



HAL
open science

Élasticité et ancrage dans des cristaux de Wigner macroscopiques : un système modèle pour l'étude du piégeage faible

Gwennou Coupier

► **To cite this version:**

Gwennou Coupier. Élasticité et ancrage dans des cristaux de Wigner macroscopiques : un système modèle pour l'étude du piégeage faible. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI; Université Paris 7 - Denis Diderot, 2006. Français. NNT : 2006PA066247 . tel-00120324

HAL Id: tel-00120324

<https://theses.hal.science/tel-00120324>

Submitted on 14 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

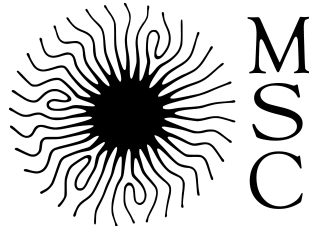


Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

UNIVERSITÉ PARIS 6 - Pierre et Marie Curie
UNIVERSITÉ PARIS 7 - Denis Diderot

UFR DE PHYSIQUE

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes



THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6
SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE DU SOLIDE
soutenue publiquement

par

Gwennou COUPIER

le 04 octobre 2006

**Élasticité et ancrage dans des cristaux de
Wigner macroscopiques :
un système modèle pour l'étude du piégeage faible**

Membres du jury :

M.	Éric	CLÉMENT	Président du Jury
M.	François	GALLET	Examineur
M.	Thierry	GIAMARCHI	Rapporteur
M.	Victor	MOSHCHALCOV	Examineur
M.	François	PEETERS	Rapporteur
M.	Michel	SAINT JEAN	Directeur de Thèse

À mes parents

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Thierry Giamarchi et François Peeters pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail, et à Éric Clément, François Gallet et Victor Moshchalkov pour avoir bien voulu participer au jury de ma thèse.

La conviction exprimée par le jury que notre dispositif relativement simple dans sa conception peut permettre de faire de la jolie physique est un encouragement à continuer à explorer ces voies transversales et valide la démarche que Michel Saint Jean et Claudine Guthmann m'ont convaincu de suivre.

Je regrette de n'avoir aucun talent de plume pour décrire avec précision ce que Michel et Claudine m'ont apporté durant ces trois années. Prenant son rôle sans aucun doute plus à cœur que la moyenne, Michel a su trouver le bon équilibre entre les nécessités de me guider et de me laisser me raconter mes propres histoires. L'ambiance de travail qu'il a voulu mettre en place, qui fut plus celle d'une collaboration entre collègues faite de nombreuses discussions et de confrontations des points de vue et intuitions, que d'une relation maître-élève, est pour moi un exemple que j'espère être capable de reproduire à l'avenir. Le fait que cette démarche soit le fruit de sa conception générale de ses rapports au monde et aux personnes, qui a pu s'exprimer dans les multiples autres conversations et projets que nous avons pu avoir ensemble, n'a fait que renforcer le plaisir indicible que j'ai eu à travailler avec lui.

Ce plaisir fut rehaussé par la présence dans notre petite équipe de Claudine, qui a su en temps utile me ramener dans le droit chemin et a dû en conséquence me supporter au quotidien pendant ces trois années. Quand bien même je n'arriverais à réinvestir qu'une portion de ce qu'elle a pu m'apprendre grâce à son recul sur le monde de la physique et de la communauté des physiciens, ou sur le monde tout court, alors sans doute j'aurai franchi un pas certain sur la voie de la sagesse.

Les qualités humaines de Michel et Claudine trouvent bien entendu leur expression dans leur manière d'exercer leur métier de physicien¹ — qui est bien plus qu'un métier en l'occurrence. J'admire profondément leur exigence de donner un sens à toute expérience, à toute réflexion, leur souci d'interroger au quotidien la démarche scientifique pour la resituer par rapport à sa source — les questions que l'on a formulées —, et ne pas la transformer en simple outil de production d'information désincarnée. Cette exigence nécessite une attention sans relâche, pour ne pas se laisser entraîner par les modes et tendances du moment mais ne proposer à la communauté scientifique que des résultats qui font sens, mais elle est autrement plus satisfaisante intellectuellement.

Pour tout cela, et pour bien d'autres choses dont je ne voudrais pas assommer le lecteur qui trouvera sans doute ce manuscrit déjà bien long, je leur exprime toute ma

¹À concevoir aussi en comparaison au monde de matheux dont je suis issu, ce qui m'a valu régulièrement quelques remarques amusées d'ordre méthodologique.

reconnaissance tout en espérant que nos routes se croiseront de nouveau, et conclue ces remerciements par une citation de Jérôme, que je remercie par la même occasion pour son soutien constant et pour m'avoir fortement recommandé de prendre sa succession : *"Encadré ? pas seulement ! On se quitte Amis, c'est pour dire !"*.

Ce travail expérimental n'aurait bien sûr pas été possible sans le soutien et l'extrême disponibilité de tous ceux dont les compétences techniques nous ont été nécessaires, et je tiens donc à remercier fortement Francis Breton, Alexandre Lantheaume, Christian Picard et Jules Silembo pour cette collaboration de tous les instants. Merci aussi aux stagiaires de Masters dont le travail a pu faire progresser nos recherches, et parmi eux Benoît, Brice, Erwan, Jean-Philippe, Julien ou Sébastien.

Mes remerciements vont également vers Paolo Galatola et Jean-Baptiste Fournier, avec qui nous avons travaillé pour établir la nature de l'interaction entre les billes. Bien au-delà du résultat scientifique que cela a permis d'obtenir, ce fut pour moi la découverte de ce que peut être un travail de collaboration et à ce titre ceci prend pleine part dans le processus d'apprentissage qu'est aussi le travail de thèse.

Si la notion d'élasticité n'est pas parée de la même aura mystérieuse qu'un boson de Higgs, l'esprit n'en est pas moins stimulé lorsqu'on cherche à voir ce qui se cache derrière cette idée commune. Je ne me serais pas aventuré si loin sur ce chemin sans la gentillesse et la disponibilité de Chay Goldenberg, qui a toujours répondu avec patience et rigueur aux questions dont je l'assaillais. Qu'il en soit donc profondément remercié. Les trop rares mais si précieuses conversations que j'ai pu avoir avec Christiane Caroli à ce sujet m'ont également permis de relancer mes réflexions alors que je croyais être dans une impasse, et je l'en remercie également.

Pour le plaisir de communiquer de nouveau en des termes de matheux que nos échanges m'ont procuré, et m'avoir permis ainsi ne pas couper totalement mon cordon ombilical, je veux aussi exprimer ma reconnaissance à Gabriel et Vincent.

La vie de labo aurait été bien triste s'il n'avait existé cette salle d'angle plat, vestige de feu la salle d'angle du deuxième étage de la tour 23, et toute cette faune joyeuse et accueillante qui la peuple. Merci donc, pour toutes ces conversations et fous rires, à Alex, Alexis, Amir, Bernard, Catherine, Charles-Henri, Christelle, Christophe, David Vincent, Dimitri, Elisabeth, Emmanuelle, Erwan, Francis, François, Isabelle, Laurence, Marie-Claire, Natalia, Thomas, Tristan, Yves, William et sans doute bien d'autres.

Et puis la vie ne s'arrête pas au labo, et je n'aurais sans doute pu mettre autant d'énergie dans ce travail sans le soutien et l'amitié d'Alan, Anne-Thida, Aurélie, Aurélien, Axelle, Cathy, Céline, Christine, Christine encore, Clément, Denis, Guille, Jay, Jess, Hema, Karen, Lina, Louis, Lucie, Manu, Mathieu, Mimi, Nanno, Nico, Sam, Seb, Sophie, Stéphane, Thom, Thomas, Véro, Vincent, Vincent encore, Xavier ainsi que tous les felipiens, lequillivriens et autres militants des nobles causes, parmi lesquels j'ai pu trouver

un équilibre en variant mes occupations.

Il ne pourrait y avoir non plus d'équilibre de l'esprit sans un minimum de dépense physique, équilibre atteint au sein de cette bande de joyeux rugbymen qui se fait appeler PorC. Merci à tous ces gorets avec lesquels j'ai de plus vécu certaines de mes plus fortes émotions de sportif, et auxquels je ne peux reprocher que la difficulté que j'aurai désormais à trouver un autre club, tant cette expérience m'a rendu exigeant sur l'esprit que l'on peut attendre dans une équipe. Merci à José et à tous les autres membres du bureau pour avoir voulu et pu réaliser cela.

Enfin, tout remerciement, aussi joliment tourné soit-il, serait une bien faible expression pour exprimer mes sentiments envers ceux qui sont ma joie et mon réconfort, mes parents Jacqueline et Gérard et mes deux sœurs adorées, Erell et Anaël.

Table des matières

Introduction	3
I Le dispositif expérimental : un système modèle	11
1 Présentation du dispositif expérimental	15
1.1 Vue d'ensemble	15
1.2 Le condensateur	16
1.2.1 L'électrode inférieure	17
1.2.2 L'électrode supérieure	18
1.2.3 Le cadre de confinement	18
1.2.4 Mise sous tension du dispositif	18
1.3 L'agitation mécanique	20
1.4 La détection et le traitement des images	21
2 Détermination des interactions	23
2.1 Introduction	23
2.2 Calcul semi-analytique des interactions	24
2.2.1 Interaction entre deux billes	24
2.2.2 Interaction d'une bille avec la paroi	27
2.3 Comparaison entre configurations observées et calculées	28
2.3.1 Choix du système	28
2.3.2 Îlots de Wigner : description des états d'équilibre	29
2.3.3 Confirmation expérimentale de la nature des interactions	30
2.4 Conclusion	37
3 L'agitation mécanique : une température effective	39
3.1 Introduction	39
3.2 L'état stationnaire	42
3.2.1 Distribution des vitesses	42
3.2.2 Statistique de Boltzmann	43
3.2.3 Mesure de la température effective	50

3.3	Nature du bain thermique	52
3.3.1	Résultats principaux de l'équation de Langevin	52
3.3.2	Confrontation à l'expérience	55
3.4	Conclusion	58

II Obtention et caractérisation de cristaux de Wigner macroscopiques 61

4	Obtention d'un cristal parfait 65
4.1	Introduction 65
4.2	Obtention d'un cristal parfait 66
4.2.1	Identification des défauts par les cellules de Voronoï 66
4.2.2	Facteurs déterminant l'état final du recuit 68
4.3	Réorganisation et disparition des dislocations 70
4.3.1	Dynamique des dislocations 70
4.3.2	Évolution vers le cristal parfait 71
4.4	À propos de la fusion à deux dimensions 76
5	Constantes élastiques et déplacements individuels 81
5.1	Introduction 81
5.2	Calcul des constantes élastiques 84
5.2.1	Branches de phonons du cristal de Wigner dans la limite des grandes longueurs d'onde 85
5.2.2	Détermination des constantes élastiques 88
5.3	Détermination expérimentale des constantes élastiques 90
5.3.1	Introduction 90
5.3.2	Fluctuation des déformations et constantes élastiques 91
5.3.3	Élasticité standard ($c_2 = 0$) et systèmes de taille finie 94
5.3.4	Théorie de premier gradient ($c_2 \neq 0$) 101
5.3.5	Résultats numériques et expérimentaux de la théorie de premier gradient 106
5.4	Conclusion 112

III Piégeage des cristaux de Wigner macroscopiques 115

6	Méthode de piégeage 119
6.1	Introduction 119
6.2	Présentation du procédé de piégeage 120
6.2.1	Principe général 120

6.2.2	Utilisation d'un réseau de pièges	121
6.2.3	Dispositifs de piégeage utilisés dans d'autres systèmes	123
6.3	Caractérisation expérimentale du réseau de pièges	126
6.3.1	Caractérisation d'un piège isolé	126
6.3.2	Efficacité du piégeage	128
6.4	Conclusion	131
7	Configurations d'équilibre dans un réseau périodique de pièges	133
7.1	Introduction	133
7.2	Positions d'équilibre	134
7.2.1	Des réseaux partiellement piégés	134
7.2.2	Dégénérescence des configurations	142
7.2.3	Effets de la température	144
7.3	Configurations d'équilibre et profils des pièges	145
7.4	Conclusion	150
8	Dynamiques des particules dans un réseau périodique de pièges	153
8.1	Introduction	153
8.2	Évolution vers la configuration piégée	155
8.2.1	Champs de déplacement	157
8.2.2	Évolution temporelle des coordinences	159
8.2.3	Résorption des domaines	163
8.3	Dynamique autour d'une position instable	163
8.3.1	Dynamique en frontière de domaines	163
8.3.2	Dynamique thermiquement activée	166
8.4	Conclusion	167
IV	Dynamique des particules et symétries locales	169
9	Géométrie locale et désordre dynamique	173
9.1	Introduction	173
9.2	Systèmes étudiés	177
9.3	Mesure du désordre du système	178
9.3.1	Fonction de corrélation temporelle	178
9.3.2	Décorrélacion orientationnelle dans les îlots	179
9.4	Désordre et excitations individuelles	180
9.5	Désordre et excitations collectives	182
9.5.1	Définition des paramètres	182
9.5.2	Déplacements angulaires	184
9.6	Scénario d'une route vers le désordre	190

9.7	Route vers la désordre en l'absence d'invariance par rotation	192
9.8	Conclusion	195
10	Processus de diffusion unidimensionnels et symétries locales	197
10.1	Introduction	197
10.2	Diffusion dans un canal fixe et lisse	199
10.2.1	Dispositif et protocole expérimentaux	199
10.2.2	Diffusion d'une seule bille	199
10.2.3	Diffusion de billes en interaction dans un canal	201
10.3	Diffusion dans un potentiel périodique fluctuant	205
10.3.1	Accélération de la diffusion dans un potentiel modulé	206
10.3.2	Diffusion et commensurabilité	207
10.3.3	Conclusion	210
	Conclusion	215
	Annexes	225
A	Calcul des interactions	227
A.1	Interaction entre deux billes	227
A.1.1	Détermination du potentiel électrostatique	228
A.1.2	Détermination de l'énergie d'interaction	231
A.2	Calcul de l'interaction avec la paroi	234
B	L'équation de Langevin unidimensionnelle pour une particule piégée	237
B.1	Particule libre	237
B.2	Particule piégée, amortissement faible	239
	Références bibliographiques	255

Introduction

Un système élastique répond à toute contrainte en "tentant" de maintenir son ordre originel. Comment, dans ces conditions, un réseau élastique s'adapte-t-il à un potentiel perturbateur créé par un ensemble de pièges, régulièrement disposés ou au contraire aléatoirement distribués?

Obtenir une réponse à cette question nécessite de faire un bilan détaillé de la compétition entre deux types de forces, l'une permettant d'ordonner le système et l'autre de le piéger et le désordonner. De nombreux travaux ont été entrepris dans cette perspective tant cette problématique est commune à un grand nombre de systèmes très variés, tels les cristaux de Wigner, les réseaux de vortex dans les supraconducteurs, les cristaux atomiques sur un substrat désordonné, les réseaux de bulles magnétiques, ou encore les systèmes colloïdaux². Plusieurs résultats de portée générale ont pu être établis.

Les efforts se sont initialement portés sur les structures d'équilibre de ces systèmes, permettant d'établir une première typologie, avec d'un côté le piégeage fort, pour lequel le gain en énergie dû au piégeage est important devant l'énergie élastique de déformation du système, et à l'autre extrémité du spectre le piégeage faible pour lequel ces énergies sont comparables. Une situation relativement simple est celle d'un piégeage fort dû à un réseau périodique de pièges, dans laquelle le cristal adopte la symétrie de ce réseau. Inversement, dans le cas d'un piégeage faible aléatoire où les longueurs caractéristiques associées au désordre sont petites devant le pas du réseau de particules, la structure adoptée par le système est plus complexe, et sa détermination théorique nécessite un traitement pointu³. Il a été montré que dans ce cas plus subtil la périodicité du réseau joue un rôle essentiel : lorsque le système s'adapte au potentiel de piégeage, une particule n'a aucun intérêt énergétique à aller chasser d'un piège la particule voisine, qui lui est équivalente : le fort coût en énergie élastique ne serait compensé par aucun gain en énergie de piégeage. De ce fait, le déplacement relatif d'une particule n'excède pas de beaucoup un pas du réseau, et un quasi ordre translationnel est maintenu. En revanche, une particule a souvent dans son environnement proche un grand choix de positions possibles. Ceci conduit à l'apparition d'un verre de Bragg, dont la périodicité se traduit par l'apparition de pics de Bragg dans sa figure de diffraction, mais qui présente tel un verre un grand nombre de configurations métastables. Les études sur les propriétés dynamiques de ces systèmes ont montré toutefois que cette classification "piégeage

²On se contente ici de citer les systèmes élastiques bidimensionnels. L'autre grande classe de systèmes fréquemment rencontrée concerne les problèmes de parois et leur ancrage : lignes de mouillage, parois magnétiques, etc. Toutefois, si certains concepts restent communs, l'absence de périodicité conduit à une phénoménologie très différente de celle des réseaux.

³Les travaux de Giamarchi et Le Doussal, notamment, ont permis de poser un cadre théorique général à la lumière duquel nous pouvons exposer les différents problèmes qui sont posés. Nous renvoyons le lecteur vers des articles de synthèse [1, 2] résumant les principaux résultats théoriques obtenus du point de vue de la statique [3–7] comme de la dynamique [8, 9], et présentant quelques résultats expérimentaux confirmant leur théorie.

fort-piégeage faible” cache une richesse de comportements encore plus grande lorsque le système est soumis à une force cherchant à le faire se déplacer dans le paysage de pièges. Il convient alors d’ordonner l’analyse selon le type de réponse — élastique ou plastique — faite par le système en réaction à l’application de cette force.

Quel que soit le type de désordre considéré, on peut se demander comment vont apparaître les défauts topologiques dans ces systèmes perturbés. Si les contributions théoriques montrent que la création de défauts tels des dislocations n’est pas énergétiquement intéressante à faible température dans le cas d’un désordre faible⁴, les conditions de leur apparition dans un cas général de piégeage sont encore peu claires.

Les réponses à cette question conditionnent bien entendu la façon dont on doit traiter l’aspect dynamique dans ces systèmes, notamment les propriétés de transport à travers le paysage de pièges. Les possibilités offertes au système sont alors nombreuses. Il se pose tout d’abord la question des conditions permettant au système de se déplacer (problème de la transition de dépiégeage). L’écoulement peut ensuite se faire de manière élastique avec un mouvement coordonné de l’ensemble du système (verre de Bragg mouvant dans le cas d’un désordre faible), ou plutôt de manière plastique avec la création de ”canaux plastiques” d’écoulement au milieu de zones de particules statiques. Une phase intermédiaire⁵ d’écoulement total mais dans des canaux non corrélés peut également exister. Cette diversité est d’autant plus grande que de nombreux paramètres peuvent influencer le mouvement : température, nature des pièges (type d’interaction, symétrie ou absence de symétrie du réseau de pièges, densité), méthode d’entraînement (force imposée ou vitesse imposée).

Toutefois, de nombreuses questions restent actuellement sans réponse, notamment sur le rôle précis que jouent les défauts. Établir les liens entre les différents types de mouvement, le rôle des dislocations et l’impact des paramètres précédemment cités est un challenge tant du point de vue théorique qu’expérimental.

Les systèmes auxquels ce cadre théorique peut être appliqué diffèrent d’une part par les domaines de la physique auxquels ils se raccrochent, et, d’autre part, par les techniques expérimentales permettant de les aborder. Par ailleurs, l’enjeu de la compréhension de l’effet du désordre sur ces systèmes ne se situe pas toujours au même niveau. Aussi, chacun d’entre eux n’a pu apporter que des réponses partielles même si de nombreux résultats se recoupent.

⁴Dans un système bidimensionnel, des dislocations pourraient toutefois apparaître, mais sur une distance telle qu’elles ne sont pratiquement jamais détectées dans les systèmes expérimentaux [7].

⁵Cette phase est appelée ”phase smectique”, car l’ordre est maintenu dans la direction perpendiculaire à la direction de l’écoulement.

Pour les réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II⁶, l'enjeu de la compréhension du piégeage du réseau est très important, notamment pour ses implications technologiques. En effet le courant critique, courant maximal pouvant traverser la matériau sans qu'il perde ses propriétés supraconductrices, dépend fortement de l'ancrage du réseau sur les défauts du matériau⁷. L'ambition de comprendre cet ancrage sur des défauts intrinsèques a suscité de nombreux travaux. Par ailleurs, les progrès des techniques de lithographie permettent aujourd'hui de créer artificiellement des réseaux de pièges périodiques, et un regain d'intérêt s'est porté sur cette question ces dernières années.

Le plus grand nombre des travaux s'intéressant directement à la structure et au mouvement du réseau de vortex sont des études numériques⁸. Toutefois, les études dynamiques restent complexes du fait de la non linéarité du problème et de la nécessité de disposer d'un grand nombre de particules. De plus, au delà des contraintes liées aux techniques elles-mêmes, la simulation du piégeage peut soulever de nombreuses interrogations, puisque plusieurs paramètres peuvent intervenir (densité, profil des pièges) et qu'il n'est pas évident *a priori* que l'interaction avec le potentiel perturbateur puisse se résumer à une somme d'interactions particule-piège. Si l'apport de telles simulations est indéniable, l'apport d'un certain nombre d'ingrédients issus de l'expérience permettrait sans doute de plus fortes avancées. Des efforts ont bien entendu été faits en ce sens ; toutefois, il se pose alors une difficulté d'ordre expérimental. La plupart des études menées sur les supraconducteurs sont macroscopiques : mesure de la loi courant-tension et détermination des courants critiques, mesure des courbes d'aimantation, ou de la température critique. Or ces grandeurs ou comportements dépendent des propriétés d'organisation et de transport des vortex, de taille micrométrique. Faire le lien entre ces deux phénomènes apparaissant à deux échelles différentes est essentiel mais les preuves expérimentales sont difficiles à obtenir. En effet, si les techniques directes de visualisation

⁶Signalons que, pour des raisons technologiques évidentes, on cherche souvent à utiliser des matériaux les plus fins possible. Or, la longueur de pénétration λ d'un matériau supraconducteur d'épaisseur d dans la direction du champ est renormalisée par cette épaisseur : la longueur de pénétration effective croît lorsque l'épaisseur diminue, et un matériau de type I peut alors se comporter comme un supraconducteur de type II.

⁷En effet, le courant électrique traversant le matériau exerce une force de Lorentz sur les tubes de champ que sont les vortex, qui peuvent alors se déplacer. L'apparition d'une force électromotrice créée par ce déplacement de champ magnétique induit une augmentation de la résistivité. Il faut donc lutter contre le déplacement des vortex, et on voit donc qu'un "bon" supraconducteur, c'est-à-dire un matériau gardant ses propriétés supraconductrices dans les conditions les plus larges possibles, doit présenter des défauts. Bien entendu, si le nombre de défauts devient trop important, toute propriété supraconductrice est perdue.

⁸La littérature sur le piégeage aléatoire est encore peu étoffée. Voir par exemple les références [10–13] qui considèrent le mouvement général du réseau. Dans [14], les auteurs abordent le rôle des dislocations dans la dynamique. Enfin quelques études ont également été menées dans les systèmes colloïdaux que nous introduisons dans les paragraphes suivants [15, 16].

des réseaux de vortex progressent de mois en mois, elles ne permettent actuellement que de rendre compte de leurs structures statiques, et ce souvent avec un champ de vision ne permettant pas de dépasser le millier de vortex⁹.

Une approche complémentaire serait donc d'utiliser des systèmes plus accessibles expérimentalement dont le mouvement des particules pourrait être suivi facilement.

Les études sur les systèmes colloïdaux se développent dans ce sens. Ainsi, la fusion des cristaux bidimensionnels ou encore le lien entre propriétés élastiques et déplacements individuels des particules ont pu être abordés avec ce dispositif. De plus, les interactions entre particules colloïdales sont généralement coulombiennes écrantées lorsque l'interaction est de type électrostatique ou dipolaire pour des particules magnétiques, ce qui permet en outre de discuter de l'influence de la nature du potentiel d'interaction. Toutefois, l'intérêt porté au piégeage dans ces systèmes est assez récent. Si le piégeage à l'échelle micrométrique est rendu possible par des techniques de création de pièges par interférences optiques ou par des pinces optiques, la nature de l'interaction entre les particules et les pièges ainsi définis, ainsi que le rôle joué par le couplage hydrodynamique entre particules, restent encore peu clairs¹⁰.

Pour contourner ces difficultés, nous avons développé un **système discret à l'échelle macroscopique** auquel nous pouvons appliquer un **potentiel de piégeage contrôlé**. Ce système modèle est constitué d'un réseau d'environ 2000 billes millimétriques chargées électriquement placées à l'intérieur d'un condensateur horizontal. Le piégeage est assuré par un potentiel électrostatique perturbateur qui lui est appliqué. Par ailleurs, le système est maintenu à une température effective contrôlée, obtenue par agitation mécanique.

Le travail présenté ici est consacré à la qualification des propriétés du système (interaction interparticules, détermination et calibration de la température effective, propriétés élastiques), permettant sa qualification comme "système élastique", puis à l'étude de sa réponse lorsqu'il est soumis à un réseau périodique de pièges. La transition vers les configurations d'équilibre ainsi que la dynamique autour de ces positions est également abordée (sans intervention d'une force extérieure). Notre motivation pour cette dernière étude était double. D'une part, cette forme particulière de piégeage rencontre

⁹Les techniques utilisées actuellement sont la décoration magnétique [17,18] ou les microscopies à effet tunnel [19], SQUID [20], à force de Lorentz [21], ou à effet Hall [22–25]. Nous n'avons cité ici que des travaux ayant trait au piégeage de vortex. Signalons également le développement récent de microscopes à force magnétique [26]. Pour déterminer de manière globale la structure du réseau, des expériences de diffraction de neutrons sont possibles : ainsi le verre de Bragg a été observé par cette technique par Klein *et al.* [27].

¹⁰Cette question de la qualification de l'interaction entre une particule et une pince optique est, en soi, un sujet de recherche à part entière. Voir par exemple la référence [28].

actuellement un fort intérêt; d'autre part, les résultats obtenus dans cette situation, *a priori* plus simple, peuvent nous permettre d'éclairer ceux obtenus dans une situation plus complexe de piégeage aléatoire et/ou faible, situation que nous avons commencé à explorer. Par ailleurs, ces différentes études nous ont donné l'occasion d'aborder des problématiques connexes ayant un intérêt intrinsèque, telles la dynamique de systèmes confinés, ou la diffusion de particules dans un canal modulé.

Deux types de systèmes ont été utilisés :

- les réseaux de billes proprement dits, appelés "cristaux de Wigner macroscopiques" ¹¹, sur lesquels les études de piégeage ont été réalisées;
- les systèmes à faible nombre de billes ($N < 30$), dits "îlots de Wigner macroscopiques" ¹², sur lesquels ont été menées des expériences intermédiaires permettant soit de qualifier notre système, soit de mettre en valeur le lien entre la dynamique des billes et les symétries locales.

L'emploi de ces systèmes considérés comme systèmes expérimentaux modèles implique de comparer les résultats obtenus au regard de ceux se référant à des systèmes semblables. L'écueil d'un tel exercice étant de transformer la présentation en un vaste catalogue, nous nous sommes volontairement restreints dans la grande majorité de nos comparaisons aux réseaux de vortex d'une part, et aux systèmes colloïdaux d'autre part.

Ainsi, dans une première partie, nous caractérisons les paramètres contrôlant l'état de notre système, à savoir l'interaction entre les billes et la température effective.

Dans le cadre d'une collaboration avec Paolo Galatola et Jean-Baptiste Fournier, nous avons déterminé analytiquement l'interaction entre les billes et ses dépendances avec les caractéristiques géométriques du dispositif [30]. Cette interaction est de type K_0 , donc précisément celle existant entre deux vortex d'un supraconducteur, confortant ainsi la légitimité de l'analogie entre notre système et les réseaux de vortex.

La possibilité d'assimiler l'agitation mécanique à une agitation thermique est prouvée en étudiant les transitions entre configurations d'équilibre dans des îlots de Wigner confinés dans un disque, ainsi que la distribution de positions d'une seule bille placée dans un gradient contrôlé d'énergie potentielle. Nous montrons ainsi que les distributions de probabilité associées à ces systèmes peuvent être caractérisées à partir de la distribution de Boltzmann associée respectivement à un ensemble discret ou continu d'états d'équilibre [31]. Le bain thermique sous-jacent est ensuite caractérisé en étudiant la diffusion libre ou confinée d'une seule bille, qui est parfaitement décrite par le formalisme de Langevin [32]. L'analogie entre agitation mécanique et agitation thermique étant ainsi

¹¹Par analogie avec les cristaux d'électrons découverts par E. P. Wigner [29].

¹²À l'échelle microscopique, ces systèmes sont équivalents à un système d'électrons dans des "quantum dots" ou encore à un ensemble de vortex piégés dans des composants mésoscopiques.

établie, nous présentons alors une procédure de calibration de la température effective en fonction de l'amplitude d'agitation, qui nous permet de mesurer *in situ* la température.

Ces grandeurs caractéristiques déterminées, nous décrivons dans la partie II les conditions permettant d'obtenir un cristal de Wigner sans défauts topologiques, puis calculons leurs caractéristiques élastiques. Les cristaux de Wigner présentent une symétrie hexagonale — chaque bille ayant 6 voisines — mais peuvent présenter des défauts topologiques, observés sous la forme de dislocations constituées par une paire de billes ayant 5 et 7 voisines. Nous définissons donc, dans un premier temps, les conditions géométriques permettant d'obtenir un cristal parfait fini assimilable à un extrait de cristal infini. Ce cristal parfait, apparaissant pour certains nombre de billes, dits "nombres magiques", est obtenu après une procédure de "recuit" permettant à un système désordonné d'évoluer progressivement vers un réseau sans défauts. L'annihilation des dislocations initialement présentes se déroule en deux temps : après un ensemble de réorganisations individuelles, un processus collectif prend le relais. Nous observons alors une dynamique originale conduisant à la disparition totale des dislocations [33].

Le cristal parfait que nous obtenons est caractérisé par ses constantes élastiques, que nous pouvons déterminer théoriquement à partir de la donnée de l'interaction interparticulaire. Profitant de ce que nous avons à la fois accès aux déplacements particuliers et aux constantes élastiques théoriques, nous nous sommes intéressés à la questions encore ouverte du lien entre les déplacements individuels des particules et la caractérisation d'un système à l'aide de ses constantes élastiques, qui relève d'une description continue. Nous abordons cette discussion avec pour objectif de discuter d'une méthode de détermination des constantes élastiques d'un système fini discret non contraint mais soumis à un thermostat. Ce point étant particulièrement délicat, nous présentons un panorama critique des solutions proposées dans la littérature — traitant essentiellement de travaux numériques — et apportons quelques suggestions pour les adapter à un système expérimental fini.

L'étude du piégeage par un réseau périodique de pièges, présentée dans la partie III, a deux finalités différentes, la première étant de tester notre procédure de piégeage sur des cas simples au comportement bien établi. La seconde, plus fondamentale, consiste à déterminer les grande lignes du processus de piégeage (temps caractéristique de la transition vers une configuration piégée, modalités de cette dynamique au niveau des comportements particuliers).

Ainsi, les cristaux de Wigner parfaits sont soumis à un potentiel perturbateur constitué par un ensemble de pièges électrostatiques millimétriques répartis de manière périodique. Ces pièges sont obtenus en définissant les motifs désirés sur l'électrode supérieure du condensateur, puis en les portant au potentiel électrostatique voulu. Les caractéristiques

générales de ce dispositif de piégeage, dont l'intensité est parfaitement contrôlée, sont déterminées d'une part en étudiant le comportement d'une seule bille dans le paysage de potentiel créé, mais aussi et surtout d'un cristal entier piégé par le réseau.

Le cas d'un piégeage par un réseau périodique de symétrie carrée est étudié en modifiant la densité relative en particules par rapport au nombre de pièges et à la profondeur des pièges. Nous nous intéressons principalement aux cas d'une densité relative en billes par rapport au nombre de pièges f égale à 1, 1/2 ou 2. Dans ces situations, choisies parce que suffisamment génériques, les configurations d'équilibre des cristaux varient en fonction de l'intensité du piégeage et peuvent correspondre à des situations où la totalité ou bien seulement une fraction des pièges sont effectivement occupés. Ces configurations sont par ailleurs souvent dégénérées, ce qui conduit à l'apparition de domaines dont les conditions d'existence sont discutées. Le cas $f = 2$ est particulièrement riche puisque deux types de billes sont nécessairement présentes : les billes situées dans les pièges et les billes interstitielles. Il en résulte une configuration ordonnée atypique partiellement piégée ni hexagonale ni complètement carrée.

Les aspects dynamiques dans ces configurations sont abordés sous deux angles. Dans un premier temps, nous nous intéressons au processus de piégeage à partir d'une configuration non piégée, afin de déterminer les temps caractéristiques de mise à l'équilibre, et de préciser les comportements généraux des particules en fonction des contraintes de symétrie locale. L'existence de domaines liés à la dégénérescence des configurations nous permet ensuite de comparer les mouvements thermiquement activés dans des domaines à l'équilibre aux mouvements dans les zones d'instabilité mécanique que sont les frontières entre domaines.

L'étude de ces cas simples nous donne aussi une grille de lecture en nous permettant de dégager quelques comportements marquants, notamment sur la dynamique de piégeage ou bien sur les mouvement des particules interstitielles, autant d'informations précieuses avant d'utiliser un piégeage aléatoire à terme plus complexe. Elle nous permet notamment de discuter des conditions dans lesquelles nous devons nous placer pour étudier notre système sous un désordre aléatoire faible. Un tel cas, obtenu en nous plaçant dans les mêmes conditions que dans le cas $f = 2$, mais avec des pièges aléatoirement disposés, est très brièvement discuté dans la conclusion générale de notre travail.

Au cours de ces études sur les cristaux de Wigner soumis à un potentiel perturbateur, nous avons été amenés à pousser quelques incursions dans des domaines non directement liés à cette problématique, mais qui nous permettent d'isoler certains comportements observés dans les cristaux piégés, en nous concentrant sur des systèmes à faible nombre de billes. Les résultats sont présentés dans la partie IV.

Nous présentons ainsi en détail une étude de la dynamique des îlots de Wigner confinés circulairement. Ces îlots, constitués d'un nombre de billes inférieur à 30, présentent des configurations d'équilibre stable et métastables en couches entre lesquelles les systèmes

peuvent transiter. Nous montrons alors le rôle spécifique joué par les excitations individuelles (transitions d'une seule bille entre couches) dans la "mise en désordre" des îlots dans leur route vers la fusion. Dans ce cadre, nous insistons tout particulièrement sur le rôle joué par les symétries locales, et notamment la commensurabilité du nombre de billes dans chaque couche [31].

Pour préciser le rôle joué par cette commensurabilité dans la dynamique des couches associée à l'agitation thermique, et par là-même plus généralement dans la dynamique de particules dans des canaux modulés, nous étudions dans un second temps la diffusion des billes dans les différentes couches des îlots. Si nous pouvons ainsi mettre en évidence une plus forte diffusion dans des conditions d'incommensurabilité, le résultat le plus important est que cette diffusion dans une couronne ayant sur ses bords un potentiel périodique fluctuant créé par la couronne voisine a une amplitude un ordre de grandeur plus importante que dans le cas d'une couronne de billes ayant sur ses bords un potentiel lisse. Ce résultat surprenant met en lumière l'importance des couplages de type Frenkel-Kontorowa dans la dynamique de ces systèmes. Enfin, l'étude de la diffusion dans une seule couronne de billes piégés dans une "gouttière" circulaire permet également de mettre en évidence des comportements sous-diffusifs caractéristiques d'un tel système unidimensionnel, mais avec une loi de puissance plus faible que le comportement en $t^{1/2}$ habituellement prévu, ce comportement étant attribué au caractère périodique du système [32].

Première partie

Le dispositif expérimental : un système modèle

Introduction

Cette première partie est consacrée à la présentation du système que nous avons utilisé dans ce travail.

Dans le chapitre 1, nous présentons le montage expérimental : il est formé d'un ensemble de billes millimétriques chargées électriquement et libres de se déplacer sur un plan. Elles sont plongées dans un bain thermique effectif obtenu par agitation mécanique de l'ensemble du système.

Les propriétés du réseau élastique que forment ces billes sont contrôlées par leur interaction ainsi que par les fluctuations induites par l'agitation thermique, et le plus grand soin a été apporté à la qualification de ces deux paramètres.

Le chapitre 2 est ainsi consacré à la détermination de l'interaction interbilles par un calcul semi-analytique. Nous y montrons en particulier que cette interaction est semblable à celle existant entre des vortex dans un supraconducteur de type II. La dépendance de l'intensité et de la portée de l'interaction avec les paramètres expérimentaux y est discutée. La comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques prévus pour les configurations d'équilibre d'un système constitué d'un faible nombre de billes confinées permet de valider le calcul proposé.

Dans le chapitre 3, nous prouvons que l'agitation mécanique transmise aux billes est équivalente à une agitation thermique. Celle-ci est caractérisée, d'une part, par une température effective dont nous précisons les conditions de calibration puis de mesure, et d'autre part, par des temps caractéristiques que nous mesurons et discutons. Dans l'optique de la soumission de notre système à un désordre gelé, il est important, en effet, de bien qualifier au préalable le désordre induit par les fluctuations thermiques.

Chapitre 1

Présentation du dispositif expérimental

Sommaire

1.1	Vue d'ensemble	15
1.2	Le condensateur	16
1.2.1	L'électrode inférieure	17
1.2.2	L'électrode supérieure	18
1.2.3	Le cadre de confinement	18
1.2.4	Mise sous tension du dispositif	18
1.3	L'agitation mécanique	20
1.4	La détection et le traitement des images	21

1.1 Vue d'ensemble

Une vue d'ensemble du système expérimental est représentée sur les figures 1.1 et 1.2. Il est constitué par une unique couche de billes conductrices millimétriques dont le nombre N peut aller jusqu'à plus de 2000. Ces billes sont placées entre les deux électrodes d'un condensateur plan horizontal et peuvent se déplacer sur la face supérieure de l'électrode inférieure. Nous utilisons des billes monodisperses¹ en acier inoxydable de diamètre $2R = 0,8$ mm et de masse $m = 2,15$ mg.

Lorsqu'une différence de potentiel V_0 de l'ordre du kV est appliquée et maintenue aux bornes du condensateur, les billes se chargent et se repoussent mutuellement en occupant

¹Avant de les placer dans le condensateur, les billes sont nettoyées à l'éthanol afin de les débarrasser notamment de toute trace de graisse, puis passées à l'étuve à 110°C pour les sécher. Un nettoyage plus poussé aux ultrasons a été essayé, puis abandonné car les billes ainsi traitées semblaient moins mobiles, sans doute à cause d'un léger facettage dû à la friction entre les billes lors du processus.

tout l'espace disponible. Ce dernier est limité par un cadre de confinement conducteur placé entre les deux électrodes et porté à un potentiel électrostatique adéquat afin d'exercer une force de répulsion sur les particules. L'ensemble des billes présente alors une structure organisée que nous appellerons par la suite "cristal de Wigner macroscopique" ou bien, dans le cas d'un faible nombre de billes, "îlot de Wigner macroscopique".

Cet ensemble est placé sur un support relié à deux haut-parleurs transmettant au système une vibration mécanique dont nous montrerons qu'elle transmet une énergie assimilable à une énergie thermique.

Ce dispositif repose sur une tablette plane dont on peut régler et contrôler soigneusement l'horizontalité par des vis micrométriques².

Enfin, l'électrode supérieure étant transparente, une caméra placée au-dessus du système enregistre le mouvement des billes. Après traitement des images, nous disposons alors de leurs coordonnées spatiales à tout instant.

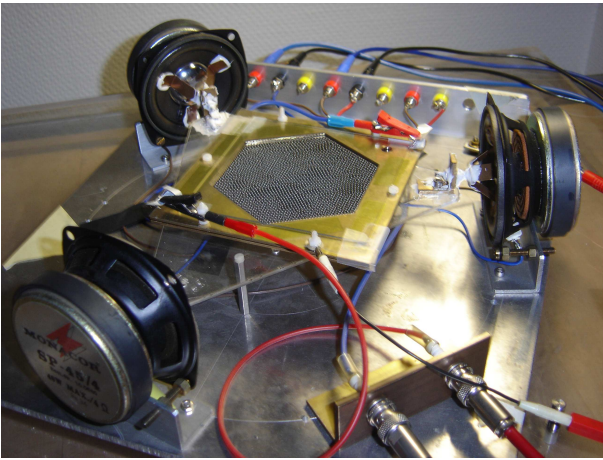


FIG. 1.1 : Photographie du dispositif expérimental, avec un cadre hexagonal permettant d'obtenir un cristal parfait (voir chapitre 4).

Si le principe de ce montage semble très simple, un grand soin doit être apporté à sa mise en œuvre afin de pouvoir obtenir des résultats reproductibles. Tout en présentant les caractéristiques techniques du montage, nous insistons donc dans ce qui suit sur les points expérimentaux délicats ainsi que sur les solutions retenues.

1.2 Le condensateur

Les deux électrodes du condensateur ont un rôle très différent : l'électrode inférieure est en contact avec les billes ; aussi le point déterminant est la qualité de sa surface. L'électrode supérieure quant à elle doit être à la fois conductrice, mais également transparente.

²Ce contrôle est réalisé à l'œil avec un niveau à bulle posé sur l'électrode supérieure, avec une marge d'erreur estimée à 0,05 degré soit, pour un condensateur dont la taille approche les 10 cm, une différence d'altitude maximale entre deux billes de l'ordre de 100 μm . En réalité, les billes sont encore plus sensibles que le niveau et l'horizontalité est ajustée en veillant à obtenir des déplacements centrés sur le centre du confinement, ou bien des cristaux homogènes.

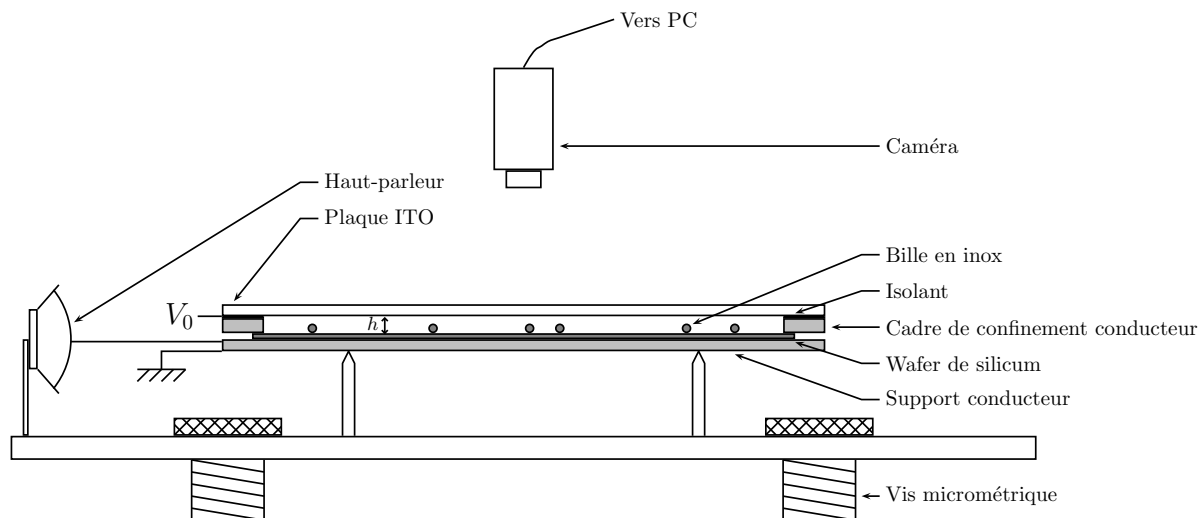


FIG. 1.2: Vue d'ensemble du dispositif expérimental.

1.2.1 L'électrode inférieure

Du point de vue mécanique, deux contraintes *a priori* contradictoires s'imposent à cette électrode. D'une part, elle doit permettre de transmettre aux billes l'énergie qui lui aura été fournie par les haut-parleurs, ce qui suppose l'existence de frottements suffisants. D'autre part, ces frottements ne doivent pas être trop importants afin de permettre facilement la mise en mouvement de ces billes. Plus précisément, il s'agit de minimiser l'agitation seuil à partir de laquelle notre analogie avec une agitation thermique est valable³. Pour réaliser ce compromis, nous utilisons un "wafer" poli conducteur en silicium dopé⁴.

Afin d'assurer la rigidité du dispositif, ce wafer⁵ est posé sur une plaque plane de laiton puis couvert par le cadre de confinement qui vient se fixer sur la plaque. Nous avons choisi de contraindre le moins possible ce wafer pour ne pas introduire de distorsions à sa surface qui induiraient des perturbations dans le réseau de billes. Aussi, le wafer est simplement calé latéralement sur la plaque de laiton⁶ et, par ailleurs, le cadre est serré *a minima* sur la plaque. De même, pour ne pas introduire d'hétérogénéité sur le wafer, son nettoyage est réalisé à sec, les méthodes humides conduisant à un état de surface hétérogène.

³Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3.

⁴De résistivité de l'ordre de 1,5 mΩ.cm.

⁵D'épaisseur 550 μm environ.

⁶Toute méthode de collage de sa face inférieure avec du ruban adhésif ou même avec de la colle cynanolite induit de fortes tensions le déformant.

1.2.2 L'électrode supérieure

L'électrode supérieure est une plaque de verre d'épaisseur 1,1 mm recouverte sur sa face inférieure d'une couche conductrice en ITO (Indium-Tin-Oxide)⁷ suffisamment fine pour permettre une acquisition optique précise des positions des billes.

Le second et principal intérêt de cette fine couche conductrice est qu'elle est facilement attaquable par des techniques de lithogravure; il est donc possible d'en isoler électriquement différentes parties afin de les porter à un potentiel électrostatique différent. Comme nous le verrons au chapitre 6, ceci permettra de soumettre le système à des potentiels perturbateurs localisés.

1.2.3 Le cadre de confinement

Le cadre de confinement est constitué par une plaque de laiton de dimensions extérieures 12x12 cm et dont l'intérieur est usiné à la forme voulue. Son épaisseur $h = 1,5 \pm 5.10^{-2}$ mm a été choisie pour optimiser l'interaction entre les billes (voir chapitre 2). Ce cadre de confinement joue à la fois le rôle de barrière de potentiel pouvant repousser les billes lorsqu'on lui impose un potentiel électrostatique et celui de support assurant la cohésion mécanique entre les deux électrodes.

Pour l'isoler des deux électrodes du condensateur et pouvoir lui appliquer un potentiel électrostatique spécifique, les deux surfaces du cadre sont couvertes d'un film isolant en Mylar dont l'épaisseur est de l'ordre de la dizaine de microns. Toutefois, dans la quasi totalité des expériences menées, le cadre et l'électrode inférieure ont été laissés en contact⁸.

En fonction des problèmes abordés, nous utilisons des confinements de différentes formes (circulaires, elliptiques et hexagonales pour l'essentiel) et de diamètres variés, de l'ordre de 1 cm pour étudier des systèmes à faible nombre N de billes (typiquement $N \leq 30$), et jusqu'à 10 cm pour permettre la formation d'un réseau de plus de 2000 billes.

L'utilisation de cadres plus grands, tentante pour augmenter le nombre de particules dans nos cristaux, est délicate du fait des problèmes de planéité de l'électrode inférieure rencontrés

1.2.4 Mise sous tension du dispositif

L'électrode inférieure — et donc les billes — et le cadre de confinement sont maintenus au potentiel nul, tandis que l'électrode supérieure est portée à un potentiel électrostatique fixe V_0 *via* une alimentation haute tension.

⁷D'épaisseur $9,5.10^{-2} \pm 0,5.10^{-2}$ μm et de résistivité de l'ordre de 0,5 m Ω .cm.

⁸Si l'on isole le cadre de l'électrode inférieure, il est possible de jouer sur l'intensité du confinement; cette possibilité a été utilisée pour tester le rôle du confinement. Par la suite, la situation équipotentielle étant celle qui permettait d'avoir une distance entre les billes extérieures et le confinement semblable à la distance interbilles typique, nous nous y sommes donc restreints.

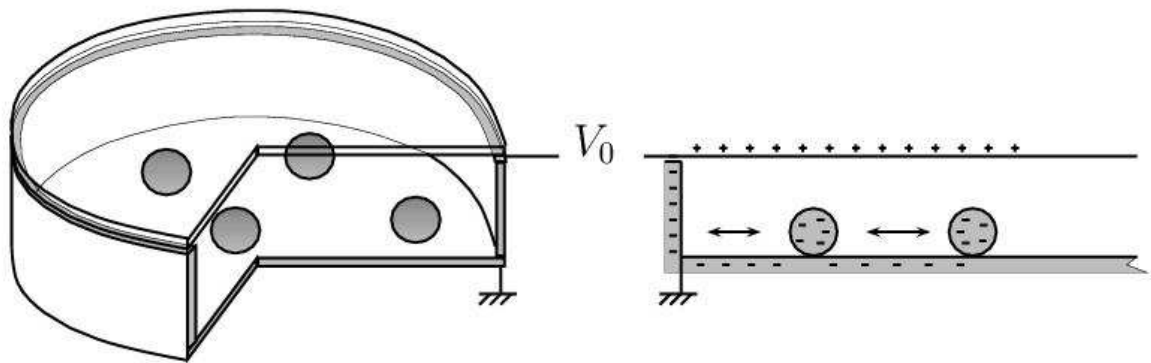


FIG. 1.3 : Schéma général du condensateur (cas d'un cadre circulaire) et distribution des charges électriques lors de la mise sous tension du dispositif.

Comme schématisé sur la figure 1.3, les billes et le cadre de confinement présentent alors des charges de même signe à leur surface, il en résulte donc une interaction répulsive entre les billes et entre les billes et le cadre de confinement.

Le potentiel V_0 est ajustable et varie typiquement entre 600 et 1200 V, avec une incertitude de l'ordre du Volt. En dessous de cette plage, et compte-tenu de la distance minimale que l'on doit respecter entre les billes⁹, l'interaction est d'intensité trop faible au regard des frottements¹⁰. Au dessus de 1200 V, bien que la tension de claquage de l'air est de l'ordre de 4000 V pour un condensateur d'épaisseur 1,5 mm, des claquages apparaissent entre le cadre de confinement et l'électrode supérieure, qui sont beaucoup plus rapprochés.

Cette image de répulsion des charges ne doit pas laisser croire que l'interaction entre

⁹La distance minimale entre les billes est limitée bien sûr par le diamètre non nul de celles-ci, mais la distance minimale retenue est supérieure à ce diamètre afin d'éliminer, d'une part, les contraintes stériques qui limitent les mouvements des billes et leur capacité à explorer les configurations accessibles, et d'autre part, les phénomènes d'influence électrostatique. En effet, si ces derniers deviennent importants ils empêchent de décrire l'interaction entre plusieurs billes comme une interaction de paires. Ce point sera discuté lors du calcul exact de l'interaction, au chapitre 2.

¹⁰L'énergie de l'ensemble du système étant proportionnelle à V_0^2 (voir chapitre 2), toute valeur de V_0 pourrait convenir pour obtenir un système de particules en interaction. Cependant, l'agitation mécanique à laquelle nous soumettons le système pour obtenir une agitation thermique effective doit être supérieure à un certain seuil, permettant de vaincre les frottements statiques des billes sur le wafer, afin que l'analogie soit valable. Les systèmes organisés de billes obtenus grâce à l'interaction répulsive pouvant être détruits par l'agitation thermique, ceci impose une valeur minimale à V_0 .

nos objets est coulombienne¹¹. Ici, les billes sont à potentiel électrostatique constant quelle que soit leur position, et non à charge constante¹². Par ailleurs, comme nous le verrons plus précisément au chapitre 2, la distribution de potentiel à l'intérieur du condensateur doit obéir à deux conditions limites fixes sur les deux électrodes, ce qui introduit une modulation selon l'axe vertical qui nécessairement va induire l'apparition d'une longueur caractéristique dans le plan horizontal. On doit donc plutôt s'attendre à un potentiel d'interaction de type écrané, comme cela sera démontré .

1.3 L'agitation mécanique

L'ensemble du système précédemment décrit est soumis à de petits déplacements horizontaux réalisés à l'aide de deux haut-parleurs orientés dans deux directions horizontales différentes. La plaque sur laquelle repose le montage est reliée à deux tiges horizontales fixées directement par un joint silicone sur les membranes de ces haut-parleurs¹³. Les haut-parleurs sont alimentés par deux bruits blancs indépendants, dans une gamme de fréquences 0-200 Hz et d'amplitude commune A ajustable.

Soulignons que, dans cette plage de fréquences, aucune résonance du système haut-parleurs + condensateur + support utilisée n'est observée. Par ailleurs, le déplacement du système est totalement négligeable par rapport aux déplacements typiques des billes : le référentiel du support est identique au référentiel de la caméra.

Soumises à ces vibrations, les billes acquièrent un mouvement aléatoire dont il sera montré au chapitre 3 qu'il est parfaitement décrit par le formalisme de l'équation de Lan-

¹¹Pour étudier le cas d'un réseau de billes en interaction de type coulombien, plusieurs études préliminaires ont été réalisées avec des billes chargées et posées sur des surfaces isolantes. Le chargement des billes a été obtenu de deux manières : soit par frottement direct sur la surface, la charge transférée par effet triboélectrique saturant avec le temps ; soit par contact initial avec le cadre de confinement lors de la mise sous tension. Mais, outre les problèmes d'homogénéité de charges des billes ou de la surface, ces expériences ne permettent pas de faire des expériences de longue durée. En effet, le frottement des billes autour de leur position d'équilibre produit par transfert de charge avec l'isolant une inhomogénéité supplémentaire de la surface et un autopiégeage du réseau, ce que nous souhaitons bien entendu éviter. Néanmoins, nous reviendrons ponctuellement sur les quelques résultats incontestables de ces expériences pour éclairer les observations faites dans le cadre d'un support conducteur.

¹²La charge d'une bille isolée, estimée grossièrement par la méthode dite "de la douche" proposée par Lambert *et al.* [34] est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-12}$ C, et elle augmente d'un facteur 10 lorsque les billes se rapprochent.

¹³Des essais ont été réalisés avec trois haut-parleurs orientés verticalement. La comparaison des distributions des temps moyens de résidence dans les systèmes à deux niveaux utilisés au chapitre 3 a montré qu'il n'y avait aucune différence significative avec ceux obtenus avec des haut-parleurs horizontaux. Cette dernière solution a été préférée, car elle sollicite moins les membranes des haut-parleurs.

gevin¹⁴. Nous disposons ainsi d'une agitation thermique avec une température effective $T = f(A)$ directement reliée à l'amplitude d'agitation A .

La fonction de conversion f pouvant évoluer d'une expérience à l'autre, à travers notamment la modification de la masse du support ou de l'état de la membrane des haut-parleurs, nous avons développé un thermomètre *in situ* afin de mesurer la température directement au niveau des billes plutôt qu'indirectement par la lecture de l'amplitude A .

Ce thermomètre, décrit plus précisément à la section 3.2.3, est simplement constitué d'une bille piégée dans un petit trou circulaire percé dans le cadre de confinement. La mesure du déplacement quadratique moyen de cette bille permet alors d'accéder directement à la température effective du système.

1.4 La détection et le traitement des images

Une caméra numérique, de résolution 659x494 pixels et de fréquence d'acquisition maximale 117 Hz, est placée à la verticale du système afin d'enregistrer l'ensemble des positions des billes. L'acquisition est pilotée à l'aide du logiciel Labview. Notamment, l'écart entre deux images successives est parfaitement contrôlé, avec un pas de temps minimal de 10 ms. Les grossissements disponibles permettent d'obtenir des champs de taille variable : d'une seule bille à l'ensemble du système.

Les programmes de traitement d'image ont été développés sous IDL à partir des routines¹⁵ de détection de particules développées par Crocker et Grier [35]. Ces routines sont particulièrement adaptées à la détection de particules ne se chevauchant pas et présentant un bon contraste avec le fond (voir figure 1.4). L'incertitude sur la détection du centre de la particule est de l'ordre du 1/10 de pixel pour une particule de diamètre apparent de l'ordre de quelques pixels. L'erreur dans l'espace réel dépend du grossissement : lors de l'étude de systèmes à faible nombre de particules, l'échelle est environ de 30 pixels/mm, alors qu'elle est de 5 pixels/mm lorsqu'il s'agit d'observer quelques milliers de particules. L'incertitude va donc de $3 \cdot 10^{-3}$ mm à $2 \cdot 10^{-2}$ mm, soit, ramenée à l'ordre de grandeur de la distance typique entre deux billes — environ 2 mm —, une incertitude allant de 1,5 % à 2 %.

Afin d'obtenir les trajectoires des particules, il faut être capable de suivre une particule d'une image sur l'autre. Les particules étant indiscernables, la seule méthode ne nécessitant aucune hypothèse *a priori* sur la nature de la trajectoire est de considérer que, la position d'une bille étant repérée sur une image, sa position sur l'image suivante

¹⁴Bien que dans notre montage, les haut-parleurs ne soient pas orientés l'un par rapport à l'autre avec un angle de 90°, aucune anisotropie dans l'agitation n'a été observée : cela est sans doute dû au fait que la liaison entre les haut-parleurs et le support n'est pas totalement unidirectionnelle, notamment à cause de la souplesse des membranes et du collage en silicone sur ces dernières.

¹⁵Disponibles sur <http://www.physics.emory.edu/~weeks/idl/>

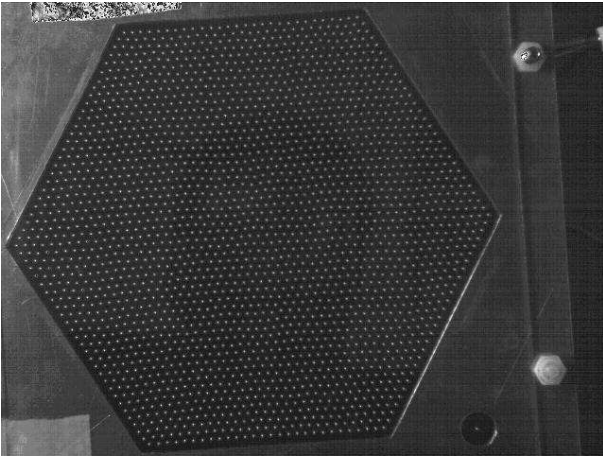


FIG. 1.4 : *Image brute d'un réseau de 2269 billes confinées par un cadre hexagonal (taille réelle de l'image 640×480 pixels, taille d'un côté de l'hexagone 48 mm). Le trou circulaire dans lequel se trouve une bille, situé dans le coin du cadre, est le thermomètre *in situ* présenté à la section 3.2.3.*

correspond à celle de la bille située à la plus petite distance de sa position initiale.

Cet algorithme fonctionne bien à partir du moment où l'on a un nombre constant de billes dans le champ de la caméra — situation dans laquelle nous nous sommes donc toujours placés —, et que le pas de temps entre deux images est suffisamment faible. En pratique, nous arrivons à suivre les trajectoires individuelles des billes jusqu'à des températures proches des températures de "fusion" des réseaux.

L'obtention des coordonnées de 2000 particules sur une série de 10000 images mobilise environ 2h de temps de calcul, et la détermination des trajectoires au moins autant¹⁶.

¹⁶Pour autant, nous n'avons pas cherché au cours de ce travail à améliorer les algorithmes de détection ou de suivi des trajectoires : la puissance actuelle des processeurs suffit pour avoir un temps de calcul raisonnable même avec un algorithme glouton.

Chapitre 2

Détermination des interactions

Sommaire

2.1	Introduction	23
2.2	Calcul semi-analytique des interactions	24
2.2.1	Interaction entre deux billes	24
2.2.2	Interaction d'une bille avec la paroi	27
2.3	Comparaison entre configurations observées et calculées	28
2.3.1	Choix du système	28
2.3.2	Îlots de Wigner : description des états d'équilibre	29
2.3.3	Confirmation expérimentale de la nature des interactions	30
2.4	Conclusion	37

2.1 Introduction

La détermination de l'interaction entre les billes revêt de l'importance à différents niveaux.

Dans les cristaux à grand nombre de billes, la donnée de l'interaction détermine la valeur des constantes élastiques décrivant l'ensemble des propriétés mécaniques du réseau. Lorsque nous introduisons un potentiel de piégeage, il sera nécessaire, pour apprécier le poids de ce piégeage, de le comparer aux caractéristiques générales de cette interaction.

Dans les systèmes à faible nombre de billes, cette interaction, couplée avec le potentiel de confinement, contrôle les configurations d'équilibre des billes et leur dynamique. Cette dépendance est d'ailleurs si grande que nous en avons initialement tiré profit pour déterminer indirectement la nature de l'interaction [36]. Il nous apparaît donc nécessaire de déterminer précisément cette interaction et ses principales caractéristiques pour pouvoir analyser quantitativement nos résultats expérimentaux.

Mais au delà, la détermination de cette interaction interbilles permet aussi de savoir dans quelle mesure le parallèle avec les autres systèmes physiques présentés en

introduction peut être pertinent, et par là même d'être capable de discuter les limites aux analogies que nous ferons.

L'expression de l'énergie d'interaction entre deux billes placées dans le condensateur est déterminée par un calcul semi-analytique exact. Elle peut être exprimée uniquement à partir des données géométriques caractéristiques du condensateur et des billes.

Cette interaction calculée, la modélisation du cadre de confinement vu comme un ensemble de billes de diamètre h au contact permet de déterminer l'interaction entre une bille de diamètre $2R < h$ et un cadre de confinement de hauteur h présentant une symétrie circulaire, cas auquel nous nous sommes restreints. Toutefois, la différence de diamètres entre les billes et celles modélisant le cadre rend nécessaire une correction empirique à l'amplitude de l'interaction.

Pour déterminer cette amplitude effective puis valider l'ensemble du calcul, nous comparons les configurations d'équilibre obtenues pour des îlots de 5 à 30 billes confinées dans un cadre circulaire à celles calculées à partir de notre détermination théorique des interactions.

Les grandes lignes des calculs, élaborés dans le cadre d'une collaboration avec P. Galatola et J.-B. Fournier, sont présentées dans la section 2.2. Nous renvoyons à l'annexe A pour une présentation plus détaillée. La comparaison avec les résultats expérimentaux est reportée dans la section 2.3.

2.2 Calcul semi-analytique des interactions

2.2.1 Interaction entre deux billes

Nous considérons un système constitué de deux billes (de rayon R) placées dans le condensateur et séparées d'une distance intercentres $d > 2R$, et calculons leur énergie d'interaction $\mathcal{E}(d)$ qui est, par définition, la différence d'énergie électrostatique stockée dans le condensateur en présence ou en l'absence des deux billes. Le condensateur est supposé infini, d'épaisseur $h > 2R$. Son électrode inférieure est au potentiel zéro, ainsi que les billes. L'électrode supérieure est au potentiel V_0 .

L'ensemble condensateur + billes étant à l'équilibre, le potentiel électrostatique V à l'intérieur du condensateur et à l'extérieur des billes obéit à l'équation de Laplace $\nabla^2 V = 0$ et doit satisfaire aux conditions limites imposées par la valeur du potentiel sur les électrodes et sur les billes. La solution à ce problème est déterminée à l'aide d'un développement multipolaire de V , qui est également développé sur des harmoniques sphériques symétrisées pour respecter les symétries propres du problème. Le poids relatif $v_{\ell m}$ de chacune de ces harmoniques doit alors être déterminé en prenant en compte les conditions limites auxquelles V doit obéir. Cette détermination ne peut

être faite que numériquement et à cette fin, il est nécessaire de réaliser une troncature dans le développement de V , à un ordre suffisant pour obtenir une solution stable. Les équipotentielles caractéristiques autour des billes dans le plan vertical passant par leurs centres sont présentées sur la figure 2.1. On peut voir que la perturbation dans les lignes équipotentielles due à l'introduction des billes se maintient dans le plan horizontal sur une distance de l'ordre de la hauteur du condensateur.

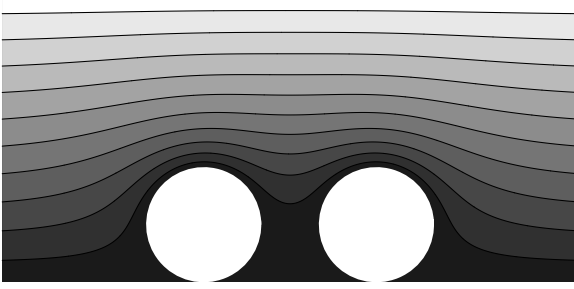


FIG. 2.1 : *Équipotentielles dans le plan vertical passant par le centre des billes. Les billes sont marquées en blanc, les zones sombres correspondent aux valeurs du potentiel les plus faibles.*

Connaissant ce potentiel, il est alors aisé de calculer l'énergie $\mathcal{E}(d)$, qui vaut

$$\mathcal{E}(d) = -\frac{1}{2}\Delta Q V_0, \quad (2.1)$$

où ΔQ est la différence entre les charges accumulées sur la face supérieure du condensateur dans le cas du condensateur en présence des deux billes par rapport au cas du condensateur vide. Celle-ci s'écrit

$$\Delta Q = -8\pi\epsilon_0 V_0 h \left[v_{00} \frac{R}{h} + v_{10} \right], \quad (2.2)$$

où v_{00} et v_{10} sont respectivement les coefficients des termes monopolaire et dipolaire centrés sur les centres des billes, qui ont été déterminés précédemment. Notons que ces deux coefficients dépendent de la distance d entre les billes.

Ainsi l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}(d) = \epsilon_0 V_0^2 h \varepsilon(d), \quad (2.3)$$

où $\varepsilon(d)$ est une grandeur adimensionnée, dépendant à la fois de R et h et déterminée numériquement (*via* v_{00} et v_{10}) pour chaque valeur de d . Pour les distances d avec lesquelles nous avons travaillé (soit $2R < d < 13R$, avec $R = 0,4$ mm), la fonction $\varepsilon(d)$ est très bien ajustée par (voir figure A.3 en annexe A)

$$\varepsilon(d) = \varepsilon_0 K_0(d/\lambda), \quad (2.4)$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, ayant les comportements limites suivants :

$$K_0(d/\lambda) \underset{d \rightarrow 0}{\sim} -\ln(d/\lambda), \quad (2.5)$$

$$K_0(d/\lambda) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2d}} e^{-d/\lambda}. \quad (2.6)$$

ε_0 et λ sont ici les paramètres d'ajustement. Nous trouvons $\varepsilon_0 \simeq 0,71$ et $\lambda \simeq 0,32h$. Notons que même si dans nos expériences h est fixe, cette dernière relation de proportionnalité entre λ et h n'est pas un jeu d'écriture formelle : une étude de la dépendance de λ en fonction de h a permis de montrer la validité de cette relation de proportionnalité, ainsi par ailleurs que l'indépendance de λ envers la taille des billes. La longueur caractéristique de la portée de notre interaction est donc directement contrôlée par la hauteur du condensateur.

Soulignons que cette interaction est exactement celle existant entre deux vortex dans un supraconducteur de type II [37].

Par ailleurs, l'apparition de cette fonction K_0 n'est pas totalement surprenante ; l'insertion d'une bille dans le condensateur provoque une perturbation dans le potentiel électrostatique qui doit être nulle sur chacune des plaques ; si on la développe en série de Fourier, la première harmonique selon z est $\sin(\pi z/h)$: loin de la bille, le système a une symétrie cylindrique et la solution complète à l'équation de Laplace, nulle à l'infini, liée à cette harmonique, est $\sin(\pi z/h)K_0(\pi h/d)$, où d est la distance au centre de la bille. Et dans cette approximation, la longueur d'écran vaut $h/\pi \simeq 0.318h$, ce qui est proche du résultat trouvé.

Dans nos expériences, h vaut 1,5 mm, ce qui conduit à $\lambda = 0,48$ mm. Ceci indique déjà la plage de distances pour laquelle l'interaction entre deux billes est significative, et par conséquent les densités en billes que nous pouvons utiliser. Si l'on considère qu'au delà de 5λ l'interaction devient négligeable, les distances de travail raisonnables, en tenant compte de l'encombrement stérique, se situent entre 1 et 2 mm¹. Ainsi, les billes seront généralement placées à une distance relative de l'ordre de la distance de transition entre les deux régimes limites (équation (2.5)).

Ce résultat appelle un commentaire : on peut être tenté, afin d'être dans le régime logarithmique et d'obtenir une interaction à plus longue portée au regard du pas du réseau, d'augmenter λ en augmentant h ou, ce qui revient au même, en diminuant la taille des billes. Il faut noter cependant que l'amplitude A décroît fortement lorsque h augmente (comme $h^{-5.5}$ environ) ; par conséquent, les possibilités d'augmenter h pour obtenir une interaction à plus longue portée sont limitées si l'on veut conserver une interaction ayant une intensité correcte, permettant de s'extraire des frottements statiques. Inversement, pour se placer dans le régime exponentiel, l'intention de diminuer λ *via* h ne résiste pas à la contrainte $h > 2R$, il faudra donc diminuer la densité en billes pour augmenter d .

¹Expérimentalement, les observations de cristaux de billes confirment cette fourchette : au delà d'une distance interbilles de 2 mm, les cristaux sont plus "mous" et leur ordre trop facilement détruit par les fluctuations thermiques.

2.2.2 Interaction d'une bille avec la paroi

L'interaction entre deux billes étant déterminée, nous calculons l'interaction d'une bille avec le cadre du confinement. Nous nous restreignons au cas d'un petit confinement circulaire car nous n'allons utiliser cette détermination de l'interaction avec la paroi que dans le cas précis d'îlots confinés circulairement, pour lesquels les effets de bords deviennent importants². Dans le cas des cristaux à grand nombre de billes, cette interaction n'est pas déterminante puisque sa portée, qui est structurellement de l'ordre de grandeur de celle de l'interaction interbilles, est petite devant la taille du système.

Connaissant l'interaction interbilles et l'interaction avec le cadre, il sera alors possible de calculer précisément l'énergie d'une configuration, et notamment de déterminer les configurations correspondant à un état d'équilibre. Cette opportunité présente deux intérêts importants. D'une part, la comparaison des états d'équilibre calculés pour de tels systèmes avec les observations expérimentales permettra, à la section 2.3, de confirmer la validité même du calcul de l'interaction entre billes. D'autre part, la connaissance des valeurs des niveaux d'énergie des configurations stables et métastables va nous permettre, au chapitre 3, de valider notre étalonnage de température. Par ailleurs, ces valeurs seront l'un des paramètres pertinents à prendre en compte lors de l'analyse de la dynamique des petits systèmes confinés, qui sera présentée dans la quatrième partie de ce mémoire.

Du fait de la difficulté de calcul engendrée par la présence de deux symétries différentes (sphérique pour les billes, cylindrique pour le cadre), le cadre de confinement de diamètre $2R_c$ de l'ordre du cm et de hauteur h est modélisé comme une rangée de billes au contact de diamètre h et dont le centre est à une distance R_c du centre du cadre de confinement.

Afin de mener le calcul présenté en annexe A.2, il a été fait l'hypothèse que l'interaction d'une bille avec la paroi est la somme des interactions avec toutes les billes fictives constitutives de cette paroi. Cette hypothèse reste valable tant que la bille ne se trouve pas trop proche de la paroi, et sera confirmée *in fine* par la confrontation avec l'expérience.

Bien sûr, il faut prendre en compte le fait que la barrière n'a pas la même hauteur que les billes, ce qui nous conduit à utiliser une amplitude d'interaction effective ε_1 entre une bille réelle et une bille fictive qui sera déterminée par ajustement avec les données expérimentales. Pour une bille située à une distance r du centre du confinement, nous trouvons l'énergie d'interaction

$$\mathcal{E}_c(r) = \epsilon_0 V_0^2 h \varepsilon_c(r), \quad (2.7)$$

avec l'énergie adimensionnée ε_c définie par :

$$\varepsilon_c(r) = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{2\pi\lambda_c R_c}}{h_c} \exp \left[1 - \frac{2r}{R_c} + \frac{r - R_c}{\lambda_c} \right], \quad (2.8)$$

²Par ailleurs, il serait difficile de discuter de la validité des hypothèses émises dans un cas plus général.

où $\lambda_c \simeq 0.29h = 0,44$ mm. Cette expression analytique a été obtenue par un développement limité autour de $r = R_c/2$ et suppose $R_c \gg h$; en particulier, elle ne rend donc pas correctement compte de l'interaction avec le cadre d'une bille au centre ou trop proche du bord. Cependant, nous verrons que cette approximation est suffisante pour rendre compte des faits expérimentaux.

Notons également que la portée de l'interaction entre une bille et la paroi est semblable à celle de l'interaction interbilles, résultat qui est bien entendu indépendant de la forme du confinement.

Il reste à déterminer la constante ε_1 , ce qui va être fait dans la section suivante. De fait, nous verrons que cette amplitude effective permet de corriger correctement non seulement les différences de hauteurs précédemment évoquées, mais également les approximations du modèle telles que la discrétisation de la paroi.

2.3 Comparaison entre configurations observées et calculées

2.3.1 Choix du système

Afin de valider le calcul de l'interaction interparticules, nous avons confronté les résultats expérimentaux avec les résultats théoriques obtenus dans des situations semblables. Il faut pour cela se placer dans une situation où la nature de l'interaction est discriminante dans le comportement des objets étudiés. Arrêtons-nous sur le choix du système expérimental à adopter.

Si l'on considère de grands cristaux, la configuration d'énergie minimale est, pour la plupart des interactions, un réseau hexagonal. La configuration d'équilibre renseigne donc peu sur la nature de l'interaction³. Si le spectre de phonons dépend des interactions, le déterminer dans un système fini et en déduire l'interaction, sans *a priori* sur sa nature, est délicat⁴. Au mieux, l'étude de ces cristaux permet essentiellement de retrouver l'interaction effective prenant en compte l'ensemble des interactions, par exemple en mesurant la distribution des liens entre deux particules [35], ou par des méthodes de Monte-Carlo inversées [41]. Si on cherche alors à simplifier le système, l'utilisation d'un système 1D de particules peut répondre à cet objectif, mais là encore le problème d'inversion consistant à déterminer l'interaction à partir de mesures telles que la distribution des particules n'est

³Récemment, Zheng et Grieve ont toutefois déterminé l'interaction entre les billes d'un système semblable au nôtre à partir des positions d'équilibre d'un cristal posé sur un plan incliné, mais ils ont dû pour cela postuler la forme générale de leur interaction, qu'ils ont supposée coulombienne [38]. Nos résultats démontrent que cette hypothèse est erronée.

⁴Signalons toutefois dans cet ordre d'idée, les travaux de Melzer *et al.* qui ont déterminé expérimentalement les modes de vibrations de petits ensembles de poussières chargées confinées et en on déduit les caractéristiques de l'interaction entre ces particules [39, 40].

simple que pour des particules en interaction très courte portée⁵ (de l'ordre de la taille des objets) comme l'ont montré Hansen-Goos *et al.* [42].

L'utilisation de systèmes confinés n'ayant qu'un faible nombre de particules est de ce fait l'idée *a priori* la plus naturelle. Cette idée se heurte toutefois au fait que l'introduction du confinement ajoute un paramètre supplémentaire à déterminer. Il faut par ailleurs que les effets de bord ne prédominent pas totalement, afin que les différences de comportement observées puissent être associées à la nature de l'interaction entre les particules.

Pour réaliser ce compromis, nous avons retenu le système expérimental des îlots de Wigner, constitué d'un petit nombre de billes ($N \leq 30$) confinées circulairement, avec une densité telle que la distance typique entre deux particules est de l'ordre de la portée de l'interaction. Ce type de systèmes faisant intervenir un faible nombre de particules confinées fait actuellement l'objet de nombreuses travaux⁶, notamment numériques⁷, qui montrent qu'en effet les niveaux d'énergie relatifs des configurations d'équilibre sont très sensibles à l'interaction interparticules.

2.3.2 Îlots de Wigner : description des états d'équilibre

Les configurations d'équilibre des îlots de Wigner peuvent être décrites comme une succession de couches de billes concentriques, qui seront désignées par la notation $(N_0 - N_1 - N_2 - \dots)$, où N_i est le nombre de billes situées sur la i -ème couche, comptée à partir du centre⁸.

Comme nous le verrons en détail dans la prochaine section, cette structure en couches se retrouve quelle que soit l'interaction; elle résulte du compromis à réaliser entre la symétrie circulaire due au confinement et la propension naturelle de l'ensemble des particules à s'organiser en un réseau de symétrie hexagonale en l'absence de contraintes⁹.

⁵Nous reviendrons en particulier sur ce problème lors de notre étude de la diffusion dans une couronne au chapitre 10.

⁶L'intérêt pour ces systèmes vient entre autres de l'objectif de disposer de composants électroniques de faible taille, proche de la taille des objets s'y déplaçant. La compréhension de la manière dont s'organisent ces objets (électrons, vortex) est en particulier la porte d'entrée à une compréhension, par exemple, de leur dynamique d'entrée/sortie dans ces dispositifs. (voir par exemple, pour des quantum dots, la référence [43]), ou des problèmes de circulation au niveau du croisement entre deux composants linéaires [44].

⁷Le faible nombre de particules permet, au regard des techniques actuelles, un traitement numérique fiable.

⁸Historiquement, cette situation n'est pas sans rappeler le premier modèle atomique élaboré par Thomson en 1904, qui considérait un ensemble de charges (les futurs électrons) placées à l'intérieur d'une sphère présentant une densité uniforme de charges de signe opposé [45].

⁹Une bonne illustration des subtilités de cette compétition est donnée par Cândido et al. [46], qui ont étudié numériquement les configurations d'équilibre pour un potentiel d'interaction coulombien écranté (potentiel de Yukawa) : lorsque la longueur d'écran diminue fortement, l'importance de la force de confinement grandit, les particules se rapprochent du centre et, étant éloignées du bord, s'organisent en un cluster présentant une symétrie hexagonale.

Le nombre de billes étant fixé, nous déterminons expérimentalement les configurations d'équilibre d'énergie en laissant évoluer le système mis en contact avec notre "thermostat"¹⁰, c'est-à-dire agité à amplitude constante par les haut-parleurs. Plusieurs transitions entre différentes positions d'équilibre stables ou métastables sont observées. La configuration d'énergie minimale est celle apparue le plus longtemps. Afin de nous assurer que le système n'est pas piégé dans un minimum local, nous répétons systématiquement et plusieurs fois la procédure consistant à agiter fortement le système avant de baisser l'agitation à un niveau pour lequel les couches sont bien définies. Les configurations obtenues pour un nombre de billes allant de 5 à 29 placées dans un cadre circulaire de diamètre 10 mm sont présentées sur la figure 2.2.

Ces configurations sont définies essentiellement d'une part par le nombre de billes sur chacune des couches, mais également par le rayon de ces dernières. Pour $N = 5$ billes, l'état stable consiste en une seule couronne. Jusqu'à $N = 16$, les configurations présentent ensuite deux couronnes bien identifiées, la bille supplémentaire entre la configuration N et la configuration $N + 1$ se plaçant dans une des deux couches définies dès $N = 6$. Au delà de 16 billes, les configurations présentent 3 couches. On voit toutefois que pour un nombre de billes supérieur à 20, la zone centrale de l'îlot subit moins les effets du bord et commence à présenter une symétrie hexagonale, et la notion de couches est moins nette. Par ailleurs, une analyse plus fine de certaines couches, comme par exemple la couche extérieure de l'îlot à 18 billes, montre que l'on peut y distinguer en réalité deux sous-couches présentant des rayons légèrement différents, signe une nouvelle fois de la tendance du réseau de billes à adopter une symétrie hexagonale. Signalons enfin que cette symétrie hexagonale peut être particulièrement bien respectée pour certains nombres de billes comme $N = 7$ (configuration (1-6)) ou $N = 19$ (configuration (1-6-12)).

2.3.3 Confirmation expérimentale de la nature des interactions

En nous plaçant exactement dans ces conditions expérimentales, les configurations d'équilibre des systèmes ont été calculées numériquement à partir des énergies potentielles d'interaction que nous avons déterminées. L'énergie normalisée du système est donnée par¹¹ :

$$H = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + \sum_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_c(|\mathbf{r}_i|), \quad (2.9)$$

où ε est l'énergie d'interaction interbilles, donnée par (2.4), ε_c est l'énergie d'interaction

¹⁰Dont nous montrerons au chapitre suivant qu'il se plie bien aux exigences que l'on peut avoir envers un thermostat.

¹¹Il a été supposé que l'interaction entre billes était une interaction de paires, c'est-à-dire que les phénomènes d'influence ont été négligés. Cette hypothèse sera validée par la prédictibilité du modèle.

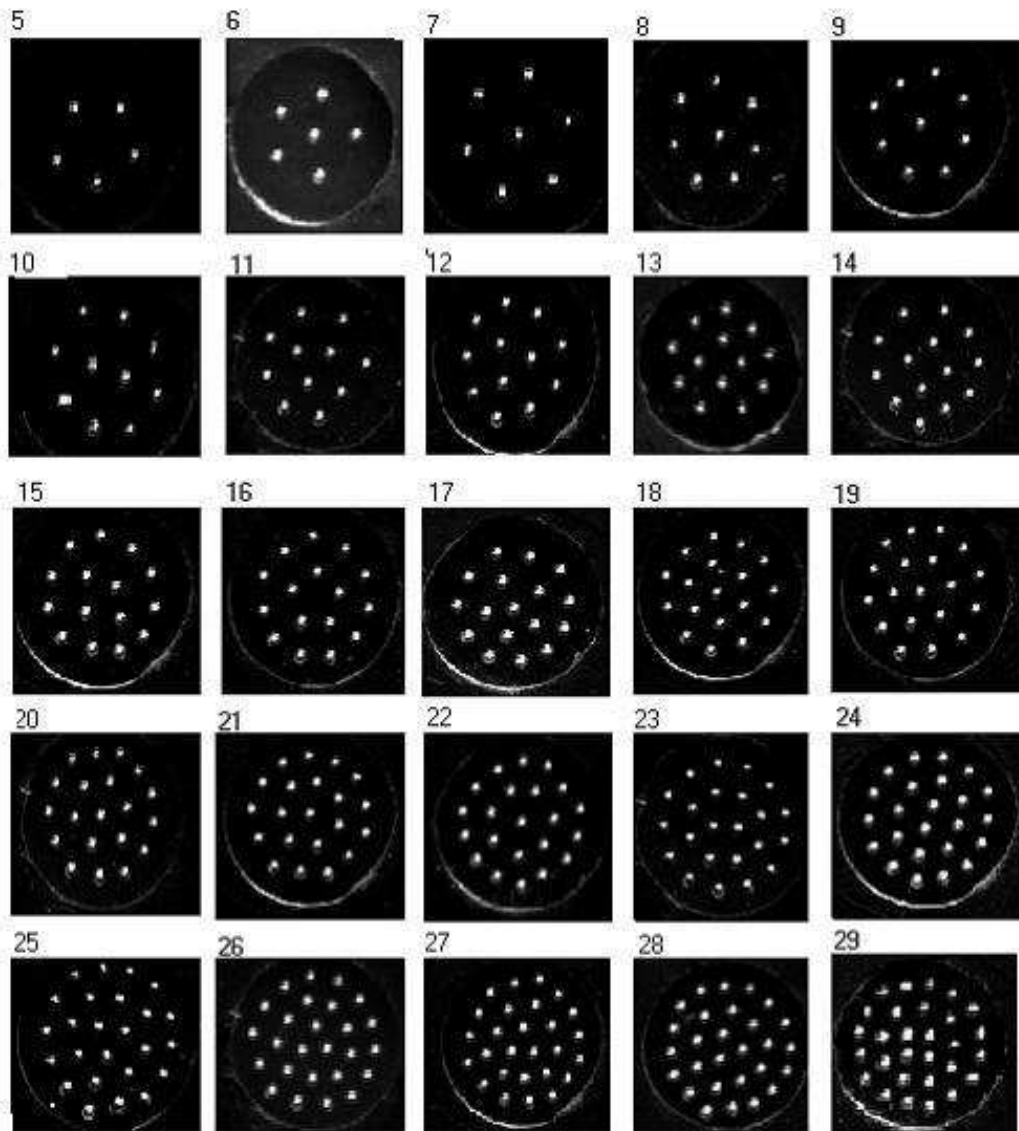


FIG. 2.2 : États fondamentaux pour les îlots de Wigner de 5 à 29 billes en confinement circulaire.

d'une bille avec le cadre, donnée par (2.8), et \mathbf{r}_i est la position de la bille i par rapport au centre du cadre. Cette énergie a été minimisée par une méthode de gradient conjugué [47] en partant d'un large ensemble de conditions initiales différentes afin de bien trouver tous les minima locaux, puis le minimum global. Nous pouvons ainsi déterminer l'état fondamental, mais aussi les états excités. Avant de comparer les résultats expérimentaux et théoriques, il nous reste à déterminer l'amplitude effective ε_1 , introduite de façon empirique à la section 2.2.2.

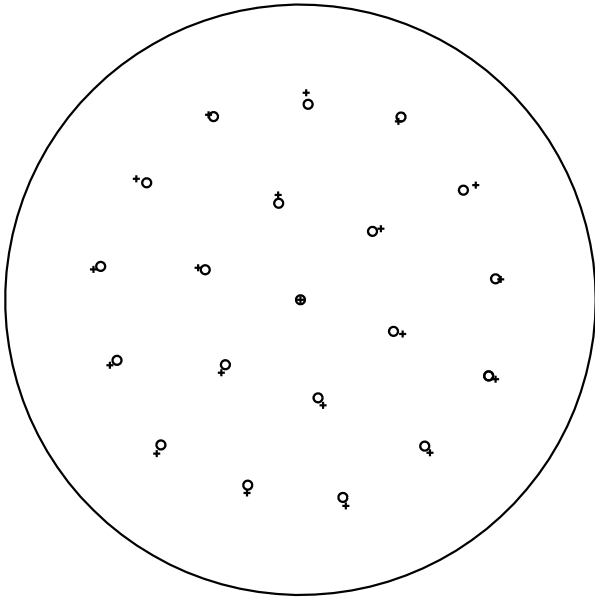


FIG. 2.3 : Configuration de l'état fondamental à 20 billes dans un cadre de diamètre 10 mm. Les cercles représentent les positions expérimentales, les croix les positions prévues théoriquement.

Détermination de l'amplitude effective ε_1

Pour déterminer l'amplitude effective ε_1 , nous nous sommes focalisés sur un cas simple, le système à 5 billes, dont la configuration de l'état fondamental, dans les expériences comme dans notre modèle théorique et ce dans un large spectre de valeurs d'essai pour ε_1 , est une seule couronne de 5 billes. En ajustant le rayon de la configuration, qui varie de manière monotone avec ε_1 , avec le rayon expérimental $r = 2,25$ mm, la valeur de l'amplitude effective a été évaluée à $\varepsilon_1 = 0,47$.

La robustesse de cette évaluation est par exemple illustrée sur la figure 2.3 avec un système de 20 billes à 3 couches : les positions relatives des billes dans la configuration de l'état fondamental, calculée à partir de la même constante ε_1 , sont également bien prévues.

