



**HAL**  
open science

## Colorations de graphes et applications

Jean-Sébastien Sereni

► **To cite this version:**

Jean-Sébastien Sereni. Colorations de graphes et applications. Modélisation et simulation. Université Nice Sophia Antipolis, 2006. Français. NNT: . tel-00120594

**HAL Id: tel-00120594**

**<https://theses.hal.science/tel-00120594>**

Submitted on 15 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ de NICE-SOPHIA ANTIPOLIS – UFR SCIENCES

École Doctorale STIC

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en SCIENCES**

de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Discipline : INFORMATIQUE

présentée et soutenue par

**Jean-Sébastien SERENI**

## Colorations de graphes et applications

Thèse dirigée par **Jean-Claude BERMOND** et **Frédéric HAVET**

et préparée à l'INRIA Sophia Antipolis, projet MASCOTTE  
I3S (CNRS-UNSA) – INRIA

soutenue le **5 juillet 2006**

### Jury :

Examineurs	M. <b>Enrico</b>	<b>FORMENTI</b>	Professeur
	M. <b>Frédéric</b>	<b>HAVET</b>	Chargé de Recherche
	M. <b>Éric</b>	<b>SOPENA</b>	Professeur
Directeur	M. <b>Jean-Claude</b>	<b>BERMOND</b>	Directeur de Recherche
Rapporteurs	M. <b>Fedor</b>	<b>FOMIN</b>	Professeur
	M. <b>Frédéric</b>	<b>MAFFRAY</b>	Directeur de Recherche
	M. <b>Colin</b>	<b>MCDIARMID</b>	Professeur







# Remerciements

Je remercie tout d'abord Jean-Claude Bermond pour m'avoir accordé sa confiance et permis de travailler dans l'équipe MASCOTTE. Je lui suis reconnaissant pour le temps qu'il consacre chaque jour à faire en sorte que les membres de MASCOTTE puissent travailler dans les meilleures conditions possibles.

J'exprime également ma reconnaissance à Frédéric Havet et Michel Syska pour avoir défendu ma candidature.

J'exprime ma sincère gratitude à mon directeur de thèse, Frédéric Havet. D'une part pour le temps passé à m'avoir fait partager ses connaissances scientifiques, son expérience et sa vision de la recherche. D'autre part pour sa générosité et pour la relation amicale qu'il a su établir.

Je remercie également toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de travailler au cours de ces trois dernières années : Lougi Addario-Berry, Omid Amini, Stéphane Bessy, Ricardo Corrêa, David Coudert, Frédéric Havet, Florian Huc, Ross J. Kang, Dan Král', Nicolas Lichiardopol, Colin McDiarmid, Tobias Müller, Stéphane Pérennes, Riste Škrekovski, et Stéphan Thomassé.

J'ai eu la chance de préparer cette thèse au sein de l'équipe MASCOTTE, qui est un projet commun entre l'INRIA et l'I3S (regroupant le CNRS et l'UNSA). Que tous ses membres soient remerciés pour leur accueil, leur disponibilité, ainsi que pour le cadre propice au travail qu'ils ont su créer et maintenir : Omid Amini, Bruno Beauquier, Jean-Claude Bermond, Michel Cosnard, David Coudert, Olivier Dalle, Ephie Deriche, Afonso Ferreira, Jérôme Galtier, Frédéric Havet, Florian Huc, Gurvan Huiban, Aubin Jarry, Ralf Klasing, Patricia Lachaume, Jean-François Lalande, Alexandre Laugier, Luigi Liquori, Christelle Molle, Nelson Morales, Philippe Mussi, Fabrice Peix, Stéphane Pérennes, Séverine Petat, Hervé Rivano, Michel Syska, et Marie-Émilie Voge.

Je remercie Monsieur le Professeur Fedor Fomin, Monsieur le Directeur de Recherche Frédéric Maffray, et Monsieur le Professeur Colin McDiarmid de s'être intéressé à ma thèse en acceptant d'en être rapporteur.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur Enrico Formenti de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de thèse. Je remercie également les autres membres du Jury : Monsieur le Directeur de Recherche Jean-Claude Bermond, Monsieur le Professeur Fedor Fomin, Monsieur le Chargé de Recherche Frédéric Havet, Monsieur le Directeur de Recherche Frédéric Maffray, et Monsieur le Professeur Éric Sopena.

Je remercie enfin Monsieur le Professeur André Raspaud pour avoir accepté d'être membre du Jury et regrette qu'il n'ait pu être présent à la soutenance.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	i
<b>Table des figures</b>	vii
<b>Plan de la thèse</b>	1
<b>Première partie . Problème d’Alcatel et coloration impropre</b>	7
<b>Chapitre 1. Définitions et premiers résultats</b>	9
1.1. Problème d’Alcatel et modélisation	9
1.2. Introduction	10
1.3. Complexité	12
1.3.1. Complexité lorsque $l$ vaut deux	13
1.3.2. Complexité lorsque $l \geq 3$	15
1.4. Graphes planaires	18
1.5. Graphes planaires et théorème de Brooks	23
1.5.1. Démonstration du théorème 8	24
1.6. Conclusion	28
<b>Chapitre 2. Coloration impropre des graphes de densité bornée</b>	31
2.1. Introduction	31
2.2. Coloration $k$ -impropre avec deux couleurs	34
2.2.1. Borne inférieure	34
2.2.2. Borne supérieure	38
2.3. Coloration $k$ -impropre avec $l$ couleurs, $l \geq 2$	39
2.3.1. Borne inférieure	39
2.3.2. Borne supérieure	44
2.4. Application aux graphes de genre $r \geq 1$	46
2.5. Conclusion	46
<b>Chapitre 3. Coloration impropre des graphes d’intersection de disques unitaires</b>	49
3.1. Introduction	49
3.2. Complexité	51
3.2.1. Graphes d’intersection d’intervalles	51
3.2.2. La $l$ -coloration $k$ -impropre des graphes d’intersection de disques unitaires, $l \geq 3$	53
3.2.3. La 2-coloration $k$ -impropre des graphes d’intersection de disques unitaires, $k \geq 1$	60



3.2.4.	Colorations impropres pondérées du réseau triangulaire	69
3.3.	Coloration impropre asymptotique des graphes d'intersection de disques unitaires	75
3.3.1.	Résultats	76
3.3.2.	Démonstrations	78
3.4.	Coloration impropre des graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires	80
3.4.1.	Résultats	80
3.4.2.	Démonstrations	82
3.5.	Conclusion	90
<b>Deuxième partie . Autres problèmes de coloration</b>		<b>93</b>
<b>Chapitre 4. Coloration 3-faciale des graphes planaires</b>		<b>95</b>
4.1.	Introduction	95
4.2.	Propriétés des graphes $(3, 11)$ -minimaux	97
4.3.	Démonstration du théorème 32	103
4.4.	Conclusion	111
<b>Chapitre 5. Choissabilité circulaire</b>		<b>115</b>
5.1.	Introduction	115
5.2.	Graphes multipartis complets	116
5.2.1.	Cliques circulaires et cycles pairs	116
5.2.2.	Bornes en fonction de la dégénérescence et de la choissabilité	118
5.2.3.	Graphes multipartis complets et équilibrés	121
5.3.	Graphes planaires et graphes de densité bornée	122
5.3.1.	Graphes planaires	122
5.3.2.	Bornes inférieures pour les graphes planaires de maille donnée	124
5.3.3.	Bornes supérieures pour les graphes de densité bornée	125
5.3.4.	Bornes supérieures pour les graphes de densité bornée et de maille donnée	127
5.3.5.	Bornes supérieures pour les graphes planaires et toriques de maille donnée	131
5.3.6.	Graphes planaires extérieurs	132
5.4.	Conclusion	133
5.4.1.	Graphes bipartis planaires	134
5.4.2.	Un graphe et son complémentaire	134
<b>Chapitre 6. Arête-coloration des graphes cubiques par des éléments de groupes abéliens</b>		<b>135</b>
6.1.	Introduction	135
6.1.1.	Présentation	135
6.1.2.	Résultats	139
6.1.3.	Notations	140
6.2.	Lemme de l'arc-en-ciel	141
6.3.	Arête-coloration abélienne	145
6.4.	Arête-coloration abélienne pour les groupes exceptionnels	147
6.4.1.	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration	147
6.4.2.	$\mathbb{Z}_3^2$ -arête-coloration	149
6.4.3.	$\mathbb{Z}_x$ -arête-coloration pour $x \in \{10, 11\}$	150

6.5. Arête-coloration entière	151
6.6. Conclusion	152
<b>Troisième partie . Largeur arborescente linéaire</b>	<b>155</b>
<b>Chapitre 7. Reroutage dans les réseaux WDM</b>	<b>157</b>
7.1. Introduction	157
7.2. Relations avec d'autres problèmes	160
7.3. Nombre de traitements de certaines classes de graphes	162
7.4. Conclusion	166
<b>Chapitre 8. Largeur arborescente linéaire des graphes planaires extérieurs</b>	<b>167</b>
8.1. Introduction	167
8.2. Contre-exemples	170
8.3. Borne supérieure	176
8.4. Conclusion	180
<b>Bibliographie</b>	<b>183</b>



# Table des figures

1.1	Le graphe de variable $H^u$ , avec $n = 3$ et $k = 2$ .	13
1.2	Exemple pour le théorème 1.	14
1.3	Le complémentaire du graphe $H(3, 3)$ .	15
1.4	Exemple pour le théorème 3.	17
1.5	Un graphe planaire non 2-improvement 2-colorable.	18
1.6	Un graphe biparti planaire non 2-improvement 2-choisissable.	19
1.7	Un graphe planaire non 1-improvement 3-colorable.	21
1.8	Le graphe $P_3$ .	22
1.9	Un graphe planaire 3-colorable mais pas 1-improvement 3-choisissable.	23
1.10	Remplacement d'un croisement par un gadget planaire.	25
1.11	Un régulateur, et son unique 2-coloration 1-impropre.	26
1.12	Un inverseur, et les couleurs forcées dans toutes ses 2-colorations 1-impropres.	26
1.13	Le gadget des variables.	26
1.14	Le gadget des clauses.	26
1.15	Le gadget de croisement.	27
1.16	Gadget pour la 2-coloration 2-impropre.	28
2.1	Le graphe $G_1^2$ .	39
2.2	Le graphe $G_3^1$ .	45
3.1	Relations entre différentes classes de graphes.	50
3.2	Conventions utilisées pour les figures.	54
3.3	Le $(k, l)$ -câble $W_{k,l}^3$ .	54
3.4	Une $(k, l)$ -chaîne d'ordre trois $K_{k,l}^3$ .	55
3.5	Le $(k, l)$ -clone $C_{k,l}^3$ .	55
3.6	Le $l$ -croisement $H_l$ et le $(k, l)$ -croisement $H_{k,l}$ .	56
3.7	Le $(k, l)$ -croisement $H_{k,l}$ .	57
3.8	Plongement du graphe $G'$ .	58
3.9	Plongement d'un $(k, l)$ -câble avec un angle droit.	58
3.10	Réalisation d'un $(k, l)$ -clone d'ordre trois.	59

3.11	Une réalisation du $(k, l)$ -croisement.	59
3.12	Le $(k, 2)$ -lien $B_{k,2}$ .	61
3.13	Un $(k, 2)$ -câble d'ordre trois $W_{k,2}^3$ .	62
3.14	Le $(2, 2)$ -clone d'ordre trois $C_{2,2}^3$ .	63
3.15	La $(2, 2)$ -corde d'ordre un $K_{2,2}^1$ .	64
3.16	Une $(2, 2)$ -chaîne d'ordre $(2, 1)$ $K_{2,2}^{(2,1)}$ .	65
3.17	Un graphe planaire et un plongement orthogonal par boîtes correspondant.	66
3.18	Une réalisation de la $(2, 2)$ -corde d'ordre 1.	67
3.19	Deux réalisations d'un $(k, 2)$ -lien : (a) $E_B^a$ et (b) $E_B^b$ .	67
3.20	Concaténation de deux copies de (a) $E_B^a$ et (b) $E_B^b$ .	68
3.21	Concaténation de (a) $E_B^b$ avec $E_K^1$ et (b) $E_B^b$ avec $E_B^a$ .	68
3.22	Une réalisation de $W_{k,2}^2$ avec un angle droit.	69
3.23	Le forceur $E^1$ .	72
3.24	Les sous-graphes induits $H^1$ (à gauche) et $R^1$ .	73
3.25	Le forceur $E^2$ .	73
3.26	Les sous-graphes induits $H^2$ (à gauche) et $R^2$ .	73
3.27	Le forceur $E^3$ .	73
3.28	Les sous-graphes induits $H^3$ (à gauche) et $R^3$ .	73
3.29	Le forceur $E^4$ .	74
3.30	Les sous-graphes induits $H^4$ (à gauche) et $R^4$ .	74
3.31	Tourner avec des forceurs lorsque $k = 5$ .	74
3.32	Les sous-graphes induits $H^5$ (à gauche) et $R^5$ .	74
3.33	Réseau triangulaire et cellules de Dirichlet-Voronoi.	77
3.34	Illustration du pavage pour le théorème 29.	78
3.35	$H \simeq K_{m(k+1)+1} - e$ vérifie $\omega(H) = m(k+1)$ et $c_k(H) = m+1$ .	83
3.36	Les ensembles $W_p$ .	87
4.1	Le graphe planaire $G_\ell$ .	95
4.2	Configurations réductibles de (L1) à (L9).	112
4.3	Configurations réductibles de (L10) à (L16).	113
4.4	Configurations réductibles de (L17) à (L25).	114
5.1	Une illustration de la procédure de découpage pour le théorème 34.	119
5.2	Partition de $G$ lorsqu'il possède une corde.	122
5.3	Le graphe $H_m$ .	123
5.4	Le graphe $H'_m$ lorsque $k = 2\ell + 1$ .	124
5.5	Le graphe $P_m$ .	132
6.1	Exemple de $\mathbb{Z}_2^2$ -flot sur un graphe cubique.	136
6.2	Le plus petit triplet de Steiner non trivial : le plan de Fano $\text{PG}(2, 2)$ .	138

6.3	Relations entre divers problèmes.	140
6.4	La configuration $F_6$ .	143
6.5	La configuration $D_9$ .	144
6.6	Homomorphismes de la configuration $D_9$ vers $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_n)$ pour $n \geq 12$ .	146
6.7	Isomorphisme entre $F_5$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ .	148
6.8	La configuration $D_8$ .	150
6.9	Homomorphismes de $D_8$ vers $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{10})$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{11})$ .	151
6.10	Étiquetage des points des configurations $D_9$ , $D_8$ et $F_4$ par des entiers non nuls.	152
6.11	La configuration $C_0$ .	153
6.12	Un isomorphisme entre $C_0$ et $\mathbb{Z}_7$ à gauche, et un homomorphisme de $C_0$ vers $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ à droite.	153
7.1	Suppression d'une boucle.	158
7.2	Exemple de décomposition linéaire.	159
7.3	Exemple de traitement d'un graphe.	160
7.4	Graphes pour la preuve du théorème 62.	162
7.5	Quelques niveaux de la pyramide de taille 7.	164
8.1	Lorsque les arêtes sont identifiées, $x_1$ est identifié à $u_1$ et $x_2$ à $u_2$ .	171
8.2	Le graphe $G_1$ , son dual et son dual faible.	171
8.3	$G_2$ , 4 copies disjointes de $G_1$ collées à une croix grise $K$ , et son dual faible $G_2^{**}$ .	172
8.4	$G_3$ , 4 copies disjointes de $G_2$ collées à une croix $K$ , et son dual faible $G_3^{**}$ .	172
8.5	La famille de graphe $(J_p)_{p \geq 3}$ .	175
8.6	Araignées et chenilles.	176
8.7	Sommets à l'étape $i$ .	177
8.8	Le graphe planaire extérieur triangulé dont le dual faible est une araignée avec trois pattes de longueur deux.	177



# Plan de la thèse

La théorie des graphes a connu un essor spectaculaire ces dernières années, en partie dû aux importantes interactions entre les aspects théorique et algorithmique du domaine, et les nouveaux enjeux scientifiques. Les graphes jouent un rôle prépondérant dans la recherche en sciences et technologies de l'information, ainsi qu'en bio-informatique par exemple. Ils apparaissent également comme des composants essentiels de beaucoup de théories mathématiques plus anciennes.

L'une des premières sources d'inspiration de la théorie des graphes a été le problème des 4 couleurs, qui est resté ouvert pendant plus d'un siècle avant d'être prouvé par Appel et Haken [AH77]. De nombreux aspects de la coloration des graphes ont depuis été étudiés, apportant de profonds résultats mathématiques. Si ce domaine est toujours aussi vivant, cela tient en grande partie à ce que la coloration des graphes permet de modéliser beaucoup de problèmes pratiques, notamment issus de domaines technologiques connaissant un fort développement, par exemple les réseaux de télécommunication (voir [LH02]).

C'est dans cette optique que nous avons effectués les travaux présentés ici : nous partons d'un problème pratique, que nous modélisons en termes de graphes afin de pouvoir analyser la situation, et avancer dans notre compréhension du problème (jusqu'à le résoudre parfois). Cette approche nous a montré en particulier que beaucoup de problématiques issues de situations concrètes correspondent à des problèmes théoriques, ou en sont très proches. C'est ainsi que nos travaux nous ont amenés à nous intéresser à des problèmes théoriques variés.

Deux problèmes pratiques sont à la base de nos travaux. Le premier est un problème d'allocation de fréquences qui nous a été proposé par Alcatel. Le second concerne le reroutage (sans perte de service) dans les réseaux WDM.

Cette thèse est composée de trois parties, chacune divisée en plusieurs chapitres. La conclusion de chaque chapitre fournit en particulier une liste de problèmes ouverts concernant le sujet traité. La plupart des résultats obtenus l'ont été en coopérant avec différentes personnes, dont les noms sont indiqués au début des chapitres ou sections concernés.

La première partie expose les travaux réalisés à partir du problème d'allocation de fréquences posé par Alcatel : un satellite envoie des informations à des récepteurs situés sur terre, chacun écoutant sur une fréquence. Pour des raisons techniques, le signal envoyé à un récepteur  $u$  ne peut être focalisé exactement sur  $u$ . Une partie du signal se propage donc autour de  $u$ , créant des interférences pour les récepteurs proches de  $u$  et écoutant sur la même fréquence que  $u$ . L'intensité de ces interférences étant faible (car elle décroît très rapidement avec la distance), chaque récepteur peut tolérer un certain nombre fixé  $k$  d'interférences. Le but est d'attribuer une fréquence à chaque récepteur de sorte que tous puissent capter les signaux qui leur sont



destinés. L'introduction présente précisément le problème, qui est ensuite modélisé en un problème de coloration de graphes, la *coloration impropre* : un graphe  $G$  est  $k$ -improprement  $l$ -colorable si, et seulement si, il existe une coloration de ses sommets avec  $l$  couleurs telle que chaque classe de couleur induise un sous-graphe de degré maximum  $k$ , c'est-à-dire telle que chaque sommet possède au plus  $k$  voisins de la même couleur que lui. Lorsque  $k$  est nul, il s'agit de la notion usuelle de coloration propre. La notion classique de choisissabilité se généralise de la même manière, et permet de modéliser le problème lorsque la liste de fréquences pouvant être attribuées à un récepteur  $u$  varie en fonction de  $u$ . Le premier chapitre fournit une exposition détaillée de ces concepts, et propose notamment des réponses à des questions de Cowen et al. [CGJ97] et Škrekovski [Škr99b]. En particulier, il est prouvé, via des résultats de complexité, qu'un analogue du théorème de Brooks [Bro41] pour la  $l$ -coloration  $k$ -impropre ne peut exister en général si  $l$  est au moins 2, ou si  $l \in \{3, 4, \dots, s\}$  avec  $s$  le plus grand entier tel que  $s + \sqrt{s} \leq 2k + 3$ . Ce résultat est étendu au cas où  $k = 1$  et  $l = 4$ , et aussi à la 2-coloration  $k$ -impropre des graphes planaires pour  $k \in \{1, 2\}$ . Plus précisément, il existe une borne supérieure triviale sur le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer  $k$ -improprement un graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta : \lceil \frac{\Delta+1}{k+1} \rceil$ . Lorsque  $k$  est nul, le théorème de Brooks [Bro41] assure que cette borne peut être réduite de un, sauf si le graphe  $G$  vérifie une condition détectable de façon polynomiale (être complet ou être un cycle impair). Nos résultats montrent qu'une telle condition ne peut exister si  $k \geq 1$  dans les cas cités, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

Le deuxième chapitre concerne l'étude de la 2-coloration impropre des graphes planaires de maille donnée (la *maille* est la taille d'un plus petit cycle). Contrairement à la coloration propre, déterminer si un graphe, même planaire, est improprement 2-colorable est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [CGJ97]. Une technique couramment utilisée afin d'obtenir des renseignements est d'imposer, en plus de la planarité, la taille de la maille des graphes étudiés. Afin d'étudier cette question, nous nous sommes placés dans le cadre plus général des graphes de densité bornée. En effet, minorer la taille d'un plus petit cycle d'un graphe planaire lui impose de ne pas être trop dense. Il est donc naturel de se demander si les résultats connus sur la 2-coloration impropre des graphes planaires de maille donnée [Škr00] s'étendent aux graphes de densité bornée. Nous utiliserons une technique de déchargement : chaque sommet possède une charge initiale, dont il transmet une partie à ses voisins selon certaines règles établies. Au final, la charge totale des sommets n'a pas changé, mais la charge de certains sommets particuliers a, elle, varié. Les règles sont choisies de sorte à pouvoir prouver que la charge finale de chaque sommet vérifie certaines propriétés, ce qui permet de déduire une propriété de la charge globale initiale utile pour prouver le résultat souhaité. Cette technique permet donc d'avoir un résultat global via des variations locales. Néanmoins, dans le cas qui nous intéresse ici, des graphes orientés de déchargement sont construits afin de permettre à la charge de circuler non seulement localement, mais aussi à travers de plus grandes structures. Nous généralisons ainsi tous les résultats de [Škr00], et nous en améliorons certains. En outre, notre méthode se généralise à la  $l$ -coloration  $k$ -impropre pour tout entier  $l \geq 2$  et tout entier  $k \geq 1$ , ce qui permet notamment d'améliorer les résultats de [Mia03] sur les graphes de genre et de maille donnés. Les résultats suivants sont établis, où  $M(k, l)$  désigne le plus grand réel tel que tout graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à  $M(k, l)$  soit  $k$ -improprement  $l$ -choisissable :

- $M(k, l) \geq l + \frac{lk}{l+k}$  ;
- pour tout  $l$  fixé,  $M(k, l) \rightarrow 2l$  quand  $n \rightarrow \infty$  ; et
- $M(k, 2) \leq 4 - \frac{2k+4}{k^2+2k+2}$ .

La limite est obtenue en fournissant une borne supérieure pour  $M(k, l)$ , mais celle-ci ne s'écrit pas facilement. De ces résultats découlent donc des corollaires concernant le nombre

chromatique impropre d'un graphe planaire (ou de genre borné) et de maille donnée. Par exemple, en notant  $g_k$  le plus petit entier tel que tout graphe planaire de maille  $g_k$  soit  $k$ -improprement 2-choisissable, il suit directement que  $g_1 \leq 8$  et  $g_2 \leq 6$ , ce qui améliore de un les bornes précédemment connues [Škr00] (ainsi,  $g_1 \in \{6, 7, 8\}$  et  $g_2 \in \{5, 6\}$ ). Un autre corollaire est que tous les graphes toriques sans triangle sont 1-improprement 4-choisissables. Il est toujours ouvert de savoir si tous les graphes toriques sont 1-improprement 4-colorables.

Enfin, le troisième chapitre regroupe les analyses du nombre chromatique impropre des graphes d'intersection de disques unitaires ainsi que des sous-graphes du réseau triangulaire. Les graphes d'intersection de disques unitaires sont intéressants pour modéliser les graphes d'interférences construits à partir des réseaux de récepteurs, et le réseau triangulaire est souvent utilisé car il offre un moyen efficace de couvrir le plan. La première section propose une étude de la complexité de ces problèmes, et introduit la notion de coloration impropre pondérée pour les sous-graphes du réseau triangulaire. En particulier, il est montré que :

- la  $l$ -coloration  $k$ -impropre des graphes d'intersection de disques unitaires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour tout couple  $(l, k)$  fixé avec  $k \geq 1$  et  $l \geq 2$ ; et
- les deux problèmes de coloration impropre pondérée introduits sont  $\mathcal{NP}$ -complets pour les sous-graphes du réseau triangulaire dans les cas non triviaux.

La deuxième section examine la coloration impropre asymptotique des graphes d'intersection de disques unitaires et des réseaux, dans la continuité des travaux de McDiarmid et Reed [MR99] : pour de grands réseaux, il est raisonnable de supposer que les récepteurs sont "assez bien répartis". La situation étudiée est la suivante :  $V$  est un ensemble dénombrable de points du plan de densité supérieure  $\sigma > 0$ , et  $G(V, r)$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est  $V$  et tel que  $xy$  soit une arête si, et seulement si, la distance entre  $u$  et  $v$  est strictement inférieure à  $r$ . D'un point de vue théorique, ces hypothèses permettent de s'extraire des spécificités de cas fixés, afin d'essayer d'exhiber un comportement général du nombre chromatique  $k$ -impropre en rapport avec la taille de la plus grande clique. Nous prouverons que le nombre chromatique  $k$ -impropre de  $G(V, r)$  est équivalent à  $\frac{\sigma\sqrt{3}}{2^{(k+1)}}$  quand  $r$  tend vers l'infini, pour tout  $k = o(r)$ . Ce résultat est ensuite amélioré pour les ensembles possédant une structure cellulaire, comme le réseau triangulaire.

La troisième et dernière section concerne l'étude du rapport entre le nombre chromatique impropre et la taille de la plus grande clique pour les graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires, dans la continuité de travaux réalisés par McDiarmid et Müller [MM05, MM06] et Müller [Mül05]. Au vu des résultats de complexité de la première section, un moyen d'obtenir des renseignements est d'étudier le comportement du nombre chromatique impropre (en fonction de la taille de la plus grande clique) en moyenne, pour des instances aléatoires. Le modèle des graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires a été développé par Penrose [Pen03] :  $n$  points (du plan, ou plus généralement de  $\mathbb{R}^d$ ) sont tirés aléatoirement selon une distribution de densité bornée, et une arête est placée entre deux points si, et seulement si, la distance entre les deux points est strictement inférieure à  $r(n)$ , où  $r(n)$  est une suite de réels tendant vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. Ce modèle est également utile en pratique lorsque les récepteurs sont placés aléatoirement (senseurs parachutés, par exemple). Le comportement du nombre chromatique impropre est caractérisé selon la valeur de  $r^2 n$  (qui peut être considérée comme une mesure du degré moyen). En particulier, les résultats obtenus (valables en toute dimension finie), impliquent que pour le plan, avec la norme euclidienne, le nombre chromatique  $k$ -impropre d'une instance aléatoire  $G_n$  est raisonnablement approché par la valeur  $\frac{2\sqrt{3}\omega(G_n)}{\pi^{(k+1)}}$  (calculable de façon polynomiale), lorsque  $n$  est grand.

La deuxième partie regroupe différents travaux concernant d'autres problèmes de coloration de graphes. Le premier chapitre traite de la coloration  $\ell$ -faciale des graphes planaires. Un chemin facial d'un plongement d'un graphe planaire est une suite de sommets obtenue en parcourant une partie de la frontière d'une face. Étant donné un plongement plan d'un graphe planaire, est-il possible de colorer ses sommets de sorte que toute paire de sommets reliés par un chemin facial de longueur au plus  $\ell$  soient colorés différemment ? Ce type de coloration, introduite dans [KMŠ05b], étend la notion de coloration cyclique, et se rapproche dans certains cas des  $(p, q)$ -étiquetages : existe-t-il une sommet-coloration telle que les couleurs de deux sommets voisins diffèrent d'au moins  $p$ , et celles de sommets à distance deux d'au moins  $q$  ? Ces étiquetages ont été beaucoup étudiés en raison de leurs applications à l'allocation de fréquences (les différents écarts permettant de simuler différentes intensités d'interférence entre les antennes, voir [Hal80, Rob89, GY92]). Pour les graphes planaires cubiques, un  $(1, 1)$ -étiquetage est exactement une 2-coloration faciale. Le résultat suivant est prouvé, à l'aide d'un processus de déchargement : tout graphe planaire admet une coloration 3-faciale utilisant au plus 11 couleurs. Notons qu'il existe des graphes planaires pour lesquels toute coloration 3-faciale nécessite au moins 10 couleurs.

Le deuxième chapitre étudie la notion de choisissabilité circulaire (qui est à la coloration circulaire ce que la coloration par listes est à la coloration), introduite par Mohar [Moh03] et Zhu [Zhu05]. De façon générale, l'intérêt principal d'une version circulaire d'une notion  $A$  est son utilisation comme outil afin de prouver par récurrence des résultats sur  $A$ . Nous apporterons une réponse négative à une question de Zhu [Zhu05] concernant le nombre de choix circulaire des cliques circulaires  $K_{p/q}$ , en prouvant que l'écart entre  $p/q$  et ce nombre peut être arbitrairement grand. Mohar [Moh03] a demandé la valeur de  $t(\mathcal{P}) := \inf\{\chi_{c,l}(G) : G \text{ planaire}\}$ , en indiquant qu'elle devrait être entre 4 et 5. Nous établissons que cette valeur se situe en réalité entre 6 et 8. Par ailleurs, ceci apporte une réponse négative à une autre question de Mohar [Moh03] : est-il vrai que le nombre de choix circulaire de tout graphe  $G$  est au plus son nombre de choix ? Nous prouvons également que le nombre de choix circulaire de tout graphe  $G$  à  $n$  sommets est au plus  $36 \text{ch}(G) + 54 \ln n + 3$ , où  $\text{ch}(G)$  désigne le nombre de choix de  $G$ . Cette borne est améliorée pour les graphes multipartis complets. Ensuite, nous nous intéressons au nombre de choix circulaire des graphes planaires de maille donnée, puis à celui des graphes de densité bornée (et de maille donnée). Soit  $t(k)$  le plus petit entier tel que le nombre de choix circulaire de tout graphe planaire de maille au moins  $k$  soit au plus  $t(k)$  ; nous montrons que

- $t(k) \geq 2 + \frac{4}{k-2}$  pour tout  $k \geq 3$  ;
- $t(4) \leq 6$  ;  $t(5) \leq 4 + \frac{1}{2}$  ;  $t(6) \leq 4$  ;  $t(8) \leq 3\frac{1}{3}$  ;  $t(9) \leq 3$  ; et
- $t(4l + 2) \leq 2 + \frac{2}{l}$  pour tout  $l \geq 1$ .

Plusieurs processus de déchargement sont utilisés afin d'obtenir des bornes sur le nombre de choix circulaire des graphes de densité bornée et de maille donnée. Ces bornes permettent de déduire des résultats sur les graphes de genre fixé et de maille donnée. Signalons également que nous établissons que  $t_o(k) = 2 + \frac{2}{k-2}$  pour tout  $k \geq 3$ , où  $t_o(k) := \inf\{t : \forall G \text{ graphe planaire extérieur de maille au moins } k, \text{cch}(G) \leq t\}$

Le sujet du troisième chapitre est l'arête-coloration des graphes cubiques par des éléments de groupes abéliens finis (étant donné un groupe abélien fini  $A$ , est-il possible de colorer les arêtes d'un graphe cubique par des éléments de  $A$  de sorte que les couleurs des arêtes incidentes à un même sommet soient deux-à-deux distinctes et de somme nulle dans  $A$ ), notamment en relation avec d'autres problèmes (arête-coloration par des triplets de Steiner, conjecture de Berge-Fulkerson). La situation est caractérisée pour tous les groupes abéliens finis, sauf quatre,

pour lesquels nous n'avons pu conclure. L'existence de coloration pour ces quatre groupe est reliée à d'autres problèmes ouverts, et une nouvelle coloration, la  $k$ -flot-coloration entière, est définie : est-il possible de colorer les arêtes d'un graphe cubique par les entiers relatifs non nuls de  $\{-k, \dots, k\}$  de sorte que les arêtes incidentes à un même sommet soient de couleur différente et de somme nulle dans  $\mathbb{Z}$ ? Nous établissons que tout graphe cubique sans pont possède une 7-flot-coloration, et conjecturons que la valeur optimale est 5.

La base des travaux présentés dans la troisième partie est un problème de reroutage dans les réseaux WDM (*Wavelength-Division Multiplexing*). Le premier chapitre expose la modélisation du problème, donnant lieu à l'introduction d'un nouvel invariant. Le début de l'étude cet invariant est ensuite exposé.

Étant donné un réseau, un ensemble  $\mathcal{I}$  de requêtes et deux routages différents  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , le but est de passer de  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_2$  sans interruption de service. Soient  $u$  et  $v$  deux requêtes, leur routage par  $\mathcal{R}_i$  étant respectivement noté  $\mathcal{R}_i(u)$  et  $\mathcal{R}_i(v)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Si  $\mathcal{R}_2(u) \cap \mathcal{R}_1(v) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire si le routage de  $u$  selon  $\mathcal{R}_2$  et le routage de  $v$  selon  $\mathcal{R}_1$  utilisent des ressources en commun, alors la requête  $v$  doit être reroutée avant de pouvoir router  $u$  selon  $\mathcal{R}_2$ .

Nous supposons qu'il est possible de router une requête sur une route intermédiaire, en utilisant des ressources réservées à un tel usage. Par exemple, l'opérateur peut disposer dans son réseau d'une longueur d'onde dédiée au routage temporaire de certaines requêtes. Néanmoins, dans notre modèle, une requête ne peut utiliser un tel routage intermédiaire qu'une seule fois. En d'autres termes, une requête placée sur un routage temporaire ne peut être reroutée que par son routage final. Lorsqu'une requête est reroutée, les ressources libérées peuvent être utilisées afin de rerouter une autre requête.

Le problème est modélisé de la façon suivante : soit  $D = (V, A)$  le graphe orienté obtenu en plaçant un sommet par requête, et un arc de  $u$  vers  $v$  si, et seulement si,  $\mathcal{R}_2(u) \cap \mathcal{R}_1(v) \neq \emptyset$ . Un sommet est dit *traité* dès que la requête correspondante est routée selon  $\mathcal{R}_2$ . Lorsqu'une requête est routée à l'aide d'un routage temporaire, nous disons que le sommet correspondant est placé en *unité de mémoire temporaire* (TMU). N'importe quel sommet en état initial peut être placé en TMU n'importe quand, et un sommet peut être traité si, et seulement si, chacun de ses voisins externes est soit traité, soit en TMU. Le but est de traiter tous les sommets du graphe tout en minimisant le nombre de TMU utilisées simultanément. Le plus petit nombre de TMU nécessaires pour traiter un graphe est le *nombre de traitements* du graphe. Nous analysons sa relation avec les problèmes de largeur arborescente linéaire et d'exploration de graphes, et donnons la valeur du paramètre pour certaines classes de graphes. Pour les arbres, les algorithmes pour la largeur arborescente linéaire s'adaptent aisément pour ce problème. Les graphes  $p$ -connexes dont le nombre de traitements est  $p$  sont identifiés. Nous montrons également que, pour tout graphe, le nombre de traitements est très proche (à un près) de la largeur arborescente linéaire du graphe. Ceci nous a amenés à nous intéresser à cette notion, pour laquelle nous avons obtenus les résultats présentés dans le second chapitre de la troisième partie.

La notion de largeur arborescente linéaire, (*pathwidth*), introduite par Robertson et Seymour [RS83], est un invariant des graphes fortement lié à diverses problématiques des réseaux d'interconnexion. Par exemple l'exploration de graphes, (*graph searching*), est notamment utilisée pour résoudre des problèmes de sécurité dans les réseaux. La notion équivalente de sommet-séparation a été introduite pour la conception de circuits (VLSI). Elle est également utilisée, par exemple, pour la représentation des données utilisée par les algorithmes de traitement d'images 3D [IL05].

Nous avons obtenus des résultats sur la largeur arborescente linéaire des graphes planaires extérieurs 2-connexes, plus précisément sur la relation entre la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur 2-connexe et celle de son dual. Quatre conjectures sont infirmées (trois de Bodlaender et Fomin [BF02] et une de Fomin [Fom03]), et une borne optimale, améliorant celle de [BF02], est donnée. En particulier, Bodlaender et Fomin [BF02] ont conjecturé l'existence d'une constante  $c$  telle que, pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ ,  $\text{pw}(G) \leq \text{pw}(G^*) + c$ , où  $G^*$  désigne le dual (géométrique) de  $G$ . Pour tout  $p \geq 1$ , un graphe planaire extérieur 2-connexe  $G_p$  tel que  $\text{pw}(G_p) = 2p + 1$  et  $\text{pw}(G_p^*) = p + 1$  est construit, infirmant ainsi cette conjecture. Ensuite, il est notamment prouvé que pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ ,

$$\text{pw}(G^*) \leq \text{pw}(G) \leq 2\text{pw}(G^*) - 1.$$

La preuve est algorithmique, et fournit ainsi un algorithme en  $\mathcal{O}(n \log(n))$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe, permettant d'obtenir une décomposition dont la largeur vérifie la borne supérieure donnée. La borne supérieure est serrée, et toutes les valeurs de l'intervalle sont atteintes.

## **Première partie**

# **Problème d'Alcatel et coloration impropre**



## Définitions et premiers résultats

### 1.1. Problème d'Alcatel et modélisation

Alcatel nous a proposé le problème suivant. Un satellite envoie des données à des antennes réceptrices situées sur terre. Chaque antenne écoute une fréquence. En raison de difficultés d'ordre technique, il est impossible de focaliser le faisceau de données exactement sur l'antenne  $u$  à laquelle il est destiné. Une partie du signal se propage dans une zone  $B(u)$  autour du récepteur. Ceci perturbe la réception des antennes situées dans cette zone  $B(u)$  et écoutant la même fréquence. Toutefois, l'intensité des signaux perturbateurs créés par l'envoi de données au récepteur  $u$  décroît très rapidement avec l'éloignement de  $u$ . Ainsi, si  $v$  est un autre récepteur situé dans  $B(u)$  et écoutant la fréquence  $F(u)$ , l'intensité des signaux perturbateurs reçus par  $v$  et émanant de l'envoi de données à  $u$  est très faible comparée à l'intensité d'un signal destiné à  $v$ . Un récepteur est capable de capter correctement le signal qui lui est envoyé tant que l'intensité cumulée de tous les bruits qu'il capte n'excède pas une certaine limite fixée  $T$ . Le but est d'assigner une fréquence à chaque récepteur de sorte que tous puissent recevoir proprement leur signal, tout en minimisant le nombre de fréquences utilisées. Nous considérons le cas fondamental où l'intensité  $I$  du bruit créé dans  $B(u)$  par l'envoi d'un signal à l'antenne  $u$  est indépendante de la fréquence du signal, et où un récepteur  $v$  est dans la zone de bruit  $B(u)$  d'un récepteur  $u$  si, et seulement si,  $u$  est dans la zone de bruit  $B(v)$  du récepteur  $v$ . Ainsi, pour qu'un récepteur puisse distinguer son signal des bruits qu'il perçoit, il faut qu'il soit dans la zone de bruit d'au plus  $k := \lfloor T/I \rfloor$  récepteurs écoutant la même fréquence que lui.

Étant donné un réseau d'antennes, le *graphe de bruit* associé est le graphe dont les sommets correspondent bijectivement aux antennes, avec une arête entre deux sommets si, et seulement si, les antennes correspondantes peuvent interférer. Chaque fréquence est représentée par un entier, appelé *couleur*. Le but est donc d'assigner à chaque sommet une couleur de sorte que chaque sommet ait au plus  $k$  voisins de la même couleur que lui, tout en minimisant le nombre de couleurs utilisées. De telles colorations sont connues dans la littérature sous le nom de *improper colouring*, ou encore *defective colouring*. Le terme *coloration impropre* sera celui utilisé ici. Lorsque  $k$  est nul, il s'agit de la notion classique de coloration propre.

Utiliser la coloration impropre suppose que tous les récepteurs peuvent écouter sur chacune des fréquences disponibles (aucune restriction n'est imposée quant à la couleur qui peut *a priori* être attribuée à un sommet, indépendamment de celle de ses voisins). Toutefois, il se peut que cette hypothèse ne soit pas vraie en pratique : il est possible que certains récepteurs ne puissent écouter certaines fréquences (selon le modèle du récepteur, ou bien en raison de fréquences réservées, ou encore du fait de l'environnement particulier d'un récepteur, qui peut brouiller



certaines fréquences). À chaque récepteur  $u$  est alors associé un sous-ensemble  $L(u)$  de l'ensemble des fréquences, et la fréquence attribuée à  $u$  doit appartenir à  $L(u)$ . Cette situation se modélise naturellement par la notion de choisissabilité impropre.

Les graphes de bruits sont construits à partir des réseaux utilisés par Alcatel, et plusieurs classes de graphes paraissent intéressantes à étudier dans ce cadre. Les graphes planaires tout d'abord, et plus généralement les graphes de genre borné et les graphes de densité bornée. Ensuite les graphes d'intersection de disques unitaires, dont les sommets sont des points du plan, deux sommets étant reliés par une arête si, et seulement si, la distance entre les sommets correspondants du plan est inférieure à un. Également, les sous-graphes induits du réseau triangulaire, qui ont été beaucoup étudiés pour les problèmes d'allocation de fréquences, puisqu'ils offrent une manière efficace de couvrir le plan.

## 1.2. Introduction

**Définition 1.** Soit  $G$  un graphe et soient  $k$  et  $l$  deux entiers. Une *coloration* est une application de l'ensemble des sommets  $V(G)$  dans un ensemble de couleurs  $S$ . Si  $|S| = k$ , c'est une *k-coloration*. Soit  $L$  une *assignation de listes pour  $G$* , c'est-à-dire une application de  $V(G)$  dans l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$ . Une *L-coloration* de  $G$  est une coloration de  $G$  telle que chaque sommet reçoive une couleur de  $L(v)$ .

Si  $c$  est une coloration de  $G$ , l'*impropreté d'un sommet  $v$  sous  $c$* , notée  $\text{im}_G^c(v)$  ou simplement  $\text{im}(v)$ , est le nombre de voisins de  $v$  colorés  $c(v)$ , c'est-à-dire colorés de la même couleur que  $v$ . L'*impropreté de  $c$* , notée  $\text{im}_G(c)$  ou simplement  $\text{im}(c)$ , est l'impropreté maximale d'un sommet de  $G$  sous  $c$  :

$$\text{im}_G(c) := \max\{\text{im}_G^c(v) : v \in V(G)\}.$$

Une coloration d'impropreté au plus  $k$  est dite *k-impropre*. Une coloration 0-impropre est une coloration *propre*, c'est-à-dire telle que deux sommets adjacents soient colorés différemment.

Un graphe est *k-improprement l-colorable* (respectivement *k-improprement L-colorable*) si, et seulement si, il admet une  $l$ -coloration  $k$ -impropre (respectivement une  $L$ -coloration  $k$ -impropre). Le nombre minimum de couleurs d'une coloration  $k$ -impropre de  $G$  est noté  $c_k(G)$ . On a donc  $c_0(G) = \chi(G)$ , où  $\chi(G)$  est le nombre chromatique (usuel) de  $G$ . Une assignation de listes pour  $G$  est une *l-assignation* si  $|L(v)| \geq l$  pour tout sommet  $v$  de  $G$ . Un graphe est *k-improprement l-choisissable* s'il est *k-improprement L-colorable* pour toute *l-assignation*  $L$ . Le plus petit entier  $l$  tel que  $G$  soit *k-improprement l-choisissable* est noté  $c_k^l(G)$ .

La proposition suivante découle aisément de la définition.

### Proposition 1.

- (i)  $c_k(G) \leq c_k^l(G)$ .
- (ii) Si  $k \leq k'$ ,  $c_k(G) \leq c_{k'}(G)$ .
- (iii)  $c_k^l(G) = 1$  si, et seulement si,  $\Delta(G) \leq k$ .

La proposition suivante est donnée dans [CGJ97].

### Proposition 2.

$$\left\lceil \frac{\omega(G)}{k+1} \right\rceil \leq c_k(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{k+1} \right\rceil$$

**Démonstration.** Une clique de taille  $\omega(G)$  nécessite au moins  $\left\lceil \frac{\omega(G)}{k+1} \right\rceil$  couleurs car une couleur ne peut être attribuée qu'à  $k+1$  sommets.

Posons  $c := \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{k+1} \right\rceil$ . Considérons une partition de  $V(G)$  en  $c$  ensembles  $(A_1, A_2, \dots, A_c)$  qui minimise le nombre d'arêtes internes (c'est-à-dire avec deux extrémités dans le même ensemble  $A_i$ ).

Pour tout  $i$ ,  $\Delta(A_i) \leq k$ . En effet, supposons qu'un sommet  $x$  d'une des parties, disons  $A_1$ , ait  $k+1$  voisins dans  $A_1$ . Il existe alors une autre partie, disons  $A_2$ , contenant au plus  $k$  voisins de  $x$ , sinon  $x$  aurait au moins  $c \times (k+1) \geq \Delta(G) + 1$  voisins, ce qui est impossible. Ainsi, la partition  $(A_1 - x, A_2 + x, \dots, A_c)$  a moins d'arêtes internes que  $(A_1, A_2, \dots, A_c)$ , ce qui contredit la minimalité de celle-ci.

Colorer tous les sommets de  $A_i$  avec la couleur  $i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, c\}$  fournit une  $c$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ .  $\square$

Ce résultat s'étend à la coloration par listes.

**Proposition 3.**

$$\left\lceil \frac{\omega}{k+1} \right\rceil \leq c_k^l(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta+1}{k+1} \right\rceil$$

**Démonstration.** La preuve de la borne inférieure est la même que pour la proposition 2. Posons  $c := \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{k+1} \right\rceil$  et notons  $L$  une  $c$ -assignation pour  $G$ . Sans perte de généralité, supposons que l'ensemble des couleurs apparaissant dans les listes soit  $\bigcup_{v \in V(G)} L(v) = \{1, \dots, q\}$ . Soit

$\mathcal{P} = (A_1, A_2, \dots, A_q)$  une partition de  $G$  telle que  $v \in A_i$  seulement si  $i \in L(v)$ , et qui minimise le nombre d'arêtes internes sous cette condition.

Montrons que pour tout  $i$ ,  $\Delta(A_i) \leq k$  : supposons qu'un sommet  $x$  d'une des parties, disons  $A_i$ , ait  $k+1$  voisins dans  $A_i$ . Il existe alors une partie  $A_j$  avec  $j \in L(x)$  contenant au plus  $k$  voisins de  $x$ , sinon  $x$  aurait au moins  $|L(x)|(k+1) \geq c \times (k+1) \geq \Delta(G) + 1$  voisins, ce qui est impossible. Ainsi, la partition obtenue en remplaçant  $A_i$  et  $A_j$  respectivement par  $A_i - x$  et  $A_j + x$  contredit la minimalité de  $\mathcal{P}$ .

Colorer tous les sommets de  $A_i$  avec la couleur  $i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$  fournit une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ .  $\square$

Prouvons à présent une autre borne inférieure qui nous sera utile par la suite.

**Proposition 4.** Pour tout graphe  $G$  et tout entier naturel  $k$ ,

$$\left\lceil \frac{\chi(G)}{k+1} \right\rceil \leq c_k(G).$$

Puisque pour tout graphe  $G$ ,  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , cette borne inférieure est meilleure que celle donnée par la proposition 2.

**Démonstration.** Supposons qu'il existe une  $s$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$  : il existe donc une partition des sommets de  $G$  en  $s$  classes  $V_1, V_2, \dots, V_s$  telle que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , le degré maximum du graphe  $G[V_i]$  soit au plus  $k$ . D'après la borne supérieure de la proposition 2,  $G[V_i]$  peut donc être proprement coloré avec au plus  $k+1$  couleurs. En utilisant des ensembles de couleurs deux-à-deux disjoints pour chacun des sous-graphes  $G[V_i]$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , une coloration propre de  $G$  utilisant  $s(k+1)$  couleurs est obtenue. Ainsi,  $\chi(G) \leq c_k(G) \times (k+1)$ .  $\square$

Dans le cas de la coloration propre, les propositions 2 et 3 se généralisent aux graphes  $d$ -dégénérés. Un graphe est  $d$ -dégénéré si chacun de ses sous-graphes (y compris lui-même) possède un sommet de degré au plus  $d$ . Plus précisément, pour tout graphe  $d$ -dégénéré  $G$  et tout entier  $k$ ,  $c_k(G) \leq c_0(G) \leq d + 1$ . Cependant, comme l'énonce la proposition suivante, cette borne supérieure est atteinte pour toute valeur de  $k$ .

**Proposition 5.** *Pour tout entier naturel  $k$  et tout entier  $d \geq 1$ , il existe un graphe  $d$ -dégénéré  $G$  tel que  $c_k(G) = d + 1$ .*

**Démonstration.** Prouvons par récurrence sur  $l \in \{0, 1, \dots, d + 1\}$  qu'il existe un graphe  $d$ -dégénéré  $G_l$  tel que  $c_k(G_l) \geq l$ . Ceci est trivialement vrai pour  $l = 0$  avec  $G_0$  le graphe à un seul sommet. Supposons le résultat vrai pour  $l \leq d$  et montrons-le pour  $l + 1$ . Soit  $G_{l+1}$  le graphe construit à partir de  $G_l$  comme suit : pour tout sous-ensemble  $A$  de  $l$  sommets de  $G_l$ ,  $kl + 1$  nouveaux sommets sont ajoutés et reliés à tous les sommets de  $A$ . Le graphe  $G_{l+1}$  est  $d$ -dégénéré car chaque nouveau sommet est de degré  $l$  et  $G_l$  est  $d$ -dégénéré.

Prouvons par l'absurde que  $c_k(G_{l+1}) \geq l + 1$  : supposons qu'il existe une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $G_{l+1}$ . Alors, puisque  $c_k(G_l) \geq l$ , les  $l$  couleurs sont utilisées sur  $G_l$ . Ainsi, il existe un ensemble  $A$  de  $l$  sommets de  $G_l$  tous de couleurs différentes. Considérons maintenant les  $kl + 1$  nouveaux sommets créés pour  $A$ . Une couleur  $c$  est assignée à au moins  $k + 1$  d'entre eux. Par conséquent, le sommet de  $A$  qui est coloré  $c$  possède  $k + 1$  voisins colorés comme lui, une contradiction.  $\square$

### 1.3. Complexité

Les nouveaux résultats de cette section ont été obtenus avec Ricardo Corrêa et Frédéric Havet [CHS06a].

Pour tout couple d'entiers naturels  $(k, l)$ , soit  $k$ -IMP  $l$ -COL le problème décisionnel suivant :

INSTANCE : un graphe  $G$ .

QUESTION : le graphe  $G$  est-il  $k$ -improprement  $l$ -colorable ?

Cowen et al. [CGJ97] ont montré que le problème  $k$ -IMP  $l$ -COL est  $\mathcal{NP}$ -complet pour tout couple d'entiers  $(k, l)$  avec  $k \geq 1$  et  $l \geq 2$ . Lorsque  $l$  est au moins 3, ce résultat n'est pas surprenant car déterminer si un graphe quelconque est proprement 3-colorable est déjà un problème difficile. En revanche, il est polynomial de savoir si un graphe quelconque est 2-colorable, i.e. biparti, alors qu'il est  $\mathcal{NP}$ -complet de déterminer s'il est  $k$ -improprement 2-colorable dès que  $k$  est strictement positif.

Une question plus intéressante est la complexité du problème  $k$ -IMP  $l$ -COL restreint aux graphes de degré maximum  $(k + 1)l$ . En effet, la borne supérieure donnée par la proposition 2 dans le cas de la coloration propre ( $k = 0$ ) est la borne classique  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . D'après le Théorème de Brooks [Bro41], cette borne peut être réduite de un, sauf si  $G$  est un cycle impair ou un graphe complet. Ces deux cas exceptionnels sont toutefois détectables de façon polynomiale. Il est donc naturel de se demander si une telle amélioration est possible dans le cas de la coloration impropre. Le Théorème de Brooks [Bro41] peut être cité sous la forme suivante : un graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta$  est  $\Delta$ -colorable, sauf s'il s'agit d'un cycle impair ou d'un graphe complet. La question pour la coloration impropre est : soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$ , existe-t-il un critère polynomial pour déterminer si  $c_k(G) \leq \lceil \frac{\Delta+1}{k+1} \rceil - 1$  ?

Nous allons ainsi étudier la complexité du problème  $k$ -IMP  $l$ -COL restreint aux graphes de degré maximum  $(k + 1)l$ . Dans la sous-section suivante, nous prouvons que ce problème

reste  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque  $l$  vaut deux. Précisons que ce fait avait déjà été noté par Cowen et al. [CGJ97] ; nous donnons ici une preuve différente. Ensuite, nous nous intéresserons au cas où  $l \geq 3$ , et prouverons que le problème reste  $\mathcal{NP}$ -complet si  $l \in \{3, \dots, s\}$  où  $s$  est le plus grand entier tel que  $s + \sqrt{s} \leq 2k + 3$ . Les autres cas sont toujours ouverts. Nous reviendrons sur cette question dans la section consacrée aux graphes planaires.

### 1.3.1. Complexité lorsque $l$ vaut deux

**Théorème 1.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : un graphe  $G$  de degré maximum  $2k + 2$ .

QUESTION :  $G$  est-il  $k$ -improprement 2-colorable ?

**Démonstration.** Nous réduisons ce problème au problème suivant qui est  $\mathcal{NP}$ -complet [Sch78] (L03 dans [GJ79]) :

#### NOT-ALL-EQUAL $(k + 2)$ -SAT

INSTANCE : un ensemble  $\mathcal{U}$  de variables et une collection  $\mathcal{C}$  de clauses sur  $\mathcal{U}$  ayant  $k + 2$  littéraux.

QUESTION : existe-t-il une fonction de valeur de vérité telle que chaque clause ait au moins un littéral vrai et un littéral faux ?

Soit  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ . Construisons le graphe  $G(\mathcal{C}, \mathcal{U})$  suivant.

À toute variable  $u \in \mathcal{U}$  est associé un *graphe de variable*  $H^u$  constitué de

- $2n - 2$  graphes complets disjoints à  $2k + 2$  sommets, notés  $K_i^u$  et  $L_i^u$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  ;

- $2n - 1$  sommets notés  $a_i^u$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $b_j^u$  avec  $j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Pour  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , le sommet  $a_i^u$  est relié à un sommet  $k_i^u$  de  $K_i^u$ , le sommet  $a_{i+1}^u$  est relié à un sommet  $l_i^u$  de  $L_i^u$  et le sommet  $b_i^u$  est relié à  $k + 1$  sommets de  $V(K_i^u) \setminus \{k_i^u\}$  et  $k + 1$  sommets de  $V(L_i^u) \setminus \{l_i^u\}$  (voir figure 1.1).

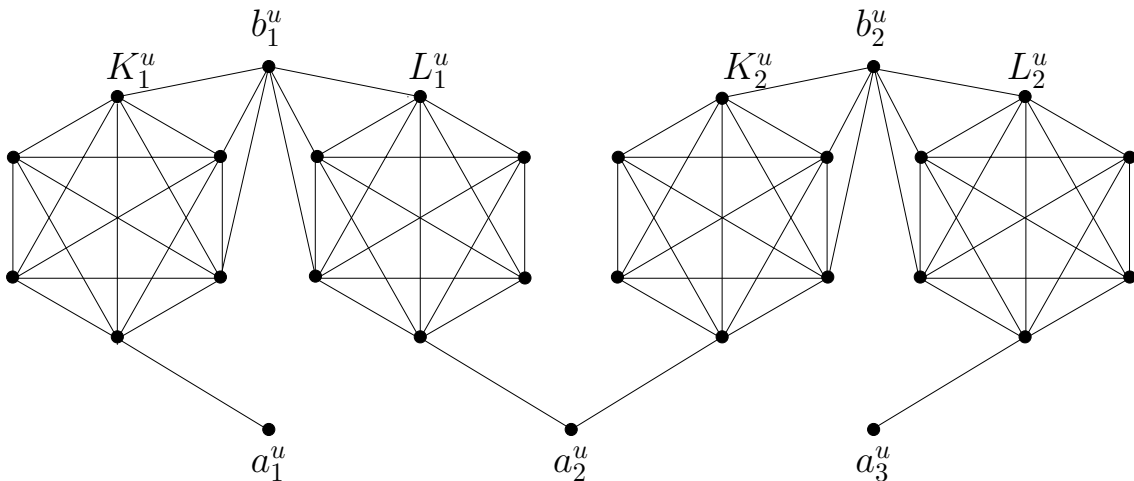
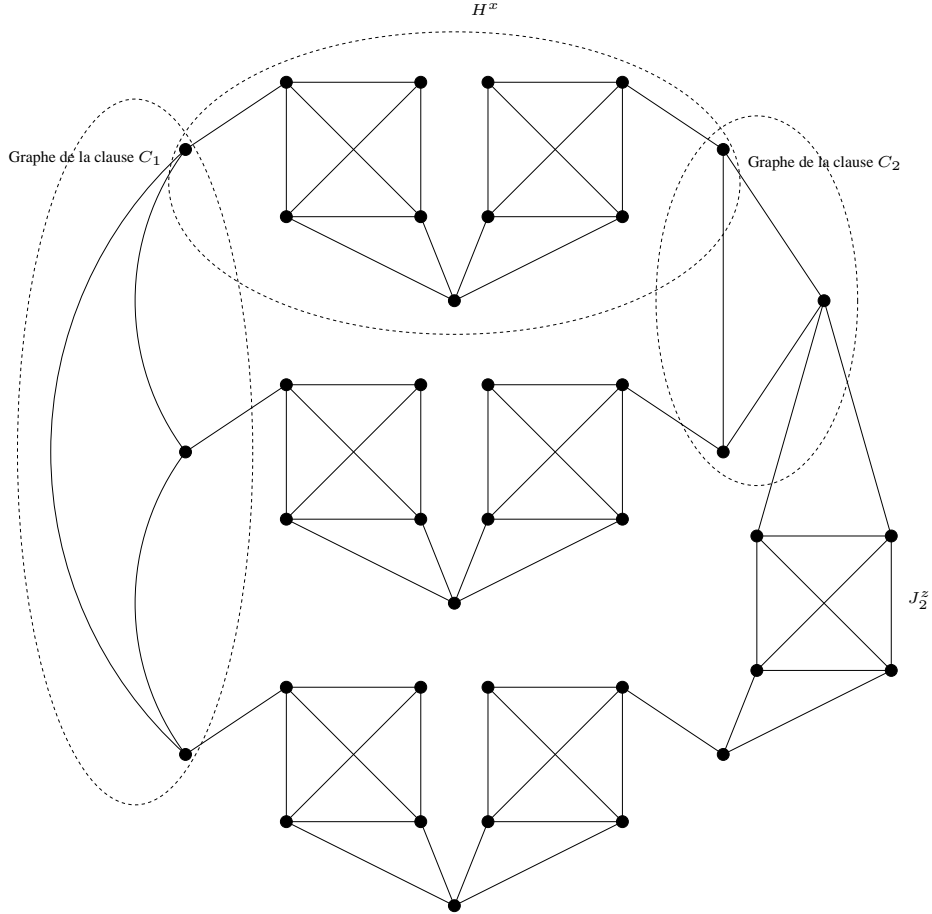


FIG. 1.1. Le graphe de variable  $H^u$ , avec  $n = 3$  et  $k = 2$ .

À chaque clause  $C_i = l(u_1) \vee l(u_2) \vee \dots \vee l(u_{k+2})$ , où  $l(z)$  est un littéral de la variable  $z \in \mathcal{U}$ , est associé un graphe complet  $M_i$  de sommets  $x(u_1), x(u_2), \dots, x(u_{k+2})$ . Pour  $z \in \{u_1, u_2, \dots, u_{k+2}\}$ , si  $l(z) = z$  alors les sommets  $x(z)$  et  $a_i^z$  sont identifiés. Sinon, un graphe

complet à  $2k + 2$  sommets  $J_i^z$  dont la moitié des sommets est reliée à  $x(z)$  et l'autre moitié à  $a_i^z$  est créé (voir figure 1.2).



**FIG. 1.2.** Graphe construit lorsque  $\mathcal{U} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$  avec  $C_1 = x \vee y \vee z$  et  $C_2 = x \vee y \vee \bar{z}$  (et donc  $n = 2$  et  $k = 1$ ).

Le degré maximum de  $G(\mathcal{C}, \mathcal{U})$  est  $2k + 2$  : le degré d'un sommet  $b_i^u$  est au plus  $(2k + 1) + 1 = 2k + 2$ , celui d'un sommet  $a_i^u$  au plus  $2 + (k + 1) = k + 3 \leq 2k + 2$  et celui d'un sommet  $x(u_i)$  n'excède pas  $(k + 1) + (k + 1) = 2k + 2$ .

Montrons que  $c_k(G(\mathcal{C}, \mathcal{U})) = 2$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  admet une fonction de valeur de vérité telle que chaque clause ait au moins un littéral vrai et un littéral faux.

**Assertion 1 :** Soit  $u \in \mathcal{U}$ . Dans une 2-coloration  $k$ -impropre de  $G(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ , les sommets  $a_i^u$ ,  $1 \leq i \leq n$ , reçoivent la même couleur.

[[ Dans un graphe complet à  $2k + 2$  sommets, la moitié des sommets est de couleur 1 et l'autre moitié de couleur 2. Ainsi,  $a_i^u$  et  $k_i^u$  sont de couleurs différentes, sinon  $k_i^u$  aurait  $k + 1$  voisins de sa couleur. De même, les  $k + 1$  voisins de  $b_i^u$  dans  $K_i^u$  ont une couleur différente de celle de  $b_i^u$ , qui doit donc aussi être différente de la couleur de  $k_i^u$ . Par conséquent,  $a_i^u$  et  $b_i^u$  sont colorés différemment. De la même manière,  $a_{i+1}^u$  et  $b_i^u$  sont colorés différemment. Ainsi, tous les sommets  $a_i^u$  sont de la même couleur. ]]

De manière analogue, l'assertion suivante est vraie.

**Assertion 2 :** Soit  $l(z)$  un littéral de la clause  $C_i$ . Si  $l(z) = \bar{z}$  alors dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $G(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ ,  $x(z)$  et  $a_i^z$  sont de couleurs différentes.

Supposons que  $G(\mathcal{C}, \mathcal{U})$  admette une 2-coloration  $k$ -impropre  $f$ . Soit  $\phi$  la fonction de valeur de vérité définie par :  $\phi(u)$  est vrai si, et seulement si, les sommets  $a_1^u$  sont colorés 1. Soit  $C_i$  une clause de  $\mathcal{C}$ . D'après les assertions 1 et 2, chaque littéral  $l(z)$  de  $C_i$  est vrai si et seulement si  $f(a_i^z) = 1$ . Comme  $f$  est  $k$ -impropre, le graphe complet  $M_i$  n'est pas monochromatique. Ainsi l'un des littéraux au moins est vrai et l'un au moins est faux.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{C}$  admette une fonction de valeur de vérité  $\phi$  telle que chaque clause ait au moins un littéral vrai et un littéral faux. Pour toute variable  $u$ , colorons chacun des sommets  $a_i^u$  avec 1 si  $\phi(u)$  est vrai, et avec 2 sinon. Il est facile de voir que cette coloration peut être étendue en une 2-coloration  $k$ -impropre de  $G(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ . En effet, puisqu'au moins un littéral est vrai et un littéral est faux dans chaque clause, aucun des graphes complets  $M_i$  n'est monochromatique.  $\square$

### 1.3.2. Complexité lorsque $l \geq 3$

Soient  $k \geq 1$  et  $l \geq 1$  deux entiers naturels et soit  $H(k, l)$  le graphe ayant pour ensemble de sommets  $X \cup Y \cup \{z\}$  avec  $|X| = (k+1)(l-1)$  et  $|Y| = (k+1)$ , deux sommets  $u$  et  $v$  étant adjacents sauf si  $u = z$  et  $v \in Y$  (voir figure 1.3).

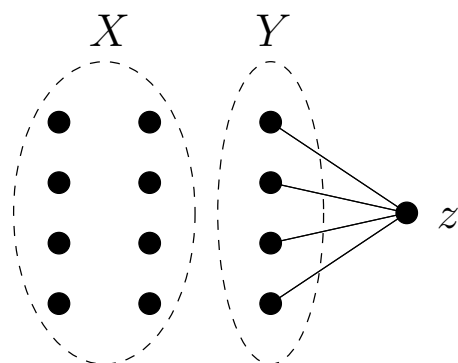


FIG. 1.3. Le complémentaire du graphe  $H(3, 3)$ .

**Proposition 6.** Le graphe  $H(k, l)$  est  $k$ -improprement  $l$ -colorable ; et dans toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H(k, l)$  les sommets de  $Y \cup \{z\}$  sont de la même couleur.

**Démonstration.** Une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H(k, l)$  est obtenue en colorant de la même couleur tous les sommets de  $Y \cup \{z\}$ , et en attribuant chacune des  $l-1$  autres couleurs à  $k+1$  sommets de  $X$ .

Considérons une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H(k, l)$ . Comme  $H(k, l)$  possède  $(k+1)l+1$  sommets, il existe une couleur, notée  $\alpha$ , attribuée à  $k+2$  sommets au moins. Or un sommet de  $X$  a une couleur qui est attribuée à au plus  $k+1$  sommets puisqu'il est relié à tous les autres sommets. Ainsi les sommets colorés  $\alpha$  sont nécessairement ceux de  $Y \cup \{z\}$ .  $\square$

**Lemme 1.** Soit  $G$  un graphe de degré maximum au plus  $2k+2$ . Alors  $G$  admet une orientation  $D$  telle que les degrés internes et externes de chaque sommet soient au plus  $k+1$ .

**Démonstration.** Comme chaque graphe de degré maximum au plus  $2k+2$  est le sous-graphe d'un graphe  $(2k+2)$ -régulier, il suffit de prouver ce résultat pour les graphes  $(2k+2)$ -réguliers.

Si  $G$  est un tel graphe, il admet un tour eulérien  $C$ . Soit  $D$  l'orientation de  $G$  définie par :  $(u, v)$  est un arc si et seulement si  $u$  précède  $v$  dans  $C$ . Le degré entrant et le degré sortant de tout sommet  $v$  est  $k + 1$  car  $v$  apparaît  $k + 1$  fois dans le tour eulérien et possède donc  $k + 1$  prédécesseurs et autant de successeurs.  $\square$

**Théorème 2.** *Fixons un entier naturel non nul  $k$ , et un entier  $l \geq 3$  tel que  $l + \sqrt{l} \leq 2k + 3$ . (La valeur maximum de  $l$  est environ  $2k + 4 - \sqrt{2k + 2}$ .) Le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : un graphe  $G$  de degré maximum au plus  $(k + 1)l$ .

QUESTION : le graphe  $G$  est-il  $k$ -improprement  $l$ -colorable ?

**Démonstration.** Nous réduisons ce problème au problème suivant :

INSTANCE : un graphe  $G$  de degré maximum au plus  $2k + 2$ .

QUESTION : le graphe  $G$  est-il  $l$ -colorable ?

Ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet pour les valeurs de  $l$  choisies en vertu d'un résultat de Emden-Weinert et al. [EWHK98].

Soit  $G = (V, E)$  un graphe de degré maximum  $2k + 2$ . D'après le lemme 1,  $G$  admet une orientation  $D$  avec degré entrant maximum et degré sortant maximum au plus  $k + 1$ .

Soit  $G'$  le graphe construit comme suit : chaque sommet  $v$  de  $G$  est remplacé par une copie  $H(v)$  de  $H(k, l)$  ; si  $v$  domine  $u$  dans  $D$  alors  $z(v)$  est relié à un élément de  $Y(u)$  (de telle manière que chaque sommet de  $Y(u)$  soit relié à un seul sommet hors de  $H(u)$ ).

Une vérification directe montre que  $G'$  est de degré au plus  $(k + 1)l$ .

Prouvons maintenant que  $G$  est  $l$ -colorable si, et seulement si,  $G'$  est  $k$ -improprement  $l$ -colorable. Si  $G$  admet une  $l$ -coloration  $c$ , alors pour tout sommet  $v$  de  $G$  assignons la couleur  $c(v)$  à  $Y(v) \cup \{z(v)\}$  et les  $l - 1$  autres couleurs à  $l - 1$  ensembles disjoints de  $k + 1$  sommets de  $X(v)$ . Nous obtenons clairement une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $G'$ .

Supposons maintenant que  $G'$  admette une  $l$ -coloration  $k$ -impropre  $c'$ . Soit la coloration définie par  $c(v) := c'(z(v))$ . Montrons que  $c$  est une coloration propre de  $G$ . Soit  $uv$  une arête de  $G$ . Sans perte de généralité,  $v$  domine  $u$  dans  $D$ . Ainsi, le sommet  $z(v)$  est relié à un sommet  $y(u)$  de  $Y(u)$ . Donc  $c'(z(v)) \neq c'(z(u))$  sinon d'après la Proposition 6, tous les sommets de  $Y(u) \cup Y(v) \cup \{z(u), z(v)\}$  seraient de même couleur, ce qui est impossible car  $y(u)$  est de degré  $k + 1$  dans cet ensemble.  $\square$

Le théorème précédent reste vrai lorsque  $k = 1$  et  $l = 4$ . Les autres cas sont toujours ouverts.

**Théorème 3.** *Le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : un graphe  $G$  de degré maximum au plus 8.

QUESTION :  $G$  est-il 1-improprement 4-colorable ?

Définissons, afin de prouver le théorème 3, quelques graphes qui nous seront utiles.

Soit  $B$  le graphe dont l'ensemble de sommets est  $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ , deux sommets  $x$  et  $y$  étant voisins sauf s'il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\{x, y\} = \{a_i, b_i\}$ .

Soit  $A$  le graphe dont les sommets sont  $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$  et dont l'ensemble d'arêtes est  $\{x_1x_2\}$ . Notons  $A'$  le graphe obtenu à partir de  $A$  en ajoutant l'arête  $y_1y_2$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soit  $J_i$  l'union d'une copie  $A_i$  de  $A$  et d'une copie  $B_i$  de  $B$ , à laquelle sont ajoutées toutes les arêtes entre les sommets de  $A_i$  et les sommets de  $B_i$ . Soit  $J'_1$  une copie de  $J_1$ , avec  $A'_1$  et  $B'_1$  définis de façon analogue.

Soit  $H := J'_1 \cup \bigcup_{i=1}^4 J_i$ , auquel sont ajoutées les arêtes suivantes (voir figure 1.4) :

$$\begin{array}{ccc} y_1^{J_1} y_1^{J_2}, & y_1^{J_1} y_1^{J_3}, & y_2^{J_1} y_1^{J_4} \\ y_1^{J'_1} y_2^{J_2}, & y_1^{J'_1} y_2^{J_3}, & y_2^{J'_1} y_2^{J_4} \\ x_1^{J_2} x_2^{J_4}, & x_2^{J_2} x_1^{J_3}, & x_2^{J_3} x_1^{J_4} \end{array}$$

**Proposition 7.** *Le graphe  $H$  est 1-improvement 4-colorable, et dans toute telle coloration de  $H$ , les sommets de chacun des  $A_i$  sont monochromatiques. En outre, les sommets de  $A_1$  et  $A'_1$  sont de la même couleur.*

**Démonstration.** Considérons une 4-coloration 1-impropre de  $H$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , la couleur de chaque sommet n'appartenant pas à  $A_i$  est assignée au plus deux fois, par conséquent tous les sommets de  $A_i$  sont de la même couleur. De plus, pour tout  $j \in \{2, 3, 4\}$ , la couleur des sommets de  $A_j$  est nécessairement différente de celle des sommets de  $A_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}$  et de celle des sommets de  $A'_1$ . Ainsi, les sommets de  $A_1$  et  $A'_1$  sont de la même couleur.  $\square$

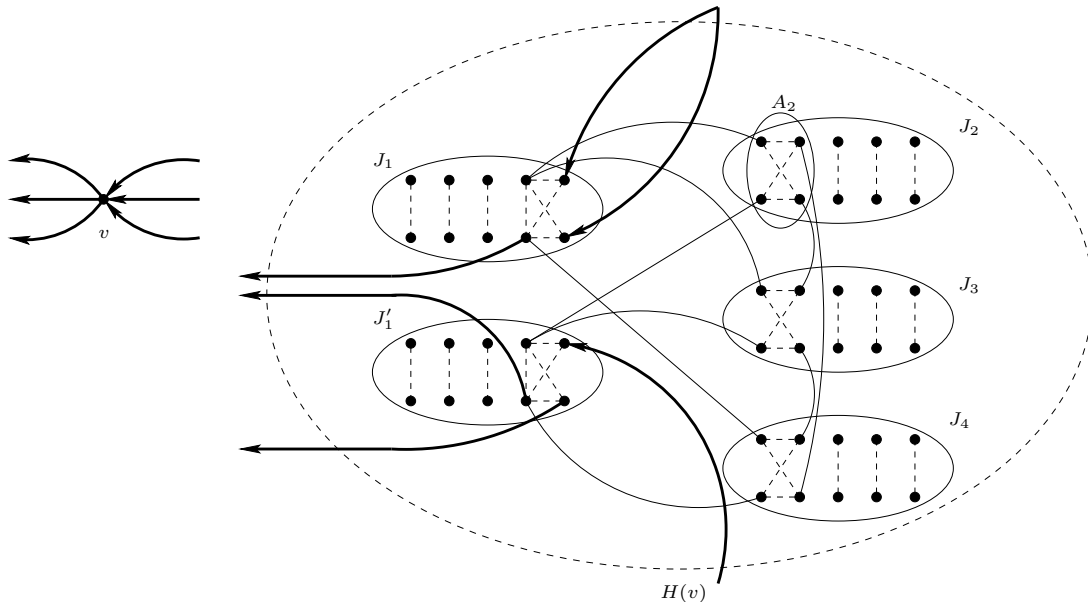
**Démonstration du théorème 3.** Nous allons réduire le problème au problème suivant,  $\mathcal{NP}$ -complet d'après [EWHK98] :

INSTANCE : un graphe  $G$  de degré au plus 6.

QUESTION : le graphe  $G$  est-il 4-colorable ?

Soit  $G$  un graphe de degré maximum 6. Par le lemme 1, soit  $D$  une orientation de  $G$  dans laquelle le degré interne et externe de chaque sommet est au plus 3.

Notons  $G'$  le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet  $v$  de  $G$  par une copie  $H(v)$  de  $H$ . Soient  $X(v) := \{x_1^{J_1}(v), x_2^{J_2}(v), x_1^{J'_1}(v)\}$  et  $Y(v) := \{y_2^{J_1}(v), y_2^{J'_1}(v), x_2^{J'_1}(v)\}$ . Si  $v$  est un prédécesseur de  $u$  dans  $D$ , un élément de  $Y(v)$  est relié à un élément de  $X(u)$ , de telle sorte que chaque sommet de  $X(v) \setminus Y(v)$  soit relié à un seul sommet n'appartenant pas à  $H(v)$  (voir figure 1.4).



**FIG. 1.4.** Exemple pour le théorème 3 : remplacement d'un sommet  $v$  de  $G$  par une copie  $H(v)$  de  $H$ . Pour chaque sous-graphe  $J_i$  et pour  $J'_1$ , les pointillés indiquent les arêtes manquantes.

Le degré maximum du graphe  $G'$  est 8, et  $G'$  est 1-improvement 4-colorable si, et seulement si,  $G$  est 4-colorable.



En effet, si  $c$  est une 4-coloration de  $G'$ , alors il suffit d'attribuer la couleur  $c(v)$  à tous les sommets de  $A_1 \cup A'_1$ . Cette coloration partielle s'étend clairement en une 4-coloration 1-impropre de  $G'$ .

Si  $c'$  est une 4-coloration 1-impropre de  $G'$ , alors la coloration  $c$  de  $G$  définie pour tout sommet  $v$  de  $G$  par  $c(v) := c'(w)$ , où  $w$  est n'importe quel sommet de  $A_1(v)$ , est une 4-coloration propre de  $G$ .  $\square$

## 1.4. Graphes planaires

Dans cette partie, nous nous intéressons aux couples  $(k, l)$  pour lesquels tout graphe planaire est  $k$ -improprement  $l$ -choisissable ou  $k$ -improprement  $l$ -colorable. Les questions relatives de complexité seront traitées dans la section suivante.

Thomassen a prouvé que tout graphe planaire est 5-choisissable [Tho94], donc également  $k$ -improprement  $l$ -choisissable pour tout couple  $(k, l)$  avec  $k \geq 0$  et  $l \geq 5$ .

Les graphes  $k$ -improprement 1-colorables (et  $k$ -improprement 1-choisissables) étant les graphes de degré maximum au plus  $k$ , il existe des graphes planaires qui ne sont pas  $k$ -improprement 1-colorables. Il est toutefois polynomial de déterminer si un graphe quelconque est  $k$ -improprement 1-colorable puisque cela revient à déterminer si son degré maximum est au plus  $k$ .

**Proposition 8.** *Pour tout entier naturel  $k$ , il existe un graphe planaire qui n'admet pas de 2-coloration  $k$ -impropre.*

**Démonstration.** Soit  $k \geq 0$ . Soit  $G_k$  le graphe défini comme suit (voir figure 1.5) :

$$\begin{aligned} V(G_k) &:= \{x\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq k+1\} \cup \{z_i^j : 1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k+1\} \\ E(G_k) &:= \{xy_i : 1 \leq i \leq k+1\} \cup \{xz_i^j, y_i z_i^j : 1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k+1\} \end{aligned}$$

Ce graphe est clairement planaire.

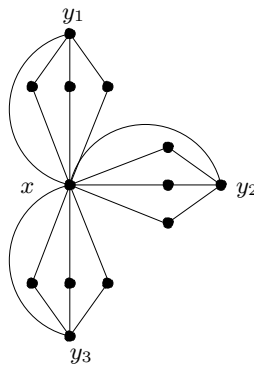


FIG. 1.5. Le graphe  $G_2$ .

Montrons que  $G_k$  n'est pas  $k$ -improprement 2-colorable. Supposons qu'il existe une 2-coloration  $k$ -impropre  $c$ . Quitte à permuter les couleurs, supposons  $c(x) = 1$ . Comme  $x$  a au plus  $k$  voisins colorés 1 et que  $x$  est adjacent à tous les sommets il existe  $i$  tel que tous les sommets de  $\{y_i\} \cup \{z_i^j : 1 \leq j \leq k+1\}$  soient colorés 2. Mais alors  $y_i$  possède  $k+1$  voisins colorés de sa couleur, une contradiction.  $\square$

Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe des graphes planaires 2-colorables (c'est-à-dire bipartis) qui ne sont pas  $k$ -improvement 2-choisissables.

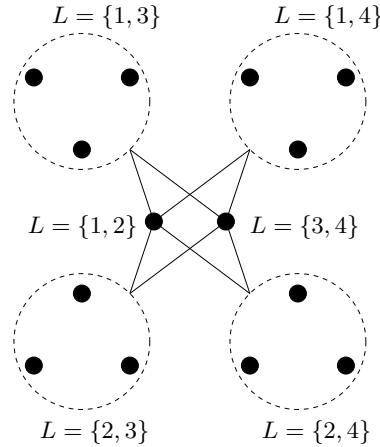
**Proposition 9.** *Pour tout entier naturel  $k$ , il existe un graphe planaire biparti qui n'est pas  $k$ -improvement 2-choisissable.*

**Démonstration.** Fixons un entier naturel  $k$  et posons  $A := \{a_1, \dots, a_{2k+1}\}$ ,  $B := \{b_1, \dots, b_{2k+1}\}$ ,  $C := \{c_1, \dots, c_{2k+1}\}$  et  $D := \{d_1, \dots, d_{2k+1}\}$ . Soit  $H_k$  le graphe défini comme suit (voir figure 1.6) :

$$\begin{aligned} V(H_k) &:= A \cup B \cup C \cup D \cup \{u, v\} \\ E(H_k) &:= \{uw, wv : w \in A \cup B \cup C \cup D\} \end{aligned}$$

Le graphe  $H_k$  est planaire et biparti de bipartition  $(A \cup B \cup C \cup D, \{u, v\})$ .

Soit  $L$ , l'assignation de listes suivantes :  $L(u) := \{1, 2\}$ ,  $L(v) := \{3, 4\}$ , et pour  $i \in \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ ,  $L(a_i) := \{1, 3\}$ ,  $L(b_i) := \{1, 4\}$ ,  $L(c_i) := \{2, 3\}$  et  $L(d_i) := \{2, 4\}$ .



**FIG. 1.6.** Le graphe  $H_1$ , avec l'assignation correspondante. Une arête d'un sommet  $x$  vers un ensemble  $X$  de sommets entouré en pointillé signifie que  $x$  est relié à tous les sommets de  $X$ .

Montrons que  $H_k$  n'est pas  $k$ -improvement  $L$ -colorable. Supposons qu'il le soit, et notons  $c$  une telle coloration. Sans perte de généralité, supposons  $c(u) = 1$  et  $c(v) = 3$ . Comme  $|A| = 2k + 1$ , au moins  $k + 1$  sommets de  $A$  sont de même couleur 1 ou 3. Alors  $u$  ou  $v$  possède  $k + 1$  voisins colorés comme lui, une contradiction.  $\square$

**Théorème 4** (Eaton et Hull [EH99], Škrekovski [Škr99b]). *Tous les graphes planaires sont 2-improvement 3-choisissables.*

**Démonstration.** De même que la 5-choisissabilité des graphes planaires, ce résultat se prouve par récurrence sur le nombre de sommets en utilisant une hypothèse de récurrence plus forte.

Soit  $G$  un graphe planaire quasi-triangulé de face externe  $C = (v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$  et  $L(v)$  une assignation de listes telle que  $|L(v)| = 2$  si  $v \in C$  et  $|L(v)| = 3$  sinon. Si  $v_p$  et  $v_1$  sont pré-colorés  $c(v_p)$  et  $c(v_1)$  alors la coloration  $c$  peut être étendue en une  $L$ -coloration 2-impropre de  $G$  telle que

- si  $c(v_1) = c(v_p)$  alors  $\text{im}(v_1) = \text{im}(v_p) = 1$  et
- si  $c(v_1) \neq c(v_p)$  alors  $\text{im}(v_1) = 0$  et  $\text{im}(v_p) \leq 1$ .

Une telle  $L$ -coloration sera appelée *convenable*.

Le résultat est clairement vrai pour le graphe complet à trois sommets. Soit  $G$  un graphe planaire quasi-triangulé d'ordre  $n > 3$  et supposons l'assertion vraie pour tous les graphes planaires quasi-triangulés d'ordre au plus  $n - 1$ .

Supposons tout d'abord que  $G$  ait un sommet séparateur  $v_j$  (c'est-à-dire tel que  $G - v_j$  ne soit pas connexe). Soit  $G'$  la composante de  $G - v_j$  qui contient  $v_p$  et  $v_1$ . Soit  $G_1 := G' + v_j$  et soit  $G_2$  le sous-graphe induit par  $V(G) \setminus V(G')$ . Par hypothèse d'induction,  $c$  s'étend en une  $L$ -coloration convenable de  $G_1$ . Ainsi,  $v_j$  reçoit une couleur  $c(v_j)$ . Soit  $v_i \in C$  un voisin de  $v_j$  sur la face externe de  $G_2$ . Posons  $c(v_i) \in L(v_i) \setminus \{c(v_j)\}$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une  $L$ -coloration de  $G_2$  telle que  $\text{im}(v_j) = 0$ . Cette coloration et  $c$  donnent une  $L$ -coloration convenable de  $G$  car  $\text{im}_G(v_j) = \text{im}_{G_1}(v_j) + \text{im}_{G_2}(v_j) = \text{im}_{G_1}(v_j)$ .

Supposons à présent que le graphe soit 2-connexe. Ainsi,  $C$  est un cycle. Prenons  $a \in L(v_2) \setminus \{c(v_1)\}$ . Soit  $A := \{v \in V(C) : a \in L(v)\}$  si  $c(v_p) = a$  et  $A := \{v \in V(C) \setminus \{v_p\} : a \in L(v)\}$  sinon.

**Cas 1 :** le cycle  $C$  n'a pas de corde avec ses deux extrémités dans  $A$ .

Pour tout sommet  $v \in A$ , soit  $I(v) := N(v) \setminus C$  et soit  $I(A) := \bigcup_{v \in A} I(v)$ . Notons  $G'$  le graphe induit par  $V(G) \setminus A$  et  $L'$  l'assignation de listes pour  $G'$  définie par :  $L'(v) := L(v) \setminus \{a\}$  si  $v \in I(A)$  et  $L'(v) := L(v)$  sinon. La face externe  $C'$  de  $G'$  est  $(C \setminus A) \cup I(A)$ . Si  $v_p \notin C'$  (c'est le cas si  $v_p \in A$ ) pré-colorons un voisin  $v'$  de  $v_1$  sur  $C'$  avec une couleur dans  $L'(v') \setminus \{c(v_1)\}$ . Par hypothèse de récurrence,  $c$  s'étend en une  $L$ -coloration convenable. Poser  $c(v) = a$  pour tout sommet de  $A$  fournit alors une  $L$ -coloration convenable de  $G$ . En effet,  $\text{im}(v_1) = 0$ ; si  $c(v_p) = a$  alors  $v_p$  a au plus un voisin (nommé  $v_{p-1}$ ) coloré comme lui, et si  $c(v_p) \neq a$  alors par hypothèse de récurrence  $v_p$  a au plus un voisin coloré comme lui. Un sommet  $v \in A$  a au plus deux voisins colorés  $A$  (ses voisins sur le cycle  $C$ ) car il n'y a pas de corde entre deux sommets de  $A$ . Enfin, soit  $v \in V(G') \setminus \{v_p, v_1\}$ . Si  $c(v) \neq a$  alors  $\text{im}_G(v) = \text{im}_{G'}(v) \leq 2$  et si  $c(v) = a$  alors  $v \notin C'$  et donc, par définition de  $G'$ ,  $v$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$ . Donc  $\text{im}_G(v) = \text{im}_{G'}(v) \leq 2$ .

**Cas 2 :** le cycle  $C$  possède une corde avec ses deux extrémités dans  $A$ .

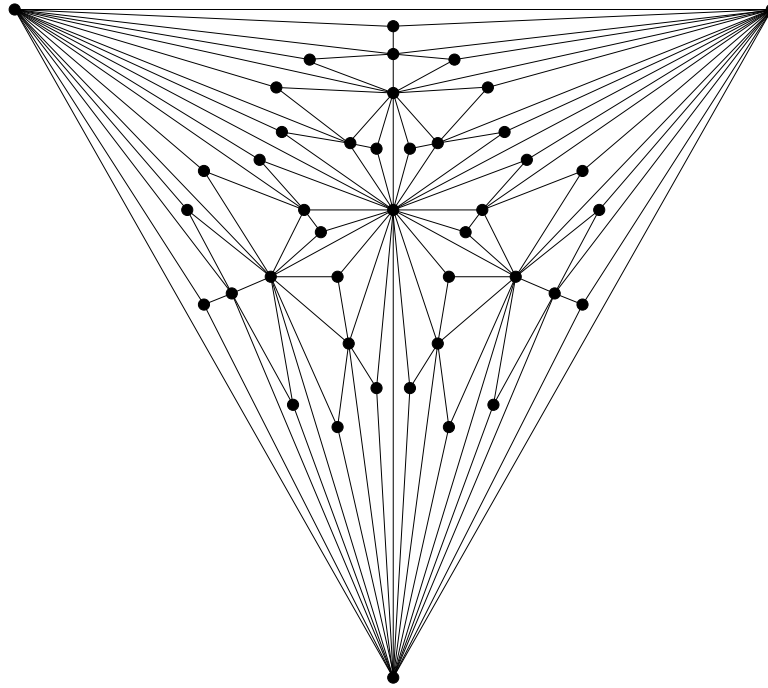
Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $v_i$  appartienne à une corde de  $C$  avec ses deux extrémités dans  $A$ , et soit  $j$  le plus grand indice tel que  $v_j \in A$  et  $v_i v_j \in E(G)$ . Posons  $C_1 := (v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_p, v_1)$  et  $C_2 := (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_i)$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , notons  $G_i$  le sous-graphe de face externe  $C_i$ .

Par définition,  $C_1$  n'a pas de corde avec ses deux extrémités dans  $A$ . Appliquons le cas 1 à  $G_1$  :  $c$  s'étend en une coloration convenable de  $G_1$  et  $c(v_i) = c(v_j) = a$ . Par hypothèse de récurrence,  $c$  s'étend en une coloration convenable de  $G_2$ . La coloration obtenue est bien une coloration convenable de  $G$  puisque  $\text{im}_G(v_i) = \text{im}_{G_1}(v_i) + \text{im}_{G_2}(v_i) - 1 = \text{im}_{G_1}(v_i)$  car  $v_j$  est coloré  $a$  comme  $v_i$  et appartient à la fois à  $G_1$  et  $G_2$ . De même,  $\text{im}_G(v_j) = \text{im}_{G_1}(v_j)$ .  $\square$

Le Théorème 4 est le meilleur possible. En effet, il existe des graphes planaires qui ne sont pas 1-improvement 3-colorables. Nous allons montrer un résultat plus fort : considérons une 3-coloration  $c$  d'un graphe  $G$ , et notons  $G_i$  le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets colorés  $i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Disons que  $c$  est  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ -impropre si, et seulement si, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  le degré maximum de  $G_i$  est  $\alpha_i$ . La proposition suivante montre qu'il existe des graphes planaires qui ne sont pas  $(2, 2, 1)$ -improvement colorables.

**Proposition 10.** *Il existe un graphe planaire qui n'est pas  $(2, 2, 1)$ -improvement 3-colorable.*

**Démonstration.** Soit  $P_0$  le graphe complet à trois sommets. Pour tout  $i \geq 1$ , le graphe  $P_i$  est obtenu en ajoutant au milieu de chaque face interne du graphe  $P_{i-1}$  un sommet relié aux trois sommets de cette face. Ainsi  $P_1$  est le graphe complet à 4 sommets. Le graphe  $P_4$  est donné par la figure 1.7.



**FIG. 1.7.** Le graphe  $P_4$  est  $(2, 2, 1)$ -improprement colorable, mais pas 1-improprement 3-colorable.

Montrons que  $P_{18}$  n'est pas  $(2, 2, 1)$ -improprement 3-colorable.

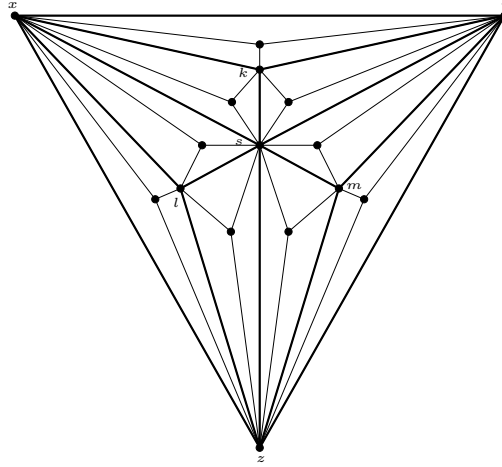
En premier lieu, montrons que toute 3-coloration  $(2, 2, 1)$ -impropre de  $P_3$  possède une face avec un sommet coloré 1 et un sommet coloré 2.

