U\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \eta^{-1}\varepsilon'\mathbb{R}'\mathbb{R}\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

avec  $\eta > 0$  et  $UU' = U$ .

A partir des majorations (III.45) et (III.46), on peut réécrire  $\mathcal{L}_j(\varepsilon)$  comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\varepsilon) \leq & \varepsilon'(W^{-1}\mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{C}'\overline{B}_{1j}'\mathbb{R}W^{-1} + W^{-1}\mathbb{B}YW^{-1} + W^{-1}Y'\mathbb{B}'W^{-1} \\ & + u_{1(2)}^2\mathbb{R}'\overline{B}_{2j}R_1^{-1}\overline{B}_{2j}\mathbb{R} + W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} \\ & + W^{-1}\mathbb{R}'\eta u_{1(3)}^2\beta^2U\mathbb{R}W^{-1} + \eta^{-1}\mathbb{R}'\mathbb{R})\varepsilon \\ & 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + ZW^{-1}\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

la partie droite de l'inégalité (III.47) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'W^{-1} & \phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} W^{-1}\varepsilon \\ S^{-1}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (\text{III.48})$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C}W + W\mathbb{C}'\overline{B}_{1j}'\mathbb{R} + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B}' & & \\ +\mathbb{R}'R_1\mathbb{R} + u_{1(2)}^2W\mathbb{R}'\overline{B}_{2j}R_1^{-1}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}W & * & \\ +\mathbb{R}'\eta u_{1(3)}^2\beta^2U\mathbb{R} + \eta^{-1}W\mathbb{R}'\mathbb{R}W & & \\ S\mathbb{B}' - Z & & -2S \end{pmatrix} \quad (\text{III.49})$$

Ainsi si la matrice  $\mathcal{M}$ , définie dans (III.49), est définie négative, on obtiendra  $\mathcal{L}_j(\varepsilon) < 0$  et donc d'après l'équation (III.43) on obtiendra  $\dot{V}(\varepsilon) < 0$ .

En appliquant le complément de Schur, la condition  $\mathcal{M} < 0$  est équivalente à la condition suivante :

$$\begin{pmatrix} W\mathbb{C}'\overline{B}_{1j}'\mathbb{R} + \mathbb{R}'\overline{B}_{1j}\mathbb{C}W + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B}' & * & * & * \\ +\mathbb{R}'(R_1 + \eta u_{1(3)}^2\beta^2U)\mathbb{R} & & & \\ u_{1(2)}\overline{B}_{2j}\mathbb{R}W & -R_1 & * & * \\ \mathbb{R}W & 0 & -\eta I_3 & * \\ S\mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.50})$$

qui correspond à la condition (III.33). La satisfaction de la condition (III.33) permet donc de vérifier que  $\dot{V}(\varepsilon) < 0$  le long des trajectoires du système (III.25).

En conclusion nous pouvons conclure que  $\dot{V}(\varepsilon)$  est négative le long des trajectoires du système (III.25),  $\forall \varepsilon \in \mathcal{E}(W, \gamma)$ ,  $\varepsilon \neq 0$ . L'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W, \gamma)$  est donc une région de stabilité asymptotique pour le système (III.25) et donc une région de stabilité asymptotique pour le système bouclé (III.21) pour toute valeur admissible de la profondeur  $z_2$ .  $\square$

### III.2.6 Problème d'optimisation

Basé sur les résultats de la section III.2.5, nous pouvons présenter une méthode d'optimisation convexe pour obtenir un gain par retour d'état qui peut assurer la stabilité locale du système en boucle fermée (III.21). Il est important de noter que les relations (III.33), (III.34), (III.35), (III.36) et (III.37) de la proposition III.1 sont des inégalités matricielles linéaires (LMIs). Rappelons que notre objectif est de synthétiser une loi de commande par retour d'état qui maximise le bassin d'attraction de l'origine associé au



système (III.21). Plus précisément, nous voulons trouver le gain  $\mathbb{K}$  tel que la région de stabilité asymptotique  $\mathcal{E}(\mathcal{W}, \gamma)$  soit la plus grande possible en considérant certains critères associés à sa taille. Nous proposons alors le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{W, R_1, Y, Z, S, \gamma, \eta, \delta, \sigma} \gamma + \delta + \sigma \\ & \text{soumis à} \\ & \text{Conditions } (III.33), (III.34), (III.35), (III.36), (III.36), \\ & \begin{pmatrix} \sigma I_6 & \star \\ Y & I_3 \end{pmatrix} \geq 0 \\ & \begin{pmatrix} \delta I_6 & \star \\ I_6 & W \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{III.51}$$

Les deux dernières conditions sont ajoutées pour minimiser la trace de  $W^{-1}$

$$Tr(W^{-1}) \leq \delta$$

et la norme de  $Y$

$$Y'Y \leq \sigma I_3$$

Ces deux dernières conditions sont utiles pour améliorer le conditionnement numérique des solutions  $\mathbb{K}$  et  $W$  (voir l'annexe A).

### III.2.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous illustrons en simulation la stratégie de commande proposée dans la section III.2.5. Rappelons que nous considérons un robot mobile non-holonyme équipé de capteurs ultrasoniques et d'une caméra montée sur une plateforme (figure I.3). Nous considérons aussi une cible composée de 3 points située à la même hauteur que la caméra (figure III.1). Les paramètres de la cible par rapport à la scène sont initialisés comme :

$$E_1(2.65m, 0.5m); \quad E_2(2.65m, 0m); \quad E_3(2.65m, -0.5m)$$

avec  $l = 0.5m$ .

La distance entre le robot et la caméra est supposée appartenir à l'intervalle :  $d_1 \in [5m, 20m]$ . L'indice visuel de référence du point central  $E_2$  égale zéro, ( $Y_2^* = 0$ ). Pour garantir la visibilité de la cible, nous considérons  $\beta = 0.4$  et l'angle entre la droite ( $E_1E_3$ ) et l'axe optique de la caméra  $z_C$  :  $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$ . A partir des relations (III.22) et (III.23), les matrices  $\overline{B}_1(z_2)$  et  $\overline{B}_2(z_2)$  appartiennent à deux polytopes de matrices :

$$\begin{aligned} \overline{B}_1(z_2) & \in Co \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.05 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2154 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \overline{B}_2(z_2) & \in Co \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2154 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{III.52}$$

En considérant les bornes des actionneurs du robot superscout du LAAS-CNRS

$$\dot{q}_{max} = (1m\ s^{-1} \quad 1rad\ s^{-1} \quad 1rad\ s^{-1})'$$

$$\ddot{q}_{max} = (5m\ s^{-2} \quad 1rad\ s^{-2} \quad 4rad\ s^{-2})'$$

d'après la relation (I.62), on définit les bornes du torseur cinématique  $u_1 = [1\ 1\ 0.5]'$ , ainsi que celles de la commande  $u_0 = [4\ 4\ 5]'$ . En utilisant la LMI Control Toolbox de Matlab nous avons obtenu le gain de commande  $\mathbb{K}$  suivant :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -0.6033 & 0 & 1.8331 & -1.3813 & 0 & 0.5045 \\ 0 & -0.6392 & 0 & 0 & -17.0653 & 0 \\ -0.4770 & 0 & -7.8856 & 0.1327 & 0 & -7.2344 \end{pmatrix} \quad (III.53)$$

### Résultats de simulation

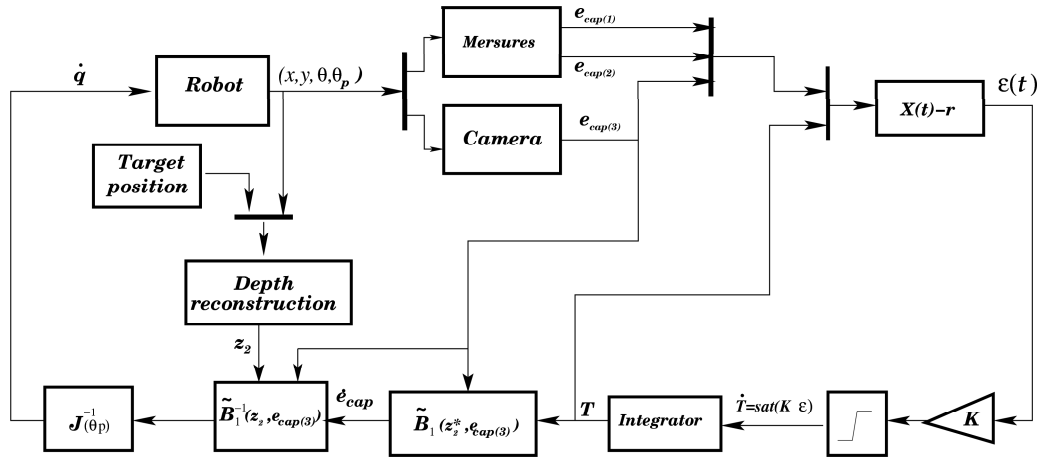


FIG. III.2: Schéma bloc du simulateur de la tâche d'asservissement en cap

Le schéma bloc du simulateur de la tâche d'asservissement en cap est illustré par la figure III.2. Le système robotique est bouclé par la commande saturante (III.17) qui peut être construite en utilisant la matrice  $\mathbb{K}$  comme :

$$\dot{T}(t) = sat_{u_0}(\mathbb{K}\epsilon(t)) = sat_{u_0}(\mathbb{K}(x(t) - r)) \quad (III.54)$$

où  $x(t) = (e'_{cap}(t) \quad T'(t))'$ . L'erreur  $e_{cap}$  peut être donnée par les mesures du capteur télémètre et de la caméra (voir figure III.2), et le torseur cinématique  $T(t)$  est directement donné par l'intégration de la sortie de la commande et s'écrit comme :

$$T(t) = \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau = \int_0^t sat_{u_0}(\mathbb{K}\epsilon(\tau)) d\tau \quad (III.55)$$

D'après les relations (III.4) et (III.55), la dynamique de la tâche d'asservissement en cap bouclée peut donc être décrite comme :

$$\dot{e}_{cap}(t) = \tilde{B}_1(z_2, e_{cap(3)})T(t) + \tilde{B}_2 v_{z_C}^* = \tilde{B}_1(z_2^*, e_{cap(3)}) \int_0^t sat_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon\tau) d\tau + \tilde{B}_2 v_{z_C}^* \quad (\text{III.56})$$

En pratique, le paramètre incertain  $z_2$  dans la matrice  $\tilde{B}_1(z_2, e_{cap(3)})$  peut être fixé par sa valeur de référence  $z_2^*$  qui peut être obtenue par le calcul de projection en considérant la position de référence de la caméra par rapport à la cible. Pour réaliser la tâche d'asservissement en cap avec notre modèle de robot présenté dans la section I.4.1, nous devons construire la commande  $\dot{q}$  pour les actionneurs du robot. Elle peut être obtenue à l'aide de la relation (I.52) et décrite comme :

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_p)T(t) \quad (\text{III.57})$$

où  $\theta_p$  dénote l'orientation de la platine par rapport à la base de mobile et peut être mesurée par le capteur. Le torseur cinématique  $T(t)$  peut être calculé par l'inverse de la tâche d'asservissement en cap (III.4) et décrit par :

$$T(t) = \tilde{B}_1^{-1}(z_2, e_{cap(3)})(\dot{e}_{cap}(t) - \tilde{B}_2 v_{z_C}^*) \quad (\text{III.58})$$

dans ce cas, la profondeur  $z_2$  est estimée par un bloc de reconstruction de la profondeur [30], [111]. Ainsi, en considérant les relations (III.56), (III.57) et (III.58), nous pouvons obtenir la commande  $\dot{q}$  pour les actionneurs du robot qui s'écrit :

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_p)\tilde{B}_1^{-1}(z_2, e_{cap(3)})\tilde{B}_1(z_2^*, e_{cap(3)}) \int_0^t sat_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(\tau)) d\tau \quad (\text{III.59})$$

Ces relations sont illustrées dans la figure III.2.

La configuration initiale du robot est donnée par :

$$x = -7.35m; \quad y = -8m; \quad \theta = 0.3rad; \quad \theta_p = 0.3rad$$

Comme nous l'avons défini, la tâche d'asservissement en cap consiste à conduire le robot vers la cible avec la vitesse de référence,  $v_{z_C}^* = 0.8m/s$ , tout en contrôlant la caméra de sorte qu'elle reste face à la cible. Les simulations effectuées avec Simulink/Matlab nous donnent les images suivantes.

L'image à gauche de la figure III.3 représente la trajectoire du robot. La tâche d'asservissement en cap est parfaitement exécutée en permettant de conduire le robot vers la cible en suivant une vitesse de référence tout en contrôlant la caméra face à la cible. Les vitesses du robot sont présentées à l'image de droite de la figure III.3. En effet le deuxième élément du torseur cinématique de la caméra  $T_{(2)}$  convergeant vers  $v_{z_C}^*$  implique que la vitesse linéaire du robot  $v$  atteint la vitesse de référence  $v_{z_C}^*$  car  $T_{(2)} = v$  quand  $\theta_p \rightarrow 0$  et  $b = 0$  (voir relation I.52). L'évolution du torseur cinématique est représentée par l'image de gauche de la figure III.4. Comme nous l'avons mentionné précédemment,

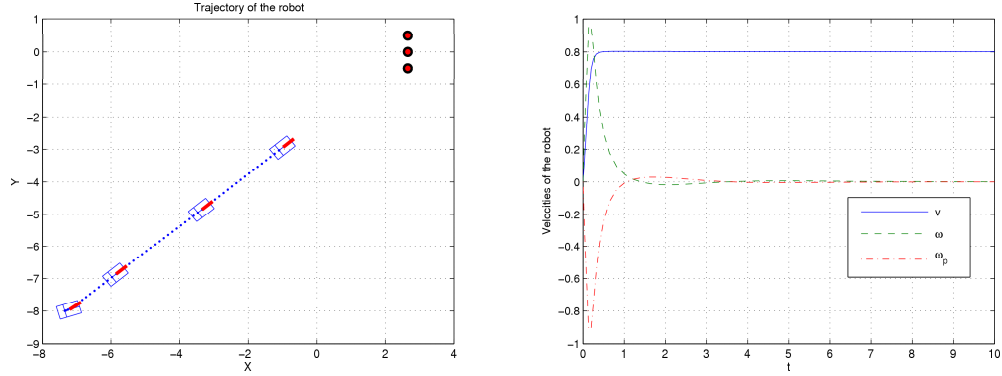


FIG. III.3: Trajectoire du robot dans le repère de la scène  $R$  (à gauche) et vitesses du robot (à droite)

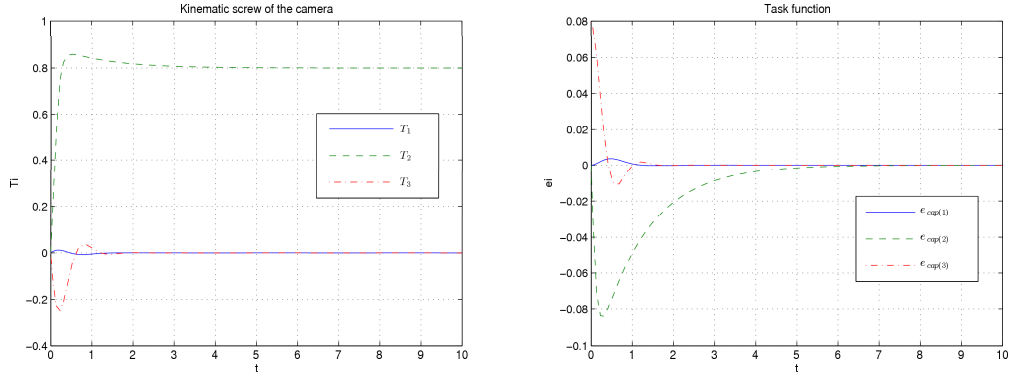


FIG. III.4: Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la scène  $R$  (à gauche) et erreur de la tâche d'asservissement en cap (à droite)

$T_{(1)}$  et  $T_{(3)}$  convergent vers zéros, par contre  $T_{(2)}$  converge vers  $v_{z_C}^*$  et l'image de droite présente les erreurs de la tâche d'asservissement en cap décrites par l'équation (III.3). Finalement toutes les erreurs  $e_{cap_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , convergent en zéros. Ainsi, la figure III.4 que la stabilité asymptotique du système (III.18) est bien vérifiée ( $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ ). L'image de gauche de la figure III.5 présente l'évolution de l'indice visuel  $Y_2$  convergeant vers  $Y_2^*$  (dans ce cas  $Y_2^* = 0$ ) dans le plan image. L'image de droite de la figure III.5 montre les évolutions des composantes de la commande  $\dot{T} = sat_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon)$ . La borne  $u_{0(2)}$  n'est pas dépassée pendant l'exécution de cette tâche. Nous apercevons que la deuxième composante de la commande sature pendant un moment. Comme la borne sur la dynamique des actionneurs a été considérée lors de la synthèse de commande, la stabilité du système en boucle fermée est assurée malgré cette saturation.

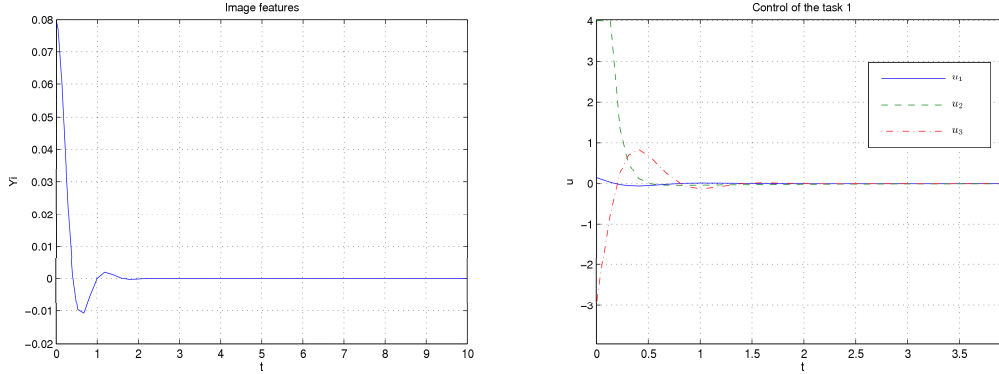


FIG. III.5: Evolution des indices visuels (à gauche) et description des composantes de la commande (à droite)

### III.2.8 Conclusion

Nous avons présenté ici la synthèse d'une commande par retour d'état pour une tâche d'asservissement en cap. Outre la garantie de stabilité, la méthode proposée permet de prendre en compte un ensemble de contraintes inhérentes au problème, dès l'étape de synthèse du correcteur. La méthode proposée permet en effet de tenir compte de l'incertitude sur la profondeur des points de la cible et garantit la visibilité et le respect des contraintes sur la vitesse et l'accélération de la caméra. Les résultats de simulation montrent que cette tâche permet de conduire le robot vers la cible avec la vitesse de référence  $v_{z_C}^*$  tout réalisant le centrage de la cible dans l'image de la caméra.

## III.3 Tâches référencée vision de positionnement

Comme nous l'avons énoncé dans la section III.1, notre objectif est de mettre en œuvre un ensemble de techniques d'automatique avancées pour développer une stratégie d'asservissement visuel 2D robuste, multi-critères, pour positionner le système robotique que nous avons décrit dans la section I.4.1 par rapport à une cible visuelle. Plus précisément, notre objectif est d'élaborer un correcteur et de caractériser un domaine de stabilité à l'intérieur duquel le mouvement de la caméra vers la position désirée soit assuré, malgré l'incertitude sur la profondeur des points de la cible, et tel qu'il soit possible de garantir la visibilité de la cible et la satisfaction des contraintes dynamiques des actionneurs.

### III.3.1 Modèle de la cible

Pour garantir la continuité de la vitesse du robot en enchaînant dynamiquement la tâche d'asservissement en cap présentée dans la section III.2 avec la tâche référencée vision de positionnement dans le chapitre suivant, nous utilisons ici la même cible pour la tâche

référéncée vision. Par contre, dans cette tâche, nous considérons séparément les deux cas : une cible fixe par rapport à la scène et une cible mobile par rapport à la scène. La cible de trois points alignés horizontalement permettant l'exécution de la tâche de positionnement est présentée sur la figure III.6. Nous représentons simplement les différents paramètres du modèle de la cible permettant d'exprimer notre problème de la tâche référencée vision de positionnement. Cette cible est constituée de trois points alignés équidistants  $E_i, i = 1, 2, 3$  appartenant au même plan horizontal que le centre optique  $C$  de la caméra. La distance entre deux points consécutifs de la cible est notée  $l > 0$ . On notera  $\alpha$  l'angle entre la droite  $(E_1E_3)$  et l'axe optique  $z_C$ , et  $\eta$  est l'angle entre l'axe optique  $z_C$  et la droite  $(CE_2)$ . Afin de pouvoir définir des bornes sur la profondeur des points de la cible par rapport au repère caméra, nous faisons l'hypothèse que la distance  $d_2 = CE_2$  entre la caméra et la cible est bornée à l'aide de la relation suivante :

$$d_2 \in [d_{2min}, d_{2max}] \quad (\text{III.60})$$

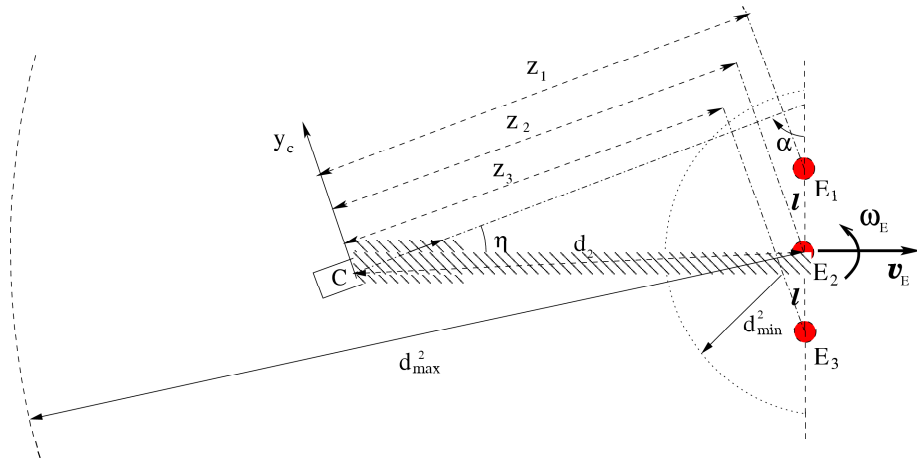


FIG. III.6: Modèle de la cible et description des paramètres pour la tâche référencée vision de positionnement

Par ailleurs, pour éviter les configurations singulières pour lesquelles les points de la cible se projettent en un même point sur le plan image de la caméra, on impose également la même condition (III.2) sur l'angle  $\alpha$ . Nous supposons donc que la caméra est libre de se déplacer dans le large secteur défini par les relations (III.60) et (III.2). Comme nous l'avons énoncé plus haut, nous considérons que la cible peut être déplacée comme un unicycle mobile. Autrement dit la cible peut tourner par rapport à son point central  $E_2$  avec la vitesse de rotation  $\omega_E$ , tandis que sa vitesse de translation  $v_E$  est toujours perpendiculaire au segment  $(E_1E_3)$  comme on peut le voir sur la figure III.6. Dans le travail de cette thèse, le vecteur de la vitesse de la cible  $(v_E \ \omega_E)'$  est supposé inconnu, mais les carrés  $v_E^2$  et  $\omega_E^2$  sont intégrables. Par la suite, nous montrerons qu'il est possible, à partir de la définition de ce secteur, de caractériser des bornes sur la profondeur des points de la cible. Nous allons maintenant définir la fonction de tâche et la matrice d'interaction associée qui seront considérées pour positionner la caméra face à la cible.

### III.3.2 Définition d'une fonction de tâche référencée vision de positionnement

En exploitant les résultats obtenus dans la section I.3 nous pouvons facilement déduire l'expression d'une fonction de tâche permettant de réaliser le positionnement de la caméra relativement au modèle de la cible que nous venons de définir. Comme nous l'avons rappelé, il est nécessaire de disposer d'au moins trois données visuelles indépendantes pour asservir les trois degrés de liberté de la caméra. Les points de la cible étant situés à la même hauteur que le centre optique de la caméra, les indices visuels ne varient pas selon l'axe vertical  $x_C$  durant le mouvement (voir figure I.2). Dans ce cas, le vecteur d'informations sensorielles  $s = (Y_1 \ Y_2 \ Y_3)'$ , où  $Y_i$  est l'ordonnée du point  $E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  donnée par la relation (I.1), contient suffisamment de données indépendantes pour définir la tâche de positionnement. En choisissant la matrice  $C$  égale à la matrice identité  $I_3$ , et en considérant un vecteur de données de références  $s^* = (Y_1^* \ Y_2^* \ Y_3^*)' \in \mathbb{R}^3$  correspondant à l'image projetée à la configuration désirée, on obtient l'expression suivante pour la fonction de tâche (I.17) :

$$e(r(t), t) = \begin{pmatrix} e_{(1)}(r(t), t) \\ e_{(2)}(r(t), t) \\ e_{(3)}(r(t), t) \end{pmatrix} = s(r(t), t) - s^* = \begin{pmatrix} Y_1(t) - Y_1^* \\ Y_2(t) - Y_2^* \\ Y_3(t) - Y_3^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{III.61})$$

Pour obtenir un positionnement centré de la caméra face à la cible, les composantes du vecteur  $s^*$  doivent être définies par une relation du type  $Y_2^* = 0$  et  $Y_3^* = -Y_1^*$ .

En outre, pour garantir la visibilité de la cible, nous imposons aussi la limite (III.5) aux composantes de la fonction de tâche :

$$|e_{(i)}| \leq \beta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.62})$$

où  $\beta > 0$  est un scalaire positif. En conséquence, l'angle  $\eta$  est borné par la même relation (III.6) et s'écrit comme :

$$|\eta| \leq \eta_{max} = \arctan(\beta) < \pi/2 \quad (\text{III.63})$$

La profondeur  $z_2$  du point central  $E_2$  de la cible, par rapport au repère de la caméra  $R_C$  (voir figure III.6), a une expression similaire à celle de la relation (III.7) :

$$z_2 = d_2 \cos(\eta) \quad (\text{III.64})$$

On est alors assuré que cette valeur restera bornée dans l'intervalle compact suivant :

$$z_2 \in [d_{2min} \cos(\eta_{max}), d_{2max}] \quad (\text{III.65})$$

En reprenant les notations que nous avons introduites lors de l'étape de modélisation du robot dans la section I.4.1, nous pouvons maintenant exprimer le torseur d'interaction de la tâche. Nous avons expliqué qu'il était possible, pour l'ensemble mécanique considéré à 3 degrés de liberté, de définir un torseur cinématique réduit  $T$  de dimension  $(3 \times 1)$  n'intégrant que les degrés de liberté réellement commandables de la caméra. Aussi,

afin de rendre compatibles la dimension du torseur d'interaction de la tâche et celle du torseur cinématique  $T$ , il est nécessaire de supprimer également les colonnes de la matrice d'interaction (I.14) correspondant aux mouvements impossibles de la caméra ainsi, que les lignes de la matrice d'interaction (I.14) correspondant aux informations visuelles  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  qui ne sont pas considérées. A l'aide de la relation (I.8), la dérivée par rapport au temps de la tâche référencée vision s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{e}(r(t), t) = \dot{s}(r(t), t) = \frac{\partial s}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_1(t) \\ \dot{Y}_2(t) \\ \dot{Y}_3(t) \end{pmatrix} + \frac{\partial s}{\partial t} = L_{red}(z, e)T(t) + \frac{\partial s}{\partial t} \quad (\text{III.66})$$

où  $L_{red}(z, e)$  représente le torseur d'interaction réduit dont l'expression est :

$$L_{red}(z, e) = \begin{pmatrix} -1/z_1 & (e_{(1)} + Y_1^*)/z_1 & 1 + (e_{(1)} + Y_1^*)^2 \\ -1/z_2 & (e_{(2)} + Y_2^*)/z_2 & 1 + (e_{(2)} + Y_2^*)^2 \\ -1/z_3 & (e_{(3)} + Y_3^*)/z_3 & 1 + (e_{(3)} + Y_3^*)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.67})$$

La matrice  $L_{red}(z, e)$  est une matrice de dimension  $(3 \times 3)$  de rang plein. Elle est fonction de la profondeur des trois points de la cible  $z = (z_1 \ z_2 \ z_3)'^T \in \mathbb{R}^3$  (voir figure III.6), et aussi des erreurs de la fonction de tâche  $e_{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Désormais, dans la suite de cette thèse, pour simplifier la notation, nous définissons simplement la matrice d'interaction réduite de la caméra  $L_{red}(z, e)$  comme  $L(z, e)$ . Comme cela a été définie dans le chapitre I, le terme  $\frac{\partial s}{\partial t}$  représente les variations de  $s$  consécutives au mouvement propre de la cible visuelle.

### III.3.3 Cible fixe

#### Description du problème

Dans cette section, nous considérons le cas particulier où la cible est fixe : autrement dit, on a  $v_E = 0$  et  $\omega_E = 0$  [108]. Rappelons que notre objectif est d'utiliser des techniques de commande avancée pour développer une stratégie d'asservissement visuel 2D robuste, multi-critères, pour positionner une caméra 3 degrés de liberté par rapport à la cible visuelle fixe dans l'environnement. Dans ce cas, l'objectif de commande est proche de celui décrit dans le cadre de la tâche d'asservissement en cap. Il s'agit de déterminer une loi de commande et une région de stabilité associée telles que les contraintes suivantes sont satisfaites :

- C1** le vecteur de profondeur des points de la cible  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  par rapport au repère  $R_C$  de la caméra  $(z_1 \ z_2 \ z_3)'^T$  est inconnu mais bornée.
- C2** les erreurs  $e_{(i)}$  entre l'indice visuel  $Y_i$  dans le plan image de la caméra et sa consigne  $Y_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont bornées pendant la stabilisation de la tâche de positionnement pour assurer la visibilité de la cible.



**C3** le torseur cinématique de la caméra  $T$  et son accélération  $\dot{T}$  par rapport à la scène doivent satisfaire les relations (III.9) et (III.10) qui correspondent aux contraintes des d'actionneurs.

La relation (III.66) est donc simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = \dot{s} = L(z, e)T \quad (\text{III.68})$$

En effet, le terme  $\frac{\partial s}{\partial t}$  est nul car  $v_E = 0$  et  $\omega_E = 0$ .

Pour satisfaire l'objectif que nous avons défini plus haut, comme dans le cadre de la tâche d'asservissement en cap, nous considérons un état augmenté :

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ T(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{III.69})$$

et le système complet devient :

$$\dot{\xi}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & L(z, e) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}(z, \xi)} \xi(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \dot{T}(t) \quad (\text{III.70})$$

où  $\dot{T}$  est le vecteur de commande. Pour satisfaire le contrainte (III.10), une loi de commande saturante par retour d'état peut être définie comme :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (\text{III.71})$$

avec  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ .

Finalement le système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}\text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (\text{III.72})$$

Afin de tenir compte des contraintes (III.62) et (III.9), l'état  $\xi$  doit être inclus dans l'ensemble polyédral  $\Omega(\xi)$  :

$$\Omega(\xi) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^6; - \begin{pmatrix} \beta 1_3 \\ u_1 \end{pmatrix} \preceq \xi \preceq \begin{pmatrix} \beta 1_3 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{III.73})$$

Le problème que nous avons l'intention de résoudre dans cette section et qui concerne le système en boucle fermée (III.72) peut être décrit comme suit.

**Problème III.2** Déterminer un gain  $\mathbb{K}$  et une région de stabilité associée la plus grande possible, tels que :

- la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (III.72) est garantie malgré l'incertitude sur la profondeur des points de la cible par rapport au repère de la caméra.
- la borne sur la tâche visuelle et la vitesse de la caméra sont satisfaites.

### Synthèse d'une loi de commande saturée

En utilisant la même non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\xi(t))$  définie dans (III.20), le système en boucle fermée (III.72) s'écrit :

$$\dot{\xi}(t) = (\mathbb{A}(z, \xi) + \mathbb{B}\mathbb{K})\xi(t) + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (\text{III.74})$$

Comme dans le contexte de la tâche d'asservissement en cap, le résultat général suivant peut être donné.