Ceci valide définitivement les hypothèses et simplifications, apparemment fortes, qui avaient été faites pour estimer la force du confinement.

La valeur de ε_1 est désormais considérée comme connue et, comme nous allons le voir, elle permet de rendre compte de manière satisfaisante des situations rencontrées dans les autres configurations.

Comparaison des configurations observées et calculées

Afin de valider plus complètement l'ensemble de nos calculs, notamment celui de la nature de l'interaction interbilles nous avons comparé les configurations observées de l'état fondamental pour les systèmes de 5 à 30 billes avec les configurations obtenues numériquement avec l'interaction interbilles K_0 et l'interaction bille-paroi ε_c . Nous com-

parons également nos résultats avec d'autres résultats numériques¹² basés sur une interaction logarithmique (interaction II [50] et III [51] dans ce qui suit), une interaction coulombienne écrantée (interaction IV [50]), une interaction coulombienne¹³ (interaction V [49]) et une interaction dipolaire (interaction VI [52]). L'ensemble de ces configurations est reportée dans le tableau 2.1.

Avant de détailler cette comparaison, il convient cependant de préciser en quoi elle est légitime, puisque les conditions expérimentales ne sont pas exactement celles des simulations II à VI.

Tout d'abord, examinons l'effet éventuel de la forme du potentiel de confinement. Les simulations pour les interactions II à VI ont été réalisées avec un profil de confinement parabolique¹⁴. En réalité, cette modélisation permet de rendre compte d'une densité en billes homogène. En revanche, l'utilisation d'un potentiel de confinement coulombien a tendance à augmenter la densité centrale [53] tandis que placées dans un puits de potentiel infini, les particules sont plus nombreuses au bord [54]. Nos îlots ayant toujours présenté une densité homogène, la comparaison avec ces simulations semble correcte de ce point de vue là.

Par ailleurs, une modification de l'intensité de la force de confinement peut, *a priori*, induire une modification de la configuration d'énergie minimale. Lorsque la force d'interaction est en loi de puissance, une renormalisation de l'échelle des longueurs montre en réalité que le problème se ramène à des interactions d'amplitude égale, puisque ce qui nous importe est la position relative des particules¹⁵. Pour le potentiel coulombien écranté, il apparaît une constante supplémentaire, à savoir la longueur d'écran. Dans leur étude, Lai *et al.* ont fait varier cette longueur (ce qui indirectement revient à modifier l'amplitude du confinement) et ont montré que les configurations ne sont pas modifiées pour une longueur d'écran restant dans les ordres de grandeur de la distance entre particules [50]. Enfin, expérimentalement, nous avons testé cette dépendance envers le potentiel de confinement en isolant le cadre de l'électrode inférieure et en le portant à des potentiels variant entre -600 V et 0 V, l'électrode supérieure étant portée au potentiel 600 V et l'électrode inférieure toujours reliée à la masse. Dans tous les cas, les mêmes configurations ont été

¹²Dans ces travaux, les configurations d'équilibre ont été déterminées par des méthodes de Monte-Carlo ou de dynamique moléculaire. Il faut garder à l'esprit, néanmoins, que l'augmentation du nombre de billes induit une augmentation du nombre de minima locaux dans le paysage énergétique, et qu'il n'est jamais exclu d'avoir oublié une configuration, comme le montre par exemple les corrections apportées au sein de la même équipe de recherche entre deux travaux étudiant le cas de l'interaction coulombienne [48, 49].

¹³Nous appelons ici coulombienne l'interaction dont le potentiel varie en $1/r$, c'est-à-dire l'interaction entre deux charges dans un espace à 3 dimensions, alors qu'à 2 dimensions l'interaction entre deux charges est logarithmique.

¹⁴Un tel profil correspond, pour des interactions coulombiennes, à la présence d'un fond continu et homogène de charges de signe opposé à celui des particules, comme dans le modèle de Thomson.

¹⁵Si la force entre deux particules s'écrit Ar^α et l'interaction avec la paroi s'écrit Br^β , une renormalisation des distances par $r_0 = A^{1/(\beta-\alpha)}B^{1/(\alpha-\beta)}$ permet de se ramener à des forces d'égale amplitude.

obtenues.

Par conséquent, les différences dans les configurations d'énergie minimale que l'on peut observer à la lecture du tableau 2.1 ne proviennent pas de l'effet du confinement et ont bien pour origine la différence entre la nature des interactions entre particules; nous en déduisons que l'observation de ces configurations est un paramètre discriminant pour estimer la nature de ces interactions. Bien que l'ensemble des configurations présente les mêmes caractéristiques générales d'anneaux concentriques, des différences notables selon l'interaction apparaissent quant au remplissage des couches.

Toutes les différences ne doivent cependant pas être regardées de la même manière : en effet, les états fondamentaux associés à l'une des interactions correspondent le plus souvent, quand ce n'est pas à l'état fondamental, à l'état excité pour un autre type d'interaction. Par conséquent, si ces deux états sont proches en énergie, il est possible que l'incertitude expérimentale ou l'incertitude numérique conduisent à voir une différence là où il n'y en a pas. Nous avons donc calculé, en nous basant sur les énergies déterminées par Campbell et Ziff¹⁶, les différences d'énergies relatives $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ entre le premier état excité et l'état fondamental, et retenu comme situations réellement discriminantes entre deux types d'interaction celles pour lesquelles $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \geq 30\%$ [51]. Inversement, pour $N = 20$, cette différence est de l'ordre de 10^{-5} , et il est clair que ce cas ne peut servir comme facteur discriminant. De plus, pour les situations à grand nombre de billes, des sources d'incertitude supplémentaires apparaissent. Expérimentalement d'abord, il est possible que les contraintes stériques ne permettent pas d'explorer parfaitement l'ensemble des différents états. Numériquement, l'augmentation du nombre de configurations d'équilibre rend la détermination de l'état fondamental plus hasardeuse. Enfin, dans le cas de notre modélisation, l'hypothèse d'une interaction de paires¹⁷ trouve peut-être là ses limites, et le rapprochement de certaines billes du bord rend la modélisation de la paroi comme un ensemble de billes certainement moins adaptée.

Compte-tenu de tout cela, les configurations "pertinentes" pour la comparaison correspondent aux cas $N = 9, 16, 17, 22, 24, 27$. Au regard du tableau 2.1, il apparaît clairement que pour ces nombres de billes, les simulations rendant le mieux compte des configurations que nous observons expérimentalement sont celles réalisées à partir des interactions de type K_0 . Inversement, les interactions en loi de puissance de type V et VI et même, de manière plus surprenante, l'interaction de Yukawa (type IV), ne permettent pas de prédire nos configurations, notamment dans les cas discriminants cités précédemment.

Notons que les interactions logarithmiques prédisent des configurations très semblables à celles obtenues à partir de l'interaction de type K_0 , puisque les deux cas de désaccord, $N = 20$ et $N = 28$, sont des cas jugés non pertinents.

¹⁶L'utilisation des résultats de Campbell et Ziff plutôt que des nôtres est plus légitime pour discuter des résultats en fonction des autres simulations, également réalisées avec un potentiel parabolique.

¹⁷C'est à dire le fait de ne pas prendre en compte les phénomènes d'influence électrostatique.

$\mathcal{E}(r)$	N	Galatola	Lai	Campbell	Lai	Kong	Belousov
		<i>et al.</i> [30]	<i>et al.</i> [50]	<i>et al.</i> [51]	<i>et al.</i> [50]	<i>et al.</i> [49]	<i>et al.</i> [52]
		$K_0(r/\lambda)$	$-\ln(r/\lambda)$	$-\ln(r/\lambda)$	$e^{-r/\lambda}/r$	$1/r$	$1/r^3$
	Exp.	I	II	III	IV	V	VI
	5	5	5	5	5	5	5
	6	1-5	1-5	1-5	1-5	1-5	1-5
	7	1-6	1-6	1-6	1-6	1-6	1-6
	8	1-7	1-7	1-7	1-7	1-7	1-7
	9	1-8	1-8	1-8	1-8	2-7	2-7
	10	2-8	2-8	2-8	2-8	2-8	3-7
	11	3-8	3-8	3-8	3-8	3-8	3-8
	12	3-9	3-9	3-9	3-9	3-9	3-9
	13	4-9	4-9	4-9	4-9	4-9	4-9
	14	4-10	4-10	4-10	4-10	4-10	4-10
	15	4-11	4-11	4-11	4-11	5-10	5-10
	16	5-11	5-11	5-11	5-11	1-5-10	1-5-10
	17	1-5-11	1-5-11	1-5-11	1-5-11	1-6-10	1-6-10
	18	1-6-11	1-6-11	1-6-11	1-6-11	1-6-11	1-6-11
	19	1-6-12	1-6-12	1-6-12	1-6-12	1-6-12	1-6-12
	20	1-6-13	1-6-13	1-7-12	1-6-13	1-7-12	1-7-12
	21	1-7-13	1-7-13	1-7-13	1-7-13	2-7-12	2-7-12
	22	1-7-14	1-7-14	1-7-14	1-7-14	2-8-12	2-8-12
	23	2-8-13	1-8-14	1-8-14	1-8-14	3-8-12	3-8-12
	24	2-8-14	2-8-14	2-8-14	2-8-14	3-8-13	3-8-13
	25	3-8-14	3-8-14	3-8-14	3-8-14	3-9-13	3-9-13
	26	3-9-14	3-9-14	3-9-14	3-9-14	4-9-13	4-9-13
	27	3-9-15	3-9-15	3-9-15	3-9-15	4-9-14	4-9-14
	28	3-9-16	3-9-16	4-9-15	4-9-15	4-10-14	4-10-14
	29	4-9-16	4-10-15	4-10-15	4-10-15	4-10-15	5-10-14
	30	4-9-17	4-10-16	4-10-16	4-10-16	5-10-15	5-10-15

TAB. 2.1 : Configurations de l'état fondamental pour des systèmes de 5 à 30 particules confinées circulairement. Première colonne : observations expérimentales ; types I à VI : détermination numérique. L'interaction de type I correspond à la modélisation de notre interaction. Les interactions de type II à VI ont été associées à un confinement parabolique. Les configurations marquées en gras signalent les différences avec les observations expérimentales. Les lignes grisées correspondent aux cas jugés les plus pertinents pour la discrimination.

En conclusion, la bonne adéquation entre le modèle et les expériences valide la détermination de l'interaction entre billes ainsi que de l'interaction entre une bille et

la paroi, dont l'amplitude a été déterminée une fois pour toutes à partir uniquement du cas $N = 5$ billes. La bonne adéquation avec le modèle logarithmique¹⁸ confirme par ailleurs que les distances typiques entre billes sont de l'ordre de grandeur de la zone transitoire entre les deux régimes extrêmes pour la fonction K_0 .

Analogie avec des vortex dans un supraconducteur

L'interaction que nous avons ainsi déterminée étant semblable à l'interaction entre vortex dans un supraconducteur de type II, nous pouvons comparer nos résultats avec les quelques résultats existant dans des îlots supraconducteurs. Si, expérimentalement, l'organisation de vortex dans des îlots a pu être observée par microscopie SQUID [55], la seule détermination claire des structures ou couches a été réalisée par Grigorieva *et al.* par une technique de décoration [56]. Les auteurs reportent les configurations observées jusqu'à $N = 11$. Nos observations sont identiques, à l'exception du cas $N = 9$, qui n'est pas prévu non plus par les simulations effectuées à partir d'une interaction logarithmique [51] ou directement dans le formalisme de Ginzburg-Landau [57].

Nous pouvons également comparer les positions d'équilibre obtenues pour un système de 17 billes placées dans un confinement elliptique (dont le rapport entre le grand et le petit axe est de $5/3$) avec celles calculées par Meyers et Daumens pour un système de 17 vortex placés dans un supraconducteur mésoscopique de même ellipticité que notre confinement [58]. La configuration d'équilibre qu'ils obtiennent par minimisation de l'enthalpie libre obtenue dans le formalisme de Ginzburg-Landau est présentée sur la figure 2.4(a). Les configurations (b) et (c) sur cette même figure correspondent respectivement à l'état fondamental et au premier état excité obtenus avec notre dispositif. La similitude entre 2.4(a) et 2.4(c) est remarquable jusque dans les détails comme par exemple la brisure de symétrie axiale par rapport au grand axe. Après un nouvel examen de leur configuration, Meyers et Daumens ont montré que la configuration présentée dans [58] est effectivement celle du premier état excité, la différence d'énergie relative étant de l'ordre de 10^{-5} . Au passage, ceci confirme l'efficacité de nos procédures expérimentales pour classifier les configurations d'équilibre.

Cette similarité, d'autant plus convaincante que la brisure de symétrie dans le cas d'un confinement elliptique augmente le nombre d'états d'équilibre distincts, confirme définitivement la validité de l'interaction interbilles que nous avons calculée.

¹⁸En l'absence de calcul direct de l'interaction, cette adéquation nous avait conduit à penser que l'interaction était logarithmique [36].

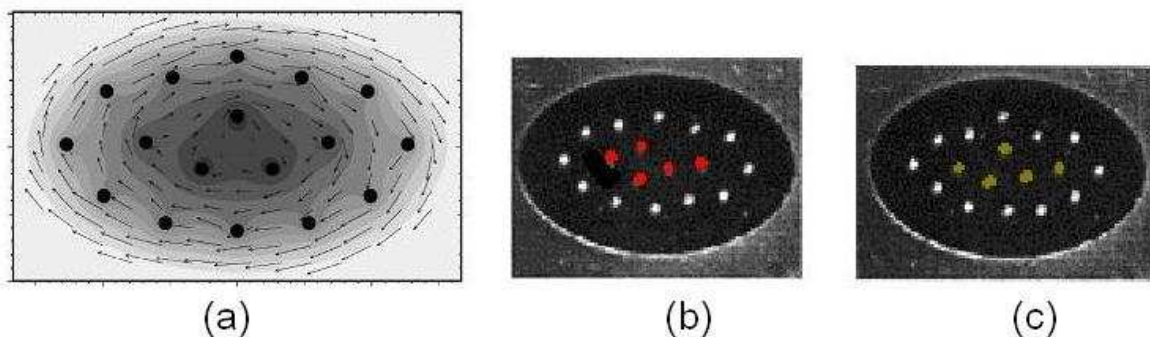


FIG. 2.4 : (a) : configuration d'équilibre déterminé par Meyers et Daumens pour 17 vortex dans un supraconducteur mésoscopique [58]; (b) : configuration de l'état fondamental pour le même nombre de billes dans un confinement elliptique de même ellipticité. La configuration diffère du premier état excité (c) essentiellement par les positions relatives des 5 billes centrales.

2.4 Conclusion

Ainsi, l'interaction entre les particules de notre système modèle est décrite par l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}(d) = \mathcal{E}_0 K_0(d/\lambda) = 0.71 \epsilon_0 V_0^2 h K_0(d/\lambda), \quad (2.10)$$

avec $\lambda \simeq 0,29h \simeq 0,48$ mm.

Dans les cristaux de Wigner macroscopiques, la connaissance de cette interaction nous permettra notamment de déterminer les constantes élastiques.

Nous avons également pu évaluer l'interaction des billes avec la paroi. Dans le cas général, cette interaction a une portée de l'ordre de grandeur de λ . Dans le cas des petits confinements circulaires, nous l'avons déterminée précisément et pouvons calculer de manière exacte l'énergie des configurations.

Nous pouvons de plus préciser quantitativement ici l'ordre de grandeur de deux quantités qui nous serviront de grandeurs de référence pour les discussions ultérieures. Pour une distance typique entre deux billes $a_0 = 1.5$ mm et une différence de potentiel $V_0 = 1000$ V, l'énergie d'interaction est de l'ordre de 3.10^{-10} J. Par ailleurs, pour une bille située entre deux billes distantes de $2a_0$, la fréquence de vibration $f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{m} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial d^2}(a_0) \right]^{1/2}$ est de l'ordre de 6 Hz.

Enfin, d'un point de vue plus général, cette étude montre que notre système de billes est un système modèle pour étudier les vortex dans les supraconducteurs de type II, les interactions entre nos particules étant semblables. Ceci permet donc de discuter nos résultats au regard des problématiques actuelles dans ce domaine. Par ailleurs, le fait que

nous ayons une interaction de type écrané autorise également de présenter nos résultats en comparaison avec les systèmes colloïdaux en interaction électrostatique.

Chapitre 3

L'agitation mécanique : une température effective

Sommaire

3.1	Introduction	39
3.2	L'état stationnaire	42
3.2.1	Distribution des vitesses	42
3.2.2	Statistique de Boltzmann	43
3.2.3	Mesure de la température effective	50
3.3	Nature du bain thermique	52
3.3.1	Résultats principaux de l'équation de Langevin	52
3.3.2	Confrontation à l'expérience	55
3.4	Conclusion	58

3.1 Introduction

La plupart des systèmes physiques sont habituellement en contact avec un thermostat réel avec lequel ils échangent constamment de l'énergie.

Notre système vu comme système modèle n'a donc d'intérêt¹ que si nous pouvons y injecter de l'énergie assimilable *le plus possible* à une énergie thermique. Puisque, au regard de la masse des objets, la température ordinaire ne saurait intervenir, il s'agit de simuler expérimentalement un apport énergétique de cette nature.

Qualitativement, le fait d'alimenter les haut-parleurs avec deux bruits blancs décorrelés l'un de l'autre et d'amplitude commune A procure aux billes un mouvement désordonné dont l'amplitude augmente avec A .

¹De fait, à cause des frottement statiques, il est impossible de faire de la physique à température nulle avec notre système.

Dans un système classique non dissipatif de particules à l'équilibre thermodynamique, l'existence d'une agitation thermique se traduit par la fixation, pour chaque particule, de la moyenne d'ensemble de son énergie cinétique. Ainsi, pour un système bidimensionnel, on a $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = k_B T$ où $\langle \rangle$ désigne cette moyenne d'ensemble. Ce théorème d'équipartition de l'énergie, qui peut être vu comme une conséquence de la loi de Boltzmann, est la perception la plus immédiate que l'on peut avoir de la température. Les études précédemment menées sur des systèmes voisins du nôtre se sont souvent limitées à cette assertion. Ainsi, Tata *et al.* [59] font vibrer leur support avec une pulsation ω et considèrent, sans plus de justification, obtenir ainsi une énergie thermique proportionnelle à ω^2 . Plus récemment, Reis *et al.* ont étudié la cristallisation d'un gaz granulaire bidimensionnel en agitant leur système à amplitude et fréquence constantes, mais en plaçant leurs billes sur une surface désordonnée afin d'obtenir des trajectoires aléatoires pour chacune de leurs particules [60]. Zheng et Grieve [38] procèdent de même, mais ont vérifié que la distribution des vitesses de leurs billes était gaussienne. Pour faire varier cette énergie thermique, ils procèdent de manière indirecte en modifiant en réalité l'énergie d'interaction². Enfin Pouligny *et al.* [61] considèrent cette fois-ci une agitation à pulsation ω constante, mais font varier son amplitude. Ils montrent que la distribution des vitesses est gaussienne, mais également que la loi de Boltzmann est vérifiée pour une énergie potentielle simple. En effet, rien n'indique *a priori* que l'apport extérieur d'une énergie cinétique permette d'explorer le paysage énergétique du système selon la loi de Boltzmann, quand bien même la distribution des vitesses lui obéit. Cette vérification nous semble donc nécessaire.

Par ailleurs, en thermodynamique, le maintien d'une vitesse quadratique moyenne constante se fait par le biais d'échanges, soit entre particules, soit avec la paroi de l'enceinte. Au niveau microscopique, ces échanges sont inélastiques ; certains vont ralentir une particule, d'autres au contraire l'accélérer. Ces phénomènes non conservatifs débouchent néanmoins, au niveau macroscopique, sur un état stationnaire et une physique réversible. Mais cette notion d'échanges, et la manière dont ils sont faits est néanmoins fondamentale. Ces chocs continus et aléatoires font que le système aboutit à un état stationnaire et ils modèlent non seulement l'ensemble de la distribution des vitesses, mais aussi les possibilités d'exploration du paysage énergétique³.

Rappelons ici que, si le marqueur accessible de l'agitation thermique est le mouvement des billes, ce mouvement leur est conféré par le wafer qui peut être vu comme une sorte

²Cette manière de faire est notamment utilisée dans les systèmes colloïdaux magnétiques, pour lesquels il est plus facile de modifier l'amplitude d'interaction *via* le champ magnétique que la température. Lorsque les seules énergies en jeu sont l'énergie d'interaction et l'énergie thermique, le paramètre pertinent permettant par exemple de discuter de la fusion est en fait le rapport $1/\Gamma \equiv k_B T/\mathcal{E}_0$, où \mathcal{E}_0 est l'énergie typique d'interaction entre deux particules voisines.

³Ainsi, l'utilisation par Zheng et Grieve d'une fréquence d'agitation constante de l'ordre de 3 Hz, comparable avec les fréquences propres d'un tel système, nécessiterait de vérifier qu'aucune résonance n'y est observée.

de "bain thermique", les échanges avec ce bain se faisant à travers la friction des billes sur le support⁴. Il n'est pas du tout acquis, *a priori*, qu'un tel mode d'échange satisfasse aux exigences formulées précédemment. Premièrement, la friction de type solide (avec de plus la possibilité pour les billes de rouler) n'est *a priori* pas similaire à un choc entre particules, et si cette friction est à la fois source de dissipation et vecteur de l'apport d'énergie de la plaque vers les billes, il n'est pas dit que les compensations vont se faire de la même manière que dans un vrai bain thermique et aboutir à un état stationnaire avec une vitesse quadratique constante.

Par ailleurs, dans le cas d'une vraie agitation thermique, le caractère local des interactions entre particules du bain a aussi pour conséquence une décorellation totale entre deux particules situées en deux endroits différents (si elles ne sont pas en interaction par ailleurs, que ce soit par une interaction longue portée ou par propagation de phonons). Il n'est pas acquis pour notre système que le mouvement de deux billes situées en deux points différents soit non corrélé, le bain thermique étant tout de même une plaque solide dont on peut imaginer qu'elle transmet à chaque instant la même impulsion à toutes les billes. En réalité il n'en est rien : l'étude de la grandeur $\langle \mathbf{v}_i(t) \cdot \mathbf{v}_j(t) \rangle$ pour deux billes i et j sans interaction a montré que cette grandeur est nulle.

En conséquence, pour nous assurer du fait que l'agitation des billes transmise par la friction avec le wafer de silicium lui-même mis en mouvement par les deux haut-parleurs alimentés par un bruit blanc peut bien être considérée comme une agitation thermique, nous nous sommes focalisés sur deux points :

- l'état stationnaire : distribution des vitesses et obéissance à la statistique de Boltzmann ; ce point fera l'objet de la section 3.2 ;
- la nature des échanges, mesurée par comparaison avec les comportements prévus dans le formalisme de Langevin, et présentée à la section 3.3.

Après avoir précisé ces deux points, nous pourrions définir d'une part le paramètre qui contrôle ce que nous appellerons "température", ainsi que les temps qui caractérisent le bain thermique. Dans notre perspective d'étudier des réseaux soumis à un désordre gelé, ceci est important car il faudra mesurer l'effet du désordre et le comparer au désordre d'origine thermique, qu'il faut donc connaître le mieux possible.

Enfin, à la section 3.2.3, la température ayant auparavant été calibrée à l'aide d'un système d'énergie connue, nous développons un thermomètre *in situ* basé sur les mesures

⁴Signalons ici une dissymétrie dans la modélisation de notre problème : nous avons d'une part un pseudo bain thermique dont nous ne savons rien, si ce n'est qu'*a priori* il n'a rien d'un bain thermique puisque ces constituants élémentaires sont rigidement liés, mais qui manifeste sa présence qu'au travers de son interaction avec nos billes. D'autre part, ces billes ne contribuent en rien à l'entretien de ce bain thermique : l'interaction interbilles n'est pas dissipative et donc n'est pas du tout de même nature que les interactions permettant d'atteindre un équilibre thermique, et par ailleurs la force réciproque exercée sur le support par les billes est d'impact complètement négligeable, du fait des rapports des masses entre les billes et le support.

des fluctuations de positions d'une bille dans un puits de potentiel.

3.2 L'état stationnaire

3.2.1 Distribution des vitesses

Lorsque le dispositif est agité avec une amplitude donnée, les billes posées sur le wafer, qu'elles soient libres ou en interaction électrostatique, acquièrent un mouvement aléatoire dont la distribution de vitesses se révèle être très rapidement stationnaire et gaussienne. Elle est donc conforme à la distribution des vitesses dans un bain thermique. Ainsi que le montre la figure 3.1, la largeur augmente avec A . Elle est en revanche indépendante de V_0 ⁵, ainsi que de la position de la particule sur le wafer. Ce dernier point prouve que cette agitation est homogène sur l'ensemble du dispositif.

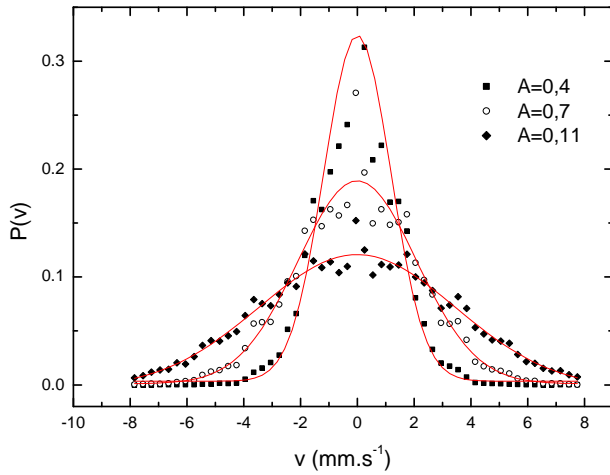


FIG. 3.1 : Distributions de vitesses $P(v)$ de billes piégées dans un puits de potentiel, pour 3 agitations A (unité arbitraire). Les courbes pleines montrent l'ajustement des données avec une loi gaussienne. Les écarts mesurés pour les petites vitesses sont dus à la pixelisation des images.

La mesure de la largeur des distributions permet, à travers la relation $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = k_B T$, d'estimer l'ordre de grandeur de ce que sera notre température effective. Nous trouvons, selon les valeurs de A , des valeurs situées entre 10^{11} K et 10^{12} K, ce qui n'a pas d'autre signification que d'indiquer l'ordre de grandeur des énergies mises en jeu dans notre système.

⁵Oltre le point fondamental que la vitesse quadratique ne dépend pas de la forme du puits dans lequel se trouve une bille, une autre dépendance avec V_0 aurait pu être à craindre : il existe en effet une force électrostatique d'attraction des billes vers l'électrode supérieure, ce qui pourrait modifier l'intensité des frottements. Si cela n'est pas non plus gênant *a priori* puisque ceci pourra être pris en compte dans la calibration de la température qui a été faite pour différents V_0 , cela pourrait jouer un rôle lorsque nous créerons différentes zones sur l'électrode supérieure pour les porter à des potentiels différents. On pourrait penser alors que la température effective d'une bille dépende de la zone sous laquelle elle se trouve. Cependant, si l'on prend la charge d'une bille estimée au chapitre 2 et l'écart entre les champs électriques dans le condensateur vide lorsqu'on fait varier V_0 (typiquement V_0 variera de 200 V d'une zone à l'autre), le différentiel d'intensité de cette force est de l'ordre de 10^{-6} N, ce qui est plus petit que le poids, $2,2 \cdot 10^{-5}$ N, et pourra en réalité être tenu pour négligeable car au niveau d'une bille le champ sera beaucoup plus homogène qu'au niveau de l'électrode supérieure.

Par la suite, nous n'utiliserons pas une telle méthode pour mesurer la température effective, car elle présente l'inconvénient de dépendre du pas de temps de l'acquisition et de la limitation qui existe sur sa valeur minimale. En effet, la vitesse instantanée d'une particule peut au mieux être estimée à partir de la différence entre deux positions successives. Or, le pas de temps d'acquisition minimal est 10 ms ; au regard de la plage de fréquences utilisée pour agiter notre système (0-200 Hz), il est clair que dans ce laps de temps, nos billes vont subir des changements de direction, et que par conséquent l'estimation de leur vitesse va être entachée d'erreur. À titre d'exemple, signalons qu'en reprenant les données de la figure 3.1 et en mesurant les vitesses en se basant sur un pas de temps de 15 ms puis de 30 ms, l'erreur dans l'estimation de T est de l'ordre de 10% !

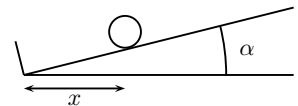
L'existence d'un état stationnaire prouve cependant que, dans le système agité, les pertes par frottement sont exactement compensées par le transfert d'impulsion à travers ces mêmes frottements. Peut-il être néanmoins vu comme un système en contact avec un thermostat et obéissant à la statistique de Boltzmann ? Pour nous en convaincre, nous étudions deux cas simples : un système présentant un spectre d'énergie continu, dont la simplicité nous permettra par ailleurs de calibrer notre température, puis un système pouvant être assimilé à un système discret à deux niveaux.

3.2.2 Statistique de Boltzmann

Cas d'un système continu : calibration de la température

L'enjeu est ici double : nous voulons montrer que la loi de Boltzmann est bien vérifiée pour un système constitué par nos billes mais également identifier le lien, s'il existe, entre ce que nous appellerons température et le paramètre d'agitation que nous contrôlons⁶, l'amplitude A des vibrations des haut-parleurs. Par ailleurs, nous souhaitons utiliser un système dont l'énergie est connue afin d'obtenir une échelle pour notre température. Pour limiter les erreurs, nous avons choisi un système plus simple à mettre en œuvre ne faisant intervenir que l'énergie potentielle de pesanteur dont nous connaissons très précisément l'expression.

Ce système est simplement constitué du wafer usuel sur lequel nous avons posé un cadre de confinement carré. L'ensemble est légèrement incliné d'un angle $\alpha = 25'$ par rapport au plan hori-



⁶Nous n'avons pas testé, au cours de ce travail, l'effet d'une modification de la plage de fréquence du bruit blanc, l'obtention d'une température n'étant pas une fin en soi, mais un outil permettant le développement de notre dispositif pour explorer des problématiques où la température est présente naturellement.

zontal autour d'un des côtés du confinement⁷. Aucune force d'origine électrostatique n'est appliquée. La bille rebondissant de manière élastique sur les parois latérales, le problème peut être considéré comme unidimensionnel. Son énergie $\mathcal{E}(x)$ vaut $mgx \tan \alpha$, où le paramètre x mesure la distance de la bille au bord inférieur, sur lequel elle rebondit. La figure 3.2(a) représente la densité de présence de la bille à la distance x du bord pour une amplitude d'agitation $A = 1,0$ (L'unité de A est une unité arbitraire lue sur le potentiomètre de l'alimentation des haut-parleurs). L'ajustement avec la loi de Boltzmann donnant la densité de probabilité en x ,

$$P(x) = \frac{mg \tan \alpha}{k_B T} \exp \left[- \frac{\mathcal{E}(x)}{k_B T} \right], \quad (3.1)$$

où T est la variable d'ajustement, est très bon. Une adéquation similaire est trouvée pour toutes les valeurs de A correspondant à notre intervalle de travail. La loi de Boltzmann est bien vérifiée pour ce système simple : nous pouvons donc considérer que le système est en contact avec un thermostat dont la température est donnée par l'ajustement à la loi de Boltzmann ou, plus simplement par la suite, par la valeur moyenne $\langle x \rangle$.

Par ailleurs, nous observons que cette température effective T augmente avec A . La connaissance de tous les autres paramètres dans la loi (3.1) nous donne ainsi une calibration $T = f(A)$ de la température en fonction de l'amplitude d'agitation A . En l'occurrence, T varie de manière affine avec A .

Précisons deux points au sujet de l'intervalle d'étude de A . Si $A < 0.2$, l'agitation n'est pas suffisante pour vaincre les frottements statiques ; au delà, ceux-ci sont vaincus et le mouvement de la bille permet d'explorer correctement les états accessibles⁸. Les frottements dynamiques jouent alors à la fois un rôle de dissipation d'énergie et de transmission d'impulsion qui sont à la base de la notion d'équilibre thermique. Par ailleurs, au delà de la valeur $A = 1,4$, des instabilités mécaniques apparaissent au niveau de la réponse des haut-parleurs.

Notons enfin que la calibration obtenue ici, ainsi que les bornes pour A , ne restent valables que si la chaîne de transfert entre l'alimentation des haut-parleurs et les billes n'est pas modifiée. Les raisons principales d'une telle modification sont le vieillissement des membranes des haut-parleurs, la modification des différents liens mécaniques entre les différentes pièces de la chaîne, mais aussi la modification de la masse du support, qui est inévitable dès lors que l'on modifie la forme du confinement. C'est pourquoi il s'est avéré

⁷Une méthode semblable de calibration a été utilisée par Pouligny *et al.* [61], en utilisant un bol parabolique ; à titre de vérification, nous avons également utilisé ce système pour vérifier l'adéquation avec la loi de Boltzmann, mais ce système ne pouvait être utilisé pour calibrer la température, car la surface du support était de nature différente de celle du wafer, et donc le transfert d'énergie non équivalent.

⁸Une légère hystérèse apparaissant autour de cette valeur seuil lorsqu'on augmente puis qu'on diminue A prouve qu'il s'agit bien d'un phénomène dû à la différence entre frottements statiques et frottements dynamiques.

nécessaire de mettre en place un protocole de mesure *in situ* de la température, calibré par la relation $T = f(A)$ que nous venons d'établir.

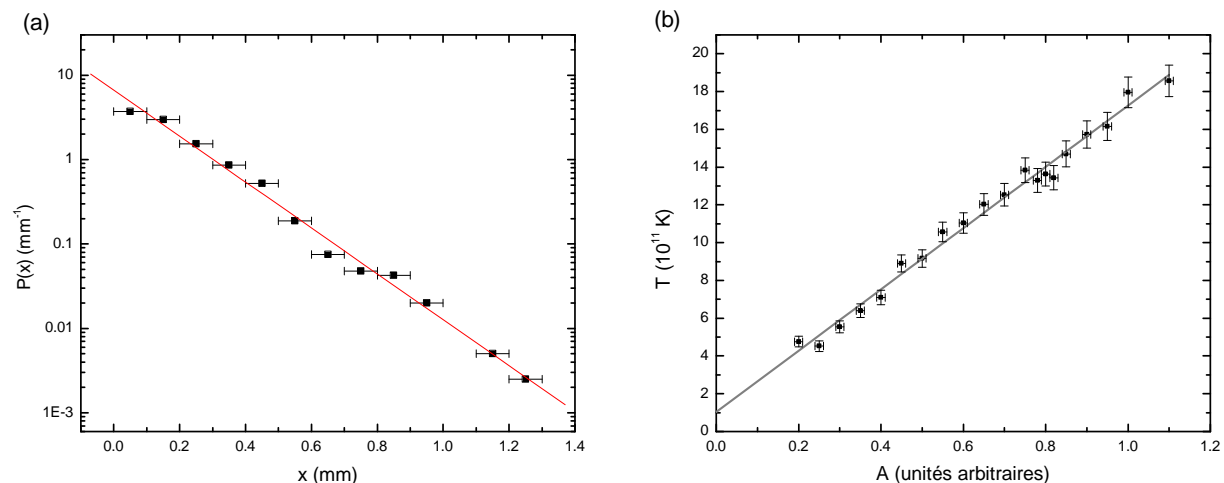


FIG. 3.2 : (a) : Densité de probabilité de présence P pour une bille sur un plan incliné, et ajustement à un paramètre avec la loi de Boltzmann (3.1). (b) : Calibration $T = f(A)$ de la température à l'aide de la bille sur le plan incliné. T est fonction affine de A : $T = 16,22 \cdot 10^{11} A + 1,03 \cdot 10^{11}$ K.

Cas d'un système à deux niveaux

Les systèmes constitués d'un faible nombre N de billes confinées circulairement utilisés au chapitre 2 présentent plusieurs configurations d'équilibre bien identifiées. L'étude de ces états stables et métastables offre la possibilité, avec un système simple correspondant à une situation plus proche de celles que nous allons explorer par la suite, de valider notre concept de température effective et d'explorer les possibilités qu'il nous offre.

Les états d'équilibre de tels systèmes sont définis par une configuration en couche facilement identifiable. La transition entre ces états, obtenue le plus souvent par le saut d'une seule bille entre deux couches, est très rapide, de telle sorte qu'on peut considérer le spectre en énergie de ce système comme discret, en ne retenant que les niveaux d'énergie correspondant à un minimum local de l'énergie dans l'espace des positions. Il ne faut pas oublier, cependant, que pour passer d'un état à l'autre le système doit passer par un point col définissant la barrière énergétique à franchir pour pouvoir transiter dans l'autre état.

Pour simplifier le problème, nous nous focalisons dans un premier temps sur le cas particulier que sont les systèmes n'ayant que deux niveaux (réellement ou bien parce que les autres niveaux ne peuvent pas être atteints au vu de l'énergie thermique injectée dans le système). Les systèmes à 5, 6 et 9 billes en sont de bons exemples. Leurs états fondamentaux, d'énergie \mathcal{E}_0 , sont respectivement (5), (1-5) et (1-8) et les premiers états

excités — les seuls existants pour 5 et 6 billes et le seul accessible pour 9 billes [51]—, d'énergie \mathcal{E}_1 , sont (1-4), (6) et (2-7). Nous désignons l'énergie du point col par \mathcal{E}_s .

À titre d'exemple, la figure 3.3 représente les trois configurations spatiales correspondant aux états d'équilibre et au point col pour $N = 6$.

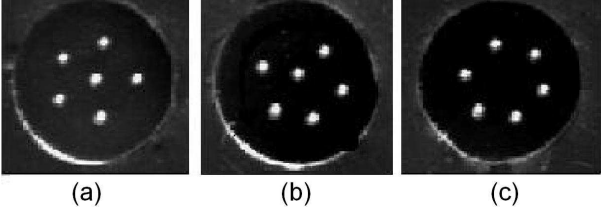


FIG. 3.3 : Configurations des trois extrema d'énergie pour $N = 6$. (a) : État fondamental. (b) : Point col⁹. (c) : Premier état excité.

En maintenant les systèmes à température constante, nous pouvons mesurer les temps de résidence dans chaque état τ_i ¹⁰. Les expériences sont menées sur un temps suffisamment long pour obtenir une statistique satisfaisante. Le temps de résidence typique dans une configuration étant de l'ordre de 1 à 10 s, une expérience menée sur 4000 s permet d'obtenir une distribution expérimentale des temps de résidence régulière.

Un exemple de distribution de temps de résidence dans les deux niveaux est donné sur la figure 3.4. On constate qu'au delà d'une valeur de l'ordre de la seconde, la probabilité $P(\tau)$ de rester un temps τ dans la configuration est exponentiellement décroissante.

Cette distribution est conforme à la théorie si on suppose qu'à un instant donné la probabilité d'échappement de l'état i est faible (ce qui est le cas dès que $\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_i \ll k_B T$) et que chaque essai de transition est indépendant du précédent (hypothèse raisonnable dès lors que le temps de corrélation du bain thermique est négligeable devant le temps caractéristique d'oscillation dans le puits, ce qui sera justifié dans la section 3.3). Dans ce cas, la distribution statistique de τ est caractérisée par la loi de Poisson

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_K} \exp(-\tau/\tau_K), \quad (3.2)$$

qui présente toutefois une coupure aux temps courts, conséquence de l'existence d'un temps d'essai de sortie du puits τ_e non nul [63].

Le temps de résidence moyen $\langle \tau \rangle = \tau_K$, dit temps de Kramers, est contrôlé par la barrière énergétique à franchir $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_s - \mathcal{E}_i$ et par la température T via la relation, valable lorsque $T < \Delta\mathcal{E}$ [64] :

$$\tau_K = \tau_e \exp(\Delta\mathcal{E}/k_B T). \quad (3.3)$$

⁹Le point col a été identifié comme tel par analogie avec les travaux numériques de Bolton et Rössler portant sur des particules coulombiennes confinées [62].

¹⁰Pour mesurer ces temps, les configurations sont détectées automatiquement : il s'agit à chaque instant de définir ce qu'est une couche et de compter le nombre de billes qui s'y trouvent. Nous considérons pour cela comme rayons de référence des couches les rayons des couches de la configuration correspondant à l'état fondamental, puis considérons comme limite radiale de chaque couche la moyenne entre son rayon et le rayon de sa voisine. Il ne reste alors qu'à détecter les billes situées dans la zone ainsi délimitée.

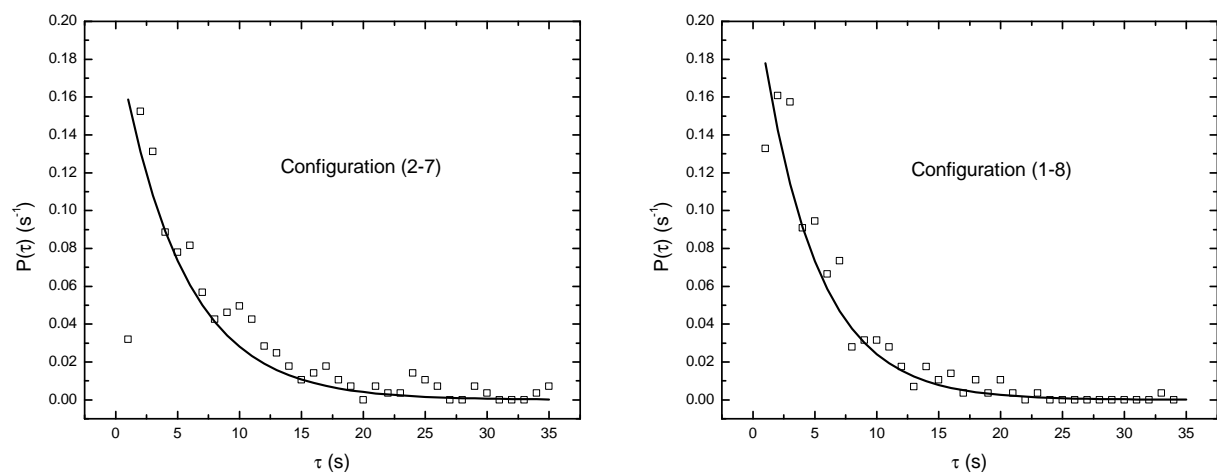


FIG. 3.4 : *Distribution $P(\tau)$ des temps de résidence dans chacune des configurations accessibles pour $N = 9$. L'ajustement à une loi de Poisson est montré par les traits pleins.*

Selon l'importance de l'amortissement dans le bain thermique, l'expression de τ_e peut prendre plusieurs formes, mais dans tous les cas, elle dépend de la forme du puits (profondeur et courbure), de la température et du coefficient d'amortissement γ , qui sera introduit dans la section 3.3.

Si le formalisme de Kramers, qui s'appuie sur la loi de Boltzmann, s'applique à notre système, le rapport entre les valeurs moyennes des temps de résidence τ_i dans les états i , qui découlent de la mesure précédente, doit vérifier la loi

$$\frac{\langle \tau_0 \rangle}{\langle \tau_1 \rangle} \propto \exp [(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)/k_B T], \quad (3.4)$$

où $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0$ est la différence d'énergie entre les deux niveaux.

La figure 3.5 montre pour les systèmes constitués par 5 et 6 billes, le rapport $\frac{\langle \tau_0 \rangle}{\langle \tau_1 \rangle}$ en fonction de la température. Le bon ajustement avec la relation de Kramers permet de confirmer que notre système obéit bien, entre autres, à la loi de Boltzmann¹¹.

On peut se demander si ce formalisme reste valable lorsqu'on a un système à plus de deux niveaux : lorsqu'on est par exemple dans l'état fondamental, comment varie alors le temps moyen de résidence avec la température ? Puisqu'il y a plusieurs manières de quitter cet état, chacune étant caractérisée par une barrière d'énergie et un temps d'essai, comment ces modes d'échappement sont-ils pris en compte ? Pour répondre empiriquement à la question, nous avons testé la robustesse de l'équation de Kramers dans le cas de trois systèmes à trois niveaux présentant des caractéristiques très différentes quant aux niveaux

¹¹Notons que cela permet également de mesurer directement la différence d'énergie entre les deux niveaux, et surtout, en étudiant $\langle \tau_i \rangle$, de mesurer également la hauteur de barrière, quantité difficile à mesurer autrement car le point col n'est ni un minimum ni un maximum d'énergie.

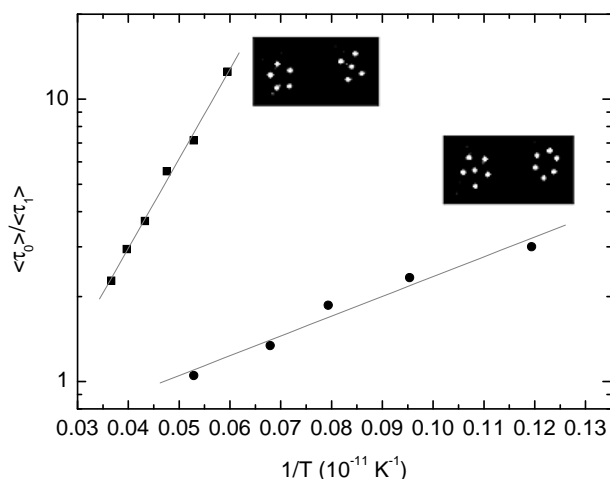


FIG. 3.5 : Rapport $\langle \tau_0 \rangle / \langle \tau_1 \rangle$ entre les temps de résidence moyens pour les systèmes à 5 billes (■) et 6 billes (●) (échelle log) en fonction de l'inverse de la température. La pente donne la différence d'énergie entre les deux niveaux. Les inserts montrent les configurations des états fondamentaux (à gauche) et excités.

relatifs des configurations d'équilibre et aux barrières entre ces niveaux¹². Il s'agit des mêmes îlots confinés, mais cette fois-ci avec 18, 19 et 20 billes. Les trois configurations pour ces systèmes sont, par ordre croissant d'énergie :

- pour 18 billes : (1-6-11), (1-5-12), (0-6-12) ;
- pour 19 billes : (1-6-12), (1-7-11), (1-5-13) ;
- pour 20 billes : (1-6-13), (1-7-12), (2-6-12) .

Dans la gamme de températures que nous pouvons explorer, les trois systèmes peuvent accéder facilement à ces trois premiers états, néanmoins seuls les deux premiers sont occupés suffisamment longtemps pour pouvoir établir des statistiques précises sur le temps de résidence¹³. Les temps moyen de résidence dans l'état fondamental et l'état excité en fonction de la température sont reportés sur la figure 3.6. Nous pouvons constater qu'en dépit de l'existence d'un troisième niveau, l'ajustement à une loi de type loi de Kramers est bon, la barrière énergétique étant cette fois-ci une barrière effective prenant en compte les différentes voies de sortie du niveau.

Expérimentalement, le niveau fondamental pour $N = 19$ est celui présentant la plus forte barrière¹⁴ ($2,6 \cdot 10^{-10}$ J), les barrières pour les états fondamentaux de $N = 18$ et $N = 20$ étant respectivement $1,4 \cdot 10^{-10}$ J et $1,5 \cdot 10^{-10}$ J. Pour le premier état excité, les hauteurs de barrières sont, respectivement pour $N = 19, 18$ et 20 : $1,4 \cdot 10^{-10}$ J, $8,8 \cdot 10^{-11}$ J et $1,3 \cdot 10^{-10}$ J.

Si on considère, en première approximation, que les niveaux d'énergie effectifs correspondant aux points cols sont les mêmes pour l'état fondamental et pour l'état excité, la différence entre les deux hauteurs de barrière donne une estimation de la différence

¹²Ces systèmes seront nos systèmes d'étude privilégiés lors de l'étude de la dynamique d'îlots menée au chapitre 9.

¹³Pour autant, ce ne sont pas des systèmes à deux niveaux. Le fait de pouvoir quitter un état pour aller dans le second état excité, même pour un court instant, modifie la distribution des temps de résidence.

¹⁴Ce point, lié à la commensurabilité du nombre de billes sur chaque couche, sera plus amplement discuté au chapitre 9 lorsque nous présenterons la dynamique de ces îlots.

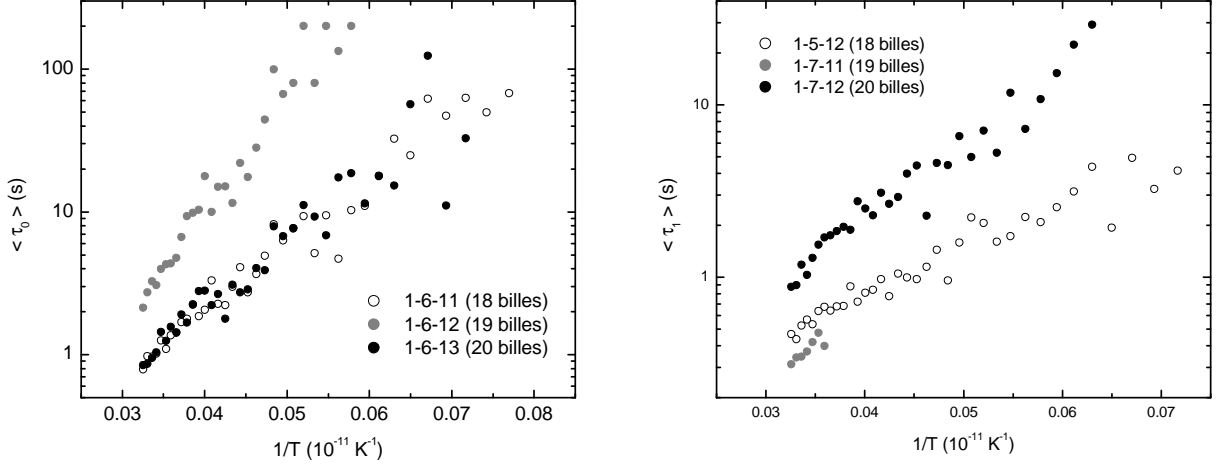


FIG. 3.6 : Cas des îlots $N = 18, 19, 20$. Temps de résidence moyen dans l'état fondamental ($\langle \tau_0 \rangle$) et dans l'état excité ($\langle \tau_1 \rangle$) (échelle log), en fonction de l'inverse de la température. La pente donne directement la hauteur de barrière à franchir pour sortir de l'état.

N	\mathcal{E}_{th} (J)	$\Delta \mathcal{E}_{\text{th}}$ (J)	$\Delta \mathcal{E}_{\text{exp}}$ (J)
18	$4, 1 \cdot 10^{-9}$	$1, 8 \cdot 10^{-11}$	$4, 8 \cdot 10^{-11}$
19	$4, 6 \cdot 10^{-9}$	$0, 9 \cdot 10^{-10}$	$1, 3 \cdot 10^{-10}$
20	$5, 3 \cdot 10^{-9}$	$0, 3 \cdot 10^{-11}$	$1, 5 \cdot 10^{-11}$

TAB. 3.1 : Énergies théoriques \mathcal{E}_{th} de l'état fondamental (le niveau 0 correspondant au condensateur vide) pour les trois valeurs de N : 18, 19, 20. Différences d'énergies théoriques $\Delta \mathcal{E}_{\text{th}}$ et expérimentales $\Delta \mathcal{E}_{\text{exp}}$ entre ce premier état excité et l'état fondamental.

d'énergie entre les deux niveaux ; Elle est plus faible pour $N = 20$ ($1, 5 \cdot 10^{-11}$ J) que dans les cas $N = 19$ ($1, 2 \cdot 10^{-10}$ J) et $N = 18$ ($4, 8 \cdot 10^{-11}$ J).

La proximité en énergie des deux premiers niveaux de $N = 20$, déjà discutée au chapitre 2, est cohérente avec les calculs de Campbell et Ziff pour une interaction logarithmique [51]. Notons enfin que les barrières d'énergie sont de l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison entre deux billes, ce qui indique que le coût d'une transition, opérée dans l'espace réel par le saut d'une bille d'une couche à une autre correspond essentiellement à une réorganisation locale autour des points de départ et d'arrivée de la bille.

La comparaison avec les différences d'énergie calculées théoriquement à partir de notre modélisation est présentée dans le tableau 3.1. La différence entre les deux déterminations reste faible au regard de l'énergie totale du système. À ce niveau, la mesure numérique de la différence d'énergie peut souffrir d'imprécision, d'autant plus que l'énergie de la bille centrale n'est absolument pas bien prise en compte dans le calcul, car nous avons développé l'énergie autour de $r \simeq R_c/2$, où R_c est le rayon de confinement. Par ailleurs,

expérimentalement, les erreurs dans la détermination de T , dans l'ajustement à la loi de Kramers, et les hypothèses faites pour pouvoir l'appliquer peuvent expliquer cet écart.

Ainsi, nous retenons surtout que les situations relatives des systèmes $N = 18, 19$ et 20 sont bien restituées¹⁵, ce qui montre que le formalisme de Kramers peut s'appliquer au cas de systèmes à trois niveaux.

Du point de vue de la qualification de la température, cette adéquation correcte entre d'une part des énergies de nature électrostatique et d'autre part des énergies mesurées par comparaison à une énergie thermique calibrée par une simple bille sur un plan incliné valide notre estimation de la valeur de la température effective. Nous avons bien une agitation thermique qui permet d'explorer, en particulier dans des systèmes en interaction électrostatique, les différents niveaux d'énergie conformément à la statistique de Boltzmann.

3.2.3 Mesure de la température effective

Pour des raisons liées aux nécessaires modifications que subit la chaîne de transmission entre les haut-parleurs et les billes, évoquées à la section 3.2.2, la même loi $T = f(A)$ établie précédemment ne peut être utilisée systématiquement pour déterminer la température. Une mesure *in situ* de la température s'impose. L'utilisation d'un système constitué par une bille sur un plan incliné qui serait associé à toute expérience pour mesurer T n'était guère pratique, puisqu'il aurait fallu l'isoler électriquement, et surtout contrôler l'inclinaison du plan alors que le reste de l'expérience doit être horizontal¹⁶.

Par ailleurs, rappelons que la solution naturelle consistant à mesurer la vitesse quadratique moyenne d'une bille se heurte à deux contraintes techniques : d'une part, lorsque les oscillations sont rapides, la mesure de la vitesse prise comme la différence entre deux positions peut être fortement altérée par l'impossibilité de détecter certains changements de direction. Cette méthode impose de plus de prendre systématiquement des images avec un pas de temps petit et régulier, ce qui peut être une contrainte expérimentale supplémentaire lorsqu'au contraire on désire obtenir des images de l'expérience décorrélées, donc suffisamment séparées temporellement.

Aussi, pour combiner la précision de la mesure d'une distribution de positions plutôt que de vitesses avec la nécessité de réaliser la mesure *in situ*, nous avons développé un "thermomètre" simple constitué d'une bille confinée dans un puits circulaire. L'excursion

¹⁵Le fait que nous arrivions à discriminer entre les deux configurations d'énergie très semblable de $N = 20$ est appréciable ; un autre exemple de cette sensibilité est donné par la discrimination qui a pu être réalisée entre les deux configurations d'énergie très proche obtenues pour 17 billes dans un confinement elliptique, qui sont présentées dans la figure 2.4.

¹⁶De plus, ceci aurait alourdi le dispositif qui aurait peut-être été moins réactif aux hautes fréquences du spectre de bruit blanc.

quadratique moyenne $\langle r^2 \rangle$ de la bille est directement reliée à la température, par une relation restant à calibrer. Ce thermomètre étant usiné dans le cadre de confinement de l'expérience en cours, la bille subit la même agitation que les billes de l'expérience, et est donc à la même température effective.

Afin de minimiser les erreurs de mesure, nous avons pris le soin d'optimiser le rayon du confinement : si le cadre est trop petit, les mouvements de la bille sont trop faibles au regard de la pixelisation des images ; si le cadre est trop grand, la force de rappel vers le centre est trop faible et le mouvement aléatoire presque libre adopté par la bille augmente la taille de l'échantillonnage nécessaire pour bien restituer la valeur quadratique moyenne de sa position.

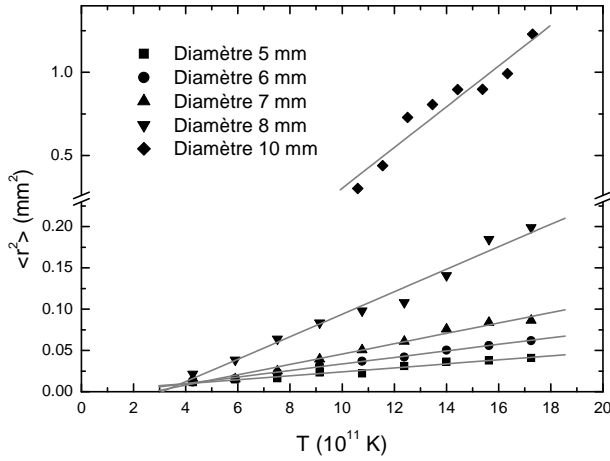


FIG. 3.7 : Rayons quadratiques moyens $\langle r^2 \rangle$ d'une bille en fonction de la température pour 5 diamètres du cadre circulaire de confinement, pour une tension $V_0 = 900$ V.

En utilisant les même haut-parleurs et un support de même masse que pour la calibration initiale de la température, nous avons mesuré les rayons quadratiques moyens $\langle r^2 \rangle$ d'une bille dans des puits de diamètre 5, 6, 7, 8 et 10 mm pour différents potentiels V_0 en fonction de la température (figure 3.7). Le comportement linéaire montre que le potentiel d'interaction est quadratique¹⁷. Nous avons retenu un thermomètre de diamètre 6 mm, pour lequel la relation $\langle r^2 \rangle \leftrightarrow T$ a alors été calibrée pour différents potentiels V_0 ¹⁸.

Ainsi, la correspondance $\langle r^2 \rangle \leftrightarrow T$, semblable à la relation $\langle v^2 \rangle \leftrightarrow T$, mais plus facile à mesurer, peut désormais être utilisée dans tous nos systèmes pour mesurer *in situ* la

¹⁷En particulier, les $\langle r^2 \rangle$ renormalisés par V_0^2/T sont égaux pour un diamètre donné. En revanche, les courbes renormalisées par R_c^2 , où R_c est le rayon du cadre, ne se juxtaposent pas, ce qui indique qu'il existe une autre distance caractéristique dans le système qui est, comme nous l'avons démontré, la hauteur h du condensateur.

¹⁸Ceci afin d'améliorer la statistique, $\langle r^2 \rangle$ étant proportionnel à V_0^2 .

température¹⁹.

3.3 Nature du bain thermique

Les mesures présentées dans les sections précédentes ont permis de qualifier l'état stationnaire associé à l'agitation mécanique et de définir une température effective. Nous souhaitons ici caractériser plus précisément cette agitation et qualifier le "bain thermique" effectif dans lequel "baignent" nos billes.

Cette exigence répond à deux objectifs. D'une part, il est nécessaire de connaître le plus précisément possible la nature du désordre imposé par l'agitation thermique, afin de pouvoir distinguer ses manifestations de celles du désordre "gelé" que nous souhaitons imposer aux cristaux de Wigner macroscopiques. D'autre part, un vrai bain thermique est caractérisé par des coefficients de viscosité et de diffusion : la connaissance des paramètres correspondants, s'ils existent, nous permettra d'apprécier quantitativement le mouvement de billes, en comparant les temps caractéristiques qui y sont liés avec les temps caractéristiques (typiquement des périodes d'oscillations) liés aux interactions électrostatiques²⁰.

Les constantes caractéristiques du bain thermique apparaissent naturellement dans le formalisme de Langevin, qui décrit notamment l'état transitoire précédant l'état stationnaire qui nous a intéressé jusqu'à présent. Plus précisément, ce formalisme permet de décrire le mouvement Brownien d'une particule de masse m dans un bain thermique constitué de particules de masse négligeable par rapport à m [65]. Après en avoir rappelé brièvement les principales hypothèses et les principaux résultats dans les cas d'une particule libre et d'une particule piégée, nous montrons expérimentalement que ce formalisme s'applique parfaitement à notre système ; nous en déduisons les principales caractéristiques de notre bain.

3.3.1 Résultats principaux de l'équation de Langevin

Nous présentons ici les principaux résultats que l'on peut déduire de l'équation de Langevin et qui nous sont utiles dans notre étude, en renvoyant à l'annexe B pour le détail des calculs.

¹⁹Nous avons estimé l'incertitude sur la détermination de T à partir de la mesure de la distribution des positions d'une bille. Cette incertitude a plusieurs sources. D'une part, il y a l'incertitude sur la position d'une bille liée à la pixelisation, ainsi qu'à la réapparition des frottements statiques pour les faibles agitations. D'autre part, une légère hétérogénéité dans la nature de la surface des différentes billes ou de la surface du wafer peut modifier cette distribution. Compte-tenu de ces facteurs, l'incertitude sur la mesure de la température effective a été estimée à $0,5 \cdot 10^{11}$ K.

²⁰Par exemple, le temps d'essai τ_e apparaissant dans le formalisme de Kramers dépend à la fois des constantes liées au bain et du profil énergétique autour des particules.

Nous considérons uniquement ici le cas d'un déplacement unidimensionnel d'une particule de masse m et de coordonnée $x(t)$ placée éventuellement dans un puits parabolique de raideur K . La force exercée par le bain thermique est le résultat d'un grand nombre de chocs entre les particules constitutives de ce bain et la particule lourde. Elle peut être décomposée entre une force de frottement de type visqueux $-\alpha\dot{x}$ et une force fluctuant rapidement, F , caractérisée par la donnée de ses moments considérés à l'aide d'une moyenne d'ensemble. Si aucune direction n'est privilégiée dans le bain, on a $\forall t, \langle F(t) \rangle = 0$, où $\langle \rangle$ désigne une moyenne d'ensemble.

La seconde loi de Newton appliquée au centre de masse de la particule donne :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - Kx + F(t), \quad (3.5)$$

L'hypothèse principale du formalisme de Langevin, à savoir l'écart entre la masse de la grosse particule et celles des particules du bain, conduit à l'hypothèse que la force F fluctue avec un temps caractéristique τ_c bien plus faible que le temps de relaxation $\tau_R = \gamma^{-1} = m/\alpha$ caractérisant les variations de vitesse de la particule. Nous pouvons alors écrire, en supposant que le bain est dans un état stationnaire²¹, que $\forall t, t' \langle F(t)F(t') \rangle = g\delta(t-t')$.

Notons que γ a la même origine microscopique que la force F , c'est-à-dire les nombreuses interactions avec les particules du bain, par conséquent l'on doit s'attendre à ce que γ dépende de g , donc, comme nous allons le préciser, de T .

Dans ce cadre-là, les grandeurs caractéristiques mesurées classiquement sont les moyennes quadratiques du déplacement et de la vitesse, dépendantes du temps :

$$\delta x^2(t) \equiv \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle, \quad (3.6)$$

$$\delta v^2(t) \equiv \langle (v(t) - \langle v(t) \rangle)^2 \rangle, \quad (3.7)$$

où la moyenne d'ensemble est prise sur un ensemble de trajectoires ayant les mêmes conditions initiales (x_0, v_0) . Les comportements de ces deux fonctions renseignent sur les constantes caractéristiques de l'équation de Langevin γ et g .

Cependant, d'un point de vue expérimental, cette définition pose problème, puisqu'il est impossible de contrôler les conditions initiales. En pratique, la moyenne d'ensemble réalisée en prenant en compte un certain nombre de trajectoires expérimentales revient à moyennner non seulement sur la loi de F , mais aussi fatalement sur la distribution des conditions initiales x_0 et v_0 .

Nous désignons désormais par $\langle\langle \rangle\rangle$ cette nouvelle moyenne. Si l'on veut néanmoins obtenir des informations sur les constantes caractéristiques, nous voyons qu'il faut modifier légèrement les grandeurs à mesurer. En effet, dans un puits, il est clair qu'à tout instant t , nous aurons $\langle\langle x(t) \rangle\rangle = 0$ et $\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle$ constant et égal à la moyenne quadratique de

²¹Ceci est vérifié dès lors que l'équilibre thermique est atteint, ce qui expérimentalement est presque immédiat.

x_0 . Nous perdons donc toute information sur l'évolution temporelle. Il faut donc plutôt considérer la variable $x(t) - x_0$ pour rendre compte de la causalité et du fait que toutes les conditions initiales ne sont pas équivalentes. Nous calculerons donc le déplacement quadratique moyen (d.q.m.) $\Delta x^2(t)$ et la vitesse quadratique moyenne $\Delta v^2(t)$ suivants :

$$\Delta x^2(t) \equiv \langle\langle [x(t) - x_0 - \langle\langle x(t) - x_0 \rangle\rangle]^2 \rangle\rangle, \quad (3.8)$$

$$\Delta v^2(t) \equiv \langle\langle [v(t) - \langle\langle v(t) \rangle\rangle]^2 \rangle\rangle. \quad (3.9)$$

En pratique, les réalisations de $x(t) - x_0$ sont obtenues en décalant l'origine des temps sur une même trajectoire, c'est à dire en considérant les grandeurs $x(t + t_0) - x(t_0)$, où les t_0 sont suffisamment espacés pour obtenir des trajectoires indépendantes.

Il reste cependant à s'assurer que l'ensemble des échantillons choisis permet de décrire fidèlement les distributions théoriques des conditions initiales.

Pour une particule libre, la distribution des x_0 est uniforme, donc impossible à décrire avec un échantillonnage fini, mais comme toutes ces positions sont équivalentes, la procédure choisie revient à réaliser des trajectoires partant du point 0. En revanche, pour une particule piégée, toutes les positions de départ ne sont pas équivalentes, mais comme le régime stationnaire est vite atteint et que les trajectoires sont bornées, on décrit parfaitement la distribution lorsqu'on prend différents points de départ dans une trajectoire.

Enfin les distributions de vitesses étant dans les deux cas des gaussiennes, elles sont également bien décrites²².

La résolution de l'équation de Langevin permet d'abord de calculer les valeurs moyennes $\langle x(t) \rangle$ et $\langle v(t) \rangle$ ainsi que $\delta x^2(t)$ et $\delta v^2(t)$, dont les valeurs pour t infini renseignent sur l'état stationnaire et donc sur la distribution de x_0 et v_0 .

À partir de ces données il est possible de calculer $\Delta x^2(t)$ et $\Delta v^2(t)$, les grandeurs mesurables expérimentalement. Le calcul détaillé est présenté dans l'annexe B : après avoir rappelé les principaux résultats dans le cas d'une particule libre, nous nous sommes concentrés sur le cas d'un amortissement faible ($\gamma < 2\omega_0$, où $\omega_0 = \sqrt{K/m}$), cas dans lequel se situeront nos principaux cas expérimentaux.

Pour une particule libre, les principaux résultats sont :

$$\Delta x^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{m} t^2 \quad \text{et} \quad (3.10)$$

$$\Delta x^2(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 2Dt, \quad (3.11)$$

où D est la constante de diffusion, définie par $D = \frac{g}{2m^2\gamma^2}$.

²²Le fait que les distributions soient gaussiennes ne découle pas de l'équation de Langevin, il faut passer par les équations de Fokker-Planck pour le démontrer.

On a de plus la relation de fluctuation-dissipation

$$m\gamma D = k_B T. \quad (3.12)$$

Cette formule résume à elle seule la nature microscopique de l'agitation thermique : l'état stationnaire, défini par la température T , est le fruit d'une compétition entre les frottements visqueux, représentés par γ et les impulsions motrices transmises par le bain, représentées par D . C'est le poids relatif de chacun de ces termes que l'étude de la diffusion libre et de la diffusion dans un puits va nous permettre de déterminer.

Pour une particule piégée, avec un amortissement faible, on trouve que :

$$\Delta x^2(t) = 2\frac{k_B T}{K} \left[1 - e^{-\gamma t/2} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right) \right], \quad (3.13)$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. Cette expression est, à une constante additive près, identique à la fonction de corrélation de position²³. Par ailleurs, on a en particulier :

$$\Delta x^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{m} t^2 \quad \text{et} \quad (3.14)$$

$$\Delta x^2(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 2\frac{k_B T}{K}. \quad (3.15)$$

On peut constater qu'aux temps courts la particule ne ressent pas les effets du puits, le comportement étant indépendant de ω_0 , alors que comme attendu, le déplacement sature aux temps longs.

3.3.2 Confrontation à l'expérience

Afin de savoir si, au delà de l'existence d'un état stationnaire défini par une température, notre "bain thermique" se comporte bien comme tel, nous étudions le mouvement d'une bille dans les deux cas simples correspondant à la théorie décrite ci-dessus. Le pas de temps entre deux images est fixé à la valeur de 15 ms pour bien explorer le comportement aux temps courts.

Considérons tout d'abord le mouvement libre d'une bille placée sur le wafer, sans aucun potentiel appliqué. Quelle que soit la température, le d.q.m. $\Delta x^2(t)$, où x est l'abscisse de la bille, présente les mêmes variations typiques, présentées sur la figure 3.8(a). Aux temps longs, le d.q.m. augmente linéairement avec le temps, alors qu'aux temps courts, il croît

²³Par souci de cohérence, nous préférons toutefois étudier le déplacement quadratique moyen que la fonction de corrélation, plus fréquemment employée. En effet, au chapitre 10, nous nous intéresserons à de la diffusion de particules en interaction dans un canal, et les deux cas extrêmes que sont la diffusion libre et la diffusion piégée fourniront deux points de repère dans la discussion.

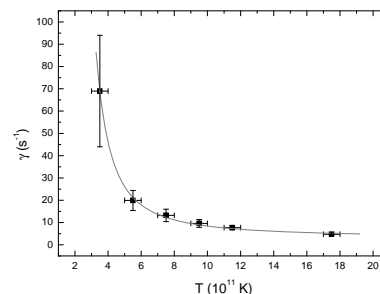
selon une loi en t^β , avec $1 < \beta < 2$. Le comportement aux temps longs est en accord avec la théorie et permet, par ajustement avec la loi (3.11), de déterminer la constante de diffusion D . La température ayant été mesurée indépendamment, le coefficient d'amortissement γ peut être déterminé à partir de la relation de fluctuation-dissipation (3.12). Ce coefficient, qui dépend légèrement de la température²⁴, reste, dans la plage étudiée²⁵, de l'ordre de 10 s^{-1} . Le temps de relaxation $\tau_R = \gamma^{-1}$ qui détermine le changement de régime entre les temps longs et les temps courts, est donc de l'ordre de 100 ms, ce qui est cohérent avec une estimation grossière sur la courbe de la figure 3.8(a). Cette valeur, qui n'est pas très éloignée du pas de temps expérimental, explique pourquoi le comportement en t^2 des temps courts ne peut être observé totalement : nous ne pouvons accéder qu'au régime de transition entre le comportement quadratique et le comportement linéaire.

L'adéquation au formalisme de Langevin et la cohérence rendue par l'équation de fluctuation-dissipation nous confortent donc dans l'idée que l'agitation médiée par les frottements avec le wafer est équivalente à une agitation thermique. L'observation du mouvement d'une bille dans un puits harmonique 1D confirme cette analogie. Nous avons

²⁴Le coefficient d'amortissement est en réalité une fonction décroissante de la température. Ce comportement permet de pousser un peu plus loin l'analogie entre notre système de transmission de l'agitation et un bain thermique. En effet, dans un vrai bain thermique, le comportement de γ en fonction de la température est complètement différent selon que le bain est gazeux ou liquide [66]. Dans un gaz, l'augmentation de la température se traduit essentiellement par l'augmentation de la vitesse quadratique moyenne, donc de la viscosité. Au contraire, dans un liquide, la diffusion d'une particule peut se voir comme une succession de sauts thermiquement activés : la viscosité décroît donc avec la température. Le comportement de γ est alors donné par la loi de Guzman-Andrade $\gamma = Ae^{B/T}$, qui rend très bien compte du comportement des liquides simples.

Quelques valeurs de γ en fonction de la température sont reportées sur la figure ci-contre. Ces valeurs ont été mesurées par ajustement à la loi (3.13) dans le cas de particule piégées dans la couronne décrite dans le texte. Pour les grandes valeurs de γ , le faible nombre d'oscillations diminue la précision de l'ajustement car le paramètre ω devient non significatif. Le bon ajustement de nos données expérimentales avec la loi de Guzman-Andrade (traits pleins) tend à prouver que notre bain est de type liquide. Bien sûr, le faible intervalle de température et le nombre de paramètres d'ajustement ramènent cette assertion essentiellement au rang de vue de l'esprit, néanmoins ce comportement pourrait permettre de mieux comprendre la nature des processus microscopiques, liés à la nature de l'alimentation des haut-parleurs, de la transmission, mais aussi des surfaces en contact, qui permettent *in fine* d'obtenir une agitation thermique en tous points semblables à une réelle agitation thermique. En particulier, nous pouvons noter que le formalisme de Langevin s'applique alors que $\tau_R \simeq 100 \text{ ms}$ semble ne pas être si important par rapport au temps de collision τ_c caractéristique du bain, si on accepte l'idée qu'il est donné par la moyenne des fréquences d'agitation du support, soit 100Hz. On aurait donc $\tau_c \simeq 10 \text{ ms}$. Une analyse plus poussée pourrait cependant permettre de montrer que le τ_c effectif est plus faible.

²⁵Nous avons travaillé avec une température $2.10^{11} \text{ K} < T < 18.10^{11} \text{ K}$, car au delà la bille atteint trop vite le bord du dispositif.



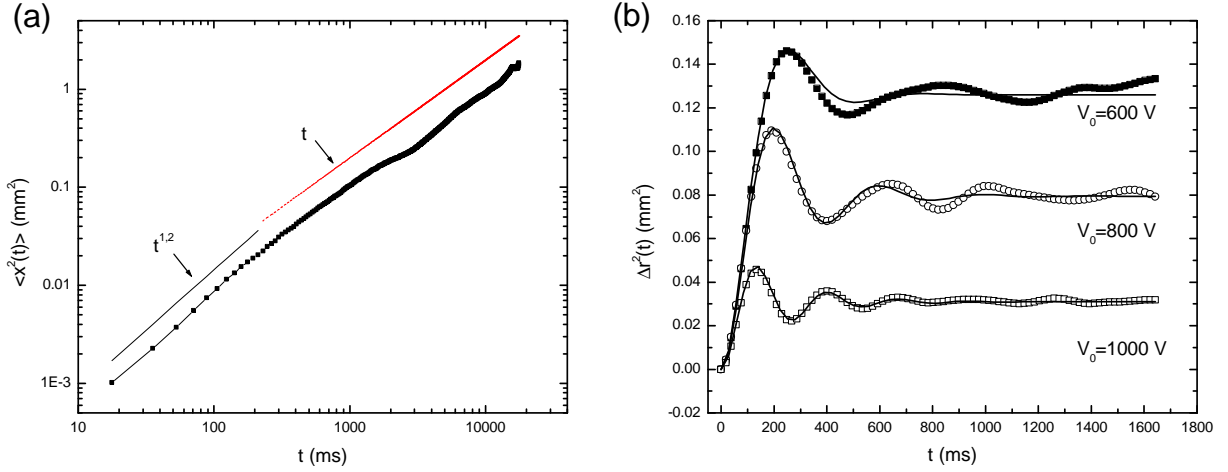


FIG. 3.8 : (a) Déplacement quadratique moyen typique d'une bille libre (échelle log) en fonction du temps. La moyenne d'ensemble a été calculée sur environ 2000 trajectoires. (b) Déplacement quadratique moyen radial d'une bille dans un puits de largeur 2 mm pour 3 potentiels électrostatiques appliqués différents. Les points correspondent aux données expérimentales, obtenues en moyennant sur plusieurs milliers de trajectoires. Les traits pleins montrent l'ajustement à l'équation (3.13). On peut noter que la fréquence augmente avec le potentiel appliqué, alors que le temps caractéristique de relaxation τ_R reste sensiblement le même.

pour cela utilisé le dispositif qui sera étudié plus en détail au chapitre 10, à savoir un confinement en forme de couronne de rayons intérieur et extérieur valant respectivement 3 et 5 mm. Si l'on considère uniquement le mouvement radial d'une bille dans ce confinement, nous nous plaçons dans le cas d'une particule piégée dans un puits unidimensionnel de largeur 2 mm. Le d.q.m. radial $\Delta r^2(t)$ d'une telle bille est représenté sur la figure 3.8(b) pour trois valeurs du potentiel V_0 . Comme prévu par l'équation (3.13), nous observons un accroissement rapide suivi par des oscillations amorties. Qualitativement, le temps caractéristique d'accroissement est cohérent avec la valeur de τ_R mesurée précédemment. Plus précisément, l'ajustement avec l'équation (3.13) est très bon²⁶ et permet une mesure précise du coefficient d'amortissement. Ce dernier est indépendant de V_0 et égal au coefficient déterminé précédemment. Par ailleurs, la valeur²⁷ de ω obtenue par l'ajustement est bien identique à la valeur obtenue par la position du pic dans la transformée de Fourier de $r(t)$ (figure 3.9). Enfin, la valeur de ω_0 (de l'ordre de 20 s^{-1} et bien proportionnelle à V_0^2) calculée à partir des valeurs de ω et γ donne bien la même valeur de K que celle déduite de la valeur à l'infini de $\Delta r^2(t)$. Notons que l'on a bien $\gamma < 2\omega_0$ et donc que nous sommes bien dans un régime de faible amortissement, ce qui est prouvé par l'observation

²⁶Ceci justifie, d'une part, que l'on considère le puits comme harmonique, et d'autre part que l'on utilise le formalisme de Langevin pour décrire le mouvement de la bille.

²⁷Bien que γ dépende légèrement de la température, cette dépendance est beaucoup plus faible pour ω du fait des valeurs respectives de $\omega_0^2 \simeq 400 \text{ s}^{-2}$ et $\gamma^2/4 \simeq 25 \text{ s}^{-2}$.

d'oscillations. Nous reviendrons plus précisément sur la discussion autour de ces valeurs dans le chapitre 10.

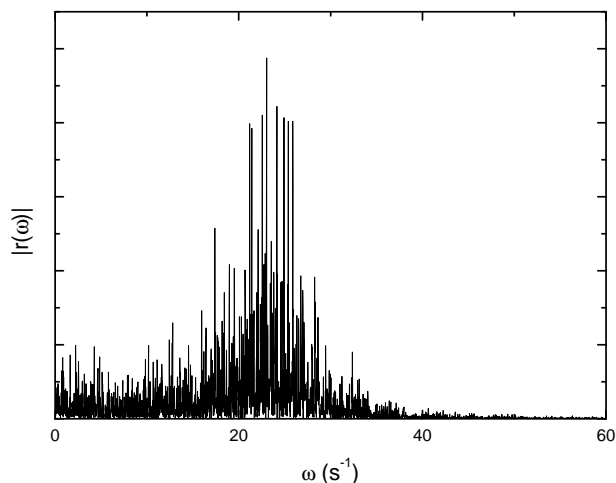


FIG. 3.9 : *Module de la transformée de Fourier de $r(t) - \langle r \rangle$ (afin de soustraire le pic en 0), en fonction de la pulsation ω . La trajectoire $r(t)$ est celle utilisée pour calculer le d.q.m $\Delta r^2(t)$ présenté sur la figure 3.8(b), avec $V_0 = 1000$ V. La position du pic donne une valeur de la pulsation de la bille dans le puits ω cohérente avec les ajustements présentés sur cette même figure.*

Nous retenons ici que le formalisme de Langevin s'applique bien à notre système : nous avons un bain thermique caractérisé, pour nos billes de masse $m = 2,15$ mg, par un coefficient d'amortissement de l'ordre de 10 s⁻¹. Cette valeur est à comparer avec les pulsations caractéristiques du système, dont une borne inférieure est donnée par la pulsation d'une bille oscillant entre ses deux voisines, qui a été estimée à 6 Hz²⁸. Ceci implique que les mouvements dans nos systèmes seront souvent sous-amortis.

3.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que l'agitation transmise aux billes *via* les haut-parleurs confère une énergie semblable à une énergie thermique.

La statistique de Boltzmann est bien vérifiée dans différents systèmes, tant pour l'énergie cinétique que pour des énergies potentielles de différentes natures (électrostatique ou gravitationnelle), et dans des systèmes continus ou discrets. La température effective qui en découle est directement reliée à l'amplitude de la tension appliquée aux haut-parleurs, et de ce fait parfaitement contrôlable. La plage accessible avec ce dispositif est 2.10^{11} K $\leq T \leq 50.10^{11}$ K.

Par ailleurs, au delà de l'état stationnaire, il a été montré les billes sont réellement plongées dans un bain thermique caractérisé par un coefficient d'amortissement γ de l'ordre 10 s⁻¹. Leur mouvement peut être décrit par l'équation de Langevin, ce qui

²⁸Cette valeur a été estimée dans la conclusion du chapitre 2. Elle peut être considérée comme une borne inférieure car dans un cristal la multiplication du nombre de billes voisines fait augmenter cette fréquence, et par ailleurs, si nous voulons étudier des phénomènes quasi unidimensionnels, la taille du système dans la direction orthogonale à la direction principale sera telle que la pulsation sera également plus importante.

permet de déterminer proprement γ en se plaçant dans le cas d'une particule piégée ainsi que la constante de diffusion dans le cas d'un déplacement libre.

Deuxième partie

Obtention et caractérisation de cristaux de Wigner macroscopiques

Introduction

D'après la première partie de notre travail, nous connaissons donc désormais l'interaction entre les billes ainsi que la température à laquelle elles sont soumises, ces deux grandeurs pouvant être contrôlées facilement. Nous pouvons désormais utiliser ce système pour obtenir un réseau élastique de particules, que nous caractérisons dans cette partie.

Ainsi, le chapitre 4 est consacré à la présentation des conditions d'obtention d'un cristal de Wigner macroscopique parfait de plus de 2000 billes. Nous décrivons l'état d'équilibre d'un tel cristal ainsi que le processus en jeu au cours du recuit permettant de l'obtenir. La question de la fusion de ces cristaux bidimensionnels, bien que n'étant pas l'objet de notre travail, est toutefois brièvement abordée.

Dans le chapitre 5, nous traitons la question des propriétés élastiques du réseau. Nous déterminons dans un premier temps les constantes élastiques à partir de la donnée de l'interaction entre les billes. Une grande partie de ce chapitre est ensuite dédiée à la détermination des constantes élastiques d'un tel réseau discret et fini à partir de la donnée des positions des particules du cristal soumis à une faible agitation thermique. La théorie standard de l'élasticité est une théorie des milieux continus : nous discuterons donc en particulier des ajustements auxquels il faut procéder pour relier les données "microscopiques", c'est-à-dire définies au niveau des particules, aux grandeurs caractéristiques "macroscopiques" que sont les constantes élastiques. Ceci est d'autant plus nécessaire que notre système est fini et possède un nombre réduit de particules.

Au delà de l'enjeu de la mise au point d'une méthode de détermination expérimentale des constantes élastiques, cette discussion est également importante dans l'optique de l'utilisation de notre système pour étudier des situations de piégeage faible. En effet, dans une telle situation, le potentiel perturbateur peut varier sur des distances plus faibles que le pas du réseau : il est donc important de savoir quelle description convient pour introduire l'élasticité du réseau à cette échelle.



Chapitre 4

Obtention d'un cristal parfait

Sommaire

4.1	Introduction	65
4.2	Obtention d'un cristal parfait	66
4.2.1	Identification des défauts par les cellules de Voronoï	66
4.2.2	Facteurs déterminant l'état final du recuit	68
4.3	Réorganisation et disparition des dislocations	70
4.3.1	Dynamique des dislocations	70
4.3.2	Évolution vers le cristal parfait	71
4.4	À propos de la fusion à deux dimensions	76

4.1 Introduction

La configuration d'énergie minimale d'un nombre infini de particules en interaction situées dans un plan est, pour une grande variété de types d'interaction, un cristal de symétrie hexagonale¹.

Nous présentons dans ce chapitre les procédures expérimentales permettant d'obtenir un tel cristal bidimensionnel, constitué d'environ 2000 particules.

Lors de la mise sous tension du dispositif, les particules se repoussent et occupent tout l'espace disponible, limité par le cadre de confinement. Par rapport à un cristal hexagonal parfait, la configuration spontanément adoptée présente un certain nombre de défauts. Afin d'éliminer ces défauts, nous opérons un processus de "recuit". Cette procédure, communément utilisée en métallurgie, consiste à soumettre le système à une température élevée, à laquelle il se comporte comme un liquide, puis à baisser lentement

¹La différence d'énergie avec un cristal de symétrie carrée est cependant généralement assez faible. Selon Fisher *et al.*, la différence d'énergie relative par unité de surface entre un réseau carré et un réseau hexagonal est de l'ordre de 5‰ [67].

cette température². Elle permet d'évacuer les défauts structuraux à la dynamique de disparition lente, différents de ceux correspondant aux excitations thermiques associées à la température finale. L'état final est atteint au bout de 5 à 30 minutes selon la température utilisée.

Dans l'état obtenu par recuit, il peut éventuellement subsister des défauts, qui ont trois origines :

- **La forme du confinement** : sachant que les billes périphériques s'alignent systématiquement le long des parois du cadre de confinement, toute géométrie du cadre incompatible avec la symétrie hexagonale induit systématiquement des défauts³. Nous travaillons donc avec des cadres de confinement hexagonaux, dont les côtés ont pour longueur 30 mm ou bien 48 mm. Ces cadres permettent, compte-tenu des distances d entre les billes rappelées à la section 2.2.1 ($1 \text{ mm} \lesssim d \lesssim 2 \text{ mm}$), de disposer d'un cristal de 1000 à 2500 billes environ.
- **Le nombre de billes N** : même avec un confinement hexagonal, seules certaines valeurs de N permettent de remplir le cadre avec un cristal parfait. Cette dépendance est étudiée plus précisément dans les sections suivantes.
- **La température T** : des défauts peuvent être produits par excitation thermique. Ces défauts, de faible énergie, disparaissent néanmoins si la température est suffisamment basse. Nous revenons également sur ce point dans ce qui suit.

Après avoir décrit les défauts observés dans les cristaux à l'équilibre (section 4.2.1), nous discutons à la section 4.2.2 de l'état final du recuit en fonction des deux paramètres (N et T) précédemment cités. Le processus en jeu lors du recuit lui-même, qui permet la réorganisation et la disparition de la plupart des défauts initialement présents en grand nombre dans un système désordonné, est abordé dans la section 4.3. Nous profitons de cette étude pour revenir très rapidement, dans la section 4.4 sur la fusion de ce cristal de Wigner. La fusion de réseaux bidimensionnels, sujet sur lequel de nombreuses questions ouvertes demeurent, a été largement étudiée depuis quelques dizaines d'années. Plus récemment, pour des cristaux de Wigner très semblables au nôtre, elle a été étudiée par Pouligny *et al.* [61] et par Zheng et Grieve [38].

4.2 Obtention d'un cristal parfait

4.2.1 Identification des défauts par les cellules de Voronoï

Dans les systèmes en interaction à courte portée, la description de la structure des réseaux en terme de positions des liens entre particules plus proches voisines a prouvé

²Généralement, on opère plusieurs cycles de baisse de la température en diminuant progressivement la température maximale de début de cycle.

