HAL
open science

Structures régulières dans la turbulence bidimensionnelle

Emilie Becu

To cite this version:

Emilie Becu. Structures régulières dans la turbulence bidimensionnelle. Autre. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2006. Français. NNT : . tel-00120618

HAL Id: tel-00120618

https://theses.hal.science/tel-00120618v1

Submitted on 15 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université des Sciences et Technologies de LILLE
Laboratoire de Mécanique de Lille

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITE DE LILLE I

Discipline : Mécanique

présentée par

Emilie BECU

Structures régulières dans la turbulence bidimensionnelle

Soutenue le 19 septembre 2006

Membres du jury :

G. KHOMENKO	Professeur, ULCO, Dunkerque	Rapporteur
M. ROSSI	HDR, DR CNRS, UPMC, Paris VI	Rapporteur
P. A. BOIS	Professeur, USTL, Villeneuve d'Ascq	Examinateur
A. DYMENT	Professeur Emérite, USTL, Villeneuve d'Ascq	Président
V. PAVLOV	Professeur, USTL, Villeneuve d'Ascq	Directeur de thèse

"Dans l'(magnéto-)hydrodynamique, il est tellement facile de se tromper qu'il est préférable de ne pas croire aux résultats provenant de longs et complexes calculs mathématiques, si il est impossible de comprendre leur sens physique. En même temps, il est préférable de ne pas se rapporter à une longue et complexe série d'arguments physiques, si il est impossible de les formuler mathématiquement."

Enrico Fermi*, *Collected Papers* (p. 588)

Si tout le monde suivait cette règle !

---

*Enrico Fermi (prix Nobel de physique en 1938) compte parmi les quelques scientifiques à avoir une place d'élite parmi les génies de la Science. N'importe lequel des travaux cités ci-après, parmi ceux théoriques (comme la découverte de la statistique quantique, la désintégration bêta ou le modèle de Thomas-Fermi pour les atomes lourds) ainsi que ceux expérimentaux (comme la radioactivité artificielle induite par les neutrons lents, la réalisation de la première réaction en chaîne contrôlée avec la pile de Fermi en 1942) assure à E. Fermi une place dans l'empire des scientifiques du XXeme siècle.

Remerciements

Cette thèse n'aurait été possible sans mon directeur de thèse, Monsieur Vadim PAVLOV, qui a inspiré mon travail et m'a guidé à travers toute ma recherche. Avec sa vive intuition et son esprit critique, il m'a dirigé dans de bonnes directions, a corrigé mes erreurs occasionnelles. Physicien et mécanicien chevronné, il m'a constamment poussé à explorer de nouvelles possibilités. Je le remercie sincèrement pour tout ceci et aussi de m'avoir éclairé quand j'étais dans le flou total. Sa porte a toujours été ouverte et j'ai eu un grand plaisir à travailler avec lui.

Je tiens également à remercier Messieurs G. KHOMENKO et M. ROSSI d'avoir accepté le long rôle de rapporteur de ma thèse. Je leur suis reconnaissante d'avoir précisément étudié ce mémoire.

Je remercie aussi les examinateurs de ma thèse, Messieurs P. A. BOIS et A. DYMENT, pour avoir pris en charge l'estimation de la valeur de mon travail.

D'autre part, je remercie Monsieur S. DECOSSIN pour son aide et sa manière de travailler, qu'il a su me transmettre au début de la thèse.

Ensuite, je remercie Monsieur M. STANISLAS et son équipe, qui m'ont permis de faire mes premiers pas dans l'enseignement, au sein de l'Ecole Centrale. Ce fut une très bonne expérience pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler auprès de Messieurs J. M. FOUCAUT et P. DUPONT.

Enfin, un grand merci à ma famille et à mon mari. Il a été merveilleux et m'a toujours soutenu au cours de ces années en s'assurant que je sois au meilleur dans mon travail. Surtout, je lui dois un merci particulier pour avoir compris l'importance de la thèse à mes yeux.

Mes parents, beaux-parents, mon frère et ma soeur m'ont toujours encouragé à fournir le meilleur travail qu'il soit. Ils ont été une source d'énergie qui m'a donnée la force au travers ces années.

Table des matières

Introduction **1**

Bibliographie personnelle **5**

1 Quelques faits préliminaires **7**
1.1 Structures tourbillonnaires . . . 7
1.2 Turbulence forcée et libre . . . 10
1.3 Echelles caractéristiques . . . 11
1.4 Conditions d'auto-organisation . . . 11
1.5 Modélisation de la turbulence . . . 13
1.5.1 Modèles possibles . . . 13
1.5.2 Quelques remarques sur les simulations numériques . . . 16
1.6 Exposé sommaire . . . 18
1.6.1 Turbulence strictement bidimensionnelle . . . 19
1.6.2 Turbulence quasi-bidimensionnelle . . . 30

2 "Cristaux tourbillonnaires"dans les expériences de plasma **35**
2.1 Expériences aboutissant à la formation de "cristaux tourbillonnaires" . . . 35
2.1.1 Descriptif expérimental et quelques estimations . . . 35
2.1.2 Discussion sur le modèle . . . 37
2.1.3 "Cristaux tourbillonnaires" ? . . . 39
2.1.4 Constatation et comparaison des résultats expérimentaux et numériques 41
2.2 Gaz d'électrons . . . 41
2.2.1 Discussion sur les approches possibles . . . 42
2.2.2 Approche hydrodynamique . . . 42
2.3 Equation de Vlasov . . . 45

3 Tourbillons ponctuels **51**
3.1 Définition . . . 51
3.2 Equations à résoudre . . . 52
3.2.1 Hamiltonien . . . 52
3.2.2 Tourbillons écrantés dans un domaine infini . . . 52
3.3 Equations adimensionnées . . . 53
3.4 Coordonnées polaires . . . 54
3.5 Conclusion : base pour le calcul numérique . . . 56

4 Champ auto–accordé **57**
4.1 Introduction . . . 57
4.2 Evolution de 2 configurations différentes ayant les mêmes invariants globaux . 59
4.3 Etude analytique . . . 63
4.3.1 Système Hamiltonien . . . 63
4.3.2 Analogie avec le pendule non linéaire . . . 66
4.3.3 Application numérique . . . 67

5 Mécanique statistique des tourbillons ponctuels **73**
5.1 Mécanique statistique des tourbillons ponctuels . . . 73
5.1.1 Introduction générale . . . 73
5.1.2 Approximation auto-corrélée . . . 75
5.2 Champ auto–accordé des tourbillons . . . 76
5.2.1 Commentaires . . . 79
5.2.2 Intégrales d'états pour $N \gg 1$ . . . 79
5.2.3 Probabilité, somme statistique et température . . . 81
5.2.4 Introduction de fonctions thermodynamiques . . . 82
5.2.5 Fluctuations de l'Hamiltonien . . . 84
5.3 Tourbillons ponctuels dans un récipient cylindrique . . . 85
5.4 Distribution axialement symétrique . . . 87
5.4.1 Formulation du problème et quelques estimations préliminaires . . . 87
5.4.2 Solution analytique . . . 88
5.5 Fonctions thermodynamiques . . . 91
5.6 Bref commentaire sur le résultat . . . 95
5.7 Estimations numériques . . . 96