Considérons une 3-coloration  $(2, 2, 1)$ -impropre de  $P_3$ . Disons qu'une arête est mauvaise si ses deux extrémités sont respectivement colorées 1 et 2. Si la face externe, dont les sommets sont notés  $x, y$  et  $z$ , ne possède pas d'arête mauvaise alors, quitte à permuter des couleurs,  $x, y$  et  $z$  sont respectivement colorés  $(1, 1, 1)$  ou  $(1, 1, 3)$  ou  $(1, 3, 3)$  (par symétrie des rôles joués par les couleurs 1 et 2). Le lecteur est renvoyé à la figure 1.8 pour les noms des sommets.

Dans le premier cas (c'est-à-dire  $(1, 1, 1)$ ), le sommet  $s$ , relié à  $x, y$  et  $z$ , est nécessairement coloré 3. Considérons les sommets  $k, l, m$  : au plus un de ces sommets est coloré 3, car tous sont reliés à  $s$ . Comme chacun de ces trois sommets est voisin d'un sommet de la face externe, aucun ne peut être coloré 1. Deux au moins sont donc colorés 2, ce qui est plus que suffisant pour montrer que  $P_2$  (et donc  $P_3$ ) possède une mauvaise arête.

Dans le deuxième cas (c'est-à-dire  $(1, 1, 3)$ ), le sommet  $s$  peut être coloré 1 ou 3. Supposons qu'il soit coloré 1. L'un au plus des sommets  $l$  et  $m$  est coloré 3, car tous deux sont reliés à  $z$ . De plus, aucun d'eux ne peut être coloré 1, car tous sont voisins de  $s$ . Donc l'un au moins, disons  $m$ , est coloré 2, et  $ym$  est une mauvaise arête. Si  $s$  est coloré 3, supposons, sans perte de généralité, que  $m$  soit coloré 1. Le même travail que précédemment appliqué à la face  $ymz$  fournit une mauvaise arête dans  $P_3$ .

Dans le dernier cas (c'est-à-dire  $(1, 1, 3)$ ), le sommet  $s$  est coloré 1, et l'un des trois sommets  $k, l, m$  est coloré 2, fournissant ainsi une mauvaise arête dans  $P_2$ .

FIG. 1.8. Le graphe  $P_3$ .

Supposons à présent qu'il existe une 3-coloration  $(2, 2, 1)$ -impropre de  $P_{18}$ . D'après ce qui précède, il existe  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  tel que le sous-graphe canonique  $P_i$  de  $P_{18}$  possède une face avec un sommet  $u$  coloré 1 et un sommet  $v$  coloré 2. En particulier, le graphe  $P_{18}$  possède un chemin  $v_1, v_2, \dots, v_{15}$  dont tous les sommets sont voisins de  $u$  et de  $v$ . La suite  $c(v_1), c(v_2), \dots, c(v_{15})$  est donc une suite de 15 chiffres dans  $\{1, 2, 3\}$  telle que

- le nombre de 1 est au plus 2 (sinon le sommet  $u$  aurait impropreté au moins 3) ;
- le nombre de 2 est au plus 2 (sinon le sommet  $v$  aurait impropreté au moins 3) ; et
- trois sommets consécutifs  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  ne sont pas colorés 3 (sinon le sommet  $v_i$  serait coloré 3 et aurait impropreté 2).

La longueur d'une telle suite est au plus 14, une contradiction.  $\square$

Pour la choisissabilité, nous allons montrer qu'il existe des graphes planaires 3-colorables qui ne sont pas 1-improprement 3-choisissables. Ceci apporte une réponse négative à une question de Škrekovski [Škr99b, problème 3.4].

**Proposition 11.** *Il existe un graphe planaire 3-colorable qui n'est pas 1-improprement 3-choisissable.*

**Démonstration.** Soit  $G$  le graphe défini par

$$V(G) := \{u, v\} \cup \bigcup_{i=1}^{27} \{x_i, y_i, z_i\}$$

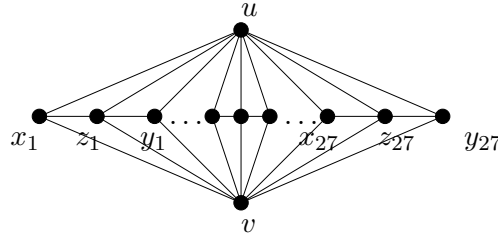
$$E(G) := \bigcup_{i=1}^{27} \{ux_i, vx_i, uy_i, vy_i, uz_i, vz_i, x_iy_i, y_iz_i\}$$

(voir figure 1.9).

Le graphe  $G$  est clairement planaire et admet la 3-coloration suivante :  $c(u) := c(v) := 1$  et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 27\}$ ,  $c(x_i) := c(z_i) := 1$  et  $c(y_i) := 2$ .

Soit  $f$  une bijection de  $L(u) \times L(v)$  vers  $\{1, \dots, 9\}$ . Soit  $L$  l'assignation de listes définie par  $L(u) := \{1, 2, 3\}$ ,  $L(v) := \{4, 5, 6\}$ , et pour tout couple  $(a, b) \in L(u) \times L(v)$ ,

$$L(x_{f(a,b)}) := L(y_{f(a,b)}) := L(z_{f(a,b)}) := L(x_{f(a,b)+9}) := L(y_{f(a,b)+9}) :=$$

FIG. 1.9. Le graphe  $G$ .

$$L(z_{f(a,b)+9}) := L(x_{f(a,b)+18}) := L(y_{f(a,b)+18}) := L(z_{f(a,b)+18}) := \{a, b, 7\}.$$

Montrons que  $G$  n'est pas 1-improvement  $L$ -colorable. Par l'absurde, notons  $c$  une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G$ . Sans perte de généralité, supposons  $c(u) = 1$ ,  $c(v) = 4$  et  $f(1, 4) = 1$ . Les trois sommets  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  ne peuvent pas tous trois être colorés 7, donc l'un d'entre eux est coloré 1 ou 4. De même, un sommet parmi  $\{x_{10}, y_{10}, z_{10}\}$  et un sommet parmi  $\{x_{19}, y_{19}, z_{19}\}$  sont colorés 1 ou 4. Ainsi  $u$  a deux voisins colorés 1 ou  $v$  a deux voisins colorés 4, une contradiction.  $\square$

En revanche, tous les graphes planaires bipartis sont 3-choisissables.

**Théorème 5** (Alon et Tarsi [AT92]). *Tout graphe biparti planaire est 3-choisissable.*

Il existe des graphes planaires non 4-choisissables. Cependant le Théorème des 4 couleurs [AH77] montre que les graphes planaires sont  $k$ -improvement 4-colorables pour tout  $k \geq 0$  — pour  $k \geq 1$  une preuve de ce résultat n'utilisant pas le Théorème des 4 couleurs est donnée dans [CCW86]. D'après le théorème 4, tous les graphes planaires sont  $k$ -improvement 4-choisissables pour tout  $k \geq 2$ . Il reste donc à savoir si les graphes planaires sont tous 1-improvement 4-choisissables. Il est conjecturé que c'est vrai.

**Conjecture 1** (Eaton and Hull [EH99], Škrekovski [Škr99b]). *Tout graphe planaire est 1-improvement 4-choisissable.*

## 1.5. Graphes planaires et théorème de Brooks

Selon les résultats de la section précédente, les couples d'entiers  $(k, l)$  pour lesquels il existe des graphes planaires qui ne soient pas  $k$ -improvement  $l$ -colorables sont

- $(k, 1)$  avec  $k \geq 0$ ;
- $(k, 2)$  avec  $k \geq 0$ ; et
- $(k, 3)$  avec  $k \in \{0, 1\}$ .

Alors qu'il est polynomial de déterminer si un graphe quelconque est 2-colorable, le théorème 1 indique que ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet pour la coloration impropre. Toutefois, peut-être existe-t-il une caractérisation simple des graphes planaires qui ne sont pas  $k$ -improvement 2-colorables, pour un entier  $k \geq 1$  fixé? La même question se pose pour les graphes planaires qui ne sont pas 1-improvement 3-colorables. Les deux théorèmes suivants suggèrent que ceci est peu probable.

**Théorème 6** (Cowen et al. [CGJ97]). *Pour tout entier naturel non nul  $k$ , le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : un graphe planaire  $G$ .

QUESTION : le graphe  $G$  est-il  $k$ -improvement 2-colorable ?

**Théorème 7** (Cowen et al. [CGJ97]). *Le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : *un graphe planaire  $G$ .*

QUESTION : *le graphe  $G$  est-il 1-improprement 3-colorable ?*

Nous avons vu précédemment que, si  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ , il ne peut exister d'analogue au théorème de Brooks pour la 2-coloration impropre en général (théorème 1), et pour la  $l$ -coloration impropre dans les limites des théorèmes 2 et 3 (les autres cas étant ouverts).

Toutefois, il est naturel de se demander, comme l'ont fait Cowen et al. [CGJ97], si un tel analogue est possible pour les graphes planaires. Plus précisément, Cowen et al. ont prouvé que la 2-coloration  $k$ -impropre des graphes planaires (avec  $k \geq 1$ ) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet en général, mais sans parvenir à prouver qu'il le reste lorsqu'il est restreint aux graphes planaires de degré maximum  $2k + 2$  [CGJ97]. En particulier, lorsque  $k = 1$ , ils ont prouvé que le problème reste  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes planaires de degré maximum au plus cinq, et ont demandé si cela reste vrai pour les graphes planaires de degré maximum au plus quatre.

Nous apportons une réponse affirmative à cette dernière question en prouvant, dans la prochaine sous-section, le résultat suivant.

**Théorème 8.** *Fixons  $k \in \{1, 2\}$ . Le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : *un graphe planaire  $G$  de degré maximum  $2k + 2$ .*

QUESTION : *le graphe  $G$  est-il  $k$ -improprement 2-colorable ?*

Le cas  $k \geq 3$  reste pour l'heure ouvert. Une manière intéressante de voir ce problème est la suivante : est-il possible de partitionner les sommets de tout graphe planaire de degré maximum  $2k + 2$  en deux sous-ensembles de telle sorte que chacun des sous-ensembles induise un sous-graphe de  $G$  de degré maximum  $k$  ?

Il n'est pas difficile de montrer, par exemple en utilisant une coupe maximum ou la proposition 2, que la réponse est affirmative pour les graphes de degré maximum  $2k + 1$ .

Nous proposons la conjecture suivante.

**Conjecture 2.** *Il existe un entier  $k_0 \geq 3$  tel que pour tout entier  $k \geq k_0$ , les sommets de tout graphe planaire de degré maximum  $2k + 2$  se partitionnent en deux sous-ensembles, chacun induisant un sous-graphe de degré maximum  $k$ .*

### 1.5.1. Démonstration du théorème 8

Nous établissons le théorème 8 en déduisant le cas où  $k$  vaut deux du cas où  $k$  vaut un.

Rappelons tout d'abord que pour prouver le théorème 6, Cowen et al. réduisent le problème de la 2-coloration  $k$ -impropre des graphes de degré maximum  $2k + 2$  à 3-SAT : partant d'une instance quelconque de 3-SAT, un graphe de degré maximum  $2k + 2$  est construit de sorte qu'il soit  $k$ -improprement 2-colorable si, et seulement si, l'instance initiale de 3-SAT est satisfaisable. Le graphe obtenu n'est généralement pas planaire, alors afin de prouver le théorème 6, Cowen et al. lui ajoute des gadgets de croisement (*crossing gadgets*) : il s'agit d'un graphe planaire possédant quatre sommets distingués, deux *entrées*  $a_1$  et  $a_2$ , et deux *sorties*  $b_1$  et  $b_2$ . Ce gadget doit être 1-improprement 2-colorable, toute telle coloration doit assigner une même couleur à  $a_1$  et  $b_1$ , et une même couleur à  $a_2$  et  $b_2$ , et enfin toute pré-coloration  $c$  des quatre sommets distingués telle que  $c(a_1) = c(b_1)$  et  $c(a_2) = c(b_2)$  doit s'étendre en une coloration 1-impropre du gadget.

Il suffit ensuite, après avoir plongé le graphe de sorte à aménager un peu d'espace autour des croisements, de remplacer chaque croisement par une copie du gadget, comme sur la figure 1.10. Cette technique est couramment utilisée dans les réductions.

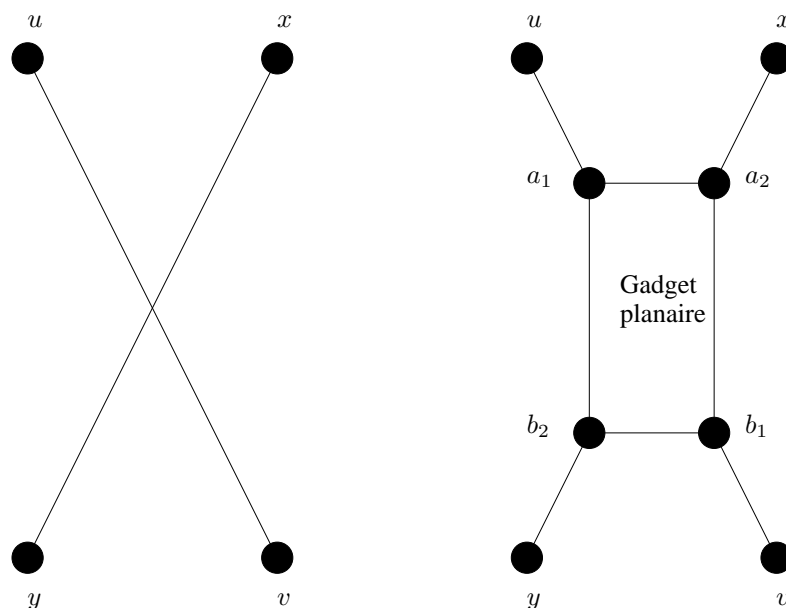


FIG. 1.10. Remplacement d'un croisement par un gadget planaire.

Cowen et al. [CGJ97] ont donc demandé si un gadget de croisement de degré maximum quatre existe. Notre preuve repose sur la construction d'un tel gadget : il suffit donc d'utiliser la même réduction que [CGJ97] en changeant simplement le gadget de croisement. Nous effectuons ici la preuve complète.

**Lemme 2.** *Le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : *un graphe planaire  $G$  de degré maximum 4.*

QUESTION : *le graphe  $G$  est-il 1-improprement 2-colorable ?*

**Démonstration.** La réduction est donc depuis 3-SAT. Soit  $\Phi$  une instance de 3-SAT. Nous allons construire, en temps polynomial, un graphe planaire  $G_\Phi$  de degré maximum quatre tel que  $\Phi$  soit satisfaisable si, et seulement si,  $G_\Phi$  est 1-improprement 2-colorable. Comme dans [CGJ97], nous utiliserons plusieurs gadgets aux propriétés adaptées.

Un  $xy$ -régulateur est donné par la figure 1.11. Il existe une unique 2-coloration 1-impropre de ce graphe, dans laquelle  $\{x, u_1, u_2, y\}$  forme une classe de couleur. Notons qu'ils ont alors tous impropreté zéro. Notons aussi que  $x$  et  $y$  ont tous deux degré un dans ce gadget.

Inversement, un  $xy$ -inverseur, donné par la figure 1.12, est simplement une copie du graphe  $K_{2,3}$ , avec  $x$  et  $y$  deux sommets voisins quelconques. Il existe une unique 2-coloration 1-impropre de ce graphe, dans laquelle  $x$  et  $y$  reçoivent des couleurs différentes. Ces deux sommets ont en outre impropreté zéro. Notons enfin que l'un des deux sommets a degré deux dans l'inverseur alors que l'autre a degré trois.

Ces deux gadgets suffisent à créer le gadget qui représentera les littéraux de chaque variable. Un tel gadget sera placé par variable, et il comportera autant de littéraux que nécessaire. Chacun de ces littéraux sera relié à exactement une clause. La figure 1.13 illustre ceci, une double ligne indiquant un régulateur.

Pour chaque clause  $C$ , une copie  $G'(C)$  du graphe  $G'$  (voir figure 1.14) est ajoutée. Nous laissons ici le soin au lecteur de vérifier que le graphe  $G'$  possède les propriétés suivantes : il est 1-improprement 2-colorable, et dans toute 2-coloration 1-impropre de  $G'$ , le sommet  $z$  est coloré 1 si, et seulement si, au moins l'un des sommets  $p, q, r$  l'est.



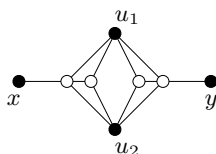


FIG. 1.11. Un régulateur, et son unique 2-coloration 1-impropre.

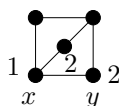


FIG. 1.12. Un inverseur, et les couleurs forcées dans toutes ses 2-colorations 1-impropre.

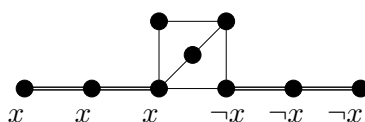


FIG. 1.13. Le gadget des variables. Une double arête représente un régulateur.

Ensuite les sommets  $z$  des copies de  $G'$  sont reliés par des régulateurs, formant ainsi un chemin.

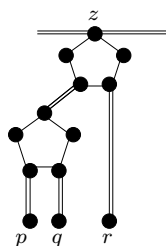


FIG. 1.14. Le gadget des clauses. Une double arête représente un régulateur.

Le degré maximum du graphe ainsi obtenu est quatre, et les gadgets des sommets et des clauses peuvent être placés de sorte que les seules arêtes qui se croisent soient celles joignant un sommet d'un gadget des variables à un sommet d'un gadget des clauses. Afin d'éliminer les croisements éventuels, chaque croisement est remplacé par le gadget  $J$  de la figure 1.15.

Le degré maximum de ce gadget est quatre, et dans toute 2-coloration 1-impropre les sommets  $a_1$  et  $b_1$  sont monochromatiques, tout comme le sont les sommets  $a_2$  et  $b_2$ . Plus précisément, le gadget de croisement  $J$  vérifie les propriétés suivantes :

- le graphe  $J$  est 1-improprement 2-colorable mais pas 1-improprement 1-colorable ;
- dans toute 2-coloration 1-impropre de  $J$ , les sommets  $a_1$  et  $b_1$ , sont monochromatiques, ainsi que les sommets  $a_2$  et  $b_2$  ; et
- il existe deux 2-colorations 1-impropres  $c_1$  et  $c_2$  de  $J$  telles que  $c_1(a_1) = c_1(b_1) = c_1(a_2) = c_1(b_2)$  et  $c_2(a_1) = c_2(b_1) \neq c_2(a_2) = c_2(b_2)$ .

La première et la dernière propriété se vérifient directement. Pour la deuxième, supposons que  $c$  soit une 2-coloration 1-impropre de  $J$ . Une première remarque est que, nécessairement, exactement trois sommets parmi  $o_1, o_2, o_3$  et  $o_4$  sont monochromatiques, car le sommet  $o_0$  est adjacent à ces quatre sommets. En conséquence, les sommets  $o_2$  et  $o_3$  sont colorés différemment. Si  $c(a_1) \neq c(b_1)$ , alors par la remarque précédente le sommet  $o_0$  possède deux voisins de chaque couleur, une contradiction. Donc  $c(a_1) = c(b_1)$ . Supposons que  $c(a_2) \neq c(b_2)$ . Alors, comme les sommets  $o_6$  et  $o_7$  sont monochromatiques par construction, et que les sommets  $o_6$  et  $o_5$  sont nécessairement de couleurs différentes, nous déduisons que  $c(o_3) = c(o_5)$ , et donc  $c(o_4) \neq c(o_3)$ . Alors les sommets  $o_2$  et  $o_1$  doivent être monochromatiques, ce qui est impossible car  $o_3$  et  $o_7$  sont colorés différemment.

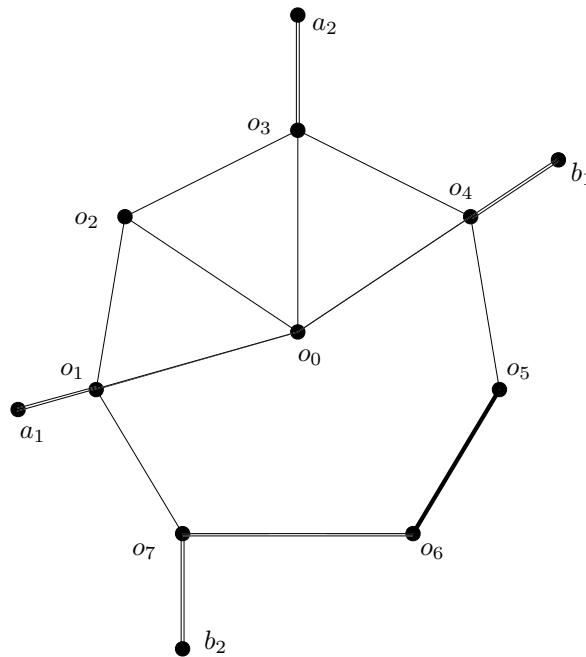


FIG. 1.15. Le gadget de croisement  $J$ . Une double arête représente un régulateur, et une arête en gras un inverseur.

□

Nous étendons le résultat précédent lorsque  $k$  vaut deux. Le théorème 8 découle donc directement des lemmes 2 et 3.

**Lemme 3.** *Le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet :*

INSTANCE : un graphe planaire  $G$  de degré maximum 6.

QUESTION : le graphe  $G$  est-il 2-improprement 2-colorable ?

**Démonstration.** Nous réduisons ce problème à celui de la 2-coloration 1-impropre des graphes planaires de degré maximum quatre,  $\mathcal{NP}$ -complet d'après le lemme 2. Soit  $G$  un graphe planaire de degré maximum quatre : nous allons construire, en temps polynomial, un graphe planaire  $\hat{G}$  de degré maximum 6 qui soit 2-improprement 2-colorable si, et seulement si,  $G$  est 1-improprement 2-colorable.

Le graphe  $H$  de la figure 1.16 possède les propriétés suivantes :

- (i) le graphe  $H$  est planaire, son degré maximum de  $H$  est 6 et il est 2-improprement 2-colorable ;

- (ii) l'impropreté du sommet  $v$  dans toute 2-coloration 2-impropre de  $H$  est au moins un ;  
 et  
 (iii) il existe une 2-coloration 2-impropre de  $H$  dans laquelle l'impropreté de  $v$  vaut un.

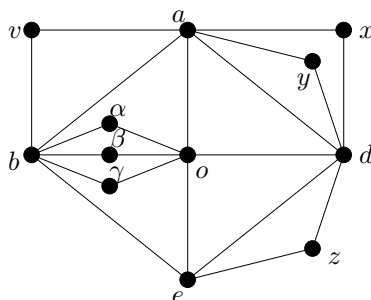


FIG. 1.16. Le graphe  $H$ .

La propriété (i) ne pose pas de problème. Pour prouver (ii) et (iii), il est alors suffisant de montrer qu'il n'existe pas de 2-coloration 2-impropre de  $H$  telle que les sommets  $a$  et  $b$  soient de la même couleur. Par l'absurde, supposons qu'une telle coloration existe et notons  $c(a) = 1 = c(b)$ .

Si  $c(o) = 1$ , alors les sommets  $d, y$  et  $x$  sont colorés 2, donc les sommets  $e$  et  $z$  sont tous deux colorés 1. Par conséquent, l'impropreté du sommet  $e$  est trois car  $c(b) = c(o) = c(z) = c(e) = 1$ , une contradiction.

Ainsi,  $c(o) = 2$ . Alors, les trois sommets  $\alpha, \beta, \gamma$  ne peuvent avoir la même couleur, sinon le sommet  $b$  ou le sommet  $o$  aurait impropreté au moins trois. En outre, comme  $c(b) = c(a) = 1$ , exactement deux sommets parmi  $\alpha, \beta, \gamma$  sont colorés 2. Donc les sommets  $b$  et  $o$  ont tous deux impropreté deux dans le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets  $a, b, o, \alpha, \beta, \gamma$ . Or, le sommet  $e$  n'appartient pas à ce sous-graphe et est voisin à la fois de  $b$  et de  $o$ , une contradiction.

Définissons à présent le graphe  $\hat{G}$  : chaque sommet  $x$  de  $G$  est remplacé par une copie  $H(x)$  de  $H$ . Ensuite, pour chaque arête  $xy$  de  $G$ , une arête est placée entre le sommet  $v$  de  $H(x)$  et celui de  $H(y)$ . Comme le degré de  $v$  dans  $H$  est deux et le degré maximum de  $G$  est quatre, le degré maximum du graphe  $\hat{G}$  obtenu est 6. En outre, ce graphe est clairement planaire.

Il reste à prouver l'équivalence des colorations : soit  $c$  une 2-coloration 1-impropre de  $G$ . Pour tout  $x \in V(G)$ , la couleur  $c(x)$  est attribuée au sommet  $v$  de  $H(x)$ , et la coloration est étendue à chaque copie de  $H$  en utilisant la propriété (iii). Chaque sommet  $v$  a bien impropreté au plus deux (un dans  $H$ , et au plus un en dehors car la coloration  $c$  de  $G$  est 1-impropre).

Soit  $\hat{c}$  une 2-coloration 2-impropre de  $\hat{G}$ . Pour tout  $x \in V(G)$ , la couleur attribuée à  $x$  est celle du sommet  $v$  de  $H(x)$ . La coloration obtenue est 1-impropre en vertu de la propriété (ii) de  $H$ .  $\square$

## 1.6. Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis d'introduire la notion de coloration impropre. Nous avons notamment analysé des questions de complexité afin d'étudier une possible extension du Théorème de Brooks à la coloration impropre. Dans ce cadre, les problèmes suivants restent ouverts.

**Problème 1.** Fixons un entier  $k \geq 1$  et un entier  $l$  tel que  $l + \lceil \sqrt{l} \rceil > 2k + 3$ . Supposons  $k \neq 1$  ou  $l \neq 4$ . Le problème suivant est-il  $\mathcal{NP}$ -complet ?

INSTANCE : un graphe  $G$  de degré maximum  $(k + 1)l$ .

QUESTION : le graphe  $G$  est-il  $k$ -improprement  $l$ -colorable ?

Plus généralement, existe-t-il une extension du Théorème de Brooks pour ces valeurs de  $l$  et de  $k$  ?

Pour les graphes planaires, nous avons proposé la conjecture 2, que nous rappelons ici (elle correspond au cas où  $l$  vaut deux).

**Conjecture 3.** Il existe un entier  $k_0 \geq 3$  tel que pour tout entier  $k \geq k_0$ , les sommets de tout graphe planaire de degré maximum  $2k + 2$  se partitionnent en deux sous-ensembles, chacun induisant un sous-graphe de degré maximum  $k$ .

À ce propos, un sujet qui nous paraît intéressant, et qui est peut-être une piste pour étudier cette conjecture, est la question de la coloration impropre lorsque l'impropreté tolérée dépend de la couleur. Cette notion est illustrée par la proposition 10. Concernant la conjecture 2, il est naturel de se demander pour quelles valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  il est possible de partitionner les sommets d'un graphe planaire de sorte qu'une part induise un graphe de degré maximum au plus  $k_1$ , et l'autre un graphe de degré maximum au plus  $k_2$ .

Enfin, nous avons cité la conjecture de Eaton et Hull et Škrekovski, affirmant que tout graphe planaire est 1-improprement 4-colorable.

Une autre question intéressante concerne les graphes bipartis.

**Problème 2.** Fixons un entier  $k$  strictement positif. Est-il polynomial de décider si un graphe biparti est  $k$ -improprement 2-choisissable ?



# Coloration impropre des graphes de densité bornée

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Frédéric Havet [HS06].

## 2.1. Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, tous les couples d'entiers  $(k, l)$  pour lesquels tout graphe planaire est  $k$ -improprement  $l$ -colorable sont connus. Concernant la choisissabilité, le seul cas encore ouvert est lorsque  $k = 1$  et  $l = 4$ .

En particulier, il existe des graphes planaires qui ne sont pas (proprement) 3-colorables, et déterminer si un graphe planaire est 3-colorable est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet. De même, il existe des graphes planaires qui ne sont pas 1-improprement 3-colorables. Cowen et al. [CGJ97] ont prouvé que le problème décisionnel induit est  $\mathcal{NP}$ -complet (théorème 7). Un moyen d'étudier d'étudier tout de même cette question est d'imposer des contraintes sur la maille des graphes considérés

**Définition 2.** La *maille* d'un graphe est la taille d'un plus petit cycle.

La coloration propre des graphes planaires en fonction de leur maille a été beaucoup étudiée.

**Théorème 9** (Grötzsch [Grö59]). *Tout graphe planaire de maille au moins quatre est 3-colorable.*

Notons toutefois que le théorème 9 ne s'étend pas à la 3-choisissabilité.

**Proposition 12.** *Il existe des graphes planaires de maille quatre qui ne sont pas 3-choisissables.*

En revanche, Thomassen a prouvé le résultat suivant, qui implique le théorème 9 car la maille d'un contre-exemple minimal à ce dernier serait au moins cinq.

**Théorème 10** (Thomassen [Tho94]). *Tout graphe planaire de maille au moins cinq est 3-choisissable.*

Škrekovski a prouvé un analogue du théorème de Grötzsch pour la choisissabilité impropre.

**Théorème 11** (Škrekovski [Škr99a]). *Tout graphe planaire de maille au moins quatre est 1-improprement 3-choisissable.*

Pour tout entier naturel  $k$ , nous savons qu'il existe un graphe planaire qui n'est pas  $k$ -improprement 2-colorable. Ceci n'est pas très gênant pour la coloration propre, car il est polynomial de déterminer si un graphe quelconque est 2-colorable (c'est-à-dire biparti) ou 2-choisissable (en vertu du théorème de caractérisation des graphes 2-choisissables de Erdős, Rubin et Taylor [ERT80]). En revanche, la situation est plus complexe lorsque l'impropreté  $k$  est non nulle, car comme nous l'avons vu, déterminer si un graphe planaire est  $k$ -improprement 2-colorable est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet (théorème 6).

En revanche, tout graphe planaire biparti est (proprement) 3-choisissable en vertu du théorème d'Alon et Tarsi [AT92], ou de Gutner [Gut92].

Concernant la 2-coloration impropre, Škrekovski a défini le paramètre  $g_k$  comme le plus petit entier tel que tout graphe planaire de maille au moins  $g_k$  soit  $k$ -improprement 2-choisissable. Il a obtenu les bornes suivantes.

**Théorème 12** (Škrekovski [Škr99b, Škr00]).

- $5 \leq g_1 \leq 9$ ;
- $5 \leq g_2 \leq 7$ ;
- $5 \leq g_3 \leq 6$ ; et
- $\forall k \geq 4, g_k = 5$ .

Remarquons que ces bornes concernent la choisissabilité (impropre), et qu'aucune amélioration n'est connue pour la coloration (impropre) : les bornes supérieures connues sont les mêmes, et les graphes construits pour prouver les bornes inférieures sont tous non (improprement) colorables.

Nous allons étudier ce problème en le plaçant dans le cadre plus général des graphes de densité bornée. En effet, la densité d'un graphe planaire est bornée en fonction de sa maille.

**Définition 3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Le *degré moyen* de  $G$  est

$$\text{Ad}(G) := \frac{2|E|}{|V|}.$$

Le *degré moyen maximum* de  $G$ , noté  $\text{Mad}(G)$ , est le maximum des degrés moyens des sous-graphes de  $G$  (y compris  $G$  lui-même).

Si  $G$  n'est pas une forêt, le *cœur* de  $G$ , noté  $h(G)$ , est le plus grand sous-graphe de  $G$  dans lequel le degré de tout sommet est au moins deux.

Notons que déterminer le degré moyen maximum d'un graphe quelconque est polynomial, en vertu de l'algorithme de partitionnement des matroïdes d'Edmonds [Edm65] (voir aussi [SU97]). Le cœur d'un graphe peut être obtenu en enlevant successivement tous les sommets de degré un.

**Proposition 13.** Si  $G$  n'est pas une forêt,  $\text{Mad}(G) = \text{Mad}(h(G))$ .

**Démonstration.** Comme  $h(G)$  est un sous-graphe de  $G$ ,  $\text{Mad}(G) \geq \text{Mad}(h(G))$ . Soit  $H$  un sous-graphe de  $G$  tel que  $\text{Mad}(G) = \text{Ad}(H)$ . Le graphe  $H$  n'est pas une forêt, sinon  $\text{Mad}(G) < 2$  et  $G$  en serait une également. Donc  $h(H)$  est défini et c'est un sous-graphe de  $h(G)$ . En outre, le degré minimum de  $h(H)$  étant au moins deux, lui ajouter des sommets de degré un n'augmente pas son degré moyen maximum : soit  $H'$  le super-graphe de  $h(H)$  obtenu

en ajoutant  $k \geq 1$  sommets de degré un. En notant  $n$  le nombre de sommets de  $h(H)$ ,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(H') &= \frac{n \times \text{Ad}(h(H)) + 2k}{n + k} \\ &= \text{Ad}(h(H)) + \frac{2k - k \times \text{Ad}(h(H))}{n + k} \\ &\leq \text{Ad}(h(H)) \end{aligned}$$

puisque  $\text{Ad}(h(H)) \geq 2$ . Donc  $\text{Mad}(h(G)) \geq \text{Ad}(h(H)) \geq \text{Ad}(H) = \text{Mad}(G)$ .  $\square$

Soit  $M(k, l)$  le plus grand nombre réel tel que tout graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à  $M(k, l)$  soit  $k$ -improprement  $l$ -choissable. De façon évidente,  $M(k_1, l) \leq M(k_2, l)$  si  $k_1 \leq k_2$ . De plus,  $M(k, 1) = \frac{2k+2}{k+2}$  puisqu'un graphe est  $k$ -improprement 1-choissable si, et seulement si, son degré maximum est au plus  $k$ , et qu'un graphe de degré maximum au moins  $k + 1$  contient l'étoile  $S_{k+1}$  comme sous-graphe et a donc degré moyen maximum au moins  $\frac{2k+2}{k+2}$ .

Si  $l \geq 2$ , remarquons d'abord que tout arbre est (proprement) 2-choissable. En outre, pour tout  $k \geq 0$ , un graphe  $G$  qui n'est pas une forêt est  $k$ -improprement 2-choissable si, et seulement si, son cœur l'est. Ainsi, nous pouvons restreindre notre étude aux graphes de degré minimum au moins deux.

Afin d'introduire la méthode utilisée, qui utilise un processus de déchargement, nous la présentons d'abord pour la 2-coloration impropre dans la section 2.2, où nous établissons les résultats suivants.

**Théorème 13.** *Pour tout entier naturel  $k$ , tous les graphes de degré moyen maximum strictement inférieur à  $\frac{4k+4}{k+2}$  sont  $k$ -improprement 2-choissables.*

**Théorème 14.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $M(k, 2) \leq \frac{4k^2 + 6k + 4}{k^2 + 2k + 2} = 4 - \frac{2k + 4}{k^2 + 2k + 2}$ .*

Dans la section 2.3, nous généralisons la borne inférieure de la section 2.2 à toute valeur de  $l \geq 2$ .

**Théorème 15.** *Pour tout entier  $l \geq 2$  et tout entier  $k \geq 0$ , tous les graphes de degré moyen maximum strictement inférieur  $\frac{l(l+2k)}{l+k}$  sont  $k$ -improprement  $l$ -choissables.*

Nous exhibons également, pour toutes les valeurs de  $l$  et de  $k$ , un graphe qui n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -choissable, et obtenons le résultat suivant.

**Corollaire 1.** *Pour tout entier  $l$  fixé,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} M(k, l) = 2l$ .*

La maille et le degré moyen maximum d'un graphe planaire sont liés par la relation suivante.

**Théorème 16.** *Si  $G$  est un graphe planaire de maille  $g$  alors*

$$\text{Mad}(G) < 2 + \frac{4}{g-2}.$$

**Démonstration.** Ce résultat est vrai si  $G$  est un arbre, puisque tout arbre est 1-dégénéré. Supposons donc que  $g$  est fini. La formule d'Euler pour un graphe planaire  $H$  s'écrit comme suit :  $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 2$  où  $|F(H)|$  est le nombre de faces de  $H$ . Comme tout sous-graphe  $H$  de  $G$  a maille au moins  $g$ ,  $g|F(H)| \leq 2|E(H)|$ . Ainsi  $2g - g|V(H)| + g|E(H)| = g|F(H)| \leq 2|E(H)|$ . D'où  $\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \leq \frac{2g}{g-2} - \frac{4g}{(g-2)|V(H)|} < \frac{2g}{g-2}$  pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$ .  $\square$



Ainsi, le théorème 13 fournit les bornes suivantes, qui améliorent celles obtenues par Škrekovski.

**Corollaire 2.** *Soit  $G$  un graphe planaire de maille  $g$ .*

- (i) *Si  $g \geq 8$ ,  $G$  est 1-improprement 2-choisissable, donc  $g_1 \leq 8$ .*
- (ii) *Si  $g \geq 6$ ,  $G$  est 2-improprement 2-choisissable, donc  $g_3 \leq g_2 \leq 6$ .*
- (iii) *Si  $g \geq 5$ ,  $G$  est 4-improprement 2-choisissable, donc  $g_k \leq 5$  pour  $k \geq 4$ .*

Enfin, dans la section 2.4, nous montrons comment utiliser le théorème 15 afin d'obtenir des résultats pour les graphes de genre supérieur, qui améliorent les résultats précédemment obtenus par Miao [Mia03].

## 2.2. Coloration $k$ -impropre avec deux couleurs

### 2.2.1. Borne inférieure

Nous établissons dans cette sous-section le théorème 13.

Tout d'abord, si  $k = 0$ , le théorème 13 est trivialement vrai. En fait, un graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à deux est acyclique et est donc une forêt. Il est donc 2-choisissable. De plus,  $M(0, 2) \leq 2$  puisque un cycle impair n'est pas 2-colorable, donc  $M(0, 2) = 2$ .

Lorsque  $k \geq 1$ , nous avons besoin de quelques définitions et résultats préliminaires.

**Définition 4.** Si  $v \in V(G)$ ,  $d_G(v)$  est le degré de  $v$  dans le graphe  $G$ . Pour tout entier non nul  $d$ , un sommet de degré égal à (respectivement au plus, respectivement au moins)  $d$  est nommé un  $d$ -sommet (respectivement  $(\leq d)$ -sommet, respectivement  $(\geq d)$ -sommet). Pour  $S \subseteq V(G)$  (respectivement  $E \subseteq E(G)$ ),  $G - S$  (respectivement  $G - E$ ) est le sous-graphe de  $G$  induit par la suppression des sommets (respectivement arêtes) de  $S$  (respectivement  $E$ ) de  $V(G)$  (respectivement  $E(G)$ ). Si  $S = \{v\}$  et  $E = \{uv\}$ , posons  $G - v := G - S$  et  $G - uv := G - E$ . L'union (respectivement l'intersection) des graphes  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe  $G = G_1 \cup G_2$  (respectivement  $G = G_1 \cap G_2$ ) avec  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  (respectivement  $V(G) = V(G_1) \cap V(G_2)$ ) et  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$  (respectivement  $E(G) = E(G_1) \cap E(G_2)$ ).

Un graphe est  $(k, 2)$ -minimal si, et seulement si, il n'est pas  $k$ -improprement 2-choisissable mais tous ses sous-graphes propres le sont.

**Lemme 4** (Škrekovski [Škr00]). *Soit un entier  $k \geq 1$  et soit  $G$  un graphe  $(k, 2)$ -minimal.*

- (i) *Le degré minimum de  $G$  est au moins deux.*
- (ii) *Deux  $(\leq k + 1)$ -sommets ne sont pas adjacents.*

**Définition 5.** Soit  $D$  un graphe orienté. Le degré externe (respectivement degré interne) d'un sommet  $u$  de  $D$  est noté  $d_D^+(u)$  (respectivement  $d_D^-(u)$ ). Le degré de  $u$  est  $d_D(u) = d_D^-(u) + d_D^+(u)$ ; c'est le degré de  $u$  dans le graphe non orienté sous-jacent.

La section externe de  $u$  dans  $D$ , notée  $A_D^+(u)$ , est l'ensemble des sommets  $v$  pour lesquels il existe un chemin orienté de  $u$  à  $v$  dans  $D$ .

Une arborescence est un arbre orienté dans lequel tous les chemins sont orientés à partir d'un sommet appelé la racine. Tous les sommets d'une arborescence, sauf la racine, ont donc un degré interne de un. Les feuilles d'une arborescence sont les sommets de degré externe zéro. Un sommet qui n'est ni une feuille, ni la racine est appelé sommet interne. Une quasi-arborescence est un graphe orienté obtenu à partir d'une arborescence en identifiant certaines feuilles.

Soit  $G$  un graphe  $(k, 2)$ -minimal. Une orientation partielle de  $G$  est obtenue en utilisant le processus suivant.

- (i) Chaque arête  $uv$  où  $v$  est un 2-sommet est orientée de  $u$  à  $v$ .
- (ii) Si  $k \geq 3$ , chaque arête  $uv$  où  $v$  est un 3-sommet est orientée de  $u$  à  $v$ .
- (iii) Tant qu'il existe une arête non orientée  $uv$  où  $v$  est un  $i$ -sommet avec  $k + 2 \leq i < \frac{3k}{2} + 2$  et degré externe  $i - 1$ , l'arête est orientée de  $u$  à  $v$ .

Le graphe orienté  $D$  induit par les arêtes orientées de  $G$  est appelé *graphe de déchargement* de  $G$ .

La proposition suivante découle immédiatement de la définition d'un graphe de déchargement.

**Proposition 14.** *Soit  $D$  un graphe de déchargement d'un graphe  $(k, 2)$ -minimal.*

- Le graphe orienté  $D$  n'a pas de 2-circuit puisque deux  $(\leq k + 1)$ -sommets ne sont pas adjacents d'après le lemme 4 (ii). Il n'a ainsi aucun circuit.
- Si  $k \leq 2$ , seuls les sommets de degré deux ou  $k + 2$  ont un degré interne strictement positif.
- Chaque 2-sommet a degré interne deux dans  $D$  et si  $k \geq 3$ , chaque 3-sommet a degré interne trois.
- Pour tout sommet  $u$ ,  $A_D^+(u)$  est une quasi-arborescence dont les feuilles ont degré deux (respectivement deux ou trois) dans  $G$  si  $k \leq 2$  (respectivement  $k \geq 3$ ). En particulier, le degré interne des feuilles de  $A_D^+(u)$  est au plus deux (respectivement trois).

**Définition 6.** Une quasi-arborescence est une  $(k, 2)$ -quasi-arborescence si, et seulement si, :

- chaque sommet a degré externe au plus  $\max\{2, 2k - 1\}$  ; et
- chaque feuille a degré interne au plus  $\min\{k, 3\}$ .

**Lemme 5.** *Soit  $k \geq 2$ . Soient  $Q$  une  $(k, 2)$ -quasi-arborescence enracinée en  $u$  et  $L$  une 2-assignation de  $Q$ . Alors toute  $L$ -coloration des feuilles de  $Q$  s'étend en une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $Q$  telle que  $u$  ait impropreté au plus  $k - 1$ .*

**Démonstration.** Par induction sur les sommets de  $Q$ , le résultat étant trivialement vrai si  $|V(Q)| = 1$ .

Supposons que  $|V(Q)| > 1$  et que le résultat est vrai pour les  $(k, 2)$ -quasi-arborescences plus petites. Notons  $v_1, \dots, v_s$  les voisins externes de  $u$  dans  $Q$ . Notons que  $Q - u$  est l'union de  $s$   $(k, 2)$ -quasi-arborescences  $Q_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , enracinées en  $v_i$  et qui sont sommet-disjointes sauf éventuellement sur certaines feuilles.

Soit  $c$  une  $L$ -coloration des feuilles de  $Q$ . Alors, d'après l'hypothèse d'induction, cette coloration s'étend en une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de chaque  $Q_i$  de telle sorte que  $im_{Q_i}(v_i) \leq k - 1$ . Puisqu'une feuille de  $Q$  a degré interne au plus  $\min\{k, 3\}$  et que  $im_Q(x) = im_{Q_i}(x)$  pour tout sommet de  $Q_i$  qui n'est pas une feuille, l'union de ces colorations est une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $Q$  telle que  $im(v_i) \leq k - 1$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

L'une au moins des deux couleurs de  $L(u)$ , disons  $\alpha$ , est attribuée à au plus  $k - 1$  voisins  $u$ , puisque  $s \leq 2k - 1$ . Colorer  $u$  avec  $\alpha$  donne donc la coloration souhaitée de  $Q$   $\square$

Il est clair que ce résultat n'est plus vrai lorsque  $k$  vaut un, car il est généralement impossible de colorer la racine avec impropreté zéro. Néanmoins le résultat suivant, légèrement plus faible, est vrai.

**Lemme 6.** *Soient  $Q$  une  $(1, 2)$ -quasi-arborescence enracinée en  $u$ ,  $L$  une 2-assignation de  $Q$  avec  $L(u) = \{\alpha, \beta\}$  et  $c$  une  $L$ -coloration de  $S$ , l'ensemble des feuilles de  $Q$  avec degré interne un. L'une au moins des deux assertions suivantes est vraie.*

- (i) La coloration  $c$  s'étend en une  $L$ -coloration 1-impropre de  $Q$  telle que  $\text{im}(u) = 0$ .
- (ii) La coloration  $c$  s'étend en deux  $L$ -colorations 1-impropres différentes de  $Q$   $c_1$  et  $c_2$  telles que  $c_1(v) = c_2(v)$  si  $v \neq u$ .

**Démonstration.** Par induction sur le nombre de sommets de  $Q$ . Soit  $v_1$  et  $v_2$  deux voisins externes de  $u$  dans  $Q$ .  $Q - u$  est l'union de deux  $(1, 2)$ -quasi-arborescences  $Q_1$  et  $Q_2$ , respectivement enracinées en  $v_1$  et  $v_2$ , et qui sont sommet-disjointes sauf éventuellement sur des feuilles. Soit  $S'$  l'ensemble des feuilles appartenant aux deux quasi-arborescences  $Q_1$  et  $Q_2$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , attribuons à chaque feuille de  $Q_i$  ayant degré interne un dans  $Q_i$  une couleur de sa liste. Par hypothèse d'induction,  $Q_i$  satisfait (i) ou (ii).

Si l'une au moins des deux quasi-arborescences satisfait (ii), alors  $c$  s'étend à  $Q_1 \cup Q_2$  de telle sorte que  $\{c(v_1), c(v_2)\} \neq L(u)$ , disons  $\alpha \notin \{c(v_1), c(v_2)\}$ . En outre, pour chaque sommet  $x$  n'appartenant pas à  $V(Q_i) \setminus S'$ ,  $\text{im}_Q(x) = \text{im}_{Q_i}(x) \leq 1$ . Si un sommet  $s' \in S'$  a impropreté deux, alors ses deux voisins sont colorés de la même couleur. Il est donc possible de recolorer  $s'$  avec la couleur de  $L(s') \setminus \{c(s')\}$ , ce qui fournit une  $L$ -coloration 1-impropre de  $Q_1 \cup Q_2$ . Enfin, poser  $c(u) := \alpha$  fournit une  $L$ -coloration 1-impropre de  $Q$  telle que  $\text{im}(u) = 0$ . Ainsi  $Q$  satisfait (i).

Supposons à présent que  $Q_1$  et  $Q_2$  satisfassent tous deux (i). Alors, quitte à recolorer des sommets de  $S'$  comme précédemment, il est possible d'étendre  $c$  en une  $L$ -coloration 1-impropre de  $Q_1 \cup Q_2$  telle que  $\text{im}(v_1) = \text{im}(v_2) = 0$ . Si  $\{c(v_1), c(v_2)\} \neq L(u)$ , disons  $\alpha \notin \{c(v_1), c(v_2)\}$ , alors une  $L$ -coloration 1-impropre de  $Q$  telle que  $\text{im}(u) = 0$  est obtenue en posant  $c(u) := \alpha$ . Ainsi  $Q$  satisfait (i). Sinon, assigner indifféremment à  $u$  les couleurs  $\alpha$  et  $\beta$ , permet d'obtenir les deux  $L$ -colorations 1-impropres de  $Q$  satisfaisant (ii).  $\square$

**Lemme 7.** Soit  $k \geq 3$ . Soit  $D$  un graphe de déchargement d'un graphe  $(k, 2)$ -minimal  $G$ .

- (i) Tout  $i$ -sommet avec  $i \in \{4, \dots, k + 1\}$  a degré externe zéro.
- (ii) Tout  $i$ -sommet avec  $i \in \{k + 2, \dots, 2k + 1\}$  a degré externe strictement inférieur à  $i$ .

**Démonstration.**

- (i) Supposons, par l'absurde, que  $v$  soit un sommet contredisant l'assertion et soit  $u$  un voisin externe de  $v$ . Notons que  $u$  est un  $(\leq \frac{3k}{2} + 2)$ -sommet par définition d'un graphe de déchargement.

Soient  $L$  une 2-assignation de  $G$ , et  $S$  l'ensemble des feuilles de  $A_D^+(u)$ . Par minimalité de  $G$ , notons  $c$  une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G - A_D^+(u)$ .

Le sous-graphe  $A_D^+(u)$  est une  $(k, 2)$ -quasi-arborescence : comme  $u$  est dominé par  $v$  dans  $D$ , le degré externe de  $u$  est strictement inférieur à  $\frac{3k}{2} + 1$ , et est donc au plus  $2k - 1$ . Ainsi, d'après le lemme 5,  $c$  s'étend à  $G - vu$  de telle sorte que  $\text{im}(u) \leq k - 1$ . Comme les feuilles ont degré au plus  $3 \leq k$ , l'impropreté de chaque feuille est au plus  $3 \leq k$ . Cette  $L$ -coloration de  $G - uv$  est donc  $k$ -impropre.

Si  $c(u) \neq c(v)$  ou  $\text{im}_{G-uv}(v) \leq k - 1$  alors  $c$  est une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ . Sinon, les  $k + 1$  voisins de  $v$  sont colorés de la même couleur, donc recolorer  $v$  avec l'autre couleur de sa liste fournit une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ .

Donc  $G$  est  $k$ -improprement 2-choisissable, une contradiction.

- (ii) Supposons, par l'absurde, que  $v$  soit un  $i$ -sommet contredisant l'assertion.

Soit  $L$  une 2-assignation de  $G$  et soit  $c$  une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G - v$ . Il existe une couleur de  $L(v)$ , disons  $\alpha$ , qui est attribuée à au plus  $k$  voisins de  $v$ . Notons  $v_1, v_2, \dots, v_s$  ces voisins.

Soit  $G' := G - \bigcup_{j=1}^s A_D^+(v_j)$ . Définissons une  $L$ -coloration partielle  $c'$  égale à  $c$  pour chaque sommet de  $G'$  et chaque feuille de  $A_D^+(v_j)$ . D'après le lemme 5 appliqué à chacune des feuilles de  $A_D^+(v_j)$  (qui sont des quasi-arborescences sommet-disjointes, sauf éventuellement sur des feuilles),  $c'$  s'étend en une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G - v$  telle que  $\text{im}(v_j) \leq k - 1$  pour  $1 \leq j \leq s$ . Par définition de  $c'$ , les seuls voisins de  $v$  auxquels  $c'$  peut attribuer la couleur  $\alpha$  sont dans  $\{v_1, \dots, v_s\}$ . Donc, en définissant  $c'(v) := \alpha$ , la  $L$ -coloration  $c'$  obtenue est  $k$ -impropre.

Ainsi  $G$  est  $k$ -improprement 2-choisissable, une contradiction.  $\square$

Le lemme suivant, qui correspond au précédent lorsque  $k$  vaut deux, se prouve de façon analogue.

**Lemme 8.** *Soit  $D$  un graphe de déchargement d'un graphe  $(2, 2)$ -minimal  $G$ .*

(i) *Le degré externe d'un 3-sommet est zéro.*

(ii) *Si  $v$  est un  $i$ -sommet avec  $i \in \{4; 5\}$  son degré externe est strictement inférieur à  $i$ .*

**Lemme 9.** *Soit  $D$  un graphe de déchargement d'un graphe  $(1, 2)$ -minimal  $G$ . Il n'existe pas de 3-sommet avec degré externe trois dans  $D$ .*

**Démonstration.** Supposons, par l'absurde, que  $v$  soit un 3-sommet de degré externe trois. Soit  $u$  un voisin externe de  $v$ . Soient  $Q_1 := A_D^+(u)$ ,  $Q_2 := A_{D-vu}^+(v)$ ,  $S$  l'ensemble des feuilles de  $A_D^+(v)$  de degré interne un dans  $A_D^+(v)$ , et  $S'$  l'ensemble des feuilles de degré interne deux dans  $A_D^+(v)$ .

Soit  $L$  une 2-assignation de  $G$ . Par minimalité de  $G$ , notons  $c$  une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G - A_D^+(v)$ . Les sommets n'appartenant pas à  $S$  n'ont pas de voisin dans  $G - A_D^+(v)$  et chaque sommet de  $S$  possède exactement un voisin dans  $G - A_D^+(v)$ . Il est donc possible d'étendre  $c$  à  $S \cup S'$  en attribuant à chaque sommet de  $S$  une couleur de sa liste non attribuée à son voisin dans  $G - A_D^+(v)$  et n'importe quelle couleur de sa liste à un sommet de  $S'$ .

A présent,  $Q_1$  et  $Q_2$  satisfont (i) ou (ii) du lemme 6. Si l'un d'eux au moins vérifie (ii), alors quitte à recolorer des sommets de  $S'$ , il est possible d'étendre  $c$  en une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G - vu$  telle que  $c(v) \neq c(u)$ . Donc  $c$  est une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G$ .

Si  $Q_1$  et  $Q_2$  satisfont tous deux (i), alors quitte à recolorer des sommets de  $S'$ , il est possible d'étendre  $c$  en une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G - vu$  telle que  $\text{im}(v) = \text{im}(u) = 0$ . Donc  $c$  est une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G$ .

Ainsi  $G$  est 1-improprement 2-choisissable, une contradiction.  $\square$

**Démonstration du théorème 13.** Soit  $G$  un graphe  $(k, 2)$ -minimal et soit  $D$  un graphe de déchargement de  $G$ . Chaque sommet  $v$  possède au départ une charge  $w(v)$  égale à son degré. La règle de déchargement suivante est appliquée : chaque sommet donne  $\frac{k}{k+2}$  à chacun de ses voisins externes.

Examinons à présent la nouvelle charge  $w'(v)$  d'un sommet  $v$  en fonction de son degré.

- Si  $v$  est un 2-sommet, il a un degré interne deux donc sa nouvelle charge est  $w'(v) = 2 + \frac{2k}{k+2} = \frac{4k+4}{k+2}$ .
- Si  $v$  est un 3-sommet et  $k \geq 3$ , il a un degré interne trois donc sa nouvelle charge est  $w'(v) = 3 + 3 \times \frac{k}{k+2} = \frac{6k+6}{k+2} > \frac{4k+4}{k+2}$ . Si  $v$  est un 3-sommet et  $k = 2$  alors son degré externe est nul d'après le lemme 8 et son degré interne l'est également par construction, donc  $w'(v) = 3$ .

- Si  $4 \leq d(v) \leq k + 1$ , ( $k \geq 3$ ), d'après le lemme 7 (i), le degré externe de  $v$  est 0 donc sa charge est  $d(v) \geq 4 > \frac{4k+4}{k+2}$ .
- Si  $k + 2 \leq d(v) < \frac{3k}{2} + 2$ , soit le degré externe de  $v$  est au plus  $d(v) - 2$  et sa nouvelle charge est alors au moins  $d(v) - (d(v) - 2) \times \frac{k}{k+2} = \frac{2d(v)}{k+2} + \frac{2k}{k+2} \geq 2 + \frac{2k}{k+2} = \frac{4k+4}{k+2}$ , soit d'après les lemmes 7, 8 et 9, son degré externe est  $d(v) - 1$ . Dans ce cas, par définition d'un graphe de déchargement le degré interne de  $v$  est un, donc sa nouvelle charge est
 
$$d(v) - (d(v) - 1) \times \frac{k}{k+2} + \frac{k}{k+2} = d(v) - (d(v) - 2) \times \frac{k}{k+2} \geq \frac{4k+4}{k+2}.$$
- Si  $\frac{3k}{2} + 2 \leq d(v) \leq 2k + 1$ , ( $k \geq 2$ ), alors d'après les lemmes 7 et 8, le degré externe de  $v$  est au plus  $d(v) - 1$ . Donc  $w'(v) \geq d(v) - (d(v) - 1) \times \frac{k}{k+2} = \frac{2d(v)}{k+2} + \frac{k}{k+2} \geq \frac{3k+4+k}{k+2} = \frac{4k+4}{k+2}$ .
- Si  $d(v) \geq 2k + 2$ , alors  $w'(v) \geq d(v)(1 - \frac{k}{k+2}) = \frac{2d(v)}{k+2} \geq \frac{4k+4}{k+2}$ .

$$\text{Ainsi } \text{Mad}(G) \geq \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} w'(v) \geq \frac{4k+4}{k+2}. \quad \square$$

### 2.2.2. Borne supérieure

Fixons  $k \geq 1$ . Dans cette sous-section, nous allons construire une famille de graphes  $(G_n^k)_{n \geq 1}$  telle que, pour tout  $n \geq 1$

- le graphe  $G_n^k$  n'est pas  $k$ -improprement 2-colorable ; et
- son degré moyen maximum est  $\frac{2n(4k^2 + 6k + 4) + 4k^2 + 6k + 2}{2n(k^2 + 2k + 2) + (k + 1)^2}$ .

Cela impliquera immédiatement le théorème 14.

Soit  $H_k$  le graphe composé de deux sommets voisins  $u$  et  $v$ , et de  $k + 1$  sommets reliés uniquement à  $u$  et  $v$ . Le graphe  $F_k$  est obtenu à partir de  $k$  copies disjointes du graphe  $H_k$  en identifiant les sommets  $v$  de chacune des copies. Remarquons que  $F_k$  possède un sommet de degré  $k(k + 2)$ ,  $k$  sommets de degré  $k + 2$  et  $k(k + 1)$  sommets de degré deux. Considérons à présent  $2n + 1$  copies de  $F_k$  et relient les sommets  $v$  de chaque copie de sorte à ce qu'ils induisent un cycle de taille  $2n + 1$ . Enfin subdivisons toutes les arêtes du cycle obtenu sauf une : le graphe ainsi créé est le graphe  $G_n^k$  (voir figure 2.2.2).

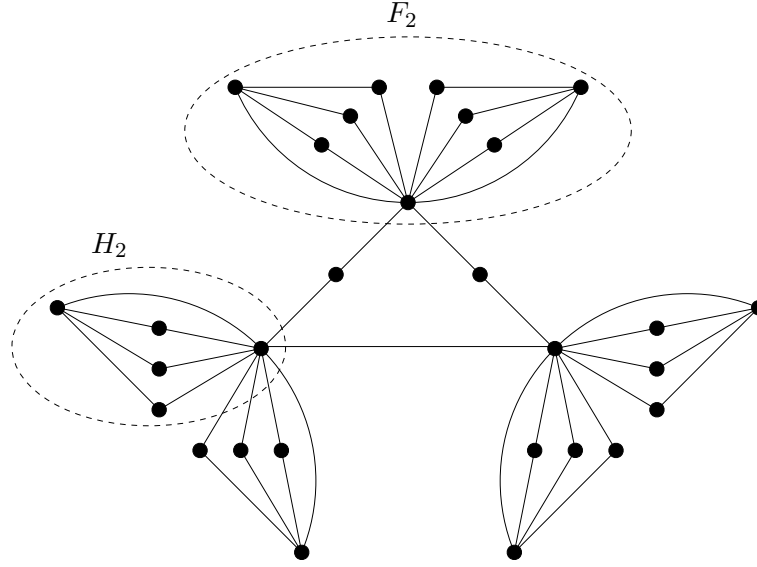
**Lemme 10.** *Le graphe  $G_n^k$  n'est pas  $k$ -improprement 2-colorable.*

**Démonstration.** Remarquons d'abord que dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $H_k$ , l'impropreté du sommet  $v$  est au moins un. Plus précisément, comme  $v$  a degré  $k + 2$  dans  $H_k$ , si son impropreté est 0 alors ses  $k + 2$  voisins sont de la même couleur. Ceci est impossible car le sommet  $u$ , faisant partie de ces sommets et étant reliés à tous aurait impropreté  $k + 1$ . Donc, dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $F_k$ , l'impropreté de  $v$  est  $k$ . Ainsi, pour colorer  $k$ -improprement le graphe entier, il est nécessaire de 2-colorer proprement le cycle subdivisé, ce qui est impossible.  $\square$

**Lemme 11.** *Le degré moyen maximum de  $G_n^k$  est  $M_n^k := \frac{(2n+1)(4k^2+6k+4)-2}{(2n+1)(k^2+2k+2)-1}$ .*

**Démonstration.** Le degré moyen maximum de  $G$  est son degré moyen, qui vaut

$$\frac{(2n+1)[(1 \times k(k+2) + 2) + (k \times (k+2)) + (k(k+1) \times 2)] + (2n) \times 2}{(2n+1)(1+k+k(k+1)) + 2n} = M_n^k.$$

FIG. 2.1. Le graphe  $G_1^2$ .

□

## 2.3. Coloration $k$ -impropre avec $l$ couleurs, $l \geq 2$

### 2.3.1. Borne inférieure

Dans cette sous-section, nous établissons le théorème 15, qui généralise le théorème 13 à n'importe quel nombre de couleurs  $l \geq 2$ .

Notons d'abord que le résultat est trivial si  $k = 0$  puisqu'un graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à  $l$  est  $(l - 1)$ -dégénéré (i.e. chacun de ses sous-graphes possède un sommet de degré au plus  $l - 1$ ). Un tel graphe est donc  $l$ -choisissable. L'étude des autres valeurs de  $k$  nécessite quelques résultats préliminaires.

**Définition 7.** Un graphe est  $(k, l)$ -minimal si, et seulement si, il n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -choisissable mais tous ses sous-graphes propres le sont.

**Lemme 12.** Soient  $G$  un graphe,  $L$  une assignation de listes et  $c$  une  $L$ -coloration. Si l'impropreté d'un sommet  $v$  est au moins  $d(v) - |L(v)| + 2$  pour la coloration  $c$ , alors il existe une  $L$ -coloration  $c'$  de  $G$  telle que  $c'(u) = c(u)$  si  $u \neq v$  et  $\text{im}_{c'}(v) = 0$ .

**Démonstration.** Notons  $c(v) = \alpha$ . Le sommet  $v$  possède au plus  $d(v) - (d(v) - |L(v)| + 2) = |L(v)| - 2$  voisins qui ne sont pas colorés  $\alpha$ . Ainsi il existe une couleur  $\beta \in L(v)$  qui n'est attribuée à aucun des voisins de  $v$ . Donc recolorer  $v$  par  $\beta$  fournit la coloration souhaitée. □

Le lemme suivant généralise le lemme 4.

**Lemme 13.** Soit un entier  $k \geq 1$  et soit  $G$  un graphe  $(k, l)$ -minimal.

- (i) Le degré minimum de  $G$  est au moins  $l$ .
- (ii) Deux  $(\leq l + k - 1)$ -sommets ne sont pas adjacents.

**Démonstration.**

- (i) Soit  $L$  une  $l$ -assignation et soit  $v$  un  $(\leq l - 1)$ -sommets. Par minimalité de  $G$ , notons  $c$  une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G - v$ . Puisque  $v$  possède au plus  $l - 1$  voisins dans  $G$ , il existe une couleur, disons  $\alpha$ , qui n'est attribuée à aucun des voisins de  $v$ . Colorer  $v$  avec  $\alpha$  fournit donc une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ .

Ainsi  $G$  est  $k$ -improprement  $l$ -choisissable, une contradiction.

- (ii) Soit  $L$  une  $l$ -assignation et supposons, par l'absurde, que  $u$  et  $v$  soient deux voisins de degré au plus  $l + k - 1$ . Par minimalité de  $G$ , soit  $c$  une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G - \{uv\}$ . Alors  $c$  est une  $L$ -coloration de  $G$  telle que l'impropreté de chaque sommet soit au plus  $k$ , sauf éventuellement celle de  $u$  et de  $v$  qui peut être  $k + 1$ . Mais dans ce cas le lemme 12 permet de recolorer ces sommets et d'obtenir ainsi une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ .

Ainsi  $G$  est  $k$ -improprement  $l$ -choisissable, une contradiction. □

**Définition 8.** Soit  $G$  un graphe  $(k, l)$ -minimal. Le processus suivant est appliqué à  $G$ .

- (i) Chaque arête  $uv$  où  $v$  est un  $(\leq l + k - 1)$ -sommets est orientée de  $u$  vers  $v$ .
- (ii) Tant qu'il existe un  $i$ -sommets  $v$  avec  $l + k \leq i < l + k + \frac{k}{l}$ , degré externe exactement  $i - l + 1$  et degré interne zéro, l'une de ses arêtes incidentes non orientées  $uv$  est orientée de  $u$  vers  $v$ .

Le graphe orienté  $D$  induit par les arêtes orientées est appelé *graphe de déchargement* de  $G$ .

La remarque suivante découle directement de la définition d'un graphe de déchargement.

**Remarque 1.**

- Seuls les sommets de degré strictement inférieur à  $l + k + \frac{k}{l}$  peuvent avoir un degré interne strictement positif dans  $D$ .
- Pour  $i \leq l + k - 1$ , le degré interne dans  $D$  de tout  $i$ -sommets est exactement  $i$ .

**Définition 9.** Une quasi-arborescence enracinée en  $u$  est une  $(k, l)$ -quasi-arborescence si, et seulement si,

- le degré externe de chaque sommet est au plus  $\max\{2, 2k - 1\}$ ; et
- le degré interne de chaque feuille est au plus  $l + k - 1$ .

Généralisons à présent les lemmes 5 et 6.

**Lemme 14.** Soient un entier  $k \geq 2$  et  $Q$  une  $(k, l)$ -quasi-arborescence enracinée en  $u$ . Soit  $L$  une assignation de listes pour  $Q$  telle que  $|L(v)| \geq \max\{1, d_Q(v) - k + 1\}$  si  $v$  est une feuille et  $|L(v)| \geq 2$  sinon. Notons  $S$  l'ensemble des feuilles de degré interne au moins  $k + 1$  dans  $Q$  (et qui possède donc une liste de couleurs de taille au moins deux). Toute  $L$ -coloration des feuilles s'étend en une  $L$ -coloration de  $Q$  telle que

- l'impropreté de  $u$  est au plus  $k - 1$ ; et
- pour tout sommet  $v \notin S$ ,  $\text{im}(v) \leq k$ .

De plus, quitte à recolorer des sommets de  $S$ , cette  $L$ -coloration de  $Q$  peut être rendue  $k$ -impropre.

**Démonstration.** Par induction sur le nombre de sommets de  $Q$ , le résultat étant trivialement vrai si  $|V(Q)| = 1$ .

Supposons à présent que  $|V(Q)| > 1$  et que le résultat est vrai pour toutes les  $(k, l)$ -quasi-arborescences avec moins de sommets que  $Q$ . Soient  $v_1, v_2, \dots, v_s$  les voisins externes de  $u$

dans  $Q$ . Le graphe orienté  $Q - u$  est l'union de  $s$   $(k, l)$ -quasi-arborescences  $Q_i$  enracinées en  $v_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . En outre, ces quasi-arborescences sont sommet-disjointes, sauf éventuellement sur des feuilles. Soit  $c$  une  $L$ -coloration des feuilles de  $Q$ .

Par l'hypothèse d'induction, il est possible d'étendre  $c$  en une  $L$ -coloration de chaque  $Q_i$  telle que  $\text{im}(v_i) \leq k - 1$ . Notons que  $\text{im}_Q(x) = \text{im}_{Q_i}(x) \leq k$  pour tout sommet de  $Q_i$  qui n'est pas une feuille, et  $\text{im}_Q(x) \leq k$  pour toute feuille qui n'est pas dans  $S$ . L'un au moins des couleurs de  $L(u)$ , disons  $\alpha$ , est attribuée à au plus  $k - 1$  voisins de  $u$  puisque  $d_Q(u) \leq 2k - 1$ . Par conséquent, poser  $c(u) := \alpha$  fournit la première coloration annoncée dans le lemme.

Pour la seconde, il suffit de remarquer que toute feuille  $f$  de  $S$  d'impropreté au moins  $k + 1$  peut être recolorée en vertu du lemme 12, puisque  $d_Q(f) - |L(f)| + 2 \leq d_Q(f) - d_Q(f) + k - 1 + 2 = k + 1$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

Le résultat précédent n'est plus vrai lorsque  $k$  vaut un.

**Lemme 15.** *Soit  $Q$  une  $(1, l)$ -quasi-arborescence enracinée en  $u$  et soit  $L$  une assignation de listes pour  $Q$  telle que  $|L(v)| \geq 2$  si  $v$  n'est pas une feuille, et  $|L(v)| \geq d_Q(v)$  sinon. Notons  $S$  l'ensemble des feuilles de degré interne au moins deux. Soit  $c$  une  $L$ -coloration des feuilles. L'une au moins des deux assertions suivantes est vraie.*

- (i) *La coloration  $c$  s'étend en une  $L$ -coloration de  $Q$  telle que  $\text{im}(u) = 0$  et  $\text{im}(v) \leq 1$  si  $v \notin S$ .*
- (ii) *La coloration  $c$  s'étend en deux  $L$ -colorations différentes  $c_1$  et  $c_2$  de  $Q$  telle que  $c_1(v) = c_2(v)$  si  $v \neq u$  et  $\text{im}^{c_i}(v) \leq 1$  si  $v \notin S$ .*

*En outre, quitte à recolorer des sommets de  $S$ , toutes ces  $L$ -colorations peuvent être rendues 1-impropres.*

*Enfin, si  $|L(u)| \geq 3$  alors l'assertion (i) est vraie.*

**Démonstration.** Par induction sur le nombre de sommets, le résultat étant trivialement vrai si  $|V(Q)| = 1$ .

Le graphe  $Q - u$  est l'union de deux  $(1, l)$ -quasi-arborescences  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement enracinées en  $v_1$  et  $v_2$ . Elles sont sommet-disjointes sauf éventuellement sur des feuilles. Soit  $c$  une  $L$ -coloration des feuilles de  $Q$ . D'après l'hypothèse d'induction,  $c$  s'étend à  $Q_1$  et  $Q_2$ . Pour chaque sommet  $v$  de  $Q - S$ ,  $\text{im}_Q(v) = \text{im}_{Q_i}(v) \leq 1$ .

Si l'un au moins des  $Q_i$  satisfait (ii), ou si  $|L(u)| \geq 3$ , supposons, sans perte de généralité,  $\{c(v_1), c(v_2)\} \neq L(u)$  : il est alors possible d'étendre  $c$  en une  $L$ -coloration de  $Q$  satisfaisant (i).

Si  $Q_1$  et  $Q_2$  satisfont tous deux (i), alors soit  $c(v_1) = c(v_2)$  et alors choisir  $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v_1)\}$  fournit une  $L$ -coloration de  $Q$  satisfaisant (i) ; soit colorer  $u$  avec alternativement avec les deux couleurs de sa liste fournit les deux colorations de (ii).

A présent, il est possible de recolorer avec impropreté zéro chaque feuille  $f \in S$  qui a impropreté au moins deux dans  $Q$  en vertu du lemme 12, puisque  $d_Q(f) - |L(f)| + 2 \leq 2$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

Ces résultats permettent de mieux appréhender la structure des graphes de déchargement. Le lemme suivant généralise la proposition 14.

**Lemme 16.** *Soit  $D$  une graphe de déchargement d'un graphe  $(k, l)$ -minimal  $G$ .*

- (i) *Le degré externe dans  $D$  de tout sommet  $u$  avec  $d(u) \in \{l + k, \dots, l + 2k - 1\}$  est au plus  $d(u) - l + 1$ . En particulier,  $D$  est acyclique.*



(ii) Pour tout sommet  $u$  de degré interne un,  $A_D^+(u)$  est une  $(k, l)$ -quasi-arborescence. En particulier, le degré des feuilles dans  $A_D^+(u)$  est au plus  $l + k - 1$ .

**Démonstration.** (ii) est une conséquence directe de (i). Prouvons (i).

Soit  $L$  une  $l$ -assignation pour  $G$ . Notons en premier lieu que  $D$  ne possède pas de 2-circuit puisque deux  $(\leq l + k - 1)$ -sommets ne sont pas adjacents d'après le lemme 13. Remarquons de plus qu'afin de créer un circuit dans  $D$ , il est nécessaire de créer un sommet  $u$  de degré externe dans  $D$  au moins  $d(u) - l + 2$ . Supposons par l'absurde que  $D$  contienne un sommet  $u$  de degré externe au moins  $d(u) - l + 2$  et soit  $D'$  le graphe orienté obtenu juste après avoir créé le premier tel sommet  $u$ . Soit  $u \rightarrow v$  la dernière arête qui a été orienté dans  $D'$ . Le sommet  $u$  possède  $d(u) - l + 2$  voisins externes dans  $D'$  (en comptant  $v$ ) alors que  $v$  en possède  $d(v) - l + 1$ . Divisons l'étude en deux cas selon que l'orientation de l'arête  $uv$  crée un circuit (qui sera nécessairement le premier) ou non.

**Premier cas :** l'orientation de  $uv$  crée un circuit  $C$ . Soit  $w$  le voisin interne de  $u$  dans  $C$ . Posons  $Q_1 := A_{D'-wu}^+(v)$ ,  $Q_2 := A_{D'-uv}^+(u)$  et  $Q := Q_1 \cup Q_2$ . Notons que  $Q_1$  et  $Q_2$  sont des  $(k, l)$ -quasi-arborescences qui sont sommet-disjointes, sauf éventuellement sur des feuilles. En particulier, le degré externe dans  $D'$  de tout sommet interne de  $Q_1$  et de  $Q_2$  est au plus  $d_G(x) - l + 1$ . Plus précisément, tout sommet interne  $x \neq w$  satisfait  $d_{D'}^+(x) = d_G(x) - l + 1$  alors que  $d_Q^+(w) = d_G(w) - l$  et pour tout sommet interne  $x$   $d_{D'}^-(x) = 1$ . Soient  $F$  l'ensemble des feuilles de  $Q$ ,  $S$  l'ensemble des feuilles de degré interne au moins  $k+1$  dans  $Q$  et  $\bar{S} = F \setminus S$ . Posons  $\hat{Q} := Q - \bar{S}$ . Par minimalité de  $G$ , soit  $c$  une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G' := G - \hat{Q}$ . Soit  $f \in \bar{S}$  : si l'impropreté de  $f$  est au moins  $k - d_Q^-(f) + 1$ , alors en vertu du lemme 12  $f$  peut être recoloré avec impropreté 0 puisque  $d_{G'}(f) - |L(f)| + 2 = d_G(f) - d_Q^-(f) - l + 2 \leq l + k - 1 - d_Q^-(f) - l + 2 = k - d_Q^-(f) + 1$ . Soit  $L_1$  l'assignation de listes suivante pour  $Q_1$  :  $L_1(x) := L(x) \setminus \{\alpha : \exists z \in N_{G-Q_1}(x), c(z) = \alpha\}$  si  $x \notin \bar{S}$ , et  $L_1(x) := \{c(x)\}$  sinon. Pour tout sommet interne  $x \neq w$

$$|L_1(x)| \geq l - (d_G(x) - d_{Q_1}(x)) = l - d_G(x) + d_G(x) - l + 1 + 1 = 2$$

et puisque  $d^+(w) = d_G(w) - l$  mais que  $w$  n'est pas encore coloré

$$|L_1(w)| \geq l - (d_G(w) - d_{Q_1}(w)) + 1 = l - d_G(w) + d_G(w) - l + 1 + 1 = 2.$$

Pour la racine  $v$ ,  $d^-(v) = 0$  mais  $v$  n'est pas coloré donc

$$|L_1(v)| \geq l - (d_G(v) - d_{Q_1}(v)) + 1 = l - d_G(v) + d_G(v) - l + 1 + 1 = 2,$$

et pour une feuille  $f \in S$

$$|L_1(f)| \geq l - d_G(f) + d_Q(f) \geq l - (l + k - 1) + d_Q(f) = d_Q(f) - k + 1.$$

Finalement, si  $f \in \bar{S}$  alors  $|L_1(f)| = 1 \geq \max\{1, d_Q(f) - k + 1\}$ .

Il est ainsi possible d'appliquer les lemmes 14 et 15. À cette fin, commençons par  $L_1$ -colorer toutes les feuilles de  $Q_1$ .

Supposons d'abord  $k \geq 2$ . D'après le lemme 14, il existe une  $L_1$ -coloration  $c_1$  de  $Q_1$  telle que  $\text{im}_{Q_1}^{c_1}(v) \leq k - 1$ . Notons que  $c_1$  étend  $c$  en une  $L$ -coloration de  $G - Q_2$  telle que l'impropreté de chaque sommet soit au plus  $k$  sauf éventuellement celle de certains sommets de  $S$ . De plus,  $\text{im}_{G-Q_2}(v) \leq k - 1$ . Soit à présent  $L_2$  l'assignation de listes suivantes pour  $Q_2$ .  $L_2(u) := L(u) \setminus \{\alpha : \exists z \neq v \in N_{G-Q_2}(u), c(z) = \alpha\}$ ,  $L_2(x) := \{c(x)\}$  si  $x$  est une feuille et  $L_2(x) := L(x) \setminus \{\alpha : \exists z \in N_{G-Q_2}(x), c(z) = \alpha\}$  sinon. Notons que  $|L_2(u)| \geq 2$ . Appliquons alors le lemme 14 afin d'obtenir une  $L_2$ -coloration de  $Q_2$  et donc une  $L$ -coloration

de  $G$ . L'impropreté de chaque sommet n'appartenant pas à  $S \cup \{u, v\}$  est au plus  $k$ . De plus  $\text{im}_G(u) \leq \text{im}_{Q_2}(u) + 1 \leq k - 1 + 1 = k$  puisque aucune couleur de  $L_2(u)$  n'est attribuée à un voisin de  $u$  dans  $G - (Q_2 - v)$ . De la même façon,  $\text{im}_G(v) \leq \text{im}_{G-Q_2}(v) + 1 \leq k$  puisque la couleur de  $v$  a été supprimée de la liste de ses voisins dans  $Q_2 - u$ . Si l'impropreté de  $f \in S$  est au moins  $k + 1$ ,  $f$  est recoloré avec impropreté 0 grâce au lemme 12 puisque  $d_G(f) - |L(f)| + 2 \leq l + k - 1 - l + 2 = k + 1$ . Ceci permet d'obtenir une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$ .

Supposons à présent  $k = 1$ . En vertu du lemme 15, il existe une  $L_1$ -coloration de  $G - Q_2$  telle que l'impropreté de chaque sommet n'appartenant pas à  $S$  soit au plus un. De plus, soit l'impropreté de  $v$  est 0 **(i)**, soit l'impropreté de  $v$  est un et alors  $v$  peut indifféremment être coloré avec les deux couleurs de sa liste **(ii)**. Notons que si  $v$  a un voisin distinct de  $u$  qui est en outre un sommet interne de  $Q_2$  alors  $|L_1(v)| \geq 3$  et nous pouvons donc supposer que  $v$  satisfait **(i)**. En définissant  $L_2$  comme précédemment, le lemme 15 s'applique à  $Q_2$  et fournit une  $L_2$ -coloration de  $Q_2$  et donc une  $L$ -coloration de  $G$  telle que  $u$  satisfasse **(i)** ou **(ii)**. L'impropreté de chaque sommet n'appartenant pas à  $S \cup \{u, v\}$  est au plus un. Si  $v$  satisfait **(i)**, alors soit  $u$  satisfait aussi **(i)** soit  $u$  satisfait **(ii)** et dans ce cas nous pouvons supposer que  $u$  et  $v$  sont colorés différemment. Dans tous les cas ces deux sommets ont impropreté au plus un dans  $G$ . Si  $v$  satisfait **(ii)**, alors l'unique voisin  $v$  dans  $Q_2$  est  $u$ . Nous pouvons ainsi supposer que  $u$  et  $v$  sont colorés différemment, et donc qu'ils ont impropreté au plus un dans  $G$ .

Finalement, toute feuille de  $S$  d'impropreté au moins deux peut être recolorée en vertu du lemme 12, ce qui fournit une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G$ .

Ainsi  $G$  est  $k$ -improprement  $l$ -choisissable, une contradiction.

**Second cas** : il n'y a pas de circuit dans  $D'$ . Alors  $Q := A_{D'}^+(u)$  est une quasi-arborescence. En outre, le degré externe de tout sommet interne  $v$  est au plus (et donc exactement)  $d(v) - l + 1$ . Soient  $v_1, \dots, v_s$  les voisins externes de  $u$ , posons  $Q_j := A_{D'}^+(v_j)$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Les  $Q_i$  sont des  $(k, l)$ -quasi-arborescences qui sont sommet-disjointes sauf éventuellement sur des feuilles. Soient  $F$  l'ensemble des feuilles de  $Q$ ,  $S$  l'ensemble des feuilles de degré interne au moins  $k + 1$  dans  $Q$  et  $\bar{S} := F \setminus S$ . Posons  $\bar{Q} := Q - \bar{S}$ . Soit  $L$  une  $l$ -assignation pour  $G$ . Par minimalité de  $G$ , soit  $c$  une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G' := G - \bar{Q}$ . Soit  $f$  une feuille de  $\bar{S}$ . Si l'impropreté de  $f$  est au moins  $k - d_Q(f) + 1$ , il est possible de recolorer  $f$  avec impropreté 0 grâce au lemme 12 puisque  $d_{G'}(f) - |L(f)| + 2 \leq d_G(f) - d_Q(f) - l + 2 \leq l + k - 1 - d_Q(f) - l + 2 = k - d_Q(f) + 1$ .

Pour tout sommet  $v \in Q$ , soit  $L'(v) := L(v) \setminus \{\alpha : \exists w \in N_G(v), c(w) = \alpha\}$  si  $v \notin \bar{S}$  et  $L'(v) := \{c(v)\}$  sinon. Notons que pour tout sommet interne  $v$

$$|L'(v)| \geq l - (d_G(v) - d_Q(v)) = l - d_G(v) + d_Q(v) - l + 1 + 1 = 2.$$

Pour une feuille  $f \in S$

$$|L'(f)| \geq l - d_G(f) + d_Q(f) \geq l - (l + k - 1) + d_Q(f) = d_Q(f) - k + 1.$$

Supposons d'abord  $k \geq 2$ , et  $L'$ -colorons toutes les feuilles. Le lemme 14 permet d'étendre cette coloration en une  $L'$ -coloration de chaque  $Q_i$ , et, quitte à recolorer des feuilles de  $S$ , il existe une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G - u$  telle que  $\text{im}(v_j) \leq k - 1$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

Remarquons que  $|L'(u)| \geq |L(u)| - d(u) + d_{D'}^+(u) = l - d(u) + d(u) - l + 2 \geq 2$ . De plus,  $u$  possède  $d^+(u) = d(u) - l + 2 \leq 2k + 1$  voisins externes dans  $D'$ . Il existe donc une couleur de  $L'(u)$ , disons  $\alpha$ , qui est attribuée à  $k$  voisins externes de  $u$ . Donc poser  $c(u) := \alpha$  fournit une  $L$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$  par définition de  $L'$ .

Supposons maintenant  $k = 1$  et  $L'$ -colorons toutes les feuilles. Le lemme 15 permet d'étendre cette coloration en une  $L'$ -coloration de chaque  $Q_i$ , et quitte à recolorer des feuilles de  $S$ , il existe une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G - u$  telle que, pour chaque  $v_j$ , soit  $\text{im}(v_j) = 0$  soit  $v_j$  peut indifféremment être recoloré avec une autre couleur de  $L'(v_j)$ .

Les mêmes calculs que précédemment montrent l'existence d'une couleur de  $L'(u)$ , disons  $\alpha$ , attribuée à au plus un voisin de  $u$ , disons  $v_i$ . Posons  $c(u) := \alpha$ . Si  $v_i$  satisfait la première condition, nous obtenons une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G$ . Si  $v_i$  satisfait la seconde condition nous pouvons supposer  $c(u) \neq c(v)$  et donc obtenir également une  $L$ -coloration 1-impropre de  $G$ .

Ainsi  $G$  est  $k$ -improprement  $l$ -choisissable, une contradiction.  $\square$

**Démonstration du théorème 15.** Soit  $G$  un graphe  $(k, l)$ -minimal et soit  $D$  un graphe de déchargement de  $G$ . Au départ, chaque sommet possède une charge  $w(v) = d(v)$ . Ensuite, la règle de déchargement suivante est appliquée : chaque sommet donne  $\frac{k}{l+k}$  à chacun de ses voisins externes.

Examinons la nouvelle charge  $w'(v)$  d'un sommet  $v$  en fonction de son degré.

- Si  $d(v) \leq l + k - 1$  le degré interne de  $v$  est  $d(v)$  donc sa nouvelle charge est  $w'(v) = d(v) + \frac{d(v)k}{l+k} \geq l + \frac{lk}{l+k}$ .
- Si  $d(v) \in \{l + k, \dots, l + k + \frac{k}{l}\}$  alors le degré externe de  $v$  est soit au plus  $d(v) - l$  et donc sa nouvelle charge est au moins  $d(v) - (d(v) - l) \times \frac{k}{l+k} = \frac{ld(v)}{l+k} + \frac{lk}{l+k} \geq l + \frac{lk}{l+k}$ , soit  $d(v) - l + 1$  d'après le lemme 16. Dans ce cas, par définition d'un graphe de déchargement, le degré interne de  $v$  est un donc sa nouvelle charge est

$$w'(v) = d(v) - (d(v) - l + 1) \times \frac{k}{l+k} + \frac{k}{l+k} = d(v) - (d(v) - l) \times \frac{k}{l+k} \geq l + \frac{lk}{l+k}.$$

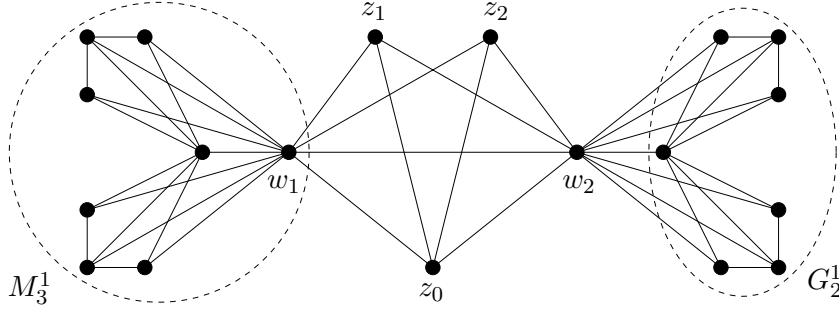
- Si  $d(v) \in \{l + k + \frac{k}{l}, \dots, l + 2k - 1\}$ , alors d'après le lemme 16, le degré externe de  $v$  est au plus  $d(v) - l + 1$ . Donc  $w'(v) \geq d(v) - (d(v) - l + 1) \times \frac{k}{l+k} = \frac{ld(v)}{l+k} + \frac{kl - k}{l+k} \geq \frac{l^2 + 2kl}{l+k} = l + \frac{kl}{l+k}$ .
- Si  $d(v) \geq l + 2k$ , alors  $w'(v) \geq d(v)(1 - \frac{k}{l+k}) = \frac{ld(v)}{l+k} \geq \frac{l^2 + 2kl}{l+k} = l + \frac{kl}{l+k}$ .

$$\text{Ainsi } \text{Mad}(G) \geq \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} w'(v) \geq l + \frac{kl}{l+k}.$$

$\square$

### 2.3.2. Borne supérieure

Dans cette sous-section, nous construisons, pour tout entier  $l \geq 2$  and tout entier  $k \geq 1$ , un graphe  $G_l^k$  qui n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -colorable. Son degré moyen maximum fournit ainsi une borne supérieure pour  $M(k, l)$ . Pour construire  $G_2^k$ , prenons  $k + 1$  copies de  $H_k$  (défini dans la sous-section 2.2.1) et identifions leur sommet  $v$ . Le graphe  $G_l^k$  pour  $l \geq 3$  est définie récursivement. En premier lieu, créons le graphe  $M_l^k$  en prenant  $k$  copies de  $G_{l-1}^k$  et en ajoutant un sommet  $w$  relié à tous les autres sommets. Il suffit alors de prendre  $l - 1$  copies  $M^1, \dots, M^{l-1}$  de  $M_l^k$ , de relier tous les sommets  $w_1, \dots, w_{l-1}$  (de sorte qu'ils induisent un graphe complet d'ordre  $l - 1$ ), puis d'ajouter  $k + 2$  sommets  $z_0, z_1, \dots, z_{k+1}$  chacun étant relié à chaque  $w_i$  pour  $i \in \{1, \dots, l - 1\}$ . Enfin les arêtes  $z_0 z_i$  pour  $i \in \{1, \dots, k + 1\}$  sont ajoutées (voir figure 2.3.2).

FIG. 2.2. Le graphe  $G_3^1$ .

**Lemme 17.** Pour tout entier  $l \geq 2$  et tout entier  $k \geq 1$ , le graphe  $G_l^k$  n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -colorable.

**Démonstration.** Le résultat est vrai pour  $G_2^k$ . Supposons le résultat vrai pour  $l - 1 \geq 2$  et montrons-le pour  $G_l^k$ . Tout d'abord, notons que dans toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $M^i$ , l'impropreté du sommet  $w_i$  est  $k$ . En fait,  $w_i$  possède un voisin de sa couleur dans chaque copie de  $G_{l-1}^k$  puisque sinon  $G_{l-1}^k$  serait  $k$ -improprement  $(l - 1)$ -colorable. Donc, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, l - 1\}$ ,  $w_i$  ne peut avoir aucun sommet de sa couleur dans  $G_l^k - M^i$ . En particulier, comme le sous-graphe induit par  $w_1, \dots, w_{l-1}$  est complet, tous les  $z_i$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, k + 1\}$ , doivent être colorés de la même couleur. Mais dans ce cas l'impropreté de  $z_0$  est  $k + 1$ .  $\square$

**Lemme 18.** Le nombre de sommets de  $G_l^k$  est

$$n_l^k := 2l + (l + 1)k + \sum_{i=2}^l \frac{(l - 1)!}{(l - i)!} k^i.$$

En particulier, en tant que polynôme en  $k$ ,  $n_l^k \sim (l - 1)!k^l$ .