³Comme nous avons pu le voir pour les îlots de Wigner ayant plus de 20 billes, il subsiste néanmoins un cœur présentant une symétrie hexagonale.

sa pertinence. Par plus proches voisines, nous entendons celles liées par un lien dans une triangulation de Delaunay⁴. Dans un réseau régulier hexagonal, les plus proches voisines d'une particule sont toutes situées à la même distance de celle-ci. Ce n'est plus vrai si le système est désordonné. Si le désordre devient important, le défaut le plus simple est la modification du nombre de plus proches voisines, ou coordinence, qui de 6 passe à 5 ou 7. La visualisation d'un tel défaut, appelé "disclinaison", est encore plus aisée lorsqu'on trace, pour chaque particule, sa cellule de Voronoï délimitée par les médiatrices des liens avec les plus proches voisins, généralisation de la cellule de Wigner-Seitz pour un réseau quelconque. Dans un cristal hexagonal parfait, les cellules de Voronoï sont des hexagones réguliers. Une disclinaison est marquée par une cellule de Voronoï à 5 ou 7 côtés. Toutefois, une disclinaison de coordinence 5 et une disclinaison de coordinence 7 créent un champ de contrainte tels qu'elles ont tendance à s'attirer pour former une "dislocation", paire de disclinaisons 5-7 [68]. Comme présenté sur la figure 4.1, la présence d'une dislocation se traduit par le dédoublement d'une ligne et donc l'ajout d'une demi-ligne supplémentaire démarrant par la disclinaison 5 après l'embranchement marqué par la disclinaison 7. À chaque dislocation est associé un "vecteur de Burger", défini comme le vecteur partant de la disclinaison 5 et joignant cette disclinaison avec l'autre site duquel part le deuxième fragment de la ligne dédoublée (figure 4.1). Il est donc orthogonal à la paire 5-7 formant la dislocation.

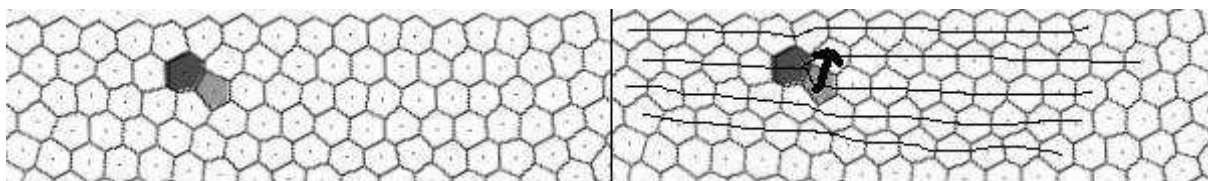


FIG. 4.1 : Cellules de Voronoï dans un cristal hexagonal présentant une dislocation. Les points noirs dans les cellules désignent les positions des centres des billes. Les disclinaisons 5 et 7 formant la dislocation sont marquées respectivement par des cellules en gris clair et gris foncé. La dislocation est à l'origine d'un dédoublement de ligne, orthogonal au vecteur de Burger de la dislocation.

La description des écarts au cristal parfait à l'aide des disclinaisons et des dislocations permet de rendre compte, en première approche, de la plupart des défauts observés dans un cristal (lacunes, particules intersticielles) [67,69], ainsi que de leur dynamique (voir par exemple le mouvement des lacunes dans des systèmes colloïdaux dans [70,71]). Toutefois, lorsque le cristal est soumis à une perturbation de faible intensité, nous verrons qu'il peut parfois être nécessaire d'aller au delà de cette simple description et d'inspecter la

⁴La triangulation de Delaunay s'appuyant sur un ensemble de points d'un plan est définie par la propriété suivante : aucun triangle de la triangulation ne contient de point à l'intérieur de son cercle circonscrit autre que ses trois sommets.

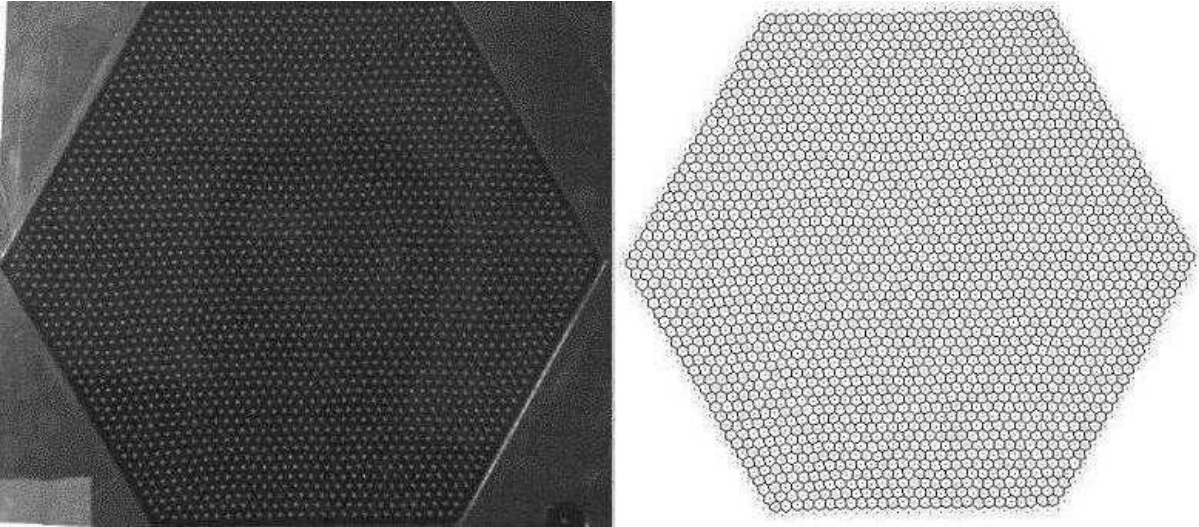


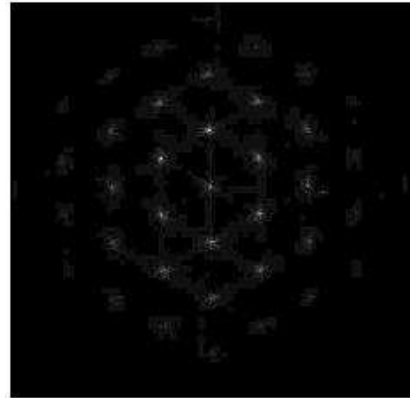
FIG. 4.2 : Cristal de 2269 billes (nombre magique avec $p = 28$) et diagramme de Voronoï correspondant.

forme des cellules de Voronoï pour mesurer les écarts au cristal hexagonal idéal.

4.2.2 Facteurs déterminant l'état final du recuit

Nombre de particules et "nombres magiques"

Même lorsque le recuit a bien été mené, et ce dans un confinement hexagonal, il reste nécessairement des défauts dès lors que le nombre de billes n'est pas un "nombre magique", pour reprendre les termes de Schweigert *et al.* [72]. Un cristal constitué d'un nombre magique de billes correspond au sous ensemble d'un cristal infini formant un hexagone régulier. Pour un tel hexagone ayant p billes par côté, le nombre total de billes N_p est $3p(p-1) + 1$. Dans ce cas, et à basse température, il est possible d'obtenir un cristal parfait. Un exemple en est donné sur la figure 4.2, avec le diagramme de Voronoï correspondant, ainsi que par la transformée de Fourier présentée ci-contre. Notons que la distance moyenne entre les billes est constante dans tout l'espace, même aux bords, ce qui valide le choix de porter le cadre de confinement au même potentiel que les billes.



En revanche, pour un nombre de billes non magique, l'incompatibilité entre le nombre de billes et la forme du confinement implique l'existence d'un nombre minimal de dislocations à la fin de la procédure de recuit. Indiquons cependant que quels que soient la température et le nombre de billes présentes dans le système, nous n'observons presque

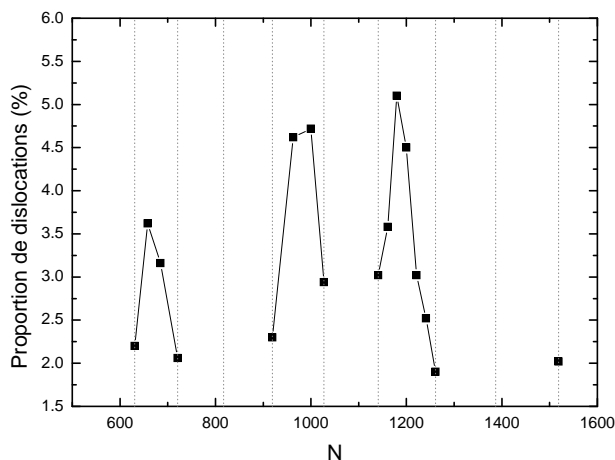
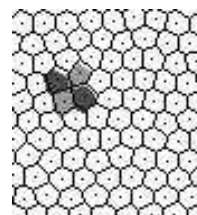


FIG. 4.3 : Proportion de sites présentant une dislocation (par rapport au nombre total de sites) en fonction du nombre de billes. Les traits verticaux repèrent les nombres magiques. Sont considérés comme présentant une dislocation les deux sites de la paire de disclinaisons 5-7. Le cadre utilisé ici a un côté de 30 mm.

jamais de disclinaisons isolées, mais uniquement des dislocations. La figure 4.3 présente la proportion moyenne de sites marqués par une dislocation dans le cristal après recuit en fonction du nombre de billes. Le taux le plus bas est obtenu pour les nombres magiques, les dislocations encore présentes étant dues aux fluctuations thermiques. Entre deux nombres magiques, la proportion de dislocations croît jusqu'à un maximum, puis décroît. Ce comportement peut être analysé ainsi : les premières billes ajoutées à un nombre magique permettent de créer, près des bords, des démarrages de lignes supplémentaires. Lorsque le nombre de billes augmente, le système préfère ensuite allonger ces lignes supplémentaires plutôt que d'initier une nouvelle ligne ailleurs. Ceci ne crée pas de nouvelles dislocations, la proportion de dislocations dans le système doit donc baisser. En réalité, la limite entre les deux mécanismes n'est pas si marquée, plusieurs lignes nouvelles peuvent être initiées en différents points, puis se rejoindre grâce à l'ajout de nouvelles billes. C'est pour cela que le taux grimpe environ jusqu'au milieu de l'intervalle entre deux nombres magiques, même si dans le même temps la longueur moyenne des morceaux de lignes ajoutés croît⁵. Lorsque la longueur de la ligne supplémentaire atteint sa longueur finale, la dislocation est "évacuée" par les bords.

Dislocations résiduelles

À toute température non nulle, en cas de nombre de billes non magique ou lorsque le processus de recuit a été mené trop rapidement, il subsiste des dislocations dans le système. Leur nombre augmente avec la température. Parmi ces défauts, il faut distinguer néanmoins les paires virtuelles de dislocation de vecteurs de Burger opposés qui résultent de l'excitation thermique, comme sur l'exemple ci-contre, et n'engendrent aucune modification de leur environnement. Nous avons pu observer que les autres dislocations peuvent



⁵Entre les nombres magiques 1027 ($p = 19$) et 1141, la longueur moyenne des lignes supplémentaires vaut environ (en nombre de billes) 9 pour $N = 1050$, 10 pour $N = 1063$ et 14 pour $N = 1087$.

se trouver de manière équiprobable en tout point du cristal, à l'exception des premières rangées, qui sont mieux organisées sous l'effet des bords⁶. Cette observation confirme que notre dispositif permet de reproduire, dans l'état quasi-stationnaire obtenu par recuit, un cristal équivalent à un "morceau" de cristal infini.

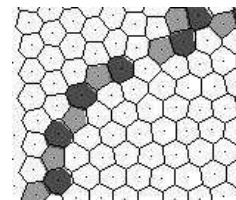
4.3 Réorganisation et disparition des dislocations

4.3.1 Dynamique des dislocations

Lorsqu'elles sont isolées, les dislocations sont très mobiles dans la direction parallèle à leur vecteur de Burger, et beaucoup moins dans la direction orthogonale⁷. Ce déplacement peut être renforcé en présence d'une autre dislocation. En effet, deux dislocations créent un champ de contrainte tel que, d'une part, leurs vecteurs de Burger vont avoir tendance à s'aligner, et que d'autre part, deux dislocations ayant des vecteurs de Burger opposés vont s'attirer. Le déplacement se faisant essentiellement dans la direction de ces vecteurs, si les vecteurs sont alignés, les dislocations se rencontrent et forment une paire virtuelle, qui peut disparaître. Ceci peut se voir comme la fusion des morceaux de lignes supplémentaires en un seul.

De manière plus générale, le mouvement des dislocations est en réalité contrôlé par l'ensemble du cristal environnant. En particulier, à nombre fixé de dislocations, la dynamique des dislocations conduit le système à présenter de larges zones organisées, qui sont alors séparées par des lignes de dislocations, dites "joints de grains", plutôt que d'avoir des dislocations isolées induisant de nombreuses déformations locales [67].

Un exemple en est donné ci-contre : de part et d'autre du joint, les grains sont tournés de 30° l'un par rapport à l'autre. L'évolution du système se résume alors essentiellement à une compétition entre les domaines aboutissant à l'élimination de ces joints de grains.



⁶Cette disposition des dislocations n'est pas *a priori* la seule possible. Dans le cas d'un support isolant, les zones centrales et latérales sont souvent parfaites, les dislocations résiduelles se plaçant à une distance intermédiaire entre le centre et le bord du système.

⁷Cela se comprend aisément : un déplacement selon le vecteur de Burger ne nécessite qu'un déplacement du dédoublement de lignes, presque sans déplacement de matière, alors que le déplacement orthogonal nécessite de rallonger ou raccourcir les lignes dédoublées, et donc demande d'importants déplacements de matière.

4.3.2 Évolution vers le cristal parfait

L'évacuation des dislocations dans notre système à partir d'un état initialement désordonné se fait, de manière schématique, selon deux processus particulièrement bien mis en évidence lorsque nous partons d'un système chargé à température nulle puis porté à une température donnée constante⁸. L'évolution typique avec le temps du nombre de dislocations dans le système est présentée sur la figure 4.4. Pendant les 100 premières secondes, le nombre de dislocations décroît fortement, de plus de 75%. La diminution du nombre de dislocations est ensuite beaucoup plus lente, au bout de 1000 s il ne reste que les dislocations résiduelles dues à l'agitation thermique ou à un nombre non magique de billes.

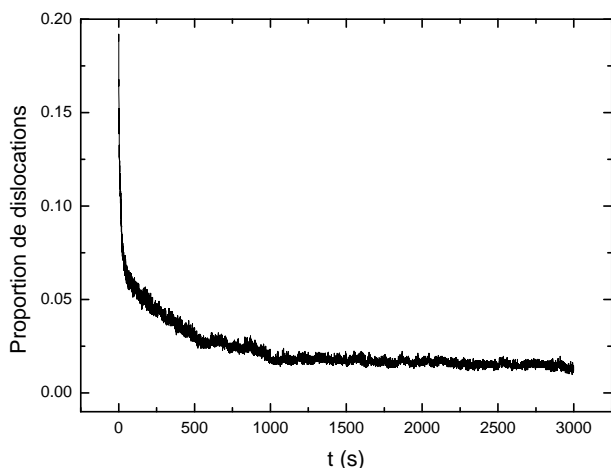


FIG. 4.4 : Évolution avec le temps de la proportion de dislocations présentes dans un système de 1991 billes soumis à une température constante. Un aperçu des diagrammes de Voronoï correspondant est reporté sur la figure 4.5(b). Les conditions expérimentales sont $V_0 = 1000$ V et $T = 11,1 \cdot 10^{11}$ K.

Ces deux temps caractéristiques suggèrent l'existence de deux mécanismes différents dans le processus de recuit. Ces mécanismes apparaissent clairement lorsqu'on regarde les diagrammes de Voronoï correspondant. La figure 4.5(b) présente ces diagrammes à différents instants pour le même système que celui utilisé dans la figure 4.4 ($N = 1991$, nombre non magique). Le cas d'un nombre magique est reporté sur la figure 4.5(a).

Lors de la mise sous tension du système non agité ($t = 0$), de très nombreuses dislocations peuvent être observées. Le système est alors complètement désordonné. Dès qu'il est soumis à une agitation thermique, le système est le siège de nombreuses réorganisations marquées par le déplacement des dislocations. D'une part, les dislocations en interaction attractive peuvent se recombinaison et disparaître; ce processus est très rapide et explique la décroissance rapide du taux de dislocations que nous avons relevée. Parallèlement, le système cherche à s'organiser localement : si les parois forcent l'orientation des axes cristallographiques près des bords, les zones intérieures n'en ressentent pas leur effet et peuvent s'organiser selon une orientation quelconque; les différents îlots ainsi créés sont

⁸Procéder à température constante plutôt que de procéder à un recuit classique avec un gradient de température dans le temps permet de n'avoir que le temps comme paramètre et de mieux suivre les modes d'évacuation des dislocations.

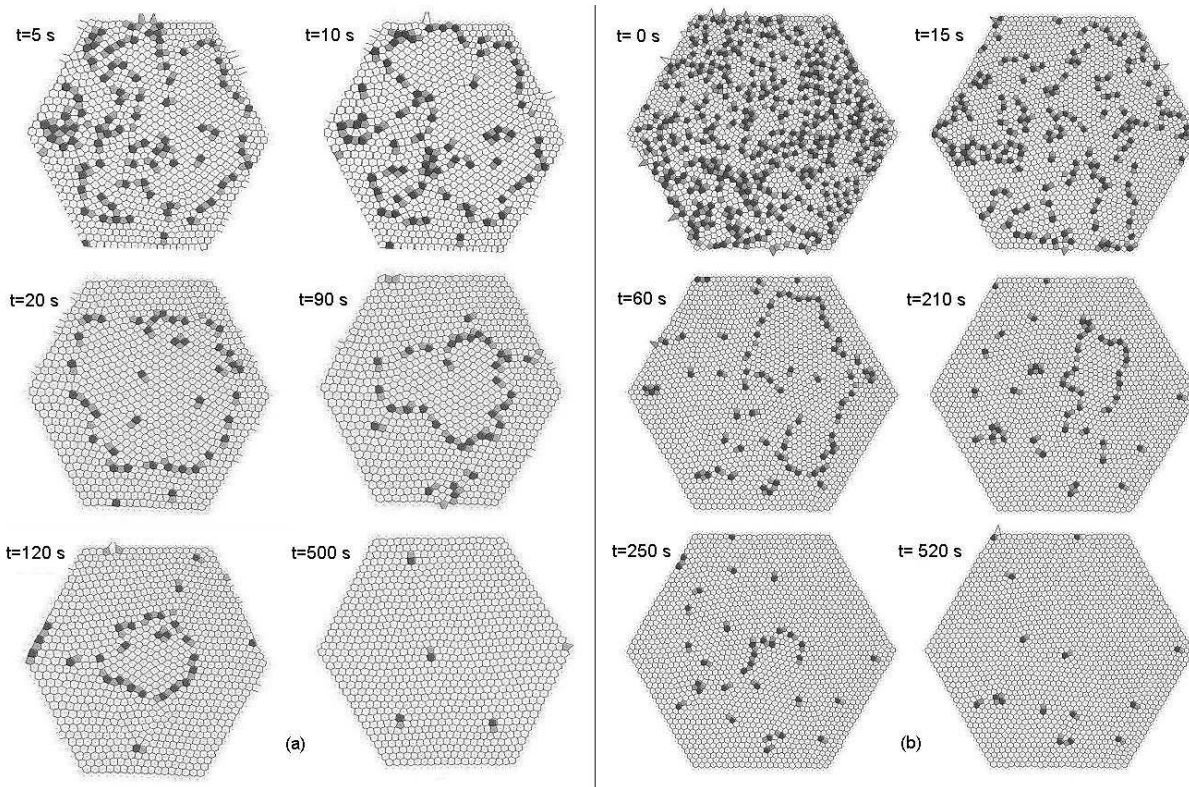
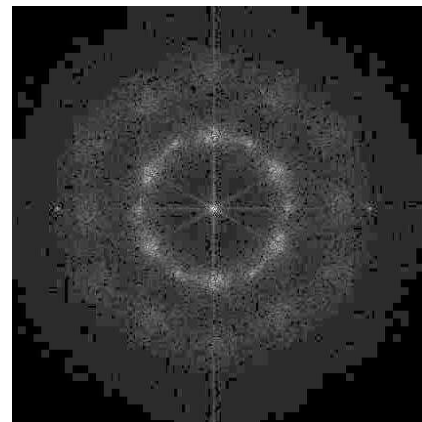


FIG. 4.5 : Diagrammes de Voronoï représentant l'évolution dans le temps de deux cristaux. (a) : $N=1141$ billes (nombre magique); (b) : $N = 1991$ billes (nombre compris entre les nombres magiques 1951 et 2107). Dans les deux cas, nous avons $V_0 = 1000 V$ et $T = 4, 0.10^{11} K$.

séparés par des joints de grains, constitués des dislocations n'ayant pu être évacuées du fait de ces réorganisations locales.

Ces joints se réorganisent ensuite assez rapidement pour n'en former plus qu'un, qui se ferme sur lui-même, en enserrant un cristal tourné de 30° par rapport au cristal extérieur s'appuyant sur les bords, comme en atteste la transformée de Fourier du cristal de la figure 4.5(b) à $t = 60$ s, présentée ci-contre. Lors du processus de recombinaison des grains, c'est donc le grain le plus désorienté par rapport au cristal final qui se maintient le plus longtemps. Signalons que cette forme fermée sur elle-même



du joint de grain est fortement liée à la géométrie du confinement : la forme du confinement étant compatible avec l'existence d'un cristal parfait, il n'est pas énergétiquement favorable que deux cristaux d'orientations différentes croissent contre un bord, sur lequel

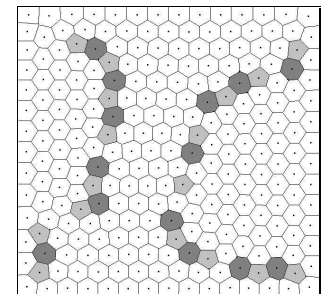
viendrait donc se terminer un joint de grains⁹.

En résumé, la première phase est marquée par la formation d'un unique grain central désorienté de 30° par rapport au cristal extérieur. Notons que nous n'observons jamais, comme souvent en métallurgie, la croissance d'un grain organisé à l'intérieur du système désordonné¹⁰. Dans les systèmes de particules en interaction courte portée [76] ou longue portée [67], l'énergie d'un joint de grain dépend, entre autres, de la différence d'orientation des deux cristaux. Nous pouvons déduire de nos observations que l'énergie minimale est associée à une désorientation de 30°, ce qui peut se comprendre par le fait que, dans ce cas, les symétries des deux cristaux ne sont pas totalement incompatibles, les axes principaux de l'un coïncidant avec les axes secondaires de l'autre.

La forme de la boucle de dislocations ainsi formée semble dépendre du nombre de billes (et par conséquent du nombre de dislocations isolées présentes dans le cristal extérieur) : alors que pour un nombre magique (figure 4.5(a), t=20 s), la forme est relativement ronde (suivant ainsi grossièrement la forme du confinement), pour un autre nombre de billes (figure 4.5(b), t=60 s) la forme est moins régulière¹¹. Ceci peut être dû au champ de contrainte créé par le surplus de dislocations. De plus, la rapide mise en place de cette boucle de dislocations montre que les barrières énergétiques à franchir pour obtenir cet état sont faibles. D'ailleurs, lorsque la tension V_0 est appliquée au système alors qu'il est déjà soumis à une agitation thermique, l'apparition des grains est quasiment immédiate.

⁹La situation est bien différente par exemple pour un confinement carré, comme l'illustre la figure ci-dessous. Celle-ci, également similaire à ce qui peut être observée dans des réseaux bidimensionnels de mousse [73], n'a pas été obtenue dans notre système mais à partir d'un algorithme de minimisation, dit de Lloyd, développé par Alliez *et al.* [74].

Cet algorithme, *a priori*, ne minimise pas la même quantité que l'énergie de nos systèmes, mais la quantité suivante [75] : si l'on se donne des cellules V_i pavant l'espace disponible contenant chacune un point \mathbf{x}_i , il s'agit de minimiser la quantité $\sum_i \int_{V_i} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| d\mathbf{x}$ par rapport à l'ensemble des couples (V_i, \mathbf{x}_i) . La minimisation de telles quantités, qui peuvent être modifiées en pondérant les distances $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ par un poids $f(\mathbf{x})$, est un enjeu important dans les problèmes de maillage de surfaces, qui permettent notamment la reconstruction d'images tridimensionnelles. La similitude avec les configurations obtenues dans des problèmes de minimisation d'énergies d'interaction entre particules ou d'énergies de lignes (pour les mousses) laisse penser que l'important développement actuel d'applications dans ces problèmes de maillage pourrait être utilisé avec profit par la communauté physicienne, d'autant plus que la possibilité de pondérer les distances à minimiser pourrait être utilisée avec profit pour aborder des problèmes de piégeage.



¹⁰Une telle phase est habituellement très stable puisque l'adaptation du système extérieur au grain le long de l'interface est aisée du fait de son désordre. Certainement à cause des conditions au bord, l'organisation du système en domaines se fait ici simultanément au centre et sur les bords du système.

¹¹Bien que la forme de la boucle de dislocation dépende également d'une éventuelle impureté ponctuelle dans le système (bille sale...), cette observation rend compte de faits qui sont bien reproductibles.

Le système entre alors dans la deuxième phase, qui est beaucoup plus lente par rapport à la première, car elle mobilise plus de particules. Comme montré sur la figure 4.5, nous observons un effondrement du joint de grain sur lui même. Dans le cas d'un joint circulaire, cette dynamique est isotrope. La vitesse d'effondrement de la boucle a été étudiée dans le cas du système à 1991 billes présenté sur la figure 4.5(b). Le périmètre de cette dernière est reporté sur la figure 4.6 pour trois températures différentes : $T = 4, 0.10^{11}K$, $9, 1.10^{11}K$ et $11, 1.10^{11}K$; pour la température intermédiaire, nous avons reporté les données de deux mesures d'effondrement dans les mêmes conditions.

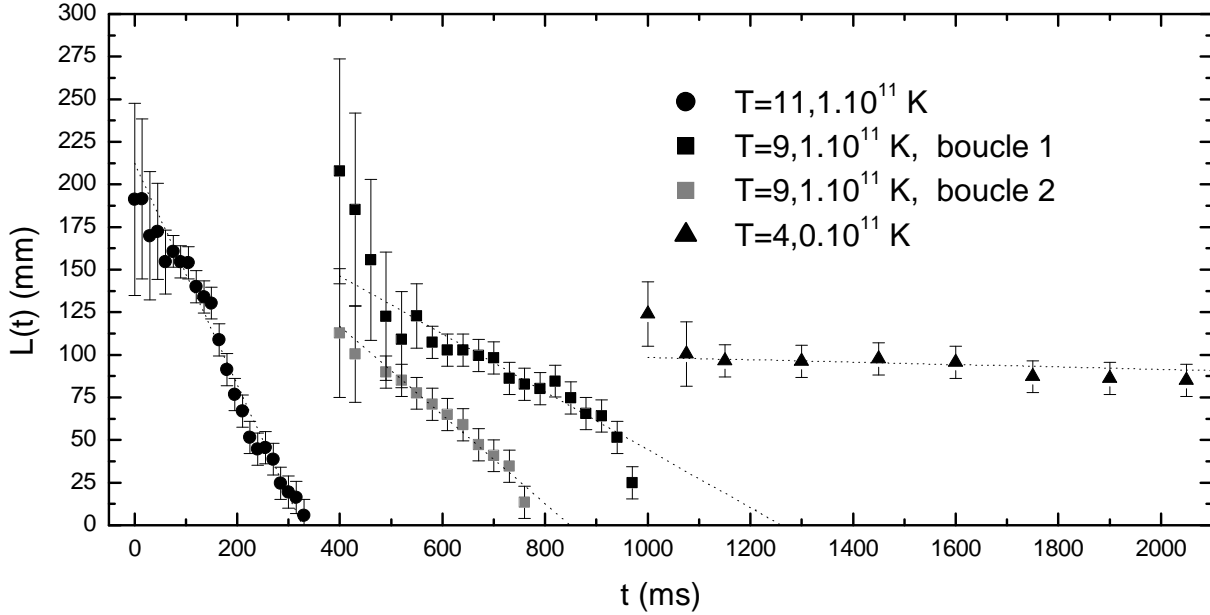


FIG. 4.6 : Longueurs $L(t)$ de boucles de dislocations en fonction du temps pour 3 températures différentes. Pour plus de clarté, les origines des temps ont été décalées. Pour la température $T = 400$, les périmètres de deux boucles distinctes sont reportés. Notons que les barres d'incertitude aux temps initiaux sont liées à la difficulté de définir proprement la boucle lorsque les lignes de dislocations sont encore en train de se réorganiser. Les lignes en pointillé montrent l'ajustement avec une loi affine. Leurs pentes donnent la vitesse d'effondrement des boucles, qui valent respectivement $0,65 \text{ mm.s}^{-1}$ ($T = 11, 1.10^{11}K$), $0,17 \text{ mm.s}^{-1}$ ($T = 9, 1.10^{11}K$, boucle 1), $0,26 \text{ mm.s}^{-1}$ ($T = 9, 1.10^{11}K$, boucle 2), $0,007 \text{ mm.s}^{-1}$ ($T = 4, 0.10^{11}K$). La tension V_0 est égale à 1000 V .

Pour les deux températures les plus élevées, nous pouvons noter une décroissance à vitesse quasi constante du périmètre L des boucles. Cette vitesse augmente avec la température. Comme nous pouvons le voir dans le cas $T = 9, 1.10^{11}K$, cette vitesse dépend peu de la taille initiale du grain. Dans le cas d'une faible température ($T = 4, 0.10^{11}K$), la décroissance est extrêmement lente, et la disparition du grain n'intervient qu'au bout

d'un temps très long.

La largeur du joint de grain étant petite par rapport à la taille des grains, mais sa longueur grande par rapport à la taille du cœur des dislocations, la dynamique de la frontière peut être analysée en considérant les deux cristaux comme deux milieux élastiques séparés par une ligne unidimensionnelle. Pour un joint rectiligne, l'énergie par unité de longueur ζ de la ligne dépend, outre de la différence d'orientation θ entre les deux cristaux, de l'angle α de la ligne par rapport à un axe de référence du cristal [76]. Cette dernière dépendance est de peu d'importance ici puisque la ligne se boucle sur elle-même.

Ce cas d'un grain inclus dans une matrice d'orientation fixée a été étudié par Kobayashi *et al.*, qui montrent qu'un joint de grain circulaire séparant un cristal extérieur à l'orientation fixée d'un cristal intérieur s'effondre sur lui-même; au cours de ce processus, le cristal intérieur tourne progressivement pour s'aligner sur les axes du cristal extérieur [77].

Dans ce modèle, la force motrice est liée à la courbure du joint : si R est le rayon de la boucle, cette force est proportionnelle à ζ/R . Sous l'hypothèse d'un mouvement sur-amorti, l'équation du mouvement radial devient

$$\dot{R} = -kM\zeta/R, \quad (4.1)$$

où k est une constante positive et M est la mobilité, qui est thermiquement activée. La valeur de ζ dépend de l'orientation du cristal intérieur, dont on peut aussi écrire l'équation d'évolution. Si la mobilité associée à ce mouvement de rotation est faible, l'essentiel de la décroissance de θ se fait lorsque R devient petit. Dans le cas extrême de ce régime où le cristal ne peut pas tourner, qui semble être le cas qui s'applique à notre système, ζ est une constante et l'équation du mouvement de R peut facilement être résolue. On trouve

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2kM\zeta t}. \quad (4.2)$$

Si on considère que nos joints de grains sont circulaires, alors leur longueur doit évoluer comme leur diamètre. Le comportement affine que nous observons ne semble pas en adéquation avec ce modèle¹², l'ajustement avec la fonction $R(t)$ est moins bon que l'ajustement linéaire, même lorsque R tend vers 0. Cependant, sur un large intervalle, la fonction (4.2) se confond aisément avec une fonction affine compte-tenu de l'incertitude dans les mesures des longueurs des joints. Nous pouvons voir à la température $T = 9,1 \cdot 10^{11} \text{K}$ que lorsque R tend vers 0, la chute est plus brutale, comme dans le modèle. Notons toutefois que dans ce cas, la taille du joint devient de l'ordre de grandeur de la taille du grain, et donc la pertinence de l'utilisation du modèle peut se discuter.

¹²Les grandes différences de valeur des vitesses d'effondrement pour les trois températures confirment toutefois que la mobilité est bien thermiquement activée.

En conclusion, l'étude de ce processus nous a permis d'illustrer la propension du système à favoriser l'existence de domaines désorientés limités par des joints de grains. Si, dans le cas d'un cristal non soumis à d'autres contraintes que celles du bord, l'orientation finale est imposée par celle de ce bord, ces domaines peuvent toutefois se développer dans un premier temps jusqu'à une faible distance du bord (voir par exemple la figure 4.5(a) à $t = 20$ s). La direction alors privilégiée est une désorientation de 30° . Signalons que si cette direction est la seule à se développer de manière importante lorsque le système part d'une situation désordonnée, des domaines ayant une orientation différente peuvent toutefois être créés et se maintenir sur un temps assez long si on part d'une situation initiale différente. Ainsi, considérons un cristal initial présentant une symétrie carrée¹³ et dont les axes principaux ne coïncident pas avec celui du cristal hexagonal final, et laissons-le relaxer comme précédemment jusqu'au cristal final. Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.7, il se développe alors des domaines hexagonaux dont un des axes est dans la même direction qu'un des axes du réseau carré initial (deux orientations sont donc possibles). Ces domaines finissent également par fusionner, puis disparaître ensuite au profit du domaine extérieur s'appuyant sur le cadre, tout en gardant jusqu'à la fin leur orientation initiale par rapport au cristal extérieur, en l'occurrence ici à 15° et non à 30° .

Ceci illustre aussi la facilité qu'a un réseau carré à se cisailer¹⁴, notamment ici pour créer un réseau hexagonal : dès lors qu'un alignement de billes existe, le système préfère s'appuyer sur cet alignement pour créer un réseau hexagonal plutôt que de passer par une phase désordonnée pour créer un domaine orienté dans une direction qui semble plus favorable. Une fois le domaine créé, sa cohésion est suffisante pour résister pendant un certain temps à l'ordre imposé par le cadre extérieur.

4.4 À propos de la fusion à deux dimensions

Ayant à notre disposition un cristal de plusieurs milliers de particules soumis à une température contrôlable, la question de l'étude de la fusion de ce cristal est assez naturelle.

Développé dans les années 70 à partir des travaux de Kosterlitz et Thouless [78], puis ceux de Nelson et Halperin [79–81] et Young [82], le modèle KTNHY propose un scénario de fusion 2D (sans exclure que d'autres soient possibles) qui a fait l'objet de nombreuses études, tant expérimentales que numériques. Ce scénario a l'avantage de prédire le comportement quantitatif d'un grand nombre de grandeurs (fonctions de corrélation, constantes élastiques, nature des défauts...) et fournit donc de nombreux points de repère et un cadre à partir duquel il est possible de discuter des processus amenant vers le désordre dynamique même lorsque le scénario n'est pas totalement vérifié.

Dans le cadre de la théorie KTNHY, la fusion se démarque d'une transition du premier

¹³Un tel cristal est préparé en utilisant le dispositif de piégeage décrit au chapitre 6.

¹⁴Voir également la note 8, section 5.2.1.

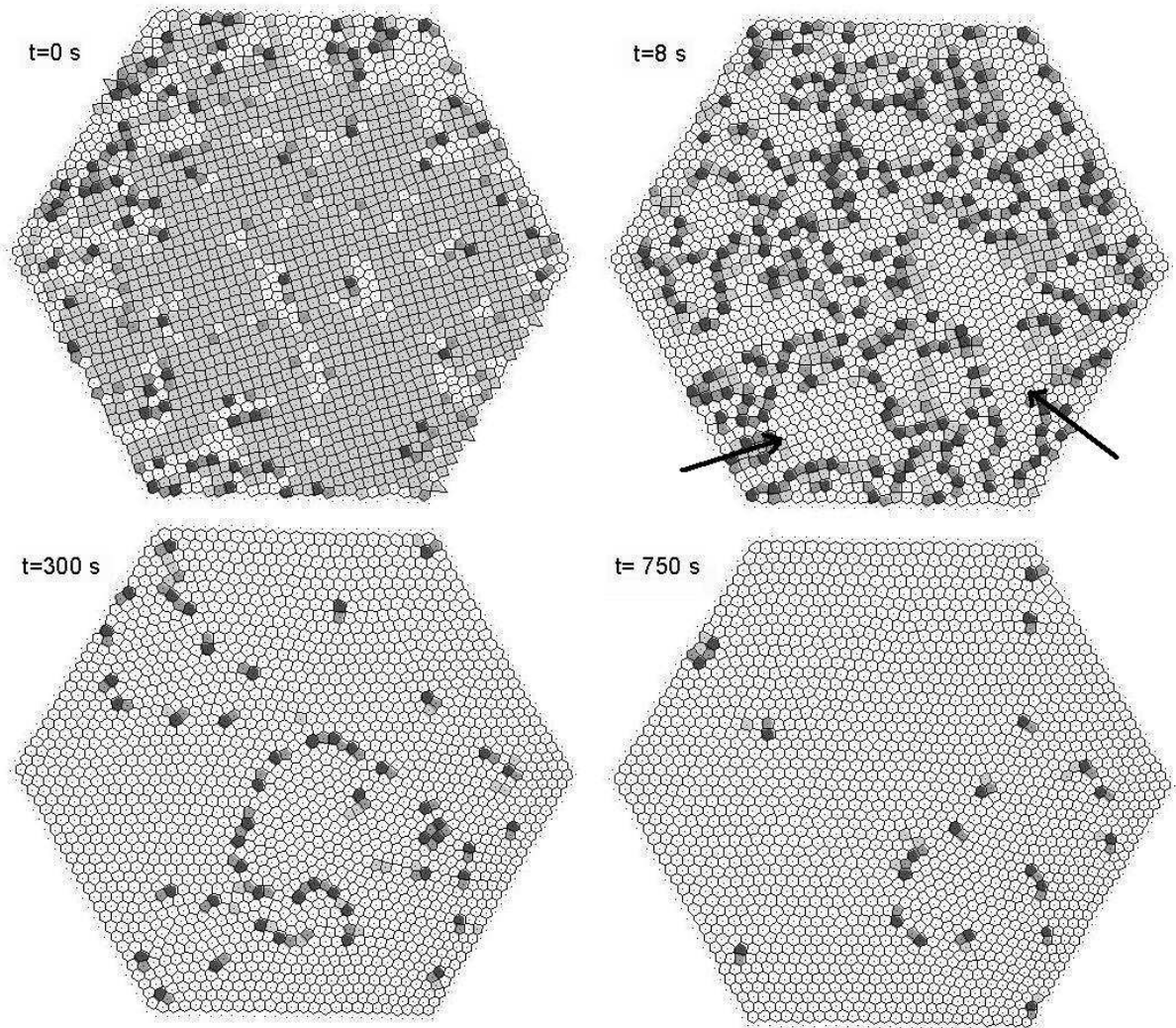


FIG. 4.7 : *Relaxation d'un réseau préparé avec une symétrie carrée vers un réseau hexagonal. Les cellules de Voronoï dans les deux gris les plus foncés correspondent toujours aux dislocations, celles dans le gris le plus clair sont des cellules à quatre côtés. À $t = 8$ s, les flèches indiquent deux domaines de symétrie hexagonale ayant calé un de leurs axes sur un de deux axes possibles du réseau carré initial. Notons que ces directions, qui se maintiennent tout le long du processus, sont différentes de celles observées sur les domaines de la figure 4.5.*

ordre telle qu'elle est observée à trois dimensions. Elle est supposée se dérouler en deux temps lorsque la température augmente : tout d'abord, l'ordre translationnel est perdu, alors que le système garde un quasi-ordre orientationnel, ce jusqu'à une seconde transition après laquelle le système perd aussi son ordre orientationnel et se comporte comme un liquide isotrope. La phase intermédiaire entre les deux transitions, dans laquelle le système n'est plus solide mais pas encore liquide, se nomme phase "hexatique". La présence de telle ou telle phase est déterminée par le comportement asymptotique des fonctions de

corrélations spatiales translationnelles et orientationnelles.

L'autre idée importante du scénario KTNHY est qu'à chacune des trois phases correspond une typologie particulière des défauts présents. En effet, la transition vers la phase hexatique est marquée par la forte augmentation du nombre de dislocations. La séparation de ces dislocations en disclinaisons isolées marque l'apparition de la phase liquide.

Les essais de validation expérimentale et numérique de ce scénario proposé a produit une littérature abondante, dont nous ne retenons dans ce qui suit que les grandes lignes et les points concernant plus précisément notre dispositif.

Du point de vue numérique, la tendance a été pendant de nombreuses années à une invalidation du scénario KTNHY, et ce pour différents types d'interactions [83]. Cependant, l'amélioration des performances matérielles des calculateurs et algorithmiques a permis d'explorer des systèmes de plus en plus grands (de l'ordre de 10^5 particules), dans lesquels la validité du scénario KTNHY a pu être vérifiée [84,85]. Il est donc probable que la taille du système joue un rôle important, et que le scénario KTNHY ne soit valable qu'à la limite thermodynamique. En réalité, ce problème semble être autrement plus complexe : outre le fait que parfois seule une partie des traits caractéristiques de la théorie soit observée [86], l'existence d'un tel processus plutôt que d'une transition de premier ordre dépend de l'énergie de cœur des interactions [87], ou de la nature de l'interaction [88].

Dans les cristaux de Wigner de plus de 2000 billes dont nous disposons, l'absence de disclinaisons isolées à toute température prouve que la partie du scénario KTNHY basée sur la description des défauts ne peut s'appliquer à notre système.

Par ailleurs, dans des études plus quantitatives menées sur des cristaux de Wigner similaires au nôtre, l'existence d'une phase hexatique n'est pas non plus clairement établie. Précisons que ces études ont été menées sur des ensembles de 900 billes environ (Pouliny *et al.* [61]) ou 600 (Zheng et Grieve [38]), ce qui est un nombre relativement faible. Pouliny *et al.* considèrent d'ailleurs que le fait d'avoir un nombre de particules confinées aussi faible peut expliquer leurs observations d'une transition semblable à une transition du premier ordre, dans laquelle les paramètres d'ordre translationnel et orientationnel chutent à la même température. Comme également évoqué par Bagchi *et al.* [84], le caractère fini du système, couplé à une interaction avec les parois de portée non nulle, pourrait déplacer la température de transition solide-hexatique vers la température de transition hexatique-liquide. Notons toutefois qu'en raison de la petite taille du système, ce sont des paramètres d'ordre intégrés sur le système qui ont été utilisés, et non pas leurs corrélations. Zheng et Grieve utilisent en revanche la fonction de corrélation orientationnelle pour mettre en valeur une phase hexatique, ceci étant validé par le calcul de la figure de diffraction de Bragg du réseau, qui présente 3 motifs différents selon la température effective. Notons toutefois que cette fonction de corrélation ne peut être tracée que sur une distance de 15 pas du réseau, ce qui semble faible pour juger du comportement

asymptotique. Une alternative pour discriminer les phases pourrait être de considérer, plutôt que les corrélations spatiales, les corrélations temporelles des mêmes paramètres. Expérimentalement, une telle méthode est séduisante puisque l'obstacle du caractère fini de l'espace occupé (ou du champ de la caméra) est ainsi levé¹⁵. Il a été montré par Nelson [89] que le comportement est identique à celui des fonctions d'espace, ce qui a été confirmé expérimentalement pour des particules colloïdales par Zahn *et al.* [90].

Compte-tenu de nos observations d'absence de disclinaisons et des autres résultats expérimentaux existant, il semble donc que dans les cristaux de Wigner macroscopiques, le scénario KTNHY ne soit pas vérifié, tant du point de vue de la typologie des défauts présents que de la fonction de corrélation orientationnelle¹⁶.

¹⁵Nous utiliserons cette possibilité au chapitre 9 pour caractériser le désordre dans les petits systèmes.

¹⁶Signalons que dans les systèmes colloïdaux, en revanche, l'unanimité semble être de rigueur, puisqu'aussi bien pour des interactions dipolaires [91] que pour des interactions coulombiennes écrantées [92, 93] ou des particules non chargées [94], le scénario KTNHY semble s'appliquer. Notamment, Murray *et al.* [92, 95] comme Zahn *et al.* [93] mettent parfaitement en parallèle le comportement des fonctions de corrélation avec la dynamique des dislocations et des disclinaisons. Cette différence avec notre système pourrait être attribuée soit à la nature différente de l'interaction, soit au rôle joué par les couplages hydrodynamiques.

Chapitre 5

Constantes élastiques et déplacements individuels

Sommaire

5.1	Introduction	81
5.2	Calcul des constantes élastiques	84
5.2.1	Branches de phonons du cristal de Wigner dans la limite des grandes longueurs d'onde	85
5.2.2	Détermination des constantes élastiques	88
5.3	Détermination expérimentale des constantes élastiques	90
5.3.1	Introduction	90
5.3.2	Fluctuation des déformations et constantes élastiques	91
5.3.3	Élasticité standard ($c_2 = 0$) et systèmes de taille finie	94
5.3.4	Théorie de premier gradient ($c_2 \neq 0$)	101
5.3.5	Résultats numériques et expérimentaux de la théorie de premier gradient	106
5.4	Conclusion	112

5.1 Introduction

Le cristal hexagonal dont nous disposons nous permet d'aborder le problème du piégeage de réseaux élastiques. Mais avant cela, il faut connaître les caractéristiques de ce réseau hors de toute contrainte, à savoir ses constantes élastiques. L'interaction entre les billes étant connue, la détermination directe des constantes à partir de cette donnée est immédiate. Elle est présentée à la section 5.2. L'enjeu principal de ce chapitre est toutefois autre. Nous profitons en effet de ce que nous connaissons à la fois les constantes élastiques et les mouvements individuels des particules du réseau pour aborder la question

du lien entre l'élasticité et les grandeurs directement mesurables à l'échelle des particules, notamment leur déplacement.

La théorie standard de l'élasticité linéaire est en effet une théorie macroscopique décrivant le comportement d'un milieu supposé continu lorsque les déformations sont faibles [96]. Elle permet donc uniquement de décrire, *a priori*, des systèmes connus à une échelle grande devant la dimension de ses composants élémentaires¹. Comme dans tout problème de physique statistique de ce type, le lien entre le comportement macroscopique et les comportements individuels des constituants élémentaires, régis par les lois de la mécanique², est complexe.

Toutefois, expliciter ce lien apparaît actuellement comme de plus en plus nécessaire, et ce pour deux raisons.

La première, à laquelle notre étude contribue, est d'ordre méthodologique. En effet, de plus en plus de petits systèmes (au sens où la distance typique entre les constituants élémentaires n'est pas extrêmement petite par rapport à la taille du système) sont étudiés actuellement. C'est le cas des milieux granulaires, qui comportent intrinsèquement un nombre de constituants bien inférieur au nombre d'Avogadro. Mais c'est aussi le cas pour tous les systèmes qui permettent l'observation directe des constituants élémentaires, tels les systèmes colloïdaux, les mousses, etc. Dans de tels systèmes, on espère tirer des renseignements sur le comportement macroscopique à partir d'une information obtenue à une échelle spatiale inférieure. Répondre à la question du positionnement respectif des deux échelles (échelle des particules et échelle macroscopique) devient crucial, afin, éventuellement, d'apporter les corrections nécessaires à la théorie continue, si cela est possible.

La seconde raison est liée aux méthodes numériques de Monte Carlo ou de dynamique moléculaire qui permettent de simuler le comportement d'un milieu avec comme paramètres en entrée, donc contrôlés, les interactions entre ses constituants élémentaires. Elles sont donc un outil précieux pour établir le lien entre comportements individuels et comportement macroscopique, et sont à ce titre très utilisées. Cependant, le nombre de particules que l'on peut actuellement traiter est de l'ordre de quelques milliers, et le problème de la séparation des échelles se pose également.

Préciser le lien entre mouvements particuliers et comportement élastique est donc indispensable, en particulier pour savoir à partir de quelle échelle Λ une description par la théorie continue standard est légitime, les variations spatiales à petites longueurs d'onde des grandeurs microscopiques ayant été intégrées dans une grandeur macroscopique. Si, dans certains cas, l'échelle à laquelle on peut appliquer la théorie des milieux continus peut être étonnamment petite, cette échelle Λ est bien souvent à mettre en balance

¹Ce qui suppose également que le nombre de ces constituants est grand.

²Nous nous contentons ici de discuter des résultats obtenus dans le cadre de la mécanique newtonienne.

avec la taille du système. De plus, si le système étudié est suffisamment grand pour admettre une description continue, le second enjeu est alors de relier les grandeurs locales mesurables aux constantes élastiques.

Pour un cristal non contraint parfaitement symétrique et infini dans lequel les particules ont un mouvement harmonique par rapport à leur position d'équilibre, il est possible d'écrire les équations du mouvement, puis, après transformation de Fourier, de se placer dans le domaine des grandes longueurs d'onde (vecteur d'onde \mathbf{q} tendant vers 0) pour en déduire le comportement accessible à l'échelle macroscopique. En faisant le parallèle avec la théorie de l'élasticité, on en déduit alors les constantes élastiques en fonction des forces d'interaction entre les particules.

Si le système est soumis à une contrainte homogène (champ de pesanteur, compression uniforme,...), le déplacement induit est affine et la déformation constante, l'échelle à laquelle la description continue peut être appliquée n'est pas modifiée. Dans ces cas-là, la limitation principale au niveau expérimental comme numérique réside dans la taille finie du système, qui impose une limite inférieure à \mathbf{q} .

Mais par ailleurs, le système peut aussi être soumis à une perturbation variant sur des distances inférieures à l'échelle macroscopique Λ . Il peut s'agir de l'application d'une contrainte extérieure non uniforme³, mais aussi d'un désordre intrinsèque au milieu, qui peut être gelé (dû à une inhomogénéité des composants, ou à un potentiel aléatoire sous-jacent) ou créé par agitation thermique⁴. Ces perturbations peuvent augmenter la corrélation entre les déformations dans le système, et donc n'autoriser l'utilisation de la description continue qu'à une nouvelle échelle plus grande que celle du système non perturbé. Si cette nouvelle échelle est, de plus, plus grande que la taille du système, l'utilisation de la théorie continue de l'élasticité n'est pas possible, il devient alors nécessaire de la modifier pour prendre en compte directement des variations spatiales qui ne peuvent être intégrées. Cette théorie contiendra alors également les constantes élastiques, mais aussi les paramètres caractérisant la perturbation apportée.

Si on est capable, compte-tenu des contraintes du système (taille et désordre), de mesurer les grandeurs caractéristiques (déformation et contrainte) à une échelle pour laquelle on dispose d'une théorie, c'est à dire essentiellement d'une expression de l'énergie libre, il est alors possible de déterminer les constantes élastiques du système.

Plusieurs méthodes sont envisageables. La plus naturelle consiste à appliquer une contrainte et mesurer la déformation correspondante. L'utilisation de la loi de Hooke —

³Penser à une pression ponctuelle sur un grain d'une milieu granulaire.

⁴Ces deux désordres sont de nature fondamentalement différente. Dans le premier cas, le système est à un instant donné à l'équilibre mécanique. Dans le second, la position de chacun des composants ne correspond pas à un tel équilibre.

ou d'une loi similaire, qui sera également dérivée de l'expression de l'énergie libre, si l'on se place à une plus petite échelle — délivre alors les valeurs des constantes élastiques. Cette approche pose néanmoins de nombreuses difficultés. Elle suppose en effet l'application d'une contrainte contrôlée et homogène à l'échelle à laquelle on a pu se placer. Si cette méthode peut fonctionner dans des simulations (voir par exemple [97]), elle est plus délicate à mettre en œuvre expérimentalement. Par ailleurs, une telle méthode faisant intervenir une contrainte nécessite souvent de connaître le lien entre la contrainte définie à l'échelle Λ et les forces en jeu dans le système, qui interviennent au niveau particulière, soulevant une difficulté conceptuelle supplémentaire. Par ailleurs, sa mise en œuvre dépend nécessairement du système étudié.

Une alternative, que nous développons ici, est de tirer avantage de l'agitation thermique qui induit des fluctuations dans les déformations à toute échelle. Ces fluctuations induisent une modification des contraintes internes, qui influent elles-mêmes sur les déformations. L'autocorrélation des déformations est donc liée également aux constantes élastiques, et la mesure de ces fluctuations permet de déterminer ces dernières, même sous une contrainte macroscopique nulle. L'avantage de ces méthodes est qu'elles sont basées uniquement sur la mesure des déplacements des objets et sont donc relativement universelles dès lors que l'on peut définir une température dans le système⁵. Du point de vue expérimental, le fait de n'avoir à mesurer que des déplacements est appréciable.

Dans ce chapitre, nous calculons donc dans un premier temps les constantes élastiques d'un cristal infini constitué de nos billes. Munis de cette détermination, nous explorons alors les possibilités de mesurer directement ces constantes à partir de la détermination expérimentale des fluctuations de leurs positions dans un cristal soumis à un thermostat effectif. Dans cette perspective, nous faisons au préalable un bilan critique des différentes méthodes appliquées expérimentalement ou dans des travaux numériques afin de proposer des pistes pour mieux comprendre les difficultés survenant dans ces méthodes et les améliorer.

5.2 Calcul des constantes élastiques

À partir de la donnée de l'interaction entre les particules, il est possible d'écrire les équations du mouvement et d'en extraire le spectre de phonons. Dans la limite des grandes longueurs d'onde, on peut en déduire la vitesse des ondes acoustiques dans le milieu. À cette échelle, le système se comporte comme un milieu continu, et ces vitesses peuvent donc s'exprimer en fonction des constantes élastiques. La comparaison entre les deux résultats permet alors d'exprimer les constantes élastiques en fonction des paramètres de

⁵L'application de cette méthode à des milieux granulaires est donc difficile, sauf exceptions (gaz granulaires...).

l'interaction entre les particules.

5.2.1 Branches de phonons du cristal de Wigner dans la limite des grandes longueurs d'onde

Nous considérons donc un réseau infini dont les nœuds sont repérés par les vecteurs $\mathbf{R}(l)$, avec $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$. On désigne par a_s la surface d'une cellule unité du réseau direct, qui s'exprime en fonction de la distance a_0 entre plus proches voisins ($a_s = a_0^2$ dans un réseau carré, $a_s = a_0^2\sqrt{3}/2$ dans un réseau hexagonal).

On note $\mathbf{R}(l, l') = \mathbf{R}(l) - \mathbf{R}(l')$ et $\mathbf{u}(l, l') = \mathbf{u}(l) - \mathbf{u}(l')$, où $\mathbf{u}(l)$ est un petit déplacement autour de $\mathbf{R}(l)$. Les indices $i, j \in \{x, y\}$ désignent une projection d'un vecteur sur un des axes du repère. Nous utilisons la convention usuelle de sommation sur les indices dédoublés.

L'énergie d'interaction $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ entre deux billes séparées par la distance r a été déterminée au chapitre 2 :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 K_0(r/\lambda). \quad (5.1)$$

L'énergie potentielle du réseau est

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l \neq l'} \mathcal{E}[\mathbf{R}(l, l') + \mathbf{u}(l, l')]. \quad (5.2)$$

Pour des petits déplacements, cette énergie peut être développée à l'ordre 2 en ces déplacements. On en déduit les équations du mouvement :

$$m\ddot{u}_i(l) = - \sum_{l', j} U_{ij}(l, l') u_j(l'), \quad (5.3)$$

avec

$$U_{ij}(l, l') = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i(l) \partial u_j(l')} (0, 0) = \begin{cases} -\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r_i \partial r_j} [\mathbf{R}(l, l')] & \text{si } l \neq l' \\ \sum_{k \neq l} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r_i \partial r_j} [\mathbf{R}(l, k)] & \text{si } l = l' \end{cases}. \quad (5.4)$$

Dans les espaces de Fourier⁶ (en temps et en position), cette équation devient :

$$\omega^2 u_i(\mathbf{q}) = C_{ij}(\mathbf{q}) u_j(\mathbf{q}), \quad (5.5)$$

où C_{ij} est la matrice dynamique :

$$C_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \sum_l U_{ij}(l, 0) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}(l)}. \quad (5.6)$$

⁶Dans tout ce qui suit, les conventions suivantes sont appliquées pour les transformation de Fourier dans l'espace : $f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} \int \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$, $f(\mathbf{q}) = \int \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

On peut écrire, compte-tenu de (5.4) :

$$C_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \sum_{l \neq 0} U_{ij}(l) (e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}(l)} - 1), \quad (5.7)$$

ce qui s'écrit aussi, compte tenu de la symétrie centrale en 0,

$$C_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \sum_{l \neq 0} U_{ij}(l) (\cos \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}(l) - 1). \quad (5.8)$$

Pour chaque vecteur d'onde \mathbf{q} , la matrice 2×2 $C_{ij}(\mathbf{q})$ peut être diagonalisée. Ses valeurs propres donnent les carrés des pulsations associées, ce qui permet d'en déduire les relations de dispersion.

Considérons maintenant la limite $\mathbf{q} \rightarrow 0$. *A priori*, pour une interaction quelconque, le développement de C_{ij} aux grandes longueurs d'onde ne peut se faire à ce stade car l'inversion (somme sur les l) \leftrightarrow (limite $\mathbf{q} \rightarrow 0$) nécessite de prendre quelques précautions⁷. Il faut en effet pour cela que la somme converge uniformément au voisinage de $\mathbf{q} = 0$. Cependant, dans le cas d'une interaction décroissant au moins exponentiellement, cette condition est vérifiée (la convergence est même normale), et on peut donc écrire :

$$C_{ij}(\mathbf{q}) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{m} \sum_{l \neq 0} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r_i \partial r_j} [\mathbf{R}(l)] \frac{[\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}(l)]^2}{2} \quad (5.9)$$

On obtient alors la forme générale :

$$C_{ij}(\mathbf{q}) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{E}_0}{m} \sum_{\mu\nu} B_{ij\mu\nu} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_\mu q_\nu, \quad (5.10)$$

où μ, ν permettent de désigner des coordonnées dans l'espace réciproque, et les $B_{ij\mu\nu}$ sont sans dimension et ne dépendent que du rapport a_0/λ et de la géométrie du réseau.

Plus explicitement, la matrice dynamique s'écrit :

$$C(\mathbf{q}) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{E}_0}{m} \begin{pmatrix} B_{xxxx} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_x^2 + B_{xyxy} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_y^2 & 2B_{xyxy} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_x q_y \\ 2B_{xyxy} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_x q_y & B_{xyxy} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_x^2 + B_{xxxx} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) q_y^2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

⁷Ainsi, pour un potentiel coulombien, on peut facilement se convaincre que l'inversion n'est pas triviale : U_{ij} variant comme $|\mathbf{R}|^{-3}$, le terme général de la somme est en $|\mathbf{R}|^{-1}$. Dans ce cas, comme montré par Bonsall et Maradudin [98], l'utilisation de la méthode d'Ewald permet de contourner le problème [99]. Elle nécessite l'emploi d'une représentation intégrale du potentiel d'interaction. Pour une interaction K_0 , la méthode peut être appliquée en utilisant la relation $K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-t - z^2/4t} dt$. Nous retrouvons alors bien le même résultat qu'en développant directement. Dans le cas coulombien, le calcul fait apparaître une singularité dans la branche longitudinale : $\omega \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{q}$, ce qui peut être interprété comme le fait que le module de compression est infini [67]. Il est aisé de généraliser la méthode présentée dans [98] au cas d'une interaction en loi de puissance quelconque. On se rend compte alors que cette singularité disparaît dès lors que la puissance est inférieure ou égale à -2.

Les $B_{ij\mu\nu}(z)$ sont donnés par :

$$B_{xxxx}(z) = \frac{1}{2} \sum_{l \neq 0} \left[z \frac{\tilde{R}_y^2}{|\tilde{\mathbf{R}}|^3} K'_0(|\tilde{\mathbf{R}}|z) + z^2 \frac{\tilde{R}_x^2}{|\tilde{\mathbf{R}}|^2} K_0''(|\tilde{\mathbf{R}}|z) \right] \tilde{R}_x^2, \quad (5.12)$$

$$B_{xxyy}(z) = \frac{1}{2} \sum_{l \neq 0} \left[z \frac{\tilde{R}_y^2}{|\tilde{\mathbf{R}}|^3} K'_0(|\tilde{\mathbf{R}}|z) + z^2 \frac{\tilde{R}_x^2}{|\tilde{\mathbf{R}}|^2} K_0''(|\tilde{\mathbf{R}}|z) \right] \tilde{R}_y^2, \quad (5.13)$$

$$B_{xyxy}(z) = \frac{1}{2} \sum_{l \neq 0} \left[-z \frac{\tilde{R}_x \tilde{R}_y}{|\tilde{\mathbf{R}}|^3} K'_0(|\tilde{\mathbf{R}}|z) + z^2 \frac{\tilde{R}_x \tilde{R}_y}{|\tilde{\mathbf{R}}|^2} K_0''(|\tilde{\mathbf{R}}|z) \right] \tilde{R}_x \tilde{R}_y, \quad (5.14)$$

où la variable l a été omise pour plus de clarté, et où $\tilde{\mathbf{R}}$ est le vecteur sans dimension \mathbf{R}/a_0 .

En pratique, les $B_{ij\mu\nu}$ sont calculés en tronquant les sommes à partir d'un certain rang. Typiquement, pour les dimensions caractéristiques de notre système ($a_0 \simeq 1,5$ mm, $\lambda = 0,48$ mm), les cinq premiers chiffres significatifs des $B_{ij\mu\nu}$ sont obtenus en prenant $-l_{MAX} \leq l \leq l_{MAX}$ et $l_{MAX} = 10$.

Dans un réseau hexagonal, il n'y a que deux constantes indépendantes, car on a de plus $B_{xyxy} = 1/2(B_{xxxx} - B_{xxyy})$.

Pour $a_0 = 1,5$ mm et $\lambda = 0,48$ mm, nous trouvons⁸

$$B_{xxxx} = 5,71.10^{-1} \text{ et } B_{xxyy} = 5,95.10^{-2}. \quad (5.15)$$

En centre de zone de Brillouin, les branches de phonons sont nécessairement transverses ou longitudinales⁹ [100]. Par ailleurs le réseau hexagonal est isotrope ; ainsi en regardant par exemple dans la direction [10], on en déduit que les ondes longitudinales et transverses ont respectivement pour pulsation au carré¹⁰

$$\omega_\ell^2 = \frac{\mathcal{E}_0}{m} B_{xxxx} q^2, \quad \text{et} \quad \omega_t^2 = \frac{\mathcal{E}_0}{m} B_{xxyy} q^2. \quad (5.16)$$

⁸Pour un réseau carré, en revanche, les trois constantes B_{xxxx} , B_{xxyy} et B_{xyxy} sont indépendantes. Pour les mêmes a_0 et λ , nous trouvons

$$B_{xxxx} = 5,55.10^{-1}, B_{xxyy} = -3,20.10^{-2} \text{ et } B_{xyxy} = 1,25.10^{-1}.$$

Dans la direction [10], la pulsation associée à l'onde transverse est donc imaginaire pure (car $B_{xxyy} < 0$). Le cristal carré n'est donc pas stable vis à vis d'un cisaillement dans le plan (10), comme dans le cas d'un cristal de Wigner coulombien [98].

⁹Ce n'est pas vrai en général, sauf lorsque \mathbf{q} est dans la direction d'un axe de symétrie de la zone de Brillouin.

¹⁰Pour un potentiel V_0 de 1000 V les vitesses de phase ω/q des ondes longitudinales et transverses valent respectivement $5,00.10^{-2}$ m.s⁻¹ et $1,61.10^{-2}$ m.s⁻¹.

5.2.2 Détermination des constantes élastiques

Par ailleurs, dans ce domaine des grandes longueurs d'onde, les pulsations ω_ℓ et ω_t peuvent s'exprimer en fonction des constantes élastiques. Dans un modèle continu standard de l'élasticité à deux dimensions, l'énergie libre par unité de surface du système s'écrit, dans le cas d'un matériau isotrope ou de symétrie hexagonale [96] :

$$F = \frac{\lambda}{2}u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2 = \frac{K}{2}u_{ii}^2 + \mu(u_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}u_{kk})^2, \quad (5.17)$$

où u_{ij} est le tenseur de déformation, donné par :

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right], \quad (5.18)$$

où u_i est le déplacement au point considéré par rapport à une position de référence. i et j désignent des coordonnées de l'espace.

λ et μ sont les coefficients de Lamé, tandis que $K = \lambda + \mu$ est le module de compression uniforme, μ étant alors appelé module de cisaillement.

L'écriture des équations du mouvement à partir de cette énergie libre permet d'écrire la matrice dynamique et d'en déduire directement les équations de dispersion qui correspondent à la limite continue ($\mathbf{q} \rightarrow 0$) utilisée ci-dessus.

On trouve alors [96] :

$$\omega_\ell^2 = \frac{a_s}{m}(K + \mu)q^2, \quad \text{et} \quad \omega_t^2 = \frac{a_s}{m}\mu q^2, \quad (5.19)$$

où $1/a_s = 2/(\sqrt{3}a_0^2)$ est la densité en particules.

D'où, par identification avec les équations (5.16),

$$K = \frac{0.82 \epsilon_0 V_0^2 h}{a_0^2} \left[B_{xxxx} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) - B_{xyxy} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right) \right], \quad (5.20)$$

$$\mu = \frac{0.82 \epsilon_0 V_0^2 h}{a_0^2} B_{xyxy} \left(\frac{a_0}{\lambda} \right), \quad (5.21)$$

ce qui donne, pour $a_0 = 1,5$ mm et $V_0 = 1000$ V, $K \simeq 2,47.10^{-3} \text{J.m}^{-2}$ et $\mu \simeq 2,88.10^{-4} \text{J.m}^{-2}$. Avec ces valeurs, notre système élastique est donc complètement caractérisé. Par ailleurs, elles nous permettront de juger de la pertinence des modèles de détermination expérimentale qui sont développés dans la section suivante.

Il est intéressant de comparer ces valeurs avec celles obtenues en ne prenant en compte que les interactions entre premiers voisins (c'est-à-dire en ne sommant dans (5.9) que sur les six l proches de 0). Les valeurs des constantes exactes et des constantes approchées en fonction du pas du réseau a_0 sont reportées sur la figure 5.1. L'écart entre les deux modèles reste important jusqu'à $a_0 \simeq 16\lambda \simeq 8$ mm, où il n'est plus que de 1%. Aussi, pour les distances a_0 usuellement utilisées l'écart est important puisque de l'ordre de 30%, ce qui

signifie qu'on ne pourra pas, pour discuter des propriétés élastiques du réseau au regard des mouvements individuels des particules, se contenter de regarder le comportement des premières voisines d'une particule donnée¹¹.

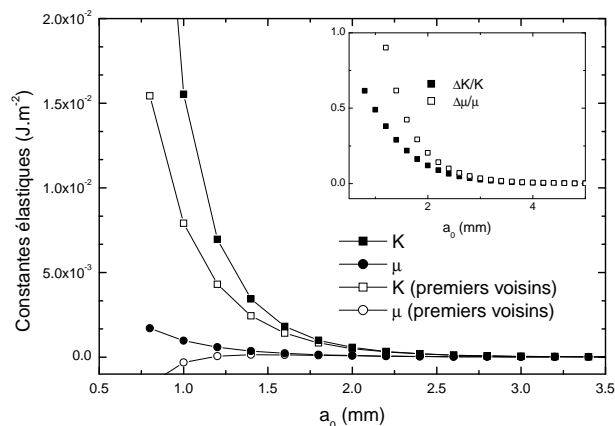


FIG. 5.1 : Modules de compression K et de cisaillement μ en fonction du pas du réseau a_0 : calcul exacts et approximation premiers voisins. En insert : écart relatif entre les deux modèles.

Dépendance théorique avec la température

Les calculs précédents correspondent à une détermination des constantes élastiques à température nulle, quand le mouvement des particules autour de leur position d'équilibre n'est dû qu'à leurs interactions. À température finie, les fluctuations thermiques influent sur ce mouvement. En reconsidérant l'énergie potentielle (5.2) développée pour des petits déplacements, qui permet de connaître la distribution statistique de ces déplacements due à la température, on montre que [101] :

$$\frac{C_i(T)}{C_i(0)} \simeq \exp\left(-\alpha_i \frac{T}{T_\ell}\right), \quad (5.22)$$

où $C_i(T)$ est une constante élastique à la température T , T_ℓ la température de fusion, et α_i un coefficient dépendant de la constante considérée mais qui reste de l'ordre de 1. Les constantes élastiques diminuent donc quand la température augmente. Il est également prouvé, et cela a été mis en évidence dans un cristal colloïdal [102], que cette décroissance est beaucoup plus importante pour le module de cisaillement ; le module de compression reste lui quasiment constant jusqu'à la fusion. La prise en compte de ce ramolissement est nécessaire notamment lorsqu'on veut caractériser la fusion d'un solide à partir du

¹¹Ceci illustre également une assertion de la section 2.3.1 : la mesure des phonons dans un grand cristal, si elle est possible, permet essentiellement de mesurer l'interaction effective entre particules, qui tient compte de tout l'environnement, mais pas de l'interaction de paire.

comportement de ses constantes élastiques¹².

5.3 Détermination expérimentale des constantes élastiques

5.3.1 Introduction

Nous abordons maintenant la détermination expérimentale des constantes élastiques par la méthode des fluctuations. Rappelons qu'il y a dans cette méthode deux étapes qui requièrent une attention égale. Il s'agit d'abord de déterminer, à partir des déplacements locaux, le tenseur de déformation macroscopique ou plutôt *le plus macroscopique possible*, puisque nous sommes limités par la taille du système, et ensuite, en utilisant l'énergie libre adaptée à cette déformation, de déduire de la mesure de ses fluctuations les constantes élastiques.

Après avoir décrit cette méthode et discuté en détail les difficultés relatives à chacune des deux étapes, nous présentons une ébauche de solution adaptée aux systèmes de taille fini au nombre de constituants restreint, tel le nôtre. Pour cela, nous nous appuyons notamment sur les nombreuses études numériques réalisées depuis quelques dizaines d'années sur des systèmes cristallins ainsi que dans des cristaux liquides nématiques¹³.

¹²Par ailleurs, étudier la fusion peut constituer une alternative pour la détermination d'une relation donnant les constantes élastiques. En effet, selon la théorie KTNHY, la température de transition solide-hexatique T_m est caractérisée par la relation universelle [79] :

$$\lim_{T \rightarrow T_m^-} \frac{4a_0^2 \mu(T) K(T)}{k_B T [\mu(T) + K(T)]} = 16\pi.$$

Dans cette équation, il est nécessaire de prendre en compte la décroissance des constantes élastiques due à l'augmentation de la température [103], mais aussi de la renormalisation des constantes rendue nécessaire par l'apparition des dislocations [81]. De plus, avant cette transition, l'exposant caractérisant la décroissance algébrique de la fonction de corrélation translationnelle s'exprime en fonction de ces mêmes constantes : la mesure de cette fonction permet, si le système est assez grand, de déterminer une deuxième relation faisant intervenir les constantes élastiques (voir par exemple, pour des systèmes colloïdaux, la référence [104]).

¹³En effet, dans ce dernier cas, les corrélations entre les constituants donnent une forme complexe à l'énergie libre, ce qui a suscité de nombreux travaux et la recherche de techniques alternatives. Ceci permet de mieux mettre en valeur les différentes difficultés.

La comparaison avec les études numériques se justifie sur deux points¹⁴. Tout d’abord, la taille des systèmes étudiés numériquement est actuellement de l’ordre de grandeur de celle de notre système, à savoir quelques milliers de particules. Par ailleurs, une question importante dans ces problèmes est celle de la rapidité de la convergence des algorithmes, liée au nombre de configurations qu’il est nécessaire de simuler pour obtenir une statistique satisfaisante. Ce point est également d’importance pour les systèmes expérimentaux, car si l’obtention d’une nouvelle configuration dans un système réel est plus rapide qu’avec un ordinateur, les cristaux obtenus présentent souvent une légère instabilité dans le temps liée à la présence de dislocations résiduelles mobiles. Il est donc nécessaire de pouvoir disposer d’un protocole nécessitant un échantillon statistique le plus petit possible, afin que le temps de mesure soit limité.

Nous présentons donc pour commencer le principe général de l’utilisation des fluctuations du tenseur de déformation dans le cadre d’une théorie continue de l’élasticité, puis nous explorons les différentes utilisations de cette méthode réalisées dans des simulations numériques, mais également dans des systèmes colloïdaux.

5.3.2 Fluctuation des déformations et constantes élastiques

Cadre général

Les relations fondamentales que nous allons utiliser peuvent être obtenues de plusieurs manières différentes. Dans l’optique des dérivations plus complexes qui nous serviront à la section 5.3.4, nous nous plaçons ici dans le cadre très général d’un système canonique bidimensionnel de volume $V = L^2$, où $L \rightarrow \infty$ et considérons que le système est décrit par une fonctionnelle d’énergie libre

$$\mathcal{F}(\phi) = \int [\mathcal{F}_0(\phi(\mathbf{x})) - B(x)\phi(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (5.23)$$

où ϕ est un paramètre d’ordre réel continu défini localement et $B(\mathbf{x})$ est un champ extérieur fictif non nécessairement uniforme couplé avec ϕ . Même s’il est nul en réalité, ce champ est très utile pour calculer les fonctions de corrélation, quitte à le faire tendre vers 0 ensuite [108]. La généralisation à plusieurs paramètres indépendants ϕ_1, ϕ_2, \dots est immédiate.

¹⁴Notons toutefois que dans les simulations numériques, par nature, la force entre les composants est connue, ce qui rend possible l’utilisation de méthodes de déterminations faisant intervenir le tenseur de contrainte. Cependant, les méthodes basées sur la loi de Hooke ont été utilisées très minoritairement. En effet, il a été montré, tant dans les solides que dans les cristaux liquides, que ces méthodes convergent moins bien que les méthodes basées sur les mesures des fluctuations (du tenseur de déformation ou du tenseur de contrainte). On pourra se référer, pour les solides, aux travaux de Sprik *et al.* [105], et pour les cristaux liquides aux références [106, 107]. Les méthodes de fluctuations, qui sont celles qui nous intéressent, sont donc majoritairement présentes dans la littérature.

La fonction de partition du système est définie par l'intégrale de chemin

$$Z = \int D[\phi] \exp [-\beta \mathcal{F}(\phi)], \quad (5.24)$$

et l'énergie libre par

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad (5.25)$$

avec $\beta = 1/k_B T$.

Si on note $\langle A \rangle = 1/Z \int D[\phi] A e^{-\beta \mathcal{F}(\phi)}$ la moyenne d'ensemble de A , on définit la fonction de corrélation connexe

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle. \quad (5.26)$$

On a

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial B(\mathbf{x})} = -\frac{\partial F}{\partial B(\mathbf{x})}, \quad (5.27)$$

et

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B(\mathbf{x}) \partial B(\mathbf{y})} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle}{\partial B(\mathbf{x})}. \quad (5.28)$$

Enfin, on définit la susceptibilité par :

$$\chi(\mathbf{y}) = \frac{\partial \int \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}}{\partial B(\mathbf{y})} = \beta \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}. \quad (5.29)$$

Si de plus le système est invariant par translation, ce qui suppose que B est constant, on a

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(0) \rangle - \langle \phi(0) \rangle^2, \quad (5.30)$$

$$\text{et } \chi = \beta \int G(\mathbf{x}) = \lim_{q \rightarrow 0} \beta G(\mathbf{q}), \quad (5.31)$$

où $G(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de $G(\mathbf{x})$. χ est une fonction des constantes intervenant dans l'énergie libre, qui peuvent donc être déterminées à partir de la fonction de corrélation du paramètre ϕ .

Cas de l'élasticité

Dans un système élastique, les paramètres d'ordre utilisés sont les composantes indépendantes du tenseur de déformation, obtenu par dérivation des déplacements¹⁵. Dans l'hypothèse d'un comportement linéaire, les valeurs de ce tenseur sont petites et l'énergie libre peut être développée selon les plus petites puissances du tenseur et éventuellement de ses gradients. Si l'on se restreint aux gradients du premier ordre, la fonctionnelle d'énergie libre s'écrit donc :

¹⁵Pour les cristaux liquides nématiques, l'expression de la déformation fait intervenir des rotationnels du vecteur directeur, mais fondamentalement cela ne modifie en rien notre discussion.

$$\mathcal{F}(\phi) = \int \left[\frac{c_1}{2} \phi(\mathbf{x})^2 + \frac{c_2}{2} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 + \dots \right] d\mathbf{x} - \int B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.32)$$

Les constantes c_1 associées sont par définition les constantes élastiques¹⁶. Le second terme, associé à la constante c_2 , permet de rendre compte de variations sur des distances inférieures à l'échelle de mesure, et donc non structurellement intégrées dans le terme en c_1 .

À partir de cette énergie libre, nous pouvons dériver la fonction de corrélation G correspondante.

Par intégration par parties, \mathcal{F} s'écrit également

$$\mathcal{F}(\phi) = \int \left[\frac{c_1}{2} \phi(\mathbf{x})^2 - \frac{c_2}{2} \phi(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} - \int B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.33)$$

L'intégrale définissant Z , qui est

$$Z[B] = \int D[\phi] \exp \left[-\frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{x}) \beta (c_1 - c_2 \Delta) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \beta \int B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right], \quad (5.34)$$

est gaussienne et il vient donc

$$Z[B] = Z[0] \exp \left[\frac{\beta}{2} \int B(\mathbf{x}) (c_1 - c_2 \Delta)^{-1} B(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right], \quad (5.35)$$

où $(c_1 - c_2 \Delta)^{-1}$ est l'inverse de l'opérateur $c_1 - c_2 \Delta$.

D'où

$$F = \frac{1}{\beta} \ln Z = F_0 - \frac{1}{2} \int B(\mathbf{x}) (c_1 - c_2 \Delta)^{-1} B(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.36)$$

puis

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{\partial F}{\partial B(\mathbf{x})} = (c_1 - c_2 \Delta)^{-1} B(\mathbf{x}), \quad (5.37)$$

et donc

$$\beta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle}{\partial B(\mathbf{x})} = (c_1 - c_2 \Delta)^{-1} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.38)$$

Compte-tenu de l'invariance par translation on obtient finalement

$$\beta G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (c_1 - c_2 \Delta)^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.39)$$

Notons que si le système n'est pas contraint par un champ extérieur, c'est à dire si $B = 0$, les seules contributions au tenseur de déformation sont dues aux fluctuations thermiques, on a $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = 0$ et $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(0) \rangle$.

¹⁶Une telle énergie libre quadratique permet de relier linéairement le tenseur de déformation au tenseur de contrainte σ . Si $c_2 = 0$, on a notamment la loi de Hooke $\phi = c_1 \sigma$.

5.3.3 Élasticité standard ($c_2 = 0$) et systèmes de taille finie

Dans la théorie standard de l'élasticité continue, on se place à une échelle telle que les variations du tenseur de déformation sont négligeables, ce qui revient à considérer que $c_2 = 0$.

On obtient donc¹⁷ :

$$\frac{1}{c_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \beta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.40)$$

Il apparaît donc que dans ce cadre, il n'existe aucune distance caractéristique dans le système ; les valeurs du tenseur de déformation en deux points différents de l'espace sont décorellées.

Si l'on considère cette dernière relation avec $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, il vient la relation de fluctuation recherchée :

$$\forall \mathbf{x}, \quad \frac{1}{c_1} = \beta V \langle \phi(\mathbf{x})^2 \rangle. \quad (5.41)$$

Les constantes élastiques sont donc données directement par les fluctuations des composantes du tenseur de déformation. La transformation de Fourier de l'équation (5.40) donne $1 = c_1 \beta G(\mathbf{q})$, d'où nous déduisons la relation de fluctuation dans l'espace de Fourier :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{\beta \langle \phi(\mathbf{q}) \phi(-\mathbf{q}) \rangle}{V}. \quad (5.42)$$

Rappelons que, le modèle ne prenant en compte que des grandeurs macroscopiques, cette dernière relation n'est vraie que dans la limite $q \rightarrow 0$.

Muni d'une de ces deux relations de fluctuation, il suffit de pouvoir déterminer le tenseur macroscopique ϕ pour en déduire les constantes élastiques associées. Les exemples qui suivent montrent que l'exercice est parfois délicat, car il faut être capable de considérer le système au delà de la taille limite Λ à partir de laquelle la description utilisée ici est valable.

Mesure du tenseur de déformation

Rappelons que la grandeur immédiatement mesurable est le déplacement individuel de chacun des constituants du milieu. À partir de ce déplacement il est possible, à l'aide d'un schéma de différences finies adapté, de déterminer une déformation *microscopique* qui peut *a priori* varier fortement à toute échelle. Il s'agit alors de construire, à partir de ces données, un tenseur de déformation correspondant à une description *macroscopique*, qui, lui, doit présenter des variations peu marquées.

¹⁷On voit donc que la susceptibilité χ définie dans 5.31 est l'inverse de la constante élastique.

Différentes méthodes peuvent être appliquées¹⁸.

La première consiste à faire une hypothèse de champ moyen, dite aussi "de Voigt" : le champ macroscopique est tout simplement égal au champ microscopique au point considéré¹⁹. Nous reprenons les notations de la section 5.2 : $\mathbf{u}(l)$ est le (petit) déplacement de la particule associée au nœud $\mathbf{R}(l)$. Le tenseur de déformation u_{ij}^{CM} est défini par :

$$u(l, l')_i = u_{ij}^{CM} R(l, l')_j, \quad (5.43)$$

où l et l' désignent deux particules voisines.

Cette méthode est notamment utilisée par Zheng et Grieve pour étudier la fusion d'un système de billes chargées [38]. Cette approche naïve n'est cependant correcte que pour un système à l'équilibre mécanique soumis à une contrainte uniforme. Le déplacement est alors affine à toute échelle. Pour un système présentant des fluctuations thermiques, ou bien un système présentant un désordre gelé tel un verre, il n'y a pas d'équilibre mécanique local et l'approche de champ moyen n'est pas correcte.

Liao *et al.* [111] ont proposé une méthode dérivée consistant à ajuster dans un volume choisi le champ donné par la formule de champ moyen. Il s'agit donc de minimiser en fonction des composantes du tenseur test u_{ij}^{Macro} l'écart dans un volume V entre les déplacements microscopiques $u(l, l')_i$ et les déplacements "macroscopiques" définis par $u_{ij}^{Macro} R(l, l')_j$. Le champ de déformation u_{ij}^A réalisant ce minimum intègre les variations incluses dans V et permet néanmoins de définir un tenseur local, en prenant un volume V adapté. Cependant, l'absence de contrôle sur la manière dont ces contributions sont prises en compte peut conduire à une mauvaise détermination des constantes élastiques [112].

L'inconvénient de ces deux premières méthodes est de ne pas prendre en compte ou de mal contrôler les variations à petites longueurs d'onde des grandeurs mesurées pour établir le tenseur de déformation afin de pouvoir utiliser la théorie standard de l'élasticité.

La méthode de "coarse-graining" proposée par Goldenberg et Goldhirsch [113, 114] cherche à résoudre cette difficulté : le principe est de définir des grandeurs obtenues par convolution des grandeurs microscopiques correspondantes avec une fonction de coarse-graining, par exemple une gaussienne²⁰. Si la largeur w de cette fonction est suffisamment grande (c'est à dire de l'ordre de l'échelle Λ), les grandeurs obtenues peuvent alors être traitées dans le cadre d'une théorie continue.

Si dans son principe, cette méthode est simple, des précautions doivent être prises

¹⁸Citons également une méthode proposée par Aubouy *et al.* afin d'étudier les déformations élastiques mais aussi plastiques dans des mousses bidimensionnelles. Il s'agit d'utiliser un tenseur de texture construit à partir des longueurs des parois des cellules [109, 110]. L'extension de cette méthode à un système de particules à température finie n'a pas été abordée dans ce travail.

¹⁹Cela revient à considérer les particules comme des marqueurs placés sur un milieu élastique sous-jacent.

²⁰Plus généralement, cette fonction doit être une fonction positive décroissant rapidement et présentant un maximum en 0.

dans les définitions des variables à "coarse-grainer"²¹ afin que les variables macroscopiques définies (densité, énergie, contrainte, déformation,...) obéissent aux équations de conservation habituelles de la mécanique continue. De plus, les variables ainsi calculées peuvent présenter une contribution non-linéaire avec la déformation, qu'il faut identifier et écarter.

Considérons ainsi la gaussienne $\Psi(\mathbf{r})$ centrée sur 0, paire, de largeur $2w$ et d'intégrale 1 : $\Psi(\mathbf{r}) = \exp[-r^2/(2w^2)]/(2\pi w^2)$. Le vecteur de déplacement coarse-grainé $\mathbf{u}^{CG}(\mathbf{r})$ est défini par :

$$\mathbf{u}^{CG}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_l \mathbf{u}(l)\Psi[\mathbf{r} - \mathbf{R}(l)]}{\sum_l \Psi[\mathbf{r} - \mathbf{R}(l)]}. \quad (5.44)$$

Cette définition peut sembler élémentaire car elle correspond simplement au coarse-graining du déplacement microscopique. Toutefois, l'expression exacte qui permet de vérifier les équations de conservation de la mécanique est plus complexe, et l'expression donnée ici correspond à sa partie linéaire en la déformation microscopique, qui nous suffit ici.

On définit alors le tenseur de déformation correspondant par dérivation, ce qui peut se faire de manière analytique car c'est la fonction Ψ qui est dérivée :

$$u_{ij}^{CG}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^{CG}(\mathbf{r})}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j^{CG}(\mathbf{r})}{\partial r_i} \right]. \quad (5.45)$$

Pour que cette définition soit valable (rappelons que dans (5.44) des termes non linéaires ont été omis), la déformation ainsi définie doit correspondre pour w suffisamment grand à la déformation macroscopique usuelle. Cela est immédiat pour un système homogène à l'équilibre mécanique soumis à une contrainte uniforme, u_{ij}^{CG} étant dans ce cas indépendant de w . De plus, cette définition a été testée avec succès sur un système inhomogène constitué par un réseau unidimensionnel de ressorts non identiques (désordre gelé), pour lesquels la déformation exacte, qui est non uniforme, peut être calculée numériquement [113]²².

La méthode proposée permet donc d'intégrer les variations rapides dues à un désordre gelé tout en rendant compte d'un état inhomogène à l'échelle macroscopique. La séparation des échelles est bien réalisée.

Cette séparation a été mise en évidence numériquement de manière plus précise par Goldenberg *et al.* dans un système granulaire bidimensionnel polydisperse soumis à une contrainte ponctuelle [115]. L'évolution de la valeur du tenseur de contrainte coarse-grainé en fonction de la largeur w présente un plateau intercalé entre deux parties à peu près

²¹Ainsi, nous verrons que la déformation est obtenue par dérivation d'un déplacement coarse-grainé, et non par intégration des déformations microscopiques.

²²En revanche, la méthode d'ajustement proposée par Liao *et al.* donne un résultat très éloigné de la valeur exacte.