6 Structures multi-pétales **99**
6.1 Rappel sur l'expérience de Fine et al. [23] . . . 99
6.1.1 Généralités . . . 99
6.1.2 Résultats obtenus . . . 100
6.2 Théorie basée sur l'équation de Vlasov . . . 102
6.2.1 Equation non linéaire pour le potentiel . . . 104
6.2.2 Solution générale . . . 106
6.2.3 Distribution polynomiale . . . 108
6.2.4 Cas particuliers . . . 109
6.3 Discussion . . . 117

7 Tourbillons-sources **119**
7.1 Introduction . . . 119
7.2 Présentation générale . . . 120
7.2.1 Considération des frontières . . . 122
7.2.2 Etude du mouvement . . . 125
7.3 Equations du mouvement des tourbillons-sources dans un cercle . . . 128
7.3.1 Equations du mouvement . . . 128
7.3.2 Simulations numériques . . . 130

Conclusion **135**

Annexes **139**

A Caractéristiques du mouvement des particules chargées **139**
A.1 Introduction . . . 139
A.1.1 Mouvement d'un électron . . . 140
A.1.2 Cas particulier . . . 141
A.2 Particularités du mouvement des particules chargées . . . 142

B Modèle de base **145**
B.1 Equations de base . . . 145
B.2 Fonction de courant et vorticité potentielle . . . 149

C Informations sur la mécanique statistique et thermodynamique **151**

D Dynamique des tourbillons ponctuels **155**
D.1 Champs tourbillonnaires . . . 155
D.2 Difficultés . . . 156
D.3 VL-champs singuliers . . . 157

E Compléments mathématiques **161**
E.1 Intégrale $A_n(b,a) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \ln \frac{b-\cos\theta}{a-\cos\theta} \exp in\theta$ 161
E.2 Composantes de Fourier pour $\ln(1-\lambda\cos\theta)$ 162
E.3 Moment angulaire 163
E.4 Intégrale $I_m(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{B_m(r)+\cos(m-1)\theta}$ 164

Bibliographie **167**

Introduction

Cette thèse porte sur l'étude de mécanismes possibles de formation, dans un milieu turbulent bidimensionnel, de structures tourbillonnaires spatialement localisées, quasi–régulières.

A travers les divers chapitres du manuscrit, nous aborderons quelques aspects de ce thème général.

Les questions concrètes abordées dans la thèse sont les suivantes. Nous avons d'abord tenté de présenter un aperçu sommaire de la situation actuelle du problème. Nous avons constaté qu'il existe une série d'expériences sur l'évolution de la turbulence $2D$ dans un fluide pratiquement non-visqueux, montrant que, sous certaines conditions, la formation de structures tourbillonnaires régulières bien marquées est observée. Nous allons utiliser deux approches, qui permettent, en principe, de décrire les causes de ce phénomène : l'approche hydrodynamique et l'approche cinétique basée sur l'équation de Vlasov (lorsque le nombre de particules n'est pas macroscopiquement grand). Dans le cadre de notre travail, nous avons analysé le rôle des invariants globaux qui s'imposent dans le problème. Nous avons constaté que, malgré ce qu'on pourrait croire, deux systèmes tourbillonnaires ayant les mêmes invariants globaux n'évoluent pas forcément vers les mêmes configurations finales. Nous avons remarqué également que le problème de l'évolution d'un ensemble de tourbillons 2D peut être réduit, dans certains cas, à celui du mouvement d'une "particule" de masse unitaire se déplaçant dans le champ auto-accordé. Nous avons estimé le rôle que peuvent jouer des fluctuations extérieures sur l'apparition des structures tourbillonnaires. Finalement, nous avons appliqué l'approche statistique pour trouver un principe d'évolution du gaz de tourbillons suivant leur "température" initiale, positive ou négative. Au cours de ce travail, nous avons réalisé différentes estimations numériques. Précisons que ces simulations numériques servent uniquement à comprendre l'essentiel du *phénomène* par les moyens les plus simples et les plus adaptés au problème posé.

Le but principal de ce travail est donc la mise en évidence des mécanismes possibles menant

à la formation de structures régulières dans la turbulence $2D$.

Ce manuscrit est structuré de la façon suivante.

Nous exposons, dans le *premier chapitre* introductif, quelques aspects généraux concernant la turbulence bidimensionnelle. Il faut souligner qu'il y a, en principe, deux régimes d'évolution radicalement différents : le régime de la turbulence forcée et celui de l'évolution libre. Nous détaillons également une brève revue de travaux expérimentaux, numériques et théoriques de base, concernant la turbulence $2D$, en donnant des informations sur la turbulence strictement bidimensionnelle, ainsi que sur la turbulence quasi-bidimensionnelle. Et enfin, nous présentons différents modèles théoriques pouvant donner une représentation approchée des phénomènes de turbulence.

Dans le *second chapitre*, nous détaillons une étude expérimentale importante, où l'écoulement évolue comme la turbulence bidimensionnelle dans un fluide pratiquement *non visqueux*. Au cours de ces expériences, on observe parfois, l'arrêt de la relaxation de la turbulence, menant à la formation de "cristaux tourbillonnaires". Ces expériences, réalisées dans le milieu de plasma nous ont pleinement intéressés car le plasma d'électrons, plaçé dans un fort champ magnétique, évolue comme la turbulence $2D$ dans un fluide non-visqueux. Les expérimentateurs ont observé que, parfois, la relaxation de la turbulence $2D$ n'avait pas lieu, laissant place à des structures régulières. Nous nous interrogeons sur le fait que ces strutures régulières soient réellement au stade final de leur évolution (dans ce cas, on parle d'auto-organisation), ou s'il s'agit simplement d'une configuration à un temps donné du régime transitoire, *avant* d'avoir atteint un certain "temps de relaxation". Si le système est en régime transitoire, il n'a pas encore oublié ses conditions initiales, d'où la présence des structures régulières observées. Pour l'expérience en question, une approche hydrodynamique a été utilisée par les expérimentateurs eux-mêmes afin d'essayer de comprendre ce phénomène. Certes le système en question est un système présentant une forte non-linéarité avec un grand nombre de Reynolds, $Re \gg 1$. Mais, le nombre N de particules constituant l'écoulement est de l'ordre de 10^9 particules seulement, ce qui nous pousse à s'interroger sur la possibilité d'application de l'approche hydrodynamique dans ce cas. Dans ces conditions, les fluctuations peuvent jouer un rôle très important. De plus, les équations de l'hydrodynamique, qui sont le résultat d'un certain moyennage, sont déjà une approximation suffisamment forte. Alors, on risque de perdre des informations sur quelques effets intéressants, tels que les processus rapides, ceux fortement localisés,...