**Démonstration.** Par définition,  $n_2^k = k^2 + 3k + 3$  et  $\forall l \geq 3$ ,  $n_l^k = (k \times n_{l-1}^k + 1) \times (l - 1) + k + 2$ .  $\square$

**Lemme 19.** La somme des degrés des sommets de  $G_l^k$ , notée  $s_l^k$ , est un polynôme en  $k$  tel que  $s_l^k \sim 2l!k^l$ .

**Démonstration.** Par définition,  $s_2^k = 4k^2 + 10k + 6$  et  $s_l^k = (l - 1)(k \times s_{l-1}^k + 2k \times n_{l-1}^k + l + k) + (l + 1)k + 2l$  si  $l \geq 3$ . Donc  $s_l^k$  est un polynôme en  $k$  de degré  $l$ . De plus, en notant  $c_l^k$  son coefficient dominant,  $c_2^k = 4$  et  $\forall l \geq 3$ ,  $c_l^k = (l - 1) \times c_{l-1}^k + 2k \times (l - 1)!$ . Donc  $c_l^k = 2l!$ .  $\square$

**Proposition 15.** Pour tout entier fixé  $l \geq 2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Mad}(G_l^k) = 2l.$$

**Démonstration.** Le degré moyen maximum de  $G_l^k$  est son degré moyen. Donc, d'après les lemmes 18 et 19,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Mad}(G_l^k) = 2 \frac{l!}{(l - 1)!} = 2l.$$

$\square$

Le corollaire 1 découle immédiatement du théorème 15 et de la proposition 15.

## 2.4. Application aux graphes de genre $r \geq 1$

En vertu de la formule d'Euler généralisée, tout graphe  $H$  de genre  $r$  et de maille au moins  $g$  vérifie

$$\text{Ad}(H) \leq \frac{2g}{g-2} + \frac{4g(r-1)}{(g-2)|V(H)|}.$$

Ceci permet notamment d'étendre le corollaire 2 des graphes planaires aux graphes toriques (c'est-à-dire aux graphes de genre un), et d'obtenir le corollaire suivant.

**Corollaire 3.** *Tout graphe torique sans triangle est 1-improprement 4-choisissable.*

**Démonstration.** Le degré moyen maximum d'un graphe torique sans triangle est au plus  $\frac{2 \times 4}{4-2} = 4 < \frac{24}{5} = 4 + \frac{4 \times 1}{4+1}$ .  $\square$

Précisons que la question de savoir si tous les graphes toriques sont 1-improprement 4-colorables est toujours ouverte.

Intéressons-nous à présent aux graphes de genre au moins deux. Miao [Mia03] a prouvé les résultats suivants pour les graphes  $G$  de genre  $r \geq 2$  :

- si  $G$  possède au moins 21 faces et si sa maille est au moins  $r+9$  alors  $G$  est 1-improprement 2-choisissable ;
- si  $G$  possède au moins 13 faces et si sa maille est au moins  $\lceil \frac{6}{5}(r+5) \rceil$  alors  $G$  est 2-improprement 2-choisissable ; et
- si  $G$  possède au moins 14 faces et si sa maille est au moins  $r+5$  alors  $G$  est 3-improprement 2-choisissable.

Nous allons montrer comment nos résultats améliorent ceux-ci. Pour tout  $g$ , soit  $f(\text{Ad}, g) := 2 \sum_{i=0}^{s-1} (\text{Ad} - 1)^i$  si  $g = 2s$  et  $f(\text{Ad}, g) := 1 + \text{Ad} \sum_{i=0}^{s-1} (\text{Ad} - 1)^i$  si  $g = 2s + 1$ . Alon, Hoory et Linial [AHL02] ont prouvé que tout graphe  $H$  de maille  $g$  satisfait  $|V(H)| \geq f(\text{Ad}, g)$ . Par conséquent, le degré moyen maximum de tout graphe  $G$  de genre  $r$  et de maille  $g$  satisfait

$$f(\text{Mad}(G), g) \left( \text{Mad}(G) - \frac{2g}{g-2} \right) - \frac{4(r-1)g}{g-2} \leq 0.$$

Il est donc aisé de déduire des conditions sur la maille et le genre permettant d'utiliser le théorème 15, comme par exemple le corollaire suivant.

**Corollaire 4.** *Soit  $G$  un graphe de genre  $r \geq 2$ .*

- *Si la maille de  $G$  est au moins  $r + 8$  alors  $G$  est 1-improprement 2-choisissable.*
- *Si la maille de  $G$  est au moins  $r + 6$  alors  $G$  est 2-improprement 2-choisissable.*
- *Si la maille de  $G$  est au moins  $r + 5$  alors  $G$  est 3-improprement 2-choisissable.*

## 2.5. Conclusion

L'étude de la coloration impropre des graphes de densité bornée a notamment permis d'obtenir des corollaires intéressants concernant les graphes de genre borné et de maille fixée. Plusieurs questions restent à résoudre, en particulier déterminer la valeur exacte de  $M(k, 2)$  et de  $g_k$  pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Cela permettrait de savoir si la planarité et la maille jouent effectivement un rôle pour la coloration impropre ou si, au contraire, la contrainte plus faible de la densité suffit à déterminer la colorabilité du graphe.

Un autre problème intéressant est de déterminer s'il existe ou non une différence entre la 2-coloration (impropre) et la 2-choisissabilité (impropre) pour les graphes planaires de maille donnée, ou plus généralement pour les graphes de densité bornée. Par exemple, existe-t-il un

graphe planaire de maille 7 qui soit 1-improprement 2-colorable, mais pas 1-improprement 2-choisissable ?

Enfin, rappelons ici la question de la 4-coloration 1-impropre des graphes toriques.

**Problème 3.** *Tout graphe torique est-il 1-impropre 4-colorable ? Tout graphe torique est-il 1-impropre 4-choisissable ?*



# Coloration impropre des graphes d'intersection de disques unitaires

Les résultats de la section 3.2 de ce chapitre ont été obtenus avec Ross Kang et Frédéric Havet [HKS05] (voir [HKS06] pour une version plus complète de l'étude présentée ici); ceux des sections 3.3 et 3.4 avec Ross Kang et Tobias Müller [KMS05a, KMS06].

### 3.1. Introduction

Nous étudions dans cette partie le cas fondamental où la zone de bruit de chaque antenne est modélisée par un disque de rayon fixé  $R$ . Le graphe de bruit obtenu est alors un graphe d'intersection de disques unitaires.

**Définition 10.** Un graphe  $G$  est un *graphe d'intersection de disques* si, et seulement si, il est possible d'associer à chaque sommet de  $G$  un disque du plan de sorte que les intérieurs de deux disques s'intersectent si, et seulement si, les sommets correspondants sont voisins dans  $G$ .

Un graphe  $G$  est un *graphe d'intersection de disques unitaires* si, et seulement si, il est possible d'associer à chaque sommet de  $G$  un disque du plan de rayon un, de sorte que les intérieurs de deux disques s'intersectent si, et seulement si, les sommets correspondants sont voisins dans  $G$ . Par homothétie, il est équivalent de demander que tous les disques aient un même rayon  $R$ . Une configuration de disques est appelée une *représentation* ou une *réalisation* de son graphe d'intersection.

L'étude des graphes d'intersection de disques provient principalement des applications aux réseaux de télécommunication, et en particulier des applications aux diverses variantes du problème d'allocation de fréquences. Notons ici que déterminer si un graphe est un graphe d'intersection de disques unitaires et fournir une représentation le cas échéant est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet en général [BK98, HK01]. Toutefois, pour les applications, une réalisation du graphe est donnée.

Plus généralement, si  $\Sigma$  est une collection d'ensembles alors pour toute famille  $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ , le *graphe d'intersection de  $\mathcal{F}$* , noté  $\Omega(\mathcal{F})$ , est le graphe dont les sommets sont les éléments de  $\mathcal{F}$ , et dont les arêtes sont les couples d'éléments distincts de  $\mathcal{F}$  dont l'intersection est non vide. La *classe d'intersection* de  $\Sigma$ , notée  $\Omega(\Sigma)$ , est la classe des graphes  $\{\Omega(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq \Sigma\}$ . Une classe de graphes  $\mathcal{G}$  est une *classe de graphes d'intersection* si, et seulement si,  $\mathcal{G}$  est isomorphe à  $\Omega(\Sigma)$  pour une certaine collection  $\Sigma$ . Les graphes d'intersection ont donné lieu à de nombreuses études (voir par exemple [MM99]). Ainsi la classe des graphes d'intersection de disques unitaires est-elle la classe  $\Omega(\Sigma)$  où  $\Sigma$  est l'ensemble des disques unitaires ouverts du



plan. Cette classe est notée  $\mathcal{UD}$ . La classe des graphes d'intersection de disques (i.e. la classe  $\Omega(\Sigma)$  où  $\Sigma$  est l'ensemble des disques ouverts du plan) est, elle, notée  $\mathcal{D}$ . Il est possible de travailler dans d'autres dimensions : la classe  $\Omega(\Sigma)$  où  $\Sigma$  est l'ensemble des boules ouvertes de  $\mathbb{R}^3$  est notamment étudiée pour ses applications dans l'analyse des molécules [HKC83]. Dans le cas où  $\Sigma$  est l'ensemble des intervalles unitaires ouverts de  $\mathbb{R}$ , la classe obtenue est celle des graphes d'intervalles unitaires, notée  $\mathcal{UI}$ . La classe des graphes d'intervalles, notée  $\mathcal{I}$ , est définie de façon analogue. Ces classes de graphes sont utilisées pour modéliser des problèmes d'allocation de fréquences sur des terrains longilignes, mais aussi en génétique [WG86] et ordonnancement [Gol80]. La classe des graphes planaires, notée  $\mathcal{P}$ , est incluse dans la classe  $\mathcal{D}$ . L'étoile  $K_{1,6}$  est un graphe planaire d'intersection d'intervalles, mais n'est pas un graphe d'intervalles unitaires, le cycle  $C_4$  est un graphe planaire d'intersection de disques unitaires mais n'est pas un graphe d'intervalles. En outre, le graphe complet  $K_5$  est un graphe d'intervalles unitaires (donc un graphe d'intervalles et un graphe d'intersection de disques unitaires), et n'est pas planaire. Ainsi les classes  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{UD}$  et  $\mathcal{P}$  ne sont-elles pas comparables pour la relation d'inclusion. La figure 3.1 illustre les relations entre ces classes.

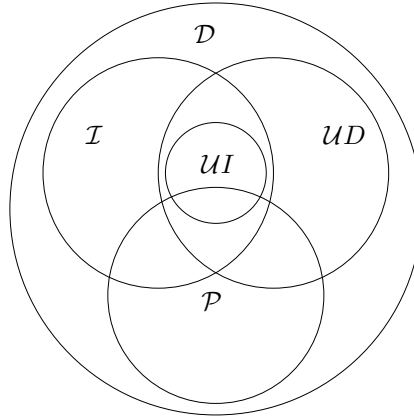


FIG. 3.1. Relations entre les classes  $\mathcal{UI}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{UD}$ ,  $\mathcal{D}$  and  $\mathcal{P}$ .

Contrairement au cas général, déterminer la taille de la plus grande clique d'un graphe d'intersection de disques n'est pas un problème  $\mathcal{NP}$ -complet. En outre, en vertu de propriétés élémentaires des configurations de disques dans le plan, tout graphe d'intersection de disques unitaires  $G$  avec au moins une arête vérifie  $\Delta(G) \leq 6\omega(G) - 7$  (il suffit de considérer des secteurs d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ), ce qui permet d'avoir une 6-approximation pour le nombre chromatique (en vertu de la proposition 2). Il est possible de faire mieux, et une 3-approximation a été donnée par Peeters [Pee91] ainsi que par Gräf, Stumpf et Weißenfels [GSW98].

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante : dans la prochaine section, nous prouvons que la  $l$ -coloration  $k$ -impropre des graphes d'intersection de disques unitaires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour tout couple d'entiers fixé  $(l, k)$  avec  $l \geq 2$  et  $k \geq 1$ . Nous introduisons ensuite la coloration impropre pondérée pour les sous-graphes du réseau triangulaire, et montrons à nouveau des résultats de complexité (le réseau triangulaire est souvent utilisé pour les réseaux d'antennes car c'est le moyen le plus efficace de couvrir le plan). En raison de ces résultats négatifs, nous étudions dans les sections 3.3 et 3.4 le rapport entre la taille de la plus grande clique et le nombre chromatique  $k$ -impropre dans les deux cas suivants : lorsque l'ensemble de sommets est un ensemble dénombrable de points "convenablement répartis" et une arête est présente si, et seulement si, deux points sont "suffisamment proches", et pour les

graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires. Le premier cas est une hypothèse raisonnable pour de grands réseaux de récepteurs, qui se justifie également sur le plan théorique par les résultats de complexité prouvés dans la section 3.2. Les ensembles quelconques de points seront d'abord étudiés, puis les résultats seront affinés pour les ensembles de points dont la distribution est uniforme, et les réseaux (en particulier le réseau triangulaire). De même, l'étude des graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires, selon le modèle développé par Penrose [Pen03], est un moyen intéressant d'obtenir des renseignements sur le problème général, qui est  $\mathcal{NP}$ -complet.

Précisons que nous ne connaissons pas d'approximation pour le nombre chromatique  $k$ -impropre des graphes d'intersection de disques unitaires autre que la 6-approximation triviale obtenue en multipliant la taille de la plus grande clique par  $\frac{6}{k+1}$ . Dans le cas aléatoire, les résultats obtenus dans la section 3.4 montrent que, pour un  $k$  fixé et un graphe aléatoire d'intersection de disques unitaires  $G_n$ , la valeur  $\frac{\omega(G_n)}{k+1} \times \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ , calculable en temps polynomial, est une approximation raisonnable de  $c_k(G_n)$  lorsque  $n$  est suffisamment grand (précisons que  $\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \approx 1,103 \ll 6$ ).

## 3.2. Complexité

### 3.2.1. Graphes d'intersection d'intervalles

**Proposition 16.** *Pour tout entier  $k$  fixé, il existe pour tout entier non nul  $l$  un graphe d'intervalles unitaires  $I_{k,l}$  qui n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -colorable, et tel que son degré maximum ainsi que la taille de sa plus grande clique soit  $l(k+1)$ .*

**Démonstration.** Soit  $I_{k,l}$  le graphe constitué d'une clique  $K$  de taille  $l(k+1)$  et d'un sommet  $u$  voisin d'exactly  $(l-1)(k+1)+1$  sommets de  $K$ .  $I_{k,l}$  est clairement un graphe d'intervalles unitaires. Supposons qu'il existe une  $l$ -coloration  $k$ -impropre  $c$  de  $I_{k,l}$ . Alors tout sommet de  $K$  a impropreté  $k$  dans  $K$ . Comme  $u$  possède  $(l-1)(k+1)+1$  voisins dans  $K$ , le sommet  $u$  possède dans  $K$  un voisin de chaque couleur, et donc quelle que soit la couleur de  $u$ , un sommet de  $K$  a impropreté au moins  $k+1$ , une contradiction.  $\square$

Cet exemple montre que la borne supérieure donnée par la proposition 2 est serrée pour la classe des graphes d'intervalles unitaires en général.

Au vu de cette proposition, il est naturel de se demander quelle est la complexité du problème de coloration  $k$ -impropre restreint à la classe  $\mathcal{UI}$ . Nous prouvons à présent, en donnant un algorithme de programmation dynamique, que ce problème est polynomial pour  $k$  et  $l$  fixé.

Une première remarque est qu'un graphe d'intervalles unitaires est *bi-simplicial*, c'est-à-dire que le voisinage de tout sommet peut être partitionné en deux cliques.

**Proposition 17.** *Étant donnés deux entiers  $k$  et  $l$ , tout graphe bi-simplicial  $G$  de degré maximum au moins  $(2l-1)(k+1)$  n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -colorable.*

**Démonstration.** Supposons que  $c$  soit une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $G$  et  $v$  un sommet de  $G$  de degré au moins  $(2l-1)(k+1)$ , tels que  $c(v) = 1$ . Soit  $H$  le sous-graphe de  $G$  induit par les voisins de  $v$  non colorés 1. La coloration  $c$  est une  $(l-1)$ -coloration  $k$ -impropre de  $H$ . De plus, comme  $\text{im}_c(v) \leq k$ ,  $H$  compte au moins  $(2l-1)(k+1) - k = 2(l-1)(k+1) + 1$  sommets. Le graphe  $G$  étant bi-simplicial,  $H$  peut être partitionné en deux cliques. L'une de ces deux cliques contient au moins  $(l-1)(k+1) + 1$  sommets, ce qui contredit le fait que  $H$  est  $k$ -improprement  $(l-1)$ -colorable.  $\square$

Il est bien connu que les graphes d'intervalles sont de graphes parfaits, donc en particulier tout graphe d'intervalles  $G$  vérifie  $\omega(G) = \chi(G)$  : il suffit de partir d'une représentation de  $G$  et d'appliquer une coloration gloutonne des sommets triés dans l'ordre de l'abscisse minimum de chaque intervalle. Le nombre de couleurs de cette coloration est égal à  $\omega(G)$  (et la coloration est donc optimale)

**Théorème 17.** *Soient  $k$  et  $l$  deux entiers fixés. Il est polynomial de décider si un graphe d'intervalles est  $k$ -improprement  $l$ -colorable.*

**Démonstration.** Soit  $G$  un graphe d'intervalles. Il est polynomial de calculer la taille  $\omega(G)$  d'une plus grande clique de  $G$ . Si  $\omega(G) > l(k+1)$ ,  $G$  n'est pas  $k$ -improprement  $l$ -colorable d'après la proposition 2. Supposons donc  $\omega(G) \leq l(k+1)$ . Considérons à présent une représentation par intervalles de  $G$ . Notons par  $v_1, \dots, v_n$  les sommets de  $G$  ordonnés de gauche à droite dans l'ordre de la plus petite abscisse de chaque intervalle. L'algorithme consiste à maintenir en mémoire toutes les colorations partielles  $k$ -impropres induites sur l'ensemble  $S$  des sommets du sous-graphe déjà traité (ainsi que l'impropreté correspondante de chaque sommet ; cet ensemble varie au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme). Soit  $v_i$  le prochain sommet à traiter. Seuls les voisins de  $v$  sont conservés dans  $S$ . Ensuite, pour chaque coloration mémorisée des sommets de  $S$ , l'algorithme teste (de façon exhaustive), si la coloration peut être étendue à  $v$  et mémorise les colorations ainsi obtenues. Comme les sommets de  $S \cup \{v\}$  induisent une clique dans  $G$ ,  $S$  contient au plus  $\omega(G) - 1$  sommets. Il est donc suffisant d'utiliser une liste de taille  $(lk)^{\omega(G)} \leq (lk)^{l(k+1)}$  pour cette mémorisation. Enfin, le fait de ne garder dans  $S$  que les voisins (déjà colorés) de  $v_i$  ne pose pas de problème pour la suite puisque tout sommet  $v_j$  avec  $j < i$  qui n'est pas adjacent à  $v_i$  ne peut être adjacent à un sommet  $v_k$  avec  $k > i$ . La complexité de l'algorithme obtenu est linéaire en le nombre de sommets du graphe, chaque sommet effectuant au plus  $c \times (lk)^{l(k+1)}$  opérations élémentaires.  $\square$

Ce résultat ne résout toutefois pas entièrement le problème de la complexité pour la coloration impropre des graphes d'intervalles.

**Problème 4.** *Étant donné un entier  $k$  fixé, existe-t-il un algorithme polynomial permettant de déterminer le nombre chromatique de tout graphe d'intervalles, ou de tout graphe d'intervalles unitaires ?*

Pour les graphes d'intervalles unitaires, le résultat suivant montre que seules deux valeurs sont possibles : la borne inférieure générale donnée par la proposition 2, ou ce nombre plus un.

**Théorème 18.** *Il existe un algorithme linéaire donnant une  $\left\lceil \frac{\omega(G)}{k+1} \right\rceil + 1$ -coloration  $k$ -impropre de tout graphe d'intervalles unitaires.*

**Démonstration.** Soit  $l := \left\lceil \frac{\omega(G)}{k+1} \right\rceil + 1$ . Considérons une représentation par intervalles unitaires de  $G$  et soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les sommets de  $G$  dans l'ordre induit par la représentation. Colorons le sommet  $v_i$  avec la couleur  $j$  si, et seulement si,  $\lfloor \frac{i}{k+1} \rfloor \equiv j \pmod{l}$ . Cette coloration utilise  $l$  couleurs par définition. Supposons que le sommet  $v_i$  ait impropreté au moins  $k+1$  : alors, sans perte de généralité, disons que le sommet  $v_{i+(l-1)(k+1)+1}$  est voisin de  $v_i$ . Comme  $G$  est un graphe d'intervalles unitaires, cela implique que les sommets  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+(l-1)(k+1)+1}$  induisent une clique dans  $G$ , qui est de taille  $(l-1)(k+1) + 2 \geq \omega(G) + 2$ , contradiction.  $\square$

Comme mentionné, nous ne savons pas s'il est polynomial ou non de déterminer laquelle des deux valeurs est correcte.

### 3.2.2. La $l$ -coloration $k$ -impropre des graphes d'intersection de disques unitaires, $l \geq 3$

Le problème de la  $l$ -coloration propre restreint aux graphes d'intersection de disques unitaires étant  $\mathcal{NP}$ -complet [GSW98] pour tout  $l \geq 3$ , il est raisonnable de penser qu'il en est de même du problème de la  $l$ -coloration  $k$ -impropre, pour tout  $k \geq 1$  fixé. C'est ce que nous prouvons dans cette sous-section, en utilisant une réduction inspirée de [GSW98].

**Théorème 19.** *Pour tout entier  $k$  et tout entier  $l \geq 3$  fixés, le problème de la  $l$ -coloration  $k$ -impropre restreint aux graphes d'intersection de disques unitaires est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

Notons que le théorème 19 est vrai même lorsqu'une représentation du graphe d'intersection de disques unitaires est connue, ce qui est important puisque, comme mentionné précédemment, reconnaître un graphe d'intersection de disques unitaires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet.

Notre approche généralise celle de [GSW98] : nous montrons à présent comment construire, étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un graphe d'intersection de disques unitaires  $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$  qui est  $k$ -improprement  $l$ -colorable si, et seulement si,  $G$  est  $l$ -colorable. La clé est de généraliser les graphes auxiliaires. Nous utiliserons le même plongement pour le graphe  $G$ , et la représentation de  $\hat{G}$  nécessitera juste de légères modifications techniques afin d'intégrer un gadget de croisement plus grand.

Le schéma de la démonstration est le suivant : nous allons utiliser un plongement de  $G$  dans le plan permettant de remplacer, de façon systématique, ses arêtes par des graphes d'intersection de disques unitaires convenablement choisis, de sorte que l'existence d'une  $l$ -coloration de  $G$  soit équivalente à l'existence d'une  $l$ -coloration  $k$ -impropre du graphe obtenu. Nous aurons deux problèmes principaux à résoudre : tout d'abord, comme  $G$  n'est pas nécessairement plane, des arêtes peuvent s'intersecter dans notre plongement ; ensuite, le degré de  $G$  n'étant pas borné en fonction de la taille de sa plus grande clique, nous devons être capables de gérer les sommets de "gros" degré puisque, comme mentionné dans l'introduction, tout graphe d'intersection de disques unitaires  $H$  avec au moins une arête vérifie

$$\Delta(H) \leq 6\omega(H) - 7.$$

Ces deux questions seront résolues en introduisant deux types de graphes d'intersection de disques unitaires auxiliaires : les gadgets de croisement afin de remplacer les croisements d'arêtes et les gadgets de sommets.

Le reste de cette sous-section est organisé de la façon suivante : les graphes d'intersection de disques unitaires auxiliaires sont décrits dans la sous-section 3.2.2.1, la sous-section 3.2.2.2 est consacrée à la description d'une réalisation du graphe d'intersection de disques unitaires  $\hat{G}$  construit à partir de  $G$ , et la sous-section 3.2.2.3, basée sur les précédentes, est dédiée à la preuve du théorème 19.

Avant d'entrer dans les détails de la démonstration, prouvons le lemme suivant.

**Lemme 20.** *Notons  $K_1$  une clique de taille  $k + 1$ ,  $K_2$  une clique de taille  $(l - 1)(k + 1)$  et  $K_3$  une clique de taille  $j$ , où  $j \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$ . Soit  $H$  le graphe formé par ces trois cliques en ajoutant toutes les arêtes entre  $K_1$  et  $K_2$  et entre  $K_2$  et  $K_3$ . Le graphe  $H$  est  $k$ -improprement  $l$ -colorable, et dans toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H$  les sommets de  $K_1 \cup K_2$  sont monochromatiques.*

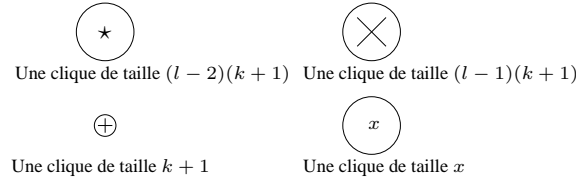
**Démonstration.** Supposons que  $c$  soit une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H$ . Soit  $u$  un sommet de  $K_3$ , supposons, quitte à renommer les couleurs, que  $u$  est coloré avec la couleur 1 par  $c$ . Le sous-graphe  $X$  de  $H$  induit par les sommets de  $K_1 \cup K_2$  est une clique de taille  $(k + 1) + (l - 1)(k + 1) = l(k + 1)$ , donc toutes les couleurs apparaissent exactement  $k + 1$  fois dans

$X$ , et tout sommet de  $X$  a ainsi impropreté  $k$  dans  $X$ . En particulier, la couleur 1 ne peut pas apparaître sur un sommet de  $K_2$ . Comme  $K_2$  induit une clique de taille  $(l-1)(k+1)$ , toutes les autres couleurs apparaissent exactement  $k+1$  fois dans  $K_2$ , forçant ainsi tous les sommets de  $K_1 \cup K_3$  à être colorés avec la couleur 1.

Une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H$  est obtenue en colorant tous les sommets de  $K_1 \cup K_3$  avec la couleur 1 et ceux de  $K_2$  avec les  $l-1$  couleurs restantes (chaque couleur étant attribuée à  $k+1$  sommets de  $K_2$ ).  $\square$

### 3.2.2.1. Construction des graphes auxiliaires.

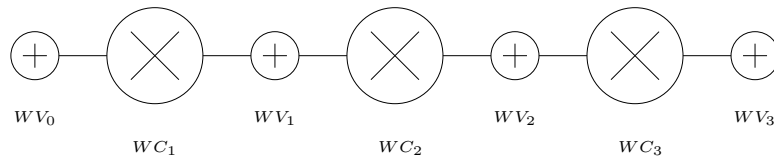
Introduisons tout d'abord les graphes qui remplaceront les arêtes dans le plongement de  $G$ . Tous ces graphes sont des graphes d'intersection de disques unitaires, et, à l'exception du dernier, tous peuvent être représentés par des représentations similaires à celles données par [GSW98]. Les autres propriétés sont données sans preuve, puisque qu'elles découlent soit directement de la définition, soit d'une application simple du lemme 20. Nous utiliserons fréquemment des cliques, et la figure 3.2 donne les conventions utilisées dans les autres figures.



**FIG. 3.2.** Conventions utilisées pour les figures. Ajoutons qu'un trait entre deux cercles signifie que toutes les arêtes possibles entre les deux cliques correspondantes sont présentes.

**Définition 11.** Un  $(k, l)$ -câble d'ordre  $m$ , noté  $W_{k,l}^m$ , est constitué de  $m+1$  cliques de taille  $k+1$ ,  $WV_0, WV_1, \dots, WV_m$ , et de  $m$  cliques de taille  $(l-1)(k+1)$ ,  $WC_1, WC_2, \dots, WC_m$ . Pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tous les sommets de la clique  $WC_i$  sont voisins des sommets des cliques  $WV_{i-1}$  et  $WV_i$ . Les cliques  $WV_0$  et  $WV_m$  sont dénommées *cliques-extrémités*.

La figure 3.3 montre un  $(k, l)$ -câble d'ordre trois.



**FIG. 3.3.** Le  $(k, l)$ -câble  $W_{k,l}^3$ .

**Proposition 18.** Soit  $W_{k,l}^m$  un  $(k, l)$ -câble d'ordre  $m$ .

- (i) Le graphe  $W_{k,l}^m$  possède  $m(l-1)(k+1) + (m+1)(k+1) = (ml+1)(k+1)$  sommets ;
- (ii) il est  $k$ -improprement  $l$ -colorable, mais pas  $k$ -improprement  $(l-1)$ -colorable ;
- (iii) toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $W_{k,l}^m$  assigne une même couleur aux sommets des cliques  $WV_0, WV_1, \dots, WV_m$ . En particulier, les sommets des cliques-extrémités ont la même couleur ; et
- (iv) le graphe  $W_{k,l}^m$  est un graphe d'intersection de disques unitaires.

**Définition 12.** Une  $(k, l)$ -chaîne d'ordre  $m$ , notée  $K_{k,l}^m$  est constituée d'un  $(k, l)$ -câble d'ordre  $m$ ,  $W_{k,l}^m$ , et d'une clique  $WF$  de taille  $j$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, (l-1)(k+1)\}$ . Toutes les arêtes entre les sommets de  $WF$  et ceux de  $WV_m$  sont ajoutées. La clique  $WV_0$  est appelée *clique-extrémité fixée*, alors que la clique  $WF$  est appelée *clique-extrémité forcée*.

Une  $(k, l)$ -chaîne d'ordre trois est représentée par la figure 3.4.

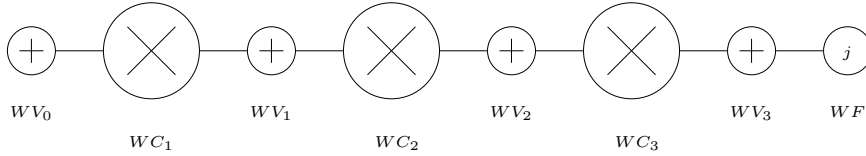


FIG. 3.4. Une  $(k, l)$ -chaîne d'ordre trois  $K_{k,l}^3$ .

**Proposition 19.** Soit  $K_{k,l}^m$  une  $(k, l)$ -chaîne d'ordre  $m$ .

- (i) Le graphe  $K_{k,l}^m$  possède  $(ml + 1)(k + 1) + j$  sommets, où  $j$  est la taille de la clique  $WF$ ;
- (ii) il est  $k$ -improprement  $l$ -colorable, mais pas  $k$ -improprement  $(l - 1)$ -colorable;
- (iii) toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,l}^m$  assigne une même couleur  $c$  aux sommets des cliques  $WV_i$  où  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , et tout sommet de  $WF$  se voit attribuer une couleur différente de  $c$ ;
- (iv) pour toute paire de couleurs distinctes  $(c_1, c_2) \in \{1, 2, \dots, m\}^2$ , il existe une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,l}^m$  attribuant la couleur  $c_1$  aux sommets de la clique-extrémité forcée, et la couleur  $c_2$  aux sommets de la clique-extrémité fixée; et
- (v) une  $(k, l)$ -chaîne est un graphe d'intersection de disques unitaires.

Introduisons à présent les graphes qui remplaceront les sommets de gros degré de  $G$ .

**Définition 13.** Un  $(k, l)$ -clone d'ordre  $m \geq 2$ , noté  $C_{k,l}^m$ , est constitué de  $7m - 7$  cliques de taille  $k+1$ ,  $CV_1, CV_2, \dots, CV_{7m-7}$ , de  $7m - 6$  cliques de taille  $(l-1)(k+1)$ ,  $CC_0, CC_1, \dots, CC_{7m-7}$ , et de  $m$  cliques de taille  $k + 1$  notées  $O_0, O_1, \dots, O_{m-1}$ . Pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, 7m - 7\}$ , tous les sommets de la clique  $CV_i$  sont reliés à tous les sommets des cliques  $CC_{i-1}$  et  $CC_i$ . Pour chaque  $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ , tous les sommets de  $O_i$  sont reliés à tous les sommets de  $CC_{7i}$ . Les cliques  $O_0, O_1, \dots, O_{m-1}$  sont appelées *cliques-extrémités*.

Un  $(k, l)$ -clone d'ordre trois est représenté par la figure 3.5.

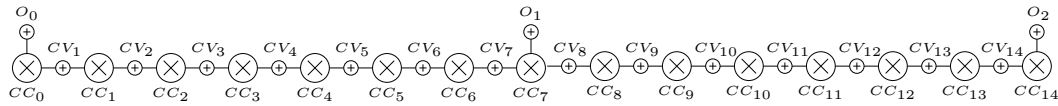


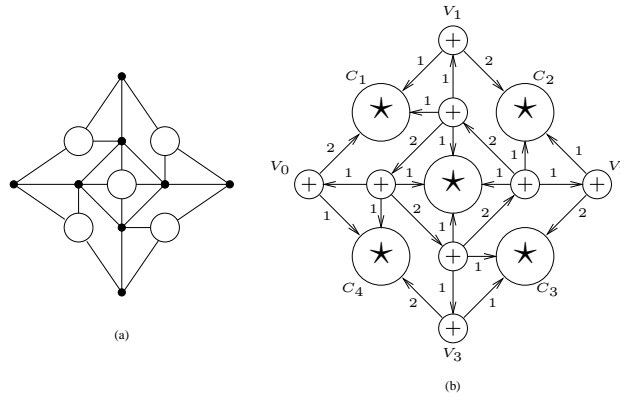
FIG. 3.5. Le  $(k, l)$ -clone  $C_{k,l}^3$ .

**Proposition 20.** Soit  $C_{k,l}^m$  un  $(k, l)$ -clone d'ordre  $m$ .

- (i) Le graphe  $C_{k,l}^m$  possède  $(7m - 6)(l - 1)(k + 1) + (7m - 7)(k + 1) + m(k + 1) = ((7m - 6)l + m - 1)(k + 1)$  sommets;

- (ii) *il est  $k$ -improprement  $l$ -colorable, mais pas  $k$ -improprement  $(l - 1)$ -colorable ;*
- (iii) *toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $C_{k,l}^m$  assigne une même couleur à tous les sommets des cliques-extrémités ; et*
- (iv) *un  $(k, l)$ -clone est un graphe d'intersection de disques unitaires.*

Nous finissons en définissant le gadget de croisement  $H_{k,l}$  : il remplacera les croisements d'arêtes dans le plongement de  $G$ . Cette construction est basée sur celle du graphe de croisement  $H_l$  de [GSW98], chaque sommet étant remplacé par une clique de taille  $k + 1$ , et chaque arête par des  $(k, l)$ -chaînes d'ordre approprié (1 ou 2), de sorte que le graphe obtenu soit un graphe d'intersection de disques unitaires. Les graphes  $H_l$  et  $H_{k,l}$  sont montrés par la figure 3.6.



**FIG. 3.6.** Le  $l$ -croisement  $H_l$  et le  $(k, l)$ -croisement  $H_{k,l}$  : (a)  $H_l$ , où les cercles représentent des cliques de taille  $(l - 2)$  et (b) un schéma de  $H_{k,l}$ , où chaque  $(k, l)$ -chaîne est représentée par un arc (dirigé depuis la clique-extrémité fixée vers la clique-extrémité forcée de la chaîne) ainsi qu'un entier indiquant son ordre.

Notons que les  $(k, l)$ -chaînes sont orientées de sorte à ne pas introduire de clique taille supérieure à  $l(k + 1)$ . En particulier, seules les cliques-extrémités forcées des  $(k, l)$ -chaînes peuvent être adjacentes aux cliques  $C_i$  de taille  $(l - 2)(k + 1)$  de  $H_{k,l}$ . En outre, chaque clique  $C$  de taille  $k + 1$  représentant un sommet de  $H_l$  est adjacente à une clique de taille  $(l - 1)(k + 1)$  d'une  $(k, l)$ -chaîne, assurant ainsi que toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre du graphe  $H_{k,l}$  assigne à tous les sommets de  $C$  une seule couleur. Une définition plus concise de  $H_{k,l}$  suit.

**Définition 14.** Pour tout  $l \geq 3$ , un  $(k, l)$ -croisement, noté  $H_{k,l}$ , est le graphe donné par la figure 3.7. Les cliques  $V_0, V_1, V_2$  et  $V_3$  sont appelées *cliques-extrémités*.

**Proposition 21.** Soit  $H_{k,l}$  un  $(k, l)$ -croisement.

- (i) *Le graphe  $H_{k,l}$  possède  $(37l - 2)(k + 1)$  sommets ;*
- (ii) *il est  $k$ -improprement  $l$ -colorable, mais pas  $k$ -improprement  $(l - 1)$ -colorable ;*
- (iii) *dans toute  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $H_{k,l}$ , les sommets de  $V_0 \cup V_2$  sont monochromatiques, de même que ceux de  $V_1 \cup V_3$  ;*
- (iv) *il existe deux  $l$ -colorations  $k$ -impropres  $c_1$  et  $c_2$  de  $H_{k,l}$  vérifiant  $c_1(V_0) = c_1(V_2) = c_1(V_1) = c_1(V_3)$  et  $c_2(V_0) = c_2(V_2) \neq c_1(V_1) = c_1(V_3)$  ; et*
- (v) *un  $(k, l)$ -croisement est un graphe d'intersection de disques unitaires.*

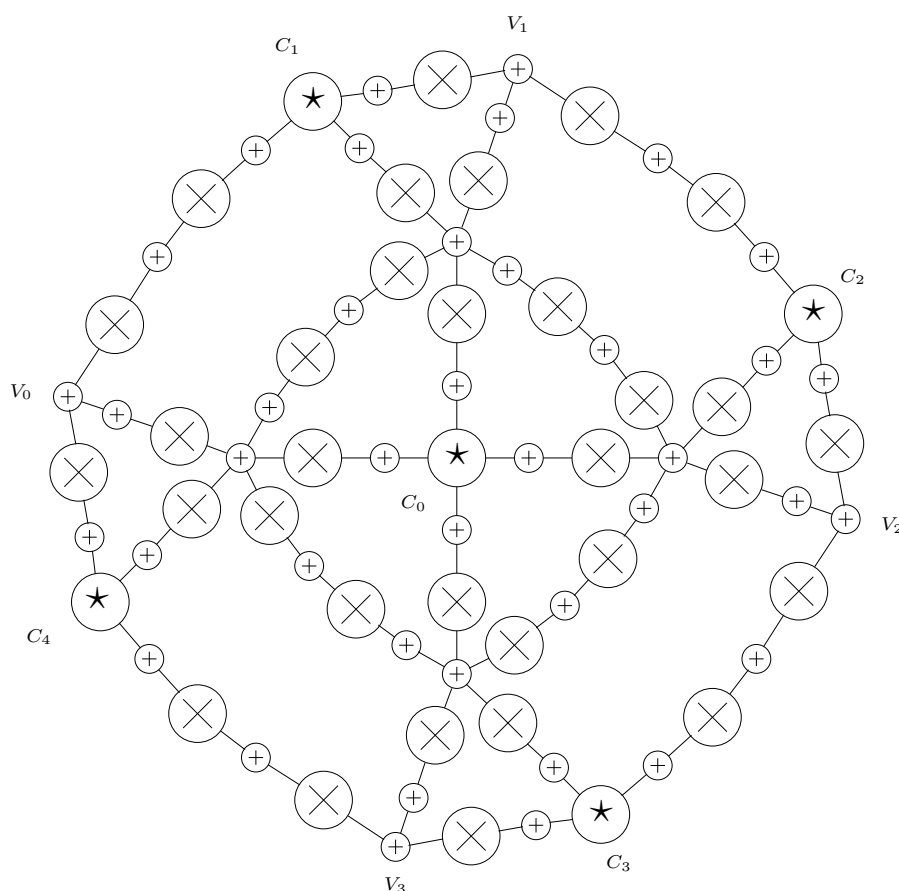


FIG. 3.7. Le  $(k, l)$ -croisement  $H_{k,l}$ .

### 3.2.2.2. Plongement du graphe d'intersection de disques unitaires.

Comme mentionné précédemment, nous utilisons le même plongement pour le graphe donné  $G$  que [GSW98] :

- toutes les arêtes sont constituées de segments verticaux et horizontaux ;
- une distance minimale non nulle est maintenue entre des segments parallèles, des croisements et des sommets ; et
- ce plongement se calcule en temps polynomial, de façon systématique.

Toutefois, nous devons modifier le plongement de certains graphes auxiliaires afin d'aménager de l'espace pour placer les  $(k, l)$ -croisements.

Tout d'abord, chaque sommet  $v$  de  $G$  est remplacé par un ensemble indépendant  $M(v)$  d'ordre  $d(v)$ , le degré de  $v$ . Ensuite, un sommet de  $M(v)$  est relié à un sommet de  $M(w)$  si, et seulement si,  $v$  et  $w$  sont voisins dans  $G$ . Les arêtes sont placées de sorte que chaque sommet du graphe  $G' = (V', E')$  obtenu soit de degré maximum un.

Afin de décrire le plongement de  $G'$  utilisé, les sommets de  $G'$  sont numérotés de 1 à  $|V'|$ , de telle sorte que, pour tout sommet  $v$  de  $G$ , les numéros des sommets de  $M(v)$  soient consécutifs. Notons  $n$  cette numérotation. Les sommets de  $G'$  sont tous placés sur l'axe des abscisses : les coordonnées du point représentant le sommet  $v$  de  $G'$  sont  $(X(v), 0)$ , avec  $X(v) := 56n(v)$ .

Une arête  $uv$  de  $G'$ , avec  $X(u) < X(v)$ , est représentée par les trois segments suivants :

$$\{(x, y) : x = X(u) \text{ et } y \in [0, X(u) + 8]\},$$



$$\{(x, y) : x \in [X(u), X(v)] \text{ et } y = X(u) + 8\}, \text{ et}$$

$$\{(x, y) : x = X(v) \text{ et } y \in [0, X(u) + 8]\}.$$

Un exemple est donné par la figure 3.8. Un tel plongement dépend de la numérotation  $n$  choisie, mais est unique pour une numérotation fixée.

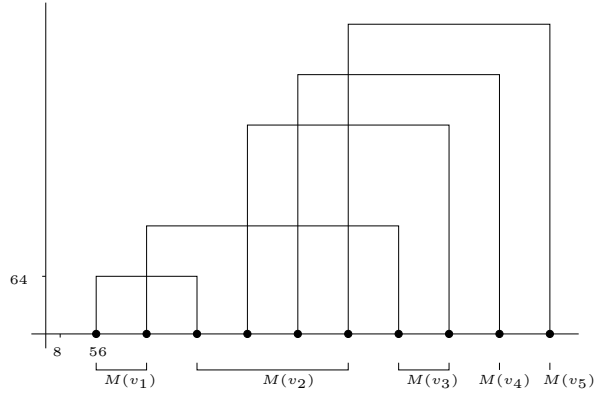


FIG. 3.8. Plongement du graphe  $G'$ .

Décrivons à présent la construction du graphe  $\hat{G}$  ainsi que d'une réalisation, montrant qu'il s'agit bien d'un graphe d'intersection de disques unitaires.

Notons que chaque clique des graphes auxiliaires peut être représentée par un seul disque, car tout sommet  $u$  appartient à une clique  $C(u)$ , et si  $u$  et  $v$  sont adjacents, alors tous les sommets de  $C(u)$  et de  $C(v)$  le sont. Ainsi, en raison de propriétés élémentaires des configurations de disques dans le plan, il est suffisant de représenter chaque clique par un sommet, appelé *représentant*. Donnons à présent une réalisation de  $\hat{G}$  avec des disques de rayon 3.

Avec cette convention, les  $(k, l)$ -câbles et  $(k, l)$ -chaînes peuvent être représentés similairement aux  $l$ -câbles et  $l$ -chaînes, respectivement, de [GSW98]. Ces graphes auxiliaires vont remplacer les segments de droite dans le plongement de  $G'$ . Remarquons qu'un  $(k, l)$ -câble d'ordre  $m$  peut être plongé de sorte que la distance entre les centres des représentants des cliques-extrémités soit égale à  $8m$ , et que tous les centres soient alignés. Avec une légère modification (puisqu'elle comporte une clique de plus), une  $(k, l)$ -chaîne d'ordre  $m$  peut être plongée de sorte que la distance entre les centres des représentants des cliques-extrémités soit  $8m$  (et que tous les centres soient alignés). En outre, les plongements des  $(k, l)$ -câbles peuvent être modifiés de telle sorte que la ligne brisée reliant les centres consécutifs fasse un angle droit (figure 3.9).

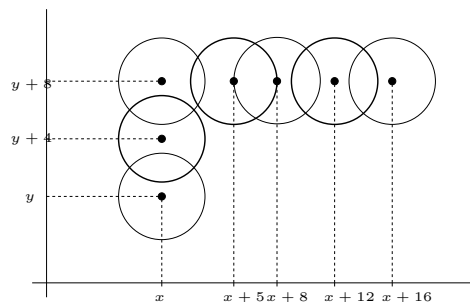


FIG. 3.9. Plongement d'un  $(k, l)$ -câble avec un angle droit.

Nous représentons les  $(k, l)$ -clones de façon similaire aux  $l$ -clones, sauf que les représentants des cliques-extrémités sont placés sur l'axe des abscisses à distance 56 (et non 24), afin de laisser de la place pour les  $(k, l)$ -croisements. Fixons les coordonnées  $(x, y)$  du centre du représentant de la clique-extrémité  $O_0$  : les coordonnées des centres des représentants des cliques  $CC_i$  sont  $(x + 8i, y - 5)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, 7m - 6\}$ , celles des centres des représentants des cliques  $CV_i$  sont  $(x + 4i, y - 5)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 3n - 3\}$ , et celles des représentants des cliques-extrémités  $O_i$  sont  $(x + 56i, y)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$  (voir figure 3.10).

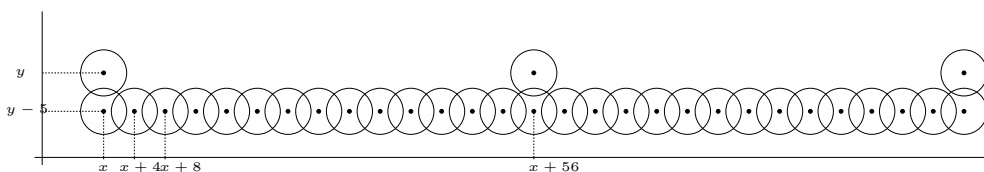


FIG. 3.10. Réalisation d'un  $(k, l)$ -clone d'ordre trois.

La figure 3.11 montre une représentation d'un  $(k, l)$ -croisement avec des disques de rayon 3. Les centres des représentants des cliques-extrémités sont à distance 24 du centre.

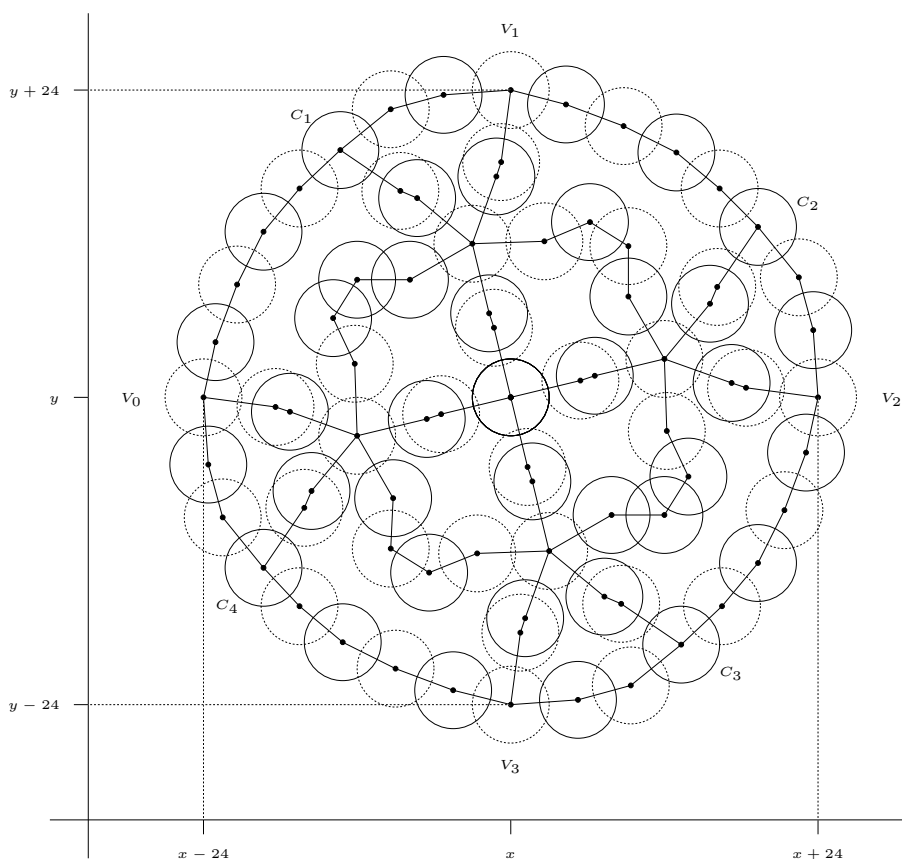


FIG. 3.11. Une réalisation du  $(k, l)$ -croisement : un disque en gras représente  $(l - 1)(k + 1)$  copies du même disque, un disque en pointillés représente  $k + 1$  copies du même disque et chacun des cinq disques restants représente  $(l - 2)(k + 1)$  copies du même disque.

La construction finale d'une représentation du graphe  $\hat{G}$  ne présente à présent plus de difficulté : pour tout sommet  $v$  de  $G$ , un  $(k, l)$ -clone est plongé de sorte que les coordonnées du

centre du représentant de  $O_0$  soient  $(x(v), 0)$ , où  $x(v)$  est la plus petite abscisse d'un sommet de  $M(v)$ . Les coordonnées des cliques-extrémités sont donc exactement celles des sommets de  $M(v)$ . Il ne reste plus qu'à remplacer les arêtes : soit  $uv$  une arête de  $G'$ . Si elle n'en croise aucune autre, une  $(k, l)$ -chaîne d'ordre adéquat est plongée le long des trois segments représentant l'arête  $uv$ , de telle sorte que les représentants des cliques-extrémités remplacent les sommets  $u$  et  $v$  : si  $X(v) = 8s$  et  $X(u) = 8s'$ , avec  $s < s'$ , l'ordre  $m$  de la  $(k, l)$ -chaîne est  $s + 1 + (s' - s - 2) + 1 + s = s + s'$ .

Si l'arête  $uv$  croise au moins une autre arête, soit  $(x, y)$  les coordonnées d'un croisement. Les quatre points de coordonnées respectives  $(x - 24, y)$ ,  $(x + 24, y)$ ,  $(x, y - 24)$  et  $(x, y + 24)$  sont remplacés par les cliques-extrémités d'un  $(k, l)$ -croisement. Les segments restants sont remplacés par des  $(k, l)$ -câbles d'ordre adéquat, sauf celui contenant le sommet  $v$ , qui est remplacé par une  $(k, l)$ -chaîne. Ceci est rendu possible par le fait que la longueur de chaque segment est un multiple de 8.

### 3.2.2.3. Démonstration du théorème 19.

Il ne reste qu'à prouver que le graphe  $G$  est  $l$ -colorable si, et seulement si, le graphe  $\hat{G}$  est  $k$ -improprement  $l$ -colorable. Pour tout sommet  $v$  de  $G$ , notons  $I(v)$  l'ensemble des sommets des cliques-extrémités du  $(k, l)$ -clone remplaçant le sommet  $v$ .

Soit  $c$  une  $l$ -coloration de  $G$ . Chaque sommet de  $I(v)$  est coloré  $c(v)$ , et cette coloration s'étend en une  $l$ -coloration  $k$ -impropre du  $(k, l)$ -clone selon la proposition 20 (ii) et (iii). Considérons une arête  $uv$  de  $G$  : si les cliques-extrémités correspondantes sont reliées uniquement par une  $(k, l)$ -chaîne, alors la proposition 19 (iv) permet d'étendre la coloration à cette  $(k, l)$ -chaîne puisque  $c(u) \neq c(v)$ . Sinon, la coloration est étendue à chaque  $(k, l)$ -câble en utilisant la proposition 18 (iii) (i.e. tous les sommets de chaque clique-extrémité reçoivent la même couleur). Lorsque ceci est fait pour chaque arête, la coloration est étendue à chaque  $(k, l)$ -croisement en utilisant la proposition 21 (iv). Enfin, chaque  $(k, l)$ -chaîne restante (joignant nécessairement un  $(k, l)$ -croisement à une clique représentant un sommet de  $G'$ ) est  $k$ -improprement colorée en utilisant la proposition 19 (iv), puisque ses cliques-extrémités sont colorées différemment (l'une ayant la couleur  $c(u)$  et l'autre la couleur  $c(v)$  pour deux sommets voisins  $u$  et  $v$  de  $G$ ).

Notons  $\hat{c}$  une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $\hat{G}$ , et considérons un sommet  $v$  de  $G$ . Attribuons à  $v$  la couleur de n'importe quel sommet appartenant à la clique-extrémité remplaçant  $v$  (le seul cas où les sommets de cette clique peuvent être colorés différemment est lorsque le degré de  $v$  est égal à un, et que la clique-extrémité forcée représente le sommet  $v$ ). D'après la construction précédente, et les propositions 18 (iii), 19 (iii), 20 (iii) et 21 (iii), la  $l$ -coloration  $c$  de  $G$  obtenue est propre.

### 3.2.3. La 2-coloration $k$ -impropre des graphes d'intersection de disques unitaires, $k \geq 1$

Il n'est pas donné *a priori* de savoir si le problème de la 2-coloration  $k$ -impropre restreint aux graphes d'intersection de disques unitaires est  $\mathcal{NP}$ -complet ou pas. Le problème de la 2-coloration propre est en effet polynomial en général alors que celui de la 2-coloration  $k$ -impropre, pour  $k \geq 1$ , est  $\mathcal{NP}$ -complet même restreint aux graphes planaires [CGJ97].

**Théorème 20.** *Pour tout entier non nul  $k$ , le problème de la 2-coloration  $k$ -impropre restreint aux graphes d'intersection de disques unitaires est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

Nous allons réduire à ce problème celui de la 2-coloration  $k$ -impropre des graphes planaires. Étant donné un graphe planaire  $G$ , nous allons construire, en temps polynomial, un graphe d'intersection de disques unitaires  $\hat{G}$  qui est  $k$ -improprement 2-colorable si, et seulement si, le

graphe  $G$  l'est. La construction est basée sur celle de la section précédente. Comme le graphe  $G$  est planaire, nous n'avons plus besoin de gadget de croisement. En revanche, puisque nous n'utilisons plus de coloration propre, nous devons arriver à gérer et à transmettre l'impropreté des sommets.

### 3.2.3.1. Construction des graphes auxiliaires.

Les graphes introduits dans cette partie sont tous des graphes d'intersection de disques unitaires, et nous donnerons une représentation pour chacun plus tard. Nous commençons par définir les graphes qui vont remplacer les arêtes dans un plongement du graphe  $G$ .

**Définition 15.** Un  $(k, 2)$ -lien, noté  $B_{k,2}$ , est le graphe constitué d'une clique induite par les sommets  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ , d'un sommet  $v_0$  adjacent aux sommets  $v_i$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$  et d'un sommet  $v_{2k+2}$  adjacent aux sommets  $v_i$  avec  $i \in \{k+1, k+2, \dots, 2k+1\}$ . Les sommets  $v_0$  et  $v_{2k+2}$  sont appelés *sommets-extrémités*.

Un  $(k, 2)$ -lien est montré par la figure 3.12.

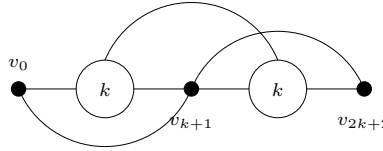


FIG. 3.12. Le  $(k, 2)$ -lien  $B_{k,2}$ .

**Proposition 22.** Soit  $B_{k,2}$  un  $(k, 2)$ -lien.

- (i) Le graphe  $B_{k,2}$  possède  $2k + 3$  sommets ;
- (ii) il est  $k$ -improprement 2-colorable mais pas  $k$ -improprement 1-colorable ;
- (iii) dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $B_{k,2}$ , les sommets-extrémités  $v_0$  et  $v_{2k+2}$  sont de la même couleur ;
- (iv) en supposant que  $v_0$  soit adjacent à  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  sommets supplémentaires  $u_1, u_2, \dots, u_j$ , et que de plus les sommets  $v_0, u_1, u_2, \dots, u_j$  soient tous pré-colorés avec la même couleur, l'impropreté de  $v_{2k+2}$  pour toute extension  $k$ -impropre avec 2 couleurs de cette pré-coloration à  $B_{k,2}$  est au moins  $j$  ;
- (v) sous les mêmes conditions que ci-dessus, il existe une extension  $k$ -impropre avec 2 couleurs de la pré-coloration à  $B_{k,2}$  telle que l'impropreté de  $v_{2k+2}$  soit exactement  $j$  ; et
- (vi) un  $(k, 2)$ -lien est un graphe d'intersection de disques unitaires.

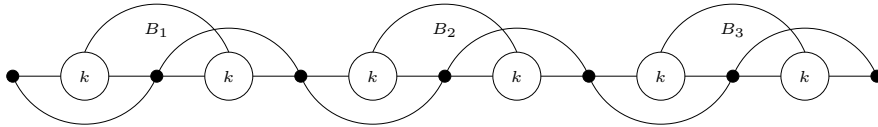
Sous les conditions des propriétés (iii) et (iv), nous dirons que le sommet  $v_0$  est coloré avec *impropreté externe*  $j$  (ce qui signifie que le sommet  $v_0$  possède  $j$  voisins de la même couleur que lui *au-dehors* du  $(k, 2)$ -lien considéré).

**Démonstration.** Les propriétés (i) et (ii) ne sont pas difficiles à établir, et une réalisation pour la dernière propriété sera donnée dans la section suivante. Pour le reste de la preuve, notons  $c$  une 2-coloration  $k$ -impropre de  $B_{k,2}$ , et  $C$  la clique de  $G$  induite par les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ .

- (iii) Par contradiction, supposons que  $c(v_0) = 1 \neq 2 = c(v_{2k+2})$ . Comme la clique  $C$  possède  $2k + 1$  sommets, une des deux couleurs, disons 2, apparaît exactement  $k + 1$  fois sur les sommets de  $C$  : tous les sommets de  $C$  colorés 2 ont ainsi impropreté  $k$  dans  $C$ . Aucun d'eux ne peut donc être un voisin de  $v_{2k+2}$  dans  $G$ , or seuls  $k$  sommets de  $C$ , nommément  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , ne sont pas voisins de  $v_{2k+2}$  dans  $G$ , une contradiction.
- (iv) Supposons  $c(v_0) = c(u_1) = \dots = c(u_j) = 1$ . Comme  $v_0$  a impropreté externe  $j$ , il y a au plus  $k - j$  sommets parmi  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  qui sont colorés avec la couleur 1. Comme la clique  $C$  possède  $2k + 1$  sommets, il y a au moins  $k$  de ses sommets qui sont colorés avec la couleur 1. Ainsi, au moins  $j$  sommets parmi  $v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, v_{2k+1}$  sont colorés avec la couleur 1, et comme  $c(v_{2k+2}) = 1$  d'après la propriété précédente,  $v_{2k+2}$  a impropreté au moins  $j$ .
- (v) Supposons à nouveau  $c(v_0) = c(u_1) = \dots = c(u_j) = 1$ . Posons alors  $c(v_{k-j+1}) := c(v_{k-j+2}) := \dots := c(v_{2k-j+1}) := 2$  et  $c(v_{2k-j+2}) := c(v_{2k-j+3}) := \dots := c(v_{2k+2}) := 1$ . Il n'est pas difficile de vérifier que cette 2-coloration convient. □

**Définition 16.** Un  $(k, 2)$ -câble d'ordre  $m$ , noté  $W_{k,2}^m$ , est la concaténation, de gauche à droite, de  $m$   $(k, 2)$ -liens  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . Les sommets  $v_0$  de  $B_1$  et  $v_{2k+2}$  de  $B_m$  sont appelés *sommets-extrémités*.

Un  $(k, 2)$ -câble d'ordre trois est exhibé par la figure 3.13.



**FIG. 3.13.** Un  $(k, 2)$ -câble d'ordre trois  $W_{k,2}^3$ .

La proposition suivante découle des propriétés des  $(k, 2)$ -liens données par la proposition 22.

**Proposition 23.** Soit  $W_{k,2}^m$  un  $(k, 2)$ -câble.

- (i) Le graphe  $W_{k,2}^m$  possède  $m(2k + 2) + 1$  sommets ;
- (ii) il est  $k$ -improprement 2-colorable mais pas  $k$ -improprement 1-colorable ;
- (iii) dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $W_{k,2}^m$ , sommets-extrémités sont de la même couleur ;
- (iv) si l'un des sommets-extrémités de l'un des  $(k, 2)$ -liens  $B_i$  possède une impropreté externe de  $j$ , alors dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $W_{k,2}^m$ , l'impropreté de l'autre sommet-extrémité de  $B_i$  est au moins  $j$  ;
- (v) si l'un des sommets-extrémités de l'un des  $(k, 2)$ -liens  $B_i$  possède une impropreté externe de  $j$ , il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $W_{k,2}^m$  telle que l'autre sommet-extrémité de  $B_i$  ait impropreté exactement  $j$  ; et
- (vi) le graphe  $W_{k,2}^m$  est un graphe d'intersection de disques unitaires.

**Définition 17.** Un  $(k, 2)$ -clone d'ordre  $m \geq 2$ , noté  $C_{k,2}^m$ , est le graphe constitué de  $m$  sommets  $o_1, o_2, \dots, o_m$ , appelés *sommets-extrémités*, et d'un  $(k, 2)$ -câble  $W_i$  entre chaque couple de sommets  $o_i, o_{i+1}$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ .

Un  $(2, 2)$ -clone d'ordre trois est exhibé par la figure 3.14. Bien que nous ayons défini les  $(k, 2)$ -clones pour tous les ordres, nous n'utiliserons que des clones d'ordre borné dans notre réalisation de  $\hat{G}$ .

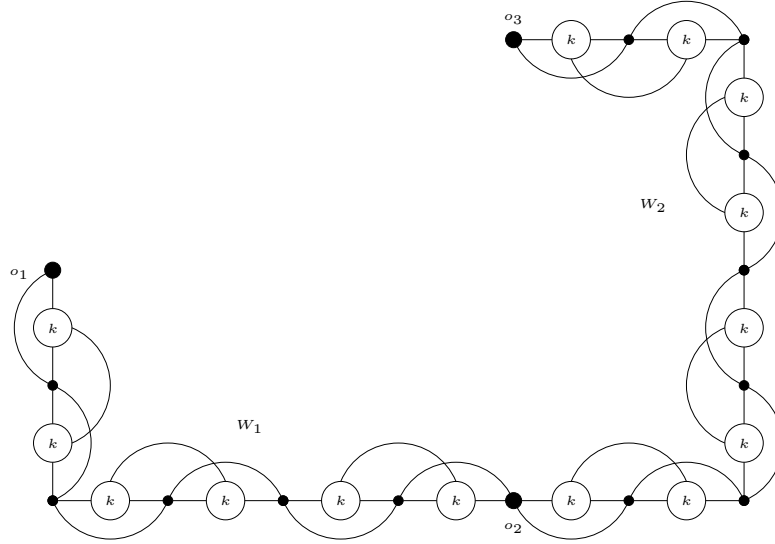


FIG. 3.14. Le  $(2, 2)$ -clone d'ordre trois  $C_{2,2}^3$ .

**Proposition 24.** Soit  $C_{k,2}^m$  un  $(k, 2)$ -clone.

- (i) Le graphe  $C_{k,2}^m$  possède  $l(2k + 2) + 1$  sommets ;
- (ii) il est  $k$ -improprement 2-colorable mais pas  $k$ -improprement 1-colorable ;
- (iii) dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $C_{k,2}^m$ , les sommets-extrémités sont monochromatiques ;
- (iv) pour toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $C_{k,2}^m$ , la somme de l'impropreté externe des sommets-extrémités est au plus  $k$  ;
- (v) étant donnée une séquence  $s_1, s_2, \dots, s_m$  d'entiers dont la somme est au plus  $k$ , il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $C_{k,2}^m$  telle que, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , l'impropreté du sommet  $o_i$  soit au plus  $k - s_i$  ; et
- (vi) le graphe  $C_{k,2}^m$  est un graphe d'intersection de disques unitaires.

**Démonstration.**

(v) Commençons par colorer le sommet  $o_1$  avec la couleur 1. D'après la proposition 23 (v), comme  $o_1$  et  $o_2$  sont les sommets-extrémités du  $(k, 2)$ -câble  $W_1$  il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $W_1$  telle que  $o_2$  ait impropreté  $s_1$ . Le sommet  $o_1$  aura ainsi bien impropreté au plus  $k - s_1$  dans  $C_{k,2}^m$ . Colorons à présent  $W_2$ , toujours en utilisant la proposition 23 (v) et en assignant au sommet  $o_2$  une impropreté externe égale à  $s_1 + s_2 \leq k$  : il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $W_2$  telle que l'impropreté de  $o_3$  dans  $W_3$  soit égale à  $s_1 + s_2$ . Il ne reste qu'à continuer ainsi jusqu'à ce que  $W_m$  soit coloré ; ceci est toujours possible car  $\sum_{i=1}^m s_i \leq k$ .

Les autres propriétés découlent de façon similaire de la proposition 23. □

**Définition 18.** Pour tout entier impair  $m$ , une  $(k, 2)$ -corde d'ordre  $m$ , notée  $K_{k,2}^m$ , est ainsi définie : l'ensemble des sommets est l'ensemble  $\{v_0, v_1, \dots, v_{x(k,m)+1}\}$  où

$$x(k, m) := \begin{cases} mk(k+1) & \text{si } k \text{ est pair} \\ mk(k+1) + k + 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont voisins si, et seulement si,  $|i - j| \leq k + 1$ . Les sommets  $v_0$  et  $v_{x(k,m)+1}$  sont appelés *sommets-extrémités*.

Une  $(2, 2)$ -corde d'ordre un est montrée par la figure 3.15.

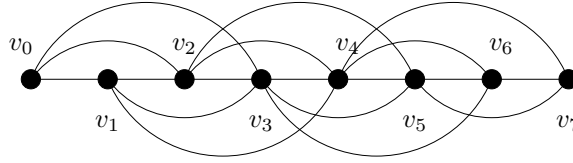


FIG. 3.15. La  $(2, 2)$ -corde d'ordre un  $K_{2,2}^1$ .

**Proposition 25.** Soit  $K_{k,2}^m$  une  $(k, 2)$ -corde d'ordre  $m$ .

- (i) Le graphe  $K_{k,2}^m$  possède  $x(k, m) + 2$  sommets ;
- (ii) il est  $k$ -improprement 2-colorable mais pas  $k$ -improprement 1-colorable ;
- (iii) dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,2}^m$  telle que les sommets-extrémités soient monochromatiques, les sommets-extrémités ont une impropreté non nulle ;
- (iv) il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,2}^m$  telle que les sommets-extrémités soit colorés différemment et que tous deux aient impropreté 0 ;
- (v) il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,2}^m$  telle que les sommets-extrémités soient monochromatiques et que tous deux aient impropreté 1 ; et
- (vi) le graphe  $K_{k,2}^m$  est un graphe d'intersection de disques unitaires.

**Démonstration.** Les propriétés (i) et (ii) ne sont pas difficiles à établir, et un plongement établissant la dernière propriété sera donné dans la partie suivante.

- (iii) Considérons une 2-coloration  $k$ -impropre  $c$  de  $K_{k,2}^m$  telle que  $c(v_0) = c(v_{x(k,m)+1})$ , et supposons que l'impropreté de  $v_0$  soit nulle. Alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, k + 1\}$ ,  $c(v_i) = 2$ . En particulier, tous ces sommets ont impropreté  $k$  dans le sous-graphe qu'ils induisent, qui est une clique. Ainsi, pour tout  $i \in \{k + 2, \dots, 2k + 2\}$ ,  $c(v_i) = 1$ . Comme ces sommets induisent également une clique, le même raisonnement peut être itéré. Ainsi, il suit  $c(v_i) = 1$  si, et seulement si,  $(2s - 1)(k + 1) + 1 \leq i \leq 2s(k + 1)$  où  $s$  est un entier naturel non nul. Toutefois, puisque  $\frac{x(k,m)}{k+1}$  est pair par définition de  $x(k, m)$ , les sommets  $v_i$  avec  $i \in \{(\frac{x(k,m)}{k+1} - 1)(k + 1) + 1, (\frac{x(k,m)}{k+1} - 1)(k + 1) + 2, \dots, x(k, m)\}$  sont colorés avec la couleur 1. Le sommet  $v_{x(k,m)}$  étant lui-même coloré avec la couleur 1 et voisin de tous ces sommets, il a impropreté au moins  $k + 1$ , une contradiction.
- (iv) Utilisons la coloration forcée ci-dessus, c'est-à-dire  $c(v_0) := 1$ ,  $c(v_{x(k,m)+1}) := 2$ , et  $c(v_i) := 1$  si, et seulement si,  $(2s - 1)(k - 1) + 1 \leq i \leq 2s(k + 1)$  pour un entier naturel non nul  $s$ . Il n'est pas difficile de vérifier que cette 2-coloration de  $K_{k,2}^m$  est  $k$ -impropre et que les sommets-extrémités ont tous deux impropreté 0.

(v) Posons  $c(v_0) := c(v_{x(k,m)+1}) := 1$  et, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, x_{k,m}\}$ ,  $c(v_i) := 1$  si, et seulement si,  $(2s - 1)k + 1 \leq i \leq 2sk$  pour un entier naturel non nul  $s$ . Le sommet  $v_0$  possède donc un unique voisin coloré avec la couleur 1, qui est  $v_{k+1}$ . Pour l'impropreté de  $v_{x(k,m)+1}$ , distinguons 2 cas suivant la parité de  $k$  : si  $k$  est pair, alors  $\frac{x(k,m)}{k}$  est impair, donc  $v_{x(k,m)+1}$  possède un unique voisin coloré avec la couleur 1, qui est  $v_{x(k,m)-k}$  ; si en revanche  $k$  est impair, alors  $\frac{x(k,m)-1}{k}$  est impair et ainsi  $v_{x(k,m)+1}$  possède un unique voisin coloré avec la couleur 1, qui est  $v_{x(k,m)}$ . Les deux sommets-extrémités ont donc impropreté exactement 1, et il n'est pas difficile de vérifier que les autres sommets ont impropreté au plus  $k$ .

□

**Définition 19.** Une  $(k, 2)$ -chaîne d'ordre  $(m, n)$ , notée  $K_{k,2}^{(m,n)}$ , est constituée de la concaténation d'un  $(k, 2)$ -câble d'ordre  $j$ ,  $B_1 B_2 \dots B_j$ , avec une  $(k, 2)$ -corde d'ordre  $n$ ,  $K_1$ , elle-même concaténée à un autre  $(k, 2)$ -câble d'ordre  $m - j$ ,  $B_{j+1} B_{j+2} \dots B_m$ , pour un entier quelconque  $j \in \{2, 3, \dots, m - 1\}$ . Les sommets  $v_0$  de  $B_1$  et  $v_{2k+2}$  de  $B_m$  sont appelés *sommets-extrémités*.

Une  $(2, 2)$ -chaîne d'ordre  $(2, 1)$  est montrée par la figure 3.16. La proposition suivante découle des propositions 23 et 25.

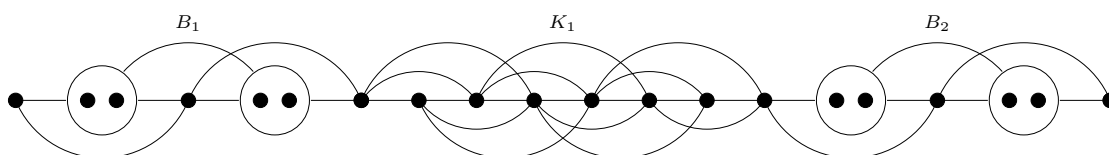


FIG. 3.16. Une  $(2, 2)$ -chaîne d'ordre  $(2, 1)$   $K_{2,2}^{(2,1)}$ .

**Proposition 26.** Soit  $K_{k,2}^{(m,n)}$  une  $(k, 2)$ -chaîne d'ordre  $(m, n)$ .

- (i) Le graphe  $K_{k,2}^{(m,n)}$  possède  $m(2k + 2) + x(k, m) + 2$  sommets ;
- (ii) il est  $k$ -improprement 2-colorable mais pas  $k$ -improprement 1-colorable ;
- (iii) dans toute 2-coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,2}^{(m,n)}$  telle que les sommets-extrémités soient monochromatiques, ces derniers ont tous deux une impropreté non nulle ;
- (iv) il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,2}^{(m,n)}$  telle que les sommets-extrémités soient colorés différemment et qu'ils aient tous deux impropreté 0 ;
- (v) il existe une 2-coloration  $k$ -impropre de  $K_{k,2}^{(m,n)}$  telle que les sommets-extrémités soient monochromatiques et qu'ils aient tous deux impropreté 1 ; et
- (vi) le graphe  $K_{k,2}^{(m,n)}$  est un graphe d'intersection de disques unitaires.

### 3.2.3.2. Plongement du graphe d'intersection de disques unitaires.

Montrons à présent comment, étant donné un graphe  $G$ , construire un graphe d'intersection de disques unitaires  $\hat{G}$  (avec un plongement) tel que  $G$  soit  $k$ -improprement 2-colorable si, et seulement si,  $\hat{G}$  l'est. Nous commencerons par plonger  $G$  dans le plan, puis nous construirons  $\hat{G}$  de sorte que les sommets et les arêtes de  $G$  soient remplacés par les graphes auxiliaires précédemment décrits. En raison de la définition des  $(k, 2)$ -chaînes, qui dépend de la parité de  $k$ , deux plongements différents doivent être créés. Seul le plongement pour  $k$  pair sera entièrement décrit, l'autre cas étant similaire.



Pour la preuve de la complexité de la 3-coloration des graphes d'intersection de disques unitaires, les auteurs de [CCJ90], utilisent un plongement orthogonal de  $G$ , c'est-à-dire un plongement plan de  $G$  tel que chaque arête soit constituée de segments horizontaux et verticaux. Comme vu précédemment, pour l'extension de ce résultat à la  $k$ -coloration pour tout entier  $k \geq 3$ , les auteurs de [GSW98] utilisent un plongement dans lequel chaque arête est constituée de segments horizontaux et verticaux, toutefois les croisements d'arêtes sont permis et afin de gérer les sommets de gros degré, chaque sommet est représenté par un segment. Nous utiliserons ici un *plongement orthogonal de boîtes* (*box-orthogonal embedding*) : il s'agit d'un plongement plan de  $G$  tel que chaque arête soit constituée de segments horizontaux et verticaux, et tel que chaque sommet soit représenté par un rectangle (éventuellement dégénéré), appelé *boîte* (voir la figure 3.17). Tous les segments (y compris ceux délimitant les boîtes) sont situés sur la grille entière. Un tel plongement existe pour tout graphe planaire, et peut être construit en temps polynomial [FKK96, PT98].

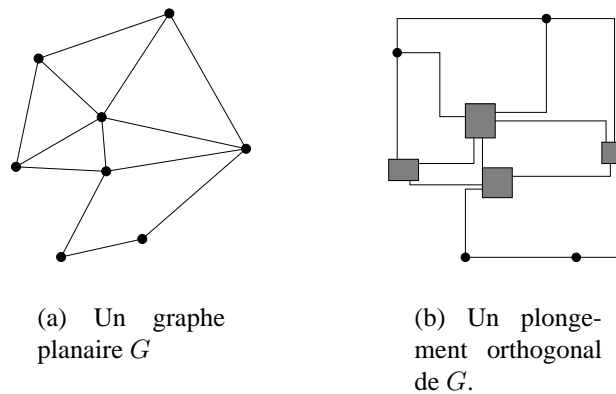


FIG. 3.17. Un graphe planaire et un plongement orthogonal par boîtes correspondant.

Considérons un plongement orthogonal par boîtes d'un graphe planaire arbitraire  $G = (V, E)$ . Quitte à augmenter la taille de chaque boîte d'un demi dans les quatre directions, et à doubler l'échelle de la grille entière, supposons que deux arêtes ne se rencontrent ni en un point (donc aucune boîte n'est dégénérée), ni sur l'angle d'une boîte.

Dans le plongement de  $G$ , chaque sommet  $v \in V$  est remplacé par une boîte  $B(v)$  dont l'ensemble des points de contact avec les arêtes est noté  $M(v)$ . Le but est de plonger un  $(k, 2)$ -clone sur le périmètre de  $B(v)$  de sorte que ses sommets-extrémités soient situés sur les points de  $M(v)$ . Ceci est possible en commençant par un point quelconque de  $M(v)$  et en continuant dans le sens indirect autour du périmètre de  $B(v)$ . Les  $(k, 2)$ -clones sont étendus par des  $(k, 2)$ -câbles jusqu'au prochain point de la grille sur le périmètre de  $B(v)$  jusqu'à ce que tous les points de  $M(v)$  soient couverts.

Dans le plongement de  $G$ , chaque arête  $e \in E$  est remplacée par une ligne  $A(e)$  constituée de segments horizontaux et verticaux de la grille. En particulier, la longueur de  $A(e)$  est entière. Le but est de plonger une  $(k, 2)$ -chaîne le long de  $A(e)$ . Puisque les  $(k, 2)$ -câbles sont utilisés pour étendre une  $(k, 2)$ -chaîne à n'importe quelle longueur, il suffit de décrire les plongements des  $(k, 2)$ -chaînes entre deux points voisins dans la grille entière.

Commençons par décrire les plongements des graphes auxiliaires élémentaires : les  $(k, 2)$ -liens et les  $(k, 2)$ -cordes.

Le plongement d'une  $(k, 2)$ -corde d'ordre  $m$  sera noté  $E_K^m$ . Les centres des disques représentant un sommet de la  $(k, 2)$ -corde sont alignés, avec une distance constante entre deux

centres consécutifs, égale à  $\frac{mk}{mk(k+1)+1}$ . Comme  $d \in [(k+2)^{-1}, (k+1)^{-1})$ , un sommet  $v_i$  est adjacent à un sommet  $v_j$  si, et seulement si,  $|i - j| \leq k + 1$ . En outre, la distance entre les centres des deux disques représentant les sommets-extrémités est égale à  $mk$ . La figure 3.18 montre un tel plongement.

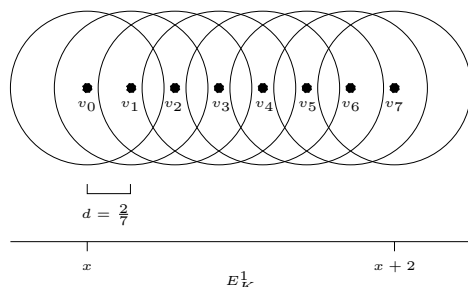


FIG. 3.18. Une réalisation de la  $(2, 2)$ -corde d'ordre 1.

Deux plongements différents seront utilisés pour les  $(k, 2)$ -liens. Dans le premier, noté  $E_B^a$ , les disques représentant les sommets-extrémités sont tangents (les intérieurs ne s'intersectent donc pas), donc la distance entre les deux centres est égale à 1. Ce plongement est donné par la figure 3.19(a). Les deux disques en gras représentent  $k$  disques de même centre. Dans le second plongement, noté  $E_B^b$ , tous les centres sont alignés, et la distance entre les centres des disques représentant les sommets-extrémités est égale à  $2 - 2d'$  où  $d' := \frac{1}{k+3}$ . Notons  $I$  le segment qu'ils définissent. Le centre du disque représentant le sommet  $v_{k+1}$  de  $B_{k,2}$  est le milieu du segment  $I$ . Les centres des disques représentant les sommets  $v_1$  et  $v_{2k+1}$  sont à distance  $1 - \frac{d+d'}{2}$  des centres des disques représentant  $v_0$  et  $v_{2k+2}$ , respectivement. Les disques représentant les sommets  $v_i, i \in \{2, 3, \dots, k\}$  et ceux représentant les sommets  $v_j, j \in \{k+2, k+3, \dots, 2k\}$  sont superposés aux disques représentant les sommets  $v_1$  et  $v_{2k+1}$ , respectivement. La figure 3.19(b) illustre ce plongement.

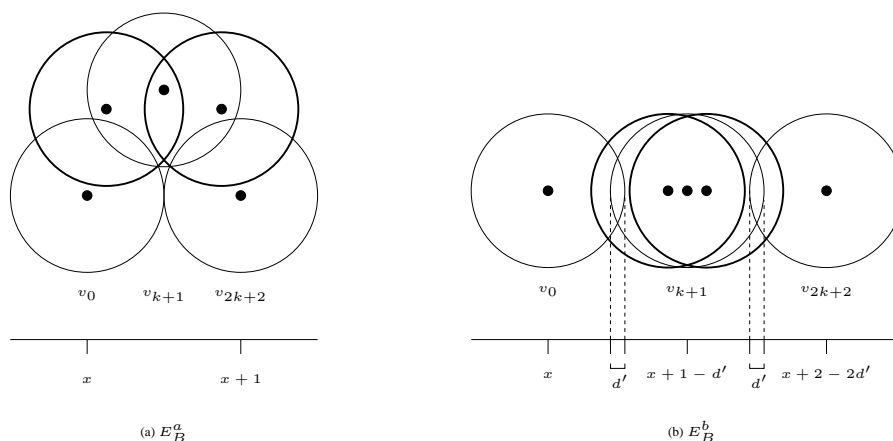


FIG. 3.19. Deux réalisations d'un  $(k, 2)$ -lien : (a)  $E_B^a$  et (b)  $E_B^b$ .

Remarquons que les plongements  $E_B^a$  et  $E_B^b$  peuvent être concaténés avec eux-mêmes (figure 3.20). De plus, la figure 3.21 montre que le plongement  $E_B^b$  peut être concaténé avec  $E_K^m$  et avec  $E_B^a$ .

Utilisons à présent ces constructions afin de construire des plongements de  $(k, 2)$ -câbles et de  $(k, 2)$ -chaînes entre des points consécutifs de la grille. Quitte à changer l'échelle de la

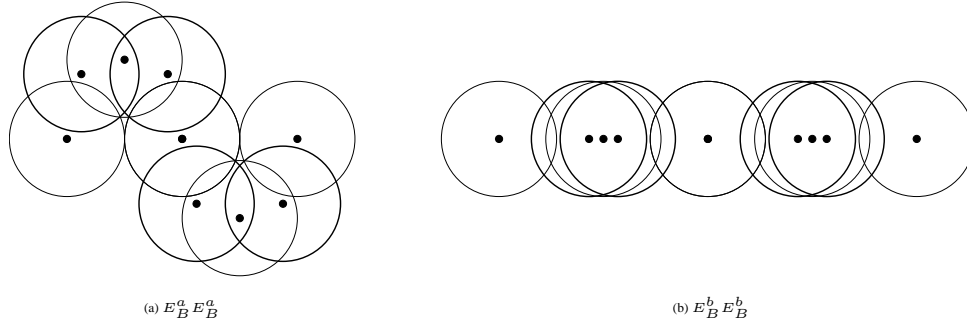


FIG. 3.20. Concaténation de deux copies de (a)  $E_B^a$  et (b)  $E_B^b$ .

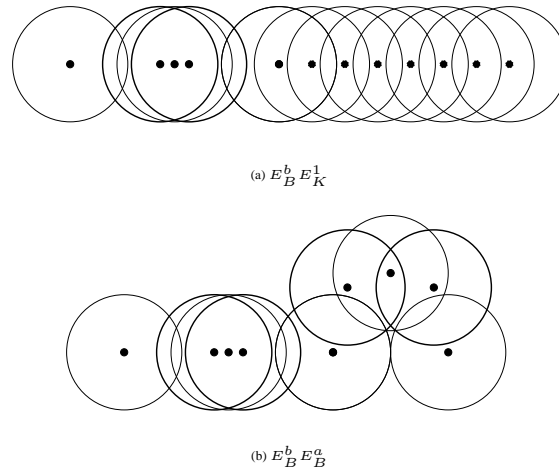


FIG. 3.21. Concaténation de (a)  $E_B^b$  avec  $E_K^1$  et (b)  $E_B^b$  avec  $E_B^a$ .

grille, nous supposons que deux points consécutifs sont à distance  $u := 5k + 8$  l'un de l'autre. Le plongement d'un  $(k, 2)$ -câble d'ordre  $3k + 6$ , noté  $W^*$ , est constitué de la concaténation de  $k + 3$  copies de  $E_B^b$  avec  $k$  copies de  $E_B^a$ , lui-même concaténé avec  $k + 3$  nouvelles copies de  $E_B^b$ . Les centres extrémaux de ce plongement sont à distance  $2(k + 3)(2 - 2d') + k = 5k + 8$ , comme désiré. Une  $(k, 2)$ -chaîne  $K^*$  d'ordre  $2(k + 3) + 1$  est plongée en concaténant  $k + 3$  copies de  $E_B^b$  avec une copie de  $E_K^1$ , lui-même concaténé avec  $k + 3$  nouvelles copies de  $E_B^b$ . Les centres extrémaux de ce plongement sont eux aussi à distance  $5k + 8$ .

Dans le plongement  $E_B^b$ , la distance entre le centre du disque représentant un sommet-extrémité et tout autre centre de disque est au moins  $\frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , donc  $E_B^b$  peut être concaténé avec une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  de lui-même, permettant ainsi de tourner sur la grille (voir figure 3.22).

A présent, pour chaque sommet  $v$  de  $G$ ,  $W^*$ ,  $(k, 2)$ -câble d'ordre  $3k + 6$ , est plongé entre les points consécutifs de la grille le long du périmètre de  $B(v)$ , afin d'obtenir un  $(k, 2)$ -clone dont les sommets-extrémités sont plongés sur les points de  $M(v)$ . Pour chaque arête  $e$  de  $G$ ,  $W^*$  est plongé entre les points consécutifs de la grille le long de  $A(e)$ , sauf pour une paire de points entre lesquels est plongé  $K^*$  : ceci permet d'obtenir une  $(k, 2)$ -chaîne le long de  $A(e)$ . Le graphe ainsi obtenu est le graphe  $\hat{G}$ .

Finissons en notant que dans le cas où  $k$  est impair, la même construction est utilisée, avec  $u := 5k + 9$ ,  $d := \frac{mk+1}{(mk+1)(k+1)+1}$  et  $d' := \frac{1}{k+3}$ .

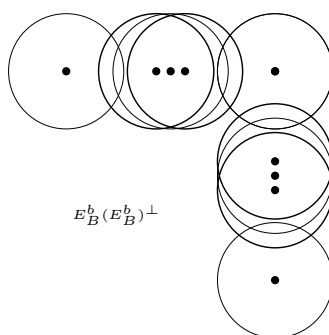


FIG. 3.22. Une réalisation de  $W_{k,2}^2$  avec un angle droit.

### 3.2.3.3. Démonstration du théorème 20.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire quelconque. La construction précédemment décrite de  $\hat{G}$  et de son plongement est polynomiale. Il reste à montrer que  $G$  est  $k$ -improvement colorable si, et seulement si,  $\hat{G}$  l'est. Rappelons que chaque sommet  $v$  de  $G$  est remplacé par une boîte  $B(v)$  dont les points de contact avec les arêtes sont notés  $M(v)$ . Ces points correspondent en outre aux sommets-extrémités d'un  $(k, 2)$ -clone si  $|M(v)| \geq 2$ . L'ensemble des sommets-extrémités est noté  $I(v)$  (avec  $I(v) := \{v\}$  si  $|M(v)| = 1$ , i.e. le sommet  $v$  a degré un dans  $G$ ).

Notons  $c$  une 2-coloration  $k$ -impropre de  $G$  : définissons une 2-coloration  $k$ -impropre  $\hat{c}$  de  $\hat{G}$ , en commençant par assigner la couleur  $c(v)$  à tous les sommets de  $I(v)$ , pour tout sommet  $v$  de  $G$ . Ensuite, pour chaque arête  $e = xy$  de  $G$ , notons  $K_e$  la  $(k, 2)$ -chaîne connectant  $I(x)$  à  $I(y)$  dans  $\hat{G}$ . Une coloration de  $K_e$  est obtenue en appliquant la proposition 26 (iv) si  $c(x) \neq c(y)$ , ou la proposition 26 (v) sinon. Enfin, pour chaque sommet  $v$  de  $G$ , notons  $C_v$  le  $(k, 2)$ -clone dont les sommets-extrémités sont ceux de  $I(v)$ . Comme la 2-coloration  $c$  de  $G$  est  $k$ -impropre, la proposition 24 (v) permet d'étendre la coloration des sommets de  $I(v)$  à  $C_v$  de façon  $k$ -impropre. La 2-coloration de  $\hat{G}$  obtenue au final est bien  $k$ -impropre.

Notons  $\hat{c}$  une 2-coloration  $k$ -impropre de  $\hat{G}$  et construisons à présent une 2-coloration  $k$ -impropre  $c$  de  $G$ . D'après la proposition 24 (iii), la coloration  $c$  attribue la même couleur  $\hat{c}_v$  à tous les sommets de  $I(v)$  : posons  $c(v) := \hat{c}_v$ . Grâce aux propositions 24 (iv) et 26 (iii), il n'est pas difficile de vérifier que la 2-coloration de  $G$  ainsi obtenue est  $k$ -impropre.

### 3.2.4. Colorations impropres pondérées du réseau triangulaire

Le réseau triangulaire  $T$  est constitué des points obtenus par les combinaisons linéaires des vecteurs  $a := (1, 0)$  et  $b := (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Ce réseau permet une couverture optimale du plan, c'est pourquoi il est particulièrement étudié dans les problèmes d'allocation de fréquence. McDiarmid et Reed [MR00] ont prouvé que le problème de la 3-coloration (propre) pondérée restreinte aux sous-graphes induits du réseau triangulaire est  $\mathcal{NP}$ -complet. Dans cette sous-section, nous allons mener une analyse similaire pour la coloration impropre.

Étant donné un graphe  $G$ , une *assignation de poids* pour  $G$  est une application qui associe à chaque sommet  $v$  de  $G$  un entier  $\omega_v$  appelé *poids*. Un *graphe pondéré* est un couple  $(G, \omega)$  où  $G$  est un graphe et  $\omega$  une assignation de poids pour  $G$ . Une  $l$ -coloration d'un graphe pondéré  $(G, \omega)$  est une application qui associe à chaque sommet  $v$  de  $G$  un multi-ensemble  $c_\omega(v)$  de  $\omega_v$  couleurs choisies dans  $\{1, 2, \dots, l\}$ . Dans les deux prochaines parties, nous allons étudier deux définitions possibles de la coloration impropre des sous-graphes pondérés de  $T$ .

## 3.2.4.1. Coloration impropre pondérée du réseau triangulaire.

Étant donné un graphe pondéré  $(F, \omega)$ , une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $(F, \omega)$  est une application qui associe à chaque sommet  $v$  de  $F$   $\omega_v$  couleurs choisies parmi  $\{1, 2, \dots, l\}$  (non nécessairement distinctes) de sorte que, pour tout sommet  $v$  de  $F$  et toute couleur  $x \in c(v)$ , le nombre de fois que la couleur  $x$  est attribuée au sommet  $v$  ou à l'un de ses voisins (comptées avec leur multiplicité) est au plus  $k + 1$ . Une définition plus formelle suit.