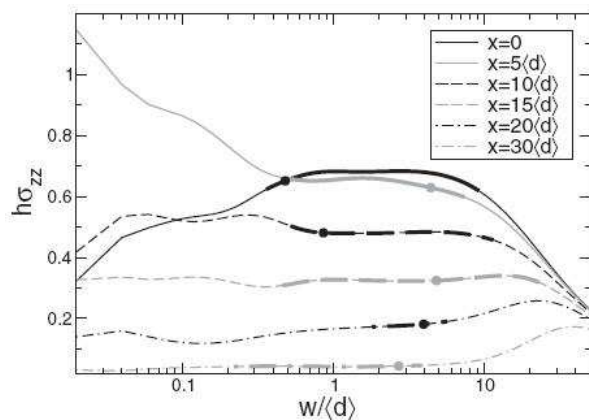


FIG. 5.2 : Évolution en fonction de w de la valeur du tenseur de contrainte coarse-grainé dans un milieu granulaire polydisperse soumis à une contrainte ponctuelle (Goldenberg *et al.* [115]). Les différentes courbes correspondent à différentes positions dans le milieu. Pour chacune, un plateau, marqué en gras, peut être observé.

monotones (voir figure 5.2). Ce plateau correspond à une contrainte qui ne dépend pas de l'échelle à laquelle elle est mesurée : le système est "localement homogène", pour reprendre les termes de Goldenberg *et al.* [115]. Pour ces valeurs de w , la description continue standard de l'élasticité serait donc correcte. En effet, indépendance d'échelle et description avec une énergie libre ayant uniquement un terme en c_1 sont étroitement liées, puisqu'une telle énergie implique que la fonction de corrélation est un pic δ .

La position et la largeur du plateau dépendent de plusieurs facteurs, notamment de la taille totale du système et l'importance du désordre, donc des gradients locaux des champs²³. À une échelle plus basse, les variations du tenseur microscopique ne sont pas "lissées", et les champs deviennent alors dépendants de l'échelle.

L'existence de ce plateau suggère donc l'existence de l'échelle Λ , borne inférieure du plateau à partir de laquelle la théorie standard de l'élasticité linéaire peut être appliquée au tenseur u_{ij}^{CG} . Ce point a été étudié en détail dans [113] pour un réseau de particules reliées par des ressorts de longueur à vide et de raideur aléatoires uniformément répartis respectivement dans les intervalles $[d - \delta d; d + \delta d]$ et $[\kappa - \delta \kappa; \kappa + \delta \kappa]$. Ce réseau est soumis à une contrainte uniforme, mais comme il est désordonné, le champ de déformation est cependant inhomogène. En appliquant différentes contraintes et en supposant vraie la loi de Hooke pour un w donné, on obtient à partir de la mesure des tenseurs de déformation correspondants un système linéaire surdéterminé dont les inconnues sont les constantes élastiques. En utilisant un ensemble d'équations non redondantes, les constantes élastiques peuvent alors être déterminées. À partir de ces constantes, la loi de Hooke est ensuite appliquée au tenseur de contrainte calculé pour établir les équations supplémentaires, afin de déterminer le tenseur de déformation théorique satisfaisant à cette loi. L'écart relatif Δ entre ce tenseur et le tenseur réellement mesuré permet

²³Par ailleurs, notons que la borne inférieure du plateau peut être abaissée en effectuant une moyenne sur différentes configurations du désordre gelé. Par ailleurs, le plateau peut présenter une borne supérieure en cas de contrainte macroscopique non homogène agissant sur le système.

d'estimer l'écart à la théorie continue de l'élasticité linéaire. Δ décroît naturellement lorsque w augmente, mais augmente lorsque le désordre (déterminé par $\delta\kappa$ et δd) augmente. Si le désordre est trop grand, Δ reste important même pour w de l'ordre de la taille du système. Rappelons une nouvelle fois que cette procédure de coarse-graining intègre les variations rapides mais permet toujours de rendre compte de l'élasticité d'un système inhomogène à grande échelle : les constantes élastiques, qui sont bien définies quand Δ est proche de 0, sont définies localement (mais à une échelle plus grande que Λ). Les valeurs minimales de w nécessaires pour pouvoir appliquer la théorie standard de l'élasticité en présence de désordre sont étonnamment faibles. Ainsi, pour $\delta d = 0.1d$ et $\delta\kappa = 0.1\kappa$, la déviation à la théorie standard est inférieure à 1% dès que $w > 12d$.

En conclusion, la théorie développée par Goldenberg et Goldhirsch permet de disposer d'une méthode simple et efficace de calcul du tenseur de déformation — et du tenseur de contrainte, si nécessaire — adaptée pour la description par la théorie standard de l'élasticité d'un milieu élastique soumis à un désordre gelé²⁴. Ce tenseur est défini à partir du coarse-graining des déplacements définis à l'échelle des particules, avec une largeur de coarse-graining $w \geq \Lambda$ suffisante pour intégrer les variations rapides des données microscopiques. La borne inférieure Λ est contrôlée par l'importance des gradients des champs (et donc de la longueur caractéristique de leur corrélation spatiale), qui dépendent du désordre, mais aussi par exemple de l'existence d'une contrainte inhomogène (voir par exemple, pour des granulaires, les références [116, 117]).

Il est toutefois important de noter que la méthode proposée n'a été testée jusqu'à présent que pour un désordre gelé et qu'*a priori* son extension à un désordre dû aux fluctuations thermiques n'est pas immédiate et nécessiterait une étude plus poussée, comme suggéré dans [114]. À travers la présentation, dans ce qui suit, de différents travaux visant à déterminer les constantes élastiques par une méthode de fluctuation, nous allons voir que l'échelle $\Lambda(T)$ à partir de laquelle on peut utiliser une description élastique standard peut parfois s'avérer en pratique plus élevée que dans le cas d'un désordre gelé, et trop élevée par rapport à la taille de systèmes finis de quelques milliers de particules tels que le nôtre. Au delà de ce point, la section suivante a donc un double emploi, puisqu'il s'agit également de discuter, avec une visée opérationnelle, des différentes méthodes employées dans la littérature.

²⁴Bien entendu, le désordre ne doit pas être trop important, auquel cas la pertinence même d'une description élastique est remise en cause : on retrouve là la différence entre un désordre faible et un désordre fort. Un critère pour établir la frontière entre ces deux désordres pourrait être d'ailleurs de mesurer l'existence du plateau mis en valeur par Goldenberg *et al.*.

Utilisation de la formule de fluctuation dans des systèmes de taille finie

Nous présentons dans ce qui suit quelques études essentiellement numériques pour lesquelles aucune contrainte inhomogène n'est appliquée. Ces études ne sont cependant pas basées sur la théorie de Goldenberg et Goldhirsch, à laquelle elles sont souvent antérieures, mais sur une mesure locale de la déformation (par une formule telle que (5.43)) puis son intégration sur l'espace le plus grand possible ce qui, dans l'espace de Fourier, revient à ne considérer que ses variations à petit vecteur d'onde et utiliser pour déterminer les constantes élastiques la formule (5.42) :

$$\frac{1}{c_1} \underset{q \rightarrow 0}{=} \frac{\beta \langle \phi(\mathbf{q}) \phi(-\mathbf{q}) \rangle}{V}. \quad (5.46)$$

La difficulté relevée dans les études que nous allons présenter est de faire tendre q vers 0, à cause de la taille finie du système qui lui impose une limite inférieure. À la lumière des travaux de Goldenberg et Goldhirsch, cette difficulté peut être interprétée ainsi : les tenseurs de déformation utilisés dans ces études sont les tenseurs microscopiques intégrés sur l'ensemble du système, autrement dit, il s'agit de tenseurs obtenus par coarse-graining avec w de l'ordre de la taille du système (ce qui est le mieux qu'on puisse faire pour s'approcher de la limite continue!), et la question est de savoir si cette valeur maximale de w est plus grande que Λ . Signalons cependant une différence par rapport au tenseur proposé par Goldenberg et Goldhirsch. La variable coarse-grainée ici est la déformation macroscopique, et non le déplacement, qui, dans la méthode de Goldenberg et Goldhirsch est ensuite dérivé puis allégé de sa partie non linéaire en le déplacement microscopique. On peut supposer que cette simplification permet d'optimiser la borne Λ par rapport à la méthode "brute" utilisée dans ce qui suit.

Dans la littérature, deux variantes de la formule (5.46) ont également été utilisées. En effet, le champ de déformation ϕ étant schématiquement la dérivée d'un champ Υ (pour les solides cristallins, le déplacement), la formule (5.46) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{1}{c_1} \underset{q \rightarrow 0}{=} \frac{\beta q^2 \langle \Upsilon(\mathbf{q}) \Upsilon(-\mathbf{q}) \rangle}{V}. \quad (5.47)$$

Par ailleurs, en utilisant la loi de Hooke, une formule similaire à (5.46) peut être obtenue en utilisant les fluctuations du tenseur de contrainte.

Quelle que soit la méthode utilisée, il existe des difficultés assez génériques et d'autres plus spécifiques.

La formule de fluctuation sur les déplacements a été initialement proposée par Pratt [118]; elle permet de ne pas avoir à réaliser une dérivation discrète. Utilisée initialement avec un succès mitigé dans les cristaux liquides [119, 120], et ce pour des systèmes de plus en plus grands [106], elle a permis d'obtenir les bonnes constantes élastiques avec

un système de plusieurs milliers de particules et une moyenne sur plusieurs milliers de configurations [121]. Il demeure que la limite $q \rightarrow 0$ est souvent délicate à prendre, car outre la borne inférieure imposée par la taille finie, la divergence du terme $\langle \Upsilon(\mathbf{q})\Upsilon(-\mathbf{q}) \rangle$ pose des problèmes de convergence de l'expression complète $q^2 \langle \Upsilon(\mathbf{q})\Upsilon(-\mathbf{q}) \rangle$.

Appliquée à un réseau cristallin, cette méthode revient à déterminer la limite des branches de phonons aux grandes longueur d'onde. En effet, si l'on considère, pour des petits déplacements, l'énergie potentielle donnée par (5.2), le théorème d'équipartition appliqué à cette énergie écrite dans l'espace de Fourier donne directement la formule de fluctuation (5.47) : les fluctuations du déplacement donnent directement la matrice dynamique. Cette remarque a récemment été utilisée avec succès par Meyers *et al.* pour des particules en interaction de type Lennard-Jones (étude numérique) [122]. Malgré la relative petite taille de leur système (un peu plus d'un millier de particules), le régime dans lequel $\langle \Upsilon(\mathbf{q})\Upsilon(-\mathbf{q}) \rangle$ est proportionnel à $1/q^2$ est bien atteint. Au niveau expérimental, cette formule a également été testée avec succès pour un système de plusieurs milliers de particules colloïdales [123]²⁵. Peu d'études sur des cristaux ayant utilisé cette méthode, nous manquons de recul pour tirer des conclusions générales de ces quelques travaux. Il ressort surtout de cet aperçu que les limitations imposées par le caractère fini des systèmes sont plus ou moins marquées selon les systèmes. Elles dépendent fortement des interactions et éventuellement, pour ce qui est des simulations numériques, de l'efficacité des algorithmes pour générer les ensembles statistiques. En effet, les moyennes d'ensemble permettent généralement également d'abaisser la limite inférieure à partir de laquelle la théorie continue standard peut être employée [115].

L'utilisation de la formule de fluctuations du tenseur de déformation soulève des problèmes supplémentaires, outre le fait qu'elle nécessite l'emploi d'une dérivation discrète, source d'incertitude. Initialement proposée par Squire *et al.* [124], cette formule semble poser problème du point de vue numérique, car elle nécessite de porter une grande attention au type d'ensemble statistique que la simulation permet de générer [125–128]. Les problèmes de convergence, relevés par exemple par Yoshimoto *et al.* [129] pour un cristal, seraient plus accentués que pour la méthode précédente, à cause de fluctuations plus fortes du tenseur de déformation. Ce manque de convergence qui rend délicate l'extrapolation $q \rightarrow 0$ a été mis en évidence expérimentalement dans un système colloïdal par Weiss *et al.* [130]²⁶.

²⁵Dans cette étude, l'ensemble du spectre de phonons a été déterminé avec précision, ce qui ne pose pas de difficulté supplémentaire dès lors que la limite $q \rightarrow 0$ peut être atteinte.

²⁶En conséquence de quoi, les simulations numériques les plus performantes sont souvent réalisées soit en adoucissant les fluctuations en couplant le système avec un substrat élastique [131], soit en utilisant une formule de fluctuation mixte faisant aussi intervenir le tenseur de contrainte [132], soit encore, comme proposé par Schofield, en utilisant directement une relation de fluctuation sur le tenseur de contrainte uniquement [133]. Cependant, comme relevé par Allen [134], cette méthode suppose de bien définir le tenseur de contrainte à partir des forces, ce qui est encore plus délicat que la définition de la déformation.

Du point de vue opérationnel, il apparaît donc que les méthodes de fluctuations basées sur la théorie standard de l'élasticité ne peuvent pas fonctionner systématiquement, compte-tenu de la taille des systèmes généralement utilisés.

Du point de vue de la théorie de Goldenberg et Goldhirsch, ceci suggère que la limite relativement basse à partir de laquelle la théorie standard de l'élasticité peut s'appliquer dans un système présentant un désordre gelé est beaucoup plus élevée à température finie.

En tout état de cause, il est donc nécessaire de prendre en compte les variations plus rapides du tenseur de déformation, et d'écrire une énergie libre permettant de se placer à une échelle plus basse.

5.3.4 Théorie de premier gradient ($c_2 \neq 0$)

Afin de pouvoir rendre compte des variations du tenseur de déformation, la théorie standard de l'élasticité peut être généralisée en faisant intervenir dans l'énergie libre des termes de gradient du tenseur de déformation, comme proposé dans l'équation (5.32)²⁷. Alors qu'une telle énergie libre a été initialement introduite pour rendre compte de fortes inhomogénéités dans les milieux (voir par exemple [135, 136]), il a été proposé plus récemment par Sengupta *et al.* de l'utiliser pour contourner l'impossibilité de s'approcher de la limite continue dans le cas de systèmes finis soumis à un thermostat [137].

Ce modèle introduit une deuxième constante, c_2 , qu'il faut donc également déterminer conjointement à c_1 . Du fait de ce terme en gradient, la fonction de corrélation du tenseur de déformation a une portée non nulle, contrôlée par la constante c_2 . Déterminer expérimentalement cette fonction et la comparer à la fonction théorique doit permettre de déterminer les constantes du modèle. La méthode de Sengupta *et al.* est une variante de cette proposition : il s'agit d'une méthode dite de "finite size scaling" consistant essentiellement à considérer les variations des fluctuations du tenseur de déformation qui a été intégré sur une surface de taille variable²⁸. Nous verrons qu'en pratique cela revient à intégrer la fonction de corrélation sur une surface de taille variable (et donc d'améliorer artificiellement la statistique par rapport à la simple mesure de cette fonction).

Dans ce qui suit, nous reprenons cette théorie et l'adaptions au cas du réseau de billes. Rappelons que, malgré la modification de la théorie utilisée, la question de la méthode de calcul du tenseur de déformation adapté se pose toujours. Les résultats obtenus dans ce cadre sont discutés à la lumière des travaux basés sur la même méthode réalisées par Sengupta *et al.* sur des simulations et par Wille *et al.* [139, 140] dans un cristal colloïdal.

²⁷Notons que cette théorie reste une théorie linéaire.

²⁸Une telle méthode a surtout été utilisée pour calculer des compressibilités pour étudier des transitions solide-liquide, le paramètre d'ordre considéré étant alors la densité en particules. Voir par exemple [138].

Si on ajoute à l'énergie libre un terme en gradient du tenseur de déformation, la fonction de corrélation est donnée par (5.39). La transformation de Fourier donne

$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{\beta(c_1 + c_2 q^2)} = \frac{\chi}{\beta} \frac{1}{1 + q^2 \xi^2}, \quad (5.48)$$

relation connue sous le nom de relation d'Ornstein-Zernicke. La susceptibilité²⁹, $\chi = 1/c_1$ et la longueur de corrélation $\xi = \sqrt{c_2/c_1}$ qui apparaissent dans le dernier terme dépendent, *a priori*, de la température.

Dans l'espace réel, on obtient³⁰

$$G(r) = \frac{\chi}{\beta \xi^2 2\pi} K_0(r/\xi). \quad (5.49)$$

Adaptation à un système de taille finie

Dans un système fini, on ne peut pas faire l'économie de la prise en compte des contraintes imposées par les bords rigides : à tout instant, le système doit vérifier $\int \phi = 0$. Nous détaillons ici le calcul de la nouvelle fonction de corrélation G' tenant compte de cette contrainte et introduite sommairement par Sengupta *et al.*, en nous inspirant d'un calcul de White et González permettant de modifier l'équation d'Ornstein-Zernicke en fonction de l'ensemble statistique choisi [142].

Puisque le système cherche à tout instant à minimiser son énergie libre, nous pouvons calculer la nouvelle fonction G' en tenant compte de la contrainte que l'on écrit, de manière plus générale, $\int \phi = N$, où N est une constante, en introduisant une nouvelle fonctionnelle d'énergie libre $\mathcal{F}' = \mathcal{F} + \nu \int \phi$, où ν est le multiplicateur de Lagrange associé à la nouvelle contrainte. Calculer G' ne pose pas de problème supplémentaire dès lors que l'on remarque que l'on peut traiter $-\nu$ comme un nouveau champ extérieur associé à ϕ . Si on pose $\mu = B - \nu$, on a en particulier :

$$G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial \mu(\mathbf{y})}. \quad (5.50)$$

Il est inutile de préciser avec quelle énergie libre la moyenne $\langle \rangle$ est calculée, car on prendra *in fine* $N = 0$.

On a donc :

²⁹On a en effet, conformément à la définition (5.31), $\chi = \lim_{q \rightarrow 0} \beta G(\mathbf{q})$.

³⁰En plaçant l'axe Ox des \mathbf{q} suivant \mathbf{r} il vient :

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{\chi}{\beta \xi^2 (2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_x r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_y}{q_y^2 + (q_x^2 + \xi^{-2})} dq_x \\ &= \frac{\chi}{\beta \xi^2 2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos q_x r}{\sqrt{q_x^2 + \xi^{-2}}} dq_x = \frac{\chi}{\beta \xi^2 2\pi} K_0(r/\xi) \text{ (d'après [141])}. \end{aligned}$$

$$\beta G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial \mu(\mathbf{y})} = \int d\mathbf{z} \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial B(\mathbf{z})} \frac{\partial B(\mathbf{z})}{\partial \mu(\mathbf{y})} + \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})} \quad (5.51)$$

$$= \int d\mathbf{z} \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial B(\mathbf{z})} \delta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})} = \beta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})}. \quad (5.52)$$

Pour calculer le deuxième terme, on remarque tout d'abord que

$$\int dx G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int dx \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle = \langle \int \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \phi(\mathbf{y}) \rangle = 0. \quad (5.53)$$

En intégrant (5.53) par rapport à \mathbf{x} il vient :

$$0 = \beta \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} + \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})} \int \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} d\mathbf{x} = \beta \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} + \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})}. \quad (5.54)$$

En intégrant (5.53) par rapport à \mathbf{y} il vient :

$$0 = \beta \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} \int \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})} d\mathbf{y}. \quad (5.55)$$

D'où finalement :

$$\frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{y})} = -\beta \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle}{\partial N} \int \frac{\partial N}{\partial \mu(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = -\frac{\partial \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle}{\partial N} \beta \int \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (5.56)$$

D'où :

$$G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle}{\partial N} \int \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (5.57)$$

On utilise enfin l'invariance par translation :

$$\forall \mathbf{x}, N = \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle L^2 \Rightarrow \frac{\partial \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\partial N} = \frac{1}{L^2}. \quad (5.58)$$

Ce qui donne finalement :

$$G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{L^4} \int \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (5.59)$$

Pour les intégrales sur la fonction de corrélation, si la boîte est infinie on a :

$$\int \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = L^2 \int G(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.60)$$

Mais si on tient compte de la taille finie de la boîte, on a :

$$\int_L \int_L G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \neq L^2 \int_L G(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.61)$$

où \int_L signifie que l'on intègre sur la boîte $[0, L]^2$. En effet si on considère l'ensemble des couples (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont chacun dans une boîte $[0, L]^2$, alors il y a plus de combinaisons donnant une petite distance qu'une grande. Il faut donc écrire

$$\int_L \int_L G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_L P(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}), \quad (5.62)$$

où $P(\mathbf{x})$ est le "poids" du vecteur $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_x \\ x_y \end{pmatrix}$.

On montre³¹ que

$$P(\mathbf{x}) = L^2 \omega_L(\mathbf{x}) \equiv L^2 4 \left(1 - \frac{x_x}{L}\right) \left(1 - \frac{x_y}{L}\right). \quad (5.63)$$

Finalement, en revenant à la fonction de corrélation, on obtient :

$$G'(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) - \frac{1}{L^2} \int_L \omega_L(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.64)$$

Application à la détermination des constantes

Expérimentalement, cette fonction de corrélation est une grandeur complètement mesurable. Les constantes élastiques pourraient alors être déterminées par ajustement de la fonction mesurée avec la fonction théorique, donnée par les équations (5.49) et (5.64). Cependant, afin de minimiser les incertitudes dues aux fluctuations et à la mesure du tenseur de déformation par dérivation discrète, il est préférable d'intégrer cette fonction pour absorber les fluctuations rapides³². Ceci est réalisé de manière effective en considérant les fluctuations du tenseur de déformation moyenné sur une surface de taille variable.

On considère ainsi une boîte de taille finie $L_b \times L_b$, où $L_b < L$, et on mesure dans cette boîte la moyenne de ϕ : $\bar{\phi}_b = \frac{1}{L_b^2} \int_{L_b} d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x})$. Les fluctuations de $\bar{\phi}_b$ sont :

$$L_b^2 \langle \bar{\phi}_b^2 \rangle = L_b^{-2} \int_{L_b} \int_{L_b} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle \quad (5.65)$$

$$= \int_{L_b} d\mathbf{x} \omega_{L_b}(\mathbf{x}) G'(\mathbf{x}) \quad (5.66)$$

$$\equiv \beta^{-1} \chi'_{L_b}. \quad (5.67)$$

En multipliant la relation (5.64) par $\omega_{L_b}(\mathbf{r})$ et en intégrant sur la boîte de taille L_b , il vient :

$$\beta^{-1} \chi'_{L_b} = (2\pi\beta)^{-1} \chi \left[\xi^{-2} \int_{L_b} \omega_{L_b}(\mathbf{r}) K_0(r/\xi) d\mathbf{r} - \frac{L_b^2}{L^2} \xi^{-2} \int_L \omega_L(\mathbf{r}) K_0(r/\xi) d\mathbf{r} \right]. \quad (5.68)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\beta^{-1} \chi'_{L_b} = (2\pi\beta)^{-1} \chi \left(\psi\left(\alpha \frac{L}{\xi}\right) - \alpha^2 \psi\left(\frac{L}{\xi}\right) \right), \quad (5.69)$$

³¹À 1 dimension, on écrit $\int_0^L \int_0^L G(x-y) dx dy = \int_0^L dy \left(\int_0^y dx + \int_y^L dx \right) G(x-y)$.

Dans l'intégrale $\int_0^y dx$ on pose $u = y - x$ et dans l'intégrale $\int_y^L dx$ on pose $u = x - y$. On obtient alors : $\int_0^L \int_0^L G(x-y) dx dy = \int_0^L dy \left(\int_0^y du + \int_0^{L-y} du \right) G(u) = \int_0^L 2(L-u) G(u) du$, la dernière égalité étant obtenue en inversant l'ordre d'intégration.

³²C'est ce que suggèrent également Sengupta *et al.* : la formulation d'Ornstein-Zernicke adoptée ici ne serait pas assez fine pour rendre bien compte de l'évolution de la fonction de corrélation.

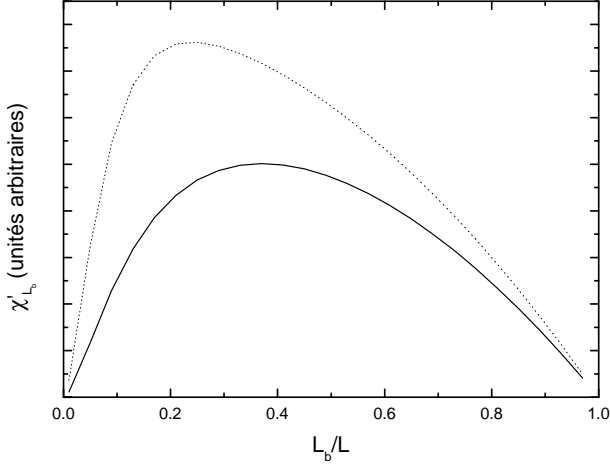


FIG. 5.3 : Trait plein : courbe typique de χ'_{L_b} en fonction de L_b/L (équation (5.69)), avec $L/\xi = 18$. En pointillé : courbe proposée, pour les mêmes paramètres χ et ξ , par Sengupta et al. dans [137]. Les différences entre les deux courbes sont expliquées dans la note 35, section 5.3.5.

avec $\alpha = \frac{L_b}{L}$ et

$$\psi(u) = u^2 \int_1 \omega_1(\mathbf{z}) K_0(uz) d\mathbf{z}. \quad (5.70)$$

Un cas particulier est le cas où ξ est petit devant L , le cas extrême étant le cas $\xi = 0$, où l'on retombe sur la théorie standard³³. Dans ce cas, on peut extraire χ à partir du comportement $\alpha \rightarrow 0$. On a en effet³⁴ $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 2\pi$.

Il vient donc ,

$$\chi'_{L_b} = \chi(1 - \alpha^2), \quad (5.71)$$

soit

$$\alpha \chi'_{L_b} = \chi(\alpha - \alpha^3). \quad (5.72)$$

χ est donc la pente de la région linéaire pour les petits L_b (c'est-à-dire les petits α) lorsqu'on trace $\frac{L_b}{L} \chi'_{L_b}$ en fonction de $\frac{L_b}{L}$. Cela permet de déterminer la susceptibilité χ sans se soucier de la valeur exacte de la longueur de corrélation. Il est clair que cette approximation demanderait une justification plus rigoureuse, puisque dans (5.69), on fait tendre L/ξ vers l'infini avant de prendre la limite $\alpha \rightarrow 0$. Cependant, cette méthode a été utilisée expérimentalement avec succès dans des systèmes colloïdaux (voir section suivante).

³³En effet, le comportement aux petites distances de $L_b^2 \langle \bar{\phi}_b^2 \rangle = \int_{L_b} d\mathbf{x} \omega_{L_b}(\mathbf{x}) G'(\mathbf{x})$ est contrôlé par le premier terme, valant quand ξ est nul $\int_{L_b} d\mathbf{x} \omega_{L_b}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}) \propto \int_{L_b} d\mathbf{x} \omega_{L_b}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x})$, qui est constant. Il est toutefois plus précis d'évaluer cette constante en la considérant comme la pente de $L_b^3 \langle \bar{\phi}_b^2 \rangle$ en fonction de L_b .

³⁴En utilisant la représentation de Fourier, on a : $\psi(u) = u^2 \int_1 \omega_1(\mathbf{z}) K_0(uz) d\mathbf{z} = 4(2\pi)^{-1} \int_1 \prod(1 - z_i) \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}}}{1 + (\frac{k}{u})^2} d\mathbf{k} d\mathbf{z}$.

Comme $\lim_{u \rightarrow \infty} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}}}{1 + (\frac{k}{u})^2} d\mathbf{k} = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{k} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{z})$, on a :

$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 2\pi \times 4 \int_1 \prod(1 - z_i) \delta(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 2\pi \times 4 \int_1 \delta(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 2\pi \times 4(\frac{1}{2})^2 = 2\pi$.

Plus généralement, si L/ξ n'est pas grand ou bien si l'on veut déterminer également la valeur de ξ , l'ajustement de χ'_{L_b} en fonction de $\frac{L_b}{L}$ doit permettre de retrouver les paramètres χ et ξ . L'allure générale de χ'_{L_b} en fonction de la taille L_b peut être vue sur la figure 5.3. Notons que la croissance de la courbe est contrôlée par le premier terme de (5.69), et donc par la longueur de corrélation ξ , alors que la décroissance en $-L_b^2$ est une conséquence directe de la contrainte $\int \phi = 0$ (en particulier, on a $\chi'_L = 0$). Notons qu'en théorie standard, la longueur de corrélation ξ est nulle, et χ'_{L_b} est une fonction décroissante. L'observation d'une croissance de la susceptibilité expérimentale χ'_{L_b} pour des faibles tailles L_b est donc un indicateur de la validité de l'utilisation d'un modèle de gradient pour l'interpréter.

5.3.5 Résultats numériques et expérimentaux de la théorie de premier gradient

Pour un cristal hexagonal ou un milieu isotrope, la fonctionnelle d'énergie libre est donnée de manière standard par :

$$\mathcal{F} = \frac{K}{2}[u_{xx} + u_{yy}]^2 + \frac{\mu}{2}[(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2]. \quad (5.73)$$

Si on note

$$\phi_1 = u_{xx} + u_{yy}, \phi_2 = u_{xx} - u_{yy}, \phi_3 = 2u_{xy}, \quad (5.74)$$

les constantes élastiques sont obtenues directement par la mesure des susceptibilités χ correspondantes :

$$\frac{1}{K} = \chi_1, \frac{1}{\mu} = \chi_2 = \chi_3. \quad (5.75)$$

La possibilité de mesurer μ de deux manières différentes est un bon test de l'exactitude de la méthode de détermination. Notons toutefois qu'il n'y a aucune raison *a priori* pour que les longueurs de corrélation associées à ϕ_2 et ϕ_3 soient identiques.

Validation numérique de la méthode de finite size scaling

La validité de l'utilisation d'un modèle de premier gradient pour la détermination des constantes élastiques a été testée à l'aide de simulations numériques impliquant quelques milliers de particules en interaction de contact ou en interaction variant en $1/r^{12}$ par Sengupta *et al.* [137], avec des conditions au bord périodiques. Les moyennes d'ensemble sont réalisées sur un nombre de configurations indépendantes relativement important : entre 10^4 et 10^5 . Signalons que dans ces études le champ de déformation est obtenu par une méthode de différences finies.

Dans ces conditions, les fluctuations mesurées $L_b^2 \langle \bar{\phi}_{p,b}^2 \rangle$, $p = 1, 2, 3$, sont parfaitement ajustées³⁵ par l'expression (5.69). Les différences entre les constantes mesurées par leur méthode et celles déterminées par d'autres méthodes sont de l'ordre de quelques pour-cent.

Les principales conclusions de leur travail sont les suivantes :

- Bien que le tenseur de déformation utilisé soit le tenseur défini au niveau particulaire, il n'est pas nécessaire de développer une théorie faisant intervenir des gradients de la déformation d'ordre supérieur. En revanche, il est manifeste que la théorie standard ne peut s'appliquer à cette échelle.
- Les longueurs de corrélation de leurs systèmes sont typiquement de l'ordre de quelques pas de réseau³⁶. En particulier, lorsque leurs systèmes vérifient $L/\xi \ll 1$ et on peut observer que pour les petits L_b le comportement de $L_b \chi'_{L_b}$ est linéaire, conformément à (5.72).
- Intégrer sur des boîtes de tailles différentes revient à réaliser un coarse-graining avec une fonction de Heaviside. Sengupta *et al.* affirment que si le paramètre coarse-grainé est le déplacement et que la déformation est calculée à partir du déplacement coarse-grainé, alors les résultats obtenus sont inexacts. Ceci est en contradiction apparente avec la méthode de coarse-graining de Goldenberg et Goldhirsch, qui calculent la déformation par dérivation d'un déplacement coarse-grainé, et non pas par coarse-graining d'une déformation microscopique. Ce point serait à approfondir.

³⁵Signalons cependant deux différences avec la théorie présentée ici :

- Selon les auteurs, les fluctuations du tenseur de déformation intégrées sur tout le système ne sont pas nulles mais de l'ordre de $(a/L)^2$, où a est le pas du réseau. Ceci impose une correction à l'expression (5.69), à laquelle il faut ajouter un terme en $C(a/L)^2 \alpha^2$, où C est une constante à déterminer. Cependant, au regard de leurs données, il semble que χ'_L soit presque nul (cas prévu par la théorie sans cette correction) et donc que C soit négligeable.
- L'expression (5.61) est supposée vraie par les auteurs, même pour une boîte finie. Ils omettent par conséquent le terme $\omega_1(\mathbf{z}) = 4(1 - z_x)(1 - z_y)$ dans la définition de ψ (équation (5.70)). Le facteur 4 est toutefois compensé par une erreur d'un facteur 1/4 dans la détermination de la fonction G . Comme le montre la figure 5.3 (avec $L/\xi = 18$), le terme $(1 - z_x)(1 - z_y)$ modifie le comportement de χ'_{L_b} pour les courtes distances. Toutefois, sur l'exemple donné, il est possible d'ajuster correctement l'une des courbes avec l'autre en modifiant la longueur ξ d'un facteur de l'ordre de 2, sans modifier la valeur de χ , c'est à dire de la constante élastique. Cette remarque n'invalide donc pas les conclusions des auteurs.

³⁶Ceci est à comparer avec le fait que selon Goldenberg *et al.*, la valeur de w suffisante pour obtenir un tenseur valable pour une description élastique standard, dans le cas d'un milieu granulaire raisonnablement polydisperse, est de l'ordre du pas de réseau [115]. ξ caractérisant la distance caractéristique des variations du tenseur, et donc la distance sur laquelle il faudrait intégrer pour lisser ces variations, les ordres de grandeur sont donc sensiblement les mêmes pour un désordre gelé ou pour un désordre thermiquement activé, dans le cas des granulaires.

Application de la méthode de finite size scaling à des mesures expérimentales

À notre connaissance, aucune mesure expérimentale reproduisant l'ensemble de la courbe proposée n'a été réalisée à ce jour. Il est certain que la difficulté principale est de reproduire la partie de la courbe pour les boîtes dont la taille est proche de celle du système. En effet, la prise en compte de l'influence des bords est, dans la théorie proposée, assez grossière, et nécessite des précisions dont la nature peut dépendre du système étudié et des forces en jeu. Une autre difficulté réside dans la définition de la déformation microscopique et, corollairement, du nombre de réalisations statistiques qu'il est nécessaire de réaliser. En effet, si les fluctuations microscopiques sont importantes, un schéma de dérivation par différences finies véhicule des incertitudes qu'il convient de réduire par une moyenne suffisante. Ainsi, dans ce qui a été présenté ci-dessus, un ensemble de plus de 10^4 réalisations numériques a été nécessaire.

Pour avoir des données accompagnées d'un faible incertitude à partir d'un schéma de différences finies il faut bien sûr que les fluctuations spatiales ne soient pas trop importantes, de telle sorte que la dérivation par différences finies soit presque exacte. Ainsi, Wille *et al.* ont étudié expérimentalement le comportement pour les petits L_b des fluctuations de la déformation pour un cristal colloïdal [139, 140], et seulement 1000 clichés du cristal suffisent à établir un comportement propre. La longueur de corrélation dans leur système est certainement faible puisque qu'ils obtiennent pour $L_b \chi'_{L_b}$ le comportement linéaire attendu (équation (5.72)), et ils en déduisent les constantes élastiques. Ce faible nombre de données nécessaires est sans doute associé à la nature du dispositif, le bain liquide dans lequel sont suspendus les particules colloïdales permettant d'adoucir les variations spatiales. Notons enfin que dans leur dispositif, il n'y a pas de problème de conditions aux bords car il est constitué d'environ 10^5 particules, la zone exploitée réellement n'en contenant que 1000.

Nous allons montrer que dans notre système, la méthode de finite size scaling permet d'obtenir les bons ordres de grandeur pour les constantes élastiques, à condition d'utiliser non pas le tenseur de déformation microscopique obtenu par dérivation discrète mais le tenseur coarse-grainé selon la méthode de Goldenberg et Goldhirsch.

Afin de mesurer les variations du tenseur de déformation dans un réseau constitué de nos billes, nous considérons un cristal parfait de 2269 particules (nombre magique N_{28}) dont nous avons enregistré 10000 images consécutives de ce cristal à différentes températures éloignées de la température de fusion³⁷. Le pas de temps entre deux acquisitions a été fixé à 150 ms afin de suivre sans erreur les particules. Pour réaliser les moyennes d'ensemble, nous n'avons retenu qu'une position sur dix, afin de disposer de

³⁷La température de fusion T_ℓ est de l'ordre de 5.10^{12} K.

données statistiquement indépendantes³⁸. Signalons que pour des raisons de simplicité, nous avons considéré des boîtes carrées de côté L_b centrées sur le centre du cristal alors que le confinement est hexagonal³⁹. La longueur L a été définie par $L = \sqrt{S} \simeq 47a_0$ où S est la surface délimitée par le confinement. a_0 vaut ici 1,745 mm.

Tenseur de déformation calculé par différences finies Pour chaque cliché considéré, le tenseur de déformation doit être calculé en tout point. Il est défini à partir du tenseur de déplacement, défini au niveau de chaque particule. Pour calculer ce dernier, on considère le déplacement par rapport au réseau parfait \mathbf{R} , calculé à partir de la moyenne de toutes les positions acquises⁴⁰. Le déplacement de la bille k repérée par le vecteur \mathbf{r}^k est donc défini par $\mathbf{u}^k = \mathbf{r}^k - \mathbf{R}^k$. La méthode usuellement employée pour calculer le tenseur de déformation au niveau de chaque particule est une méthode de différences finies, comme dans la méthode de champ moyen présentée à la section 5.3.3. Cela revient à considérer le développement limité discret du déplacement $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}(\mathbf{r}^k)$ autour de \mathbf{R}^k :

$$u_i(\mathbf{r}^k) = u_i(\mathbf{R}^k) + u_{ij}(\mathbf{r}^k)[r^k - R^k]_j \quad (5.76)$$

Cette équation a six inconnues : les deux coordonnées de $u(\mathbf{R}^k)$ et les quatre composantes du tenseur recherché. On considère alors deux voisines de la bille k afin d'obtenir les quatre équations supplémentaires nécessaires.

Nous avons suivi la procédure de finite size scaling à partir de ces valeurs du tenseur de déformation, qui permettent de calculer les paramètres ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 (équation (5.74)). Les courbes de $\beta^{-1}\chi'_{L_b} = L_b^2 \langle \bar{\phi}_b^2 \rangle$ à la température $T = 7,5 \cdot 10^{11}$ K sont représentées sur la figure 5.4 pour ϕ_1 et ϕ_2 .

Nous pouvons observer une phase de croissance de $\beta^{-1}\chi'_{L_b}$, suivie d'une phase de décroissance, mais manifestement le comportement est très éloigné de la courbe théorique telle que présentée sur la figure 5.3. Nous verrons de plus dans les paragraphes suivants que les amplitudes mesurées ne sont pas compatibles⁴¹ avec les déterminations théoriques effectuées à la section 5.2.2. Manifestement la théorie de premier gradient ne peut s'appliquer directement à ces tenseurs de déformation calculés par différences finies. La phase de croissance de χ'_{L_b} indique toutefois qu'à cause de l'agitation thermique les gradients du tenseur ne sont pas négligeables : rappelons que si la théorie standard s'appliquait,

³⁸Rappelons que le temps de relaxation du bain thermique τ_R est de l'ordre de 100 ms (voir la section 3.3.2).

³⁹En conséquence de quoi nous ne pouvons aller jusqu'à $L_b/L = 1$, car on sortirait du confinement.

⁴⁰On peut aussi considérer le déplacement dans le cristal au temps $t + 1$ comme la différence des positions entre le cristal au temps t et le cristal au temps $t + 1$. *A priori*, les deux méthodes donnent les mêmes résultats à l'ordre 1 en la déformation.

⁴¹Signalons toutefois que les positions respectives des deux courbes sont cohérentes avec les positions respectives des deux constantes théoriques : K est environ 5 fois plus grande que μ , et la courbe pour ϕ_1 a bien une amplitude environ cinq fois moins grande que celle pour ϕ_2 .

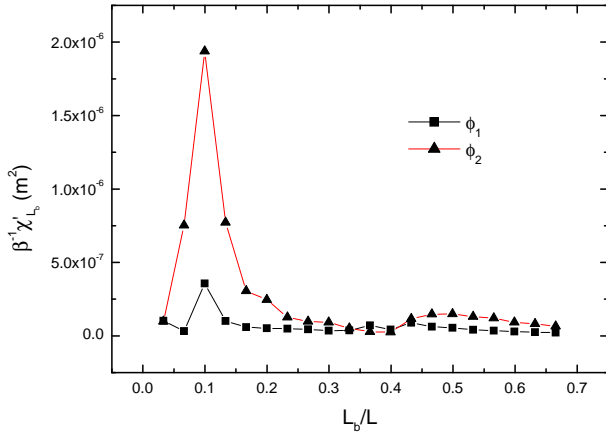


FIG. 5.4 : Variations de $\beta^{-1}\chi'_{L_b}$ en fonction de L_b/L pour les paramètres ϕ_1 et ϕ_2 définis à partir du tenseur de déformation calculé par différences finies. $T = 7,5 \cdot 10^{11}$ K.

il n'y aurait qu'une phase de décroissance⁴². Tout ceci suggère donc que le tenseur de déformation calculé au niveau de chaque particule est, dans notre système et contrairement aux systèmes colloïdaux, une grandeur trop "microscopique" pour être décrite par une théorie continue de premier gradient.

Tenseur de déformation calculé par coarse-graining Afin d'absorber ces variations microscopiques, nous proposons donc d'utiliser la méthode de Goldenberg et Goldhirsch décrite à la section 5.3.3 pour calculer un tenseur de déformation intégrant les variations à courtes longueurs d'onde.

Nous avons calculé les fluctuations $L_b^2 \langle \bar{\phi}_b^2 \rangle = \beta^{-1}\chi'_{L_b}$ à $T = 7,5 \cdot 10^{11}$ K pour les paramètres ϕ_p calculés à partir du tenseur de déformation coarse-grainé défini par les équations (5.44) et (5.45) à partir des déplacements microscopiques. Les variations de $\beta^{-1}\chi'_{L_b}$ en fonction de L_b/L sont représentées sur la figure 5.5 pour une largeur de coarse-graining $w = 3a_0$ ⁴³. La croissance initiale des courbes prouve qu'il faut bien utiliser une théorie de gradient pour les décrire. Par rapport aux variations théoriques, nous pouvons toutefois constater que la décroissance intervient plus loin du bord, et surtout avec une pente plus forte et une concavité positive.

Malgré tout, ces résultats sont encourageants : si l'on se focalise sur la partie correspondant aux petits L_b , on obtient des constantes élastiques tout à fait comparables à celles déterminées par le calcul direct. Rappelons que la décroissance est très contingente des effets de bord, grossièrement pris en compte dans le modèle développé ici. Pour nous en convaincre, il n'est bien sûr pas question d'ajuster les courbes expérimentales, monotones dans l'intervalle des petites valeurs de L_b , par une fonction ayant deux paramètres (χ et ξ). Nous avons donc calculé les courbes théoriques en utilisant les valeurs théoriques des

⁴²En particulier, ceci prouve que dans notre système, l'hypothèse de champ moyen émise par Zheng et Grieve [38] est erronée.

⁴³Cette largeur est de l'ordre de grandeur de celles proposées dans les systèmes polydispersés gelés.

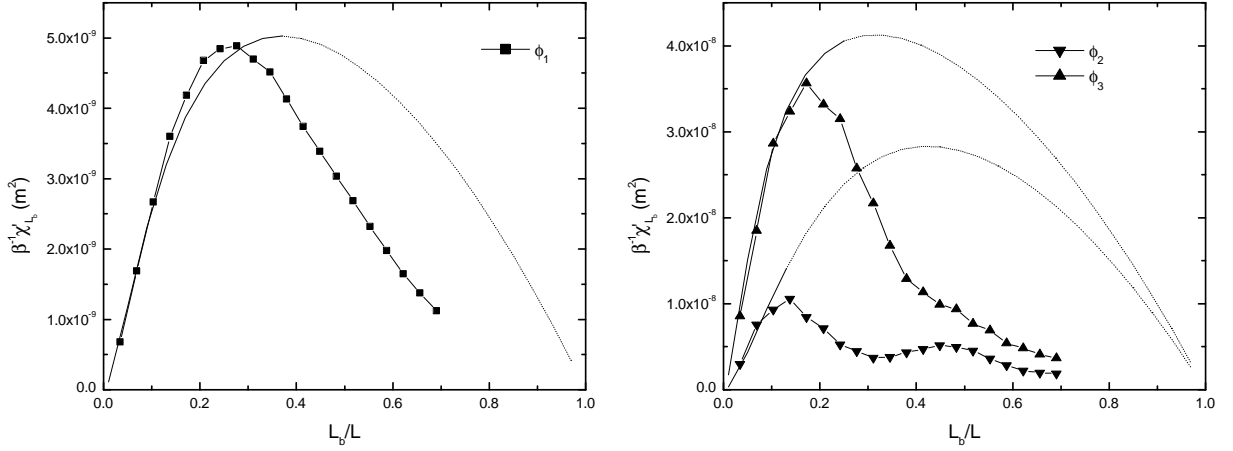


FIG. 5.5 : (Symboles) : Variations de χ'_{L_b} en fonction de L_b/L pour les paramètres ϕ_p , $p = 1, 2, 3$ définis à partir du tenseur de déformation coarse-grainé, avec $w = 3a_0$, $T = 7,5 \cdot 10^{11}$ K. Les lignes pleines correspondent aux courbes théoriques dans la longueur de corrélation a été ajustée comme précisé dans le texte. Rappelons que $L \simeq 47a_0$.

constantes élastiques à $T = 0$ ⁴⁴ calculées à la section 5.2.2, puis en ajustant les longueurs ξ_p , $p = 1, 2, 3$, afin de reproduire la pente pour les petits L_b . Les courbes correspondantes sont reportées sur la figure 5.5.

Deux observations indiquent que cette méthode pourrait nous donner accès aux grandeurs caractéristiques que sont χ et ξ . D'une part, l'amplitude générale des courbes est comparable, en particulier pour le paramètre ϕ_1 permettant de mesurer le module de compression K . Cela n'aurait pas été le cas pour les courbes calculées à partir du tenseur microscopique, reportées sur la figure 5.4 : l'amplitude du pic est plus importante de deux ordres de grandeur.

Par ailleurs, les longueurs de corrélations utilisées ici valent respectivement $\xi_1 = 2,5a_0$, $\xi_2 = 4a_0$ et $\xi_3 = 1,5a_0$, des valeurs comparables à celles généralement déterminées par Sengupta *et al.*.

Signalons notamment que la méthode de coarse-graining de Goldenberg et Goldhirsch, jamais employée jusqu'à présent dans des systèmes à température finie, permet donc de disposer d'un tenseur de déformation auquel on peut appliquer la théorie de premier gradient et obtenir des constantes élastiques du bon ordre de grandeur.

Des améliorations au modèle de premier gradient proposé sont envisageables. Le point d'achoppement principal est la décroissance des courbes. Ceci pourrait être dû à une prise

⁴⁴Pour $a_0 = 1,745$ nm, les constantes ont pour valeur $K = 1,17 \cdot 10^{-3}$ J.m⁻² et $\mu = 1,67 \cdot 10^{-4}$ J.m⁻². Comme nous avons travaillé à $T \simeq T_\ell/10$, la valeur réelle du module de compression est certainement plus faible d'environ 10% que la valeur à température nulle (voir la section 5.2.2, équation 5.22). Cependant, pour le calcul d'ordre de grandeur, cette modification peut pour l'instant être négligée.

en compte trop simplifiée de l'effet des bords. Rappelons que la décroissance prévue est due à l'hypothèse que l'intégrale du tenseur sur l'ensemble du système est nulle, hypothèse qui ne prend en compte que le caractère fini du système, et non les forces exercées par les parois. Une telle décroissance n'a été observée que dans des simulations avec des conditions au bord périodiques [137].

Rappelons que du fait du coarse-graining, l'effet des parois dans notre système se fait sentir avant de s'approcher de celles-ci à une distance à laquelle la force exercée sur les billes est effective. La longueur caractéristique de cette force est de l'ordre de λ : dans les premières couches du système, on observe généralement une mobilité légèrement moindre⁴⁵. Ceci peut se traduire par des constantes élastiques effectives plus importantes. Afin de visualiser l'effet de cette propriété, nous avons introduit cette dépendance de manière perturbative⁴⁶, en réintégrant dans l'équation 5.69 le paramètre χ dans les intégrales et en écrivant $\chi = \chi_0 - \chi_1 |\mathbf{x}|^2$, où α est petit. Le principal effet de cette modification est d'inverser la concavité de la phase décroissante, phénomène que nous observons expérimentalement.

5.4 Conclusion

Après avoir calculé de manière directe les constantes élastiques de notre système et montré que l'interaction ne peut se résumer à une interaction entre premiers voisins, nous avons présenté différentes méthodes de détermination des constantes élastiques d'un système fini discret, qui dépendent de l'échelle de description du système. Selon les cas, la théorie continue standard peut être utilisée, dans d'autres il n'est pas possible de s'approcher de l'échelle Λ à partir de laquelle cette théorie est applicable.

Dans notre dispositif, il est manifeste que les gradients du tenseur ne peuvent être négligés, mais la théorie de premier gradient proposée par Sengupta *et al.* ne peut être appliquée directement avec un tenseur de déformation calculé par différences finies, à cause des conditions au bord et certainement à cause de la présence de gradients d'ordres supérieurs. L'utilisation de la méthode de coarse-graining de Goldenberg et Goldhirsch permet toutefois d'intégrer ces gradients d'ordre supérieur dans la définition du tenseur de déformation.

Toutefois, si en l'état, la mesure des fluctuations du tenseur de déformation dans notre système ne permet pas de déterminer expérimentalement les constantes élastiques, la cohérence obtenue au niveau des ordres de grandeur de ces constantes est encourageante.

⁴⁵Une étude plus poussée a été menée en isolant le cadre de l'électrode inférieure et en le portant à un potentiel non nul : la distance interbilles est alors sensiblement modifiée jusqu'à 6-7 pas de réseau pour un pas initial de 1,5 mm. Ceci indique que l'effet des parois peut se faire sentir jusqu'à cette distance.

⁴⁶En théorie, si les constantes dépendent de la position, il faut modifier l'équation d'Orstein-Zernicke (5.39), qui ne peut alors être résolue que numériquement.

Cette cohérence est renforcée par une estimation empirique de la constante μ par un critère semblable à la relation présentée dans la note 12 de ce chapitre, qui peut être construite également à partir du critère de Lindemann : le système est considéré comme fondu à la température T_ℓ lorsque l'excursion quadratique moyenne $\langle \Delta u^2 \rangle$ est de l'ordre de $0,1a_0^2$. En écrivant que l'énergie potentielle est alors de l'ordre de grandeur de l'énergie thermique, il vient, en considérant le cisaillement qui est plus facile que la compression $k_B T_\ell \simeq 0,1\mu a_0^2$, ce qui donne, en prenant $T_\ell \simeq 5.10^{12}$, $\mu \simeq 2,3.10^{-4} \text{ J.m}^{-2}$, soit une valeur comparable à celle calculée directement à la section 5.2.2.

Afin de développer un modèle plus précis permettant de rendre compte de l'ensemble des courbes, il est nécessaire d'estimer précisément les positions respectives des différentes échelles à partir desquelles les différents gradients peuvent être négligés. Dans les systèmes granulaires gelés, la possibilité de soumettre le système à une contrainte a permis de repérer de manière simple l'échelle Λ à partir de laquelle la description standard est valide, en vérifiant l'obéissance à une équation telle le loi de Hooke [113]. Une telle procédure pourrait être utilisée également ici, avec la contrainte supplémentaire qu'il faut prendre en compte les fluctuations thermiques. Étudier la dépendance de ces longueurs, liées à la longueur de corrélation ξ , en fonction de la température, délivrerait également des informations précieuses.

Notons que la dépendance de Λ envers le désordre gelé a été mise en valeur au travers d'exemples, mais établir les relations exactes nécessiterait un traitement théorique plus poussé, qui ne serait pas sans lien avec la théorie développée par Giamarchi et Le Doussal sur la structure des réseaux faiblement piégés. Relevons à ce sujet que dans cette dernière théorie, il est supposé explicitement que le tenseur de déformation peut être calculé directement par différences finies au niveau des particules, ce qui suppose que le désordre n'est pas trop fort. Les travaux de Goldenberg *et al.* explicitent un peu plus cette dernière hypothèse. Signalons toutefois que le désordre appliqué dans ces études est dû aux inhomogénéités du matériau, et que la question de la correspondance avec un désordre dû à un potentiel extérieur se pose.

Troisième partie

Piégeage des cristaux de Wigner macroscopiques

Introduction

Disposant d'un réseau élastique de particules dont nous connaissons les constantes élastiques mais aussi les longueurs de corrélation associées liées à son caractère discret, nous pouvons désormais aborder le piégeage de ce cristal.

Après avoir choisi une méthode pour le piégeage des billes, nous caractérisons les paramètres contrôlant ce piégeage. Afin de valider le dispositif, les configurations d'équilibre de cristaux obtenues sont comparées à celles obtenues dans des cas similaires pour lesquels les comportements théoriques sont clairement établis.

D'autre part, nous précisons les conditions de mise à l'équilibre du réseau : comment le système atteint-il son état d'équilibre? S'agit-il de mouvements collectifs corrélés ou bien d'une accumulation de mouvements individuels? Quels sont les paramètres de contrôle de ces mouvements? Quelles sont les billes les plus mobiles? Quel est le temps caractéristique nécessaire?...

Afin de répondre à ces questions, et établir notamment les conditions permettant d'obtenir un piégeage faible ou fort, notre stratégie a consisté à nous focaliser d'abord sur des cas simples engendrant des comportements plus marqués, et donc plus facilement identifiables et mesurables. Nous considérons donc le piégeage par un réseau régulier dont nous pouvons contrôler la symétrie, la périodicité, et l'intensité de piégeage.

Soulignons que cette problématique du piégeage par un réseau périodique est par ailleurs une question d'actualité, notamment dans les supraconducteurs. L'enjeu de l'obtention de matériaux pouvant être traversés par un fort courant sans perdre leur nature supraconductrice a suscité de nombreux travaux visant à ce que ces qualités supraconductrices ne dépendent pas des défauts naturellement présents dans les matériaux — situation conduisant souvent à du piégeage faible — mais puissent être contrôlées et améliorées. L'utilisation de dispositifs présentant un réseau périodique de pièges artificiellement créé répond à cette attente. Nous nous appuyerons donc sur les résultats dans ce domaines pour commenter nos propres expériences.

Le chapitre 6 est naturellement consacré à la présentation de la méthode de piégeage que nous avons choisie, avec l'objectif de disposer d'un montage expérimental à la fois simple et souple. L'efficacité du dispositif est illustrée par quelques cas simples ne faisant pas débat.

Dans le chapitre 7, nous présentons les configurations d'équilibre obtenues avec un réseau de pièges de symétrie carrée, dans le cas où le nombre de billes est deux fois plus grand, égal, ou deux fois plus petit que le nombre de pièges. Ceci permet notamment d'estimer les conséquences sur le plan positionnel de la possibilité pour une bille d'avoir

plusieurs pièges dans son voisinage proche, ou au contraire de l'impossibilité de s'approcher d'un piège déjà occupé. Également, nous pouvons préciser sans ambiguïté les conséquences d'une incompatibilité de symétrie locale entre le réseau élastique et le système de pièges.

Enfin, le chapitre 8 est consacré à l'étude de la dynamique de mise à l'équilibre des réseaux piégés, pour pouvoir discuter de l'existence de mouvements collectifs ou individuels. Les mouvements des billes dans des situations stables ou instables (liées notamment aux dégénérescences des configurations d'équilibre) sont comparés.

Chapitre 6

Méthode de piégeage

Sommaire

6.1	Introduction	119
6.2	Présentation du procédé de piégeage	120
6.2.1	Principe général	120
6.2.2	Utilisation d'un réseau de pièges	121
6.2.3	Dispositifs de piégeage utilisés dans d'autres systèmes	123
6.3	Caractérisation expérimentale du réseau de pièges	126
6.3.1	Caractérisation d'un piège isolé	126
6.3.2	Efficacité du piégeage	128
6.4	Conclusion	131

6.1 Introduction

Afin de piéger les billes, nous souhaitons disposer d'un procédé dont la mise en œuvre reste simple, et dont les paramètres sont bien contrôlés. Nous avons choisi de créer des puits de potentiel électrostatique en modifiant localement le potentiel électrostatique sur la surface conductrice de la plaque ITO constituant l'électrode supérieure du condensateur¹.

¹Pour des constituants macroscopiques tels que les billes, deux autres types de forces auraient pu être mises en jeu pour le piégeage, chacune présentant un fort inconvénient. L'utilisation d'un champ magnétique agissant sur des billes magnétiques est exclu à cause des phénomènes d'aimantation de l'ensemble des conducteurs lorsque les billes sont placées et déplacées dans le condensateur. L'emploi de puits de potentiel gravitationnels est également délicat : l'énergie typique d'interaction entre deux billes est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-10}$ J, ce qui correspond à la différence d'énergie potentielle entre deux points situés à une différence de hauteur de l'ordre de 10 microns. Piéger les billes tout en ne rendant pas négligeable l'interaction entre ces dernières supposerait donc de contrôler la profondeur des pièges à hauteur du micron, et impliquerait donc un procédé de fabrication des pièges assez lourd.

Si cette méthode est simple puisqu'elle n'apporte pas "d'ingrédient" supplémentaire dans le dispositif, elle pourrait présenter l'inconvénient de modifier un élément permettant de créer l'interaction entre les particules. Toutefois, dès lors que le piégeage est de faible intensité, la légère modification de l'interaction entre les billes peut être intégrée, au premier ordre, à la définition de la force de piégeage. Pour un piégeage d'intensité plus forte, tel qu'il sera étudié dans les prochains chapitres, il faudra garder à l'esprit que le paramètre pertinent est le rapport entre l'intensité de piégeage et l'intensité de l'interaction plus que les valeurs absolues de chacun de ces paramètres.

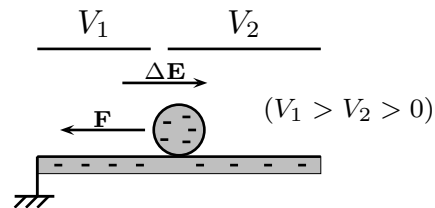
Dans ce chapitre, nous présentons le procédé de piégeage que nous avons développé et le comparons aux procédés utilisés dans les réseaux de vortex et les cristaux colloïdaux. Nous montrons notamment qu'il répond à nos exigences, à savoir que l'intensité relative du piégeage comme ses caractéristiques géométriques (largeur des pièges, distance entre eux) sont parfaitement contrôlées.

6.2 Présentation du procédé de piégeage

6.2.1 Principe général

En enlevant aux endroits désirés la fine couche d'ITO recouvrant l'électrode supérieure du condensateur, nous pouvons isoler électriquement différentes zones conductrices sur la plaque et les porter à des potentiels différents. Il en résulte une force s'exerçant sur les billes et qui les attire vers la zone portée au potentiel le plus élevé.

Comme le résume la figure ci-contre, le fait de porter une partie de la plaque au potentiel $V_2 < V_1$ crée une composante $\Delta \mathbf{E}$ du champ électrique horizontale en moyenne et d'intensité proportionnelle à $\Delta V \equiv V_1 - V_2$. Les billes étant chargées négativement, elle sont attirées vers la zone située sous la partie portée au potentiel V_1 .



L'efficacité de la méthode est illustrée sur la figure 6.1, montrant des clichés du cristal obtenu lorsque deux zones sont portées à deux potentiels différents. Afin de porter les zones dessinées au potentiel voulu², nous avons choisi d'utiliser uniquement des zones connectées au bord de la plaque, où elles peuvent alors être mises en contact avec le générateur de tension. Ceci nécessite d'utiliser des canaux permettant cette connexion. Contrairement au canal présenté sur la figure 6.1, nous utilisons bien entendu des canaux plus fins dont nous montrerons qu'ils ne perturbent pas la zone traversée³. L'isolation entre les

²Signalons qu'on ne peut pas laisser une zone non connectée : son potentiel flottant semble alors s'ajuster au potentiel voisin et tout se passe comme si elle était connectée à la zone voisine.

³Signalons toutefois qu'à terme, l'ambition de disposer d'une forte densité de petits pièges (mais néanmoins plus grands que les canaux de mise en contact) pourrait nous inciter à évoluer vers une approche mixte entre celle utilisée ici et la mise en contact par le dessus grâce à un ensemble d'électrodes.

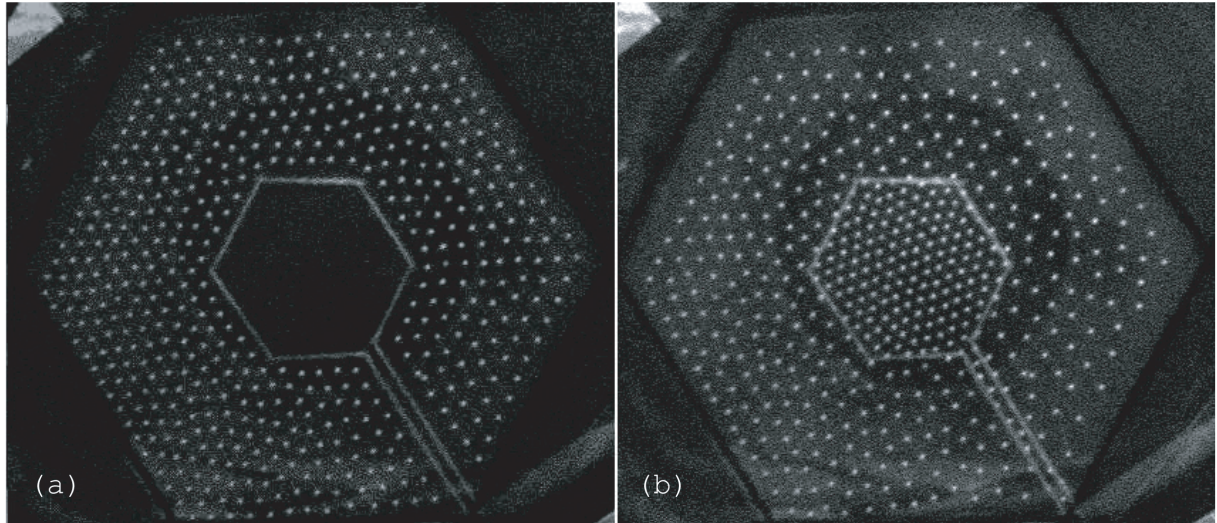


FIG. 6.1 : *Illustration à grande échelle du procédé utilisé pour créer des pièges électrostatiques. La zone centrale et la zone extérieure de l'électrode supérieure sont isolées électriquement. (a) : zone centrale à la masse, zone extérieure au potentiel $V_1 > 0$. (b) : zone centrale au potentiel V_1 , zone extérieure au potentiel $V_2 < V_1$.*

différentes zones désirées a été réalisée à l'extérieur du laboratoire⁴ par microlithographie permettant d'enlever la partie conductrice. Par cette technique "propre", la plaque reste uniforme au niveau de la transmission optique et permet toujours une bonne acquisition de la position des billes⁵.

6.2.2 Utilisation d'un réseau de pièges

La quasi totalité des expériences de piégeage du réseau par un réseau périodique ont été réalisées à l'aide d'un réseau carré tel que présenté sur la figure 6.2. Les pièges, légèrement rectangulaires⁶, sont disposés sur des lignes parallèles et reliés par un canal de 150 microns de largeur, les frontières isolantes faisant également 150 microns de largeur⁷. Le dispositif permet de disposer d'un réseau carré de pièges dont la surface occupe la moitié de la surface totale et de pas $d_0 = 1,20\sqrt{2} = 1,70$ mm. En enlevant une ligne de pièges sur deux, nous avons également travaillé avec un réseau de pièges occupant 3/4 de la surface

⁴Par l'entreprise Optimask.

⁵Sur la figure 6.1, les zones ont été isolées par gravure manuelle, leur frontière est donc visible.

⁶Si le réseau constitué par les pièges présente une symétrie carrée, le motif du réseau est en effet légèrement rectangulaire. Toutefois, nous verrons au chapitre 8 que la dynamique n'est pas affectée par cette dissymétrie et qu'elle respecte la symétrie du réseau.

⁷La largeur minimale des frontières est imposée par la nécessité de ne pas subir de claquage électrique entre les différentes zones. Pour les canaux de connexion, nous avons essayé une largeur de 50 microns et avons observé des dégradations du conducteur à leur niveau, sans doute dû à un échauffement local trop important lors de la mise sous tension.

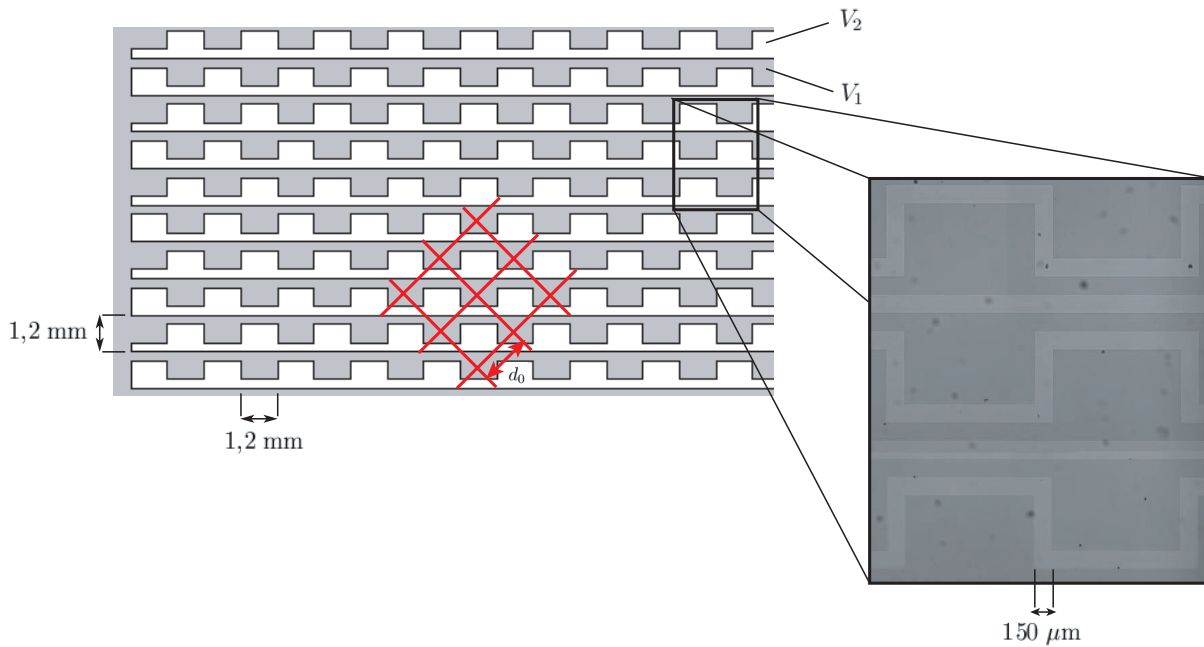


FIG. 6.2 : Schéma et aperçu au microscope d'un des deux réseaux de pièges utilisés. Les zones grisées, portées au potentiel $V_1 > V_2$, sont attractives. Le réseau carré de pas d_0 qu'elles définissent est à 45° par rapport aux lignes de pièges connectés.

et de pas $d_2 = \sqrt{2}d_0 = 2,40$ mm.

De manière générale, les réseaux de pièges que nous utilisons sont caractérisés par trois facteurs géométriques :

- **La symétrie du réseau** : nous avons essentiellement travaillé avec un réseau carré, qui permet d'étudier la compétition entre deux symétries incompatibles, les résultats déjà présents dans la littérature permettant de plus des comparaisons utiles. D'autre part, sa simplicité permet de qualifier facilement la nature du piégeage, avant d'utiliser un réseau de pièges aléatoires (voir la section 7.3).
- **Le pas du réseau** : il est limité d'un côté par la nécessité de disposer d'un nombre suffisant de pièges pour pouvoir discuter des résultats obtenus en terme de réseau piégé, et de l'autre côté par la taille minimale des pièges eux-mêmes.
- **La taille des pièges** : la principale limitation dans la taille est qu'elle ne peut être plus petite que les canaux de connexion ou bien que les bandes isolantes. Elle détermine notamment la largeur du bassin attracteur du piège (voir également la section 7.3).

Une fois le réseau choisi, un dernier paramètre géométrique intervient, à savoir le nombre de billes rapporté au nombre de pièges présents. ce nombre est caractérisé par le facteur f , défini comme le rapport entre ce nombre de billes et le nombre de pièges.

En particulier, au regard de la plage de travail ($1 \lesssim a_0 \lesssim 2$ mm) raisonnable qui a été définie au chapitre 2 pour les distances entre billes, le choix d'un réseau carré de pas

$d_0 = 1,70$ mm ou $d_2 = 2,40$ mm permet d'étudier des systèmes présentant un facteur de remplissage f proche de l'unité ($1/4 \leq f \leq 2$).

6.2.3 Dispositifs de piégeage utilisés dans d'autres systèmes

Réseaux de vortex

Dans les supraconducteurs, le piégeage bidimensionnel de vortex correspond en réalité à deux types de dispositifs bien différents. Le plus proche de notre dispositif, consiste en une fine plaque de matériau supraconducteur présentant des pièges dont la taille est bien inférieure à leur distance de séparation. Ces pièges peuvent être des trous dans le matériau [23–25] ou bien des plots magnétiques [19,21,22]⁸. Dans ces systèmes, la distance entre les pièges, de l'ordre du micron, est supérieure d'un ordre de grandeur à leur taille. Des vortex interstitiels peuvent donc se situer entre les pièges⁹.

Dans ces dispositifs, les paramètres contrôlés sont :

- Le nombre de vortex, *via* le champ magnétique appliqué, puisque le champ rentre par quantum de flux.
- La symétrie du réseau de pièges : les réseaux carrés et hexagonaux sont les deux réseaux étudiés dans les travaux précédemment cités¹⁰.
- Le pas du réseau ou, de manière équivalente, la longueur de London qui est la longueur caractéristique de l'interaction entre les vortex. Ces deux paramètres dépendent du matériau et du processus de fabrications des pièges et sont rarement discutés.
- La taille des pièges. Signalons également que ce point est rarement abordé au ni-

⁸Nous ne citons ici que les travaux ayant rendu compte d'observations de configurations de vortex. La bibliographie sur les mesures des conséquences de ces phénomènes de piégeage sur les courbes d'aimantation ou les températures de fusion, par exemple, est bien plus importante.

⁹Le second dispositif permettant le piégeage de vortex sur un réseau régulier consiste en une grille de matériau supraconducteur, autrement dit en un dispositif tel que les supraconducteurs percés présentés ci-dessus, mais où la taille des trous est très proche de la distance entre ces trous. La différence fondamentale avec les systèmes présentés précédemment est que les vortex ne peuvent pas prendre place entre les pièges. Les configurations d'équilibre dans des telles grilles sont déterminées expérimentalement dans [20,143], et sont en conformité avec les prédictions théoriques [144,145]. Une variante de ces dispositifs sont les réseaux de jonctions Josephson, conçus comme des réseaux de plots supraconducteurs. Du fait de la différence fondamentale entre ces systèmes et ceux qui nous concernent dans ce travail, nous n'y reviendrons pas par la suite.

¹⁰Des réseaux de kagomé, qui peuvent être vus comme un pavage du plan par des losanges, ont également été étudiés tant expérimentalement [17,146,147] que numériquement [148]. Ces réseaux présentent l'intérêt d'être frustrés même dans l'état d'équilibre fondamental et exhibent de ce fait des comportements nouveaux.

veau expérimental quant aux conséquences sur la configuration d'équilibre¹¹. Il faut également noter que dans ces dispositifs, il est possible de piéger en un même point plusieurs quanta de flux¹². Cette particularité distingue les dispositifs de piégeage de réseaux de vortex des autres dispositifs, même si on peut estimer que dans une certaine mesure, des pièges de grande profondeur pouvant attirer plusieurs particules malgré leur répulsion permettraient de reproduire partiellement cette configuration. Dans tous ces dispositifs, l'intensité de piégeage est intrinsèquement très forte, ce qui implique que les pièges sont systématiquement occupés par au moins un vortex.

Signalons aussi que ces dispositifs "artificiels" de piégeage de vortex sont basés sur une modification locale du matériau, qui change notamment la valeur de la longueur de cohérence des vortex piégés. Si on peut considérer de manière isolée les interactions entre deux vortex, l'interaction entre un vortex piégé et un vortex interstitiel est donc *a priori* différente de celle entre deux vortex interstitiels. Dans l'optique de l'utilisation de notre dispositif comme dispositif modèle pour l'étude de réseaux de vortex piégés, la précaution prise précédemment quant au couplage entre la force d'interaction interbilles et la force de piégeage dans le cas où cette dernière est forte est donc partiellement levée.

Comme nous le verrons dans la section 6.3.2, les dispositifs de piégeage dans les supraconducteurs sont efficaces et produisent des résultats conformes aux prédictions théoriques. La principale limite expérimentale est associée à la technique de visualisation¹³. S'il est désormais possible de visualiser simultanément de larges zones du matériau, il est encore impossible de suivre la dynamique des vortex dans le réseau de pièges, et donc d'établir le lien entre le comportement des vortex et les grandeurs macroscopiques mesurées (caractéristiques courant-tension, aimantation,...). Les techniques de visualisation s'améliorant d'année en année, il n'est pas interdit de penser qu'à terme cette limitation pourra être levée.

La détermination des configurations d'équilibre dans ces systèmes a fait l'objet de quelques travaux théoriques et numériques. En utilisant une description élastique continue pour le réseau de particules, Pogosov *et al.* ont établi les diagrammes d'existence à température nulle de quelques configurations dans les cas $f = 1$ et $f = 1/2$ pour un

¹¹Toutefois, l'impact de ce paramètre au niveau de la mesure du courant critique a été discuté par Moshchalkov *et al.* [149] pour un réseau de pièges constitué de trous. La taille optimale du trou dépend de la température et de la valeur du champ, mais on peut retenir qu'il est préférable d'avoir des trous de diamètre supérieur à la longueur de cohérence.

¹²Les configurations d'équilibre, comme la dynamique, peuvent donc être plus complexes. Le nombre de vortex pouvant être piégés dans un trou isolé de rayon r est $n_S = r^2 / [\xi(T)^2 + 2\xi(T)r]$, où ξ est la longueur de cohérence [150]. Au delà de cette limite, l'interaction du "piège" avec un vortex est répulsive. S'il y a plus d'un vortex dans le trou mais moins que n_S , l'interaction avec le "piège" est répulsive aux longues distances et attractives aux courtes distances. Si l'on ajoute les modifications à ce modèle induites par la présence des autres trous dans le cas d'un réseau de piège, on devine aisément la complexité que peut receler la dynamique de tels systèmes.

¹³Ces techniques sont présentées en introduction de notre travail.

réseau carré de pièges ayant différents profils [151]. Les autres travaux sont des études numériques basées sur une minimisation de l'énergie totale des systèmes, constituée d'une interaction de paire entre vortex (donc de type K_0) et de l'interaction de chaque vortex avec chaque piège. Le cas d'un réseau carré de pièges est traité dans [152] pour f entier et dans [153] pour f fractionnaire de type $1/p$. Pour un réseau hexagonal, les configurations pour f entier ont été déterminées dans [148, 152] et celles pour f fractionnaire dans [153]. Dans tous ces travaux, le profil des pièges est généralement choisi gaussien ou parabolique tronqué.

Systèmes colloïdaux

Il existe encore peu d'études expérimentales de piégeage de cristaux de particules colloïdales par un réseau périodique de pièges. Jusqu'à récemment, le piégeage était obtenu en modifiant la topologie du substrat sur lequel est déposé la fine couche de liquide colloïdal. Ce procédé a essentiellement été utilisé pour étudier les changements de phase en présence d'un potentiel modulé, ou également dans l'idée de mettre au point des méthodes d'auto-assemblage de particules colloïdales médié par le substrat ¹⁴. L'utilisation de réseaux de pièges optiques créés par interférence de trois faisceaux laser est d'utilisation plus souple car la géométrie du réseau peut être modifiée continûment et *in situ* en modifiant l'angle d'incidence des faisceaux. À l'aide de cette technique, Brunner *et al.* ont étudié le diagramme de phase d'un réseau avec un facteur de remplissage égal à 3 [155]. Si cette technique permet de disposer d'un réseau étendu de pièges, il semblerait que les forces de liaison entre les particules colloïdales et les forces de piégeage soient fortement couplées et que ce couplage soit délicat à expliciter. L'emploi d'un réseau de pinces optiques [156] peut, d'après Mangold *et al.*, permettre de résoudre ce problème et de disposer d'une interaction interparticulaire et d'une force de piégeage découplées [157]. À l'aide de cette technique, les auteurs étudient la dynamique d'un cristal colloïdal piégé dans un réseau 9×9 pièges avec un facteur de remplissage entier.

Dans les systèmes colloïdaux, si la visualisation ne soulève aucune difficulté, le problème principal réside dans la création du réseau de piégeage. Dans [155], le réseau est étendu mais les pièges sont larges et nous verrons qu'ils attirent systématiquement plusieurs particules dès que f est supérieur à 1. Par ailleurs le couplage entre l'interaction interparticulaire et la force de piégeage reste mal connu. Dans [157], la limitation majeure est la taille du réseau de pièges, qui compte moins de 100 sites. La qualité des figures observées est toutefois très encourageante.

Les systèmes colloïdaux ont également fait l'objet d'études numériques par Reichardt *et al.* [158–160], essentiellement pour des facteurs de remplissage entiers.

¹⁴Voir notamment la référence [154] et les références citées.

En conclusion de cette présentation des deux types de systèmes piégés auquel nous nous référerons, le dispositif que nous proposons, qui allie la possibilité de disposer de réseaux de grande taille tout en visualisant dynamiquement le cristal, apparaît comme un outil utile, complémentaire de ces dispositifs. La possibilité de contrôler les différents paramètres du réseau de pièges nous permet d'envisager de mener des études quantitatives sur les réseaux piégés. Avant cela, il nous faut qualifier plus précisément le réseau de pièges que nous avons utilisé, et notamment relier les grandeurs caractéristiques des pièges (intensité et portée) aux grandeurs contrôlées (potentiels V_1 et V_2 , taille des motifs).

6.3 Caractérisation expérimentale du réseau de pièges

6.3.1 Caractérisation d'un piège isolé

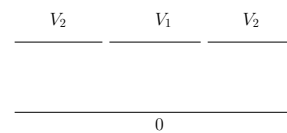
Indépendamment de l'extension spatiale de la force de piégeage, contrôlée par la taille de la zone portée au potentiel V_1 mais aussi *a priori* par les autres distances caractéristiques du système (le rayon R des billes et la hauteur h du condensateur), l'intensité du piégeage est contrôlée par les deux potentiels V_1 et V_2 . Du point de vue expérimental, lorsque V_1 est à 1100 V, nous pouvons faire varier $\Delta V = V_1 - V_2$ jusqu'à 500 V sans risque de claquage électrique à travers le canal séparant les deux zones.

En l'absence de billes, et si l'on néglige la largeur de l'isolant¹⁵, les équipotentielles dans le réseau périodique de pièges sont facilement calculables en passant dans l'espace de Fourier des deux directions horizontales. On trouve notamment que l'extension σ des variations de potentiel reste finie autour d'un piège. Pour une évaluation plus précise de l'énergie potentielle de piégeage $\mathcal{E}_p(\mathbf{r}) \equiv \mathcal{E}_p \varepsilon_p(r/\sigma)$, il faudrait bien entendu considérer également la bille dans le piège, mais ce problème semble difficile à résoudre analytiquement du fait de la perte de la symétrie cylindrique (par rapport au cas de l'électrode uniforme).

En ce qui concerne l'intensité du piégeage \mathcal{E}_p , on peut estimer en première approximation qu'elle est proportionnelle à $V\Delta V$, V étant proche de la moyenne entre V_1 et V_2 : le champ électrique de rappel vers le piège est en effet proportionnel à ΔV , et la charge de la bille, quant à elle, est proportionnelle à V .

¹⁵Si on ne néglige plus la largeur de l'isolant, le problème devient autrement plus délicat.

Dans le plan xOz , et si l'on se restreint à un seul piège (figure ci-contre), le problème pourrait être résolu par transformation conforme [161, 162], le problème étant équivalent à celui d'un polygone inclus dans un autre, qui peut être transformé en deux cercles concentriques, la zone d'intérêt étant la zone intersticielle [163]. Toutefois, le calcul de ces transformations est complexe, pour un résultat qui ne serait même pas exact puisqu'il faudrait ajouter ensuite la bille.



Cependant, si l'on considère des situations de piégeage de réseaux où l'on ne s'intéresse pas quantitativement au rôle de la température, la donnée importante est le rapport entre l'intensité relative du piégeage et l'intensité \mathcal{E}_0 de l'interaction entre les billes. Celle-ci étant proportionnelle à V^2 , le paramètre pertinent à considérer est donc $\eta_V \equiv \Delta V/V$: plus ce paramètre est grand, plus le piégeage est d'intensité importante par rapport aux forces élastiques tendant à ordonner le réseau¹⁶. Dans ce qui suit, les valeurs numériques de η_V seront donc calculées en les assimilant aux valeurs de $\Delta V/(s_1 V_1 + s_2 V_2)$, où s_i est le taux de couverture de la zone portée au potentiel V_i ¹⁷.

Du point de vue expérimental, on peut préciser les caractéristiques \mathcal{E}_p et σ de l'énergie potentielle de piégeage $\mathcal{E}_p(\mathbf{r})$ en s'intéressant au comportement d'une seule bille explorant le paysage énergétique constitué par les pièges.

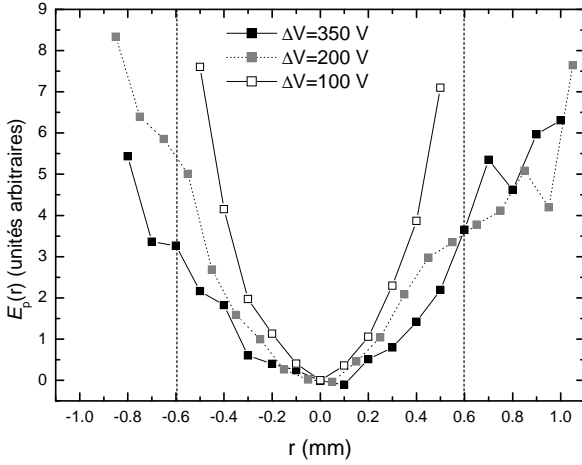


FIG. 6.3 : Profil de l'énergie potentielle de piégeage d'une bille le long du grand axe d'un piège, pour trois différences de potentiel ΔV différentes et $V_1 = 1100$ V. Les lignes verticales repèrent les limites matérielles du piège (positions des frontières isolantes).

À faible température, la bille reste piégée dans un des pièges, et la distribution de probabilité de sa position permet de déterminer l'énergie potentielle de piégeage. Le profil de cette énergie épouse les formes du piège, c'est-à-dire dans notre cas un rectangle. La figure 6.3 représente le profil énergétique le long du grand axe des pièges : on voit que le puits devient de plus en plus évasé lorsque ΔV diminue. L'ajustement du fond des puits par une parabole montre de plus que la raideur est directement proportionnelle à $V\Delta V$. Pour $\Delta V \leq 200$ V, le puits devient plus évasé qu'une parabole, et son étendue dépasse la largeur de la zone portée au potentiel V_1 . Notons toutefois qu'il est difficile d'estimer plus précisément la portée réelle σ du puits, car la distribution des positions de la bille à

¹⁶Signalons toutefois que cette approche doit être complétée par la prise en compte de l'effet de "cage" : lorsque les particules sont en site, et que la configuration correspond à un minimum local pour le réseau non piégé, elles renforcent le piégeage de la particule qu'elles entourent : le poids relatif du piégeage dépend donc de l'historique du processus de piégeage. Ces considérations peuvent notamment permettre de comprendre des effets d'anisotropie de la valeur du courant critique dans certaines configurations [151].

¹⁷Donc $s_i = 1/2$ pour le réseau carré de pas d_0 et $s_i = 1/4$ ou $3/4$ pour le réseau carré de pas d_3 .

l'intérieur du piège dépend à la fois de l'intensité du piégeage \mathcal{E}_p et de σ . Pour déterminer entièrement la fonction $\mathcal{E}_p(\mathbf{r})$, il faudrait pouvoir explorer avec une bonne statistique la zone périphérique du puits, ce qui est délicat à réaliser expérimentalement. À haute température, les billes peuvent sortir des pièges et si elles ne restent pas suffisamment longtemps dans ces zones périphériques, on peut toutefois réaliser une expérience de diffusion entre pièges. Nous pouvons constater que le temps de résidence moyen croît exponentiellement avec $V\Delta V$. À $T = 20.10^{11}$ K et $V_1 = 800$ V, il passe de 1 à 4 secondes lorsque ΔV passe de 150 à 300 V.

Ces caractérisations seront affinées à la section 7.3 du chapitre suivant, en nous basant sur l'observation des positions d'équilibre obtenues pour un cristal piégé dans le cas d'un facteur de remplissage f simple ($f = 1/p$ ou $f = p$, $p \in \mathbb{N}$). Dans ces cas, les positions théoriques peuvent être déterminées en fonction des caractéristiques des pièges. La comparaison avec les positions observées nous permettra de mieux encadrer les caractéristiques réelles de nos pièges.

Avant de discuter des différentes configurations d'équilibre possibles dans notre système de pièges, et de comparer les observations réalisées avec celles présentées dans la littérature, il convient de vérifier qu'au delà des capacités de piégeage d'un piège seul que nous venons d'évoquer, notre dispositif permet bien de réaliser un piégeage collectif du réseau. Afin de vérifier que nous disposons bien d'un socle commun avec les autres dispositifs, il est intéressant de considérer les situations de piégeage de forte intensité, cas simples pour lesquelles les configurations d'équilibre sont unanimement bien identifiées.

Cette étude comporte de plus un autre intérêt. En effet, remarquons que l'intensité relative du piégeage est bornée supérieurement : $\eta_V \leq 2$ ou 4, selon le réseau choisi. Si ceci n'est pas handicapant pour étudier des effets de piégeage faible, il n'est donc pas évident *a priori* que nous puissions reproduire des situations de fort piégeage.

6.3.2 Efficacité du piégeage

Afin de situer notre dispositif par rapport aux dispositifs existants dans les supraconducteurs et les systèmes colloïdaux, nous considérons donc ici les figures obtenues pour le réseau de pièges de symétrie carrée et de pas d_0 , ainsi que pour un réseau de symétrie hexagonale¹⁸ (les sites étant distants de 2 mm), dans le cas d'un piégeage supposé de forte intensité ($\eta_V \geq 0,25$), le facteur de remplissage étant fractionnaire ($f = 1/p$, $p \in \mathbb{N}$). À basse température, on s'attend à ce que tous les pièges soient remplis s'ils sont suffisamment attracteurs puisqu'ils sont en nombre suffisant.

Les configurations obtenues pour $f = 1, 1/2, 1/3, 1/4$ pour un réseau carré de pièges et

¹⁸Ce réseau a été fabriqué selon le même principe que le réseau de symétrie carrée.

$f = 1, 1/2, 1/3$ pour un réseau hexagonal sont présentées sur la figure 6.4. Elles présentent toute une forte symétrie liée à la symétrie du réseau de pièges sous-jacent.