**Théorème III.2** *S'il existe une fonction définie positive  $V(\xi)$  ( $V(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$  et  $V(0) = 0$ ), un gain  $\mathbb{K}$ , une matrice diagonale définie positive  $M$ , une matrice  $\mathbb{G}$  et un scalaire positif  $\gamma$  satisfaisant, pour  $z$  admissible :*

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}[(\mathbb{A}(z, \xi) + \mathbb{B}\mathbb{K})\xi + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi)] - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'M(\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi) < 0 \quad (\text{III.75})$$

$$\gamma V(\xi) - \xi'(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})\xi \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.76})$$

$$\gamma V(\xi) - \xi' \mathbb{R}_{(i)}' \frac{1}{\beta^2} \mathbb{R}_{(i)}\xi \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.77})$$

$$\gamma V(\xi) - \xi' \mathbb{C}_{(i)}' \frac{1}{u_{1(i)}^2} \mathbb{C}_{(i)}\xi \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.78})$$

alors le gain  $\mathbb{K}$  et l'ensemble  $\mathcal{E}(V, \gamma) = \{\xi \in \mathbb{R}^6; V(\xi) \leq \gamma^{-1}\}$  sont des solutions au problème III.2.

**Démonstration.** La démonstration de ce théorème suit le même type de raisonnement que celui développé pour prouver le théorème III.1. La satisfaction de la condition (III.76) signifie que l'ensemble  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  est inclus dans l'ensemble  $S(u_0)$  défini par (II.10). Par conséquent, on peut conclure que, pour tous les  $\xi \in \mathcal{E}(V, \gamma)$ , la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\xi(t))$  satisfait la condition de secteur (II.11). La satisfaction des relations (III.77) et (III.78) garantit l'inclusion de l'ensemble  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  dans l'ensemble  $\Omega(\xi)$  défini par (III.73).

Considérant une fonction définie positive  $V(\xi)$  ( $V(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$ ), nous pouvons vérifier pour tout  $\xi \in \mathcal{E}(V, \gamma)$  :

$$\dot{V}(\xi) \leq \dot{V}(\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'M(\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi)$$

Ainsi, la satisfaction de la condition (III.75) implique que

$$\dot{V}(\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'M(\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi) < 0$$

donc on vérifie que  $\dot{V}(\xi) < 0$  le long de la trajectoire de système (III.74). Puisque ce raisonnement est valide pour tout  $\xi \in \mathcal{E}(V, \gamma), \xi \neq 0$ , nous pouvons conclure que  $\mathcal{E}(V, \gamma)$  est une région de stabilité pour le système saturé en boucle fermée (III.74).  $\square$

Comme dans le cas de la tâche d'asservissement en cap étudiée dans la section III.2, donc du théorème III.1, ce théorème III.2 ne présente pas de conditions constructives permettant de déterminer simplement le gain  $\mathbb{K}$  et la région de stabilité  $\mathcal{E}(V, \gamma)$ , solutions du problème III.2. Pour simplifier les conditions, nous considérons l'application du théorème III.2 lorsque la fonction  $V(\xi)$  est une fonction quadratique :

$$V(\xi) = \xi' P \xi, \quad P = P' > 0 \quad (\text{III.79})$$

Nous avons également besoin de réécrire la matrice  $\mathbb{A}(z, \xi)$  du système (III.74) sous une forme plus facilement utilisable. Ainsi, le système bouclé (III.74) peut se réécrire comme suit :

$$\dot{\xi}(t) = (\mathbb{R}' B_1(z) \mathbb{C} + \mathbb{R}' T_{(2)} B_2(z) \mathbb{R} + \mathbb{R}' T_{(3)} (B_3 + D(e)) \mathbb{R} + \mathbb{B} \mathbb{K}) \xi(t) + \mathbb{B} \phi(\mathbb{K} \xi(t)) \quad (\text{III.80})$$

où les matrices  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont définies dans (III.14) et les matrices  $B_1(z)$ ,  $B_2(z)$ ,  $B_3$  et  $D(e)$  sont définies comme :

$$\begin{aligned} B_1(z) &= \begin{pmatrix} -1/z_1 & Y_1^*/z_1 & 1 + (Y_1^*)^2 \\ -1/z_2 & Y_2^*/z_2 & 1 + (Y_2^*)^2 \\ -1/z_3 & Y_3^*/z_3 & 1 + (Y_3^*)^2 \end{pmatrix} \\ B_2(z) &= \begin{pmatrix} 1/z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z_3 \end{pmatrix} \\ D(e) &= \begin{pmatrix} e_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & e_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & e_{(3)} \end{pmatrix} \\ B_3 &= \begin{pmatrix} 2Y_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 2Y_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 2Y_3^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir des relations (III.2), (III.6), (III.60) et (III.65), on peut montrer que la profondeur des points  $E_1$  et  $E_3$  s'exprime en fonction de la profondeur  $z_2$  du point central de la cible  $E_2$ . Le vecteur  $z$  se définit donc de la manière suivante :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 + l \cos(\alpha) \\ z_2 \\ z_2 - l \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{III.81})$$

A partir de (III.81) et de (III.22) on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{z_2 + l \cos \alpha} = \frac{1}{z_2(1 + \frac{l \cos \alpha}{z_2})} \\ \frac{1}{z_2} &= p_1 \\ \frac{1}{z_3} &= \frac{1}{z_2 - l \cos \alpha} = \frac{1}{z_2(1 - \frac{l \cos \alpha}{z_2})} \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

Étant données les hypothèses que satisfont les paramètres  $l$ ,  $\alpha$  et  $z_2$  (en particulier  $l \ll z_2$ ), nous pouvons faire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &\approx \frac{1}{z_2} \left(1 - \frac{l \cos \alpha}{z_2}\right) = p_1 - p_2 \\ \frac{1}{z_3} &\approx \frac{1}{z_2} \left(1 + \frac{l \cos \alpha}{z_2}\right) = p_1 + p_2 \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

En considérant les intervalles admissibles (III.65) et (III.2) sur  $z_2$  et  $\alpha$ , les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  satisfont :

$$p_{jmin} \leq p_j \leq p_{jmax}, \quad j = 1, 2 \quad (\text{III.84})$$

avec les bornes suivantes :

$$\begin{aligned} p_{1min} &= \frac{1}{d_{2max}}; & p_{1max} &= \frac{1}{d_{2min} \cos(\eta_{max})} \\ p_{2min} &= \frac{l \cos(-\pi + \alpha_{min})}{(d_{2min} \cos(\eta_{max}))^2}; & p_{2max} &= \frac{l \cos(-\alpha_{min})}{(d_{2min} \cos(\eta_{max}))^2} \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

Ainsi, puisque les matrices  $B_1(z)$  et  $B_2(z)$  du système bouclé (III.80) dépendent du paramètre  $z$ , elles appartiennent à deux polytopes de 4 sommets définis à partir des bornes décrites dans (III.85) :

$$\begin{aligned} B_1(z) &\in Co\{B_{1j}, \quad j = 1, \dots, 4\} \\ B_2(z) &\in Co\{B_{2j}, \quad j = 1, \dots, 4\} \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

Le système en boucle fermée peut donc s'exprimer comme un système polytopique :

$$\dot{\xi}(t) = \left( \sum_{j=1}^4 \lambda_j (\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}' T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R}) + \mathbb{R}' T_{(3)} (B_3 + D(e)) \mathbb{R} + \mathbb{B} \mathbb{K} \right) \xi + \mathbb{B} \phi(\mathbb{K} \xi) \quad (\text{III.87})$$

avec

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_{1j} = \mathbb{R}' B_{1j} \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & B_{1j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant le théorème III.2 au système (III.87) avec une fonction  $V(\xi)$  quadratique, on obtient la proposition suivante.

**Proposition III.2** *S'il existe deux matrices symétriques définies positives  $W \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $R_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , une matrice diagonale positive  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deux matrices  $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  et  $Z \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deux scalaires positifs  $\epsilon$  et  $\gamma$  satisfaisant :*

$$\begin{pmatrix} W \mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{A}_{1j} W + \mathbb{B} Y + Y' \mathbb{B}' + \mathbb{R}' (R_1 + \epsilon u_{1(3)}^2 (1 + \beta^2) I_3) \mathbb{R} & \star & \star & \star \\ u_{1(2)} B_{2j} \mathbb{R} W & -R_1 & \star & \star \\ \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R} W & 0 & -\epsilon I_6 & \star \\ S \mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.88})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.89})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ \mathbb{R}_{(i)}W & \gamma\beta^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.90})$$

$$\begin{pmatrix} W & \star \\ \mathbb{C}_{(i)}W & \gamma u_{1(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.91})$$

alors la matrice  $\mathbb{K} = YW^{-1}$  et l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}(W, \gamma) = \{\xi \in \mathbb{R}^6; \xi'W^{-1}\xi \leq \gamma^{-1}\} \quad (\text{III.92})$$

sont solutions du problème III.2.

**Démonstration.** On utilise les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition III.1. La satisfaction de la relation (III.89) garantit que l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W, \gamma)$ , défini dans (III.92), est inclus dans l'ensemble  $S(u_0)$  défini dans (II.10). Ainsi, cela signifie que, pour tout  $\xi \in \mathcal{E}(W, \gamma)$ , la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\xi)$  satisfait la condition de secteur (II.11) avec  $\mathbb{G} = ZW^{-1}$ . La satisfaction des conditions (III.90) et (III.91) assure l'inclusion de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W, \gamma)$  dans l'ensemble polyédral  $\Omega(\xi)$  défini dans (III.73). Ainsi, pour tout vecteur  $z$  admissible (équation (III.86)) et tout  $\xi \in \mathcal{E}(W, \gamma)$ , la dérivée par rapport au temps de  $V(\xi) = \xi'W^{-1}\xi$ ,  $\dot{V}(\xi)$ , le long des trajectoires du système en boucle fermée (III.87) satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &\leq 2\xi'W^{-1}\left(\sum_{j=1}^4 \lambda_j(\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R}) + \mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1}\right)\xi \\ &\quad + 2\xi'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'M(\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1}\xi) \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

En utilisant des arguments de convexité et posant  $M = S^{-1}$ , on peut montrer que la partie à droite de l'inégalité ci-dessus est définie négative si on vérifie :

$$\begin{aligned} &2\xi'W^{-1}(\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1})\xi \\ &\quad + 2\xi'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1}\xi) < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Comme dans la démonstration de la proposition III.1, en utilisant la relation (III.9), le terme contenant  $T_{(2)}$  peut être majoré comme :

$$\begin{aligned} 2\xi'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R}\xi &\leq \xi'(W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + \mathbb{R}'B'_{2j}T_{(2)}R_1^{-1}T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R})\xi \\ &\leq \xi'(W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + u_{1(2)}^2\mathbb{R}'B'_{2j}R_1^{-1}B_{2j}\mathbb{R})\xi \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

avec  $R_1 = R'_1 > 0$ . Avec la même méthode en considérant les relations (III.9) et (III.62), nous pouvons majorer le terme contenant  $T_{(3)}$  et  $D(e)$  comme suit :

$$\begin{aligned}
2\xi'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R}\xi &= 2\xi'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)} \begin{pmatrix} I_3 & D(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R}\xi \\
&\leq \xi'(W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)} \begin{pmatrix} I_3 & D(e) \end{pmatrix} \epsilon \begin{pmatrix} I_3 \\ D(e) \end{pmatrix} T_{(3)}\mathbb{R}W^{-1} \\
&\quad + \epsilon^{-1}\mathbb{R}' \begin{pmatrix} B'_3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R})\xi \\
&\leq \xi'(\epsilon u_{1(3)}^2(1 + \beta^2)W^{-1}\mathbb{R}'\mathbb{R}W^{-1} \\
&\quad + \epsilon^{-1}\mathbb{R}' \begin{pmatrix} B'_3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R})\xi
\end{aligned} \tag{III.96}$$

où  $\epsilon$  est un scalaire positif.

A partir des majorations (III.95) et (III.96), on peut réécrire la partie gauche de l'inégalité (III.94) comme :

$$\begin{aligned}
&2\xi'W^{-1}(\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1})\xi \\
&\quad + 2\xi'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1}\xi) \leq \\
&\xi'(W^{-1}\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{A}'_{1j}W^{-1} + W^{-1}\mathbb{B}YW^{-1} + W^{-1}Y'\mathbb{B}'W^{-1} + W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} \\
&\quad + u_{1(2)}^2\mathbb{R}'B'_{2j}R_1^{-1}B_{2j}\mathbb{R} + \epsilon u_{1(3)}^2(1 + \beta^2)W^{-1}\mathbb{R}'\mathbb{R}W^{-1} + \epsilon^{-1}\mathbb{R}' \begin{pmatrix} B'_3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R})\xi \\
&\quad + 2\xi'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1}\xi)
\end{aligned} \tag{III.97}$$

la partie droite de l'inégalité (III.97) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi'W^{-1} & \phi'(\mathbb{K}\xi)S^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} W^{-1}\xi \\ S^{-1}\phi(\mathbb{K}\xi) \end{pmatrix} \tag{III.98}$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1j}W + W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B}' \\ + \mathbb{R}'(R_1 + \epsilon u_{1(3)}^2(1 + \beta^2)I_3)\mathbb{R} \\ + u_{1(2)}^2W\mathbb{R}'B'_{2j}R_1^{-1}B_{2j}\mathbb{R}W & \star \\ + \epsilon^{-1}W\mathbb{R}' \begin{pmatrix} B'_3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R}W \\ S\mathbb{B}' - Z & -2S \end{pmatrix} \tag{III.99}$$

Ainsi si la matrice  $\mathcal{M}$ , définie dans (III.99), est définie négative, l'inégalité (III.94) est bien vérifiée et donc d'après la relation (III.93) on obtiendra  $\dot{V}(\xi) < 0$ . En appliquant le

complément de Schur, la condition  $\mathcal{M} < 0$  est équivalente à la condition suivante :

$$\begin{pmatrix} W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{A}_{1j}W + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B}' & \star & \star & \star \\ +\mathbb{R}'(R_1 + \epsilon u_{1(3)}^2(1 + \beta^2)I_3)\mathbb{R} & -R_1 & \star & \star \\ u_{1(2)}B_{2j}\mathbb{R}W & 0 & -\epsilon I_6 & \star \\ \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R}W & 0 & 0 & -2S \\ S\mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.100})$$

qui correspond à la condition (III.88). La satisfaction de la condition (III.88) permet de vérifier que l'on a  $\dot{V}(\xi) < 0$  le long des trajectoires du système (III.87),  $\forall \xi \in \mathcal{E}(W, \gamma)$ ,  $\xi \neq 0$ . L'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W, \gamma)$  est donc une région de stabilité asymptotique pour le système bouclé (III.80).  $\square$

### Problème d'optimisation

Basé sur les résultats que l'on vient d'obtenir, nous pouvons présenter une méthode d'optimisation convexe pour obtenir un gain  $\mathbb{K}$  qui assure la stabilité locale du système bouclé (III.80). Les conditions de la proposition III.2 sont des LMIs car les valeurs de  $\beta$ ,  $u_0$  et  $u_1$  sont supposées a priori connues. Comme dans le contexte de la tâche d'asservissement en cap, on souhaite synthétiser une loi de commande par retour d'état qui maximise le bassin de l'attraction de l'origine associé au système (III.80). Plus précisément, nous voulons trouver le gain  $\mathbb{K}$  tel que la région de stabilité asymptotique  $\mathcal{E}(W, \gamma)$  soit la plus grande possible en considérant certains critères associés à sa taille. A partir des conditions LMIs de la proposition III.2, nous pouvons proposer le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{W, R_1, Y, Z, S, \gamma, \epsilon, \delta, \sigma} \gamma + \delta + \sigma \\ & \text{sous} \\ & \text{les conditions (III.88), (III.89), (III.90), (III.91),} \\ & \begin{pmatrix} \sigma I_6 & \star \\ Y & I_3 \end{pmatrix} \geq 0 \\ & \begin{pmatrix} \delta I_6 & \star \\ I_6 & W \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.101})$$

Comme dans la section III.2.6 les deux dernières conditions sont ajoutées pour améliorer le conditionnement numérique des solutions  $\mathbb{K}$  et  $W$ .

### Extension possible

Nous avons étudié la stabilité du système (III.72). La satisfaction de la contrainte (III.73) signifie que les contraintes sur les erreurs (**C2**) et sur la vitesse de la caméra (première partie de **C3**) sont toujours linéairement respectées. Autrement dit, pendant la stabilisation de la tâche référencée vision de positionnement, les erreurs visuelles  $e_{(i)}$  et la vitesse de la caméra  $T$  ne sont jamais saturées. Par contre, la saturation de l'accélération

de la caméra  $\dot{T}$  (seconde partie de **C3**) est permise en utilisant une commande saturée (III.71). Si nous voulons considérer que la saturation sur la vitesse de la caméra peut aussi être permise, nous pouvons modifier le système bouclé comme :

$$\begin{aligned}\dot{e} &= L(z, e) \text{sat}_{u_1}(u) \\ \dot{u} &= \text{sat}_{u_0}(K_1 e + K_2 \text{sat}_{u_1}(u)) \\ T' &= \text{sat}_{u_1}(u)\end{aligned}\quad (\text{III.102})$$

Ainsi, en considérant le vecteur augmenté  $\xi_n = \begin{pmatrix} e' & u' \end{pmatrix}' \in \mathbb{R}^6$  et la même forme de matrices définies dans (III.70), le système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{\xi}_n = (\mathbb{A}(z, \xi_n) + \mathbb{B}\mathbb{K})\xi_n + \mathbb{B}\phi_0 + \begin{pmatrix} L(z, e) \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{B}K_2\phi_1 \quad (\text{III.103})$$

où  $\phi_0 = \text{sat}_{u_0}(K_1 e + K_2 \text{sat}_{u_1}(u)) - (K_1 e + K_2 \text{sat}_{u_1}(u)) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi_n + K_2\phi_1) - (\mathbb{K}\xi_n + K_2\phi_1)$  et  $\phi_1 = \text{sat}_{u_1}(u) - u = \text{sat}_{u_1}(\mathbb{C}\xi_n) - \mathbb{C}\xi_n$ . Dans ce cas, le problème III.2 sera redéfini par rapport au système bouclé (III.103), les techniques décrites dans [106] dans le cadre de saturations imbriquées pourront être utilisées.

### Résultats numériques

Comme dans la section III.2.7, la cible composée de trois points est toujours initialisée, par rapport au repère de la scène  $R$ , comme :

$$E_1(2.65m, 0.5m); \quad E_2(2.65m, 0m); \quad E_3(2.65m, -0.5m)$$

avec  $l = 0.5m$ .

La distance entre le robot et la caméra est supposée appartenir à l'intervalle :  $d_2 \in [2.226m, 6m]$ . Les indices visuels de référence dans le plan d'image de la caméra sont définis par :

$$Y_1^* = 0.2; \quad Y_2^* = 0; \quad Y_3^* = -0.2$$

Lorsque les indices visuelles  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , atteignent ces valeurs de référence, la caméra sera stabilisée à un positionnement centré la caméra étant face à la cible avec la profondeur de référence  $z^* = \begin{pmatrix} 2.5m & 2.5m & 2.5m \end{pmatrix}'$  qui peut être calculée par la technique de projection. Ensuite, pour garantir la visibilité de la cible, nous considérons  $\beta = 0.4$  et l'angle entre la droite  $(E_1 E_3)$  et l'axe optique  $z_C$  de la caméra  $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$ . A partir des incertitudes sur  $p_1$  et  $p_2$  (voir les relations (III.82), (III.83) et (III.85)), nous considérons que les matrices  $B_1(z)$  et  $B_2(z)$  appartiennent à deux polytopes de matrices :

$$B_1(z) \in Co \left\{ \begin{pmatrix} -0.0653 & 0.0131 & 1.0400 \\ -0.1667 & 0 & 1.0000 \\ -0.2680 & -0.0536 & 1.0400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.2680 & 0.0536 & 1.0400 \\ -0.1667 & 0 & 1.0000 \\ -0.0653 & -0.0131 & 1.0400 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -0.3825 & 0.0765 & 1.0400 \\ -0.4838 & 0 & 1.0000 \\ -0.5852 & -0.1170 & 1.0400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5852 & 0.1170 & 1.0400 \\ -0.4838 & 0 & 1.0000 \\ -0.3825 & -0.0765 & 1.0400 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{III.104})$$



$$B_2(z) \in Co \left\{ \begin{pmatrix} 0.0653 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2680 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2680 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0653 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0.3825 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4838 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5852 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5852 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4838 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3825 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{III.105})$$

En considérant les bornes des actionneurs du robot superscout du LAAS-CNRS, on définit les mêmes valeurs que dans le cadre de la tâche d'asservissement en cap pour les bornes du torseur cinématique  $u_1 = (1 \ 1 \ 0.5)'$ , ainsi que ceux de la commande  $u_0 = (4 \ 4 \ 5)'$ . Après avoir résolu le problème d'optimisation (III.101) à l'aide de la LMI Control Toolbox de Matlab nous avons obtenu le gain de commande  $\mathbb{K}$  suivant :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -56.7988 & 117.8143 & -56.7987 & -6.7335 & 0 & -0.1491 \\ -758.9420 & 0 & 758.9421 & 0 & -103.2982 & 0 \\ -36.1701 & -33.6423 & -36.1706 & 1.1122 & 0 & -5.7996 \end{pmatrix} \quad (\text{III.106})$$

### Résultats de simulation

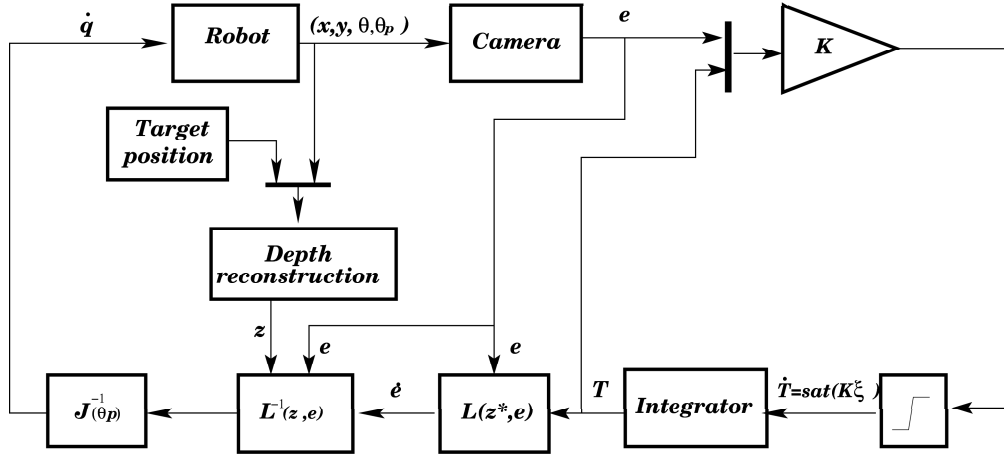


FIG. III.7: Schéma bloc du simulateur de la tâche référencée vision de positionnement

Le schéma bloc du simulateur de la tâche référencée vision est décrit dans la figure III.7. En effet, la construction de la commande  $\dot{q}$  pour les actionneurs du robot suit le même raisonnement que celui développé pour trouver la commande du robot dans la tâche d'asservissement en cap. Dans ce cas, le système robotique est bouclé par la commande saturante (III.71) qui peut être construite par :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) = \text{sat}_{u_0}(K_1 e(t) + K_2 T(t)) \quad (\text{III.107})$$

où  $e(t)$  désigne les erreurs des indices visuels et peut être donnée par la sortie de la caméra et le torseur cinématique  $T(t)$  est issu de l'intégration de la sortie de la commande et

s'écrit :

$$T(t) = \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau = \int_0^t \text{sat}_{u_0}(K_1 e(\tau) + K_2 T(\tau)) d\tau \quad (\text{III.108})$$

D'après les relations (III.68) et (III.108), la dynamique de la tâche référencée vision de positionnement en boucle fermée s'exprime comme :

$$\dot{e}(t) = L(z, e)T(t) = L(z^*, e) \int_0^t \text{sat}_{u_0}(K_1 e(\tau) + K_2 T(\tau)) d\tau \quad (\text{III.109})$$

Dans ce cas, le paramètre incertain  $z$  dans la matrice  $L(z, e)$  peut être remplacé par la valeur de référence  $z^*$  qui peut être calculée par la technique de projection par rapport à la position de référence de la caméra dans la scène. Pour commander le robot présenté dans la section I.4.1, nous devons construire la commande dynamique  $\dot{q}$ . D'après la relation (I.52), cette commande est obtenue par :

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_p)T(t) \quad (\text{III.110})$$

où le torseur cinématique  $T(t)$  peut être calculé par l'inverse de la tâche référence vision (III.68) et décrit par :

$$T(t) = L^{-1}(z, e)\dot{e}(t) \quad (\text{III.111})$$

La profondeur  $z$  peut être estimée par un bloc de reconstruction de la profondeur en utilisant la technique de [30] et [111]. Ainsi, en considérant les relations (III.110), (III.111) et (III.109), nous pouvons obtenir la commande dynamique  $\dot{q}$  pour les actionneurs du robot qui s'écrit :

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_p)L^{-1}(z, e)L(z^*, e) \int_0^t \text{sat}_{u_0}(K_1 e(t) + K_2 T(t)) dt \quad (\text{III.112})$$

Cette relation est illustrée sur la figure III.7.

La configuration initiale du robot est donnée par :

$$x = -3m; \quad y = -2m; \quad \theta = 0.2rad; \quad \theta_p = 0.1rad$$

L'état du système en boucle fermée (III.87) est initialisé comme :

$$\xi(0) = ( -0.0775m \quad 0.0438m \quad 0.1610m \quad 0ms^{-1} \quad 0ms^{-1} \quad 0rad^{-1} )'$$

En simulant le système avec le Matlab Simulink, nous obtenons les trajectoires suivantes.

L'image à gauche de la figure III.8 représente la trajectoire du robot. La tâche référencée vision est parfaitement exécutée, la caméra est finalement centrée face à la cible avec la profondeur de référence  $z^*$ . Dans ce cas, la trajectoire est moins directe que ce qui est souvent obtenu en imposant la décroissance exponentielle de la tâche d'asservissement visuel. Les vitesses du robot sont présentées à l'image à droite de la figure III.8. L'image à gauche de la figure III.9 présente l'évolution des indices visuels  $Y_i$  convergeant vers  $Y_i^*$  dans le plan image et celle de droite présente l'erreur des indices visuels  $e_{(i)} = Y_i - Y_i^*$ .

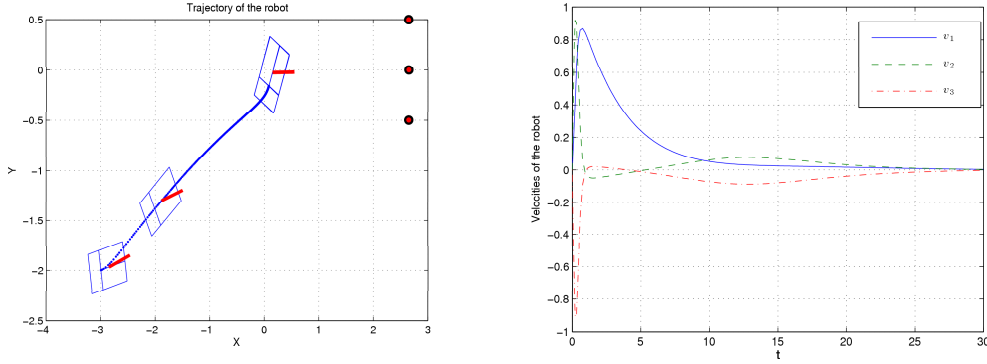


FIG. III.8: Trajectoire du robot dans la scène (à gauche) et vitesses du robot (à droite)

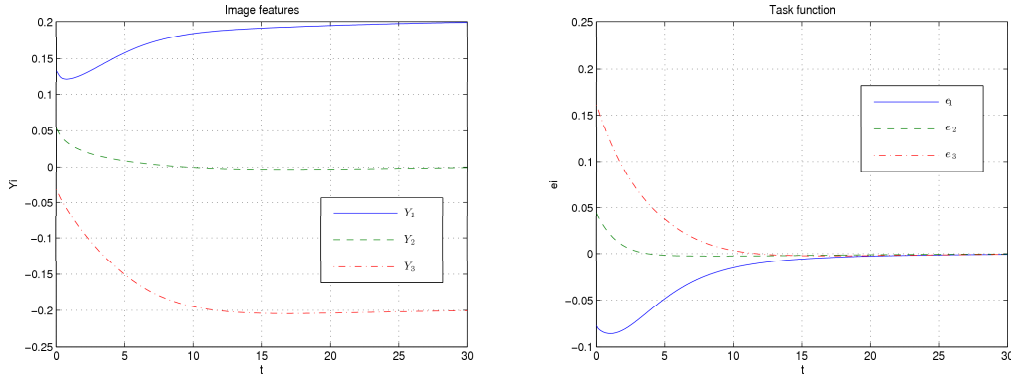


FIG. III.9: Evolution des indices visuels (à gauche) et erreurs des indices visuels (à droite)

L'évolution du torseur cinématique est représentée par l'image à gauche de la figure III.10. L'image à droite de la figure III.10 représente un zoom de la variation des composantes de la commande lors du début de la tâche. On s'aperçoit que la deuxième composante de la commande sature pendant un moment. Comme la borne sur la dynamique des actionneurs a été considérée lors de la synthèse de commande, la stabilité du système en boucle fermée est assurée malgré cette saturation.

### III.3.4 Cible mobile

#### Description du problème

Dans cette section, nous considérons le cas plus général : la tâche référencée vision de positionnement par rapport à une cible mobile. Comme nous l'avons mentionné précédemment dans la section III.3.2, le vecteur de la vitesse de la cible  $(v_E \ \omega_E)'$  est inconnu, mais les carrés  $v_E^2$  et  $\omega_E^2$  sont supposés intégrables. C'est pourquoi, nous définissons

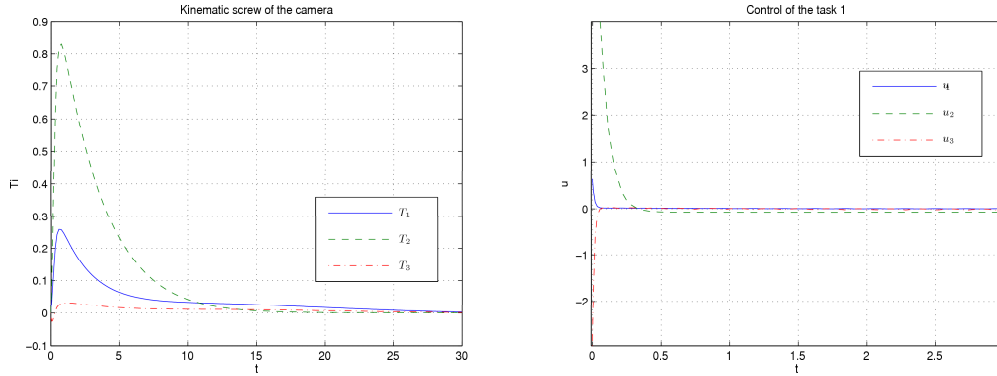


FIG. III.10: Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la scène  $R$  (à gauche) et description des composantes de la commande (à droite)

l'objectif pour cette tâche de la manière suivante :

Déterminer une loi de commande qui peut stabiliser la caméra par rapport à la cible mobile associée à la tâche référencée vision de positionnement en satisfaisant les contraintes **C1**, **C2**, **C3** précédemment définies et la contrainte :

**C4** le vecteur de la vitesse de la cible est supposé intégrable en carré mais inconnu.

Rappelons que, dans la relation (III.66), le terme  $\frac{\partial s}{\partial t}$  représente la variation de  $s$  consécutive (la sortie de la caméra) au mouvement de la cible par rapport à la scène qui peut être décrit comme :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_{E_1} & \dot{Y}_{E_2} & \dot{Y}_{E_3} \end{pmatrix}'$$

Pour exprimer ce terme avec une relation mathématique, nous devons d'abord considérer le torseur cinématique  $T_{E_2}$  du point  $E_2$  de la cible par rapport au repère de la scène  $R$ , exprimé dans le repère de la caméra  $R_C$  (voir figure III.11).