**Définition 20.** Soit  $c$  une coloration d'un graphe pondéré  $(F, \omega)$ .

- (i) Pour tout sommet  $v$  de  $F$  et toute couleur  $x \in c(v)$ , l'impropreté de  $v$  respectivement à la couleur  $x$  est :

$$\text{im}^x(v) := \text{mult}(x, c(v)) - 1 + \sum_{w \in N(v)} \text{mult}(x, c(w)),$$

où  $\text{mult}(x, X)$  désigne la multiplicité de l'élément  $x$  dans le multi-ensemble  $X$ .

- (ii) La coloration  $c$  est dite  $k$ -impropre si, et seulement si, l'impropreté de chaque sommet  $v$  respectivement à chaque couleur de  $c(v)$  est au plus  $k$ .

Nous considérons le problème de la coloration impropre des sous-graphes pondérés du réseau triangulaire, et définissons le problème décisionnel suivant.

**Problème 5.  $l$ -coloration  $k$ -impropre du réseau triangulaire.**

INSTANCE : un sous graphe induit  $F$  du réseau triangulaire  $T$  et une assignation de poids  $\omega$  pour  $F$ .

QUESTION : existe-t-il une  $l$ -coloration  $k$ -impropre de  $(F, \omega)$  ?

**Théorème 21.** Pour tout entier  $k \geq 0$  fixé, le problème "3-coloration  $k$ -impropre du réseau triangulaire" est  $\mathcal{NP}$ -complet.

**Démonstration.** Nous allons ici généraliser la preuve de McDiarmid et Reed [MR00] en réduisant le problème de la 3-coloration (propre) des graphes planaires de degré maximum quatre à notre problème. Soit donc  $G$  un graphe planaire de degré maximum quatre. Nous construisons un sous-graphe induit  $F$  de  $T$  et une assignation de poids correspondante  $\omega$  de sorte que  $G$  soit 3-colorable si, et seulement si,  $(F, \omega)$  est  $k$ -improprement 3-colorable.

La construction du sous-graphe  $F$  est la même que dans [MR00], et est rappelée ci-après. Pour tout sommet  $v$  de  $T$ , notons  $H$  le sous-graphe de  $T$  induit par tous les sommets à distance au plus quatre de  $v$  dans  $T$ . La face externe de  $H$  est bornée par un hexagone régulier ; les points de contact de  $H$  sont les 6 points extrémaux de cet hexagone. Pour chaque sommet  $v$  de  $G$ , une copie  $H_v$  de l'hexagone  $H$  est placée sur le réseau, suffisamment loin de celles déjà placées. Pour chaque arête  $e = uv$  de  $G$ , un chemin induit  $P^e$  est ajouté entre l'un des points de contact de  $H_u$  et l'un de ceux de  $H_v$ . Remarquons qu'il est possible de placer ces chemins de sorte qu'ils soient deux à deux disjoints. De plus, nous pouvons supposer qu'ils ont tous une longueur impaire : si un chemin  $P^e$  possède une longueur paire, il suffit d'ajouter au chemin un hexagone  $H_{v_e}$  (comme si l'arête  $e$  de  $G$  avait été subdivisée en ajoutant un sommet  $v_e$ ). Comme il existe entre toute paire de points de contact de l'hexagone  $H$  des chemins de n'importe quel parité, la longueur de  $P^e$  peut être changée de sorte à ce qu'elle soit impaire.

Tout sommet de  $F$  se voit assigner un poids de  $k + 1$ , sauf un sommet sur deux de chaque chemin  $P^e$ , en commençant par le deuxième, qui ont un poids  $2k + 2$ .

Afin de prouver l'équivalence de l'existence des colorations appropriées, considérons pour tout graphe pondéré  $(M, \omega)$  le graphe  $M_\omega$  obtenu à partir de  $M$  en remplaçant chaque sommet  $v$  par une clique de taille  $\omega_v$  : 3-colorer  $k$ -improprement le graphe pondéré  $(M, \omega)$  revient à

3-colorer  $k$ -improprement le graphe  $M_\omega$ . Dans toute 3-coloration  $k$ -impropre de l'hexagone  $H$ , tous les sommets de chaque clique  $K(x)$  de  $H_\omega$  pour  $x \in H$  sont monochromatiques. En outre, les sommets de toutes les cliques correspondant aux points de contact sont monochromatiques. En réalité il n'est pas difficile, en appliquant le lemme 20, de prouver que l'unique 3-coloration impropre  $H_\omega$  (aux permutations de couleurs près) est celle induite par l'unique 3-coloration (propre) de  $H$ .

D'après le lemme 20, dans toute 3-coloration  $k$ -impropre d'un chemin  $P_\omega^e$ , les cliques de taille  $2k + 2$  induites par les sommets d'indice pair de  $P_e$  sont bicolores, et les cliques de taille  $k + 1$  n'utilisent qu'une seule couleur, la même pour toutes. Ainsi les sommets extrémaux doivent être colorés différemment (et les cliques extrêmes sont elles aussi monochromatiques puisque ce sont des cliques induites par des points de contact d'un hexagone  $H$ ).

Donc, toute 3-coloration  $k$ -impropre du graphe pondéré  $(F, \omega)$  induit une 3-coloration propre du graphe  $G$ , en assignant à chaque sommet  $v$  de  $G$  l'unique couleur attribuée aux points de contact de l'hexagone  $H_v$ . Réciproquement, si  $c$  est une 3-coloration (propre) de  $G$  et qu'à chaque point de contact de  $H_v$  soit attribuée  $\omega_v$  fois la couleur  $c(v)$ , il n'est pas difficile d'étendre cette coloration en une 3-coloration  $k$ -impropre du graphe pondéré  $(F, \omega_v)$ .  $\square$

### 3.2.4.2. Coloration impropre distincte du réseau triangulaire.

Dans cette sous-section, nous considérons uniquement les colorations  $k$ -impropres des graphes pondérés  $(F, \omega)$  dans lesquelles les couleurs assignées à un sommet doivent être deux à deux distinctes. Une telle coloration  $k$ -impropre est dite *distincte*. Nous définissons le problème décisionnel suivant.

#### **Problème 6. $l$ -coloration $k$ -impropre distincte du réseau triangulaire.**

INSTANCE : un sous graphe induit  $F$  du réseau triangulaire  $T$  et une assignation de poids  $\omega$  pour  $F$ .

QUESTION : existe-t-il une  $l$ -coloration  $k$ -impropre distincte de  $(F, \omega)$  ?

Notons qu'il est inutile de considérer des assignations de poids dont l'un des poids est supérieur à  $l$ , puisqu'un tel graphe pondéré sera nécessairement non colorable. D'un point de vue pratique, ce problème fait sens lorsque les sommets représentent des antennes de transmission : il risque effectivement de se produire des conflits si une antenne tente de propager deux messages différents sur la même fréquence. Nous considérons à nouveau le cas où  $l$  vaut trois. Si  $k$  est nul, le problème est clairement  $\mathcal{NP}$ -complet d'après le théorème 21, et le lecteur peut également se reporter à [MR00]. Si  $k$  est au moins 6, alors comme le réseau triangulaire  $T$  est 6-régulier, le problème devient trivial. Nous allons à présent prouver que le problème reste intraitable tant que  $k$  est inférieur à 6.

**Théorème 22.** *Pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$ , le problème de la 3-coloration  $k$ -impropre distincte du réseau triangulaire est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

**Démonstration.** Voyons d'abord l'idée générale que nous allons suivre. Une fois encore, le problème réduit est celui de la 3-coloration (propre) des graphes planaires de degré maximum quatre. Étant donné un graphe planaire  $G$  de degré maximum quatre, nous allons construire un sous-graphe induit pondéré  $(F, \omega)$  de  $T$  de sorte que  $G$  soit 3-colorable si, et seulement si,  $(F, \omega)$  est distinctement et  $k$ -improprement 3-colorable. Pour chaque sommet  $v$  de  $G$ , nous ajoutons une copie  $H_v^k$  d'un sous-graphe induit  $H^k$  de  $T$ . L'une des propriétés du graphe  $H^k$  sera d'avoir quatre *points de contacts* (qui sont des sommets distingués des autres). Ensuite, pour chaque arête  $e = uv$  de  $G$ , l'un des points de contact de  $H_u^k$  sera relié à l'un des points de contact de  $H_v^k$  par une copie  $P_e^k$  d'un sous-graphe induit  $P^k$  de  $T$ . Les points de contact

correspondants sont appelés les *sommets terminaux* de  $P_e^k$ . Nous prendrons garde à assurer les propriétés suivantes pour le graphe obtenu, et le poids correspondant :

- la construction obtenue est un sous-graphe induit du réseau triangulaire  $T$  ; en particulier tous les  $P_e^k$  sont sommet-disjoints, et le graphe  $H^k$  peut être plongé comme un sous-graphe induit de  $T$  de sorte qu'au moins quatre plongements de  $P^k$  puissent partir de ses points de contact ;
- toute 3-coloration  $k$ -impropre distincte de  $H^k$  attribue un même ensemble de couleurs aux points de contacts ; et
- toute 3-coloration  $k$ -impropre distincte de  $P^k$  attribue des ensembles de couleurs différents (non nécessairement disjoints) aux deux sommets terminaux.

Commençons par indiquer le poids des points de contact. En raison de la nature de nos constructions, le cas où  $k$  vaut deux nécessite une définition à part. Tous les points de contact de  $H^2$  (et donc les sommets terminaux de  $P^2$ ) ont un poids égal à un. La couleur d'un sommet  $v$  de  $G$  correspondra à la couleur donnée aux points de contact de  $H_v^2$ . Pour les autres valeurs de  $k$ , les points de contact de  $H^k$  ont un poids égal à deux, et à la couleur d'un sommet  $v$  de  $G$  correspondra l'ensemble complémentaire pour les points de contact de  $H^k$ . Ainsi, si le sommet  $v$  est coloré par la couleur 1, les points de contact du sous-graphe  $H_v^k$  seront colorés par l'ensemble  $\{2, 3\}$ . Décrivons à présent les constructions des graphes  $H^k$  et  $P^k$ .

Chacun des graphes  $P^k$  est composé d'une concaténation de sous-graphes  $E^k$ , appelés *forceurs* et qui forcent leur sommets terminaux à avoir le même ensemble de couleur dans toute 3-coloration  $k$ -impropre distincte de  $E^k$ , ainsi que d'un sous-graphe  $R^k$  appelé *inverseur* et qui force ses sommets terminaux à recevoir des ensembles de couleurs différents dans toute 3-coloration  $k$ -impropre distincte de  $R^k$ . Généralement, le sous-graphe  $H^k$  sera une simple extension du forceur  $E^k$ . Voyons désormais précisément, pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots, 5\}$ , les graphes  $E^k$ ,  $H^k$  et  $R^k$ .

Dans les figures qui suivent, un sommet est représenté par un triangle si son poids est égal à un, un disque si son poids vaut deux et un carré si son poids est trois. Les sommets entourés d'un cercle en pointillés sont les points de contact. L'unique 3-coloration  $k$ -impropre distincte (aux permutation de couleurs près) de certains forceurs est indiquée, et les exposants indiquent alors l'impropreté du sommet correspondant, respectivement à la couleur correspondante. Pour toute couleur  $c \in \{1, 2, 3\}$ , la couleur *complémentaire*  $\{1, 2, 3\} \setminus \{c\}$  est notée  $\bar{c}$ .

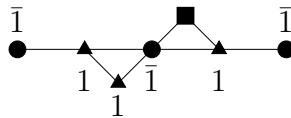


FIG. 3.23. Le forceur  $E^1$ .

Il n'est pas difficile de vérifier que tous les sommets de poids deux de  $E^1$  sont monochromatiques dans toute 3-coloration  $k$ -impropre distincte. En outre, comme  $H^1$  est une simple concaténation de cinq forceurs  $E^1$ , tous les points de contact de  $H^1$  doivent être monochromatiques, et ont impropreté 0 dans  $H^1$  respectivement à chacune de leurs deux couleurs. Toutes les propriétés annoncées sont ainsi respectées, et une 12-subdivision du réseau triangulaire  $T$  suffit à assurer le plongement de ces graphes en tant que sous-graphes induits de  $T$ .

Une première remarque est que les forceurs  $E^2$  peuvent être concaténés en ligne droite, aussi bien qu'en angles de 120 degrés. Le graphe pondéré  $H^2$  possède une unique 3-coloration 2-impropre distincte, dans laquelle les sommets de poids un ont la couleur 1, et les sommets

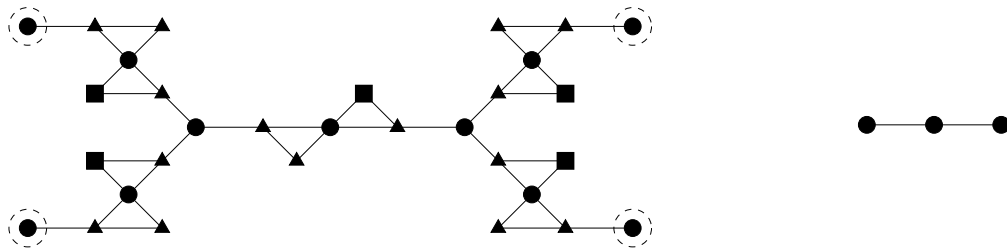


FIG. 3.24. Les sous-graphes induits  $H^1$  (à gauche) et  $R^1$ .

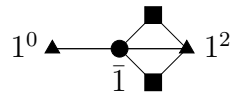


FIG. 3.25. Le forceur  $E^2$ .

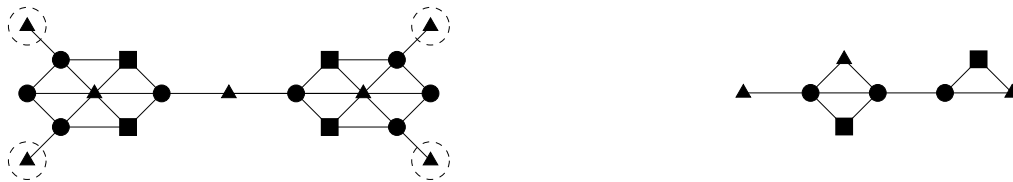


FIG. 3.26. Les sous-graphes induits  $H^2$  (à gauche) et  $R^2$ .

de poids deux la couleur complémentaire. De plus, les points de contact ont tous impropreté 0 dans  $H^2$ . Comme les forceurs ont une longueur égale à deux et les inverseurs une longueur égale à quatre, une 4-subdivision de  $T$  suffit pour plonger ces graphes comme sous-graphes induits de  $T$ .

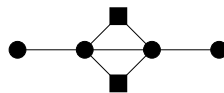


FIG. 3.27. Le forceur  $E^3$ .

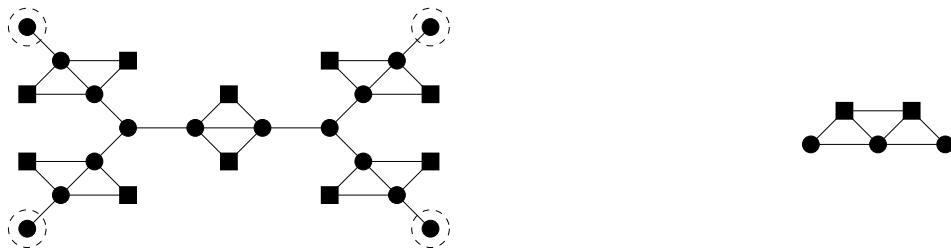


FIG. 3.28. Les sous-graphes induits  $H^3$  (à gauche) et  $R^3$ .

Toute 3-coloration 3-impropre distincte de  $E^3$  attribue un même ensemble de deux couleurs aux sommets terminaux, et tous deux ont impropreté nulle respectivement à l'une de leurs deux couleurs, et impropreté un respectivement à l'autre. Dans l'unique 3-coloration 3-impropre et distincte de  $H^3$ , tous les points de contact sont monochromatiques et ont impropreté zéro



respectivement à l'une de leurs deux couleurs, et impropreté un respectivement à l'autre. Les sommets terminaux de l'inverseur  $E^3$  ont impropreté un respectivement à l'une de leur deux couleurs, et deux respectivement à l'autre. En outre, il est possible de les concaténer en tournant, ce qui permet de créer les graphes  $P^3$ .

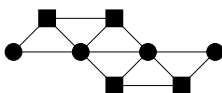


FIG. 3.29. Le forceur  $E^4$ .

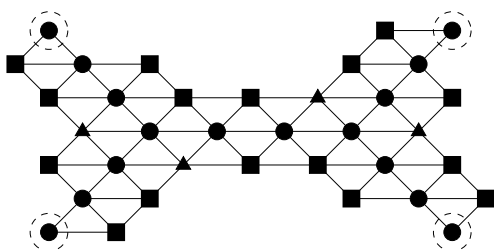


FIG. 3.30. Les sous-graphes induits  $H^4$  (à gauche) et  $R^4$ .

Toute 3-coloration 4-impropre et distincte du forceur  $E^4$  attribue un même ensemble de couleurs aux sommet terminaux, et tous deux ont impropreté un respectivement à une couleur et impropreté deux respectivement à l'autre. Le graphe  $H^4$  est une extension du forceur  $E^4$ , et les sommets de contact doivent recevoir le même ensemble de couleurs. En outre, en supposant que les points de contact soient colorés par la couleur  $\bar{3}$ , il est possible de choisir pour chacun d'avoir impropreté un respectivement à la couleur 1 et impropreté deux respectivement à la couleur 2, ou bien l'inverse. Lorsqu'un inverseur  $R^4$  est concaténé à l'un des points de contact du graphe  $H^4$ , le sommet terminal de  $R^4$  n'appartenant pas à  $H^4$  sera nécessairement coloré différemment du point de contact, sinon le points de contact aurait impropreté cinq respectivement à l'une de ses deux couleurs (et quatre respectivement à l'autre).

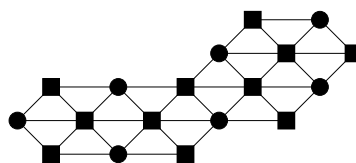
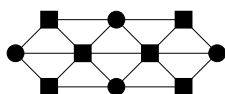


FIG. 3.31. Tourner avec des forceurs lorsque  $k = 5$ .

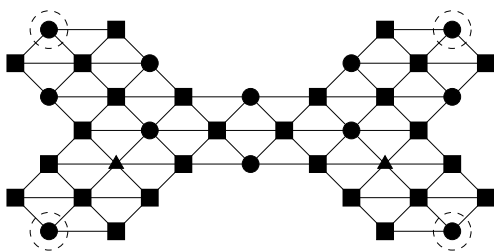


FIG. 3.32. Les sous-graphes induits  $H^5$  (à gauche) et  $R^5$ .

Toute 3-coloration 5-impropre distincte du forceur  $E^5$  attribue un même ensemble de couleurs aux sommets terminaux, et tous deux ont impropreté trois respectivement à chacune des deux couleurs. La figure 3.31 montre comment il est possible de tourner en concaténant des forceurs. Les points de contact de  $H^5$  doivent être monochromatiques, et ont tous impropreté trois dans  $H^5$  respectivement à chacune de leurs deux couleurs. Remarquons qu'en plus d'un point de contact et d'un sommet terminal, deux autres sommet (de degré trois) de  $H^5$  et  $E^5$  doivent être identifiés afin de pouvoir concaténer ces deux graphes. A chaque fois que l'inverseur est utilisé, son sommet terminal le plus à gauche aura impropreté trois respectivement à ses deux couleurs dans le sous-graphe induit par la suppression des autres sommets de l'inverseur. C'est pourquoi l'inverseur se comportera bien comme un inverseur, c'est-à-dire que les sommets terminaux seront colorés différemment. Ils auront en outre tous deux impropreté un respectivement à l'une de leurs deux couleurs, et impropreté deux respectivement à l'autre.  $\square$

### 3.3. Coloration impropre asymptotique des graphes d'intersection de disques unitaires

Les résultats des sections 3.3 et 3.4 ont été obtenus avec Ross J. Kang et Tobias Müller [KMS05a, KMS06].

Cette section est dédiée à l'extension à la coloration impropre des résultats de McDiarmid et Reed obtenus dans [MR99] pour la coloration propre. Nous nous intéressons toujours à la coloration des graphes d'intersection de disques unitaires : étant donné un ensemble  $V$  non vide de points du plan et un réel  $r > 0$ , un “*graphe de proximité*”, ou un “*graphe d'interférence*”, noté  $G(V, r)$ , est formé en reliant deux sommets si, et seulement si, leur distance est strictement inférieure à  $r$ . Comme mentionné précédemment, un champ d'application de la coloration des graphes d'intersection de disques unitaires est la création de réseaux de récepteurs pour les téléphones mobiles : il faut attribuer une fréquence (couleur) à chaque récepteur (point de l'ensemble  $V$ ) de sorte à éviter les interférences (voir [Mac78] ou bien [Hal80] où ce problème est appelé *frequency-distance constrained cochannel assignment problem*). Si chaque récepteur peut tolérer un certain nombre  $k$  d'interférences, comme c'est le cas pour le problème d'Alcatel, le problème revient à colorer  $k$ -improprement le graphe d'interférence obtenu. Remarquons que pour de grands réseaux de récepteurs, il est raisonnable de supposer que  $V$  est grand, et que ses points sont “assez bien répartis”, donc que le comportement des paramètres étudiés sera proche de celui décrit ici.

Quand la distance  $r$  est faible, des petits changements de  $r$  ou de  $V$  peuvent induire de grandes variations sur le nombre de couleurs nécessaires. C'est pourquoi McDiarmid et Reed ont étudié le problème (pour la coloration propre) lorsque  $V$  est infini et  $r \rightarrow \infty$ , en espérant que les résultats asymptotiques obtenus permettront une meilleure compréhension des cas finis, avec des valeurs des paramètres utiles en pratique [MR99]. Nous allons étendre cette étude à la coloration impropre. Les résultats seront d'abord donnés pour un ensemble  $V$  quelconque, puis pour un ensemble  $V$  avec une distribution uniforme des points, et enfin pour le réseau triangulaire et les réseaux en général.

Notons que les résultats obtenus ici pour le plan se généralisent naturellement aux dimensions supérieures.

### 3.3.1. Résultats

**Définition 21.** Soit  $V$  un ensemble dénombrable de points du plan. Pour tout  $x > 0$ , notons  $f(x)$  le supremum du rapport  $\frac{|V \cap S|}{x^2}$  pour tous les carrés ouverts  $S$  de côté  $x$ , dont les côtés sont parallèles aux axes. La *densité supérieure* de l'ensemble  $V$ , notée  $\sigma^+(V)$ , est  $\inf_{x>0} f(x)$ .

Le graphe  $G(V, r)$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est  $V$ , et l'ensemble d'arêtes est  $\{xy : (x, y) \in V^2 \text{ et } \|x - y\| < r\}$ .

**Théorème 23** (McDiarmid et Reed [MR99]). *Soit  $V$  un ensemble dénombrable et non vide de points du plan de densité supérieure  $\sigma$ .*

- (i)  $\omega(G(V, r))/r^2 \geq \sigma\pi/4$  pour tout  $r > 0$ .
- (ii)  $\chi(G(V, r))/r^2 \geq \sigma\sqrt{3}/2$  pour tout  $r > 0$ .
- (iii)  $\Delta(G(V, r))/r^2 \rightarrow \sigma\pi$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ .
- (iv)  $\omega(G(V, r))/r^2 \rightarrow \sigma\pi/4$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ .
- (v)  $\chi(G(V, r))/r^2 \rightarrow \sigma\sqrt{3}/2$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

Précisons que  $2\sqrt{3}/\pi \approx 1.103$ . Ce théorème se généralise comme suit.

**Théorème 24.** *Soit  $V$  un ensemble dénombrable et non vide de points du plan de densité supérieure  $\sigma$ . Posons  $\gamma := \sigma\sqrt{3}/2$ .*

- (i)  $c_k(G(V, r))/r^2 \geq \frac{\gamma}{k+1}$  pour tout  $r > 0$ .
- (ii)  $(k+1)c_k(G(V, r))/r^2 \rightarrow \gamma$  si  $k = o(r)$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

**Corollaire 5.** *Soit  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  un ensemble de densité supérieure  $\sigma \in (0, \infty)$ . Supposons en outre que  $k = o(r)$ . Alors,*

$$\frac{(k+1)c_k(G(V, r))}{\chi(G(V, r))} \rightarrow 1 \text{ quand } r \rightarrow \infty.$$

Notons que  $k$  peut dépendre de  $r$ . De plus, il est ainsi vrai que pour tout ensemble dénombrable  $V$  de points du plan de densité supérieure finie, le quotient de  $c_k(G(V, r))$  par  $\omega(G(V, r))/(k+1)$  tend vers  $2\sqrt{3}/\pi$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Pour  $k = 0$ , ce résultat est prouvé dans [MR99], et était conjecturé pour le réseau triangulaire dans [Gam86].

McDiarmid et Reed ont également renforcé les bornes supérieures du théorème 23 dans le cas où les points sont distribués de façon presque uniforme dans le plan. Étant donné un ensemble  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ , une *structure cellulaire de  $V$  de densité  $\sigma$  et de rayon  $\rho$*  est une collection  $(C_v : v \in V)$  d'ensembles partitionnant le plan et telle que pour tout  $v \in V$ ,  $C_v$  soit contenu dans une boule de rayon  $\rho$  centrée en  $v$ , et l'aire de  $C_v$  soit  $1/\sigma$ . Un exemple est donné par la figure 3.33.

**Théorème 25** (McDiarmid et Reed [MR99]). *Soit  $V$  un ensemble de points du plan ayant une structure cellulaire de densité  $\sigma$  et de rayon  $\rho$ . Posons  $\gamma := \sigma\sqrt{3}/2$ . Alors, pour tout  $r > 0$ ,*

$$\begin{aligned} \omega(G(V, r)) &\leq (\sigma\pi/4)(r + 2\rho)^2 \text{ et} \\ \chi(G(V, r)) &< \left( \gamma^{1/2}(r + 2\rho) + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème 23,

$$\begin{aligned} \omega(G(V, r)) &= (\sigma\pi/4)r^2 + \mathcal{O}(r) \text{ et} \\ \chi(G(V, r)) &= \gamma r^2 + \mathcal{O}(r) \text{ quand } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ce théorème se généralise de la façon suivante.

**Théorème 26.** *Soit  $V$  un ensemble de points du plan ayant une structure cellulaire de densité  $\sigma$  et de rayon  $\rho$ , et posons  $\gamma := \sigma \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Alors, si  $r \geq \sqrt{3}(k+1)$ ,*

$$c_k(G(V, r)) < \frac{\left(\gamma^{1/2}(r+2\rho) + \frac{2}{\sqrt{3}} + 2k+1\right) \left(\gamma^{1/2}(r+2\rho) + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{k}{2} + 1\right)}{(k+1)}.$$

*Ainsi, si  $r \geq \sqrt{3}(k+1)$ , alors  $(k+1)c_k(G(V, r)) = \gamma r^2 + \mathcal{O}(kr)$  quand  $r \rightarrow \infty$ .*

Le point clé des théorèmes précédents est le cas particulier où  $V$  est le réseau triangulaire  $T$  (i.e. la combinaison linéaire et entière des vecteurs  $a := (0, 1)$  et  $b := (1/2, \sqrt{3}/2)$ ). Soit  $G_T$  le graphe dont les sommets sont les points de  $T$ , et dans lequel deux sommets sont adjacents si, et seulement si, ils sont à distance strictement inférieure à un l'un de l'autre. Remarquons ici que l'ensemble des cellules de Dirichlet-Voronoi de l'ensemble  $T$  constitue une structure cellulaire pour  $T$  de densité  $2/\sqrt{3}$  et de rayon  $1/\sqrt{3}$ . Donc le théorème 26 fournit de bonnes bornes pour  $c_k(G(V, r))$ . Néanmoins, il est possible d'avoir de meilleurs résultats, et un résultat exact est connu lorsque  $k = 0$ .

Pour tout  $r > 0$ , soit  $\hat{r}$  la plus petite distance entre deux points de  $T$  distants d'au moins  $r$  (i.e.  $\hat{r}$  est la plus petite valeur de  $(x^2 + xy + y^2)^{1/2}$  supérieure ou égale à  $r$  avec  $x$  et  $y$  entiers naturels). Notons que  $r \leq \hat{r} \leq \lceil r \rceil$ , et que la valeur de  $\hat{r}^2$  peut être calculée en  $\mathcal{O}(r)$  opérations arithmétiques.

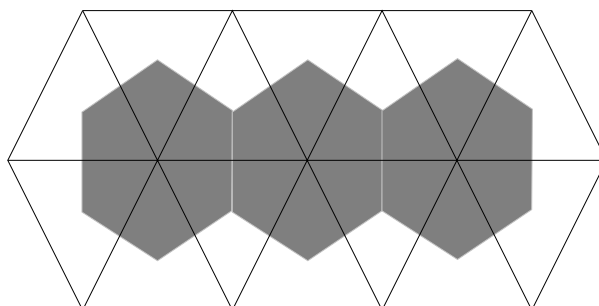
**Théorème 27** (Voir [MR99] pour l'origine). *Pour tout  $r > 0$ ,  $\chi(G(T, r)) = \hat{r}^2$ .*

Nous n'avons pas de résultat exact pour la coloration  $k$ -impropre, mais nous avons tout de même obtenu la borne suivante.

**Théorème 28.** *Pour tout  $k$  et tout  $r \geq \sqrt{3}(k+1)$ ,*

$$c_k(G(T, r)) \leq \left\lceil \frac{r-1}{k+1} + 1 \right\rceil \left\lceil r + \frac{k}{2} \right\rceil < \frac{(r+2k+1)(r+\frac{k}{2}+1)}{k+1}.$$

*En outre, si  $r < \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ , alors  $c_k(G(T, r)) \leq \lceil \frac{2r}{\sqrt{3}} \rceil$ .*



**FIG. 3.33.** Une partie du réseau triangulaire  $T$  (i.e. les combinaisons linéaires entières des vecteurs  $a = (0, 1)$  et  $b = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ) en noir, et les cellules de Dirichlet-Voronoi correspondantes en gris : chaque cellule est un hexagone régulier de côté  $1/\sqrt{3}$ , donc d'aire  $1/\sigma = \sqrt{3}/2$ , et contenue dans un disque de rayon  $\rho = 1/\sqrt{3}$ .

### 3.3.2. Démonstrations

Comme mentionné précédemment, les principaux résultats reposent sur le cas particulier où  $V$  est le réseau triangulaire  $T$ . C'est pourquoi nous commençons par considérer cette situation. Le théorème 28 découle directement du résultat plus général suivant.

**Théorème 29.** Soient  $k$  un entier naturel et  $\kappa \in \{1, 2, \dots, \sqrt{k+1}\}$ . Posons  $x_0 := \lceil \frac{k+1}{\kappa} \rceil$ . Si  $r \geq \sqrt{3}x_0$ ,

$$c_k(G(T, r)) \leq \left\lceil \frac{1}{x_0} \left( r + \frac{\kappa - 1}{2} + x_0 - 1 \right) \right\rceil \left\lceil \frac{1}{\kappa} \left( r + \frac{x_0 - 1}{2} + \kappa - 1 \right) \right\rceil.$$

En outre, si  $r < \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ , alors  $c_k(G(T, r)) \leq \lceil \frac{2r}{\sqrt{3}} \rceil$ .

**Démonstration du théorème 29.** Il est suffisant d'exhiber une coloration  $k$ -impropre de  $T$  qui satisfasse la borne annoncée. Il s'avère qu'un *pavage strict* de  $T$ , c'est-à-dire une coloration telle que chaque classe de couleur soit la translation d'un sous-réseau  $T'$  de  $T$ , atteint la borne. Nous décrivons une telle coloration simplement par une brique de base : un sous-ensemble fini  $V' \subseteq T$  tel que  $V' + T'$  pave  $T$ . Définissons à présent la brique  $V'$  et le sous-réseau  $T'$ . Soient  $x_1 := \alpha x_0$  et  $y_1 := \beta \kappa$  avec

$$\alpha := \left\lceil \frac{1}{x_0} \left( r + \frac{\kappa - 1}{2} + x_0 - 1 \right) \right\rceil \text{ et } \beta := \left\lceil \frac{1}{\kappa} \left( r + \frac{x_0 - 1}{2} + \kappa - 1 \right) \right\rceil.$$

L'ensemble  $V'$  est l'ensemble des points  $xa + yb$  tels que  $(0, 0) \leq (x, y) < (x_1, y_1)$  et  $T'$  celui des combinaisons linéaires entières de  $x_1a$  and  $y_1b$ . Il est clair que  $V' + T'$  pave  $T$ .

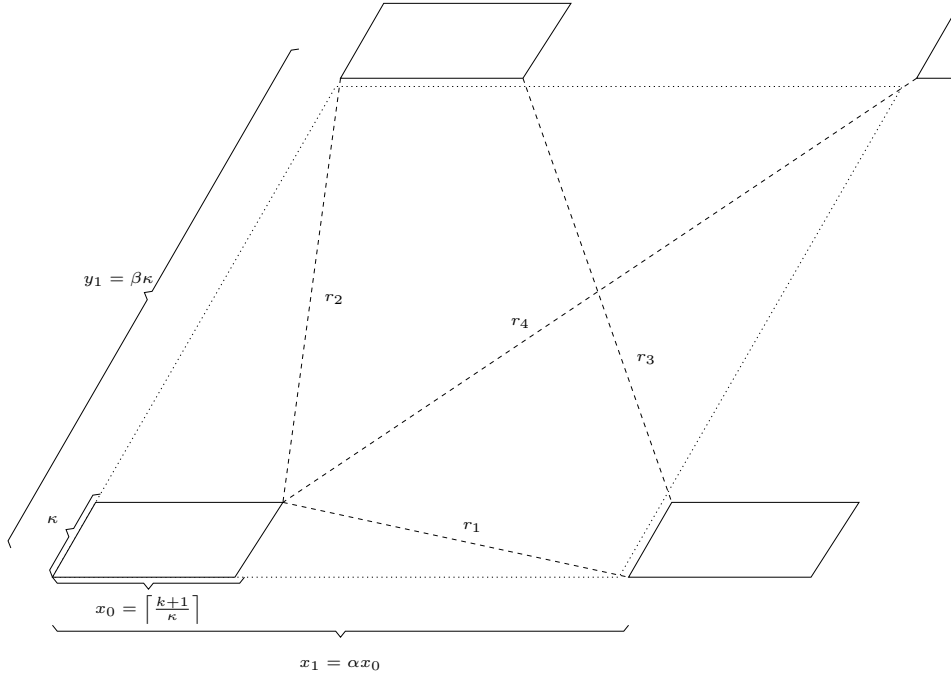


FIG. 3.34. Illustration du pavage pour le théorème 29.

Posons  $V'_{i,j} := \{(i', j') \mid ix_0 \leq i' \leq (i+1)x_0 - 1 \text{ et } j\kappa \leq j' \leq (j+1)\kappa\}$  pour  $(0, 0) \leq (i, j) < (\alpha, \beta)$  et attribuons à chaque ensemble  $V'_{i,j}$  une couleur différente. Pour que

la coloration obtenue en pavant le réseau soit  $k$ -impropre, il suffit que les distances  $r_1, r_2, r_3$  et  $r_4$  de la figure 3.34 soient toutes au moins  $r$  (car  $r$  est au moins  $\sqrt{3}x_0$ ). D'après la formule de la distance entre deux points dans le réseau triangulaire,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= ((\alpha - 1)x_0 + 1)^2 - ((\alpha - 1)x_0 + 1)(\kappa - 1) + (\kappa - 1)^2 \\ &= x_0^2(\alpha - 1)^2 + (2 - (\kappa - 1))x_0(\alpha - 1) + 1 - (\kappa - 1) + (\kappa - 1)^2. \end{aligned}$$

Donc  $r_1 \geq r$  si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &\geq \frac{1}{x_0} \left( \frac{\kappa - 1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \sqrt{((\kappa - 1) - 2)^2 - 4(1 - (\kappa - 1) + (\kappa - 1)^2 - r^2)} \right) \\ &= \frac{1}{x_0} \left( \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}(\kappa - 1)^2} + \frac{\kappa - 1}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

qui est vrai par le choix de  $\alpha$ . Vérifier que  $r_2 \geq r$  se fait de la même manière, et clairement  $r_4 \geq r_3 \geq r_1$ . Le nombre de couleurs utilisées dans cette coloration est  $\alpha\beta$ , comme souhaité.  $\square$

Le théorème 28 est simplement le théorème 29 lorsque  $\kappa = 1$ . D'autres choix de  $\kappa$  peuvent donner de meilleures bornes lorsque  $k + 1$  est composé. La meilleure borne est obtenue lorsque  $k + 1$  est un carré.

**Corollaire 6.** Soient  $k$  un entier naturel et  $k + 1 = \kappa^2$  un carré. Si  $r \geq \sqrt{3}\kappa$ ,

$$c_k(G(T, r)) \leq \left\lceil \frac{1}{\kappa} \left( r + \frac{3\kappa - 3}{2} \right) \right\rceil^2 < \frac{(r + (5\sqrt{k+1} - 3)/2)^2}{k + 1}.$$

Bien que le théorème 28 suffise à nos desseins, il serait intéressant de connaître la valeur précise de  $c_k(G(T, r))$  pour tous les choix de  $k$  et  $r$ .

Il est possible, pour prouver la borne inférieure du théorème 24 (et donc du théorème 26), de s'inspirer de l'approche utilisée dans [MR99] en établissant une borne inférieure d'un analogue  $k$ -impropre du *quotient de stabilité*, qui est le maximum pour tous les sous-graphes induits  $H$  de  $G$  des quotients  $|V(H)|/\alpha(H)$ . (L'analogue serait le maximum des quotients  $|V(H)|/\alpha^k(H)$ , avec  $\alpha^k(H)$  le plus grand nombre de sommets de  $H$  induisant un sous-graphe de  $H$  de degré maximum  $k$ .) Toutefois, il suffit d'appliquer la proposition 4 au théorème 23. Il ne reste alors qu'à prouver les bornes supérieures.

À cette fin, rappelons ici la définition suivante donnée dans [MR99]. Étant donnés deux ensembles  $A$  et  $B$  de points du plan et un réel  $w > 0$ , une fonction  $\phi : A \rightarrow B$  est  $w$ -oscillante si la distance euclidienne  $d(a, \phi(a))$  est au plus  $w$  pour chaque  $a \in A$ . Remarquons que s'il existe une injection  $w$ -oscillante de  $A$  dans  $B$ , alors  $c_k(G(A, r)) \leq c_k(G(B, r + 2w))$  pour tout  $r > 0$ .

**Démonstration du théorème 24.** La preuve est inspirée de celle du lemme 11 de [MR99]. Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous voulons montrer que  $c_k(G)/r^2 \leq (\sigma + \varepsilon) \frac{\sqrt{3}}{2(k+1)}$ . Soit  $T'$  un homothétique de  $T$  de densité  $(\sigma + \varepsilon/2)$ , i.e. soit  $T' = \xi^{-1}T$  avec  $\xi := ((\sigma + \varepsilon/2)\sqrt{3}/2)^{1/2}$ .

Notons  $S$  le carré unité demi-ouvert  $S := \{(x, y) : 0 \leq x, y < 1\}$ . Pour tout  $x$  suffisamment grand, tout translaté  $xS$  contient au moins  $(\sigma + \varepsilon/4)x^2$  points de  $T'$  et au plus ce même nombre de points de  $V$ . Si le plan est partitionné en carrés de cotés  $x$ , alors il existe, pour chaque carré  $X$ , une injection  $w$ -oscillante de  $V \cap X$  dans  $T' \cap X$  avec  $w = \sqrt{2}x$ . Ceci fournit une injection  $w$ -oscillante  $\phi : V \rightarrow T'$ .

En utilisant le théorème 28,

$$\begin{aligned}
c_k(G(V, r)) &\leq c_k(G(T', r + 2w)) \\
&= c_k(G(T, \xi(r + 2w))) \\
&< \frac{(\xi(r + 2w) + 2k + 1) (\xi(r + 2w) + \frac{k}{2} + 1)}{(k + 1)} \\
&< r^2(\sigma + \varepsilon) \frac{\sqrt{3}}{2(k + 1)} \text{ si } r \text{ est suffisamment grand.}
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant sera utilisé dans la démonstration du théorème 26. Pour tout  $w > 0$ , deux ensembles  $A$  et  $B$  sont  $w$ -proches si, et seulement si, il existe une bijection  $w$ -oscillante de  $A$  vers  $B$ .

**Lemme 21** (McDiarmid and Reed [MR99]). *Soit  $A$  (respectivement  $B$ ) un ensemble possédant une structure cellulaire de densité  $\sigma$  et de rayon  $r_A$  (respectivement  $r_B$ ). Les ensembles  $A$  et  $B$  sont  $(r_A + r_B)$ -proches.*

**Démonstration du théorème 26.** Nous appliquons ici l'idée utilisée dans la preuve du théorème 2 de [MR99]. Rappelons que les cellules de Dirichlet-Voronoi de  $T$  constituent une structure cellulaire de densité  $2/\sqrt{3}$  et de rayon  $1/\sqrt{3}$ . Posons  $\xi := \sqrt{\gamma} = \left(\sigma \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}$ .

L'ensemble  $\xi V$  possède une structure cellulaire de même densité  $2/\sqrt{3}$ , mais de rayon  $\xi\rho$ .

D'après le lemme 21,  $\xi V$  et  $T$  sont  $w$ -proches, avec  $w = 1/\sqrt{3} + \xi\rho$ . Ainsi, pour tout  $r > 0$ ,

$$c_k(G(V, r)) = c_k(G(\xi V, \xi\rho)) \leq c_k(G(T, D))$$

avec  $D := \xi r + 2w = \xi(r + 2\rho) + \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Donc,

$$c_k(G(V, r)) \leq c_k(G(T, D)) < \frac{(D + 2k + 1) (D + \frac{k}{2} + 1)}{k + 1}$$

d'après le théorème 28. □

## 3.4. Coloration impropre des graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires

Nous allons étudier dans cette section le comportement du nombre chromatique  $k$ -impropre pour les graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires afin de généraliser les résultats de [MM05, MM06] et [Mül05]. Les définitions et les résultats sont donnés dans la première sous-section, et les démonstrations dans la seconde.

### 3.4.1. Résultats

Nous allons travailler dans  $\mathbb{R}^d$ , où  $d$  est un entier fixé au moins égal à 2. Au vue des problèmes pratiques considérés, le cas qui nous intéresse est lorsque  $d$  est égal à 2. Toutefois, les résultats présentés ici sont valables quelle que soit la dimension  $d$  et le cas général, intéressant du point de vue théorique, n'ajoute aucune difficulté ou lourdeur d'écriture. Nous considérons les graphes  $G_n$  obtenus de la façon suivante. Soit  $\nu$  une distribution sur  $\mathbb{R}^d$ , de densité bornée. Des points  $X_1, \dots, X_n$  de  $\mathbb{R}^d$  sont choisis indépendamment et aléatoirement selon  $\nu$ . Notons  $G_n := G(\{X_1, \dots, X_n\}, r(n))$  où  $r(n)$  est une suite de réels strictement positifs qui tend vers

0 quand  $n$  tend vers l'infini. Nous nous intéressons au comportement du nombre chromatique, du nombre chromatique impropre et de la taille de la plus grande clique de  $G_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Dans ce modèle de graphes aléatoires, la distance  $r(n)$  joue un rôle similaire à celui de  $p(n)$  dans le modèle  $G(n, p)$  de Erdős-Rényi. Les différents comportements seront décrits en fonction de la quantité  $r^d n$  car, conformément à l'intuition,  $r^d n$  permet de mesurer le degré moyen du graphe  $G_n$  (considérons par exemple le cas où la distribution  $\nu$  est uniforme sur  $[0, 1]^d$  : la probabilité que  $X_i X_j$  soit une arête de  $G_n$  est  $\approx \pi r^d$  si  $r$  est suffisamment proche de 0, et l'espérance du degré de  $X_i$  est donc  $\approx \pi(n-1)r^d$ ). Un traitement plus rigoureux de la relation entre  $r^d n$  et le degré moyen de  $G_n$  est consultable dans [MM05].

Dans cette sous-section, l'impropreté  $k$  est fixée, mais les résultats énoncés sont toujours corrects si  $k$  augmente avec  $n$ , à condition que l'augmentation ne soit pas trop rapide.

**Théorème 30.** *Soit  $k$  un entier fixé et  $G_n$  défini précédemment.*

(i) *Si  $nr^d \gg n^{-\delta}$  pour tout  $\delta > 0$ , alors*

$$\frac{(k+1)c_k(G_n)}{\chi(G_n)} \rightarrow 1 \text{ presque sûrement.}$$

(ii) *S'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $nr^d \ll n^{-\varepsilon}$ , alors*

$$\mathbb{P}\left(c_k(G_n) \in \left\{ \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1 \right\} \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} \right) = 1.$$

Les résultats de ce théorème peuvent s'exprimer en fonction de  $c_k$  et  $\omega(G_n)$  seulement, grâce aux résultats de [MM05, MM06]. Toutefois, les résultats nécessitent quelques définitions supplémentaires afin d'être cités, aussi nous précisons simplement que, pour le plan et la norme euclidienne, le rapport  $\frac{\chi(G_n)}{\omega(G_n)}$  tend presque sûrement vers  $2\sqrt{3}/\pi$  sous les conditions de l'item (i), sauf si  $r^2 n = n^{o(1)}$ , auquel cas ce rapport tend presque sûrement vers un.

La proposition suivante montre que l'ensemble de deux valeurs donné dans le théorème précédent ne peut en général être réduit.

**Proposition 27.** *Si  $k$  est un entier strictement positif et si la suite  $r(n)$  vérifie  $nr^d = \gamma n^{-\frac{1}{m(k+1)}}$  pour un réel  $\gamma > 0$  et un entier naturel non nul  $m$ , alors il existe un réel  $c = c(\gamma, m) \in (0, 1)$  tel que*

$$\mathbb{P}\left(c_k(G_n) = \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1\right) \rightarrow c.$$

Cette proposition exhibe une différence notable de comportement entre le nombre chromatique impropre et le nombre chromatique, puisque, lorsqu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $nr^d \ll n^{-\varepsilon}$ , il est prouvé dans [MM05, MM06] que

$$\mathbb{P}(\chi(G_n) = \omega(G_n) \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini}) = 1.$$

La proposition 27 montre qu'un résultat analogue (c'est-à-dire en remplaçant  $\chi$  par  $c_k$  et  $\omega$  par  $\omega/(k+1)$ ) est faux pour  $k \geq 1$ .

D'après le second item du théorème 30, lorsque  $nr^d \ll n^{-\varepsilon}$ , la distribution de  $c_k$  est concentrée sur deux entiers consécutifs lorsque  $n$  tend vers l'infini, dans le sens où  $\mathbb{P}(c_k(G_n) \in \{m(n), m(n) + 1\}) \rightarrow 1$ . Ce phénomène (appelé *focusing* par Penrose [Pen02, Pen03]) se produit pour divers invariants des graphes dans le modèle  $G(n, p)$  de Erdős-Rényi. Müller a prouvé récemment une conjecture de Penrose stipulant qu'un tel phénomène (de *focusing*) se produit pour  $\omega(G_n)$  et  $\chi(G_n)$  lorsque  $nr^d \ll \ln(n)$  [Mül05]. La preuve peut être aisément



adaptée à la coloration impropre, donnant ainsi : si  $nr^d \ll \ln(n)$ , il existe une suite d'entiers  $m(n)$  telle que  $\mathbb{P}(c_k(G_n) \in \{m(n), m(n) + 1\}) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.4.2. Démonstrations

La preuve du second item du théorème 30 utilise le résultat suivant [MM05, MM06].

**Théorème 31** (McDiarmid and Müller [MM06]). *S'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $nr^d \ll n^{-\varepsilon}$ , alors*

- (i) *il existe une suite  $m(n)$  telle que  $\mathbb{P}(\omega(G_n) \in \{m(n), m(n)+1\})$  et  $\Delta(G_n) \in \{m(n) - 1, m(n)\}$  pour tout  $n$  sauf un nombre fini) = 1 ; et*
- (ii)  $\mathbb{P}(\chi(G_n) = \omega(G_n))$  pour tout  $n$  sauf un nombre fini) = 1.

**Démonstration du théorème 30, item (ii).** Supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $nr^d \ll n^{-\varepsilon}$ . D'après le premier item du théorème 31,

$$\mathbb{P}(\Delta(G_n) \in \{\omega(G_n) - 1, \omega(G_n)\}) \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} = 1.$$

Donc, en utilisant le second item du théorème 31,

$$\mathbb{P}(\chi(G_n) = \omega(G_n) \text{ et } \Delta(G_n) \leq \omega(G_n) \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini}) = 1.$$

Or si  $\chi(G_n) = \omega(G_n)$  et  $\Delta(G_n) \leq \omega(G_n)$  alors d'après la proposition 4,

$$\left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil \leq c_k(G_n) \leq \left\lceil \frac{\chi(G_n) + 1}{k+1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1,$$

ce qui conclut la preuve. □

Avant de prouver la proposition 27, donnons deux résultats du chapitre troisième de [Pen03]. Si  $Z$  et  $Z'$  sont deux variables aléatoires entières, leur *distance variationnelle totale* est

$$d_{TV}(Z, Z') := \sup_{A \subseteq \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(Z \in A) - \mathbb{P}(Z' \in A)|.$$

Soient  $\xi, (\xi_n)_{n \geq 1}$  des fonctions mesurables à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . La suite  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  converge en distribution vers  $\xi$  si, et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(\xi_n)] = \mathbb{E}[h(\xi)]$$

pour toute fonction  $h$  continue et bornée de  $\mathbb{R}^d$  vers  $\mathbb{R}$ . Ceci est noté  $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ .

**Proposition 28** ([Pen03]). *Fixons un graphe d'intersection de disques unitaires connexe à  $l \geq 2$  sommets  $H$ . Soit  $N$  le nombre de sous-graphes induits de  $G_n$  isomorphes à  $H$  et  $Z$  une variable de Poisson de moyenne  $\mathbb{E}N$ .*

- *Il existe une constante strictement positive  $\mu = \mu(H)$  telle que  $\mathbb{E}N \sim \mu n^l r^{d(l-1)}$ .*
- *Il existe une constante  $c = c(H)$  telle que  $d_{TV}(N, Z) \leq cnr^d$ .*

**Proposition 29** ([Pen03]). *Fixons une suite  $(H_i)_{1 \leq i \leq s}$  de graphes d'intersection de disques unitaires connexes à  $l \geq 2$  sommets, deux-à-deux non isomorphes. Soient  $N_i$  le nombre de sous-graphes induits de  $G_n$  isomorphes à  $H_i$ , et  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  donnés par l'item (i) de la proposition 28. Soient enfin  $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$  des variables de Poisson indépendantes telles que  $\mathbb{E}Z_i = \gamma^{l-1} \mu_i$ . S'il existe  $\gamma > 0$  tel que  $nr^d \sim \gamma n^{-\frac{1}{l-1}}$ , alors*

$$(N_1, N_2, \dots, N_s) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Z_1, Z_2, \dots, Z_s).$$

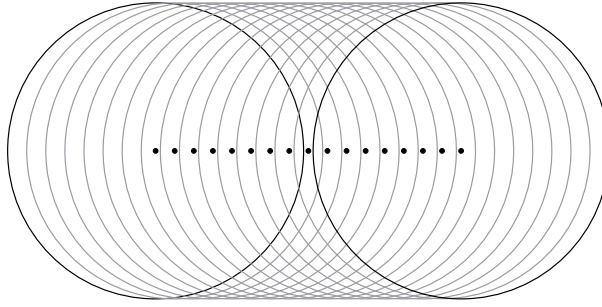


FIG. 3.35.  $H \simeq K_{m(k+1)+1} - e$  vérifie  $\omega(H) = m(k+1)$  et  $c_k(H) = m+1$ .

**Démonstration de la proposition 27.** D'après le second item du théorème 31, il suffit de considérer  $\mathbb{P}\left(c_k(G_n) = \left\lceil \frac{\omega(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1\right)$  puisque  $\mathbb{P}(\chi(G_n) \neq \omega(G_n)) \rightarrow 0$ .

Soit  $l := m(k+1) + 1$ . Par le choix de  $r(n)$ ,  $n^l r^{d(l-1)} = \gamma^{l-1}$  et lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $n^{l+1} r^{dl} = \gamma^{l-1} n r^d$  tend vers 0 alors que  $n^{l-1} r^{d(l-2)} = n(nr^d)^{l-2} = n\gamma^{l-2} n^{-1+1/(l-1)}$  tend vers l'infini.

Soit  $L(G_n)$  l'ordre d'une plus grande composante connexe de  $G_n$ . D'après la proposition 28,

$$\mathbb{P}(\omega(G_n) \geq l-1 \text{ et } L(G_n) \leq l) \rightarrow 1.$$

En effet, soit  $N$  le nombre de sous-graphes induits de  $G_n$  isomorphes à  $K_{l-1}$  et soit  $N'$  le nombre de sous-graphes induits connexes d'ordre  $l+1$ .

D'après la proposition 28(i),  $\mathbb{E}N' = \mathcal{O}(n^{l+1} r^{dl}) = o(1)$ , donc

$$\mathbb{P}(L(G_n) > l) = \mathbb{P}(N' > 0) \leq \mathbb{E}N' = o(1).$$

En outre,  $\mathbb{E}N = \Omega(n^{l-1} r^{d(l-2)}) \rightarrow \infty$ . Ainsi, en utilisant la proposition 28(ii),

$$\mathbb{P}(\omega(G_n) < l-1) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-\mathbb{E}N} + o(1) = o(1)$$

puisque, pour toute variable de poisson  $Z$  de paramètre  $\lambda > 0$ ,  $\mathbb{P}(Z = 0) = e^{-\lambda}$ .

Soient  $H_1, \dots, H_s$  tous les graphes d'intersection de disques unitaires connexes d'ordre  $l$  deux-à-deux non isomorphes tels que  $c_k(H_i) = m+1$  et  $H_i \not\simeq K_l$ . Il existe au moins un tel graphe : posons  $H := G(\{(\frac{i}{l-1}, 0) : i = 0, \dots, l-1\}, 1)$  (voir Figure 3.4.2). Il s'agit simplement du graphe complet à  $l$  sommets moins une arête. Ce graphe vérifie  $c_k(H) > m$  : supposons qu'il existe une  $m$ -coloration  $k$ -impropre de  $H$ . Comme les sommets de  $H$  peuvent être partitionnés en une clique  $C$  de taille  $l-1 = m(k+1)$  et un sommet  $v$  adjacent à tous les sommets de  $C$  sauf un, chacune des  $m$  couleurs est attribuée à exactement  $k+1$  sommets de  $C$ . En particulier, chaque sommet de  $C$  possède  $k$  voisins de sa couleur dans  $C$ . Ainsi, puisque  $k \geq 1$ , au moins un sommet de  $C$  possède  $k+1$  voisins de sa couleur :  $k$  dans  $C$  et  $v_0$ . En outre,  $c_k(H) \leq m+1$  d'après la proposition 2 car  $\Delta(H) \leq l-1 = m(k+1)$ .

Soit  $N_0$  le nombre de sous-graphes induits de  $G_n$  isomorphes à  $K_l$ , et soit  $N_i$  le nombre de sous-graphes induits isomorphes à  $H_i$ . Si  $\omega(G_n) \geq l-1$  et  $L(G_n) \leq l$  alors  $c_k(G_n) = \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1$  si, et seulement si,  $N_0 = 0$  et il existe  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$  tel que  $N_i > 0$ . Donc

$$\mathbb{P}\left(c_k(G_n) = \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1\right) = \mathbb{P}(N_0 = 0 \text{ et } \exists i \in \{1, 2, \dots, s\}, N_i > 0) + o(1).$$

Ainsi, d'après la proposition 29,

$$\mathbb{P} \left( c_k(G_n) = \left\lceil \frac{\chi(G_n)}{k+1} \right\rceil + 1 \right) \rightarrow e^{-\mu_0 \gamma^{l-1}} (1 - e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_s) \gamma^{l-1}}),$$

pour des réels  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s > 0$ . □

La preuve du premier item du théorème 30 utilise certains outils développés dans [MM06] afin d'étudier le comportement de  $\chi(G_n)$ .

Un élément primordial de la preuve est le lien entre la coloration de graphes et la programmation linéaire entière. Le nombre chromatique  $\chi(G)$  d'un graphe  $G = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$  est en effet la valeur optimum du programme linéaire entier (PLE)

$$\min 1^T x$$

$$\text{tel que } \begin{aligned} Ax &\geq 1, \\ x &\geq 0, x \text{ entier,} \end{aligned}$$

où  $A$  est la *matrice des stables* de  $G$ . Il s'agit d'une matrice de 0 et de 1 à  $n$  lignes dont les colonnes sont indicées par les stables de  $G$ . De plus,  $a_{i,j} = 1$  si, et seulement si, le sommet  $v_i$  appartient au stable correspondant à la colonne  $j$ . Étant donné un vecteur d'entiers naturels  $b := (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , le graphe  $G_b$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque sommet  $v_i$  par une clique  $C_i$  de taille  $b_i$  (les sommets des cliques  $C_i$  et  $C_j$  étant reliés si, et seulement si,  $v_i v_j \in E$ ). Alors  $\chi(G_b)$  est la valeur optimum du PLE

$$\min 1^T x$$

$$\text{tel que } \begin{aligned} Ax &\geq b, \\ x &\geq 0, x \text{ entier.} \end{aligned}$$

En outre,  $c_k(G_b)$  n'excède pas la valeur optimum du PLE

$$\min 1^T x$$

$$\text{tel que } \begin{aligned} (k+1)Ax &\geq b, \\ x &\geq 0, x \text{ entier.} \end{aligned}$$

Ceci est dû au fait que choisir  $k+1$  copies de chaque sommet d'un stable de  $G$  donne un stable de  $G_b$  (mais ceci ne permet en général pas d'obtenir *tous* les stables de  $G_b$ ).

Soit  $f$  la fonction de densité de la mesure de probabilité  $\nu$  utilisée pour générer les points  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (rappelons que  $f$  est bornée par hypothèses). Le *supremum essentiel* d'une fonction  $g$ , noté  $g_{\max}$ , est

$$g_{\max} := \sup \{t : |\{x : g(x) > t\}| > 0\},$$

où  $|\cdot|$  est la mesure de Lebesgue. Un ensemble mesurable  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  a un *petit voisinage* si, et seulement si,  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} |A_\varepsilon| = |A|$  avec  $A_\varepsilon := A + B(O, \varepsilon)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  positives, bornées, à support borné, non presque partout nulles, et telles que tout réel  $t$ , l'ensemble  $\{x : \varphi(x) > t\}$  ait un petit voisinage.

Soit  $M_\varphi$  la variable aléatoire définie par

$$M_\varphi := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n \varphi \left( \frac{X_i - x}{r} \right).$$

Ces variables aléatoires  $M_\varphi$  jouent un rôle important dans l'étude du comportement du nombre chromatique de  $G_n$  (voir [MM06]).

**Proposition 30** (McDiarmid et Müller [MM06]). *Soit  $\varphi = 1_W$  pour un ensemble borné  $W \subset \mathbb{R}^d$  avec un petit voisinage et d'intérieur non vide. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que, si  $n^{-\delta} \leq nr^d \leq \delta \ln n$ , alors*

$$\mathbb{P}((1 - \varepsilon)m \leq M_\varphi \leq (1 + \varepsilon)m \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini}) = 1,$$

où  $m = m(n) := \ln n / \ln(\frac{\ln n}{nr^d})$ .

**Proposition 31** ([MM06]). *Soit  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T = T(\varepsilon)$  tel que, si  $nr^d \geq T \ln n$ , alors*

$$\mathbb{P}((1 - \varepsilon)m \leq M_\varphi \leq (1 + \varepsilon)m \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini}) = 1,$$

où  $m = m(n) := f_{\max} nr^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx$ .

**Proposition 32** ([MM06]). *Soit  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Si  $nr^d \sim t \ln n$  pour un certain  $t \in (0, \infty)$ , alors*

$$\frac{M_\varphi}{nr^d} \rightarrow f_{\max} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{\varphi(x)s} dx \text{ presque sûrement,}$$

où  $s = s(\varphi, t) \geq 0$  est solution de

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s\varphi(x) e^{\varphi(x)s} - e^{\varphi(x)s} + 1) dx = \frac{1}{t f_{\max}}. \quad (3.1)$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{F}$  et  $t \in (0, \infty)$ , notons

$$\xi(\varphi, t) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{\varphi(x)s(\varphi, t)} dx,$$

où  $s(\varphi, t)$  est l'unique solution positive de (3.1). Pour voir que (3.1) possède bien une unique solution positive (sauf si  $\varphi$  est nulle presque partout, auquel cas l'équation (3.1) n'admet pas de solution), il suffit de voir que le membre de gauche de (3.1) croît avec  $s$  pour  $s \geq 0$  (car l'intégré  $s\varphi(x) e^{\varphi(x)s} - e^{\varphi(x)s} + 1 = H(e^{\varphi(x)s})$  avec  $H(x) := x \ln x - x + 1$  est strictement croissant avec  $s$  pour tout  $x$  fixé tel que  $\varphi(x) > 0$ ).

**Lemme 22.** *Pour  $\varphi \in \mathcal{F}$  et  $\lambda \in (0, 1)$ , soit  $\varphi_\lambda$  défini par  $\varphi_\lambda(x) := \varphi(\lambda x)$ . Alors*

$$\xi(\varphi_\lambda, t) \leq \lambda^{-d} \xi(\varphi, t).$$

**Démonstration.** Remarquons d'abord que  $s(\varphi_\lambda, t) \leq s(\varphi, t)$ . En effet, pour tout  $s > 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s\varphi_\lambda(x) e^{\varphi_\lambda(x)s} - e^{\varphi_\lambda(x)s} + 1) dx = \lambda^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (s\varphi(y) e^{\varphi(y)s} - e^{\varphi(y)s} + 1) dy,$$

en utilisant le changement de variable  $y = \lambda x$ . Donc, si  $\int_{\mathbb{R}^d} (s\varphi(x) e^{\varphi(x)s} - e^{\varphi(x)s} + 1) dx = \frac{1}{t f_{\max}}$  pour un certain  $s > 0$ , alors  $\int_{\mathbb{R}^d} (s\varphi_\lambda(x) e^{\varphi_\lambda(x)s} - e^{\varphi_\lambda(x)s} + 1) dx > \frac{1}{t f_{\max}}$ . Comme  $s \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (s\varphi_\lambda(x) e^{\varphi_\lambda(x)s} - e^{\varphi_\lambda(x)s} + 1) dx$  croît avec  $s \geq 0$ , il suit que, nécessairement,  $s(\varphi_\lambda, t) \leq s(\varphi, t)$ , comme souhaité. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\lambda(x) e^{\varphi_\lambda(x)s(\varphi_\lambda, t)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\lambda(x) e^{\varphi_\lambda(x)s(\varphi, t)} dx \leq \lambda^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{\varphi(x)s(\varphi, t)} dx.$$

□

**Démonstration du théorème 30, item (i).** Commençons par trouver une borne supérieure de  $c_k(G_n)$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , et considérons le graphe  $\Gamma$  obtenu de la façon suivante. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , soit  $S_x$  l'hypercube  $x + [0, \varepsilon r]^d$  de côté  $\varepsilon r$  : ces hypercubes partitionnent  $\mathbb{R}^d$ . L'ensemble de sommets de  $\Gamma$  est  $\varepsilon r \mathbb{Z}^d$ , deux sommets distincts  $p$  et  $q$  sont adjacents si, et seulement si,  $\|p - q\| < r(1 + \varepsilon\sqrt{2})$ . Pour tout  $W \subseteq \mathbb{R}^d$ , notons  $N(W)$  le nombre de sommets de  $G_n$  dans  $W$ , i.e.

$$N(W) := |W \cap \{X_1, \dots, X_n\}|.$$

Soit  $G'_n$  le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet  $p$  de  $\Gamma$  par une clique de taille  $N(S_p)$  : le graphe  $G_n$  est un sous-graphe de  $G'_n$ , donc toute borne supérieure de  $c_k(G'_n)$  est aussi borne supérieure de  $c_k(G_n)$ .

Soit  $K > 0$  (supposé grand) tel que  $\varepsilon$  divise  $K$ . Pour tout  $p \in \varepsilon r \mathbb{Z}^d$ , soient  $H_p$  et  $H'_p$  les sous-graphes respectifs de  $G_n$  et  $G'_n$  induits par les sommets dans  $p + [0, Kr]^d$ . Notons  $A$  la matrice des stables du sous-graphe  $\Gamma_K$  de  $\Gamma$  induit par les sommets de  $\Gamma$  dans  $[0, Kr]^d$ . D'après les remarques précédentes,  $c_k(H'_p)$  n'excède pas la valeur optimale du programme linéaire

$$\min 1^T x$$

$$\text{tel que } \begin{aligned} Ax &\geq b(p)/(k+1), \\ x &\geq 0, x \text{ entier,} \end{aligned}$$

où  $b(p) := (N_1(p + p_1), \dots, N_m(p + p_l))$  est le vecteur (aléatoire) dont les coordonnées sont le nombre de sommets de  $G_n$  dans chacun des hypercubes  $S_{p+p_i}$  pour  $p_i \in [0, Kr]^d \cap \varepsilon r \mathbb{Z}^d$ .

Considérons la relaxation de ce programme (c'est-à-dire supprimons la contrainte que  $x$  soit entier). Soit  $M(p)$  la valeur optimum du programme relaxé. Puisque la matrice  $A$  ne dépend que de  $\varepsilon$  et  $K$ , il existe une constante  $c := c(K, \varepsilon)$  telle que

$$\chi^k(H'_p) \leq M(p) + c(K, \varepsilon), \quad (3.2)$$

car l'arrondi supérieur de toutes les variables d'un point réalisable du programme relaxé fournit un point réalisable du programme initial. Donc, en particulier, il suffit que  $c(K, \varepsilon)$  soit le nombre de colonnes de  $A$  (qui est le nombre de stables de  $\Gamma_K$ ).

Par dualité,  $M(p)$  est aussi la valeur optimale du programme

$$\max \frac{1}{k+1} b^T y$$

$$\text{tel que } \begin{aligned} A^T y &\leq 1, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette formulation duale a l'avantage de placer en quelque sorte l'aspect aléatoire dans la fonction objectif. Le polytope défini par la contrainte  $A^T y \leq 1$  ne dépend que de  $\varepsilon$  et  $K$ . Connaissant ces derniers, il est donc possible d'énumérer les sommets du polytope. Notons-les  $y_1, \dots, y_m$ . Puisque la valeur optimum du programme est atteinte en l'un des sommets du polytope,

$$M(p) = \frac{1}{k+1} \max_i y_i^T b(p). \quad (3.3)$$

Soit  $\psi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  la fonction définie par

$$\psi_i := \begin{cases} (y_i)_j & \text{si } x \in S_{p_j} \text{ avec } j \in \{1, 2, \dots, l\} \\ 0 & \text{si } x \notin [0, Kr]^d. \end{cases}$$

(Les points  $p_1, p_2, \dots, p_l$  constituent l'énumération de  $[0, Kr]^d \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d$  précédemment utilisée pour définir le programme.) Ainsi,

$$b^T(p)y_i = \sum_{j=1}^l (y_i)_j N(S_{p+p_j}) = \sum_{k=1}^n \psi_i(\psi_i(X_k - p)).$$

Posons à présent  $\varphi_i(x) := \psi_i(rx)$ . Les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  ne dépendent plus de  $r$  (ou de  $n$ ), mais seulement de  $\varepsilon$  et  $K$ . En outre,  $\varphi_i \in \mathcal{F}$  pour tout  $i$  et

$$b^T(p)y_i = \sum_{j=1}^n \varphi_i\left(\frac{X_j - p}{r}\right).$$

Ainsi, avec (3.2) et (3.3),

$$c_k(H'_p) \leq \frac{1}{k+1} \max_{i=1, \dots, m} M_{\varphi_i} + c(K, \varepsilon).$$

Cette borne sur  $c_k(H'_p)$  borne en réalité le nombre chromatique  $k$ -impropre du sous-graphe de  $G_n$  induit par les points dans  $W_p := p + [0, Kr]^d + (K+1)r\mathbb{Z}^d$ , puisque ce sous-graphe est l'union disjointe des graphes  $H'_p$  (figure 3.4.2). En effet, si  $x \in p + [0, Kr]^d + (K+1)rz$  et  $y \in p + [0, Kr]^d + (K+1)rz'$  avec  $z \neq z' \in \mathbb{Z}^d$ , alors  $\|x - y\| \geq r$ .

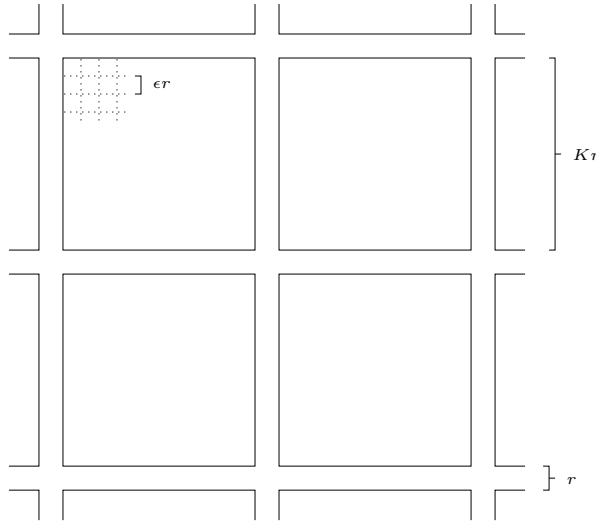


FIG. 3.36. Les ensembles  $W_p$ .

Supposons, sans perte de généralité, que  $k$  est entier et considérons la collection  $\mathcal{W} := \{W_p : p \in r\{0, \dots, K\}^d\}$ . Chaque petit hypercube  $S_q, q \in \varepsilon\mathbb{Z}^d$ , est couvert par exactement  $K^d$  des  $(K+1)^d$  ensembles  $W_p \in \mathcal{W}$  considérés.

Soit  $G'_{n,p}$  le graphe obtenu en remplaçant chaque point  $q$  de  $\Gamma \cap W_p$  par une clique de taille  $\left\lceil \frac{N(q)}{K^d} \right\rceil$  (plutôt que  $N(q)$  comme précédemment). Le sous-graphe  $G'_{n,p}$  peut être  $k$ -improprement coloré avec au plus

$$\begin{aligned} \max_p \frac{1}{k+1} \max_i \left( \left\lceil \frac{N(p+p_1)}{K^d} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{N(p+p_l)}{K^d} \right\rceil \right) \cdot y_i + c(K, \varepsilon) \\ \leq \\ \frac{1}{(k+1)K^d} \max_i M_{\varphi_i} + c(K, \varepsilon) + m \end{aligned}$$

couleurs. En outre, les colorations des sous-graphes  $G'_{n,p}$  peuvent être assemblées pour donner une coloration  $k$ -impropre du graphe  $G_n$  utilisant au plus

$$\frac{1}{k+1} \left( \frac{K+1}{K} \right)^d \max_{i=1,\dots,m} M_{\varphi_i} + (K+1)^d (c(K, \varepsilon) + m)$$

couleurs.

Nous allons à présent minorer  $\chi(G_n)$ . Posons  $r' := r \frac{1-\varepsilon\sqrt{2}}{1+\varepsilon\sqrt{2}}$  et  $S'_y := y + [0, \varepsilon r']^d$  pour  $y \in \mathbb{R}^d$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , soit  $H_x$  le sous-graphe de  $G_n$  induit par les points de l'hypercube  $x + [0, r'K]^d$ .

Notons  $\Gamma'_K$  le graphe dont les sommets sont les points  $x + p'_i$ , où  $p'_i$  décrit tous les points de  $[0, Kr']^d \cap \varepsilon r' \mathbb{Z}^d$ , deux sommets distincts  $y$  et  $z$  étant adjacents si, et seulement si,  $\|y - z\| < r'(1 + \varepsilon\sqrt{2}) = r(1 - \varepsilon\sqrt{2})$ . Le graphe  $\Gamma'_K$  est isomorphe au graphe  $\Gamma_K$ , et possède donc en particulier la même matrice de stables  $A$ . Soit  $H'_x$  le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet  $x + p'_i$  de  $\Gamma'_K$  par une clique de taille  $N(S'_{x+p'_i})$ . Le graphe  $H'_x$  est un sous-graphe de  $G_n$ , et  $\chi(H'_x)$  est au moins la valeur optimale du programme linéaire

$$\max b'(x)^T y$$

$$\text{tel que } \begin{aligned} A^T y &\leq 1, \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

où  $b'(x) := (N(S'_{x+p'_1}), N(S'_{x+p'_2}), \dots, N(S'_{x+p'_m}))$ . Les sommets  $y_1, y_2, \dots, y_m$  du polytope sont inchangés. Ils correspondent toutefois désormais aux sommes

$$b'(x)^T y_i = \sum_{j=1}^n \varphi'_i \left( \frac{X_j - x}{r} \right),$$

avec  $\varphi'_i(x) := \varphi_i \left( \frac{1+\varepsilon\sqrt{2}}{1-\varepsilon\sqrt{2}} x \right)$ . En maximisant pour  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\chi(G_n) \geq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} M_{\varphi'_i}. \quad (3.4)$$

Par conséquent,

$$1 \leq \frac{(k+1)c_k(G_n)}{\chi(G_n)} \leq \left( \frac{K+1}{K} \right)^d \frac{\max_i M_{\varphi_i}}{\max_i M_{\varphi'_i}} + \frac{\alpha}{\max_i M_{\varphi'_i}}, \quad (3.5)$$

où  $\alpha := (K+1)^d (c(K, \varepsilon) + m)$ .

Considérons des réels  $t_0 < t_1 < \dots < t_a$  avec  $t_{i+1} \leq (1 + \varepsilon)t_i$ ,  $t_0$  petit et  $t_a$  grand (ces termes seront précisés ensuite). Puis partageons la suite  $r$  en sous-suites  $r_0, \dots, r_{a+1}$  :

$$r_0(n) := \begin{cases} r(n) & \text{si } nr^d \leq t_0 \ln n, \\ \sqrt{\frac{t_0 \ln n}{n}} & \text{sinon.} \end{cases}, \quad r_{a+1}(n) := \begin{cases} r(n) & \text{si } nr^d \geq t_a \ln n, \\ \sqrt{\frac{t_a \ln n}{n}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$r_i(n) := \begin{cases} r(n) & \text{si } t_{i-1} \ln n \leq nr^d \leq t_i \ln n, \\ \sqrt{\frac{t_i \ln n}{n}} & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, a\},$$

et posons  $G_n^i := G(\{X_1, \dots, X_n\}, r_i(n))$ . Alors, pour tout  $i$  :

$$\mathbb{P} \left( 1 \leq \frac{(k+1)c_k(G_n^i)}{\chi(G_n^i)} \leq \gamma(K, \varepsilon) \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} \right) = 1, \quad (3.6)$$

où  $\gamma(K, \epsilon) := \frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon} \left( \frac{1+\epsilon\sqrt{d}}{1-\epsilon\sqrt{2}} \right)^d \left( \frac{K+1}{K} \right)^d + \epsilon$ . Par suite,

$$\mathbb{P} \left( 1 \leq \frac{(k+1)c_k(G_n)}{\chi(G_n)} \leq \gamma(K, \epsilon) \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} \right) = 1,$$

car  $G_n$  coïncide toujours avec l'un des  $G_n^i$ , et la probabilité de l'intersection d'un nombre fini d'évènements de probabilité un est un. Ainsi, en faisant tendre  $K$  vers l'infini et  $\epsilon$  vers 0,

$$\frac{(k+1)c_k(G_n)}{\chi(G_n)} \rightarrow 1 \text{ presque sûrement,}$$

comme voulu. Il ne reste donc plus qu'à établir (3.6) pour tout  $i$  (et pour un choix particulier de  $t_0, \dots, t_a$ ).

Considérons  $G_n^0$ , et posons  $\psi_1 := 1_{B(0, \frac{1}{2})}$ ,  $\psi_2 := 1_{B(0, 1)}$ . Donc  $M_{\psi_1}$  et  $M_{\psi_2}$  sont respectivement le nombre maximum de points de  $G_n$  dans une boule de rayon  $\frac{r}{2}$  et  $r$ . En particulier,

$$M_{\psi_1} \leq \omega(G_n) \leq \chi(G_n) \leq \Delta(G_n) + 1 \leq M_{\psi_2}.$$

D'après la proposition 30, et la borne supérieure de la proposition 2,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \chi(G_n^0) \geq (1-\epsilon)b \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} \right) &= 1, \\ \mathbb{P} \left( c_k(G_n^0) \leq \frac{1}{k+1}(1+\epsilon)b + 1 \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} \right) &= 1, \end{aligned}$$

où  $b = b(n) := \frac{\ln n}{\ln(\frac{\ln n}{nr^d})}$ . Observons que  $b \rightarrow \infty$ , car  $nr^d \geq n^{-\delta}$  entraîne  $b \geq \frac{1}{\delta} + o(1)$ . Par suite,

$$\mathbb{P} \left( \frac{(k+1)c_k(G_n^0)}{\chi(G_n^0)} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} + \epsilon \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini} \right) = 1.$$

Considérons à présent  $G_n^{a+1}$ . D'après la proposition 31, pourvu que  $t_a$  soit suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{\varphi_i} \leq (1+\epsilon)b_i \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini}) &= 1, \\ \mathbb{P}(M_{\varphi'_i} \geq (1-\epsilon)b'_i \text{ pour tout } n \text{ sauf un nombre fini}) &= 1, \end{aligned}$$

pour  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , avec  $b_i := f_{\max} nr_i^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x) dx$  et  $b'_i := f_{\max} nr_i^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi'_i(x) dx = \left( \frac{1-\epsilon\sqrt{2}}{1+\epsilon\sqrt{2}} \right)^d b_i$  (en utilisant le changement de variable  $y = \left( \frac{1+\epsilon\sqrt{2}}{1-\epsilon\sqrt{2}} \right) x$  pour la dernière égalité). Par (3.5) et le fait que  $b'_i \rightarrow \infty$ , la probabilité que

$$\frac{(k+1)c_k(G_n^{a+1})}{\chi(G_n^{a+1})} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \left( \frac{1+\epsilon\sqrt{2}}{1-\epsilon\sqrt{2}} \right)^d \left( \frac{K+1}{K} \right)^d + \epsilon$$

pour tout  $n$  sauf un nombre fini est un. Considérons enfin  $G_n^i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Nous supposons que les réels  $t_i$  sont choisis de telle sorte que  $t_i \leq (1+\epsilon)t_{i-1}$ . Posons  $r_i^- := \sqrt{\frac{t_{i-1} \ln n}{n}}$  et  $r_i^+ := \sqrt{\frac{t_i \ln n}{n}}$ . Comme  $c_k(G(V, \rho))$  et  $\chi(G(V, \rho))$  sont croissants selon  $\rho$ ,

$$\chi(G_n^i) \geq \chi(G(\{X_1, \dots, X_n\}, r_i^-)), \quad c_k(G_n^i) \leq c_k(G(\{X_1, \dots, X_n\}, r_i^+)).$$

D'après la proposition 32 et (3.4), il suit (avec probabilité un pour tout  $n$  sauf un nombre fini) :

$$\begin{aligned} \chi(G_n^i) &\geq (1-\epsilon) f_{\max} n (r_i^-)^d \max_j \xi(\varphi_j, t_{i-1}), \\ \chi^k(G_n^i) &\leq \frac{1}{k+1} \left( \frac{K+1}{K} \right)^d (1+\epsilon) f_{\max} n (r_i^+)^d \max_j \xi(\varphi_j, t_{i-1}) + \alpha. \end{aligned}$$



Avec la terminologie du lemme 22,  $\varphi_i = (\varphi'_i)_\lambda$  avec  $\lambda := \left(\frac{1-\epsilon\sqrt{2}}{1+\epsilon\sqrt{2}}\right)$ . Par conséquent (avec probabilité un, pour tout  $n$  sauf un nombre fini) :

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)c_k(G_n^i)}{\chi(G_n^i)} &\leq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) \frac{t_i}{t_{i-1}} \left(\frac{1+\epsilon\sqrt{2}}{1-\epsilon\sqrt{2}}\right)^d \left(\frac{K+1}{K}\right)^d + \epsilon \\ &\leq \frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon} \left(\frac{1+\epsilon\sqrt{2}}{1-\epsilon\sqrt{2}}\right)^d \left(\frac{K+1}{K}\right)^d + \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 3.5. Conclusion

Plusieurs problématiques liées aux graphes d'intersection de disques unitaires ont été étudiées au cours de ce chapitre. Plusieurs questions intéressantes restent à résoudre. La première concerne les graphes d'intervalles.

**Problème 7.** *Si  $G$  est un graphe d'intervalles unitaires, et  $k$  un entier strictement positif, le théorème 18 stipule que  $c_k(G) \in \left\{\lceil \frac{\omega(G)}{k+1} \rceil, \lceil \frac{\omega(G)}{k+1} \rceil + 1\right\}$ . Est-il polynomial de déterminer laquelle des deux valeurs est correcte ?*

**Problème 8.** *Soit  $k$  un entier strictement positif fixé. Est-il polynomial de déterminer le nombre chromatique  $k$ -impropre des graphes d'intervalles ?*

Il est également naturel de fixer le nombre de couleurs et de demander quelle est la plus petite impropreté nécessaire pour colorer un graphe donné.

Un autre sujet important est la création d'algorithmes d'approximation. Nous avons vu qu'il existe pour le nombre chromatique une 6-approximation pour les graphes d'intersection de disques, et une 3-approximation pour les graphes d'intersection de disques unitaires. Dans le cas des graphes aléatoires d'intersection de disques unitaires, le théorème 30 fournit une approximation asymptotique du nombre chromatique  $k$ -impropre : la valeur  $\omega(G_n)/(k+1)$  (calculable en temps polynomial), multipliée par le rapport  $2\sqrt{3}/\pi \approx 1,103$  est une approximation raisonnable de  $c_k(G_n)$ . Il serait intéressant de trouver un bon algorithme d'approximation du nombre chromatique  $k$ -impropre pour la classe des graphes d'intersection de disques unitaires, et des graphes d'intersection de disques.

Concernant la coloration impropre des sous-graphes du réseau triangulaire, le problème suivant reste ouvert.

**Problème 9.** *Le problème suivant est-il  $\mathcal{NP}$ -complet ?*

INSTANCE : *un sous-graphe induit  $G$  du réseau triangulaire.*

QUESTION : *le graphe  $G$  est-il 1-improprement 2-colorable ?*

Une autre question intéressante concerne la coloration impropre pondérée des graphes bipartis. Il est polynomial de trouver une coloration pondérée propre optimale d'un graphe biparti (le nombre de couleurs requis est égal au poids maximum d'une clique), mais nous ne savons pas ce qu'il en est pour la coloration impropre. Il paraît peu probable que ce problème reste polynomial, mais trouver une approximation serait intéressant, car cela pourrait permettre d'en déduire un algorithme d'approximation pour les sous-graphes du réseau triangulaire en s'inspirant de la méthode utilisée (pour la coloration pondérée propre) dans [MR00]. Notons que trouver le plus grand ensemble  $k$ -indépendant est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis planaires [DJL93], et qu'il n'est pas difficile de prouver qu'il en est de même pour les graphes d'intersection de disques unitaires et les sous-graphes du réseau triangulaire [HKS06]. Ajoutons qu'il existe un schéma d'approximation polynomial pour trouver la taille du plus

grand ensemble  $k$ -indépendant d'un graphe d'intersection de disques unitaires : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un algorithme polynomial fournissant une  $(1 - \varepsilon)$ -approximation.

Enfin, la rapidité de convergence des résultats asymptotiques des sections 3.3 et 3.4 restent à analyser.



**Deuxième partie**

**Autres problèmes de coloration**



# Coloration 3-faciale des graphes planaires

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Frédéric Havet et Riste Škrekovski [HŠ06].

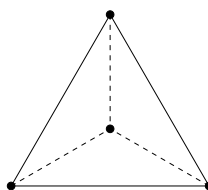
## 4.1. Introduction

La notion de coloration faciale, introduite dans [KMŠ05b], étend la notion bien connue de coloration cyclique. Un *chemin facial* d'un plongement d'un graphe planaire  $G$  est une suite de sommets dans l'ordre obtenu en parcourant une partie de la frontière d'une face. La *longueur* d'un chemin facial est son nombre d'arêtes. Deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  sont des *voisins  $\ell$ -faciaux* si, et seulement si, il existe un chemin facial de longueur au plus  $\ell$  entre-eux. Une *coloration  $\ell$ -faciale*  $c$  de  $G$  est une fonction qui associe à chaque sommet une couleur de telle sorte que deux voisins  $\ell$ -faciaux quelconques soient colorés différemment. Un graphe admettant une coloration  $\ell$ -faciale avec  $k$  couleurs est dit  *$\ell$ -facialement  $k$ -colorable*.

La conjecture suivante est proposée dans [KMŠ05b].

**Conjecture 4** (Král', Madaras et Škrekovski). *Tout graphe planaire est  $\ell$ -facialement  $(3\ell + 1)$ -colorable.*

Notons que la borne de la Conjecture 4 est optimale : comme le montre la figure 4.1, pour tout  $\ell \geq 1$ , il existe un graphe planaire qui n'est pas  $\ell$ -facialement  $3\ell$ -colorable.



**FIG. 4.1.** Le graphe planaire  $G_\ell = (V, E)$  : chaque arête en pointillés représente un chemin de longueur  $\ell$ . Le graphe  $G_\ell$  n'est pas  $\ell$ -facialement  $3\ell$ -colorable : tous les sommets sont des voisins  $\ell$ -faciaux, donc toute  $\ell$ -coloration faciale doit utiliser  $|V| = 3\ell + 1$  couleurs.

La conjecture 4 peut être vue comme un analogue, pour la coloration  $\ell$ -faciale, de la fameuse conjecture suivante de Ore et Plummer [OP69, JT95] concernant la coloration cyclique. Un graphe planaire  $G$  est dit *cycliquement  $k$ -colorable* si, et seulement si, il admet une sommets-coloration avec  $k$  couleurs telle que toute paire de sommets incidents à une même face soient colorés différemment.

**Conjecture 5** (Ore et Plummer [OP69]). *Tout graphe planaire est  $\lfloor \frac{3\Delta^*}{2} \rfloor$ -colorable, où  $\Delta^*$  désigne la taille d'une plus grande face de  $G$ .*

Plus précisément, la conjecture 4 implique la conjecture 5 pour les valeurs impaires de  $\Delta^*$ . Le meilleur résultat partiel sur la conjecture 5 a été obtenu par Sanders et Zhao [SZ01], qui ont prouvé la borne supérieure  $\lceil \frac{5\Delta^*}{3} \rceil$ .

Notons  $f_c(x)$  le plus petit nombre de couleurs permettant de colorer cycliquement tout graphe planaire dont la taille de chaque face est au plus  $x$ . La valeur de  $f_c(x)$  est connue pour  $x \in \{3, 4\}$  :  $f_c(3) = 4$  (le problème de trouver  $f_c(3)$  étant équivalent au Théorème des Quatre Couleurs [AH77, AH89]) et  $f_c(4) = 6$  (voir [Bor84, Bor95]). Il est également connu que  $f_c(5) \in \{7, 8\}$  et  $f_c(6) \leq 10$  (voir [BSZ99]), et que  $f_c(7) \leq 12$  (voir [Bor92]).

La conjecture 4 est trivialement vraie si  $l = 0$ , et est équivalente au Théorème des Quatre Couleurs si  $l = 1$ . Elle est ouverte pour toutes les autres valeurs de  $l$ . Comme il est remarqué dans [KMŠ05b], si la conjecture 4 est vraie pour  $l = 2$ , cela aurait diverses répercussions intéressantes. En plus de donner la valeur exacte de  $f_c(5)$  (qui serait alors 7), la borne supérieure sur le nombre de couleurs nécessaires pour colorer 1-diagonalement toute quadrangulation planaire serait ramenée à 14 au lieu de 16 actuellement (grâce à la méthode utilisée dans [KMŠ05b], voir [HJ95, SZ96, SZ98, KMŠ05b] pour plus de détails sur ce problème). Cela permettrait également de prouver la conjecture de Wegner sur la coloration à distance deux (c'est-à-dire la coloration du carré des graphes) restreinte aux graphes cubiques planaires, puisque les colorations du carré d'un graphe cubique planaire sont exactement ses colorations 2-faciale (consulter [JT95, problème 2.18] pour plus de détails sur la conjecture de Wegner).

Soit  $f_f(\ell)$  le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer  $\ell$ -facialement tout graphe planaire. Clairement,  $f_c(2\ell + 1) \leq f_f(\ell)$ . Jusqu'à présent, aucune valeur de  $\ell$  pour laquelle cette inégalité est stricte n'est connue. Le problème suivant est proposé dans [KMŠ05b].

**Problème 10.** *Est-il vrai que, pour tout entier  $\ell \geq 1$ ,  $f_c(2\ell + 1) = f_\ell(\ell)$  ?*

Il est prouvé dans [KMŠ05b] que tout graphe planaire admet une coloration  $\ell$ -faciale utilisant au plus  $\lfloor \frac{18}{5}\ell \rfloor + 2$  couleurs (et cette borne est réduite de un lorsque  $\ell$  vaut quatre). Donc, en particulier, tout graphe planaire possède une 12-coloration 3-faciale. Dans ce chapitre, nous améliorons ce résultat en prouvant le théorème suivant.

**Théorème 32.** *Tout graphe planaire est 3-facialement 11-colorable.*

Une autre conjecture, appelée  $3\ell$ -conjecture, a été proposée dans [DŠT05], stipulant que tout graphe planaire sans triangle (c'est-à-dire de maille au moins quatre) est  $\ell$ -facialement  $3\ell$ -colorable. Tout comme la conjecture 4, cette conjecture aurait plusieurs corollaires intéressants si elle est vraie (consulter [DŠT05] pour plus de détails).

**Définition 22.** Comme dans le chapitre 2, un sommet de degré  $d$  (respectivement au moins  $d$ , respectivement au plus  $d$ ) est appelé un  $d$ -sommet (respectivement un  $(\geq d)$ -sommet, respectivement un  $(\leq d)$ -sommet). Les notions de  $d$ -face,  $(\geq d)$ -face et  $(\leq d)$ -face sont définies de manière analogue en regard de la taille de la face. Un  $\ell$ -chemin est un chemin de longueur  $\ell$ .

Deux faces sont *adjacentes* si, et seulement si, elles partagent une arête. Une 5-face est *mauvaise* si, et seulement si, elle est incidente à au moins quatre 3-sommets. Elle est *très-mauvaise* si, et seulement si, elle est incidente à cinq 3-sommets.