Nous allons alors proposer d'utiliser une approche cinétique d'un gaz de "barres" pour expliquer les phénomènes observés. En effet, en présence d'un fort champ magnétique, les équations décrivant le mouvement du plasma sont similaires à celles décrivant le mouvement des tourbillons ponctuels. C'est pourquoi nous allons utiliser ce modèle pour formuler les équations dynamiques d'évolution (les explications seront données dans ce qui suit).

L'objectif du *troisième chapitre* est de présenter l'approche théorique que nous avons retenue pour simplifier les équations hydrodynamiques et donner un représentation approchée du phénomène. Dans cette partie, nous utilisons l'approche Hamiltonienne qui permet de construire un système d'équations représentatif du mouvement de la turbulence $2D$ de l'expérience présentée au chapitre précèdent.

Puis, nous nous interrogeons sur le rôle de fluctuations extérieures influençant les conditions initiales des expériences et ne disparaissant pas avec le temps. Ces fluctuations pourraient influencer l'évolution du système, amenant aux structures tourbillonnaires régulières. Pour cette étude, nous allons utiliser le modèle des tourbillons ponctuels. Notons que le modèle des tourbillons ponctuels est utilisé dans une grande partie de la thèse. Ce choix a été motivé par le fait que l'une des difficultés principales d'une simulation numérique pour la turbulence dans le domaine des petites échelles spatiales est le coût qu'elle représente si les calculs sont détaillés, ainsi que les "erreurs" qui peuvent survenir et s'accumuler au cours du processus de modélisation numérique dans les cas les moins "chers". Le problème peut être simplifié. Pour un système contenant un grand nombre, $N \gg 1$, de particules (tourbillons ponctuels), dont l'Hamiltonien d'interaction est de longue portée, par exemple de forme logarithmique, tout se passe comme si un tourbillon choisi se déplace dans le champ auto-accordé créé par l'ensemble des autres tourbillons. C'est ce que allons voir dans le *chapitre 4*, et c'est ce qui va nous permettre de reformuler le système d'équations de mouvement des tourbillons en un système analogue à celui du pendule non linéaire (de Kapitsa). Nous accompagnerons cette étude d'une application numérique pour tenter de la comparer à certains résultats de l'expérience exposée dans le *chapitre 2*.

Le *chapitre 5* discute une possibilité d'appliquer les méthodes de la mécanique statistique du gaz des tourbillons ponctuels. Notons que nous allons utiliser une approche Hamiltonnienne, formulée en termes de grandeurs énergétiques : c'est l'énergie totale du système hydrodynamique qui sert d'Hamiltonien du système. Dans notre cas, un tourbillon ponctuel

produit une vitesse, et non une accélération. Une étude générale est d'abord proposée en introduisant différentes fonctions décrivant le champ auto–accordé des tourbillons. Puis, nous étudions le cas d'évolution des tourbillons ponctuels dans un domaine borné. Ensuite, nous recherchons analytiquement les fonctions thermodynamiques. (Nous allons trouver une distribution stationnaire axialement symétrique du gaz des tourbillons.) Celles-ci nous amènent à l'obtention d'un principe d'évolution des tourbillons suivant la "température" de leur configuration initiale. Nous finissons par appliquer quelques estimations numériques pour confirmer ce principe.

Dans le *chapitre 6*, nous nous placerons dans le cas où le système se trouve à un temps antérieur au temps de relaxation et ne se trouve pas dans l'équilibre thermique. Alors, nous pouvons nous trouver dans la situation où la répartition des vitesses initiales n'a pas la forme classique de répartition de Maxwell. Des structures tourbillonnaires multi-pétales vont alors apparaître, présentant des similitudes avec les taches régulières dans les expériences de plasma.

Enfin, le *chapitre 7* présente une autre forme de tourbillons, que sont les tourbillons-sources, tourbilons-sources ponctuels bi-dimensionnels. Nous regarderons quelques particularités du mouvement des tourbillons-sources, suivant le domaine dans lequel ils se trouvent.

En conclusion, nous énumérerons les différents résultats obtenus au cours de la thèse, puis nous évoquerons différentes perspectives qui pourraient faire suite à l'étude menée.

Les résultats de mon travail ont fait l'objet de (i) publications dans des revues internationale et nationale avec comité de lecture [1,2] ; (ii) publications à des congrès avec actes à diffusion restreinte [4,5,6].

Bibliographie

[1] E. Bécu and V. Pavlov. Evolution of localized vortices in the presence of stochastic perturbations. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 13, 41-51, 2006.

[2] E. Bécu and V. Pavlov. Evolution de configurations de tourbillons avec les mêmes invariants globaux. *C. R. Mécanique*, 332, 835-840, 2004.

[3] V. Pavlov, E. Bécu and E. P. Tito. Vortex profiles in two-dimensional turbulence of electron gas. *Article soumis à Physics of Fluids.*

[4] E. Bécu and V. Pavlov. Formation of coherent structures in 2D turbulence. *European Geophysical abstracts*, vol.7, 10963, 2005.

[5] E. Bécu and V. Pavlov. Formation de structures cohérentes dans la turbulence 2D. *17ème Congrès Français de Mécanique (CFM), Troyes*, 2005.

[6] E. Bécu and V. Pavlov. Auto-organisation des tourbillons localisés 2D dans des modèles atmosphériques. *Atelier de Modélisation de l'Atmosphère, centre National de Recherches Météorologiques*, 162, 2004.

Chapitre 1

Quelques faits préliminaires

Ce chapitre présente quelques idées de caractère général sur la turbulence bidimensionnelle et quasi-bidimensionnelle, ainsi que quelques hypothèses, résultats expérimentaux et numériques récents.

1.1 Structures tourbillonnaires

Les structures tourbillonnaires 2D et quasi-2D sont présentes dans de nombreux types d'écoulements hydrodynamiques. Ces structures sont observées, aussi bien dans les systèmes industriels (tourbillons dans des sillages, ondes–tourbillons spirales entre des disques tournants, ...) que dans l'environnement : dans les atmosphères planétaires, dans les océans, ... Dans le contexte astrophysique et géophysique, parmi ces structures, on peut citer, comme exemples, les galaxies (figure 1.1), les "plûmes" tournantes en convection turbulente, les anneaux du Golf Stream, les "lentilles" salées de la Méditérannée, les ouragans (figure 1.2), les tornades et trombes (figure 1.3), le Tourbillon Polaire Antarctique (figure 1.4), la fameuse Grande Tache Rouge sur Jupiter, la Tache Noire d'Uranus (figure 1.5), les cellules tourbillonnaires de granulation solaire, ...