En exprimant l'angle  $\rho$  entre l'axe optique de la caméra  $z_C$  et la direction de la vitesse linéaire de la cible  $v_E$  par :  $\rho = -\frac{\pi}{2} - \alpha$ , nous pouvons décrire le torseur cinématique  $T_{E_2}$  comme la relation suivante :

$$T_{E_2} = \begin{pmatrix} v_{x_C} \\ v_{y_C} \\ v_{z_C} \\ \Omega_{x_C} \\ \Omega_{y_C} \\ \Omega_{z_C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_E \sin(-\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ v_E \cos(-\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \omega_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ \omega_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.113})$$

Dans ce cas, nous définissons  $T_{E_2} = \begin{pmatrix} v'_{E_2} & \Omega'_{E_2} \end{pmatrix}'$ , où  $v_{E_2}$  est la vitesse linéaire du point  $E_2$  de la cible par rapport au repère  $R$  exprimée dans le repère  $R_C$  et s'écrit comme :

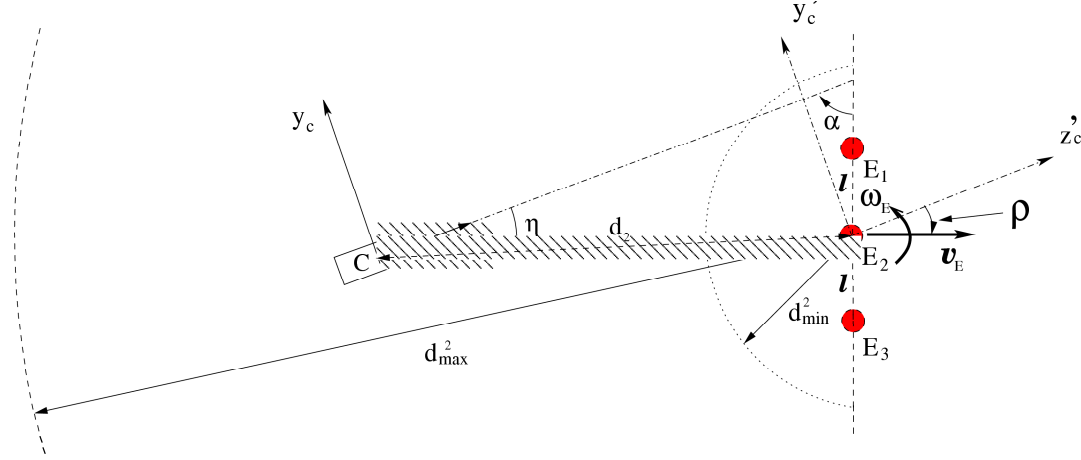


FIG. III.11: Description du torseur cinématique  $T_{E_2}$  du point  $E_2$  de la cible par rapport au repère de la scène  $R$ , exprimé dans le repère de la caméra  $R_C$

$v_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & -v_E \cos \alpha & -v_E \sin \alpha \end{pmatrix}'$ ,  $\Omega_{E_2}$  est la vitesse de rotation du point  $E_2$  par rapport au repère  $R$  exprimée dans le repère  $R_C$  et s'écrit comme :  $\Omega_{E_2} = \begin{pmatrix} \omega_F & 0 & 0 \end{pmatrix}'$ .

D'après la relation (I.10), nous pouvons exprimer les variations des indices visuels  $Y_{E_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , au mouvement de la cible par :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{E_1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{y_1}{z_1^2} \end{pmatrix} v_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{y_2}{z_2^2} \end{pmatrix} v_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{y_3}{z_3^2} \end{pmatrix} v_{E_3} \end{aligned} \quad (\text{III.114})$$

En utilisant la relation de projection (I.1), nous pouvons remplacer  $y_i$  par  $Y_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ . Les relations (III.114) peuvent être donc exprimées comme :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{E_1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \end{pmatrix} v_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} \end{pmatrix} v_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} \end{pmatrix} v_{E_3} \end{aligned} \quad (\text{III.115})$$

Dans ce cas, en utilisant l'équation fondamentale de la cinématique, nous pouvons exprimer les vitesses linéaires  $v_{E_1}$ ,  $v_{E_2}$  et  $v_{E_3}$  en fonction du torseur cinématique  $T_{E_2}$  du point  $E_2$  par rapport au repère de la scène par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} v_{E_1} &= v_{E_2} + \Omega_{E_2} \times \overrightarrow{E_2 E_1} = v_{E_2} - Sk(\overrightarrow{E_2 E_1}) \Omega_{E_2} = \begin{pmatrix} I_3 & -Sk(\overrightarrow{E_2 E_1}) \end{pmatrix} T_{E_2} \\ v_{E_2} &= \begin{pmatrix} I_3 & 0 \end{pmatrix} T_{E_2} \\ v_{E_3} &= v_{E_2} + \Omega_{E_2} \times \overrightarrow{E_2 E_3} = v_{E_2} - Sk(\overrightarrow{E_2 E_3}) \Omega_{E_2} = \begin{pmatrix} I_3 & -Sk(\overrightarrow{E_2 E_3}) \end{pmatrix} T_{E_2} \end{aligned} \quad (\text{III.116})$$

où  $Sk(\overrightarrow{E_2 E_1})$  et  $Sk(\overrightarrow{E_2 E_3})$  représentent respectivement les matrices antisymétrique (skew matrix) de pré-produit vectoriel associées aux vecteurs  $\overrightarrow{E_2 E_1}$  et  $\overrightarrow{E_2 E_3}$ . Elles s'écrivent comme :

$$Sk(\overrightarrow{E_2 E_1}) = \begin{pmatrix} 0 & -l \cos \alpha & -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha & 0 & 0 \\ l \sin \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Sk(\overrightarrow{E_2 E_3}) = \begin{pmatrix} 0 & l \cos \alpha & l \sin \alpha \\ -l \cos \alpha & 0 & 0 \\ -l \sin \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.117})$$

Finalement, en utilisant les relations (III.116) et (III.117) dans les équations (III.115), nous obtenons l'expression mathématique du terme  $\frac{\partial s}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{-l \cos \alpha + l Y_1 \sin \alpha}{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & \frac{l \cos \alpha - l Y_3 \sin \alpha}{z_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} T_{E_2} \quad (\text{III.118})$$

En supprimant les colonnes de zéros qui correspondent les lignes de zéros du torseur cinématique  $T_{E_2}$  (en effet, celles signifient les mouvements impossibles de la cible par rapport au repère de la caméra), nous avons la relation suivante :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{-l \cos \alpha + l Y_1 \sin \alpha}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & \frac{l \cos \alpha - l Y_3 \sin \alpha}{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ \omega_E \end{pmatrix} \quad (\text{III.119})$$

soit encore :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & -\frac{1}{z_3} & \frac{Y_3}{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ -l \cos \alpha \omega_E \\ -l \sin \alpha \omega_E \end{pmatrix} \quad (\text{III.120})$$

Dans ce cas nous pouvons exprimer la relation (III.120) comme :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = B(z, e) \omega(t) \quad (\text{III.121})$$

où la matrice  $B(z, e) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  est définie par :

$$B(z, e) = \begin{pmatrix} 1/z_1 & -(e_{(1)} + Y_1^*)/z_1 & 1/z_1 & -(e_{(1)} + Y_1^*)/z_1 \\ 1/z_2 & -(e_{(2)} + Y_2^*)/z_2 & 0 & 0 \\ 1/z_3 & -(e_{(3)} + Y_3^*)/z_3 & -1/z_3 & (e_{(3)} + Y_3^*)/z_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.122})$$

et le vecteur  $\omega(t)$  est défini par :

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} -v_E \cos(\alpha) \\ -v_E \sin(\alpha) \\ -l \omega_E \cos(\alpha) \\ -l \omega_E \sin(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Ce vecteur  $\omega(t)$  peut être considéré comme un vecteur de perturbation. Avec cette notation, la contrainte **C4** correspond à supposer que :  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^q$  et qu'il existe un scalaire positif  $\delta_1$ ,  $0 < \frac{1}{\delta_1} < \infty$ , tel que :

$$\|\omega(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau = \int_0^\infty (v_E^2(\tau) + l^2\omega_E^2(\tau))d\tau \leq \frac{1}{\delta_1} \quad (\text{III.123})$$

Finalement la dynamique de la fonction de tâche référencée vision de positionnement par rapport à la cible mobile dans le scène peut être exprimée comme la relation suivante :

$$\dot{e}(t) = L(z, e)T(t) + B(z, e)\omega(t) \quad (\text{III.124})$$

avec  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123).

Comme dans la section III.3.3, nous considérons un vecteur d'état augmenté qui s'écrit :

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ T(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{III.125})$$

et les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(z, \xi) &= \begin{pmatrix} 0 & L(z, e) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \\ \mathbb{B}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3} \\ \mathbb{B}_2(z, \xi) &= \begin{pmatrix} B(z, e) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 4} \end{aligned} \quad (\text{III.126})$$

Le système que nous considérons peut être décrit comme :

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}_1\dot{T}(t) + \mathbb{B}_2(z, \xi)\omega(t) \quad (\text{III.127})$$

où l'accélération de la caméra  $\dot{T}$  joue le rôle du vecteur de commande. Pour satisfaire la contrainte (III.10) dans **C3**, une loi de commande saturante par retour d'état peut être définie comme :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (\text{III.128})$$

avec  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ .

Le système en boucle fermée s'écrit donc :

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}_1\text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) + \mathbb{B}_2(z, \xi)\omega(t) \quad (\text{III.129})$$

Afin de tenir compte des contraintes (III.62) et (III.9), l'état  $\xi$  doit être inclure dans le polyédrale  $\Omega(\xi)$  qui est décrit dans (III.73). Le problème que nous cherchons à résoudre par rapport au système en boucle fermée (III.129), peut être résumé comme suit.

**Problème III.3** Déterminer un gain  $\mathbb{K}$  et deux régions  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathcal{S}_1$  tels que les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Stabilité interne* : quand  $\omega = 0$ , pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{S}_0$ , le système en boucle fermée (III.129) converge asymptotiquement à l'origine.
2. *Trajectoires bornées* : quand  $\omega \neq 0$ , les trajectoires du système bouclé (III.129) restent bornées dans  $\mathcal{S}_1$  pour tous  $\xi(0) \in \mathcal{S}_0$  et  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123).

La résolution du point 1 correspond à la solution du problème III.2. Dans ce cas, la caméra peut être stabilisée à la position de référence définie dans la section III.3.3 par le correcteur (III.128). Dans ce cas la région  $\mathcal{S}_0$  correspond à la région de stabilité du système en boucle fermée (III.129). Pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{S}_0$ , le système bouclé (III.129) peut être stabilisé malgré l'incertitude sur la profondeur des points de la cible (**C1**), tout en garantissant la visibilité de la cible (**C2**) et la satisfaction des contraintes dynamiques des actionneurs (**C3**). Le point 2 consiste à étudier la tolérance du système à la perturbation  $\omega(t)$ .

Différents travaux abordent ce type de problème pour des systèmes saturés similaires au système (III.129) voir, par exemple, [15], [16], [35], [68] et [105] dans le cas où les matrices  $\mathbb{A}(z, \xi)$  et  $\mathbb{B}_2(z, \xi)$  sont linéaires ou [39] dans un cas plus général.

### Synthèse d'une commande saturée

Comme dans la section (III.3.3), en utilisant la non-linéarité (III.20), le système en boucle fermée (III.129) s'écrit :

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi(t)) + \mathbb{B}_2(z, \xi)\omega(t) \quad (\text{III.130})$$

Dans la même veine que les théorèmes III.1 et III.2, le théorème III.3 peut être donné pour proposer une solution au problème III.3.

**Théorème III.3** *S'il existe une fonction définie positive  $V(\xi)$  ( $V(\xi) > 0$ ,  $\forall \xi \neq 0$  et  $V(0) = 0$ ), un gain  $\mathbb{K}$ , une matrice diagonale définie positive  $M$ , une matrice  $\mathbb{G}$  et deux scalaires positifs  $\zeta$  and  $\delta_1$  satisfaisant, pour tout  $z$  admissible :*

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}[(\mathbb{A}(z, \xi) + \mathbb{B}_1\mathbb{K})\xi + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi)] - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'M(\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi) - \omega'\omega < 0 \quad (\text{III.131})$$

$$V(\xi) - \xi'(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})\xi \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.132})$$

$$V(\xi) - \xi'\mathbb{R}'_{(i)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{\beta^2} \mathbb{R}_{(i)}\xi \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.133})$$

$$V(\xi) - \xi'\mathbb{C}'_{(i)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{1(i)}^2} \mathbb{C}_{(i)}\xi \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.134})$$

alors le gain  $\mathbb{K}$  et les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1) &= \{\xi \in \mathbb{R}^6; V(\xi) \leq \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}\} \\ \mathcal{S}_0(V, \zeta) &= \{\xi \in \mathbb{R}^6; V(\xi) \leq \zeta^{-1}\} \end{aligned}$$

sont des solutions du problème III.3.



**Démonstration.** Comme dans les démonstrations des théorèmes III.1 et III.2, on peut montrer que la satisfaction de la condition (III.132) signifie que l'ensemble  $\mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$  est inclus dans l'ensemble  $S(u_0)$  définie dans l'équation (II.10). Ainsi pour tout  $\xi \in \mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$  la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\xi)$  satisfait la condition du secteur (II.11). De la même manière, la satisfaction des relations (III.133) et (III.134) garantit l'inclusion de l'ensemble  $\mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$  dans l'ensemble  $\Omega(\xi)$  défini dans (III.73), ce qui garantit que pour tout  $\xi \in \mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$ , les contraintes **C2** et **C3** sont respectées.

Considérons une fonction définie positive  $V(\xi)$  ( $V(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$ ). La satisfaction de la relation (III.131) signifie que la dérivée par rapport au temps,  $\dot{V}(\xi)$ , de cette fonction le long des trajectoires du système en bouclé (III.130) vérifie :

$$\dot{V}(\xi) - \omega' \omega \leq \dot{V}(\xi) - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'(\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi) - \omega' \omega < 0$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$ .

En intégrant la condition  $\dot{V}(\xi) - \omega' \omega < 0$  on obtient :

$$V(\xi(t)) - V(\xi(0)) \leq \int_0^t \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau, \quad \forall t > 0 \quad (\text{III.135})$$

soit encore :

$$V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) + \int_0^t \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \quad (\text{III.136})$$

Ainsi pour  $\xi(0) \in \mathcal{S}_0(V, \zeta)$  et  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123), on a  $V(\xi(t)) \leq \zeta^{-1} + \delta_1^{-1}$ , donc les trajectoires du système (III.130) ne quittent pas l'ensemble  $\mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$ . Par ailleurs, dans le cas  $\omega(t) = 0$ , on a  $\dot{V}(\xi) < 0$  pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{S}_0(V, \zeta)$ .

Ceci nous permet de conclure que le gain  $\mathbb{K}$  et les deux ensembles  $\mathcal{S}_1(V, \zeta, \delta_1)$  et  $\mathcal{S}_0(V, \zeta)$  sont solutions du problème III.3.  $\square$

Comme dans le cas précédent, le théorème III.3 ne présente pas de conditions constructives.

Avec l'objectif d'exprimer des conditions sous forme LMIs, nous considérons une fonction de Lyapunov  $V(\xi)$  quadratique :  $V(\xi) = \xi' P \xi$  avec  $P = P' > 0$ .

Comme dans les cas traités précédemment, nous réécrivons le système bouclé (III.130) sous une forme plus facile à manipuler. Ainsi, à partir des matrices  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, B_1(z), B_2(z), B_3$  et  $D(e)$  définies dans la section III.3.3, nous pouvons réécrire le système bouclé (III.130) comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & (\mathbb{R}' B_1(z) \mathbb{C} + \mathbb{R}' T_{(2)} B_2(z) \mathbb{R} + \mathbb{R}' T_{(3)} (B_3 + D(e)) \mathbb{R} + \mathbb{B}_1 \mathbb{K}) \xi \\ & + \mathbb{B}_1 \phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{R} (B_4(z) + D(e) B_5(z)) \omega(t) \end{aligned} \quad (\text{III.137})$$

Les matrices  $B_4(z)$  et  $B_5(z)$  sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_4(z) &= \begin{pmatrix} 1/z_1 & -Y_1^*/z_1 & 1/z_1 & -Y_1^*/z_1 \\ 1/z_2 & -Y_2^*/z_2 & 0 & 0 \\ 1/z_3 & -Y_3^*/z_3 & -1/z_3 & Y_3^*/z_3 \end{pmatrix} \\ B_5(z) &= \begin{pmatrix} 0 & -1/z_1 & 0 & -1/z_1 \\ 0 & -1/z_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/z_3 & 0 & 1/z_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En considérant les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  définis dans les relations (III.82) et (III.83), nous pouvons en déduire que les matrices  $B_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 4, 5$ , appartiennent à des polytopes de 4 sommets :

$$B_k(z) \in Co\{B_{kj}, j = 1, \dots, 4\}, \quad k = 1, 2, 4, 5. \quad (\text{III.138})$$

Par conséquence, le système en boucle fermée (III.137) peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \sum_{j=1}^4 \lambda_j \{ [\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}_1\mathbb{K}] \xi(t) \\ & + \mathbb{R}'(B_{4j} + D(e)B_{5j})\omega(t) \} + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi(t)) \end{aligned} \quad (\text{III.139})$$

avec  $\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$ , et  $\mathbb{A}_{1j} = \mathbb{R}'B_{1j}\mathbb{C}$ .

La proposition suivante dérivée du théorème III.3 peut alors être exprimée.

**Proposition III.3** *S'il existe deux matrices symétriques définies positives  $W \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $R_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , une matrice diagonale positive  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deux matrices  $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  et  $Z \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ , trois scalaires positifs  $\epsilon, \zeta$  and  $\delta_1$ , satisfaisant :*

$$\left( \begin{array}{cccccc} W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{A}_{1j}W + \mathbb{B}_1Y \\ + Y'\mathbb{B}'_1 + \mathbb{R}'R_1\mathbb{R} & \star & \star & \star & \star & \star \\ + \epsilon(u_{1(3)}^2(1 + \beta^2) + \beta^2)\mathbb{R}'\mathbb{R} & & & & & \\ u_{1(2)}B_{2j}\mathbb{R}W & -R_1 & \star & \star & \star & \star \\ \left( \begin{array}{c} B_3 \\ I_3 \end{array} \right) \mathbb{R}W & 0 & -\epsilon I_6 & \star & \star & \star \\ S\mathbb{B}'_1 - Z & 0 & 0 & -2S & \star & \star \\ B'_{4j}\mathbb{R} & 0 & 0 & 0 & -I_4 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5j} & -\epsilon I_3 \end{array} \right) < 0 \quad (\text{III.140})$$

$$\left( \begin{array}{ccc} W & \star & \star \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \zeta u_{0(i)}^2 & \star \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & 0 & \delta_1 u_{0(i)}^2 \end{array} \right) \geq 0 \quad (\text{III.141})$$

$$\left( \begin{array}{ccc} W & \star & \star \\ \mathbb{R}_{(i)}W & \zeta \beta^2 & \star \\ \mathbb{R}_{(i)}W & 0 & \delta_1 \beta^2 \end{array} \right) \geq 0 \quad (\text{III.142})$$

$$\left( \begin{array}{ccc} W & \star & \star \\ \mathbb{C}_{(i)}W & \zeta u_{1(i)}^2 & \star \\ \mathbb{C}_{(i)}W & 0 & \delta_1 u_{1(i)}^2 \end{array} \right) \geq 0 \quad (\text{III.143})$$

$\forall i = 1, 2, 3$ , alors le gain  $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ , donné par  $\mathbb{K} = YW^{-1}$ , est tel que :

- (i) quand  $\omega \neq 0$ , les trajectoires du système en boucle fermée (III.137) restent bornées dans l'ensemble

$$\mathcal{E}_1(W, \zeta, \delta_1) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^6; \xi' W^{-1} \xi \leq \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1} \right\} \quad (\text{III.144})$$

pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{E}_0(W, \zeta)$ ,

$$\mathcal{E}_0(W, \zeta) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^6; \xi' W^{-1} \xi \leq \frac{1}{\zeta} \right\} \quad (\text{III.145})$$

et toute perturbation  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123);

- (ii) quand  $\omega = 0$ , l'ensemble  $\mathcal{E}_0(W, \zeta) = \mathcal{E}_1(W, \zeta, \delta_1)$  est inclus dans le bassin d'attraction du système en boucle fermée (III.137) et est donc une région de stabilité asymptotique pour le système bouclé.

**Démonstration.** La satisfaction de la relation (III.141) signifie que l'ensemble  $\mathcal{E}_1(W, \zeta, \delta_1)$  défini dans (III.144) est inclus dans l'ensemble  $S(u_0)$  défini dans (II.10). Donc pour tout  $\xi \in \mathcal{E}_1(W, \zeta, \delta_1)$ , la non-linéarité  $\phi(\mathbb{K}\xi)$  satisfait la condition de secteur (II.11) avec  $\mathbb{G} = ZW^{-1}$  et  $M = S^{-1}$ . En outre, la satisfaction des relations (III.142) et (III.143) implique que l'ensemble  $\mathcal{E}_1(W, \zeta, \delta_1)$  est inclus dans l'ensemble  $\Omega(\xi)$  défini dans (III.73).

La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov  $V(\xi) = \xi' W^{-1} \xi$  le long des trajectoires du système (III.139) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) - \omega' \omega &\leq 2\xi' W^{-1} \sum_{j=1}^4 \lambda_j \{ [\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}' T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R} + \mathbb{R}' T_{(3)} (B_3 + D(e)) \mathbb{R} + \mathbb{B}_1 Y W^{-1}] \xi \\ &\quad + \mathbb{R}' [B_{4j} + D(e) B_{5j}] \omega \} + 2\xi' W^{-1} \mathbb{B}_1 \phi(\mathbb{K}\xi) \\ &\quad - 2\phi(\mathbb{K}\xi)' S^{-1} (\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1} \xi) - \omega' \omega \end{aligned}$$

En utilisant des arguments de convexité, nous pouvons prouver que le terme à droite de cette inégalité est défini négatif si la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} &2\xi' W^{-1} [\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}' T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R} + \mathbb{R}' (B_3 + D(e)) \mathbb{R} + \mathbb{B}_1 Y W^{-1}] \xi + 2\xi' W^{-1} \mathbb{B}_1 \phi(\mathbb{K}\xi) \\ &+ 2\xi' W^{-1} \mathbb{R}' (B_{4j} + D(e) B_{5j}) \omega - 2\phi(\mathbb{K}\xi)' S^{-1} (\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1} \xi) - \omega' \omega < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.146})$$

Comme dans les démonstrations des propositions III.1 et III.2, en utilisant les relations (III.62) et (III.9), le terme contenant  $T_{(2)}$  peut être majoré comme :

$$\begin{aligned} 2\xi' W^{-1} \mathbb{R}' T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R} \xi &\leq \xi' (W^{-1} \mathbb{R}' R_1 \mathbb{R} W^{-1} + \mathbb{R}' B'_{2j} T_{(2)} R_1^{-1} T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R}) \xi \\ &\leq \xi' (W^{-1} \mathbb{R}' R_1 \mathbb{R} W^{-1} + u_{1(2)}^2 \mathbb{R}' B'_{2j} R_1^{-1} B_{2j} \mathbb{R}) \xi \end{aligned}$$

avec  $R_1 = R'_1 > 0$ . Avec la même méthode, en considérant les relations (III.9) et (III.62), nous pouvons majorer le terme contenant  $T_{(3)}$  et  $D(e)$  comme suit :

$$2\xi' W^{-1} \mathbb{R}' (T_{(3)} (B_3 + D(e)) \mathbb{R} \xi + D(e) B_{5j} \omega) =$$

$$\begin{aligned}
2\xi'W^{-1}\mathbb{R}' \begin{pmatrix} I_{(3)}I_3 & T_{(3)}D(e) & D(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3\mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \omega \end{pmatrix} \leq \\
\epsilon(u_{1(3)}^2(1+\beta^2) + \beta^2)\xi'W^{-1}\mathbb{R}'\mathbb{R}W^{-1}\xi + \\
\epsilon^{-1} \begin{pmatrix} \xi' & \omega' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3\mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} B_3\mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \omega \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est un scalaire positif.

En utilisant les majorations des termes contenant  $T_{(2)}$ ,  $T_{(3)}$  et  $D(e)$ , une condition suffisante permettant de satisfaire l'inégalité (III.146) est la suivante :

$$\begin{aligned}
& \xi'W^{-1}[\mathbb{A}_{1j}W + W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{R}'R_1\mathbb{R} + u_{1(2)}^2W\mathbb{R}'B'_{2j}R_1^{-1}B_{2j}\mathbb{R}W \\
& + \epsilon(u_{1(3)}^2(1+\beta^2) + \beta^2)\mathbb{R}'\mathbb{R} + \mathbb{B}_1Y + Y'\mathbb{B}'_1]W^{-1}\xi \\
& + 2\xi'W^{-1}\mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi) + 2\xi'W^{-1}\mathbb{R}'B_{4j}\omega - 2\phi(\mathbb{K}\xi)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\xi) + ZW^{-1}\xi) - \omega'\omega \\
& + \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} \xi'W^{-1} & \omega' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3\mathbb{R}W & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} B_3\mathbb{R}W & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}\xi \\ \omega \end{pmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{III.147}$$

La condition (III.147) s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \xi'W^{-1} & \phi'(\mathbb{K}\xi)S^{-1} & \omega' \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} W^{-1}\xi \\ S^{-1}\phi(\mathbb{K}\xi) \\ \omega \end{pmatrix} < 0 \tag{III.148}$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{A}_{1j}W + \mathbb{B}_1Y + Y'\mathbb{B}'_1 \\ + \mathbb{R}'(\epsilon(u_{1(3)}^2(1+\beta^2) + \beta^2)I_3 + R_1)\mathbb{R} \\ + u_{1(2)}^2W\mathbb{R}'B'_{2j}R_1^{-1}B_{2j}\mathbb{R}W & \star & \star \\ + \epsilon^{-1}W\mathbb{R}' \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} B_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \mathbb{R}W & & \\ S\mathbb{B}'_1 - Z & -2S & \star \\ B'_{4j}\mathbb{R} & 0 & -I_4 + \epsilon^{-1}B'_{5j}B_{5j} \end{pmatrix} < 0 \tag{III.149}$$

Ainsi en utilisant le complément de Schur, on obtient la relation (III.140).

Donc si la relation (III.140) est satisfaite, on vérifie que :

1. quand  $\omega(t) \neq 0$ ,  $V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) + \int_0^t \omega(\tau)'\omega(\tau)d\tau \leq \zeta^{-1} + \delta_1^{-1}$  pour tout  $\xi \in \mathcal{E}_0(W, \zeta)$ . Et donc pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{E}_0(W, \zeta)$  et toute perturbation  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123), les trajectoires du système bouclé (III.139) restent bornées dans  $\mathcal{E}_1(W, \zeta, \delta_1)$ .
2. quand  $\omega(t) = 0$ , on a  $\dot{V}(\xi) < 0$  pour tout  $\xi \in \mathcal{E}_0(W, \zeta)$ .

□

### Problème d'optimisation

Comme dans la section III.3.3, à partir des conditions LMIs de la proposition III.3, nous pouvons proposer un problème d'optimisation afin, en particulier, de maximiser la taille des ensembles  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_1$ . Par conséquent suivant si la borne de l'énergie de la perturbation,  $\delta_1$ , est donnée ou pas, les problèmes d'optimisation suivants peuvent être considérés :

- $\delta_1$  est connu. Nous voulons optimiser la taille des ensembles  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_1$ . Dans ce cas, le problème d'optimisation suivant est proposé :

$$\begin{aligned} & \min_{W, R_1, Y, Z, S, \zeta, \epsilon, \delta, \sigma} \zeta + \delta + \sigma \\ & \text{sous} \\ & \text{les conditions (III.140), (III.141), (III.142), (III.143),} \\ & \begin{pmatrix} \sigma I_6 & \star \\ Y & I_3 \end{pmatrix} \geq 0 \\ & \begin{pmatrix} \delta I_6 & \star \\ I_6 & W \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{III.150}$$

- Si  $\delta_1$  est inconnu, nous voulons le minimiser. Ce problème peut être interpréter comme le problème pour trouver la plus grande borne sur la perturbation, et donc, dans une certaine mesure quantifier la tolérance à la perturbation du système. Ainsi, nous pouvons ajouter  $\delta_1$  dans le critère précédent. Dans le cas où on rajoute  $\delta_1$ , on peut aussi rajouter des poids sur les variables. Un tel problème d'optimisation implique de faire un compromis entre la tolérance à la perturbation ( $\delta_1$ ) et la taille du domaine de stabilité ( $\zeta$ ).

### Résultats numériques

Dans cette tâche référencée vision de positionnement, nous avons installé la cible composée de 3 points dans la scène avec les coordonnées des points suivantes :

$$E_1(10m, 0.5m); \quad E_2(10m, 0m); \quad E_3(10m, -0.5m)$$

Dans ce cas, la distance  $l$  entre deux points consécutifs est toujours égale  $0.5m$ . L'intervalle de la distance entre le robot et la caméra est  $d_2 \in [2.226m, 6m]$ . Les indices visuels de références dans le plan d'image sont définis par :

$$Y_1^* = 0.2; \quad Y_2^* = 0; \quad Y_3^* = -0.2$$

Dans ce cas, comme nous avons expliqué dans la section III.3.3, la caméra sera stabilisée dans un positionnement centré face à la cible avec la profondeur de référence  $z^* = (2.5m \ 2.5m \ 2.5m)'$ . Pour garantir la visibilité de la cible, nous avons initialisé les paramètres aux mêmes valeurs  $\beta = 0.4$  et  $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$ . A partir des incertitudes sur  $p_1$  et  $p_2$  (voir les relations (III.82), (III.83) et (III.85)), les matrices  $B_1(z)$  et  $B_2(z)$  appartiennent toujours à deux polytopes de matrices (voir équations (III.104) et (III.105)). Les matrices  $B_4(z)$  et  $B_5(z)$  appartiennent aux deux polytopes de matrices suivants :

$$B_4(z) \in Co \left\{ \begin{pmatrix} 0.0491 & -0.0098 & 0.0491 & -0.0098 \\ 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2842 & 0.0568 & -0.2842 & -0.0568 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2842 & -0.0568 & 0.2842 & -0.0568 \\ 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0491 & 0.0098 & -0.0491 & -0.0098 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0.4035 & -0.0807 & 0.4035 & -0.0807 \\ 0.5211 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6386 & 0.1277 & -0.6386 & -0.1277 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6386 & -0.1277 & 0.6386 & -0.1277 \\ 0.5211 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4035 & 0.0807 & -0.4035 & -0.0807 \end{pmatrix} \right\} \quad (III.151)$$

$$B_5(z) \in Co \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -0.0491 & 0 & -0.0491 \\ 0 & -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2842 & 0 & 0.2842 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -0.2842 & 0 & -0.2842 \\ 0 & -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0491 & 0 & 0.0491 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & -0.4035 & 0 & -0.4035 \\ 0 & -0.5211 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6386 & 0 & 0.6386 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -0.6386 & 0 & -0.6386 \\ 0 & -0.5211 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4035 & 0 & 0.4035 \end{pmatrix} \right\} \quad (III.152)$$

Comme dans le cadre de la tâche référencée vision pour une cible fixe, nous avons considéré les mêmes valeurs pour la borne du torseur cinématique  $u_1 = (1 \ 1 \ 0.5)'$ , et de la commande  $u_0 = (4 \ 4 \ 5)'$ . Après avoir résolu le problème d'optimisation (III.150), nous obtenons le gain de commande  $\mathbb{K}$  :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -399.6289 & 967.6341 & -392.6463 & -7.9794 & -0.0852 & 4.8391 \\ -822.3343 & -5.1939 & 827.5853 & -0.0847 & -17.5871 & 0.0166 \\ -319.5389 & -244.0426 & -322.1449 & 4.8194 & 0.0165 & -30.5060 \end{pmatrix}$$

Cette valeur de  $\mathbb{K}$  a été obtenue pour le scalaire  $\delta_1 = 5.2523$ .

### Résultat de simulation

La configuration initiale du robot est donnée par :

$$x = 5.85m; \quad y = -2m; \quad \theta = 0rad; \quad \theta_p = 0.3636rad$$

L'état du système en boucle fermée (III.129) est initialisé avec :

$$\xi(0) = (-0.0025m \ 0.1003m \ 0.1951m \ 0ms^{-1} \ 0ms^{-1} \ 0rad^{-1})'$$

Pour cette tâche référencée vision de positionnement par rapport à la cible mobile, nous avons utilisé le même simulateur (voir figure III.7) que dans le cas de la tâche référencée vision de positionnement par rapport à une cible fixe. En construisant une commande cinématique  $\dot{q}$  pour les actionneurs du robot par la relation (III.112), la simulation nous donne les figures suivantes.