Un sommet est *dangereux* si, et seulement si, il a degré trois et est incident à une face de taille trois ou quatre. Un 3-sommet est *sain* si, et seulement si, il n'est pas dangereux, c'est-à-dire si, et seulement si, il n'est pas incident à une  $(\leq 4)$ -face.

L'ensemble de tous les voisins 3-faciaux d'un sommet  $v$  est noté  $\mathcal{N}_3(v)$ . Le *degré 3-facial* de  $v$ , noté  $\deg_3(v)$ , est le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{N}_3(v)$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire, et soit  $\mathcal{U} \subseteq V$ . Le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est  $\mathcal{U}$  et, pour tout couple  $(x, y) \in \mathcal{U}^2$ ,  $xy$  est une arête dans  $G_3[\mathcal{U}]$  si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont 3-facialement adjacents dans  $G$ . Si  $c$  est une coloration partielle des sommets de  $G$ , et  $u$  est un sommet non coloré de  $G$ ,  $L_c(u)$  (ou juste  $L(u)$ ) désigne l'ensemble des couleurs assignées à aucun voisin 3-facial de  $u$ . Le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable si, et seulement si, il existe une coloration propre  $c$  de ses sommets telle que  $\forall u \in \mathcal{U}, c(u) \in L(u)$ .

## 4.2. Propriétés des graphes (3, 11)-minimaux

Le lemme suivant est un cas particulier d'un résultat obtenu par Král', Madaras et Škrekovski [KMŠ05b].

**Lemme 23** (Král', Madaras et Škrekovski [KMŠ05b]). *Soit  $v$  un sommet dont les faces incidentes dans un graphe planaire  $G$  sont  $f_1, f_2, \dots, f_d$ . Alors*

$$\deg_3(v) \leq \left( \sum_{i=1}^d \min(|f_i|, 7) \right) - 2d$$

où, pour tout  $i$ ,  $|f_i|$  désigne la taille de la face  $f_i$ .

Supposons que le théorème 32 soit faux : un graphe (3, 11)-minimal est un graphe planaire non 3-facialement 11-colorable d'ordre minimum. Notons que cette définition diffère de celle utilisée dans [KMŠ05b]. Toutefois, le lemme suivant est toujours vrai.

**Lemme 24** (Král', Madaras et Škrekovski [KMŠ05b]). *Soit  $G$  un graphe (3, 11)-minimal.*

- (i) *Le graphe  $G$  est 2-connecté ;*
- (ii)  *$G$  n'a pas de cycle séparateur de longueur au plus 7 ;*
- (iii)  *$G$  ne contient pas d'arête séparant une  $f_1$ -face d'une  $f_2$ -face avec  $f_1 + f_2 \leq 9$  ;*
- (iv)  *$G$  n'a pas de sommet dont le degré 3-facial est strictement inférieur à 11. En particulier, le degré minimum de  $G$  est au moins trois ; et*
- (v)  *$G$  ne contient pas d'arête  $uv$  séparant deux ( $\geq 4$ )-faces telle que  $u$  et  $v$  soient des ( $\geq 3$ )-sommets,  $\deg_3(u) \leq 11$  et  $\deg_3(v) \leq 12$ .*

Dans la suite de cette section, nous allons prouver de nouvelles propriétés locales des graphes (3, 11)-minimaux.

**Lemme 25.** *Soit  $G$  un graphe (3, 11)-minimal avec deux 3-sommets (adjacents)  $v$  et  $w$  tous deux incidents à la même 5-face et la même 6-face. Alors la taille de la dernière face incidente à  $w$  est au moins 7.*

**Démonstration.** Par l'absurde, supposons que la dernière face incidente à  $w$  soit de taille au plus 6. Alors, selon le lemme 23,  $\deg_3(v) \leq 12$  et  $\deg_3(w) \leq 11$  : ceci contredit le lemme 24(v).  $\square$

Une configuration réductible d'un graphe (3, 11)-minimal  $G$  est un sous-graphe induit interdit dans  $G$ . La méthode utilisée pour prouver la plupart des lemmes est la suivante : supposons que  $G$  contienne comme sous-graphe induit l'une des configurations  $H$ . Contractons certains sous-graphes  $H_1, H_2, \dots, H_s$  de  $H$  (dans la plupart des cas,  $s \leq 2$ ). Ceci donne un mineur propre  $G'$  de  $G$ , qui par définition de  $G$  admet une 11-coloration 3-faciale  $c'$ . Le but est d'inférer de  $c'$  une 11-coloration 3-faciale  $c$  de  $G$ , ce qui serait une contradiction. À cette



fin, chaque sommet  $v$  de  $G$  n'appartenant à aucun sous-graphe  $H_i$  garde sa couleur  $c'(v)$ . Soit  $h_i$  le sommet de  $G'$  créé par la contraction des sommets de  $H_i$  : certains sommets de  $H_i$  se voient attribuer la couleur  $c'(h_i)$  (en faisant cela, nous devons nous assurer qu'ils ne sont pas 3-facialement adjacents dans  $G$ ). Finalement, nous montrons que les sommets restant à colorer peuvent l'être. En d'autres termes, nous montrons que le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  (avec  $\mathcal{U}$  l'ensemble des sommets non colorés) est  $L$ -colorable, où pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $L(u)$  désigne la liste des couleurs attribuées à aucun voisin 3-facial de  $u$ , c'est-à-dire à aucun sommet de  $\mathcal{N}_3(u) \setminus \mathcal{U}$  :  $L(u) := \{x \in \{1, 2, \dots, 11\} : \forall v \in \mathcal{N}_3(u), c(v) \neq x\}$ . Dans la plupart des cas, les sommets de  $\mathcal{U}$  peuvent en réalité être colorés de façon gloutonne.

Dans toutes les figures de ce chapitre, les conventions suivantes sont utilisées : un triangle représente un 3-sommet, un carré représente un 4-sommet et un cercle est un sommet de n'importe quel degré au moins égal au maximum entre trois et celui de la figure. Les arêtes de chacun des sous-graphes  $H_i$  sont dessinées en gras, et les sommets entourés sont ceux de  $\mathcal{U}$ . Une arête en pointillés entre deux sommets indique un chemin de longueur au moins 1 entre ces deux sommets. Une (in)égalité dans une région bornée désigne une face dont la taille vérifie l'(in)égalité. Enfin, les sommets qui seront colorés par  $c'(h_i)$  sont notés  $v, w, t$  si un unique sous-graphe est contracté, et  $x_1, x_2$  pour  $i = 1$  et  $y_1, y_2$  pour  $i = 2$  si deux sous-graphes sont contractés.

**Proposition 33.** *Toutes les configurations des figures 4.2, 4.3 et 4.4 sont réductibles.*

**Démonstration.** Soit  $H$  un sous-graphe induit de  $G$ . Montrons que si  $H$  est isomorphe à l'une des configurations citées, alors  $G$  est 3-facialement 11-colorable, une contradiction.

**L1**

[[ Supposons que  $H$  soit isomorphe à la configuration (L1) de la figure 4.2. Notons  $H_1$  le sous-graphe induit par les arêtes en gras, et contractons ses sommets en un sommet unique  $h_1$ . Par minimalité de  $G$ , il existe une 11-coloration 3-faciale  $c'$  du graphe obtenu. Attribuons à tout sommet  $x$  n'appartenant pas à  $H_1$  la couleur  $c'(x)$ , et à chacun des sommets  $v, w$  et  $t$  la couleur  $c'(h_1)$ . Ceci ne pose pas de problème car les sommets  $v, w$  et  $t$  sont deux-à-deux non 3-facialement adjacents, sinon il existerait un ( $\leq 7$ )-cycle séparateur dans  $G$ , ce qui contredirait le lemme 24(ii). Selon le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 15$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 14$  si  $i \in \{2, 3\}$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{4, 5\}$ . Les sommets  $u_1, u_2, \dots, u_5$  sont deux-à-deux 3-facialement adjacents ; en d'autres termes  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$ . Ainsi, le nombre de voisins 3-faciaux colorés de  $u_1$  (i.e.  $|\mathcal{N}_3(u_1) \setminus \{u_2, u_3, u_4, u_5\}|$ ) est au plus 11. De plus, au moins deux d'entre-eux sont de la même couleur, nommément  $v$  et  $w$ . Donc,  $|L(u_1)| \geq 1$ . Pour  $i \in \{2, 3\}$ , le sommet  $u_i$  possède au plus 10 voisins 3-faciaux colorés. En outre, au moins deux voisins 3-faciaux de  $u_2$  sont de la même couleur ( $w$  et  $t$ ). Donc,  $|L(u_2)| \geq 2$ . Au moins trois voisins 3-faciaux de  $u_3$  sont de la même couleur :  $v, w$  et  $t$ . D'où,  $|L(u_3)| \geq 3$ . Pour  $i \in \{4, 5\}$ , le sommet  $u_i$  possède au plus 7 voisins 3-faciaux colorés. Donc  $|L(u_4)| \geq 4$ , et comme au moins deux voisins 3-faciaux de  $u_5$  sont de la même couleur ( $w$  et  $t$ ),  $|L(u_5)| \geq 5$ . Par conséquent, le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable de façon gloutonne, selon l'ordre  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ . Ceci permet d'étendre  $c$  en une 11-coloration 3-faciale de  $G$ , une contradiction. ]]

**L2**

[[ Supposons que  $H$  soit isomorphe à la configuration (L2) de la figure 4.2. Soit  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du mineur de  $G$  obtenu en contractant les arêtes en gras en un sommet unique  $h_1$ . Posons  $c(x) := c'(x)$  pour tout sommet  $x \neq h_1$ , et  $c(v) := c(w) := c(t) := c'(h_1)$ . La coloration obtenue est toujours 3-faciale puisque les sommets de  $\{v, w, t\}$  sont deux-à-deux non 3-facialement adjacents dans  $G$  (par le lemme 24(ii)). Par ailleurs,

$G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$ . En particulier, chaque sommet  $u_i$  possède quatre voisins 3-faciaux non colorés. Selon le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 15$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 14$  si  $i \in \{2, 3\}$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{4, 5\}$ . En outre,  $u_1$  et  $u_2$  ont tous deux au moins deux voisins 3-faciaux colorés identiquement (respectivement  $(w, t)$  et  $(w, v)$ ), donc il existe au moins une couleur qui n'est attribuée à aucun des sommets de  $\mathcal{N}_3(u_1)$  et au moins deux couleurs attribuées à aucun sommet de  $\mathcal{N}_3(u_2)$ . Le sommet  $u_3$  possède au moins trois voisins 3-faciaux colorés de la même couleur, nommément  $(w, v, t)$ , et donc au moins trois couleurs ne sont attribuées à aucun sommet de  $\mathcal{N}_3(u_3)$ . Par conséquent,  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_2)| \geq 2$  et  $|L(u_3)| \geq 3$ . De plus,  $|L(u_4)| \geq 4$  et  $|L(u_5)| \geq 5$  car  $w$  et  $t$  sont tous deux des voisins 3-faciaux de  $u_5$ . Ainsi  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc  $G$  est 3-facialement 11-colorable, une contradiction. ]]

**L3**

[[ Supposons que  $H$  soit isomorphe à la configuration (L3) de la figure 4.2. Contractons les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$ , et notons  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe obtenu. Cette coloration s'étend en une 11-coloration 3-faciale de  $G$  de la façon suivante : posons d'abord  $c(v) := c(w) := c(t) := c'(h_1)$ . Notons que deux de ces sommets ne peuvent être 3-facialement adjacents dans  $G$  sans contredire le lemme 24(ii). D'après le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 14$ ,  $\deg_3(u_2) \leq 13$  et pour  $i \in \{3, 4\}$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 12$ . Par ailleurs,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_4$ . En outre, chacun des sommets  $u_1, u_2, u_3$  possède au moins deux voisins 3-faciaux colorés identiquement (respectivement  $(w, t)$ ,  $(w, v)$  et  $(v, t)$ ). D'où  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_2)| \geq 2$ ,  $|L(u_3)| \geq 3$  et  $|L(u_4)| \geq 4$  car  $u_4$  possède au moins trois voisins 3-faciaux de la même couleur :  $v, w$  et  $t$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, donc  $G$  est 3-facialement 11-colorable, une contradiction. ]]

**L4**

[[ Soit  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe obtenu en contractant les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$ . Posons  $c(x) := c'(x)$  si  $x \notin \{v, w, u_1, u_2\}$  et  $c(v) := c(w) := c'(h_1)$ . À nouveau,  $v$  et  $w$  ne peuvent être 3-facialement adjacents dans  $G$  sans contredire le lemme 24(ii). D'après le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 12$  et  $\deg_3(u_2) \leq 11$ . En outre,  $u_1$  et  $u_2$  ont tous deux au moins deux voisins 3-faciaux de la même couleur,  $v$  et  $w$ . De plus,  $u_1$  et  $u_2$  sont 3-facialement adjacents, et donc  $|L(u_1)| \geq 1$  et  $|L(u_2)| \geq 2$ . Par conséquent,  $c$  s'étend en une 11-coloration 3-faciale de  $G$ , une contradiction. ]]

**L5**

[[ Remarquons en premier lieu que,  $G$  étant un graphe planaire, si  $v \in \mathcal{N}_3(t)$  alors  $v' \notin \mathcal{N}_3(t')$ . Donc, sans perte de généralité, supposons que  $v$  et  $t$  ne soient pas 3-facialement adjacents in  $G$ . Contractons les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$ . À nouveau, notons  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe obtenu, et posons  $c(x) := c'(x)$  pour tout  $c \in V(G) \setminus \{v, w, t, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ . Définissons également  $c(x_1) := c(x_2) := c(x_3) := c'(h_1)$  (la coloration partielle obtenue est toujours 3-faciale grâce à l'hypothèse faite au début). Le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est isomorphe à  $K_4$ , et par le lemme 23,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . En outre, pour  $i \in \{2, 3\}$ , le sommet  $u_i$  possède au moins deux voisins 3-faciaux de la même couleur,  $v$  et  $w$ . Enfin, le sommet  $u_4$  possède au moins trois tels voisins 3-faciaux, à savoir  $v, w$  et  $t$ . Par conséquent,  $|L(u_1)| \geq 2$ ,  $|L(u_i)| \geq 3$  si  $i \in \{2, 3\}$  et  $|L(u_4)| \geq 4$ . Ainsi,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc  $G$  est 3-facialement 11-colorable, une contradiction. ]]

**L6**

[[ La même remarque que dans le cas précédent permet de supposer que  $t \notin \mathcal{N}_3(v)$ . À nouveau, le graphe obtenu en contractant les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$

admet une 11-coloration 3-faciale  $c'$ . Étendons cette coloration à  $V(G) \setminus \mathcal{U}$  de la même manière que précédemment :  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  et  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_4$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 2$  et  $|L(u_2)| \geq 2$ . Comme  $u_3$  possède au moins deux voisins 3-faciaux de la même couleur,  $v$  et  $w$ ,  $|L(u_3)| \geq 3$ . Enfin, le sommet  $u_4$  possédant trois tels voisins 3-faciaux,  $|L(u_4)| \geq 4$ . Par conséquent, le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc le graphe  $G$  admet une 11-coloration 3-faciale, une contradiction.  $\square$

**L7**

$\square$  Soient  $H_1$  le chemin  $x_1u_3u_5x_2$ ,  $H_2$  le chemin  $y_1u_2u_4u_1y_2$  et  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant chaque chemin  $H_i$  en un sommet  $h_i$ . Pour tout sommet  $v \notin V(H_1) \cup V(H_2)$ , posons  $c(v) := c'(v)$ . Notons que les sommets  $x_1$  et  $x_2$  ne peuvent être 3-facialement adjacents dans  $G$  sans contredire le lemme 24(iii), et qu'il en est de même pour les sommets  $y_1$  et  $y_2$ ; par conséquent, poser  $c(x_1) := c(x_2) := c'(h_1)$  et  $c(y_1) := c(y_2) := c'(h_2)$  fournit une 11-coloration 3-faciale partielle de  $G$  (puisque  $c'(h_1) \neq c'(h_2)$  car  $c'$  est 3-faciale). Il reste à colorer les sommets de  $\mathcal{U} = \{u_i : i \in \{1, 2, \dots, 5\}\}$  : remarquons que  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$ . D'après le lemme 24(ii),  $\deg_3(u_1) \leq 15$  et  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \geq 2$ . Le nombre de voisins 3-faciaux colorés de  $u_1$ , c'est-à-dire le nombre de ses voisins 3-faciaux dans  $V(G) \setminus \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ , est au plus 11. En outre,  $u_1$  possède deux voisins 3-faciaux colorés de la même couleur, nommément  $x_1$  et  $x_2$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$ . Le sommet  $u_2$  possède quatre voisins 3-faciaux non colorés (les autres sommets de  $\mathcal{U}$ ), donc  $|L(u_2)| \geq 3$ . Pour  $i \in \{3, 4\}$ , le sommet  $u_i$  possède au moins deux voisins 3-faciaux de la même couleur ( $x_1$  et  $x_2$  pour  $u_3$ , et  $y_1$  et  $y_2$  pour  $u_4$ ), donc  $|L(u_i)| \geq 4$ . Enfin, le sommet  $u_5$  possède deux couples de voisins 3-faciaux colorés de façon identique :  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$ . D'où,  $|L(u_5)| \geq 5$ , donc le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\square$

**L8**

$\square$  Contractons les arêtes en gras en un nouveau sommet et construisons une 11-coloration 3-faciale  $c$  de  $V(G) \setminus \mathcal{U}$  de la façon habituelle. D'après le lemme 23,  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \in \{3, 4, 5\}$  et  $\deg_3(u_6) \leq 11$ . De plus,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_6$ . Comme  $v, w$  et  $t$  sont de la même couleur, et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{2, 5\}$ ,  $\{w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_4)$  et  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_5)$ , nous déduisons  $|L(u_i)| \geq i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ainsi, le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc  $G$  admet une 11-coloration 3-faciale, une contradiction.  $\square$

**L9**

$\square$  Contractons les arêtes en gras en un sommet unique  $h_1$ . Soit  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe obtenu : elle s'étend en une 11-coloration 3-faciale de  $V(G) \setminus \mathcal{U}$  comme dans les cas précédents. Selon le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 12$  et  $\deg_3(u_2) \leq 11$ . De plus,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_2$ . Comme  $v$  et  $w$  sont de la même couleur et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $|L(u_1)| \geq 1$  et  $|L(u_2)| \geq 2$ . Ainsi, le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc le graphe  $G$  admet une 11-coloration 3-faciale, une contradiction.  $\square$

**L10**

$\square$  Soit  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe  $G'$  obtenu en contractant les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$ . Posons  $c(x) := c'(x)$  pour tout sommet  $x \in V(G) \cap V(G')$ , et soit  $c(v) := c(w) := c'(h_1)$ . Cette coloration est 3-faciale en vertu du lemme 24(ii). D'après le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 13$ ,  $\deg_3(u_2) \leq 12$ , et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{3, 4\}$ . De plus,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_4$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$  et  $|L(u_i)| \geq 4$  si  $i \in \{3, 4\}$ . Comme  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 4\}$ , il suit  $|L(u_i)| \geq 2$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $|L(u_i)| \geq i$  pour  $i \in \{3, 4\}$ .

Ainsi, le graphe  $G[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc le graphe  $G$  est 3-facialement 11-colorable, une contradiction. ]]

**L11**

[[ Contractons les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$  et définissons une 11-coloration 3-faciale  $c$  de  $V(G) \setminus \mathcal{U}$  comme habituellement. Selon le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 15$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ . De plus,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$ . Comme  $v$  et  $w$  sont de la même couleur, et comme  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 4, 5\}$ , il vient  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_i)| \geq 4$  si  $i \in \{2, 3\}$  et  $|L(u_i)| \geq 5$  si  $i \in \{4, 5\}$ . Ainsi, le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, et donc  $G$  admet une 11-coloration 3-faciale, une contradiction. ]]

**L12**

[[ Soit  $c'$  une 11-coloration 3-faciale du graphe  $G'$  obtenu en contractant les arêtes en gras en un nouveau sommet  $h_1$ . Posons  $c(x) := c'(x)$  pour tout sommet  $x \in V(G) \cap V(G')$ , et  $c(v) := c(w) := c'(h_1)$ . Par le lemme 23,  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2\}$ , et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ . De plus,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_6$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$  et  $|L(u_i)| \geq i$  pour  $i \in \{3, 4, 5\}$ . Les sommets  $v$  et  $w$  sont de la même couleur, et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{2, 6\}$ , par conséquent  $|L(u_2)| \geq 2$  et  $|L(u_6)| \geq 6$ . Ainsi, le graphe  $G$  est 3-facialement 11-colorable, une contradiction. ]]

**L13**

[[ Définissons la 11-coloration 3-faciale partielle  $c$  comme habituellement au regard des arêtes en gras et des sommets  $v$  et  $w$ . Le lemme 23 implique  $\deg_3(u_1) \leq 15$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \in \{2, 3, 4\}$  et  $\deg_3(u_5) \leq 11$ . De plus, comme  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$  et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 4, 5\}$ , il vient  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_i)| \geq 3$  si  $i \in \{2, 3\}$ ,  $|L(u_4)| \geq 4$  et  $|L(u_5)| \geq 5$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction. ]]

**L14**

[[ Soit  $c$  la 11-coloration 3-faciale partielle de  $G$  définie comme précédemment, en regard des arêtes en gras et des sommets  $v$  et  $w$ . D'après le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 15$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ . En outre, comme  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$  et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 5\}$ , il vient  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_i)| \geq 4$  si  $i \in \{2, 3, 4\}$  et  $|L(u_5)| \geq 5$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction. ]]

**L15**

[[ Définissons comme précédemment la 11-coloration 3-faciale  $c$  en fonction des arêtes en gras et des sommets  $v$  et  $w$ . Ici,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$ . Selon le lemme 23,  $\deg_3(u_1) \leq 15$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ . En outre, comme  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 5\}$ , il suit  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_i)| \geq 4$  si  $i \in \{2, 3, 4\}$  et  $|L(u_5)| \geq 5$ . Ainsi  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction. ]]

**L16**

[[ Soit  $c$  la 11-coloration 3-faciale partielle de  $G$  définie comme précédemment, en regard des arêtes en gras et des sommets  $v, w$  et  $t$ . À nouveau,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$ . De plus,  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \in \{3, 4\}$  et  $\deg_3(u_5) \leq 11$ . Par ailleurs,  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{1, 4\}$ ,  $\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_2)$  et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_5)$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_2)| \geq 2$ ,  $|L(u_3)| \geq 3$ ,  $|L(u_4)| \geq 4$  et  $|L(u_5)| \geq 5$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction. ]]

**L17**

[[ Définissons la 11-coloration 3-faciale partielle  $c$  comme précédemment, en fonction des arêtes en gras et des sommets  $v, w$  et  $t$ . Ici,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$  et  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\deg_3(u_3) \leq 12$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{4, 5\}$ . Par ailleurs,  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{1, 5\}$ ,

$\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_2)$  et  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_3)$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_2)| \geq 2$ ,  $|L(u_i)| \geq 4$  si  $i \in \{3, 4\}$  et  $|L(u_5)| \geq 5$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\square$

**L18**

$\llbracket$  Définissons de la même façon la 11-coloration 3-faciale partielle  $c$  en fonction des arêtes en gras et des sommets  $v$  et  $w$ . Cette fois,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_3$ ,  $\deg_3(u_1) \leq 13$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{2, 3\}$ . En outre,  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$  et  $|L(u_i)| \geq 3$  si  $i \in \{2, 3\}$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\rrbracket$

**L19**

$\llbracket$  À nouveau,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_5$  et  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2\}$  alors que  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{3, 4, 5\}$ . De plus,  $\{v, w\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 3, 4\}$ ,  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_5)$  et  $\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_2)$ . Ainsi,  $|L(u_1)| \geq 1$ ,  $|L(u_2)| \geq 2$  et  $|L(u_i)| \geq 5$  si  $i \in \{3, 4, 5\}$ . Par conséquent,  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\rrbracket$

**L20**

$\llbracket$  Dans ce cas,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_6$ . De plus,  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\deg_3(u_4) \leq 13$  et  $\deg_3(u_i) \leq 11$  si  $i \in \{5, 6\}$ . Par ailleurs,  $\{w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{1, 6\}$ ,  $\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_3)$  et  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{2, 4\}$ . D'où,  $|L(u_i)| \geq 2$  si  $i \in \{1, 2\}$ , et  $|L(u_3)| \geq i$  si  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ . Donc  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\rrbracket$

**L21**

$\llbracket$  À nouveau,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_6$ . De plus,  $\deg_3(u_i) \leq 15$  si  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \in \{4, 5\}$  et  $\deg_3(u_6) \leq 11$ . Comme  $\{w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{1, 5\}$ ,  $\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_3)$  et  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  pour  $i \in \{2, 6\}$ , il suit  $|L(u_i)| \geq 2$  si  $i \in \{1, 2\}$  et  $|L(u_i)| \geq i$  si  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ . Donc  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\rrbracket$

**L22**

$\llbracket$  Ici  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_6$ ,  $\deg_3(u_i) \leq 13$  si  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \in \{5, 6\}$ . Donc,  $|L(u_i)| \geq 3$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . En outre, comme  $\{v, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{4, 5\}$ , et  $\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_6)$ , il suit  $|L(u_i)| \geq i$  si  $i \in \{4, 5, 6\}$ . Ainsi  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\rrbracket$

**L23**

$\llbracket$  Ici,  $G_3[\mathcal{U}] \simeq K_3$ . Par ailleurs,  $\deg_3(u_i) \leq 12$  si  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Comme  $\{v, w, t\} \subset \mathcal{N}_3(u_i)$  si  $i \in \{1, 2, 3\}$ , il vient  $|L(u_i)| \geq 3$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Donc  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable, une contradiction.  $\rrbracket$

**L24**

$\llbracket$  Définissons la coloration partielle  $c$  de la façon habituelle en regard des arêtes en gras et du sommet  $v$ . Cette fois,  $G_3[\mathcal{U}]$  est isomorphe au graphe complet à quatre sommets privé d'une arête, puisque  $u_1 \notin \mathcal{N}_3(u_2)$  car la face est de taille au moins 8. Selon le lemme 23,  $\deg_3(u_i) \leq 11$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ainsi,  $|L(u_i)| \geq 2$  si  $i \in \{1, 2\}$  et  $|L(u_i)| \geq 3$  si  $i \in \{3, 4\}$ . Donc le graphe  $G_3[\mathcal{U}]$  est  $L$ -colorable. Ceci peut être vérifié directement, ou vu comme une conséquence d'un théorème indépendamment prouvé par Borodin [Bor77] et Erdős, Rubin et Taylor [ERT80] stipulant qu'un graphe n'est pas degré-choisissable si, et seulement si, c'est un *arbre de Gallai*, c'est-à-dire si, et seulement si, chacun de ses blocs est soit complet soit un cycle impair.  $\rrbracket$

 $\square$ 

**Corollaire 7.** Soit  $G$  un graphe  $(3, 11)$ -minimal.

- (i) Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux 5-faces de  $G$  possédant une arête commune  $xy$ , alors  $x$  et  $y$  ne sont pas tous deux des 3-sommets.
- (ii) Soit  $f$  une 7-face dont chaque sommet incident est un 3-sommet. Si  $f$  est adjacente à une 3-face, alors toutes les autres faces adjacentes à  $f$  sont de taille au moins 7.

- (iii) Si deux sommets dangereux n'appartenant pas à la même  $(\leq 4)$ -face sont adjacents alors aucun n'est incident à une 3-face.
- (iv) Deux sommets dangereux incidents à la même 6-face ne sont pas adjacents.
- (v) Quatre sommets dangereux incidents à une même  $(\geq 6)$ -face ne sont pas consécutifs.
- (vi) Une face très-mauvaise est adjacente à au moins trois  $(\geq 7)$ -faces.
- (vii) Une face mauvaise est adjacente à au moins deux  $(\geq 7)$ -faces.

### Démonstration.

- (i) D'après le lemme 24(i),  $\deg_3(x) + \deg_3(y) \geq 23$ , et selon le lemme 23, le degré 3-facial d'un 3-sommet incident à deux 5 faces est au plus 11. Par conséquent, au moins un des sommets  $x$  et  $y$  est un  $(\geq 4)$ -sommet.
- (ii) Notons d'abord que, conformément au lemme 24(iii), les deux faces adjacentes à la fois à  $f$  et à la 3-face sont de taille au moins 7. Donc  $f$  est adjacente à au plus quatre  $(\leq 6)$ -faces. L'assertion découle alors directement de la réductibilité des configurations (L1) et (L2) de la figure 4.2.
- (iii) Découle directement de la réductibilité de la configuration (L4) de la figure 4.2.
- (iv) Supposons le contraire, et notons  $x$  et  $y$  deux tels sommets. Par le lemme 24(iii), une 6-face n'est pas adjacente à une 3-face, donc  $x$  et  $y$  sont incidents à une 4-face. Ainsi,  $\deg_3(x) \leq 11$  et  $\deg_3(y) \leq 11$ , ce qui contredit le lemme 24(v).
- (v) Supposons que l'assertion soit fausse. Alors, d'après la troisième assertion de ce corollaire, le graphe  $G$  contient nécessairement la configuration (L5) ou (L6) de la figure 4.2, qui sont toutes deux réductibles.
- (vi) Soit  $f$  une très-mauvaise face. D'après la première assertion de ce corollaire et le lemme 25, deux 6-faces adjacentes ne peuvent être adjacentes à  $f$ . Ainsi  $f$  est adjacente à au plus deux telles faces.
- (vii) Soit  $f$  une mauvaise face, notons  $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ses sommets incidents dans l'ordre indirect. Sans perte de généralité, supposons que, pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\alpha_i$  est un sommet dangereux. Pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , notons  $f_i$  la face adjacente à  $f$  et incidente à la fois à  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$ . D'après la première assertion de ce corollaire et le lemme 25, au plus deux faces parmi  $f_1, f_2, f_3, f_4$  peuvent être de taille au plus 6, ce qui conclut la preuve.

□

### 4.3. Démonstration du théorème 32

Supposons que le théorème 32 soit faux, et notons  $G$  un graphe  $(3, 11)$ -minimal. Nous allons obtenir une contradiction en utilisant une méthode de déchargement. Voici le déroulement de la preuve : à chaque sommet et à chaque face est attribuée une charge initiale. La formule d'Euler permet de prouver que la somme totale des charges est strictement négative. Ensuite, des règles de redistribution de la charge sont établies, et chaque sommet et face donne ou reçoit de la charge selon ces règles. Au final, la somme totale des charges reste la même, mais la charge de chaque sommet ou face est (en général) différente de la charge originelle. Alors, par une analyse de cas, nous montrons que la charge de chaque sommet et de chaque face est positive, une contradiction.

**Charge initiale.** Chaque sommet possède et chaque face possède une charge. Pour tout  $v \in V(G)$ , la charge initiale est

$$\text{ch}(v) := d(v) - 4,$$

où  $d(v)$  désigne le degré du sommet  $v$  dans  $G$ . De la même manière, pour tout  $f \in F(G)$ , où  $F(G)$  est l'ensemble des faces de  $G$ , la charge initiale de  $f$  est

$$\text{ch}(f) := r(f) - 4,$$

où  $r(f)$  est la taille de la face  $f$ . D'après la formule d'Euler, la somme totale est

$$\sum_{v \in V(G)} \text{ch}(v) + \sum_{f \in F(G)} \text{ch}(f) = -8.$$

**Règles.** Nous utilisons les règles de déchargement suivantes.

**Règle R1.** Une  $(\geq 5)$ -face donne  $1/3$  à chaque sommet sain incident et  $1/2$  à chaque sommet dangereux incident.

**Règle R2.** Une  $(\geq 7)$ -face donne  $1/3$  à chaque 3-face adjacente.

**Règle R3.** Une  $(\geq 7)$ -face donne  $1/6$  à chaque mauvaise face adjacente.

**Règle R4.** Une 6-face donne  $1/12$  à chaque très-mauvaise face adjacente.

**Règle R5.** Un  $(\geq 5)$ -sommet  $v$  donne  $2/3$  à une face incidente  $f$  si, et seulement si, il existe deux 3-faces toutes deux incidentes à  $v$  et adjacentes à  $f$ . Notons que dans ce cas, la taille de la face  $f$  est au moins 7.

Nous allons prouver à présent que la charge finale  $\text{ch}^*(x)$  de tout  $x \in V(G) \cup F(G)$  est positive ou nulle. Par conséquent,

$$-8 = \sum_{v \in V(G)} \text{ch}(v) + \sum_{f \in F(G)} \text{ch}(f) = \sum_{v \in V(G)} \text{ch}^*(v) + \sum_{f \in F(G)} \text{ch}^*(f) \geq 0,$$

une contradiction.

**Charge finale des sommets.** Comme indiqué par le lemme 24(iv), le degré minimum de  $G$  est au moins trois. Soit  $v$  un sommet quelconque de  $G$ . Afin de prouver que sa charge finale  $\text{ch}^*(v)$  est positive ou nulle, nous allons considérer plusieurs cas en fonction du degré de  $v$ .

Supposons d'abord que  $v$  est un 3-sommet. Si  $v$  est sain, alors d'après la Règle R1 sa charge finale est  $\text{ch}^*(v) = -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ . Similairement, si  $v$  est dangereux, alors  $\text{ch}^*(v) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ . Si  $v$  est un 4-sommet alors il ne reçoit et ne donne rien, donc  $\text{ch}^*(v) = \text{ch}(v) = 0$ .

Enfin, supposons que  $v$  soit de degré  $d \geq 5$ . Le sommet  $v$  ne donne une partie de sa charge que selon la Règle R5, et cette règle s'applique à  $v$  au plus  $\lfloor d/2 \rfloor$  fois. Ainsi,  $\text{ch}^*(v) \geq d - 4 - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \cdot \frac{2}{3}$ . Cette quantité est positive si  $d \geq 6$ . Si  $d = 5$ , alors  $\text{ch}^*(v) \geq 5 - 4 - \frac{2}{3} > 0$ .

**Charge finale des faces.** Soit  $f$  une face quelconque de  $G$ . Notons respectivement  $f_{ce}$  et  $bad$  le nombre de 3-faces et le nombre de faces mauvaises adjacentes à  $f$ . Soient, respectivement,  $sfe$  et  $dgs$  le nombre de sommets sains et le nombre de sommets dangereux incidents à  $f$ . Afin de prouver que la charge finale  $ch^*(f)$  de  $f$  est positive ou nulle, nous considérons plusieurs cas, en fonction de la taille de  $f$ .

**$f$  est une 3-face.** Toute face adjacente à  $f$  est de taille au moins 7 selon le lemme 24(iii). Ainsi, d'après la Règle R2,  $f$  reçoit  $1/3$  de la part de chacune des trois faces qui lui sont adjacentes, donc  $ch^*(f) = 0$ .

**$f$  est une 4-face.** La face  $f$  ne donne et ne reçoit pas de charge, donc  $ch^*(f) = ch(f) = 0$ .

**$f$  est une 5-face.** Dans ce cas, toute face adjacente à  $f$  est de taille au moins cinq, en vertu du lemme 24(iii). Ainsi, une 5-face donne de la charge uniquement aux 3-sommets incidents, qui sont tous sains. Considérons les cas suivants, en fonction du nombre  $sfe$  de tels sommets.

$sfe \leq 3$  : dans ce cas,  $ch^*(v) \geq 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ .

$sfe = 4$  :  $f$  est une mauvaise face. Considérons les faces adjacentes à  $f$  : d'après le corollaire 7(vii), au moins deux d'entre-elles sont de taille au moins 7. Ainsi, selon la Règle R3,  $f$  reçoit  $1/6$  d'au moins deux de ses faces adjacentes. Donc,  $ch^*(v) \geq 1 - 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$ .

$sfe = 5$  :  $f$  est une très-mauvaise face, et donc, selon le corollaire 7(vi), au moins trois faces adjacentes à  $f$  sont de taille au moins 7. De plus, par le lemme 24(iii) et le corollaire 7(i), toute face adjacente à  $f$  est de taille au moins 6. D'après les Règles R3 et R4, les faces adjacentes à  $f$  donnent donc à  $f$  au moins  $4 \cdot 1/6$ . Ceci montre que  $ch^*(v) \geq 1 - 5 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 0$ .

**$f$  est une 6-face.** D'après le lemme 24(iii),  $f_{ce} = 0$ . Soit  $vbd$  le nombre de faces très-mauvaises adjacentes à  $f$ . La charge finale de  $f$  est  $2 - dgs \cdot \frac{1}{2} - sfe \cdot \frac{1}{3} - vbd \cdot \frac{1}{12}$ , en raison des Règles R1 et R4.

Selon le corollaire 7(iv), deux sommets dangereux incidents à  $f$  ne sont pas adjacents, donc au plus trois sommets dangereux sont incidents à  $f$ . Notons également que  $vbd \leq sfe/2$  selon le corollaire 7(i) et parce qu'une très-mauvaise face adjacente à  $f$  est incidente à deux sommets sains de  $f$ . Estimons à présent la charge finale de  $f$  en fonction du nombre  $dgs$  de sommets dangereux incidents à  $f$ .

$dgs = 3$  : comme un sommet sain n'est pas incident à une ( $\leq 4$ )-face, il y a au plus un sommet sain incident à  $f$ , i.e.  $sfe \leq 1$ . Ainsi,  $vbd = 0$ . Par conséquent,  $ch^*(f) \geq 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} > 0$ .

$dgs = 2$  : alors,  $sfe \leq 3$ . Distinguons deux cas selon la valeur de  $sfe$ .

$sfe = 3$  : notons que  $vbd = 0$  par la réductibilité de (L3). D'où,  $ch^*(f) \geq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ .

$sfe \leq 2$  : dans ce cas, au plus une très-mauvaise face est adjacente à  $f$ , donc  $ch^*(f) \geq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{12} > 0$ .

$dgs = 1$  : alors  $sfe \leq 4$  et  $vbd \leq 1$  car (L3) est réductible. Ainsi,  $ch^*(f) \geq 2 - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{12} > 0$ .



$dgs = 0$  : si  $sfe \geq 5$  alors, comme (L3) est réductible,  $vbd = 0$ , et par conséquent  $ch^*(f) \geq 2 - \frac{6}{3} = 0$ . Si  $sfe \leq 4$ , alors  $vbd \leq 2$  et donc  $ch^*(f) \geq 2 - 4 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{12} > 0$ .

**$f$  est une 7-face.** La charge finale de  $f$  est au moins  $3 - dgs \cdot \frac{1}{2} - (fce + sfe) \cdot \frac{1}{3} - bad \cdot \frac{1}{6}$ .

D'après le corollaire 7(v), quatre sommets dangereux ne peuvent être consécutifs sur  $f$ , donc au plus cinq sommets dangereux sont incidents à  $f$ . Notons  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$  les sommets de  $f$  dans l'ordre indirect. Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des sommets dangereux de  $f$ , donc  $dgs = |\mathcal{D}|$ . Nous allons estimer la charge finale de  $f$  en regard de son nombre  $dgs$  de sommets dangereux.

$dgs = 5$  : par symétrie, nous pouvons supposer que  $\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$ . Supposons d'abord que  $\alpha_5$  et  $\alpha_6$  ne soient pas incidents à la même ( $\leq 4$ )-face :  $f$  ne peut alors être incidente à un sommet sain, et donc elle n'est pas non plus adjacente à une mauvaise face (car un sommet sain n'est pas incident à une ( $\leq 4$ )-face, et une mauvaise face n'est pas adjacente à une ( $\leq 4$ )-face). En outre, d'après le corollaire 7(iii),  $f$  n'est pas adjacente à une 3-face. Ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - \frac{5}{2} > 0$ . Supposons à présent que  $\alpha_5$  et  $\alpha_6$  soient incidents à la même ( $\leq 4$ )-face. Dans ce cas, le sommet  $\alpha_4$  est un ( $\geq 4$ )-sommet d'après la réductibilité de (L7), et parce qu'il n'est pas dangereux. Ainsi,  $f$  n'est pas incidente à un sommet sain, et donc elle n'est pas non plus adjacente à une mauvaise face. Par conséquent, sa charge finale est  $ch^*(f) \geq 3 - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} > 0$ .

$dgs = 4$  : distinguons plusieurs cas en fonction de la position relative sur  $f$  des sommets dangereux. Rappelons que, par le corollaire 7(v), au plus trois sommets dangereux peuvent être consécutifs sur  $f$ . De manière générique, il nous suffit de considérer les cas suivants.

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$  : la charge de  $f$  est  $ch^*(f) = 1 - (fce + sfe) \cdot \frac{1}{3} - bad \cdot \frac{1}{6}$ . De plus,  $sfe \leq 2$ ,  $bad \leq 1$  et  $fce + sfe \leq 3$  (d'après le corollaire 7(iii) et parce qu'un sommet sain n'est pas incident à une ( $\leq 4$ )-face). Ainsi,  $ch^*(f)$  est strictement négatif si, et seulement si,  $sfe = 2$ ,  $bad = 1$  et  $fce = 1$ . Mais dans ce cas, la configuration obtenue est (L8), qui est réductible.

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$  : comme une mauvaise face n'est ni adjacente à une ( $\leq 4$ )-face ni incidente à un sommet dangereux,  $bad \leq 1$ . De plus, comme  $\alpha_3$  n'est pas dangereux, son degré est au moins quatre par réductibilité de (L7) et (L11). Donc,  $sfe \leq 2$ . Supposons d'abord que  $bad = 1$  : alors  $sfe \in \{1, 2\}$ . Grâce à la réductibilité de (L10), il vient  $sfe + fce \leq 2$ . Ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} > 0$ . Supposons à présent que  $bad = 0$ . Clairement,  $fce \leq 3$  et  $sfe \leq 2$ . Si  $fce = 3$ , alors  $sfe = 0$  et si  $fce = 2$ , alors  $sfe \leq 1$  par réductibilité de (L12). Ainsi,  $fce + sfe \leq 3$ . Par conséquent,  $ch^*(f) \geq 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} - (fce + sfe) \cdot \frac{1}{3} \geq 0$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$  : dans ce cas,  $f$  n'est pas adjacente à une mauvaise face. En outre, d'après le corollaire 7(iii),  $fce \leq 3$  et  $sfe \leq 2$  (car les sommets dangereux  $\alpha_4$  et  $\alpha_6$  empêchent au moins un sommet non dangereux d'être sain). Par ailleurs,  $fce + sfe \neq 5$  par réductibilité de (L13). Toujours d'après la réductibilité de (L13), si  $fce + sfe = 4$  alors  $fce = 3$  et deux 3-faces ne peuvent avoir un sommet commun. Par conséquent, la configuration obtenue est isomorphe à (L14) ou (L15), qui sont toutes deux réductibles. Ainsi,  $fce + sfe \leq 3$  et donc  $ch^*(f) \geq 3 - 2 - (fce + sfe) \cdot \frac{1}{3} \geq 0$ .

$dgs = 3$  : considérons à nouveau plusieurs sous-cas en fonction de la position relative des sommets dangereux sur  $f$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  : alors  $fce + sfe \leq 3$  par le corollaire 7(iii), et  $bad \leq 2$ . Ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} > 0$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$  : alors  $fce \leq 4$ . Examinons les différents cas possibles en fonction de la valeur de  $fce$ .

$fce = 4$  : nécessairement,  $sfe \leq 1$  et  $bad = 0$ . Si  $sfe = 0$ ,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} > 0$ . Si  $sfe = 1$ , alors le sommet sain est  $\alpha_3$ . De plus,  $\alpha_5$  doit être un ( $\geq 5$ )-sommet par réductibilité de (L9). Ainsi,  $f$  est incidente à  $\alpha_5$  à l'intersection de deux 3-faces, donc, selon la Règle R5, le sommet  $\alpha_5$  donne  $\frac{2}{3}$  à  $f$ . Ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} > 0$ .

$fce = 3$  : supposons en premier lieu que l'un au moins des sommets dangereux soit incident à une 4-face. Nécessairement,  $sfe \leq 1$  et donc  $bad \leq 1$ . Ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 0$ .

Supposons à présent qu'aucun sommet dangereux ne soit incident à une 4-face. En particulier,  $sfe \leq 2$ . Si  $sfe = 2$  alors la configuration obtenue est réductible car (L19) l'est. Ainsi,  $sfe \leq 1$  et donc  $bad \leq 1$ . Par conséquent,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ .

$fce = 2$  : prouvons que  $sfe \leq 2$ . Ceci est clair si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne sont pas incidents à une même 3-face. Supposons donc que l'arête  $\alpha_3\alpha_4$  soit incidente à une 3-face. L'inégalité découle alors de la réductibilité de (L19) et (L20). Ainsi, il vient  $bad \leq 1$ . Donc,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ .

$fce = 1$  : alors  $sfe \leq 3$  et  $bad \leq 2$ . Si  $sfe = 3$  et  $bad = 2$ , la configuration obtenue est réductible car (L20) et (L21) le sont. Donc,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ .

$fce = 0$  : à nouveau,  $sfe \leq 3$  et  $bad \leq 2$ , donc  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} > 0$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5\}$  : ici encore,  $fce \leq 4$  et nous examinons la situation en fonction de la valeur de  $fce$ .

$fce = 4$  : dans ce cas,  $sfe = 0$  donc  $bad = 0$  et ainsi,  $ch^*(f) = 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} > 0$ .

$fce = 3$  : si l'un au moins des sommets dangereux est incident à une 4-face alors  $sfe = 0$ , donc  $bad = 0$  et ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} \geq 0$ . À présent, il suit  $sfe \neq 2$ , sinon cela contredirait la réductibilité de (L16). Par conséquent,  $sfe$  est au plus un, et donc  $bad \leq 1$  selon le corollaire 7(i). Ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ .

$fce = 2$  : par réductibilité de (L16) et (L17),  $sfe \leq 2$  et donc,  $bad \leq 2$ . Comme  $ch^*(f) = 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - (fce + sfe) \cdot \frac{1}{3} - bad \cdot \frac{1}{6}$ ,  $ch^*(f)$  est strictement négatif si, et seulement si,  $sfe = 2$  et  $bad = 2$ . Dans ce cas, la configuration obtenue est (L18), qui est réductible.

$fce = 1$  : comme (L16) et (L17) sont réductibles,  $sfe \leq 2$ . Donc  $bad \leq 2$  et ainsi,  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} > 0$ .

$fce = 0$  : dans ce cas,  $sfe \leq 3$  et  $bad \leq 2$ . Donc  $ch^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} > 0$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$  : dans ce cas,  $\text{sfe} \leq 2$  (puisque un sommet sain n'est pas incident à une ( $\leq 4$ )-face) et  $\text{bad} \leq 1$  (puisque une mauvaise face n'est pas incidente à un sommet dangereux). En outre,  $\text{fce} \leq 4$ . Examinons les différents cas possibles selon la valeur de  $\text{fce}$ .

$\text{fce} = 4$  : alors  $\text{sfe} \leq 1$  et  $\text{bad} = 0$ . En outre, un sommet parmi  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7$  est adjacent à un sommet dangereux, et incident à  $f$  entre deux triangles. Comme (L9) est réductible, le degré de ce sommet est au moins cinq, et ainsi, selon la Règle R5, il donne  $\frac{2}{3}$  à  $f$ . Par conséquent,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} > 0$ .

$\text{fce} = 3$  : si  $\text{sfe} \leq 1$  alors  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ . Si  $\text{sfe} = 2$  alors, aux symétries près, les deux sommets sains sont soit  $\alpha_6$  et  $\alpha_7$  soit  $\alpha_2$  et  $\alpha_6$ . Dans le premier cas, un sommet parmi  $\alpha_2, \alpha_4$  est incident à  $f$  à l'intersection de deux 3-faces. En outre, il s'agit nécessairement d'un ( $\geq 5$ )-sommet en vertu de la réductibilité de (L9). Dans le second cas, la même assertion est vraie pour  $\alpha_4$  grâce à la réductibilité de (L9). Ainsi, dans tous les cas, la face  $f$  reçoit  $\frac{2}{3}$  de l'un de ses sommets incidents par la Règle R5. Par conséquent, (comme  $\text{bad} \leq 1$ ),  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} > 0$ .

$\text{fce} \leq 2$  : comme  $\text{sfe} \leq 2$  et  $\text{bad} \leq 1$ ,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ .

$\text{dgs} = 2$  : considérons plusieurs sous-cas en regard de la position relative des sommets dangereux sur  $f$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  : dans ce cas  $\text{bad} \leq 3$ , et, d'après le corollaire 7(iii),  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 6$ . Distinguons trois cas, selon la valeur de  $\text{fce} + \text{sfe}$ .

$\text{fce} + \text{sfe} = 6$  : tous les sommets incidents à  $f$  ont degré trois, et  $f$  est adjacente à une 3-face. Donc, par le corollaire 7(ii),  $f$  n'est pas adjacente à une ( $\leq 6$ )-face. Ainsi,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 1 - 6 \cdot \frac{1}{3} = 0$ .

$\text{fce} + \text{sfe} = 5$  : si  $\text{bad} \leq 2$ , alors  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 1 - 5 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$ . Sinon,  $\text{bad} = 3$ . Notons que l'arête  $\alpha_1\alpha_2$  est nécessairement incidente à une ( $\leq 4$ )-face. Si cette face est de taille quatre, alors la configuration obtenue est (L22), qui est réductible. Supposons à présent que la taille de cette face soit trois. Comme il ne peut y avoir trois mauvaises faces consécutives autour de  $f$ , les arêtes  $\alpha_3\alpha_4$  et  $\alpha_6\alpha_7$  sont toutes deux incidentes à une mauvaise face. Comme (L18) est réductible, il vient que  $\alpha_3$  et  $\alpha_7$  sont tous deux de degré au moins quatre, ce qui entraîne  $\text{fce} + \text{sfe} < 5$ , une contradiction.

$\text{fce} + \text{sfe} \leq 4$  : dans ce cas,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 1 - 4 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} > 0$ .

$\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  ou  $\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_4\}$  : à nouveau  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 6$ , et nous distinguons deux cas en fonction de la valeur de  $\text{fce} + \text{sfe}$ .

$\text{fce} + \text{sfe} = 6$  : supposons d'abord que  $\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ . Soient  $P_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$  et  $P_2 = \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$ . Comme  $\text{fce} + \text{sfe} = 6$ , soit toutes les arêtes de  $P_1$  sont incidentes à des 3-faces et tous les sommets internes de  $P_2$  sont sains, soit les arêtes de  $P_2$  sont incidentes à des 3-faces et  $\alpha_2$

est sain. Ainsi,  $\alpha_2$  ou  $\alpha_4$  est de degré au moins cinq, par réductibilité de (L9). Il donne donc  $\frac{2}{3}$  à  $f$  selon la Règle R5. Par conséquent,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} > 0$ .

Supposons à présent que  $\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_4\}$ . Comme précédemment, il est possible de montrer que  $\alpha_2$  ou  $\alpha_5$  est un sommet de degré au moins cinq qui donne  $\frac{2}{3}$  à  $f$ . Ainsi,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} > 0$ .

$\text{fce} + \text{sfe} \leq 5$  : ici,  $\text{bad} \leq 2$ . Ainsi,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$ .

$\text{dgs} = 1$  : alors  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 6$  et, selon le corollaire 7(i),  $\text{bad} \leq 3$ . Ainsi,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} = 0$ .

$\text{dgs} = 0$  : d'après le corollaire 7(i),  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 7$  et  $\text{bad} \leq 4$ . Ainsi,  $\text{ch}^*(f) \geq 3 - 7 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{6} = 0$ .

**$f$  est une 8-face.** Comme (L4) et (L23) sont réductibles, il ne peut y avoir trois sommets dangereux consécutifs sur  $f$ . Donc le nombre  $\text{dgs}$  de sommets dangereux sur  $f$  est au plus cinq. Notons  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ , les sommets de  $f$  dans l'ordre indirect, et soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des sommets dangereux incidents à  $f$ .

$\text{dgs} = 5$  : aux symétries près,  $\mathcal{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7\}$ . Nécessairement,  $\text{bad} = 0$  (car une mauvaise face n'est pas incidente à un sommet dangereux). Pour  $i \in \{1, 4\}$ , notons  $f_i$  la face adjacente à  $f$  et incidente à la fois à  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$ . Comme (L24) est réductible, au plus une face parmi  $f_1, f_4$  est une 3-face. En outre, au plus deux sommets parmi  $\alpha_3, \alpha_6, \alpha_8$  peuvent être sains (car au moins un sommet parmi  $\alpha_6, \alpha_8$  est un  $(\geq 4)$ -sommet). Par conséquent,  $\text{fce} \leq 2, \text{sfe} \leq 2$  et donc,  $\text{ch}^*(f) \geq 4 - 5 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} > 0$ .

$\text{dgs} = 4$  : à symétrie près, l'ensemble des sommets dangereux est  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_7\}$  ou  $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}$ . Dans tous les cas,  $\text{bad} \leq 2$  (car une mauvaise face n'est pas incidente à un sommet dangereux) et  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 5$ . Donc,  $\text{ch}^*(f) \geq 4 - \frac{4}{2} - \frac{5}{3} - \frac{2}{6} = 0$ .

$\text{dgs} = 3$  : alors  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 6$  et  $\text{bad} \leq 3$  (car une mauvaise face n'est pas incidente à un dangereux sommet). Ainsi,  $\text{ch}^*(f) \geq 4 - \frac{3}{2} - \frac{6}{3} - \frac{3}{6} = 0$ .

$\text{dgs} = 2$  : alors  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 7$ , et par le corollaire 7(i),  $\text{bad} \leq 4$ . D'où,  $\text{ch}^*(f) \geq 4 - \frac{2}{2} - \frac{7}{3} - \frac{4}{6} = 0$ .

$\text{dgs} = 1$  : ici aussi,  $\text{fce} + \text{sfe} \leq 7$  et  $\text{bad} \leq 4$ , donc  $\text{ch}^*(f) \geq 4 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3} - \frac{4}{6} > 0$ .

$\text{dgs} = 0$  : selon le corollaire 7(i),  $\text{bad} \leq 5$ . Donc  $\text{ch}^*(f) \geq 4 - \frac{8}{3} - \frac{5}{6} > 0$ .

**$f$  est une  $(\geq 9)$ -face.** Soit  $f$  une  $k$ -face avec  $k \geq 9$ . Notons  $u_1, u_2, \dots, u_{\text{dgs}}$  les sommets dangereux incidents à  $f$ , dans le sens indirect. Notons  $f_i$  la  $(\leq 4)$ -face incidente à  $u_i$ . Le chemin facial  $P = u_i w_1 w_2 \dots w_j u_{i+1}$  de  $f$  entre  $u_i$  et  $u_{i+1}$  (dans le sens indirect) est de l'un des cinq types suivants :

- (a): si  $j \geq 1$ ,  $w_1$  n'est pas incident à  $f_i$  et  $w_j$  n'est pas incident à  $f_{i+1}$  ;
- (b): si  $j \geq 1$ ,  $w_1$  est incident à  $f_i$  et  $w_j$  est incident à  $f_{i+1}$  ;
- (c): si  $j \geq 1$  et ni de type (a) ni de type (b) ;
- (d): si  $j = 0$  et  $f_i$  et  $f_{i+1}$  sont la même 3-face ; et
- (e): si  $j = 0$  et pas de type (d).

Notons  $\alpha$  le nombre de chemins de type  $(a)$ ,  $\beta$  le nombre de chemins de type  $(b)$ ,  $\gamma$  le nombre de chemins de type  $(c)$ ,  $\delta$  le nombre de chemins de type  $(d)$  et  $\varepsilon$  le nombre de chemins de type  $(e)$ . Remarquons qu'un chemin de type  $(d)$  ou  $(e)$  est de longueur un. L'assertion suivante est clairement vraie.

**Assertion 1.**  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \text{dgs}$ .

Bornons à présent le nombre de sommets sains et de 3-faces.

**Assertion 2.**  $\text{fce} + \text{sfe} \leq k - \alpha - \gamma - \varepsilon$ .

Pour chaque  $\ell$ -chemin  $P$  de type  $(a)$ ,  $(c)$  ou  $(e)$  le nombre de sommets sains de  $P$  plus le nombre de 3-faces partageant une arête avec  $P$  est au plus  $\ell - 1$ . En fait, pour chaque tel chemin, il y a au plus  $\ell$  faces distinctes de  $f$  ayant une arête commune avec le chemin. Mais au moins l'une d'elles n'est pas une  $(\leq 4)$ -face. Il y a  $\ell - 1$  sommets sur le chemin, donc au plus  $\ell - 1$  sont sains. En outre, chaque  $(\leq 4)$ -face empêche au moins un sommet du chemin d'être sain. Notons également qu'un  $\ell$ -chemin de type  $(b)$  ou  $(d)$  contribue pour au plus  $\ell$ , ce qui prouve l'assertion 2.

Nous distinguons deux sortes de chemins de type  $(e)$  : un chemin de type  $(e)$  est de *type*  $(e_0)$  si son arête n'est pas incidente à une 4-face. Sinon, il est de *type*  $(e_1)$ . Soit  $\varepsilon_i$  le nombre de chemins de type  $(e_i)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

**Assertion 3.**  $\text{bad} \leq k - 2\text{dgs} + \delta + \varepsilon_1$ .

En premier lieu, remarquons que chaque sommet dangereux empêche ses deux arêtes incidentes à  $f$  d'appartenir à une mauvaise face, puisqu'une mauvaise face n'est pas incidente à un sommet dangereux. D'après la réductibilité de (L23), il ne peut y avoir trois sommets dangereux consécutifs sur  $f$ , donc il ne reste qu'à considérer deux sommets dangereux consécutifs, i.e. les chemins de type  $(d)$  ou  $(e)$ .

Un chemin de type  $(d)$  ou  $(e_1)$  empêche exactement trois arêtes de  $f$  d'être incidentes à une mauvaise face. Chaque 1-chemin de type  $(e_0)$  empêche au moins quatre arêtes de  $f$  d'être incidente à une mauvaise face. Pour voir cela, considérons un chemin  $u_1u_2u_3u_4u_5u_6$ , où  $u_2u_3$  est un 1-chemin de type  $(e_0)$ . Clairement, aucune arête parmi  $u_1u_2$ ,  $u_2u_3$ ,  $u_3u_4$  n'est incidente à une mauvaise face. En outre, au moins une arête parmi  $u_4u_5$ ,  $u_5u_6$  n'est pas incidente à une mauvaise face : si  $u_4u_5$  l'est, alors d'après le lemme 24(iii),  $u_4$  serait un  $(\geq 4)$ -vertex. Donc, par le corollaire 7(i),  $u_5u_6$  n'est pas incidente à une mauvaise face. Comme trois sommets dangereux ne sont pas consécutifs sur  $f$ , cela prouve l'assertion 3.

**Assertion 4.**  $\alpha - \beta + \varepsilon_0 = \delta + \varepsilon_1$ .

Associons chaque sommet dangereux  $u_i$  à sa  $(\leq 4)$ -face incidente  $f_i$ . Aucun chemin de type  $(a)$  ou  $(e_0)$  ne possède une arête incidente à une telle face  $f_i$  ; chaque chemin de type  $(c)$  en possède exactement une, et chaque chemin de type  $(b)$ ,  $(d)$  ou  $(e_1)$  exactement deux (où une face est comptée avec sa multiplicité, i.e. une fois pour chaque sommet dangereux de  $f$  qui lui est incident). Ainsi,  $\text{dgs} = \gamma + 2(\beta + \delta + \varepsilon_1)$ , et donc  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \gamma + 2(\beta + \delta + \varepsilon_1)$ , ce qui prouve l'assertion 4.

Ainsi, d'après les assertions 1–4, il vient

$$\begin{aligned}
\text{ch}^*(f) &= k - 4 - \text{dgs} \cdot \frac{1}{2} - (\text{fce} + \text{sfe}) \cdot \frac{1}{3} - \text{bad} \cdot \frac{1}{6} \\
&\geq k - 4 - \frac{\text{dgs}}{2} - \frac{k - \alpha - \gamma - \varepsilon}{3} - \frac{k - 2\text{dgs} + \delta + \varepsilon_1}{6} \\
&= \frac{k}{2} - 4 - \frac{\text{dgs}}{6} + \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_1 - \delta}{6} \\
&= \frac{k}{2} - 4 + \frac{(\alpha - \beta + \varepsilon_0) + \gamma}{6} - \frac{\delta}{3} \\
&= \frac{k}{2} - 4 + \frac{\delta + \varepsilon_1 + \gamma}{6} - \frac{\delta}{3} \\
&\geq \frac{k}{2} - 4 - \frac{\delta}{6}.
\end{aligned}$$

Selon le corollaire 7(iii) et la réductibilité de (L24), il y a au moins deux sommets entre toute paire de chemins de type  $(d)$ . Donc,  $\delta \leq \frac{k}{4}$ . Par conséquent,

$$\text{ch}^*(f) \geq \frac{k}{2} - \frac{k}{24} - 4 = \frac{11}{24}k - 4 \geq \frac{99}{24} - 4 > 0.$$

ce qui conclut la preuve.

## 4.4. Conclusion

La borne prouvée ici est un de plus que celle proposée par la  $(3\ell + 1)$ -conjecture, et qui, si elle est vraie, est optimale.

Une étape intéressante à présent est d'étudier la coloration 4-faciale : afin d'être efficaces, les méthodes employées ici devront probablement être complétées par d'autres arguments. Toutefois, nous espérons pouvoir obtenir un résultat, et peut-être montrer que tout graphe planaire admet une 14-coloration 4-faciale, ce qui améliorerait de un la borne de [KMŠ05b].

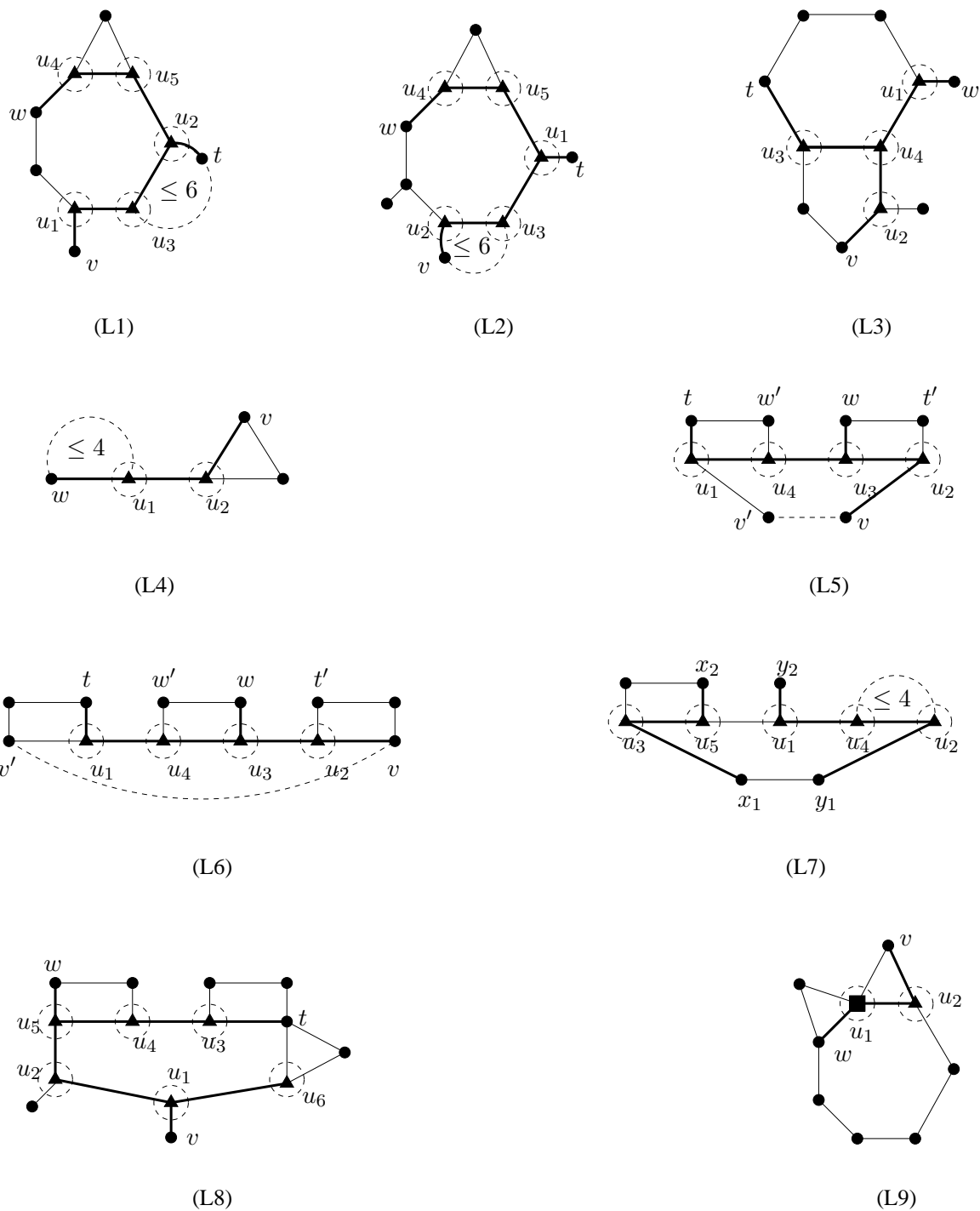


FIG. 4.2. Configurations réductibles de (L1) à (L9).

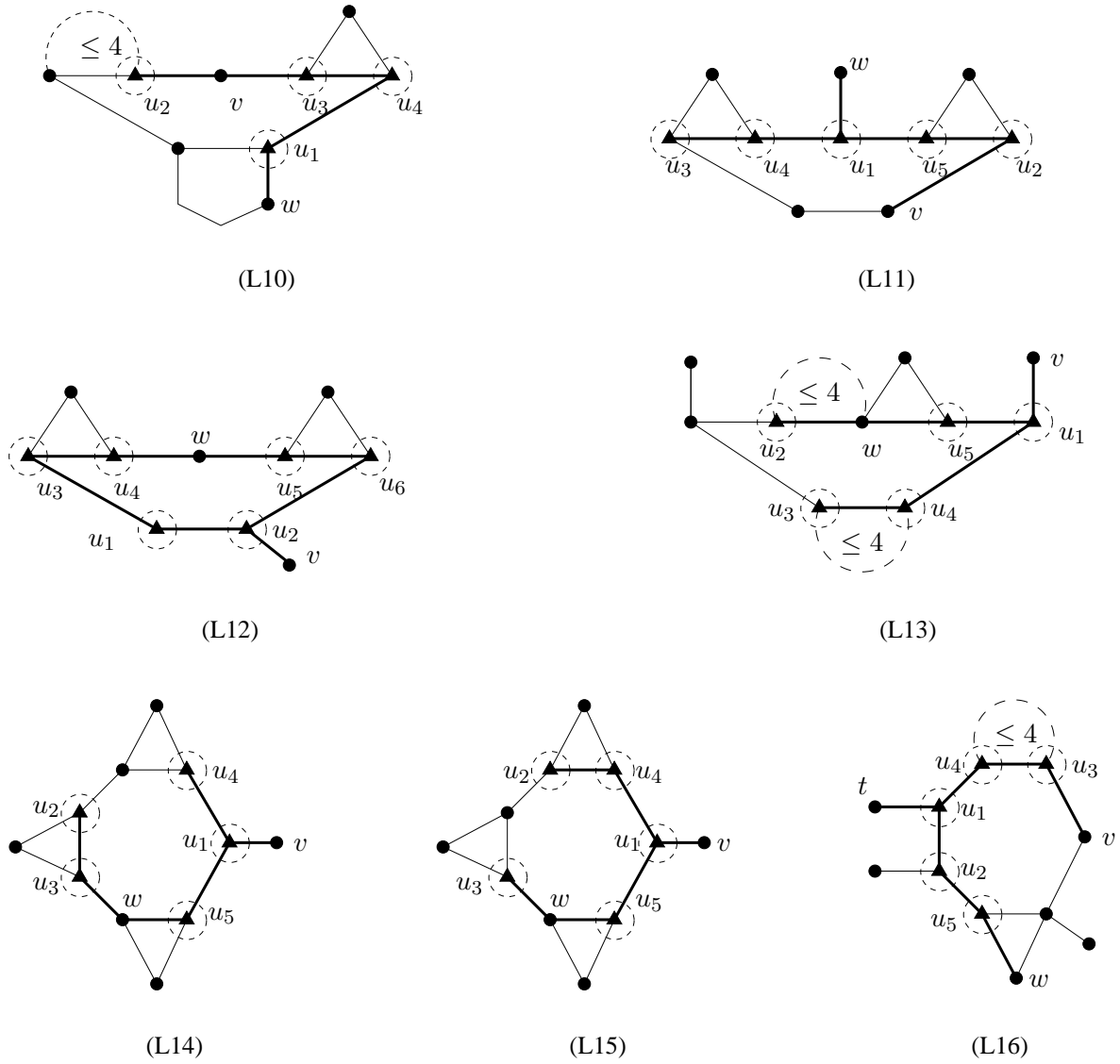


FIG. 4.3. Configurations réductibles de (L10) à (L16).



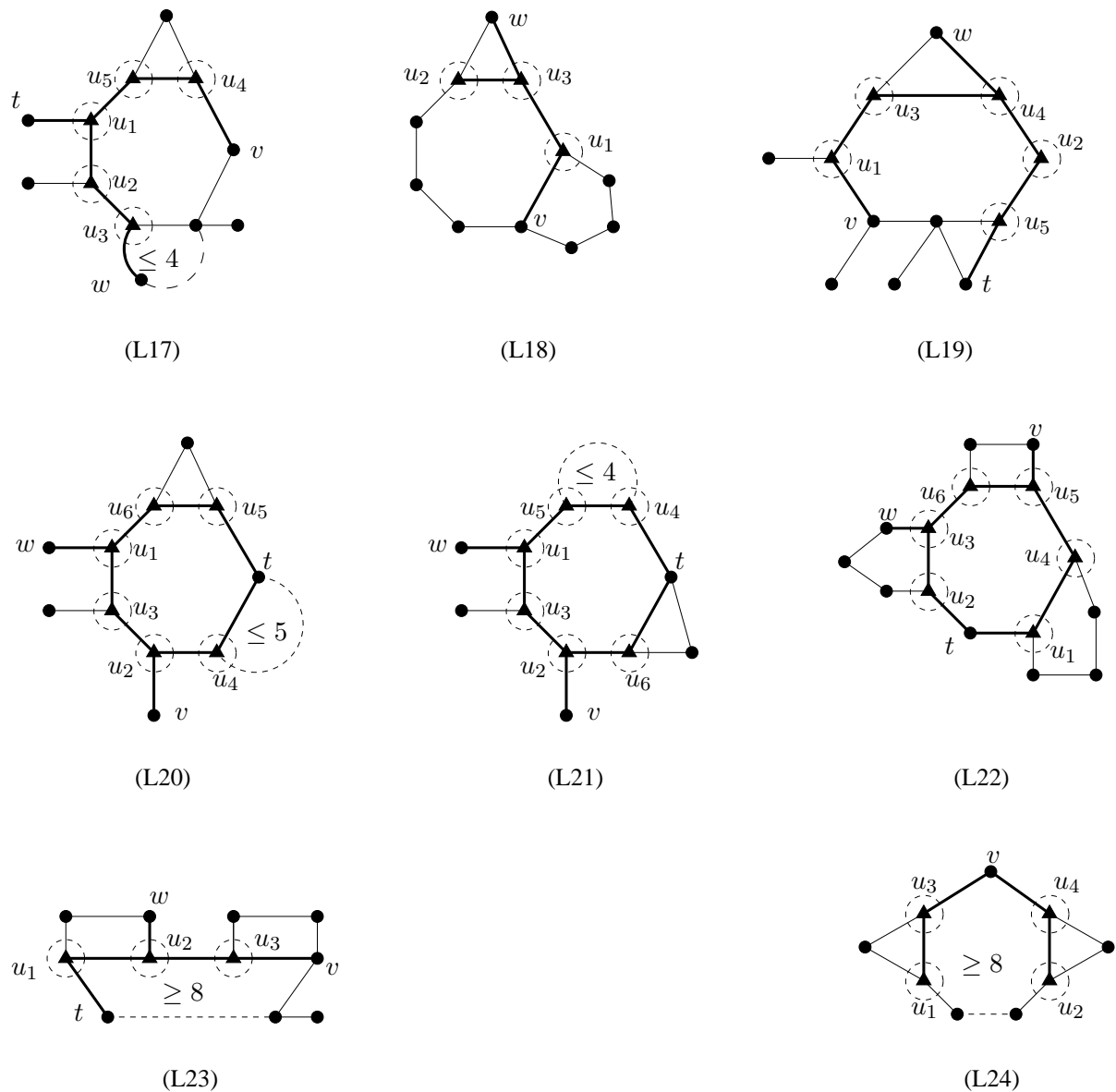


FIG. 4.4. Configurations réductibles de (L17) à (L25).

## Choisissabilité circulaire

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Frédéric Havet, Ross J. Kang et Tobias Müller, le lecteur est invité à consulter [HKMS06] pour une version plus complète de l'étude présentée dans ce chapitre.

### 5.1. Introduction

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers, une  $(p, q)$ -coloration de  $G$  est une fonction  $c$  de  $V$  vers  $\{0, \dots, p-1\}$  telle que  $\forall uv \in E, q \leq |c(u) - c(v)| \leq p - q$ . Le nombre circulaire chromatique du graphe  $G$  est

$$\chi_c(G) := \inf \left\{ \frac{p}{q}, G \text{ admet une } (p, q)\text{-coloration} \right\}.$$

Pour tout entier  $a$ , l'intervalle  $[a - q + 1, a + q - 1]$  est noté  $[a]_q$ . Si  $uv \in E$  alors  $c(u) = a$  entraîne  $c(v) \notin [a]_q$ , où les calculs sont effectués modulo  $p$ .

Une *assignation de listes*  $L$  pour  $G$  est une application attribuant à tout sommet  $v$  un ensemble d'entiers, appelés *couleurs*. Une  $L$ -coloration de  $G$  est une application  $c$  attribuant à chaque sommet  $v \in V$  une couleur  $c(v) \in L(v)$ . Une  $t$ - $(p, q)$ -assignation  $L$  est une assignation de listes telle que, pour tout sommet  $v \in V$ ,  $L(v) \subseteq \{0, \dots, p-1\}$  et  $|L(v)| \geq tq$ . Le graphe  $G$  est  $(p, q)$ - $L$ -colorable si, et seulement si, il existe une  $(p, q)$ - $L$ -coloration, c'est-à-dire une  $(p, q)$ -coloration qui soit également une  $L$ -coloration. Pour tout réel  $t \geq 1$ ,  $G$  est  $t$ - $(p, q)$ -choisissable si, et seulement si, il est  $(p, q)$ - $L$ -colorable pour toute  $t$ - $(p, q)$ -assignation  $L$ . Enfin,  $G$  est *circulairement*  $t$ -choisissable si, et seulement si, il est  $t$ - $(p, q)$ -choisissable pour tout couple  $(p, q)$ . Le *nombre de choix circulaire* de  $G$  est

$$\text{cch}(G) := \inf \{ t \geq 1 : G \text{ est circulairement } t\text{-choisissable} \}.$$

Comme prouvé dans [Zhu05],  $\text{cch}(G) \geq \chi_l(G) - 1$  pour tout graphe  $G$ .

La définition proposée ici diffère légèrement de celle donnée par Zhu [Zhu05], dans laquelle  $p$  doit être au moins  $2q$ . Néanmoins, une telle condition n'est pas souhaitable : considérons un graphe composé d'une seule arête, son nombre de choix circulaire (avec cette condition supplémentaire) serait un. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et pour tout couple d'entiers  $(p, q)$ , si  $L$  est une  $(1 + \varepsilon)$ - $(p, q)$ -assignation, alors pour tout sommet  $v$ ,  $|L(v)| \geq \lceil (1 + \varepsilon)q \rceil \geq q + 1$ . Donc, si  $p \geq 2q$ , les deux sommets du graphe peuvent être  $(p, q)$ - $L$ -colorés. Ceci contredit le souhait naturel que le nombre de choix circulaire d'une arête soit strictement plus que 1, et également ce graphe serait un contre-exemple au lemme 7 de [Zhu05], stipulant que  $\chi_c(G) \leq \text{cch}(G)$  pour tout graphe  $G$ .

Ce chapitre comporte deux sections. Dans la première est notamment apportée une réponse négative à une question de Zhu [Zhu05] sur les cliques circulaires, et une relation entre le nombre de choix circulaire, le nombre de choix et le nombre de sommets du graphe est prouvée. Dans la seconde section, partant d'une question de Mohar [Moh03], nous étudions le nombre de choix circulaire des graphes planaires, puis étendons notre étude à celui des graphes planaires de maille donnée, et des graphes de densité bornée. Le cas des graphes planaires extérieurs est également traité.

## 5.2. Graphes multipartis complets

Cette section contient plusieurs résultats concernant la choissabilité circulaire, tous plus ou moins reliés aux graphes multipartis complets.

En premier lieu, nous formalisons un outil qui sera fondamental dans la preuve de plusieurs résultats de ce chapitre. Dans le lemme suivant, le graphe  $G$  est donné, tout comme les entiers  $p$  et  $q$ , le réel  $t \geq 1$  et la  $t$ - $(p, q)$ -assignation  $L$ . De plus, certains sommets  $u_1, u_2, \dots, u_k$  sont  $(p, q)$ - $L$ -pré-colorés et le but est d'étendre la coloration en suivant un certain ordre des sommets  $(v_1 = u_1, \dots, v_k = u_k, v_{k+1}, \dots, v_{|V(G)|})$ . **Cet ordre doit satisfaire la condition que tout sommet non pré-coloré possède au plus un voisin d'indice plus grand.** Une couleur  $a \in L(v_j)$  est *extensible* si, et seulement si, il existe une  $(p, q)$ - $L$ -coloration  $c$  du sous-graphe induit par  $\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$  telle que  $c(v_j) = a$  et respectant la pré-coloration des sommets  $v_i$  pour  $i < j$ .

**Lemme 26.** Notons  $F := \{w_1, \dots, w_s\}$  l'ensemble des voisins de  $v_j$  d'indice inférieur à  $j$ . Soit  $E_i$  l'ensemble des couleurs extensibles de  $w_i$ , pour  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

- (i) Si, pour tout  $i$ ,  $w_i$  possède au moins  $x_i \geq 1$  couleurs extensibles, alors  $v_j$  possède au moins  $tq - \sum_{i: x_i < 2q} (2q - x_i)$  couleurs extensibles.
- (ii) Si, pour tout  $i$ ,  $w_i$  possède au plus  $x_i \in \{1, 2, \dots, 2q - 1\}$  couleurs extensibles, alors  $v_j$  possède au plus  $|L(v_j)| - \sum_i (2q - x_i)$  couleurs extensibles si :
  - pour tout  $i$ ,  $E_i$  est inclus dans un intervalle  $[a_i, \dots, a_i + x_i - 1]$  ;
  - les ensembles  $[a_i]_q \cap [a_i + x_i - 1]_q$  sont deux-à-deux disjoints ; et
  - $[a_i]_q \cap [a_i + x_i - 1]_q \subseteq L(v_j)$  pour tout  $i$ .

En outre, l'ensemble de couleurs extensibles de  $v_j$  est un sous-ensemble de  $L(v_j) \setminus \bigcup_i [a_i]_q \cap [a_i + x_i - 1]_q$ .

**Démonstration.** Afin de déterminer les couleurs extensibles de  $v_j$ , il suffit de considérer toutes les colorations possibles des sommets de  $F$  par des couleurs de leurs ensembles respectifs de couleurs extensibles  $E_i$ .

(i) D'après la condition sur l'ordre des sommets, une couleur de  $v_j$  n'est pas extensible (pour  $v_j$ ) si, et seulement si, elle est dans une intersection  $\bigcap_{a \in E_i} [a]_q$  pour un certain indice  $i$ . La taille de ces intersections est maximisée quand les ensembles  $E_i$  sont des intervalles ; elle est alors  $|\bigcap_{a \in E_i} [a]_q| = 2q - x_i$ , si  $x_i < 2q$ , et  $|\bigcap_{a \in E_i} [a]_q| = 0$ , sinon.

(ii) Comme  $x_i < 2q$ , il suit de la première condition que  $[a_i]_q \cap [a_i + x_i - 1]_q \subseteq \bigcap_{a \in E_i} [a]_q$ . Ainsi, l'observation faite dans la preuve de l'item (i) et les deux dernières conditions concluent la preuve.  $\square$

### 5.2.1. Cliques circulaires et cycles pairs

Pour deux entiers strictement positifs  $a \geq 2b$ , le graphe  $K_{a/b}$ , appelé *clique circulaire*, a pour ensemble de sommets  $\{0, \dots, a - 1\}$  et  $ij$  est une arête si, et seulement si,  $b \leq |i - j| \leq$

$a - b$ . Remarquons que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $K_{(2k+1)/k} \simeq C_{2k+1}$ . Zhu [Zhu05] a prouvé que  $\text{cch}(C_{2k+1}) = 2 + \frac{1}{k}$  pour tout  $k \geq 1$ , et a demandé si le nombre de choix circulaire de  $K_{a/b}$  est  $\frac{a}{b}$ . Ce n'est pas le cas, puisque les cliques circulaires contiennent de grands sous-graphes bipartis complets. Plus précisément,

**Proposition 34.** *Pour tout entier strictement positif  $N$ , il existe des entiers naturel non nuls  $a, b$ , avec  $a \geq 2b$ , tels que la différence entre  $\text{cch}(K_{a/b})$  et  $\frac{a}{b}$  soit strictement supérieure à  $N$ .*

**Démonstration.** Soit  $m \geq \binom{2(N+3)-1}{N+3}$ . Il est bien connu que  $\text{ch}(K_{m,m}) \geq N + 4$  ([ERT80]). Posons  $a := 2k + 2m$  et  $b := k$ , pour un entier naturel non nul  $k > 2m$ . Le graphe  $K_{a/b}$  contient  $K_{m,m}$  comme sous-graphe : il suffit de considérer les sommets  $\{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{k+m-1, k+m, \dots, k+2m\}$ . Ainsi,  $\text{cch}(K_{a/b}) \geq \text{ch}(K_{a/b}) - 1 \geq \text{ch}(K_{m,m}) - 1 \geq N + 3$ . Pourtant, si  $k > 2m$ , alors  $\frac{a}{b} = \frac{2k+2m}{k} < 3$ ; par conséquent,  $\text{cch}(K_{a/b}) - \frac{a}{b} > N$ .  $\square$

Comme mentionné plus haut, Zhu [Zhu05] a prouvé que le nombre de choix circulaire du cycle impair  $C_{2k+1}$  est  $2 + \frac{1}{k}$ . Le fait que  $\text{cch}(C_{2k+1}) \geq 2 + \frac{1}{k}$  découle de ce que le nombre chromatique circulaire de  $C_{2k+1}$  est  $2 + \frac{1}{k}$ .

Le lemme suivant sera utilisé plus tard. Un corollaire direct de ce lemme est que, pour tout entier  $n \geq 3$ , le nombre de choix circulaire du cycle  $C_n$  est au plus  $2 + \frac{2}{n-1}$ , ce qui est donc optimal pour les cycles impairs.

Étant donné un graphe  $G$ , une *poignée* de  $G$  est un chemin induit dont les sommets ont degré deux dans  $G$ .

**Lemme 27.** *Fixons un entier naturel non nul  $n$ . Soit  $L$  une  $(2 + \frac{2}{n})$ - $(p, q)$ -assignation pour le graphe  $G$ . Supposons que  $v_1 v_2 \cdots v_n$  soit une poignée  $H$  de  $G$ , et notons  $w$  et  $w'$  les voisins (non nécessairement distincts) de  $v_1$  et  $v_n$  n'appartenant pas à  $H$ , respectivement. Alors toute  $(p, q)$ - $L$ -pré-coloration de  $G \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$  s'étend à tout le graphe.*

**Démonstration.** Soit  $t := 2 + \frac{2}{n}$ . Comme  $w$  possède une couleur extensible,  $v_1$  a, par le lemme 26(i), au moins  $tq - 2q + 1 = \frac{2q}{n} + 1$  couleurs extensibles. Par récurrence, il est clair que  $v_i$  possède au moins  $i \frac{2q}{n} + 1$  couleurs extensibles, pour  $i < n$ . À présent,  $w'$  possède une couleur extensible, et  $v_{n-1}$  en a au moins  $(n-1) \frac{2q}{n} + 1$ ; donc, par le lemme 26(i),  $v_n$  possède au moins  $tq - (2q - 1) - (2q - (n-1) \frac{2q}{n} - 1) = 2$  couleurs extensibles, ce qui conclut la preuve.  $\square$

La situation semble plus complexe pour les cycles pairs. Voici une preuve constructive pour le nombre de choix circulaire du plus petit cycle pair.

**Proposition 35.**  $\text{cch}(C_4) = 2$ .

**Démonstration.** Clairement,  $\text{cch}(C_4) \geq 2$ . Notons  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  les sommets de  $C_4$ , le sommet  $v_1$  étant adjacent à  $v_2$  et  $v_3$ . Fixons deux entiers  $p$  et  $q$  ainsi qu'une  $2$ - $(p, q)$ -assignation  $L$ . Montrons que  $C_4$  est  $(p, q)$ - $L$ -colorable.

Tout d'abord, remarquons que si  $L(v_1) \cap L(v_4) \neq \emptyset$  ou  $L(v_2) \cap L(v_3) \neq \emptyset$ , alors la coloration souhaitée existe : il suffit d'assigner la même couleur à, disons,  $v_1$  et  $v_4$ . Ensuite, en identifiant  $v_1$  et  $v_4$  et en utilisant le lemme 26(i), au moins  $2q - (2q - 1) = 1$  couleurs restent disponibles pour  $v_2$  et  $v_3$ . Supposons donc que ces deux intersections soient vides.

Pré-colorons  $v_1$  avec une couleur  $a \in L(v_1)$ . Soit  $\bar{x}$  le nombre de couleurs de  $L(v_2)$  qui ne sont pas extensibles (c'est-à-dire le nombre de couleurs de  $L(v_2) \cap [a]_q$ ). Comme  $L(v_2) \cap L(v_3) = \emptyset$ , le nombre de couleurs de  $L(v_3)$  qui ne sont pas extensibles est au plus  $2q - 1 - \bar{x}$ .

Une fois encore, appliquons le lemme : soit  $x_i$  le nombre de couleurs extensibles de  $v_i$  dans  $L(v_i)$ , pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ . Le sommet  $v_4$  est adjacent à  $v_2$  et  $v_3$ , et comme  $x_2 = 2q - \bar{x}$  et  $x_3 \geq 2q - (2q - \bar{x} - 1) = \bar{x} + 1$ , il vient  $x_4 \geq 2q - (2q - (2q - \bar{x})) - (2q - (\bar{x} + 1)) = 1$ .  $\square$

**Conjecture 6.** *Le nombre de choix circulaire de tout cycle pair est deux.*

### 5.2.2. Bornes en fonction de la dégénérescence et de la choissabilité

Le but de cette section est de montrer que  $\text{cch}(G) = O(\text{ch}(G) + \ln(|V(G)|))$ . La motivation pour ce résultat est le problème naturel suivant, proposé par Zhu [Zhu05] au vu du lemme 28.

**Problème 11.** *Existe-t-il une constante  $\alpha$  telle que, pour tout graphe  $G$ ,  $\text{cch}(G) \leq \alpha \text{ch}(G)$  ?*

La *dégénérescence*  $\delta^*(G)$  d'un graphe  $G$  est le maximum, sur tous les sous-graphes induits de  $G$ , du degré minimum. Le graphe  $G$  est  *$k$ -dégénéré* si  $\delta^*(G) \leq k$ .

**Lemme 28.** *Si  $G$  est  $k$ -dégénéré, alors  $\text{cch}(G) \leq 2k$ .*

Ce lemme a été prouvé par Zhu [Zhu05], mais nous donnons ici une preuve plus simple.

**Démonstration.** Démontrons, par récurrence sur le nombre de sommets, que tout graphe  $k$ -dégénéré  $G$  possède une  $(p, q)$ - $L$ -coloration pour toute  $2k$ - $(p, q)$ -assignation  $L$ . Soient  $G$  un graphe  $k$ -dégénéré et  $L$  une  $2k$ - $(p, q)$ -assignation. Soit  $v$  un sommet de degré au plus  $k$  dans  $G$ . Le graphe  $G - v$  est également  $k$ -dégénéré donc, par récurrence, il admet une  $(p, q)$ - $L$ -coloration  $c$ . À présent,  $v$  possède au plus  $k$  voisins pré-colorés et par suite au moins  $2kq - k(2q - 1) = k \geq 1$  couleurs extensibles selon le lemme 26.  $\square$

Ce résultat est serré asymptotiquement, comme Zhu [Zhu05] l'a montré à l'aide des graphes bipartis complets  $K_{k, m^k}$ . Par soucis de complétude, nous donnons également ce résultat, en présentant la preuve de façon différente.

**Théorème 33.**  $\text{cch}(K_{k, m^k}) \geq 2k - \frac{2k^2}{m}$  pour tout couple d'entiers non nuls  $(m, k)$ .

**Démonstration.** Soient  $t := 2k - \frac{2k^2}{m}$ ,  $q := m$  et fixons  $p$  bien plus grand que  $tq = 2km - 2k^2$ . Notons  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  et  $\{v_{j_1, j_2, \dots, j_k} : 1 \leq j_i \leq m\}$  les sommets de  $K_{k, m^k}$ , en suivant la partition canonique. Enfin, définissons une  $t$ - $(p, q)$ -assignation  $L$  pour  $K_{k, m^k}$  de la façon suivante : pour  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , soit  $L(u_i) := [a_i, a_i + 2km - 2k^2 - 1]$ , où les  $a_i$  sont des couleurs choisies de telle sorte que les ensembles  $L(u_i)$  soient à distance  $2q$  sur le cercle  $[0, p - 1]$ . Soit  $L(v_{j_1, j_2, \dots, j_k}) := \cup_{i=1}^k A_{i, j_i}$ , où  $A_{i, j_i} := [a_i + 2kj_i - q, a_i + 2k(j_i - 1) + q - 1]$ . Une vérification directe montre que la taille de chaque liste est au moins  $tq$ ; il ne reste donc qu'à prouver qu'il n'existe pas de  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $K_{k, m^k}$ . Si, au contraire, il existe une telle coloration  $c$ , alors pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , il existe un entier  $j'_i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tel que  $c(u_i) \in [a_i + 2k(j'_i - 1), a_i + 2kj'_i - 1]$ . Puisque le sommet  $u_i$  est adjacent à  $v_{j'_1, j'_2, \dots, j'_k}$ , il suit que  $c(v_{j'_1, j'_2, \dots, j'_k}) \notin [a_i + 2k(j'_i - 1)]_q \cap [a_i + 2kj'_i - 1]_q = A_{i, j'_i}$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Ceci est une contradiction, car  $L(v_{j'_1, j'_2, \dots, j'_k}) = \cup_{i=1}^k A_{i, j'_i}$ .  $\square$

Comme  $K_{k, m^k}$  est  $k$ -dégénéré,  $\text{ch}(K_{k, m^k}) \leq k + 1$ . Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\text{cch}(K_{k, m^k}) \geq (2 - \varepsilon) \text{ch}(K_{k, m^k})$  si  $m$  et  $k$  sont suffisamment grands. Suite à cela, Zhu [Zhu05] a posé le problème 11. Notons que le théorème 33 implique que la constante  $\alpha$  du problème 11, si elle existe, est au moins deux.