Les Figures 1.1-1.5 nous donnent quelques exemples de structures $2D$ ou quasi-$2D$ ayant une très faible dissipation. La bidimensionnalité de ces structures est provoquée soit par la suppression de la composante verticale (figure 1.2 : *tourbillon* $2D$ avec $v_z \simeq 0$), soit par l'indépendance des composantes du champ hydrodynamique avec la coordonnée verticale (figure 1.3 : *filament* avec $\partial_z \simeq 0$). Les structures présentées sur les figures 1.4 et 1.5 peuvent être modélisées par les *taches tourbillonnaires*.

Le problème de la formation et de l'évolution des structures organisées attire beaucoup l'attention, aussi bien pour des raisons de caractère général (il s'agit d'un phénomène énig-

FIG. *1.1: Galaxie : structure tourbillonnaire.*

matique de la Nature) que pour des raisons purement pratiques : on sait que la turbulence transporte des quantités telles que la chaleur, les polluants, les espèces chimiques, les colorants, la fumée, beaucoup plus efficacement que par simple diffusion moléculaire et la présence des structures tourbillonnaires régulières peut modifier radicalement les caractéristiques de ce transport.

La formation systématique de structures quasi-organisées, qui apparaissent et persistent au sein de l'écoulement turbulent, est une caractéristique importante des écoulements bidimensionnels. On observe donc, dans la Nature, des signes d'auto-organisation possible : on peut supposer que les structures tourbillonnaires observées sont des états finaux du développement de différents types d'instabilités.

Si les effets dissipatifs se manifestent faiblement, des régions de fort gradient (voir la figure 1.8a. présentée par la suite) du champ de vitesse peuvent très rapidement se former dans les fluides. Ces régions sont associées à des valeurs élevées de la vorticité $\Omega_i = \epsilon_{ijk}\partial_j v_k$, où ϵ_{ijk} est le tenseur anti–symétrique de Levi–Civita. Mathématiquement, le phénomène $|\Omega_i| \to \infty$ traduit l'effondrement de la convergence des équations de Navier Stokes vers les équations d'Euler en raison de l'apparition de singularités. La présence des régions de fort gradient est une caractéristique des problèmes de perturbations singulières dans les équations aux dérivées partielles.

La terminologie actuelle appelle "structures cohérentes" certaines de ces régions de fort gradient, situées au coeur de l'écoulement (par opposition au voisinage des parois, siège des

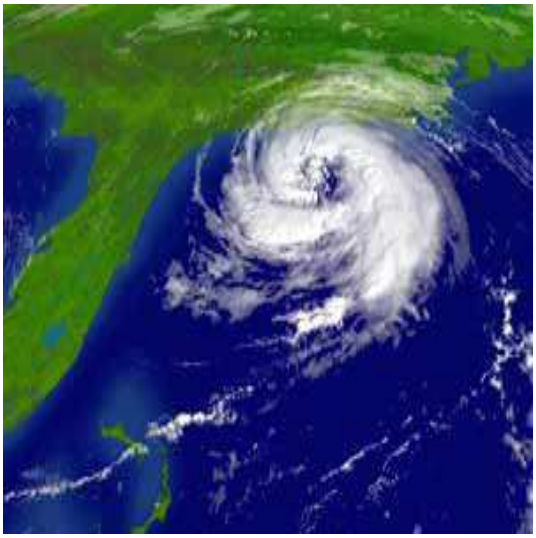


FIG. *1.2: Ouragan Ofelia.*

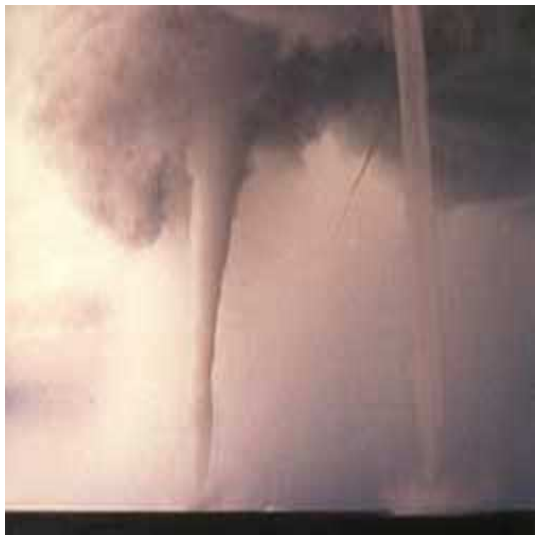


FIG. *1.3: Trombe.*

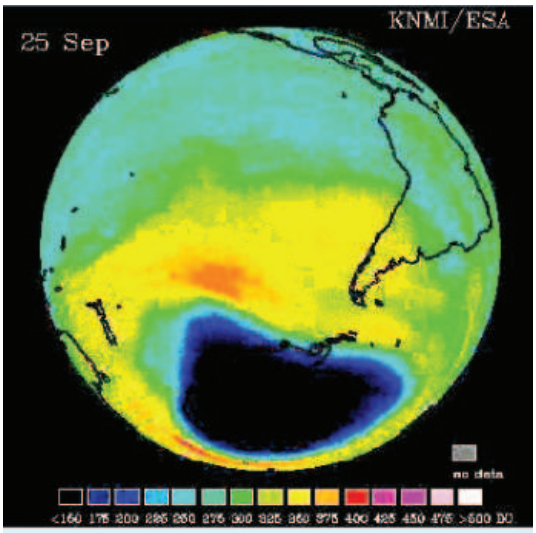


FIG. *1.4: Cyclone Antarctique et trou d'ozone.*

FIG. *1.5: Tache noire d'Uranus.*

couches limites). Les structures cohérentes sont des régions tourbillonnaires de taille L_c et de vitesse caractéristique U, qui subsistent dans l'écoulement turbulent pendant des temps très supérieurs au temps caractéristique $\sim L/U$. Nous utiliserons, par la suite, le terme de *tourbillon*, en sous-entendant une certaine permanence de la structure considérée.

Immédiatement, nous pouvons nous poser des questions qui intriguent les observateurs : sous quelles conditions les structures tourbillonnaires *localisées spatialement* peuvent-elles se former ? Pourquoi la turbulence ne les fait pas disparaître ?

1.2 Turbulence forcée et libre

En général, en examinant l'évolution de la turbulence, il faut distinguer deux situations radicalement différentes.

La première a lieu quand la turbulence se développe en présense d'une source (localisée aux grandes échelles spatiales) ou d'une décharge (localisée aux petites échelles spatiales). Dans ce premier cas, l'évolution est contrôlée par le flux permanent de l'énergie (ou d'autres grandeurs telle que l'enstrophie, ...) dans l'espace des nombre d'ondes k : il s'agit de la *turbulence forcée* (figures 1.2–1.5).

La deuxième possibilité se réalise si on laisse évoluer librement une perturbation initiale en absence de mécanismes de dissipation et de forçage : ce cas correspond à la *turbulence libre* (figures 1.1 et 1.6).