L'image à gauche de la figure III.12 représente la trajectoire du robot. La tâche de positionnement visuel permet de contrôler la caméra pour suivre la cible mobile dont le vecteur de vitesse est  $(v_E \ \omega_E)'$ . L'intégration du carré de la vitesse de la cible est bornée par le scalaire  $\frac{1}{\delta_1}$ , mais inconnue par rapport au robot. Lorsque la cible est arrêté

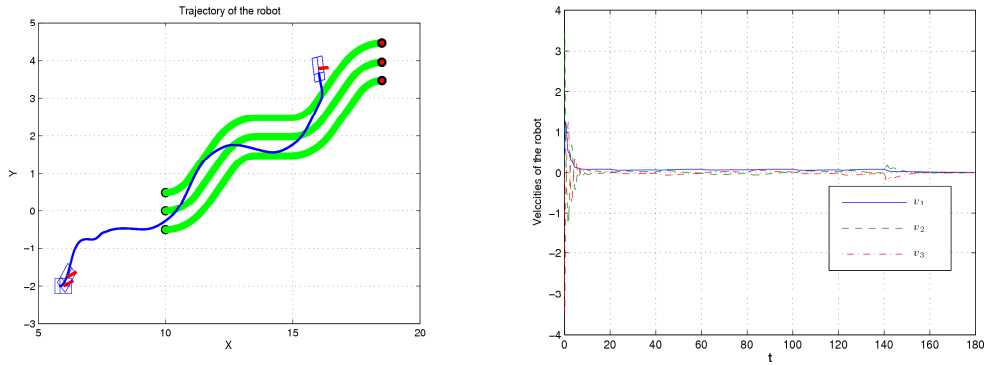


FIG. III.12: Trajectoire du robot dans l'environnement (à gauche) et vitesses du robot (à droite)

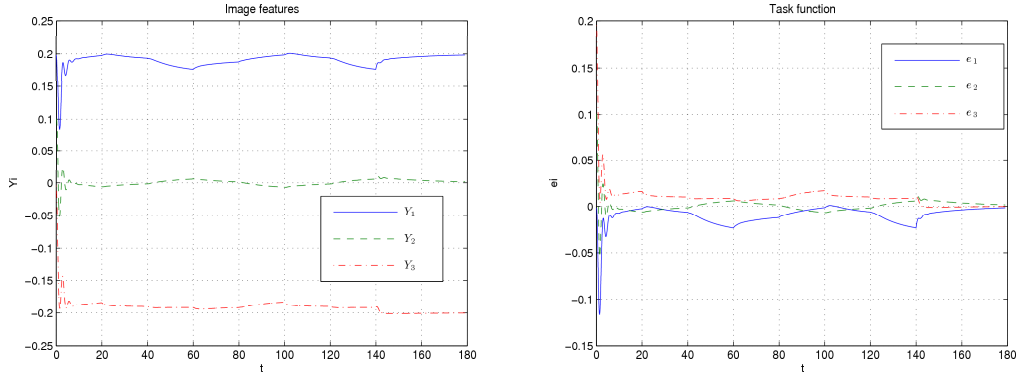


FIG. III.13: Evolution des indices visuels (à gauche) et erreurs des indices visuels (à droite)

après 140s, la caméra est stabilisée asymptotiquement à la position de référence face à la cible. Les vitesses du robot sont présentées dans la figure de droite de III.12. L'image à gauche de la figure III.13 présente l'évolution des indices visuels  $Y_i$  convergeant vers  $Y_i^*$  dans le plan image et celle de droite présente l'erreur des indices visuels  $e_{(i)} = Y_i - Y_i^*$ . L'évolution du torseur cinématique est représentée par l'image à gauche de la figure III.14. L'image à droite de la figure III.14 représente un zoom de la variation des composantes de la commande lors du début de la tâche. On s'aperçoit que la deuxième composante de la commande sature pendant un moment.

### III.3.5 Discussion

Dans cette section, nous avons abordé la commande référencée vision 2D en considérant une tâche de positionnement de la caméra par rapport à une cible de composée de 3 points. Nous avons considéré deux cas : le premier consiste à stabiliser la caméra par

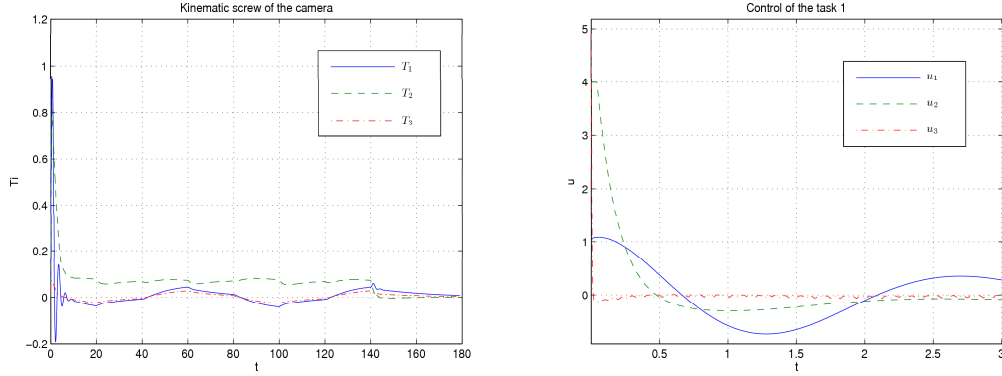


FIG. III.14: Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport au repère de la scène  $R$  (à gauche) et description des composantes de la commande (à droite)

rapport à une cible fixe, le second concerne la stabilisation de la caméra dans le cas d'une cible mobile, dont la vitesse est exprimée comme une perturbation bornée en énergie :  $\int_0^\infty \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\delta_1}$ . Des conditions LMIs ont été proposées pour traiter les problèmes de stabilité interne et de trajectoires bornées. A partir de ces résultats, nous pourrions envisager d'étudier également le gain  $\mathcal{L}_2$  du système (III.129). Dans ce cas là, il faudrait définir une sortie contrôlée pour le système. Cette approche consiste à déterminer un gain  $\mathbb{K}$  défini par la relation (III.128) tel que pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{E}_0(W, \zeta)$  et toute perturbation  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123), il existe deux scalaires finis  $\eta > 0$  et  $b \geq 0$  satisfaisant :

$$\|z_{reg.}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\eta} \|\omega(t)\|_2^2 + b, \quad \forall t > 0 \quad (\text{III.153})$$

Le scalaire  $b$  est un biais qui dépend de la condition initiale non nulle ( $\xi(0) \neq 0$ ).  $z_{reg.}(t)$  est le vecteur de sortie contrôlée du système (III.129) :

$$z_{reg.}(t) = C_z \xi(t) \quad (\text{III.154})$$

où  $C_z$  est une matrice de dimension appropriée. En considérant une fonction de Lyapunov  $V(\xi)$  quadratique :  $V(\xi) = \xi' P \xi > 0$  avec  $P = P' > 0$ , des conditions LMIs peuvent être obtenues pour satisfaire le long des trajectoires du système (III.137) :

$$\dot{V}(\xi) + z'z - \frac{1}{\eta} \omega' \omega \leq 0, \quad (\text{III.155})$$

pour tout  $\xi(0) \in \mathcal{E}_0(W, \zeta)$  et toute perturbation  $\omega(t)$  satisfaisant (III.123).

Dans cette section, nous avons considéré la vitesse de la cible comme une perturbation externe au système, bornée en énergie. Nous pouvons aussi considérer que cette perturbation est bornée en amplitude :

$$\omega'(t)\omega(t) = v_E^2(t) + l^2 \omega_E^2(t) \leq \delta_2, \quad \forall t > 0 \quad (\text{III.156})$$



où  $\delta_2$  est un scalaire positive,  $0 < \delta_2 < \infty$ . L'inconvénient de cette approche est que, pendant la stabilisation de la caméra, nous n'avons pas moyen de contrôler la pose du robot. Autrement dit, quand la caméra atteint la position de référence par rapport à la cible, nous ne pouvons pas contrôler le robot pour l'amener à une position spécifiée.

## III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé trois tâches référencées capteurs différentes par rapport à une cible composée de 3 points alignés. Sur cette base, nous avons montré que l'utilisation de techniques de commande avancées permet de prendre en compte un ensemble de contraintes lors de la synthèse du correcteur : l'incertitude sur la profondeur des points de la cible, la visibilité et les contraintes dynamiques des actionneurs.

Nous avons tout d'abord considéré le cas d'une cible fixe. Pour ce problème nous avons successivement développé deux lois de commande. La première permettant de réaliser une tâche d'asservissement en cap, la seconde permettant de positionner la caméra. Pour cela nous avons proposé une écriture du système basée sur une représentation polytopique des incertitudes, et nous avons utilisé une condition de secteur originale permettant de modéliser les saturations. Cette formulation nous a permis d'écrire les différentes conditions sous formes de LMIs, à partir desquelles nous avons pu mettre en œuvre des méthodes d'optimisation pour calculer les gains du correcteur pour lesquels la région de stabilité du système en boucle fermée est maximale.

Nous avons ensuite considéré le problème du suivi d'une cible mobile. Dans ce cas, en utilisant une approche similaire pour la représentation des incertitudes nous avons modélisé le système en considérant la vitesse de la cible comme un vecteur de perturbation borné en énergie. Sur cette base, nous avons pu caractériser un ensemble compact, contenant l'origine, dans lequel est assurée la convergence des trajectoires du système en boucle fermée lors du suivi de la cible mobile. Lorsque la cible s'immobilise, la convergence asymptotique du système est alors garantie, assurant le positionnement de la caméra à la configuration désirée.

Les résultats de simulation ont montré que les différentes tâches étaient correctement exécutées avec le respect des contraintes. Dans certains cas, nous avons mis en évidence des saturations sur la commande. Ce phénomène étant modélisé par la condition de secteur que nous avons considérée, la stabilité du système en boucle fermée reste garantie.

Les trois tâches référencées capteurs que nous avons définies permettent de réguler localement le mouvement du robot. Pour étendre le caractère local de cette approche, et permettre l'exécution de grands déplacements, il apparaît nécessaire de pouvoir enchaîner dynamiquement plusieurs tâches élémentaires. Ce problème sera abordé au chapitre suivant, dans lequel nous rappellerons un cadre mathématique permettant de modéliser l'enchaînement de tâches, puis nous présenterons un ensemble de résultats de simulation pour la navigation d'un robot mobile.

---

# Chapitre IV

## Application à la commande d'un robot mobile par enchaînement de tâches référencées capteurs

---

Les travaux que nous avons réalisés sur l'asservissement visuel robuste nous ont amené à considérer le problème de la navigation d'un robot mobile sous l'angle de la commande référencée capteur. Dans ce dernier chapitre nous présentons un ensemble de techniques que nous avons mises en œuvre pour répondre à ce problème. Ces travaux sont en lien direct avec les méthodes de synthèse de commandes multi-critères qui ont été présentées au chapitre précédent.

### IV.1 Introduction

La difficulté du problème de navigation des robots mobiles provient de la nécessité de considérer simultanément les contraintes dynamiques du système et les contraintes géométriques de l'environnement. Pour cette raison, les stratégies de commande sont classiquement structurées en deux étapes. La première étape consiste à planifier une trajectoire admissible, sans collision, dans l'espace libre [66], [24], [81]. Sur cette base, la seconde étape concerne la synthèse d'une loi de commande en boucle fermée permettant de réguler la tâche de déplacement le long de la solution de référence [29]. Bien qu'elle permette d'apporter une solution complète au problème, cette méthode présente deux inconvénients majeurs. Le premier est lié à la nécessité de transformer continuellement les données capteurs, par rapport à un repère global lié à la scène, pour reconstruire l'état du robot. Cette transformation, répétée à une cadence élevée, rend l'approche lourde et

peu robuste aux erreurs de modélisation et de mesure. Le deuxième inconvénient vient du fait que la planification d'une trajectoire de référence rend la méthode peu réactive et nécessite une bonne connaissance de l'environnement.

La commande référencée capteur offre une alternative intéressante à l'approche métrique globale. Au lieu de requérir la planification d'une trajectoire géométrique complète, le contrôle du mouvement est défini localement par la régulation d'un vecteur de données capteurs, relatif à la perception d'amers de la scène. Dans cette approche, l'erreur à réguler étant directement fonction de l'écart entre les données délivrées par les capteurs à la position courante et les données attendues à la position de référence, la robustesse par rapport aux erreurs de modélisation s'avère naturellement plus forte. D'autre part, au lieu de caractériser complètement le mouvement de référence par la planification d'une trajectoire métrique, cette approche permet de contraindre progressivement les degrés de liberté du robot au cours du déplacement. Toutefois, chaque tâche référencée capteur ne permettant de réguler le mouvement que localement, au voisinage d'un ou plusieurs amers de référence, l'exécution d'un long déplacement ne peut être envisagée qu'au moyen de l'enchaînement d'une succession de tâches élémentaires. Le formalisme des fonctions de tâches, que nous avons introduit dans les chapitres précédents, offre un cadre formel pour modéliser chaque tâche élémentaire. Cependant, comme nous l'avons rappelé au chapitre I, la condition de  $\rho$ -admissibilité, qui permet de garantir l'existence d'un difféomorphisme local entre l'espace d'état et l'espace de la tâche, est une propriété intrinsèquement locale. Il apparaît donc nécessaire d'étendre le lien différentiel local, propre à la définition de chaque tâche élémentaire, pour garantir la régularité des paramètres d'état tout au long du mouvement, et en particulier lors de la transition entre tâches. En particulier, le choix de la dynamique de décroissance de chaque fonction de tâche est essentiel pour assurer la continuité des vitesses du robot et le respect des contraintes propres à chaque tâche élémentaire.

Pour répondre à ce problème, un cadre mathématique basé sur le formalisme des fonctions de tâches a été proposé dans [102] pour modéliser le problème d'enchaînement. L'approche proposée, qui est décrite à la section IV.2, repose sur la définition de fonctions de tâches de dimension maximale et l'introduction d'une structure de variété différentielle sur l'espace des coordonnées généralisées du robot. Cette représentation, qui concerne les robots constitués d'une chaîne cinématique simple, offre un moyen direct de choisir la dynamique de chaque fonction de tâche afin de conserver la continuité des vitesses lors de la transition entre deux tâches élémentaires.

Sur la base de ce formalisme, nous présentons ensuite, à la section IV.3, deux approches que nous avons mises en œuvre pour réaliser l'enchaînement de tâches. La première consiste à définir la dynamique de la nouvelle tâche au moyen d'un système linéaire d'ordre deux, puis d'ordre trois, en prenant comme conditions initiales les valeurs de la fonction de tâche et de sa dérivée induite par l'exécution de la tâche en cours. Cette technique permet de garantir la continuité des vitesses du robot mais ne permet pas d'en limiter la variation ou de satisfaire les contraintes propres à la nouvelle tâche. La seconde approche consiste à synthétiser la dynamique de la nouvelle tâche à partir d'une loi multi-critères, du type de celle développée au chapitre III. Le raisonnement est illustré, dans les deux cas,

en considérant l'enchaînement d'une tâche de suivi de mur, réalisée au moyen de données proximétriques, et d'une tâche référencée vision de positionnement.

Dans la section IV.4 nous présentons ensuite un exemple d'enchaînement de trois tâches référencées vision permettant de contraindre progressivement les degrés de liberté du robot au cours du mouvement. Pour ce type de déplacement, dans lequel les positions initiale et finale du robot sont très éloignées, l'enchaînement de tâches élémentaires, définies à partir de correcteurs multi-critères, permet de garantir la satisfaction des contraintes tout le long du mouvement.

Notons que des approches différentes, en partie basées sur le formalisme développé dans [102], ont également été développées pour traiter le problème d'enchaînement de tâches [79], [80], [78]. Dans ces travaux, qui s'appuient sur le concept de pile de tâches, la tâche nominale est définie à partir d'un empilement de tâches élémentaires, ordonnées selon leur degré de priorité. Un contrôleur de tâche de plus haut niveau permet alors d'introduire de nouvelles tâches ou d'en enlever en fonction des contraintes environnements.

## IV.2 Modélisation du problème d'enchaînement de tâches référencées capteurs

Dans cette section nous rappelons le cadre mathématique proposé dans [102] pour modéliser le problème d'enchaînement de tâches, sur la base du formalisme des fonctions de tâches. Comme nous l'avons rappelé au chapitre III, la régulation de chaque fonction de tâche permet de définir un lien virtuel entre un référentiel lié au capteur et un référentiel lié à la scène. Lorsqu'on cherche à étendre le caractère local de l'approche, la principale difficulté à laquelle on se heurte est l'hétérogénéité des différentes tâches. Les liens virtuels définis par chaque tâche impliquent en effet des référentiels capteurs distincts, rigidement liés à des segments différents du robot, et pouvant être en mouvement les uns par rapport aux autres.

Pour illustrer cette difficulté, considérons la figure IV.1 qui schématise la répartition des principaux capteurs sur un robot à roues. Chaque capteur est associé à un repère  $R_i$ , d'origine  $S_i$ . Les capteurs proximétriques tels que les ultrasons ou le télémètre laser 2D sont généralement fixés à la base mobile du robot, tandis que d'autres capteurs tels que le capteur de vision ou le capteur audio, nécessitant des degrés de liberté supplémentaires, sont fixés sur une platine mobile ou un bras. Sur le schéma de la figure IV.1 nous avons considéré le cas d'une caméra CCD supportée par une structure mobile, sans davantage détailler la liaison. En suivant le formalisme des fonctions de tâches, chaque fonction de tâche est définie par un vecteur  $e(t)$ , de même dimension que le vecteur de coordonnées généralisées  $q(t)$  associé [99], [34]. La condition de  $\rho$ -admissibilité permet de définir un difféomorphisme local  $e = \phi(q)$  entre l'espace des coordonnées généralisées et l'espace de la tâche (voir figure IV.2) Dans le cas d'un robot mobile, on considère souvent que les angle de rotation des roues droite et gauche constituent les deux premières coordonnées

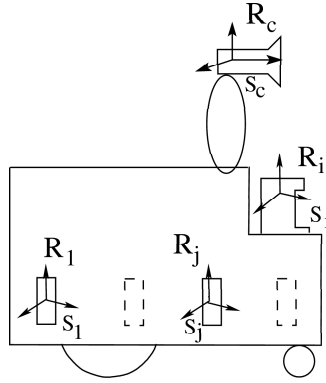


FIG. IV.1: Exemple de positionnement des capteur sur un robot à roues

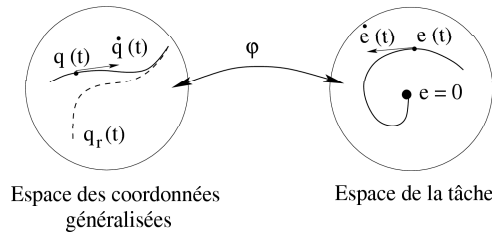


FIG. IV.2: Difféomorphisme local associé à la définition de chaque tâche

généralisées<sup>1</sup>, les autres coordonnées représentant les paramètres angulaires de la chaîne cinématique reliant le repère capteur à la base mobile [13] [90]. Il apparaît alors qu'une tâche de navigation référencée vision implique la régulation d'un plus grand nombre de variables qu'une tâche référencée sur des capteurs de proximité, rigidement liés à la base. En conséquence, les fonctions de tâche correspondantes seront de dimension différente. Pour pallier ce problème, l'idée proposée dans [102] consiste à définir, pour chaque tâche référencée capteur, une fonction de tâche de dimension maximale, égale à la dimension du vecteur de coordonnées généralisées de la chaîne complète. L'approche proposée peut être appliquée à tout type de robot mobile supportant une chaîne cinématique simple, les capteurs pouvant être répartis sur les différents segments. La définition de tâches de dimension maximale peut être réalisée par introduction de contraintes additionnelles, soit en ajoutant à la fonction de tâche des composantes représentant une ou plusieurs sous-tâches compatibles avec la tâche initiale, soit en utilisant le formalisme des tâches redondantes [99]. Dans tous les cas, chaque tâche ainsi définie, de même dimension que le vecteur complet  $q(t) \in Q \subset \mathbb{R}^n$ , définit la situation par rapport à la scène d'un référentiel situé au sommet de la chaîne. Par exemple, dans le cas de la figure IV.1, le repère  $R_C$  de la caméra est rigidement lié au sommet de la chaîne. Sous l'hypothèse que les conditions

<sup>1</sup>Un autre choix possible de variables généralisées pour décrire le mouvement de la base mobile est le couple  $(s(t), \theta(t))$ , où  $s(t)$  représente l'abscisse curviligne du point représentatif du robot et  $\theta$  son orientation à l'instant  $t$ .

de régularité sont vérifiées, chaque fonction de tâche  $e_i(q, t)$  définit un difféomorphisme local entre un voisinage  $W_i$  de la trajectoire idéale  $q_r(t)$  dans l'espace  $Q$  des coordonnées généralisées et un voisinage  $U_i$  de zéro dans l'espace de la tâche. Plus précisément, à chaque instant  $t$ , la différentielle  $d\varphi_i|_{q(t)}$  définit une bijection entre l'espace tangent à  $Q$  au point  $q$  et l'espace tangent à l'espace de la tâche au point  $e_i(q, t)$ , du type :

$$\dot{e}_i(q, t) = d\varphi_i|_{q(t)}\dot{q}(t) = H_i\dot{q} + \frac{\partial e_i}{\partial t} \quad (\text{IV.1})$$

où  $H_i$  est une matrice  $n \times n$  inversible. Chaque paire  $(\varphi_i, W_i)$  constitue donc une carte sur la variété  $Q$  (voir figure IV.3). Dans la mesure où les domaines  $W_i$ , correspondant aux différentes tâches, assurent le recouvrement d'une composante connexe de  $Q$ , il est alors possible d'utiliser cette structure de variété différentielle pour modéliser le problème d'enchaînement. Considérons le problème d'enchaîner deux tâches représentées par les

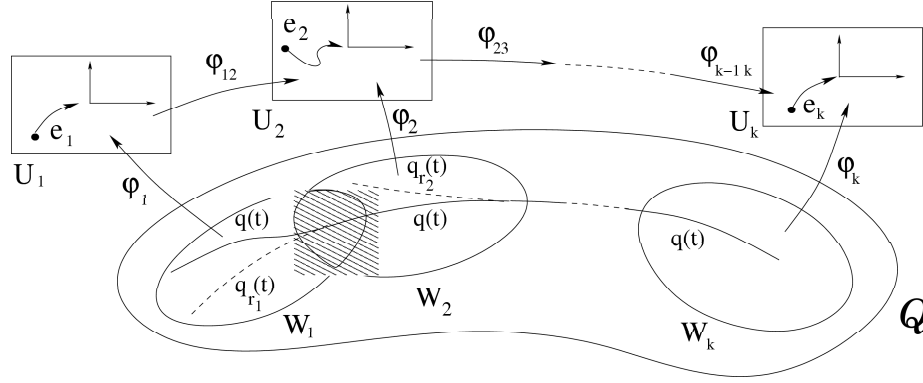


FIG. IV.3: Structure différentielle dans l'espace  $Q$

fonctions  $e_1 = \varphi_1(q)$  et  $e_2 = \varphi_2(q)$ , respectivement définies sur les domaines  $W_1$  et  $W_2$  de  $Q$ , et tels que  $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ . Notons  $U_i = \varphi_i(W_i)$ ,  $i = 1, 2$  les domaines correspondants de  $\mathbb{R}^n$  dans chaque carte.

La régulation de la première fonction de tâche  $e_1$  à zéro induit la convergence de la trajectoire du robot  $q(t)$  vers la trajectoire de référence  $q_{r_1}(t)$ . Dans la région  $W_1 \cap W_2$ , on peut faire commuter la commande de sorte que la boucle fermée soit définie à partir de la décroissance de la fonction de tâche  $e_2$ . Durant cette transition, il est essentiel de garantir que la vitesse du robot reste continue et bornée, et que l'admissibilité de la tâche est conservée. En utilisant la structure différentielle qui vient d'être décrite, on peut directement exprimer le difféomorphisme  $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  qui relie les cartes  $U_1$  et  $U_2$  :

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(q, t) &= d\varphi_{12}|_{e_1(q, t)}(\dot{e}_1(q, t)) \\ &= H_2 H_1^{-1} \dot{e}_1(q, t) - H_2 H_1^{-1} \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial e_2}{\partial t} \end{aligned}$$

Ce lien différentiel permet de caractériser de manière unique l'évolution de la fonction de tâche  $e_2$  consécutive à l'exécution de la première tâche sur la région  $W_1 \cap W_2$ . Pour garantir la continuité des vitesses du robot à l'instant de transition  $t_s$ , il suffit alors

de choisir une dynamique pour la seconde fonction de tâche satisfaisant les conditions initiales  $(e_2(q, t_s), \dot{e}_2(q, t_s)) = (\varphi_{12}(e_1(q, t_s)), d\varphi_{12}|_{e_1(q, t_s)}(\dot{e}_1(q, t_s)))$ . Notons que l'existence d'un tel difféomorphisme entre les cartes provient du fait que les deux fonctions de tâches sont exprimées en fonction du même vecteur de coordonnées généralisées. Pour le modèle que nous avons considéré, à chaque valeur du vecteur  $q(t)$  correspond un positionnement du repère  $R_C$ . La transformation des différents torseurs cinématique par rapport à ce référentiel est exprimée dans [102].

Dans la section suivante nous allons présenter un ensemble de travaux que nous avons réalisés, sur la base de ce formalisme, pour enchaîner deux tâches de navigation référencées-capteurs pour un robot mobile supportant une caméra mobile en lacet. Nous avons considéré le problème d'enchaîner dynamiquement d'une tâche de suivi de mur, réalisée sur la base de données proximétriques, avec une tâche référencée vision de positionnement de la caméra par rapport à une cible visuelle.

Dans la sous-section IV.3.1 nous présentons une première approche dans laquelle l'enchaînement a été réalisé en imposant pour la seconde tâche une dynamique linéaire d'ordre supérieur sur la base du schéma de transition précédent. Dans un premier cas, la décroissance de la seconde tâche est définie en utilisant une dynamique linéaire du second ordre satisfaisant les conditions initiales  $(e_2(q, t_s), \dot{e}_2(q, t_s))$  données par l'exécution de la première tâche à l'instant de commutation  $t_s$ . Dans cette approche, les pôles du système ont été choisis de telle sorte que le système ne présente pas de dépassement et converge à une allure compatible avec les contraintes des actionneurs. Bien que ce premier résultat permette de conserver la continuité des vitesses, celles-ci peuvent présenter une variation très importante à l'instant de transition. Le placement de pôles s'avère alors difficile à réaliser a priori. Pour répondre à ce problème nous avons ensuite mis en œuvre une seconde approche en déterminant cette fois la dynamique de la deuxième tâche au moyen d'un système du troisième ordre [38]. Cette extension permet de garantir la continuité de l'accélération du robot lors de la transition, entraînant un meilleur lissage des vitesses. Toutefois, cette approche ne permet pas de borner la variation des vitesses qui peut rester importante lors de la transition.

Nous montrons ensuite, à la sous section IV.3.2, que l'utilisation du correcteur multicritères, développé au chapitre précédent, permet d'apporter une solution à ce problème. [103]. Cette dernière approche permet de garantir la continuité des vitesses mais également le respect des contraintes d'accélération et de visibilité de la cible malgré l'incertitude sur la mesure de profondeur des points de la cible.

## IV.3 Enchaînement d'une tâche de suivi et d'une tâche référencée vision

Dans cette section nous décrivons différentes approches que nous avons suivies pour réaliser l'enchaînement de tâches référencées capteurs, sur la base du formalisme rappelé dans la section précédente.

Nous avons mené notre raisonnement en considérant deux tâches référencées capteur pour la navigation d'un robot mobile décrit par le modèle cinématique (I.37) et représenté par la figure IV.4. La première est une tâche de suivi de mur, réalisée sur la base de la régulation de mesure proximétriques, la seconde est une tâche de positionnement référencée vision. Ces deux tâches sont décrites ci-après.

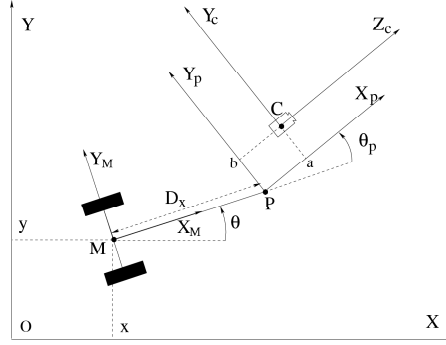


FIG. IV.4: Robot mobile muni d'une platine mobile orientable

### Tâche de suivi de mur

La première tâche, associée à la fonction de tâche  $e_1$ , consiste à asservir le robot le long d'un chemin de référence (mur virtuel) tout en contrôlant la platine de sorte que la caméra reste face à la cible. Pour cet objectif, nous utilisons trois types de capteurs : l'odomètre, les ultrasons et la caméra. L'odomètre est utilisé pour réguler la vitesse linéaire de la base mobile  $v$ , tandis que les ultrasons sont utilisés pour contrôler la vitesse angulaire de la base mobile  $\dot{\theta}$ , la caméra est utilisée pour contrôler la vitesse angulaire de la plateforme  $\dot{\theta}_p$ . La fonction de tâche  $e_1$  est définie de la manière suivante :

$$e_1(q(t), t) = \begin{pmatrix} s_c - v_r t \\ y_e + \gamma \theta_e \\ Y_G \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{IV.2})$$

où

- $s_c$  est l'abscisse curviligne de la trajectoire du point  $M$  du robot, donnée par l'odomètre ( $s_c$  est obtenu par le produit de l'intégrale des vitesses angulaires des roues droite et gauche et de leur rayon).
- $v_r$  est la vitesse constante de référence du robot.
- $y_e$  est la distance entre le point  $M$  et le chemin de référence (mur virtuel). Sa dérivée par rapport au temps est donnée par  $\dot{y}_e = v_r \sin \theta_e$ , où  $\theta_e$  est l'orientation du robot relativement à l'axe des abscisses du repère  $R_M$  par rapport au mur et donnée par  $\theta_r - \theta$ . Ici,  $\theta$  est l'orientation du robot relativement à l'axe des abscisses du repère  $R_M$  par rapport au repère de la scène ;  $\theta_r$  est sa valeur de référence. Les écarts  $y_e$  et  $\theta_e$  peuvent être évalués à partir de la mesure des ultrasons.



- $Y_G$  est l'ordonnée du centre de la cible, projetée dans le plan image de la caméra.
- $\gamma$  est une constante positive.

En calculant la dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche  $e_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ & L_{Y_G} J & \end{pmatrix}}_H \dot{q}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} -v_r \\ v_r \sin \theta_e + \gamma \dot{\theta}_r \\ 0 \end{pmatrix}}_B \\ &= H\dot{q}(t) + B \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

où

- $L_{Y_G} = \begin{pmatrix} -1/z_G & Y_G/z_G & 1 + Y_G^2 \end{pmatrix}$  est la matrice d'interaction réduite associée à  $Y_G$  donnée implicitement par l'équation (I.14).
- $J$  est la matrice jacobienne réduite du robot donnée par l'équation (I.53).
- $\dot{q} = \begin{pmatrix} v & \dot{\theta} & \dot{\theta}_p \end{pmatrix}' \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de la commande cinématique du robot.  $v = ds_c/dt$  est la vitesse linéaire du robot,  $\dot{\theta}$  est la vitesse angulaire de la base mobile par rapport au repère  $R$  et  $\dot{\theta}_p$  est la vitesse angulaire de la platine par rapport au repère  $R_M$  de la base.

Dans ce cas, la matrice  $H$  est une matrice de rang plein, elle est donc toujours inversible. Cette relation est exactement sous la forme (IV.1) et définit un difféomorphisme local entre l'espace des coordonnées généralisées  $Q$  et l'espace de la tâche  $e_1$ .

### Tâche référencée vision

La seconde tâche est une tâche référencée vision 2D de positionnement de la caméra à 3 degrés de liberté face à une cible fixe dans la scène. Pour cette seconde tâche, nous utilisons les résultats de la section I.3. La fonction de tâche est définie par :

$$e_2(r(t), t) = C(s(r(t), t) - s^*) = C \begin{pmatrix} X_1(t) - X_1^* \\ Y_1(t) - Y_1^* \\ \cdots \\ X_{\frac{k}{2}}(t) - X_{\frac{k}{2}}^* \\ Y_{\frac{k}{2}}(t) - Y_{\frac{k}{2}}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{IV.4})$$

où :

- $s(r(t), t)$  est un vecteur d'informations visuelles de dimension  $k$  ;
- $s^*$  est la valeur désirée que  $s$  doit atteindre pour que la tâche soit réalisée ;
- $C$  est une matrice de *combinaison* de dimension  $3 \times k$ , de rang plein 3.