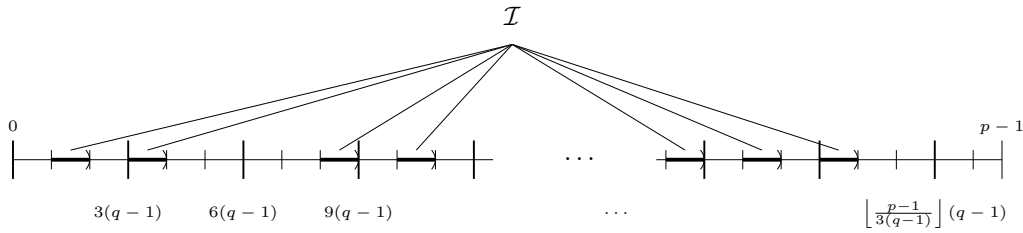
En d'autres termes, ce problème demande si  $\text{cch}(G) = O(\text{ch}(G))$ . Nous prouvons le théorème suivant, qui stipule que  $\text{cch}(G) = O(\text{ch}(G) + \ln n)$ . Aucune tentative n'est faite pour optimiser les constantes.

**Théorème 34.** *Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets,*

$$\text{ch}(G) \leq 36 \text{ch}(G) + 54 \ln n + 3.$$

**Démonstration.** Fixons  $p, q$  et  $t := 36 \text{ch}(G) + 54 \ln n + 3$ . Supposons que les listes  $L(v) \subseteq \mathbb{Z}_p$  de taille au moins  $tq + 1$  soient données. Si  $q = 1$ , alors  $G$  peut être  $(p, q)$ - $L$ -coloré car  $t + 1 > \text{ch}(G)$ . Nous supposons donc à présent que  $q \geq 2$ .

Partitionnons  $\{0, \dots, \lfloor \frac{p-1}{q-1} \rfloor\}$  en groupes  $g_i := \{3i, 3i + 1, 3i + 2\}$  de trois entiers consécutifs (le dernier groupe en comptant éventuellement moins de trois). De chaque groupe de trois, sauf le dernier, nous allons choisir aléatoirement un élément, de telle sorte que deux éléments consécutifs ne soient jamais tous deux choisis. De façon plus précise, pour  $i = 0$  nous choisissons simplement 0, 1 ou 2 uniformément au hasard. Une fois que le choix pour  $g_{i-1}$  est fait, un entier parmi  $3i, 3i + 1$  et  $3i + 2$  est choisi uniformément au hasard si  $3(i - 1) + 2$  n'a pas été choisi dans  $g_{i-1}$ . Sinon, un entier parmi  $3i + 1$  et  $3i + 2$  est choisi au hasard, chacun avec probabilité  $\frac{1}{2}$ . Soit  $\mathcal{K} := \{k : k \text{ a été choisi}\}$ . À chaque indice  $k \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{p-1}{q-1} \rfloor\}$  est associé un intervalle  $I_k := \{k(q - 1), \dots, (k + 1)(q - 1) - 1\}$  de  $\mathbb{Z}_p$ . (Notons que les  $I_k$  sont des intervalles disjoints de cardinal  $q - 1$ .) Une observation fondamentale pour la suite est que, si  $(k, l) \in \mathcal{K}^2$  sont distincts et  $a \in I_k, b \in I_l$ , alors  $|a - b|_p \geq q$ . La figure 5.1 offre un schéma explicatif.



**FIG. 5.1.** Une illustration de la procédure de découpage pour le théorème 34.

Posons  $\mathcal{I} := \bigcup_{k \in \mathcal{K}} I_k$ . Pour tout  $v \in V$ , soit

$$S(v) := \{k \in \mathcal{K} : I_k \cap L(v) \neq \emptyset\}.$$

L'idée pour le reste de la preuve est de montrer que  $t$  a été choisi de sorte que  $\mathbb{P}(|S(v)| < \text{ch}(G)) < \frac{1}{n}$  pour tout  $v$ . Dans ce cas, il suit

$$\mathbb{P}(|S(v)| < \text{ch}(G) \text{ pour un certain } v \in V) < n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

En d'autres termes, il existe nécessairement un choix d'intervalles non adjacents, un de chaque groupe de trois, pour lequel  $|S(v)| \geq \text{ch}(G)$  pour tout  $v \in V$ . Par définition de  $\text{ch}(G)$ , il existe ainsi une coloration  $c$  de  $G$  avec  $c(v) \in S(v)$ . Définissons alors une nouvelle coloration  $f$  en choisissant  $f(v) \in I_k \cap L(v)$  si  $c(v) = k$ . Ceci peut être fait pour chaque sommet  $v$ , par définition de  $S(v)$ . Ainsi,  $f$  est une  $(p, q)$ - $L$ -coloration, car si  $vw \in E(G)$  alors  $c(v), c(w)$  sont des éléments distincts de  $\mathcal{K}$  — par conséquent,  $f(v)$  et  $f(w)$  ont été choisis dans des intervalles non adjacents  $I_{c(v)}, I_{c(w)}$ , donc  $|f(v) - f(w)|_p \geq q$ .

Il reste à montrer que  $t$  a été choisi de telle sorte que  $\mathbb{P}(|S(v)| < \text{ch}(G)) < \frac{1}{n}$ . En premier lieu, montrons que  $|S(v)| < \text{ch}(G)$  est au plus

$$\mathbb{P} \left( \text{Bi} \left( s, \frac{1}{6} \right) \leq \text{ch}(G) \right),$$

où  $s := \lceil \frac{t}{3} \rceil - 1$ . Pour prouver ceci, notons d'abord qu'il est possible de réduire les listes  $L(v)$  en des sous listes  $L'(v) \subseteq L(v)$  avec

$$|L'(v)| \geq \left\lceil \frac{|L(v)|}{3(q-1)} \right\rceil - 1 > \frac{t}{3} - 1,$$

et telles que deux éléments quelconques de chaque liste  $L'(v)$  soient à distance au moins  $3(q-1)$ . Il est possible de construire  $L'(v)$  en prenant le premier élément, le  $(3(q-1)+1)^{\text{ème}}$ , le  $(6(q-1)+1)^{\text{ème}}$ , etc. jusqu'au  $((M-1)(q-1)+1)^{\text{ème}}$  élément de  $L(v)$  inclus, où  $M := \lceil \frac{tq}{3(q-1)} \rceil$  (et le  $(M(q-1)+1)^{\text{ème}}$  élément n'est pas retenu, afin de gérer la distance modulo  $p$ ). Écrivons  $L'(v) = \{a_1, \dots, a_l\}$  avec  $a_i \leq a_{i+1}$ . Pour  $J \subseteq \{1, \dots, l-1\}$ , soit  $A(i, J)$  l'évènement que  $a_j \in \mathcal{I}$  pour  $j \in J$  et  $a_j \notin \mathcal{I}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, l-1\} \setminus J$ . Alors pour tout  $J \subseteq \{1, \dots, l-1\}$ ,

$$\mathbb{P}(a_i \in \mathcal{I} | A(i, J)) \geq \frac{1}{6}. \quad (5.1)$$

En effet, notons que chacun des  $a_1, \dots, a_{l-1}$  fournit des informations à propos du choix fait pour un groupe  $g_l$ . Observons aussi que, si  $a_i \in I_{3k+1}$  ou  $a_i \in I_{3k+2}$  pour un certain  $k$ , alors la probabilité que  $a_i$  soit couvert par  $\mathcal{I}$ , étant donné que  $A(i, J)$  est vrai, est au moins  $\frac{1}{3}$ , car quelque soit l'élément choisi dans  $g_{k-1}$ , la probabilité que  $3k+1$  (respectivement  $3k+2$ ) soit sélectionné est au moins  $\frac{1}{3}$ . Supposons à présent que  $a_i \in I_{3k}$  pour un certain entier  $k$ . Alors  $a_{i-1} \notin I_{3(k-1)+1} \cup I_{3(k-1)+2}$ . Par suite, la probabilité que  $a_i$  soit couvert, étant donné que  $A(i, J)$  est vrai, est au moins le minimum de deux probabilités : celle que  $3k$  soit choisi, sachant que  $3(k-1)$  a été choisi dans  $g_{k-1}$ ; et celle que  $3k$  soit sélectionné, sachant que  $3(k-1)$  ne l'a pas été dans  $g_{k-1}$ . Clairement, ce minimum est  $\frac{1}{6}$ , ce qui prouve l'assertion.

D'après une borne bien connue de la distribution binomiale (voir Janson, Łuczak et Ruciński [JLR00]),

$$\mathbb{P}(\text{Bi}(k, p) \leq kp - r) \leq e^{-2\frac{r^2}{k}}.$$

C'est pourquoi

$$\mathbb{P}(S(v) < \text{ch}(G)) \leq \exp \left[ -2 \left( \text{ch}(G) - \frac{s}{6} \right)^2 / s \right].$$

Il suffit donc d'avoir

$$2 \left( \text{ch}(G) - \frac{s}{6} \right)^2 > s \ln n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{s^2}{36} - \left( \frac{\text{ch}(G)}{3} + \frac{\ln n}{2} \right) s + \text{ch}^2(G) > 0.$$

Ceci est vrai si

$$s > \frac{\frac{\text{ch}(G)}{3} + \frac{\ln n}{2} + \sqrt{\left( \frac{\text{ch}(G)}{3} + \frac{\ln n}{2} \right)^2 - 4 \text{ch}(G)^2 \frac{1}{36}}}{\frac{2}{36}},$$

qui est assuré si

$$\frac{t}{3} - 1 \geq 12 \text{ch}(G) + 18 \ln n,$$

c'est-à-dire si  $t \geq 36 \text{ch}(G) + 54 \ln n + 3$ . □

Alon [Al00] a prouvé que, si le degré moyen d'un graphe  $G$  est  $d$ , alors  $\text{ch}(G) = \Omega(\ln d)$ . Le théorème 34 montre donc que l'existence de la constante  $\alpha$  du problème 11 ne peut être infirmée qu'en considérant des graphes "peu" denses; il existe un choix de  $\alpha = \alpha(\epsilon)$  qui fonctionne pour tous les graphes de degré moyen au moins  $\epsilon n$ .

### 5.2.3. Graphes multipartis complets et équilibrés

Comme l'indique le théorème 33, il est naturel de s'intéresser aux graphes bipartis complets, puisqu'ils constituent un exemple canonique de graphes dont le nombre chromatique est faible, mais dont le nombre de choix est élevé. Nous adaptons maintenant les arguments de la section précédente afin d'améliorer la borne générale donnée par le théorème 34 dans le cas particulier où  $G = K_{r*m} = \underbrace{K_{m,\dots,m}}_r$  est le graphe  $r$ -parti complet et équilibré, chaque

part étant de cardinal  $m$ . Des travaux récents de Gazit et Krivelevich [GK06] montrent que  $\text{ch}(K_{r*m}) = (1 + o(1)) \frac{\ln m}{\ln(1 + \frac{1}{r-1})}$ , donc la borne sur  $\text{cch}(K_{r*m})$  donnée par la proposition 36 est meilleure que la borne générale du théorème 34. Gazit et Krivelevich ont également considéré les graphes multipartis complets non équilibrés, mais sans écart trop important entre la plus petite et la plus grande part. En principe, nos preuves et résultats peuvent être adaptés pour couvrir aussi ce cas, mais nous préférons ne pas aller plus avant dans cette voie ici. Signalons enfin que Alon et Zaks [AZ98] ont prouvé un résultat analogue à la proposition 36 pour la  $T$ -choisissabilité des graphes bipartis complets (avec des arguments similaires).

**Proposition 36.**  $\text{cch}(K_{r*m}) \leq \frac{3(\ln m + \ln r)}{\ln(1 + \frac{1}{6r-1})} + 1$ .

**Démonstration.** La démarche est la même que celle de la preuve du théorème 34 : un sous-ensemble  $\mathcal{K} \subseteq \{0, \dots, \lfloor \frac{p-1}{q-1} \rfloor\}$  d'indices, deux-à-deux non consécutifs, sont choisis au hasard de la même façon que dans la démonstration du théorème 34. Partitionnons à présent les indices sélectionnés en  $r$  ensembles  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ , en attribuant au hasard chaque indice  $k \in \mathcal{K}$  à l'un des ensembles  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ , de façon uniforme et indépendamment des autres éléments de  $\mathcal{K}$ . Écrivons  $\mathcal{I}_1 = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_1} I_k, \dots, \mathcal{I}_r = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_r} I_k$ .

En notant  $V = V_1 \uplus \dots \uplus V_r$  la partition de l'ensemble des sommets, le but est de colorer  $K_{r*m}$  en utilisant les couleurs de  $\mathcal{I}_j$  pour les sommets de  $V_j, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Ceci peut être fait si, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , et tout  $v \in V_i$ ,

$$L'(v) = L(v) \cap \mathcal{I}_i \neq \emptyset. \quad (5.2)$$

En effet, remarquons que si (5.2) est vraie, il est possible d'obtenir une coloration en choisissant, pour chaque  $v \in V$ , une couleur arbitraire  $f(v) \in L'(v)$ . Cela définit bien une  $(p, q)$ - $L$ -coloration, car si  $vw \in E(K_{r*m})$  alors  $f(v)$  et  $f(w)$  auront été choisis dans des intervalles distincts (et donc aussi non adjacents) car  $(v, w) \in V_i \times V_j$  avec  $i \neq j$  et  $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$  sont disjoints. Enfin, comme  $f(v)$  et  $f(w)$  appartiennent à des intervalles non adjacents, leur distance dans  $\mathbb{Z}_p$  est au moins  $q$ .

Il est donc suffisant de montrer que  $\mathbb{P}(L'(v) = \emptyset) < \frac{1}{rm}$ . À nouveau, choisissons des éléments  $a_1 \leq \dots \leq a_l$  dans  $L(v)$ , avec une distance d'au moins  $3(q-1)$  entre-eux et  $l > \frac{t}{3} - 1$ . La probabilité que  $a_j \in \mathcal{I}_i$  sachant quels éléments parmi  $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}$  sont dans  $\mathcal{I}_i$  est au moins  $\frac{1}{6r}$ , d'où

$$\mathbb{P}(L'(v) = \emptyset) \leq \left(1 - \frac{1}{6r}\right)^{\frac{t}{3}-1}$$

et si  $t \geq \frac{3(\ln m + \ln r)}{\ln(1 + \frac{1}{6r-1})} + 1$  alors  $\mathbb{P}(L'(v) = \emptyset) < \frac{1}{rm}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$



### 5.3. Graphes planaires et graphes de densité bornée

#### 5.3.1. Graphes planaires

Mohar [Moh03] a demandé la valeur de  $t(\mathcal{P}) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \forall G \text{ planaire, } \text{cch}(G) \leq t\}$ . Nous montrons d'abord que tout graphe planaire est circulairement 8-choissable, donc  $t(\mathcal{P}) \leq 8$ . Ensuite, nous exhibons, pour tout  $n \geq 2$ , un graphe planaire dont le nombre de choix circulaire est au moins  $6 - \frac{1}{n}$ , d'où  $t(\mathcal{P}) \geq 6$ . Ainsi,  $t(\mathcal{P})$  n'est pas entre quatre et cinq, comme suggéré par Mohar [Moh03], mais entre 6 et 8.

La preuve du théorème suivant est inspirée de celle de Thomassen pour la 5-choissabilité des graphes planaires [Tho94]. En fait, il s'agit d'une généralisation de ce résultat célèbre (qui correspond au cas où  $q = 1$  dans la proposition 37).

**Théorème 35.** *Tout graphe planaire est circulairement 8-choissable.*

Prouvons le résultat plus fort suivant.

**Proposition 37.** *Soit  $G$  une quasi-triangulation, c'est-à-dire un graphe simple planaire constitué d'un cycle  $C$  et de sommets et arêtes à l'intérieur de  $C$  tels que chaque face bornée soit un triangle. Fixons deux entiers  $p \geq q$ , et  $L$  une  $(p, q)$ -assignation telle que  $\forall v \in V, L(v) \subseteq \{0, \dots, p-1\}$  avec  $|L(v)| \geq 4q$  si  $v \in C$  et  $|L(v)| \geq 8q$  sinon. Alors, toute  $(p, q)$ - $L$ -pré-coloration de deux sommets adjacents de  $C$  s'étend en une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G$ .*

**Démonstration.** La preuve est par récurrence sur le nombre  $n$  de sommets. Le résultat est vrai si  $G$  est un triangle puisqu'il y a au moins  $4q - 2 \times (2q - 1) = 2$  choix pour colorer le dernier sommet. Supposons à présent le résultat vrai pour toute quasi-triangulation comportant au plus  $n - 1 \geq 3$  sommets, et soit  $G$  une quasi-triangulation à  $n$  sommets. Notons  $u_1 u_2 \dots u_k$  le cycle extérieur de  $G$ , et  $u_1$  et  $u_2$  les deux sommets pré-colorés.

Premier cas :  $G$  possède une corde  $u_i u_j, i < j$ . L'hypothèse de récurrence permet d'étendre la coloration à la quasi-triangulation  $G_1$  dont le cycle extérieur est  $u_1 u_2 \dots u_i u_j u_{j+1} \dots u_k u_1$  (voir figure 5.2). Ensuite, l'hypothèse d'induction permet d'étendre cette coloration à la quasi-triangulation  $G_2$  dont le cycle extérieur est  $u_i u_{i+1} \dots u_j u_i$ , les deux sommets pré-colorés étant  $u_i$  et  $u_j$ .

Second cas :  $G$  ne possède pas de corde. Soient  $v_1, \dots, v_d$  les voisins de  $u_k$  n'appartenant

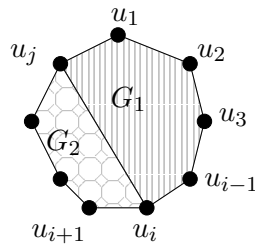


FIG. 5.2. La coloration s'étend en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $G_1$  puis à  $G_2$ .

pas à  $C$ . Quitte à renommer les sommets, supposons que  $u_{k-1} v_1 v_2 \dots v_d u_1$  soit un chemin (car toute face bornée de  $G$  est un triangle). Notons  $x$  et  $y$  deux couleurs de  $L(u_k) \setminus [c(u_1)]_q$  telles que  $[x]_q \cap [y]_q = \emptyset$ . Ces couleurs existent car  $|L(u_k)| \geq 4q = (2q - 1) + (2q + 1)$ . Considérons le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $u_k$ . Ce graphe est une quasi-triangulation dont le cycle extérieur est  $u_1 u_2 \dots u_{k-1} v_1 v_2 \dots v_d u_1$ . Posons, pour tout sommet  $v$  de  $G'$ ,  $L'(v) := L(v)$  si  $v \notin \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  et  $L'(v) := L(v) \setminus ([x]_q \cup [y]_q)$  sinon.

Il est alors possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence à  $G'$  et  $L'$  (puisque  $\forall i, |L'(v_i)| \geq 8q - (4q - 2) = 4q + 2 \geq 4q$ ). Il ne reste plus qu'à compléter la coloration de  $G$  en colorant le sommet  $u_k$  avec  $x$  si  $c(u_{k-1}) \notin [x]_q$  et avec  $y$  sinon.  $\square$

**Proposition 38.** *Pour tout  $n \geq 2$ , il existe un graphe planaire  $G_n$  tel que  $\text{cch}(G_n) \geq 6 - \frac{1}{n}$ .*

**Démonstration.** Posons  $t := 6 - \frac{1}{n}$  avec  $n \geq 2$  fixé. Soient  $q = 3n$  et  $p$  un entier bien plus grand que  $tq = 18n - 3$ . Tous les calculs et intervalles sont entendus modulo  $p$ . Considérons le graphe planaire  $H_m$  de la figure 5.3, avec  $m := 2q - 1$ . Le graphe  $G_n$  s'obtient à partir de

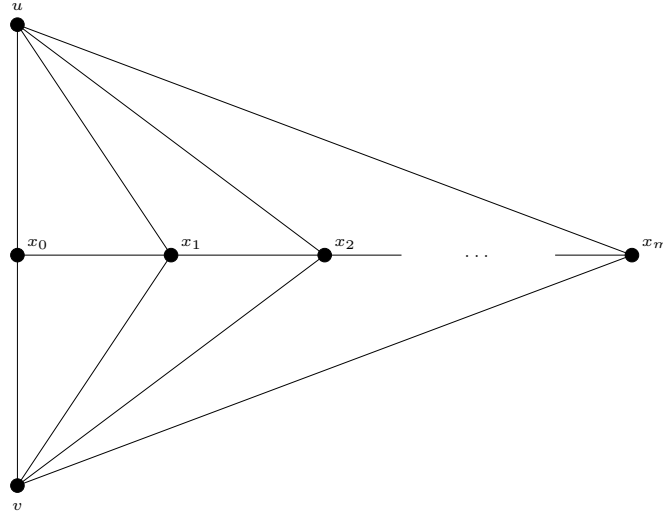


FIG. 5.3. Le graphe  $H_m$ .

$(tq)^2$  copies de  $H_m$  en identifiant les sommets  $u$  de chaque copie, et les sommets  $v$  de chaque copie. Commençons par définir  $L(u) := [r, r + tq - 1]$  et  $L(v) := [s, s + tq - 1]$  avec  $r$  et  $s$  tels que  $[r - q + 1, r + tq + q - 1] \cap [s - q + 1, s + tq + q - 1] = \emptyset$ . Ensuite, pour chaque  $(a, b) \in L(u) \times L(v)$ , des listes sont attribuées aux sommets d'une copie  $H_{a,b}$  de  $H_m$  de telle manière que, si  $u$  est coloré  $a$  et  $v$  est coloré  $b$ , le sous-graphe  $H_{a,b}$  ne puisse être  $(p, q)$ - $L$ -coloré. Fixons donc une copie  $H_{a,b}$  de  $H_m$ . Nous considérons les listes suivantes : pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $L(x_i) := [a]_q \cup [b]_q \cup I_i \cup J_i$  avec

$$J_i := [c_i, c_i + 2q - 2 - i]$$

$$I_i := [c_{i-1} + q - i, c_{i-1} + q - 1] = [c_{i-1}]_q \cap [c_{i-1} + 2q - 1 - i]_q$$

(notons que  $I_0 = J_m = \emptyset$ ) et les constantes  $c_i$ , pour  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ , choisies de telle sorte que tous les intervalles soient à distance au moins  $2q$  (modulo  $p$ ) les uns des autres (sauf  $J_i$  et  $I_{i+1}$ , pour  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ). Ainsi chaque liste vérifie  $|L(x_i)| = 2(2q-1) + i + (2q-1-i) = 6q - 3 = 18n - 3 = tq$ .

Essayons à présent de  $(p, q)$ - $L$ -colorer  $G_n$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $u$  est coloré  $a$  et  $v$  est coloré  $b$ . Considérons alors le sous-graphe  $H_{a,b}$ . Clairement, l'ensemble de couleurs extensibles de  $x_0$  est un sous-ensemble de l'intervalle  $J_0$ . Selon le lemme 26(ii), l'ensemble de couleurs extensibles de  $x_1$  est un sous-ensemble de l'intervalle  $J_1$ . Par récurrence, en appliquant le lemme 26(ii), il vient que l'ensemble de couleurs extensibles de  $x_i$  est un sous-ensemble de l'intervalle  $J_i$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Toutefois,  $J_m = \emptyset$ , et donc le graphe n'est pas  $(p, q)$ - $L$ -colorable.  $\square$

**5.3.2. Bornes inférieures pour les graphes planaires de maille donnée**

Il est naturel de se demander si le paramètre  $t(\mathcal{P})$  peut être réduit pour la classe des graphes planaires de grande maille (rappelons que la *maille* d'un graphe  $G$  est la taille d'un plus petit cycle de  $G$ ). Nous étudions le nombre de choix circulaire des graphes planaires de maille au moins  $k$ . Pour tout  $k \geq 3$ , posons

$$t(k) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \forall G \text{ planaire de maille au moins } k, \text{cch}(G) \leq t, \}.$$

Comme  $t(\mathcal{P}) = t(3)$ ,  $6 \leq t(3) \leq 8$ . Dans cette section et la prochaine, les bornes suivantes sont établies.

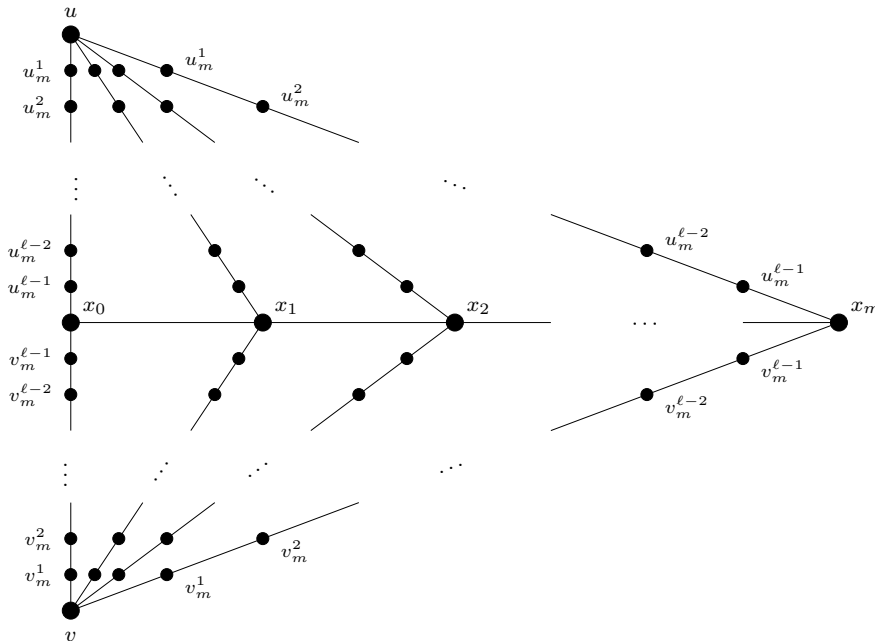
- $t(k) \geq 2 + \frac{4}{k-2}$  pour tout  $k \geq 3$ ;
- $t(4) \leq 6$ ;  $t(5) \leq 4 + \frac{4}{5}$ ;  $t(6) \leq 4$ ;  $t(8) \leq 3 + \frac{1}{3}$ ;  $t(9) \leq 3$ ; et
- $t(4\ell + 2) \leq 2 + \frac{2}{\ell}$  pour tout  $\ell \geq 1$ .

Commençons par exhiber quelques exemples permettant de borner inférieurement  $t(k)$ .

**Proposition 39.** *Pour tout  $k \geq 3$  et tout  $n \geq 2$ , il existe un graphe planaire  $G_{k,n}$  de maille  $k$  tel que  $\text{cch}(G_{k,n}) \geq 2 + \frac{4}{k-2} - \frac{1}{n}$ .*

**Démonstration.** Supposons  $k \geq 4$  en vertu de la proposition 38. Posons  $t := 2 + \frac{4}{k-2} - \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 2$ . Soient  $q = (k - 2)n$  et  $p$  un entier bien plus grand que  $tq = 2kn - (k - 2)$ . Tous les calculs et intervalles sont entendus modulo  $p$ .

L'étude est séparée en deux cas selon la parité de  $k$ . Si  $k = 2\ell + 1$ , le graphe planaire  $H'_m$  est obtenu à partir du graphe  $H_m$  de la figure 5.3 en subdivisant chacune des arêtes  $ux_i$  et  $vx_i$  exactement  $(\ell - 1)$  fois et  $m = 2$ ; voir figure 5.4. Notons  $u_i^1, \dots, u_i^{\ell-1}$  les sommets internes du chemin de longueur  $\ell$  entre  $u$  et  $x_i$ , et  $v_i^1, \dots, v_i^{\ell-1}$  ceux du chemin entre  $v$  et  $x_i$ . Si  $k = 2\ell + 2$ , l'arête  $x_i x_{i+1}$  est en outre subdivisée (une unique fois). Les calculs pour les deux cas étant similaires, nous supposons désormais que  $k = 2\ell + 1$ .



**FIG. 5.4.** Le graphe  $H'_m$  lorsque  $k = 2\ell + 1$ .

De la même façon que pour la proposition 38, le graphe  $G_{k,n}$  est construit à partir de  $(tq)^2$  copies de  $H'_m$  en identifiant le sommet  $u$  de chacune des copies, et en identifiant le sommet  $v$  de chacune des copies. Le graphe obtenu est planaire de maille exactement  $k$ . Définissons les listes  $L(u) := [r, r + tq - 1]$  et  $L(v) := [s, s + tq - 1]$  avec  $r$  et  $s$  choisis de sorte que les listes  $L(u)$  et  $L(v)$  soient à distance au moins  $2q$  dans  $\mathbb{Z}_p$ . Pour chaque couple  $(a, b) \in L(u) \times L(v)$ , nous attribuons des listes aux sommets de la copie  $H_{a,b}$  de  $H'_m$  de telle sorte que, si  $u$  est coloré  $a$  et  $v$  est coloré  $b$ , le sous-graphe  $H_{a,b}$  ne puisse être  $(p, q)$ - $L$ -coloré. Fixons une copie  $H_{a,b}$  de  $H'_m$ .

Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, \ell - 1\}$ ,  $L(u_i^j) := I_{i,j}^u \cup J_{i,j}^u$  et  $L(v_i^j) := I_{i,j}^v \cup J_{i,j}^v$  où

$$J_{i,j}^{[u,v]} := [c_{i,j}^{[u,v]}, c_{i,j}^{[u,v]} + j(tq - 2q)] \text{ et}$$

$$I_{i,j}^{[u,v]} := [c_{i,j-1}^{[u,v]} + (j-1)(tq - 2q) - q + 1, c_{i,j-1}^{[u,v]} + q - 1] = [c_{i,j-1}^{[u,v]}]_q \cap [c_{i,j-1}^{[u,v]} + (j-1)(tq - 2q)]_q$$

avec  $c_{i,0}^u := a$ ,  $c_{i,0}^v := b$  et les constantes  $c_{i,j}^{[u,v]}$ , pour  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  et  $j \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$  choisies suffisamment éloignées dans  $\mathbb{Z}_p$ . Chaque liste vérifie  $|L(u_i^j)| = |L(v_i^j)| = (j(tq - 2q) + 1) + (2q - 1 - (j-1)(tq - 2q)) = tq$ . Il reste à attribuer des listes aux sommets  $x_i$ . Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $L(x_i) := I_{i,l}^u \cup I_{i,l}^v \cup I_i \cup J_i$  avec  $I_{i,l}^u$  et  $I_{i,l}^v$  définis ci-dessus et

$$\begin{aligned} J_i &:= [c_i, c_i + tq - 2(2q - (\ell - 1)(tq - 2q) - 1) - 1 - i(2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2)] \\ &= [c_i, c_i + (2\ell - 1)(tq - 2q) - 2q + 1 - i(2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2)] \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_i &:= [c_{i-1} + (2\ell - 1)(tq - 2q) - 3q + 2 - (i-1)(2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2), c_{i-1} + q - 1] \\ &= [c_{i-1}]_q \cap [c_{i-1} + (2\ell - 1)(tq - 2q) - 2q + 1 - i(2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2) + 1]_q \end{aligned}$$

et les constantes  $c_i$ , pour  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ , choisies suffisamment éloignées les unes des autres (et aussi des  $c_{i,j}^{[u,v]}$ ). La taille de ces listes est  $|L(x_i)| = 2((\ell - 1)(tq - 2q) + 1) + ((2\ell - 1)(tq - 2q) - 2q + 2 - i(2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2)) + (q - (2\ell - 1)(tq - 2q) + 3q - 2 + i(2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2) - (2(\ell - 1)(tq - 2q) + 2)) = tq$ .

Essayons à présent de  $(p, q)$ - $L$ -colorer ce graphe. De façon générique, supposons que  $u$  soit pré-coloré avec la couleur  $a$ , et  $v$  avec la couleur  $b$ . Considérons le sous-graphe  $H_{a,b}$ . Par récurrence, en appliquant le lemme 26(ii), il vient que l'ensemble de couleurs extensibles de  $[u, v]_i^j$  est un sous-ensemble de l'intervalle  $J_{i,j}^{[u,v]}$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  et tout  $j \in \{1, 2, \dots, \ell - 1\}$ . Ainsi, l'ensemble de couleurs extensibles de  $x_i$  est inclus dans  $I_i \cup J_i$ . À nouveau, plusieurs applications successives du lemme 26(ii) montrent que l'ensemble de couleurs extensibles de  $x_i$  est un sous-ensemble de l'intervalle  $J_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Néanmoins,  $J_m = \emptyset$  et donc le graphe n'est pas  $(p, q)$ - $L$ -colorable.  $\square$

### 5.3.3. Bornes supérieures pour les graphes de densité bornée

Ici nous étudions le lien entre le nombre de choix circulaire d'un graphe et sa densité. Rappelons que le *degré moyen maximum*  $\text{Mad}(G)$  du graphe  $G$  est le maximum, sur tous les sous-graphes de  $G$ , du degré moyen. Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 28.

**Proposition 40.** *Pour tout entier naturel non nul  $k$ , le nombre de choix circulaire de tout graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à  $k$  est au plus  $2k$ .*

**Démonstration.** Cela découle du fait que si  $\text{Mad}(G) < k + 1$ , alors  $\delta^*(G) \leq k$ .  $\square$

Cette proposition est la première indication d'un lien entre la choisissabilité circulaire et le degré moyen maximum. Notre but dans la suite est d'étudier cette relation. Nous établissons les deux théorèmes suivants.

**Théorème 36.** Soient  $k$  un entier naturel non nul et  $s \in \{1, 2\}$ . Le nombre de choix circulaire de tout graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à  $k + 1 + \frac{k+1}{k+1+s}$  est au plus  $2k + \frac{4}{s+2}$ .

**Théorème 37.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Le nombre de choix circulaire de tout graphe de degré moyen maximum strictement inférieur à  $2 + \frac{2}{3n-1}$  est au plus  $2 + \frac{2}{n}$ .

Ces résultats sont prouvés à partir de propriétés structurelles des graphes “critiques” au regard du nombre de choix circulaire. Un graphe  $G$  est dit  $t$ -critique si  $\text{cch}(G) > t$  et  $\text{cch}(H) \leq t$  pour tout sous-graphe propre  $H \subset G$ . Le lemme suivant sera utile pour prouver le théorème 36.

**Lemme 29.** Soient  $k$  un entier naturel non nul, et  $s \in \{1, 2\}$ . Notons  $G$  un graphe  $(2k + \alpha)$ -critique avec  $\alpha \geq \frac{4}{s+2}$ .

- (i) Le degré minimum de  $G$  est au moins  $k + 1$ .
- (ii) Deux sommets de  $G$  de degré  $k + 1$  ne sont pas adjacents.
- (iii) Un sommet de  $G$  de degré  $k + 2$  est adjacent à au plus  $s$  sommets de degré  $k + 1$ .

**Démonstration.** Comme  $\text{cch}(G) > 2k + \alpha$ , il existe  $\varepsilon > 0$ , deux entiers  $p, q$  et une  $(2k + \alpha + \varepsilon)$ -assignation  $L$  tels que  $G$  ne soit pas  $(p, q)$ - $L$ -colorable. En revanche, tout sous-graphe propre  $H$  de  $G$  est  $(p, q)$ - $L$ -colorable puisque, par définition de  $G$ ,  $\text{cch}(H) \leq 2k + \alpha$ . Soit  $t := 2k + \alpha + \varepsilon$ .

- (i) Supposons que  $v$  soit un sommet de degré au plus  $k$ . Par minimalité de  $G$ , il est possible de  $(p, q)$ - $L$ -colorer  $G - v$ . Afin d’appliquer le lemme 26(i), il suffit de considérer la coloration de  $G - v$  comme une pré-coloration, et ainsi, le nombre de couleurs extensibles de  $v$  est au moins  $tq - k(2q - 1) = \alpha q + \varepsilon q + k \geq 1$ . Ainsi,  $G$  est  $(p, q)$ - $L$ -colorable, une contradiction.
- (ii) Supposons que  $v_1$  et  $v_2$  soient deux sommets adjacents de degré  $k + 1$ . Considérons une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G - \{v_1, v_2\}$  comme une pré-coloration. De la même façon que précédemment, le nombre de couleurs extensibles de  $v_1$  est au moins  $tq - k(2q - 1) = \alpha q + k + \varepsilon q$ . En appliquant une nouvelle fois le lemme 26(i), il vient que le nombre de couleurs extensibles de  $v_2$  est au moins  $tq - k(2q - 1) - (2q - (\alpha q + k + \varepsilon q)) = 2(\alpha - 1)q + 2(k + \varepsilon q) \geq 1$  car  $\alpha \geq \frac{4}{s+2} \geq 1$  et  $k \geq 1$ , ce qui contredit la  $t$ -criticalité de  $G$ .
- (iii) Supposons que  $v$  soit un sommet de degré  $k + 2$  avec  $s + 1$  voisins  $v_1, v_2, \dots, v_{s+1}$  de degré  $k + 1$ . Considérons une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G - \{v_1, \dots, v_{s+1}, v\}$ . Selon l’item (ii), les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_{s+1}$  sont deux-à-deux non adjacents, et il est donc possible d’appliquer le lemme 26(i) à chacun de ces sommets individuellement. Le nombre de couleurs extensibles de  $v_i$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, s + 1\}$ , est au moins  $tq - k(2q - 1) = \alpha q + k + \varepsilon q$ . En appliquant à nouveau le lemme, le nombre de couleurs extensibles de  $v$  est au moins  $tq - (k + 1 - s)(2q - 1) - (s + 1)(2q - (\alpha q + k + \varepsilon q)) = 2(\alpha - 2)q + 2(k + \varepsilon q) + 1 + s(\alpha q - 1 + k + \varepsilon q) = (\alpha(s + 2) - 4)q + 2(k + \varepsilon q) + s(k + \varepsilon q - 1) \geq 1$  puisque  $\alpha \geq \frac{4}{s+2}$  et  $k \geq 1$ , ce qui contredit la  $t$ -criticalité de  $G$ .

□

Le lemme suivant, qui est une conséquence directe du lemme 27, sera utilisé pour prouver le théorème 37.

**Lemme 30.** Soient  $n$  un entier naturel non nul, et  $G$  un graphe  $(2 + \frac{2}{n})$ -critique. Le degré minimum de  $G$  est au moins deux, et  $G$  n’a pas de poignée d’ordre au moins  $n$ .

**Démonstration.** Clairement,  $G$  n'a pas de sommet de degré au plus un. Si  $G$  contient une poignée d'ordre au moins  $n$ , alors toute pré-coloration de  $G$  privé d'une telle poignée s'étend (grâce au lemme 27) au graphe entier, ce qui contredit la  $(2 + \frac{2}{n})$ -criticalité de  $G$ .  $\square$

Les démonstrations des théorèmes 36 et 37 utilisent une méthode de déchargement sur les graphes  $t$ -critiques, afin de borner inférieurement le degré moyen.

**Démonstration du théorème 36.** Supposons que  $G$  soit  $(2k + \frac{4}{s+2})$ -critique. Alors, selon le lemme 29, le degré minimum de  $G$  est au moins  $k + 1$ , deux sommets de degré  $k + 1$  ne sont pas adjacents et tout sommet de degré  $k + 2$  est adjacent à au plus  $s$  sommets de degré  $k + 1$ . Nous utilisons la procédure de déchargement suivante : la charge initiale de chaque sommet est égale à son degré. Ensuite, tout sommet degré au moins  $k + 2$  donne  $\eta := \frac{1}{k+1+s}$  à chacun de ses voisins de degré  $k + 1$ .

Montrons que la charge finale de tout sommet  $v$  est au moins  $k + 1 + (k + 1)\eta$ . Si le degré de  $v$  est  $k + 1$ , alors sa charge finale est  $k + 1 + (k + 1)\eta$  puisque tous ses voisins lui ont donné  $\eta$ . Si le degré de  $v$  est  $k + 2$ , alors sa charge finale est au moins  $k + 2 - s\eta = k + 1 + (k + 1)\eta$  puisqu'il possède au plus  $s$  voisins de degré  $k + 1$ . Enfin, si le degré de  $v$  est au moins  $k + 3$ , alors sa charge finale est au moins  $k + 3 - (k + 3)\eta = k + 1 + (k + 2s - 1)\eta \geq k + 1 + (k + 1)\eta$  car  $s \geq 1$ .

Par conséquent, le degré moyen de  $G$ , et donc son degré moyen maximum, est au moins  $k + 1 + (k + 1)\eta$ . Ainsi, le degré moyen maximum de tout graphe de nombre de choix circulaire strictement supérieur à  $2k + \frac{4}{s+2}$  est au moins  $k + 1 + (k + 1)\eta$ , comme souhaité.  $\square$

**Démonstration du théorème 37.** Montrons que le degré moyen maximum de tout graphe de nombre de choix circulaire strictement supérieur à  $2 + \frac{2}{n}$  est au moins  $2 + \frac{2}{3n-1}$ . Il suffit de le prouver pour les graphes  $(2 + \frac{2}{n})$ -critiques. Soit  $G$  un tel graphe. D'après le lemme 30, le degré minimum de  $G$  est au moins deux, et  $G$  n'a pas de poignée d'ordre au moins  $n$ . Utilisons à présent la procédure de déchargement suivante. Au départ, la charge de chaque sommet est égale à son degré. Ensuite, chaque sommet  $u$  de degré au moins trois donne  $\eta := \frac{1}{3n-1}$  à chaque sommet de degré deux le long des poignées émanant de  $u$ . À la fin, la charge de chaque sommet de degré deux est exactement  $2 + 2\eta = 2 + \frac{2}{3n-1}$ . Comme l'ordre de toute poignée est au plus  $n - 1$ , la charge finale de chaque sommet de degré au moins trois est au moins  $3 - 3(n - 1)\eta = 2 + \frac{2}{3n-1}$ . Par conséquent, le degré moyen de  $G$  est au moins  $2 + \frac{2}{3n-1}$ , comme désiré.  $\square$

### 5.3.4. Bornes supérieures pour les graphes de densité bornée et de maille donnée

L'un de nos objectifs est d'appliquer les résultats de la sous-section précédente aux graphes planaires dans la sous-section 5.3.5 (puisque'il est possible de borner le degré moyen maximum de tels graphes en fonction de leur maille). Dans cette optique, il est possible d'obtenir des améliorations en tirant partie de la condition sur la maille. Nous établissons les trois théorèmes suivants dans cette sous-section. Les deux premiers améliorent le théorème 36 dans le cas où le graphe considéré est sans triangle (donc de maille au moins quatre) pour le théorème 38, et de maille au moins 6 pour le théorème 39. Le troisième améliore le résultat du théorème 37 lorsque la maille est au moins  $2n + 2$  pour un entier naturel non nul  $n$ .

**Théorème 38.** Soient  $k$  un entier naturel non nul, et  $s \leq 2k + 2$ . Posons  $r := \lceil \frac{s-2}{2} \rceil$  et  $s' := \min\{k + 2, s\}$ . Le nombre de choix circulaire de tout graphe sans triangle de degré moyen maximum strictement inférieur à  $k + 1 + \frac{k+1-r}{k+1+s'}$  est au plus  $2k + \frac{4}{s+2}$ .

**Théorème 39.** Soient  $k$  un entier naturel non nul et  $s \in \{2, 3, \dots, k + 2\}$ . Posons  $r := \lceil \frac{s-2}{2} \rceil$ . Le nombre de choix circulaire de tout graphe de maille au moins 6 et de degré moyen maximum strictement inférieur à  $k + 1 + \frac{k+1-r}{k+s-r+\frac{1}{k+3-s}}$  est au plus  $2k + \frac{4}{s+2}$ .

**Théorème 40.** Fixons un entier naturel non nul  $n$ . Le nombre de choix circulaire de tout graphe de maille au moins  $2n + 2$  et de degré moyen maximum strictement inférieur à  $2 + \frac{1}{n}$  est au plus  $2 + \frac{2}{n}$ .

Montrons le lemme suivant afin de prouver le théorème 38.

**Lemme 31.** Soient  $k$  un entier naturel non nul, et  $s \in \{1, 2, \dots, 2k + 2\}$ . Posons  $r := \lceil \frac{s-2}{2} \rceil$  et  $s' := \min\{k + 2, s\}$ . Soit  $G$  un graphe sans triangle  $(2k + \alpha)$ -critique, avec  $\alpha \geq \frac{4}{s+2}$ .

- (i) Le degré minimum du graphe  $G$  est au moins  $k + 1$ .
- (ii) Tout sommet de  $G$  de degré  $k + 1$  est adjacent à au plus  $r$  sommets de degré  $k + 1$ .
- (iii) Un sommet de degré  $k + 2$  est adjacent à au plus  $s'$  sommets de degré  $k + 1$ .

**Démonstration.** Soient  $\varepsilon, p, q, L$  et  $t$  comme dans la preuve du lemme 29.

- (i) Découle du lemme 29(i).
- (ii) Supposons que  $v$  soit un sommet de degré  $k + 1$  avec  $r + 1$  voisins  $v_1, \dots, v_{r+1}$  de degré  $k + 1$ . Comme  $G$  est sans triangle, les sommets  $v_1, \dots, v_{r+1}$  sont non adjacents ; cette observation est importante afin de pouvoir appliquer le lemme 26. Considérons une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G - \{v_1, \dots, v_{r+1}, v\}$ . En vertu du lemme 26, le nombre de couleurs extensibles de  $v_i$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r + 1\}$ , est au moins  $tq - k(2q - 1) = \alpha q + k + \varepsilon q$ . En appliquant le lemme 26(i) une nouvelle fois, il suit que le nombre de couleurs extensibles de  $v$  est au moins  $tq - (k - r)(2q - 1) - (r + 1)(2q - (\alpha q + k + \varepsilon q)) = 2(\alpha - 1)q + 2(k + \varepsilon q) + r(\alpha q - 1 + k + \varepsilon q) = (\alpha(r + 2) - 2)q + 2(k + \varepsilon q) + r(k + \varepsilon q - 1) \geq (\frac{4}{s+2}(r + 2) - 2)q + 1 \geq 1$  puisque  $r \geq \min\{0, \frac{s-2}{2}\}$  et  $k \geq 1$ , ce qui contredit la  $t$ -criticalité de  $G$ .
- (iii) Les calculs sont similaires à ceux de l'item précédent.

□

Le théorème 38 découle du lemme précédent, et se montre de façon similaire au théorème 36. La preuve est omise. Prouvons le lemme suivant afin de démontrer le théorème 39.

**Lemme 32.** Soient  $k$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls, et  $s \in \{1, 2, \dots, k + 2\}$ . Posons  $r := \lceil \frac{s-2}{2} \rceil$ . Soit  $G$  un graphe de maille au moins 6 et  $(2k + \alpha)$ -critique où  $\alpha \geq \frac{4}{s+2}$ .

- (i) Le degré minimum du graphe  $G$  est au moins  $k + 1$ .
- (ii) Tout sommet de degré  $k + 1$  est adjacent à au plus  $r$  sommets de degré  $k + 1$ .
- (iii) Un sommet de degré  $k + 2$  est adjacent à au plus  $s$  sommets de degré  $k + 1$ .

Un sommet est hibernant s'il est de degré  $k + 2$  avec  $s$  voisins de degré  $k + 1$ . Un barbare est un sommet de degré  $k + 2$  avec exactement  $s - 1$  voisins de degré  $k + 1$ .

- (i) Deux sommets hibernants ne sont pas adjacents.
- (ii) Un barbare est adjacent à au plus un sommet hibernant.

**Démonstration.** Soient  $\varepsilon, p, q, L$  et  $t$  comme dans la preuve du lemme 29. (i)–(iii) découlent du lemme 31(i)–(iii).

(iv) Supposons que  $v$  et  $v'$  soient deux sommets hibernants adjacents. Notons  $v_1, \dots, v_s$  et  $v'_1, \dots, v'_s$  les  $s$  voisins de degré  $k + 1$  de  $v$  et  $v'$ , respectivement. Comme  $G$  est de maille au moins 6,  $\{v_1, \dots, v_s\}$  et  $\{v'_1, \dots, v'_s\}$  sont disjoints ; de plus, ces sommets induisent des ensembles indépendants dans  $G$ . Cette observation va permettre d'appliquer le lemme 26(i).

Considérons une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G \setminus (\{v_1, \dots, v_s, v'_1, \dots, v'_s, v, v'\})$ . Nous allons montrer que cette coloration s'étend au graphe  $G$ , ce qui contredit la  $t$ -criticalité de  $G$ . L'ordre dans lequel sont nommés les sommets non colorés vérifie les conditions du lemme 26(i).

En premier lieu, le nombre de couleurs extensibles de  $v_i$  ou  $v'_i$ , pour tout  $i$ , est au moins

$$x_0 = tq - k(2q - 1) = \alpha q + k + \varepsilon q.$$

De plus,  $x_0 \geq 1$  car  $k \geq 1$  et  $\alpha, \varepsilon \geq 0$ . Comme  $v$  est adjacent à  $v_1, \dots, v_s$  et  $k + 1 - s$  sommets pré-colorés, le nombre de couleurs extensibles de  $v$  est au moins

$$\begin{aligned} x &:= tq - s(2q - (\alpha q + k + \varepsilon q)) - (k + 1 - s)(2q - 1) \\ &= (\alpha s - 2)q + \alpha q + k + \varepsilon q + s(k + \varepsilon q - 1) + 1. \end{aligned}$$

Comme  $\alpha s \geq 2$  et  $k \geq 1$ , il vient  $x \geq 1$ . En appliquant à nouveau le lemme, comme  $v'$  est adjacent à  $v'_1, \dots, v'_s$ ,  $k + 1 - s$  sommets pré-colorés et  $v$ , il suit que le nombre de couleurs extensibles de  $v_2$  est au moins

$$\begin{aligned} x' &:= tq - s(2q - (\alpha q + k + \varepsilon q)) - (k + 1 - s)(2q - 1) - (2q - x) \\ &= 3(\alpha s - 2)q + 2\{\alpha q + k + \varepsilon q + s(k + \varepsilon q - 1) + 1\}. \end{aligned}$$

Comme  $\alpha s \geq 2$  et  $k \geq 1$ , il suit  $x' \geq 1$ . Ainsi,  $G$  est  $(p, q)$ - $L$ -colorable, une contradiction.

(v) Les calculs sont similaires à ceux de la preuve de l'item précédent. □

**Démonstration du théorème 39.** Supposons que  $G$  soit de maille au moins 6 et  $(2k + \frac{4}{s+2})$ -critique. Selon le lemme 32, le degré minimum de  $G$  est au moins  $k + 1$ , tout sommet de degré  $k + 1$  est adjacent à au plus  $r$  sommets de degré  $k + 1$ , et tout sommet de degré  $k + 2$  est adjacent à au plus  $s$  sommets de degré  $k + 1$  ; en outre, deux sommets hibernants ne sont pas adjacents et chaque barbare est adjacent à au plus un sommet hibernant. Nous utilisons la procédure de déchargement suivante : la charge initiale de chaque sommet est égale à son degré ; ensuite, chaque sommet de degré  $k + 1$  reçoit  $\eta := \frac{1}{k+s-r+\frac{1}{k+3-s}}$  de chaque voisin de degré au moins  $k + 2$ , et chaque sommet hibernant reçoit  $\eta_1 := \frac{\eta}{k+3-s} = \frac{1}{(k+s-r)(k+3-s)+1}$  de chaque voisin non hibernant et de degré au moins  $k + 2$ .

Montrons que la charge finale de chaque sommet  $v$  est au moins  $k + 1 + (k + 1 - r)\eta$ . Si  $v$  a degré  $k + 1$ , sa charge finale est au moins  $k + 1 + (k + 1 - r)\eta$  puisqu'il a au moins  $k + 1 - r$  voisins qui lui ont donné  $\eta$ . Si le degré de  $v$  est  $k + 2$ , distinguons trois cas.

Si  $v$  est un sommet hibernant, sa charge finale est  $k + 2 - s\eta + (k + 2 - s)\eta_1 = k + 1 + (\frac{1}{\eta} - s + \frac{k+2-s}{k+3-s})\eta = k + 1 + (k + 1 - r)\eta$  puisqu'il a au plus  $s$  voisins de degré  $k + 1$  et qu'il reçoit  $\eta_1$  de la part de tous ses autres voisins.

Si  $v$  est un barbare, sa charge finale est  $k + 2 - (s - 1)\eta - \eta_1 = k + 1 + (\frac{1}{\eta} - s + 1 - \frac{1}{k+3-s})\eta = k + 1 + (k + 1 - r)\eta$  puisqu'il a  $s - 1$  voisins de degré  $k + 1$  et au plus un voisin hibernant.



Sinon, sa charge finale est au moins  $k + 2 - (s - 2)\eta - (k + 2 - (s - 2))\eta_1 = k + 1 + (\frac{1}{\eta} - s + 2 - \frac{k+4-s}{k+3-s})\eta = k + 1 + (k + 1 - r)\eta$  car il a au plus  $s - 2$  voisins de degré  $k + 1$  et  $k + 2 - (s - 2)$  voisins hibernants, et  $\eta_1 \leq \eta$ .

Si le degré de  $v$  est au moins  $k + 3$ , sa charge finale est au moins  $k + 3 - (k + 3)\eta$ . Cette quantité est au moins  $k + 1 + (k + 1 - r)\eta$  si, et seulement si,  $k + s - r + \frac{1}{k+3-s} \geq k + 2 - \frac{r}{2} \iff s - \frac{r}{2} - 2 + \frac{1}{k+3-s} \geq 0$ , ce qui est vrai car  $s \geq 2$ .

Par conséquent, le degré moyen de  $G$ , et donc son degré moyen maximum, est au moins  $k + 1 + (k + 1 - r)\eta$ . Ceci montre que le degré moyen maximum de tout graphe de maille au moins 6 et de nombre de choix circulaire strictement supérieur à  $2k + \frac{4}{s+2}$  est au moins  $k + 1 + (k + 1 - r)\eta$ , comme souhaité.  $\square$

Voyons quelques notations utiles afin de prouver un lemme permettant de démontrer le théorème 40. Soit  $G$  un graphe. Une *chaîne* est une poignée d'ordre maximal dans  $G$ . Son *ordre* est le nombre de sommets qu'elle contient. (Une chaîne d'ordre zéro est simplement une arête entre deux sommets de degré au moins trois.) Deux sommets de  $G$  de degré au moins trois de  $G$  sont *reliés avec poids*  $w$  si, et seulement si, il existe une chaîne d'ordre  $w$  entre-eux.

**Lemme 33.** Soient  $n$  un entier naturel non nul, et  $G$  un graphe de maille au moins  $2n + 2$  et  $(2 + \frac{2}{n})$ -critique. Soit  $v$  un sommet de degré  $d \geq 3$ . Notons  $w_1, w_2, \dots, w_d$  les poids des chaînes issues de  $v$ . Alors,  $\sum_{j=1}^d w_j \leq (d - 1)n - 2$ .

**Démonstration.** De façon similaire aux lemmes précédents, considérons une  $(t + \varepsilon)$ - $(p, q)$ -assignation  $L$  (où  $t := 2 + \frac{2}{n}$ ) pour un certain  $\varepsilon > 0$  telle que  $G$  ne soit pas  $(p, q)$ - $L$ -colorable. Par l'absurde, supposons que  $\sum_{j=1}^d w_j \geq (d - 1)n - 1$ . Notons que, pour tout  $j$ ,  $w_j \leq n - 1$  par le lemme 30. Soit une  $(p, q)$ - $L$ -pré-coloration du sous-graphe de  $G$  obtenu en enlevant  $v$  et les chaînes incidentes à  $v$ . En appliquant le lemme 26(i) pour chaque chaîne (ce qui est possible grâce à la condition sur la maille), il vient que, si  $u_j$  est un voisin de  $v$  appartenant à une chaîne de longueur  $w_j$ , alors le nombre de couleurs extensibles de  $w_j$  est au moins  $w_j \frac{2q}{n} + 1$ . Ainsi, en appliquant à nouveau le lemme, le nombre de couleurs extensibles de  $v$  est au moins

$$2q + \frac{2q}{n} + \varepsilon q - \sum_{j=1}^d \left( 2q - \left( w_j \frac{2q}{n} + 1 \right) \right) \geq \frac{4q}{n} + \varepsilon q + d \geq 1,$$

car  $\sum_{j=1}^d w_j \geq (d - 1)n - 1$ , une contradiction.  $\square$

**Démonstration du théorème 40.** Nous utilisons à nouveau une procédure de déchargement afin de montrer que le degré moyen maximum de tout graphe de maille au moins  $2n + 2$  et de nombre de choix circulaire strictement supérieur à  $2 + \frac{2}{n}$  est au moins  $2 + \frac{1}{n}$ . Il est suffisant de le prouver pour les graphes  $(2 + \frac{2}{n})$ -critiques (de maille au moins  $2n + 2$ ). Soit  $G$  un tel graphe. Par le lemme 30, le degré minimum de  $G$  est au moins deux et  $G$  ne contient pas de poignée d'ordre au moins  $n$ . Nous utilisons à présent une procédure de déchargement : chaque sommet de degré au moins trois donne  $\eta := \frac{1}{2n}$  à chaque sommet des chaînes qui lui sont incidentes. La charge finale de chaque sommet est au moins  $2 + 2\eta = 2 + \frac{1}{n}$ . En effet, un sommet de degré deux reçoit  $2\eta$ . Soit  $v$  un sommet de degré  $d \geq 3$ . En vertu du lemme 33, la charge finale de  $v$  est au moins

$$d - ((d - 1)n - 2) \cdot \frac{1}{2n} = \frac{d + 1}{2} + \frac{1}{n} \geq 2 + \frac{1}{n},$$

car  $d \geq 3$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 5.3.5. Bornes supérieures pour les graphes planaires et toriques de maille donnée

Grâce à la proposition 40, et aux théorèmes 36, 37 et 38, il est possible de donner aisément des bornes supérieures de  $t(k)$ .

#### Théorème 41.

- (i)  $t(4) \leq 6; t(5) \leq 4\frac{4}{5}; t(6) \leq 4; t(8) \leq 3\frac{1}{3}; t(9) \leq 3; \text{ et}$
- (ii)  $t(4\ell + 2) \leq 2 + \frac{2}{\ell}$  pour tout  $\ell \geq 1$ .

**Démonstration.** Selon la formule d'Euler, le degré moyen maximum de tout graphe planaire de maille au moins  $k$  est strictement inférieur à  $\text{Mad}_k := 2 + \frac{4}{k-2}$ .

- (i)  $\text{Mad}_4 = 4$  donc, par la proposition 40,  $t(4) \leq 6$ .  $\text{Mad}_5 = 3\frac{1}{3}$ , donc le théorème 38, appliqué avec  $k = 2$  et  $s = 3$ , donne  $t(5) \leq 4\frac{4}{5}$ .  $\text{Mad}_6 = 3$  donc, selon la proposition 40,  $t(6) \leq 4$ .  $\text{Mad}_8 = 2\frac{2}{3}$  donc le théorème 36, appliqué avec  $k = s = 1$  montre que  $t(8) \leq 3\frac{1}{3}$ .  $\text{Mad}_9 = 2\frac{4}{7}$ , donc le théorème 39 avec  $k = 1$  et  $s = 2$  entraîne  $t(9) \leq 3$ .

- (ii) Découle directement du théorème 40. □

La proposition 40 et les théorèmes 36, 37, 38 et 39 permettent d'obtenir des bornes analogues pour les graphes de maille donnée plongeables sur d'autres surfaces. Par exemple, un graphe est *torique* s'il est plongeable sur le tore. D'après la formule d'Euler-Poincaré, le degré moyen maximum d'un graphe torique de maille au moins  $k$  est *au plus*  $2 + \frac{4}{k-2}$ . En posant

$$t_t(k) := \inf\{t : \forall G \text{ graphe torique de maille au moins } k, \text{ cch}(G) \leq t\},$$

il suit de calculs similaires à ceux du théorème 41 que  $t_t(3) \leq 11, t_t(4) \leq 6\frac{2}{3}, t_t(5) \leq 5, t_t(6) \leq 4\frac{1}{2}, t_t(7) \leq 4, t_t(9) \leq 3\frac{1}{3}, t_t(10) \leq 3$ , et  $t_t(6l + 1) \leq 2 + \frac{2}{l}$  pour tout  $l \geq 1$ . Plus généralement, si la caractéristique d'Euler d'une surface  $\mathcal{S}$  est  $\varepsilon$ , en vertu de la formule d'Euler-Poincaré, le degré moyen maximum de tout graphe de maille au moins  $k$  plongeable dans  $\mathcal{S}$  est au plus  $2 + \frac{2}{k-2} - \frac{2\varepsilon}{|V(G)|}$ . Il est donc possible d'appliquer la proposition 40 et les théorèmes 36, 37 et 38 de façon appropriée. En particulier, les bornes données pour  $t_t$  sont aussi vraies pour les graphes plongeables sur une surface quelconque de caractéristique d'Euler positive ou nulle.

Pour les graphes de genre  $r \geq 2$ , posons  $f(\text{Ad}, k) := 2 \sum_{i=0}^{s-1} (\text{Ad} - 1)^i$  si  $k = 2s$  et  $f(\text{Ad}, k) := 1 + \text{Ad} \sum_{i=0}^{s-1} (\text{Ad} - 1)^i$  si  $k = 2s + 1$ . Comme mentionné dans le chapitre 2, tout graphe  $H$  de maille  $k$  vérifie  $|V(H)| \geq f(\text{Ad}, k)$  (voir [AHL02]). Par conséquent, le degré moyen maximum de tout graphe  $G$  de genre  $r$  et de maille  $k$  vérifie

$$f(\text{Mad}(G), k) \left( \text{Mad}(G) - \frac{2k}{k-2} \right) - \frac{4(r-1)k}{k-2} \leq 0. \quad (5.3)$$

Ainsi, il est aisé de déduire des conditions sur la maille et le genre permettant d'utiliser les résultats des sous-sections précédentes. Par exemple,

**Corollaire 8.** *Le nombre de choix circulaire de tout graphe sans triangle de genre trois est au plus  $8 + \frac{4}{5}$ .*

**Démonstration.** D'après (5.3), le degré moyen maximum d'un tel graphe est au plus  $2 + 2\sqrt{3}$ . Par conséquent, le théorème 38 appliqué avec  $k = s = 3$  fournit la conclusion. □

Nous ne voyons pas pour l'instant comment obtenir de meilleures bornes inférieures pour les surfaces supérieures.

### 5.3.6. Graphes planaires extérieurs

Un graphe est *planaire extérieur* s'il admet un plongement dans le plan tel que la face externe soit incidente à tous les sommets du graphe. Pour tout  $k \geq 3$ , posons

$$t_o(k) := \inf\{t : \forall G \text{ graphe planaire extérieur de maille au moins } k, \text{cch}(G) \leq t\}.$$

Nous allons établir que  $t_o(k) = 2 + \frac{2}{k-2}$  pour tout entier  $k \geq 3$ .

**Théorème 42.** *Fixons un entier  $k \geq 3$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe un graphe planaire extérieur  $O_{k,n}$  de maille  $k$  dont le nombre de choix circulaire est au moins  $2 + \frac{2}{k-2} - \frac{1}{n}$ .*

**Démonstration.** Soit  $t := 2 + \frac{2}{k-2} - \frac{1}{n}$ ; posons  $q := 2(k-2)n$ ; et soit  $p$  bien plus grand que  $tq$ . Considérons le graphe  $P_m$  de la figure 5.5, avec  $m$  suffisamment grand. Le graphe  $O_{k,n}$

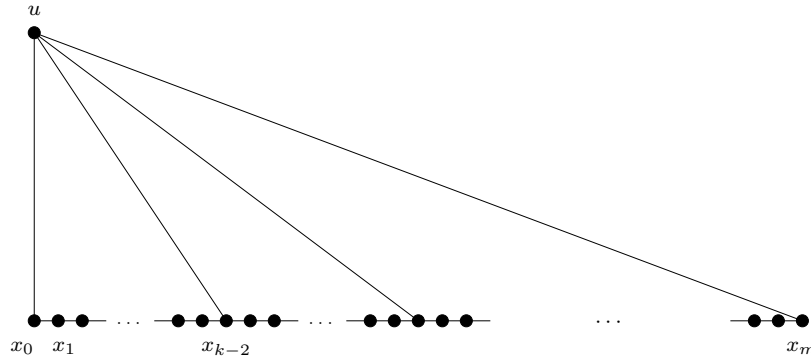


FIG. 5.5. Le graphe  $P_m$ .

est obtenu à partir de  $tq$  copies de  $P_m$  en identifiant le sommet  $u$  de chacune des copies. Pour tout  $a \in L(u)$ , nous attribuons des listes à la copie  $P_a$  de  $P_m$  de telle sorte que, si  $u$  est coloré  $a$ , le sous-graphe  $P_a$  ne puisse être  $(p, q)$ - $L$ -coloré. Comme les calculs sont en grande partie similaires à ceux des démonstrations des propositions 38 et 39, et quelque peu fastidieux, nous donnons simplement la définition précise des listes pour les sommets  $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$  du sous-graphe  $P_a$ , ainsi qu'un argument permettant de montrer que, si  $m$  est suffisamment grand et  $u$  est coloré  $a$ , alors le sous-graphe  $P_a$  ne peut être  $(p, q)$ - $L$ -coloré. Posons

$$J_t := [c_t, c_t + (4n - 2(k-2))(t+1)] \text{ for } i \in \{0, \dots, k-3\}, \text{ et}$$

$$I_t := [c_{t-1} + 4nt - 2(n+t)(k-2) + 1, c_{t-1} + 2(k-2)n - 1] \text{ pour } i \in \{1, \dots, k-2\}.$$

Soit

$$L(x_i) := I_i \cup J_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, k-3\},$$

$$L(x_0) := [a]_q \cup J_0, \text{ et}$$

$$L(x_{k-2}) := [a_q] \cup I_{k-2} \cup J'_0,$$

avec  $J'_0 := [c_0, c_0 + 4n - 2(k-2) - 2(k-2)^2 + 1]$ . La taille de chaque liste est  $tq$ . Supposons à présent que  $u$  soit coloré  $a$ , et essayons de définir une coloration  $c$  des sommets  $x_0, \dots, x_{k-2}$ . Clairement,  $c(x_0) \in J_0$  et donc, en appliquant le lemme 26(ii),  $c(x_i) \in J_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, x_{k-3}\}$ . Par suite,  $c(x_{k-2}) \in J'_0$ . Notons que  $|J'_0| < |J_0|$  (car  $k \geq 3$ ). Donc, en définissant de façon analogue les listes pour  $x_{k-1}, \dots, x_m$ , nous obtenons que  $x_m$  ne peut être  $(p, q)$ - $L$ -coloré, pourvu que  $m$  soit suffisamment grand.  $\square$

Signalons que la borne supérieure apparaît dans [WLY06] pour les valeurs paires de  $k$  ; toutefois, nous donnons ici une preuve plus concise du résultat et traitons également le cas où  $k$  est impair. Le lemme suivant découle du lemme 27.

**Lemme 34.** *Fixons un entier  $k \geq 3$ . Soit  $L$  une  $(2 + \frac{2}{k-2})$ - $(p, q)$ -assignation pour le cycle  $C_k$ . Toute pré-coloration de deux sommets adjacents du cycle s'étend en une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de tout le cycle.*

**Théorème 43.** *Le nombre de choix circulaire de tout graphe planaire extérieur de maille au moins  $k \leq 3$  est au plus  $2 + \frac{2}{k-2}$ .*

**Démonstration.** Supposons, par l'absurde, qu'il existe un graphe planaire extérieur  $G$  de maille au moins  $k$  qui soit  $(2 + \frac{2}{k-2})$ -critique. Soit  $L$  une  $(2 + \frac{2}{k-2} + \varepsilon)$ - $(p, q)$ -assignation de  $G$  telle que  $G$  ne soit pas  $(p, q)$ - $L$ -colorable. Clairement, le degré minimum de  $G$  est au moins deux. Remarquons à présent que tout graphe planaire extérieur de maille au moins  $k$  et de degré minimum au moins deux peut s'obtenir de façon récursive à partir d'un ensemble de cycles de longueur au moins  $k$  de la façon suivante : partant d'un cycle de longueur au moins  $k$ , à chaque étape une arête du graphe construit jusqu'ici est identifiée à celle d'un nouveau cycle. En conséquence, il est possible d'appliquer à chaque étape le lemme 34 afin d'obtenir une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G$ , une contradiction.  $\square$

## 5.4. Conclusion

Nous avons étudié différentes voies de recherche concernant la choisissabilité circulaire. Nous avons vu que la différence entre le nombre de choix circulaire et le nombre chromatique circulaire n'est pas bornée pour la classe des cliques circulaires. Des signes encourageants à propos d'une réponse positive au problème 11 ont été apportés, puisque nous avons établi que  $\text{cch}(G) = O(\text{ch}(G) + \ln |V(G)|)$ . Nous avons également prouvé, peut être contrairement à l'intuition, que la valeur de  $t(\mathcal{P})$  est entre 6 et 8, plutôt qu'entre 4 et 5 (comme suggéré par Mohar [Moh03]).

Néanmoins, il reste encore du travail à accomplir. Le problème 11 reste ouvert, ainsi que la question fondamentale suivante posée par Zhu [Zhu05] :

**Problème 12.** *Le nombre de choix circulaire est-il toujours rationnel ? Est-il toujours atteint ?*

Également, concernant les graphes planaires et toriques (de maille donnée), la plupart des valeurs exactes de  $t_t(k)$  et  $t(k)$  sont inconnues. La table 5.1 résume les bornes que nous avons obtenues pour ces paramètres.

$k$ (maille)	3	4	5	6	7	8	9	10	$k \geq 11$
$t_t(k)$ sup.	11	$6 + \frac{2}{5}$	5	$4 + \frac{1}{2}$	4	4	$3 + \frac{1}{3}$	3	$2 + \frac{4}{2\lfloor (k-3)/4 \rfloor}$
$t(k)$ sup.	8	6	$4 + \frac{4}{5}$	4	4	$3 + \frac{1}{3}$	3	3	$2 + \frac{4}{2\lfloor (k-2)/4 \rfloor}$
$t(k)$ inf.	6	4	$3 + \frac{1}{3}$	3	$2 + \frac{4}{5}$	$2 + \frac{2}{3}$	$2 + \frac{4}{7}$	$2 + \frac{1}{2}$	$2 + \frac{4}{k-2}$

TAB. 5.1. Bornes pour les graphes toriques et planaires de maille  $k$ .

Pour le moment, nous ne savons pas comment généraliser les constructions qui ont permis d'obtenir les bornes inférieures pour les graphes planaires afin de déduire de meilleures bornes inférieures pour les autres surfaces. En conclusion, nous mentionnons deux problèmes additionnels, qui peuvent s'avérer intéressants.

### 5.4.1. Graphes bipartis planaires

Observons que la suite de graphes planaires  $(G_{4,n})_{n \geq 1}$  de la proposition 39 est une suite de graphes bipartis planaires dont le nombre de choix circulaire tend vers quatre. Alon et Tarsi [AT92] ont prouvé que le nombre de choix de tout graphe biparti planaire est au plus trois, et la même année Gutner [Gut92] a démontré que, plus généralement, tout graphe biparti planaire est  $(3m, m)$ -choissable pour tout  $m \geq 1$ .

**Conjecture 7.** *Le nombre de choix circulaire de tout graphe biparti planaire est au plus quatre.*

Il semble que les techniques utilisées par Alon et Tarsi [AT92] ainsi qu'Alon et Zaks [AZ98] pourraient être utiles afin d'étudier cette question, ainsi que la choissabilité circulaire des cycles pairs.

### 5.4.2. Un graphe et son complémentaire

**Théorème 44** (Zhu [Zhu05]). *Le nombre de choix circulaire d'un graphe de degré maximum  $\Delta$  est au plus  $\Delta + 1$ .*

Il est bien connu que  $\text{ch}(G) + \text{ch}(\overline{G}) \leq n + 1$  pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets, où  $\overline{G}$  désigne le graphe complémentaire de  $G$ .

**Proposition 41.** *Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets,  $\text{cch}(G) + \text{cch}(\overline{G}) \leq 2n - 2$ .*

**Démonstration.** Par induction sur  $n$ , le résultat étant vrai lorsque  $n$  vaut deux. Supposons que le résultat soit vrai pour tout graphe à au plus  $n - 1 \geq 2$  sommets. Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets. Tout d'abord, remarquons que si le degré maximum de  $G$  ou de  $\overline{G}$  est au plus  $n - 3$ , le résultat est une conséquence directe du théorème 44. Ensuite, si  $\Delta(G)$  et  $\Delta(\overline{G})$  valent tous deux  $n - 2$ , le résultat est également vrai. Supposons donc que  $\Delta(G) = n - 1$  et  $\Delta(\overline{G}) = n - 2$  (puisque les deux valeurs ne peuvent être égales à  $n - 1$ ). Montrons que  $\text{cch}(G) \leq n - 1$  : le degré maximum du graphe  $G - v$  est  $n - 2$ , donc il est  $(n - 1)$ -circulairement choissable. Soit  $L$  une  $t$ - $(p, q)$ -assignation de  $G$  avec  $t := n - 1 + \varepsilon$  et  $\varepsilon > 0$  :  $G - v$  peut être  $(p, q)$ - $L$ -coloré. Par ailleurs, comme le degré de  $v$  dans  $G$  est un, cette coloration de  $G - v$  s'étend en une  $(p, q)$ - $L$ -coloration de  $G$  dès que le cardinal de  $L(v)$  est au moins  $2q$ , ce qui est le cas car  $n \geq 3$ .  $\square$

Soit  $G$  le graphe biparti complet  $K_{k, m^k}$ , et posons  $n := m^k + k$ . Alors, d'après le théorème 33

$$\text{cch}(G) + \text{cch}(\overline{G}) \geq m^k + 2k - \frac{2k^2}{m} \sim n + \ln n.$$

Cet exemple fournit une borne inférieure, elle ne permet toutefois pas de savoir si la borne de la proposition 41 est serrée ou pas.

# Arête-coloration des graphes cubiques par des éléments de groupes abéliens

Ce chapitre concerne un travail effectué avec Daniel Král' et Ondrej Pangrác. Dans la continuité de travaux réalisés par Edita Máčajova, André Raspaud et Martin Škoviera, il a donné lieu à un article commun ici exposé [KMP<sup>+</sup>06].

## 6.1. Introduction

### 6.1.1. Présentation

L'arête-coloration des graphes (notamment cubiques et sans pont) et les notions dérivées sont liées à de nombreux problèmes fondamentaux de théorie des graphes comme le Théorème des 4 Couleurs [AH77] ou encore les flots partout non nuls. Nous étudions dans ce chapitre une généralisation naturelle de l'arête-coloration dans laquelle chaque arête est colorée par un élément d'un groupe fixé, de sorte que les couleurs données aux arêtes incidentes à un même sommet vérifient des contraintes dans le groupe. Nous verrons en particulier les liens que ce genre de coloration entretient avec d'autres problèmes, comme la conjecture de Berge-Fulkerson.

Commençons par rappeler quelques définitions et résultats.

**Définition 23.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $l$  un entier. Une  $l$ -arête-coloration de  $G$  est une application  $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$  telle que, pour tout couple d'arêtes incidentes  $(e, e')$ ,  $c(e) \neq c(e')$ .

Rappelons qu'en vertu du théorème de Vizing, tout graphe cubique est 4-arête-colorable ; et qu'il existe des graphes cubiques qui ne sont pas 3-arête-colorables.

**Définition 24.** Pour tout graphe  $G = (V, E)$ , l'ensemble des dards de  $G$ , noté  $\mathcal{D}(G)$ , est obtenu en remplaçant chaque arête de  $G$  par deux dards opposés. Tout dard  $z$  (y compris s'il est issu d'une boucle) possède donc un dard opposé, noté  $z^{-1}$  : ses extrémités sont les mêmes que celles de  $z$ , et sa direction est contraire à celle de  $z$ . Pour tout sommet  $v$ , l'ensemble des dards issus de  $v$  est noté  $\mathcal{D}(v)$ . La collection d'ensembles  $\{\mathcal{D}(v) : v \in V\}$  forme une partition de  $\mathcal{D}(G)$ .

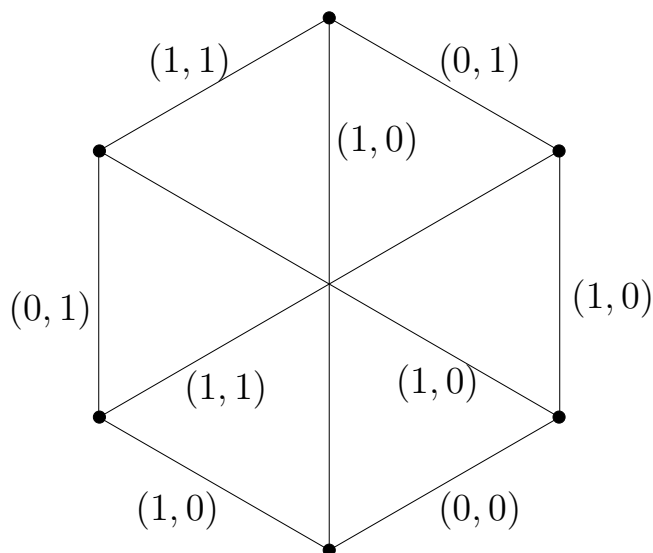
Soit  $A$  un groupe abélien, noté additivement. Un  $A$ -flot sur  $G$  est une fonction  $\xi : \mathcal{D}(G) \rightarrow A$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i)  $\forall z \in \mathcal{D}(G), \xi(z^{-1}) = -\xi(z)$
- (ii)  $\forall v \in V, \sum_{z \in \mathcal{D}(v)} \xi(z) = 0.$

Un  $A$ -flot est dit *partout non nul* si, et seulement si,  $\xi(z) \neq 0$  pour tout dard  $z \in \mathcal{D}(G)$ .

Pour tout entier  $k \geq 2$ , un  $k$ -flot est un  $\mathbb{Z}$ -flot  $\xi$  tel que  $|\xi(z)| < k$  pour tout dard  $z \in \mathcal{D}(G)$ .

La figure 6.1 donne un exemple de  $\mathbb{Z}_2^2$ -flot sur un graphe cubique.



**FIG. 6.1.** Un  $\mathbb{Z}_2^2$ -flot sur un graphe cubique. Une seule moitié des dards est représentée, l'autre étant constitué des dards symétriques à ceux-ci. Le flot des dards non représentés est défini selon la condition (i) de la définition 24.

Le théorème suivant regroupe deux théorèmes de Tutte (voir par exemple [Tut84, Die05]).

**Théorème 45** (Tutte, 1950 et 1954). *Soit  $G$  un graphe et soit  $A$  un groupe abélien d'ordre  $k$ . Le graphe  $G$  admet un  $A$ -flot partout non nul si, et seulement si, il admet un  $\mathbb{Z}_k$ -flot partout non nul si, et seulement si, il admet un  $k$ -flot partout non nul.*

Lorsque chaque élément de  $A$  est son propre inverse (i.e. lorsque  $A$  est isomorphe à un produit de copies de  $\mathbb{Z}^2$ ), un  $A$ -flot peut être directement défini sur les arêtes, plutôt que sur les dards. Il est bien connu qu'un graphe cubique admet un  $\mathbb{Z}_2^2$ -flot partout non nul si, et seulement si, il est 3-arête colorable. Un tel flot est une arête-coloration par les éléments non nuls de  $\mathbb{Z}_2^2$  telle que les couleurs incidentes à un même sommet soient différentes et que leur somme soit nulle. En fait, il suffit d'imposer que les couleurs soient toutes non nulles, et que la somme des couleurs incidentes à un même sommet soit nulle pour que les couleurs incidentes à un même sommet soient toutes différentes. Ceci nous amène à la définition suivante.

**Définition 25.** Soit  $A$  un groupe abélien, noté additivement. Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Une  $A$ -arête-coloration est une application  $c : E \rightarrow A^\times$  telle que, pour tout sommet  $v \in V$ ,

- (i) les arêtes incidentes à  $v$  soient colorées différemment ; et
- (ii) la somme dans  $A$  des couleurs des arêtes incidentes à  $v$  soit nulle.

Si l'application  $c$  ne vérifie que la condition (ii),  $c$ 'est une  $A$ -arête-coloration impropre.

Le lien unissant les  $\mathbb{Z}_2^2$ -flots à l'existence de 3-arête-coloration a conduit Archdeacon à conjecturer que tout graphe cubique sans pont possède une  $A$ -arête-coloration impropre pour tout groupe abélien  $A$  d'ordre au moins 5 [Arc86, Arc95]. Cette conjecture a été prouvée par Máčajová, Raspaud et Škoviera [MRŠ05].

**Théorème 46** (Máčajová, Raspaud et Škoviera [MRŠ05]). *Tout graphe cubique sans pont admet une  $A$ -arête-coloration impropre pour tout groupe abélien  $A$  d'ordre au moins 5.*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux colorations abéliennes propres. Si de telles colorations ont des points communs avec les flots partout non nuls, elles s'en éloignent par certains aspects. Par exemple, le théorème 45 montre que l'existence d'un  $A$ -flot dépend uniquement de l'ordre de  $A$ . Un tel résultat ne s'étend pas aux  $A$ -arête-colorations : tout graphe cubique sans pont est  $\mathbb{Z}_2^3$ -arête-colorable, alors qu'un tel graphe est  $\mathbb{Z}^8$ -colorable si, et seulement si, il est 3-arête-colorable.

Nous allons prouver que tout graphe cubique sans pont  $G$  est  $A$ -arête-colorable si  $A$  est un groupe abélien d'ordre au moins 12, ou le groupe  $\mathbb{Z}_2^3$ . En revanche, si  $A$  est l'un des groupes  $\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8$ , le graphe  $G$  est  $A$ -arête-colorable si, et seulement si, il est 3-arête-colorable. Il reste quatre groupes, que nous appellerons *groupes exceptionnels*, pour lesquels nous n'avons pu conclure :  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3^2, \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  et  $\mathbb{Z}_{11}$ . Nous montrerons également que l'existence de  $A$ -arête-colorations pour ces quatre groupes exceptionnels est étroitement liée à d'autres problèmes ouverts comme la conjecture de Berge-Fulkerson, la conjecture de Fan-Raspaud et celles de l'existence d'arête-colorations par les lignes du plan de Fano utilisant au plus quatre ou cinq lignes.

Rappelons tout d'abord la définition de triplet de Steiner.

**Définition 26.** Un *triplet de Steiner d'ordre  $n$*  est une paire ordonnée  $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$  où  $\mathcal{P}$  est un ensemble de  $n$  points et  $\mathcal{B}$  une collection de sous-ensembles de taille trois de  $\mathcal{P}$  telle que chaque pair de points appartienne à exactement un élément de  $\mathcal{B}$ . Les éléments de  $\mathcal{B}$  sont appelés *blocs* ou *triplets*.

Notons qu'un triplet de Steiner d'ordre  $n$  existe si, et seulement si,  $n$  est congru à 1 ou à 3 modulo 6.

**Définition 27.** Le *triplet de Steiner projectif d'ordre  $n$* , noté  $\text{PG}(n, 2)$  est la paire  $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$  avec  $\mathcal{P} := \mathbb{Z}_2^{n+1} \setminus \{0\}$  et  $(x, y, z) \in \mathcal{B}$  si, et seulement si,  $x + y + z = 0$  dans  $\mathbb{Z}_2^{n+1}$ . Le triplet de Steiner projectif d'ordre deux est le plus petit triplet de Steiner non trivial. On l'appelle le *plan de Fano* ; il est représenté dans la figure 6.2.

Le *triplet de Steiner affine d'ordre  $n$* , noté  $\text{AG}(n, 2)$  est la paire  $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$  avec  $\mathcal{P} := \mathbb{Z}_3^n \setminus \{0\}$  et  $(x, y, z) \in \mathcal{B}$  si, et seulement si,  $x + y + z = 0$  dans  $\mathbb{Z}_3^n$ .

Soit  $\mathcal{S}$  un triplet de Steiner. Une  $\mathcal{S}$ -coloration d'un graphe cubique  $G = (V, E)$  est une application  $\Phi : E \rightarrow \mathcal{P}$  telle que pour tout sommet  $v$ , en notant  $e_1, e_2$  et  $e_3$  les trois arêtes incidentes à  $v$  dans  $G$ ,  $\{\Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3)\} \in \mathcal{B}$ .

Cette coloration, introduite dans [HŠ04], est une généralisation naturelle de la 3-arête-coloration classique des graphes cubiques. En effet, dans une 3-arête-coloration des graphes cubiques, une remarque simple est que les couleurs attribuées à deux arêtes incidentes à un sommet  $v$  forcent la couleur de la troisième arête incidente à  $v$ .

Comme nous le verrons plus tard, l'arête-coloration abélienne des graphes cubiques est liée à l'arête-coloration par des triplets de Steiner. Holroyd et Škoviera ont prouvé les résultats suivants [HŠ04].

**Théorème 47** (Holroyd et Škoviera [HŠ04]). *Soit  $\mathcal{S}$  un triplet de Steiner projectif. Un graphe cubique est  $\mathcal{S}$ -colorable si, et seulement si, il est sans pont.*

**Théorème 48** (Holroyd et Škoviera [HŠ04]). *Tout graphe cubique sans pont possède une  $\mathcal{S}$ -coloration pour tout triplet de Steiner non trivial  $\mathcal{S}$ .*



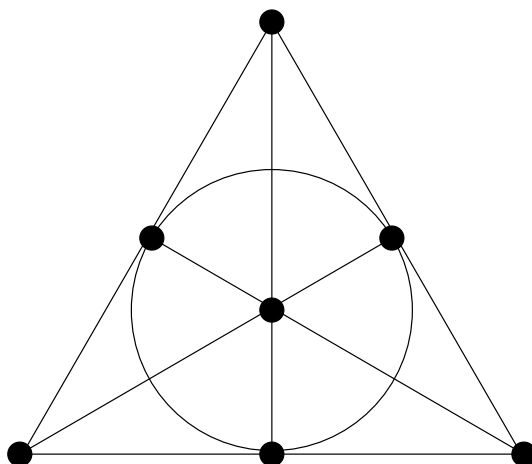


FIG. 6.2. Le plus petit triplet de Steiner non trivial : le plan de Fano  $PG(2, 2)$ .

La situation générale pour les graphes cubiques semble plus complexe. Le lecteur est invité à se reporter à [HŠ04] pour plus de détails. En particulier, une obstruction structurelle à une coloration par un triplet de Steiner affine d'un graphe cubique est présentée, et il est conjecturé que c'est la seule.

Une conséquence du théorème 47 est que tout graphe sans pont admet une coloration par les droites du plan de Fano, le plus petit triplet de Steiner non trivial. Plus généralement, tout triplet de Steiner peut être vu comme une configuration : une *configuration*  $\mathcal{C}$  est constituée de points et de droites. Toute droite de  $\mathcal{C}$  passe par exactement trois points formant un bloc du triplet de Steiner, et toute paire de points appartient donc à au plus une droite. Une  $\mathcal{C}$ -arête-coloration d'un graphe  $G$  est une application associant à chaque arête de  $G$  un point de  $\mathcal{C}$ , de sorte que les points associés à des arêtes incidentes à un même sommet soient sur une même droite de  $\mathcal{C}$ .

Notons  $F_7$  la configuration du plan de Fano (figure 6.2). Pour  $k \in \{4, 5, 6\}$ , soit  $F_k$  l'unique sous-configuration (à isomorphisme près) de  $F_7$  comportant exactement  $k$  droites de sorte que chaque point de  $F_7$  appartienne à au moins une droite de  $F_k$ . Notons que si  $F$  est une sous-configuration de  $F_7$  obtenue en supprimant trois droites contenant un même point, alors un graphe cubique  $G$  possède une  $F$ -arête-coloration si, et seulement si, il est 3-arête-colorable.

Le théorème 48 peut être reformulé de la façon suivante : tout graphe cubique sans pont est  $F_7$ -arête-colorable. En réalité le résultat suivant, plus fort, a été prouvé par Máčajová et Škovič [MŠ05].

**Théorème 49** (Máčajová et Škovič [MŠ05]). *Tout graphe cubique sans pont admet une  $F_6$ -arête-coloration.*

Il est naturel de se demander ce qu'il en est pour  $F_4$  et  $F_5$ .

**Conjecture 8** (Máčajová et Škovič [MŠ05]). *Tout graphe cubique sans pont est  $F_4$ -arête-colorable.*

**Conjecture 9** (Máčajová et Škovič [MŠ05]). *Tout graphe cubique sans pont est  $F_5$ -arête-colorable.*

Comme prouvé dans [MŠ05], la conjecture 8 est équivalente à la conjecture suivante, de Fan et Raspaud [FR94].

**Conjecture 10** (Fan et Raspaud [FR94]). *Tout graphe cubique sans pont contient trois 1-facteurs dont l'intersection est vide.*

Toutes ces conjectures sont impliquées par la conjecture de Berge et Fulkerson [Ful71, Sey79].

**Conjecture 11** (Berge et Fulkerson [Ful71, Sey79]). *Tout graphe cubique sans pont contient six 1-facteurs tels que chaque arête appartienne à exactement 2 d'entre-eux.*

Les conjectures 11, 8 et 9 forment une suite de conjectures dans laquelle chaque conjecture est impliquée par la précédente. Elles permettent ainsi d'établir une échelle de difficulté pour différents problèmes ouverts concernant les graphes cubiques. Nous montrerons en particulier que l'existence de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration est équivalente à l'existence d'une  $F_5$ -arête-coloration.

### 6.1.2. Résultats

Dans cette sous-section sont regroupés les résultats que nous allons établir.

**Théorème 50.** *Soit  $A$  un groupe abélien d'ordre au moins 12, ou  $\mathbb{Z}_2^3$ . Tout graphe cubique sans pont est  $A$ -arête-colorable.*

**Théorème 51.** *Soit  $A$  l'un des groupes abéliens suivants :  $\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8$ . Un graphe cubique sans pont admet une  $A$ -arête-coloration si, et seulement si, il est 3-arête-colorable.*

Ces deux théorèmes couvrent tous les groupes abéliens finis sauf  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3^2, \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  et  $\mathbb{Z}_{11}$ . Il n'est pas difficile de voir qu'aucun graphe cubique n'est  $A$ -arête-colorable si  $A \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$ . Pour chacun des quatre groupes restants, la conjecture suivante est proposée.