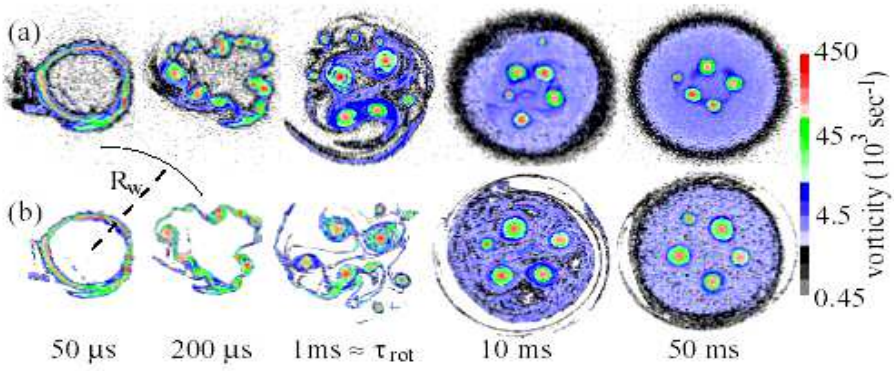


FIG. *1.6: Résultats des expériences de plasma, pour Re $\gg 1$, lesquelles seront discutées par la suite.*

1.3 Echelles caractéristiques

Soient t_d le temps de dissipation et t_N le temps de relaxation non linéaire. Si l'on veut observer au moins quelque chose, il faut évidemment que $t_N \ll t_d$ (la dissipation est faible). Si des structures sont visibles et si le temps d'observation est très grand devant le temps de relaxation non linéaire, $t \gg t_N$, on peut parler d'auto-organisation. Par contre, si le temps d'observation est très petit devant le temps de relaxation non linéaire $t \ll t_N$, il s'agit d'une étape transitoire, quand le système n'a pas encore oublié les conditions initiales.

Supposons que $t \gg t_N$.

1.4 Conditions d'auto-organisation

Quand et comment la turbulence libre s'organise-t-elle ?

a. "Brisure" de la symétrie du système.

Il est très difficile de répondre à cette question dans le cadre des approches traditionnelles, quand la turbulence est considérée, *a priori*, comme étant homogène et isotrope.

La turbulence homogène et isotrope, qui ne possède ni d'échelles distinctes, ni de directions privilégiées, est trop symétrique pour commencer à s'auto-organiser et donner naissance à des tourbillons cohérents ; l'auto-organisation semble être improbable dans ce cas.

La "brisure" de la symétrie du système est une condition nécessaire pour l'auto-organisation. C'est ce qui attire notre attention sur les écoulements 2D. En effet, un fluide turbulent avec une brisure de symétrie sphérique (approximation quasi–bidimensionnelle) peut être considéré comme un candidat adéquat à un état, où les tourbillons à grande échelle peuvent être organisés.

Pour cette raison, nous nous intéressons à la classe particulière d'écoulements turbulents à deux dimensions qui ont lieu dans un plan ou sur une surface quelconque. Cette approximation est valable, par exemple, pour un fluide confiné dans une couche de faible épaisseur, ou pour un fluide contenu dans un récipient en rotation rapide, ou dans un plasma fortement magnétisé.

b. Approche 2D

Dans le contexte géophysique, il existe plusieurs raisons pour la suppression d'une des composantes de la vitesse de l'écoulement : le mouvement bidimensionnel peut être causé

par la nature bidimensionnelle prédominante du domaine de l'écoulement lui-même, lorsque l'échelle caractéristique horizontale de l'écoulement, L, surpasse largement celle verticale H_s (les modèles atmosphériques sont dits en couche mince lorsque $\epsilon = H_s/L \ll 1$).

La possibilité de suppression d'une des composantes de la vitesse de l'écoulement peut être du à une forte stratification de densité, ou à la rotation du système dans son ensemble, ... En effet, une rotation rapide de l'écoulement (ou un champ magnétique pour les plasmas et également les fluides de conduite) se limite au mouvement de fluide dans un plan. Il existe de nombreux exemples de la sorte dans la nature ou en technologie. La supposition que toutes les variables de champ soient indépendantes de la coordonnée $z_3 = x_3$, c'est-à-dire l'opérateur $\hat{\partial}_3 = 0$ pour toutes les variables de champ, conduit également aux modèles bidimensionnels et est largement utilisée dans les considérations théoriques (voir [26], [42] et [57]) (figure 1.3).

Toutefois, la turbulence strictement $2D$ est une idéalisation car les écoulements naturels *ne* pourraient subir la bidimensionnalité *que* pour un rang d'échelles limitées, avant que d'autres facteurs physiques (environnementaux) n'interviennent.

Néanmoins, la compréhension des mouvements bidimensionnels les plus simples peut certainement permettre une meilleure compréhension de systèmes plus compliqués.

c. Fluide non-visqueux

Lorsqu'il s'agit d'un écoulement d'un fluide, caractérisé par une vitesse caractéristique U et une échelle spatiale externe L, on définit un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds, comme le rapport du temps caractéristique de frottement visqueux du fluide τ_f et du temps caractéristique d'inertie $\tau_i \sim L/U$: $Re = \tau_f/\tau_i \sim \tau_f U/L$. Dans le cas général, le temps τ_f n'est pas exprimé par la formule simple $\tau_f \sim L^2/\nu$ (qui n'est valable que pour l'équation de Navier–Stokes). Il faut donc être prudent à ce stade des estimations. Si la force de frottement est modélisée par l'expression $\mathbf{F} \sim -\lambda|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ (couche d'Ekman dans la géophysique), le nombre de Reynolds devient $Re \sim (\lambda L)^{-1}$. Dans le plasma, dont le mouvement collectif n'est pas décrit, en général, par les équations de Navier–Stokes, la situation est encore plus complexe.

Rappelons que seuls les écoulements à grand nombre de Reynolds, $Re \gg 1$, ont la propriété frappante d'auto-organisation spontanée en structures tourbillonnaires cohérentes. Pour décrire ce type de structures une fois formées, il est approprié d'utiliser le modèle de fluide *non-visqueux*. Omettre les termes visqueux dans les équations de mouvement implique que les forces de friction soient négligeables par rapport à la force d'inertie. On voit que si le nombre de Reynolds est grand, les perturbations ont le temps de se développer avant d'être

ralenties par la viscosité ou d'autres effets de dissipation.

Dans la situation où $Re \gg 1$, l'écoulement est évidemment fortement turbulent. Notons toutefois que même si un écoulement est turbulent (dû, par exemple, à une forte convection verticale), ceci ne signifie pas nécessairement que le mouvement régulier, mis sous forme moyennée, soit absent. Dans ce cas, les équations de mouvement d'un fluide idéal (ou quasi-idéal avec une viscosité turbulente) sont connues comme étant une bonne approximation de la description des champs moyennés à grande échelle d'un écoulement turbulent.

1.5 Modélisation de la turbulence

Le problème de détermination de l'état d'équilibre final des systèmes hydrodynamiques bidimensionnels quasi-non-visqueux, $Re \to \infty$, a été étudié depuis de nombreuses années. Dans ce contexte, il existe différentes approches théoriques proposées.