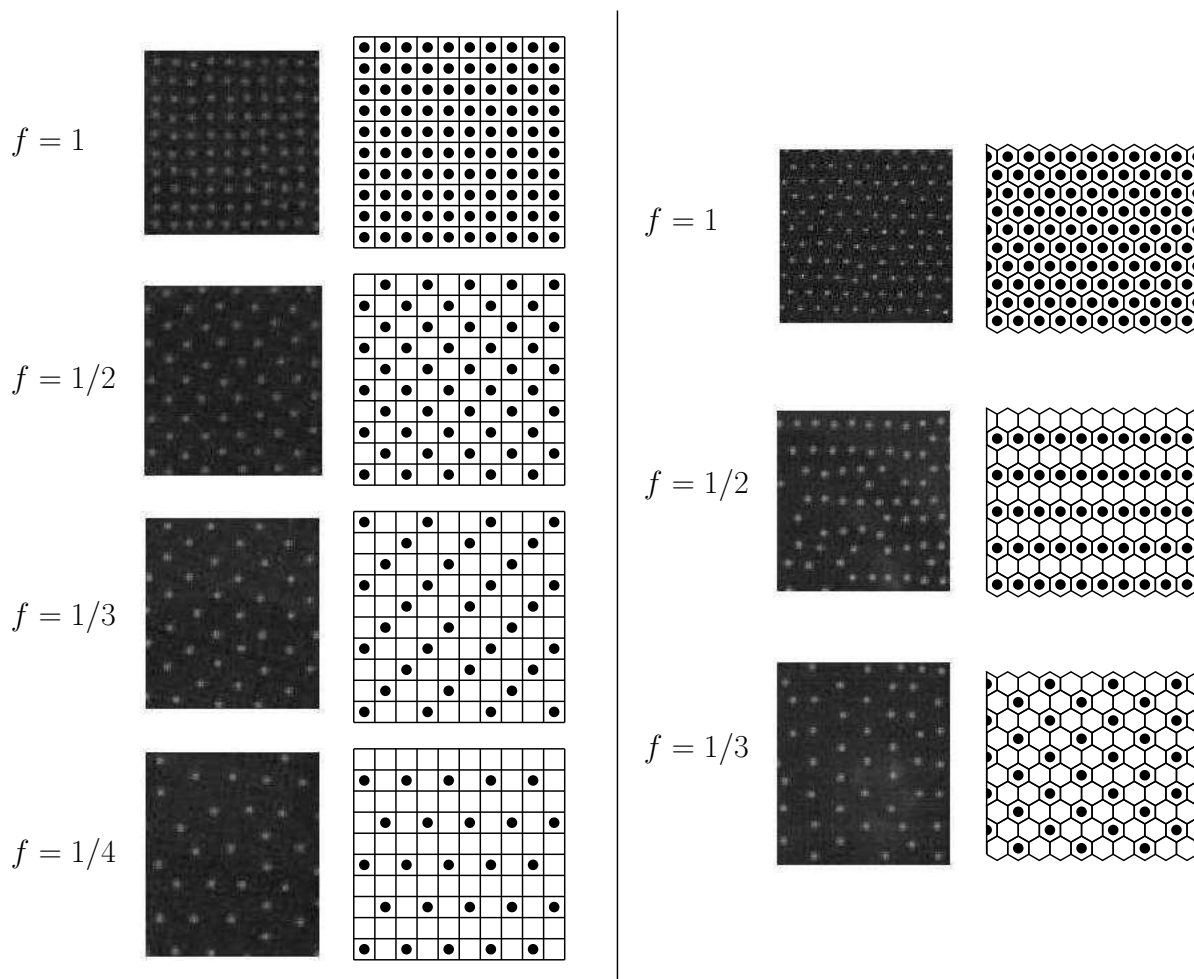


FIG. 6.4 : Configurations d'équilibre expérimentales et schémas des configurations théoriques (non dégénérées) pour un cristal fortement piégé dans un réseau carré ou un réseau hexagonal, pour différents facteurs de remplissage f . Dans les schémas, les cellules représentent les pièges tandis que les particules sont représentées par un point noir. Les configurations dites théoriques dans un réseau carré sont celles de [153] (sans tenir compte de la dégénérescence), identiques à celles prévues dans [151] pour le réseau carré.

Les configurations $f = 1$ correspondent sans surprise à un remplissage de chaque piège par une bille. Dans le réseau carré, la configuration pour $f = 1/2$ correspond à une alternance de pièges vides et de pièges remplis : c'est intuitivement la seule configuration possible, lorsque la répulsion entre les billes est suffisamment forte pour interdire l'occupation de deux sites voisins. Notons que cette configuration d'équilibre présente une dégénérescence d'ordre 2, puisqu'il existe deux sous-ensembles de pièges sur

lesquels peut se fixer la surstructure de billes¹⁹.

Les cas $f = 1$ et $f = 1/2$, sur lesquels nous reviendrons plus longuement dans les deux prochains chapitres, sont facilement observés car ils correspondent à des cas où la distance entre les billes est dans la plage où l'interaction est assez forte pour imposer au cristal d'être homogène et si possible régulier.

Ces configurations, prévues théoriquement, sont également observées dans tous les travaux portant sur les réseaux de vortex [20, 21, 24, 25, 143].

Les autres cas ($f = 1/3$ et $f = 1/4$ en réseau carré, $f = 1/2$ et $f = 1/3$ en réseau hexagonal) présentent des difficultés supplémentaires, au premier rang desquels la dégénérescence positionnelle et orientationnelle des configurations théoriques de plus basse énergie. Ainsi, dans le cas d'un réseau hexagonal, la configuration $f = 1/2$ présente une dégénérescence d'ordre 3 et les configurations trouvées, tant expérimentalement ici que numériquement dans [153], sont un mélange de ces trois configurations, les frontières étant peu coûteuses en énergie du fait de l'éloignement des particules²⁰. Le cas $f = 1/2$ en réseau hexagonal illustre la difficulté à traiter le cas de ce réseau de pièges. En effet, sa symétrie est compatible avec la symétrie du réseau de billes non piégé, ce qui induit moins de frustration, mais, du fait de l'augmentation de la coordinnence de chaque site, les configurations ont un degré de dégénérescence plus élevé que dans le cas d'un réseau carré. De fait, nous ne connaissons aucune autre observation expérimentale de configurations d'équilibre en remplissage fractionnaire de réseaux hexagonaux. Dans le cas $f = 1/3$, la dégénérescence est encore plus élevée et les zones homogènes que nous avons observées ne contiennent pas plus d'une dizaine de particules.

Pour les réseaux carrés, le problème de la dégénérescence se pose également. Compte-tenu de la distance entre les billes piégées induite par la distance choisie entre les pièges, le coût d'une paroi, au niveau de laquelle deux billes peuvent se trouver dans deux pièges voisins, est faible. Nous n'observons donc que des petits domaines. Ces configurations sont conformes aux prévisions théoriques et aux observations dans les réseaux de vortex piégés par des plots [21, 23, 24]²¹.

Nous n'avons pas exploré d'autres valeurs de f inférieures à 1, et plus généralement, dans les réseaux carrés, peu d'autres valeurs ont donné lieu à des observations claires : $f = 1/5$ dans [20, 24], $f = 2/3$ dans [23, 143], $f = 3/4$ et $f = 2/5$ dans [24].

¹⁹Comme il n'y a toutefois que deux choix, une structure régulière peut généralement se développer sur une grande surface (voir section 7.2).

²⁰Des domaines homogènes pourraient bien entendu être observés expérimentalement en rapprochant les pièges, donc les particules.

²¹Dans les grilles supraconductrices, la configuration prévue et observée dans [20] pour $f = 1/4$ est différente : il s'agit d'un réseau de dimères de particules, chaque dimère étant constitué de particules situées sur deux sites voisins dans une diagonale.

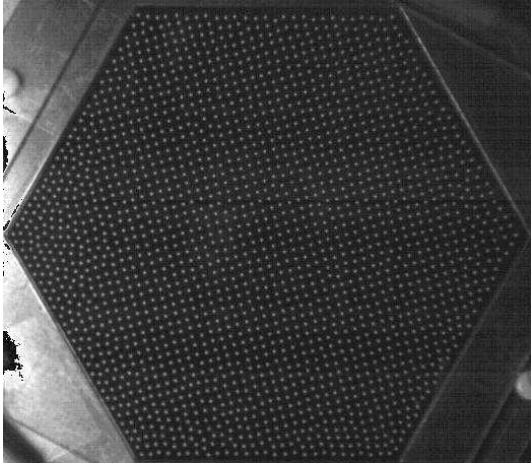


FIG. 6.5 : Photographie d'un cristal de Wigner macroscopique piégé avec un facteur de remplissage $f = 1$ et $\eta_V = 0,25$: chaque piège est occupé par une bille, et ce presque jusqu'au bord.

Pour les facteurs de remplissage non rationnels, les configurations observées sont généralement désordonnées. Lorsque f n'est pas trop loin d'un rationnel, les particules supplémentaires ou les lacunes peuvent toutefois être absorbées dans les frontières entre les différents domaines correspondant aux différentes réalisations d'une configuration dégénérée [25].

6.4 Conclusion

En conclusion, la méthode de piégeage proposée permet de reproduire, à partir des valeurs de η_V accessibles, les situations reportées dans la littérature dans le cas d'un piégeage de forte intensité pour $f \leq 1$. Par ailleurs la symétrie et le pas du réseau, la taille des pièges, et l'intensité relative du piégeage sont parfaitement contrôlés. De surcroît, les expériences menées dans le cas $f = 1$ montrent que les effets de bord dus aux cadres sont négligeables. En effet, si les symétries du réseau sont incompatibles avec celle du cadre de confinement utilisé, la configuration peut en réalité se développer jusqu'à une très petite distance du bord²² (figure 6.5); dans la suite nous négligerons donc ces effets pour ce qui est de la géométrie des configurations.

Ainsi, la méthode que nous proposons peut être utilisée pour explorer des situations statiques plus complexes, notamment lorsque l'intensité du piégeage baisse, ainsi que la dynamique des particules piégées ou en passe de l'être.

²²Cette distance, de l'ordre de quelques pas du réseau, est extrêmement dépendante de l'horizontalité du dispositif. En effet, du fait du piégeage, il est très délicat de compenser une légère inhomogénéité de densité initiale que l'on ne peut détecter en considérant un réseau non piégé. Cependant, du fait de la relative "souplesse" des bords, les inhomogénéités sont toujours absorbées sur les bords et un cristal "parfait" peut toujours se développer au centre.

Chapitre 7

Configurations d'équilibre dans un réseau périodique de pièges

Sommaire

7.1	Introduction	133
7.2	Positions d'équilibre	134
7.2.1	Des réseaux partiellement piégés	134
7.2.2	Dégénérescence des configurations	142
7.2.3	Effets de la température	144
7.3	Configurations d'équilibre et profils des pièges	145
7.4	Conclusion	150

7.1 Introduction

Le chapitre précédent nous a permis de montrer que notre dispositif de piégeage permet de reproduire les situations de piégeage fort rencontrées dans les systèmes de vortex dans le cas $f \leq 1$. Comme il a été mis en évidence théoriquement dans [151, 164], lorsque l'intensité relative du piégeage diminue et si les symétries du réseau de pièges et du réseau non piégé de billes sont incompatibles, il est plus intéressant énergétiquement pour certaines particules de sortir des pièges afin d'abaisser l'énergie élastique du système. Entre la situation de piégeage de forte intensité, où toutes les particules sont piégées, et le cas de l'absence de piégeage, permettant l'apparition d'un réseau hexagonal, se pose la question de la configuration adoptée par le système : préfère-t-il piéger certaines particules aux centres des pièges quitte à payer un coût élastique ou bien préfère-t-il ne pas payer ce coût et éloigner légèrement les particules du centre des pièges ?

La réponse à cette question dépend bien entendu des distances et intensités caractéristiques des interactions entre particules et des forces de piégeage, mais aussi du

rapport de remplissage f . En particulier, lorsque ce nombre devient plus grand que 1, la présence de particules interstitielles, à la fois attirées par les pièges et repoussées par les particules en place dans ces pièges peut laisser supposer l'existence d'une grande richesse de configurations d'équilibre.

Afin d'explorer plus précisément ces équilibres subtils entre forces élastiques et forces de piégeage, nous étudions dans ce chapitre trois cas simples sur un réseau carré, à savoir les rapports de remplissage $f = 1/2$ et $f = 1$ (dans un réseau carré de pas d_0) et le rapport $f = 2$ (dans un réseau carré de pas $d_2 = \sqrt{2}d_0$, donc avec la même densité en billes que le cas $f = 1$). Nous présentons dans ce qui suit leurs configurations d'équilibre en fonction de l'intensité relative du piégeage η_V . De manière générale, nous observons un dépiégeage partiel des billes lorsque cette intensité relative baisse. Le cas $f = 2$ nous a notamment permis de mettre en évidence une configuration définie sur une large plage de valeurs de η_V dans laquelle, malgré un excédent de billes, seul un piège sur deux est occupé.

Au delà de l'intérêt intrinsèque de ces systèmes, il nous semblait important de disposer d'informations sur le comportement des réseaux de billes dans le cas où tous les pièges ne sont pas occupés (cas $f = 1/2$) et le cas où toutes les billes ne sont pas piégées (cas $f = 2$), avant d'aborder l'étude de systèmes en présence d'un réseau aléatoire de pièges. Pour un réseau aléatoire, ces deux cas de figures se retrouvent en effet conjointement et en tout point. Par ailleurs, nous verrons que dans certains cas les configurations présentent une dégénérescence positionnelle et/ou orientationnelle, qui nous permet de mesurer le type de domaines que le système tend à favoriser.

Enfin, à la section 7.3, nous tirons profit de nos observations pour qualifier un peu plus précisément le profil des pièges, en comparant ces observations aux prédictions théoriques.

7.2 Positions d'équilibre

7.2.1 Des réseaux partiellement piégés

Nous avons vu au chapitre précédent que lorsque l'intensité relative du piégeage est forte, tous les pièges sont occupés quand le rapport de remplissage f est plus petit que 1. Dans ce qui suit, nous désignerons les configurations correspondantes comme "totalement piégées" (TP). En diminuant cette intensité relative, nous avons observé, dans les trois cas étudiés, des situations de dépiégeage partiel ou total des réseaux.

Notons que l'existence de telle ou telle configuration, pour un système donné de billes, dépend de trois facteurs : l'espacement des pièges, leur portée, et leur intensité. Pour un remplissage donné, nous ne modifions ici qu'un seul de ces paramètres, à savoir l'intensité¹

Nous qualifions ici les configurations par leurs représentations de Voronoï puis si

¹La modification des autres paramètres, si elle est facilement réalisable, est plus longue et plus coûteuse car il faut produire une nouvelle plaque ITO gravée.

nécessaire par la distribution des distances entre plus proches voisines, qui permet une analyse un peu plus fine. L'utilisation des transformées de Fourier des réseaux permet de confirmer les mesures obtenues.

Cas du sous-remplissage ($f = 1$, $f = 1/2$)

Les cas $f = 1$ et $f = 1/2$ sont étudiés avec un réseau de pièges de pas $d_0 = 1,70$ mm. Sous piégeage nul, les cristaux hexagonaux correspondants ont respectivement pour pas $a_0 = d_0(4/3)^{1/4} = 1,82$ mm et $\sqrt{2}a_0 = 2,58$ mm. Le nombre de billes est respectivement 1950 et 975.

Pour un rapport de remplissage $f = 1$, nous observons, lorsque l'intensité du piégeage diminue, une transition brutale entre la configuration de piégeage total (TP) et une configuration de piégeage partiel (PP) dans laquelle seule une bille sur deux est piégée. Cette configuration, reportée sur la figure 7.1, est obtenue par le dépiégeage d'une ligne de billes sur deux, les billes dépiégées se plaçant alors entre les pièges qui ont été quittés. Le coût en énergie de piégeage est alors compensé par un gain de l'énergie d'interaction, la configuration se rapprochant d'une configuration hexagonale avec une coordinence de 6 pour chacune des particules. La transition entre les deux configurations a lieu entre les valeurs $\eta_V = 0,13$, pour laquelle la configuration PP est clairement établie, et $\eta_V = 0,16$, qui permet d'obtenir la configuration TP.

La configuration PP correspond *a priori* à une infinité de configurations, les billes intersticielles pouvant être à une distance αd_0 des pièges délaissés située entre 0 et $d_0/2$. Si α est différent de $1/2$, les distances $d_1 = \sqrt{1 + \alpha^2}d_0$ et $d'_1 = \sqrt{1 + (1 - \alpha)^2}d_0$ entre la bille intersticielle et ses voisines piégées sont différentes (voir figure 7.1). Dans notre dispositif, la distribution des distances entre plus proches voisines varie légèrement dans la plage de valeurs $0,05 \leq \eta_V \leq 0,13$: un exemple en est donné sur la figure 7.2(a) pour $\eta_V = 0,11$. Nous pouvons ajuster cette distribution avec la somme de trois gaussiennes de même aire² et centrées sur les trois distances d_0, d_1 et d'_1 , les deux dernières étant inconnues³. Le meilleur ajustement est obtenu pour $\alpha = 0,41$. Pour η_V proche de $0,13$, on a $\alpha \simeq 0,32$, ce qui est cohérent avec le fait qu'on se rapproche de la configuration TP quand η_V augmente.

Cette mesure est confirmée par le calcul de la transformée de Fourier de la configuration pour $\eta_V = 0,11$, qui est conforme à la transformée théorique calculée avec $\alpha = 0,41$ en tenant compte de la dégénérescence d'ordre 2 de la configuration⁴. Ces deux représentations

²Car il y a un même nombre de liens de chaque type.

³Notons que la queue à droite de la distribution indique que les gaussiennes associées aux distances d_1 et d'_1 sont plus larges, indiquant une plus forte mobilité des particules intersticielles par rapport aux particules piégées.

⁴Voir section 7.2.2.

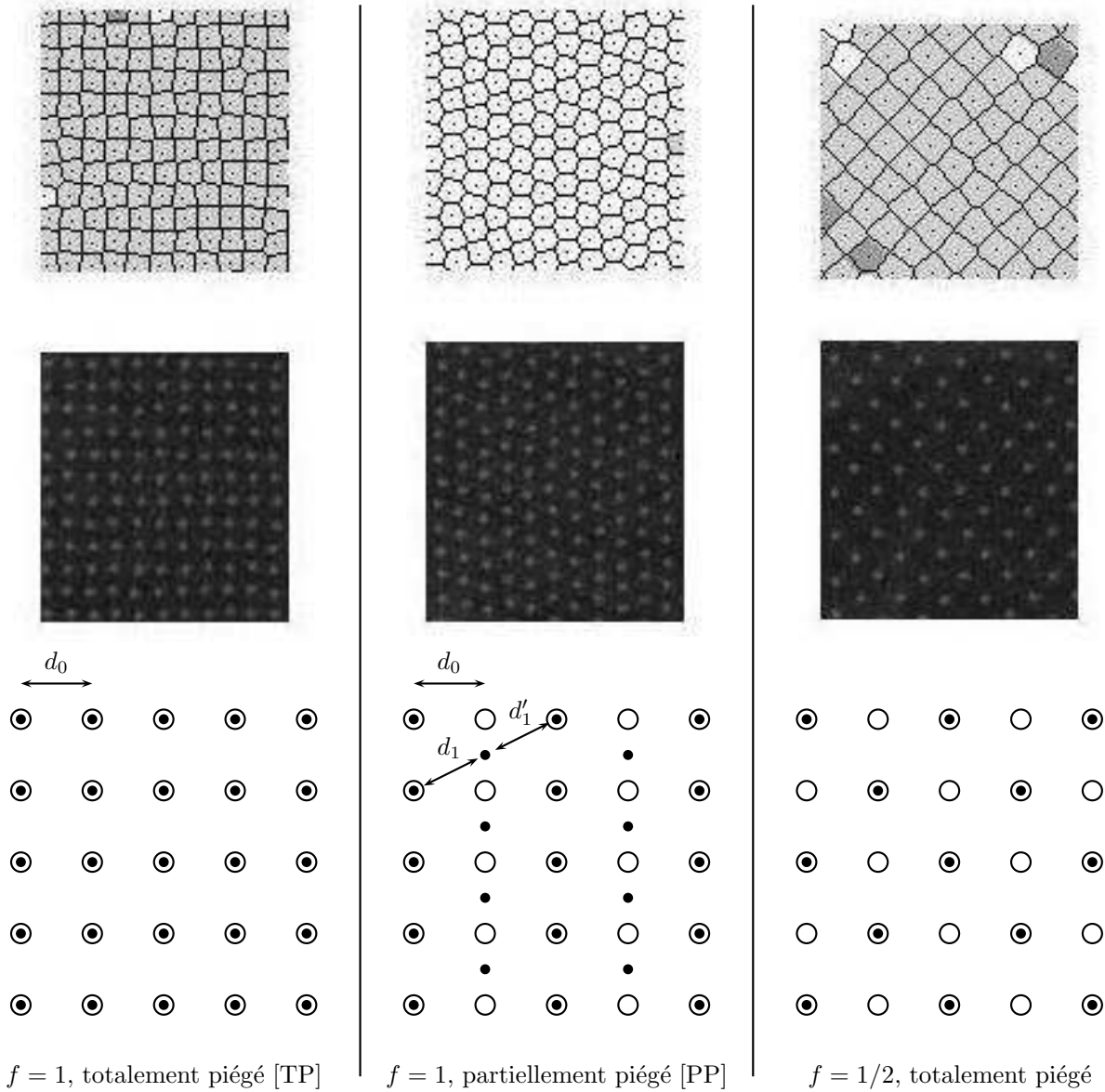


FIG. 7.1 : Schémas de Voronoï, images réelles et schémas de principe des configuration TP et PP pour $f = 1$ et de la configuration TP pour $f = 1/2$. Dans les schémas de Voronoï, les cellules blanches sont des cellules à 6 côtés, les cellules en gris clair ayant 4 côtés. Les cellules à 5 ou 7 côtés sont dans un gris plus soutenu. Dans les schémas de principe, les cercles correspondent à des pièges, les disques noirs aux particules.

sont reportées sur la figure 7.3(a). La configuration $\alpha \simeq 0,4$ est en effet marquée par la présence de la raie (20), toutefois moins intense que les autres raies (2p), alors que pour $\alpha = 0,5$, configuration à laquelle on aurait pu s'attendre, la raie (20) est éteinte.

Finalement, lorsque η_V est inférieur à 0,05, nous observons l'apparition d'un cristal hexagonal (au sens où chaque bille a 6 voisines) s'appuyant sur les bords du confinement.

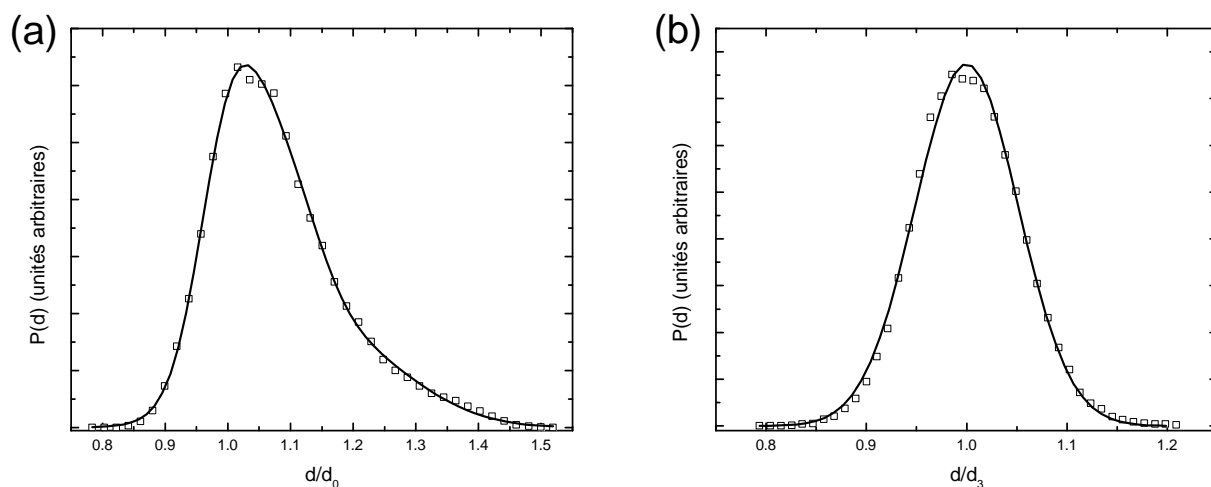


FIG. 7.2 : Distribution des distances entre plus proches voisines $P(d)$ dans les configurations PP. (a) : $f = 1$, $\eta_V = 0,11$ (voir figure 7.1). (b) : $f = 2$ (voir figure 7.5). (\square) : distribution expérimentale. Trait plein : ajustement décrit dans le texte.

Notons que ces bords ne sont pas parallèles aux axes principaux du réseau de pièges : ce dernier ne semble donc plus jouer de rôle à ce niveau de description, pour lequel on ne considère que l'orientation des axes et les coordonnées des particules. Cependant, comme le prouvent les nombreux travaux portant sur le piégeage faible, l'influence des pièges même de faible intensité n'est pas nulle, mais est plus subtile. Cette phase hexagonale est ainsi généralement appelée "cristal flottant" (CF) pour rappeler l'existence d'un réseau de pièges sous-jacent.

Dans la littérature, les configurations PP n'ont jamais été observées expérimentalement dans les réseaux de vortex, les systèmes étudiés jusqu'à présent présentant un piégeage fort. Le cas de pièges d'intensité moyenne ou faible a toutefois été étudié théoriquement par Pogosov *et al.* [151] et numériquement par Reichhardt *et al.* [164]. Dans le premier cas, les auteurs comparent les énergies de trois configurations postulées : la configuration TP, la configuration PP avec $\alpha = 0,5$, et une configuration de "cristal flottant", cristal hexagonal légèrement distordu dont l'orientation des axes est influencée par le réseau de pièges, sans que les axes soient parallèles aux axes du réseau. Pour une portée de piège donnée, que ce soit pour un piégeage gaussien ou parabolique tronqué, les trois configurations sont obtenues successivement lorsque l'intensité du piégeage décroît. Signalons deux différences par rapport à nos observations. D'une part dans notre configuration PP, le paramètre α est proche de 0,4 lorsqu'on est autour du changement de phase et non de 0,5⁵. D'autre

⁵Signalons cependant que les auteurs n'affirment rien quant à l'existence de la phase PP avec $\alpha \neq 0,5$. Nous verrons à la section 7.3 qu'en réalité, selon le profil de piège utilisé, la transition entre la configuration TP et la configuration PP avec $\alpha = 0,5$ est plus ou moins continue.

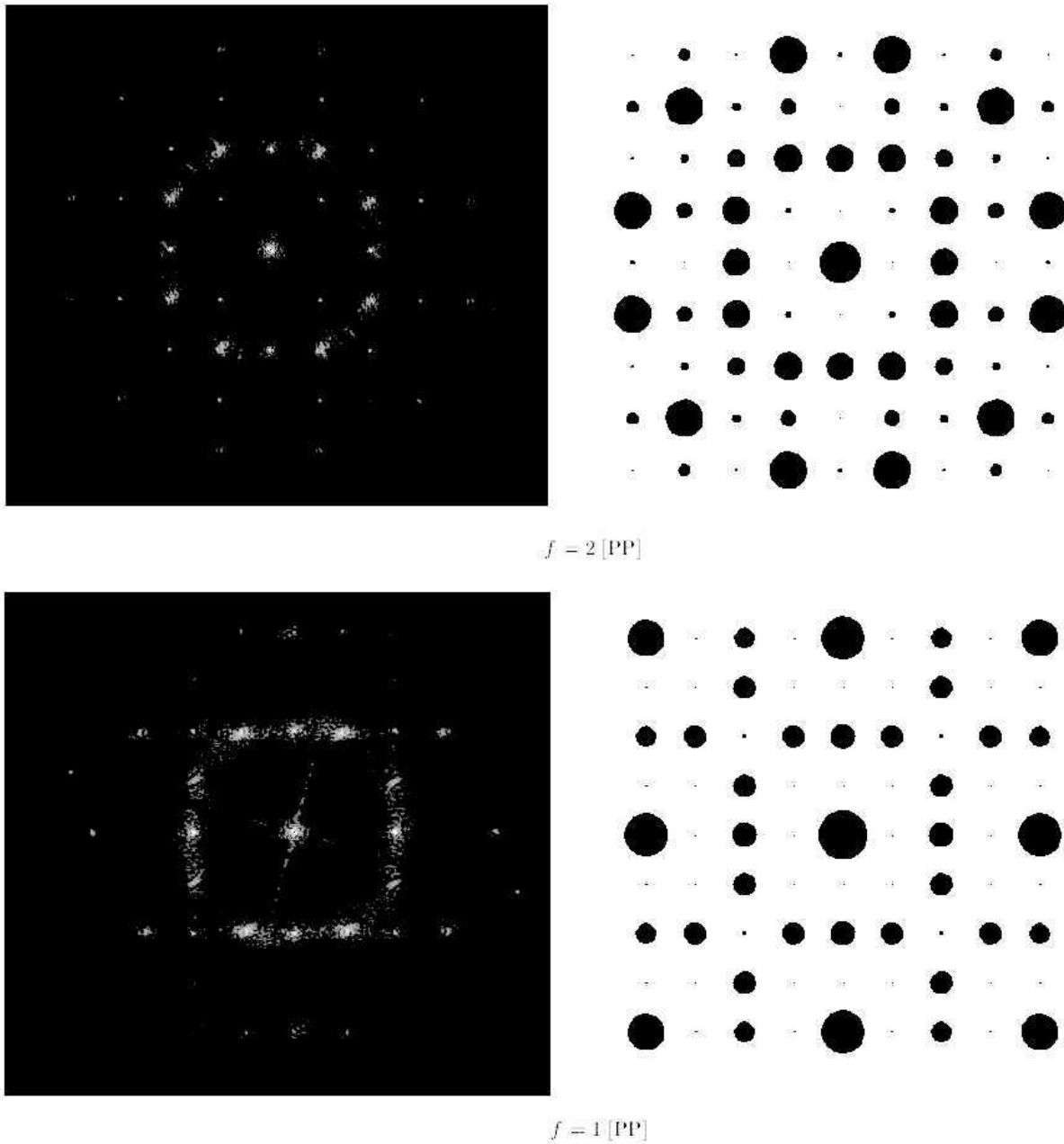


FIG. 7.3 : Transformées de Fourier expérimentales (à gauche) et théoriques dans les configurations PP pour $f = 1$ et $f = 2$. Les rayons des tâches circulaires représentant les raies théoriques sont proportionnels à leur intensité.

part, l'orientation de la phase hexagonale flottante que nous observons est définie par les bords plutôt que par les axes du réseau de pièges. Ce résultat n'est pas surprenant puisque dans la phase flottante, les possibilités de positionnement du cristal par rapport aux pièges sont multiples et, l'intensité du piégeage étant faible, les effets de bords peuvent devenir prédominants pour le choix de l'orientation, ce qui n'est plus le cas dès que le piégeage est un peu plus fort. La limite entre cristal flottant et cristal hexagonal tel qu'il est observé

sous piégeage nul est donc pour nous très faible.

Dans [164], la configuration PP est également calculée par les auteurs comme une phase accessible lorsque l'intensité du piégeage diminue⁶. La phase de cristal flottant n'est pas évoquée, mais signalons que les bords de la boîte carrée dans laquelle sont placées les particules simulées sont parallèles aux axes du réseau de pièges : la limite entre le cristal flottant et la configuration PP est donc ténue.

Dans le cas $f = 1/2$, nous observons la configuration TP jusqu'à $\eta_V = 0,11$. En dessous de cette valeur, le piégeage devient moins efficace et des domaines de symétrie hexagonale apparaissent au milieu de domaines de configuration TP de symétrie carrée. Aucun autre type de configuration ne s'établit dans le système. En particulier, nous n'observons pas la configuration PP proposée par Pogosov *et al.* similaire à celle obtenue pour $f = 1$. Ceci permet d'illustrer le fait que lorsque les billes sont trop distantes (ici la distance moyenne est $2,58 \text{ mm} \simeq 5\lambda$), il n'est pas possible de développer des domaines homogènes si la force de cohésion apportée par le piégeage n'est pas assez élevée. Signalons toutefois que lorsque le piégeage est fort, les domaines sont de taille importante⁷, ce qui indique que la répulsion entre billes ne peut malgré tout être tenue pour négligeable (car sinon le coût d'une paroi de domaines serait faible). Il semble donc qu'il soit plus délicat de faire exister la phase PP, qui présente des billes hors pièges, lorsque la distance entre billes est trop grande. Ce résultat peut être interprété comme une conséquence de la disparition de l'effet de cage : lorsque les billes sont piégées, elles favorisent le piégeage de leurs voisines, mais dès que certaines arrivent à se dépiéger, et sont donc plus mobiles, cet effet coopératif est perdu. La phase PP est alors plus difficile à établir.

Cas du sur-remplissage ($f = 2$)

La configuration de piégeage total⁸ pour $f = 2$ unanimement reportée dans la littérature est une configuration en réseau carré constituée de particules piégées tandis que la seconde moitié des particules sont situées au centre des carrés définis par les pièges (voir figure 7.5). Cette configuration, prévue numériquement par Reichhardt *et al.* [152], est observée dans des réseaux de vortex par Harada *et al.* [21] et Grigorenko *et al.* [23]. Dans de tels systèmes, le piégeage peut toutefois être parfois suffisamment fort pour que chaque piège attire chacun deux vortex [22, 24]. En un sens, cette situation est semblable au cas des particules colloïdales étudié par Brunner *et al.* [155], qui observent, pour un facteur de remplissage $f = 3$, des trimères localisés autour des pièges, la taille des trimères étant inférieure à la distance entre les pièges. Des simulations basées sur une interaction interparticules coulombienne écrantée et sur un potentiel de piégeage si-

⁶Signalons que dans ces travaux, la configuration PP est appelée "cristal flottant".

⁷Voir la section 7.2.2.

⁸C'est-à-dire telle que tous les pièges soient occupés.

nusoïdal permettent de rendre compte de cette situation où finalement ne subsiste aucune particule interstitielle, c'est-à-dire de particule non clairement associée à un piège. Il n'est pas clair toutefois si ceci est dû à une forte intensité de piégeage ou bien au fait que dans une modélisation sinusoïdale, les pièges aient un bassin attracteur fortement étendu. Le dispositif de piégeage de particules colloïdales proposé par Mangold *et al.* [157] permet cependant d'obtenir la configuration TP pour $f = 2$ ou 4 ⁹.

Dans nos conditions expérimentales, avec un pas de réseau de pièges $d_2 = \sqrt{2}d_0$, donc une densité en billes identique à celle du cas $f = 1$ étudié précédemment, nous n'observons pas la configuration TP, quelle que soit la valeur de η_V ¹⁰. Jusqu'à $\eta_V \simeq 0,11$, nous observons sur l'ensemble du système la configuration reportée sur la figure 7.4.

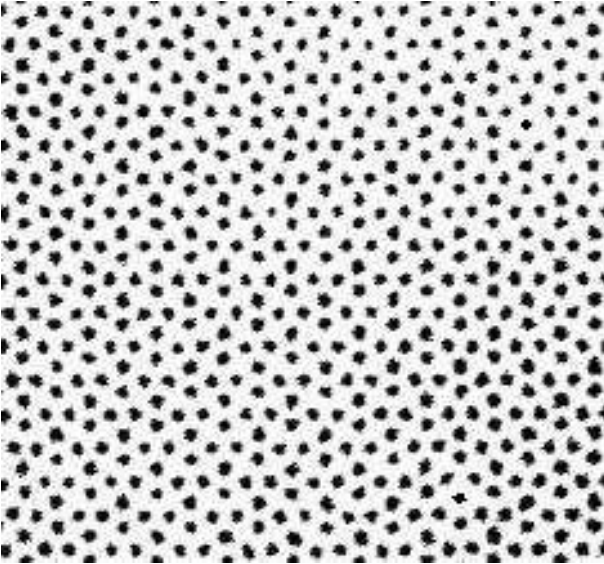


FIG. 7.4 : *Trajectoires autour de la position d'équilibre sur un temps court des billes dans la configuration PP avec $f = 2$, $\eta_V = 0,25$.*

Cette configuration, qui peut sembler à première vue désordonnée, présente en réalité une symétrie d'ordre 4 et peut être considérée comme une configuration PP, en ce sens que malgré l'excédent de particules, seul un piège sur deux est réellement occupé. Comme schématisé sur la figure 7.5, la configuration observée peut être obtenue à partir de la configuration TP en imaginant que deux billes interstitielles proches d'un piège sont attirées par ce piège et en chassent la bille qui s'y situait. Elles forment alors un trimère stabilisé par l'attraction du piège. La géométrie du réseau obtenu est particulièrement étonnante. En effet, la coordinence de toutes les particules est alors 5, comme le révèle le diagramme de Voronoï, et les cinq voisines d'une particule sont toutes situées à égale distance, comme dans un réseau hexagonal : comme le montre la figure 7.2(b), la distribution des distances entre plus proches voisines est une unique gaussienne centrée sur

⁹De manière générale, pour f entier inférieur à 10, les configurations TP consistent en un réseau ordonné au moins dans une direction, d'après [152].

¹⁰En réalité, pour des valeurs extrêmes de η_V (proches de 4), nous avons pu apercevoir la configuration TP, mais avec ces valeurs, les claquages entre les deux parties de la plaque ITO sont fréquents et celle-ci se détériore.

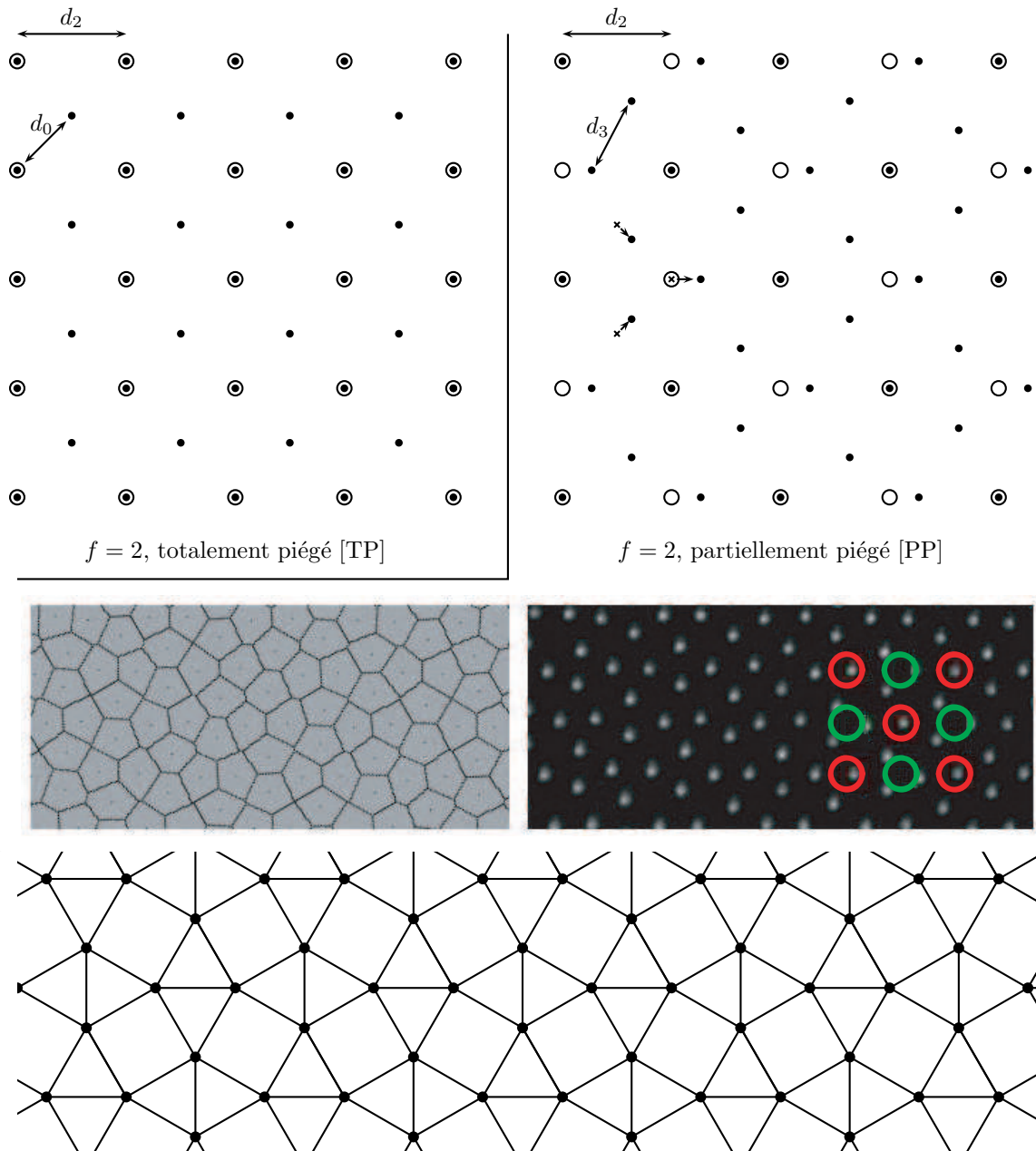


FIG. 7.5 : Configurations TP et PP pour $f = 2$. Pour la configuration TP : schéma de principe. Pour la configuration PP : schéma de principe, diagramme de Voronoï et image réelle correspondante, schéma de triangulation. Dans l'image réelle, les cercles rouges repèrent des pièges occupés, alors que les cercles verts distinguent les pièges attirant un trimère.

la distance $d_3 = d_2 / [\sqrt{2} \cos(\pi/12)] = 1,76$ mm. La transformée de Fourier du réseau, conforme à la transformée théorique (notamment du point de vue de l'extinction des raies $(0,p)$ et $(p,0)$, p impair) confirme cette mesure. Comme dans une configuration carrée ou une configuration hexagonale, nous sommes en présence d'une configuration où toutes les cellules de Voronoï sont identiques. En l'occurrence ici le plan est idéalement pavé par des

pentagones non réguliers.

Cette configuration illustre clairement la nécessité de trouver un équilibre entre l'énergie de piégeage et l'énergie élastique : en dépiégeant une bille sur deux, la coordonnée est augmentée et la distance d_3 entre billes voisines augmente et s'approche de la distance $a_0 = 1,82$ mm qu'aurait le cristal hexagonal en l'absence de piégeage. Notons dès à présent, que l'existence de cette configuration n'est possible que lorsqu'un piège est capable d'attirer effectivement plus d'une particule, donc qu'il a un bassin attracteur suffisamment large et profond. Dans les systèmes colloïdaux étudiés dans [155], cette attraction est telle que toutes les particules sont attirées dans un piège formant, dans le cas $f = 2$, un réseau de dimères de taille bien inférieure au pas du réseau.

7.2.2 Dégénérescence des configurations

À l'exception de la configuration TP pour $f = 1$, les configurations présentées ci-dessus présentent une dégénérescence liée aux différentes possibilités de position ou d'orientation de la surstructure de billes. Ainsi, la configuration PP pour $f = 1$ et la configuration TP pour $f = 1/2$ présentent une dégénérescence d'ordre 2, respectivement orientationnelle et positionnelle. Comme illustré sur la figure 7.6, ceci conduit à la création dans le système de domaines homogènes.

Dans de tels cas, les questions principales sont d'une part, de définir si la structure en domaines est stable dans le temps, et d'autre part, si la réponse est positive, de définir les paramètres influençant sur la taille et la forme des domaines. Comme nous le rappelons dans le chapitre suivant, dès lors que la température n'est pas trop élevée, la structure en domaines, une fois établie, est beaucoup plus stable, par exemple, que la structure avec le domaine désorienté obtenue au cours du processus de cristallisation (chapitre 4). Le piégeage favorise donc la stabilité des domaines.

La taille de ces domaines ne résulte pas des contraintes imposées par les bords, car il est à noter que dans les deux cas discutés aucune des deux réalisations de la configuration n'est favorisée par l'orientation par rapport aux bords. De fait, nous observons autant de domaines d'un type que de l'autre. En revanche, nous constatons clairement que la taille des domaines augmente lorsque le potentiel V augmente. L'augmentation de la répulsion entre les billes favorise donc l'émergence de domaines de grande taille. Ceci est cohérent avec les observations de Grigorenko *et al.*, qui montrent que, dans un réseau de vortex, l'apparition de domaines bien identifiés est conditionnée à l'existence d'une interaction de longue portée. Ces auteurs notent également que la forme et le nombre de domaines dépendent des excédents ou déficit locaux en particules, qui permettent de produire des frontières. De tels écarts au rapport de remplissage parfait pouvant être absorbés dans notre système au niveau des toutes premières couches près des bords, nous n'aborderons pas ici cette question plus précisément. Compte-tenu de ces dépendances, le

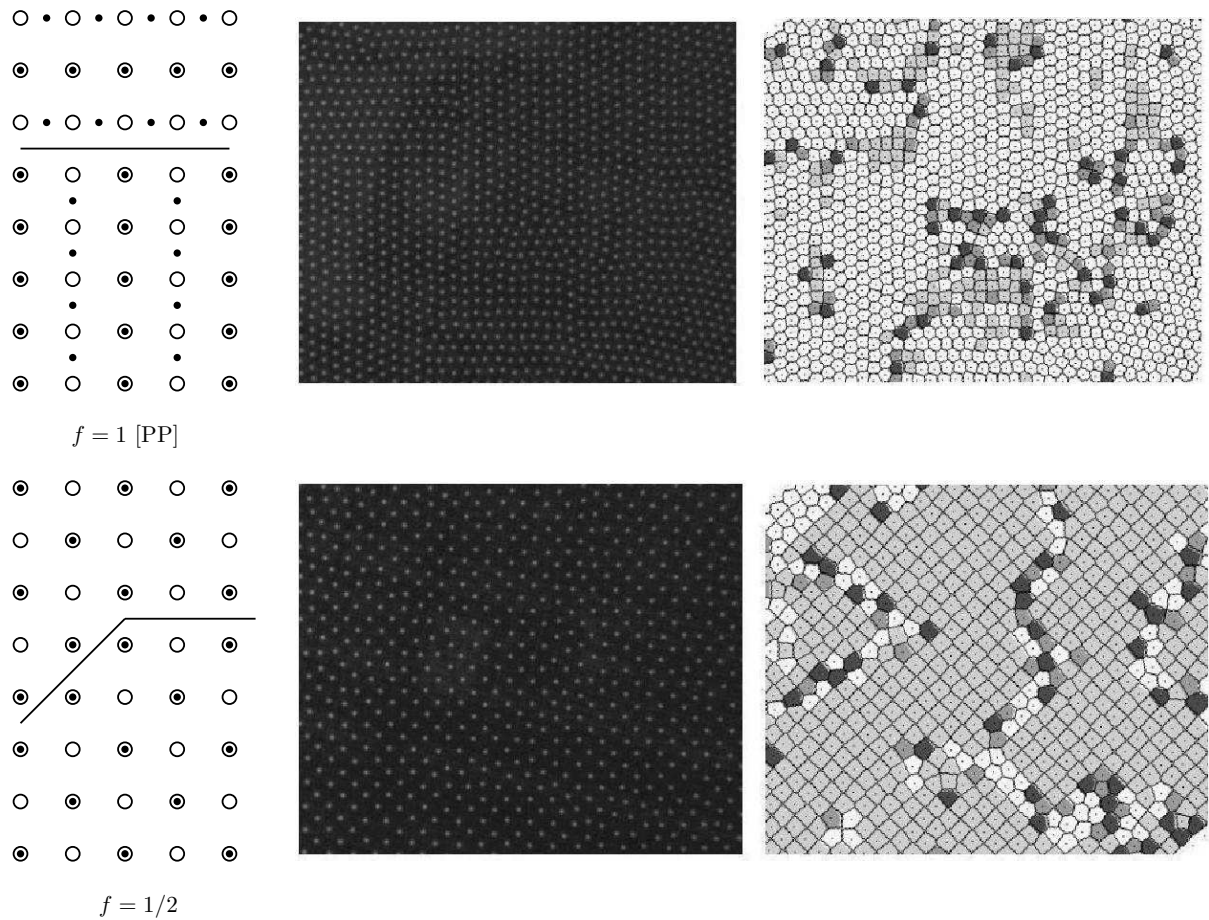


FIG. 7.6 : Schéma de principe, image réelle et diagramme de Voronoï correspondant représentant des domaines ordonnés induits par la dégénérescence des configurations PP en $f = 1$ et TP en $f = 1/2$. Dans les réseaux de vortex, la structure en domaines de la configuration $f = 1/2$ a été observée par Field et al. [24].

système peut présenter plusieurs configurations de quasi-équilibre final, la forme comme la taille des domaines dépendant également de l'historique de la cristallisation en un réseau piégé. Du fait de cette multistabilité, les systèmes peuvent présenter une dynamique plus riche qu'en absence de dégénérescence, les frontières entre domaines étant des lieux où les particules sont plus mobiles et peuvent permettre une meilleure adaptation à une contrainte extérieure. Le chapitre suivant nous permettra de présenter quelques aspects de la dynamique des particules au niveau de ces frontières.

La configuration PP pour $f = 2$ présente également une forte dégénérescence, car en plus du choix du sous-réseau de pièges qui va être occupé, le trimère centré sur un piège du sous-réseau complémentaire peut prendre quatre orientations différentes. Ceci peut conduire à la création d'un grand nombre de domaines (de l'ordre d'une dizaine dans tout le système), séparés par des frontières dont la dynamique sera étudiée au chapitre suivant.

7.2.3 Effets de la température

L'équilibre trouvé à basse température dans les réseaux piégés peut être remis en cause lorsque la température s'élève, et ce bien avant la phase liquide. Globalement, l'effet principal est un effet de dépiégeage semblable à celui obtenu lorsque l'intensité du piégeage diminue, l'ordre dû à l'élasticité du système étant conservé. Ainsi, un diagramme de phases TP/PP/Liquide avec pour paramètres la température et l'intensité du piégeage a été établi numériquement par Reichhardt *et al.* [164] pour des vortex dans le cas $f = 1$. D'après leurs résultats, en-deçà d'une certaine intensité de piégeage, l'augmentation de la température du système en configuration TP se traduit d'abord par l'apparition de la configuration PP avant la fusion. Ce résultat semble assez général quel que soit le rapport de remplissage [165]. Lorsque l'intensité du piégeage est forte, le dépiégeage a lieu à une température telle que l'ordre induit par l'élasticité est également brisé. Si l'intensité du piégeage est plus faible, une "phase flottante" toujours ordonnée peut exister avant que le système n'entre dans la phase liquide. On voit donc que les deux types d'interaction (interaction entre particules et forces de piégeage) tendant à instaurer l'ordre dans le système ne sont pas égales devant l'agitation thermique. Cette dernière agit individuellement sur les particules et contrebalance plus facilement l'interaction de piégeage, qui comme elle peut être vue essentiellement comme une force agissant indépendamment sur chaque particule, que les forces de cohésion élastique, qui relèvent d'un effet collectif. Ceci illustre une nouvelle fois le subtil équilibre qui se fait entre les forces élastiques et les forces de piégeage : si ce sont ces dernières qui imposent les positions des particules, c'est bien la cohésion élastique qui permet d'obtenir une configuration ordonnée à partir des motifs "proposés" par le réseau de pièges.

Expérimentalement, nous n'observons pas clairement de phase PP dépiégée par agitation thermique pour $f = 1$ (et encore moins pour $f = 1/2$, où les liaisons sont faibles et l'ordre est principalement assuré par le piégeage) : si la coordinence est globalement augmentée, la dégénérescence de la structure PP joue visiblement un rôle important à cette température, car nous observons de nombreux petits domaines. Si l'on ajoute à cela l'augmentation de l'excursion individuelle de chaque particule, nous pouvons expliquer ainsi les difficultés à observer une phase PP nette.

À basse température et dans les mêmes conditions que celles permettant d'obtenir une phase TP pour $f = 1$, nous observons déjà une phase PP pour $f = 2$. Nous pouvons donc nous attendre à ce qu'il soit plus aisé d'obtenir un cristal flottant. C'est effectivement le cas, pour une température de l'ordre de $13 \cdot 10^{11}$ K un cristal flottant tel que celui obtenu pour η_V très faible et calé sur les bords du cadre de confinement est obtenu pour η_V situé entre 0,11 et 0,30, alors que pour ces valeurs et pour une température de l'ordre de $5 \cdot 10^{11}$ K la structure PP est clairement établie.

Lorsque le système se présente sous la forme d'un cristal flottant, les outils descriptifs utilisés jusqu'à présent ne suffisent plus pour le distinguer du cristal non perturbé. La

mesure des écarts au cristal parfait nécessite l'utilisation des paramètres d'ordre orientationnel et translationnel, qui sont les outils de base dans l'étude des réseaux faiblement piégés. Nous donnons un aperçu de l'utilisation de telles mesures en conclusion de notre travail¹¹.

7.3 Configurations d'équilibre et profils des pièges

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la description complète des pièges ne peut être obtenue simplement en mesurant l'excursion d'une particule seule.

Parallèlement, nous venons de voir que même dans des cas simples de remplissage 1 ou 2, différentes configurations d'équilibre peuvent être favorisées selon la valeur de l'intensité relative du piégeage $\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_0$, proportionnelle à η_V . Un autre paramètre influant sur les configurations, non discuté dans la section précédente, est la forme et la portée des pièges : intuitivement, nous pouvons concevoir que l'élargissement du bassin attracteur d'un piège permet d'attirer plusieurs particules et d'obtenir des configurations telles que le cristal de trimères observé dans les systèmes colloïdaux [155] ou la configuration PP de notre système pour $f = 2$. En effet, si le bassin n'est pas assez large, les particules doivent énormément se rapprocher du centre du piège pour "profiter" d'un abaissement de leur énergie, mais alors la répulsion entre particules empêche la présence de plus d'une d'entre elles aux abords du piège : une configuration TP est alors préférable.

Aussi, le fait que nous observons toujours la configuration PP pour $f = 2$, et l'observation d'une transition entre les configurations TP et PP pour $f = 1$ selon les valeurs de η_V suggère que le bassin attracteur des pièges est large, ainsi que le laissait présager le profil de $\mathcal{E}_p(\mathbf{r})$ esquissé au chapitre précédent. L'analyse de ces configurations doit donc nous permettre d'une part d'évaluer les valeurs possibles de la largeur de nos puits, et d'autre part d'estimer la relation de correspondance entre η_V , le paramètre de contrôle de l'intensité relative du piégeage, et le rapport des intensités $\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_0$.

Une telle évaluation suppose toutefois de faire une hypothèse sur la fonction décrivant le potentiel. Du fait de la présence des deux électrodes horizontales, nous avons vu lorsque nous avons déterminé l'interaction entre les billes qu'il apparaît nécessairement une gran-

¹¹Une autre manière, plus indirecte, de mesurer les écarts à un cristal non perturbé, et ainsi de se convaincre que l'effet des pièges n'est pas nul, est de s'intéresser au processus de cristallisation à partir d'une phase désordonnée tel que présenté au chapitre 4. Nous avons constaté en effet que la vitesse d'effondrement du domaine interne désorienté diminue lorsque η_V augmente : le déplacement des dislocations formant l'interface entre les deux domaines est rendu plus difficile par le piégeage. Si l'on considère l'objet 1D que constitue l'interface, une telle dynamique rentre dans la catégorie des problèmes de piégeage de lignes élastiques, connexe à la problématique du piégeage de réseaux. Les questions de l'avancée d'une interface liquide-air sur un substrat désordonné [166], ou d'une paroi entre deux domaines ferromagnétiques dans un cristal non parfait [167], appartiennent à cette problématique.

leur caractéristique dans la résolution des problèmes électrostatiques basés sur ce dispositif. Une hypothèse raisonnable est donc de considérer que les énergies potentielles de piégeage deviennent négligeables au delà d'une certaine longueur. Dans la référence [151], Pogosov *et al.* utilisent deux tels profils de potentiel pour établir le diagramme de phase pour $f = 1$ entre les configurations TP, PP, et le cristal flottant. Les profils gaussiens et paraboliques tronqués utilisés sont définis respectivement par :

$$\mathcal{E}_g(r) = -\mathcal{E}_p \exp[-r^2/(2\sigma^2)] \quad (7.1)$$

$$\mathcal{E}_{pt}(r) = \begin{cases} -\mathcal{E}_p[1 - r^2/\sigma^2] & \text{si } r < \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.2)$$

Dans les deux cas, les deux paramètres de contrôles sont l'intensité \mathcal{E}_p et la portée σ , qui sont indépendants.

Connaissant l'interaction interbilles et la distance entre les pièges, nous pouvons établir les domaines d'existence des configurations PP et TP pour $f = 1$ et $f = 2$ à partir de ces deux modèles de profils¹², en fonction des deux paramètres \mathcal{E}_p et σ . Ces domaines sont déterminés en calculant l'énergie totale par unité de surface du système, prenant en compte l'interaction de toutes les billes avec tous les pièges et de toutes les billes entre elles. Les deux interactions étant négligeables au delà d'une certaine distance, cette énergie se calcule aisément en tronquant la sommation sur les paires à un rang suffisant.

Pour le cas $f = 1$, nous avons calculé l'énergie par unité de surface \mathcal{E}_S de toutes les configurations intermédiaires entre la configuration TP (que l'on peut voir comme la configuration PP avec $\alpha = 0$) et la configuration PP avec $\alpha = 0,5$. Pour chaque couple (σ, \mathcal{E}_p) , le tracé de la fonction $\mathcal{E}_S(\alpha)$ permet de déterminer les configurations stables puis parmi elles celle d'énergie minimale. Nous obtenons ainsi, dans l'espace (σ, \mathcal{E}_p) , le diagramme d'existence de chaque configuration.

Plus précisément, pour les deux potentiels de piégeage \mathcal{E}_g et \mathcal{E}_{pt} , la fonction $\mathcal{E}_S(\alpha)$ présente un unique minimum dans l'intervalle $[0; 0,5]$, quelle que soit la valeur du couple (σ, \mathcal{E}_p) ¹³. Pour une valeur de σ pas trop élevée (voir ultérieurement le diagramme de phase complet), la position de ce minimum reste en 0 pour toute valeur suffisamment élevée de \mathcal{E}_p , puis se déplace continûment de 0 à 0,5 lorsque \mathcal{E}_p diminue, et est de nouveau constamment en 0,5 quand \mathcal{E}_p achève sa décroissance vers 0. Toutefois, la transition entre les deux valeurs extrêmes de α est très différente selon le modèle de pièges : dans le modèle parabolique, \mathcal{E}_p varie d'un facteur 10 le long de cette transition, alors que dans le modèle

¹²Nous avons donc supposé, en première approximation, que le profil de nos pièges est isotrope.

¹³Ceci est un résultat fort : il signifie en particulier que dans les conditions où une configuration PP est privilégiée, la configuration TP ne correspond même pas à un minimum local d'énergie. On peut ici de nouveau invoquer le fait que le cisaillement est relativement aisé dans un réseau carré : seul un piégeage suffisamment fort peut l'éviter.

gaussien la transition est quasiment discontinue¹⁴ : la variation de \mathcal{E}_p ne dépasse pas 1% entre sa plus petite valeur pour laquelle α vaut 0 et sa plus grande valeur pour laquelle α vaut 0,5. Comme nous observons clairement une phase PP avec α de l'ordre de 0,4, et ce pour plusieurs valeurs de η_V , nous pouvons supposer à ce stade que la description par un potentiel parabolique tronqué convient mieux pour notre dispositif de pièges.

Pour le cas $f = 2$, nous avons également calculé le profil de \mathcal{E}_S pour toutes les configurations intermédiaires entre la configuration TP et la configuration PP lorsque les billes ayant changé de position se déplacent rectilignement entre leurs positions initiales et finales, comme indiqué par les flèches sur la figure 7.5. Pour les deux profils proposés et pour toute valeur de (σ, \mathcal{E}_p) , la fonction \mathcal{E}_S présente deux minima de position fixe, qui correspondent bien à la configuration TP théorique et à la configuration PP observée. En revanche, les hauteurs de ces deux minima varient avec les valeurs de (σ, \mathcal{E}_p) et déterminent la configuration qui est favorisée. La transition entre les deux configurations est donc discontinue¹⁵.

À partir des déterminations des minima de \mathcal{E}_S , nous pouvons donc déterminer les lignes de transition et le diagramme des configurations favorisées dans l'espace (σ, \mathcal{E}_p) . Les diagrammes de phase entre les configuration TP et PP ($\alpha = 0, 5$) ainsi obtenus sont présentés sur la figure 7.7. Signalons que ne présenter que les configurations TP et PP ($\alpha = 0, 5$) est correct pour le modèle gaussien, vu que les autres configurations ne sont quasiment jamais favorisées. En revanche, dans le cas du modèle parabolique, la transition entre ces deux configurations est continue et la ligne de transition est en fait une ligne épaisse à l'intérieur de laquelle les configurations privilégiées sont les configurations PP ($\alpha \neq 0, 5$). Pour des raisons de lisibilité, nous ne présentons ici que la ligne "centrale" de la zone de transition, correspondant à la ligne d'existence de la configuration PP ($\alpha = 0, 33$), qui est observée dans notre système lorsqu'on est proche de la transition, et sur laquelle les énergies des configurations TP et PP ($\alpha = 0, 5$) sont égales.

Les lignes de changement de phase ont le même comportement général pour les deux rapports de remplissage et pour les deux profils de pièges, identique à celui déterminé par Pogosov *et al.*¹⁶. Pour de faibles valeurs de σ , la ligne de transition est quasiment

¹⁴Cette remarque avait déjà été faite par Pogosov *et al.*, qui ne relèvent pas, en revanche, la continuité de la transition dans le cas d'un piégeage parabolique.

¹⁵Il est manifeste que l'étude proposée ici n'est que partielle puisque nous ne nous focalisons que sur une infime partie des configurations possibles, à l'inverse du cas $f = 1$ pour lequel les configurations "raisonnables" sont moins nombreuses. La discussion menée ici n'a de sens que parce qu'elle se base sur les observations réalisées et n'a donc pas vocation à établir le diagramme de phase théorique complet, comme cela pourrait être fait numériquement.

¹⁶Nous ne pouvons pas, toutefois, comparer les valeurs numériques car leur calcul a été mené avec un pas entre pièges $d_0 = \lambda$ alors que nous avons ici $d_0 \simeq 3,5\lambda$. Signalons par ailleurs que nous n'avons pas fait figurer le domaine d'existence du cristal flottant, situé à l'intérieur du domaine d'existence de la configuration PP, pour les petites valeurs de l'intensité de piégeage.

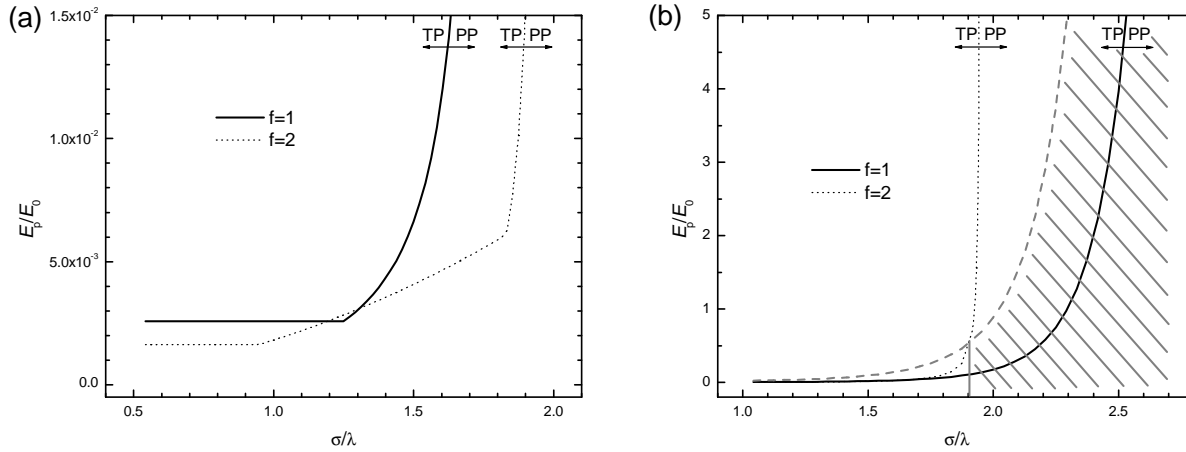


FIG. 7.7 : Diagrammes de phase des configurations TP et PP pour les systèmes $f = 1$ et $f = 2$, en fonction de l'intensité relative de piégeage $\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_0$ et de la portée σ d'un piège mesurée en unité de λ . (a) : profil de piège parabolique tronqué ; (b) profil de piège gaussien : la zone grisée désigne la zone effectivement accessible en modifiant η_V . Elle est limitée supérieurement par la courbe grise en pointillés, obtenue en multipliant par 4 l'intensité le long de la courbe de changement de phase pour $f = 1$.

horizontale (mais située à une hauteur non nulle) : l'existence de la phase PP ou de la phase TP est surtout contrôlée par l'intensité du piégeage. Puis, lorsque σ augmente le comportement de la ligne se modifie radicalement pour finalement croître fortement et quasiment admettre une asymptote verticale dans le cas $f = 2$. Ce diagramme se comprend aisément : lorsque la largeur du piège augmente, il est plus facile pour une bille de s'éloigner du centre du piège (pour minimiser l'énergie élastique de déformation) tout en restant dans son bassin et donc ne pas payer un coût trop élevé en énergie de piégeage. Si on veut néanmoins favoriser la configuration TP, il faut donc augmenter l'intensité du piégeage pour élever ce coût. Pour $f = 2$ le raisonnement est plus subtil puisque l'on doit raisonner en faisant intervenir plusieurs billes : le coût payé par la bille quittant le piège pour permettre le passage en configuration PP est compensé par les billes s'en approchant. Dès lors que le piège est suffisamment étendu pour contenir ces trois billes, la composante de l'énergie associée au piégeage reste donc quasiment identique entre les deux configurations, et ce pour toute intensité. La configuration choisie est alors celle permettant de minimiser l'énergie élastique, à savoir la configuration PP, quelle que soit l'intensité du piégeage.

Ces diagrammes théoriques établis, nous pouvons les exploiter pour déterminer le modèle de piège qui convient le mieux pour décrire notre système puis évaluer ses paramètres caractéristiques. Rappelons tout d'abord que les paramètres \mathcal{E}_p et σ ont ici

deux rôles dissymétriques. En effet, σ est une constante inconnue liée aux caractéristiques géométriques du système, tandis que \mathcal{E}_p varie dans les expériences présentées dans la section 7.2. \mathcal{E}_p peut donc aller de 0 à une valeur maximale imposée par le fait que η_V est borné.

Il faut alors noter une différence fondamentale entre les deux diagrammes présentés sur la figure 7.7 : les positions relatives des lignes de changement de phase pour $f = 1$ et $f = 2$ sont inversées. Or, pour toutes les valeurs de η_V accessibles et notamment celle permettant la transition entre les configurations PP et TP pour $f = 1$, nous n'observons pas de configuration TP avec $f = 2$, mais bien la configuration PP. Cette observation permet donc d'exclure le modèle parabolique et de privilégier le modèle gaussien. Si celui-ci ne permet pas de rendre parfaitement compte de notre observation d'une configuration PP avec $\alpha \simeq 0,4$, il prévoit tout de même une transition discontinue, qui est ce que nous observons à partir de la configuration PP ($\alpha \simeq 0,3$), qui transite directement vers la configuration TP.

Nous nous focalisons désormais sur le diagramme de phase correspondant à un piégeage gaussien. Nous pouvons alors affirmer que dans ce modèle et puisque nous n'observons jamais la configuration TP pour $f = 2$, la ligne de transition PP-TP pour $f = 1$ ne peut se trouver dans le domaine d'existence de cette configuration, et donc la portée σ de nos pièges est supérieure à $1,7\lambda$, abscisse du point où les deux lignes de changement de phase se croisent. Nous pouvons même être plus précis puisque non seulement nous n'observons pas de configuration TP à $f = 2$ au niveau de la transition PP-TP pour $f = 1$, à $\eta_V \simeq 0,15$, mais cette observation demeure également pour une valeur de η_V 4 fois plus grande ($\eta_V \simeq 0,6$, soit $\Delta V = 400$ V, $V_2 = 600$ V). Si on considère la ligne définie par la fonction $4\mathcal{E}_p(\sigma)$, $\mathcal{E}_p(\sigma)$ définissant la ligne de changement de phase pour $f = 1$, les valeurs de σ possibles pour notre système sont donc celles pour lesquelles cette ligne est dans le domaine d'existence de la configuration PP pour $f = 2$. Par conséquent, nous avons $\sigma \geq 1,9\lambda$. Par ailleurs, le fait que nous puissions observer, pour $f = 1$, la configuration TP, implique que σ est inférieur à la valeur marquant l'asymptote verticale de la ligne $f = 1$, soit donc $\sigma \lesssim 2,7\lambda$ ¹⁷.

Ainsi, à partir de l'observation des configurations observées pour $f = 1$ et $f = 2$, nous pouvons estimer que le profil des pièges est mieux décrit par un profil gaussien que par un profil parabolique tronqué. Dans ce modèle, la portée σ des pièges tels que nous les avons construits est comprise entre $1,9\lambda$ et $2,7\lambda$, soit entre 0,9 mm et 1,3 mm. Elle est donc plus grande que la taille des motifs définis sur l'électrode et comparable à la distance entre pièges que nous avons utilisée jusqu'à présent. La zone grisée délimitée sur la figure 7.7(b)

¹⁷On aurait pu espérer que le calcul de la ligne de changement de phase pour $f = 1/2$ fournisse une borne supérieure plus précise pour σ , du fait que nous n'observons jamais la configuration PP. Malheureusement, cette ligne est parallèle à la ligne pour $f = 1$, et est située à sa droite.

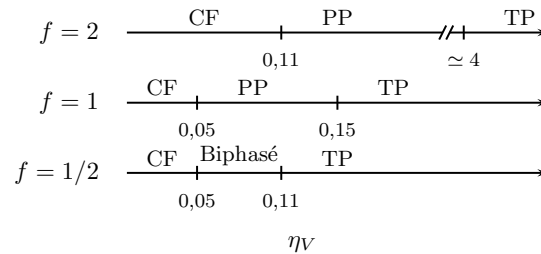
définit pour résumer les valeurs de l'intensité relative accessibles, l'intervalle dépendant de la valeur réelle de σ . Par ailleurs, la ligne de changement de phase pour $f = 1$, décrite pour $\eta_V = 0, 15$, permet de connaître la relation de proportionnalité entre η_V et $\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_0$.

7.4 Conclusion

Outre les informations précises obtenues dans les lignes précédentes sur la nature de l'interaction entre les billes et les pièges, les conclusions des résultats présentés dans ce chapitre se situent à deux niveaux.

D'une part, nous avons montré que notre dispositif permet de reproduire les différentes configurations d'équilibre totalement ou partiellement piégées prévues dans la littérature. Nous avons également mis en évidence à cette occasion une configuration partiellement piégée pour le rapport de remplissage $f = 2$ permettant de mettre en valeur un équilibre subtil entre trois particules en interaction répulsive attirées par un même piège. La possibilité de varier facilement l'intensité de piégeage permet de décrire ces différentes configurations. En modifiant la taille des pièges ou le pas du réseau, il serait possible de les obtenir dans d'autres conditions, ou d'obtenir celles que nous n'avons pu observer ici, telle la configuration TP pour $f = 2$ et la configuration PP pour $f = 1/2$.

Le fait de ne pas pouvoir observer cette dernière illustre le fait que quand les particules sont trop distantes, la cohésion élastique n'est pas assez forte pour permettre l'émergence d'une autre configuration qu'une configuration totalement piégée, et un état biphasé contenant des domaines en phase hexagonale flottante (CF) et d'autres en phase TP est préféré. Le schéma ci-contre récapitule les différentes configurations observées en fonction de η_V .



Nous avons également observé, dans le cas des configurations dégénérées, des domaines dont la taille dépend de l'interaction entre les particules.

Par ailleurs, l'observation des configurations d'équilibre dans les cas simples $f = 1/2$, 1 et 2 nous a permis d'acquérir indirectement une connaissance plus précise du profil de nos pièges, qui ne peut pas être déterminée analytiquement. La donnée de leur portée, la mesure de leur capacité à attirer plusieurs particules, sont autant de données importantes dans l'optique d'utiliser notre dispositif pour une étude de piégeage faible. Par exemple, dans le cas $f = 1/2$, le réseau de pièges choisi nous a permis de constater que lorsque les constantes élastiques du réseau sont faibles (à cause de l'éloignement des particules), un piégeage d'intensité même faible permet de distordre complètement le réseau et de créer

un grand nombre de défauts¹⁸. Il est donc certain que pour pouvoir nous placer dans une situation de piégeage faible la densité en billes doit être plutôt proche de celle utilisée pour les cas $f = 1$ et $f = 2$.

Les cas $f = 1/2$ et $f = 2$ nous procurent également une grille de lecture utile pour l'étude des réseaux de pièges aléatoires d'intensité plus ou moins forte. Dans tous les cas, et particulièrement si cette intensité n'est pas trop forte, de nombreuses particules se retrouveront nécessairement hors-pièges comme dans le cas $f = 2$. Mais il peut aussi se produire le cas, rencontré avec le rapport $f = 1/2$, où une particule peut avoir le choix de plusieurs pièges dans son voisinage. En ce sens, les systèmes $f = 1/2$ et $f = 2$ peuvent donc être considérés comme deux systèmes modèles relativement simples permettant d'isoler certains comportements génériques.

¹⁸Notons que dans les configurations TP pour $f = 1/2$ ou 1, la coordinence est 4 alors que dans les configurations PP, elle est 6 : la modification du réseau s'apparente donc plus à une légère déformation du cristal non perturbé.

Chapitre 8

Dynamiques des particules dans un réseau périodique de pièges

Sommaire

8.1	Introduction	153
8.2	Évolution vers la configuration piégée	155
8.2.1	Champs de déplacement	157
8.2.2	Évolution temporelle des coordinences	159
8.2.3	Résorption des domaines	163
8.3	Dynamique autour d'une position instable	163
8.3.1	Dynamique en frontière de domaines	163
8.3.2	Dynamique thermiquement activée	166
8.4	Conclusion	167

8.1 Introduction

L'étude des questions qui se posent au niveau de la dynamique des réseaux piégés présente pour nous un double intérêt.

En premier lieu, rappelons que si les configurations d'équilibre des vortex dans les réseaux de pièges rencontrent un vif intérêt, c'est surtout parce qu'elles sont le point de départ à une compréhension de la dynamique de ces vortex dans les réseaux¹, et des variations du courant critique associé au piégeage². L'augmentation du courant dans le matériau se traduit par l'augmentation de la force agissant sur l'ensemble du

¹Ou bien de la rentrée de nouveaux vortex dans le système lorsque le champ magnétique augmente [168].

²Notamment, il est établi que le courant critique est plus important pour des rapports de remplissage rationnels, pour lesquels les configurations sont donc mieux ancrées.

réseau de vortex. On distingue alors généralement trois phases successives, que l'on peut retrouver, bien entendu, dans d'autres systèmes connexes, mais aussi dans le cas d'un piégeage aléatoire : une phase statique, une phase de courant plastique caractérisée par le dépiégeage et le mouvement de portions du cristal alors que d'autres restent fixes, puis une phase de déplacement collectif uniforme³. La manière dont se déplacent les particules dans ces différentes phases conditionne le comportement des grandeurs macroscopiques, mais reste encore mal connue en dehors de la phénoménologie des mouvements collectifs.

Si nous pensons qu'à terme l'étude du déplacement des billes dans un paysage de pièges pourra être menée et apporter des informations directes sur ces déplacements, nous pouvons dès à présent établir quelques principes directeurs en exploitant les possibilités actuelles du dispositif.

Il est donc temps ici de préciser ce que nous entendons par le terme "dynamique" dans le titre de ce chapitre. Nous abordons en réalité ici trois types de dynamique.

Le déplacement d'un réseau tel que celui d'un réseau de vortex soumis à une force de dépiégeage, même sous température nulle, font intervenir des situations d'instabilité, que nous pouvons aborder sous deux angles.

D'une part, même en l'absence de force de dépiégeage, nous pouvons aborder la question du déplacement de la totalité du réseau en étudiant la manière dont le réseau atteint sa position d'équilibre à partir d'une position instable donnée et contrôlée (section 8.2). La propension du système à favoriser des déplacements collectifs corrélés plutôt que des mouvements individuels indépendants peut ainsi être estimée.

D'autre part, en dehors du cas idéal du cristal parfaitement piégé et donc parfaitement ordonné, nous rencontrons bien évidemment de nombreuses situations dans lesquelles quelques billes se retrouvent en dehors des centres de piégeage, soit parce qu'elles sont excédentaires, soit du fait de l'absence d'une voisine leur donnant la possibilité de "choisir" entre deux positions. Cette deuxième question associée à la dynamique d'une particule due à son instabilité positionnelle est d'importance lorsqu'on s'intéresse au déplacement d'un réseau entier. À moins que ce déplacement se fasse de manière parfaitement coordonnée et d'un seul bloc, l'arrivée d'une particule ayant quitté son site (que ce soit un piège ou non) pour un site déjà occupé peut être vu comme un événement "élémentaire", dont la connaissance doit permettre de mieux comprendre la mécanique globale de déplacement, en particulier de valider ou invalider une hypothèse de déplacements individuels par rapport à une hypothèse de déplacement collectif coordonné. Du point de vue expérimental, les frontières délimitant les domaines dus à la dégénérescence d'une configuration de billes fournissent des situations intéressantes pour une telle étude. À la section 8.3, nous nous focalisons ainsi sur les mouvements dans les frontières des domaines de la configuration

³Voir par exemple [169] (pour $f \geq 1$) et [153,170] (pour $f \leq 1$) et références citées.

PP pour $f = 2$, qui offre l'intérêt de présenter à la fois des particules piégées et des particules interstitielles même si tous les pièges sont occupés.

Une troisième question est bien entendu la dynamique engendrée par l'augmentation de la température autour d'une position d'équilibre, ou encore d'une position instable telle que celles présentées ci-dessus. Notamment, la question de la fusion a été abordée numériquement dans des réseaux de vortex [164, 165] ou de particules colloïdales [171]. Pour notre part, la question de la fusion n'étant pas centrale dans notre travail, aussi dans ce qui suit nous n'évoquons les résultats afférents aux mouvements thermiquement activés que pour des températures basses, quand les effets thermique permettent essentiellement d'explorer le paysage énergétique environnant les particules.

Par ailleurs, les comportements collectifs et individuels que nous pouvons mettre en valeur sont autant d'informations permettant d'analyser nos résultats lorsque les manifestations du piégeage seront plus subtiles. De même, il est important d'estimer les temps de mise à l'équilibre des réseaux afin de distinguer ensuite ce qui relève du désordre du système à l'équilibre ou de l'absence d'équilibre.

Pour quantifier ces différentes dynamiques, nous pouvons visualiser les trajectoires des particules, mais aussi considérer les champs de déplacement entre un état initial et la configuration d'équilibre, ainsi que l'évolution des coordinences entre ces deux états.

8.2 Évolution vers la configuration piégée

Afin de recueillir des informations sur les mécanismes de déplacement des réseaux sans avoir à appliquer une force dépiégeante, nous considérons le processus de mise à l'équilibre d'un tel réseau à partir d'une configuration ordonnée mais non stable bien connue, plutôt qu'à partir d'une phase liquide.

La méthode adoptée est la suivante : nous préparons le réseau dans une phase ordonnée, en l'occurrence le cristal hexagonal ou le cristal carré fourni par la configuration TP de $f = 1$. La température est ensuite portée à 0, puis les potentiels V_1 et V_2 sont réglés de façon à obtenir le piégeage souhaité, les billes demeurant néanmoins dans la configuration initiale grâce aux frottements statiques. À $t = 0$, le système est porté à la température voulue et l'acquisition est lancée. En suivant ce processus, nous obtenons des situations initiales reproductibles et nous contrôlons la mesure du temps de mise à l'équilibre. Bien entendu, cette méthode ne prétend pas remplacer une expérience de mise en mouvement d'un réseau dans le paysage de pièges : à supposer qu'un tel mouvement puisse se décomposer en une phase de dépiégeage puis d'une phase de repiégeage dans les pièges suivants, nous ne pouvons ici qu'aborder la deuxième phase. Toutefois, le fait de passer d'une configuration ordonnée à une autre permet de comparer efficacement les situations initiales et finales

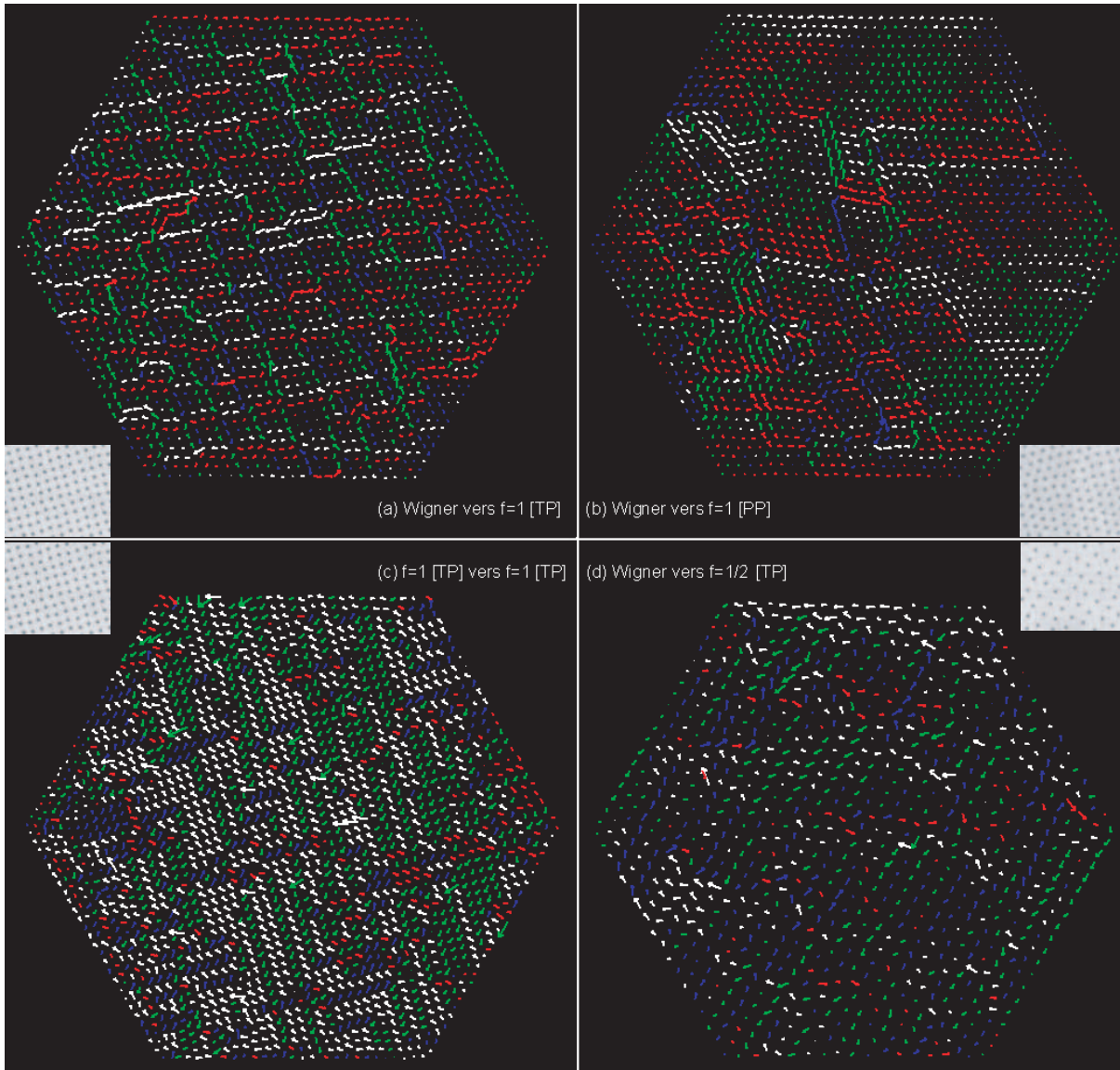


FIG. 8.1 : Champs de déplacement entre deux configurations ordonnées, à faible température. Les flèches de couleurs permettent de distinguer les particules s'étant déplacées dans la même direction (l'espace ayant été divisé en quatre quadrants). Les images insérées rappellent l'aspect et notamment l'orientation du cristal final. Pour la configuration PP (figure (b)), un extrait des deux types de domaines est présenté.

avec les mêmes outils, et de décrire de la même manière le chemin parcouru entre ces deux états.

La première des transitions que nous présentons est la transition entre le cristal de Wigner non perturbé de symétrie hexagonale et le réseau carré constituant la configuration TP pour $f = 1$, à des températures faibles (inférieures à $3 \cdot 10^{11}$ K). À partir de ce cas de base, nous pouvons modifier l'un après l'autre certains paramètres. Ainsi nous avons modifié l'état final en considérant la transition entre le cristal de Wigner et la configuration

PP de $f = 1$. L'étude de la transition entre deux réseaux carrés décalés⁴ permet d'évaluer l'impact sur les déplacements d'une compatibilité de symétrie entre le réseau initial et le réseau final. Enfin, nous avons modifié les orientations respectives du cristal de Wigner initial et du réseau carré initial en considérant la transition vers la configuration TP de $f = 1/2$. Changer le nombre de billes est en effet le moyen le plus simple de disposer de deux orientations différentes du réseau final. En effet, dans le cas $f = 1/2$, un des axes principaux du réseau TP final coïncide avec l'un des axes du réseau hexagonal, alors que dans le cas $f = 1$, les axes du réseau TP ont une désorientation de 15° au minimum⁵.

8.2.1 Champs de déplacement

Les champs de déplacement entre la configuration initiale et la configuration finale sont présentés sur la figure 8.1. Remarquons tout d'abord qu'à quelques ajustement près, les mouvements de chaque particule restent limités au voisinage proche : elle va aller occuper un des pièges immédiatement disponibles.

L'analyse de la transition carré \rightarrow carré (figure 8.1(c)) et Wigner \rightarrow carré ($f = 1/2$) (figure 8.1(d)) est de loin la plus simple : dans les deux cas, nous observons des mouvements quasiment identiques le long de lignes parallèles, l'alternance entre les différents types de mouvements se faisant toutes les une à trois lignes. Or, ces lignes parallèles correspondent à la fois à des axes cristallographiques des configurations initiales comme des configurations finales. Ainsi, nous pouvons conclure que lorsqu'une ligne de billes ayant la bonne direction existe déjà, le système choisit de conserver cette ligne et de la déplacer d'un bloc vers sa position finale. Dans le cas de la transition entre réseaux carrés, la symétrie est la même et le mouvement consiste simplement en un déplacement d'une demi-diagonale de carré. Le cas Wigner \rightarrow carré ($f = 1/2$) est encore plus instructif, car le système doit changer de symétrie : nous voyons qu'il choisit de cisailer le long des lignes déjà bien orientées. Ce résultat est semblable au comportement observé lors de la relaxation d'un réseau carré vers un réseau hexagonal, présenté à la section 4.3.2 : le cisaillement coordonné le long de lignes déjà formées est un mouvement facile à mettre en œuvre.