**Conjecture 12.** *Tout graphe cubique sans pont possède une  $A$ -arête-coloration si  $A \in \{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3^2, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{11}\}$ .*

Cette conjecture est constituée de quatre assertions indépendantes. Nous montrerons en particulier que l'existence d'une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration est équivalente à l'existence d'une  $F_5$ -arête-coloration, alors que l'existence d'une  $A$ -arête-coloration pour les autres groupes exceptionnels est seulement impliquée par une  $F_5$ -arête-coloration. La figure 6.3 résume les diverses relations établies.

Nous introduisons une nouvelle coloration en considérant la  $\mathbb{Z}$ -arête-coloration.

**Définition 28.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $k$  un entier naturel non nul. Une  $k$ -flot-coloration entière de  $G$  est une application  $c : E \rightarrow \{-k, \dots, k\}$  telle que

- (i)  $\forall e \in E, c(e) \neq 0$ ;
- (ii) deux arêtes incidentes à un même sommet n'ont pas la même image par  $c$ ; et
- (iii) la somme des images des arêtes incidentes à un même sommet est nulle dans  $\mathbb{Z}$ .

Nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 52.** *Tout graphe cubique sans pont admet une 7-flot-coloration entière.*

Nous montrerons également que l'existence d'une  $F_4$ -arête-coloration entraîne l'existence d'une 5-flot-coloration entière, et que l'existence d'une  $F_5$ -arête-coloration (qui est équivalente à l'existence d'une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration) entraîne l'existence d'une 6-flot-coloration entière.

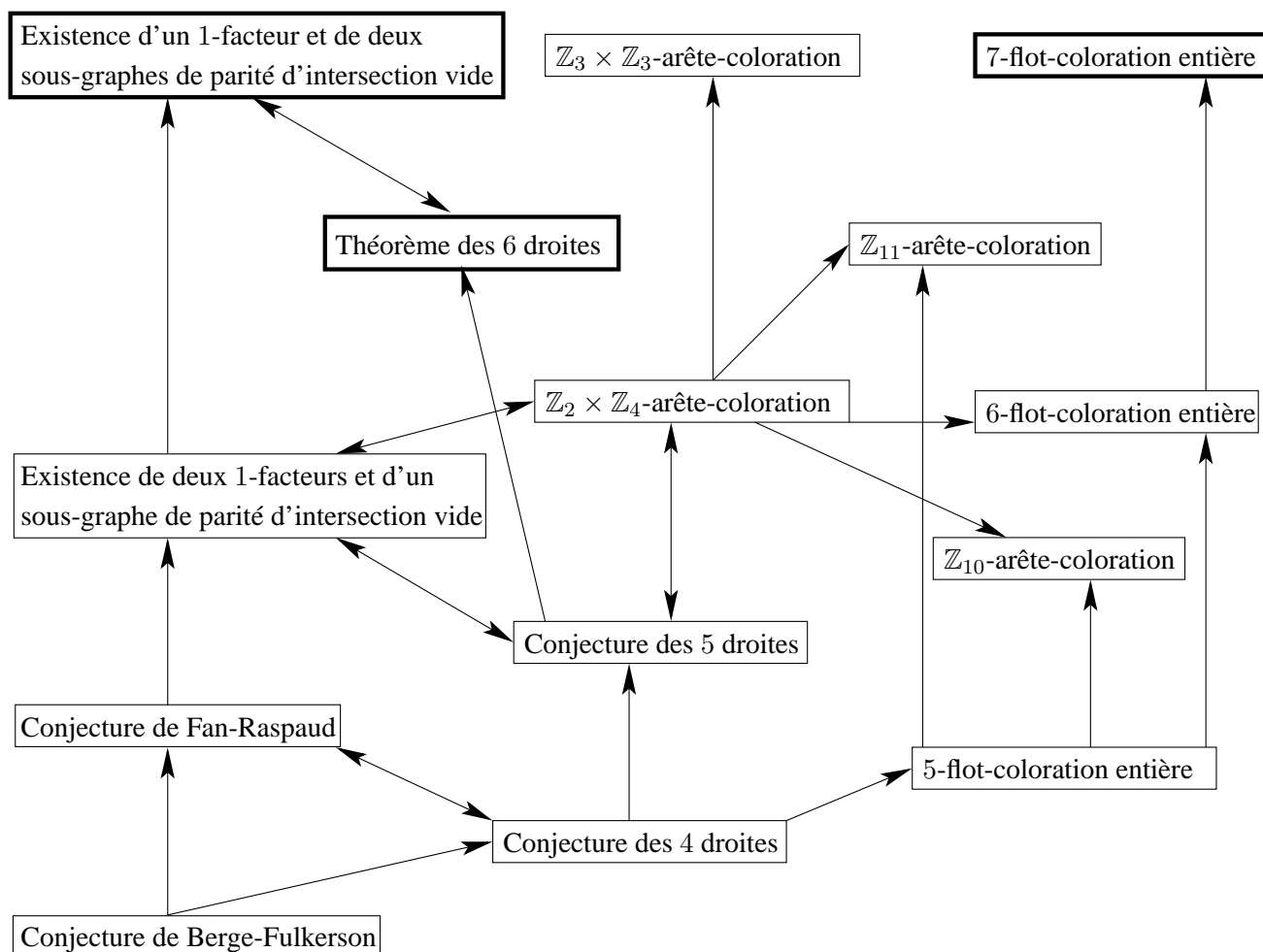


FIG. 6.3. Vue d'ensemble des relations établies entre les diverses conjectures étudiées. Les encadrements en gras indiquent les assertions prouvées.

D'autre part, si un graphe cubique  $G$  admet une 5-flot-coloration entière  $c$ , alors il admet également une  $\mathbb{Z}_{10}$ -arête-coloration et une  $\mathbb{Z}_{11}$ -arête-coloration : soit  $c'(e)$  le reste de  $c(e)$  modulo 10 ou 11. L'obtention d'une  $\mathbb{Z}_{11}$ -arête-coloration est directe par définition de la coloration entière. Pour  $\mathbb{Z}_{10}$ , il faut en outre remarquer qu'un sommet ne peut être incident à une arête colorée 5 et une arête colorée  $-5$  par  $c$ , puisque la somme des couleurs pour ce sommet serait alors égale à la couleur de la dernière arête, donc non nulle.

**Conjecture 13.** *Tout graphe cubique sans pont admet une 5-flot-coloration entière.*

La relation entre cette conjecture et les autres problèmes considérés est donnée par la figure 6.3.

### 6.1.3. Notations

Voici quelques définitions et notations.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $H$  un sous-graphe de  $G$ , le graphe  $G/H$  est obtenu en contractant chaque composante connexe de  $H$  en un seul sommet, puis en supprimant les boucles éventuelles (mais pas les arêtes multiples). Pour tout entier  $k$ , un  $k$ -facteur de  $G$  est un sous-graphe couvrant  $k$ -régulier de  $G$ . En particulier, un 1-facteur est un *couplage parfait*.

Pour tout  $T \subseteq V$ , un  $T$ -joint de  $G$  est un sous-graphe  $G'$  de  $G$  tel que les sommets de degré impair dans  $G'$  soient exactement les sommets de  $T$ . Un graphe  $G$  contient un  $T$ -joint si, et seulement si, chaque composante connexe de  $G$  contient un nombre pair de sommets de  $T$ . Un sous-graphe de parité de  $G$  est un  $T$ -joint de  $G$  avec  $T$  l'ensemble des sommets de degré impair de  $G$ . En d'autres termes, un sous-graphe de parité de  $G$  est un sous-graphe couvrant  $G'$  de  $G$  tel que la parité du degré de tout sommet soit la même dans  $G$  et dans  $G'$ .

À tout groupe abélien fini  $G$  est associée une configuration  $\mathcal{C}(A)$  dont les points sont les éléments non nuls de  $A$ , et dont les droites sont formées par les triplets  $(\alpha, \beta, \gamma) \in A^3$  tels que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  dans  $A$ . Un graphe cubique admet une  $A$ -arête-coloration si, et seulement si, il admet une  $\mathcal{C}(A)$ -arête-coloration.

Un homomorphisme  $\varphi$  d'une configuration  $\mathcal{C}_1$  vers une configuration  $\mathcal{C}_2$  est une application associant à chaque point de  $\mathcal{C}_1$  un point de  $\mathcal{C}_2$  tel que dès que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est une droite de  $\mathcal{C}_1$  ( $\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma)$ ) est une droite de  $\mathcal{C}_2$ . Si  $\mathcal{C}_1$  est homomorphique à  $\mathcal{C}_2$ , c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme de  $\mathcal{C}_1$  vers  $\mathcal{C}_2$ , alors tout graphe cubique admettant une  $\mathcal{C}_1$ -arête-coloration admet une  $\mathcal{C}_2$ -arête-coloration.

## 6.2. Lemme de l'arc-en-ciel

Le lemme de l'arc-en-ciel, que nous allons établir dans cette section, relie l'existence d'une  $F_6$ -arête-coloration à celle de certains 1-facteurs et sous-graphes de parité pour les graphes cubiques.

Commençons par citer un lemme auxiliaire à propos de l'existence de 1-facteurs évitant les coupes composées de trois arêtes, c'est-à-dire ne contenant pas trois arêtes dont la suppression déconnecte le graphe.

**Définition 29.** *Un arête-séparateur d'un graphe  $G$  est un ensemble d'arêtes de  $G$  dont la suppression déconnecte  $G$ .*

Le lemme suivant peut être vu comme une conséquence de la description du polytope des couplages parfaits des graphes cubiques (voir [KKN05]). Il est également possible de prouver ce résultat par récurrence sur l'ordre du graphe.

**Lemme 35.** *Soit  $G$  un graphe cubique sans pont et soit  $e$  une arête de  $G$ .  $G$  contient un 1-facteur  $\mathcal{M}$  tel que*

- (i)  $e \in \mathcal{M}$ ; et
- (ii)  $\mathcal{M}$  ne contient pas d'arête-séparateur de taille 3, c'est-à-dire que la suppression de trois arêtes quelconques appartenant à  $\mathcal{M}$  ne déconnecte pas  $G$ .

Le lemme suivant sera utile afin de prouver le lemme de l'arc-en-ciel.

**Lemme 36.** *Soit  $G$  un graphe ne contenant pas d'arête-séparateur (minimal par inclusion) de taille un ou trois. Alors  $G$  admet un 4-flot partout non nul.*

**Démonstration.** Par récurrence sur l'ordre de  $G = (V, E)$ . Puisque tout graphe 4-connexe admet un 4-flot partout non nul [Jae75, Jae79],  $G$  possède un arête-séparateur de taille 2, disons  $S := \{e, f\}$ . Soient  $V_1$  et  $V_2$  les ensembles de sommets des deux composantes connexes de  $G[E \setminus \{e, f\}]$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , notons  $G_i$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant  $V_i$  en un seul sommet, puis en remplaçant le sommet de degré 2 ainsi créé par une arête notée  $e_i$ . Puisque  $G$  ne possède pas d'arête-séparateur minimal de taille 1 ou 3, il en est de même pour  $G_1$  et  $G_2$ . Ainsi, d'après l'hypothèse d'induction,  $G_1$  et  $G_2$  admettent un 4-flot partout non

nul, donc un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot (partout non nul), noté  $f_i$ . De plus, quitte à utiliser un automorphisme approprié de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , supposons que  $f_1(e_1) = f_2(e_2)$ . Un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot  $f$  de  $G$  s'obtient alors en posant pour toute arête  $a$  de  $G_i$  différente de  $e$  et  $f$ ,  $f(a) := f_i(a)$ , et  $f(e) := f(f) := f_1(e_1)$ . Le graphe  $G$  admet donc un 4-flot partout non nul.  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de prouver le lemme de l'arc-en-ciel, ainsi nommé car sa première assertion est que tout graphe cubique sans pont possède un 2-facteur  $F$  avec la propriété suivante : les arêtes n'appartenant pas à  $F$  peuvent être colorées par 3 couleurs de sorte que, pour tout cycle  $C$  de  $F$  et pour toute couleur  $c$ , la parité du nombre d'arêtes de couleur  $c$  incidentes à  $C$  soit celle de  $C$ .

**Lemme 37** (lemme de l'arc-en-ciel). *Soit  $G$  un graphe cubique sans pont. Les assertions suivantes sont vraies et équivalentes.*

- (i)  *$G$  possède un 2-facteur  $F$  tel que les arêtes n'appartenant pas à  $F$  puissent être colorées avec les couleurs rouge, vert et bleu, de manière à ce que, pour chaque cycle  $C$  de  $F$ , et pour chaque couleur  $c$ , la parité du nombre d'arêtes colorées  $c$  incidentes à  $C$  soit celle de  $C$ .*
- (ii)  *$G$  possède un 2-facteur  $F$  tel que les arêtes n'appartenant pas à  $F$  puissent être colorées avec les couleurs rouge, vert et bleu, de manière à ce que, pour chaque cycle  $C$  de  $F$ , et pour chaque couleur  $c$ , la parité du nombre d'arêtes colorées  $c$  incidentes à  $C$  soit celle de  $C$ . De plus, les arêtes colorées peuvent l'être de sorte que les arêtes rouges et les arêtes vertes induisent des sous-graphes de parité acycliques de  $G/F$ .*
- (iii)  *$G$  possède un 2-facteur  $F$  tel que  $G/F$  ait un 4-flot partout non nul.*
- (iv)  *$G$  possède un 1-facteur et deux sous-graphes de parité dont l'intersection est vide.*
- (v)  *$G$  est  $F_6$ -arête-colorable, c'est-à-dire qu'il admet une arête-coloration utilisant au plus 6 droites du plan de Fano.*

L'assertion (v) a déjà été prouvée (théorème 2 de [MŠ05]).

**Démonstration.** Commençons par établir l'une des assertions, puis prouvons ensuite que toute les assertions sont équivalentes. Comme signalé, l'assertion (v) est déjà prouvée. Par soucis de complétude, nous donnons tout de même une preuve rapide de l'assertion (iii).

D'après le lemme 35,  $G = (V, E)$  admet un 1-facteur qui ne contient pas d'arête-séparateur de taille 3. Soit  $F$  le 2-facteur de  $G$  obtenu en complétant ce 1-facteur dans  $E$ . Alors  $G/F$  ne possède pas d'arête-séparateur minimal de taille un ou trois. Donc, d'après le lemme 36,  $G/F$  admet un 4-flot partout non nul.

Montrons à présent que les cinq assertions du lemme sont équivalentes. L'assertion (iii) affirme que  $G/F$  admet ce qui est appelé une *3-arête-coloration de parité* dans [God88] c'est-à-dire une coloration des arêtes telle que la parité du nombre d'arête de chaque couleur incidente à tout sommet  $v$  soit celle du degré de  $v$ . Or il est prouvé dans [God88] que l'existence d'une telle coloration est équivalente à celle d'un 4-flot partout non nul. Ceci prouve l'équivalence des assertions (i) et (iii).

L'assertion (ii) entraîne l'assertion (i). Pour l'implication opposée, supposons que les arêtes de  $G/F$  soient 3-colorées comme dans l'assertion (i). Si le sous-graphe induit par les arêtes rouges contient un cycle, toutes les arêtes du cycle sont recolorées en bleu. Comme tout sommet de  $G/F$  est incident à un nombre pair d'arêtes du cycle, cela ne change pas la validité de l'arête-coloration. Il suffit de continuer ainsi jusqu'à ce que les arêtes rouges induisent une forêt. La même procédure pour les arêtes vertes fournit une arête-coloration comme dans l'assertion (ii).

Montrons que les assertions **(iv)** et **(v)** sont équivalentes. Supposons que  $c$  soit une  $F_6$ -arête-coloration de  $G$  (voir figure 6.4). Posons

$$\begin{aligned} M &:= \{e \in E : c(e) = 0yz, (y, z) \in \{0, 1\}^2\}, \\ P_1 &:= \{e \in E : c(e) = x0z, (x, z) \in \{0, 1\}^2\} \text{ et} \\ P_2 &:= \{e \in E : c(e) = xy0, (x, y) \in \{0, 1\}^2\}. \end{aligned}$$

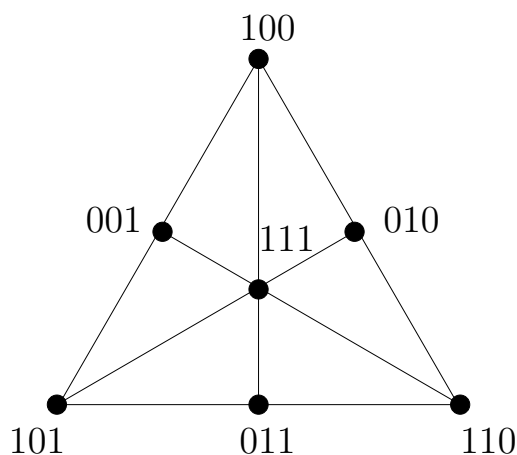


FIG. 6.4. La configuration  $F_6$ .

Il n'est pas difficile de vérifier que  $M$  est un 1-facteur de  $G$ , et que  $P_1$  et  $P_2$  sont des sous-graphes de parité de  $G$ . Clairement,  $M \cap P_1 \cap P_2 = \emptyset$ . Pour établir l'implication opposée, supposons que  $G$  contienne un 1-facteur  $M$  et deux sous-graphes de parité  $P_1$  et  $P_2$  dont l'intersection est vide. Associons à toute arête  $e \in E$  le point  $xyz$  avec  $x = 0$  si, et seulement si,  $e \in M$ ;  $y = 0$  si, et seulement si,  $e \in P_1$  et  $z = 0$  si, et seulement si,  $e \in P_2$ . La coloration obtenue est une  $F_6$ -arête-coloration de  $G$  (voir figure 6.4).

Il reste à prouver l'équivalence de l'assertion **(iv)** avec les assertions **(i)** à **(iii)**. Supposons que  $G$  contienne un 1-facteur  $M$  et deux sous-graphes de parité  $P_1$  et  $P_2$  tels que  $M \cap P_1 \cap P_2 = \emptyset$ . Soit  $F$  le 2-facteur constitué des arêtes n'appartenant pas à  $M$ . Colorons les arêtes n'appartenant pas à  $F$ , c'est-à-dire les arêtes de  $M$ , de la façon suivante : les arêtes de  $P_1$  sont colorées en rouge, celles de  $P_2$  en vert, et celles n'appartenant ni à  $P_1$  ni à  $P_2$  en bleu (cette coloration est bien définie et colore bien toutes les arêtes de  $M$  puisque  $M \cap P_1 \cap P_2 = \emptyset$ ). Soit  $C$  un cycle de  $F$ . Comme  $P_i$  est un sous-graphe de parité de  $G$ , la parité du nombre d'arêtes de  $P_i$  quittant un cycle de  $F$  est celle du cycle, pour  $i \in \{1, 2\}$ . Donc les arêtes colorées rouges et les arêtes vertes satisfont la condition de **(i)**. Le nombre d'arêtes bleues incidentes à un cycle  $C$  de  $F$  est égal au nombre d'arêtes colorées incidentes à  $C$  moins le nombre d'arêtes rouges ou vertes incidentes à  $C$ . D'après l'observation précédente, ce dernier nombre est pair, donc les arêtes bleues satisfont également la condition de **(i)**. Terminons la démonstration en prouvant que **(iii)** implique **(iv)**. Soit  $f$  un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot partout non nul de  $G/F$ . Étendons  $f$  en un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot de  $G$  (non nécessairement non nul), de sorte que les arêtes dont le flot est nul appartiennent toutes à  $F$ . Ceci est toujours possible : soit  $C := v_1v_2 \dots v_k$  un cycle de  $F$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , notons  $f_i$  la valeur du flot sur l'arête incidente à  $v_i$  et n'appartenant pas

à  $C$ . Posons, pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$f(v_i v_{i+1}) := \sum_{j=1}^i f_j.$$

Alors,  $\forall i \in \{2, 3, \dots, k\}$ , le flot en  $v_i$  vaut  $f(v_{i-1} v_i) + f_i + f(v_i v_{i+1}) = 2 \sum_{j=1}^i f_j = 0$ . De plus,

le flot en  $v_1$  vaut  $\sum_{j=1}^k f_j + 2f_1 = \sum_{j=1}^k f_j = 0$  car  $f$  est un flot de  $G/F$ . Soit alors  $M$  le 1-facteur

complémentaire de  $F$ , et posons pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $P_i := \{e \in E : \pi_i(f(e)) = 0\}$  en notant  $\pi_i$  la projection suivant la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée.  $P_1$  et  $P_2$  sont clairement des sous-graphes de parité. De plus, comme pour toute arête  $e \in E$ ,  $f(e) \neq (0, 0)$ , l'intersection des sous-graphes  $M$ ,  $P_1$  et  $P_2$  est vide.  $\square$

Il est prouvé dans [HŠ04] que tout graphe cubique sans pont 4-arête-connexe est  $D_9$ -arête-colorable, où  $D_9$  est la configuration formée de six droites et neuf points illustrée figure 6.5. Le lemme de l'arc-en-ciel permet d'étendre ce résultat à tous les graphes cubiques sans pont, en suivant la preuve de [HŠ04].

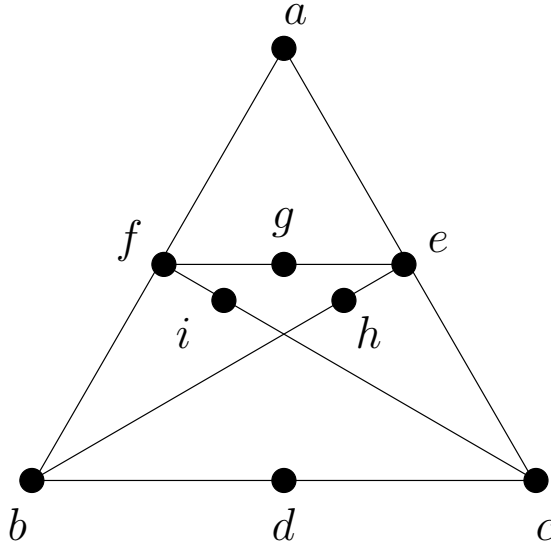


FIG. 6.5. La configuration  $D_9$ .

**Lemme 38.** *Tout graphe cubique sans pont est  $D_9$ -arête-colorable.*

**Démonstration.** Soient  $F$  un 2-facteur de  $G = (V, E)$  et  $c$  une arête-coloration de  $G/F$  comme dans l'assertion (ii) du lemme de l'arc-en-ciel. Définissons deux applications  $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{Z}_3$  de la manière suivante : l'image par  $\varphi_1$  des arêtes vertes et bleues de  $G$  est zéro, et l'image des autres arêtes est 1 ou 2 de sorte que la somme des images des arêtes incidentes à tout sommet soit nulle dans  $\mathbb{Z}_3$ . Ceci est toujours possible car les arêtes rouges induisent une forêt dans  $G/F$ , et le nombre d'arêtes bleues ou vertes incidentes à tout cycle de  $F$  est pair. L'application  $\varphi_2$  est définie de façon similaire, en assignant zéro aux arêtes rouges et bleues.

Soit  $\varphi(e) := (\varphi_1(e), \varphi_2(e))$ . Les triplets de couleurs éventuellement assignés par  $\varphi$  aux arêtes incidentes à un même sommet  $v$  sont les suivants :

$$\begin{aligned} &\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\} && \text{ou} \\ &\{(2, 0), (2, 1), (2, 2)\} && \text{si } v \text{ est incident à une arête rouge,} \\ &\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\} && \text{ou} \\ &\{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\} && \text{si } v \text{ est incident à une arête verte,} \\ &\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} && \text{ou} \\ &\{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Définissons, grâce à  $\varphi$ , une coloration  $\sigma$  des arêtes de  $G$  par les points de  $D_9$  :

$$\sigma(e) = \begin{cases} a & \text{si } \varphi(e) = (0, 0), \\ b & \text{si } \varphi(e) = (1, 1), \\ c & \text{si } \varphi(e) = (1, 2), \\ d & \text{si } \varphi(e) = (1, 0), \\ e & \text{si } \varphi(e) = (2, 1), \\ f & \text{si } \varphi(e) = (2, 2), \\ g & \text{si } \varphi(e) = (2, 0), \\ h & \text{si } \varphi(e) = (0, 1), \text{ et} \\ i & \text{si } \varphi(e) = (0, 2). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que  $\sigma$  est une  $D_9$ -arête-coloration de  $G$ . □

### 6.3. Arête-coloration abélienne

Dans cette section sont établis les théorèmes 50 et 51.

**Démonstration du théorème 50.** En vertu du théorème de décomposition des groupes abéliens finis, le groupe  $A$  s'écrit  $\mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{k_\ell}$  avec,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, \ell - 1\}$ ,  $k_i | k_{i+1}$ . Si  $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ , considérons un  $\mathbb{Z}_2^3$ -flot partout non nul  $f$  de  $G$  (rappelons que tout graphe sans pont admet un  $\mathbb{Z}_2^3$ -flot partout non nul [Jae75]). Donnons à chaque arête une couleur de  $A$  telle que les trois premières coordonnées coïncident avec  $f$  et que les autres soient nulles. La coloration ainsi définie est une  $A$ -arête-coloration de  $G$ .

Pour les cas restants, nous montrons que la configuration  $D_9$  est homomorphe à  $\mathcal{C}(A)$ . Ceci prouve le résultat souhaité en vertu du lemme 38.

Si  $\ell \in \{1, 2\}$ , un homomorphisme est donné par la table 6.1 (voir aussi la figure 6.6). Supposons à présent que  $\ell = 3$  et  $k_3 > 2$ . Si  $k_2 k_3 \geq 12$ , alors il existe un homomorphisme de  $D_9$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ , qui s'étend en un homomorphisme de  $D_9$  vers  $A$  en assignant 0 à la première coordonnée. Si  $k_2 k_3 < 12$ , alors les deux groupes possibles sont  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  et  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  pour lesquels un homomorphisme est donné par la table 6.1.

Il reste à considérer le cas où  $\ell > 3$  (et  $k_3 > 2$ ). Dans ce cas, il existe un homomorphisme de  $D_9$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \mathbb{Z}_{k_3})$ . Cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme de  $D_9$  vers  $A$  en annulant les  $\ell - 3$  dernières coordonnées. □



Points de $D_9$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$\mathbb{Z}_n$									
$n = 12$ ou $n \geq 15$	1	$n - 3$	4	$n - 1$	$n - 5$	2	3	8	$n - 6$
$n \in \{13, 14\}$	1	$n - 3$	5	$n - 2$	$n - 6$	2	4	9	$n - 7$
$\mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2}$									
$k_1 = 2$ et $k_2 = 6$ ou $k_2 \geq 10$ ou $k_1 \geq 3$ et $k_2 \geq 6$	(0, 1)	(0, $k_2 - 3$ )	(1, 1)	( $k_1 - 1, 2$ )	( $k_1 - 1, k_2 - 2$ )	(0, 2)	(1, 0)	(1, 5)	( $k_1 - 1, k_2 - 3$ )
$k_1 = 2$ et $k_2 = 8$	(0, 1)	(1, 7)	(1, 2)	(0, 7)	(1, 5)	(1, 0)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 6)
$k_1 = k_2 = 4$	(0, 2)	(3, 2)	(1, 3)	(0, 3)	(3, 3)	(1, 0)	(0, 1)	(2, 3)	(2, 1)
$k_1 = k_2 = 5$	(0, 1)	(4, 4)	(1, 2)	(0, 4)	(4, 2)	(1, 0)	(0, 3)	(2, 4)	(3, 3)
$\mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \mathbb{Z}_{k_3}$									
$k_1 = k_2 = 2$ et $k_3 = 4$	(0, 1, 0)	(0, 1, 3)	(1, 1, 2)	(1, 0, 3)	(1, 0, 2)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(1, 1, 3)	(1, 1, 1)
$k_1 = k_2 = k_3 = 3$	(0, 0, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(0, 1, 1)	(1, 2, 1)	(2, 2, 1)	(0, 2, 1)	(1, 0, 1)	(2, 0, 1)

TAB. 6.1. Homomorphismes de la configuration  $D_9$  vers certains groupes abéliens finis.

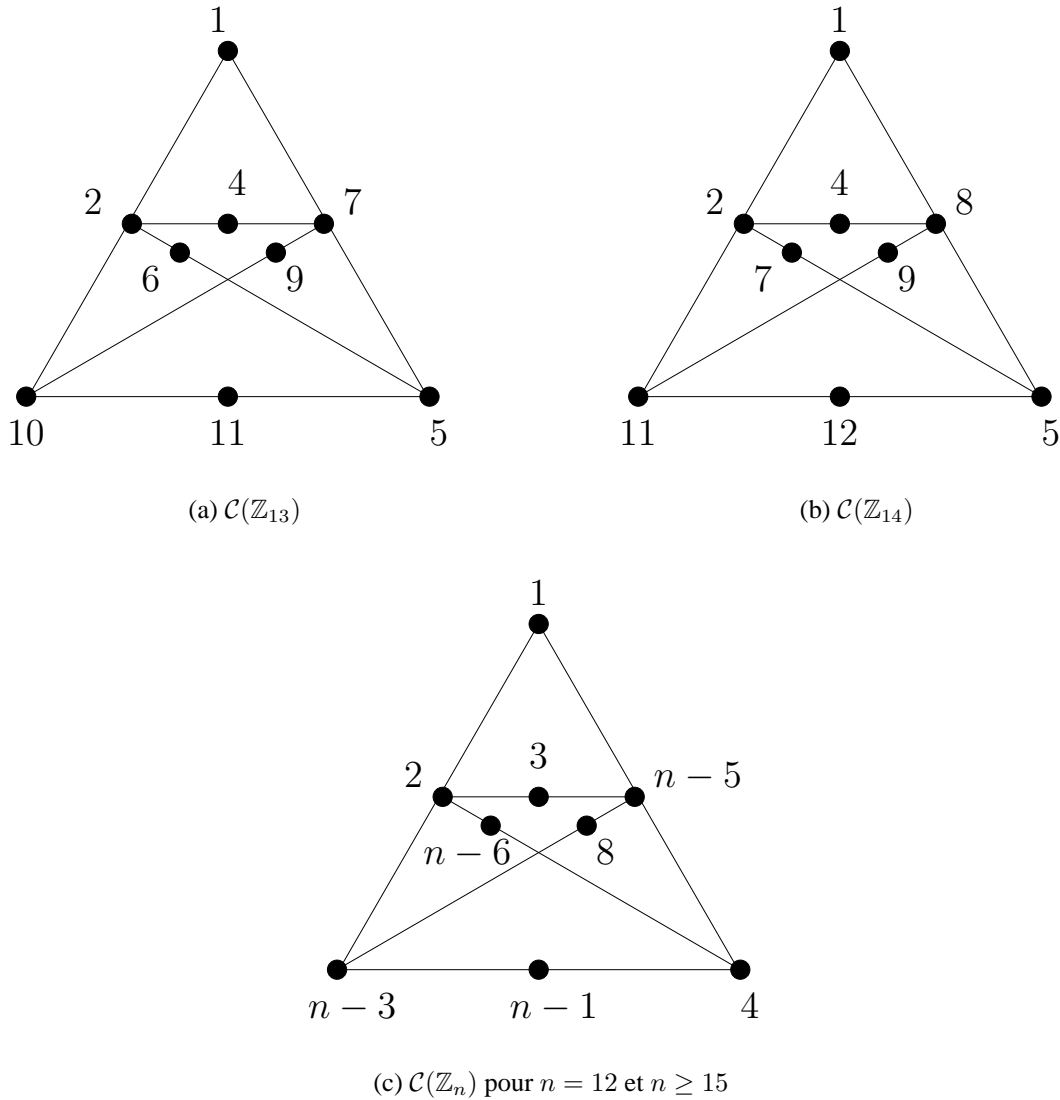


FIG. 6.6. Homomorphismes de la configuration  $D_9$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_n)$  pour  $n \geq 12$ .

**Démonstration du théorème 51.** Le résultat est trivial si  $A = \mathbb{Z}_2^2$  puisque dans ce cas  $\mathcal{C}(A)$  comporte exactement une droite. Dans les trois cas restants, un homomorphisme de  $\mathcal{C}(A)$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2^2)$  est donné par la table 6.2. D'autre part, puisque  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2^2)$  ne comporte qu'une droite, il existe clairement un homomorphisme de  $\mathbb{Z}_k$  vers  $\mathbb{Z}_2^2$  pour  $k \in \{6, 7, 8\}$ .

Groupe	Éléments de $\mathbb{Z}_2^2$		
	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
$\mathbb{Z}_6$	1, 4	2, 5	3
$\mathbb{Z}_7$	1, 3	2, 5	4, 6
$\mathbb{Z}_8$	1, 7	2, 4, 6	3, 5

**TAB. 6.2.** Homomorphismes de  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2^2)$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_k)$  pour  $k \in \{6, 7, 8\}$ . Chaque cellule indique les pré-images des éléments de  $\mathbb{Z}_2^2$  de la colonne correspondante.

□

## 6.4. Arête-coloration abélienne pour les groupes exceptionnels

### 6.4.1. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration

Nous établissons dans cette sous-section que l'existence d'une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration est équivalente à l'existence de deux 1-facteurs et un sous-graphe de parité dont l'intersection est vide. Commençons avec une définition.

**Définition 30.** Soient  $G$  un graphe et  $S$  un arête-séparateur de  $G$ . L'ensemble  $S$  est une *coupe impaire* si, et seulement si, il existe au moins une composante de  $G - S$  d'ordre impair.

**Lemme 39.** Soit  $G$  un graphe cubique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le graphe  $G$  contient deux 1-facteurs et un sous-graphe de parité dont l'intersection est vide.
- (ii) Le graphe  $G$  contient deux 1-facteurs  $M_1$  et  $M_2$  tels que  $M_1 \cap M_2$  ne contienne pas de coupe impaire.
- (iii) Le graphe  $G$  contient un 1-facteur  $M$ , un 2-facteur  $F$  et un couplage  $M'$  tels que  $M'$  et  $M \cup F$  soient disjoints, et tels que la parité du nombre d'arêtes de  $M'$  incidentes à tout cycle  $C$  de  $F$  soit celle de  $C$  (en d'autres termes, les arêtes de  $M'$  induisent un sous-graphe de parité de  $G/F$ ). De plus, les arêtes de  $M'$  peuvent être choisies de sorte à ce qu'elles induisent une forêt dans  $G/F$ .

**Démonstration.** Prouvons d'abord que (i) et (ii) sont équivalents. Supposons que  $G$  contienne deux 1-facteurs  $M_1$  et  $M_2$  et un sous-graphe de parité  $P$  tels que  $M_1 \cap M_2 \cap P = \emptyset$ . Comme  $P$  est un sous-graphe de parité, il intersecte toutes les coupes impaires : soit  $S$  une coupe impaire, et soit  $H$  une composante connexe impaire de  $G - S$ . Si  $P$  n'intersecte pas  $S$ , alors le sous-graphe de  $H$  induit par  $P$  est un graphe d'ordre impair dont le degré de tous les sommets est impair, une contradiction. Comme  $P \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , les deux 1-facteurs  $M_1$  et  $M_2$  ne contiennent aucune coupe impaire. Pour l'implication opposée, notons  $M_1$  et  $M_2$  deux 1-facteurs de  $G$  dont l'intersection ne contient pas de coupe impaire. Alors toute composante connexe de  $G - (M_1 \cap$

$M_2$ ) possède un nombre pair de sommets. Donc le graphe  $G - (M_1 \cap M_2)$  possède un  $T$ -joint pour  $T = V(G)$ . Ce  $T$ -joint est un sous-graphe de parité  $P$  de  $G$  tel que  $P \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

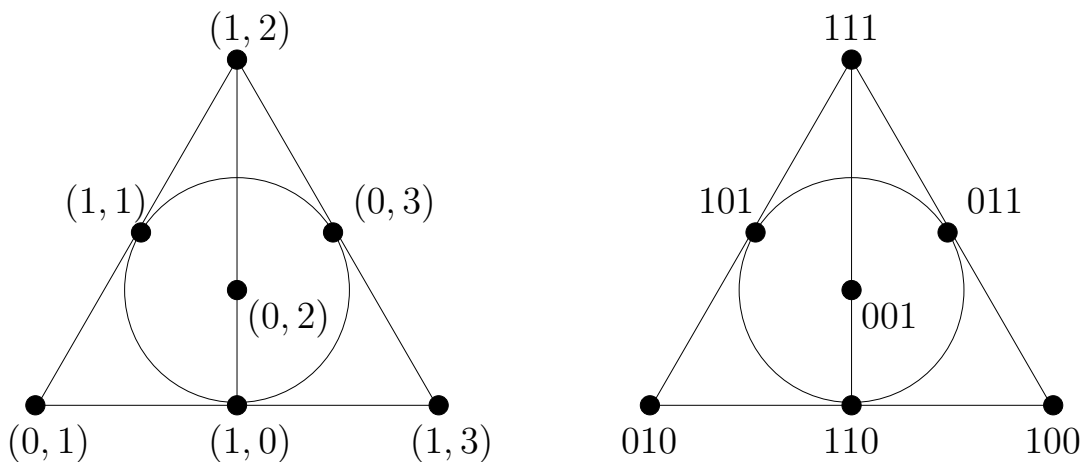
Montrons que (i) implique (iii). Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux 1-facteurs et  $P$  un sous-graphe de parité de  $G$  dont l'intersection est vide. Soit  $M := M_1$  et soit  $F$  le 2-facteur complémentaire de  $M_2$ . Enfin, notons  $M'$  l'ensemble des arêtes de  $M_2$  appartenant à  $P$ . Comme  $P \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ,  $M' \cap (M \cup F) = \emptyset$ . En outre, comme  $P$  est un sous-graphe de parité de  $G$ , la parité du nombre d'arêtes de  $P$  quittant chaque cycle  $C$  de  $F$  est celle de  $C$ . Les arêtes de  $M'$  forment ainsi un sous-graphe de parité de  $G/F$ . Pour que les arêtes de  $M'$  induisent une forêt il suffit, tant que  $M'$  contient un cycle, d'enlever de  $M'$  toutes les arêtes du cycle (ce qui ne change pas le fait que  $M'$  soit un sous-graphe de parité de  $G/F$ ).

Il reste à montrer que (iii) implique (i). Soient  $M, F$  et  $M'$  comme dans (iii). Soit  $M_1 := M$  et soit  $M_2$  le 1-facteur complémentaire de  $F$ . Supposons que  $M_1 \cap M_2$  contienne une coupe impaire  $S$ , et notons  $W$  une composante connexe d'ordre impair de  $G - S$ . Tout cycle de  $F$  est soit contenu dans  $W$ , soit disjoint de  $W$  car  $F \cap M_2 = \emptyset$ . Comme le nombre de sommets de  $W$  est impair, il existe une arête  $e \in M'$  incidente à un sommet de  $W$  et un sommet de  $G - W$ . En effet, supposons le contraire et considérons le sous-graphe  $W'$  de  $W/F$  induit par les arêtes de  $M'$ . Le nombre de cycles impairs de  $F$  dans  $W$  étant impair (car l'ordre de  $W$  l'est), et  $M'$  étant un sous-graphe de parité de  $G/F$ , le graphe  $W'$  possède un nombre impair de sommets de degré impair, une contradiction. Par définition de  $S$ , l'arête  $e$  appartient à  $M' \cap M_1$ , une contradiction. □

**Théorème 53.** Soit  $G$  un graphe cubique sans pont. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le graphe  $G$  admet une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration.
- (ii) Le graphe  $G$  admet une  $F_5$ -arête-coloration.
- (iii) Le graphe  $G$  contient deux 1-facteurs et un sous-graphe de parité dont l'intersection est vide.

**Démonstration.** L'équivalence des deux premières assertions est établie par l'homomorphisme de  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$  vers  $F_5$  donné par la figure 6.7.



**FIG. 6.7.** L'isomorphisme entre  $F_5$  et  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$  est indiqué dans la partie gauche de la figure. La partie droite indique les notations utilisées dans la suite de la preuve du théorème 53.

Montrons que (ii) entraîne (iii). Considérons une  $F_5$ -arête-coloration  $c$  de  $G = (V, E)$ . Une arête  $e \in E$  colorée  $xyz$  (voir la partie droite de la figure 6.7) est ajoutée à  $M_1$  si, et seulement

si,  $x = 0$  ; à  $M_2$  si, et seulement si,  $y = 0$  et à  $P$  si, et seulement si,  $z = 0$ . L'intersection des trois sous-graphes obtenus est vide, et il n'est pas difficile de vérifier que  $M_1$  et  $M_2$  sont des 1-facteurs de  $G$ , alors que  $P$  est un sous-graphe de parité de  $G$ .

Montrons que (iii) entraîne (ii). Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux 1-facteurs de  $G$ , et soit  $P$  un sous-graphe de parité de  $G$  tels que  $M_1 \cap M_2 \cap P = \emptyset$ . Il n'est pas difficile de vérifier qu'une  $F_5$ -arête-coloration de  $G$  est obtenue de la façon suivante : une arête  $e \in E$  est colorée  $xyz$  avec  $x = 0$  si, et seulement si,  $e \in M_1$  ;  $y = 0$  si, et seulement si,  $y \in M_2$  et  $z = 0$  si, et seulement si,  $e \in P$ .  $\square$

Dans les trois sous-sections suivantes, nous prouvons que l'existence d'une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration implique l'existence d'une  $A$ -arête-coloration pour tous les autres groupes exceptionnels  $A$ .

### 6.4.2. $\mathbb{Z}_3^2$ -arête-coloration

**Théorème 54.** *Tout graphe cubique  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-colorable est  $\mathbb{Z}_3^2$ -arête-colorable.*

**Démonstration.** D'après le lemme 39, le graphe  $G$  possède un 1-facteur  $M$ , un 2-facteur  $F$  et un couplage  $M'$  disjoint de  $M \cup F$  et dont les arêtes induisent un sous-graphe acyclique de  $G/F$ .

Soit  $\varphi_1 : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_3$  l'application suivante :

$$\varphi_1(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in M \setminus F, \\ 2 & \text{si } e \notin M \cup F, \\ 1 & \text{si } e \in F \setminus M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que  $\varphi_1(e) = 0$  si, et seulement si,  $e \in M \cap F$ . Une vérification directe certifie que la somme des images par  $\varphi_1$  des arêtes incidentes à un même sommet de  $G$  est nulle dans  $\mathbb{Z}_3$ .

La définition de  $\varphi_2$  est plus complexe. L'image par  $\varphi_2$  des arêtes  $e$  n'appartenant ni à  $F$  ni à  $M'$  est 0. Les images des arêtes restantes sont 1 ou 2, de sorte que la somme des images des arêtes incidentes à un même sommet soit nulle dans  $\mathbb{Z}_3$ . Ceci est toujours possible : commençons par colorer les arêtes de chaque cycle  $C$  de  $F$  par 1 ou 2 de sorte que deux arêtes de  $C$  incidentes à une même arête de  $M'$  soient de la même couleur, et les autres arêtes incidentes de  $C$  soient colorées différemment. Une telle coloration existe toujours car les arêtes de  $M'$  induisent un sous-graphe de parité de  $G/F$ . Il reste à présent à rendre cohérentes ces colorations : soit  $T$  l'un des arbres de  $G/F$  induit par les arêtes de  $M'$ , et soit  $r$  l'un de ses sommets. Le sommet  $r$  de  $G/F$  correspond à un cycle  $C_r$  de  $F$ . Chaque arête  $e \in M'$  incidente à  $C_r$  est colorée de la même couleur que les deux arêtes de  $C_r$  auxquelles elle est incidente. Soit  $C'$  l'autre cycle auquel  $e$  est incidente. Si la couleur des deux arêtes de  $C'$  incidentes à  $e$  est différente de celle de  $e$ , il suffit d'inverser les couleurs 1 et 2 dans  $C'$ . Cette procédure est répétée en suivant un parcours en largeur ou en profondeur de  $T$ . La coloration ainsi obtenue est bien celle souhaitée.

Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$  défini par  $\varphi(e) := (\varphi_1(e), \varphi_2(e))$ . Montrons que  $\varphi$  est une  $\mathbb{Z}_3^2$ -arête-coloration de  $G$ . Tout d'abord, l'image d'une arête par  $\varphi$  n'est pas nulle dans  $\mathbb{Z}_3^2$  car  $\varphi_1(e) = 0 \Rightarrow e \in F$  et  $\varphi_2(e) = 0 \Rightarrow e \notin F$ . La somme des images par  $\varphi$  de trois arêtes incidentes à un même sommet est nulle dans  $\mathbb{Z}_3^2$  par construction de  $\varphi$ . Il reste à montrer que ces images sont différentes. L'application  $\varphi_2$  attribue la même image à des arêtes incidentes à un même sommet  $v$  si, et seulement si,  $v$  est incident à une arête de  $M'$ . Dans ce cas, puisqu'exactly deux des

trois arêtes incidentes à  $v$  appartiennent à  $F$ , exactement une à  $M$  et comme  $M' \cap (M \cup F) = \emptyset$ , les trois arêtes sont respectivement dans  $M'$ ,  $F \setminus M$  et  $F \cap M$ . Les images de ces trois arêtes par  $\varphi_1$  sont donc toutes différentes (respectivement 2, 1 et 0).  $\square$

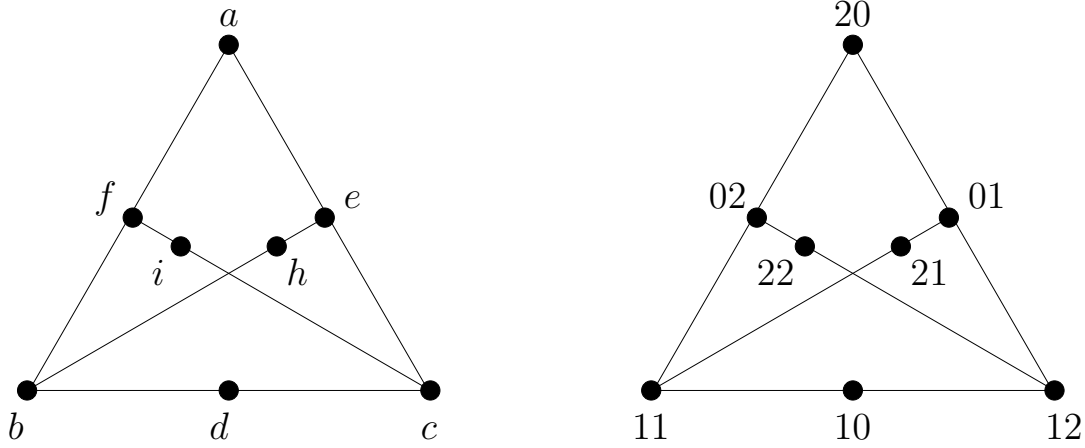


FIG. 6.8. La configuration  $D_8$ .

Soit  $D_8$  la configuration représentée par la figure 6.8 (cette configuration s'obtient à partir de  $D_9$  en supprimant l'une des droites). La preuve précédente permet d'obtenir le corollaire suivant.

**Corollaire 9.** *Un graphe cubique  $G$  est  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-colorable si, et seulement si, il est  $D_8$ -arête-colorable.*

**Démonstration.** Dans la preuve du théorème précédent, il y a exactement cinq triplets d'éléments de  $\mathbb{Z}_3^2$  qui peuvent être assignés aux trois arêtes incidentes à un même sommet :

$$\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}, \{(2, 0), (0, 1), (1, 2)\} \\ \{(2, 1), (0, 1), (1, 1)\} \text{ et } \{(2, 2), (0, 2), (1, 2)\}.$$

Ainsi, la  $\mathbb{Z}_3^2$ -arête-coloration définie dans la preuve du théorème 54 peut être vue comme une  $D_8$ -arête-coloration en nommant les points de  $D_8$  comme dans la partie droite de la figure 6.8.

D'autre part, comme la configuration  $D_8$  est homomorphe à  $F_5$  (il suffit d'identifier les points  $h$  et  $i$ ), le théorème 53 montre que l'existence d'une  $D_8$ -arête-coloration implique celle d'une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration.  $\square$

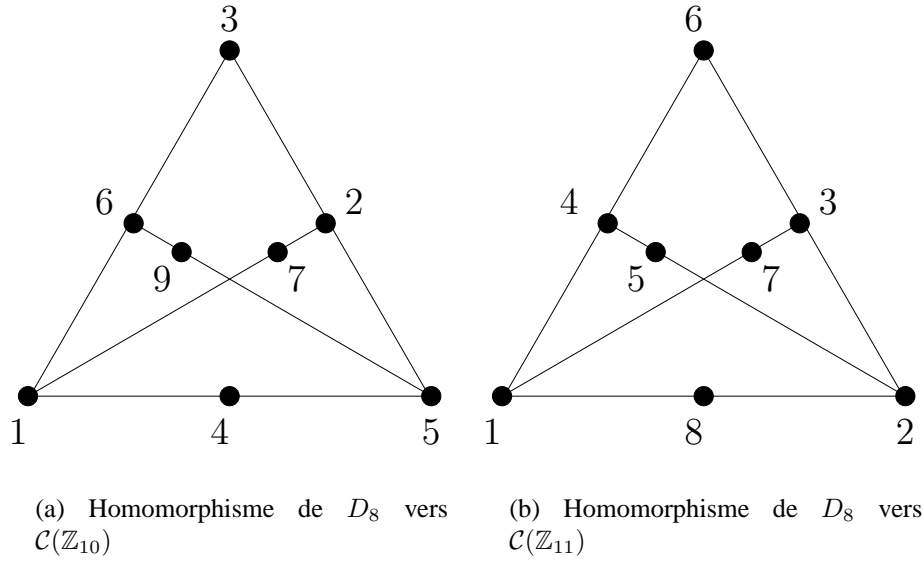
### 6.4.3. $\mathbb{Z}_x$ -arête-coloration pour $x \in \{10, 11\}$

**Théorème 55.** *Tout graphe cubique  $G$  admettant une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration admet une  $\mathbb{Z}_{10}$ -arête-coloration.*

**Démonstration.** La figure 6.9(a) donne un homomorphisme de  $D_8$  vers  $\mathcal{C}(Z_{10})$ . L'existence d'une  $\mathbb{Z}_{10}$ -arête-coloration découle donc du corollaire 9.  $\square$

**Théorème 56.** *Tout graphe cubique  $G$  admettant une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-coloration admet une  $\mathbb{Z}_{11}$ -arête-coloration.*

**Démonstration.** La figure 6.9(b) donne un homomorphisme de  $D_8$  vers  $\mathcal{C}(Z_{11})$ . L'existence d'une  $\mathbb{Z}_{11}$ -arête-coloration découle donc du corollaire 9.  $\square$

FIG. 6.9. Homomorphismes de  $D_8$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{10})$  et  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{11})$ .

## 6.5. Arête-coloration entière

Nous considérons dans cette section l'arête-coloration des graphes cubiques par des entiers.

**Théorème 57.** *Tout graphe cubique sans pont admet une 7-flot-coloration entière.*

**Démonstration.** D'après le lemme 38, tout graphe cubique sans pont admet une  $D_9$ -arête-coloration. Il suffit donc de montrer qu'il est possible d'attribuer aux points de  $D_9$  des entiers non nuls de  $\{-7, \dots, 7\}$  de sorte que les entiers associés aux points de chaque droite soient deux-à-deux distincts et de somme nulle dans  $\mathbb{Z}$ . Une telle association est donnée par la figure 6.10(a).  $\square$

Voyons à présent les relations entre l'existence de  $x$ -flot-coloration entière et les problèmes ouverts précédemment cités, pour  $x \in \{5, 6\}$ .

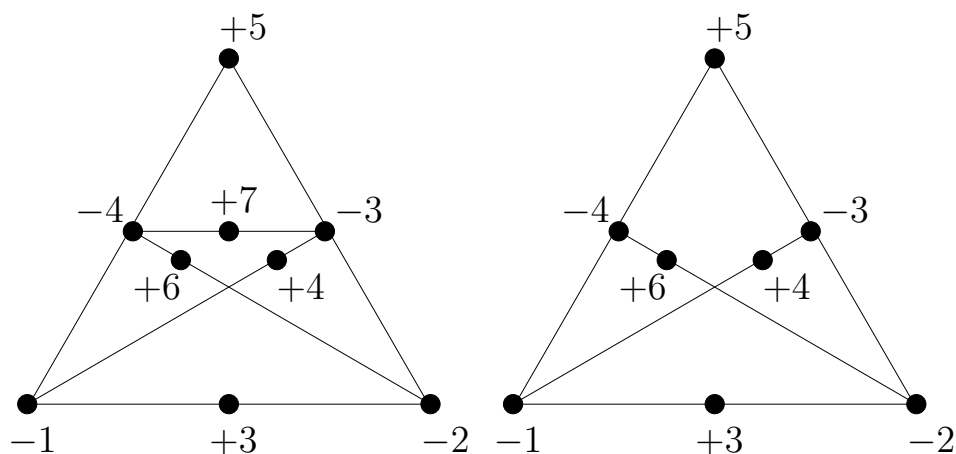
**Théorème 58.** *Tout graphe cubique  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ -arête-colorable admet une 6-flot-coloration entière.*

**Démonstration.** En vertu du corollaire 9, il suffit de montrer l'existence d'une application associant à chaque point de  $D_8$  un entier non nul de  $\{-6, \dots, 6\}$  de sorte que les entiers associés aux points de chaque droite soient deux-à-deux distincts et de somme nulle dans  $\mathbb{Z}$ ; ce qui est fait par la figure 6.10(b).  $\square$

Enfin, nous prouvons que la conjecture 10, de Fan et Raspaud, implique l'existence d'une 5-flot-coloration entière pour les graphes cubiques sans pont.

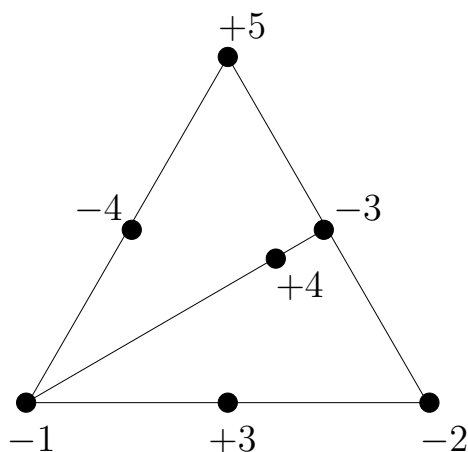
**Théorème 59.** *Tout graphe cubique sans pont possédant trois 1-facteurs dont l'intersection est vide admet une 5-flot-coloration entière.*

**Démonstration.** Soit  $G$  un graphe cubique sans pont possédant trois 1-facteurs dont l'intersection est vide. D'après [HŠ04], le graphe  $G$  admet une  $F_4$ -arête-coloration. La figure 6.10(c) montre comment associer un entier non nul de  $\{-5, \dots, 5\}$  à chaque point de  $F_4$  de sorte que les entiers associés aux points de toute droite de  $F_4$  soient distincts et de somme nulle dans  $\mathbb{Z}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$



(a) Étiquetage des points de  $D_9$  par des entiers non nuls entre  $-7$  et  $7$ .

(b) Étiquetage des points de  $D_8$  par des entiers non nuls entre  $-6$  et  $6$ .



(c) Étiquetage des points de  $F_4$  par des entiers non nuls entre  $-5$  et  $5$ .

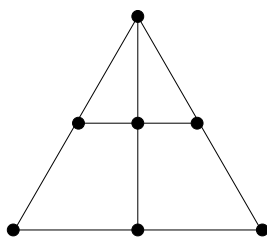
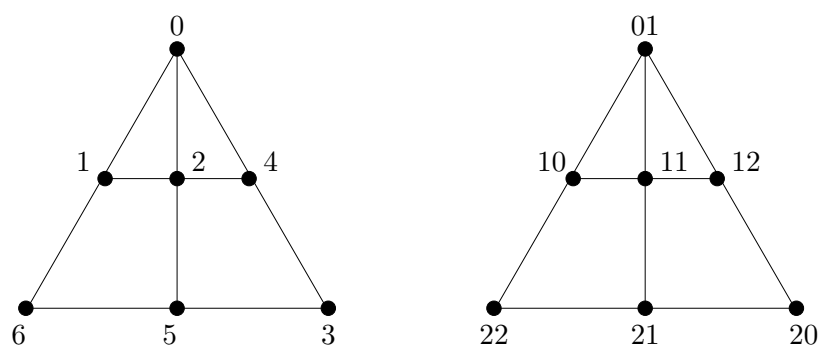
FIG. 6.10. Étiquetage des points des configurations  $D_9$ ,  $D_8$  et  $F_4$  par des entiers non nuls.

## 6.6. Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à plusieurs problèmes d'arête-coloration des graphes cubiques, et avons établi diverses relations entre-eux. Beaucoup de questions intéressantes restent à résoudre, et plutôt que de les récapituler ici, nous allons brièvement analyser une autre sorte d'arête-coloration.

En effet, nous avons principalement parlé de  $A$ -arête-coloration propre des arêtes, et nous avons vu que l'existence d'une  $A$ -arête-coloration impropre (c'est-à-dire dans laquelle deux arêtes incidentes peuvent être colorées de la même couleur) est assez simple à traiter : tout graphe  $G$  possède une  $A$ -arête-coloration impropre pour tout groupe abélien d'ordre au moins cinq. Néanmoins, si la condition stipulant que l'élément nul du groupe ne doit colorer aucune arête est supprimée, la situation devient plus intéressante.

Une  $A$ -arête-coloration étendue d'un graphe cubique  $G$  est une coloration de ses arêtes par des éléments du groupe abélien  $A$  de sorte que les éléments assignés aux arêtes incidentes à un même sommet soient différentes et de somme nulle dans  $A$ . Si  $A$  est un groupe abélien d'ordre au moins 8, tout graphe cubique sans pont admet une  $A$ -arête-coloration étendue. Si  $A$  est l'un des cinq groupes  $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  et  $\mathbb{Z}_2^2$ , alors un graphe cubique admet une  $A$ -arête-coloration étendue si, et seulement si, il est sans pont. Ainsi, le seul cas restant à traiter est celui du groupe  $\mathbb{Z}_7$ . Nous n'avons pu prouver que tout graphe cubique sans pont admet une  $\mathbb{Z}_7$ -arête-coloration étendue. En revanche, tout graphe cubique admettant une  $F_4$ -arête-coloration admet une  $\mathbb{Z}_7$ -arête-coloration étendue. Plus précisément, l'observation suivante est vraie. Soit  $C_0$  la configuration de la figure 6.11. Selon [DMGG96], il existe exactement deux configurations comportant 5 droites et 7 points : les configurations *mia* et *mitre*. La configuration  $C_0$  correspond à la configuration mitre de [DMGG96], et la configuration *mia* à la configuration ici notée  $F_5$ . Tout graphe cubique admet une  $C_0$ -arête-coloration si, et seulement si, il admet une  $\mathbb{Z}_7$ -arête-coloration étendue, comme le montre la partie gauche de la figure 6.12. En outre, l'existence d'une  $C_0$ -arête-coloration implique l'existence d'une  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ -arête-coloration, comme prouvé par la partie droite de la figure 6.12. Notons qu'il est conjecturé dans [MŠ05] que tout graphe cubique sans pont admet une  $C_0$ -arête-coloration.

FIG. 6.11. La configuration  $C_0$ .FIG. 6.12. Un isomorphisme entre  $C_0$  et  $\mathbb{Z}_7$  à gauche, et un homomorphisme de  $C_0$  vers  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$  à droite.





**Troisième partie**

**Largeur arborescente linéaire**



# Reroutage dans les réseaux WDM

Ce chapitre concerne le début de l'étude d'un nouvel invariant pour les graphes, introduit afin de modéliser des problèmes de reroutage dans les réseaux WDM (*Wavelength-Division Multiplexing*). Comme nous allons le voir, cet invariant est très proche de la largeur arborescente linéaire, et c'est son étude qui nous a amenés aux travaux sur la largeur arborescente linéaire présentés dans le chapitre suivant. Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec David Couderc, Quang-Cuong Pham et Stéphane Pérennes, voir [CPPS05] et [CS06].

## 7.1. Introduction

Habituellement, lorsqu'une nouvelle requête (i.e. demande de connexion entre deux terminaux) est ajoutée ou supprimée d'un réseau, comme un réseau WDM par exemple, le routage des autres requêtes n'est pas modifié. C'est pourquoi, après une série d'ajouts et de suppressions de requêtes, il est fort probable que le routage obtenu ne soit pas optimal. En particulier, une nouvelle requête peut être rejetée alors qu'un routage différent des connexions déjà présentes aurait permis de router également cette nouvelle requête. Ainsi, les opérateurs ont intérêt à régulièrement réorganiser le routage des requêtes afin de bien exploiter les ressources à leur disposition. Dans ce chapitre est décrit le début de l'étude du passage d'un routage à un autre, sans perte de service.

Étant donné un réseau, un ensemble  $\mathcal{I}$  de requêtes et deux routages différents  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , le but est de passer de  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_2$ , en déplaçant les requêtes une à une. Soient  $u$  et  $v$  deux requêtes, leurs routages par  $\mathcal{R}_i$  étant respectivement notés  $\mathcal{R}_i(u)$  et  $\mathcal{R}_i(v)$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ . Si  $\mathcal{R}_2(u) \cap \mathcal{R}_1(v) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire si le routage de  $u$  selon  $\mathcal{R}_2$  et le routage de  $v$  selon  $\mathcal{R}_1$  utilisent des ressources en commun, alors la requête  $v$  doit être reroutée avant de pouvoir router  $u$  selon  $\mathcal{R}_2$ .

Nous supposons qu'il est possible de router une requête sur une route intermédiaire, en utilisant des ressources réservées à un tel usage. Par exemple, l'opérateur peut disposer dans son réseau d'une longueur d'onde dédiée au routage temporaire de certaines requêtes. Néanmoins, dans notre modèle, une requête ne peut utiliser un tel routage intermédiaire qu'une seule fois. En d'autres termes, une requête placée sur un routage temporaire ne peut être reroutée que par son routage final. Lorsqu'une requête est reroutée, les ressources libérées peuvent être utilisées afin de rerouter une autre requête. Des reroutages indépendants, c'est-à-dire utilisant des ressources distinctes, peuvent être effectués simultanément. Toutefois, pour la clarté de l'exposition, nous supposerons qu'une seule requête est reroutée par unité de temps.

Le problème est modélisé de la façon suivante : soit  $D = (V, A)$  le graphe orienté obtenu en plaçant un sommet par requête, et un arc de  $u$  vers  $v$  si, et seulement si,  $\mathcal{R}_2(u) \cap \mathcal{R}_1(v) \neq \emptyset$ .

Un sommet est dit *traité* dès que la requête correspondante est routée selon  $\mathcal{R}_2$ . Lorsqu'une requête est routée à l'aide d'un routage temporaire, nous dirons que le sommet correspondant est placé en *unité de mémoire temporaire* (TMU).

Il y a deux types d'actions : traiter un sommet, ou placer un sommet en TMU. Un sommet peut être traité si, et seulement si, chacun de ses voisins externes est soit traité, soit en TMU. Un sommet de degré externe nul peut être traité à n'importe quel moment.

Une fois placé en TMU, un sommet ne peut retrouver son état originel : il doit être traité. Toutefois, il peut être laissé en TMU aussi longtemps que désiré. Traiter un sommet occupant une TMU permet de libérer cette dernière, qui peut immédiatement être utilisée par un autre sommet.

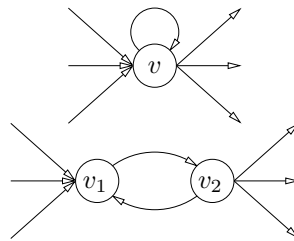
Un graphe orienté est *traité* lorsque tous ses sommets le sont. La figure 7.3 montre les étapes dans le traitement d'un graphe orienté, en utilisant une TMU. Le problème est de trouver un ordre de traitement des sommets.

S'il est interdit d'utiliser une TMU, alors clairement un tel ordre existe si, et seulement si, le graphe orienté ne contient pas de circuit (orienté). À l'inverse, si le nombre de TMU autorisé est arbitrairement grand, il suffit de placer tous les sommets en TMU au départ, puis de les traiter dans n'importe quel ordre.

Le but sera de minimiser le nombre de TMU utilisées simultanément. Une borne supérieure est fournie par le *minimum forward vertex set number*, c'est-à-dire le plus petit nombre de sommets intersectant tous les circuits.

Le *nombre de traitements* de  $D$ , noté  $p(D)$ , est le plus petit nombre de TMU pour lequel il existe une stratégie permettant de traiter tous les sommets. Une stratégie utilisant  $p$  (respectivement au plus  $p$ , respectivement au moins  $p$ ) TMU est appelée une  $p$ -stratégie (respectivement  $(\leq p)$ -stratégie, respectivement  $(\geq p)$ -stratégie).

Une remarque est que le graphe orienté  $D$  obtenu peut avoir des boucles. Ajouter des boucles à un graphe orienté augmente son nombre de traitements d'au plus un. En outre, il est aisé, comme le montre la figure 7.1, de construire un graphe orienté sans boucle  $D'$  tel que  $p(D') = p(D)$ . Lorsque  $D$  est symétrique, nous travaillerons sur le graphe non orienté  $G = (V, E)$  sous-jacent.



**FIG. 7.1.** Suppression d'une boucle : le sommet  $v$  est remplacé par un 2-cycle  $v_1v_2$  avec  $N^-(v_1) := N^-(v) \cup \{v_2\}$ ,  $N^+(v_1) := \{v_2\}$ ,  $N^+(v_2) := N^+(v) \cup \{v_1\}$  et  $N^-(v_2) := \{v_1\}$ . Le nombre de traitements des deux graphes est le même.

Cette problématique rappelle le problème de poursuite (*pursuit problem, edge-searching*), défini de façon indépendante par Breisch [Bre67] et Parsons [Par78a, Par78b], et qui a beaucoup été étudié depuis (voir par exemple [MHG<sup>+</sup>88, BS91, LaP93, KP86, BFFS02]). Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  dans lequel un fugitif se déplace, le but est de *nettoyer*  $G$  (c'est-à-dire de capturer le fugitif) en utilisant le moins possible d'agents nettoyeurs. Les opérations de base sont :

- placer un agent sur un sommet ;

- enlever un agent d'un sommet ; et
- déplacer un agent le long d'une arête.

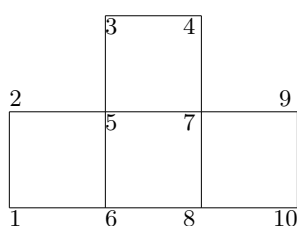
Une arête est dite *contaminée* si, et seulement si, elle est susceptible d'abriter le fugitif. Pour la *nettoyer*, il faut placer un agent (appelé *garde*) sur l'un de ses sommets terminaux, et déplacer un autre agent le long de l'arête. Si toutes les autres arêtes incidentes au sommet gardé sont déjà nettoyées, le garde peut nettoyer lui-même l'arête en l'empruntant. Une fois nettoyée, une arête le reste tant que tout chemin entre une arête contaminée et elle-même passe par un sommet gardé. Si ce n'est pas le cas, l'arête est *recontaminée*. Le graphe est *nettoyé* dès que toutes ses arêtes le sont. Une *stratégie de recherche* est une séquence d'opérations permettant de nettoyer le graphe. Le *nombre de chercheurs* (*search number*) de  $G$ , noté  $s(G)$ , est le plus petit nombre de chercheurs pour lequel une stratégie de recherche existe. Précisons qu'il existe de nombreuses variantes de ce problème, notamment le paramètre *node search* dans lequel un agent ne peut se déplacer le long d'une arête [KP86, DPS02].

Le problème de poursuite est fortement lié à la largeur arborescente linéaire comme le montre un résultat de Turner (qui est prouvé dans [EST94], et mentionné pour la première fois comme une communication personnelle de Turner dans [KP86]). Commençons par définir la largeur arborescente linéaire.

La notion de largeur arborescente linéaire (*pathwidth*) a été introduite par Robertson et Seymour [RS83]. Une *décomposition linéaire* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une collection de sous-ensembles  $X_1, \dots, X_r$  de  $V$  tels que

- (i)  $\bigcup_{i=1}^r X_i = V$  ;
- (ii)  $\forall xy \in E, \exists i \in \{1, 2, \dots, r\} : \{x, y\} \subset X_i$  ;
- (iii)  $\forall (i_0, i_1, i_2) \in \{1, 2, \dots, r\}^3, i_0 < i_1 < i_2 \Rightarrow X_{i_0} \cap X_{i_2} \subseteq X_{i_1}$ .

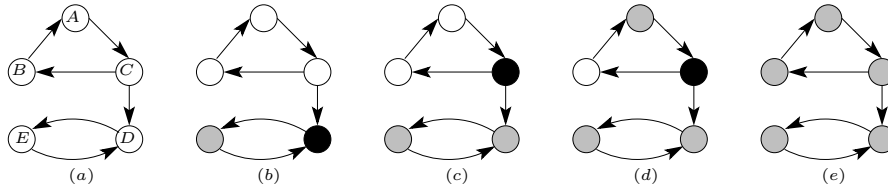
La *largeur* de la décomposition linéaire  $(X_1, \dots, X_r)$  est  $\max_{1 \leq i \leq r} |X_i| - 1$ . La largeur arborescente linéaire de  $G$ , notée  $\text{pw}(G)$ , est le minimum des largeurs des décompositions linéaires de  $G$ . Une décomposition linéaire réalisant ce minimum est dite *optimale*. La figure 7.2 fournit un exemple de décomposition linéaire.



**FIG. 7.2.** Une décomposition linéaire de largeur 3 pour ce graphe est  $X_1 := \{1, 2, 6\}$ ,  $X_2 := \{2, 5, 6\}$ ,  $X_3 := \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $X_4 := \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $X_5 := \{6, 7, 8\}$ ,  $X_6 := \{7, 8, 9\}$ ,  $X_7 := \{8, 9, 10\}$ . Comme il n'existe pas de décomposition linéaire de largeur 2 pour ce graphe, sa largeur arborescente linéaire est 3.

La *sommet-séparation* (*vertex-separation*) d'un graphe est une notion équivalente à la largeur arborescente linéaire. Un *ordre*  $L$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est une bijection entre  $V$  et  $\{1, \dots, |V|\}$ . La *sommet-séparation* de  $(G, L)$  est  $\max_{1 \leq i \leq |V|} |M(i)|$  où

$$M(i) := N(L^{-1}(\{1, 2, \dots, i\}))$$



**FIG. 7.3.** Traitement d'un graphe : les sommets traités sont en gris, et les sommets en TMU en noir. (a) Chaque sommet possède au moins un voisin externe dans l'état initial, il est donc nécessaire de placer un sommet en TMU. (b) Le sommet  $D$  est désormais en TMU, ce qui permet de traiter le sommet  $E$ . (c) Pour atteindre l'état (c), le sommet  $C$  est placé dans une TMU, et le sommet  $D$  est ensuite traité, puisque tous ses voisins externes sont soit traités soit en TMU.

en notant, pour tout  $X \subseteq V$ ,  $N(X)$  l'ensemble des sommets de  $V \setminus X$  adjacents à un sommet (au moins) de  $X$ . En d'autres termes,

$$M(i) := \{v \in V : L(v) > i \text{ et } \exists u \in N(v) : L(u) \leq i\}.$$

La *sommet-séparation* de  $G$ , notée  $vs(G)$ , est le minimum des *sommet-séparations* de  $(G, L)$  sur tous les ordres  $L$ . Un ordre réalisant ce minimum est dit *optimal*. (La notation  $vs$  est parfois utilisée dans la littérature pour la variante du problème de poursuite nommée *visible search*.)

**Théorème 60** (Kinnersley [Kin92]). *La largeur arborescente linéaire d'un graphe est égale à sa sommet-séparation.*

Il n'est pas difficile de voir que pour tout graphe  $G$ ,  $pw(G) \leq vs(G)$  : considérons un ordre  $L$  de  $G$ . Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  avec  $\forall i \geq 1, X_i := M(i) \cup \{L^{-1}(i)\}$ . Ces ensembles forment une décomposition linéaire de  $G$ , et par définition sa largeur est la sommet-séparation de  $(G, L)$  : ainsi,  $pw(G) \leq vs(G)$ . L'obtention de l'autre inégalité est un peu plus technique.

Remarquons que la définition de la sommet-séparation s'étend naturellement aux graphes orientés : l'ensemble  $M_i$  devient l'ensemble  $\overrightarrow{M}_i$  des sommets d'ordre strictement supérieur à  $i$  possédant au moins un voisin *interne* d'ordre au plus  $i$ .

**Proposition 42** (Turner [EST94]). *Pour tout graphe  $G$ ,  $pw(G) \leq s(G) \leq pw(G) + 2$ .*

Pour tout graphe  $G$ , la *2-expansion* de  $G$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête de  $G$  par un chemin de longueur trois.

**Théorème 61** (Ellis, Sudborough et Turner [EST94]). *Soit  $G$  un graphe. Le nombre de chercheurs de  $G$  est égal à la largeur arborescente linéaire de la 2-expansion de  $G$ .*

Notons enfin que le paramètre *node-search* est, lui, égal à la largeur arborescente linéaire plus un d'après un théorème de Kirousis et Papadimitriou [KP86].

## 7.2. Relations avec d'autres problèmes

**Proposition 43.** *Pour tout graphe orienté  $D$ ,  $pw(D) \leq p(D) \leq pw(D) + 1$ .*

**Démonstration.** Considérons une  $p$ -stratégie pour  $D$ , et soit  $L$  l'ordre dans lequel les sommets sont traités. D'un point de vue dynamique, si la stratégie est stoppée juste après le traitement du  $i^{\text{ème}}$  sommet, alors tout sommet non traité possédant un voisin traité doit être en TMU. Ceci étant vrai pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, |V|\}$ , la sommet-séparation de  $(D, L)$  est  $p$ , donc  $vs(D) \leq p(D)$ .

Soit  $L$  un ordre pour  $D$ , notons  $vs$  la sommet-séparation de  $(D, L)$ . Considérons la stratégie consistant à traiter chaque sommet selon l'ordre  $L$  : le  $i^{\text{ème}}$  sommet traité est le sommet

$v_i := L^{-1}(\{i\})$  (et donc, tout voisin externe et non traité de  $v_i$  doit être placé en TMU avant le traitement de  $v_i$ ). Ainsi,  $d^+(v_1)$  sommets doivent être placés en TMU afin de pouvoir traiter  $v_1$ . Notons que  $d^+(v_1) \leq vs$ . Supposons à présent que  $i \geq 1$  sommets aient été traités : notons  $P_i := \{v_j : j \in \{1, 2, \dots, i\}\}$  et  $M_i$  l'ensemble des sommets en TMU. Plaçons tous les voisins externes de  $v_{i+1}$  n'appartenant pas à  $M_i \cup P_i$  en TMU afin de traiter  $v_{i+1}$ . Si  $v_{i+1} \notin M_i$ , alors

$$|M_i \cup (N^+(v_{i+1}) \setminus P_i)| \leq vs,$$

puisque la sommet-séparation de  $(D, L)$  est  $vs$ . Nous utilisons ainsi au plus  $vs$  TMU simultanément. Si  $v_{i+1} \in M_i$ , alors

$$|M_i \setminus \{v_{i+1}\} \cup (N^+(v_{i+1}) \setminus P_i)| \leq vs,$$

donc nous utilisons au plus  $vs + 1$  TMU simultanément.  $\square$

Comme la détermination de la sommet-séparation est un problème APX [DKL87], le résultat précédent montre qu'il en est de même pour le nombre de traitements.

La proposition suivante décrit une construction forçant chacun des trois paramètres à augmenter de un.

**Proposition 44.** *Soient  $G_1, G_2$  et  $G_3$  trois graphes connexes tels que  $vs(G_i) = vs$ ,  $s(G_i) = s$  et  $p(G_i) = p$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Le graphe  $G$  est obtenu à partir d'une copie de chacun des graphes  $G_i$ , en ajoutant un sommet  $v$  possédant exactement un voisin dans chaque graphe  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Alors,  $vs(G) = vs + 1$ ,  $s(G) = s + 1$  et  $p(G) = p + 1$ .*

**Démonstration.** Commençons par prouver la proposition pour la sommet-séparation.

[[ Soit  $X_i$  une décomposition en chemins de largeur  $vs$  du graphe  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . La décomposition en chemins  $X := X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3$  de  $G$  où  $X'_i$  est obtenue à partir de  $X_i$  en ajoutant le sommet  $v$  dans chaque ensemble de  $X_i$  est de largeur  $vs + 1$ .

Considérons un ordre  $L$  de  $G$ . Soient  $u := L^{-1}(\{1\})$  et  $w := L^{-1}(\{|V(G)|\})$ . Quitte à renommer les graphes  $G_i$ , nous pouvons supposer que  $u \in V(G_1) \cup \{v\}$  et  $w \in V(G_1) \cup V(G_3) \cup \{v\}$ . Il existe  $i \in \{2, \dots, |V(G)| - 1\}$  tel que  $G_2$  contienne  $vs$  sommets dont l'ordre est strictement supérieur à  $i$ , et possédant chacun un voisin dont l'ordre est au plus  $i$ . Comme le sous-graphe  $H$  induit par les sommets de  $V(G) \setminus V(G_2)$  est connexe, il existe dans  $H$  un chemin reliant  $u$  à  $w$ . Ce chemin contient nécessairement un sommet  $z \notin V(G_2)$  d'ordre strictement supérieur à  $i$  et possédant un voisin d'ordre au plus  $i$  (car  $L(u) = 1 < i$  et  $L(w) = |V(G)| > i$ ). Par conséquent, la sommet-séparation de  $L$  est au moins  $vs + 1$ . ]]

Occupons-nous à présent du nombre de traitements.

[[ Il est aisé de traiter  $G$  en utilisant  $p + 1$  TMU : il suffit de placer  $v$  en TMU, d'utiliser une  $p$ -stratégie pour chaque graphe  $G_i$ , et enfin de traiter  $v$ . Le nombre de TMU utilisées simultanément est au plus  $p + 1$ .

Montrons que  $p(G) \geq p + 1$ . Pour cela, considérons une  $k$ -stratégie pour  $G$ . Quitte à inverser certaines étapes, nous pouvons supposer qu'une fois qu'un sommet de  $G_i$  est en TMU, il y aura au moins un sommet de  $G_i$  en TMU tant que tout le graphe  $G_i$  n'aura pas été traité. Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , soit  $j_i$  la première étape lors de laquelle au moins  $p$  sommets du graphe  $G_i$  sont en TMU. Quitte à renommer les graphes  $G_i$ , supposons que  $j_1 < j_2 < j_3$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ainsi, à l'étape  $j_2$ , tout le graphe  $G_1$  a nécessairement été traité, et aucun sommet du graphe  $G_3$  n'est en TMU. Ainsi, le sommet  $v$  est nécessairement en TMU : il ne peut être traité car son voisin dans  $G_3$  n'est ni traité ni en TMU, et il ne peut être dans son état initial car son voisin dans  $G_1$  a été traité. Ainsi, au moins  $p + 1$  TMU sont occupées simultanément à l'étape  $j_2$ , d'où  $k \geq p + 1$ . ]]





(a) Un graphe  $G$  vérifiant  $vs(G) = 2 = p(G) - 1 = s(G) - 1$ .

(b) Un graphe  $H$  vérifiant  $vs(H) = 3 = p(H) - 1 = s(H) - 2$ .

FIG. 7.4. Graphes pour la preuve du théorème 62.

Pour le nombre de chercheurs, placer un chercheur sur le sommet  $v$  et utiliser des stratégies optimales pour chacun des graphes  $G_i$  montre que  $vs(G) \leq vs + 1$ . Pour l'autre inégalité, il est par exemple possible d'appliquer les arguments utilisés pour la largeur arborescente linéaire à la 2-expansion de  $G$ . Il est possible aussi d'adapter les arguments directement pour le graphe  $G$ , en utilisant le résultat de Lapaugh [LaP93] stipulant qu'il existe une stratégie optimale telle qu'aucune arête ne soit recontaminée.  $\square$

**Théorème 62.** Soient  $vs \geq 3$ ,  $s \in \{vs, vs + 1, vs + 2\}$  et  $p \in \{vs, vs + 1\}$ . Il existe un graphe  $G_{vs}$  tel que  $vs(G_{vs}) = vs$ ,  $s(G_{vs}) = s$  et  $p(G_{vs}) = p$ .

**Démonstration.** D'après la proposition 44, il suffit de trouver, pour chaque couple  $(s, p) \in \{vs, vs + 1, vs + 2\} \times \{vs, vs + 1\}$ , un graphe connexe  $G$  tel que  $s(G) = s$ ,  $p(G) = p$  et  $vs(G) = vs$  pour un entier  $vs \in \{1, 2, 3\}$ .

- Pour  $vs = p = s = 1$ , le graphe complet à deux sommets convient ;
- pour  $vs = p = s - 1 = 1$ , l'étoile à trois branches convient ;
- pour  $vs = p = s - 2 = 3$ , le graphe biparti complet  $K_{3,3}$  convient ;
- pour  $vs = p - 1 = s = 1$ , le chemin de longueur trois convient ;
- pour  $vs = p - 1 = s - 1 = 2$ , le graphe de la figure 7.4(a) convient ; et
- pour  $vs = p - 1 = s - 2 = 3$ , le graphe de la figure 7.4(b) convient.

$\square$

Ainsi, tous les cas autorisés par les propositions 42 et 43 se produisent. Si  $vs = 2$ , le seul cas ne pouvant se produire est  $p = vs = s - 2$ .

### 7.3. Nombre de traitements de certaines classes de graphes

Cette section établit le nombre de traitements de certaines classes de graphes non orientés, avec une stratégie correspondante.

En premier lieu, notons que les techniques développées pour calculer la sommet-séparation des arbres (voir [EST94, MHG<sup>+</sup>88, Yan85, Sko00]) peuvent être adaptées afin de calculer le nombre de traitement d'un arbre. En particulier, il existe un algorithme linéaire en temps pour obtenir le nombre de traitement d'un arbre ainsi qu'une stratégie correspondante.

**Théorème 63.**

- (i) Le nombre de traitement du graphe biparti complet  $K_{m,n}$  est  $\min(m, n)$  ;
- (ii) pour tout  $d \geq 3$ , le nombre de traitements de l'arbre  $d$ -aire complet de hauteur  $h$  est  $h$  ;

- (iii) le nombre de traitement de l'arbre binaire complet de hauteur  $h$  est  $\lceil h/2 \rceil$ , sauf si  $h = 2$  auquel cas ce nombre est 2 ; et
- (iv) le nombre de traitement de tout graphe planaire extérieur triangulé dont le dual faible est une chenille (c'est-à-dire un chemin avec des arêtes pendantes) de degré maximum 3 est au plus 3.

**Démonstration.** Pour (i), il suffit de noter que le degré minimum de  $K_{m,n}$  est  $\min(m, n)$  (ce qui donne une borne inférieure), et que placer tous les sommets de l'une des parts de la bipartition en TMU permet de traiter le graphe. (ii) se prouve par récurrence sur la hauteur de l'arbre : le théorème 44 permet de montrer que  $h$  est une borne inférieure, et une  $h$ -stratégie est obtenue en plaçant la racine en TMU et en traitant récursivement les trois sous-arbres de façon optimale. Pour (iii), la sommet-séparation d'un tel arbre est  $\lceil h/2 \rceil$ , et traiter les sommets selon un ordre optimal pour la sommet-séparation donne le résultat (voir par exemple [Sch90, Sch91]). Enfin, une 3-stratégie pour (iv) s'obtient en considérant un plus long chemin dans le dual, et en plaçant les sommets des faces appartenant à ce plus long chemin en TMU (successivement, et dans l'ordre du chemin).  $\square$

**Théorème 64.** *Le nombre de traitements de la grille de taille  $m \times n$  est  $\min(m, n) + 1$ , sauf si  $n = m = 2$  auquel cas ce nombre est 2.*

Donnons quelques définitions avant de prouver ce résultat. Soit  $I_2$  (respectivement  $I_2^+$ ) l'ensemble des points du plan à coordonnées entières (respectivement positives). Si  $X$  est un ensemble de points de  $I_2$ , la frontière de  $X$ , notée  $\text{Fr}(X)$ , est l'ensemble des points de  $I_2$  n'appartenant pas à  $X$  et à distance un d'un point de  $X$ .

**Théorème 65** (Wang et Wang [WW77]). *Étant donné un entier  $n$ , tout ensemble  $X$  de  $I_2$  (respectivement de  $I_2^+$ ) tel que  $|\text{Fr}(X)| \leq n$  contient au plus  $\frac{n^2}{8} - \frac{n}{2} + 1$  (respectivement  $\frac{n(n-1)}{2}$ ) points.*

Selon la terminologie de [WW77], la *sphère standard* de  $I_2^+$  de taille  $n$ , constituée de tous les points dont la somme des coordonnées est au plus  $n + 1$ , est le seul ensemble atteignant la borne du théorème 65. Enfin, un *côté* de la grille est un chemin dont les sommets terminaux ont degré deux, et les sommets internes degré trois (chaque grille possède donc exactement quatre côtés).

**Démonstration.** La largeur arborescente linéaire de la grille  $m \times n$  étant  $\min(m, n)$ , nous déduisons, d'après la proposition 43, que son nombre de traitements est  $p$  ou  $p + 1$ , avec  $p := \min(m, n)$ . Supposons qu'il existe une  $p$ -stratégie, et stoppons-la dès que  $f(p) := \frac{p(p-1)}{2}$  sommets ont été traités. Soit  $P$  l'ensemble des sommets traités, et soit  $M$  l'ensemble des sommets en TMU. Montrons d'abord que  $P \cup M$  est connexe. Supposons que  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$  avec  $k \geq 2$ ,  $\text{Fr}(P_i) = M_i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  et  $M_i \cap M_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Alors,  $\sum_{i=1}^k |P_i| = f(p)$  et  $\sum_{i=1}^k |M_i| \leq p$ . Remarquons que nous pouvons supposer que chaque ensemble  $P_i$  intersecte au plus deux côtés de la grille. Mais alors chaque  $P_i$  est un ensemble de  $I_2^+$ . Par conséquent, en notant  $p_i$  la taille de la frontière de chaque ensemble  $P_i$ ,  $\sum_{i=1}^k f(p_i) = f(p) = f(\sum_{i=1}^k p_i)$  si, et seulement si,  $\forall i \neq j, p_i p_j = 0$ , ce qui est impossible. Donc,  $P \cup M$  est connexe.

Séparons à présent l'étude en plusieurs cas, selon le nombre de côtés de la grille intersectés par  $P$ .

**$P$  n'intersecte aucun côté de la grille :**  $P$  est un sous-ensemble de  $I_2$  de frontière  $M$ , donc d'après le théorème 65,  $|P| \leq \frac{p^2}{8} - \frac{p}{2} + 1$ , une contradiction.

**$P$  intersecte exactement un côté de la grille :** soit  $P'$  le symétrique de  $P$  dans  $I_2$  respectivement au côté intersecté. L'ensemble  $P \cup P'$  est un sous-ensemble de  $I_2$  de cardinal au moins  $p(p-1)$  dont la frontière est de cardinal au plus  $2p$ , ce qui contredit le théorème 65.

**$P$  intersecte exactement deux côtés :** ces deux côtés sont nécessairement consécutifs (c'est-à-dire qu'ils ont un sommet en commun). Par conséquent,  $P$  est la sphère standard de  $I_2^+$ , et il est impossible de traiter un sommet supplémentaire sans utiliser une TMU de plus, une contradiction.

**$P$  intersecte exactement trois côtés :** admettons qu'il s'agisse des côtés haut, bas et gauche. Par connexité, il existe au moins un sommet de  $M$  sur chaque ligne de la grille. D'après les valeurs de  $|M|$  et  $|P|$ , il n'existe alors aucune possibilité pour traiter un nouveau sommet sans utiliser une TMU supplémentaire, une contradiction.

**$P$  intersecte les quatre côtés :** soit  $P'$  le complémentaire de  $P \cup M$ . Le cardinal de  $P'$  est au moins  $\frac{p(p-1)}{2}$  et celui de sa frontière au plus  $p$ . En outre, chaque composante connexe de  $P'$  intersecte au plus deux côtés. Ainsi, une contradiction est obtenue comme précédemment.

□

Remarquons qu'une stratégie optimale pour la grille est obtenue en traitant les sommets dans l'ordre lexicographique de leurs coordonnées.

**Définition 31.** La pyramide de taille  $n$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est la sphère standard de  $I_+^2$  de taille  $n$ . Chaque sommet du graphe est repéré par ses coordonnées.

Pour  $i \in \{1-n, \dots, n-1\}$ , soit  $L(i)$  l'ensemble de sommets appartenant à la droite d'équation  $y = x + i$ . Ces ensembles sont les *niveaux* de la pyramide (voir figure 7.5). L'ordre lexicographique induit un ordre total naturel sur les sommets de chaque niveau : nous parlerons donc du *minimum* et du *maximum* d'un niveau. Notons enfin que  $|L(i)| = \left\lfloor \frac{n+|i|-1}{2} \right\rfloor + 1 - |i|$ .

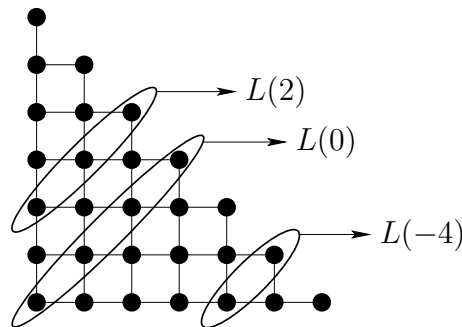


FIG. 7.5. Quelques niveaux de la pyramide de taille 7.

**Corollaire 10.** Le nombre de traitements de la pyramide de taille  $n$  est  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ , sauf si  $n \in \{2, 3\}$  auquel cas ce nombre est  $n - 1$ .

**Démonstration.** Le résultat étant trivialement vrai si  $n \in \{2, 3\}$ , supposons  $n \geq 4$ . La valeur donnée dans le corollaire est une borne supérieure du nombre de traitements de la pyramide d'après le théorème 64 puisque la grille de taille  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  est un sous-graphe de la pyramide de taille  $n$ .

Présentons à présent une  $(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1)$ -stratégie. Le schéma utilisé est le traitement des sommets niveau par niveau, et dans l'ordre décroissant au sein de chaque niveau (sauf dans un cas (le niveau 0 quand  $n$  est pair), où les sommets seront traités dans l'ordre croissant). Pour borner le nombre de TMU utilisées, nous faisons une récurrence sur les niveaux, et également une récurrence à l'intérieur de chaque niveau.

Commençons par placer le sommet  $L(2 - n)$  en TMU et traitons le sommet de  $L(1 - n)$ . Plaçons ensuite les deux sommets de  $L(3 - n)$  en TMU et traitons le sommet de  $L(2 - n)$ . Supposons que les sommets en TMU soient exactement ceux de  $L(i)$ , et notons  $v$  le sommet maximum de  $L(i)$  :  $v$  possède au plus deux voisins non traités encore, et tous deux appartiennent à  $L(i + 1)$ . Ainsi, s'il reste deux TMU libres, nous pouvons mettre des deux voisins en TMU et traiter  $v$ , ce qui libère une TMU. Si tel n'est pas le cas, alors il reste exactement une TMU libre (car le nombre de sommets d'un niveau n'excède pas  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ). Si  $n$  est pair, alors  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , sinon  $i = 0$ . Remarquons que si  $n$  est impair, ou bien si  $i \neq 0$ , alors  $v$  possède un unique voisin dans  $L(i + 1)$ , nommément le sommet de coordonnées  $(x - 1, y)$  ; si  $n$  est pair et  $i = 0$ , considérons le sommet de coordonnées  $(0, 0)$ . Ce sommet possède un unique voisin dans  $L(1)$  : le sommet de coordonnées  $(1, 0)$ . Dans tous les cas, nous pouvons placer cet unique voisin en TMU et traiter  $v$  (ce qui libère une TMU).