En considérant que la matrice de combinaison  $C$  est constante, la dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche  $e_2$  s'écrit :

$$\dot{e}_2(t) = CLT(t) = CLJ(q)\dot{q}(t) \quad (\text{IV.5})$$

où  $L$  est la matrice d'interaction de la caméra de dimension  $k \times 3$ , et  $J(q)$  est la matrice jacobienne réduite du robot définie par la relation (I.53).

Comme nous avons expliqué dans le chapitre I, pour utiliser la tâche référencée vision 2D pour positionner une caméra 3 degrés de liberté, il faut disposer au moins trois informations visuelles  $k \geq 3$ , telles que la matrice d'interaction  $L$  soit de rang 3. Nous avons successivement considéré le cas d'une cible constituée de quatre points disposés en carré, puis de trois points alignés.

### IV.3.1 Utilisation d'une dynamique linéaire d'ordre supérieur pour la seconde tâche

Dans cette section nous présentons les résultats que nous avons obtenus, sur la base du formalisme introduit dans la section IV.2, en définissant la décroissance de la seconde tâche à l'aide d'une dynamique linéaire du deuxième, puis du troisième ordre.

Dans les deux cas nous avons choisi de réguler la première tâche de suivi en imposant une décroissance exponentielle de la première fonction de tâche  $e_1$ , selon l'approche classique rappelée dans la section I.3.2 :

$$\dot{e}_1(t) = -\lambda e_1(t), \quad \lambda > 0 \quad (\text{IV.6})$$

En considérant l'expression (IV.3), on obtient directement l'expression d'une loi de commande cinématique sous la forme :

$$\dot{q}(t) = -H^{-1}(\lambda e_1(t) + B) \quad (\text{IV.7})$$

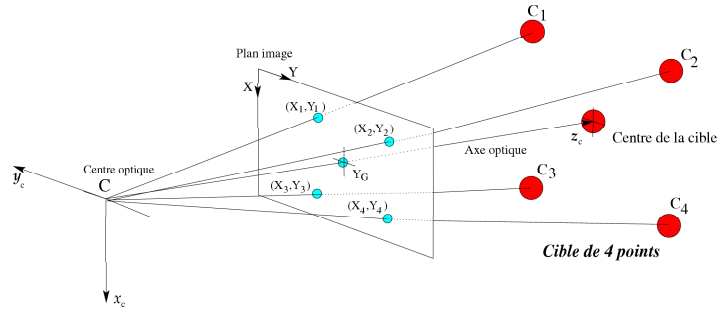


FIG. IV.5: Cible composée de 4 points en carrée

La seconde tâche, référencée vision, consiste à positionner la caméra face à une cible fixe de quatre points, dont le centre est situé à la même hauteur que le centre optique de la caméra (voir figure IV.5). Dans ce cas, le nombre d'informations visuelles, égal à 8 ( $k = 8$ ) est donc supérieur au nombre de degrés de liberté de la caméra ( $n = 3$ ). Pour définir une tâche admissible, il est commun d'introduire une matrice de combinaison  $C$  de dimension  $3 \times 8$ . Nous avons choisi ici cette matrice égale à la pseudo-inverse d'une approximation de la matrice d'interaction à la position désirée (voir équation I.30) :

$$C = \hat{L}_{|s=s^*}^+ \quad (\text{IV.8})$$

En considérant la relation (IV.5), la dérivée de la fonction de tâche  $e_2$  peut alors s'écrire :

$$\dot{e}_2(t) = \widehat{L}_{|s=s^*}^+ LT(t) = \widehat{L}_{|s=s^*}^+ LJ(q)\dot{q}(t), \quad (\text{IV.9})$$

où  $L \in \mathbb{R}^{8 \times 3}$  représente la matrice d'interaction par rapport à la cible composée de 4 points et s'écrit à l'aide de (I.14) :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & X_1/z_1 & X_1Y_1 \\ -1/z_1 & Y_1/z_1 & 1 + Y_1^2 \\ 0 & X_2/z_2 & X_2Y_2 \\ -1/z_2 & Y_2/z_2 & 1 + Y_2^2 \\ 0 & X_3/z_3 & X_3Y_3 \\ -1/z_3 & Y_3/z_3 & 1 + Y_3^2 \\ 0 & X_4/z_4 & X_4Y_4 \\ -1/z_4 & Y_4/z_4 & 1 + Y_4^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Ce choix garantit que la jacobienne de la fonction de tâche, définie par le produit de matrices  $\widehat{L}_{|s=s^*}^+ LJ(q)$ , est carrée et de rang plein 3. Cette définition des fonctions de tâches  $e_1$  et  $e_2$  garantit qu'un difféomorphisme est correctement défini, dans chaque cas, entre un voisinage de la trajectoire de référence  $q_r(t)$  dans l'espace des coordonnées généralisées  $q$  et un voisinage de zéro dans l'espace de la tâche ( $e_i$ ),  $i = 1, 2$ . En reprenant le formalisme de la section IV.2, un lien différentiel peut donc être défini entre les deux fonctions de tâche  $e_1$  et  $e_2$ , à l'aide de la relation (IV.2), et s'écrit :

$$\dot{e}_2(t) = \widehat{L}_{|s=s^*}^+ LJ(q)H^{-1}(\dot{e}_1(t) - B) \quad (\text{IV.11})$$

En utilisant la relation (IV.6), lorsque l'état  $q(t)$  du robot se trouve dans la zone d'intersection  $W_1 \cap W_2$ , à un instant  $t$ , inférieur à l'instant de commutation  $t_s$ , la vitesse  $\dot{e}_2$  relative à l'exécution de  $e_1$  s'exprime alors sous la forme :

$$\dot{e}_2(t) = -\widehat{L}_{|s=s^*}^+ LJ(q)H^{-1}(\lambda e_1(t) + B) \quad (\text{IV.12})$$

Une condition suffisante pour garantir la continuité des vitesses du robot, à l'instant de transition de transition  $t_s$ , est que la dynamique de la seconde tâche soit définie par une fonction différentiable  $e_2(t)$ , convergeant vers 0, et satisfaisant les conditions initiales  $(e_2(t_s), \dot{e}_2(t_s))$ .

### Utilisation d'une dynamique du deuxième ordre pour la seconde tâche

Une première solution que nous avons proposée pour lisser l'enchaînement des deux tâches est d'imposer à la tâche  $e_2$  de satisfaire une dynamique linéaire du second ordre. Pour cela on considère une expression de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_2(t) \\ \ddot{e}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix} \ddot{e}_2(t) \quad (\text{IV.13})$$

où  $\ddot{e}_2(t)$  est considéré comme l'entrée de commande. Nous pouvons donc construire simplement une loi de commande linéaire par retour d'état :

$$\ddot{e}_2(t) = \begin{pmatrix} k_1 I_3 & k_2 I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

les gains  $k_1$  et  $k_2$  pouvant être déterminées en faisant un placement des modes de la matrice dynamique du système (IV.13) dans le demi-plan complexe gauche  $\{z \in \mathcal{C}, \text{Re}(z) < 0\}$ . En pratique, sur un petit intervalle de temps  $[t_s - \tau, t_s]$  précédant l'instant de commutation  $t_s$ , (durant lequel  $q(t) \in W_1 \cap W_2$ ),  $e_2(t)$  est mesurée pendant l'exécution de la première tâche  $e_1$ . Lorsque  $t \geq t_s$ , la dynamique de la deuxième tâche est alors définie à l'aide d'un système linéaire du second ordre (IV.13), avec une loi de commande par retour d'état (IV.14) satisfaisant les conditions initiales :

- $e_2(t_s)$  donnée par la mesure de la caméra;
- $\dot{e}_2(t_s)$  donnée par la relation :

$$\dot{e}_2(t_s) = -\widehat{L}_{|s=s^*}^+ L J H^{-1} (\lambda e_1(t_s) + B), \quad (\text{IV.15})$$

d'après la relation (IV.12).

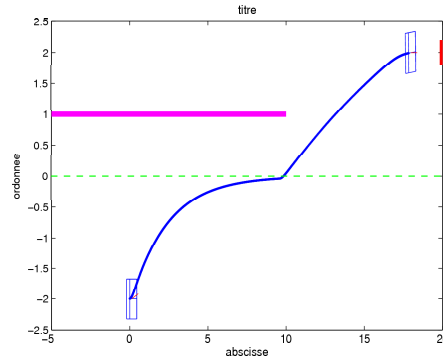


FIG. IV.6: Trajectoire du robot dans le repère de la scène  $R$

Nous avons simulé cette première approche en prenant pour la configuration initiale du robot :

$$x = 0m; \quad y = -2m; \quad \theta = 0rad; \quad \theta_p = \pi/16rad$$

La première tâche consiste à asservir le robot pour suivre un mur (représenté par la droite  $y = 1$ ). Le suivi est donc réalisé à une distance de  $1m$  du mur, i.e. le robot est amené à suivre le chemin de référence d'équation  $y = 0$ . Pour la seconde tâche, référencée vision, la cible est constituée de quatre points situés au sommet d'un carré de  $0.4m$  de côté. Les coordonnées du centre de la cible dans le plan horizontal sont  $x = 20m$  et  $y = 2m$ . La commutation est réalisée dans une zone temporelle autour de l'instant  $t_s = 50s$ . Durant la première tâche, l'orientation de la platine est contrôlée indépendamment de la base, de façon à conserver la cible dans le champ de vision de la

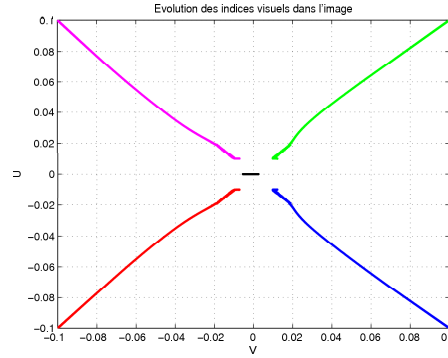


FIG. IV.7: Evolution des indices visuels dans le plan image de la caméra

caméra. Ainsi, l'orientation de la platine est connue à chaque instant, durant la première tâche, de sorte à caractériser la chaîne cinématique entre le repère capteur  $R_j$  lié à la base (ultrasons) et le repère de la caméra  $R_C$ . Une fois que le robot atteint la zone de transition, les valeurs de la seconde fonction de tâche  $e_2(t)$ , et de sa dérivée  $\dot{e}_2(t)$ , sont mesurées. Elles représentent la variation des indices visuels correspondant à l'exécution de la tâche de suivi. On peut ainsi déterminer les conditions initiales de la seconde tâche à l'instant  $t = t_s$ . Avec les conditions initiales  $e_2(t_s)$  et  $\dot{e}_2(t_s)$ , le système du second ordre (IV.13) sera asymptotiquement stabilisé par la commande par retour d'état (IV.14). Dans ce cas, nous avons choisi des racines réelles pour éviter tout dépassement :  $k_1 = -0.02$  et  $k_2 = -1.02$ . Les modes de la matrice dynamique sont :  $-0.02$  et  $-1$ . Les résultats sont présentés sur les figures IV.6 à IV.10.

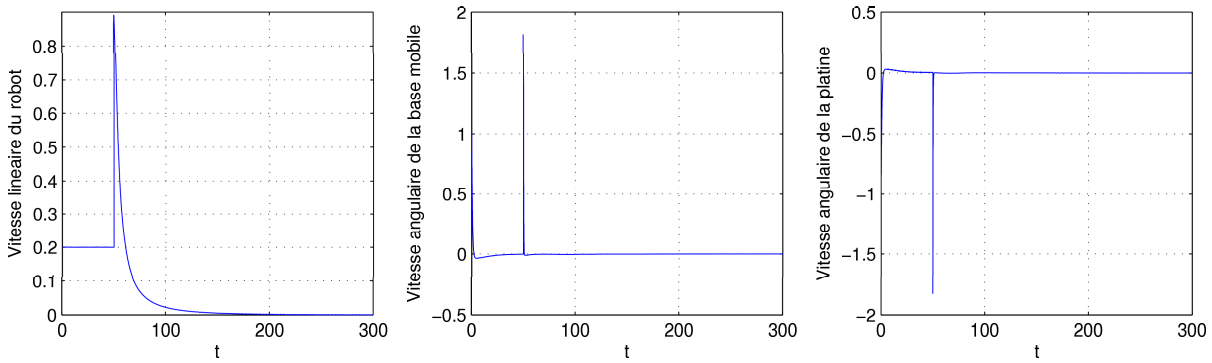
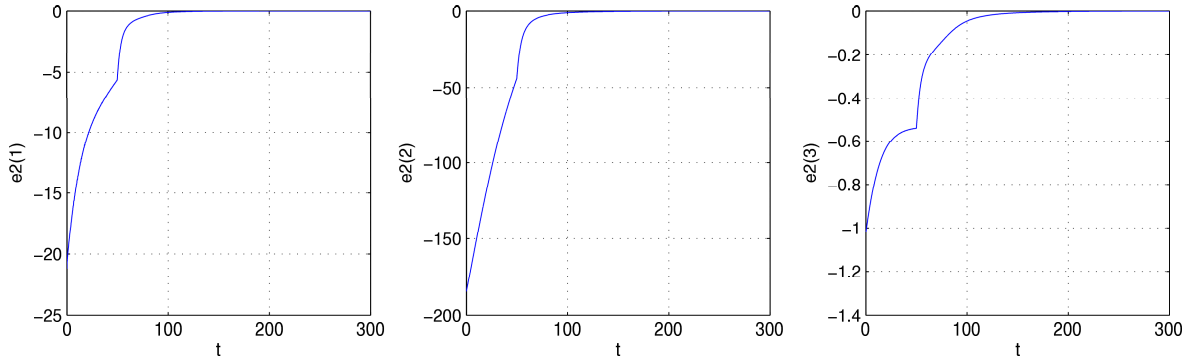
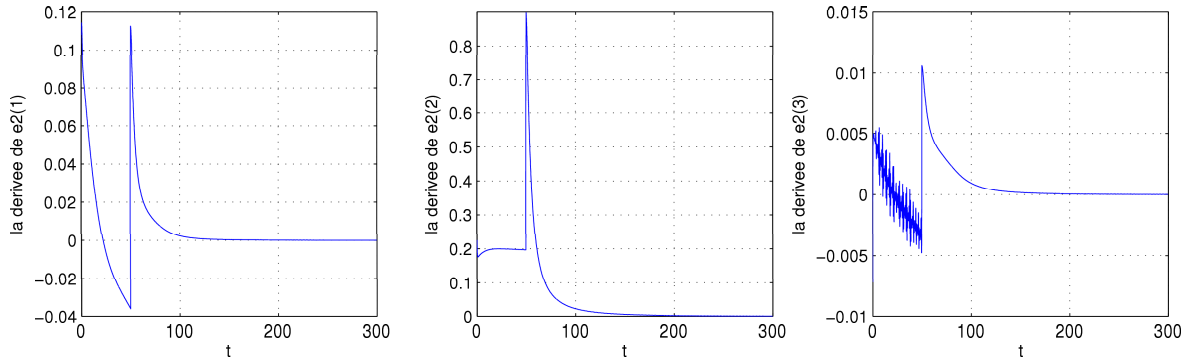


FIG. IV.8: Vitesse linéaire du robot  $v$  (à gauche), vitesse angulaire de la base mobile  $\dot{\theta}$  (au centre), vitesse angulaire de la platine  $\dot{\theta}_p$  (à droite)

Sur la figure IV.6, on voit que la tâche de navigation du robot est parfaitement exécutée. Avant l'instant de transition  $t_s = 50s$ , le robot s'aligne progressivement le long du mur, à une distance de  $1m$ . A  $t_s = 50s$  la commutation s'effectue vers la seconde tâche et le robot commence son mouvement vers la cible. La figure IV.7 montre l'évolution des

FIG. IV.9: Visualisation de la seconde tâche  $e_2(t)$ FIG. IV.10: Visualisation de la dérivée de la seconde tâche  $\dot{e}_2(t)$ 

indices dans le plan image de la caméra. La petite courbe au milieu de l'image indique que la projection du centre de la cible converge aussi vers l'origine  $(0, 0)$ . Les vitesses du robot  $\dot{q}(t)$  sont décrites sur la figure IV.8. La figure IV.9 montre l'évolution des composantes de la seconde tâche  $e_2(t)$ . Avec la commande par retour d'état (IV.14),  $e_2(t)$  converge asymptotiquement vers zéro. Cela signifie que le vecteur d'indices visuels  $s(t)$  converge vers sa valeur de référence

$$s^* = (-0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ -0.1)',$$

(voir figure IV.7). Comme le montrent les courbes des figures IV.6 et IV.8, la continuité des vitesses est conservée lors de la transition. Toutefois, dans un court intervalle de temps consécutif à l'instant  $t_s$ , on aperçoit que les variables de commande  $\dot{q}(t)$  subissent de fortes variations. A cause du difféomorphisme entre l'espace des coordonnées généralisées  $Q$  et l'espace de la tâche, de fortes variations se retrouvent également sur la dérivée de la fonction de tâche  $\dot{e}_2$ , durant le même intervalle (cf. la figure IV.10).

Bien que cette première approche permette de conserver la continuité des vitesses, celles-ci présentent de fortes variations lors de la commutation. La formulation actuelle du problème ne permet pas, en effet, de conserver la continuité de l'accélération. Dans le

prochain exemple, nous proposons d'exprimer la seconde tâche référencée vision au moyen d'un système du troisième ordre dont les états sont les données capteur  $e_2(t)$ , leur dérivée  $\dot{e}_2(t)$  et leur dérivée seconde  $\ddot{e}_2(t)$ . L'idée est de synthétiser une loi de commande par retour d'état pour que ce système soit stabilisé et que les trois états convergent vers zéro. Cette technique doit permettre de conserver la continuité de l'accélération du système et aussi diminuer la variation des vitesses.

### Utilisation d'une dynamique du troisième ordre pour la seconde tâche

Afin de définir la dynamique de la seconde tâche sur le modèle d'un système du troisième ordre nous considérons l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_2(t) \\ \ddot{e}_2(t) \\ e_2^{(3)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \ddot{e}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \end{pmatrix} e_2^{(3)}(t), \quad (\text{IV.16})$$

où  $e_2^{(3)}(t)$  représente l'entrée de la commande. Dans ce cas, on recherche une loi de commande linéaire par retour d'état de la forme :

$$e_2^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} k_3 I_3 & k_2 I_3 & k_1 I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \ddot{e}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.17})$$

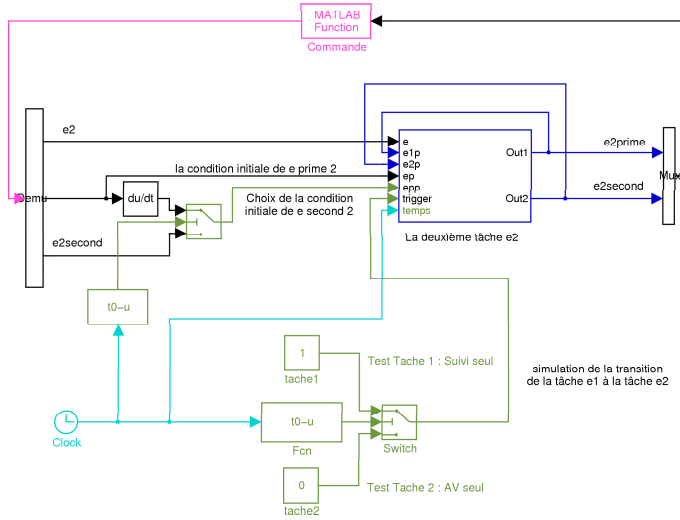
où les gains  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  peuvent être obtenus en faisant un placement des modes de la matrice d'état du système (IV.16) dans le demi-plan complexe gauche ouvert  $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < 0\}$ . On utilise le même raisonnement pour le choix des conditions initiales de la tâche  $e_2$  à partir de la dynamique de la tâche en cours :

- $e_2(t_s)$  donnée par la mesure,
- $\dot{e}_2(t_s)$  donnée par la relation (IV.15).

Le problème qui reste est de trouver la condition initiale  $\ddot{e}_2(t_s)$ . La méthode la plus simple est de déterminer cette valeur en dérivant  $\dot{e}_2(t_s)$  avant l'instant de transition  $t_s$ . Comme  $\dot{e}_2(t)$  est calculé par la relation (IV.15), pour  $t_s - \tau < t \leq t_s$ ,  $\tau > 0$ , durant l'exécution de la première tâche  $e_1$ , il est possible de la dériver par rapport au temps pour obtenir  $\ddot{e}_2(t)$ . Nous avons réalisé cette opération sous Matlab/Simulink à l'aide d'un dérivateur. Ce dérivateur ne fonctionne que sur l'intervalle  $[t_s - \tau, t_s]$ . Le calcul de la dynamique de la seconde tâche  $e_2$  peut alors être réalisé en considérant les conditions initiales à l'instant  $t_s$ . Ce raisonnement est illustré sur la figure IV.11.

Le bloc "MATLAB Function" permet de simuler la variation des indices visuels de la caméra et les résultats des calculs de  $\dot{e}_2$  et  $\ddot{e}_2$ . Dans les sorties du démultiplexeur, le bloc de la deuxième tâche  $e_2$  récupère la valeur de  $e_2$  et les conditions initiales  $\dot{e}_2(t_s)$  et  $\ddot{e}_2(t_s)$ , qui sont en effet les derniers résultats du bloc de la tâche  $e_2$ . Le fonctionnement du bloc de la deuxième tâche  $e_2$  est illustré sur la figure IV.12.

Pour simuler cette seconde approche nous avons considéré la même configuration initiale du robot et le même positionnement de la cible que dans le cas précédent.

FIG. IV.11: Fonctionnement de la deuxième tâche  $e_2$ 

En réalisant le placement des modes, nous avons choisi des racines réelles pour éviter tout dépassement. Les gains de retour d'état sont les suivants :  $k_1 = -5.02$ ,  $k_2 = -1.02$  et  $k_3 = -0.02$ . Les modes de la matrice d'état correspondent à :  $-4.8088$ ,  $-0.022$  et  $-0.1893$ . La deuxième tâche est donc asymptotiquement stable. Autrement dit  $\ddot{e}_2$ ,  $\dot{e}_2$  et  $e_2$  convergent vers zéro. Leurs comportements temporels sont illustrés sur les figures IV.13, IV.14 et IV.15. On peut voir que la dérivée seconde de la deuxième tâche,  $\ddot{e}_2$ , est continue (voir figure IV.13). De plus, la variation de la dérivée de la deuxième fonction de tâche  $\dot{e}_2$  (voir la figure IV.14) est beaucoup moins forte, comparativement à ce qui avait été obtenu au moyen de la dynamique du second ordre (voir figure IV.10). A cause du difféomorphisme entre l'espace des coordonnées généralisées et l'espace de tâche, nous pouvons voir que les courbes des vitesses du robot ont une variation beaucoup moins forte à l'instant de transition,  $t_s = 50s$ , que ce qui avait été obtenu au moyen de la dynamique du second ordre (voir figures IV.16 et IV.8).

Le robot exécute la première tâche de suivi de mur à une distance de  $1m$ . La transition vers la seconde tâche s'effectue à  $t_s = 50s$ , la commande référencée vision conduit alors le robot vers la cible. La trajectoire est représentée sur l'image de gauche de la figure IV.17, alors que l'évolution des indices dans l'image de la caméra est représentée sur l'image de droite cette même figure. Le petit tracé au milieu de l'image indique que la projection du centre de la cible converge vers l'origine  $(0, 0)$ . Enfin, les indices visuels  $s(t)$  convergent vers leurs valeurs de référence,  $s^*$ , identiques à celles de la simulation précédente. La caméra est correctement positionnée face à la cible.

La dynamique du troisième ordre de la deuxième tâche, donnée par le correcteur  $e_2^{(3)} = k_1\ddot{e}_2 + k_2\dot{e}_2 + k_3e_2$ , permet de conserver la continuité des vitesses et des accélérations du robot, le mouvement restant beaucoup plus régulier. Cependant, la méthode de synthèse du correcteur, basée sur un placement de modes, ne permet pas de prendre réellement en compte les contraintes dynamiques du robot. Il n'est en effet pas possible, par cette



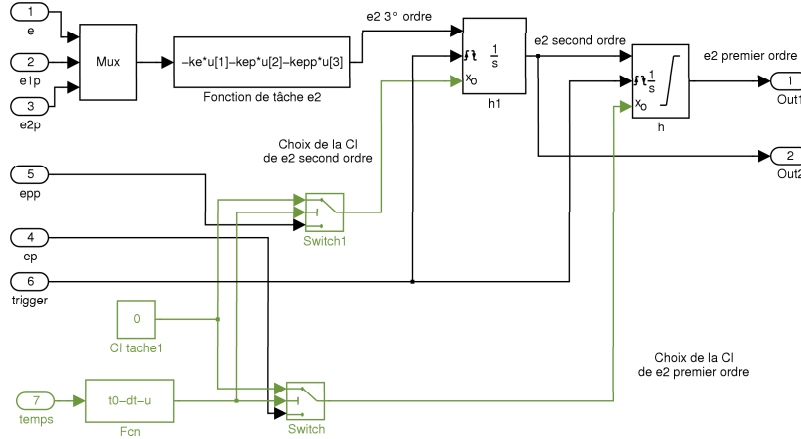


FIG. IV.12: Bloc de la deuxième tâche  $e_2$

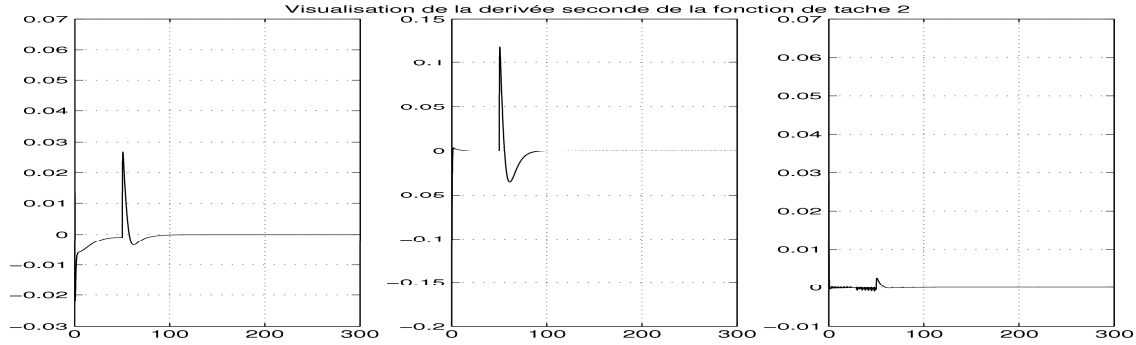
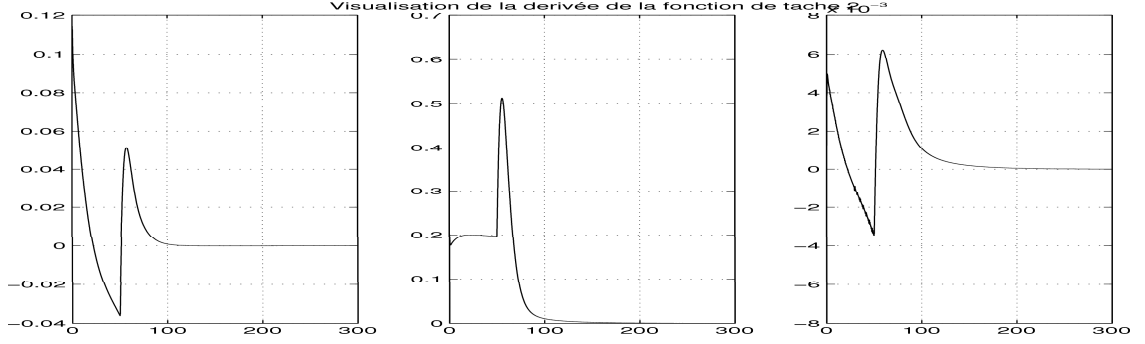
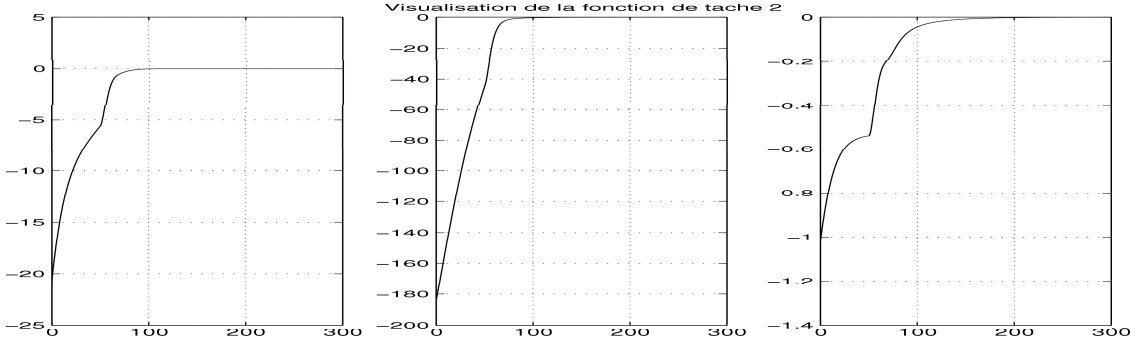


FIG. IV.13: Visualisation de la dérivée seconde de la deuxième tâche  $\ddot{e}_2(t)$

approche, de borner la variation des vitesses et des accélérations pour tenir compte de la saturation des actionneurs. Dans la section suivante, nous allons montrer que la loi de commande référencée capteurs qui a été élaborée au chapitre précédent permet d'apporter une solution à ce problème. Outre la satisfaction des contraintes dynamiques du robot, ce type de correcteur permet de prendre en compte les contraintes de visibilité et l'incertitude sur les paramètres de profondeur des points de la cible par rapport à la caméra.