Lorsque les orientations du cristal initial ne correspondent pas aux orientations finales, la structure du champ de déplacement est plus complexe, comme nous pouvons le voir dans le cas Wigner \rightarrow carré ($f = 1$) (figure 8.1(a)). Elle consiste en une répétition régulière de domaines statiques de 4 à 9 particules environ en forme de parallélogrammes autour desquels une circulation plus importante peut être observée. Le long d'un côté

⁴Ceci est obtenu en inversant les potentiels V_1 et V_2 : les sites d'un des réseaux correspondent au centre des carrés élémentaires définis par les sites de l'autre.

⁵Voir la figure 6.5. Le réseau $f = 1/2$ est obtenu en considérant le réseau $f = 1$ où l'on a ôté une bille sur deux : il est donc tournée de 45° par rapport à ce dernier.

d'un domaine, la circulation se fait dans une même direction. Une analyse précise des bords des domaines montre qu'en moyenne, chacun a une orientation intermédiaire entre celle d'un axe du réseau carré final et l'axe du réseau hexagonal initial le plus proche⁶. Une analyse géométrique des deux réseaux montre que cette structure correspond à un choix de déplacement des billes vers le piège le plus proche. Nous avons superposé sur la figure 8.2 le réseau hexagonal initial avec le réseau de pièges imposant l'état final.

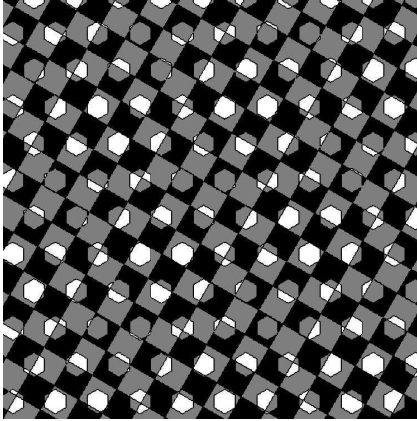


FIG. 8.2 : *Superposition d'un réseau hexagonal de billes (dont un axe principal est horizontal) et d'un réseau carré (dont un axe principal fait un angle de 15° par rapport à l'horizontale). Les billes sont représentées par une cellule deux fois plus petite que leur cellule de Voronoï, correspondant à une zone d'exploration moyenne à température finie en dessous de la température de fusion. Les zones blanches correspondent à l'intersection entre ces cellules et un piège du réseau carré. Elles définissent un réseau de zones comprenant une petite dizaine de billes, séparées par des lignes ayant une orientation intermédiaire entre les lignes principales du réseau carré et celles du réseau hexagonal.*

Ce schéma permet de constater que les domaines peu mobiles correspondent en effet à des billes situées non loin des pièges, et que les zones de circulation entre les domaines, qui ont bien l'orientation constatée expérimentalement, sont dues à des billes éloignées de ces pièges. La structure du champ observée est donc d'origine purement géométrique, avec une nouvelle fois une préservation des lignes à l'orientation proche des orientations finales, au niveau desquelles l'ajustement à la nouvelle symétrie se fait.

Enfin, dans le cas de la transition Wigner \rightarrow configuration PP ($f = 1$) (figure 8.1(b)), la dynamique est tout autre. Signalons toutefois que, les déplacements étant souvent peu marqués, le code couleur les catégorisant peut induire des idées fausses, notamment celle d'un déplacement par petits blocs. Il semble plutôt que le champ de déplacements soit constitué de plusieurs vortex autour d'une position fixe⁷. Notons que les symétries des réseaux initial et final sont très proches, et qu'en revanche les axes cristallographiques sont différents, à la différence de la transition carré \rightarrow carré : ainsi le mouvement de rotation permet de corriger l'orientation tout en gardant la structure hexagonale tout le long du processus.

⁶Les angles des parallélogrammes font alors en moyenne 75° et 105° .

⁷Rappelons que l'état final est dégénéré, ce qui complexifie la dynamique vers la position de quasi équilibre.

En conclusion, le point commun se dégageant de toutes ces observations est que les structures compatibles entre les deux configurations sont conservées, et l'ajustement se fait par translation ou rotation locale selon ce qui est nécessaire. Le système ne passe pas, par exemple, par une phase désordonnée à partir de laquelle la réorganisation s'opère⁸, ce qui correspondrait à un comportement décorréolé des particules.

8.2.2 Évolution temporelle des coordinences

Afin de préciser les temps caractéristiques des mécanismes d'ajustement, et mesurer en particulier les temps de mise à l'équilibre, nous nous intéressons dans cette section à l'évolution des coordinences des sites au cours du temps.

L'étude des transitions Wigner \rightarrow PP ou TP ($f = 1$) permet de considérer deux cas se distinguant par la modification ou non de la symétrie finale par rapport à la symétrie initiale.

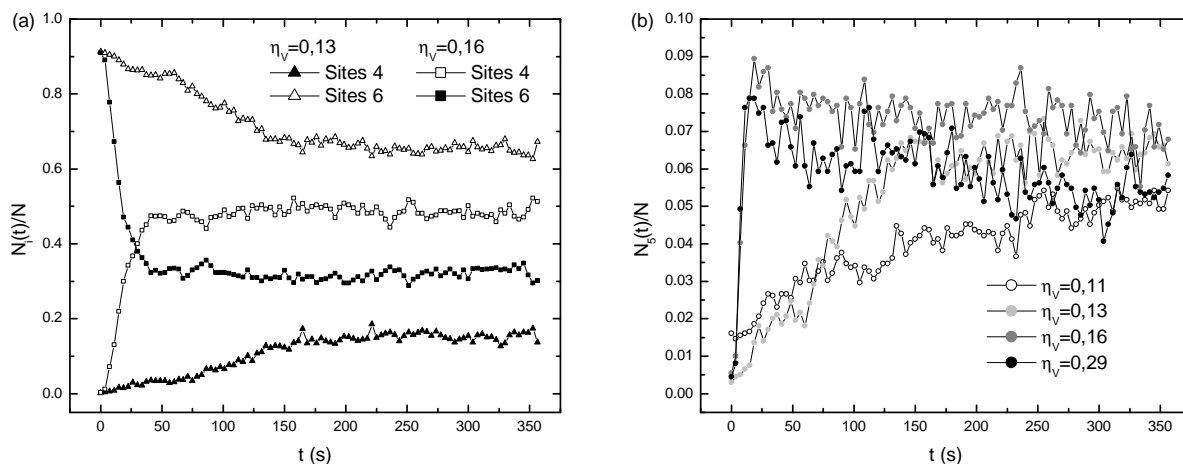


FIG. 8.3 : Évolution dans le temps de la proportion de sites de coordinence donnée N_i au cours de la transition Wigner \rightarrow ($f = 1$) pour différentes valeurs de η_V . $T = 3.10^{11}$ K. (a) : coordinences 4 et 6 ; (b) : coordinence 5 (dislocations).

Ordre général du système

Les évolutions de la proportion de sites de coordinence 4, 5 ou 6 au cours de la transition sont présentées sur la figure 8.3 en fonction du temps et pour différentes valeurs de η_V . Rappelons que le changement de phase entre les configurations PP et TP a lieu pour $\eta_V \simeq 0,15$. Lorsque l'état final est la configuration TP, soit celle ayant la symétrie la plus éloignée de la symétrie initiale, le nombre de site 4 augmente fortement dans un

⁸En ce cas, le champs de déplacement serait moins régulier.

premier temps (jusqu'à $T = 50$ s), puis se stabilise à une valeur constante. Pour des valeurs de η_V plus importantes que celle présentée, choisie car elle correspond à la limite du changement de phase, le nombre de site 4 final est plus important : le réseau carré est mieux établi. Les sites 6 résiduels correspondent ici essentiellement à l'ajustement sur les bords. En revanche, lorsque l'état final est la configuration PP, de symétrie plus compatible avec la symétrie initiale, le nombre de sites 6 baisse plus lentement vers sa valeur finale⁹ et reste plus important que le nombre de sites 4, présents à cause de la subsistance de petites fractions de piégeage fort, ainsi qu'à cause des frontières entre domaines (voir la figure 7.6).

Lorsqu'on regarde le nombre de sites 5, identique au nombre de dislocations car il existe peu de disclinaisons, la différence de comportement entre les deux configurations est également marquée de part et d'autre de la transition. Dans le cas de la configuration TP, le nombre de dislocations augmente brusquement jusqu'au temps $t = 25$ s, puis diminue lentement jusqu'à sa valeur finale. En revanche, pour la configuration PP, cette valeur finale, qui est identique et ne dépend pas de η_V , est atteinte directement après une croissance lente. Le fait que l'état final ne dépende pas de la tension montre par ailleurs que les dislocations résiduelles sont en majorité dues à l'ajustement des symétries sur les bords et aux fluctuations thermiques.

L'analyse de l'évolution dans le cas de l'état final PP est la plus simple : le comportement observé est cohérent avec l'analyse faite à partir du champ de déplacement ; le cristal se désoriente progressivement et de manière cohérente pour obtenir la bonne orientation finale. Ces rotations peuvent engendrer ponctuellement l'apparition de dislocations, qui demeurent néanmoins négligeables en nombre par rapport aux dislocations résiduelles finales.

L'analyse des évolutions pour la configuration TP a fait apparaître deux temps caractéristiques : la croissance du nombre de dislocations se poursuit jusqu'à $t = 25$ s, alors que l'état final pour les sites 4 n'est atteint qu'après 50 s. À $t = 25$ s, le nombre de sites 4 n'est qu'aux 2/3 de sa valeur finale, et ce quel que soit η_V , ce qui laisse supposer que la raison est d'ordre géométrique. L'analyse des champs de déplacements entre $t = 0$ s et $t = 25$ s puis après $t = 25$ s permet de mettre en valeur les deux mécanismes que ces deux temps suggèrent, ce que la simple considération des champs de déplacement de la figure 8.1(a) ne permet pas de faire. Ces champs sont présentés sur la figure 8.4.

Le champs de déplacement de la première phase ressemble fortement au champs de déplacement d'ensemble, en plus homogène. On y reconnaît la structure en parallélogrammes suggérée par la superposition des réseaux hexagonal et carré. Le diagramme de Voronoï de l'état final fait apparaître des domaines ayant la symétrie d'ordre

⁹Rappelons que dans la configuration PP parfaite, la coordinence des sites est 6.

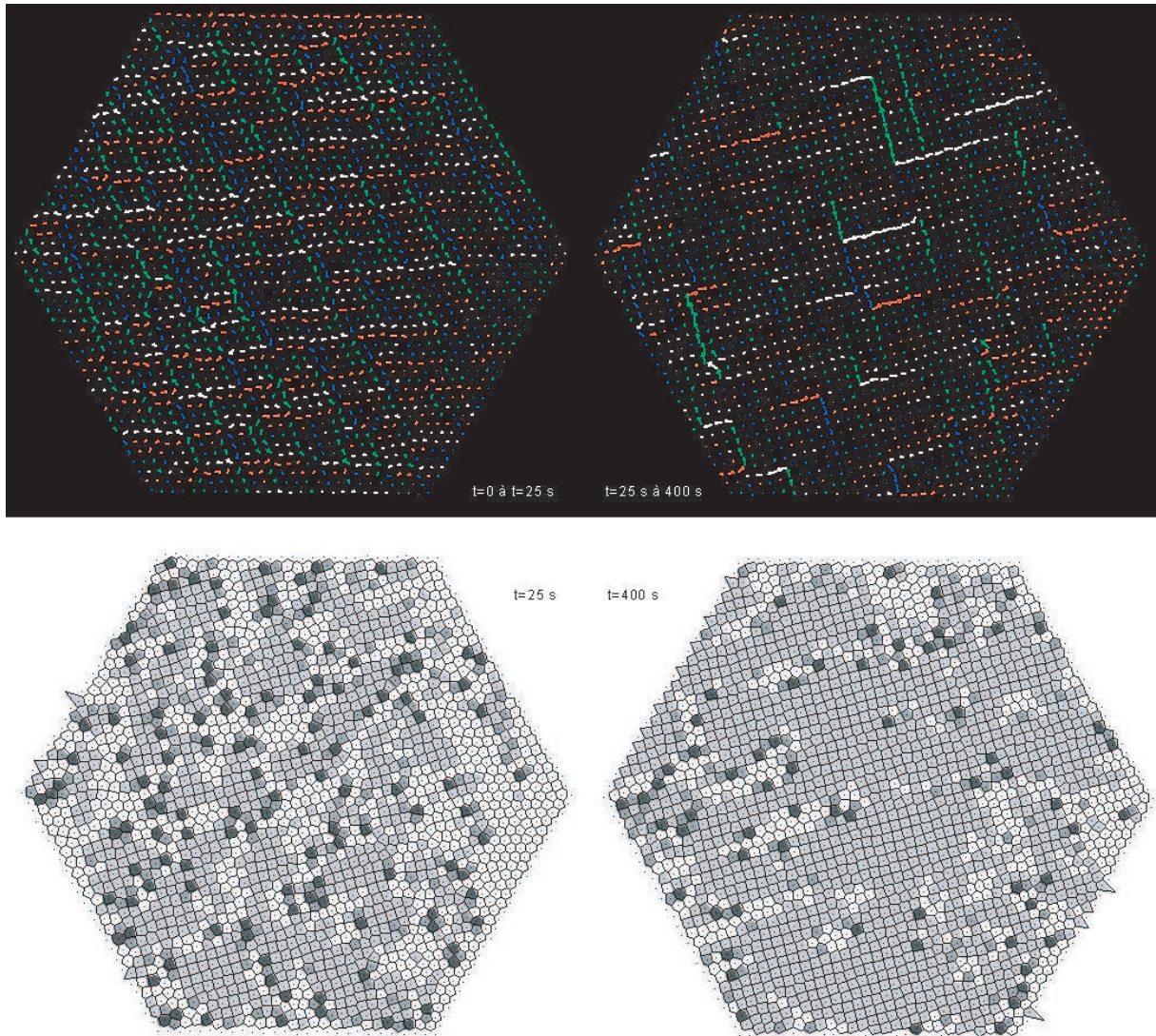


FIG. 8.4 : *Champs de déplacement intermédiaires de la transition Wigner \rightarrow TP ($f = 1$) et diagrammes de Voronoï correspondant aux deux états finaux de ces phases intermédiaires.*

4 séparés par des dislocations et quelques domaines ayant encore l'ordre 6 : toutes les billes n'ont pas encore trouvé leur place, et le nombre de dislocations a donc augmenté. La symétrie finale du système est toutefois installée.

Dans un deuxième temps, les dislocations sont évacuées par la réorganisation des billes hors sites de symétrie 4, le nombre de sites 5 baisse et le nombre de sites 4 peut atteindre sa valeur finale¹⁰. Il est à noter que dans cette phase le mouvement se fait selon les axes du réseau carré : il s'agit donc d'ajustements locaux à l'intérieur d'une configuration déjà établie, qui impose la direction de déplacements des billes hors sites.

¹⁰Notons que le nombre de billes hors sites est largement inférieur à $1/3$, puisque le bon placement de chacune d'entre elles modifie également la coordinence des billes voisines déjà en site.

Mouvements individuels

Si les réorganisations de billes hors sites à la fin de la première phase ($t = 25s$) contribuent pour $1/3$ au nombre de sites présentant une coordinence 4 dans l'état final, ils ne mettent pas en jeu un grand nombre de particules. En effet, si l'on considère la distribution des temps mis par chaque bille pour arriver dans son site final (figure 8.5), on constate que le temps moyen est de l'ordre de 10 s : la plupart des billes sont donc en site lorsque le nombre de sites 4 n'est qu'au tiers de sa valeur finale.

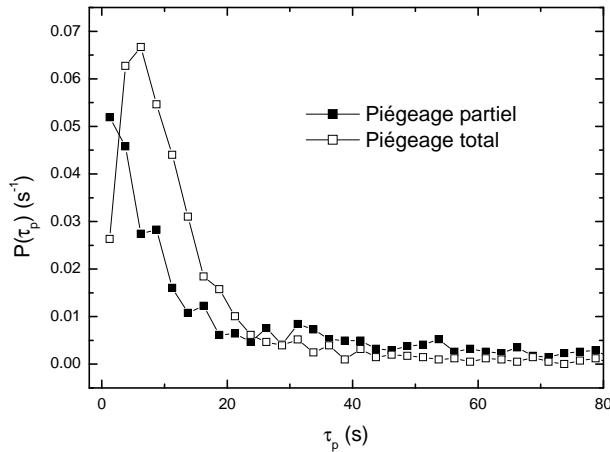


FIG. 8.5 : *Distribution des temps d'arrivée des particules dans leur site final pour les configurations PP ($\eta_V = 0, 11$) et TP ($\eta_V = 0, 33$) pour $f = 1$. Le temps est pris lorsque la bille a parcouru 80% de son chemin total. Le temps d'arrivée moyen dans les deux configurations est de l'ordre de 10 s.*

Ainsi, les temps caractéristiques individuels sont inférieurs aux temps caractéristiques de l'ensemble du cristal : un faible nombre de particules hors sites suffit à altérer considérablement l'ordre dans le système.

On peut voir également une différence dans les deux distributions, à savoir que dans le cas de la configuration TP, le maximum n'est pas en 0. On peut interpréter la distribution pour la configuration PP par le fait que le mouvement à réaliser étant essentiellement une rotation du cristal, la distribution des distances entre les positions initiales et les positions finales est uniforme, et donc la distribution est une loi de Poisson similaire à la distribution de probabilité d'arrivée d'une bille seule dans un piège. Dans le cas de la configuration TP, le scénario en deux temps nous a suggéré un mécanisme plus complexe, et l'on peut interpréter la distribution au maximum décalé comme une marque de l'importance des mouvements collectifs coordonnés, plus lents mais impliquant d'un seul coup plus de particules.

Enfin, signalons que les temps de mise à l'équilibre sont bien entendus réduits par une (raisonnable) augmentation de la température, qui a également pour effet de faire augmenter le nombre de sites 4 dans la configuration TP, et le nombre de sites 6 dans la configuration PP, les dislocations étant plus facilement évacuées.

8.2.3 Résorption des domaines

Lorsque les configurations sont dégénérées, une troisième phase beaucoup plus lente est nécessaire pour résorber les différents domaines créés. Que ce soit pour la configuration TP pour $f = 1/2$ ou les configurations PP de $f = 1$ et 2, aucune des réalisations possibles de la configuration n'est favorisée par les conditions au bord.

Une brisure dans cette symétrie peut néanmoins se produire et permettre à un des domaines de croître au détriment de ses voisins. Généralement, les domaines les plus importants vont imposer leur ordre aux domaines voisins. Du fait de la nécessité de dépiéger des particules, cette dynamique est extrêmement lente. Ainsi, pour la configuration PP ($f = 1$) placée dans les conditions de température utilisées dans la figure 8.3 ($T = 3.10^{11}$ K), le temps nécessaire pour passer de quelques domaines tels que sur la figure 7.6 à un seul domaine, est de l'ordre de la demi-heure. Ce temps est encore augmenté, à température constante, pour la configuration TP de $f = 1/2$ pour laquelle il n'existe que des billes piégées. La présence de billes intersticielles, plus mobiles, et qui dans une autre réalisation de la configuration doivent se retrouver piégées, favorise le processus.

Dans le cas $f = 2$, la stabilité des domaines est encore plus faible que dans le cas $f = 1$ car les billes intersticielles sont plus nombreuses. La dynamique autour des frontières de ces domaines présente des traits caractéristiques que nous présentons dans la section suivante.

8.3 Dynamique autour d'une position instable

Les frontières entre des domaines correspondant à différentes réalisations d'une même configuration sont des zones où l'équilibre des particules qui y sont présentes est instable. Dans le cas $f = 2$, cet équilibre est d'autant plus fragile que les trimères centrés sur un piège sont le résultat d'un subtil équilibre entre l'attraction du piège et la répulsion des trois billes.

Du fait de cette instabilité, les mouvements des particules au niveau des frontières et à faible température diffèrent fortement du mouvement observé dans un domaine homogène, donc dans un équilibre stable, quand la température augmente. Nous étudions ici successivement ces deux cas de figure.

8.3.1 Dynamique en frontière de domaines

Comme nous l'avons déjà évoqué, la dégénérescence de la configuration PP pour $f = 2$ est d'ordre 8, puisqu'à chaque position possible du sous-réseau de pièges contenant les billes correspond quatre orientations possibles du trimère. Au niveau d'une frontière entre deux domaines, il existe nécessairement des billes en position instable. Les possibilités dynamiques de ces billes sont nécessairement modifiées par rapport à un domaine

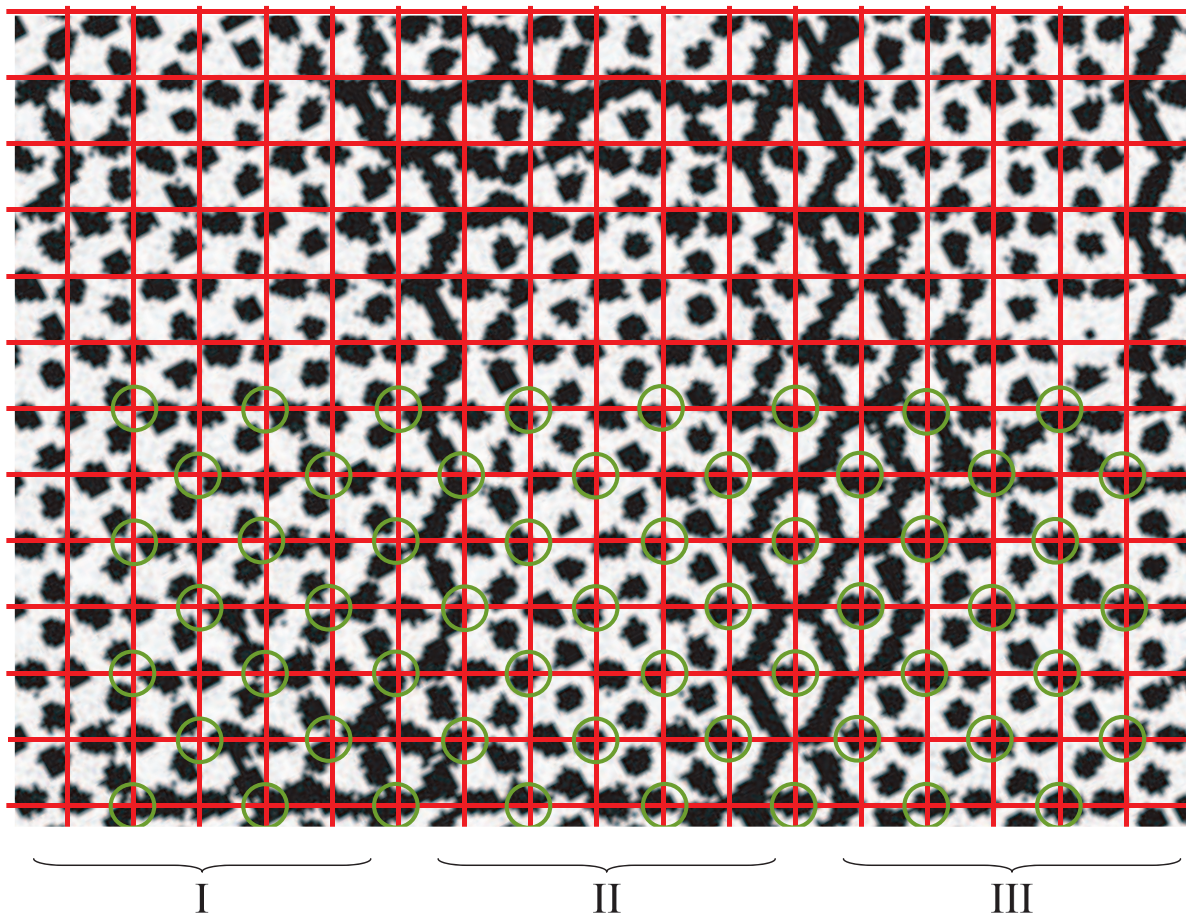


FIG. 8.6 : Trajectoires sur 750 s dans trois domaines connexes de la configuration PP pour $f = 2$, avec $\eta_V = 0,33$, $T = 4,0.10^{11}$ K. Les intersections des lignes rouges repèrent le réseau de pièges. Les cercles verts correspondent à l'un des deux sous-réseaux de pièges pouvant accueillir les particules piégées.

homogène car la densité y a subi localement des modifications.

La figure 8.6 présente les trajectoires des billes à basse température dans une zone présentant trois domaines.

Les domaines II et III utilisent le même sous-réseau de pièges, repéré par les cercles verts, pour leurs billes totalement piégées, mais les trimères ont subi une rotation de 180° d'un domaine à l'autre. Au contraire, les trimères ont la même orientation entre les domaines I et II, mais les billes piégées n'occupent pas le même sous-réseau.

Les trajectoires le long des frontières des domaines font apparaître des "yeux" caractérisés par une bille située dans un piège, à la mobilité identique à celle d'une bille à l'intérieur d'un domaine, entourée de plusieurs billes fortement mobiles dont les trajectoires dessinent un continuum autour de la bille piégée. Les "yeux" sont légèrement étirés

le long de la direction de la frontière, mais les trajectoires relient essentiellement un piège inoccupé à l'autre¹¹. Deux mécanismes, liés à la symétrie locale, sont responsables de la formation de ces structures.

À la frontière entre les domaines II et III, les pièges occupés étant les mêmes, l'instabilité observée est clairement liée au mouvement des particules interstitielles, dont les positions de part et d'autre de cette frontière ne sont pas compatibles : les répulsions entre ces particules engendrent des mouvements plus importants, dont la direction est contrôlée par l'attraction des pièges vacants. Notons que ces mouvements n'ont lieu que sur deux ou trois couches de pièges, et qu'au delà les domaines ne sont pas affectés ; on peut aussi supposer que la présence de particules piégées empêche la perturbation de se propager.

Entre les domaines I et II, la frontière est marquée par une sur-occupation des pièges afin d'assurer la transition entre les deux modes d'occupation. Ceci engendre l'augmentation du nombre de particules totalement interstitielles (au sens où elles ne peuvent même pas se rapprocher d'un piège) ne pouvant trouver une position d'équilibre stable puisque par ailleurs elles sont trop proches des billes piégées pour pouvoir se satisfaire de se placer entre les deux.

Aussi dans les situations instables caractéristiques des frontières entre domaines, le mouvement est marqué par une forte mobilité des billes interstitielles¹², au niveau desquelles se fait l'ajustement entre les différentes réalisations de la configuration. Les pièges vacants servent de "guides" pour le mouvement de ces particules. Ce contrôle de la direction du mouvement par les pièges se retrouve dans le cas des frontières de domaines de la configuration PP pour $f = 1$. Ainsi que le montre la figure 8.7, les mouvements se font selon l'axe principal d'un des deux domaines.

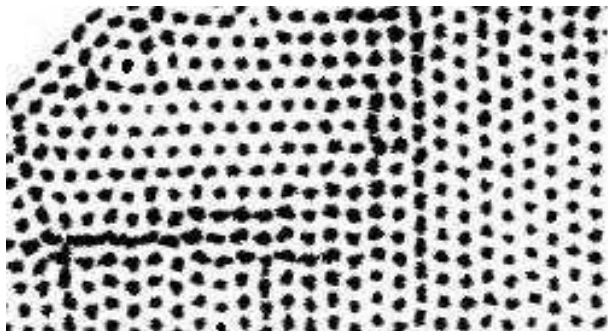


FIG. 8.7 : Trajectoires sur 200 s des particules dans deux domaines connexes de la configuration PP pour $f = 1$, avec $\eta_V = 0,11$, $T = 4,0.10^{11}$ K.

¹¹Notons que cette dissymétrie ne peut être due à la forme rectangulaire des pièges : nous voyons en effet que le mouvement de la bille piégée est légèrement étiré dans la direction orthogonale à la frontière.

¹²Signalons toutefois un phénomène inverse, plus rare, en haut de la figure 8.6, qui est une manifestation claire de l'effet de cage déjà évoqué : nous pouvons en effet observer un "œil" semblable à ceux décrits précédemment, à l'exception du fait que la bille centrale n'est pas dans un piège. La forte mobilité des billes autour de cette bille centrale indique que plusieurs d'entre elles sont attirées par les quatre pièges alentour, et par effet de répulsion la bille centrale se retrouve piégée dans l'espace interstitiel à quatre pièges.

8.3.2 Dynamique thermiquement activée

Si maintenant nous considérons un domaine homogène et que nous augmentons la température, les trajectoires des particules présentent une symétrie différente.

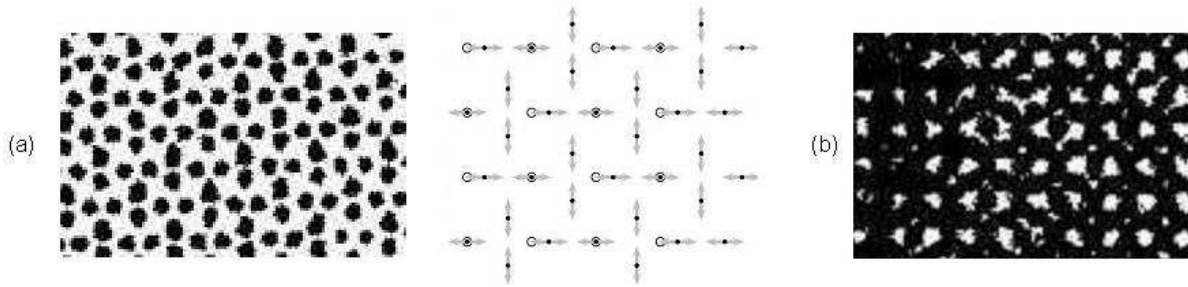


FIG. 8.8 : Trajectoires sur 750 s des billes dans un domaine homogène ($f = 2$, $\eta_V = 0,33$). (a) : $T = 4,0.10^{11}$ K ; (b) : $T = 9,1.10^{11}$ K.

Ainsi que le résume la figure 8.8, deux différences notables par rapport aux mouvements dans les frontières de domaines sont à remarquer. D'une part, le mouvement de toutes les particules, qu'elles soient piégées ou membres d'un trimère, a sensiblement la même amplitude, même si les deux billes du trimère les plus éloignées du piège semblent légèrement plus mobiles. Par ailleurs, le mouvement de chaque particule est anisotrope et présente une direction préférentielle parallèle aux axes du réseau de pièges, alors que dans le cas des "yeux" dus aux instabilités mécaniques, ce mouvement se faisait selon les diagonales de ce réseau. Le réseau carré sous-jacent se dessine encore plus nettement lorsque la température augmente : conformément au schéma proposé sur la figure 8.8 des zones entières formant un réseau carré restent inexplorées.

Il est à noter que le mouvement privilégié ne correspond pas au chemin vers la configuration TP évoqué sur la figure 7.5. Par rapport au réseau de pièges, on peut remarquer deux comportements distincts : les particules formant des alignements avec les lignes de pièges, qui sont celles étant à l'équilibre les plus proches des pièges, se déplacent le long de cet axe commun. En revanche, les autres particules interstitielles ont un mouvement surprenant, non dirigé vers les pièges, mais parallèle au vecteur les joignant quand elles sont voisines.

Le fait que le mouvement de certaines particules ne soit pas directement dirigé vers les pièges, et que celui de la particule piégée soit d'amplitude comparable aux autres peut être interprété comme une conséquence des conditions présidant à l'apparition de la configuration PP. En effet, cette configuration n'apparaît qu'avec des pièges de portée suffisante (aussi l'espace que peut explorer la particule piégée est-il large) et une force de répulsion entre particules suffisamment importante pour que le système cherche à augmenter les coordinences (et donc l'interaction entre particules peut gouverner le mouvement de particules suffisamment éloignées des pièges).

Dans les configurations TP soumises à une activation thermique, telles que celles étudiées numériquement par Reichhardt *et al.* [164] et expérimentalement dans des cristaux colloïdaux par Mangold *et al.* [157], dans les deux cas pour $f = 4$, le comportement est en revanche tout autre : les particules piégées sont en effet peu mobiles, alors que les particules interstitielles peuvent circuler entre les pièges.

8.4 Conclusion

Les différentes études présentées ont permis de mettre en évidence plusieurs comportements dynamiques généraux des réseaux périodiquement piégés.

D'une part, nous avons déterminé les temps caractéristiques de l'évolution vers une configuration d'équilibre, dont le mécanisme dépend fortement de l'ordre préexistant : les lignes de particules "bien placées" sont des entités robustes pouvant se déplacer rapidement d'un seul bloc. Plus généralement, le déplacement vers la nouvelle position se fait par des déplacements collectifs contrôlés par des facteurs géométriques. Toutefois, dans un deuxième temps, les ajustements individuels, même peu nombreux, sont toujours nécessaires pour atteindre une configuration finale bien ordonnée. À faible température, le temps nécessaire pour atteindre cette configuration est de l'ordre de la minute. Il est diminué lorsque la température augmente. Cette estimation ne tient toutefois pas compte de l'existence des domaines de configurations dégénérées dont la disparition est très lente mais favorisée par la présence de particules interstitielles, plus mobiles et plus à même de favoriser le déplacement des particules piégées.

Cette mobilité des particules interstitielles se révèle particulièrement forte dans les situations d'instabilité accompagnant les changements locaux de densité en frontière de domaines, ce qui révèle le rôle joué par l'ordre local. La direction du mouvement des interstitielles est alors contrôlée par les pièges vacants. En revanche, dans une situation d'équilibre stable, le mouvement thermiquement activé est également fortement contrôlé par la répulsion entre particules. De plus, il n'existe dans ce cas quasiment aucune différence entre particules piégées et particules interstitielles, qui possèdent également toutes une direction de déplacement privilégiée. Ces considérations peuvent servir de grille de lecture à une étude ultérieure sur le déplacement d'un réseau soumis à une force.

Cette anisotropie dans les configurations PP a été relevée par Pogosov *et al.* dans le cas $f = 1$ [151]. Une anisotropie dans le courant critique y est analysée comme une conséquence de la difficulté à dépiéger une particule dans une direction plutôt que dans une autre, en raison d'un environnement différent. Les réseaux PP avec f supérieur à 1 pourraient présenter un intérêt similaire. De tels effets peuvent bien entendu être

amplifiés par l'emploi de pièges asymétriques ou de tailles variables¹³.

¹³Récemment, un réseau de symétrie carrée de motif formé de deux types de pièges constitués de trous de tailles différentes a également été étudié par Silhanek *et al.* [172]. Le déplacement d'un réseau de vortex dans un réseau de symétrie rectangulaire a également fait l'objet d'une étude numérique par Reichhardt *et al.* [173]. Nous pourrions aisément explorer ces situations à l'aide de notre dispositif.

Quatrième partie

Dynamique des particules et symétries locales

Introduction

Les observations menées dans le chapitre précédent ont fait apparaître l'importance des contraintes de symétrie dans les réseaux piégés.

Nous avons observé une grande richesse de mécanismes d'adaptation, à la fois dans la phase transitoire, mais aussi dans la phase stationnaire dans laquelle les billes interstitielles présentent des mouvements marqués mais locaux, amplifiés parfois par les modifications locales de densité, donc de symétrie. Les études de Laguna *et al.* sur un réseau de kagomé [148] ou de Reichhardt *et al.* [164] sur un réseau carré avec $f \geq 4$ ont également mis en évidence des dynamiques de circulation des particules interstitielles entre les pièges pouvant être considérées comme une répétition périodique de motifs localisés. Comprendre ces mécanismes locaux, qui nous sont facilement accessibles avec notre dispositif macroscopique, est un enjeu de taille pour la compréhension globale de ces systèmes. Aussi, isoler le problème en nous intéressant à des systèmes ayant un faible nombre de particules nous a semblé, de fait, une procédure naturelle.

Dans cette partie, nous présentons deux études menées sur ces systèmes à faible nombre de billes, toutes deux permettant un éclairage sur les dynamiques locales observées dans les cristaux piégés. Elles permettent notamment de mettre en valeur les effets de la géométrie locale sur les dynamiques des particules.

Par ailleurs, ces systèmes confinés présentent des problématiques propres, que nous avons notamment déjà effleurées dans le premier chapitre, lorsque nous nous sommes intéressés aux petits systèmes confinés circulairement.

Dans le chapitre 9, nous présentons la dynamique d'îlots confinés circulairement pour différentes températures. Ce problème, déjà largement couvert par de nombreuses études numériques, a été abordé dans la perspective de mettre en évidence le rôle des symétries locales sur le désordre dynamique. Nous montrons que la commensurabilité des périodes des couronnes de billes influe fortement sur leur dynamique dans une certaine gamme de températures. Ce rôle est établi en nous focalisant sur des systèmes très semblables mais ayant des symétries différentes. Nous présentons en fin de chapitre quelques résultats obtenus dans un confinement elliptique, quand l'invariance par rotation est brisée.

Dans le chapitre 10, nous abordons les mêmes problèmes dynamiques du point de vue de l'évolution temporelle des couches des îlots confinés. Nous abordons un phénomène d'accélération de la diffusion dans ces couches mises en présence d'un potentiel périodique fluctuant dû aux couches voisines, cette accélération étant plus ou moins forte selon que les périodicités des couches sont commensurables ou non. Ces résultats sont également commentés à la lumière de la question de la diffusion dans des canaux de particules en interaction ne pouvant pas se croiser, et soulèvent la question du rôle d'un potentiel périodique fluctuant dans cette accélération de la diffusion.



Chapitre 9

Géométrie locale et désordre dynamique

Sommaire

9.1	Introduction	173
9.2	Systèmes étudiés	177
9.3	Mesure du désordre du système	178
9.3.1	Fonction de corrélation temporelle	178
9.3.2	Décorrélacion orientationnelle dans les îlots	179
9.4	Désordre et excitations individuelles	180
9.5	Désordre et excitations collectives	182
9.5.1	Définition des paramètres	182
9.5.2	Déplacements angulaires	184
9.6	Scénario d'une route vers le désordre	190
9.7	Route vers la désordre en l'absence d'invariance par rotation	192
9.8	Conclusion	195

9.1 Introduction

À basse température, les systèmes bidimensionnels de particules identiques en interaction présentent des configurations ordonnées : un cristal souvent hexagonal pour les grands systèmes, des îlots structurés en couches pour les petits systèmes confinés circulairement.

À l'inverse, à haute température, ces systèmes présentent un désordre dynamique induit par les fluctuations thermiques. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la route suivie par les îlots de Wigner vers ce désordre, en nous attachant plus particulièrement au rôle joué par la géométrie de l'environnement de chaque particule dans l'établissement de ce désordre.

Cette étude de la "route vers le désordre dynamique" correspond dans les grands systèmes à celle de la fusion. Les températures de transition de ces systèmes, au delà de leur détermination par des singularités dans les grandeurs macroscopiques, sont liées à l'échelle microscopique aux fluctuations des positions des particules et sont déterminées selon le critère de Lindemann [174]. Selon ce critère, le cristal est dit "fondu" lorsque le déplacement quadratique moyen des particules¹, mesuré en unités du pas du réseau de la phase solide, atteint la valeur $\gamma_M = 0,1$. Cette valeur seuil semble indépendante de la nature de l'interaction [174, 175]. Cette augmentation des déplacements est à l'origine de créations de défauts, et à la perte des ordres translationnel et orientationnel, donc de la symétrie, dans le cristal. Selon les théories, ces transitions peuvent être simultanées ou séparées, mais il a été montré que, pour les grands systèmes, la température de fusion qui est déduite à partir du comportement de la fonction de corrélation orientationnelle est identique à celle donnée par le critère de Lindemann [176]. Ce résultat semble également valable pour des systèmes n'ayant que quelques centaines de particules [177].

Par extension, de nombreux groupes ont étudié de la même manière l'évolution de petits systèmes lorsque la température augmente au travers de simulations numériques. En effet, s'il est toujours possible de définir des paramètres similaires à des grandeurs habituellement utilisées pour des systèmes thermodynamiques telle la capacité calorifique [178], le faible nombre de particules autorise d'explorer quantitativement et précisément la dynamique de tels ensembles, à travers leurs modes de vibrations [72, 179–181], ou bien le déplacement moyen de leurs particules [48, 182, 183]. En appliquant le critère de Lindemann à l'ensemble des particules appartenant à une même couche, la "fusion" de systèmes classiques de particules confinées circulairement, en interaction coulombienne, logarithmique ou coulombienne écrantée a pu ainsi être étudiée².

Dans les petits systèmes confinés circulairement, les études basées sur ce critère de Lindemann permettent d'établir que la structure en couches des îlots devient de moins en moins marquée lorsque la température augmente. Ce désordre survient en deux temps toujours bien distincts. À faible température, chaque particule est excitée thermiquement dans son potentiel local ; une première transition, repérée par la température T_O , apparaît quand l'ordre orientationnel entre les couches disparaît et que celles-ci deviennent plus mobiles les unes par rapport aux autres. Cette première transition, est suivie d'une seconde transition à la température T_R qui correspond à une forte diffusion radiale des particules entre les couches, ainsi qu'une diffusion angulaire à l'intérieur de ces couches,

¹Signalons que l'utilisation du critère de Lindemann à deux dimensions nécessite de considérer les déplacements relatifs des particules, car le déplacement absolu quadratique diverge logarithmiquement avec la taille du système [174].

²Plus récemment, la dynamique de systèmes binaires a également fait l'objet d'explorations sur le même principe [184–187].

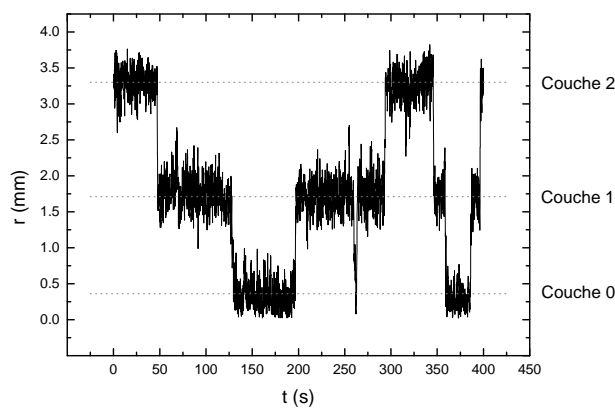


FIG. 9.1 : *Trajectoire radiale d'une bille dans le système à 18 billes présenté à la section 9.2 porté à la température $T = 26,4 \cdot 10^{11}$ K. On distingue deux comportements bien marqués : des sauts importants mais isolés correspondant à un changement de couche, et des oscillations rapides dans une couche.*

qui deviennent ainsi de moins en moins bien définies³. Les températures de transition T_O et T_R sont identifiées par l'augmentation brutale respectivement des déplacements quadratiques angulaires intercouches et des déplacements quadratiques radiaux [48].

Cependant, nous montrons ici que cette procédure est insuffisante pour décrire la route vers le désordre empruntée par un tel système : le critère de Lindemann, basé sur le comportement collectif moyen des particules ne rend pas totalement compte de la dynamique des îlots. Au delà de notre étude concernant les liens entre géométrie locale et désordre dynamique, ceci constitue un résultat intéressant spécifique à l'étude de la dynamique des petits systèmes de particules en interaction. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, les transitions entre configurations d'équilibre, dues essentiellement au saut d'une seule particule, sont nombreuses, et ce bien avant la température T_R . Ainsi que l'illustre la figure 9.1, ces événements singuliers et brefs que sont les sauts d'une particule d'une couche à l'autre sont à distinguer de l'autre comportement observé pour une particule, à savoir des oscillations radiales à l'intérieur de sa couche. Ces deux mouvements sont facilement séparables car ils ont des amplitudes caractéristiques bien différentes. Ceci illustre le fait que l'utilisation d'un critère de Lindemann général à partir des déplacements globaux des particules masque l'existence de mécanismes différents, l'un basé sur des excitations individuelles, l'autre sur des excitations collectives⁴.

Or, nous verrons que ce sont les transitions entre configurations qui initient, à basse température, le processus de mise en désordre des systèmes, en modifiant l'organisation et la symétrie des couches. Il convient donc de les prendre en compte pour décrire correctement la route vers le désordre dynamique, notamment à basse température, quand les couches sont bien identifiées et les particules relativement stables dans leurs couches (en dehors des mouvements permettant une transition, qui sont brefs et espacés).

³Nous pouvons déjà constater que la brisure de symétrie (par rapport à un cristal infini) imposée par le confinement modifie complètement l'isotropie habituellement observée.

⁴Dans les grands systèmes, cette distinction n'est pas pertinente car il y a un continuum de niveaux d'énergies.

Lorsque la température augmente, ces contributions perdent de leur importance, ne serait-ce que parce que la notion de couches devient toute relative, et la dynamique devient plus complexe. La description en termes d'excitations collectives devient alors légitime.

Par ailleurs, les excitations individuelles ou collectives de ces systèmes dépendent de la symétrie locale de l'environnement de chaque particule comme de la géométrie de l'ensemble.

En effet, nous avons pu constater lors de la mesure et du calcul des niveaux d'énergie dans les îlots de Wigner que les positions respectives des niveaux varient fortement entre deux systèmes présentant des symétries locales différentes, dues à la modification du nombre de billes. Ainsi, la configuration (1-6-12) de l'état fondamental du système $N = 19$ présente une symétrie ternaire et est corollairement beaucoup plus stable que ses équivalentes à 18 ou 20 billes, qui ne présentent pas une telle symétrie (figure 2.2) : la barrière énergétique à franchir pour en sortir est pour elles plus importante. Ainsi, du point de vue de la dynamique de ces îlots, les règles de transition entre différentes configurations sont fortement affectées par la symétrie locale.

De même, les excitations collectives sont elles aussi sensibles à l'ordre local, certains mouvements pouvant être contraints ou amplifiés du fait de la symétrie du système, notamment la commensurabilité du nombre de particules de deux couches voisines, ou encore la forme du confinement.

Il existe donc un lien important entre la dynamique de ces systèmes à une température donnée, leur évolution vers le désordre lorsque la température augmente, et les symétries locales qu'ils présentent.

Notre objectif est donc le suivant : d'une part, nous voulons distinguer dans le processus de route vers le désordre des îlots les différents mécanismes entrant en jeu, ainsi que leur importance respective. Ceci nécessite bien sûr auparavant de mesurer ce désordre qui a plusieurs causes. D'autre part, nous voulons, au niveau de chacun de ces mécanismes, discuter de l'effet éventuel de la géométrie du système.

Rappelons ici que notre but n'est pas de mesurer de manière exhaustive toutes les températures de transition possibles, en particulier, comme cela est souvent fait, en fonction du nombre de particules, mais de mettre en évidence, au moyen des îlots de Wigner, les mécanismes en jeu dans le processus amenant les systèmes vers un état désordonné⁵, notamment ceux liés à la symétrie locale du système.

⁵Comme nous le verrons, les différentes températures de transition mesurées ici sont suffisamment séparées pour permettre cette analyse.

9.2 Systèmes étudiés

Pour comprendre ces effets de géométrie, les systèmes d'études doivent obéir à une double exigence :

- présenter une symétrie locale très différente ;
- avoir néanmoins une densité en billes presque identique, ce qui nous autorise à comparer de manière pertinente les éventuelles différences dans les comportements collectifs.

Nous avons retenu les systèmes à 18, 19 et 20 billes confinés dans un puits de diamètre 10 mm, avec une tension⁶ $V_0=700$ V, présentés au chapitre 3.

Lorsque la température augmente, et ce malgré l'augmentation des déplacements radiaux, la structure en couche de ces systèmes demeure identifiable⁷ et, pour chacun d'entre eux, deux états excités sont accessibles. Rappelons que ces états sont, par ordre croissant d'énergie :

- pour 18 billes : (1-6-11), (1-5-12), (0-6-12) ;
- pour 19 billes : (1-6-12), (1-7-11), (1-5-13) ;
- pour 20 billes : (1-6-13), (1-7-12), (2-6-12).

Remarquons que parmi ces configurations, certaines possèdent la particularité d'avoir sur la couche 2 un nombre de billes double de celui de la couche 1 ; nous verrons que cette propriété a un effet sur les déplacements des billes de ces couches. Dans la suite, nous désignons ces configurations par l'attribut "commensurable".

Expérimentalement, pour chaque température étudiée dans la plage 10.10^{11} K $< T <$ 31.10^{11} K, la position des billes dans chacun de ces trois systèmes, placé initialement dans son état fondamental, a été suivie pendant 400 s. Ce temps permet d'une part de bien rendre compte de l'activité de transition entre les configurations et d'autre part d'avoir un échantillonnage satisfaisant afin de mesurer correctement les déplacements quadratiques moyens. Le pas de temps entre deux acquisitions a été fixé à 100 ms, ce qui réalise le compromis entre la nécessité de suivre les particules pour calculer des grandeurs qui leur sont attachées tel leur déplacement quadratique moyen⁸, tout en observant les îlots sur un temps long sans augmenter démesurément la quantité de données à traiter.

⁶Travailler avec une faible valeur de V_0 , donc d'énergie de liaison, permet d'atteindre les températures de "fusion" sans dépasser les bornes acceptables pour l'agitation du système A.

⁷Jusqu'à une température assez élevée, les déplacements radiaux demeurent en moyenne inférieurs à un sixième de la distance intercouches.

⁸Ce pas de temps permet de déterminer les trajectoires jusqu'à la température limite étudiée, à laquelle les îlots sont quasiment complètement désordonnés.

9.3 Mesure du désordre du système

9.3.1 Fonction de corrélation temporelle

Avant d'essayer de mesurer l'importance relative de chacun des mécanismes décrits, nous souhaitons disposer d'un paramètre global permettant de mesurer l'apparition du désordre lorsque la température augmente⁹.

Dans les systèmes bidimensionnels à grand nombre de particules les modifications de l'ordre dans le cristal sont généralement décrites au travers des changements de comportement asymptotique des fonctions de corrélation spatiales¹⁰. Ainsi, les deux transitions prévues par la théorie KTNHY correspondent à la décroissance exponentielle des fonctions de corrélation translationnelle et orientationnelle. Considérer les fonction de corrélation spatiales revient à mesurer ce qu'intuitivement on désignerait par ordre ou désordre à la vue du cliché d'un réseau pris à un instant donné. Lorsque le désordre est gelé, comme dans un verre, il s'agit là de la seule manière de le quantifier.

Cependant les fluctuations thermiques font également évoluer le système dans le temps et la mesure, en un point donné, de la corrélation temporelle, rend également compte de l'ordre ou du désordre général du système : les fonctions de corrélation temporelles ont le même comportement que les fonctions de corrélation spatiales correspondantes. Aussi avons-nous choisi d'utiliser ces fonctions de corrélation temporelles pour mesurer l'ordre dans les petits systèmes.

La fonction de corrélation orientationnelle temporelle $g_6(t)$ est définie par

$$g_6(t) = |\langle e^{i6(\theta(t+t_0)-\theta(t_0))} \rangle|, \quad (9.1)$$

où θ est l'angle du lien entre deux particules. $\langle \cdot \rangle$ désigne une moyenne sur tous les liens du système.

Dans les grands systèmes ayant une symétrie hexagonale, g_6 tend vers une constante proche de 1 aux basses températures : l'ensemble est alors ordonné. Au delà d'une certaine température T_ℓ , la fonction décroît exponentiellement avec le temps, indiquant que le système est dans une phase liquide.

Notons que le facteur 6 est adapté pour les réseaux hexagonaux, par conséquent nous devons nous attendre à ce que dans nos îlots, où la symétrie hexagonale est altérée,

⁹Le déplacement quadratique moyen de l'ensemble des billes du système ne saurait répondre à cette demande. D'une part, il mesure le mouvement moyen des particules dans le système, et non son ordre. Or, nous voulons justement estimer l'impact de chaque type de mouvement des particules sur l'ordre du système. D'autre part, même pour estimer la température de fusion du système, le critère de Lindemann est rarement appliqué aux déplacements complets des particules. En effet, du fait de la présence d'une paroi "lisse", les mouvements de rotations relatifs des couches sont beaucoup plus favorisés que dans un cristal, ce qui comme nous le verrons conduirait à une augmentation forte des déplacements relatifs même à basse température, sans pour autant que le système puisse être considéré comme fondu.

¹⁰voir la section 4.4.

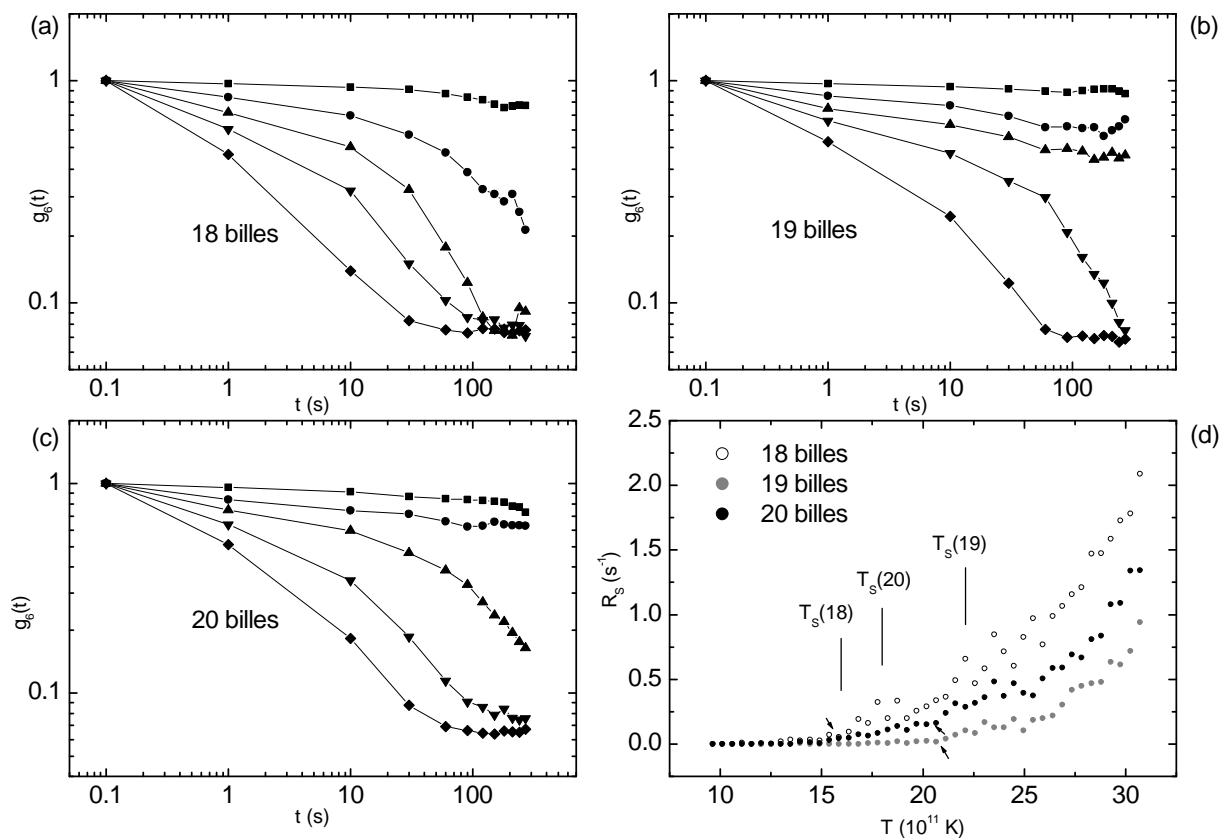


FIG. 9.2 : (a-c) : Variation des fonctions de corrélation orientationnelle g_6 en fonction du temps (échelle log-log) pour 5 températures : (■) $T = 9.6 \times 10^{11} K$, (●) $T = 13.0 \times 10^{11} K$, (▲) $T = 17.8 \times 10^{11} K$, (▼) $T = 23.0 \times 10^{11} K$, (◆) $T = 30.2 \times 10^{11} K$; (a) $N = 18$, (b) $N = 19$ et (c) $N = 20$. (d) : Taux de sauts R_S dans les trois systèmes en fonction de la température. Les flèches indiquent la température à laquelle le deuxième état excité a été observé pour la première fois. Les températures seuil $T_S(N)$ sont définies dans le texte.

la valeur limite à basse température soit inférieure à 1. Inversement, la moyenne étant seulement faite sur un nombre de liens de l'ordre de N , où N est le nombre de billes, on ne doit pas s'attendre à ce que g_6 tende vers 0 même pour les hautes températures. Ces points mis à part, ce paramètre mesure bien les corrélations entre particules et doit pouvoir rendre compte de l'évolution du processus d'évolution vers le désordre.

9.3.2 Décorrélation orientationnelle dans les îlots

Nous reportons sur les figures 9.2(a)-9.2(c) les variations typiques des fonctions de corrélation orientationnelle g_6 pour cinq températures différentes et pour les trois systèmes étudiés. Nous y observons les mêmes comportements : à faible température, les fonctions convergent vers une constante proche de 1, ce qui indique un état ordonné. Pour les très grandes températures, les corrélations décroissent fortement. Nous pouvons définir une

température de "désordre" T_ℓ équivalente à la température de fusion des grands systèmes, définie comme la température à partir de laquelle les corrélations décroissent exponentiellement lorsque le temps augmente. Nous pouvons constater que cette température est bien plus élevée pour le système à 19 billes : $T_\ell(19)$ est supérieure à 18.10^{11} K tandis que $T_\ell(18)$ est inférieure à 13.10^{11} K et que $T_\ell(20)$ se situe entre ces deux températures.

Dans la suite, les températures T_ℓ sont considérées comme un repère permettant de distinguer l'état "ordonné" de l'état "désordonné", et c'est en fonction de celles-ci que nous discutons du rôle des excitations individuelles et des excitations collectives.

9.4 Désordre et excitations individuelles

Comme nous l'avons suggéré, une partie du désordre, mesuré par la fonction g_6 , est dû aux changements de configuration associés à des sauts de particules d'une couche à l'autre.

Nous avons retenu deux paramètres facilement mesurables pour quantifier cette activité.

Le premier est naturellement le taux de transition, ou taux de sauts R_S défini, comme dans [188], par

$$R_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_S(t)}{t}, \quad (9.2)$$

où $N_S(t)$ est le nombre de changements de configuration observés pendant le temps t . Qualitativement, il doit augmenter avec la température au fur et à mesure que celle-ci permet de franchir les barrières énergétiques entre les niveaux.

Ce taux est bien entendu directement lié à la distribution des temps de résidence τ_i dans les différents niveaux déjà évoquée¹¹. Mais alors que le taux de saut mesure l'activité générale du système, la mesure des temps de résidence moyens permet de juger de la stabilité de chacune des configurations.

Aussi, pour chaque température, le système sera caractérisé par le taux de transition mais également par le temps de résidence moyen dans chacun des deux premiers états, les occurrences des transitions vers le second état excité étant trop peu nombreuses pour établir une statistique propre sur le temps de résidence moyen.

Dans la gamme de températures étudiées, l'évolution du taux de sauts R_S en fonction de la température est reportée sur la figure 9.2(d). Quel que soit le nombre de billes, R_S présente qualitativement le même comportement : il est proche de 0 à basse température

¹¹Dans un système à deux niveaux 0 et 1, R_S vaut simplement $(\langle \tau_0 + \tau_1 \rangle)^{-1}$, mais pour un système à trois niveaux, la relation dépend des règles de transition entre les niveaux.

puis augmente fortement avec la température¹².

Afin de quantifier l'importance de ces transitions, nous définissons une température seuil au delà de laquelle celles-ci seront considérées comme significatives. Comme nous le verrons dans la section suivante, la température d'étude maximale correspond à la température à laquelle les couches sont considérées comme "fondues", et par conséquent, la notion de couche n'a alors plus de sens. À cette température, le taux de transition est de l'ordre de 1 par seconde. Nous considérons arbitrairement que l'activité de transition devient appréciable lorsque le taux est de l'ordre de 1/10 de cette valeur maximale. Ces températures seuil $T_S(N)$ ainsi définies valent respectivement 16.10^{11} K, 22.10^{11} K et 18.10^{11} K pour les systèmes à 18, 19 et 20 billes.

Notons que la température $T_S(19)$ est la plus élevée des trois, puis que $T_S(18)$ est la plus basse et que $T_S(20)$ est entre les deux. Cet ordre est tout à fait similaire à celui observé sur les températures de désordre T_ℓ . Cette concordance couplée à l'ordre de grandeur similaire de ces températures indique que les transitions entre configurations, correspondant à des excitations individuelles de particules, sont, bien que peu nombreuses, responsables de la perte de l'ordre dans le système, du moins dans un premier temps.

Or, à travers la hauteur des barrières à franchir pour sortir des états d'équilibre, ces taux de transition sont directement liés à la symétrie locale des systèmes. En effet, nous avons montré à la section 3.2.2 que les barrières à franchir pour sortir de l'état fondamental étaient respectivement, mesurées en Kelvin (par division par la constante de Boltzmann k_B) : 99.10^{11} K, 192.10^{11} K et 107.10^{11} K, pour $N = 18, 19$ et 20 billes.

Ceci indique que l'état fondamental pour 19 billes est beaucoup plus stable que dans les deux autres cas ; pour ceux-là, les barrières sont comparables. On peut noter néanmoins que la température seuil T_S pour $N = 18$ est plus faible que pour $N = 20$. Pour le comprendre, il faut prendre en compte le deuxième état excité qui, comme indiqué sur la figure 9.2(d), est atteint pour une température plus basse pour le système à 18 billes. Ceci est confirmé par la mesure des temps de résidence moyens dans le premier état excité, qui indique que la barrière à franchir pour le système à 18 billes est plus faible que dans le cas $N = 20$ (64.10^{11} K contre 96.10^{11} K).

De ces mesures, nous pouvons conclure que le désordre apparaît à basse température d'autant plus facilement que la symétrie locale est peu prononcée, cette faible symétrie favorisant les excitations individuelles des billes à travers l'abaissement des barrières énergétiques entre configurations.

¹²Notons que sa valeur maximale, de l'ordre du Hertz, donc proche des fréquences propres du système, indique que le système transite alors quasiment à chacune de ses oscillations.

9.5 Désordre et excitations collectives

Au fur et à mesure que la température augmente, les excitations collectives des particules se joignent progressivement aux excitations individuelles pour désordonner le système.

Nous étudions dans cette section la dynamique générale des couches dans chacune des configurations (afin de déceler l'influence éventuelle de la géométrie sur les comportements collectifs). Si, au fur et à mesure que la température augmente cette notion de couche devient de plus en plus relative, elle reste pertinente jusqu'à la température maximale d'étude.

9.5.1 Définition des paramètres

Afin de mesurer les excitations collectives dans chacun des îlots, nous mesurons, conformément à la méthode de Lindemann, les déplacements quadratiques moyens des particules par rapport à leur position moyenne.

Nous mesurons ainsi, pour chaque couche¹³ 1 et 2 et dans chaque configuration :

– le déplacement radial

$$u_r^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_c} [\langle r_i^2 \rangle - \langle r_i \rangle^2] / r_0^2; \quad (9.3)$$

– le déplacement angulaire intracouche

$$u_{\theta_1}^2 = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_s} [\langle (\theta_i - \theta_{i_1})^2 \rangle - \langle \theta_i - \theta_{i_1} \rangle^2] / \theta_0^2; \quad (9.4)$$

et, dans chaque configuration et pour la couche 1 :

– le déplacement angulaire relatif intercouches

$$u_{\theta_2}^2 = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_s} [\langle (\theta_i - \theta_{i_2})^2 \rangle - \langle \theta_i - \theta_{i_2} \rangle^2] / \theta_0^2. \quad (9.5)$$

Dans ces expressions, r_i et θ_i désignent les coordonnées polaires d'une bille mesurées par rapport au centre du confinement. L'indice i_1 désigne le voisin (disons, de gauche) de la bille i , i_2 indique sa plus proche voisine sur la couche 2, déterminée à chaque instant. $r_0 = R_c / \sqrt{N}$, où R_c est le rayon du cadre de confinement, est l'espace radial moyen disponible pour une bille et $\theta_0 = 2\pi / N_c$ est la distance angulaire moyenne entre deux billes d'une couche en contenant N_c . La moyenne $\langle \rangle$ est obtenue en réalisant une moyenne

¹³La couche 0 contenant entre 0 et 2 billes, la mesure de son activité n'est pas pertinente pour discuter de l'effet des contraintes de symétrie.

temporelle (équivalente à une moyenne d'ensemble¹⁴) dans chaque réalisation d'une configuration au cours de l'expérience, puis en moyennant sur l'ensemble de ces réalisations. Pour discuter du comportement général de ces déplacements avant de rentrer dans une analyse fine prenant en compte les différentes configurations, nous avons également calculé les déplacements moyennés sur toutes les configurations (en pondérant par leur temps de résidence moyen).

Faisons ici deux remarques sur la méthodologie choisie, qui diffère légèrement de celle usuellement employée (voir par exemple Bedanov *et al.* [48]) :

- Habituellement, la distinction entre les couches et l'affectation des particules à telle ou telle couche est uniquement faite au début de l'expérience ou de la simulation. Par conséquent, l'éventuel saut d'une particule d'une couche à l'autre est intégré dans le calcul des déplacements, ce qui n'est pas le cas avec notre procédure. Les grandeurs mesurées ici ne sont pas comparables aux grandeurs habituellement calculées¹⁵. Rappelons que ce choix nous permet de distinguer dans les processus de route vers le désordre les contributions des excitations individuelles de celles des excitations collectives, ainsi que l'impact de la géométrie locale sur chacune.
- Ayant défini le désordre comme une décorrélation des orientations des liens entre particules, et afin de tenir compte de la symétrie du système par la rotation d'une couche de N_c billes d'un angle $2\pi/N_c$, nous avons préféré mesurer le déplacement orthoradial intercouches en recalculant à chaque instant les paires de plus proches voisines entre les deux couches. Par construction, la valeur de ces déplacements est donc bornée et ne peut être discutée au regard du critère de Lindemann. En revanche, leur valeur est indicative de la stabilité par rotation d'une couche par rapport à l'autre. Il est également délicat d'en discuter la valeur selon les configurations car il est certain qu'elle dépend des écarts angulaires moyens dans les deux couches et une éventuelle technique de renormalisation pour rendre les données comparables ne s'impose pas d'elle-même. Par conséquent, nous considérons uniquement les déplacements u_{θ_2} moyennés sur toutes les configurations.

Remarquons enfin que les déplacements quadratiques orthoradiaux intracouches sont des déplacements relatifs, il est donc possible comme pour les grands cristaux bidimensionnels, d'utiliser le critère de Lindemann employé pour les grands systèmes bidimensionnels. Lorsque les déplacements angulaires intracouches atteignent la valeur de 0,05, on peut

¹⁴Nous avons vu que le temps d'amortissement τ_R , qui mesure le temps nécessaire à l'établissement d'un régime stationnaire, est de l'ordre de 100 ms. Afin que la mesure des déplacements quadratiques moyens dans une configuration soit pertinente, nous n'avons pris en compte que les contributions des configurations restant stables pendant au moins 1 s. Le taux de transition maximal qui est de l'ordre du Hertz indique que le temps de résidence moyen dans les configurations est de l'ordre de la seconde, ce qui, au regard de ce critère, autorise à calculer les excursions quadratiques moyennes par couche jusqu'à cette température.

¹⁵Notre procédure doit délivrer des valeurs plus basse que les valeurs habituelles.

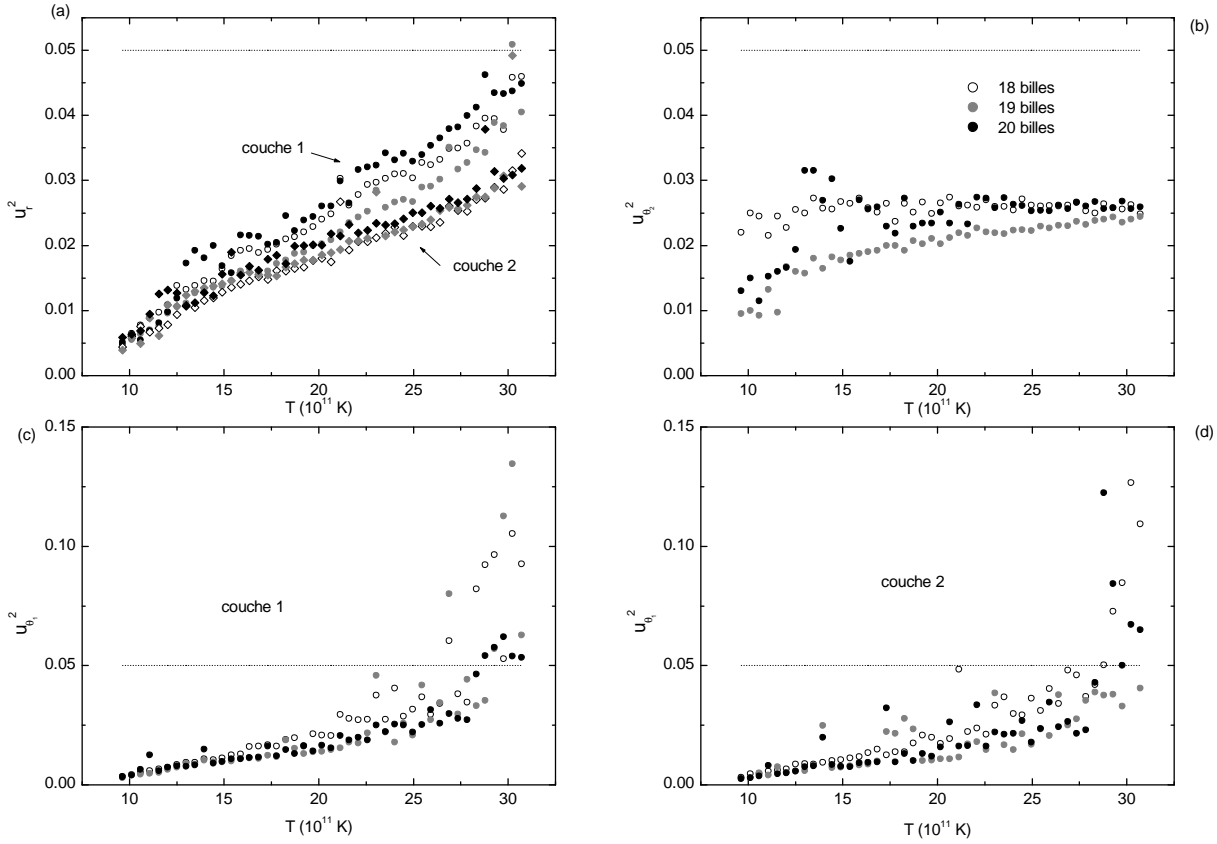


FIG. 9.3 : Déplacements quadratiques moyens moyennés sur les 3 configurations en fonction de la température. (a) : déplacements radiaux u_r^2 pour les deux couches ; \circ : couche 1 ; \diamond : couche 2. (b) : déplacements angulaires intercouches $u_{\theta_2}^2$. (c) : déplacements angulaires intracouches $u_{\theta_1}^2$ dans la couche 1. (d) : déplacements angulaires intracouches $u_{\theta_1}^2$ dans la couche 2. La ligne en pointillés horizontal marque la valeur seuil du critère de Lindemann 0,05.

donc parler de fusion intracouche.

Dans un premier temps, nous présentons successivement les valeurs moyennées sur toutes les configurations des déplacements quadratiques angulaires intercouches et angulaires intracouches, qui sont les premiers mouvements collectifs activés, puis les déplacements radiaux, qui induisent la destruction de la structure en couche.

Toutefois, afin de juger de l'importance de la géométrie locale dans ces comportements, nous considérons également les déplacements angulaires intracouches et les déplacements radiaux calculés dans chaque configuration.

9.5.2 Déplacements angulaires

Dans les systèmes en couches circulaires, les premiers modes d'excitation collectives sont les modes de rotation intercouches (voir par exemple [179, 186]).

Sur la figure 9.3(b), nous pouvons constater que $u_{\theta_2}^2$ augmente régulièrement avec la température jusqu'à une valeur limite, qui est sa limite théorique compte-tenu du mode de calcul. L'agitation thermique est alors suffisante pour vaincre les barrières énergétiques empêchant le mouvement d'une couche par rapport à l'autre et permet leur libre rotation. Cette valeur maximale est atteinte dans les cas $N = 18$ et $N = 20$ pour des températures très faibles, alors que dans le cas $N = 19$, le déplacement d'une couche par rapport à l'autre est beaucoup moins important. La configuration prédominante du point de vue des temps de résidence pour $N = 19$ étant la configuration commensurable (1-6-12), nous pouvons attribuer cet effet à la commensurabilité intercouches. Si une couche à 6 billes et une couches à 12 billes peuvent se disposer l'une par rapport à l'autre de telle sorte à être dans un minimum d'énergie, ce n'est pas le cas lorsqu'une couche à 6 billes est confrontée à une couche non commensurable à 11 ou 13 billes. Le système est alors sans cesse en train de chercher à s'adapter, d'où des déplacements plus importants.

Lorsque la température augmente, les mouvements intracouches augmentent progressivement. Les déplacements $u_{\theta_1}^2$ moyennés sur les configurations sont présentés sur les figures 9.3(c) et 9.3(d). Ils augmentent lentement avec la température, puis brusquement à partir d'une température comprise entre 28.10^{11} K et 30.10^{11} K¹⁶. Ce changement de régime intervient lorsque les déplacements quadratiques atteignent la valeur 0,05, en parfait accord avec le critère de Lindemann. Par conséquent, nous pouvons définir une température de transition T_O , 28.10^{11} K $\leq T_0 \leq 30.10^{11}$ K, au delà de laquelle les couches peuvent être considérées comme "fondues" angulairement.

Jusqu'à une température de l'ordre de 18.10^{11} K, ces déplacements angulaires sont moins importants que les déplacements angulaires intercouches¹⁷. Dans cette gamme de températures, nous pourrions alors raisonner en terme de couches rigides se déplaçant éventuellement les unes par rapport aux autres (même si entre temps des changements de configuration ont eu lieu)¹⁸ : l'agitation thermique a pour effet principal de faire tourner des couches quasiment rigides les unes par rapport aux autres.

Comme présenté sur la figure 9.4, les valeurs des déplacements normalisés sont semblables quelles que soient les configurations. D'un point de vue géométrique, ils sont donc essentiellement gouvernés par l'espace libre disponible pour chaque bille¹⁹. Un point important à souligner est que la notion de commensurabilité n'intervient pas ici contrairement à ce qui se passe pour les déplacements intercouches. L'adaptation des couches l'une par rapport à l'autre, ou les tentatives d'adaptation, se font donc collectivement.

¹⁶À l'exception notable de la couche 2 pour $N = 19$.

¹⁷Mais aussi que les déplacements radiaux, ce qui justifie le fait de discuter la dynamique en terme de couches.

¹⁸Cette possibilité sera mise à profit au prochain chapitre quand nous regarderons les mouvements des couches en termes de diffusion.

¹⁹En particulier, la température critique T_O ne dépend pas de la géométrie du système.

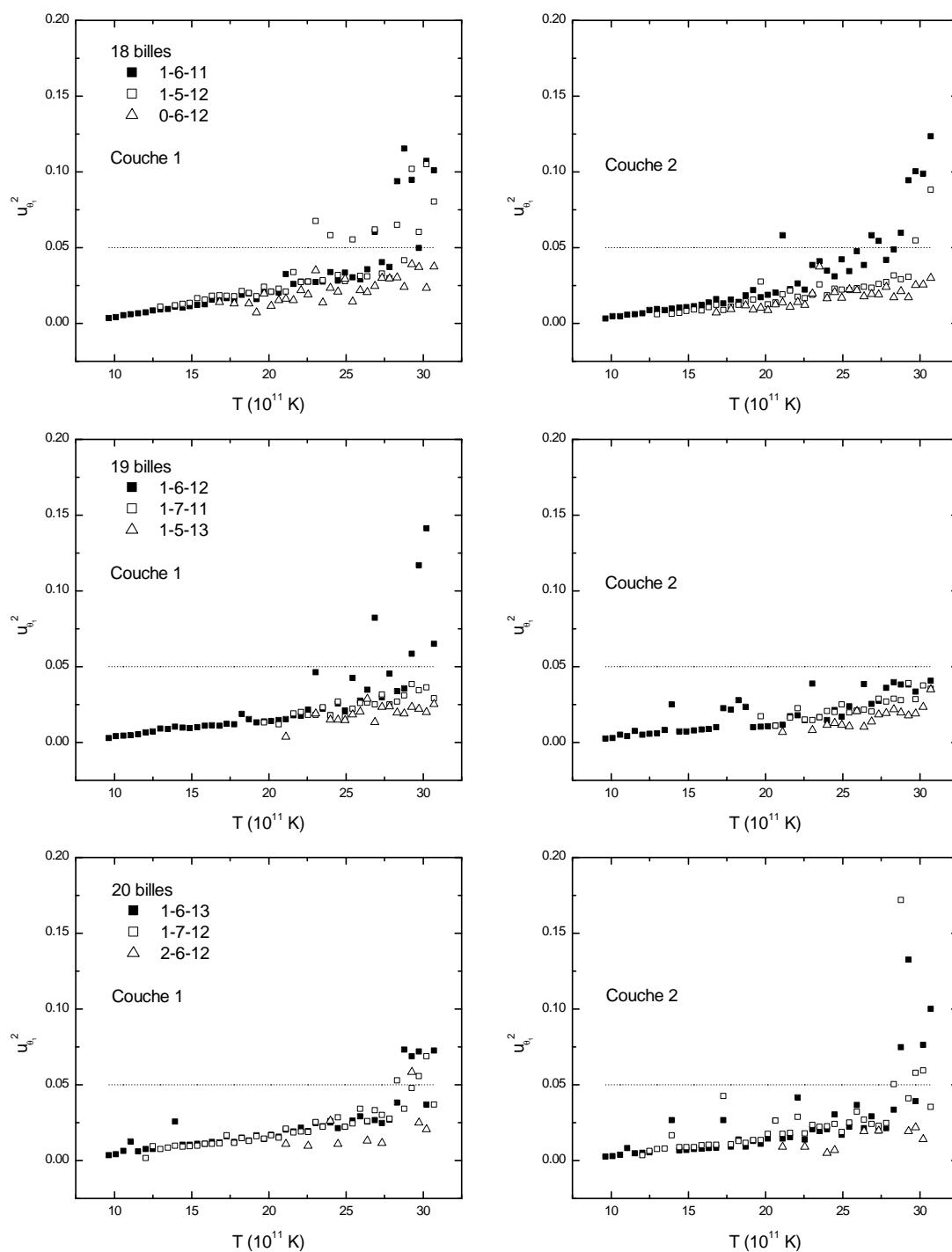


FIG. 9.4 : Déplacements angulaires intracouches $u_{\theta_i}^2$ pour chaque système, dans chaque couche et dans chaque configuration en fonction de la température.

L'image de deux engrenages élastiques mis au contact est donc particulièrement adaptée pour visualiser ce problème de type Frenkel-Kontorowa [189].

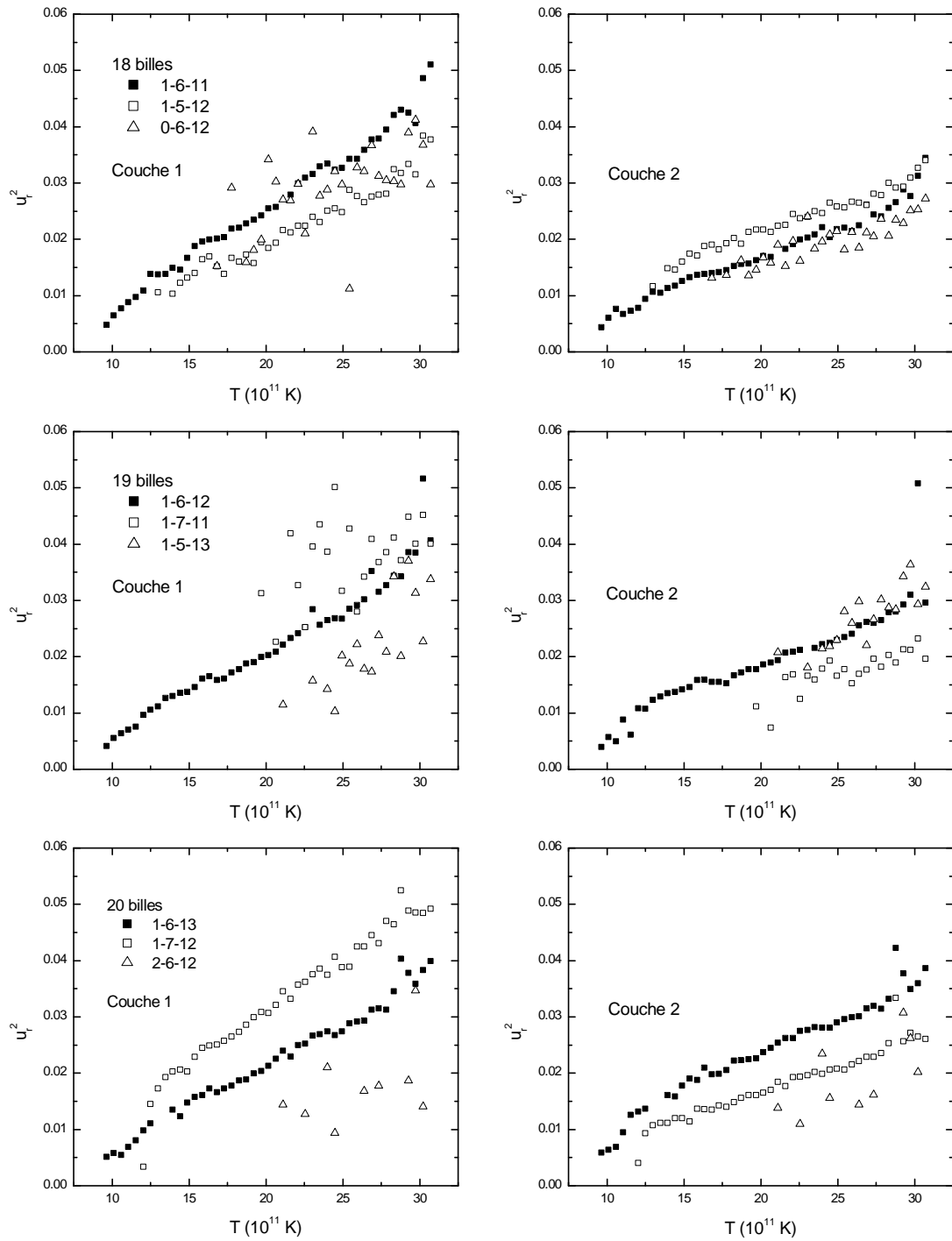


FIG. 9.5 : Déplacements radiaux u_r^2 pour chaque système, dans chaque couche et dans chaque configuration en fonction de la température.

Déplacements radiaux

La dépendance avec la température des déplacements radiaux quadratiques moyens u_r^2 moyennés sur toutes les configurations est présentée sur la figure 9.3(a). Les déplacements correspondant à la couche 1 se comportent sensiblement de la même manière pour les trois

systemes : ils augmentent régulièrement de 0,005 pour les petites températures à environ 0,05 pour la couche 1 et 0,03 pour la couche 2, pour laquelle les déplacements restent systématiquement plus faibles²⁰. Dans la plage de températures explorée, les déplacements quadratiques restent plus faibles que 0,05, la valeur critique du critère de Lindemann. Ceci justifie donc *a posteriori*, que jusqu'à la température maximale explorée la structure en couche est bien définie.

Selon le critère de Lindemann, nous devons nous attendre à ce que la valeur des déplacements augmente fortement juste après cette température maximale, à laquelle la valeur 0,05 est atteinte. Nous considérons donc que la température de "fusion" radiale T_R est de l'ordre, pour les trois systèmes, de notre température limite, à savoir 30.10^{11} K.

La géométrie locale des systèmes intervient également au niveau des mouvements radiaux, mais de manière plus subtile que dans les mouvements orthoradiaux : si l'on regarde de plus près les valeurs des déplacements, nous pouvons constater qu'elles sont légèrement différentes selon le nombre de billes. Ceci est surtout marqué pour la couche 1, pour laquelle les plus petits et les plus grands déplacements sont atteints respectivement pour $N = 19$ et $N = 20$, quelle que soit la température²¹. Le phénomène est encore plus marquant si l'on considère les déplacements non renormalisés $r_0^2 u_r^2$, dont les évolutions avec la température sont présentées sur la figure 9.6. Les déplacements dans la couche 1 sont identiques pour les systèmes à 18 et 20 billes, et supérieurs de près de 15% aux déplacements pour $N = 19$.

Ainsi, contrairement aux déplacements orthoradiaux, plus que l'espace disponible, il semble donc que c'est la symétrie locale qui influe sur les déplacements radiaux à l'intérieur d'une couche donnée. Cette hypothèse est confirmée par le fait que les déplacements des particules de la couche 2, qui subissent à l'extérieur le même potentiel régulier, soient identiques pour les trois systèmes.

Pour comprendre en détail le rôle joué par la géométrie du système, il convient de s'intéresser aux déplacements calculés spécifiquement dans chaque configuration (figure 9.5)²².

Ces déplacements associés à chaque configuration augmentent régulièrement avec

²⁰En reprenant l'argument de Bedanov *et al.* [48], ceci peut être expliqué par le fait que cette couche est soumise, vers son extérieur, à une force constante due au confinement, alors que la couche 1 est soumise à un potentiel fluctuant de chaque côté.

²¹Rappelons que cette différence ne peut être due à un effet d'espace libre disponible lié à la densité, puisque d'une part les déplacements sont normalisés (équation (9.3)) et d'autre part même normalisés, les déplacements pour $N = 18$ sont plus importants que pour $N = 19$.

²²Notons dès à présent que les données correspondant aux configurations ayant un faible temps de résidence — les deux états excités pour $N = 19$ et les seconds états excités pour $N = 18$ et 20 — sont entachées d'une forte incertitude statistique à cause de la faiblesse des données disponibles. Cependant, une tendance générale se dessine même dans ces quatre cas.

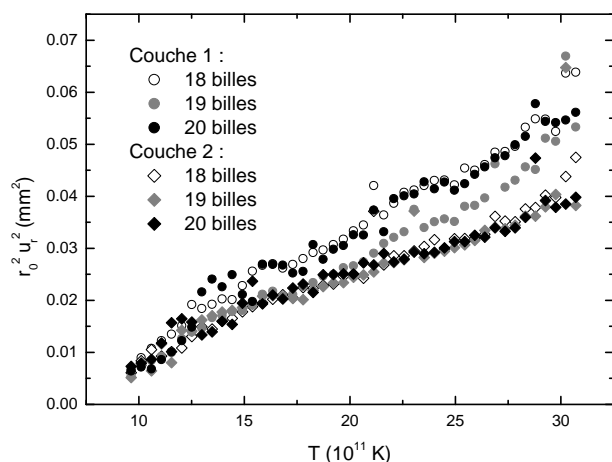


FIG. 9.6 : *Déplacements radiaux quadratiques moyens non renormalisés en fonction de la température.*

la température. Néanmoins, leurs valeurs diffèrent fortement selon la configuration, la différence entre les valeurs pour deux configurations données étant à peu près constante. Elle peut aller jusqu'à 20%. Si l'on se focalise sur les configurations des états fondamentaux, on constate que pour la couche 1, les courbes pour $N = 19$ (1-6-12) et $N = 20$ (1-6-13) sont superposables et en dessous de la courbe pour $N = 18$ (1-6-11). Pour la couche 2, la plus grande valeur est cette fois-ci atteinte dans le cas $N = 20$ (1-6-13) alors que les courbes pour $N = 19$ (1-6-12) et $N = 18$ (1-6-11) sont superposables.