Les équations de Navier–Stokes étant impossibles à résoudre à grand nombre de Reynolds, l'idée est venue de les remplacer par des équations plus faciles à traiter, et qui donneraient une représentation approchée des phénomènes.

1.5.1 Modèles possibles

a. Modèle standard de turbulence

On considère la *moyenne* du champ de vitesses d'un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds. On suppose que l'écoulement moyen obéit aux mêmes équations de Navier–Stokes, mais avec une viscosité (désormais appelée *viscosité turbulente*) plus grande que la viscosité réelle du fluide. La viscosité turbulente, par analyse dimensionnelle, peut être donnée par $\nu_t \simeq lU$, où l est une échelle de longueur caractéristique de l'écoulement et U est une échelle de vitesse. Cette approche simple permet d'expliquer de très nombreux phénomènes. On l'appelle souvent *théorie de longueur de mélange*. Il faut seulement noter qu'il ne s'agit pas, à proprement dit, d'une théorie physique mais d'un moyen approximatif d'obtenir des résultats. Par exemple, une critique assez sévère de la notion de viscosité turbulente pourra être trouvée dans [16].

b. Modèle de tache

Une des approches théoriques possibles est basée sur le remplacement du profil de la vitesse (ou vorticité) continue réelle par un modèle de tache avec une vorticité constante dans chaque tache (voir [24], [25] et la bibliographie à laquelle il fait référence). Ce modèle est valable lorsque les mouvements à grande échelle sont faiblement sensibles à la structure fine dans le champ de vitesses. Pour ce scénario, on peut s'attendre à ce que même des approximations avec un nombre limité de taches, qui décrivent la structure générale du profil de la vorticité réelle, saisissent correctement la dynamique des structures tourbillonnaires à grande échelle.

Notons que le modèle, proposé dans les travaux référencés, permet de formuler la dynamique de l'écoulement en terme d'un petit nombre d'interfaces. Une telle possibilité est très attractive car la détermination de l'évolution des contours des structures tourbillonnaires se réalise dans le cadre des équations non linéaires, intégro-différentielles, spatialement unidimensionnelles.

Cette approche est appelée la *méthode de la dynamique de contour*. Les équations de la dynamique de contour décrivent le mouvement auto-induit des frontières de la discontinuité de la vorticité (ou "contours") dans un fluide bidimensionnel, incompressible non-visqueux avec une distribution de vorticité "en escalier".

Il apparaît que beaucoup d'aspects généraux des écoulements quasi-parfaits, avec une vorticité distribuée de façon continue, peuvent être reproduits en utilisant la dynamique de contour avec un nombre modéré de niveaux de vorticité. Ces résultats suggèrent que la dynamique de contour peut être un outil analytique compétitif pour les problèmes d'intérêt scientifique, particulièrement en connexion avec les écoulements à très grand nombre de Reynolds.

c. Tourbillons ponctuels

Une autre possiblité d'application est de construire une théorie en terme de champs tourbillonnaires quasi-singuliers.

Dans ce qui suit, nous appelons tourbillons localisés, des structures tourbillonnaires dont la vorticité est très concentrée et très élevée par rapport au reste du domaine de l'écoulement.

Les exemples d'applications sont multiples et les études récentes montrent que ce type de modèle, malgré sa simplicité apparente, permet d'extraire les caractéristiques générales de l'auto-organisation des structures parfois très complexes.

Le nombre de tourbillons ponctuels étant souvent très grand, nous pouvons, en principe,

choisir d'utiliser une approche statistique. En effet, si le nombre de tourbillons est grand, il est possible d'introduire une fonction de leur distribution qui décrit la probabilité de leur répartition dans l'espace. Alors, le champ moyenné des vitesses de l'écoulement du fluide est déduit de la répartition moyennée, statistiquement, de la vorticité localisée dans les tourbillons localisés.

d. Approches statistiques

Un grand nombre d'auteurs a examiné la mécanique statistique d'un fluide incompressible bidimensionnel à l'aide des équations de mouvement d'Euler reformulées pour un champ de vorticité. Tant que la dynamique des structures tourbillonnaires est fortement non linéaire, et décrite par des équations de mouvement difficiles à résoudre analytiquement, il y a un fort intérêt à explorer un principe variationel quelconque : dans un système évoluant librement, si un état stable doit être atteint, il doit correspondre à un extremum "de quelque chose".

Certaines approches sont basées sur une maximisation de l'entropie, d'autres sur une minimisation de l'enstrophie.

Toutes ces théories impliquent l'existence d'un état d'équilibre final, contrôlé par les invariants globaux du système. L'état final est alors supposé indépendant de la structure précise des conditions initiales de l'écoulement.

Cependant, certaines théories statistiques ont fait l'objet de critiques sévères (voir [16]) et en dépit des différentes méthodes proposées pour le problème d'équilibre, la situation reste encore controversée.

e. Etudes expérimentales

Les études expérimentales directes jouent un rôle crucial. Pourtant, même du point de vue expérimental, la situation est quelque peu inexplicable : par exemple, les résultats obtenus dans les métaux liquides tendent à valider la théorie statistique, tandis que ceux obtenus dans les expériences de plasma, tendent à valider la théorie "de fission" sélective.

Dans certains travaux expérimentaux, les résultats obtenus n'étaient pas en accord avec les conclusions déduites des simulations numériques.

Les différents modèles, que nous venons de présenter, peuvent servir de bases pour les simulations numériques de la turbulence.

1.5.2 Quelques remarques sur les simulations numériques

Analysons les difficultés possibles concernant le choix du schéma numérique.

Une voie d'approche possible de la turbulence est habituellement la simulation numérique directe des équations de Navier–Stokes, mais elle n'est toutefois pas toujours applicable (voir, par exemple, certains problèmes d'écoulements dans les plasmas, ou ceux géophysiques, où la force dissipative *n'est pas exprimée* par une expression proportionnelle à $\nu\Delta\mathbf{v}$).

Le calcul numérique de solutions (évidemment, approchées) des équations de Navier-Stokes *permettrait* d'observer en détail la turbulence et d'effectuer des prédictions de phénomènes (transfert de masse et d'énergie, traînée, ...) intéressants pour les applications possibles.

Malheureusement, le calcul, bien que possible en principe, est parfois impossible en pratique, pour des raisons de coût.

Pour le raisonnement qui suit, on définira le coût comme le nombre d'opérations arithmétiques que la machine doit effectuer pour résoudre le problème. Ce coût est approximativement proportionnel au temps de calcul.

Le nombre de points de maille nécessaire pour un calcul de turbulence est de l'ordre de $(L/l)^d$, où L est la taille caractéristique la plus grande du problème, l est la taille des plus petites caractéristiques (régions tourbillonnaires), et d la dimension de l'espace.