### IV.3.2 Utilisation de la loi référencée vision multi-critères pour la seconde tâche

Dans cette section nous montrons que l'utilisation d'un correcteur multi-critères permet d'apporter une solution intéressante au problème d'enchaînement. Pour illustrer cette approche nous avons à nouveau considéré l'enchaînement d'une tâche de suivi de mur et d'une tâche de positionnement référencée vision, pour le même type de robot mobile. Pour la première tâche  $e_1$ , nous avons considéré la même définition que lors de l'approche précédente, donnée par les expressions IV.2 et IV.3. Comme dans la sous-section IV.3.1,

FIG. IV.14: Visualisation de la dérivée de la deuxième tâche  $\dot{e}_2(t)$ FIG. IV.15: Visualisation de la deuxième tâche  $e_2(t)$ 

nous imposons simplement une décroissance exponentielle pour cette tâche  $e_1$ , décrite sous la forme (IV.6), et nous considérons une commande cinématique garantissant la stabilité asymptotique de la fonction de tâche  $e_1$ , sous la forme :

$$\dot{q}(t) = -H^{-1}(\lambda e_1(t) + B) \quad (\text{IV.18})$$

Pour la seconde tâche, référencée vision, nous avons considéré une définition sensiblement différente. Pour reprendre la modélisation introduite au chapitre III, nous avons considéré une cible visuelle constituée de trois points alignés dans le plan horizontal, selon le modèle introduit à la section III.3.1. En reprenant les résultats de la section III.3.3, la tâche référencée vision est décrite par la relation (III.61), sous la forme :

$$e_2(r(t), t) = s(r(t), t) - s^* = \begin{pmatrix} Y_1(t) - Y_1^* \\ Y_2(t) - Y_2^* \\ Y_3(t) - Y_3^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{IV.19})$$

Dans ce cas, la matrice d'interaction  $C$  dans la relation (IV.5) peut être considérée égale à la matrice identité  $I_3$ , comme nous avons expliqué dans la section III.3.3. Pour assurer un positionnement final centré de la caméra, face à la cible, on impose les conditions suivantes sur le vecteur  $s^*$  :  $Y_2^* = 0$  et  $Y_3^* = -Y_1^*$ . D'autre part, afin de prendre en

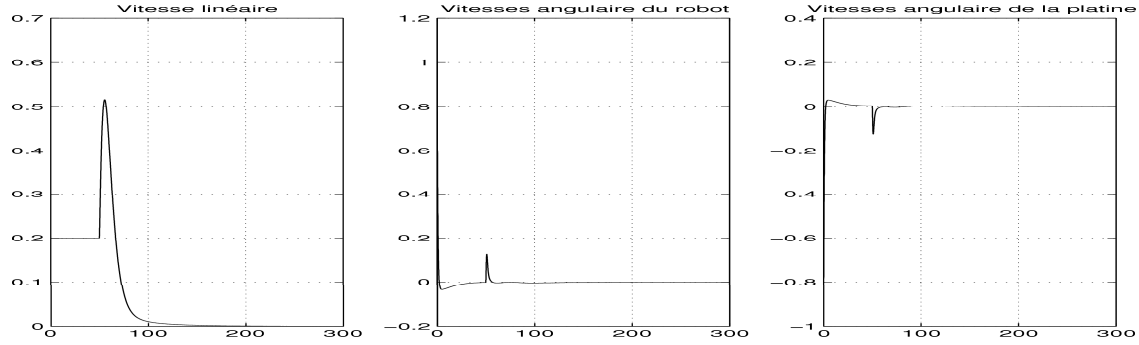


FIG. IV.16: Vitesse linéaire du robot  $v$  (à gauche), vitesse angulaire de la base mobile  $\dot{\theta}$  (au centre), vitesse angulaire de la platine  $\dot{\theta}_p$  (à droite)

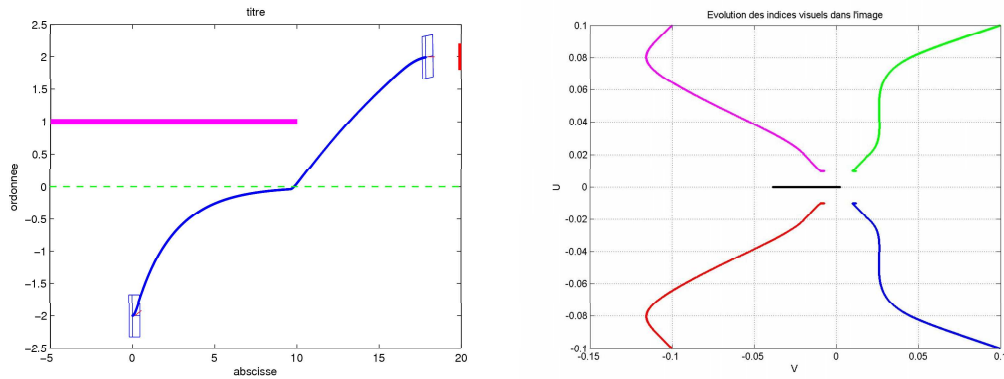


FIG. IV.17: Trajectoire du robot dans le repère de la scène  $R$  (à gauche) et Evolution des indices visuels dans le plan image de la caméra (à droite)

compte les contraintes sur l'incertitude de la profondeur et la visibilité de la cible, nous reprenons la définition d'un secteur admissible dans le plan de déplacement du robot décrit par la figure III.6, en bornant également les paramètres  $d_2$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  et les composantes de la tâche  $e_{2(i)}$  par les relations (III.60), (III.2), (III.63) et (III.62). A l'aide de la relation (III.66), la dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche  $e_2(r(t), t)$  s'écrit :

$$\dot{e}_2(r(t), t) = \dot{s}(r(t), t) = \frac{\partial s}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_1(t) \\ \dot{Y}_2(t) \\ \dot{Y}_3(t) \end{pmatrix} = L(z, e_2)T(t) \quad (\text{IV.20})$$

où  $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$  et la matrice d'interaction  $L$  est définie par la relation (III.67).

Dans ce cas, au lieu de considérer un système du seconde ordre (IV.13), d'état  $(e'_2 \ e'_2)'$ , comme nous l'avons fait à la section IV.3, nous allons considérer le système d'état  $\xi(t) =$

$(e_2'(t) \ T'(t))' \in \mathbb{R}^6$  décrit par la représentation non linéaire suivante :

$$\dot{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & L(z, e_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix} \dot{T}(t) \quad (\text{IV.21})$$

Dans ce cas,  $\dot{T}(t)$  est l'entrée de commande du système. Pour satisfaire la contrainte sur l'accélération de la caméra (III.10), une loi de commande saturée, par retour d'état, peut être définie par :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) = \text{sat}_{u_0}(K_1 e_2(t) + K_2 T(t)) \quad (\text{IV.22})$$

avec  $\mathbb{K} = (K_1 \ K_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ . Sur cette base, le gain  $\mathbb{K}$  est déduit de résolution de l'ensemble de LMIs (III.88)-(III.91) de la proposition III.2, selon l'approche développée au chapitre III.

### Résultats de simulation

Pour la simulation, on utilise le même raisonnement qu'à la section IV.3.1. La fonction de tâche  $e_2$  est mesurée sur un petit intervalle de temps  $[t_s - \tau, t_s]$ , durant l'exécution de la tâche  $e_1$  (cet intervalle correspond à la région de transition  $W_1 \cap W_2$ ). Lorsque  $t$  atteint l'instant de commutation  $t_s$ , la dynamique de la deuxième tâche est alors définie sur la base du système (IV.21), avec la loi de commande saturée (IV.22), et les conditions initiales suivantes :

- $e_2(t_s)$  donnée par la mesure de la caméra,
- $T(t_s)$  donnée par la relation :

$$T(t_s) = -JH^{-1}(\lambda e_1(t_s) + B), \quad (\text{IV.23})$$

d'après les relations (IV.18) et (I.52).

La configuration initiale du robot est donnée par :

$$x = 0m; \ y = -2m; \ \theta = 0rad; \ \theta_p = 0.24rad$$

La première tâche consiste à asservir le robot le long de la droite  $y = 0$  située à  $1m$  du mur de référence. Pour la seconde tâche référencée vision, on considère une cible constituée de trois points alignés, dont les coordonnées par rapport à  $R$  sont :

$$E_1(14.42m, 2.033m); \ E_2(14.42m, 1.533m); \ E_3(14.42m, 1.033m)$$

La distance  $l$  entre deux points consécutifs de la cible est donc égale à  $0.5m$ . Les indices visuels de référence dans le plan d'image de la caméra sont définis par :

$$Y_1^* = 0.2; \ Y_2^* = 0; \ Y_3^* = -0.2$$

Lorsque la caméra est stabilisée à la position de référence, la profondeur des points de la cible est donnée par le vecteur  $z^* = (2.5m \ 2.5m \ 2.5m)'$ . Pour les autres paramètres

$d_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $u_0$  et  $u_1$  nous avons considéré les mêmes valeurs numériques que dans la section III.3.3. Enfin, le gain du correcteur multi-critère  $\mathbb{K}$  est donné par l'expression (III.106).

Pour cet exemple de simulation, la commutation est réalisée à l'instant  $t_s = 55s$ . Durant la première tâche, l'orientation de la platine est contrôlée indépendamment de la base, de façon à conserver la cible dans le champ de vision de la caméra. Une fois que le robot atteint la zone de transition  $W_1 \cap W_2$ , correspondant un petit intervalle de temps  $[t_s - \tau, t_s]$  ( $\tau = 0.01s$ ), la valeur de la seconde fonction de tâche  $e_2$  est mesurée et le torseur cinématique  $T$  est calculé à l'aide de la relation (IV.23). On peut ainsi déterminer les conditions initiales de la seconde tâche,  $e_2(t_s)$  et  $T(t_s)$ , à l'instant  $t = t_s$ .

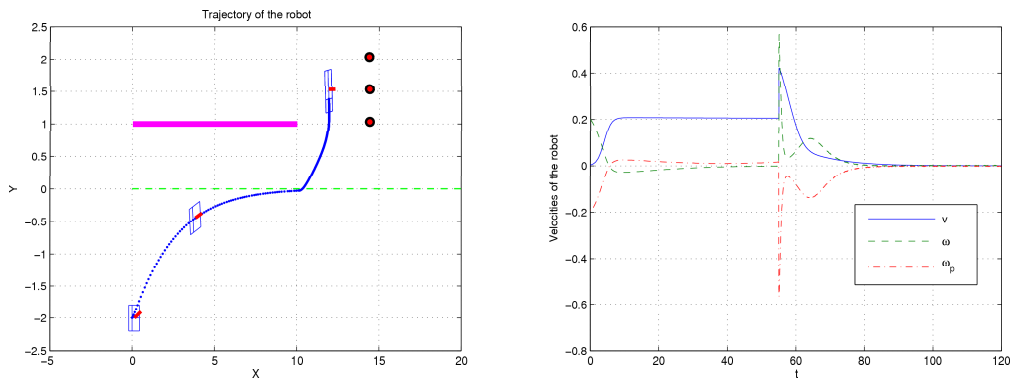


FIG. IV.18: Trajectoire du robot (à gauche) et vitesses du robot (à droite)

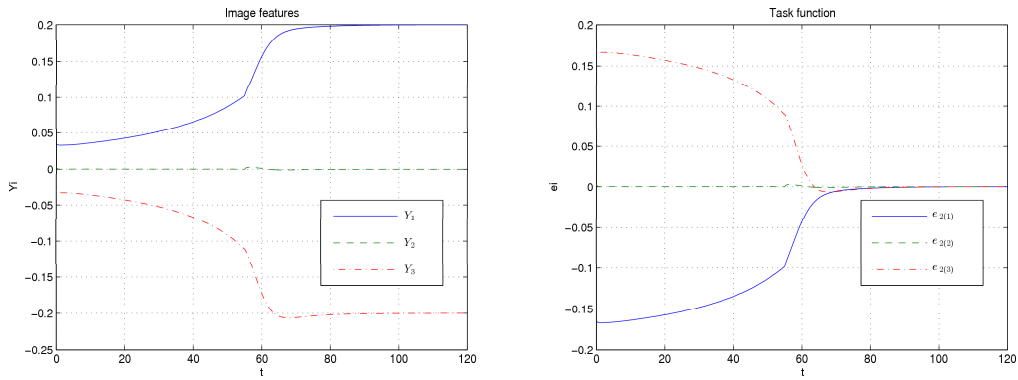


FIG. IV.19: Evolution des indices visuels (à gauche) et de la tâche référencée vision  $e_2(t)$  (à droite)

L'image de gauche de la figure IV.18 représente la trajectoire du robot. On peut voir que la tâche globale de navigation du robot est parfaitement réalisée. Les vitesses du robot  $\dot{q}$  sont représentées sur l'image de droite de la figure IV.18. La continuité des vitesses est

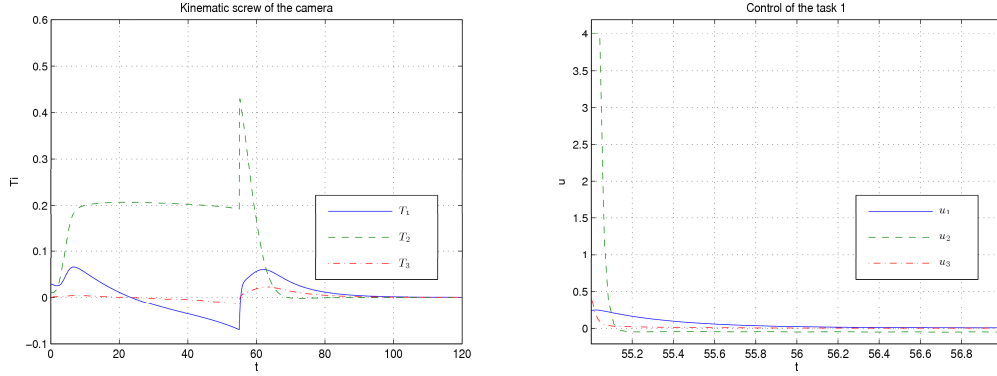


FIG. IV.20: Evolution du torseur cinématique de la caméra par rapport à la scène (à gauche) et zoom sur les composantes de la commande pour la tâche référencée vision (à droite)

conservée lors de la transition entre les deux tâche élémentaires. L'image de gauche de la figure IV.19 représente la convergence des indices visuels  $Y_i$  vers leur valeur de référence  $Y_i^*$ , dans le plan image de la caméra. L'évolution de la tâche référencée vision  $e_2(t)$ , est représentée sur l'image de droite de la figure IV.19. La variation du torseur cinématique de la caméra  $T$ , par rapport au repère de la scène  $R$ , est représentée sur l'image de gauche de la figure IV.20. On observe que la continuité est préservée. De plus, même si ce torseur subit une variation importante à l'instant de commutation,  $t_s = 55s$ , on est assuré que la borne  $u_1$  n'est pas dépassée. L'image de droite de la figure IV.20 représente un zoom de la variation des composantes de la commande  $\dot{T}(t)$ , lors du début de la seconde tâche  $e_2(t)$ . On s'aperçoit que la deuxième composante de la commande sature pendant un moment. Toutefois, comme la borne sur la dynamique des actionneurs a été considérée lors de la synthèse de commande, la stabilité du système en boucle fermée est assurée malgré cette saturation.

Outre la garantie de stabilité, la méthode proposée permet de prendre en compte un ensemble de contraintes inhérentes au problème, dès l'étape de synthèse du correcteur. L'application de cette approche au problème d'enchaînement dynamique de tâches élémentaires est particulièrement intéressante. Elle permet en effet de choisir la dynamique de la nouvelle tâche, de sorte à garantir la continuité des vitesses du robot (ainsi que la continuité du torseur cinématique de la caméra) et la bornitude de l'accélération de la caméra, tout assurant les contraintes liées à la perception, telles que la prise en compte d'incertitudes, ou la visibilité des amers.

## IV.4 Enchaînement de tâches référencées vision

Comme nous l'avons illustré dans la section précédente, l'enchaînement de tâches élémentaires offre un moyen d'étendre la potentialité de la commande référencée capteur,

en référençant le mouvement par rapport à des amers distincts, successivement perçus au cours du déplacement. Une autre potentialité de cette approche est de permettre la décomposition en tâches élémentaires d'une tâche de déplacement, longue ou complexe, de sorte à contraindre progressivement le mouvement du robot. Cette approche permet, d'une part, de limiter l'amplitude des fonction de taches et, d'autre part, de ne pas contraindre inutilement les degrés de liberté du robot durant le mouvement. Pour illustrer cette idée, nous présentons dans cette section un exemple de décomposition en tâches élémentaires d'une tâche de navigation référencée vision, dans le cas où la configuration initiale de la caméra est fortement éloignée de la configuration finale. L'enchaînement des différentes tâches élémentaires est modélisé sur la base du formalisme introduit à la section IV.3.2 et réalisé à partir de techniques d'automatique avancées.

#### IV.4.1 Décomposition en tâches élémentaires

Nous considérons à nouveau le modèle d'un robot mobile supportant une caméra orientable en lacet introduit à la section I.4.1. La tâche de navigation consiste à commander le mouvement du robot jusqu'à une configuration finale en laquelle la caméra est correctement stabilisée, face à une cible constituée de trois points, et la base mobile orientée selon l'axe  $z$  de la caméra, i.e. tel que  $\theta_p = 0$ . De plus, on s'intéresse au cas où le robot est initialement éloigné de la configuration finale.

Dans ce cas, à cause de l'amplitude importante de l'erreur, il ne semble pas cohérent de commander l'exécution de la tâche en définissant, dès de début, une fonction de tâche de positionnement de plein rang contraignant tous les degrés de liberté du système. Au lieu de ça, nous proposons de décomposer cette tâche en trois tâches élémentaires. La première est une tâche d'asservissement en cap, visant à orienter la caméra vers la cible et à diriger son mouvement dans la direction de l'axe optique (voir figure IV.4). La deuxième tâche, plus contraignante, vise à positionner la caméra face à la cible. Enfin la troisième tâche vise à la fois à positionner la caméra face à la cible et à contrôler le mouvement de la base mobile pour l'orienter dans la direction de l'axe optique. Ces trois tâches sont définies dans la suite.

##### Première tâche : asservissement en cap

L'objectif de la première tâche est d'orienter la caméra vers le centre de la cible et de diriger son mouvement dans la direction de l'axe optique. La fonction de tâche associée est définie à partir des résultats obtenus dans la section III.2. A l'aide de la relation (III.3), la première fonction de tâche s'écrit :

$$e_1(t) = \begin{pmatrix} e_{1(1)} \\ e_{1(2)} \\ e_{1(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{y_C} \\ s_{z_C} - v_{z_C}^* t \\ Y_2 - Y_2^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{IV.24})$$

où

- $s_{y_C}(t) = \int_0^t T_{(1)}(\tau)d\tau$  et  $s_{z_C} = \int_0^t T_{(2)}(\tau)d\tau$ , avec  $T_{(1)}$ ,  $T_{(2)}$  représentant les deux premières composantes du torseur cinématique de la caméra.
- $v_{z_C}^*$  est la vitesse linéaire constante de référence de la caméra selon l'axe  $z_C$ .
- $Y_2$  représente l'ordonnée du point central  $E_2$ , de la cible, projeté dans le plan image de la caméra, donnée par la relation (I.1);  $Y_2^*$  représente sa valeur de référence.

Comme dans la section III.2, nous définissons un secteur de travail pour la première tâche  $e_1(t)$ , à l'aide des deux paramètres  $d_1$  et  $\alpha$  respectivement définis dans les intervalles (III.1) et (III.2). De plus, pour garantir la visibilité de la cible, nous imposons la contrainte supplémentaire :

$$|e_{1(3)}| \leq \beta, \quad (\text{IV.25})$$

où  $\beta > 0$  est un scalaire positif. L'angle  $\eta$  entre l'axe optique  $z_c$  et la droite  $(CE_2)$  (voir figure III.1) est borné par la relation suivante :

$$|\eta| \leq \eta_{max} = \arctan(\beta) < \pi/2 \quad (\text{IV.26})$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche  $e_1(t)$  s'exprime à l'aide de la relation (III.4) sous la forme :

$$\dot{e}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{e_{1(3)}}{z_2} & 1 + e_{1(3)}^2 \end{pmatrix} T(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v_{z_C}^* \quad (\text{IV.27})$$

où  $z_2$  est la profondeur du point central de la cible dans le repère de la caméra  $R_C$  (voir figure III.1). En reprenant les notations de la section III.2.3, les contraintes **C1**, **C2** et **C3** sont exprimées sous forme de LMI et la dynamique du système est décrite sous la forme III.12. A l'aide de la relation (III.16), ce système peut être réécrit de la manière suivante :

$$\dot{\varepsilon}(t) = [\mathbb{R}'\overline{B}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\overline{B}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D(e_{1(3)})\mathbb{R}]\varepsilon(t) + \mathbb{B}\dot{T}(t) \quad (\text{IV.28})$$

où les matrices  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\overline{B}_1(z_2)$ ,  $\overline{B}_2(z_2)$  et  $D(e_{1(3)})$  ont été définies dans la section III.2.3. Dans ce cas, l'état  $\varepsilon(t)$  du système est défini par :

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ T(t) \end{pmatrix} - r \in \mathbb{R}^6$$

avec  $r = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_{z_C}^* \ 0)' \in \mathbb{R}^6$ . Pour ce système,  $\dot{T}$  est le vecteur de commande. Pour satisfaire la contrainte sur l'accélération de la caméra (III.10),  $\dot{T}$  est défini comme une commande saturée sous la forme :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}_1\varepsilon(t)) \quad (\text{IV.29})$$

avec  $\mathbb{K}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ . La synthèse du gain  $\mathbb{K}_1$ , définie par le problème III.1, est réalisée en résolvant l'ensemble des LMIs (III.33)-(III.37) établies par la proposition III.1.



## Deuxième tâche : positionnement de la caméra

La seconde tâche vise à positionner correctement la caméra, sans spécifier de contraintes sur la configuration de la base mobile. Pour cette seconde tâche, nous avons utilisé la loi de commande multi-critères définie à la section III.3.3. Ainsi, la fonction de tâche, définie par la relation (III.61), s'exprime sous la forme :

$$e_2(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) - Y_1^* \\ Y_2(t) - Y_2^* \\ Y_3(t) - Y_3^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{IV.30})$$

où  $Y_i$  est l'ordonnée de la projection du point  $E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de la cible dans le plan image de la caméra, donnée par la relation (I.1).  $Y_i^*$  est l'ordonnée de référence correspondant à la configuration désirée. Comme à la section III.3.3, nous définissons un secteur de travail pour la deuxième tâche, dépendant des paramètres  $d_2$  et  $\alpha$  définis par les relations (III.60) et (III.2). De plus, pour garantir la visibilité de la cible, nous imposons les contraintes supplémentaires :

$$|e_{2(i)}| \leq \beta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.31})$$

où  $\beta > 0$ , à la même valeur que dans la relation (IV.25). L'angle  $\eta$  (voir figure III.6) est également borné par la relation (IV.26).

La dérivée par rapport au temps de la deuxième tâche  $e_2(t)$  est exprimée par la relation suivante :

$$\dot{e}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{Y}_1(t) \\ \dot{Y}_2(t) \\ \dot{Y}_3(t) \end{pmatrix} = L(z, e_2)T(t), \quad (\text{IV.32})$$

dans laquelle, la matrice d'interaction  $L(z, e_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est définie par la relation (III.67). En reprenant les résultats de la section III.3.3, la dynamique de la seconde tâche est décrite par un système d'état  $\xi(t) = \begin{pmatrix} e_2'(t) & T'(t) \end{pmatrix}' \in \mathbb{R}^6$ , sous la forme :

$$\dot{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & L(z, e_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix} \dot{T}(t) \quad (\text{IV.33})$$

où  $\dot{T}(t)$  représente l'entrée de commande du système. Pour satisfaire la contrainte sur l'accélération de la caméra (III.10), on considère une loi de commande saturée :

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}_2 \xi(t)) \quad (\text{IV.34})$$

avec  $\mathbb{K}_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ . Enfin, la synthèse du gain  $\mathbb{K}_2$  est obtenue par la résolution de l'ensemble de LMIs (III.88)-(III.91) de la proposition III.2.

## Troisième tâche : stabilisation de la caméra et de la base mobile

La troisième tâche consiste à stabiliser les différentes variables d'état du robot pour que la caméra soit correctement positionnée par rapport à la cible et que la base mobile soit

orienté dans la direction de l'axe optique, i.e.  $\theta_p = 0$ . Dans ce cas, à cause des contraintes non holonomes de roulement sans glissement de la base mobile, il n'est pas possible de trouver une loi de commande par retour d'état, continue, pour stabiliser le système [10]. Pour pallier ce problème, une solution consiste à utiliser une loi de commande dépendant, non seulement de l'état, mais également du temps, sur la base des méthodes développées dans [112], [113] et [115]. Cette approche est rappelée sommairement dans la suite de cette section.

Rappelons tout d'abord que l'état du robot est décrit par le vecteur

$$X = (x \ y \ \theta \ \theta_p)' \in \mathbb{R}^4$$

où  $(x, y)$  sont les coordonnées du point  $M$  de la base mobile,  $\theta$  est l'orientation de la base par rapport à l'axe des abscisses du repère  $R$  et  $\theta_p$  est l'orientation de la platine par rapport à la base. La cinématique du robot est décrite par le système différentiel suivant :

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \end{pmatrix} = B_1(X)\dot{q}(t) \quad (\text{IV.35})$$

où  $v$  et  $\dot{\theta}$  désignent respectivement les vitesses linéaire et angulaire de la base mobile par rapport à  $R$  et  $\dot{\theta}_p$  représente la vitesse angulaire de la platine par rapport au repère de la base  $R_M$ . Le vecteur  $\dot{q}$  est le vecteur de commande du système. Notons qu'à cause de la contrainte non holonome, la dimension de l'espace de commande est strictement inférieure à celle de l'espace d'état.

L'objectif est de stabiliser la base mobile non holonome à une configuration désirée, en utilisant une commande référencée vision à temps variable. Sans perte de la généralité, nous définissons la configuration désirée égale zéro,  $X^* = (x^* \ y^* \ \theta^* \ \theta_p^*)' = 0$ . Pour faciliter la synthèse de la loi de commande, il est pratique d'écrire le système sous forme chaînée. Cette transformation, qui définit un difféomorphisme local pour l'état  $X$  et la commande  $\dot{q}$ , s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Psi(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \tan \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta v \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

Sous forme chaînée, le système devient [83] :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

Les vitesses du robot s'expriment alors en fonction des nouvelles variables, sous la forme :

$$\begin{aligned} v(t, X) &= \frac{1}{\cos \theta} u_1(t, \Psi(X)) \\ \dot{\theta}(t, X) &= \cos^2 \theta u_2(t, \Psi(X)) \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

Une solution à ce problème à été donnée par Morin et Samson [84] qui ont montré que les lois de commandes instationnaires suivantes permettent de stabiliser exponentiellement le système :

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, x_2, x_3) &= -k_1 \lambda_1 x_1 + k_1 \rho_3(x_2, x_3) \sin(wt) \\ u_2(t, x_1, x_2, x_3) &= -\frac{k_3}{\rho_3(x_2, x_3)} \left[ u_1 |x_3| + k_2 u_1 \frac{x_2}{\rho_3(x_2, x_3)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

où  $\rho_3(x_2, x_3) \stackrel{\text{def}}{=} (|x_2|^2 + |x_3|^3)^{\frac{1}{6}}$ ,  $w$  est la fréquence de la commande à temps variable et  $\lambda_1$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  sont des gains scalaires positifs. La convergence exponentielle à zéro du système (IV.38) peut être établie en utilisant la norme homogène [92].

Pour reboucler le système (IV.38) avec la commande (IV.40), il est nécessaire de reconstruire une estimée  $\hat{X}$  de l'état courant  $X$  à partir des sorties mesurées. Les auteurs proposent de réaliser cette estimation à partir des données visuelles délivrées par la caméra [114]. Leur raisonnement est le suivant. L'objectif de la tâche étant de stabiliser le robot à la configuration  $X^* = 0$ , on considère que le robot occupe une configuration voisine. L'équation (I.50) donne une relation entre le torseur cinématique de la caméra  $T$  et l'état  $X$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \theta_p) & \cos(\theta + \theta_p) & Dx \cos \theta_p + a & a \\ \cos(\theta + \theta_p) & \sin(\theta + \theta_p) & Dx \sin \theta_p - b & -b \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \\ &= B_2(X)X \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

D'autre part, à partir des donnée visuelles, on peut écrire l'équation du flot optique à partir de la relation (III.66) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1/z_1 & Y_1/z_1 & 1 + Y_1^2 & 0 \\ -1/z_2 & Y_2/z_2 & 1 + Y_2^2 & 0 \\ -1/z_3 & Y_3/z_3 & 1 + Y_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \\ &= B_3(Y_1, Y_2, Y_3) \begin{pmatrix} T \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

où  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont des ordonnées des points de la cible,  $E_i$ , projetés dans le plan image de la caméra et données par la relation (I.1). En combinant les relations (IV.41) et (IV.42) on obtient alors une relation différentielle entre l'état  $X$  et la sortie de la caméra  $Y_i$  :

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} = B_3(Y_1, Y_2, Y_3) B_2(X) \dot{X} \quad (\text{IV.43})$$

A partir de la relation (IV.43), l'état  $X$  peut être estimé, par approximation au premier ordre, dans le voisinage de la configuration désirée  $X^* = 0$ . Cette approximation au

premier ordre donne la relation suivante :

$$\hat{X} = [B_3(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*)B_2(X^*)]^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 - Y_1^* \\ Y_2 - Y_2^* \\ Y_3 - Y_3^* \\ \theta_p \end{pmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

où  $Y_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , est l'ordonnée de référence correspondant à la projection de la cible à la configuration désirée de la caméra. La relation (IV.44) signifie que la valeur de l'approximation  $\hat{X}$  est proportionnelle à l'écart entre la valeur courante et la valeur de référence des indices visuels. Cette proportion dépend seulement la jacobienne  $B_3(Y_1, Y_2, Y_3)B_2(X)$ , évaluée à la configuration désirée  $X^*$ . Finalement, la commande cinématique (IV.39) permettant de stabiliser la base mobile du robot, peut être considérée comme une fonction des données visuelles.

Pendant la stabilisation de la base mobile, en utilisant la commande référencée vision à temps variable par retour d'état (IV.39), nous devons réguler l'orientation de la caméra vers la cible pour conserver la visibilité. Pour atteindre cet objectif, nous considérons simplement l'erreur suivante, dont l'annulation garantit le centrage de la cible :

$$e_C = Y_2 - Y_2^*,$$

et nous imposons une décroissance exponentielle de cette erreur :

$$\dot{e}_C = \dot{Y}_2 = -\lambda_2 e_C = -\lambda_2 (Y_2 - Y_2^*)$$

où  $\lambda_2$  est un scalaire positif. En remplaçant dans la relation (IV.43), l'expression de  $\dot{X}$  donnée par l'équation (IV.35), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} = B_3(Y_1, Y_2, Y_3)B_2(X)B_1(X) \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \end{pmatrix} = \mathcal{J}(Y_1, Y_2, Y_3, X)\dot{q}(t) \quad (\text{IV.45})$$

A partir de cette relation, on peut écrire la dérivée par rapport au temps de l'indice visuel  $Y_2$  :

$$\dot{Y}_2 = \mathcal{J}_{(2,1)}v + \mathcal{J}_{(2,2)}\dot{\theta} + \mathcal{J}_{(2,3)}\dot{\theta}_p \quad (\text{IV.46})$$

où  $\mathcal{J}_{(i,j)}$  représente le terme situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice  $\mathcal{J}(Y_1, Y_2, Y_3, X)$ . Finalement, à l'aide de la relation (IV.46), la commande  $\dot{\theta}_p$  peut être donnée par :

$$\dot{\theta}_p(t, X, Y_2) = -\frac{\lambda_2}{\mathcal{J}_{(2,3)}}(Y_2 - Y_2^*) - \left( \frac{\mathcal{J}_{(2,1)}}{\mathcal{J}_{(2,3)}}v + \frac{\mathcal{J}_{(2,2)}}{\mathcal{J}_{(2,3)}}\dot{\theta} \right) \quad (\text{IV.47})$$

où

$$\mathcal{J}_{(2,1)} = \frac{\sin \theta_p + Y_2 \cos \theta_p}{z_2} \quad (\text{IV.48})$$

$$\mathcal{J}_{(2,2)} = -1 - Y_2^2 - \frac{a + Y_2 b + Dx(\cos \theta_p - \sin \theta_p)}{z_2} \quad (\text{IV.49})$$

$$\mathcal{J}_{(2,3)} = -1 - Y_2^2 - \frac{a + Y_2 b}{z_2} \quad (\text{IV.50})$$

Le premier terme de l'équation (IV.47) permet d'orienter la caméra face à la cible, sur la base de l'information visuelle, tandis que le second terme, entre parenthèses, compense le mouvement de la base mobile. En considérant que certains paramètres du système sont petits par rapport à la profondeur  $z_2$  du point central :

$$a \ll z_2, \quad b \ll z_2, \quad \text{et} \quad Dx \ll z_2,$$

les approximations suivantes peuvent être faites :

$$\mathcal{J}_{(2,1)} \approx 0 \tag{IV.51}$$

$$\mathcal{J}_{(2,2)} \approx -1 - Y_2^2 \tag{IV.52}$$

$$\mathcal{J}_{(2,3)} \approx -1 - Y_2^2 \tag{IV.53}$$

Finalement, la commande stabilisante (IV.47) de la caméra peut être simplifiée sous la forme suivante ne dépendant que des données visuelles :

$$\dot{\theta}_p(t, X, Y_2) = \frac{\lambda_2}{1 + Y_2^2} (Y_2 - Y_2^*) - \dot{\theta} \tag{IV.54}$$

#### **IV.4.2 Résultats de simulation : enchaînement dynamique des trois tâches élémentaires référencées vision**

Dans cette section nous présentons un exemple de simulation d'une tâche de navigation, définie par l'enchaînement des trois tâches élémentaires décrites à la section précédente. La première tâche est une tâche d'asservissement en cap. Elle permet de conduire le robot en direction de la cible tout en assurant la visibilité. La seconde tâche est une tâche référencée vision de positionnement de la caméra. Pour ces deux premières tâches, l'élaboration d'une commande multi-critères permet de prendre en compte l'incertitude sur la profondeur des points de la cible, et de garantir la visibilité et la satisfaction des contraintes dynamiques du robot. Enfin, lorsque le robot a atteint un voisinage de la configuration finale, l'exécution de la troisième tâche, basée sur l'utilisation d'une loi de commande référencée vision à temps variable, permet de stabiliser le robot à la configuration finale  $X^* = 0$ , en laquelle les indices visuels dans le plan image sont à leur position de référence.