Il semble délicat d'énoncer des règles définitives permettant de justifier ces différences et similitudes; cependant, l'observation des positions respectives des courbes des trois configurations pour un nombre de billes donné permet de dégager une tendance :

- Le nombre de billes sur la couche est un facteur déterminant : plus une couche compte de billes, plus l'excursion radiale de celles-ci y est important, comme l'illustre parfaitement le cas $N = 20$ où les positions respectives des courbes pour les deux premiers états sont inversées entre la couche 1 et la couche 2. Ceci est cohérent avec la décroissance de la fréquence de vibration radiale lorsque le nombre de billes dans la couche est plus grand²³. Le puits de potentiel radial dans lequel se déplace la bille est donc plus évasé, et le déplacement plus grand.
- En cas d'égalité du nombre de billes²⁴ les configurations commensurables, à savoir (0-6-12), (1-6-12) et (2-6-12), présentent des excursions radiales plus faibles. Ceci peut être interprété ainsi : dans le cas d'une configuration commensurable, toutes les billes (pour la couche 1) ou la moitié des billes (pour la couche 2), se retrouvent

²³Une des conséquences de ce phénomène est qu'à partir d'un certain nombre de billes (qui dépend de l'interaction), le carré de la fréquence devient négatif, indiquant que la configuration avec une couronne trop dense est instable : un nouvel état d'équilibre est alors atteint en plaçant une des particules au centre. C'est une des manières de concevoir l'évolution la construction en couches dans les îlots confinés circulairement [179].

²⁴C'est à dire, pour la couche 1, les couples (1-6-11), (0-6-12) et (1-6-13), (2,6,12) et pour la couche 2 les couples (1-5-12), (0-6-12) et (1-7-12), (2-6-12).

chacune exactement en face d'une bille de l'autre couche, qui la repousse. En revanche, dans le cas incommensurable, une bille peut se déplacer radialement plus facilement, en se "glissant" entre deux billes de l'autre couche²⁵.

Cette analyse permet de comprendre les positions relatives des configurations des états fondamentaux évoquées précédemment. Pour la couche 2, la couche la plus peuplée (13 billes, pour $N = 20$) présente les déplacements les plus importants. Nous devrions trouver ensuite la couche à 12 billes, puis à 11 billes. Cependant la couche à 12 billes appartient à une configuration commensurable, ce qui réduit les valeurs de ses déplacements jusqu'aux valeurs de la couche à 11 billes. Pour la couche 1, le nombre de billes est identique. Toutefois, la couche qui est entourée par le plus petit nombre de billes (cas $N = 18$) présente les excursions les plus fortes, car la pression exercée par la couche extérieure est plus faible dans ce cas. Suivant cette logique, on devrait alors trouver la couche de $N = 19$ puis la couche de $N = 20$, mais pour les raisons de commensurabilité déjà évoquées, les valeurs des déplacements dans ces deux cas sont finalement semblables.

En conclusion, nous avons donc pu constater que les excitations collectives radiales dépendent fortement de la configuration. Ces variations ne sont pas liées au niveau d'énergie de la configuration, car parfois les excursions sont plus fortes dans les états excités, parfois plus faibles, mais par la géométrie du système. L'amplitude du déplacement radial, et donc la fusion des couches, sont essentiellement contrôlés par deux facteurs : le nombre de particules dans chaque couche, et la commensurabilité des couches.

9.6 Scénario d'une route vers le désordre

Les différents mécanismes en jeu dans la route vers le désordre ayant été identifiés, nous pouvons désormais discuter de l'ensemble du processus. Les différentes températures de "transition" mesurées précédemment sont rappelées dans le tableau 9.1.

Autour des températures T_ℓ , bien inférieures aux températures T_0 et T_R , les systèmes peuvent être vus comme des ensembles de couches rigides. Les raisons du désordre autour de ces températures sont donc essentiellement, d'une part, les transitions entre configurations, dont les températures seuil T_S sont proches des T_ℓ et d'autre part les rotations relatives des couches, dont nous avons vu qu'elles étaient importantes même autour de ces températures. Ces deux processus induisent une baisse de la corrélation temporelle entre les particules. Ils ne sont d'ailleurs pas nécessairement indépendants : une rotation relative de deux couches pouvant aider à la transition d'une bille de l'une à l'autre, avec une trajectoire non uniquement radiale. Le fait que l'incommensurabilité favorise à la fois

²⁵Ce résultat, assez intuitif, est cependant en contradiction avec ce qui a été observé par Filinov *et al.* dans leur simulation de fusion d'îlots d'électrons [190] : les plus forts déplacements radiaux sont trouvés pour le "nombre magique" $N = 19$. Nous n'avons pas trouvé d'interprétation à cette différence.

N	T_l	T_S	T_O	T_R
18	$T_l < 13$	16	29	$T_R > 30$
19	$T_l > 18$	22	30	$T_R > 30$
20	$13 < T_l < 18$	18	29	$T_R > 30$

TAB. 9.1 : *Résumé des différentes températures de transition (en $10^{11} K$).*

la rotation et les transitions confirme cette hypothèse.

Si la température augmente, alors que les transitions entre configurations deviennent plus nombreuses et les excitations collectives commencent à compter. Dans un premier temps, à une température $T \simeq T_O < T_R$, les couches fondent tout en restant distinctes, jusqu'à ce que, les excursions radiales devenant importantes, la structure en couches disparaisse. Dans cette phase, le rôle de la géométrie du système est moins marqué, bien que la commensurabilité des couches tende à diminuer les excursions radiales.

La figure 9.7 illustre les différents états du système pour trois températures typiques. Il s'agit des trajectoires des billes au cours du temps pour ces trois températures. En dessous de la température de désordre T_ℓ , les billes oscillent, essentiellement angulairement, autour de leur position d'équilibre. Pour une température voisine de T_O , les différentes positions forment un continuum à l'intérieur des couches, qui restent bien distinctes. Notons que si l'on se tenait au critère de Lindemann $u_{\theta_1}^2 \sim 0,05$, les taches correspondant aux billes devraient être séparées, ce qui n'est manifestement pas le cas. On voit ici l'effet des rotations relatives entre les couches et des transitions entre configurations, qui induisent des réorganisations locales des couches après le départ ou l'arrivée d'une bille. Enfin, lorsqu'on s'approche de T_R , les couches "fondent" radialement et deviennent de plus en plus indistinctes.

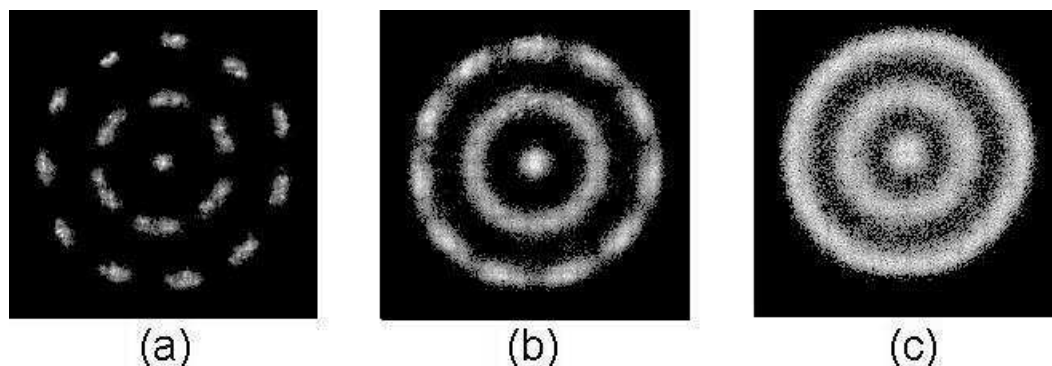


FIG. 9.7 : *Trajectoires dans le systèmes à 18 billes obtenues pour 3 températures. (a) : $T < T_\ell$; (b) : $T \sim T_0$; (c) : $T \sim T_R$.*

9.7 Route vers la désordre en l'absence d'invariance par rotation

Afin de mieux comprendre les différents mécanismes en jeu, nous avons commencé à explorer la dynamique d'îlots confinés par un cadre elliptique. Cette modification de la géométrie du confinement présente plusieurs intérêts, avec l'idée de voir comment, à partir des mécanismes mis en valeur pour un confinement circulaire, on peut extraire des informations pertinentes dans le cas où le système ne peut plus tourner²⁶. En jouant sur l'ellipticité du confinement, nous pouvons en effet empêcher la rotation globale du système et donc donner plus d'importance aux autres degrés de liberté. De plus, ces degrés de liberté mis en valeur le sont de manière différente selon la particule considérée, car en brisant l'invariance par rotation toutes les particules d'une même couche ne sont pas équivalentes. Enfin, modifier l'ellipticité permet également de modifier les niveaux relatifs d'énergie des configurations et mesurer par conséquent l'importance des changements de configurations dans le désordre dynamique. Notons de plus qu'en empêchant la rotation des couches, on se rapproche de situations pouvant être rencontrées dans un cristal, tout en gardant un système simple à étudier.

Ces travaux n'en étant qu'à leur début, nous nous contentons ici de ne donner que les grandes lignes des premiers résultats concernant les excitations individuelles dans un système de 9 billes.

En comparaison de l'abondante littérature existant sur les îlots circulaires, il existe encore peu de travaux numériques consacrés aux îlots confinés dans des ellipses. Ils sont, de plus, essentiellement axés sur l'étude des positions d'équilibre et les spectres de vibration de ces configurations en fonction du rapport b/a entre la longueur du petit axe et la longueur du grand axe. Citons ici le travail de Cândido *et al.* pour des particules en interaction de Yukawa [46], et celui, déjà évoqué, de Meyers et Daumens sur des vortex dans des supraconducteurs [58].

Nous avons également étudié les configurations d'équilibre des îlots de Wigner confinés elliptiquement pour des rapports d'axes b/a entre 0,5 et 1 et un nombre de billes compris entre 4 et 30 [191]. Cette étude a motivé les travaux de Apolinario *et al.* qui ont récemment exploré les configurations d'équilibre dans de tels îlots dans le cas d'une interaction logarithmique [192]. Leur étude a confirmé les positions d'équilibre observées expérimentalement, aux incertitudes liées à de faibles différences d'énergie près.

Ces observations permettent d'établir quelques traits caractéristiques des îlots confinés elliptiquement (par rapport aux îlots dans un cadre circulaire) :

²⁶Ainsi, nous avons vu que les transitions entre configurations semblaient favorisées par une rotation relative des couches. Ici cette rotation est rendue plus difficile, il est intéressant de voir de quelle manière ces transitions peuvent se dérouler.

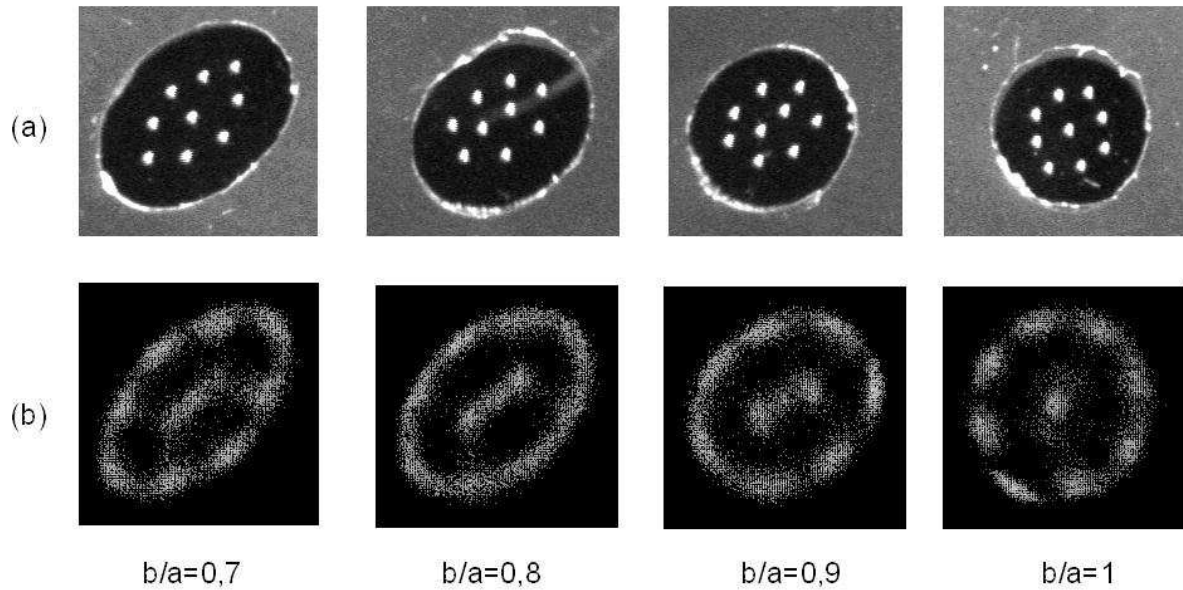


FIG. 9.8 : (a) : États fondamentaux des îlots de 9 billes dans des confinements elliptiques, pour 4 rapports d'axes différents. (b) : Trajectoires dans ces mêmes îlots.

- Les configurations d'équilibre ainsi que leurs positions relatives en énergie dépendent de manière marquée du rapport d'axes b/a (voir par exemple la figure 9.8(a)).
- À cause de la brisure de l'invariance par rotation, plusieurs configurations bien marquées sont possibles au sein d'une même couche, pour un même nombre de billes²⁷. Par ailleurs lorsque le rapport b/a varie, les changements de configuration d'énergie minimale peuvent être brutaux (changement du nombre de billes dans une couche) ou continus (modification de la structure de la couche).
- Les "nombres magiques" permettant d'obtenir une structure proche d'un réseau hexagonal changent selon le rapport d'axes.

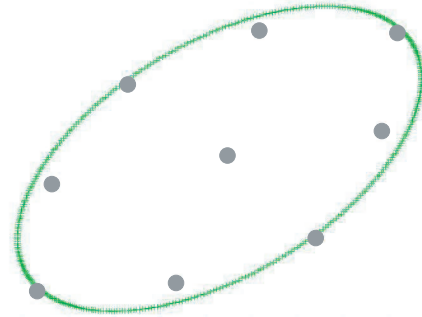
Un exemple de système permettant cette étude est donné par les îlots de 9 billes, qui présentent deux configurations d'équilibre très proches en énergie, les configurations (1-8) et (2-7). Comme présenté sur la figure 9.8(a), les positions relatives en énergie de ces deux configurations varient avec b/a . Mais les positions restent proches, avec une barrière peu élevée, et il est possible de trouver une température T_t permettant d'obtenir un fort taux de transition sans que les excitations collectives soient importantes. Ce fort taux de transition offre ainsi la possibilité de suivre les transitions en fonction du

²⁷En particulier, nous pouvons remarquer que dans la configuration de l'état fondamental des systèmes circulaires à 3 couches, la configuration des deux couches internes est la même que dans l'état fondamental du système bicouches correspondant. Cela n'est plus le cas dans les systèmes elliptiques, si l'on tient compte des différentes positions que peuvent prendre les couches par rapport aux axes du système.

rapport d'axes b/a et de préciser le lien entre ces transitions et l'invariance par rotation, puisque la rotation des couches devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que b/a décroît. Pour preuve, lorsque le système passe d'une configuration (1-8) à (2-7) en faisant glisser une bille au centre, la réorganisation de la couche extérieure est très lente et celle-ci reste longtemps non périodique, dans les cas des rapports d'axes inférieurs à 0,8.

La figure 9.8(b) présente les trajectoires des particules obtenues à la température T_t , pour des confinements dont le rapport d'axes b/a va de 0,7 à 1. Jusqu'au rapport $b/a = 0,8$, il apparaît clairement que les transitions se font exclusivement au niveau des billes qui ne sont pas placées sur les axes de l'ellipse, mais dans ses "coins", que ce soit pour ajouter une bille au centre ou pour en enlever. Par ailleurs, en-dessous de ce même rapport $b/a = 0,8$ nous n'avons observé aucune rotation globale de la couche extérieure.

La "spécialisation" de certaines billes peut se comprendre à l'aide de critères géométriques. La couche extérieure des systèmes en position (1-8) est en réalité constituée de deux sous couches elliptiques de 4 billes de même rapport d'axe, mais de tailles différentes, comme nous pouvons le constater sur le schéma ci-contre, réalisé à partir des positions d'équilibre des billes dans une ellipse de rapport $b/a = 0,7$. La sous couche la plus proche du centre correspond aux quatre billes dans les "coins". Pour qu'une bille située aux extrémités du grand axe puisse aller vers le centre, elle doit "pousser" les deux billes du coin, ce qui a un coût énergétique trop fort. Une bille située sur le petit axe semble mieux placée pour aller vers le centre. Cependant, dans la configuration (2-7), les deux billes centrales se retrouvent alignées le long du grand axe : la bille qui veut rentrer doit donc avancer tout en poussant la bille centrale orthogonalement à la force qu'elle exerce sur elle, ce qui semble difficile à réaliser. Si, grâce aux fluctuations thermiques, la bille centrale découvre un peu de place sur un de ses côtés, les billes des "coins" sont donc les mieux placées pour se glisser et occuper la place vacante.



La manière dont le désordre est introduit par les excitations individuelles semble donc varier selon la géométrie du système. Ces excitations sont en effet soit uniformément réparties sur la couche et assistées par les rotations, soit associées à certaines particules d'une couche. Il serait intéressant de poursuivre dans cette voie en comparant les activités de systèmes plus ou moins elliptiques, en maintenant constants les autres paramètres tels la différence d'énergie entre les configurations (en modifiant la taille des systèmes).

Par ailleurs, cet aperçu de la dynamique suggère que l'asymétrie peut bloquer certains mouvements et en favoriser d'autres, observation qui pourrait être mise à profit dans les réseaux de particules piégés présentant des particules interstitielles, quand l'enjeu est de

réussir à maintenir en place toutes les particules, comme dans les réseaux de vortex où l'on souhaite augmenter l'intensité du courant critique.

9.8 Conclusion

Les fluctuations thermiques, comme un potentiel extérieur gelé, conduisent au désordre en induisant des excitations individuelles ou collectives des particules. Notre étude sur les îlots de Wigner montre que les excitations individuelles peuvent participer activement à cette mise en désordre, et ce à des températures bien plus basses que les températures usuellement identifiées à l'aide d'un critère "collectif" tel le critère de Lindemann. Ceci implique qu'il conviendra de prendre en compte cet effet dans une étude du désordre dû au piégeage, même faible.

Nous avons montré que la géométrie locale du système environnant les particules excitées joue un rôle important, les excitations individuelles étant favorisées par une absence d'environnement de forte symétrie, ou par la position singulière de certaines billes. De même, les déplacements relatifs entre alignements de billes (ici, les couches) dépendent fortement de la commensurabilité de ces ensembles. Ce point va être développé dans le chapitre suivant.

À plus haute température, les excitations collectives deviennent plus importantes, et la symétrie locale continue là encore de jouer un rôle important.

Ces observations suggèrent que dans le cas d'un réseau élastique piégé, même faiblement, les hétérogénéités dans le cristal induites par le potentiel sous-jacent pourraient être accentuées localement, et différemment selon la configuration locale, par les excitations thermiques, et ce même à faible température.

Par ailleurs, en ce qui concerne l'étude proprement dite de la "route vers le désordre" de petits systèmes de particules en interaction, nous avons mis en évidence que le désordre, caractérisé par la fonction de corrélation temporelle, apparaît très tôt et qu'il est essentiellement dû aux excitations individuelles de particules passant d'une couche à l'autre, corollairement à une rotation relative des couches. Cette particularité des petits systèmes n'est pas mise en évidence par le critère général qu'est le critère de Lindemann. Ce processus est progressivement mis en concurrence avec les excitations collectives qui brisent l'ordre tout d'abord à l'intérieur des couches, puis dans les couches elles-mêmes, selon un scénario en cohérence avec les études numériques précédemment publiées²⁸. Nous suggérons que l'emploi d'une fonction de corrélation temporelle permet de rendre compte

²⁸Une telle dynamique a également été observée dans des systèmes colloïdaux par Bubeck *et al.* [193, 194], dans lesquels une phase dite réentrante, pendant laquelle l'ordre radial est retrouvé après avoir été perdu, est mesurée. Ce phénomène semble être dû au fait que les interactions des particules avec la paroi sont, dans leurs systèmes, des interactions de contact [182].

de manière globale du désordre survenant dans les systèmes.

De plus, tout au long du processus, que ce soit au niveau des excitations individuelles ou des excitations collectives, nous avons mis en évidence le rôle essentiel joué par la géométrie locale. Notamment, la notion de commensurabilité est un critère important. Les configurations incommensurables pouvant se désordonner plus facilement.

Signalons que ce rôle de la commensurabilité a été mis en valeur par des considérations de déplacements moyens. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est possible de la quantifier de manière plus fine en s'intéressant à l'évolution en temps des couches des îlots.

Chapitre 10

Processus de diffusion unidimensionnels et symétries locales

Sommaire

10.1 Introduction	197
10.2 Diffusion dans un canal fixe et lisse	199
10.2.1 Dispositif et protocole expérimentaux	199
10.2.2 Diffusion d'une seule bille	199
10.2.3 Diffusion de billes en interaction dans un canal	201
10.3 Diffusion dans un potentiel périodique fluctuant	205
10.3.1 Accélération de la diffusion dans un potentiel modulé	206
10.3.2 Diffusion et commensurabilité	207
10.3.3 Conclusion	210

10.1 Introduction

Afin de qualifier le bain thermique effectif dans lequel sont plongées nos billes, nous nous sommes intéressés dans le chapitre 3 à la diffusion de billes libres et de billes piégées dans un puits harmonique. Cette étude nous a permis de montrer que le formalisme de Langevin permet bien de décrire les trajectoires de nos particules, et nous avons pu déterminer les constantes caractéristiques introduites dans ce formalisme.

Par ailleurs, l'étude de la dynamique autour des pièges¹ des particules interstitielles dans les réseaux piégés, ou les possibilités de mouvement de ces particules dans des canaux plastiques nous ont conduit à nous interroger sur la diffusion de particules dans des canaux unidimensionnels modulés par d'autres particules en mouvement. Dans ces cas, l'équation de Langevin devient alors non linéaire et donc difficile à résoudre analytiquement.

¹Ou même, plus généralement, autour de défauts ponctuels.

Si des simulations numériques ou des approches différentes, par exemple à travers l'équation de Fokker-Planck, ont permis de répondre à certains problèmes posés, les champs de recherche dans ce domaine, et ce même pour des systèmes très simples en apparence, restent largement ouverts.

Aussi avons-nous profité des possibilités offertes par notre dispositif expérimental, dont nous contrôlons parfaitement la température tout en pouvant modifier aisément les profils des potentiels d'interaction autour de nos particules, pour aborder l'étude de ce type de diffusion.

Nous nous focalisons ici sur le problème de la diffusion d'un ensemble de particules en interaction dans un canal 1D modulé spatialement et temporellement, en nous attachant à préciser le rôle de la commensurabilité entre le système diffusant et le canal de diffusion. Le système retenu sont les couches 1 et 2 des îlots à $N = 18$ et 19 billes confinés circulairement, ces couches étant soumises de part et d'autre à un potentiel périodique et fluctuant dû aux autres couches².

Afin de préciser le rôle de la modulation du canal de diffusion, nous avons préalablement étudié la diffusion de particules en interaction assujetties à demeurer dans un canal unidimensionnel lisse suffisamment étroit pour interdire tout échange de positions. Notons que ce problème de "Single File Diffusion" (SFD) est une situation physique que l'on retrouve dans des systèmes variés³, et notre dispositif s'insère dans les recherches actuelles sur ce sujet qui, tant du point de vue expérimental que théorique, aboutissent jusqu'à présent à des résultats parfois contradictoires.

Nous reprenons dans ce qui suit les notations introduites dans la section 3.3 et dans l'annexe B.

²Cette étude se veut donc complémentaire de l'étude du paramètre $u_{\theta_2}^2$ utilisé pour caractériser le déplacement relatif entre les deux couches principales de ces îlots (couches 1 et 2). Dans cette étude, nous n'avons pas considéré la rotation globale des couches, car ce qui nous intéressait était l'ordre dans le système.

³Le transport d'ions dans des membranes biologiques ou de molécules dans des matériaux poreux, font essentiellement appel à ce formalisme.

10.2 Diffusion dans un canal fixe et lisse

10.2.1 Dispositif et protocole expérimentaux

Afin d'étudier la diffusion dans un canal lisse, nous confinons les billes dans un canal circulaire de rayons intérieur et extérieur valant respectivement 3 et 5 mm, le fond du canal étant le wafer habituellement utilisé. Le disque intérieur au canal comme le cadre extérieur sont au même potentiel, celui des billes. L'étréitesse de ce canal empêche tout croisement entre les billes. Un exemple de ce système est donné sur la figure 10.1.

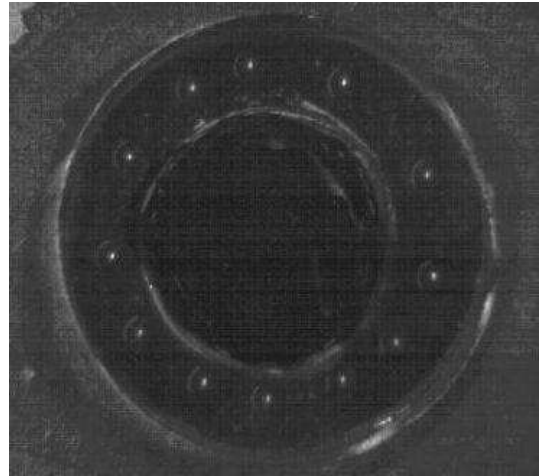


FIG. 10.1 : Canal circulaire utilisé pour étudier la diffusion 1D, ici avec 12 billes.

Pour étudier le mouvement des billes, les pas de temps d'acquisition sont choisis entre 15 et 100 ms, selon que nous voulons plutôt étudier les comportements aux temps courts ou aux temps longs, et des séries de 10000 images sont prises. Ce choix permet d'explorer avec une statistique satisfaisante la plage de temps $0, 1\tau_R < t < 1000\tau_R$, où $\tau_R \simeq 100$ ms est le temps caractéristique de relaxation d'une bille dans le bain thermique qui marque, entre autres, le changement de régime entre le régime quadratique pour les temps courts et linéaire pour les temps longs dans le cas d'une diffusion libre.

Nous mesurons à chaque instant les coordonnées polaires r et θ des billes. L'étude du mouvement radial permet de connaître la nature du potentiel de confinement. Celui du mouvement angulaire correspond à la diffusion le long du canal. Par conséquent, comme nous voulons nous rapprocher d'un système infini, nous considérons les valeurs cumulées de la coordonnée angulaire d'une bille, et non pas l'angle modulo 2π : si la bille fait un tour, sa coordonnée θ varie de $\pm 2\pi$. Nous considérons de plus le déplacement total d'une bille, sans soustraire un éventuel mouvement d'ensemble (mouvement du centre de masse dans un canal rectiligne).

10.2.2 Diffusion d'une seule bille

Le canal dans lequel nos billes se meuvent est non rectiligne et caractérisé par un potentiel de confinement latéral imposant au système de billes de rester quasi unidimensionnel. Afin de nous assurer que notre dispositif permet bien de modéliser un problème de diffusion unidimensionnel, mais aussi afin de pouvoir distinguer ultérieurement les effets dus à l'interaction entre les billes de ceux éventuellement dus à cette géométrie particulière, nous commençons par étudier la diffusion d'une seule bille dans ce canal.

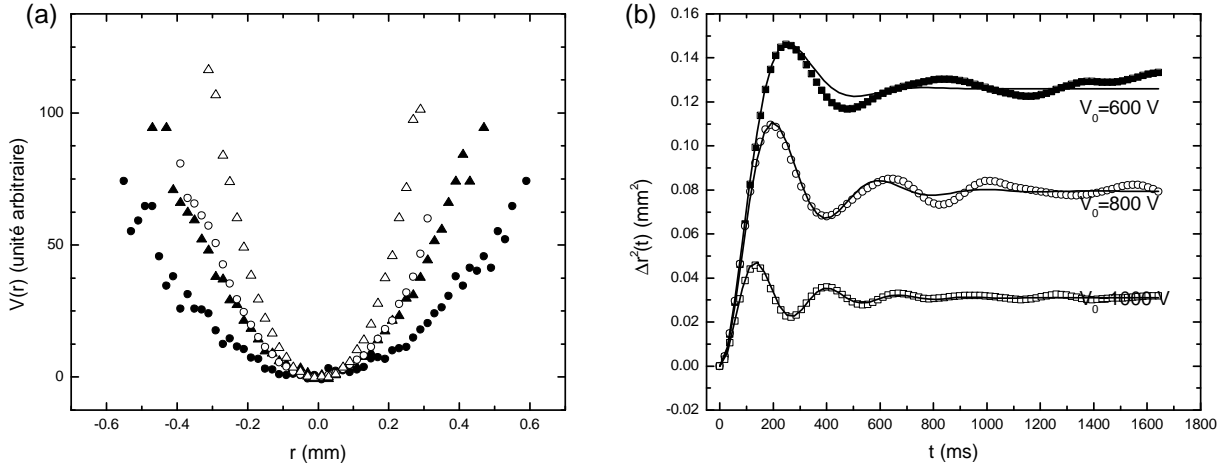


FIG. 10.2 : (a) : Potentiels radiaux de confinement dans la couronne obtenus à partir de la distribution des rayons des billes, pour deux nombres de billes différents et deux tensions V_0 : 1 bille, $V_0 = 800$ V (●) ; 1 bille, $V_0 = 1000$ V (▲) ; 12 billes, $V_0 = 800$ V (○) ; 12 billes, $V_0 = 1000$ V (△). r est mesuré ici par rapport au rayon moyen (environ 4 mm). (b) : d.q.m $\Delta r^2(t)$ pour une seule bille dans la couronne, pour trois tensions V_0 différentes. Les courbes pleines indiquent l'ajustement à la loi (10.2).

À faible température ($T \sim 5.10^{11}$ K), une bille placée dans le canal connaît des oscillations radiales associées à une petite exploration orthoradiale. Lorsque la température augmente, ce déplacement orthoradial augmente en amplitude et la bille peut réaliser plusieurs tours dans la couronne. Aucun rebond sur les bords du canal n'est observé, le confinement n'est dû qu'à la répulsion de nature électrostatique. Le profil $\mathcal{E}(r)$ de ce potentiel de confinement peut être déterminé à partir de la distribution des coordonnées radiales de la bille :

$$\mathcal{E}(r) = -k_B T \ln P(r), \quad (10.1)$$

où $P(r)$ est la probabilité de distribution de la coordonnée radiale r . Deux profils, obtenus pour deux tensions V_0 différentes, sont présentés sur la figure 10.2(a). Quelle que soit la tension appliquée dans la gamme $600 \text{ V} < V_0 < 1000 \text{ V}$, le confinement crée un puits harmonique dont la raideur K augmente avec V_0 , alors que la position moyenne de la bille reste inchangée⁴. Afin d'amplifier le mouvement unidimensionnel, nous travaillons donc dans la suite avec des tensions V_0 élevées ($V_0 \simeq 1000 \text{ V}$).

Nous avons déjà étudié à la section 3.3 l'évolution avec le temps du déplacement quadratique moyen (d.q.m.) $\Delta r^2(t)$. Cette évolution est présentée de nouveau sur la figure 10.2(b) pour trois potentiels différents. Elle est très bien ajustée par la loi

⁴Pour des tensions plus basses, la forme du confinement électrostatique devient de plus en plus plate, épousant le profil géométrique du canal.

$$\Delta r^2(t) = 2 \frac{k_B T}{K} \left[1 - e^{-\gamma t/2} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right) \right], \quad (10.2)$$

où $\omega_0 = K/m$ est la pulsation propre du puits et $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ est la pulsation effective. Comme on pouvait s'y attendre, l'ajustement est meilleur pour les hautes tensions, pour lesquelles le profil du puits est parfaitement harmonique.

Le mouvement s'effectuant dans un canal circulaire, il convient de vérifier qu'il n'existe aucun couplage effectif entre les coordonnées radiale et orthoradiale. En effet, si l'on écrit les équations du mouvement en coordonnées polaires, il existe *a priori* un couplage formel entre r et θ . Les variations du d.q.m. angulaire $\Delta\theta^2(t)$ en fonction du temps sont présentées sur la figure 10.3(b). Aux temps longs, et ce quelle que soit la température, le déplacement croît linéairement avec le temps, la diffusion le long du canal est donc libre. Notons également que cette dépendance linéaire du déplacement confirme que les billes ne rebondissent pas sur les bords, car en cas de rebond, il a été montré par Aslangul que la dépendance du déplacement avec le temps peut être complètement différente [195]. Par ailleurs, nous n'observons aucune oscillation, même à petits temps, ce qui montre que les mouvements radiaux et orthoradiaux sont découplés⁵.

En conclusion, nous avons un dispositif où les billes présentent deux mouvements découplés. Le mouvement orthoradial est une diffusion libre unidimensionnelle. Ses régimes "temps court" et "temps long" sont distingués par le temps d'amortissement $\tau_R = \gamma^{-1}$ qui peut être mesuré *in situ* en considérant le mouvement radial, qui est une diffusion dans un puits parabolique. Nous pouvons donc utiliser ce dispositif en couronne pour étudier la diffusion d'une file de plusieurs billes.

10.2.3 Diffusion de billes en interaction dans un canal

Nous nous focalisons ici sur la diffusion d'un ensemble de 8, 12 ou 16 billes placées dans la couronne. Les billes sont alors situées à une distance de l'ordre du mm, distance de travail habituelle dans nos systèmes⁶. De plus, 12 est également à une unité près le nombre de billes présentes sur la couche externe des îlots à 18 ou 19 billes dont nous voulons étudier la diffusion.

Les potentiels de confinement radiaux typiques sont présentés sur la figure 10.2(a) pour $N = 12$ billes. Comme dans le cas $N = 1$, ils sont harmoniques, indépendants de la température et de raideur proportionnelle à V_0^2 . Cependant, notons que les raideurs, pour une tension V_0 donnée, sont plus importantes que pour une seule bille⁷. Elles augmentent

⁵Ceci était d'ailleurs suggéré par le fait que la raideur K du puits est indépendante de la température; en cas de couplage, la raideur effective dépendrait de la température *via* la vitesse angulaire de la bille.

⁶Ces nombres de billes ont également été choisis pour que ces couronnes restent circulaires et ne présentent pas de configuration en "zig-zag", contrairement à ce qui se passe pour d'autres nombres de billes, selon Schweigert *et al.* [196].

⁷La pulsation propre ω_0 est de l'ordre de 30 s^{-1} au lieu de 20 s^{-1} pour une seule bille.

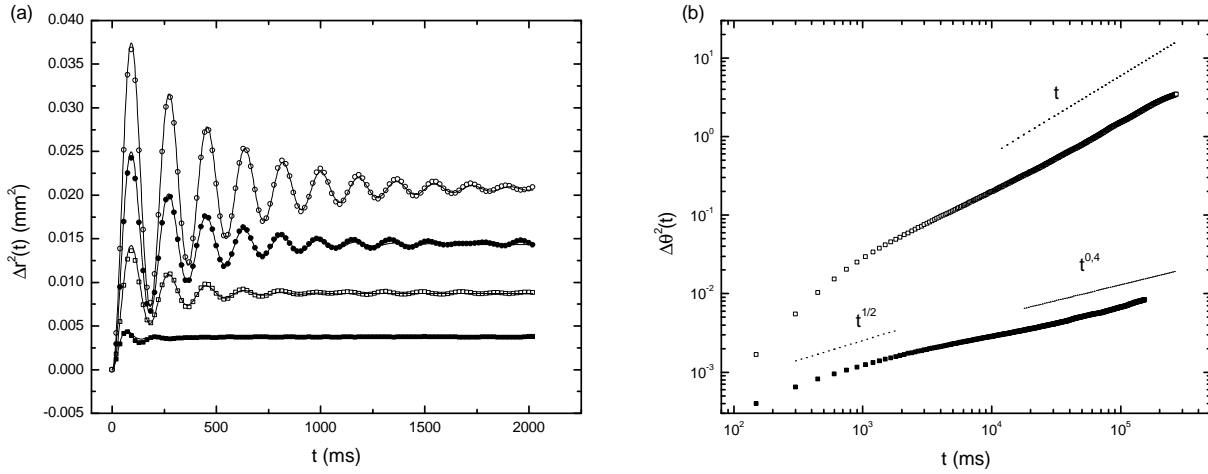


FIG. 10.3 : (a) : d.q.m. radiaux d'une bille dans une couronne de 12 billes, avec $V_0 = 1000$ V et $T = 3,5 \times 10^{11}$ K (\blacksquare), $T = 7,5 \times 10^{11}$ K (\square), $T = 11,5 \times 10^{11}$ K (\bullet), $T = 17,5 \times 10^{11}$ K (\circ). Les courbes pleines montrent l'ajustement avec la loi (10.2). L'augmentation avec T du nombre d'oscillations visibles est une conséquence de la décroissance de l'amortissement γ en fonction de la température. (b) : d.q.m. angulaire pour une bille seule (\square , $V_0 = 1000$ V, $T = 15,1 \times 10^{11}$ K) et une bille dans une couronne de 12 billes (\blacksquare , $V_0 = 1000$ V, $T = 11,4 \times 10^{11}$ K). θ est en radians. Si l'on se place à une température plus élevée, la sortie du régime $t^{1/2}$ se fait encore plus rapidement [32].

également avec le nombre de billes N , en cohérence avec l'étude numérique présentée dans [196] pour des interactions coulombiennes. Par conséquent, le caractère unidimensionnel du mouvement des billes est accentué lorsqu'on augmente la densité⁸. Notons que γ est lui indépendant de N .

Le long du canal, la distribution angulaire de chaque bille est gaussienne avec une largeur proportionnelle à $1/N$. La variation typique de cette largeur $\Delta\theta^2(t)$ avec le temps est présentée sur la figure 10.3(b) dans le cas $N = 12$. Après un accroissement presque quadratique, une transition rapide vers un régime sous diffusif est observée. L'accroissement est d'abord en $t^{1/2}$ sur une décade, puis, dans la décade antérieure à la limite expérimentale, avec un exposant plus faible (proche de 0,4). Comme le montre la figure 10.4(b), ce comportement est indépendant du nombre de billes, qui n'influence que l'amplitude générale du mouvement.

Analysons ces résultats à la lumière de ceux obtenus dans la littérature sur les phénomènes de SFD.

⁸Une autre conséquence intéressante est que cela augmente le nombre d'oscillations observables lorsqu'on étudie le d.q.m. radial des billes, comme présenté sur la figure 10.3(a) : la détermination de γ et de ω par ajustement des courbes en devient d'autant plus précise : ce sont ces données que nous avons utilisées pour présenter la dépendance de γ en fonction de T à la section 3.3.

Le premier modèle théorique permettant de décrire la dynamique d'un ensemble de particules diffusant dans un canal et ne pouvant pas s'y croiser a été écrit par Harris en 1965 [197]. Dans ce modèle comme dans des approches plus récentes telles le travail de van Beijeren *et al.* [198], les particules sont supposées être en interaction de contact et se déplacer dans un canal de longueur infinie. Dans ces conditions, il est montré que le d.q.m. $\Delta x^2(t)$ d'une particule croît aux temps longs comme $t^{1/2}$. Dans un travail plus récent, Kollmann *et al.* montrent que ce comportement se retrouve dans le cas de particules sur-amorties en interaction répulsive quelconque, tant que cette interaction a une portée finie [199].

D'un autre côté, les études expérimentales permettant de mettre en évidence ce comportement sous-diffusif sur ces systèmes sont relativement récentes, peu nombreuses, et donnent des résultats contradictoires. Plusieurs travaux portent sur la diffusion de molécules organiques dans des zéolithes⁹. Deux techniques de visualisation sont utilisées : la Résonance Magnétique Nucléaire [200, 201] et la Diffusion Quasi-élastique de Neutrons [200, 202]. Indépendamment de ces techniques ainsi que des molécules étudiées, certaines études concluent à une diffusion classique [200, 202], et d'autres à une sous-diffusion en $t^{1/2}$ [200, 201]. Un autre système donne également lieu à controverse. Il est possible de confiner dans un canal circulaire des particules colloïdales. Le canal peut être obtenu par photolithographie [203, 204] ou à l'aide pinces optiques décrivant un cercle à une vitesse suffisamment élevée [205]. Alors qu'une diffusion classique est toujours observée aux temps petits et intermédiaires, les interprétations pour le comportement asymptotique sous-diffusif observé varient : certains auteurs suggèrent qu'il s'agit tout simplement du même comportement que celui prévu pour un canal infini [203, 205] alors que pour d'autres, il s'agit de l'effet des couplages hydrodynamiques entre les particules [204]. D'un autre côté, la théorie développée par van Beijeren *et al.* pour des particules en interaction de contact dans un canal fini avec des conditions au bord périodiques prédit que la diffusion doit être linéaire, comme pour une particule libre. Nous ne connaissons à ce jour, aucune étude théorique portant sur des particules en interaction quelconque dans un canal fermé.

Nos résultats se distinguent en deux points des observations menées sur les systèmes colloïdaux dans une géométrie équivalente, dont un exemple est reporté sur la figure 10.4(a).

D'une part, dans les systèmes colloïdaux, un régime linéaire est observé pendant une décade avant le régime sous diffusif. Un tel régime n'est pas observé dans notre système.

⁹Les zéolithes sont des matériaux poreux très utilisés pour la catalyse de réactions de transformation d'hydrocarbures. Leur intérêt est qu'il est aisé de modifier la taille des pores ou leur géométrie, afin d'obtenir le tamisage souhaité des molécules de réactifs ou de produits. De fait, les études présentées ici portent essentiellement sur la diffusion de molécules de méthane et d'éthane.

Ceci indique que le temps τ_T marquant la transition entre la diffusion classique et la sous diffusion, qui correspond au moment où chaque particule ressent l'influence de ses voisines, est petit et de l'ordre de τ_R , qui caractérise le changement entre le régime quadratique et le régime linéaire. Au contraire, dans les systèmes colloïdaux, le temps de transition entre les régimes linéaire et sous diffusif semble être de l'ordre de 10 s, bien plus grand que τ_R qui doit être plus petit que 100 ms¹⁰. Dans notre système, l'interaction est probablement à plus longue portée (au regard de la densité en particules utilisée dans chacun des systèmes), et la transition vers le régime sous diffusif arrive plus tôt. Ceci est confirmé par le fait que ce temps de transition $\tau_T(N)$ diminue lorsque N augmente. Si on le repère par

$$\frac{d \log \Delta \theta^2(t)}{d \log t}(\tau_T(N)) = 1/2, \quad (10.3)$$

on a $\tau_T(8) = 1600$ ms, $\tau_T(12) = 650$ ms et $\tau_T(16) = 150$ ms. De même, dans les systèmes colloïdaux, le régime sous-diffusif survient plus tôt lorsque la densité en particules augmente (figure 10.4(a)).

D'autre part, nous observons un régime avec une croissance plus lente que $t^{1/2}$ aux grands temps, ce qui n'est pas observé dans les expériences sur les particules colloïdales. Cependant, dans leurs expériences, le comportement sous diffusif n'est mis en évidence que pendant une décade et est ajusté par une loi en $t^{1/2}$. Comme nous pouvons le constater sur la figure 10.4(a), les derniers points expérimentaux passent en dessous de la courbe d'ajustement, ce qui pourrait suggérer un ralentissement ultérieur. Dans nos expériences, nous pouvons observer ce ralentissement car elles sont menées jusqu'à un temps maximal quasiment de 3 ordres de grandeur plus grand que le temps τ_T . Des enregistrements plus longs dans les systèmes de particules colloïdales pourraient donner des résultats similaires. Signalons toutefois que cette description en terme de lois de puissance n'est peut être pas la plus adaptée dès lors que cette puissance diminue régulièrement, et qu'une autre description serait certainement plus souhaitable, d'autant plus que ces différents régimes en loi de puissance ne surviennent pas aux mêmes instants selon les interactions et les densités.

Notre expérience permet de montrer que les comportements sous diffusifs observés dans les systèmes colloïdaux ne peuvent être uniquement attribués à des effets hydrodynamiques mais relèvent bien de la théorie générale de la SFD. Cependant, l'origine du ralentissement que nous observons n'est pas immédiatement interprétable dans ce cadre. La plupart des études théoriques existantes portent, d'une part, sur des systèmes infinis et, d'autre part, sur des interactions de contact ou bien sur des systèmes sur-amortis. Notre système ne vérifie pas ces hypothèses.

Nous suggérons que le ralentissement observé pourrait résulter de l'action conjointe de la périodicité du système couplée à une interaction qui n'est ni de contact, ni linéaire.

¹⁰Car aucun régime en t^2 n'est observé.

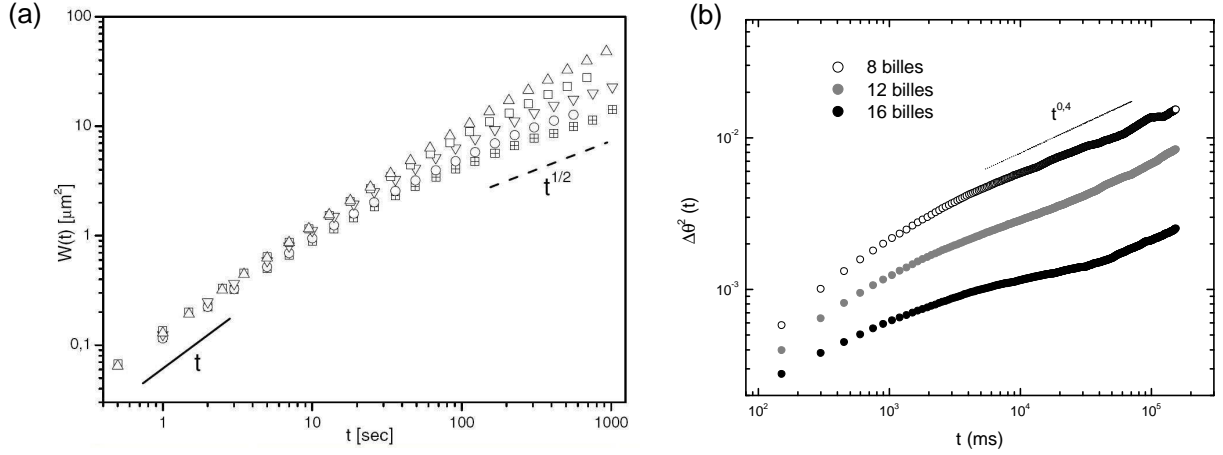


FIG. 10.4 : (a) : *d.q.m. angulaire* mesuré par Lutz *et al.* [206]. Les différentes courbes correspondent à différentes densités de particules. Entre la courbe (Δ) et la courbe (\boxplus), la densité est multipliée par 2. (b) : *d.q.m. angulaire* dans les couronnes à 8, 12 et 16 billes à la température $T = 15,0 \times 10^{11}$ K et sous tension $V_0 = 1000$ V (échelle log-log).

En effet, il a été prouvé que pour un système périodique de particules en interaction de contact, la diffusion est classique [199]. Par ailleurs, si l'interaction entre les particules est de type élastique, le système des équations de Langevin pour l'ensemble de la couronne est linéaire et la contribution du mode normal correspondant à la rotation d'ensemble du système mène à une diffusion classique¹¹. Ni notre système ni les systèmes colloïdaux ne présentent un tel comportement linéaire : la nature de l'interaction entre les particules semble donc, pour un système périodique, être un paramètre discriminant. Notons de plus que dans les systèmes colloïdaux utilisés, le nombre de particules est plus grand, ce qui pourrait impliquer que l'effet de la périodicité ne se fait ressentir que plus tard. Lutz *et al.* montrent d'ailleurs que dans la plage de temps étudiée, la corrélation entre particules est de portée plus faible que le diamètre, faisant de leur système, jusqu'à un certain temps peut être, une bonne réalisation d'un système infini de particules dans un canal. Un développement des travaux présentés ici pourrait être de travailler avec des couronnes plus grandes pour étudier quantitativement l'impact de la périodicité sur la diffusion.

10.3 Diffusion dans un potentiel périodique fluctuant

L'étude de la dynamique des îlots à 18, 19 et 20 billes nous a permis de mettre en évidence une plage de températures dans laquelle, en dehors des transitions ponctuelles entre configurations, l'essentiel de la dynamique relève de la rotation des différentes

¹¹Les autres modes induisent une contribution bornée au bout du temps τ_R .

couches¹². Dans ce régime, si on prend le point de vue d'une des couches, on peut considérer que chacune de ses billes se déplace dans un potentiel périodique légèrement fluctuant dû à l'autre couche.

10.3.1 Accélération de la diffusion dans un potentiel modulé

Dans les îlots à 18 et 19 billes, la couronne 2 (couronne extérieure) a un rayon compris entre 3,5 et 3,9 mm, voisin de celui du canal utilisé à la section 10.2.3 . La comparaison de la diffusion d'une couronne de 11 ou 12 billes ayant à son intérieur soit un potentiel périodique fluctuant soit un potentiel lisse est donc possible.

Nous étudions cette diffusion sur la plage $11.10^{11} \text{ K} < T < 15.10^{11} \text{ K}$. Dans cette plage de température, les transitions entre configurations restent faibles, nous pouvons donc étudier la diffusion sur de grands temps. Comme montré sur la figure 9.3, les déplacements relatifs intracouches normalisés $u_{\theta_1}^2$ sont alors au plus de l'ordre de 0,02, ce qui implique que l'écart type du déplacement d'une bille par rapport à sa voisine est dans la couche 2 de l'ordre de 0,07 radians et dans la couche 1 de l'ordre de 0,15 radians. Ces écarts étant faibles par rapport à la distance angulaire $2\pi/N_c$ entre deux billes de la couche, nous pouvons donc considérer les couches comme des couronnes périodiques dont les éléments peuvent légèrement fluctuer autour de leur position d'équilibre. Ceci est illustré sur la figure 10.5(b) où nous avons reporté les trajectoires de deux billes de la couche 2 dans l'îlot (1-6-12) : les déplacements relatifs sont bien plus faibles que le déplacement commun de ces deux billes.

Pour mener la comparaison, nous avons soumis les îlots au même potentiel V_0 de 1000 V que pour la diffusion dans un canal lisse. La figure 10.5(a) présente la diffusion, dans les mêmes conditions de température, d'une bille de cette couronne, d'une part lorsqu'elle appartient à la couche 2 de l'îlot à 19 billes placé dans sa configuration fondamentale (1-6-12), d'autre part lorsqu'elle est dans un canal lisse. Après un départ similaire aux temps courts, la diffusion dans l'îlot est beaucoup plus importante, en amplitude comme en vitesse. Dans la dernière décade, la diffusion de la couche dans l'îlot suit une loi proche de $t^{0,6}$. Signalons une nouvelle fois que cette description en loi de puissance est surtout un procédé commode pour décrire la vitesse de la diffusion. Cette mobilité accrue est illustrée par des trajectoires correspondantes à ces deux cas reportées sur la figure 10.5(b).

Nous pensons que cette différence importante est à lier au fait que la couche 1 est également en mouvement. En effet, dans un paysage de potentiel périodique fixe, la diffusion d'une particule est ralentie. L'agitation de la couche 1, composée de sa rotation globale, des vibrations de ses billes autour de leur position d'équilibre et des fluctuations liées à l'agitation thermique semble manifestement permettre d'augmenter considérablement, par l'interaction entre les deux couches, la diffusion de la couche 2. On peut en effet

¹²Voir la section 9.6.

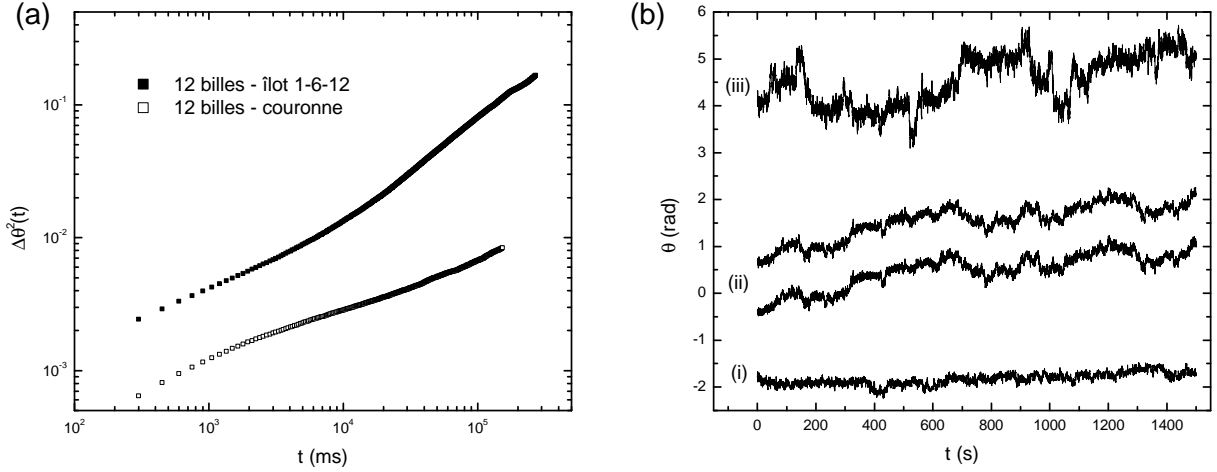


FIG. 10.5 : (a) : *d.q.m.* angulaire dans les couronnes à 12 billes dans un canal et dans l'îlot 1-6-12. La température T vaut $11,4 \times 10^{11}$ K et la tension V_0 est 1000 V. (b)(i)-(ii) : trajectoires ayant permis de calculer ces déplacements. (i) : bille dans la couronne de 12 billes dans le canal ; (ii) : deux billes dans la couche 2 de l'îlot. (b)(iii) : trajectoire d'une bille dans la couche 1 de l'îlot.

concevoir que la diffusion 1D d'une particule ayant sur un de ses côtés une autre particule soit réhaussée lorsque cette dernière particule est également mobile [207]. Bandyopadhyay *et al.* ont étudié le cas plus complexe d'une particule seule diffusant dans un potentiel périodique fixe et soumise à une force fluctuant rapidement [208]. Les auteurs montrent que la diffusion, qui reste classique, est alors considérablement renforcée. Si dans notre système on considère une bille d'une des couches, on peut considérer que le potentiel créé par la couche voisine est proche de celui utilisé par Bandyopadhyay *et al.*, la partie fluctuante étant due aux oscillations des billes de la couche voisine autour de leurs positions d'équilibre. La possibilité de développer et résoudre un modèle plus complet, prenant en compte l'effet de SFD dans la couche à laquelle appartient la bille considérée ainsi que le couplage entre les deux couches, reste en suspens.

L'image d'un engrenage permettant de transmettre à une couche l'énergie récupérée par l'autre semble s'imposer. Cependant, cette image simpliste conduit à une idée fautive, qui serait de dire que si les deux couches sont commensurables alors la transmission est meilleure, et la diffusion plus importante. En nous penchant sur les effets de la commensurabilité sur cette diffusion dans les couches des îlots, nous montrons dans la section qui suit qu'il n'en est rien, et que le mécanisme est sans aucun doute plus subtil.

10.3.2 Diffusion et commensurabilité

Nous nous focalisons désormais sur la diffusion des couches 1 et 2 dans les îlots à 18 et 19 billes placés dans leur configuration fondamentale, à savoir respectivement (1-6-11)

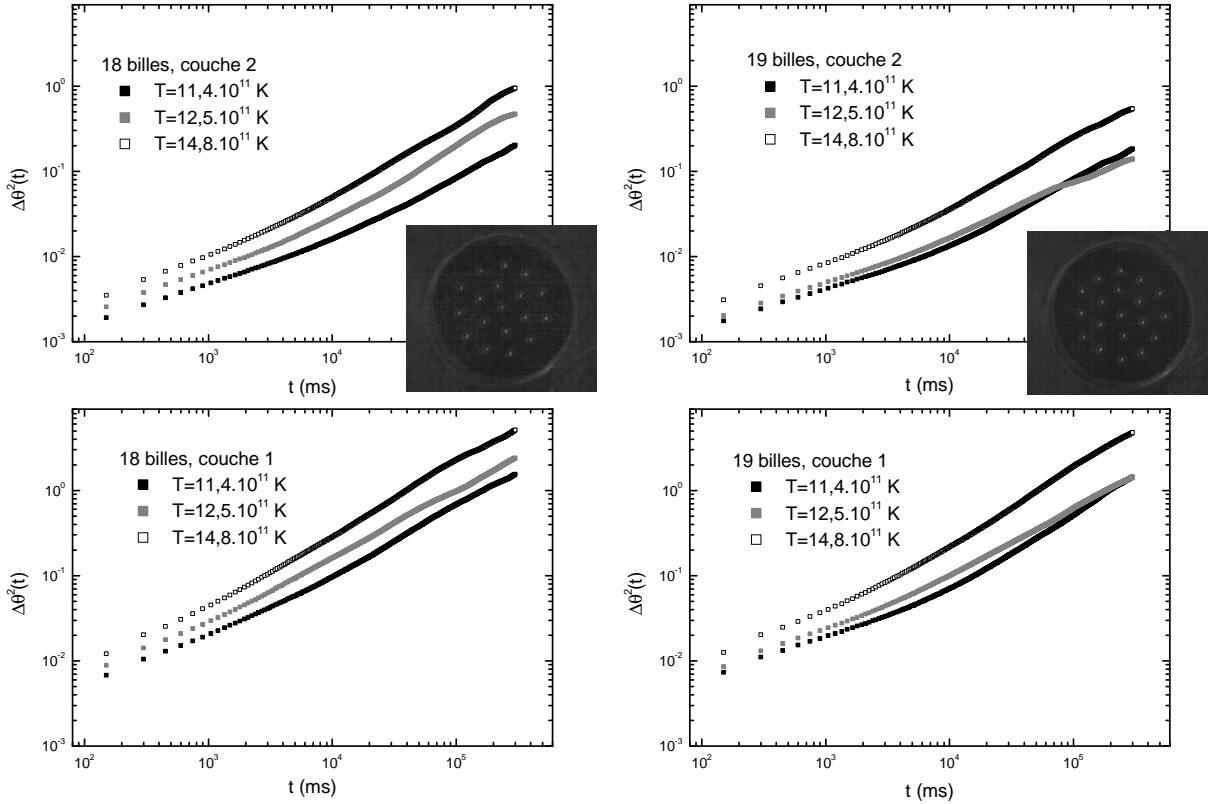


FIG. 10.6 : *d.q.m.* angulaire des couches 1 et 2 dans les îlots (1-6-11) et (1-6-12) pour trois températures (échelle log-log).

et (1-6-12). Les *d.q.m.* $\Delta\theta^2(t)$ dans ces deux couches sont présentés sur la figure 10.6.

Aux temps longs, les déplacements croissent sensiblement avec la même loi de puissance (0,6 environ) quelle que soit la couche, quelle que soit la configuration et quelle que soit la température¹³.

L'amplitude des déplacements croît généralement avec la température. Cependant, les déplacements sont comparables dans le système à 19 billes pour les températures $11,4 \cdot 10^{11}$ K et $12,5 \cdot 10^{11}$ K. Ceci peut être expliqué par un argument de commensurabilité. Dans cette plage de température, le système est "verrouillé", le déplacement relatif de la couche 2 par rapport à la couche 1 est faible dans la configuration (1-6-12), comme nous l'avons vu à la section 9.5. Lorsque la température augmente, vers $15 \cdot 10^{11}$ K, les rotations relatives et corollairement la diffusion deviennent un peu plus importantes.

Nous voyons donc que la commensurabilité des couches, plutôt que de faciliter l'entraînement, aurait plutôt tendance à favoriser le blocage des deux couches.

¹³Notons que la racine du déplacement $(\Delta\theta^2)^{1/2}$ atteint facilement le radian, ce qui indique que les couches tournent de manière importante par rapport au cadre de confinement, comme nous pouvons le constater en regardant la trajectoire d'une particule (figure 10.5(b)).

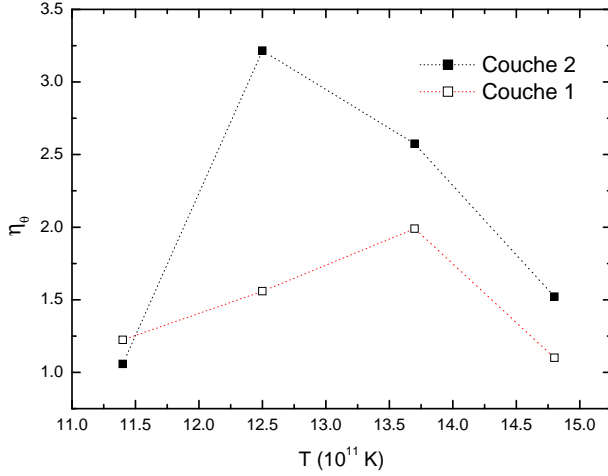


FIG. 10.7 : Rapport η_θ mesurant l'écart entre la diffusion des couches dans l'îlot $N = 18$ et l'îlot $N = 19$, en fonction de la température.

Ceci est encore plus marquant si on compare la diffusion des couches entre le système $N = 18$ et le système $N = 19$. Nous effectuons cette comparaison sur la figure 10.7 où nous reportons, pour 4 températures et pour les deux couches, la valeur du paramètre η_θ , représentatif de l'écart entre deux courbes de diffusion en régime stationnaire, défini par :

$$\eta_\theta = \frac{\Delta_{18}\theta^2(150 \text{ s})}{\Delta_{19}\theta^2(150 \text{ s})}, \quad (10.4)$$

où $\Delta_N\theta^2$ désigne le d.q.m. de la couche considérée dans l'îlot à N billes.

Nous constatons que vers 11.10^{11} K, le rapport η_θ est proche de 1, puis il croît pour redescendre ensuite de nouveau à des valeurs proches de 1. Il existe donc une plage de températures¹⁴ dans laquelle la commensurabilité joue un rôle important.

Si, dans tous les cas, le paysage périodique fluctuant dans lequel se déplace les couches permet d'accélérer la diffusion par rapport à un paysage non modulé, la commensurabilité des deux couches atténue cet effet de restitution d'énergie. Nous pouvons concevoir que cela est dû au fait que, les deux couches étant bien positionnées l'une par rapport à l'autre, sans déformation interne, il est nécessaire à un instant donné que les fluctuations de l'une imprime exactement un mouvement dans le sens donné par les fluctuations de l'autre. Au contraire, dans le cas incommensurable, les couches restent périodiques, elles peuvent récupérer une impulsion transmise par la couche voisine, mais ne sont pas assujetties à suivre son mouvement et peuvent utiliser plus librement l'énergie ainsi transmise. À plus haute température, les différences s'estompent car les barrières énergétiques deviennent moins importantes par rapport à l'énergie thermique.

Notons enfin que la diffusion dans la couche 1 est environ sept fois plus importante que dans la couche 2¹⁵ : ceci confirme que la présence d'un potentiel périodique a ici un

¹⁴Il n'est pas possible d'étudier la diffusion à grands temps pour des températures plus élevées car alors les transitions entre configurations deviennent trop importantes.

¹⁵Ceci peut se voir sur les trajectoires de la figure 9.7 : on distingue encore des tâches marquant les positions des billes sur la couche 2, alors que la couche 1 est homogène.

rôle amplificateur : une bille de la couche 1 est en effet soumise à un potentiel dont la période est deux fois plus petite que le potentiel auquel est soumise une bille de la couche 2.

10.3.3 Conclusion

L'étude semi-quantitative présentée ici permet de conclure que la diffusion d'une couronne de particules peut être accélérée lorsque celle-ci est couplée avec un potentiel fluctuant modulant le canal dans lequel elle se déplace, et ce d'autant plus que la période spatiale du potentiel modulé est petite. Par ailleurs, à périodicité semblable, l'incommensurabilité de la période de la couche avec la période du potentiel permet d'augmenter l'amplitude de la diffusion.

Ainsi que nous l'avons vu pour le piégeage de réseau bidimensionnels, ces arguments de commensurabilité se retrouvent également dans plusieurs travaux récents portant sur la dynamique de vortex dans un paysage énergétique modulé dans une seule direction. Rappelons que l'enjeu est alors d'obtenir un courant critique le plus fort possible, donc un piégeage le plus efficace possible. Le pas du réseau de vortex mobiles peut être comparé avec deux distances : le pas d'un réseau de pièges sous-jacent (voir par exemple, pour un piégeage modulé dans une seule direction, la référence [209]), ou bien la largeur d'un canal, admettant la présence de plusieurs vortex, dans lequel sont confinés les vortex [210,211]. Le cas d'un canal dont les bords sont modulés permet de cumuler les deux effets [212–214]. Dans tous ces cas-là, il est avéré que la commensurabilité du pas du réseau avec les dimensions citées précédemment favorise le blocage du réseau ou de la file de vortex soumis à une force motrice. Plusieurs questions restent néanmoins ouvertes dans ce domaine ; il semblerait notamment que dans le cas d'un canal modulé les positions respectives des extrema des potentiels des deux parois jouent un rôle important. Lorsque la modulation est obtenue par la présence de vortex fortement piégés, comme dans [213], le contrôle de ce paramètre est délicat, et des expériences plus directes à partir de notre système pourraient permettre d'approfondir ce point.

Le système que nous avons présenté ici présente des limites par rapport à cette problématique plus globale, notamment à cause des possibilités de sauts entre les couches. Cependant, par le procédé présenté au chapitre 6, nous pouvons tout à fait envisager de créer des canaux fixes modulés latéralement ou recouverts d'un réseau de pièges, ou même des canaux parallèles de billes présentant des densités différentes, comme illustré sur la figure 10.8.

Les études présentées ici ont été facilitées par la cyclicité des systèmes unidimensionnels étudiés. Introduire une périodicité dans un tel système n'est pas neutre. Ne serait-ce que dans le cas d'une couronne non perturbée par un potentiel modulé, nous avons pu montrer que la régime sous-diffusif en $t^{1/2}$ habituellement prédit pour un système infini peut être

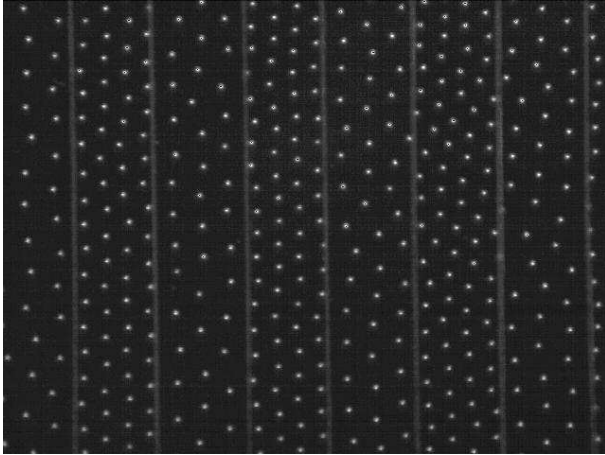


FIG. 10.8 : *Exemple d'utilisation des possibilités de modifier le potentiel de l'électrode supérieure pour créer des canaux de billes ayant une densité différente.*

dépassé pour être remplacé par un régime marqué par une diffusion plus lente.

À cet égard, le fait que nous observons une diffusion suivant une loi de puissance avec un exposant plus grand que $1/2$ dans le cas d'un potentiel modulé fluctuant montre l'importance de l'accélération de la diffusion que celui-ci induit : il ne s'agit pas seulement d'une augmentation de l'amplitude de la diffusion, mais bien d'un changement de régime.

Conclusion

Comprendre comment un réseau élastique bidimensionnel peut s'adapter à un potentiel de piégeage périodique ou aléatoire est un enjeu de taille dans nombre de systèmes physiques aussi différents que les réseaux de vortex, les cristaux colloïdaux ou encore les cristaux de Wigner. Les différentes configurations ou comportements que peut adopter le réseau, notamment lorsqu'il est soumis à une force motrice, sont variés et dépendent notamment de l'élasticité du réseau, de sa température, des compatibilités de symétrie et bien-sûr du profil et de l'intensité du potentiel de piégeage.

Que ce soit dans le cas d'un piégeage fort pour lequel le gain en énergie de piégeage est tel que le réseau se déforme fortement ou dans celui d'un piégeage faible, qui se traduit par des écarts légers à la symétrie du cristal parfait, l'impact de chacun de ces paramètres n'est pas encore parfaitement compris et ce, aussi bien dans la phase statique que dans la phase dynamique.

La plupart des études consacrées à l'ancrage de réseaux élastiques, notamment de réseaux de vortex, utilisent des marqueurs macroscopiques. Or il est apparu important, notamment dans le cas des études dédiées à la dynamique de réseaux piégés, de pouvoir avoir accès aux mouvements individuels des constituants élémentaires du réseau pour relier ces caractéristiques macroscopiques aux comportements locaux. Le système de quelques milliers de billes millimétriques chargées que nous proposons, sorte de "cristaux de Wigner macroscopiques", permet cette approche.

En effet, si initialement les tailles des billes, les distances les séparant, le contrôle précis du potentiel de piégeage appliqué ainsi que la possibilité de suivre directement leurs trajectoires nous autorisaient à penser que ce système pouvait être performant et complémentaire de ceux existants, ces potentialités sont maintenant confirmées et ce système parfaitement caractérisé.

Le potentiel d'interaction entre les billes est décrit par la fonction de Bessel K_0 , dont la longueur caractéristique λ est directement contrôlée par la hauteur du condensateur dans lequel les billes sont placées. Cette interaction est identique à l'interaction entre vortex dans un supraconducteur, ce qui fait de ce système un système modèle pour l'étude des propriétés des réseaux de vortex. Ceci est confirmé par l'obtention avec notre dispositif de structures d'équilibre observées dans des supraconducteurs mésoscopiques.

Par ailleurs, la description parfaite par le formalisme de Langevin du mouvement des billes soumises à une agitation mécanique et celle des probabilités de transitions entre niveaux d'énergie par la statistique de Boltzmann ont montré que les particules sont "immergées" dans un bain thermique fictif, les haut-parleurs agissant comme un thermostat effectif. Le système possède donc une température effective pouvant activer thermiquement ses constituants et offre ainsi la possibilité d'utiliser les formalismes associés à tout système thermodynamique. De plus le coefficient d'amortissement associé au bain est tel qu'il est possible d'observer les mouvements sous-amortis de billes ; la

dynamique des particules est donc accessible, notamment lorsqu'elles seront soumises à un réseau de pièges.

L'intensité du potentiel d'interaction et la température effective pouvant être modifiés de manière contrôlée, un cristal de Wigner sans défauts et de rigidité élastique variable de plus de 2000 billes peut alors être obtenu. Le processus de cristallisation de ce réseau à partir d'une configuration désordonnée met en valeur la propension d'un tel système confiné à développer dans un premier temps des domaines ordonnés et désorientés les uns par rapport aux autres. Leur dynamique de disparition peut être décrite à travers l'évolution de la ligne de dislocations les séparant. Cette évolution est thermiquement activée et gouvernée par une force associée à la courbure des lignes de dislocations.

D'autre part, la température peut être augmentée jusqu'à la température de fusion, fusion marquée par l'absence de disclinaisons isolées et qui présente les signes d'une transition du premier ordre.

Le calcul des constantes élastiques dans ces cristaux de Wigner macroscopiques avec un pas de réseau de l'ordre de quelques λ montre qu'il n'est pas suffisant de ne prendre en compte que les interactions entre premiers voisins. Ceci suggère que la théorie continue standard de l'élasticité, qui prévoit une longueur de corrélation du tenseur de déformation nulle, ne peut être appliquée à l'échelle des particules.

En particulier, la méthode classique de détermination des constantes élastiques d'un système non contraint à partir des simples fluctuations des composantes de son tenseur de déformation nécessite de prendre quelques précautions dès lors que les données accessibles sont les déplacements individuels des particules du réseau. Un grand soin doit être apporté au choix, d'une part, de la définition du tenseur, et, d'autre part, de la fonctionnelle d'énergie libre permettant de décrire les propriétés élastiques.

Une étude critique des diverses méthodes employées dans la littérature montre qu'il est rarement possible d'utiliser une théorie standard de l'élasticité (où l'énergie libre est simplement proportionnelle au carré du tenseur de déformation) couplée à une définition de ce tenseur à partir de différences finies des déplacements à l'échelle des particules.

L'utilisation d'une énergie libre prenant en compte les gradients du tenseur de déformation est donc souvent nécessaire, les différentes constantes du modèle, dont les constantes élastiques, pouvant être extraite par une méthode dite de "finite size scaling". Cependant, une méthodologie complète prenant en compte le caractère fini de tels réseaux de particules demanderait à être plus amplement développée, notamment pour pouvoir être appliquée à des systèmes expérimentaux, dans lesquels l'astuce numérique des conditions aux limites périodiques ne peut être appliquée.

De plus, si les fluctuations spatiales dues à la température sont trop importantes, ce qui est le cas notamment en l'absence de bain liquide comme dans des systèmes colloïdaux,

l'utilisation d'un tenseur de déformation défini au niveau des particules peut conduire à une mauvaise détermination des constantes élastiques, même si les gradients de ce tenseur sont pris en compte dans la théorie. Nous proposons en conséquence d'utiliser le tenseur de déformation calculé par coarse-graining initialement proposé par Goldenberg et Goldhirsch pour pouvoir définir un tenseur de déformation élastique dans le cas d'un système polydisperse.

Par ailleurs, la nécessité d'utiliser une fonctionnelle d'énergie libre faisant apparaître au minimum le premier gradient de la déformation introduit une longueur caractéristique dans le système. Ceci suggère qu'un grand soin doit être pris dans la description d'un tel réseau piégé dès lors que les variations du potentiel de piégeage sont significatives à l'échelle du pas du réseau.

Le piégeage du réseau élastique ainsi qualifié peut être obtenu à l'aide d'un dispositif simple de pièges électrostatiques. Notamment, dans le cas d'un réseau de pièges qui est périodique et de symétrie carrée, et lorsque le nombre de billes ramené au nombre de pièges f est rationnel ($1/4 \leq f \leq 2$) et proche de 1, le dispositif de piégeage proposé permet de reproduire des situations simples de piégeage fort, quand tous les pièges sont occupés, mais aussi de mettre en évidence, lorsque l'intensité relative du piégeage diminue, des cas de piégeage partiel non encore observés (dans le cas $f = 1$) ou qui n'avaient jamais été prévus (dans le cas $f = 2$).

L'existence de ces configurations partiellement piégées résulte des contraintes fortes de symétrie et est également associée à la portée des pièges, qui est de l'ordre du pas du réseau. Elle résulte également d'une subtile compétition, mais aussi dans une certaine mesure d'une collaboration, entre les forces élastiques et les forces de piégeage. En effet, si la symétrie est gouvernée par le réseau de pièges, la possibilité de développer sur de grandes distances un cristal respectant cette symétrie est liée à l'intensité de l'interaction entre les particules.

Notamment, cette intensité gouverne la taille des domaines pouvant être observés lorsque les configurations d'équilibre présentent une dégénérescence positionnelle ou orientationnelle.

Sans appliquer de force de dépiégeage au système, il est possible de tirer également de précieux enseignements de l'étude de la dynamique vers et autour des positions d'équilibre.

Lorsqu'un cristal transite d'une configuration non perturbée à une configuration piégée, le mouvement collectif et rapide de groupes de billes placées dans une configuration compatible avec leur configuration finale est privilégié; le cisaillement le long des principaux axes cristallographiques est notamment facilement activé. La forme et la taille des groupes concernés par ces déplacements dépendent des symétries initiales et finales du cristal. Ce déplacement collectif aboutit à la formation rapide de domaines

ordonnés ; il lui succède de petits ajustements individuels permettant à l'obtention d'un ordre à grande distance. Lorsque des domaines liés à la dégénérescence sont créés, leur disparition est lente, surtout en l'absence de particules intersticielles (cas $f \leq 1$), celles-ci favorisant le dépiégeage des particules en site par leur action répulsive.

Des situations d'instabilité surviennent lorsqu'un réseau se déplace par rapport au réseau de pièges. Elles peuvent être étudiées en considérant les mouvements des particules au niveau des interfaces entre domaines, caractérisées par une variation locale de la densité de billes.

Ces interfaces sont des zones de forte mobilité, même à faible température. La direction du mouvement des particules intersticielles ou dépiégées s'effectue le long de l'interface et est contrôlée par les pièges vacants. En revanche, les particules piégées sont peu affectées, même dans les conditions pour lesquelles la configuration d'équilibre est une configuration partiellement piégée, situation pour laquelle on aurait pu supposer qu'il peut être aisé pour une particule de quitter son piège. Le mouvement des particules en situation instable semble donc renforcer le piégeage déjà existant.

Ce mouvement est à comparer avec la dynamique activée thermiquement dans des zones de stabilité mécanique. Dans ces conditions, et dans les mêmes conditions de piégeage partiel, l'amplitude du déplacement moyen de chaque particule autour de sa position d'équilibre est indépendante de la particule considérée. De plus, le déplacement de chacune de ces particules est également anisotrope, mais les directions privilégiées sont différentes de celles choisies dans le cas d'une instabilité locale, bien qu'également contrôlées par la symétrie du réseau de piège.

Ces observations suggèrent en outre l'importance que pourrait revêtir l'existence de domaines de dégénérescence dans la dynamique globale d'un réseau soumis à une force de dépiégeage, la dynamique le long des interfaces étant forte et anisotrope.

Comme dans ces interfaces entre domaines, les fortes conséquences d'une petite variation locale de densité se mesurent également lorsqu'on considère les différentes étapes conduisant au désordre activé thermiquement dans des îlots de Wigner confinés circulairement. Les configurations d'équilibre de ces îlots sont marquées par une structure en couches concentriques se maintenant jusqu'à une température assez élevée.

À une température plus faible que celle habituellement mis en avant par des études basées sur le critère de Lindemann, la mise en désordre de ces systèmes est initiée par des excitations individuelles consistant en des sauts de particules entre couches et accentuées par les rotations relatives de ces couches. Ces deux mouvements sont favorisés par l'incommensurabilité entre les nombres de particules dans chacune des couches, autrement dit par des écarts à une configuration symétrique.

Si l'on considère les mouvements angulaires des particules de ces couches, et qu'on les

compare aux mouvements obtenus dans une couche identique mais n'ayant pas sur ses bords un potentiel périodique fluctuant dû à la présence d'une seconde couche, mais un potentiel lisse, un phénomène d'accélération importante de la diffusion est observé dans le premier cas. Cet effet est, de plus, amplifié lorsque les couches en présence sont de périodicités incommensurables. Ce résultat attend, d'une part, une confirmation théorique, et d'autre part, comme nous le rappellerons dans les perspectives de notre travail, apporte des indications fortes pour la compréhension des mouvements de particules dans les canaux apparaissant dans les réseaux piégés.

Ces phénomènes de diffusion ayant été étudiés dans le cas d'une couronne de particules et non d'une particule isolée, ils doivent par ailleurs être interprétés dans le cadre de la théorie générale de la diffusion unidimensionnelle de particules dans un canal. Nous avons ainsi montré que l'évolution du déplacement quadratique moyen le long d'un canal lisse circulaire est marquée par un exposant inférieur à l'exposant $1/2$ habituellement prévu, phénomène qui peut être associé à la périodicité du système, et que les facilités expérimentales offertes par notre dispositif pourraient permettre d'étudier de manière systématique.

Si l'on reconsidère le fait que nous observons une diffusion suivant une loi de puissance avec un exposant plus grand que $1/2$ dans le cas d'un potentiel modulé fluctuant, ceci montre l'importance de l'accélération de la diffusion que celui-ci induit : il ne s'agit pas seulement d'une augmentation de la constante de diffusion associée à ce régime sous-diffusif, mais bien d'un changement de régime.

Perspectives pour l'étude du piégeage de réseaux élastiques

Les études menées ont prouvé notre capacité à aborder à l'aide de notre système la problématique générale du piégeage d'un réseau élastique. Forts de cette certitude, et munis d'une grille de lecture conséquente fournie par les études déjà réalisées, un large champ de recherche s'ouvre devant nous.

Quatre grands axes d'exploration et de réflexion, qui se rejoignent en de nombreux points, peuvent être définis : l'introduction du piégeage aléatoire faible, l'étude des conséquences du piégeage et de la température au niveau de la description élastique d'un système discret, la mise en mouvement du cristal dans le paysage de pièges, et l'étude des phénomènes d'écoulement dans des canaux modulés.

Vers le désordre faible

Dans notre étude de piégeage du cristal de Wigner macroscopique par un réseau périodique de pièges, nous avons pu faire varier l'intensité relative du piégeage et mettre en évidence différentes configurations plus ou moins déformées par rapport au cristal non perturbé. Le contrôle de l'intensité de piégeage est donc une technique maintenant

maîtrisée. Cependant, les situations de piégeage faible rencontrées dans la plupart des systèmes sont obtenues avec un système de pièges aléatoirement distribués et de taille pouvant être inférieure au pas du réseau.

Pour estimer ce qu'il nous sera nécessaire de modifier pour nous approcher de ce cas, il est instructif de considérer les modélisations adoptées dans les quelques études numériques traitant de cette question. Du point de vue de la densité en pièges, ces études sont généralement menées avec un rapport de remplissage de l'ordre de $1/p$, p valant quelques unités. Par ailleurs, le piégeage aléatoire est simulé de deux manières différentes : dans certaines études, des pièges de portée fixe σ sont aléatoirement disposés ; dans d'autres, ces pièges sont régulièrement répartis, une valeur aléatoire de l'énergie de piégeage est associée à chaque piège, et l'ensemble du potentiel est obtenu par interpolation de ces points. Dans tous les cas, on obtient une distribution aléatoire du potentiel de piégeage \mathcal{E}_p , caractérisée par le corrélateur $\overline{\mathcal{E}_p(\mathbf{r})\mathcal{E}_p(\mathbf{r}')} = \sigma\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, où \overline{X} désigne une moyenne sur le désordre. Généralement, σ est de l'ordre du grandeur de la distance entre les pièges, et la dépendance des diverses phases du cristal envers ce paramètre est peu discutée. À partir de ces modélisations, les différentes phases dynamiques prévues par la théorie du piégeage faible sont bien observées. Du point de vue de notre système, diminuer légèrement la taille des pièges pour pouvoir augmenter leur nombre et les disposer aléatoirement nous semble réalisable en utilisant la même technique que celle utilisée jusqu'à présent, à la condition que nous puissions diminuer la taille des canaux (afin qu'ils ne soient pas de la même taille que les pièges!). Une étude plus poussée, dont nous n'avons pas eu besoin jusqu'à présent, sur les différents conducteurs que nous pouvons déposer et graver sur la plaque ITO permettrait de choisir un dispositif moins sensible aux grandes différences de potentiel, et donc de diminuer la taille de ces canaux. Une alternative pourrait être d'isoler complètement les pièges et de les alimenter par le dessus par un jeu de fines électrodes, solution tout de même plus délicate à mettre en œuvre, surtout si la disposition des pièges est aléatoire.

Suivant la technique employée jusqu'à présent, disposer les pièges de manière aléatoire ne pose pas de difficulté supplémentaire. Nous avons ainsi testé la réaction du réseau à un tel piégeage, en considérant exactement le même système (densité en billes et en pièges, taille des pièges) que lors de l'étude du cas $f = 2$ dans un réseau carré, à l'exception du fait que les pièges sont cette fois-ci aléatoirement répartis.

Le premier fait marquant, visible sur la figure 10.9, est que malgré la forte intensité de piégeage, il n'apparaît quasiment aucune dislocation supplémentaire dans le système. Rappelons que dans les mêmes conditions d'intensité et pour une disposition périodique de pièges, nous observons une configuration fortement déformée. La mesure de la fonction de corrélation orientationnelle $g_6(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \langle e^{i6[\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}')]}$ confirme que la symétrie hexagonale du système est peu altérée, comme le montre la figure 10.10(a).

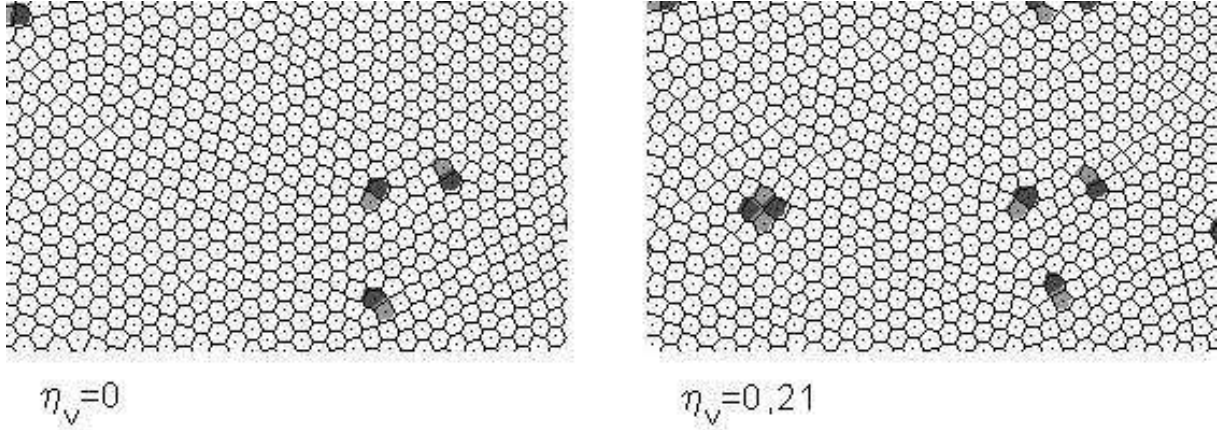


FIG. 10.9 : Diagrammes de Voronoï d'un extrait de cristal non piégé ($\eta_V = 0$) puis piégé par un réseau aléatoire ($\eta_V = 0,21$).

Nous voyons donc à travers cet exemple que la notion de piégeage faible est un concept subtil dépendant non seulement de l'intensité des pièges, mais aussi des propriétés géométriques du réseau. Par ailleurs, cette situation de piégeage faible est obtenue ici avec des pièges évasés et $f \geq 1$, alors que généralement ce sont des situations de pièges de faible portée et plus nombreux qui servent de système modèle au piégeage faible. On voit là toute la diversité de situations que peut recouvrir ce concept.

Dans une telle situation de piégeage faible, la mesure de l'écart au cristal parfait nécessite des outils plus fins que la simple description en terme de dislocations. La fonction proposée par Giamarchi et Le Doussal est le déplacement relatif entre deux points $B(r)$ définis par

$$B(r) = \overline{\langle [\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(0)]^2 \rangle}. \quad (10.5)$$

Pour un cristal bidimensionnel non perturbé, la fonction $B(r)$ croît logarithmiquement, ce qui traduit le fait que seul un quasi-ordre translationnel peut exister dans un réseau bidimensionnel¹⁶. Cependant, dans un système de volume fini fixe, cette croissance ne peut se produire et la fonction sature vers une constante dépendant de la température, comme montré sur la figure 10.10(b).

Dans un cristal faiblement piégé, si le comportement asymptotique de $B(r)$ n'est pas modifié (le verre de Bragg présente en effet de l'ordre à grandes distances), la croissance aux petites distances suit des lois de puissance, les changements de régime entre les différentes lois prévues permettant de caractériser l'effet du désordre.