Ainsi dans tous les cas, une fois que tous les sommets de  $L(i)$  sont placés en TMU, il reste  $j \in \{1, 2\}$  TMU libres, et soit le sommet maximum de  $L(i)$  possède exactement  $j$  voisins dans  $L(i + 1)$ , soit  $n$  est pair,  $i = 0$  et le sommet minimum de  $L(0)$  possède exactement un voisin dans  $L(1)$ . Enfin, si les  $j$  plus grands sommets de  $L(i)$  (pour l'ordre lexicographique) sont déjà traités, notons  $(x, y)$  les coordonnées du dernier sommet traité, alors le sommet  $v \in L(i)$  de coordonnées  $(x - 1, y - 1)$  possède seulement un voisin qui n'est ni traité ni en TMU : le sommet de coordonnées  $(x - 2, y - 1) \in L(i + 1)$ . Remarquons que le nombre de TMU utilisées à cet instant est au plus  $(|L(i)| - j) + j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  : il est donc possible de placer ce sommet en TMU et de traiter  $v$ , ce qui libère une TMU. La même situation avec les sommets de coordonnées respectives  $(x, y)$ ,  $(x + 1, y + 1)$  et  $(x + 1, y + 2)$  se produit lorsque  $n$  est pair et  $i$  vaut zéro.  $\square$

Nous allons maintenant caractériser les graphes  $p$ -connexes dont le nombre de traitements est  $p$ .

**Théorème 66.** *Il existe une  $p$ -stratégie pour un graphe  $p$ -connexe si, et seulement si, il existe un sous-ensemble de  $p$  sommets dont la suppression induit un ensemble indépendant (éventuellement vide).*

**Démonstration.** Soit  $G$  un graphe  $p$ -connexe pour lequel il existe une  $p$ -stratégie. Stoppons la stratégie juste avant de traiter le premier sommet  $v$ . Par connexité, le degré minimum de  $G$  est au moins  $p$ , donc le degré de  $v$  est exactement  $p$ , et tous les sommets de  $N(v)$  sont en TMU. Soit  $A$  l'ensemble des sommets de  $G$  dont le voisinage est inclus dans  $N(v)$  — et donc est *exactement*  $N(v)$ , par  $p$ -connectivité. Il est donc possible de traiter  $v$ , et, sans perte de généralité, tous les sommets de  $A$ . S'il n'existe pas d'autre sommet, alors l'ensemble  $N(v)$  montre que  $G$  vérifie la condition du théorème. Sinon, il existe un sommet  $w \notin A \cup N(v)$ . Soit  $z$  le prochain sommet traité par la stratégie. Comme la stratégie utilise au plus  $p$  TMUS, et comme tous les sommets de  $A$  ont déjà été traités,  $z \in N(v)$ . En outre,  $N(z) \subset N(v) \cup A$ . Par conséquent, aucun sommet de  $A \cup \{z\}$  n'est adjacent à un sommet n'appartenant pas à  $A \cup N(v)$ . Ainsi,  $N(v) \setminus \{z\}$  est un ensemble de  $p - 1$  sommets dont la suppression déconnecte  $w$  de  $A \cup \{z\}$ , une contradiction.  $\square$

Pour le cas où  $p$  vaut 2, nous donnons une autre preuve de ce résultat basée sur la caractérisation des graphes 2-connexes. Une preuve similaire peut être faite lorsque  $p$  vaut 3 en utilisant la caractérisation des graphes 3-connexes de Tutte [Tut61].

Étant donné un graphe  $H$ , un  $H$ -chemin est un chemin de longueur au moins deux dont les deux sommets extrémaux sont dans  $H$  et dont l'intérieur est disjoint de  $H$ . Notons que la classe des graphes de nombre de traitements au plus  $p$  est close par contraction. En particulier, tout graphe possédant un  $K_4$ -mineur ou un  $C_5$ -mineur ne possède pas de 2-stratégie. Pour tout entier  $n$ , le graphe  $K_{2,n}^+$  est obtenu à partir du graphe biparti complet  $K_{2,n}$  en reliant les deux sommets de la part de cardinal deux.

**Théorème 67.** *Tout graphe 2-connexe possédant une 2-stratégie est soit  $K_{2,n}$  avec  $n \geq 2$ , soit  $K_{2,n}^+$  avec  $n \geq 0$ .*

**Démonstration.** Les graphes cités possèdent clairement une 2-stratégie. Soit  $G$  un graphe 2-connexe avec une 2-stratégie. Si  $G$  ne contient pas de cycle de longueur quatre comme sous-graphe, alors  $G$  est soit  $K_2 \simeq K_{2,0}^+$  soit  $K_3 \simeq K_{2,1}^+$ . Supposons donc à présent que  $C \simeq C_4$  est un sous-graphe de  $G$ . Comme  $G$  est 2-connexe, il peut être construit à partir de  $C$  en ajoutant successivement des  $H$ -chemins au graphe  $H$  déjà construit. Soient  $C \simeq G_0, G_1, \dots, G_s \simeq G$  les graphes obtenus de cette façon : nous prouvons le résultat par récurrence sur  $s$ , le nombre de chemins ajoutés. Le cas où  $s = 0$  est évident. Si  $s = 1$ , comme  $G$  est sans  $C_5$ -mineur, le chemin ajouté doit être de longueur un ou deux, et ses sommets terminaux ne sont pas adjacents sur le cycle  $C$ . Ainsi,  $G \simeq G_1$  est soit  $K_{2,3}$  soit  $K_{2,2}^+$ .

Supposons désormais le résultat vrai pour tous les graphes 2-connexes obtenus en ajoutant au plus  $s - 1$  chemins, pour un entier  $s \geq 2$ .  $G_{s-1}$  possède donc une 2-stratégie, et il est 2-connexe. Par hypothèse d'induction, le graphe  $G_{s-1}$  est donc soit  $K_{2,x}$  pour un entier  $x \geq 3$  ou  $K_{2,x}^+$  pour un entier  $x \geq 2$ . Notons  $(A, B)$  la bipartition canonique de  $G_{s-1}$ , avec  $|A| = 2$ . Soit  $P = x_0, x_1, \dots, x_k$  le  $G_{s-1}$ -chemin à ajouter pour obtenir  $G$ . Si  $x_0, x_k \in B$ , alors  $G$  contient clairement un  $K_4$ -mineur, une contradiction. Si  $x_0 \in A$  et  $x_k \in B$ , alors  $k \geq 2$  et  $G$  contient un  $C_5$ -mineur. Donc  $x_0, x_1 \in A$  et comme  $G$  est sans  $C_5$ -mineur,  $k \leq 2$ . Ainsi,  $G \simeq K_{2,n}^+$ ,  $G \simeq K_{2,n+1}$  ou  $G \simeq K_{2,n+1}^+$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 7.4. Conclusion

Il existe un algorithme permettant de tester, en temps cubique par rapport au nombre de sommets, si le nombre de traitements d'un graphe est au plus deux [Pha04]. Notons que, pour un entier  $k$  fixé, tester si la largeur arborescente linéaire d'un graphe est au plus  $k$  peut être fait en un temps linéaire en le nombre de sommets du graphe [Bod96]. Nous suspectons que les techniques mises en œuvre peuvent être adaptées pour le nombre de traitements.

Donnons deux problématiques importantes concernant cet invariant. La première, d'ordre théorique, est de déterminer s'il existe pour tout graphe  $G$  une transformation simple (c'est-à-dire polynomiale) donnant un graphe  $G'$  telle que  $\text{pw}(G') = p(G)$ . Une telle relation existe en effet entre l'exploration de graphes et la largeur arborescente linéaire. La seconde, d'ordre pratique, est la création d'heuristiques permettant des reroutages jugés suffisamment efficaces pour des instances réelles du problème de reroutage. Dans cette optique, il peut s'avérer fructueux d'étudier le nombre de traitements des graphes aléatoires.

# Largeur arborescente linéaire des graphes planaires extérieurs

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec David Coudert et Florian Huc [CHS06c, CHS06b].

## 8.1. Introduction

Nous étudions dans ce chapitre la relation entre la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur 2-connexe et celle de son dual. Sauf mention contraire, les graphes considérés sont simples et sans boucle. Commençons par quelques définitions.

Dans un plongement planaire d'un graphe, la face non bornée est appelée face *externe*. Un graphe  $G$  est un *graphe planaire extérieur* si, et seulement si, il existe un plongement planaire de  $G$  tel que tous les sommets soient incidents à la face externe. Le *dual* d'un graphe planaire  $G$ , noté  $G^*$ , est le graphe dont les sommets sont les faces de  $G$  et tel que deux sommets sont adjacents si, et seulement si, les faces correspondantes de  $G$  le sont dans  $G$ . Le *dual faible* de  $G$ , noté  $\mathcal{T}_G$ , est le sous-graphe de  $G^*$  obtenu en supprimant le sommet correspondant à la face externe de  $G$ .

Il n'est pas difficile de voir que le dual faible d'un graphe planaire extérieur est une forêt, et celui d'un graphe planaire extérieur 2-connexe un arbre. Notons également qu'il existe des algorithmes linéaires pour reconnaître un graphe planaire extérieur (et obtenir un plongement correspondant, voir par exemple [Mit79, Sys79]), ainsi que pour obtenir le dual d'un graphe planaire.

Rappelons les définitions de largeur arborescente linéaire et de sommet-séparation, données au chapitre 7.

Une *décomposition linéaire* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une collection de sous-ensembles  $X_1, \dots, X_r$  de  $V$  tels que

- (i)  $\bigcup_{i=1}^r X_i = V$  ;
- (ii)  $\forall xy \in E, \exists i \in \{1, 2, \dots, r\} : \{x, y\} \subset X_i$  ;
- (iii)  $\forall (i_0, i_1, i_2) \in \{1, 2, \dots, r\}^3, i_0 < i_1 < i_2 \Rightarrow X_{i_0} \cap X_{i_2} \subseteq X_{i_1}$ .

La *largeur* de la décomposition linéaire  $(X_1, \dots, X_r)$  est  $\max_{1 \leq i \leq r} |X_i| - 1$ . La largeur arborescente linéaire de  $G$ , notée  $\text{pw}(G)$ , est le minimum des largeurs des décompositions linéaires de  $G$  (se reporter à la figure 7.2 du chapitre 7 pour un exemple). Une décomposition linéaire réalisant ce minimum est dite *optimale*.

Comme indiqué par le théorème 60, la sommet-séparation d'un graphe est une notion équivalente à la largeur arborescente linéaire. Un *ordre*  $L$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est une bijection entre  $V$  et  $\{1, \dots, |V|\}$ . La *sommet-séparation* de  $(G, L)$  est  $\max_{1 \leq i \leq |V|} |M(i)|$  où

$$M(i) := N(L^{-1}(\{1, 2, \dots, i\}))$$

en notant, pour tout  $X \subseteq V$ ,  $N(X)$  l'ensemble des sommets de  $V \setminus X$  adjacents à un sommet (au moins) de  $X$ . En d'autres termes,

$$M(i) := \{v \in V : L(v) > i \text{ et } \exists u \in N(v) : L(u) \leq i\}.$$

La *sommet-séparation* de  $G$ , notée  $vs(G)$ , est le minimum des sommets-séparations de  $(G, L)$  sur tous les ordres  $L$ . Un ordre réalisant ce minimum est dit *optimal*.

De manière générale, déterminer la largeur arborescente linéaire d'un graphe quelconque est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet. Calculer la largeur arborescente linéaire des graphes a donné lieu à de nombreux travaux (voir par exemple [DPS02, Bod98, Ree97]). La largeur arborescente linéaire d'un graphe de largeur arborescente bornée peut être calculée en temps polynomial [BK96]. Cela s'applique en particulier aux graphes planaires extérieurs, puisque leur largeur arborescente (notion définie plus loin dans l'introduction) est au plus deux. Néanmoins, l'exposant et la constante principale dans le temps d'exécution de l'algorithme sont trop grands, rendant ce dernier inutile en pratique (une seule étape de l'algorithme requiert de travailler sur des ensembles de taille  $\mathcal{O}(n^{11})$ ). C'est pourquoi Govindan et al. [GLY98] ont donné un algorithme approximant la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur d'ordre  $n$  avec un facteur multiplicatif de trois en temps  $\mathcal{O}(n \log(n))$ . Pour les graphes planaires extérieurs 2-connexes, Bodlaender et Fomin [BF02] ont amélioré ce résultat en donnant un algorithme approximant en temps linéaire la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur 2-connexe avec un facteur multiplicatif de deux (et une décomposition linéaire correspondante peut être obtenue en  $\mathcal{O}(n \log(n))$ ). Pour cela, ils ont étudié la relation entre la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur et celle de son dual. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant.

**Théorème 68** (Bodlaender et Fomin [BF02]). *Pour tout graphe planaire extérieur  $G$ ,*

$$pw(G^*) \leq pw(G) \leq 2pw(G^*) + 2.$$

Le prochain résultat indique l'évolution de la largeur arborescente linéaire d'un graphe auquel est ajouté un sommet voisin de tous les autres.

**Lemme 40.** *Soit  $A$  un graphe quelconque et soit  $B$  le graphe obtenu à partir de  $A$  en ajoutant un sommet voisin de tous les autres. Alors  $pw(B) = pw(A) + 1$ .*

Une preuve dans le cas particulier d'un graphe planaire extérieur 2-connexe et de ses duaux est donnée dans [BF02]. Nous donnons ici une preuve générale, en utilisant à la fois la sommet-séparation et la largeur arborescente linéaire, afin d'illustrer les deux notions. Précisons qu'ajouter des arêtes entre deux sommets adjacents et des boucles ne change pas la sommet-séparation d'un graphe.

**Démonstration.** Clairement, ajouter un sommet augmente la sommet-séparation d'au plus 1, donc  $pw(B) \leq pw(A) + 1$ . Montrons à présent l'autre inégalité.

**En utilisant la sommet-séparation :** soient  $v$  le sommet additionnel de  $B$ . et  $L$  un ordre quelconque de  $B$ , et soit  $s$  la sommet-séparation de  $(B, L)$ . Nous allons prouver que la sommet-séparation de l'ordre  $L'$  induit par  $L$  sur  $A$  est strictement inférieure à  $s$ . Notons  $i := L(v)$ . L'ordre  $L'$  ordonne les sommets de  $A$  en leur attribuant un

entier dans  $\{1, 2, \dots, |V(B)|\} \setminus \{i\}$ . Soit  $i_0$  le plus grand entier tel que  $|M_B(i_0)| = s$ . Pour tout entier  $j < i$ ,  $|M_A(j)| < |M_B(j)|$  puisque  $M_B(j) = M_A(j) \cup \{v\}$ . Donc, si  $i_0 < i$  alors  $|M_A(j)| < |M_B(j)| \leq s$  pour tout  $j < i_0$  et  $|M_A(j)| \leq |M_B(j)| < s$  pour tout  $j > i_0$ ; d'où  $vs(A, L) < s$ .

Supposons donc à présent  $i_0 \geq i$ . Remarquons que  $\forall j, |M_B(j)| \leq |V(B)| - j$ , et il y a égalité en particulier pour  $j = i$ . Donc,  $\forall j > i, |M_B(j)| < |M_B(i)|$  et ainsi  $i_0 = i$ . À nouveau, si  $j < i$  alors  $|M_A(j)| < |M_B(j)| \leq s$ , et si  $j > i$  alors  $|M_A(j)| \leq |M_B(j)| < s$  ce qui conclut la preuve.

**En utilisant la largeur arborescente linéaire :** parmi les décompositions linéaires de  $B$  de largeur  $s := \text{pw}(B)$ , choisissons-en une, notée  $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ , avec le plus petit nombre d'ensembles. En particulier,  $X_1 \not\subseteq X_2$ , donc il existe  $v_1 \in X_1 \setminus X_2$ . Par définition d'une décomposition linéaire,  $v_1 \notin X_i$  pour tout  $i \geq 2$ . Ainsi  $v \in X_1$ , car si  $v_1 \neq v$  alors  $v_1v$  est une arête de  $G$ . De la même façon,  $X_r \not\subseteq X_{r-1}$  et donc  $v \in X_r$ . D'après la définition d'une décomposition linéaire,  $v$  appartient donc à tous les ensembles de  $X$ . La largeur de la décomposition linéaire  $X'$  induite par  $X$  sur  $A$  est donc strictement inférieure à  $s$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Puisque le dual faible d'un graphe planaire extérieur 2-connexe (qui peut être obtenu en temps linéaire) est un arbre, et qu'il existe des algorithmes linéaires pour calculer la largeur arborescente linéaire des arbres [EST94], le théorème 68 et le lemme 40 permettent d'obtenir l'approximation désirée (avoir une décomposition linéaire correspondante demande plus de travail et s'obtient en temps  $\mathcal{O}(n \log(n))$ ).

Bodlaender et Fomin [BF02] ont suggéré qu'une relation plus forte existe entre la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire et celle de son dual.

**Conjecture 14** (Bodlaender et Fomin [BF02]). *Il existe une constante  $c$  telle que pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ ,  $\text{pw}(G) \leq \text{pw}(G^*) + c$ .*

**Conjecture 15** (Bodlaender et Fomin [BF02]). *Pour tout graphe planaire 2-connexe  $G$ ,*

$$\text{pw}(G) \leq \text{pw}(G^*) + 1.$$

Fomin [Fom03] a prouvé que si  $G$  est un graphe planaire 2-connexe de degré maximum au plus trois, alors  $\text{pw}(G) \geq \text{pw}(G^*) - 1$ . Cela implique que la conjecture 15 est vraie pour toute triangulation du plan car toute triangulation du plan est le dual d'un graphe planaire 2-connexe de degré maximum trois.

Il est intéressant de remarquer que ces conjectures sont motivées par le résultat suivant à propos de la largeur arborescente, conjecturé par Robertson et Seymour [RS84] et prouvé par Lapoire [Lap99] en utilisant des méthodes algébriques (Bouchitté, Mazoit et Todinca [BMT03] ont donné depuis une preuve combinatoire plus courte de ce résultat).

La notion de largeur arborescente a été introduite par Robertson et Seymour [RS83]. Une *décomposition arborescente* d'un graphe  $G = (V, E)$  est un arbre  $T = (I, F)$  dont chaque sommet  $i \in I$  est associé à un ensemble  $X_i \subseteq V$  de sorte que

- (i)  $\bigcup_{i \in I} X_i = V$ ;
- (ii)  $\forall xy \in E, \exists i \in I : \{x, y\} \subset X_i$ ;
- (iii)  $\forall v \in V$ , les sommets de  $T$  dont l'ensemble associé contient  $v$  induisent un sous-arbre de  $T$ .



La *largeur* de la décomposition arborescente est  $\max_{i \in I} |X_i| - 1$ . La largeur arborescente de  $G$ , notée  $\text{tw}(G)$ , est le minimum des largeurs des décompositions arborescentes de  $G$ .

**Théorème 69** (Lapoire [Lap99]). *Pour tout graphe planaire  $G$ ,  $\text{tw}(G) \leq \text{tw}(G^*)$ .*

Dans la section 8.2, nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 70.** *Pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe un graphe planaire extérieur 2-connexe de degré maximum 4 dont la largeur arborescente linéaire est  $2p + 1$ , et tel que la largeur arborescente linéaire de son dual soit  $p + 1$ .*

Ce résultat, obtenu en construisant explicitement la famille  $(G_p)_{p \geq 1}$ , montre donc que les deux conjectures précédentes sont fausses. Notons ici que Fomin et Thilikos [FT06] ont, indépendamment, infirmé la conjecture 14.

Dans la section 8.3, nous prouvons le résultat suivant, qui améliore la borne supérieure du théorème 68.

**Théorème 71.** *Pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ ,  $\text{pw}(G) \leq 2\text{pw}(G^*) - 1$ .*

En conséquence, l'approximation précédemment donnée pour la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur 2-connexe est également améliorée. Nous donnons une preuve algorithmique de ce résultat, qui permet d'obtenir un ordre du graphe planaire extérieur  $G$  considéré (et dont la sommet-séparation est donc au plus  $2\text{pw}(G) - 1$ ).

En outre, le théorème 70 montre que cette borne est la meilleure possible.

Enfin, nous infirmerons deux autres conjectures dans la conclusion.

## 8.2. Contre-exemples

Dans cette section, nous construisons la famille de graphe  $(G_p)_{p \geq 1}$  du théorème 70. À cette fin, nous introduisons une construction générale permettant d'obtenir le résultat suivant.

**Théorème 72.** *Pour tout entier  $p \geq 1$  et tout entier  $k \in \{1, 2, \dots, p + 1\}$ , il existe un graphe planaire extérieur 2-connexe de largeur arborescente linéaire  $p + k$  tel que la largeur arborescente linéaire de son dual soit  $p + 1$ .*

La construction générale sera illustrée par la construction de la famille  $(G_p)_{p \geq 1}$  du théorème 70.

En vertu de la relation  $\text{pw}(G^*) = \text{pw}(\mathcal{T}_G) + 1$  pour tout graphe planaire extérieur  $G$ , nous ne travaillerons que sur  $G$  et  $\mathcal{T}_G$ .

Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soit  $H_i$  un graphe planaire extérieur 2-connexe de largeur arborescente linéaire  $p$  et dont le dual faible a largeur arborescente linéaire  $p'$ . Nous décrivons à présent une construction permettant d'obtenir un graphe planaire extérieur 2-connexe  $\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  de largeur arborescente linéaire  $p + 2$  dont le dual faible a largeur arborescente linéaire  $p' + 1$ .

Deux 4-cycles sont dits *adjacents* si, et seulement si, ils partagent exactement une arête. Le *degré* d'un 4-cycle  $S$  est le nombre de 4-cycles adjacents à  $S$ . Soit la *croix*  $K$  le graphe planaire extérieur 2-connexe constitué de quatre 4-cycles de degré un et un 4-cycle de degré quatre (figure 8.1(a)).

Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soit  $x_i y_i$  une arête de  $H_i$  incidente à la face externe dans un plongement planaire extérieur de  $H_i$ . Cette arête est choisie de telle sorte qu'il existe un ordre optimal  $L$  de  $\mathcal{T}_{H_i}$  tel que le sommet  $v$  correspondant à la face bornée incidente à  $x_i y_i$  vérifie  $L(v) = |V(\mathcal{T}_{H_i})|$  si  $i \in \{2, 3\}$ .

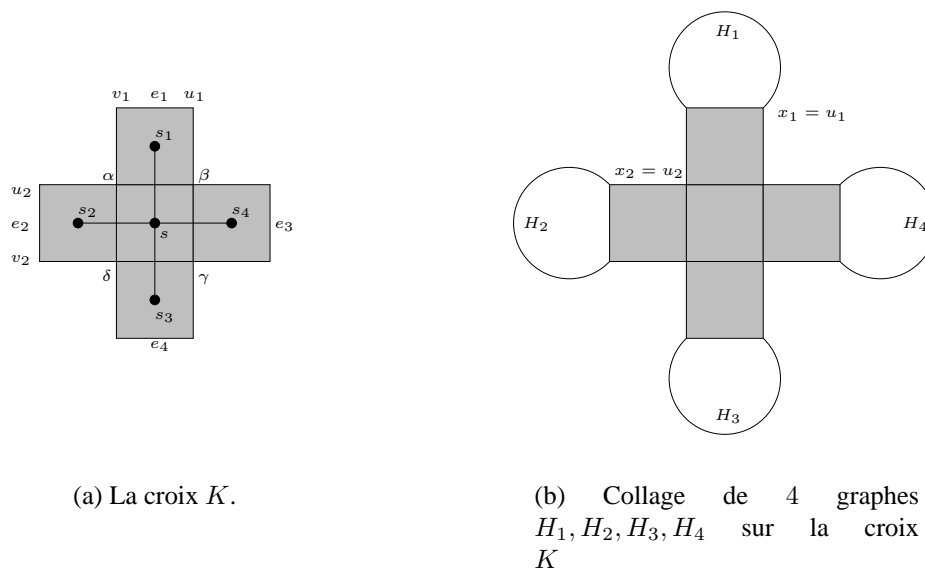


FIG. 8.1. Lorsque les arêtes sont identifiées,  $x_1$  est identifié à  $u_1$  et  $x_2$  à  $u_2$ .

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , notons  $L_i$  un ordre optimal de  $H_i$ , i.e. un ordre de sommet-séparation  $p$ , et sans perte de généralité supposons  $L_i(x_i) < L_i(y_i)$ .

Considérons la croix  $K$  de la figure 8.1(a). Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , l'arête  $e_i$  de  $K$  est identifiée avec l'arête  $x_i y_i$ , de sorte que les sommets  $x_1$  et  $x_2$  soient identifiés avec les sommets  $u_1$  et  $u_2$  respectivement (figure 8.1(b)). Bien qu'il soit possible d'obtenir, à partir des mêmes graphes  $H_i$ , différents graphes par cette construction, nous notons  $\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  tout graphe obtenu à partir de  $H_1, H_2, H_3, H_4$  de cette façon.

D'après la construction, tout graphe  $\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  est un graphe planaire extérieur 2-connexe. Par exemple, soit  $G_1$  le graphe planaire extérieur 2-connexe composé de trois 4-cycles de degré un et un 4-cycle de degré trois (figure 8.2). Pour tout entier  $p \geq 2$ , soit  $G_p$  le graphe  $\mathcal{C}(G_{p-1}, G_{p-1}, G_{p-1}, G_{p-1})$ , obtenu comme indiqué dans les figures 8.3 et 8.4. La condition sur les sommets  $x_1$  et  $x_2$  est ici respectée en raison de la symétrie des graphes  $G_p$ . Notons en outre que le degré maximum de  $G_p$  est 4.

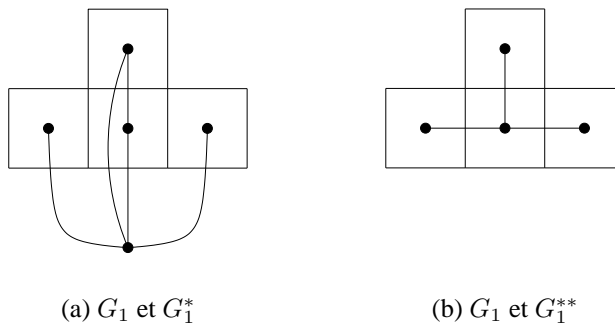


FIG. 8.2.  $G_1$ , composé d'un 4-cycle de degré trois et de trois 4-cycles de degré un, le dual  $G_1^*$  et le dual faible  $G_1^{**}$ , une étoile.

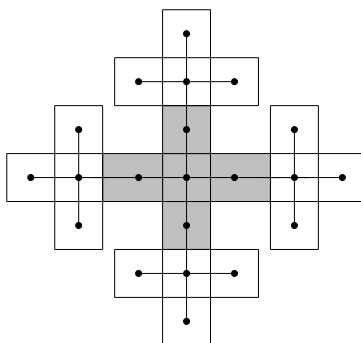


FIG. 8.3.  $G_2$ , 4 copies disjointes de  $G_1$  collées à une croix grise  $K$ , et son dual faible  $G_2^{**}$ .

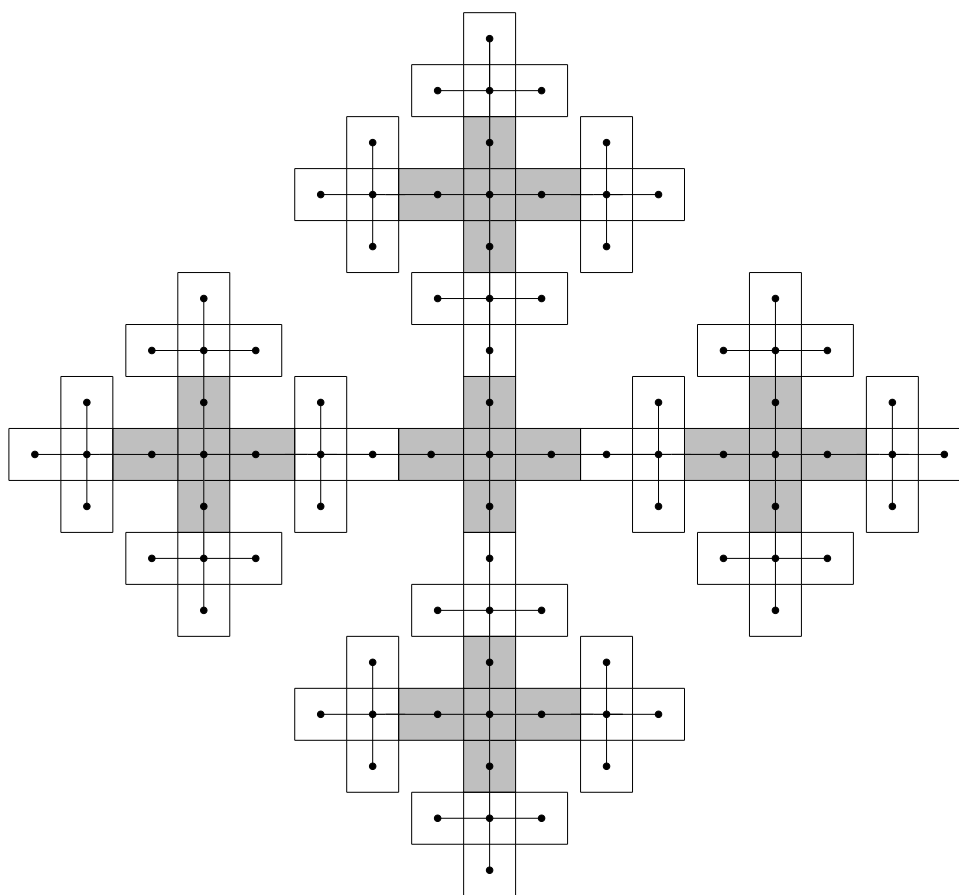


FIG. 8.4.  $G_3$ , 4 copies disjointes de  $G_2$  collées à une croix  $K$ , et son dual faible  $G_3^{**}$ .

Dans les trois lemmes suivants, nous prouvons les propriétés annoncées pour la construction. Le 4-cycle central de la croix est noté  $S$ , et le sommet correspondant du dual  $s$  (voir figure 8.1(a)).

**Lemme 41.** *Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soit  $H_i$  un graphe planaire extérieur 2-connexe dont le dual  $T_i$  a largeur arborescente linéaire  $p \geq 1$ . La largeur arborescente linéaire du dual faible du graphe  $\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  est  $p + 1$ .*

Pour prouver ce lemme, donnons d'abord une définition et un résultat. Pour tout sommet  $v$  d'un arbre  $T$ , une *branche de  $v$*  est tout sous-arbre maximal contenant un voisin de  $v$  sans contenir  $v$ .

**Théorème 73** (Scheffler [Sch90]). *Pour tout entier  $p \geq 1$  et tout arbre  $T$ ,  $\text{pw}(T) \geq p + 1$  si, et seulement si, il existe un sommet  $t$  de  $T$  ayant au moins trois branches de largeur arborescente linéaire au moins  $p$ .*

**Démonstration du lemme 41.** Par induction sur  $p \geq 1$ , le résultat étant vrai pour  $p = 1$ . Si la largeur arborescente linéaire de chaque arbre  $T_i$  est  $p$ , il n'est pas difficile de construire un ordre  $L$  du dual faible de  $\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  de sommet-séparation au plus  $p + 1$  : numérotions les sommets de  $T_1$  selon un ordre optimal de  $T_1$ , puis numérotions le sommet  $s_1$ , i.e. posons  $L(s_1) := |V(T_1)| + 1$ . Numérotions ensuite les sommets de  $T_2$  selon un ordre optimal  $L_2$  tel que l'unique voisin de  $s_2$  dans  $T_2$  possède la plus grande image par  $L$  définie jusqu'à présent (un tel ordre existe par construction). Le sommet  $s_2$  est ensuite numéroté, et une numérotation analogue est effectuée pour les sommets de  $T_3$  et  $s_3$ . Ensuite, le sommet  $s$  est numéroté, puis les sommets de  $T_4$  selon un ordre optimal  $L_4$ , et enfin le sommet  $s_4$ . La sommet-séparation de l'ordre ainsi obtenu est au plus  $\max(2, p + 1) = p + 1$ .

La largeur arborescente linéaire du dual faible de  $\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  est strictement supérieure à  $p$  d'après le théorème 73 puisque le sommet  $s$  possède quatre branches de largeur arborescente linéaire  $p$ .  $\square$

**Lemme 42.** *Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soit  $H_i$  un graphe planaire extérieur de largeur arborescente linéaire  $p \geq 1$ . Alors*

$$\text{pw}(\mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)) = p + 2.$$

**Démonstration.** Notons  $H := \mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$ .

**Montrons que la largeur arborescente linéaire de  $H$  est au moins  $p + 2$  :** soit  $L$  un ordre de  $H$ , montrons que la sommet-séparation de  $(H, L)$  est au moins  $p + 2$ . Le sous-graphe de  $H$  induit par la suppression des sommets du 4-cycle  $S$  est l'union disjointe des 4 graphes  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ , chacun ayant largeur arborescente linéaire  $p$ . Précisons ici que ces quatre graphes vont jouer un rôle symétrique dans cette partie de la preuve. Ainsi, supposons que le sommet  $a$  tel que  $L(a) = 1$  et le sommet  $b$  tel que  $L(b) = |V(H)|$  soient respectivement dans  $V(H_1) \cup V(S)$  et  $V(H_1) \cup V(H_2) \cup V(S)$ . Par hypothèses, il existe  $i \in L(V(H_4))$  tel qu'il y ait  $p$  sommets  $x$  de  $H_4$  avec  $L(x) > i$ , chacun ayant un voisin  $y$  dans  $H_4$  avec  $L(y) \leq i$ . Comme un entier similaire existe pour  $H_3$ , supposons, quitte à inverser les rôles de  $H_3$  et  $H_4$ , qu'il existe un sommet  $v \in V(H_3)$  tel que  $L(v) > i$ . Soit  $X := \cup_{j=1}^3 V(H_j) \cup V(S)$ . Nous disons qu'un sommet  $x \in X$  est un *sommet- $m$*  si  $L(x) < i$  et un *sommet- $M$*  si  $L(x) > i$ . En particulier, le sommet  $a$  est un sommet- $m$ , et les sommets  $b$  et  $v$  sont des sommets- $M$ . Une arête est *mauvaise* si elle relie un sommet- $m$  à un sommet- $M$ . Une *mauvaise paire* est une paire de mauvaises arêtes qui sont soit disjointes, soit incident à un même sommet- $m$ . Soit  $Q$  le sous-graphe de  $H$  induit par les sommets de  $X$ . L'existence d'une mauvaise paire dans  $Q$  entraîne que  $\text{vs}(H, L) \geq \text{vs}(H_4) + 2 = p + 2$ .

Or, le graphe  $Q$  est 2-connexe, donc d'après le lemme de l'éventail, il existe dans  $Q$  deux chemins  $P_1$  et  $P_2$  respectivement de  $a$  à  $b$  et de  $a$  à  $v$ , qui sont sommet-disjoints sauf en  $a$ . Comme  $a$  est un sommet- $m$  et  $b$  et  $v$  sont des sommets- $M$ , il existe une mauvaise arête dans  $P_1$  et une mauvaise arête dans  $P_2$ . Les chemins  $P_1$  et  $P_2$  étant sommet-disjoints sauf en  $a$  qui est un sommet- $m$ , ces deux mauvaises arêtes forment

nécessairement une mauvaise paire. Enfin, cette mauvaise paire est bien disjointe de  $H_4$  car  $P_1$  et  $P_2$  le sont.

**Montrons que la sommet-séparation de  $H$  est au plus  $p + 2$  :** nous allons construire un ordre de  $H = \mathcal{C}(H_1, H_2, H_3, H_4)$  à partir d'ordres optimaux  $L_i$  de  $H_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Commençons par étiqueter tous les sommets de  $H_4$  selon l'ordre  $L_4$ . La sommet-séparation n'excède jamais  $p + 2$ , car les seuls sommets non étiquetés hors de  $H_4$  qui peuvent avoir des voisins étiquetés sont les sommets  $\beta$  et  $\gamma$ . Par construction, l'ordre optimal  $L_1$  de  $H_1$  peut être choisi de sorte que  $L_1(x_1) < L_1(y_1)$ . Étiquetons à présent les sommets de  $H_1$  selon l'ordre  $L_1$  jusqu'à ce que le sommet  $x_1$  soit étiqueté. Comme précédemment, la sommet-séparation n'excède pas  $p + 2$  lors de cette phase. Étiquetons alors le sommet  $\beta$ , ce qui ne change pas la sommet-séparation, puisque  $\beta$  possède exactement un voisin non étiqueté, c'est-à-dire  $\alpha$ . Finissons d'étiqueter les sommets de  $H_1$  en suivant l'ordre  $L_1$ . La sommet-séparation ne dépasse toujours pas  $p + 2$ , les seuls sommets non étiquetés ayant des voisins étiquetés étant  $\alpha$  et  $\gamma$ . Par construction encore, l'ordre optimal  $L_2$  de  $H_2$  peut être choisi de sorte que  $L_2(x_2) < L_2(y_2)$ . En conséquence, il est possible d'appliquer la même procédure afin de numéroté les sommets de  $H_2$  : les sommets sont numérotés suivant l'ordre  $L_2$  jusqu'à ce que  $x_2$  soit numéroté. Le sommet  $\alpha$  est numéroté, et ensuite seulement le reste des sommets de  $H_2$ , toujours selon  $L_2$ . Enfin, les sommets de  $H_3$  sont numérotés en suivant l'ordre  $L_3$  (la sommet-séparation ne dépasse pas  $p + 2$ , car les seuls sommets non numérotés hors de  $H_3$ , avec éventuellement des voisins numérotés sont  $\delta$  et  $\gamma$ ), puis  $\delta$  et  $\gamma$  sont numérotés. La sommet-séparation de l'ordre ainsi construit est au plus  $p + 2$ . □

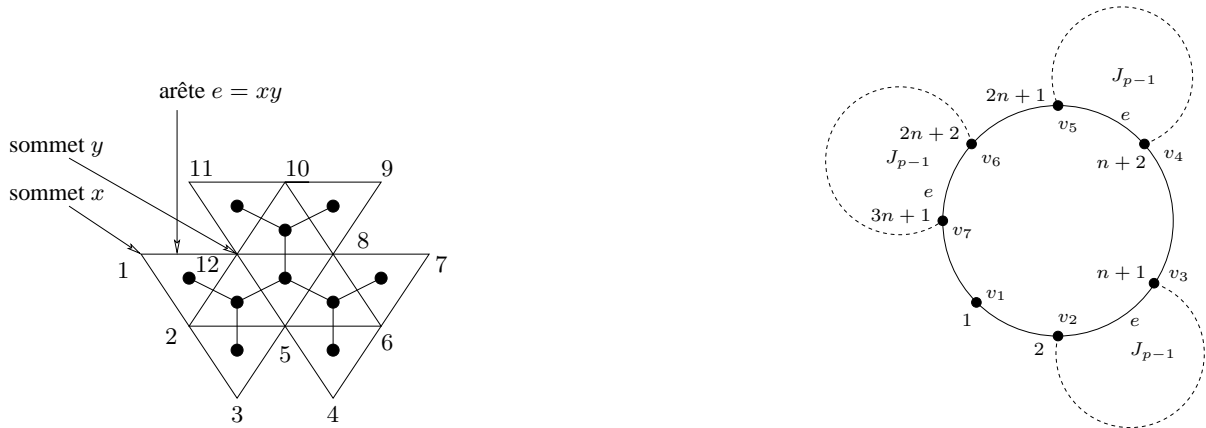
Pour prouver le théorème 72, nous utiliserons les graphes suivants. Soit  $J_3$  le graphe de la figure 8.5(a) : la largeur arborescente linéaire du dual faible de  $J_3$  est égale à deux, et celle  $J_3$  à trois. En outre, comme le montre la figure 8.5(a), il existe un ordre optimal de  $J_3$  tel qu'une arête incidente à la face externe relie le sommet étiqueté 1 et celui étiqueté 12.

Construisons à présent le graphe  $J_p$  à partir de  $J_{p-1}$  pour un  $p \geq 4$  fixé. Pour cela, nous supposons qu'il existe un ordre optimal  $L'$  de  $J_{p-1}$  tel qu'une arête  $e = xy$  incidente à la face externe vérifie  $L'(x) = 1$  et  $L'(y) = |V(J_{p-1})|$ . Considérons un cycle d'ordre 7,  $v_1v_2 \dots v_7v_1$ , ainsi que trois copies disjointes de  $J_{p-1}$ , notées  $J^1, J^2$  et  $J^3$ . L'arête  $e$  de  $J^1$  est identifiée avec l'arête  $v_2v_3$  du cycle, celle de  $J^2$  avec l'arête  $v_4v_5$  et celle de  $J^3$  avec  $v_6v_7$  (voir figure 8.5(b)). À chaque fois, le sommet  $x$  de l'arête  $e$  est identifié avec le sommet  $v_i$  de plus petit indice (donc, respectivement,  $v_2, v_4$  et  $v_6$ ).

Le lemme suivant prouve que la construction peut-être faite pour toute valeur de  $p \geq 3$ , et que la largeur arborescente linéaire du graphe planaire extérieur 2-connexe  $J_p$  est égale à  $p$ , qui est aussi la valeur de la largeur arborescente linéaire de son dual géométrique.

**Lemme 43.** *Pour tout entier  $p \geq 3$ , la largeur arborescente linéaire du graphe planaire extérieur 2-connexe  $J_p$  est égale à  $p$ . De plus, il existe un ordre de  $J_p$  de sommet-séparation  $p$  tel qu'une arête incidente à la face externe relie les sommets de plus petit et de plus grand ordre. Enfin, la largeur arborescente linéaire du dual géométrique de  $J_p$  est aussi égale à  $p$ .*

**Démonstration.** La largeur arborescente linéaire du dual géométrique de  $J_3$  est trois. Supposons que celle du dual géométrique de  $J_{p-1}$  soit  $p - 1$ , pour un certain entier  $p \geq 4$ . Clairement, par le théorème 73, la largeur arborescente linéaire du dual faible de  $J_p$  est au moins celle de



(a)  $J_3$  et son dual faible.

(b) Obtention de  $J_p$  à partir de  $J_{p-1}$ . Un ordre optimal vérifiant la condition souhaitée est donné,  $n$  désignant le nombre de sommets de  $J_{p-1}$ .

FIG. 8.5. La famille de graphe  $(J_p)_{p \geq 3}$ .

$J_{p-1}$  plus un. En outre, une décomposition de cette largeur s'obtient à partir d'une décomposition optimale du dual faible de  $J_{p-1}$  en ajoutant le sommet correspondant au cycle  $v_1v_2 \dots v_7v_1$  à tous les ensembles de sommets. Ou bien, de façon équivalente, à partir d'un ordre optimal du dual faible de  $J_{p-1}$ , en ordonnant les faces de chaque  $J^i$  suivant cet ordre (les faces de  $J^1$  étant inférieures à celles de  $J^2$ , elles-mêmes inférieures à celles de  $J^3$ ), la face délimitée par le cycle  $v_1v_2 \dots v_7v_1$  étant la plus grande.

La largeur arborescente linéaire de  $J_p$  est au moins celle de son dual géométrique par le théorème 68, donc  $\text{pw}(J_p) \geq p$ .

Prouvons l'existence de l'ordre désiré par récurrence sur  $p$  : le résultat étant vrai pour  $p = 3$  comme indiqué par la figure 8.5(a).

L'ordre  $L$  pour  $J_p$  est obtenu de la façon suggérée par la figure 8.5(b) : en notant  $n$  le nombre de sommets de  $J_{p-1}$ , posons  $L(v_1) := 1$  et  $L(v_7) := 3n + 1$ . D'après l'hypothèse d'induction, soit  $L^i$  un ordre optimal de  $J^i$  vérifiant la condition du lemme. Les sommets de chaque  $J^i$  sont ordonnés selon  $L^i$ , respectivement de deux à  $n + 1$ , de  $n + 2$  à  $2n + 1$  et de  $2n + 2$  à  $3n + 1$ . Clairement, la sommet séparation de l'ordre obtenu est  $\max(2, \text{vs}(J_{p-1}) + 1) = \max(2, p - 1 + 1) = p$ . De plus, l'arête  $v_1v_7$  vérifie la condition souhaitée.  $\square$

**Démonstration du théorème 72.** La preuve est par récurrence sur  $p \geq 1$ . Si  $p = 1$ , deux 4-cycles partageant une arête et  $G_1$  donnent le résultat souhaité lorsque  $k = 1$  et  $k = 2$  respectivement.

Supposons le résultat vrai pour  $p - 1 \geq 1$ , et soit  $k \in \{1, 2, \dots, p + 1\}$ . Si  $k = 1$ , alors le graphe  $J_p$  convient d'après le lemme 43. Si  $k \in \{2, 3, \dots, p + 1\}$  alors  $k - 1 \in \{1, 2, \dots, p\}$ , donc d'après l'hypothèse d'induction, il existe un graphe planaire extérieur 2-connexe de largeur arborescente linéaire  $(p - 1) + (k - 1)$  tel que la largeur arborescente linéaire de son dual faible soit  $p - 1$ . Alors d'après les lemmes 42 et 41, la largeur arborescente linéaire de  $\mathcal{C}(H, H, H, H)$  est  $p + k$  et celle de son dual faible est  $p$ , comme souhaité. Notons que la construction de  $\mathcal{C}(H, H, H, H)$  est réalisable car une conséquence immédiate du théorème 74

donné dans la section suivante est que tout arbre possède un ordre optimal tel que le dernier sommet numéroté soit une feuille.  $\square$

### 8.3. Borne supérieure

Nous présentons dans cette section un algorithme qui, étant donné un graphe planaire extérieur 2-connexe, renvoie un ordre de  $G$  de sommet-séparation au plus  $2\text{pw}(\mathcal{T}_G) + 1$ . Comme  $\text{pw}(\mathcal{T}_G) = \text{pw}(G^*) - 1$  pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$  (d'après le lemme 40), ceci établit le théorème 71.

Une *chenille* est un arbre dans lequel un seul chemin, appelé l'*échine*, est incident à (ou contient) toutes les arêtes. Les chenilles sont les seuls arbres de sommet-séparation un : la sommet-séparation de toute chenille est clairement un, et si un arbre  $T$  n'est pas une chenille, alors il contient une araignée avec trois pattes de longueur deux (figure 8.6(a)). Or la sommet-séparation d'un tel arbre est au moins deux, d'après le théorème 73.

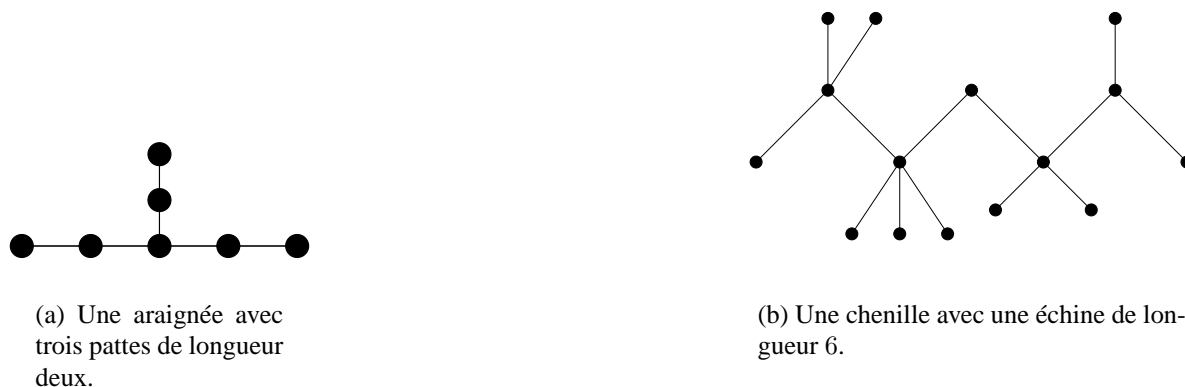


FIG. 8.6. Araignées et chenilles.

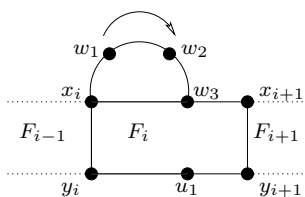
**Proposition 45.** Soit  $G$  un graphe planaire extérieur 2-connexe dont le dual faible est une chenille. La sommet-séparation de  $G$  est au plus trois.

**Démonstration.** Nous donnons une procédure qui renvoie un ordre optimal pour le graphe  $G$ . Soit  $P := v_1v_2 \dots v_k$  un plus long chemin de  $\mathcal{T}_G$ . Notons  $F_i$  la face de  $G$  correspondant au sommet  $v_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Numérotions 1 un sommet  $v$  de  $F_1$  de degré deux (un tel sommet existe car  $G$  est un graphe planaire extérieur 2-connexe et  $v_1$  est une feuille de  $\mathcal{T}_G$ ). Ensuite, tout sommet de  $F_1$  de degré deux adjacent à un sommet numéroté est numéroté à son tour.

À présent, la procédure suivante est appliquée, en notant  $V(F_{i-1}) \cap V(F_i) = \{x_i, y_i\}$  et  $V(F_i) \cap V(F_{i+1}) = \{x_{i+1}, y_{i+1}\}$ , voir figure 8.7.

- 1: **pour**  $i = 2$  à  $k - 1$  **faire**
- 2: soit  $P := x_iw_1 \dots w_jx_{i+1}$  le chemin de  $G$  de  $x_i$  à  $x_{i+1}$  constitué d'arêtes incidentes à la face externe : les sommets de  $P$  sont numérotés de  $x_i$  à  $w_k$  (voir figure 8.7)
- 3: soit  $P' := y_iu_1 \dots u_t y_{i+1}$  le chemin de  $G$  de  $y_i$  à  $y_{i+1}$  constitué d'arêtes incidentes à la face externe : les sommets de  $P'$  sont numérotés de  $y_i$  à  $u_t$  (voir figure 8.7)
- 4: **fin pour**

Enfin, les sommets de  $x_k$  à  $y_k$  sont numérotés dans le sens indirect.

FIG. 8.7. Sommets à l'étape  $i$ .

L'ordre obtenu est optimal pour  $G$ , et en particulier sa sommet-séparation est au plus trois.  $\square$

Précisons que la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur 2-connexe est deux si, et seulement si, son dual faible est un chemin. Notons également que la complexité en temps de la procédure de la proposition précédente est linéaire. Enfin, les graphes planaires extérieurs 2-connexes dont le dual faible est une chenille ne sont pas les seuls graphes planaires extérieurs 2-connexes dont la largeur arborescente linéaire est au plus trois (voir la figure 8.8)

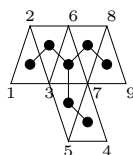


FIG. 8.8. La largeur arborescente linéaire du graphe planaire extérieur triangulé dont le dual faible est une araignée avec trois pattes de longueur deux est trois.

Le résultat suivant concernant la largeur arborescente linéaire des arbres nous sera utile.

**Théorème 74** (Ellis, Sudborough et Turner [EST94]). *Pour tout arbre  $T$ , et tout entier  $p \geq 2$ ,  $\text{pw}(T) \leq p$  si, et seulement si, il existe un chemin  $P$  tel que la largeur arborescente linéaire de toute composante connexe de la forêt induite par la suppression des sommets de  $P$  soit au plus  $p - 1$ .*

Considérons la procédure récursive donnée par l'algorithme 1. Elle calcule un ordre de  $G$ , stocké dans la liste  $l$  qui est initialisée par  $l(v) := \infty$  pour tout sommet  $v \in V(G)$  (signifiant qu'au départ, aucun sommet n'est numéroté).

Notons que ce qui est fait lignes 16–17 et 32–33 revient à numéroté tous les sommets de  $H$  sauf  $y$  (ou  $y'$ , respectivement), et à garder  $s$  à jour.

Le lemme suivant suffit à établir le théorème 71.

**Lemme 44.** *Pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$  tel que la largeur arborescente linéaire de son dual faible  $T$  soit  $p$ , la procédure `LAYOUT` de l'algorithme 1 retourne un ordre avec sommet-séparation au plus  $2p + 1$ .*

**Démonstration.** L'algorithme 1 assigne un nombre unique à chaque sommet de  $G$ .

Pour la sommet-séparation de l'ordre obtenu, la preuve est par induction sur la largeur arborescente linéaire  $p$  de  $T$ . Si  $p$  vaut un, alors  $T$  est une chenille et la proposition 45 fournit la conclusion.

Supposons que pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe tel que la largeur arborescente linéaire de son dual faible soit au plus  $p - 1$ , la procédure `LAYOUT` de l'algorithme 1 renvoie un ordre avec sommet-séparation au plus  $2p - 1$ . Soit  $G$  un graphe planaire extérieur tel que



**Algorithme 1** Procédure Layout

**Entrée:** un graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ , une liste  $l$  et un entier  $s$ .

**Sortie:** retourne l'entier  $j$ , qui est égal au plus grand label utilisé plus un. Chaque sommet  $v$  de  $G$  se voit attribuer un nombre unique, stocké dans  $l(v)$ .

- 1: **si** le dual faible  $T$  de  $G$  est une chenille **alors**
- 2:   le numéroté en utilisant la proposition 45 et en commençant avec le label  $s$ .
- 3:   **renvoyer**  $s + |V(G)|$ .
- 4: **fin si**
- 5: Trouver un chemin  $P := v_1v_2 \dots v_k$  de  $T$  comme dans le théorème 74, avec la propriété additionnelle que ses sommets terminaux sont des feuilles. Notons  $F_i$  la face de  $G$  correspondant au sommet  $v_i$  de  $P$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .
- 6: Soit  $v$  un sommet de degré deux de la face  $F_1$ , et notons  $x$  et  $x'$  ses voisins dans le sens indirect et dans le sens direct, respectivement {un tel sommet  $v$  existe toujours}
- 7:  $l(v) := s$
- 8:  $s := s + 1$
- 9: **pour**  $i = 1$  à  $k$  **faire** {dans toute la suite,  $y$  et  $y'$  sont respectivement le voisin dans le sens indirect de  $x$  et le voisin dans le sens direct de  $x'$  sur  $F_i$ }
- 10:   **tant que**  $x \notin V(F_{i+1})$  **faire**
- 11:     **si**  $x$  possède au plus un voisin non numéroté différent de  $x'$  **alors**
- 12:        $l(x) := s$
- 13:        $s := s + 1$
- 14:     **sinon**
- 15:       soit  $H$  le plus grand sous-graphe 2-connexe de  $G$  dont l'intersection avec  $F_i$  est  $\{x, y\}$ .
- 16:        $s := \text{Layout}(H, l, s)$
- 17:        $l(y) := \infty$
- 18:     **fin si**
- 19:     **si**  $y == x'$  **alors**
- 20:        $l(x') := s$
- 21:       **renvoyer**  $s + 1$
- 22:     **sinon**
- 23:        $x := y$
- 24:     **fin si**
- 25:   **fin tant que**
- 26:   **tant que**  $x' \notin V(F_{i+1})$  **faire**
- 27:     **si**  $x'$  possède au plus un voisin non numéroté (différent de  $x$ ) **alors**
- 28:        $l(x') := s$
- 29:        $s := s + 1$
- 30:     **sinon**
- 31:       soit  $H$  le plus grand sous-graphe 2-connexe de  $G$  dont l'intersection avec  $F_i$  est  $\{x, y\}$ .
- 32:        $s := \text{Layout}(H, l, s)$
- 33:        $l(y') := \infty$
- 34:     **fin si**
- 35:      $x' := y'$
- 36:   **fin tant que**
- 37: **fin pour**

la largeur arborescente linéaire de son dual faible soit  $p$ . Prouvons que la procédure `LAYOUT` renvoie un ordre de  $G$  de sommet-séparation au plus  $2p + 1$ .

Arrêtons la procédure à n'importe quel moment, et notons  $F$  l'ensemble des sommets non numérotés ayant au moins un voisin numéroté. Si aucun sous-graphe  $H$  n'a déjà été traité, alors l'ensemble  $F$  est composé des sommets  $x$  et  $x'$ , donc sa taille est au plus  $2p + 1$ . Si la numérotation d'un sous-graphe  $H$  vient juste d'être effectuée, alors  $F$  contient également deux sommets, à savoir  $x'$  et  $y$  ou bien  $x$  et  $y'$ .

Supposons à présent qu'un sous-graphe  $H$  soit en cours de numérotation. Sans perte de généralité, disons que son intersection avec la face courante  $F_i$  est  $\{x, y\}$ . Il y a un seul sommet de  $F$  n'appartenant pas à  $H$  : le sommet  $x'$ . Ainsi, tant que  $|F \cap V(H)| \leq 2p$ , le cardinal de  $F$  est au plus  $2p + 1$ , comme souhaité. Puisque que la sommet-séparation de l'ordre utilisé pour  $H$  est au plus  $2p - 1$ , un problème apparaît uniquement si  $|F \cap (V(H) \setminus \{x, y\})| = 2p - 1$ , et  $x, x'$  et  $y$  appartiennent aussi à  $F$ . Une telle situation implique notamment que le sommet  $y$  aurait dû être numéroté selon l'ordre de  $H$ , mais ne l'a pas été, conformément à l'algorithme. Mais, dans ce cas, pour l'ordre de  $H$ , le sommet  $x$  n'est pas numéroté et possède au moins un voisin numéroté :  $y$ . Donc le nombre de sommets de  $H$  non numérotés et possédant un voisin numéroté dans  $H$  est  $|F \cap (V(H) \setminus \{x, y\})| + 1 = 2p$ , contradiction.  $\square$

Comme il est visible dans la preuve précédente, les sous-graphes  $H$  (numérotés par un appel récursif lignes 16 et 32) peuvent en réalité être numérotés selon n'importe quel ordre avec sommet-séparation au plus  $2p - 1$ .

**Corollaire 11.** *Pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ ,  $\text{pw}(\mathcal{T}_G) + 1 \leq \text{pw}(G) \leq 2\text{pw}(\mathcal{T}_G) + 1$ . En outre, ces bornes sont serrées.*

Il est prouvé dans [Sch90] que la largeur arborescente linéaire d'un arbre à  $f$  sommets est au plus  $\log_3(2f + 1)$ .

**Corollaire 12.** *La largeur arborescente linéaire de tout graphe planaire extérieur 2-connexe avec  $f$  faces internes est au plus  $2\log_3(2f + 1) + 1$ .*

**Proposition 46.** *La complexité en temps de l'algorithme 1 est  $\mathcal{O}(n \log(n))$ .*

**Démonstration.** Il n'est pas difficile de voir que la complexité de l'algorithme 1 dépend principalement des appels récursifs et de la complexité de la ligne 5 (étant donné que trouver le dual faible d'un graphe planaire extérieur 2-connexe ainsi que déterminer si un arbre est une chenille prend un temps linéaire, tout comme la procédure de la proposition 45). Montrons d'abord que la complexité de l'algorithme 1 sans la ligne 5 est linéaire.

Un sommet  $x$  de la face  $F_i$  est directement numéroté durant le traitement de la face  $F_i$  s'il possède au plus un voisin non numéroté différent de  $x'$ , sinon il est numéroté dans un appel récursif, ou bien considéré à nouveau dans le traitement de la face  $F_{i+1}$ . Donc un sommet est considéré une fois par face interne à laquelle il appartient. En notant  $f$  le nombre de faces internes de  $G$ , le nombre d'étapes élémentaires est  $2(|E| - |V|) = 2(f - 1)$  (d'après la formule d'Euler), soit encore un nombre inférieur à  $2|V|$ .

Le calcul d'un chemin  $P$  comme dans le théorème 74, avec la propriété additionnelle que ces sommets terminaux soient des feuilles peut se faire en utilisant des techniques similaires à celles décrites dans [EST94, Yan85, MHG<sup>+</sup>88] permettant de calculer la sommet-séparation, la largeur de coupe et le nombre de chercheurs d'un arbre. Ceci peut ainsi être fait en temps linéaire. Enfin, la largeur arborescente linéaire d'un arbre à  $f$  sommets étant inférieure à  $\log_3(2f + 1)$  [Sch90], le calcul de tous les chemins prend un temps en  $\mathcal{O}(f \log_3(2f + 1))$ , c'est-à-dire  $\mathcal{O}(n \log(n))$ .  $\square$

Le théorème 71 fournit directement un algorithme d'approximation de la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur en temps linéaire car calculer l'arbre dual de  $G$  et sa largeur arborescente linéaire prend un temps linéaire. Un ordre correspondant est donné par l'algorithme 1, dont la complexité est  $\mathcal{O}(n \log(n))$ . Comme indiqué dans [BF02], il existe des arbres des graphes planaires extérieurs pour lesquels une représentation simple d'une décomposition linéaire nécessite un temps  $\Omega(n \log(n))$  pour être écrite. Skodinis [Sko03] a développé une représentation plus évoluée, de sorte que les décompositions linéaires puissent être décrites en temps linéaire. Nous n'avons pas essayé d'utiliser cette méthode pour l'algorithme 1, mais pensons qu'elle pourrait l'être afin de pré-calculer tous les chemins en temps linéaire, et réduire ainsi la complexité à  $\mathcal{O}(n)$ .

**Corollaire 13.** *Pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe  $G$ , l'algorithme 1 fournit en temps  $\mathcal{O}(n \log(n))$  un ordre de  $G$  avec sommet-séparation au plus  $2\text{pw}(G) - 1$ .*

## 8.4. Conclusion

Pour conclure, nous allons infirmer deux autres conjectures grâce aux techniques développées dans ce chapitre.

**Conjecture 16** (Bodlaender et Fomin [BF02]). *Pour tout graphe planaire 2-connexe  $G$ ,*

$$\text{pw}(G) \geq \text{pw}(G^*) - 1.$$

Avant de citer la seconde conjecture, nous avons besoin de deux définitions supplémentaires.

Considérons un ordre  $\sigma$  sur les arêtes d'un graphe  $G = (V, E)$ , et soit  $\delta(i)$  le nombre de sommets incidents à au moins deux arêtes  $e, e'$  telles que  $\sigma(e) \leq i$  et  $\sigma(e') > i$ . La *largeur linéaire* de  $(G, \sigma)$  est  $\max_{i \in \{1, 2, \dots, |E|\}} \delta(i)$ . La *largeur linéaire* de  $G$ , notée  $\text{lw}(G)$ , est le minimum des largeurs linéaires de  $(G, \sigma)$  pour tous les ordres  $\sigma$  sur les arêtes de  $G$ . Notons que si  $G$  a degré minimum au moins deux, alors  $\text{pw}(G) \leq \text{lw}(G) \leq \text{pw}(G) + 1$ . Pour un graphe planaire  $G$ , un *découpage*  $H$  de  $G$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  par une suite des opérations suivantes : considérer un sommet  $v$ , partitionner son voisinage en deux ensembles  $M$  et  $N$  et remplacer  $v$  par deux nouveaux sommets adjacents  $x$  et  $y$ . Relier en outre  $x$  à tous les sommets de  $M$  et  $y$  à tous les sommets de  $N$ .

**Conjecture 17** (Fomin [Fom03]). *Pour tout graphe planaire  $G$ , il existe un découpage  $H$  de degré maximum trois tel que  $\text{lw}(H) = \text{lw}(G)$ .*

Selon [Fom03], cette conjecture implique la précédente. Comme mentionné précédemment, Fomin a prouvé que la conjecture 16 est vraie lorsque le degré maximum du graphe planaire 2-connexe considéré est au plus trois.

Nous allons à présent utiliser la famille de graphes  $(G_p)_{p \geq 1}$  pour infirmer la conjecture 16, et donc aussi la conjecture 17.

Rappelons que la largeur arborescente linéaire d'un multigraphe  $G$  est égale à celle du graphe simple sous-jacent, noté  $\mathcal{U}(G)$ .

Soit  $uv$  une arête d'un graphe planaire 2-connexe  $G$ , notons  $F_1$  et  $F_2$  les deux faces incidentes à  $uv$  et  $f_1$  et  $f_2$ , respectivement, les sommets correspondants dans le dual  $G^*$  de  $G$ . Subdiviser  $i$  fois l'arête  $uv$  dans  $G$  (c'est-à-dire remplacer cette arête par un chemin induit de longueur  $i + 1$ ) revient à remplacer l'arête  $f_1 f_2$  du dual par  $i + 1$  arêtes parallèles.

Ceci étant, considérons  $G_p$ , et un plongement de  $G_p^*$  tel que  $G_p^{**} \simeq G_p$ . Notons  $o$  le sommet de  $G_p^*$  correspondant à la face externe de  $G_p$ , et  $H_p$  le graphe obtenu en subdivisant chaque

arête de  $G_p^*$  incidente à  $o$ . Notons que  $H_p$  est un graphe planaire simple et 2-connexe. D'après les remarques précédentes,  $\mathcal{U}(H_p^*) \simeq G_p$ , et donc  $\text{pw}(H_p^*) = \text{pw}(G_p)$ .

Pour toute face  $F$  de  $G_p$ , notons  $m(F)$  le nombre d'arêtes de  $F$  incidentes à la face externe, et soit  $m := \max_F m(F)$ .

**Lemme 45.** *Avec les notations précédentes,  $\text{pw}(H_p) \leq \text{pw}(G_p^*) + m = \text{pw}(G_p^*) + 3$ .*

**Démonstration.** Par définition de  $G_p$ , il est clair que  $m = 3$ . Considérons un ordre optimal des sommets de  $G^*$ ,  $l_1, \dots, l_n$ , et construisons un ordre  $L$  de  $H_p$  de sommet-séparation au plus  $\text{pw}(G^*) + m$ . Considérons l'ordre induit sur les sommets communs de  $G^*$  et  $H_p$  :  $(l_1, 0), (l_2, 0), \dots, (l_n, 0)$ . Ensuite, si un sommet  $(l_i, 0)$  possède  $j$  voisins non-numérotés, ceux-ci sont numérotés  $(l_i, 1), \dots, (l_i, j)$ . La sommet-séparation de cet ordre est au plus  $\text{pw}(G^*) + m$ .  $\square$

Si la conjecture 16 est vraie, alors  $\text{pw}(H_p) \geq \text{pw}(H_p^*) - 1 = \text{pw}(G_p) - 1$ . Néanmoins, par le lemme 45,  $\text{pw}(H_p) \leq \text{pw}(G_p^*) + 3$  donc  $\text{pw}(G_p^*) + 3 \geq \text{pw}(G_p) - 1$ , ce qui est faux pour  $p > 6$ .

Finissons avec un problème. Fomin et Thilikos [FT06] ont prouvé que, pour tout graphe planaire 3-connexe  $G$ , la largeur arborescente linéaire de  $G^*$  est au plus 6 fois celle de  $G$ .

**Problème 13.** *Est-il vrai qu'il existe une constante  $c$  telle que, pour tout graphe planaire 2-connexe  $G$ ,*

$$\frac{1}{2}\text{pw}(G^*) - c \leq \text{pw}(G) \leq 2\text{pw}(G^*) + c?$$

Si la réponse est affirmative, le facteur multiplicatif deux serait optimal, d'après le théorème 70.



# Bibliographie

- AH77. K. Appel and W. Haken. The solution of the four-color-map problem. *Sci. Amer.*, 237(4) :108–121, 152, 1977.
- AH89. K. Appel and W. Haken. *Every planar map is four colorable*, volume 98 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. With the collaboration of J. Koch.
- AHL02. N. Alon, S. Hoory, and N. Linial. The Moore bound for irregular graphs. *Graphs Combin.*, 18(1) :53–57, 2002.
- Alo00. N. Alon. Degrees and choice numbers. *Random Structures Algorithms*, 16(4) :364–368, 2000.
- Arc86. D. Archdeacon. Coverings of graphs by cycles. In *Proceedings of the seventeenth Southeastern international conference on combinatorics, graph theory, and computing*, volume 53, pages 7–14, 1986.
- Arc95. D. Archdeacon. Generalizations of tait coloring of cubic graphs, Problems in Topological Graph Theory. <http://www.emba.uvm.edu/~archdeac/problems/petecol.htm>, 1995.
- AT92. N. Alon and M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2) :125–134, 1992.
- AZ98. N. Alon and A. Zaks.  $T$ -choosability in graphs. *Discrete Appl. Math.*, 82(1-3) :1–13, 1998.
- BF02. H. L. Bodlaender and F. V. Fomin. Approximation of pathwidth of outerplanar graphs. *J. Algorithms*, 43(2) :190–200, 2002.
- BFFS02. L. Barrière, P. Flocchini, P. Fraigniaud, and N. Santoro. Capture of an intruder by mobile agents. In *14th ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA '02)*, Winnipeg, August 10-13, 2002.
- BK96. H. L. Bodlaender and T. Kloks. Efficient and constructive algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs. *J. Algorithms*, 21(2) :358–402, 1996.
- BK98. H. Breu and D. G. Kirkpatrick. Unit disk graph recognition is NP-hard. *Comput. Geom.*, 9(1-2) :3–24, 1998.
- BMT03. V. Bouchitté, F. Mazoit, and I. Todinca. Chordal embeddings of planar graphs. *Discrete Math.*, 273(1-3) :85–102, 2003. EuroComb'01 (Barcelona).
- Bod96. H. L. Bodlaender. A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM J. Comput.*, 25(6) :1305–1317, 1996.

- Bod98. H. L. Bodlaender. A partial  $k$ -arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theor. Comput. Sci.*, 209(1-2) :1–45, 1998.
- Bor77. O. V. Borodin. Criterion of chromaticity of a degree prescription (in Russian). In *Abstracts of IV All-Union Conf. on Theoretical Cybernetics (Novosibirsk)*, pages 127–128, 1977.
- Bor84. O. V. Borodin. Solution of the Ringel problem on vertex-face coloring of planar graphs and coloring of 1-planar graphs. *Metody Diskret. Analiz.*, 41 :12–26, 108, 1984.
- Bor92. O. V. Borodin. Cyclic coloring of plane graphs. *Discrete Math.*, 100(1-3) :281–289, 1992. Special volume to mark the centennial of Julius Petersen’s “Die Theorie der regulären Graphs”, Part I.
- Bor95. O. V. Borodin. A new proof of the 6 color theorem. *J. Graph Theory*, 19(4) :507–521, 1995.
- Bre67. R. L. Breisch. An intuitive approach to speleotopology. *Southwestern Cavers*, 6 :72–78, 1967.
- Bro41. R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37 :194–197, 1941.
- BS91. D. Bienstock and P. Seymour. Monotonicity in graph searching. *J. Algorithms*, 12(2) :239–245, 1991.
- BSZ99. O. V. Borodin, D. P. Sanders, and Y. Zhao. On cyclic colorings and their generalizations. *Discrete Math.*, 203(1-3) :23–40, 1999.
- CCJ90. B. N. Clark, C. J. Colbourn, and D. S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete Math.*, 86(1-3) :165–177, 1990.
- CCW86. L. J. Cowen, R. H. Cowen, and D. R. Woodall. Defective colorings of graphs in surfaces : partitions into subgraphs of bounded valency. *J. Graph Theory*, 10(2) :187–195, 1986.
- CGJ97. L. Cowen, W. Goddard, and C. E. Jesurum. Defective coloring revisited. *J. Graph Theory*, 24(3) :205–219, 1997.
- CHS06a. R. Corrêa, F. Havet, and J.-S. Sereni. Around a brooks’ like theorem for improper colouring. In preparation, 2006.
- CHS06b. D. Coudert, F. Huc, and J.-S. Sereni. Pathwidth of outerplanar graphs. *Journal of Graph Theory*, 2006. To appear.
- CHS06c. D. Coudert, F. Huc, and J.S. Sereni. Pathwidth of outerplanar graphs. Research report, INRIA Research Report 5804 and I3S Research Report I3S/RR-2006-02-FR, January 2006.
- CPPS05. D. Coudert, S. Pérennes, Q.-C. Pham, and J.-S. Sereni. Rerouting requests in WDM networks. In *Septièmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (AlgoTel’05)*, pages 17–20, Presqu’île de Giens, May 2005.
- CS06. D. Coudert and J.-S. Sereni. Graphs with small process number. In preparation, 2006.
- Die05. R. Diestel. *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.

- DJL93. A. Dessmark, K. Jansen, and A. Lingas. The maximum  $k$ -dependent and  $f$ -dependent set problem. In *Algorithms and computation (Hong Kong, 1993)*, volume 762 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 88–97. Springer, 1993.
- DKL87. N. Deo, S. Krishnamoorthy, and M. A. Langston. Exact and approximate solutions for the gate matrix layout problem. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, 6 :79–84, 1987.
- DMGG96. P. Danziger, E. Mendelsohn, M. J. Grannell, and T. S. Griggs. Five-line configurations in Steiner triple systems. *Utilitas Math.*, 49 :153–159, 1996.
- DPS02. J. Díaz, J. Petit, and M. Serna. A survey of graph layout problems. *ACM Computing Surveys*, 34(3) :313–356, 2002.
- DŠT05. Z. Dvořák, R. Škrekovski, and M. Tancer. List-colouring squares of sparse subcubic graphs. Technical Report IMFM-(2005)-PS-985, University of Ljubljana, Slovenia, 2005.
- Edm65. J. Edmonds. Minimum partition of a matroid into independent subsets. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69B :67–72, 1965.
- EH99. N. Eaton and T. Hull. Defective list colorings of planar graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 25 :79–87, 1999.
- ERT80. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979)*, Congress. Numer., XXVI, pages 125–157, Winnipeg, Man., 1980. *Utilitas Math.*
- EST94. J. A. Ellis, I. H. Sudborough, and J. S. Turner. The vertex separation and search number of a graph. *Inform. and Comput.*, 113(1) :50–79, 1994.
- EWHK98. T. Emden-Weinert, S. Hougardy, and B. Kreuter. Uniquely colourable graphs and the hardness of colouring graphs of large girth. *Combin. Probab. Comput.*, 7(4) :375–386, 1998.
- FKK96. U. Fößmeier, G. Kant, and M. Kaufmann. 2-visibility drawings of plane graphs. In *Proceedings of Graph Drawing '96*, volume 1190 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 155–168. Springer, Berlin, 1996.
- Fom03. F. V. Fomin. Pathwidth of planar and line graphs. *Graphs and Combinatorics*, 19(1) :91–99, 2003.
- FR94. G. Fan and A. Raspaud. Fulkerson's conjecture and circuit covers. *J. Combin. Theory Ser. B*, 61(1) :133–138, 1994.
- FT06. F. Fomin and D. M. Thilikos. On self duality of pathwidth in polyhedral graph embeddings. Report in Informatics 316, University of Bergen, March 2006.
- Ful71. D. R. Fulkerson. Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. *Math. Programming*, 1 :168–194, 1971.
- Gam86. A. Gamst. Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 35 :8–14, 1986.
- GJ79. M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.



- GK06. N. Gazit and M. Krivelevich. On the asymptotic value of the choice number of complete multi-partite graphs. *J. Graph Theory*, 52(2) :123–134, 2006.
- GLY98. R. Govindan, M. A. Langston, and X. Yan. Approximating the pathwidth of outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 68(1) :17–23, 1998.
- God88. L. A. Goddyn. *Cycle covers of graphs*. Ph. D. Thesis, University of Waterloo, 1988.
- Gol80. M. C. Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. With a foreword by Claude Berge, Computer Science and Applied Mathematics.
- Grö59. H. Grötzsch. Zur Theorie der diskreten Gebilde. VII. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe*, 8 :109–120, 1958/1959.
- GSW98. A. Gräf, M. Stumpf, and G. Weißenfels. On coloring unit disk graphs. *Algorithmica*, 20(3) :277–293, 1998.
- Gut92. S. Gutner. Choice numbers of graphs. Master's thesis, Tel Aviv University, 1992.
- GY92. J. R. Griggs and R. K. Yeh. Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(4) :586–595, 1992.
- Hal80. W. K. Hale. Frequency assignment : Theory and applications. *IEEE Proceedings*, 68(12) :1497–1514, December 1980.
- HJ95. M. Horňák and S. Jendroľ. On some properties of 4-regular plane graphs. *J. Graph Theory*, 20(2) :163–175, 1995.
- HK01. P. Hliněný and J. Kratochvíl. Representing graphs by disks and balls (a survey of recognition-complexity results). *Discrete Math.*, 229(1-3) :101–124, 2001. Combinatorics, graph theory, algorithms and applications.
- HKC83. T. F. Havel, I. D. Kuntz, and G. M. Crippen. The combinatorial distance geometry method for the calculation of molecular conformation. I. a new approach to an old problem. *J. Theor. Biol.*, 104(3) :359–381, oct 1983.
- HKMS06. F. Havet, R. J. Kang, T. Müller, and J.-S. Sereni. Circular choosability. Research report, INRIA Research Report 5957 and I3S Research Report I3S/RR-2006-21-FR, July 2006. Submitted to Journal of Graph Theory.
- HKS05. F. Havet, R. J. Kang, and J.-S. Sereni. Improper colouring of unit disk graphs. In *Proceedings of the 7th International Conference on Graph Theory (ICGT'05)*, volume 22 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pages 123–128. Elsevier, September 2005.
- HKS06. F. Havet, R. J. Kang, and J.-S. Sereni. Improper colouring of unit disk graphs. In preparation, 2006.
- HŠ04. F. Holroyd and M. Škoviera. Colouring of cubic graphs by Steiner triple systems. *J. Combin. Theory Ser. B*, 91(1) :57–66, 2004.
- HS06. F. Havet and J.-S. Sereni. Improper choosability of graphs and maximum average degree. *Journal of Graph Theory*, 52(3) :181–199, 2006.
- HSŠ06. F. Havet, J.-S. Sereni, and R. Škrekovski. 3-facial colouring of plane graphs. Research report, INRIA Research Report 5943 and I3S Research Report I3S/RR-2006-20-FR, July 2006. Submitted to SIAM Journal on Discrete Mathematics.

- IL05. M. Isenburg and P. Lindstrom. Streaming meshes. In *Proceedings of Visualization'05*, pages 231–238, October 2005.
- Jae75. F. Jaeger. On nowhere-zero flows in multigraphs. In *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference*, volume XV of *Congr. Numer.*, pages 373–378, 1975.
- Jae79. F. Jaeger. Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 26(2) :205–216, 1979.
- JLR00. S. Janson, T. Łuczak, and A. Rucinski. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- JT95. T. R. Jensen and B. Toft. *Graph coloring problems*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- Kin92. N. G. Kinnarsley. The vertex separation number of a graph equals its pathwidth. *Inform. Process. Lett.*, 42(6) :345–350, 1992.
- KKN05. T. Kaiser, D. Král', and S. Norine. Unions of perfect matchings in cubic graphs. In *Proceedings of the 7th International Conference on Graph Theory (ICGT'05)*, volume 22 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pages 341–345. Elsevier, September 2005.
- KMP<sup>+</sup>06. D. Král', E. Máčajova, O. Pangrác, A. Raspaud, J.-S. Sereni, and M. Škoviera. Group-constrained edge-colorings of cubic graphs. Research report, ITI Research Report 2006-XX, 2006.
- KMS05a. R. J. Kang, T. Müller, and J.-S. Sereni. Improper colouring of (random) unit disk graphs. In *Proceedings of European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2005)*, volume AE of *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 193–198, September 2005.
- KMŠ05b. D. Král', T. Madaras, and R. Škrekovski. Cyclic, diagonal and facial colorings. *European J. Combin.*, 26(3-4) :473–490, 2005.
- KMS06. R. J. Kang, T. Müller, and J.-S. Sereni. Improper colouring of (random) unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 2006. To appear in the Special Issue devoted to EuroComb 2005. Available as INRIA Research Report 5761 and I3S Research Report I3S/RR-2005-35-FR.
- KP86. L. M. Kirousis and C. H. Papadimitriou. Searching and pebbling. *Theoret. Comput. Sci.*, 47(2) :205–218, 1986.
- LaP93. A. S. LaPaugh. Recontamination does not help to search a graph. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 40(2) :224–245, 1993.
- Lap99. D. Lapoire. *Structuration des graphes planaires*. PhD thesis, Université de Bordeaux, France, 1999.
- LH02. R. Leese and S. Hurley, editors. *Methods and Algorithms for Radio Channel Assignment*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- Mac78. V. MacDonald. The cellular concept. *The Bell System Technical Journal*, 58(1) :15–43, 1978.
- MHG<sup>+</sup>88. N. Megiddo, S. L. Hakimi, M. R. Garey, D. S. Johnson, and C. H. Papadimitriou. The complexity of searching a graph. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 35(1) :18–44, 1988.

- Mia03. Z. Miao. Improper choosability of graphs embedded on the surface of genus  $r$ . *Discrete Math.*, 269(1-3) :311–314, 2003.
- Mit79. S. L. Mitchell. Linear algorithms to recognize outerplanar and maximal outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 9(5) :229–232, 1979.
- MM99. T. A. McKee and F. R. McMorris. *Topics in intersection graph theory*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- MM05. C. J. H. McDiarmid and T. Müller. Colouring random geometric graphs. In *Proceedings of European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2005)*, volume AE of *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 1–4, September 2005.
- MM06. C. J. H. McDiarmid and T. Müller. On the chromatic number of random geometric graphs. In preparation, 2006.
- Moh03. B. Mohar. Choosability for the circular chromatic number. <http://www.fmf.uni-lj.si/mohar/Problems/P0201ChoosabilityCircular.html>, 2003.
- MR99. C. J. H. McDiarmid and B. Reed. Colouring proximity graphs in the plane. *Discrete Math.*, 199(1-3) :123–137, 1999.
- MR00. C. J. H. McDiarmid and B. Reed. Channel assignment and weighted coloring. *Networks*, 36(2) :114–117, 2000.
- MRŠ05. E. Máčajová, A. Raspaud, and M. Škoviera. Fano colourings of cubic graphs and the Fulkerson Conjecture. In *Proceedings of the 7th International Conference on Graph Theory (ICGT'05)*, volume 22 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pages 333–339. Elsevier, September 2005.
- MŠ05. E. Máčajová and M. Škoviera. Fano colourings of cubic graphs and the Fulkerson conjecture. *Theoret. Comput. Sci.*, 349(1) :112–120, 2005.
- Mül05. T. Müller. On two point concentration in random geometric graphs. Manuscript, 2005.
- OP69. Ø. Ore and M. D. Plummer. Cyclic coloration of plane graphs. In *Recent Progress in Combinatorics (Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics, 1968)*, pages 287–293. Academic Press, New-York, 1969.
- Par78a. T. D. Parsons. Pursuit-evasion in a graph. In *Theory and applications of graphs (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976)*, pages 426–441. Lecture Notes in Math., Vol. 642. Springer, Berlin, 1978.
- Par78b. T. D. Parsons. The search number of a connected graph. In *Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1978)*, Congress. Numer., XXI, pages 549–554, Winnipeg, Man., 1978. Utilitas Math.
- Pee91. R. Peeters. On coloring  $j$ -unit sphere graphs. Technical Report FEW 512, Economics Department, Tilburg University, 1991.
- Pen02. M. D. Penrose. Focusing of the scan statistic and geometric clique number. *Adv. in Appl. Probab.*, 34(4) :739–753, 2002.

- Pen03. M. D. Penrose. *Random Geometric Graphs*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- Pha04. Q. C. Pham. Etude d'un problème algorithmique intervenant dans la reconfiguration des réseaux WDM. Internship Report of Magistère d'Informatique, directed by D. Coudert and S. Pérennes, ENS Paris, INRIA Sophia-Antipolis, 2004.
- PT98. A. Papakostas and I. G. Tollis. Orthogonal drawings of high degree graphs with small area and few bends. In *Proceedings of 5th Workshop on Algorithms and Data Structures*, volume 1272 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 354–367. Springer, Berlin, 1998.
- Ree97. B. Reed. Treewidth and tangles : an new connectivity measure and some applications. In R. A. Bayley, editor, *Surveys in Combinatorics*, pages 87–162. Cambridge University Press, 1997.
- Rob89. F. S. Roberts. From garbage to rainbows : Generalizations of graph colorings and their applications. In O. R. Oellermann Y. Alavi, G. Chartrand and A. J. Schwenk, editors, *Proceedings of the Sixth International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, New-York, 1989. John Wiley.
- RS83. N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. I. Excluding a forest. *J. Combin. Theory Ser. B*, 35(1) :39–61, 1983.
- RS84. N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. III. Planar tree-width. *J. Combin. Theory Ser. B*, 36(1) :49–64, 1984.
- Sch78. T. J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. In *Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, Calif., 1978)*, pages 216–226. ACM, New York, 1978.
- Sch90. P. Scheffler. A linear algorithm for the pathwidth of trees. In R. Henn R. Bodendiek, editor, *Topics in Combinatorics and Graph Theory*, pages 613–620. Physica-Verlag Heidelberg, 1990.
- Sch91. P. Scheffler. Optimal embedding of a tree into an interval graph in linear time. In J. Nešetřil and M. Fiedler, editors, *Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity (Prachatice, 1990)*, volume 51 of *Ann. Discrete Math.*, pages 287–291. North-Holland, 1991.
- Sey79. P. D. Seymour. On multicolourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 38(3) :423–460, 1979.
- Sko00. K. Skodinis. Computing optimal linear layouts of trees in linear time. In *Algorithms—ESA 2000 (Saarbrücken)*, volume 1879 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 403–414. Springer, Berlin, 2000.
- Sko03. K. Skodinis. Construction of linear tree-layouts which are optimal with respect to vertex separation in linear time. *J. Algorithms*, 47(1) :40–59, 2003.
- Škr99a. R. Škrekovski. A Grötzsch-type theorem for list colourings with impropriety one. *Combin. Probab. Comput.*, 8(5) :493–507, 1999.
- Škr99b. R. Škrekovski. List improper colourings of planar graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 8(3) :293–299, 1999.
- Škr00. R. Škrekovski. List improper colorings of planar graphs with prescribed girth. *Discrete Math.*, 214(1-3) :221–233, 2000.

- SU97. E. R. Sheiermann and D. H. Ullman. *Fractionnal Graph Theory : A Rationnal Approach to the Theory of Graphs*. Wiley-Intersciences series, 1997.
- Sys79. M. M. Sysło. Characterisations of outerplanar graphs. *Discrete Math.*, 26(1) :47–53, 1979.
- SZ96. D. P. Sanders and Y. Zhao. On  $d$ -diagonal colorings. *J. Graph Theory*, 22(2) :155–166, 1996.
- SZ98. D. P. Sanders and Y. Zhao. On  $d$ -diagonal colorings of embedded graphs of low maximum face size. *Graphs Combin.*, 14(1) :81–94, 1998.
- SZ01. D. P. Sanders and Y. Zhao. A new bound on the cyclic chromatic number. *J. Combin. Theory Ser. B*, 83(1) :102–111, 2001.
- Tho94. C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62(1) :180–181, 1994.
- Tut61. W. T. Tutte. A theory of 3-connected graphs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math.*, 23 :441–455, 1961.
- Tut84. W. T. Tutte. *Graph theory*, volume 21 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 1984. With a foreword by C. St. J. A. Nash-Williams.
- WG86. M. S. Waterman and J. R. Griggs. Interval graphs and maps of DNA. *Bull. Math. Biol.*, 48(2) :189–195, 1986.
- WLY06. G. Wang, G. Liu, and J. Yu. Circular list colorings of some graphs. *J. Appl. Math. Comput.*, 20(1-2) :149–156, 2006.
- WW77. D. L. Wang and P. Wang. Discrete isoperimetric problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 32(4) :860–870, 1977.
- Yan85. M. Yannakakis. A polynomial algorithm for the min-cut linear arrangement of trees. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 32(4) :950–988, 1985.
- Zhu05. X. Zhu. Circular choosability of graphs. *J. Graph Theory*, 48(3) :210–218, 2005.



# Résumé

Cette thèse comporte trois parties. Dans la première partie, un problème d'allocation de fréquences, proposé par Alcatel, est modélisé en termes de coloration de graphes : un graphe est  $k$ -improprement  $l$ -colorable s'il est possible, étant données  $l$  couleurs, d'attribuer une couleur à chacun de ses sommets de sorte que chaque sommet ait au plus  $k$  voisins de la même couleur que lui. Différentes problématiques sont ensuite étudiées : la coloration impropre (et la choisissabilité impropre) des graphes de densité bornée (englobant le cas des graphes de genre borné et de maille donnée), celle des graphes d'intersection de disques unitaires (y compris pour des instances aléatoires, et pour des ensembles de points infinis), ainsi que la coloration impropre pondérée des sous-graphes du réseau triangulaire.

La deuxième partie regroupe différents problèmes de colorations de graphes, plus ou moins reliés au problème d'allocation de fréquences, pour lesquels nous avons obtenu de nouveaux résultats. Il s'agit de la coloration 3-faciale des graphes planaires, de la choisissabilité circulaire et de diverses généralisations de l'arête-coloration des graphes cubiques, en particulier par des éléments de groupes abéliens, et des triplets de Steiner.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons à un problème de reroutage de requêtes, sans perte de service, dans les réseaux WDM. Dans un premier temps, un nouvel invariant des graphes est introduit afin de modéliser cette question. Comme il s'avère que ce paramètre est proche de celui, bien connu, de largeur arborescente linéaire (*pathwidth*), ce dernier nous a également intéressé et nous avons obtenu de nouveaux résultats concernant la relation entre la largeur arborescente linéaire d'un graphe planaire extérieur 2-connexe et celle de son dual.

**Mots clefs** : graphes, coloration, choisissabilité, allocation de fréquences, largeur arborescente linéaire, reroutage, choisissabilité circulaire, coloration faciale, triplets de Steiner.

---

## Abstract

This thesis is comprised of three parts. In the first one, a channel assignment problem posed by Alcatel is modelled as a graph colouring problem: a graph is  $k$ -improperly  $l$ -colourable if, given  $l$  colours, every vertex can be assigned a colour such that each colour class induces a subgraph of maximum degree at most  $k$ . Several problems are studied: improper colouring (and improper choosability) of graphs with bounded density (including the case of graphs of given genus and girth), unit disk graphs (including random instances and infinite set of points), and also weighted improper colouring of subgraphs of the triangular lattice.

In the second part, different kinds of colouring, for which we obtain new results, are studied: 3-facial colourings of plane graphs, circular choosability, and various types of edge-colourings of cubic graphs, in particular by elements of Abelian groups, and Steiner triple systems.

In the last part, we focus on a rerouting problem, without service interruption, in WDM networks. First, a new invariant is introduced so as to model this problem. As it turns out that this parameter is close to the pathwidth, we then present some new results we get concerning the relation between the pathwidth of a 2-connected outerplanar graph and the pathwidth of its dual.

**Keywords**: graphs, colouring, choosability, channel assignment circular choosability, pathwidth, rerouting, facial colouring, Steiner triple systems.