Pour garantir la continuité des vitesses tout au long du déplacement, et en particulier aux instants de commutation  $t_{s_1}$  et  $t_{s_2}$ , nous avons considéré le formalisme décrit à la section IV.2. Sur cette base, les conditions initiales de la nouvelle tâche sont définies, à l'instant de commutation, par l'image de la fonction de tâche précédente et de sa dérivée, via l'application différentielle reliant les deux cartes. Plus précisément, durant l'exécution de la première tâche  $e_1$ , sur un petit intervalle de temps  $[t_{s_1} - \tau, t_{s_1}]$  précédant l'instant de commutation  $t_{s_1}$ , la seconde fonction de tâche  $e_2(t)$  est mesurée. Pour  $t \geq t_{s_1}$ , la dynamique de la deuxième tâche est alors définie par le système (IV.33), rebouclé par la commande saturée IV.34, et vérifiant les conditions initiales :

- $e_2(t_{s_1})$  donnée par la mesure de la caméra ;

–  $T(t_{s_1})$  donnée par l'exécution de la première tâche.

Dans ce cas, les deux premières tâches ayant un état commun,  $T(t)$ , la détermination des conditions initiales de la deuxième tâche est beaucoup plus simple que pour l'enchaînement réalisé aux sections IV.3.1 et IV.3.2. Pour déterminer les conditions initiales de la troisième tâche, à l'instant  $t_{s_2}$ , on utilise la relation (IV.44) :

$$\hat{X}(t_{s_2}) = [B_3(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*)B_2(X^*)]^{-1} \begin{pmatrix} Y_1(t_{s_2}) - Y_1^* \\ Y_2(t_{s_2}) - Y_2^* \\ Y_3(t_{s_2}) - Y_3^* \\ \theta_p(t_{s_2}) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

Dans ce cas, pour conserver la continuité des vitesses du robot lors de la transition entre la deuxième et la troisième tâche, on considère directement la commande cinématique  $\dot{q}(t)$ , initialisée à l'aide de la relation suivante :

$$\dot{q}(t_{s_2}) = J^{-1}T(t_{s_2}) \quad (\text{IV.56})$$

où  $J$  est la matrice jacobienne définie par la relation (I.53) et  $T(t_{s_2})$  est la valeur du torseur cinématique de la caméra à la fin de l'exécution de la deuxième tâche. En utilisant cette stratégie, nous pouvons facilement conserver la continuité de la vitesse du robot pendant l'enchaînement des trois tâches. De plus, l'utilisation des commandes multi-critères (IV.29) et (IV.34), durant l'exécution des deux premières tâches, permet la prise en compte des incertitudes liées à la profondeur, et garantit la visibilité de la cible et la satisfaction des contraintes dynamiques sur la vitesse et l'accélération du robot. Le simulateur que nous avons développé, sous Matlab/Simulink, pour réaliser l'enchaînement dynamique des trois tâches élémentaires est représenté à la figure IV.21. Dans ce simulateur, le bloc "Tâche 1" permet de simuler l'exécution de la première tâche d'asservissement en cap. La méthode utilisée pour simuler cette première tâche a été décrite à la section III.2.7, son fonctionnement est illustré par la figure III.2. Le bloc "Tâche 2", utilisé pour simuler la tâche de positionnement de la caméra, est décrit par la figure III.7. III.3.3 pour réaliser la deuxième tâche. Le bloc "Tâche 3" a été réalisé pour simuler la tâche de stabilisation de la caméra et de la base mobile. En effet, ce bloc permet le calcul d'une commande cinématique  $\dot{q}$  en utilisant les équations (IV.39) et (IV.54) qui sont fonction du temps, des données visuelles et de la valeur d'approximation de la configuration courante du robot  $\hat{X}$ . Dans ce simulateur, l'enchaînement des trois tâches est géré par le temps et réalisé par les blocs "Multiport Switch" et "Clock". En bas à droite de la figure, le bloc "cible" permet d'initialiser une cible composée de trois points immobiles dans la scène ( $\omega_E = 0$  et  $v_E = 0$ ). Par rapport au repère  $R$  de la scène, les coordonnées des points cibles sont

$$E_1(2.65m, 0.5m); \quad E_2(2.65m, 0m); \quad E_3(2.65m, -0.5m)$$

La distance entre deux points consécutifs de la cible étant  $l = 0.5m$ . Les indices visuels de référence dans le plan d'image sont définis par :

$$Y_1^* = 0.2; \quad Y_2^* = 0; \quad Y_3^* = -0.2$$

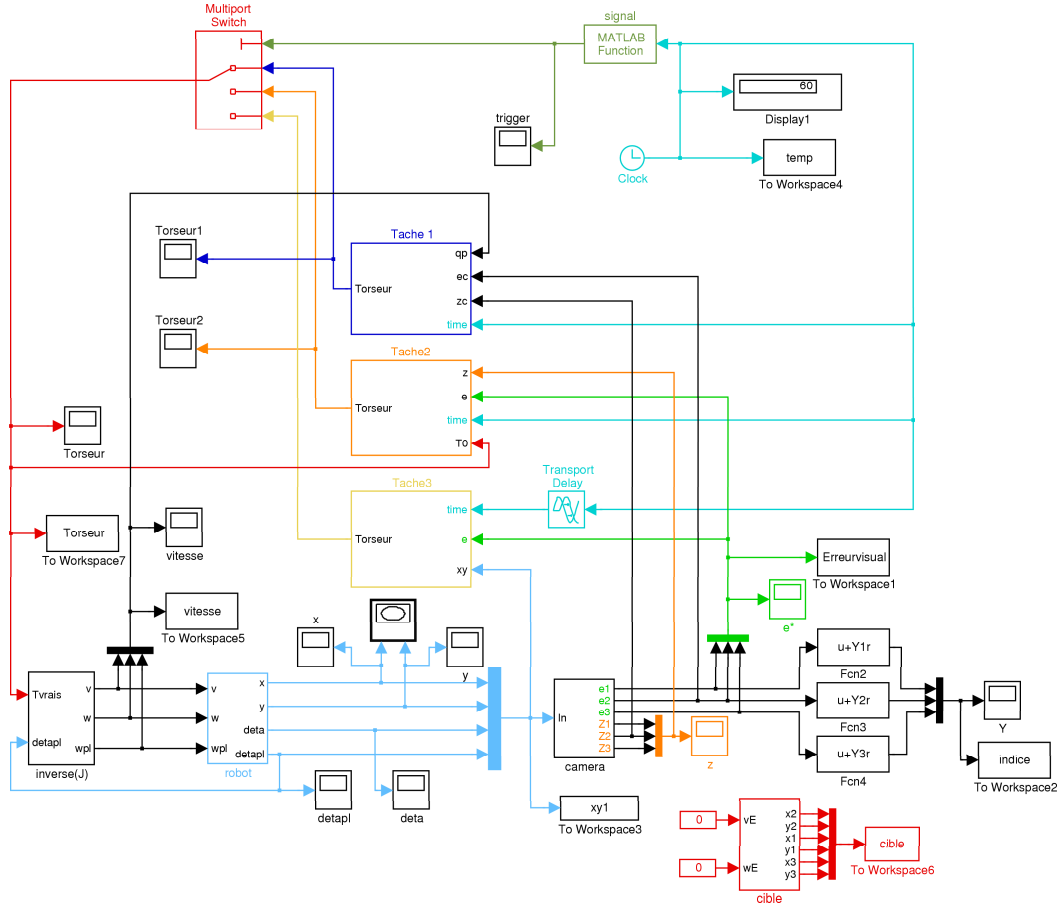


FIG. IV.21: Simulateur de l'enchaînement des trois tâches élémentaires

Dans ce cas, à la position finale, la caméra sera centrée face à la cible, et la profondeur des points de la cible sera donnée par le vecteur suivant  $z^* = (2.5m \ 2.5m \ 2.5m)'$ . Pour pouvoir appliquer la méthode développée au chapitre III, nous avons considéré la définition d'un secteur de travail défini par les paramètres  $d_1 \in [5m, 20m]$ , pour la première tâche, et  $d_2 \in [2.226m, 6m]$  pour la deuxième tâche. Ensuite, pour garantir la visibilité de la cible, nous avons considéré  $\beta = 0.4$  et  $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$  (voir figure III.1 ou III.6). En considérant les bornes des actionneurs du robot superscout du LAAS-CNRS

$$\dot{q}_{max} = (1m \ s^{-1} \ 1rad \ s^{-1} \ 1rad \ s^{-1})'$$

$$\ddot{q}_{max} = (5m \ s^{-2} \ 1rad \ s^{-2} \ 4rad \ s^{-2})'$$

et d'après la relation (I.62), on définit les bornes du torseur cinématique  $u_1 = (1 \ 1 \ 0.5)'$ , ainsi que celles de la commande  $u_0 = (4 \ 4 \ 5)'$ . En utilisant les outils LMI Control Toolbox

du logiciel Matlab, nous avons obtenu le gain  $\mathbb{K}_1$  suivant pour stabiliser la première tâche :

$$\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} -0.6033 & 0 & 1.8331 & -1.3813 & 0 & 0.5045 \\ 0 & -0.6392 & 0 & 0 & -17.0653 & 0 \\ -0.4770 & 0 & -7.8856 & 0.1327 & 0 & -7.2344 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.57})$$

et le gain  $\mathbb{K}_2$  pour stabiliser la seconde tâche :

$$\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} -56.7988 & 117.8143 & -56.7987 & -6.7335 & 0 & -0.1491 \\ -758.9420 & 0 & 758.9421 & 0 & -103.2982 & 0 \\ -36.1701 & -33.6423 & -36.1706 & 1.1122 & 0 & -5.7996 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

Les gains qui ont été choisis pour stabiliser la troisième tâche sont les suivants :  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 5$  et la fréquence  $w = 1 \text{ rad/s}$  pour la commande cinématique  $\dot{q}$  exprimée par (IV.40) et (IV.54). La configuration initiale du robot  $X_0$  est donnée par :

$$x = -15\text{m}; \quad y = -3\text{m}; \quad \theta = 0\text{rad}; \quad \theta_p = 0.25\text{rad}$$

La configuration désirée du robot  $X^*$  est définie par :

$$x^* = 0\text{m}; \quad y^* = 0\text{m}; \quad \theta^* = 0\text{rad}; \quad \theta_p^* = 0\text{rad}$$

La vitesse de référence  $v_{z_C}^* = 0.8\text{m/s}$ .

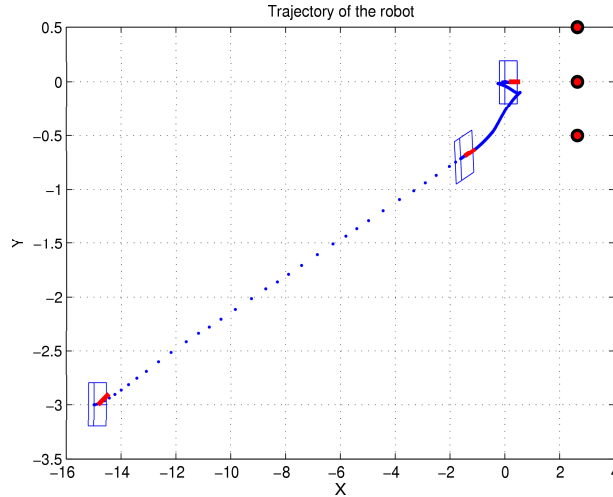


FIG. IV.22: Trajectoire du robot dans le repère de la scène  $R$

La figure IV.22 représente la trajectoire complète du robot, obtenue par enchaînement dynamique des trois tâches. La première tâche d'asservissement en cap permet de conduire le robot dans un voisinage de la cible. Durant cette première tâche, on observe que le robot s'oriente rapidement face à la cible puis se déplace le long d'une trajectoire quasi-rectiligne. La transition avec la seconde tâche s'effectue à l'instant  $t_{s_1} = 17\text{s}$ . La deuxième



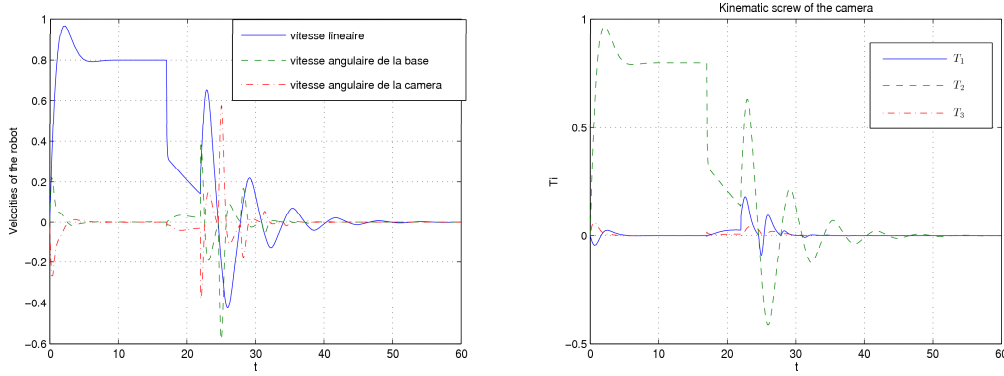


FIG. IV.23: Vitesses du robot  $\dot{q}$  (à gauche) et évolution du torseur cinématique  $T$  de la caméra par rapport au repère de la scène  $R$  (à droite)

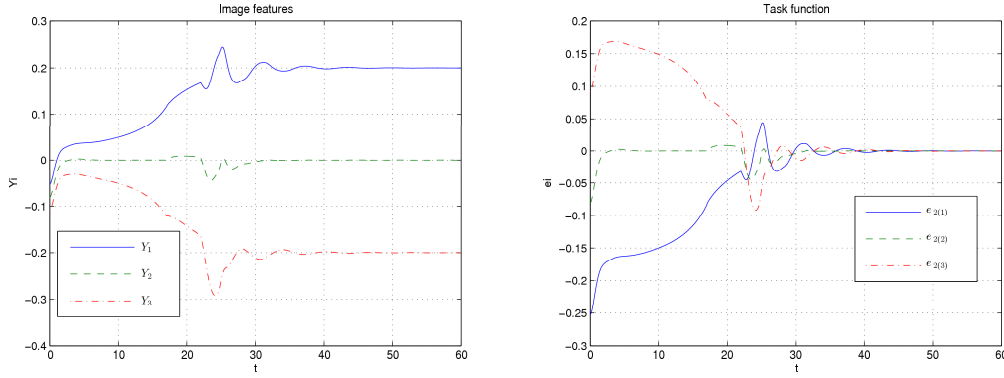


FIG. IV.24: Evolution des indices visuels (à gauche) et évolution des composantes de la deuxième tâche  $e_{2(i)}$  (à droite)

tâche référencée vision contraint progressivement le mouvement de la caméra pour la positionner face à la cible. La transition s'effectue en considérant les conditions initiales  $e_2(t_{s_1})$  et  $T(t_{s_1})$  qui représentent la variation des indices visuels et le torseur cinématique de la caméra correspondant à l'exécution de la première tâche. La commutation entre la deuxième et la troisième tâche est réalisée à l'instant  $t_{s_2} = 22s$ . La continuité des vitesses est assurée par le choix des conditions initiales sur l'état  $X(t_{s_2})$  et la vitesse du robot  $\dot{q}(t_{s_2})$ , déterminés à la fin de l'exécution de la deuxième tâche d'après les relation (IV.55) et (IV.56). Finalement, la troisième tâche permet de stabiliser à la fois la position de la caméra et de la base mobile à la configuration désirée,  $X^* = 0$ , en utilisant la commande référencée vision instationnaire (IV.39) et (IV.54).

L'image de gauche de la figure IV.23 représente les vitesses du robot : la vitesse linéaire  $v$ , la vitesse angulaire de la base  $\dot{\theta}$  et la vitesse angulaire de la caméra  $\dot{\theta}_p$ . L'image de droite de la figure IV.23 représente l'évolution des composantes du torseur cinématique de la

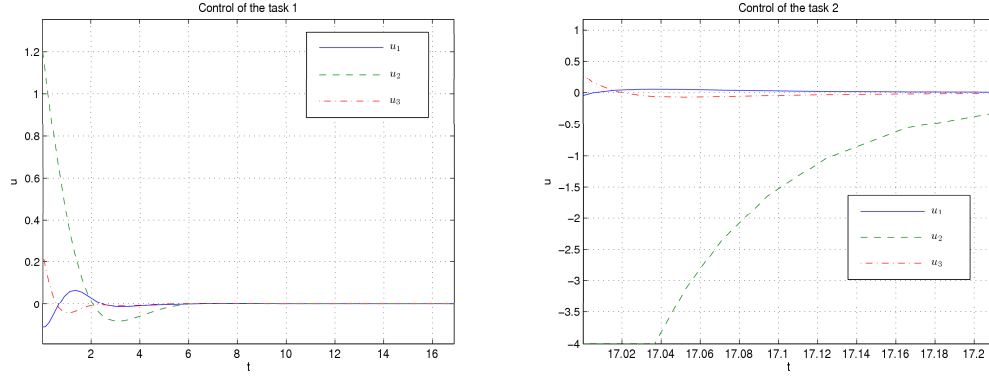


FIG. IV.25: Descriptions de la commande saturante pour la première tâche (à gauche) et descriptions de la commande saturante pour la deuxième tâche (à droite)

caméra,  $T$ , par rapport au repère de la scène  $R$ , exprimé dans le repère de la caméra  $R_C$ . Sur la figure IV.23, on peut voir que la deuxième composante du torseur cinématique,  $T_{(2)}$ , a atteint la vitesse linéaire de référence,  $v_{z_C}^* = 0.8m/s$ , à la fin de la première tâche. De plus, la convergence à zéro des composantes  $T_{(1)}$  et  $T_{(3)}$  garantit que les vitesses angulaires de la base  $\dot{\theta}$  et de la caméra  $\dot{\theta}_p$  convergent asymptotiquement vers zéro. Ceci indique que la trajectoire du robot tend vers une droite dirigée vers la cible. On peut noter que, pendant la navigation du robot, les vitesses  $\dot{q}$  et le torseur cinématique  $T$  restent continus, en particulier aux instant de transition  $t_{s_1}$  et  $t_{s_2}$  entre les différentes tâches.

L'image de gauche de la figure IV.24 représente l'évolution des indices visuels  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , vers leurs valeurs de référence  $Y_i^*$ . Les composantes  $e_{2(i)}$  de la seconde tâche sont décrites sur l'image à droite de la figure IV.24. On peut voir que la caméra est correctement stabilisée à la position souhaitée.

La figure IV.25 représente l'évolution des composantes de la commande saturée de la première tâche (image de gauche) et de la deuxième tâche (image de droite). Pendant l'exécution de la première tâche, la commande (IV.29) n'atteint pas sa valeur limite  $u_0$ . Cependant, après l'instant  $t_{s_1}$ , lorsque la deuxième tâche commence à s'exécuter, on peut voir que la seconde composante de la commande (IV.34) sature pendant un moment. Toutefois, comme la borne sur la dynamique des actionneurs a été considérée lors de la synthèse de cette commande, la stabilité du système (IV.33) en boucle fermée est assurée malgré cette saturation.

Ce deuxième exemple d'enchaînement de tâches permet de montrer l'intérêt de décomposer un déplacement en sous-tâches élémentaires, pour l'exécution d'un long déplacement. Au lieu de planifier une trajectoire complète dans l'espace de travail, la définition de tâches élémentaires permet de contraindre progressivement le mouvement du robot et assure une meilleure robustesse vis à vis des erreurs de modélisation. La définition de fonctions de tâches de dimension maximale permet de modéliser simplement le problème d'enchaînement, en considérant la définition d'une structure de variété différentielle sur

l'espace des coordonnées généralisées du robot. L'application de techniques d'automatique avancées offre alors un moyen de calculer un correcteur prenant en compte les contraintes propres à chaque tâche.

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé un cadre mathématique permettant de modéliser le problème d'enchaînement de tâches. Il repose sur la définition d'une structure de variété différentielle sur l'espace des coordonnées généralisées du robot et la définition de fonctions de tâche de dimension maximale. Sur la base de ce résultat, nous avons ensuite présenté quatre exemples d'enchaînement de tâches élémentaires.

Le premier concerne l'enchaînement d'une tâche de suivi de mur et d'une tâche référencée vision de positionnement. La dynamique de la seconde fonction de tâche est définie sous la forme d'un système linéaire du second ordre. Bien que cette première approche permette de conserver la continuité des vitesses, elle ne permet pas de limiter leurs fortes variations lors de la commutation. Nous avons ensuite proposé une seconde approche pour le même problème, mais en exprimant la deuxième tâche au moyen d'un système linéaire du troisième ordre. Ceci nous a permis de diminuer la variation des vitesses du robot et de conserver la continuité de l'accélération lors de la transition. Cependant, la méthode utilisée dans ces deux premiers exemples ne permet pas de borner la variation de la vitesse et de l'accélération. Elle ne permet pas non plus de garantir la satisfaction d'autres contraintes propres à la tâche.

Pour pallier ce problème nous avons considéré un troisième exemple dans lequel la seconde tâche référencée vision a été réalisée au moyen de la commande multi-critères élaborée au chapitre III. Cette approche a permis de garantir le respect des contraintes dynamiques du robot, les conditions de visibilité, et la prise en compte des incertitudes sur la profondeur des points de la cible.

Nous avons ensuite considéré un second problème, consistant à exécuter une tâche de navigation référencée vision par enchaînement de tâches élémentaires. Dans ce cas, les trois tâches ont permis de contraindre progressivement les degrés de liberté du robot, donnant une trajectoire particulièrement fluide. La première tâche a permis d'asservir le mouvement du robot en direction de la cible, en régulant sa vitesse à une valeur de référence. La seconde a permis de stabiliser la caméra face à la cible sans imposer de contrainte particulière sur le mouvement de la base. Enfin, la troisième tâche a permis d'achever la stabilisation du système complet au moyen d'une commande par retour d'état instationnaire. Pour cette dernière tâche, les données visuelles ont été simplement utilisées pour reconstruire l'état du système dans un voisinage de la configuration finale.

# Conclusions générales et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur la synthèse de lois de commande référencées vision 2D, multi-critères, pour le positionnement d'une caméra, par rapport à une cible fixe ou mobile. La caméra, montée sur une platine orientable en azimuth embarquée sur un robot mobile, possède deux degrés de liberté en translation dans le plan horizontal et un degré de liberté en rotation par rapport à l'axe vertical. Nous avons considéré le modèle sténopé d'une caméra et l'expression de la cinématique d'un robot mobile de type char. La restriction du mouvement à trois degrés de liberté nous a permis de conserver l'essentiel de la non-linéarité de l'asservissement visuel 2D, liée à la projection perspective dans le plan image, tout en permettant à un allègement des calculs.

Le raisonnement que nous avons mené est basé sur le formalisme des fonctions de tâches qui permet de définir un difféomorphisme local entre l'espace des coordonnées généralisées du robot et un espace de données capteurs de même dimension. Les fondements de cette approche et leur application à la commande référencée vision ont été énoncés au chapitre I. Sur la base de ce formalisme, nous avons rappelé les principaux schémas de commande utilisés en robotique pour l'asservissement 2D, usuellement déduits de la décroissance exponentielle de la fonction de tâche. En pratique, l'information de profondeur des motifs visuels qui apparaît dans la matrice d'interaction n'est pas précisément connue et cette grandeur est souvent approximée par une mesure réalisée à la configuration finale. En conséquence, les schémas usuels de commande ne permettent pas de garantir la stabilité du système en boucle fermée. Il n'est également pas possible d'assurer la visibilité du motif visuel et le respect des contraintes dynamiques durant le mouvement.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'aborder ce problème sous l'angle de technique récentes d'automatique avancées. L'objectif que nous avons affiché était de réaliser la synthèse de lois de commande permettant de garantir la stabilité du système en boucle fermée, malgré l'incertitude sur la profondeur des motifs visuels, et d'assurer la visibilité de la cible et le respect des contraintes dynamique du robot durant son déplacement. Nous avons rappelé au chapitre II un ensemble de notions d'automatique qui nous ont servi à construire notre raisonnement. La synthèse de lois de commande référencées vision multi-critères a ensuite été présentée au chapitre III. Dans une étape préliminaire, nous avons clairement défini un ensemble d'hypothèses sur la géométrie du problème, de sorte à pouvoir définir des bornes sur les différents paramètres du système. Sur cette base, nous avons proposé plusieurs écritures de la dynamique du système, dans le but de répondre à différents objectifs de commande.

Nous avons tout d'abord considéré le cas d'une cible fixe. Pour ce problème nous avons successivement développé deux lois de commande. La première permettant de réaliser une tâche d'asservissement en cap, la seconde permettant de positionner la caméra. Pour cela nous avons proposé une écriture du système basée sur une représentation polytopique des incertitudes, et nous avons utilisé une condition de secteur modifiée permettant de modéliser les saturations. Cette formulation nous a permis d'écrire les différentes conditions sous formes de LMIs, à partir desquelles nous avons pu mettre en œuvre des méthodes d'optimisation pour calculer les gains du correcteur pour lesquels la taille de la région de stabilité du système en boucle fermée est maximisée.

Nous avons ensuite considéré le problème du suivi d'une cible mobile. Dans ce cas, en utilisant une approche similaire pour la représentation des incertitudes nous avons modélisé le système en considérant la vitesse de la cible comme un vecteur de perturbation borné en énergie. Sur cette base, nous avons pu caractériser un ensemble compact, contenant l'origine, dans lequel est assurée la convergence des trajectoires du système en boucle fermée lors du suivi de la cible mobile. Lorsque la cible s'immobilise, la convergence asymptotique du système est alors garantie, assurant le positionnement de la caméra à la configuration désirée.

Les lois de commande que nous avons développées ont été tour à tour simulées à l'aide du logiciel Matlab/Simulink. L'évolution des indices visuels dans le plan image de la caméra et le tracé des courbes de vitesse et d'accélération du robot ont montré que les critères de visibilité et les contraintes dynamique étaient correctement respectées. L'occurrence de saturations de la commande, tolérées par l'approche que nous avons choisie, a pu être mise en évidence sur certains exemples. Ce phénomène, pris en compte par la condition de secteur que nous avons considérée, ne remet pas en cause la stabilité du système en boucle fermée.

Nous avons ensuite présenté au chapitre IV un second volet de notre travail concernant l'enchaînement de tâches référencées capteurs. Le travail présenté dans cette partie a été mené dans le cadre du projet *Egocentre* du programme *Robea* du CNRS [1, 2, 3]. L'objectif était de proposer des solutions pour étendre le concept local de fonction de tâche. Nous avons abordé ce travail en considérant un cadre mathématique permettant de définir une structure de variété différentielle sur l'espace des coordonnées généralisées du robot [102]. Cette approche, qui offre un moyen de choisir les conditions initiales de la nouvelle fonction de tâche à partir de la dynamique de la tâche en cours, permet de conserver la continuité des vitesses lors de la transition.

Le premier problème que nous avons considéré concerne l'enchaînement d'une tâche de suivi de mur, réalisée sur la base de mesures de proximité, et une tâche de positionnement référencée vision de la caméra. La première approche que nous avons proposée a été de modéliser la dynamique de la seconde fonction de tâche sous forme d'un système linéaire d'ordre supérieur, au lieu d'en imposer la décroissance exponentielle comme c'est classiquement fait. Nous avons successivement considéré une dynamique du second puis du troisième ordre qui nous a permis d'assurer la continuité des vitesses, puis des accélérations. Toutefois, cette première approche ne permettant pas de borner l'amplitude de ces grandeurs, de fortes variations peuvent exister lors de la transition

entre les tâches. Pour répondre à ce problème, nous avons alors proposé une seconde solution consistant à utiliser une loi de commande multi-critères pour la seconde tâche. Comme nous l'avons montré au chapitre III, cette approche permet réellement de garantir la satisfaction des contraintes dynamiques. De plus, elle permet la prise en compte de l'incertitude sur certains paramètres et la garantie des critères additionnels tels que la visibilité.

Nous avons ensuite considéré un second problème d'enchaînement de tâche pour réaliser à la fois le positionnement de la caméra et de la base mobile. Dans ce cas, le robot étant initialement éloigné de la configuration finale, nous avons proposé de réaliser le déplacement au moyen de l'enchaînement de trois tâches référencées vision. Une telle décomposition du mouvement en tâches élémentaires permet de contraindre progressivement les degrés de liberté du robot et, de ce fait, de réaliser une trajectoire de meilleure qualité. L'objectif de la première tâche est de conduire le robot dans un voisinage de la cible. La seconde tâche vise à stabiliser la caméra sans imposer de contraintes particulières sur le mouvement de la base. La troisième tâche permet enfin d'achever la stabilisation du système complet. A travers cet exemple, nous avons à nouveau souligné l'intérêt d'utiliser des correcteurs multi-critères pour permettre la prise en compte des contraintes propres à chaque tâche. Pour la troisième tâche toutefois, à cause de la contrainte de roulement sans glissement de la base mobile, il n'a pas été possible d'utiliser les mêmes schémas de commande que pour les deux premières tâches. Dans ce cas, la stabilisation du robot a été réalisée au moyen d'une loi de commande instationnaire par retour d'état, selon le schéma proposé dans [113], [112]. Dans ce dernier cas, les données visuelles ont été utilisées pour reconstruire l'état du système dans un voisinage de la configuration terminale.

Au regard des différents travaux que nous avons réalisés, le premier constat que nous pouvons pu faire est celui de la difficulté d'élaborer un schéma de commande générique pour la synthèse de correcteurs multi-critères référencés capteurs. Cette difficulté provient essentiellement de la gestion des non-linéarités contenues dans la matrice d'interaction et de la nécessité de prendre en compte des contraintes de nature différente pour chaque tâche. Toutefois, bien que l'étude que nous avons réalisée ait été limitée à l'asservissement visuel 2D, les mêmes techniques pourraient être employées pour synthétiser des commandes multi-critères pour d'autres types de tâches, telles que l'évitement d'obstacles sur la base de données ultrasoniques [14], l'exécution de mouvement à base de mesures laser [117] [77], ou le déplacement vers une source sonore [4].

Une extension directe des travaux décrits au chapitre III pourrait être d'augmenter le nombre de degrés de liberté de la caméra en la fixant sur l'effecteur d'un bras manipulateur. Par rapport au modèle à trois degrés de liberté que nous avons considéré, cette extension ne présenterait pas de difficulté particulière hormis la nécessité de prendre en compte un plus grand nombre de paramètres et en conséquence de traiter un plus grand nombre d'inégalités matricielles de dimension plus élevée.

En ce qui concerne la description des contraintes dynamiques, une autre approche possible pourrait être d'autoriser les saturations de la vitesse comme cela a été fait pour l'accélération. Dans ce cas, l'introduction d'une fonction de saturation dans l'expression de

la vitesse et l'utilisation de techniques de commande par saturations imbriquées pourrait permettre la synthèse du correcteur selon l'approche proposée dans [106].

D'autres approches pourraient également être considérées pour l'étude du problème de suivi de cible mobile. Au lieu de modéliser la vitesse de la cible comme une perturbation bornée en énergie, un autre choix possible pourrait être de la considérer bornée en amplitude. D'autre part, une autre formulation du problème de commande pourrait être de chercher le gain  $\mathcal{L}_2$  entre la sortie contrôlée du système et la perturbation.

L'inconvénient majeur des techniques que nous avons considérées pour la synthèse de la commande, basées sur la résolution d'inégalités linéaires matricielles, reste leur conservatisme, lié à la nécessité de considérer les situations les plus défavorables. En revanche ces méthodes permettent la caractérisation d'un domaine de stabilité en prenant en compte les différents critères de la tâche. En pratique, la stabilité des lois de commandes peut être vérifiée sur un domaine souvent beaucoup plus large mais dont la caractérisation exacte est extrêmement difficile.

Bien qu'elle soit mineure, notre contribution au problème d'enchaînement de tâche a permis de montrer l'intérêt de considérer des lois de commandes multi-critères, en particuliers aux instants de commutations, pour garantir les conditions de validité de chaque tâche. Il serait intéressant de pouvoir disposer d'un plus grand nombre de fonctions de tâches, et des correcteurs associés, pour tester la validité des approches proposées. Toutefois, comme nous l'avons expliqué plus haut, l'élaboration d'une méthode de synthèse globale de correcteurs multi-critères référencés capteurs reste un problème ouvert.

D'autre part, dans les exemples d'enchaînement que nous avons testés en simulation, nous avons considéré que la transition entre tâches était déclenchée par une consigne temporelle. En pratique, il semble beaucoup plus cohérent que cette décision puisse être fondée sur des critères de perception, garantissant que le robot se trouve à l'intérieur de la zone d'intersection des domaines de validité de deux tâches consécutives. Cette question est directement liée au problème de planification de tâches qui consiste à garantir un recouvrement de la zone de travail du robot par les domaines de validité de tâches successives et à s'assurer que les régions en intersection sont de taille suffisante pour que la transition puisse être correctement effectuée. Cette question, qui se situe à la limite de l'automatique et de la géométrie, a été abordée, dans le cas de tâches de navigation référencées laser, dans [77].