Dans le cas présent, nous voyons que la croissance de $B(r)$ est modifiée lorsque le

¹⁶Si les fluctuations sont gaussiennes, la fonction $B(r)$ est en effet reliée à la fonction de corrélation translationnelle $g_{\mathbf{G}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \langle e^{i\mathbf{G} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}')] } \rangle$ par la relation $g_{\mathbf{G}}(r) = \exp[-G^2 B(r)/2]$. \mathbf{G} désigne ici un vecteur du réseau réciproque. La croissance logarithmique de $B(r)$ se traduit par une décroissance en loi de puissance de $g_{\mathbf{G}}$, signe que l'ordre dans le cristal n'est pas parfait.

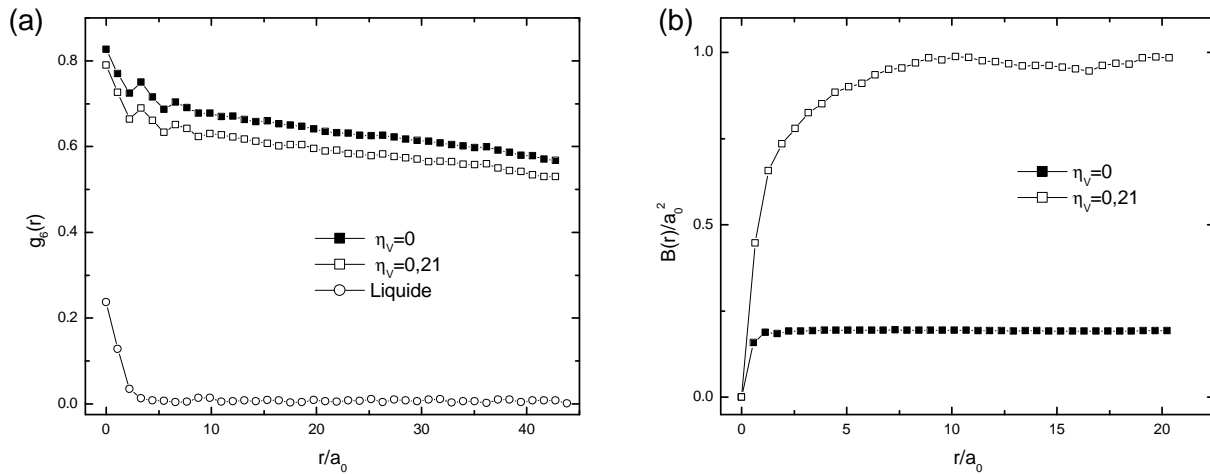


FIG. 10.10 : (a) : Fonction de corrélation orientationnelle $g_6(r)$ dans le cristal non piégé ($\eta_V = 0$) et piégé par un réseau aléatoire ($\eta_V = 0,21$). La température est identique dans les deux cas. La fonction de corrélation du cristal non piégé dans sa phase liquide est reportée pour comparaison. (b) : Déplacement relatif entre deux points $B(r)$ pour ces deux mêmes cristaux.

réseau est piégé, avec une croissance moins rapide pour les petites distances¹⁷ et une valeur finale plus élevée, alors que la température est identique au cas du réseau non piégé.

S'il serait prématuré de faire dire à ces courbes plus qu'elles ne contiennent, cette exploration succincte des conséquences d'une disposition aléatoire des pièges montre la capacité de notre dispositif à reproduire une situation de désordre faible.

Nous pouvons donc envisager d'étudier plus quantitativement des situations de piégeage faible à l'aide de notre dispositif. Le premier enjeu pourrait être d'établir le lien entre les caractéristiques géométriques du système de pièges (largeur des pièges, densité, distribution) ainsi que l'intensité du piégeage et les distances caractéristiques apparaissant dans le comportement théorique de la fonction $B(r)$. Augmenter le nombre de pièges permettra notamment de faciliter l'apparition du caractère vitreux du système, c'est-à-dire la possibilité d'accéder à de nombreux états d'équilibre.

¹⁷Plus précisément, la croissance à courtes distances se fait selon une loi en r^α , $\alpha \simeq 1/3$. Cet exposant est de l'ordre de celui proposé dans la théorie dans la plage $[R_c; R_a]$, alors qu'en dessous de cet intervalle la croissance doit être quadratique. R_c (resp. R_a) est défini comme la distance à laquelle le déplacement relatif $B(r)$ est de l'ordre de la portée d'un piège (resp. du pas du réseau). La portée σ d'un piège étant dans notre dispositif de l'ordre du pas du réseau, on pourrait supposer que dans notre cas l'intervalle $[R_c; R_a]$ est réduit à un point. Ce résultat interroge donc, et illustre la nécessité d'identifier plus précisément les paramètres contrôlant le piégeage faible, c'est-à-dire la portée des pièges mais aussi leur densité et leur intensité, en étudiant de façon détaillée les dépendances de $B(r)$.

Description élastique et système discret

Dans le but d'étudier de plus près les propriétés élastiques de notre système discret, nous avons présenté les travaux de Goldenberg et Goldhirsch et introduit l'idée qu'en présence de désordre gelé intrinsèque à un réseau de particules, la description élastique standard ne peut pas toujours être appliquée pour des mesures de déformation réalisées à l'échelle du pas du réseau. Dans un tel cas, les variations spatiales du tenseur de déformation ne pouvant être négligées, il apparaît une longueur de corrélation dans le système, qui dépend de l'intensité du désordre. Lorsque le désordre est de nature thermique, nous avons vu qu'il est également nécessaire de prendre en compte ces variations du tenseur de déformation.

Par ailleurs, les situations de piégeage faible peuvent faire intervenir un potentiel de piégeage variant significativement sur des distances inférieures au pas du réseau, ce qui pose la question de la légitimité de l'utilisation d'un tenseur de déformation calculé par dérivation discrète entre deux particules pour étudier ces situations, question qui est d'ailleurs posée explicitement par Giamarchi et Le Doussal [1]. Notons toutefois que le désordre dont nous discutons ici est dû à un potentiel extérieur, et donc que le formalisme développée par Goldenberg et Goldhirsch ne peut s'appliquer directement.

Puisque notre système offre la possibilité de contrôler deux sources de désordre, à savoir la température et le piégeage, et pour cette dernière à une échelle inférieure au pas du réseau, il peut nous permettre d'étudier expérimentalement le lien entre ces modifications faibles de l'ordre et la description élastique.

Notamment, la dépendance des longueurs de corrélation en fonction de la température, également facteur de désordre, pourrait être abordée de manière plus systématique afin d'estimer quantitativement l'impact des effets thermiques sur les description élastiques adoptées pour un piégeage donné.

Et la dynamique ?

Que ce soit dans des conditions de piégeage fort périodique, de piégeage faible aléatoire ou toute autre situation intermédiaire, pouvoir étudier les propriétés du réseau se déplaçant dans le paysage de pièges est un objectif majeur et stimulant de notre dispositif.

Si les études autour de positions instables telles les transitions vers un état piégé ou les mouvements en frontières de domaines ont permis de mettre en valeur quelques comportements marquants, il va de soi que ces études ne peuvent se substituer à une réelle étude du déplacement du cristal, étude qui devrait permettre notamment, grâce à la possibilité d'accéder aux positions de chaque bille, d'éclaircir le rôle des dislocations dans les différents régimes possibles.

Deux modalités de déplacement peuvent être imaginées. La première, la plus proche de ce qui se passe dans les réseaux de vortex, consisterait à imposer une force de dépiégeage

au réseau de billes.

Plus précisément une telle étude dynamique pourrait être entreprise de deux manières. La première serait de s'intéresser à la propagation d'une contrainte éventuellement oscillante imposée sur les bords par pression électrostatique.

La seconde serait d'appliquer une force constante au système, la réalisation expérimentale la plus simple d'une telle situation étant sans doute d'utiliser le poids des billes comme force de dépiégeage, en inclinant légèrement le dispositif. Nous sommes assurés ainsi d'avoir une force parfaitement homogène, découplée des autres forces intervenant dans le système, et parfaitement contrôlable même si cela nécessitera sans aucun doute de modifier légèrement la structure actuelle du dispositif.

Une autre possibilité, moins souvent étudiée dans la littérature, serait d'imposer une vitesse aux particules, ce qui pourrait être obtenu indirectement en faisant se déplacer la plaque ITO surplombant le système.

Enfin, si la question de la fusion de systèmes bidimensionnels non piégés a fait l'objet de si nombreuses études qu'il nous a semblé de peu d'intérêt de nous y attarder, cette question se pose de nouveau lorsque les systèmes sont piégés. Tout comme la dynamique de déplacement des particules et sans doute pour les mêmes raisons, cette problématique n'a fait l'objet que de peu d'études et une orientation possible de recherche.

Déplacements, symétries et commensurabilité

Une des justifications de l'étude faite dans la partie IV sur les îlots de Wigner était d'étudier l'impact des symétries locale sur les déplacements en isolant certains phénomènes "élémentaires". Ayant en réalité mené nos investigations sur ces systèmes de front avec celles sur les cristaux, nous n'avons pas encore pleinement tiré profit des opportunités offertes par ces études .

Pour aller plus loin, elles pourraient être poursuivies pour permettre de mieux comprendre à la fois le mouvement des particules intersticielles dans les situations de piégeage fort mais aussi et plus généralement dans les différentes phases mobiles pouvant être observées lorsque le système est soumis à une force de dépiégeage. Ces phases sont en effet caractérisées par l'apparition de canaux. Ainsi, dans la phase dite smectique, les particules ont un mouvement d'ensemble, mais ce mouvement se fait suivant des "canaux" contrôlés par le paysage de pièges et découplés : on se retrouve dans un cas de diffusion unidimensionnelle en présence d'un potentiel latéral fluctuant, cas que nous avons abordé dans la partie IV. De même, dans le cas d'un écoulement plastique, les particules non mobiles définissent un canal fixe modulé dont la périodicité va fortement influencer la dynamique des particules mobiles. C'est d'ailleurs dans cet état d'esprit que plusieurs études ont déjà été entreprises dans des configurations semblables, comme nous l'avons déjà relevé dans la conclusion 10.3.3.

Annexes

Annexe A

Calcul des interactions

Sommaire

A.1 Interaction entre deux billes	227
A.1.1 Détermination du potentiel électrostatique	228
A.1.2 Détermination de l'énergie d'interaction	231
A.2 Calcul de l'interaction avec la paroi	234

Nous présentons dans cette annexe le détail des calculs menés dans le cadre d'une collaboration avec P. Galatola et J.-B. Fournier et introduits au chapitre 2 [30].

Nous considérons d'abord le système constitué de deux billes placées dans le condensateur et calculons l'énergie d'interaction entre ces deux billes. Ceci est l'objet du premier point de cette annexe.

En utilisant cette énergie, nous calculons l'interaction d'une bille avec un cadre de confinement circulaire en modélisant ce cadre comme une haie de billes. L'écart entre la modélisation et l'interaction réelle est prise en compte par l'introduction d'une amplitude effective, qui a été calibrée par comparaison avec des configurations expérimentales (section 2.3.3).

A.1 Interaction entre deux billes

L'interaction entre deux billes est calculée en deux temps :

- La solution de l'équation de Laplace est déterminée analytiquement par un développement multipolaire, puis calculée numériquement après une troncature adaptée dans ce développement.
- Les énergies électrostatiques emmagasinées dans le système en présence ou en l'absence de billes est calculée. Par définition, l'énergie d'interaction entre les billes est la différence entre ces deux énergies.

A.1.1 Détermination du potentiel électrostatique

Le condensateur plan est supposé infini, d'épaisseur h . Son électrode inférieure est portée au potentiel 0 tandis que l'électrode supérieure est au potentiel V_0 . Les deux billes conductrices de rayon $R < h/2$ sont placées dans le condensateur, en contact avec l'électrode inférieure. Elles sont donc également au potentiel nul. Leurs centres sont distants de $d > 2R$. Afin de tirer pleinement profit de la symétrie du problème, nous introduisons les coordonnées cartésiennes $\mathbf{r} = (x, y, z)$ telles que d'une part l'axe Oz soit perpendiculaire aux plans conducteurs, de hauteurs respectives $z = 0$ et $z = h$ et que d'autre part les centres des billes aient pour coordonnées $(\pm d/2, 0, R/2)$. Nous considérons par ailleurs les coordonnées locales $\mathbf{r}_- = (x_-, y_-, z_-)$ et $\mathbf{r}_+ = (x_+, y_+, z_+)$ centrées respectivement sur la bille de gauche et sur la bille de droite, ainsi que les coordonnées sphériques (r_-, θ_-, ϕ_-) et (r_+, θ_+, ϕ_+) correspondantes (voir figure A.1) :

$$x_{\pm} = x \mp d/2 = r_{\pm} \sin \theta_{\pm} \cos \phi_{\pm}, \quad (\text{A.1})$$

$$y_{\pm} = y = r_{\pm} \sin \theta_{\pm} \sin \phi_{\pm}, \quad (\text{A.2})$$

$$z_{\pm} = z - R = r_{\pm} \cos \theta_{\pm}. \quad (\text{A.3})$$

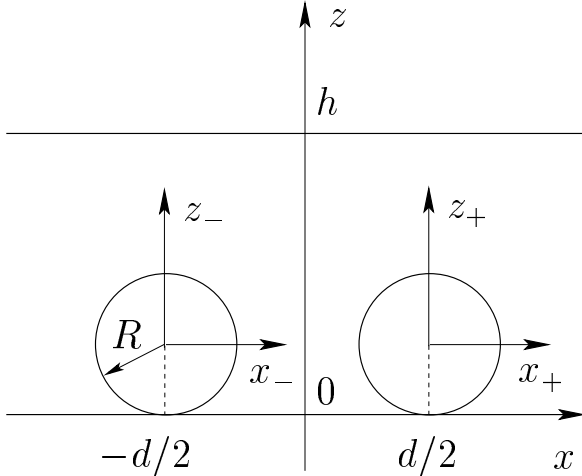


FIG. A.1 : *Système de coordonnées utilisé pour le calcul de l'interaction entre deux billes.*

Il s'agit de résoudre l'équation de Laplace

$$\nabla^2 V = 0, \quad (\text{A.4})$$

pour le potentiel électrique $V(r)$ avec comme conditions limites $V = 0$ sur l'électrode inférieure ainsi qu'à la surface des billes et $V = V_0$ sur l'électrode supérieure. Pour simplifier le problème, nous écrivons $V(\mathbf{r})$ comme la somme du potentiel $V_0 z/h$ du condensateur vide et de la perturbation due à la présence des sphères :

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \left[\frac{z}{h} + v(\mathbf{r}) \right], \quad (\text{A.5})$$

où $v(\mathbf{r})$ est la solution adimensionnée de l'équation de Laplace (A.4) régulière à l'intérieur du condensateur et à l'extérieur des sphères et vérifiant les conditions limites :

$$v(x, y, z = 0) = v(x, y, z = h) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$v(r_- = R, \theta_-, \phi_-) = -\frac{z(r_- = R, \theta_-)}{h}, \quad (\text{A.7})$$

$$v(r_+ = R, \theta_+, \phi_+) = -\frac{z(r_+ = R, \theta_+)}{h}, \quad (\text{A.8})$$

$$v(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = 0, \quad (\text{A.9})$$

où $z(r_- = R, \theta_-)$ (resp. $z(r_+ = R, \theta_+)$) est la hauteur au point de la sphère de gauche (resp. droite) de coordonnées locales $(r_- = R, \theta_-, \phi_-)$ (resp. $(r_+ = R, \theta_+, \phi_+)$). La dernière condition se justifie par le fait que la perturbation engendrée par l'introduction des billes engendre un déplacement de charge local, et donc la perturbation v dans le potentiel doit décroître au moins comme $1/r$.

Il s'agit donc d'un problème de Dirichlet, pour lequel il existe une unique solution.

Dans un premier temps, nous allons développer $v(\mathbf{r})$ sur des solutions élémentaires de l'équation de Laplace vérifiant les conditions (A.6) et (A.9), puis les coefficients du développement seront déterminés afin de vérifier les conditions (A.7) et (A.8).

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le repère sphérique local de variables (r_-, θ_-, ϕ_-) associé à la bille de gauche. Toute solution de l'équation de Laplace peut être développée sur les solutions obtenues par séparation des variables [161] :

$$g_{\ell m}(\mathbf{r}) = R(r_-)\Theta(\theta_-)\Phi(\phi_-), \quad (\text{A.10})$$

où ℓ et m sont des entiers positifs vérifiant $0 \leq m \leq \ell$ et :

$$R(r_-) = Ar_-^\ell + Br_-^{-\ell-1} \quad (\text{A.11})$$

$$\Theta(\theta_-) = CP_\ell^m(\cos \theta_-) + DG_\ell^m(\cos \theta_-) \quad (\text{A.12})$$

$$\Phi(\phi_-) = E \cos(m\phi_-) + F \sin(m\phi_-), \quad (\text{A.13})$$

où A, B, C, D, E, F sont des constantes arbitraires et les fonctions P_ℓ^m et Q_ℓ^m les fonctions de Legendre respectivement de première et de deuxième espèce.

D'après la relation (A.9), on doit avoir $A = 0$. La symétrie par rapport au plan xOz impose $F = 0$. Enfin, les fonctions Q_ℓ^m étant singulières en 1, on doit avoir $D = 0$.

En prenant $B = h^{\ell+1}, C = E = 1$, on obtient les solutions adimensionnées

$$g_{\ell m}(\mathbf{r}) = \frac{P_\ell^m(\cos \theta_-)h^{\ell+1}}{r_-^{\ell+1}} \cos(m\phi_-), \quad (\text{A.14})$$

à partir desquelles nous allons construire une base de solution adéquates. Leur seule singularité est en $r_- = 0$, ce qui n'est pas gênant pour notre problème.

Afin d'obtenir des fonctions vérifiant la relation (A.6), on considère l'ensemble des images du potentiel (A.14), à travers les plaques en $z = 0$ et $z = h$, que l'on somme de

telle sorte que les conditions limites sur les plaques soient automatiquement respectées, puis l'on symétrise la solution obtenue par rapport au plan yOz ; nous obtenons ainsi la base de solutions¹

$$G_{\ell m}(\mathbf{r}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[g_{\ell m}(x, y, z + 2kh) - g_{\ell m}(x, y, -z + 2kh) + g_{\ell m}(-x, y, z + 2kh) - g_{\ell m}(-x, y, -z + 2kh) \right], \quad (\text{A.15})$$

qui vérifient les conditions (A.6) et (A.9) et sont régulières dans l'espace qui nous intéresse, puisque les singularités sont situées au niveau des images des centres des billes, qui sont à l'extérieur du condensateur.

On décompose enfin la fonction $v(\mathbf{r})$ sur cette base :

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} v_{\ell m} G_{\ell m}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.16})$$

Les coefficients $v_{\ell m}$ dépendent de la distance d et doivent être déterminés de telle sorte que les relations (A.7) et (A.8) soient vérifiées. Par symétrie des $G_{\ell m}$, il suffit en fait de ne vérifier que la première. On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} v_{\ell m} G_{\ell m}(r_- = R, \theta_-, \phi_-) &= -\frac{z(r_- = R, \theta_-)}{h} \\ &= -\frac{R(1 + \cos(\theta_-))}{h} \\ &= -\frac{R}{h} \left[P_0^0(\cos \theta_-) + P_1^0(\cos \theta_-) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Cette dernière relation, qui doit être vérifiée pour tous θ_- et ϕ_- , peut être simplifiée en la projetant sur la base orthogonale $P_{\ell'}^{m'}(\cos \theta_-) \cos(m' \phi_-)$, si bien que le membre de droite de l'égalité sera presque toujours nul; la condition devient :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} v_{\ell m} \int_0^{\pi} \sin \theta_- d\theta_- \int_0^{2\pi} d\phi_- \left[G_{\ell m}(r_- = R, \theta_-, \phi_-) \times \right. \\ \left. P_{\ell'}^{m'}(\cos \theta_-) \cos(m' \phi_-) \right] = \\ \begin{cases} -\frac{4\pi R}{h} & \text{si } \ell' = m' = 0, \\ -\frac{4\pi R}{3h} & \text{si } \ell' = 1 \text{ et } m' = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

¹La somme proposée est bien convergente; on a en effet

$$g_{\ell m}(\pm x, y, z + 2kh) - g_{\ell m}(\pm x, y, -z + 2kh) = O_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{\ell+2}}.$$

Les coefficients $v_{\ell m}$ sont déterminés numériquement après avoir tronqué la somme dans le terme de gauche de l'équation (A.18) jusqu'à un certain $\ell = \ell_{MAX}$. L'équation (A.18) est évaluée pour $\ell' = 0, 1, \dots, \ell_m$ et $m' = 0, 1, \dots, \ell'$, ce qui donne un jeu de $(\ell_m + 1)(\ell_m + 2)/2$ équations en les $(\ell_m + 1)(\ell_m + 2)/2$ inconnues $v_{\ell m}$. Pour ce faire, le produit scalaire des $G_{\ell m}(r_- = R, \theta_-, \phi_-)$ avec les $P_{\ell}^{m'}(\cos \theta_-) \cos(m' \phi_-)$ est calculé après avoir tronqué la somme définissant les $G_{\ell m}$ à $|k| = k_{MAX}$. À cause des termes correspondant aux images et à l'autre bille dans la définition des $G_{\ell m}$, les intégrales en θ_- et ϕ_- ne peuvent être calculées que numériquement².

En faisant varier ℓ_{MAX} et k_{MAX} tout en regardant la stabilité des solutions trouvées, on s'assure de tronquer à un niveau suffisant. Les valeurs retenues sont $\ell_{MAX} = 7$ et $k_{MAX} = 40$.

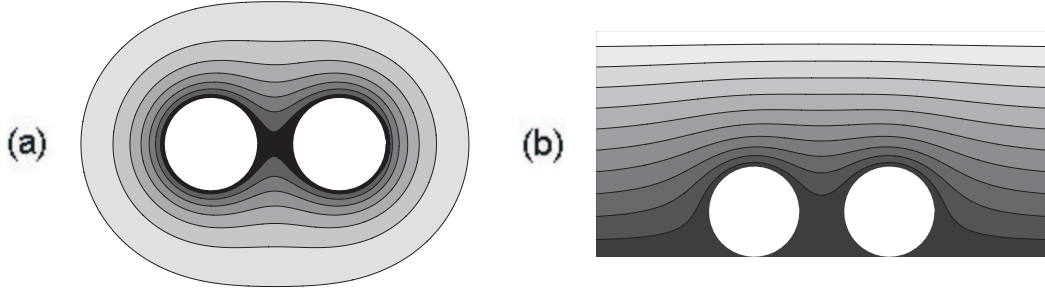


FIG. A.2 : (a) : Équipotentiels dans le plan parallèle à xOy passant par le centre des billes. (b) : Équipotentiels dans le plan xOz . Les billes sont indiquées en blanc, le potentiel le plus faible correspond aux zones sombres.

Les équipotentiels typiques sont représentés sur la figure A.2. On voit notamment qu'au-dessus des billes les équipotentiels sont compressées dans l'espace restant : la longueur d'onde de la perturbation est donc directement liée à h ; comme V doit par ailleurs obéir à la relation $\nabla^2 V = 0$, ceci implique l'apparition dans les directions horizontales d'une longueur de relaxation du même ordre de grandeur, et qui dépend donc essentiellement de h .

A.1.2 Détermination de l'énergie d'interaction

L'énergie potentielle d'interaction $V(d)$ entre les billes est égale à la variation d'énergie électrostatique stockée dans le condensateur lorsqu'on approche les billes de l'infini jusqu'à la distance d . Autrement dit, on a

²L'intégrale en θ_- a été calculée par une méthode de Romberg, l'intégrale en ϕ_- par une routine de la librairie NAG basée sur la routine QFOUR de la librairie QUADPACK [215]. Pour résoudre le système linéaire il a été utilisé une décomposition LU avec pivot partiel.

$$\mathcal{E}(d) = -\frac{1}{2}\Delta Q V_0, \quad (\text{A.19})$$

où Q est la charge accumulée dans l'électrode supérieure située à $z = h$ associée à la perturbation $\Delta V(\mathbf{r}) = V_0 v(\mathbf{r})$ à l'intérieur du condensateur et 0 en dehors. Pour calculer ΔQ , on utilise le théorème de réciprocité [161] : Si $\Delta\rho(\mathbf{r})$ et $\rho'(\mathbf{r})$ sont deux distributions de charges données source des potentiels électrostatiques $\Delta V(\mathbf{r})$ et $V'(\mathbf{r})$, alors on a :

$$\int \Delta\rho(\mathbf{r}) V'(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \rho'(\mathbf{r}) \Delta V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (\text{A.20})$$

où l'intégrale porte sur tout l'espace. On prend pour le système (ρ', V') , la distribution correspondant au condensateur vide, on a donc $V' = V_0 z/h$ pour $0 \leq z \leq h$, $V' = 0$ pour $z \leq 0$ et $V' = V_0$ pour $z \geq h$.

On a d'une part

$$\int \rho'(\mathbf{r}) \Delta V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0, \quad (\text{A.21})$$

car ρ' est non nul uniquement sur les plaques, alors que ΔV y est nul.

D'autre part, $\Delta\rho$ est la somme de trois distributions, une sur chaque plaque et l'autre, ponctuelle, au niveau des deux centres des billes : elle correspond à la singularité du potentiel électrostatique. Comme V' est nul sur la plaque inférieure, on a

$$\int \Delta\rho(\mathbf{r}) V'(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = V_0 \Delta Q + \frac{V_0}{h} \int_{\Omega_R} \Delta\rho(\mathbf{r}) z d\mathbf{r}, \quad (\text{A.22})$$

où Ω_R est une région constituée de deux volumes arbitraires enserrant chacun le centre d'une des billes.

Pour calculer cette dernière intégrale, on utilise la relation de Poisson $\rho(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 [V_0 v(\mathbf{r})]$. En utilisant la relation

$$z \nabla \cdot (\nabla v(\mathbf{r})) = -\frac{\partial v}{\partial z} + \nabla \cdot (z \nabla v(\mathbf{r})), \quad (\text{A.23})$$

il vient en utilisant la formule de Stokes pour chacun des deux termes du membre de droite qui s'écrivent tous deux comme une divergence³ :

$$\int_{\Omega_R} \rho(\mathbf{r}) z d\mathbf{r} = \epsilon_0 V_0 \oint_{\partial\Omega_R} \left[v(\mathbf{r}) \mathbf{u}_z \cdot \boldsymbol{\nu} - z \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] dS, \quad (\text{A.24})$$

où \mathbf{u}_z est le vecteur unitaire associé à la direction Oz et $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur unitaire normal à la surface $\partial\Omega_R$ pointant vers l'extérieur.

On prend maintenant pour $\partial\Omega_R$ l'ensemble des deux sphères centrées en $(x = \pm d/2, y = 0, z = R)$. Dans les termes définissant les $G_{\ell m}$, seul le terme en $g_{\ell m}(x, y, z+2kh)$,

³Le premier membre est la divergence du vecteur de composantes suivant x et y nulle et de composante suivant z égale à v .

avec de surcroît $k = 0$, va donner une contribution non nulle à l'intégrale sur la sphère de gauche, car les autres n'ont aucune singularité à l'intérieur.

Par symétrie, on a donc

$$\int_{\Omega_R} \rho(\mathbf{r}) z d\mathbf{r} = 2\epsilon_0 V_0 R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} v_{\ell m} \int_0^{\pi} \sin \theta_- d\theta_- \int_0^{2\pi} d\phi_- \left[g_{\ell m}(r_- = R, \theta_-, \phi_-) \cos \theta_- + R(1 + \cos \theta_-)(\ell + 1)R^{-1} g_{\ell, m}(r_- = R, \theta_-, \phi_-) \right] \quad (\text{A.25})$$

ce qui donne finalement, compte-tenu des relations d'orthogonalité des harmoniques sphériques,

$$\int_{\Omega_R} \rho(\mathbf{r}) z d\mathbf{r} = 8\pi\epsilon_0 V_0 h^2 \left[v_{00} \frac{R}{h} + v_{10} \right]. \quad (\text{A.26})$$

D'où, en utilisant les équations (A.21), (A.22) et (A.26) :

$$\Delta Q = -8\pi\epsilon_0 V_0 h \left[v_{00} \frac{R}{h} + v_{10} \right], \quad (\text{A.27})$$

où, rappelons-le, les coefficients v_{00} et v_{10} dépendent de la distance d^4 .

L'énergie potentielle d'interaction est donc

$$\mathcal{E}(d) = \epsilon_0 V_0^2 h \varepsilon(d), \quad (\text{A.28})$$

où $\varepsilon(d)$ est l'énergie adimensionnée :

$$\varepsilon(d) = 4\pi \left[v_{00} \frac{R}{h} + v_{10} \right]. \quad (\text{A.29})$$

Résultats numériques

Dans la suite, nous considérons comme nouvelle définition de $\varepsilon(d)$ l'énergie d'interaction calculée précédemment à laquelle nous soustrayons la valeur pour des billes à l'infini extrapolées numériquement.

La figure A.3 présente la dépendance de cette énergie potentielle d'interaction $\varepsilon(d)$ en fonction de la distance d entre les billes. Au delà de $d \simeq 3.5h$, les erreurs relatives dans la détermination de v_{00} et v_{10} deviennent importantes, mais l'interaction devient de toute façon négligeable. Cette interaction, calculée numériquement, est très bien ajustée⁵ par la fonction de Bessel K_0 :

$$\varepsilon(d) = \varepsilon_0 K_0(d/\lambda), \quad (\text{A.30})$$

⁴Le fait que seuls deux termes dans le développement de v n'implique pas que la prise en compte des autres termes était superflue : les coefficients v_{00} et v_{10} sont les solutions d'un système d'équations impliquant tous les autres coefficients.

⁵La fonction est également bien décrite pas une exponentielle décroissante ce qui, au regard du nombre de paramètres et de la plage de longueurs, n'est pas surprenant.

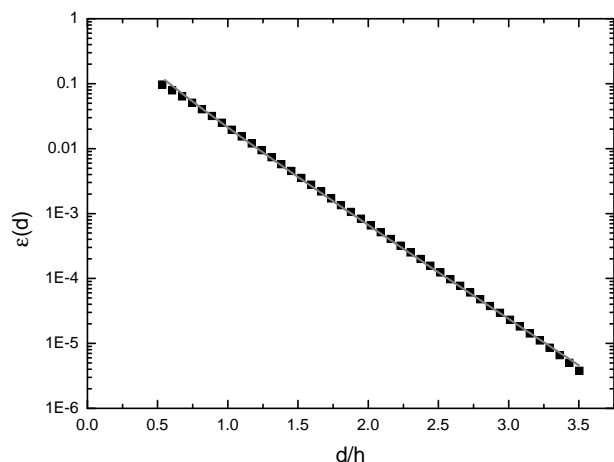


FIG. A.3 : Énergie potentielle d'interaction adimensionnée et nulle à l'infinie (échelle log) en fonction de la distance entre les deux billes normalisée par h . La plage de distance utilisée correspond, pour le minimum, au contact des billes ($d/h = 2R/h \simeq 0.53$), et pour le maximum, à environ 3 fois la distance typique entre deux billes dans nos expériences. Les points correspondent aux calculs numériques, la courbe pleine représente la fonction $AK_0(d/\lambda)$ décrivant le mieux ces données. L'erreur dans la détermination numérique est inférieure à la taille des points.

où $\varepsilon_0 = 0.71$ et $\lambda = 0.32h$. La longueur caractéristique de l'interaction dépend directement de la hauteur du condensateur, comme une étude complète en fonction de cette hauteur a pu le montrer⁶.

A.2 Calcul de l'interaction avec la paroi

Pour les raisons évoquées à la section 2.2.1, nous nous focalisons uniquement sur l'interaction entre une bille et un cadre de confinement circulaire, à l'aide de la modélisation suivante.

Nous considérons notre cadre de confinement de rayon R_c et de hauteur h comme une rangée de billes au contact de hauteur h et dont le centre est à une distance R_c du centre du cadre de confinement. Nous supposons par ailleurs que l'interaction d'une bille avec la paroi peut être vue comme la somme des interactions avec toutes les billes fictives constituant cette paroi. Ces deux hypothèses restent valables tant que la bille ne se trouve pas trop proche de la paroi, et sont confirmées *in fine* par la confrontation avec l'expérience. Compte-tenu de ces approximations, et du fait que les billes fictives constitutives de la paroi n'ont pas la même hauteur que les billes réelles, nous sommes amenés à introduire une amplitude interaction effective ε_1 entre une bille réelle et une bille de la paroi. En revanche, il a été démontré que la longueur d'écran ne dépend pas de la taille des objets, ainsi nous conservons la longueur déterminée précédemment. Enfin, pour des simplicités de calcul nous utiliserons l'expression exponentielle du potentiel d'interaction

⁶La dépendance du préfacteur en fonction du rayon R des billes a été testée, et il a été montré qu'il ne dépend quasiment pas du rayon, dans la plage $0.1h \leq R \leq 0.4h$.

(voir note 5), qui a une longueur d'écran $\lambda_c = 0.29h$.

Nous considérons donc le potentiel d'interaction entre une bille et une bille fictive (normalisé pas $\epsilon_0 V_0^2 h$) :

$$\epsilon_{c0} = \epsilon_1 \exp(-d/\lambda_c), \quad (\text{A.31})$$

où ϵ_1 est donc une variable d'ajustement.

La distance entre les deux centres des billes peut s'écrire $d = (r^2 + R_c^2 - 2rR_c \cos \phi)^{1/2}$, où r est la distance de la bille au centre du confinement, et ϕ l'angle entre les deux billes, vu depuis le centre.

Le potentiel d'interaction total est donc

$$\epsilon_c = \epsilon_1 \sum_{n=1}^M \exp \left[-\lambda_c^{-1} \sqrt{r^2 + R_c^2 - 2rR_c \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right)} \right], \quad (\text{A.32})$$

où $M = 2\pi R_c/h$ est le nombre de billes fictives constituant le cadre de confinement. Afin d'obtenir une expression analytique pour v , on approche la somme par une intégrale, ce qui se justifie d'après l'hypothèse déjà faite, par le fait que $R_c > h$. On obtient alors :

$$\epsilon_c \simeq \frac{M\epsilon_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[-\lambda_c^{-1} \sqrt{r^2 + R_c^2 - 2rR_c \cos \phi} \right] d\phi, \quad (\text{A.33})$$

intégrale qui ne peut être calculée analytiquement. Cependant, pour $r \simeq R_c/2$, une bonne approximation est donnée par la méthode du point col [216] : si l'on doit intégrer entre a et b la fonction $\exp[f(x)]$, où $f(x)$ admet un maximum en x_0 , alors on a :

$$\int_a^b \exp[f(x)] dx \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[f(x_0) + x^2 \frac{f''(x_0)}{2} \right] dx, \quad (\text{A.34})$$

qui est une intégrale gaussienne.

En développant ainsi la fonction $d(\phi) = (r^2 + R_c^2 - 2rR_c \cos \phi)^{1/2}$ autour de son maximum 0, on obtient :

$$\epsilon_c(r \simeq R_c/2) \simeq M\epsilon_1 \sqrt{\frac{\lambda_c}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_c} \right)} \exp \left[\frac{r - R_c}{\lambda_c} \right]. \quad (\text{A.35})$$

Enfin, il a été montré numériquement que le logarithme du potentiel de l'équation (A.32) est presque linéaire : nous remplaçons donc le logarithme du potentiel approché de l'expression (A.35) par son développement de Taylor au premier ordre autour de $R_c/2$, pour finalement trouver :

$$\epsilon_c(r) \simeq \epsilon_1 \frac{\sqrt{2\pi\lambda_c R_c}}{h_c} \exp \left[1 - \frac{2r}{R_c} + \frac{r - R_c}{\lambda_c} \right], \quad (\text{A.36})$$

expression qui coïncide très bien avec l'expression numérique (A.32) tant que l'on est pas trop proche du bord ou du centre du confinement.

Annexe B

L'équation de Langevin unidimensionnelle pour une particule piégée

Sommaire

B.1 Particule libre	237
B.2 Particule piégée, amortissement faible	239

Après avoir présenté un rappel de la théorie de la diffusion libre, nous calculons les grandeurs les écarts quadratiques moyen $\Delta x^2(t)$ et $\Delta v^2(t)$ tels que définis dans la section 3.3 dans le cas d'un potentiel de piégeage parabolique et d'un amortissement faible.

Nous considérons donc l'équation de Langevin pour une particule de masse m et de coordonnée $x(t)$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - Kx + F(t), \quad (\text{B.1})$$

avec les hypothèses que $\forall t, \langle F(t) \rangle = 0$ et $\forall t, t', \langle F(t)F(t') \rangle = g\delta(t-t')$. $\langle \rangle$ désigne une moyenne d'ensemble. Nous introduisons par ailleurs le coefficient $\gamma = \alpha/m$ et la pulsation $\omega_0^2 = K/m$.

B.1 Particule libre

Dans le cas d'une particule libre ($K = 0$) partant avec les conditions initiales (x_0, v_0) , la solution générale de l'équation (B.1) est

$$x(t) = x_1(t) + x_F(t), \quad (\text{B.2})$$

où

$$x_1(t) = \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0 \quad (\text{B.3})$$

est la partie déterministe du mouvement (la solution avec $F = 0$) et

$$x_F(t) = \int_0^t \frac{dt'}{m\gamma} F(t') - e^{-\gamma t} \int_0^t \frac{dt'}{m\gamma} e^{\gamma t'} F(t') \quad (\text{B.4})$$

est la partie fluctuante, déterminée comme solution particulière de l'équation (B.1) à l'aide de la méthode de la variation de la constante.

Considérons dans un premier temps la vitesse $v(t) = \frac{dx}{dt}$. En utilisant les propriétés des moyennes de F ; nous trouvons

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \quad (\text{B.5})$$

$$\delta v^2(t) \equiv \langle [v(t) - \langle v(t) \rangle]^2 \rangle = \frac{g}{2m^2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}). \quad (\text{B.6})$$

En particulier, dans l'état stationnaire obtenu pour t tendant vers l'infini, on a $\Delta v^2(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g}{2m^2\gamma}$ et en utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie on en déduit la relation de fluctuation-dissipation

$$k_B T = \frac{g}{2m\gamma}. \quad (\text{B.7})$$

Pour la position, en introduisant la constante de diffusion $D = \frac{g}{2m^2\gamma^2}$, il vient $\langle x(t) \rangle = x_1(t)$ puis

$$\begin{aligned} \delta x^2(t) &\equiv \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle = \langle x_F^2(t) \rangle \\ &= 2D \left(t - 2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\gamma^2 D}{3} t^3, \quad (\text{B.9})$$

$$\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 2Dt. \quad (\text{B.10})$$

Le comportement à grand temps est donc caractérisé par une croissance linéaire de l'écart quadratique de la position, comportement caractéristique du mouvement Brownien. Notons que la relation de fluctuation-dissipation peut se mettre sous la forme plus connue :

$$m\gamma D = k_B T. \quad (\text{B.11})$$

Cas d'une mesure expérimentale

Comme signalé à la section 3.3, les paramètres mesurables et pertinents sont

$$\Delta x^2(t) \equiv \langle\langle [x(t) - x_0 - \langle\langle x(t) - x_0 \rangle\rangle]^2 \rangle\rangle \quad \text{et} \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta v^2(t) \equiv \langle\langle [v(t) - \langle\langle v(t) \rangle\rangle]^2 \rangle\rangle, \quad (\text{B.13})$$

où les moyennes $\langle\langle \rangle\rangle$ sont faites sur les distributions de F mais aussi de x_0 et v_0 , sachant que dans le cas présent x_0 n'intervient pas à cause de la soustraction dans (B.12). Les premiers et deuxième moments de v_0 sont donnés par la distribution stationnaire de $v(t)$, et valent donc respectivement 0 et $k_B T/m$.

On trouve alors $\langle\langle x(t) \rangle\rangle = 0$ et

$$\begin{aligned} \Delta x^2(t) &= \langle\langle x_1^2(t) \rangle\rangle + \langle\langle x_F^2 \rangle\rangle \\ &= \frac{D}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})^2 \\ &\quad + 2D\left(t - 2\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Si le comportement à grand temps n'est pas modifié, on a désormais

$$\Delta x^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{m} t^2. \quad (\text{B.15})$$

Ceci est dû au fait que nous ne pouvons pas maîtriser la vitesse initiale d'une trajectoire.

B.2 Particule piégée, amortissement faible

On suppose désormais que $K \neq 0$, et l'on doit donc résoudre

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = m^{-1} F(t), \quad (\text{B.16})$$

dans le cas où $\gamma < 2\omega_0$.

En notant $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$, la solution générale de l'équation (B.16) est

$$x(t) = x_1(t) + x_F(t), \quad (\text{B.17})$$

où

$$x_1(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t) + B e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t) \quad (\text{B.18})$$

est la partie déterministe du mouvement et

$$\begin{aligned}
 x_F(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\sin(\omega t) \int_0^t \frac{dt'}{m\omega} e^{\gamma t'/2} \cos(\omega t') F(t') \right. \\
 &\quad \left. - \cos(\omega t) \int_0^t \frac{dt'}{m\omega} e^{\gamma t'/2} \sin(\omega t') F(t') \right], \tag{B.19}
 \end{aligned}$$

est la partie fluctuante, toujours obtenue par la méthode de la variation de la constante. Comme $x_F(0) = 0$ et $x'_F(0) = 0$, A et B sont immédiatement déterminées par les conditions initiales x_0 et v_0 et l'on trouve :

$$x_1(t) = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0}{\omega} e^{-\gamma t/2} \sin(\omega t) \tag{B.20}$$

On a $\langle x(t) \rangle = x_1(t)$, d'où $\delta x^2(t) = \langle x_F^2(t) \rangle$, et finalement

$$\begin{aligned}
 \delta x^2(t) &= \frac{g}{2m^2\gamma\omega^2\omega_0^2} \left[\omega^2 + e^{-\gamma t} \left(-\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \cos(2\omega t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\gamma\omega}{2} \sin(2\omega t) \right) \right]. \tag{B.21}
 \end{aligned}$$

En particulier, pour les temps longs ($t \gg \tau_R$),

$$\delta x^2(t) \sim \frac{g}{2m^2\gamma\omega_0^2} = \frac{k_B T}{K}, \tag{B.22}$$

qui n'est rien d'autre que le théorème d'équipartition appliqué à l'énergie potentielle. Ceci donne également la valeur de $\langle\langle x_0^2 \rangle\rangle$, dès que l'expérience a démarré depuis un temps plus grand que τ_R .

On trouverait de même que

$$\delta v^2(t) \sim \frac{g}{2m^2\gamma\omega_0^2} = \frac{k_B T}{m}, \tag{B.23}$$

Cas d'une mesure expérimentale

En considérant les moyennes $\langle\langle \rangle\rangle$, il vient $\langle\langle x(t) - x_0 \rangle\rangle = 0$, et, en remarquant que $\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle = \langle\langle x_0^2 \rangle\rangle$, on trouve

$$\begin{aligned}
 \Delta x^2(t) &= \langle\langle [x(t) - x_0]^2 \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle x^2(t) \rangle\rangle + \langle\langle x_0^2 \rangle\rangle - 2\langle\langle x(t)x_0 \rangle\rangle \\
 &= 2\langle\langle x_0^2 \rangle\rangle \left[1 - e^{-\gamma t/2} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right) \right]. \tag{B.24}
 \end{aligned}$$

En particulier :

$$\Delta x^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{m} t^2 \tag{B.25}$$

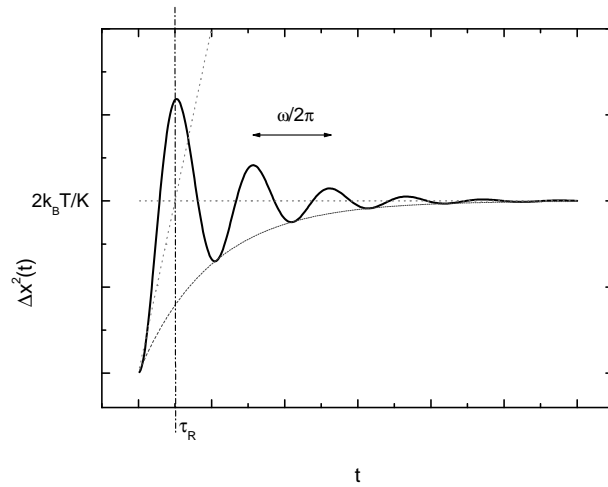


FIG. B.1 : *Comportement général du déplacement quadratique moyen $\Delta x^2(t)$ dans un puits harmonique, pour un amortissement faible.*

Le comportement à temps court est indépendant du puits et identique au cas d'une particule libre.

Notons enfin que la limite de $\Delta x^2(t)$ pour les grands temps est le double du cas classique.

Le comportement général de la fonction $\Delta x^2(t)$ est représenté sur la figure B.1 : il s'agit d'une croissance amortie convergeant vers la valeur limite $2\frac{k_B T}{K}$ et présentant un certain nombre d'oscillations de pulsation ω .

Références bibliographiques

- [1] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL
Statics and dynamics of disordered elastic systems
Dans *Spin glasses and random fields*
World Scientific, 1997.
- [2] T. GIAMARCHI et S. BHATTACHARYA
Vortex phases
Dans *High magnetic films : applications in condensed matter physics and spectroscopy*
Springer, 2002.
- [3] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL
Elastic theory of pinned flux lattice
Phys. Rev. Lett., 72 : 1530, 1994.
- [4] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL
Elastic theory of flux lattices in the presence of weak disorder
Phys. Rev. B, 52 : 1242, 1995.
- [5] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL
Variational theory of elastic manifolds with correlated disorder and localisation of interacting quantum particles
Phys. Rev. B, 53 : 15206, 1996.
- [6] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL
Phase diagrams of flux lattices with disorder
Phys. Rev. B, 55 : 6577, 1997.
- [7] P. LE DOUSSAL et T. GIAMARCHI
Dislocations and Bragg glasses in two dimensions
Physica C, 331 : 233, 2000.
- [8] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL
Moving glass phase of driven lattices
Phys. Rev. Lett., 76 : 3408, 1996.
- [9] P. LE DOUSSAL et T. GIAMARCHI
Moving glass theory of driven lattices with disorder
Phys. Rev. B, 57 : 11356, 1998.
- [10] M. CHANDRAN, R. T. SCALETTAR, et G. T. ZIMÁNYI
Dynamic transition in driven vortices across the peak effect in superconductors
Phys. Rev. B, 67 : 052507, 2003.
- [11] A. B. KOLTON, D. DOMÍNGUEZ, et N. GRØNBECH-JENSEN
Hall noise and transverse freezing in driven vortex lattices
Phys. Rev. Lett., 83 : 3061, 1999.
- [12] C. J. OLSON, C. REICHHARDT, et F. NORI
Nonequilibrium dynamic phase diagram for vortex lattices
Phys. Rev. Lett., 81 : 3757, 1998.
- [13] E. OLIVE et J. C. SORET
Chaotic dynamics of superconductor vortices in the plastic phase
Phys. Rev. Lett., 96 : 027002, 2006.
- [14] H. FANGOHR, S. J. COX, et P. A. J. DE GROOT
Vortex dynamics in two-dimensional systems at high driving forces
Phys. Rev. B, 64 : 064505, 2001.

- [15] C. REICHHARDT et C. J. OLSON
Colloidal dynamics on disordered substrates
Phys. Rev. Lett., 89 : 078301, 2002.
- [16] Y. CAO, J. CHEN, Y. WANG, Z. JIAO, et W. K. CHOW
Numerical study on the dynamics of driven disordered colloids
Phys. rev. B, 68 : 134209, 2003.
- [17] K. RUNGE et B. PANNETIER
First decoration of superconducting networks
Europhys. Lett., 24 : 737, 1993.
- [18] M. MARCHEVSKY, J. AARTS, P. H. KES, et M. V. INDENBOM
Observation of the correlated vortex flow in NbSe₂ with magnetic decoration
Phys. Rev. Lett., 78 : 531, 1997.
- [19] G. KARAPETROV, J. FEDOR, M. IAVARONE, D. ROSENMANN, et W. K. KWOK
Direct observation of geometrical phase transitions in mesoscopic superconductors by scanning tunneling microscopy
Phys. Rev. Lett., 95 : 167002, 2005.
- [20] L. N. VU, M. S. WISTROM, et D. J. van HARLINGEN
Imaging of magnetic vortices in superconducting networks and clusters by scanning SQUID microscopy
Appl. Phys. Lett., 63 : 1693, 1993.
- [21] K. HARADA, O. KAMIMURA, H. KASAI, T. MATSUDA, A. TONOMURA, et V. V. MOSHCHALOV
Direct observation of vortex dynamics in supraconducting films with regular arrays of defects
Science, 271 : 1167, 1996.
- [22] S. J. BENDING, G. D. HOWELLS, A. N. GRIGORENKO, M. J. VAN BAEL, J. BEKAERT, K. TEMST, L. Van LOOK, V. V. MOSHCHALOV, Y. BRUYNSEAEDE, G. BORGHES, et R. G. HUMPHREYS
Artificial pinning arrays investigated by scanning Hall probe microscopy
Physica C, 332 : 20, 2000.
- [23] A. N. GRIGORENKO, G. D. HOWELLS, S. J. BENDING, J. BEKAERT, M. J. VAN BAEL, L. VAN LOOK, V. V. MOSHCHALOV, Y. BRUYNSEAEDE, G. BORGHES, I. I. KAYA, et R. A. STRADLING
Direct imaging of commensurate vortex structures in ordered antidot arrays
Phys. Rev. B, 63 : 052504, 2001.
- [24] S. B. FIELD, S. S. JAMES, J. BARENTINE, V. METLUSHKO, G. CRABTREE, H. SHTRIKMAN, B. ILIC, et S. R. J. BRUECK
Vortex configurations, matching, and domain structure in large arrays of artificial pinning centers
Phys. Rev. Lett., 88 : 067003, 2002.
- [25] A. N. GRIGORENKO, S. J. BENDING, M. J. VAN BAEL, M. LANGE, V. V. MOSHCHALOV, H. FANGOHR, et P. A. J. DE GROOT
Symmetry locking and commensurate vortex domain formation in periodic pinning arrays
Phys. Rev. Lett., 90 : 237001, 2003.
- [26] U. H. PI, A. SCHWARZ, M. LIEBMANN, R. WIESENDANGER, Z. G. KHIM, et D. H. KIM
Visualizing flux distribution of superconductors in external magnetic fields with magnetic force microscopy
Phys. Rev. B, 73 : 144505, 2006.
- [27] T. KLEIN, I. JOUMARD, S. BLANCHARD, J. MARCUS, R. CUBITT, T. GIAMARCHI, et P. Le DOUSSAL
A Bragg glass phase in the vortex lattice of a type II superconductor
Nature, 413 : 404, 2001.
- [28] D. G. GRIER et Y. ROICHMAN
Holographic optical trapping
Applied Optics, 45 : 880, 2006.
- [29] E. P. WIGNER
On the interaction of electrons in metals
Phys. Rev., 46 : 1002, 1934.
- [30] P. GALATOLA, G. COUPIER, M. SAINT JEAN, J.-B. FOURNIER, et C. GUTHMANN
Determination of the interactions in confined macroscopic Wigner islands : theory and experiments
Eur. Phys. J. B, 50 : 549, 2006.
- [31] G. COUPIER, C. GUTHMANN, Y. NOAT, et M. SAINT JEAN
Local symmetries and order-disorder transitions in small macroscopic Wigner islands
Phys. Rev. E, 71 : 046105, 2005.
- [32] G. COUPIER, M. SAINT JEAN, et C. GUTHMANN
Single file diffusion in macroscopic Wigner rings
Phys. Rev. E, 73 : 031112, 2006.

- [33] M. SAINT JEAN, C. GUTHMANN, et G. COUPIER
Relaxation and ordering processes in "macroscopic Wigner crystals"
Eur. Phys. J. B, 39 : 61, 2004.
- [34] J. LAMBERT, C. GUTHMANN, et M. SAINT JEAN
Relationship between charge distribution and its image by electrostatic force microscopy
J. Appl. Phys., 93 : 5369, 2003.
- [35] J. C. CROCKER et D. G. GRIER
Methods of digital video microscopy for colloidal studies
J. Colloid Interface Sci., 179 : 298, 1996.
- [36] M. SAINT JEAN, C. EVEN, et C. GUTHMANN
Macroscopic 2D Wigner islands
Europhys. Lett., 55 : 45, 2001.
- [37] P. G. de GENNES
Superconductivity of metals and alloys
W. A. Benjamin, New York, 1966.
- [38] X. H. ZHENG et R. GRIEVE
Melting behavior of single two-dimensional crystal
Phys. Rev. B, 73 : 064205, 2006.
- [39] A. MELZER, M. KLINDWORTH, et A. PIEL
Normal modes of 2D finite clusters in complex plasmas
Phys. Rev. Lett., 87 : 115002, 2001.
- [40] A. MELZER
Mode spectra of thermally excited two-dimensional dust Coulomb clusters
Phys. Rev. E, 67 : 016411, 2003.
- [41] A. P. LYUBARTSEV et A. LAAKSONEN
Calculation of effective interaction potentials from radial distribution functions : A reverse Monte Carlo approach
Phys. Rev. E, 52 : 3730, 1995.
- [42] H. HANSEN-GOOS, C. LUTZ, C. BECHINGER, et R. ROTH
From pair correlations to pair interactions : an exact relation in one-dimensional systems
Europhys. Lett., 74 : 8, 2006.
- [43] A. A. KOULAKOV et B. I. SHKLOVSKII
Charging spectrum of a small Wigner crystal island
Phil. Mag., 77 : 1235, 1998.
- [44] I. V. GRIGORIEVA, A. K. GEIM, S. V. DUBONOS, K. S. NOVOSELOV, D. Y. VODOLAZOV, F. M. PEETERS, P. H. KES, et M. HESSELBERTH
Long-range nonlocal flow of vortices in narrow superconducting channels
Phys. Rev. Lett., 92 : 237001, 2004.
- [45] J. J. THOMSON
On the structure of the atom : an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle ; with application of the results to the theory of atomic structure.
Phil. Mag., 7 : 237, 1904.
- [46] L. CÂNDIDO, J.-P. RINO, N. STUDART, et F. M. PEETERS
The structure and spectrum of the anisotropically confined two-dimensional Yukawa system
J. Phys. : Condens. Matter, 10 : 11627, 1998.
- [47] P. E. GILL, W. MURRAY, et M. H. WRIGHT
Practical optimization
Academic Press, New-York, 1981.
- [48] V. M. BEDANOV et F. M. PEETERS
Ordering and phase transitions of charged particles in a classical finite two-dimensional system
Phys. Rev. B, 49 : 2667, 1994.
- [49] M. KONG, B. PARTOENS, et F. M. PEETERS
Transition between ground state and metastable states in classical two-dimensional atoms
Phys. Rev. E, 65 : 046602, 2002.
- [50] Y. J. LAI et L. I
Packings and defects of strongly coupled two-dimensional Coulomb clusters : numerical simulations
Phys. Rev. E, 60 : 4743, 1999.

- [51] L. J. CAMPBELL et R. M. ZIFF
 Vortex patterns and energies in a rotating superfluid
Phys. Rev. B, 20 : 1886, 1979.
- [52] A. I. BELOUSOV et Y. E. LOZOVIK
 Mesoscopic and macroscopic dipole clusters : structure and phase transition
Eur. Phys. J. D, 8 : 251, 2000.
- [53] W. P. FERREIRA, A. MATULIS, G. A. FARIAS, et F. M. PEETERS
 Structure and correlations in two-dimensional classical artificial atoms confined by a Coulomb potential
Phys. Rev. E, 67 : 046601, 2003.
- [54] M. KONG, B. PARTOENS, A. MATULIS, et F. M. PEETERS
 Structure and spectrum of two-dimensional clusters confined in a hard wall potential
Phys. Rev. E, 69 : 036412, 2004.
- [55] Y. HATA, J. SUZUKI, I. KAKEYA, K. KADOWAKI, A. ODAWARA, A. NAGATA, S. NAKAYAMA, et K. CHINONE
 Flux quantization in a superconducting microdisc
Physica C, 388 : 719, 2003.
- [56] I. V. GRIGORIEVA, W. ESCOFFIER, J. RICHARDSON, L. Y. VINNIKOV, S. DUBONOS, et V. OBOZNOV
 Direct observation of vortex shells and magic numbers in mesoscopic superconducting disks
Phys. Rev. Lett., 96 : 077005, 2006.
- [57] B. J. BAELUS, L. R. E. CABRAL, et F. M. PEETERS
 Vortex shells in mesoscopic superconducting disks
Phys. Rev. B, 69 : 064506, 2004.
- [58] C. MEYERS et M. DAUMENS
 Vortex patterns in mesoscopic superconducting ellipses and strips
Phys. Rev. B, 62 : 9762, 2000.
- [59] B. V. R. TATA, P. V. RAJAMANI, J. CHAKRABATI, A. NIKOLOV, et D. T. WASAN
 Gas-liquid transition in a two-dimensional system of millimeter-sized like-charged metal balls
Phys. Rev. Lett., 84 : 3626, 2000.
- [60] P. M. REIS, R. A. INGALE, et M. D. SHATTUCK
 Crystallization of a quasi-two-dimensional granular fluid
Phys. Rev. Lett., 96 : 258001, 2006.
- [61] B. POULIGNY, R. MALZBENDER, P. RYAN, et Noel A. CLARK
 Analog simulation of melting in two dimensions
Phys. Rev. B, 42 : 988, 1990.
- [62] F. BOLTON et U. RÖSSLER
 Classical model of a Wigner crystal in a quantum dot
Superlatt. Microstruct., 13 : 139, 1993.
- [63] A. SIMON et A. LIBCHABER
 Escape and synchronization of a brownian particule
Phys. Rev. Lett., 68 : 3375, 1992.
- [64] H. A. KRAMERS
 Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions
Physica, 7 : 284, 1940.
- [65] F. REIF
 Fundamentals of statistical and thermal physics
McGraw-Hill, 1965.
- [66] P. OSWALD
 Rhéologie
Belin, Paris, 2005.
- [67] D. S. FISHER, B. I. HALPERIN, et R. MORF
 Defects in the two-dimensional electron solid and implications for melting
Phys. Rev. B, 20 : 4692, 1979.
- [68] J. FRIEDEL
 Dislocations
Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [69] R. SESHADRI et R. M. WESTERVELT
 Statistical mechanics of magnetic bubble array. I. Topology and thermalization
Phys. Rev. B, 46 : 5142, 1992.

- [70] A. PERTSINIDIS et X. S. LING
Equilibrium configurations and energetics of point defects in two-dimensional colloidal crystals
Phys. Rev. Lett., 87 : 98303, 2001.
- [71] A. PERTSINIDIS et X. S. LING
Diffusion of point defects in two-dimensional colloidal crystals
Nature, 413 : 147, 2001.
- [72] V. A. SCHWEIGERT et F. M. PEETERS
Spectral properties of classical two-dimensional clusters
Phys. Rev. B, 51 : 7700, 1995.
- [73] C. QUILLIET, M. IDIART, B. DOLLET, L. BERTHIER, et A. YEKINI
Bubbles in sheared two-dimensional foams
Colloids and Surfaces A, 263 : 95, 2005.
- [74] P. ALLIEZ, É. COLINE DE VERDIÈRE, O. DEVILLERS, et M. ISENBURG
Isotropic surface remeshing
Dans *International Conference on Shape Modeling and applications*, page 49, 2003.
- [75] Q. DU, V. FABER, et M. GUNZBURGER
Centroidal Voronoi tessellations : applications and algorithms
SIAM Rev., 41 : 637, 1999.
- [76] W. T. READ et W. SCHOCKLEY
Dislocation models of crystal grain boundaries
Phys. Rev.
- [77] R. KOYABASHI, J. A. WARREN, et W. C. CARTER
A continuum model of grain boundaries
Physica D, 140 : 141, 2000.
- [78] J. M. KOSTERLITZ et D. J. THOULESS
Ordering, metastability and phase transition in two-dimensional systems
J. Phys. C, 6 : 1181, 1973.
- [79] B. I. HALPERIN et D. R. NELSON
Theory of two-dimensional melting
Phys. Rev. Lett., 41 : 121, 1978.
- [80] B. I. HALPERIN et D. R. NELSON
Erratum : Theory of two-dimensional melting
Phys. Rev. Lett., 41 : 519, 1978.
- [81] D. R. NELSON et B. I. HALPERIN
Dislocation-mediated melting in two dimensions
Phys. Rev. B, 19 : 2457, 1979.
- [82] A. P. YOUNG
Melting and the vector Coulomb gas in two dimensions
Phys. Rev. B, 19 : 1855, 1979.
- [83] K. J. STRANDBURG
Two-dimensional melting
Rev. Mod. Phys., 60 : 161, 1988.
- [84] K. BAGCHI, H. C. ANDERSEN, et W. SWOPE
Computer simulation study of the melting transition in two dimensions
Phys. Rev. Lett., 76 : 255, 1996.
- [85] A. JASTER
Orientational order of the two-dimensional hard-disk system
Europhys. Lett., 42 : 1998.
- [86] K. J. NAIDOO et J. SCHNITKER
Melting of two-dimensional colloidal crystals : as simulation study of the yukawa system
J. Chem. Phys., 100 : 3114, 1994.
- [87] Y. SAITO
Melting of dislocation vector systems in two dimensions
Phys. Rev. Lett., 48 : 1114, 1982.
- [88] M. A. MOORE et A. PÉREZ-GARRIDO
Absence of a finite-temperature melting transition in the classical two-dimensional one-component plasma
Phys. Rev. Lett., 82 : 4078, 1999.

- [89] D. R. NELSON
Phase transition and critical phenomena, volume 7 Academic Press, New York, 1983.
- [90] K. ZAHN et G. MARET
 Dynamic criteria for melting in two dimensions
Phys. Rev. Lett., 85 : 3656, 2000.
- [91] R. E. KUSNER, J. A. MANN, J. KERINS, et A. J. DAHM
 Two-stage melting of a two-dimensional colloidal lattice with dipole interactions
Phys. Rev. Lett., 73 : 3113, 1994.
- [92] C. A. MURRAY et D. H. VAN WINKLE
 Experimental observation of two-stage melting in a classical two-dimensional screened Coulomb system
Phys. Rev. Lett., 58 : 1200, 1987.
- [93] K. ZAHN, R. LENKE, et G. MARET
 Two-stage melting of paramagnetic colloidal crystals in two dimensions
Phys. Rev. Lett., 82 : 2721, 1999.
- [94] A. H. MARCUS et S. A. RICE
 Observations of first-order liquid-to-hexatic and hexatic-to-solid phase transitions in a confined colloid suspension
Phys. Rev. Lett., 77 : 2577, 1996.
- [95] C. A. MURRAY et R. A. WENK
 Microscopic particle motions and topological defects in two-dimensional hexatics and dense fluids
Phys. Rev. Lett., 62 : 1643, 1989.
- [96] L. LANDAU et E. LIFCHITZ
 Théorie de l'élasticité
Mir, Moscou, 1967.
- [97] J. Q. BROUGHTON, G. H. GILMER, et J. D. WEEKS
 Molecular-dynamics study of melting in two dimensions. Inverse-twelfth-power interaction
Phys. Rev. B, 25 : 4651, 1982.
- [98] L. BONSALE et A. A. MARADUDIN
 Some static and dynamical properties of a two-dimensional Wigner crystal
Phys. Rev. B, 15 : 1959, 1977.
- [99] M. BORN et K. HUANG
Dynamical theory of crystal lattices, page 248
 Oxford University Press, 1956.
- [100] W. JONES et N. H. MARCH
 Theoretical solid state physics
John Wiley & Sons, 1973.
- [101] H. KLEINERT
 Gauge fields in condensed matter
World Scientific, 1989.
- [102] J. ZANGHELLINI, P. KEIM, et H. H. VON GRÜNBERG
 The softening of two-dimensional colloidal crystals
J. Phys. : Cond. Matt., 17 : S3579, 2005.
- [103] R. H. MORF
 Temperature dependence of the shear modulus and melting of the two-dimensional electron solid
Phys. Rev. Lett., 43 : 931, 1979.
- [104] H. H. VON GRÜNBERG, P. KEIM, K. ZAHN, et G. MARET
 Elastic behavior of a two-dimensional crystal near melting
Phys. Rev. Lett., 93 : 255703, 2004.
- [105] M. SPRIK, W. IMPEY, et M. L. KLEIN
 Second-order constants for the Lennard-Jones solid
Phys. Rev. B, 29 : 4368, 1984.
- [106] D. J. CLEAVER et M. P. ALLEN
 Computer simulations of the elastic properties of liquid crystals
Phys. Rev. A, 43 : 1918, 1991.
- [107] B. TJITPO-MARGO, G. T. EVANS, M. P. ALLEN, et D. FRENKEL
 Elastic constants of hard and soft nematic liquid crystals
J. Phys. Chem., 96 : 3942, 1992.

- [108] M. LE BELLAC
Des phénomènes critiques aux champs de jauge
CNRS Éditions / EDP Sciences, Paris, 2002.
- [109] M. AUBOUY, Y. JIANG, F. GRANER, et J. A. GLAZIER
A texture tensor to quantify deformations
Granular Matter, 5 : 71, 2003.
- [110] S. COURTY, B. DOLLET, F. ELIAS, P. HEINIG, et F. GRANER
Two-dimensional shear modulus of a Langmuir foam
Europhys. Lett., 64 : 709, 2003.
- [111] C.-L. LIAO, T.-P. CHANG, D.-H. YOUNG, et C. S. CHANG
Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit
Int. J. Solids Struct., 34 : 4087, 1997.
- [112] H. A. MAKSE, N. GLAND, D. L. JOHNSON, et L. M. SCHWARTZ
Why effective medium theory fails in granular materials
Phys. Rev. Lett., 83 : 5070, 1999.
- [113] I. GOLDBIRSCHE et C. GOLDENBERG
On the microscopic foundations of elasticity
Eur. Phys. J. E, 9 : 245, 2002.
- [114] C. GOLDENBERG et I. GOLDBIRSCHE
Continuum mechanics for small systems and fine resolutions
Dans *Handbook of theoretical and computational nanotechnology*
American Scientific, 2005.
- [115] C. GOLDENBERG, A. P. F. ATMAN, P. CLAUDIN, G. COMBE, et I. GOLDBIRSCHE
Scale separation in granular packings : stress plateaus and fluctuations
Phys. Rev. Lett., 96 : 168001, 2006.
- [116] A. TANGUY, J. P. WITTMER, F. LEONFORTE, et J.-L. BARRAT
Continuum limit of amorphous elastic bodies : a finite-size study of low-frequency harmonic vibrations
Phys. Rev. B, 66 : 174205, 2002.
- [117] F. LEONFORTE, A. TANGUY, J. P. WITTMER, et J.-L. BARRAT
Continuum limit of amorphous elastic bodies II : linear response to a point source force
Phys. Rev. B, 70 : 014203, 2004.
- [118] L. R. PRATT
Fluctuation method for calculation of elastic constants of solids
J. Chem. Phys., 87 : 1245, 1987.
- [119] M. P. ALLEN et D. FRENKEL
Calculation of liquid-crystal Franck constants by computer simulation
Phys. Rev. A, 37 : 1813, 1988.
- [120] M. P. ALLEN et D. FRENKEL
Erratum : Calculation of liquid-crystal Franck constants by computer simulation
Phys. Rev. A, 42 : 3641, 1990.
- [121] M. P. ALLEN, M. A. WARREN, M. R. WILSON, A. SAURON, et W. SMITH
Molecular dynamics calculation of elastic constants in Gay-Berne nematic liquid crystals
J. Chem. Phys., page 2850, 1996.
- [122] M. T. MEYERS, J. M. RICKMAN, et T. J. DELPH
The calculation of elastic constants from displacement fluctuations
J. Appl. Phys., 98 : 066106, 2005.
- [123] P. KEIM, G. MARET, U. HERZ, et H. H. VON GRÜNBERG
harmonic lattice behavior of two-dimensional colloidal crystals
Phys. Rev. Lett., 92 : 215504, 2004.
- [124] D. R. SQUIRE, A. C. HOLT, et W. G. HOOVER
Isothermal elastic constants for argon, theory and monte carlo calculations
Physica, 42 : 388, 1969.
- [125] M. PARRINELLO et A. RAHMAN
Strain fluctuations and elastic constants
J. Chem. Phys., 76 : 2662, 1982.

- [126] J. R. RAY et A. RAHMAN
 Statistical ensembles and molecular dynamics studies of anisotropic solids
J. Chem. Phys., 80 : 4423, 1984.
- [127] S. NOSÉ
 A unified formulation of the constant temperature molecular dynamics methods
J. Chem. Phys., 81 : 511, 1984.
- [128] J. R. RAY et A. RAHMAN
 Statistical ensembles and molecular dynamics studies of anisotropic solids. II
J. Chem. Phys., 82 : 4243, 1985.
- [129] K. YOSHIMOTO, G. J. PAKONSTANTOPOULOS, J. F. LUTSKO, et J. J. DE PABLO
 Statistical calculation of elastic moduli for atomistic models
Phys. Rev. B, 71 : 184108, 2005.
- [130] J. A. WEISS, A. E. LARSEN, et D. G. GRIER
 Interactions, dynamics, and elasticity in charge-stabilized colloidal crystals
J. Chem. Phys., 109 : 8659, 1998.
- [131] K. VAN WORKUM et J. J. DE PABLO
 Improved simulation method for the calculation of the elastic constants of crystalline and amorphous systems using strain fluctuations
Phys. Rev. E, 67 : 011505, 2003.
- [132] A. A. GUSEV, M. M. ZEHNDER, et U. W. SUTER
 Fluctuation formula for elastic constants
Phys. Rev. B, 54 : 1, 1996.
- [133] P. SCHOFIELD
 Wavelength-dependent fluctuations in classical fluids. I. The long wavelength limit
Proc. Phys. Soc., 88 : 149, 1966.
- [134] M. P. ALLEN et A. J. MASTERS
 Molecular simulation and theory of liquid crystals : chiral parameters, flexoelectric coefficients, and elastic constants
J. Mater. Chem., 11 : 2678, 2001.
- [135] M. J. BERAN et J. J. MCCOY
 Mean field variations in a statistical of heterogeneous linearly elastic solids
Int. J. Solids Structures, 6 : 1035, 1970.
- [136] C. S. CHANG et J. GAO
 Second-gradient constitutive theory for granular material with random packing structure
Int. J. Solids Structures, 32 : 2279, 1995.
- [137] S. SENGUPTA, P. NIELABA, M. RAO, et K. BINDER
 Elastic constants from microscopic strain fluctuations
Phys. Rev. E, 61 : 1072, 2000.
- [138] M. ROVERE, P. NIELABA, et K. BINDER
 Simulation studies of gas-liquid transitions in two dimensions via a subsystem-block-density distribution analysis
Z. Phys. B Cond. Matt., 90 : 215, 1993.
- [139] A. WILLE, F. VALMONT, K. ZAHN, et G. MARET
 Shear modulus of two-dimensional colloidal crystals
Europhys. Lett., 57 : 219, 2002.
- [140] K. ZAHN, A. WILLE, G. MARET, S. SENGUPTA, et P. NIELABA
 Elastic properties of 2D colloidal crystals from video microscopy
Phys. Rev. Lett., 90 : 155506, 2003.
- [141] I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK
 Table of integrals series and products
Academic Presse, 1965.
- [142] J. A. WHITE et A. GONZALEZ
 The extended variable spaces approach to density functional theory in the canonical ensemble
J. Phys. : Cond. Matt., 14 : 11907, 2002.
- [143] H. D. HALLEN, R. SESHADRI, A. M. CHANG, R. E. MILLER, L. N. PFEIFFER, K. W. WEST, C. A. MURRAY, et H. F. HESS
 Direct spatial imaging of vortices in a superconducting wire network
Phys. Rev. Lett., 71 : 3007, 1993.

- [144] S. TEITEL et C. JAYAPRAKASH
Josephson-junction array in transverse magnetic fields
Phys. Rev. Lett., 51 : 1999, 1983.
- [145] T. C. HALSEY
Josephson-junction arrays in transverse magnetic fields : ground states and critical currents
Phys. Rev. B, 31 : 5728, 1985.
- [146] B. PANNETIER, C. C. ABILIO, E. SERRET, T. FOURNIER, P. BUTAUD, et J. VIDAL
Localization effect in a two-dimensional superconducting network without disorder
Physica C, 352 : 41, 2001.
- [147] E. SERRET, P. BUTAUD, et B. PANNETIER
Vortex correlations in a fully frustrated two-dimensional superconducting network
Europhys. Lett., 59 : 225, 2002.
- [148] M. F. LAGUNA, C. A. BALSEIRO, D. DOMINGUEZ, et F. NORI
Vortex structure and dynamics in kagomé and triangular pinning potential
Phys. Rev. B, 64 : 104505, 2001.
- [149] V. V. MOSHCHALOV, M. BAERT, V. V. METLUSHKO, E. ROSSEEL, M. J. VAN BAEL, K. TEMST, Y. BRUYNSERAEDE, et R. JONCKHEERE
Pinning by an antidot lattice : the problem of the optimum antidot size
Phys. Rev. B, 57 : 3615, 1998.
- [150] G. S. MKRTCHYAN et V. V. SCHMIDT
Interaction between a vortex and a cavity in a superconductor of the second kind
Sov. Phys. JETP, 34 : 195, 1972.
- [151] W. V. POGOSOV, A. L. RAKHMANOV, et V. V. MOSHCHALOV
Vortex lattice in the presence of a tunable periodic pinning potential
Phys. Rev. B, 67 : 014532, 2003.
- [152] C. REICHHARDT, C. J. OLSON, et F. NORI
Commensurate and incommensurate vortex states in superconductors with periodic pinning arrays
Phys. Rev. B, 57 : 7937, 1998.
- [153] C. REICHHARDT et N. GRØNBECHE-JENSEN
Critical currents and vortex states at fractional matching fields in superconductors with periodic pinning
Phys. Rev. B, 63 : 054510, 2001.
- [154] K.-H. LIN, J. C. CROCKER, V. PRASAD, A. SCHOFIELD, D. A. WEITZ, T. C. LUBENSKY, et A. G. YODH
Entropically driven colloidal crystallization on patterned surfaces
Phys. Rev. Lett., 85 : 1770, 2000.
- [155] M. BRUNNER et C. BECHINGER
Phase behavior of colloidal molecular crystals on triangular light lattices
Phys. Rev. Lett., 88 : 248302, 2002.
- [156] P. T. KORDA, G. C. SPALDING, et D. G. GRIER
Evolution of a colloidal critical state in an optical pinning potential landscape
Phys. Rev. B, 66 : 024504, 2002.
- [157] K. MANGOLD, P. LEIDERER, et C. BECHINGER
Phase transitions of colloidal monolayers in periodic pinning array
Phys. Rev. Lett., 90 : 158302, 2003.
- [158] C. REICHHARDT et C. J. OLSON
Novel colloidal crystalline states on two-dimensional periodic substrates
Phys. Rev. Lett., 88 : 248301, 2002.
- [159] C. REICHHARDT et C. J. OLSON REICHHARDT
Statics and dynamics of colloidal particles in periodic traps
Dans *Proceedings of SPIE*, volume 5514, page 352, 2004.
- [160] C. REICHHARDT et C. J. OLSON REICHHARDT
Dynamic regimes and spontaneous symmetry breaking for driven colloids on triangular substrates
Europhys. Lett., 68 : 303, 2004.
- [161] E. DURAND
Électrostatique
Masson, Paris, 1964.

- [162] T. A. DRISCOLL et L. N. TREFETHEN
Schwarz-Christoffel mapping
Cambridge University Press, 2002.
- [163] C. HU
Algorithm 785 : a software package for computing Schwarz-Christoffel conformal transformation for doubly connected polygonal regions
ACM Trans. Math. Softw., 24 : 317, 1998.
- [164] C. REICHHARDT, C. J. OLSON, R. T. SCALETTAR, et G. T. ZIMÁNYI
Commensurate and incommensurate vortex lattice melting in periodic pinning arrays
Phys. Rev. B, 64 : 144509, 2001.
- [165] M. FRANZ et S. TEITEL
Vortex-lattice melting in two-dimensional superconducting networks and films
Phys. Rev. B, 51 : 6551, 1995.
- [166] S. MOULINET, C. GUTHMANN, et E. ROLLEY
Roughness and dynamics of a contact line of a viscous fluid on a disordered substrate
Eur. Phys. J. E, 8 : 437, 2002.
- [167] P. PARUCH, T. GIAMARCHI, et J.-M. TRISCONI
Domain wall roughness in epitaxial ferroelectric $\text{PbZr}_{0.2}\text{Ti}_{0.8}\text{O}_3$ thin films
Phys. Rev. Lett., 94 : 197601, 2005.
- [168] C. REICHHARDT, J. GROTH, C. J. OLSON, S. B. FIELD, et F. NORI
Spatiotemporal dynamics and plastic flow of vortices in superconductors with periodic arrays of pinning sites
Phys. Rev. B, 54 : 16108, 1996.
- [169] C. REICHHARDT, C. J. OLSON, et F. NORI
Nonequilibrium dynamic phases and plastic flow of driven vortex lattices in superconductors with periodic arrays of pinning sites
Phys. Rev. B, 58 : 6534, 1998.
- [170] Q. H. CHEN, G. TENIERS, B. B. JIN, et V. V. MOSHCHALOV
Pinning properties and vortex dynamics in thin superconducting films with ferromagnetic and antiferromagnetic arrays of magnetic dots
Phys. Rev. B, 73 : 014506, 2006.
- [171] L. RADZIHOVSKY, E. FREY, et D. R. NELSON
Novel phases and reentrant melting of two-dimensional colloidal crystals
Phys. Rev. E, 63 : 031503, 2001.
- [172] A. V. SILHANEK, L. VAN LOOK, R. JONCKHEERE, B. Y. ZHU, S. RAEDTS, et V. V. MOSHCHALOV
Enhanced vortex pinning by a composite antidot lattice in a superconducting Pb film
Phys. Rev. B, 72 : 014507, 2005.
- [173] C. REICHHARDT, G. T. ZIMÁNYI, et Niels GRØNBECH-JENSEN
Complex dynamical flow phases and pinning in superconductors with rectangular pinning arrays
Phys. Rev. B, 64 : 014501, 2001.
- [174] V. M. BEDANOV, G. V. GADIYAK, et Y. E. LOZOVIK
On a modified Lindemann-like criterion for 2D melting
Phys. Lett. A, 109 : 289, 1985.
- [175] Y. E. LOZOVIK, V. M. FARZTDINOV, B. ABDULLAEV, et S. A. KUCHEROV
Melting and spectra of two-dimensional classical crystals
Phys. Lett. A, 112 : 61, 1985.
- [176] V. M. BEDANOV, G. V. GADIYAK, et Y. E. LOZOVIK
Melting of two-dimensional crystals
Sov. Phys. JETP, 61 : 967, 1985.
- [177] M. KONG, B. PARTOENS, et F. M. PEETERS
Topological defects and nonhomogeneous melting of large two-dimensional Coulomb clusters
Phys. Rev. E, 67 : 021608, 2003.
- [178] E. YURTSEVER, F. CALVO, et D. J. WALES
Finite-size effects in the dynamics and thermodynamics of two-dimensional Coulomb clusters
Phys. Rev. E, 72 : 026110, 2005.
- [179] B. PARTOENS et F. M. PEETERS
Classical artificial two-dimensional atoms : the Thomson model
J. Phys. : Cond. Matt., 9 : 5383, 1997.

- [180] B. PARTOENS et P. S. DEO
 Structure and spectrum of classical two-dimensional clusters with a logarithmic interaction potential
Phys. Rev. B, 69 : 245415, 2004.
- [181] L. R. E. CABRAL et F. M. PEETERS
 Elastic modes of vortex configurations in thin disks
Phys. Rev. B, 70 : 214522, 2004.
- [182] I. V. SCHWEIGERT, V. A. SCHWEIGERT, et F. M. PEETERS
 Radial-fluctuation-induced stabilization of the ordered state in two-dimensional classical clusters
Phys. Rev. Lett., 84 : 4381, 2000.
- [183] D. M. TOMECKA, B. PARTOENS, et F. M. PEETERS
 Multistep radial melting in small two-dimensional classical clusters
Phys. Rev. E, 71 : 062401, 2005.
- [184] J. A. DROCCO, C. J. OLSON REICHHARDT, C. REICHHARDT, et B. JANKÓ
 Structure and melting of two-species charged clusters in a parabolic trap
Phys. Rev. E, 68 : 060401, 2003.
- [185] W. P. FERREIRA, F. F. MUNARIN, K. NELISSEN, R. N. COSTA, F. M. PEETERS, et G. A. FARIAS
 Structure, normal mode spectra, and mixing of a binary system of charged particles confined in a parabolic trap
Phys. Rev. E, 72 : 021406, 2005.
- [186] K. NELISSEN, A. MATULIS, B. PARTOENS, M. KONG, et F. M. PEETERS
 Spectrum of classical two-dimensional Coulomb clusters
Phys. Rev. E, 73 : 016607, 2006.
- [187] K. NELISSEN, B. PARTOENS, I. SCHWEIGERT, et F. M. PEETERS
 Induced order and re-entrant melting in classical two-dimensional binary clusters
Europhys. Lett., 74 : 1046, 2006.
- [188] V. A. SCHWEIGERT et F. M. PEETERS
 Time-dependent properties of classical artificial atoms
J. Phys. : Cond. Matt., 10 : 2417, 1998.
- [189] O. M. BRAUN
 The Frenkel-Kontorova model : Concepts, methods, and applications
Springer, 2004.
- [190] A. V. FILINOV, M. BONITZ, et Y. E. LOZOVIK
 Wigner crystallization in mesoscopic 2D electron systems
Phys. Rev. Lett., 86 : 3851, 2001.
- [191] M. SAINT JEAN et C. GUTHMANN
 Macroscopic two-dimensional Wigner asymmetric islands
J. Phys. : Condens. Matter, 14 : 13653, 2002.
- [192] S. W. S. APOLINARIO, B. PARTOENS, et F. M. PEETERS
 Structure and spectrum of anisotropically confined two-dimensional clusters with logarithmic interaction
Phys. Rev. E, 72 : 046122, 2005.
- [193] R. BUBECK, C. BECHINGER, S. NESER, et P. LEIDERER
 Melting and reentrant freezing of two-dimensional colloidal crystals in confined geometry
Phys. Rev. Lett., 82 : 3364, 1999.
- [194] R. BUBECK, P. LEIDERER, et C. BECHINGER
 Fluctuation-induced order in two-dimensional colloidal clusters
Europhys. Lett., 60 : 474, 2002.
- [195] C. ASLANGUL
 Classical diffusion in presence of geometrical constraints and / or interactions
 Dans *Anomalous diffusion. From basis to applications. Proceedings of the 11th Max Born Symposium*, page 326, 1999.
- [196] I. V. SCHWEIGERT, V. A. SCHWEIGERT, et F. M. PEETERS
 Properties of two-dimensional Coulomb clusters confined in a ring
Phys. Rev. B, 54 : 10827, 1996.
- [197] T. E. HARRIS
 Diffusion with "collisions" between particles
J. Appl. Prob., 2 : 323, 1965.

- [198] H. VAN BEIJEREN, K. W. KEHR, et R. KUTNER
Diffusion in concentrated lattice gases. III. Tracer diffusion on a one-dimensional lattice
Phys. Rev. B, 28 : 5711, 1983.
- [199] M. KOLLMANN
Single-file diffusion of atomic and colloidal systems : asymptotic laws
Phys. Rev. Lett., 90 : 180602, 2003.
- [200] S. S. NIVARTHI, A. V. MCCORMICK, et H. T. DAVIS
Diffusion anisotropy in molecular sieves : A Fourier transform PFG NMR study of methane in $\text{AlPO}_4\text{-5}$
Chem. Phys. Lett., 229 : 297, 1994.
- [201] K. HAHN et J. KÄRGER
Deviations from the normal time regime of single-file diffusion
J. Phys. Chem. B, 102 : 5766, 1998.
- [202] H. JOBIC, K. HAHN, J. KÄRGER, M. BEE, A. TUEL, M. NOACK, I. GIRNUS, et G. J. KEARLEY
Unidirectional and single-file diffusion of molecules in one-dimensional channel systems. a quasi-elastic neutron scattering study
J. Phys. Chem. B, 101 : 5834, 1997.
- [203] Q.-H. WEI, C. BECHINGER, et P. LEIDERER
Single-file diffusion of colloids in one dimensional channels
Science, 287 : 625, 2000.
- [204] B. LIN, B. CUI, J.-H. LEE, et J. YU
Hydrodynamic coupling in diffusion of quasi-one-dimensional brownian particles
Europhys. Lett., 57 : 724, 2002.
- [205] C. LUTZ, M. KOLLMANN, P. LEIDERER, et C. BECHINGER
Diffusion of colloids in one-dimensional light channels
J. Phys. : Cond. Matt., 16 : S4075, 2004.
- [206] C. LUTZ, M. KOLLMANN, et C. BECHINGER
Single-file diffusion of colloids in one-dimensional channels
Phys. Rev. Lett., 93 : 026001, 2004.
- [207] C. ASLANGUL
Classical diffusion of N interacting particles in on dimension : general results and asymptotic laws
Europhys. Lett., 44 : 284, 1998.
- [208] M. BANDYOPADHYAY, S. DATTA GUPTA, et M. SANYAL
Diffusion enhancement in a periodic potential under high-frequency space-dependent forcing
Phys. Rev. E, 73 : 051108, 2006.
- [209] P. MARTINOLI
Static and dynamic interaction of superconducting vortices with a periodic pinning potential
Phys. Rev. B, 17 : 1175, 1978.
- [210] M. H. THEUNISSEN, E. VAN DER DRIFT, et P. H. KES
Size effects in flow of flux-line solids and liquids
Phys. Rev. Lett., 77 : 159, 1996.
- [211] S. ANDERS, A. W. SMITH, H. M. JAEGER, R. BESSELING, P. H. KES, et E. VAN DER DRIFT
Commensurability effects and fluctuations of vortex flow in mesoscopic channels
Physica C, 332 : 35, 2000.
- [212] R. BESSELING, R. NIGGEBRUGGE, et P. H. KES
Transport properties of vortices in easy flow channel : a Frenkel Kontorova study
Phys. Rev. Lett., 82 : 3144, 1999.
- [213] N. KOKUBO, R. BESSELING, V. M. VINOKUR, et P. H. KES
Mode locking of vortex matter driven through mesoscopic channel
Phys. Rev. Lett., 88 : 247004, 2002.
- [214] R. BESSELING, P. H. KES, T. DRÖSE, et V. M. VINOKUR
Depinning and dynamics of vortices confined in mesoscopic flow channels
New Journal of Physics, 7 : 71, 2005.
- [215] R. PIESSENS, E. DE DONCKER-KAPENGA, C. ÜBERHUBER, et D. KAHANER
QUADPACK : a subroutine package for automatic integration
Springer, 1983.

- [216] J. MATHEWS et R. L. WALKER
Mathematical methods of physics
Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.