La taille des régions caractéristiques les plus grandes est, par exemple, la largeur du canal turbulent, ou un multiple de la taille de l'obstacle, ou encore la taille de la boite convective. Cette taille L est parfois appelée "échelle d'injection de l'énergie turbulente". Les régions les plus petites sont de taille variable selon les écoulements. On peut cependant en estimer la taille à partir des théories de la *cascade turbulente*. On obtient alors $l \sim L\,Re^{-n}$, où l'exposant n varie entre 3/4 et 1. En particulier, la théorie de la cascade de Kolmogorov prédit $n = 3/4$.

Pour avoir le coût total du calcul, il faut prendre en compte la durée de la simulation. Les observations intéressantes, telles que le détachement périodique des tourbillons dans le sillage d'un obstacle, sont faites sur une période de l'ordre de L/V. Par contre, le pas de temps élémentaire de la méthode numérique doit être inférieur à (ou de l'ordre de) l/V. Le nombre total de pas de temps est donc de l'ordre L/l. Cet état de choses mène à une estimation du coût, pour un écoulement turbulent (de nombre de Reynolds donné), de l'ordre de $C = C_0\,(L/l)(L/l)^d \sim C_0 Re^{(d+1)n}$, où C_0 est le temps de calcul sur *une* maille. Ces simples estimations donnent une idée de l'évolution des coûts selon le nombre de Reynolds et l'exposant n : le travail de calcul C pour une simulation directe de la turbulence (le travail de référence est pris à 1 unité), pour $Re = 10^4$, est de $C \sim 10^{12}$ pour $n = 3/4$ et $d = 3$, et $C \sim 10^{16}$ pour $n = 1$ et $d = 3$.

Cette observation simple montre que si le but de notre recherche est seulement *de trouver les conditions qualitatives sous lesquelles une structure tourbillonnaire cohérente peut être formée*, il est préférable de réaliser d'abord l'étude analytique.

D'autre part, le point de départ de toute expérience numérique est un certain phénomène physique. Or, le but est d'obtenir par cette expérience des résultats utiles pour la compréhension du phénomène. Entre le départ et les résultats, nous pouvons définir plusieurs étapes. Commençons par énumérer les étapes (elles seront présentées plus en détail par la suite), qui constituent le "modèle mathématique" :

- définir quel *phénomène physique* apparaît, et savoir quelles sont les questions concrètes qui se posent,
- choisir *un modèle mathématique* adéquat (écrire les équations de départ),
- effectuer l'*approximation algébrique discrétisée* des équations,
- bâtir le *programme* de simulation,
- effectuer la *simulation numérique*.

1) Quelle que soit la formulation mathématique, elle n'est qu'une description approximative du phénomène physique. Il faut donc connaître les hypothèses faites pour identifier les conditions de validité de ces équations.

2) La contrainte la plus sérieuse apparaît lors de l'étape de discrétisation algébrique du système continu. Et ceci, quand les équations différentielles ou intégrales décrivant l'évolution du modèle sont remplacées par des équations algébriques afin que les calculs numériques soient effectués. Cette étape introduit des questions concernant les conséquences du choix du pas de temps, du pas spatial, du nombre limité de particules, ... Des exigences surviennent pour les expérimentateurs (les numériciens doivent démontrer que les résultats d'une simulation ont un sens physique).

3) Une telle discrétisation remplace les variables continues d'un modèle mathématique par des tableaux de valeurs numériques et les équations différentielles par celles algébriques. Si des dizaines (parfois des centaines) de milliers d'équations, qui résultent de cette discrétisation, ne peuvent pas être résolues rapidement, la simulation proposée devient inutile.

4) L'étape menant à un algorithme numérique inclut le processus de construction du programme, où le meilleur compromis entre la qualité de la représentation du phénomène et le coût est souhaité.

5) Un programme bien construit est lu et est utilisé facilement.

D'après ce qui vient d'être énoncé, il est évident que des perturbations (erreurs de principe ou erreurs numériques) peuvent apparaître à chaque étape. Mais alors, quel sera le résultat

final si les erreurs s'accumulent ?

Le point crucial consiste donc dans le choix d'un modèle mathématique convenable du système physique à étudier, peut-être moins détaillé (plus "rude"), mais qui serait toutefois déjà stable (structurellement). Guidés par cette observation, nous nous limitons aux plus simples modèles, qui sont stables structurellement. Les limites de validité de ceux-ci, basées sur les approximations présentées ci-dessus, sont définies par l'objectif de trouver les conditions qualitatives sous lesquelles une structure tourbillonnaire à grande échelle peut être formée. Comme nous l'avons noté, au lieu d'amasser les détails concernant celle-ci, nous pensons qu'il est plus important de répondre, avant tout, à cette question d'importance pratique.

1.6 Exposé sommaire de la situation actuelle de la recherche dans le domaine de la turbulence 2D

La théorie générale de type Kolmogorov pour la turbulence $2D$ est exposée en détail dans les livres [2] et [33] par exemple. Cette théorie est actuellement universellement reconnue, y compris l'idée de cascade inverse qui assure le transfert de l'énergie à partir d'une source d'énergie *du* domaine des petites échelles spatiales (grands nombres d'onde) vers le domaine des grandes échelles spatiales (petits nombres d'onde), à l'opposé de la cascade directe dans la turbulence $3D$ [transfert d'énergie par cascade *du* domaine des petits k (de larges échelles spatiales) vers le domaine des grands k (échelles spatiales où les mécanismes de dissipation se manifestent fortement)].

Il faut faire une distinction entre la turbulence strictement *bidimensionnelle* (régie par les équations classiques $2D$ de Navier-Stokes ou d'Euler), et la turbulence de grandes échelles *quasi-bidimensionnelle* géophysique, où le mouvement du fluide est bidimensionnel, mais est influencé par des effets supplémentaires (stratification, la valeur finie du rayon de Rossby-Obukhov, l'effet bêta, ...), qui mènent à de nouveaux phénomènes qualitatifs. Dans ce cas, d'importants facteurs dissipatifs sont présents, tels que la friction du fond, le refroidissement radiatif, ..., qui pourraient conduire le système à un équilibre statistique.

Pour la signification et l'importance de tous ces facteurs, on peut se référer aux manuels classiques de géophysique, par exemple à [58].

On peut noter que de tels facteurs additionnels établiraient des échelles externes du système, qui arrêtent le flux d'énergie aux structures de petites échelles spatiales, et limitent la dimension des tourbillons dans lesquels l'énergie cinétique est essentiellement stockée.

Donnons un bref aperçu de la phénoménologie et des résultats connus de la turbulence bidimensionnelle. Ce sujet classique a été discuté dans des revues et monographies, par exemple [44] et [66]. Nous n'allons pas essayer de présenter une étude complète et un développement historique du sujet, mais plutôt nous focaliser sur les aspects utiles pour les écoulements quasi-bidimensionnels réalistes. Nous devons donc examiner quelques résultats récents moins connus et les développements dans le cas bidimensionnel, qui interpellent la vue conventionnelle de l'universalité de la turbulence bidimensionnelle.