Enfin, il apparaît essentiel que les résultats théoriques développés dans cette thèse puisse être expérimentés sur un robot réel. Ce travail, que nous n'avons pas eu le temps de réaliser dans le cadre de cette thèse, permettrait de montrer le bien fondé des techniques proposées sur la base de données réelles.

---

# Annexe A

## Outils mathématiques

---

### A.1 Introduction

Dans cette annexe, nous définissons les outils numériques de base pour notre étude que sont les inégalités matricielles linéaires (LMIs) utilisées pour formuler et résoudre beaucoup de problèmes de commande. Ainsi, après avoir défini la notion d'inégalité matricielle linéaire, les notions de complément de Schur et la  $\mathcal{S}$ -procédure sont formulées. Nous définissons également les ensembles utilisés dans ce mémoire pour décrire les domaines de stabilité, de conditions initiales admissibles ou les régions dans lesquelles différentes contraintes sont représentées : les ellipsoïdes et les polyèdres.

### A.2 Inégalités Matricielles

#### A.2.1 Inégalités Matricielles Linéaires

Une inégalité matricielle linéaire (LMI en anglais) correspond à une inégalité de la forme [9]

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{(i)} F_{(i)} > 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^m$  est la variable de décision et les matrices  $F_0$  et  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des matrices symétriques connues de dimensions  $n \times n$ . La satisfaction de l'inégalité (A.1) signifie que la matrice  $F(x)$  est symétrique et définie positive, c'est-à-dire vérifie

$$\xi' F(x) \xi > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (\xi \text{ non nul}).$$



Notons que puisque le cône des matrices définies positives est convexe et que la matrice  $F(x)$  est une fonction affine de  $x$ , la contrainte  $F(x)$  est une contrainte convexe en  $x$  que l'on appelle aussi **contrainte LMI**. Il existe également des contraintes LMIs non-strictes :  $F(x) \geq 0$ , ce qui signifie que certaines valeurs propres de  $F(x)$  peuvent être nulles. Notons que l'on peut regrouper plusieurs contraintes LMIs en une seule contrainte LMI bloc diagonale :

$$F(x) = \begin{pmatrix} F^{(1)}(x) & & \\ & \ddots & \\ & & F^{(q)}(x) \end{pmatrix} > 0, \text{ avec } F^{(1)} > 0, \dots, F^{(q)} > 0.$$

On peut définir un problème d'optimisation convexe comme :

$$\min c'x \text{ sous } F(x) > 0, \text{ avec } c \in \mathbb{R}^m$$

C'est un problème d'optimisation standard qui a pour objectif de minimiser une fonction linéaire qui dépend de manière affine de la variable  $x$  sous la contrainte LMI (A.1).

### A.2.2 Complément de Schur

Il faut souligner que certains problèmes de commande (synthèse ou analyse) ne peuvent se formuler sous forme de conditions LMI, mais plutôt sous des formes plus complexes comme les inégalités matricielles bilinéaires (BMIs) ou non-linéaire [40]. Quelques fois ces inégalités matricielles non-linéaires peuvent être réécrites comme des contraintes LMIs en utilisant le complément de Schur.

**Lemme A.1 (Complément de Schur)** *Soient les matrices  $Q(x) = Q(x)'$ ,  $R(x) = R(x)'$ , et  $S(x)$  de dimensions appropriées et dépendant affinement de la variable  $x$ . Alors la condition LMI*

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

*est équivalente à :*

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0, \quad (\text{A.3})$$

*ou encore*

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)'Q(x)^{-1}S(x) > 0. \quad (\text{A.4})$$

### A.2.3 Lemme de majoration

Nous présentons un lemme qui est souvent utilisé pour majorer des termes quadratiques. Ce lemme est présenté par Petersen [89] dans le cas où l'expression quadratique que l'on veut majorer contient un terme incertain borné en norme.

**Lemme A.2** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ , nous avons*

$$2x'y \leq x'Rx + y'R^{-1}y \quad (\text{A.5})$$

où  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

En effet, l'inégalité (A.5) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & I_n \\ I_n & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

Si nous avons un terme  $2x'Fy$  qui contient une matrice incertaine  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , satisfaisant  $F'F \leq I_n$ , nous pouvons majorer ce terme en utilisant le lemme A.2 de la manière suivante :

$$2x'Fy \leq x'\epsilon x + y'F'\epsilon^{-1}Fy \leq \epsilon x'x + \epsilon^{-1}y'y$$

où  $\epsilon$  est un scalaire positif.

### A.2.4 S-procédure

Le concept de  $\mathcal{S}$ -procédure [63] permet, lorsque plusieurs contraintes quadratiques doivent être satisfaites en même temps, d'obtenir une approximation de ces contraintes sous une formulation LMI.

**Lemme A.3** *Considérons les fonctions quadratiques  $F_0, \dots, F_q$  fonctions de la variable  $\xi \in \mathbb{R}^n$  :*

$$F_i(\xi) = \xi'P_i\xi + 2u_i'\xi + v_i, \quad i = 0, \dots, q, \text{ avec } P_i = P_i' > 0 \quad (\text{A.7})$$

*S'il existe  $\tau_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, q$  tels que*

$$\begin{pmatrix} P_0 & u_0 \\ u_0' & v_0 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^q \tau_i \begin{pmatrix} P_i & u_i \\ u_i' & v_i \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

*alors on vérifie :*

$$F_i(\xi) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \implies F_0(\xi) \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

Le lemme A.3 concerne la version de la  $\mathcal{S}$ -procédure applicable pour des fonctions quadratiques avec des inégalités non-strictes. Si les inégalités sont strictes alors le lemme se modifie de la manière suivante.

**Lemme A.4** *Considérons les fonctions quadratiques  $G_0, \dots, G_q$  fonctions de la variable  $\xi \in \mathbb{R}^n$  :*

$$G_i(\xi) = \xi'P_i\xi, \quad i = 0, \dots, q, \text{ avec } P_i = P_i' > 0 \quad (\text{A.10})$$

S'il existe  $\tau_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, q$  tels que

$$P_0 - \sum_{i=1}^q \tau_i P_i > 0 \quad (\text{A.11})$$

alors on vérifie :

$$G_i(\xi) \geq 0, \forall i = 1, \dots, q \implies G_0(\xi) > 0 \quad (\text{A.12})$$

### A.2.5 Conditionnement d'une matrice

La résolution de conditions LMIs peut conduire à de nombreux problèmes numériques dus au mauvais conditionnement de certaines variables du problème. Il est cependant possible d'imposer des conditions sur le conditionnement d'une matrice  $P$  définie positive, c'est-à-dire d'agir sur le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de cette matrice.

**Proposition A.1** Soient  $P$  une matrice symétrique définie positive et  $\alpha$  un scalaire strictement positif. Alors les relations suivantes sont équivalentes :

1.  $\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \alpha$ ,
2.  $\exists s_1 > 0$  et  $s_2 > 0$  solutions de 
$$\begin{cases} s_1 I \leq P \\ P \leq s_2 I \\ s_2 \leq \alpha s_1 \end{cases}$$

où les scalaires  $s_1$  et  $s_2$  sont des nouvelles variables,  $\lambda_{\max}(P)$  et  $\lambda_{\min}(P)$  sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice  $P$ .

## A.3 Ellipsoïdes et polyèdres

Dans les différents problèmes abordés dans ce mémoire, nous avons principalement considéré des domaines ellipsoïdaux ou polyédraux pour décrire aussi bien des régions de stabilité, des ensembles de conditions initiales admissibles ou encore des ensembles dans lesquels certaines contraintes doivent être satisfaites (contrainte de visibilité par exemple). Quelques propriétés de ces objets géométriques sont maintenant décrites.

### A.3.1 Ellipsoïdes

Nous pouvons décrire un ellipsoïde dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  de différentes manières, par exemple à partir de quadratiques convexes.

**Définition A.1** Si  $T(x)$  est une fonction quadratique définie par :

$$T(x) = x' S x + 2x' q + r \leq 0 \text{ avec } S = S' > 0$$

alors l'ensemble défini par :

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n; T(x) \leq 0\} \quad (\text{A.13})$$

est un ellipsoïde dans  $\mathbb{R}^n$ . En outre, on suppose que  $q'S^{-1}q - r > 0$  ce qui garantit que  $\mathcal{E}$  est non-vide et ne se réduit pas à un seul point.

**Définition A.2** [9] Soient  $P = P' > 0$  et  $x_c \in \mathbb{R}^n$  alors l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n; (x - x_c)'Q(x - x_c) \leq 1; Q = P^{-2}\} = \{z \in \mathbb{R}^n; Pz + x_c; z'z \leq 1\} \quad (\text{A.14})$$

est un ellipsoïde de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

Nous pouvons facilement passer d'une représentation à l'autre. Ainsi, la représentation (A.14) se met sous la forme (A.13) en posant :

$$S = Q; \quad q = -Qx_c; \quad r = x_c'Qx_c - 1$$

De même, la représentation (A.13) se met sous la forme (A.14) en posant :

$$P = \sqrt{q'S^{-1}q - r} S^{-1/2}; \quad x_c = -S^{-1}q$$

La taille d'un ellipsoïde peut avoir une grande importance lorsque l'on désire obtenir la meilleure estimation possible de la région d'attraction de l'origine à l'aide d'un domaine de stabilité ellipsoïdal. Dans ce but, nous pouvons maximiser la taille d'un ellipsoïde, par exemple, en maximisant son volume, la longueur de son demi grand axe majeur, certaines directions prédéfinies ou encore en minimisant la trace de la matrice le définissant [43].

Les ellipsoïdes considérés dans cette thèse sont centrés sur l'origine, ce qui correspond à poser  $q = 0$  dans l'équation (A.13) et  $x_c = 0$  dans l'équation (A.14). La formulation que nous avons utilisée pour décrire des domaines ellipsoïdaux est donc la suivante :

$$\mathcal{E}(P, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq \gamma^{-1}; P = P' > 0; \gamma > 0\} \quad (\text{A.15})$$

Dans ce cas, le volume de l'ellipsoïde (A.15) est proportionnel à  $\sqrt{\det((\gamma P)^{-1})}$  et la longueur de son demi grand axe est proportionnelle à  $\sqrt{\gamma^{-1}\lambda_{\max}(P^{-1})}$ .

### A.3.2 Polyèdres

Un polyèdre  $\mathcal{Q}$  est défini par l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermés. Nous pouvons énoncer la définition suivante.

**Définition A.3** [11] Un sous-espace  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelé **ensemble polyédral** si  $\mathcal{Q}$  peut être défini comme :

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n; Qx \leq r\}$$

où  $r$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^r$  et  $Q$  est une matrice appartenant à  $\mathbb{R}^{r \times n}$ .

Pour avoir plus de détails sur les propriétés des ensembles polyédraux, les ouvrages de Brøndsted [11], de Shrijver [101] ou de Luenberger [69] peuvent être consultés.

Un polytope est un ensemble polyédral compact, c'est-à-dire borné et fermé. Un polytope peut alors être défini comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, ce qui nous permet de représenter un polytope  $\mathcal{P}$  à partir de la connaissance de ses sommets  $v_1, \dots, v_p$  :

$$\mathcal{P} = Co\{v_j, \forall j = 1, \dots, p\} \quad (\text{A.16})$$

### A.3.3 Relations d'inclusion

Nous rappelons quelques relations relatives à l'inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre ou dans un autre ellipsoïde, ou bien des conditions relatives à l'inclusion d'un polyèdre dans un ellipsoïde.

#### Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre

Soient l'ellipsoïde centré sur l'origine décrit par (A.15) et le polyèdre

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n; Q'_i x \leq r_i, i = 1, \dots, p\} \quad (\text{A.17})$$

Alors, l'ellipsoïde (A.15) est inclus dans le polyèdre (A.17) si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} P & \star \\ Q'_i & \gamma r_i^2 \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.18})$$

#### Inclusion d'un ellipsoïde dans un autre ellipsoïde

Soient l'ellipsoïde défini dans (A.15) et l'ellipsoïde défini par

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P_1 x \leq \gamma_1^{-1}; P_1 = P'_1 > 0; \gamma_1 > 0\} \quad (\text{A.19})$$

Alors, l'ellipsoïde (A.19) est inclus dans l'ellipsoïde (A.15) si et seulement si :

$$\gamma_1 P_1 - \gamma P \geq 0 \quad (\text{A.20})$$

#### Inclusion d'un polytope dans un ellipsoïde

L'inclusion du polytope (A.16) dans un ellipsoïde décrit par l'équation (A.15) est garantie si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & \star \\ v_j & P^{-1} \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.21})$$

## Références bibliographiques

- [1] S. Argentieri, P. Barone, V. Cadenat, S. Celebrini, F. Chaumette, P. Chiron, P. Danès, D. Folio, J. Y. Fourquet, B. Gao, N. Mansard, V. Padois, P. Souères, M. Taïx, and Y. Trotter. Enchaînement de tâches pour l'exécution de mouvement complexe en robotique mobile : Premier rapport d'avancement du projet robea egocentre. *2èmes Journées du Programme Interdisciplinaire ROBEA*, pages 135–142, Janvier 2004.
- [2] S. Argentieri, P. Barone, V. Cadenat, S. Celebrini, F. Chaumette, P. Chiron, P. Danès, D. Folio, J. Y. Fourquet, B. Gao, N. Mansard, V. Padois, P. Souères, M. Taïx, and Y. Trotter. Enchaînement de tâches pour l'exécution de mouvement complexe en robotique mobile : second rapport d'avancement du projet robea egocentre. *Programme Interdisciplinaire ROBEA*, Mars 2005.
- [3] S. Argentieri, P. Barone, V. Cadenat, S. Celebrini, F. Chaumette, P. Chiron, P. Danès, D. Folio, J. Y. Fourquet, B. Gao, N. Mansard, V. Padois, P. Souères, M. Taïx, and Y. Trotter. Enchaînement de tâches pour l'exécution de mouvement complexe en robotique mobile : troisième rapport d'avancement du projet robea egocentre. *Programme Interdisciplinaire ROBEA*, Avril 2006.
- [4] S. Argentieri, P. Danès, P. Souères, and P. Lacroix. An experimental testbed for sound source localization with mobile robots using optimized wideband beamformers. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'05)*, pages 909–914, August 2006.
- [5] B.R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46 :399–408, 1985.
- [6] D. Bellot and P. Danès. Handling visual servoing schemes through rational systems and lmis. *IEEE International Conference on Decision and Control*, 4 :3601–3606, December 2001.
- [7] H. Beyer. Accurate calibration of ccd cameras. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'94, Urbana Champaign)*, pages 96–101, 1992.
- [8] S. Boukir. *Reconstruction 3D d'un environnement statique à l'aide d'une caméra mobile commandable*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, IRISA, Rennes, France, 1993.

- [9] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [10] R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In *Differential Geometric Control Theory*. Birkhäuser, 1983.
- [11] A. Brøndsted. An introduction to convex polytopes. In *Graduate texts in mathematics, New York-Heidelberg-Berlin*, pages 51–52. Springer-Verlag, 1983.
- [12] C. Burgat and S. Tarbouriech. *Nonlinear Systems*, volume 2, chapter Stability and control of saturated linear systems, pages 113–197. Chapman and Hall, London, UK, 1996. Chap 4, Annexs C D E.
- [13] V. Cadenat. *Commande référencée multi-capteurs pour la navigation d'un robot mobile*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Decembre 1999.
- [14] V. Cadenat, P. Souères, and M. Courdresses. Using redundancy to perform a sensor-based navigation task amidst obstacles. *International Journal of Robotics and Automation*, 16(2) :61–73, 2001.
- [15] E. B. Castelan, I. Queinnec, S. Tarbouriech, and J. M. Gomes Da Silva Jr. Lmi approach for l2-control of linear systems with saturating actuators. *6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'2004)*,, pages 287–292, Septembre 2004.
- [16] E. B. Castelan, S. Tarbouriech, I. Queinnec, and J. M. Gomes Da Silva Jr. L2-stabilization of continuous-time linear systems with saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006. à paraître.
- [17] E. Cervera, F. Berry, and P. Martinet. Stereo visual servoing with a single point : a comparative study. *IEEE International Conference on Advanced Robotics*, August 2001.
- [18] F. Chaumette. *La relation vision commande : théorie et application à des tâches robotiques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, Rennes, France, Juillet 1990.
- [19] F. Chaumette. *The Confluence of Vision and Control*, volume 237 of *LNCIS Series*, chapter Potential problems of stability and convergence in image-based and position-based visual servoing, pages 66–78. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1998.
- [20] F. Chaumette. *Commande des robots manipulateurs*, chapter Asservissement visuel, pages 105–150. Hermès Science Publication, Paris, France, 2002.
- [21] F. Chaumette, S. Boukir, P. Bouthem, and D. Juvin. Structure from controlled motion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(5) :492–504, 1996.
- [22] F. Chaumette, P. Rives, and B. Espiau. *Visual servoing : Real Time Control of Robot Manipulators Based on Visual Sensory Feedback*, volume 7 of *World Scientific Series in Robotics and Automated Systems*, chapter Classification and realization of

- the different vision-based tasks, pages 199–228. World Scientific Press, Singapour, 1993.
- [23] C. Collewet and F. Chaumette. Positioning a camera with respect to planar objects of unknown shape by coupling 2-d visual servoing and 3-d estimations. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(3) :322–333, June 2002.
  - [24] N. J. Cowan, J. D. Weingarten, and D. E. Koditschek. Visual servoing via navigation functions. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 18(2) :521–533, August 2002.
  - [25] A. Crétual. *Asservissement visuel à partir d'informations de mouvement dans l'image*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, Rennes, France, Novembre 1998.
  - [26] A. Crétual and F. Chaumette. Image-based visual servoing by integration of dynamic measurements. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'98)*, Mai 1998.
  - [27] P. Danès and D. Bellot. Towards an lmi approach to multicriteria visual servoing in robotics. *European Journal of Control*, 12(1) :86–110, Janvier 2006.
  - [28] P. Danès and D. F. Coutinho. Multicriteria analysis of visual servos via biquadratic lyapunov functions. *IFAC Symposium on Robust Control Design (Rocond'06)*, Juillet 2006.
  - [29] C. Canudas de Wit, H. Khenouf, C. Samson, and Sordalen O. J. *Nonlinear control design for mobile robots in Mobile robots*. Mobile Robots World Scientific Publisher (Zeng editor), 1994.
  - [30] D. Dementhon and L. S. David. Model based objet pose in 25 lines of code. *International Journal of Computer Vision*, 15(1), 1995.
  - [31] M. Devy and V. Lemonde. Détection de l'environnement par stéréo caméra arrière. Convention de Recherche No. 05143, LAAS-CNRS, Toulouse, France, Mars 2005.
  - [32] M. Dhome, M. Richetin, J. T. Lapreste, and G. Rives. Determination of the attitude of 3d objects from a single perspective view. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(12) :1265–1278, 1989.
  - [33] B. Espiau. Sur les erreurs en asservissement visuel. Rapport de recherche 2619, INRIA, 1995.
  - [34] B. Espiau, F. Chaumette, and P. Rives. A new approach to visual servoing in robotics. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 8(3), June 1992.
  - [35] H. Fang, Z. Lin, and T. Hu. Analysis and control design of linear systems in the presence of actuator saturation and l2-disturbances. *Automatica*, 40(7) :1229–1238, 2004.
  - [36] O. Faugeras. *Three dimensional computer vision : a geometric view point*. MIT Press, Cambridge, 1993.



- [37] J. Gangloff and M. De Mathelin. High speed visual servoing of a 6 dof manipulator using multivariable predictive control. *Advanced Robotics*, December 2003. Special issue : advanced 3D vision and its application to robotics.
- [38] B. Gao. Etude de la dynamique d'enchaînement de tâches référencées capteurs. Rapport de master, Ecole Doctorale Systèmes, Université Paul Sabatier Toulouse III, Toulouse, France, Juin 2003.
- [39] B. Gao, S. Tarbouriech, and P. Souères. Image-based target tracking with multi-constraints satisfaction. *5th IFAC Symposium on robust control design (ROCOND'06)*, Juillet 2006.
- [40] K. G. Goh, M. G. Safonov, and J. H. Ly. Robust synthesis via bilinear matrix inequalities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9/10) :1079–1095, 1996.
- [41] J. M. Gomes Da Silva Jr. *Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Octobre 1997.
- [42] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(11) :2081–2085, November 1999.
- [43] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Stability regions for linear systems with saturating controls. In *Proceedings of European Control Conference (ECC'99)*, Karlsruhe, Germany, Septembre 1999.
- [44] J. M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech, and G. Garcia. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5) :842–847, Mai 2003.
- [45] J.M. Gomes Da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability : an lmi-based approach. *IEEE Transaction Automatic Control*, 50(1) :106–111, 2005.
- [46] G. Hager. A modular system for robust positioning using feedback from stereo vision. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 13(4) :582–595, 1997.
- [47] K. Hashimoto, T. Ebine, and H. Kimura. Visual servoing with hand-eye manipulator-optimal control approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5) :766–774, 1996.
- [48] K. Hashimoto, T. Kimoto, T. Ebine, and H. Kimura. Manipulator control with image based visual servo. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Avril 1991.
- [49] K. Hashimoto and H. Kimura. *Visual Servoing : Real time control of robot Manipulators based on visual sensory feedback*, volume 7 of *World scientific series in robotics and automated systems*, chapter LQ optimal and non linear approaches to visual servoing, pages 165–198. World Scientific Press, Singapour, 1993.

- [50] K. Hashimoto and T. Noritsugu. Enlargement of stable region in visual servo. *IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 3927–3932, December 2000.
- [51] H. Hindi and S. Boyd. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. *IEEE Conference on decision and Control (cdc 1998)*, pages 903–908, December 1998.
- [52] R. Horaud and O. Monga. *Vision par ordinateur : outils fondamentaux*. Hermès, Paris, France, 1995.
- [53] K. Hosoda and M. Asada. Versatile visual servoing without knowledge of true jacobian. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference On Intelligent Robots and Systems*, 1994.
- [54] T. Hu and Z. Lin. *Control System with Actuator Saturations : Analysis and Design*. Birkhäuser, Boston, USA, 2001.
- [55] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38(2) :351–359, February 2002.
- [56] S. Hutchinson, G.D. Hager, and P.I. Corke. A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5) :651–670, Octobre 1996.
- [57] M. Jägersand, O. Fuentes, and R. Nelson. Experimental evaluation of uncalibrated visual servoing for precision manipulation. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'97, Albuquerque)*, 3 :2874–2880, 1997.
- [58] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems : A Computational Approach*. Number 284 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2003.
- [59] V. Kapila and K. Grigoriadis (Editors). *Actuator Saturation Control*. Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [60] A. Kawabata and M. Fujita. Design of an  $h_\infty$  filter based robust visual servoing systems. *Control Engineering Practice*, 6, 1998.
- [61] R. Kelly. Robust asymptotic stable visual servoing of planar robots. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 15(2) :759–766, 1996.
- [62] D. Khadraoui. *La commande référencée vision pour le guidage automatique de véhicules*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, LAS-MEA, 1996.
- [63] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. MacMillan, 1992.
- [64] M. Khatib. *Contrôle du mouvement d'un robot mobile par retour sensoriel*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Décembre 1996.
- [65] K. Kinoshita and K. Deguchi. Simultaneous determination of camera pose and intrinsic parameters by visual servoing. *Proceedings of the IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94, Jérusalem)*, 1 :285–290, 1994.

- [66] J.P. Laumond, P. Jacobs, M. Taïx, and R. Murray. A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 10(5) :577–593, 1994.
- [67] V. LEMONDE and M. DEVY. Détection d'obstacles par stéréovision sur véhicules intelligents. *9èmes Journées Jeunes Chercheurs en Vision par Ordinateur (ORASIS'05)*, page 9, Mai 2005.
- [68] W. Liu, Y. Chitour, and E. Sontag. On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(4) :1190–1219, 1996.
- [69] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming, Second Edition*. Kluwer Academic Publishers, 1984.
- [70] O.J. Camps M. Sznajder, B. Murphy. An l<sub>p</sub> approach to synthesizing robust active vision. *IEEE International Conference on Decision and Control*, 3 :2545– 2550, December 2000.
- [71] F. Malis. *Contributions à la modélisation et à la commande en asservissement visuel*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, IRISA, Rennes, France, 1998.
- [72] F. Malis. Vision based control invariant to camera intrinsic parameters : stability analysis and path tracking. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Mai 2002.
- [73] F. Malis, J. J. Borrelly, and P. Rives. Intrinsic free visual servoing with respect to straight lines. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Mai 2002.
- [74] F. Malis, F. Chaumette, and S. Boudet. 2d- $\frac{1}{2}$  visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(2), 1999.
- [75] F. Malis, G. Morel, and F. Chaumette. Robot control from disparate multiple sensors. *International Journal of Robotic Research*, 20(5) :364–377, May 2001.
- [76] F. Malis and P. Rives. Robustness of image-based visual servoing with respect to depth distribution errors. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, September 2003.
- [77] A. Malti. *planification et exécution de mouvements référencés sur amers*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Décembre 2005.
- [78] N. Mansard and F. Chaumette. Tasks sequencing for visual servoing. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, (IROS'04)*, 1 :992–997, September 2004.
- [79] N. Mansard and F. Chaumette. Enchaînement de tâches en asservissement visuel : application à l'évitement des butées articulaires. *Congrès jeunes chercheurs en Vision par ordinateur, (ORASIS'2005)*, Mai 2005.
- [80] N. Mansard and F. Chaumette. Visual servoing sequencing able to avoid obstacles. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, (ICRA'05)*, pages 3154–3159, Avril 2005.

- [81] Y. Mezouar and F. Chaumette. Path planning for robust image-based control. *IEEE Transactions On Robotics and Automation*, 18(4) :534–549, August 2002.
- [82] H. Michel and P. Rives. Singularities in the determination of the situation of a robot effector from the perspective view of 3 points. Rapport de Recherche No. 1850, INRIA, France, Février 1993.
- [83] P. Morin and C. Samson. Application of backstepping techniques to the time-varying exponential stabilization of chained form systems. Rapport de Recherche No. 2792, INRIA, 1996.
- [84] P. Morin and C. Samson. Control of nonlinear chained systems : From the routh-hurwitz stability criterion on time-varying exponential stabilizers. Research report No. 3126, INRIA, Sophia-Antipolis, 1997.
- [85] C. Paim, S. Tarbouriech, J. M. Gomes Da Solva Jr., and E. B. Castelan. Control design for linear systems with saturating actuators and l2-bounded disturbances. *IEEE Conference on Decision and Control (CDC'2002)*, pages 4148–4153, Décembre 2002.
- [86] N. P. Papanikolopoulos. Selection of feature and evolution of visual measurements during robotic visual servoing tasks. *Journal of Intelligent and robotics Systems*, 13, 1995.
- [87] N. P. Papanikolopoulos, P. K. Khosla, and T. Kanade. Visual tracking of a moving target by a camera mounted on a robot : a combination of control and vision. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(1), 1993.
- [88] N. P. Papanikolopoulos, B. J. Nelson, and P. K. Khosla. Six degree of freedom hand/eye visual tracking with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(5), 1995.
- [89] I.R. Petersen. A stabilisation algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems and Control Letters*, 8(4) :351–356, 1987.
- [90] R. Pissard-Gibollet. *Conception et commande par asservissement visuel d'un robot mobile*. Thèse de doctorat, Ecole des mines de Paris, Paris, France, Décembre 1993.
- [91] R. Pissard-Gibollet and P. Rives. Asservissement visuel appliqué à un robot mobile : état de l'art et modélisation cinématique. Rapport de Recherche No. 1577, INRIA, France, 1991.
- [92] J. B. Pomet and C. Samson. Time-varying exponential stabilization of nonholonomic systems in power form. Research Report No. 2126, INRIA, Sophia-Antipolis, France, 1993.
- [93] F. Reyes and R. Kelly. Experimental evaluation of fixed-camera direct visual controllers on a direct-drive robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'98, Louvain)*, 3 :2337–2657, 1998.
- [94] P. Rives and M. Devy. *La robotique mobile*, chapter Perception pour la localisation, pages 141–191. Number No. ISBN 2-7462-0246-8 in *Traité IC2 Information-Commande-Communication*. Hermès, Paris, 2001.

- [95] P. Rives and M. Devy. *La robotique mobile*, chapter Perception pour la navigation et la commande, pages 199–257. Number No. ISBN 2-7462-0246-8 in *Traité IC2 Information-Commande-Communication*. Hermès, Paris, 2001.
- [96] L. Robert. *Perception stéréoscopique de courbes et de surfaces tridimensionnelles. Application à la robotique mobile*. Phd thesis, Ecole polytechnique, Sophia-Antipolis, France, 1993.
- [97] A. Ruf and R. Horaud. Rigid and articulated motion seen with an uncalibrated stereo rig. *Proceeding of the International Conference on Computer Vision (ICCV'99, Corfou)*, 1999.
- [98] A. Saberi, Z. Lin, and A. R. Teel. Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :368–378, 1996.
- [99] C. Samson, M. Le Borgne, and B. Espiau. *Robot Control : The Task Function Approach*. Oxford science Publications, 1991.
- [100] F. Schramm, G. Morel, A. Micaelli, and A. Lottin. Extended-2d visual servoing. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, April 2004.
- [101] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and sons, Chichester, 1986.
- [102] P. Souères, V. Cadenat, and M. Djeddou. Dynamical sequence of multi-sensor based tasks for mobile robots navigation. *IFAC Interinational Symposium on Robot Control (SYROCO'03)*, 2 :423–428, Septembre 2003.
- [103] P. Souères, S. Tarbouriech, and B. Gao. A robust vision-based controller for mobile robots navigation : application to the task sequencing problem. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'2005)*, pages 568–573, Août 2005. Rapport LAAS No05343.
- [104] S. Tarbouriech and G. Garcia. *Control of uncertain systems with bounded inputs*, volume 227 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.
- [105] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J. M. Gomes Da Silva Jr. L2 performance design problem for systems presenting nested saturations. *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'05)*, pages 5000–5005, Décembre 2005.
- [106] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J.M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Conference on Decision and Control*, December 2004.
- [107] S. Tarbouriech and P. Souères. Advanced control strategies for the visual servoing scheme. *IFAC International Symposium on Robot Control*, Septmber 2000.
- [108] S. Tarbouriech, P. Souères, and B. Gao. A multicriteria image-based controller based on a mixed polytopic and norm-bounded representation. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'05)*, pages 5385–5390, Décembre 2005.

- [109] J. P. Tarel. Calibration de caméra fondée sur les ellipses. Rapport de recherche 2200, INRIA, 1994.
- [110] C. J. Taylor, J. P. Ostrowski, and S.-H. Jung. Robust visual servoing based on relative orientation. *Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 574–580, Juin 1999.
- [111] R. Y. Tsai. A versatile camera calibration technique for high accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. *IEEE Journal of robotics and automation*, 3(4), 1987.
- [112] D. P. Tsakiris. Nonholonomic robot stabilization by vision-based time-varying controls. In K. Kyriakopoulos and J. Tsinias, editors, *Proceedings of the First Nonlinear Control Network Pedagogical School*, pages 381–398, September 1999.
- [113] D. P. Tsakiris, P. Rives, and C. Samson. *Extending Visual Servoing Techniques to Nonholonomic Mobile Robots*, chapter The Congruence of Vision and Control. Springer-Verlag, New York, 1998. Lecture Notes in Control and Information Systems (LNCIS 237).
- [114] D. P. Tsakiris, C. Samson, and P. Rives. Vision-based time-varying mobile robot control. In C. Bonivento, C. Melchiorri, and H. Tolle, editors, *Advances in Robotics : The ERNET Perspective*, pages 163–172, Darmstadt, Germany, September 1996. Final European Robotics Network (ERNET) Workshop, World Scientific Publishing Co.
- [115] D. P. Tsakiris, C. Samson, and P. Rives. Vision-based time-varying stabilization of a mobile manipulator. *International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV'96)*, December 1996.
- [116] N. Ukita and T. Matsuyama. Real-time cooperative multi-target tracking by communicating active vision agents. *Computer Vision and Image*, 97(2) :137–179, February 2005.
- [117] A. C. Victorino. *La commande référencée capteur : une approche robuste au problème de navigation, localisation et cartographie simultanées pour un robot d'intérieur*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice, France, Septembre 2002.
- [118] P. Zanne. *Contributions à l'asservissement visuel robuste*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg I, Strasbourg, France, July 2003.
- [119] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Engle-wood Cliffs, New Jersey, USA, 1996.