1.6.1 Turbulence strictement bidimensionnelle

a. Equations dynamiques

Les écoulements bidimensionnels d'un fluide incompressible peuvent être décrits par l'équation d'évolution de la forme :

$$\partial_t \Omega + [\Omega, \psi] = F + D. \tag{1.1}$$

Ici, ψ désigne la fonction de courant dont les composantes de vitesse sont $u_x = -\partial_y \psi$, $u_y = \partial_x \psi$, la vorticité est définie par $\Omega = \Delta\psi$, F désigne symboliquement le forçage et D la dissipation. L'opérateur $[\ ,\ ]$ désigne le produit vectoriel.

En analyse numérique (les détails seront donnés plus loin), la source F décrivant le forçage est usuellement localisée au voisinage d'un nombre d'onde k_f qui est suffisamment grand. Le terme dissipatif D contient usuellement le terme visqueux standard, $D = \nu\Delta\Omega$ avec le coefficient de viscosité, ν, constant (fluide newtonien). Il peut également inclure d'autres facteurs dissipatifs. Etant donné que la viscosité standard ne peut pas, en principe, assurer la dissipation complète de l'enstrophie, on utilise souvent, pour les besoins des calculs numériques, l'hypofriction et l'hyperviscosité proprement dites, $D = ((-1)^{n+1}\lambda_n(-\Delta^{-n}) + (-1)^{m+1}\nu_m\Delta^m)\Omega$. Les termes avec λ_n servent à supprimer l'accumulation de l'énergie aux larges échelles spatiales (petits k), les termes avec viscosité ν_m arrêtent la cascade d'enstrophie aux petites échelles spatiales (grands k) et empêchent l'accumulation de l'enstrophie dans ce domaine. Il existe un mécanisme de dissipation physique naturelle dans les écoulements $2D$ ou quasi-$2D$, qui est due au frottement au fond (friction d'Ekman), qui correspond à $n = 0$. Une telle friction surmonte de manière égale tous les modes, quelque soit leur ordre. L'hypofriction (les termes avec $n > 0$, correspondant aux puissances négatives de l'opérateur de Laplace) a été proposée afin de pouvoir supprimer sélectivement les modes les plus graves du spectre

énergétique et recrée l'intervalle de transparence dans le domaine d'énergie, mais *elle n'a aucun sens physique direct*.

L'équation d'évolution (1.1) doit évidemment être complétée par des conditions aux limites.

En l'absence de forçage-dissipation, l'équation (1.1) assure la conservation de quelques intégrales : l'énergie cinétique normalisée

$$E = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}({u_x}^2 + {u_y}^2) = -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\psi\Omega, \tag{1.2}$$

(en supposant la densité du fluide uniforme, de valeur 1, et des conditions aux limites appropriées), et l'enstrophie

$$Z_2 = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\Omega^2. \tag{1.3}$$

En outre, l'équation (1.1) permet la conservation d'une série d'intégrales, appelées Casimirs (les moments Z_n, les isoniveaux d'aires de vorticité dans le plan xy, ...).

L'équation (1.1) pour un domaine plan est usuellement résolue par les méthodes pseudo-spectrales, bien que les premiers travaux aient utilisé des schémas de différences finies (voir par exemple [47]). Pour les mouvements 2D, par exemple sur la surface d'une sphère, on exploite des harmoniques sphériques.

Dans une géométrie plane, la vorticité (et champs reliés) peut être étendue en une série (ou intégrale) de Fourier avec les coefficients

$$\Omega_{\mathbf{k}} = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^2}\Omega(\mathbf{x},t)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{1.4}$$

marqués par les vecteurs d'onde $2D$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, avec $k = |\mathbf{k}|$.

Si l'espace de $\mathbf{k}$ infini est tronqué par une grille finie, sa $\mathbf{x}$-représentation est donc discrétisée en conséquence, et les intégrales de Fourier sont remplacées par les sommes. Si l'on prend comme domaine un rectangle de coordonnées $2\pi \times 2\pi$ avec N points de grille le long des axes, le nombre d'ondes varie dans l'intervalle $[N/2, -N/2]$ pour chaque direction indépendante.

Dans la représentation de Fourier (discrète ou continue), l'équation (1.1) prend la forme

$$\partial_t\Omega_{\mathbf{k}} + J_{\mathbf{k}} = D_{\mathbf{k}} + F_{\mathbf{k}}. \tag{1.5}$$

Ici, $J_{\mathbf{k}}$ représente le $\mathbf{k}$-ième mode de Fourier du Jacobien $J(\Omega, \psi)$:

$$J_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}pq}\psi_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}} \tag{1.6}$$

avec les coefficients de structure

$$a_{\mathbf{k}pq} = \frac{1}{2}(q^2 - p^2)(p_x q_y - p_y q_x). \tag{1.7}$$

Dans le cas isotrope du système, l'énergie totale peut être exprimée comme l'intégrale de la densité spectrale de l'énergie moyennée par rapport aux angles : $E = \int d\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} = \int_0^\infty dk E(k,t)$. Dans ce cas, $Z_2 = \int_0^\infty dk k^2 E(k,t)$.

b. Spectres d'énergie

La théorie standard de Kraichnan - Batchelor - Leith de la turbulence $2D$ d'un fluide non compressible n'utilise que deux intégrales, l'énergie et l'enstrophie, et prédit deux intervalles de transparence (ou d'inertie), au-dessus et au-dessous de l'échelle de forçage, $k \sim k_f$. Le flux d'énergie dans le domaine des larges échelles spatiales, $k < k_f$, doit donner, selon la théorie, une pente du spectre énergétique $E(k) \sim k^{-5/3}$, tandis que le flux de l'enstrophie dans le domaine des petites échelles spatiales, $k > k_f$, doit donner $E(k) \sim k^{-3}$.

Soit un régime stationnaire, $E(k,t) \to E(k)$: le forçage est compensé globalement par la dissipation.

Un argument simple, utilisé à maintes reprises (voir, par exemple, [58]), revient à l'estimation des centroïdes k_1 et k_2 de l'énergie et l'enstrophie, c'est-à-dire des valeurs caractéristiques de k au voisinage desquelles ces grandeurs ont leur maxima :

$$k_1 = \frac{\int_0^\infty dk k E(k)}{\int_0^\infty dk E(k)}, \quad k_2 = \frac{\int_0^\infty dk k^3 E(k)}{\int_0^\infty dk k^2 E(k)}. \tag{1.8}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on estime facilement que

$$k_1 < k^* = (\frac{Z_2}{E})^{1/2} < k_2. \tag{1.9}$$

Il y a donc une échelle caractéristique, k^*, qui est exprimée en terme d'énergie totale E et d'enstrophie totale Z_2. Le maximum de l'énergie est localisé à gauche de k^*, le maximum de l'enstrophie se trouve à droite. En particulier, on peut postuler que, pour certaines répartitions de puissance de la densité de l'energie spectrale $E(k)$, le paramètre k_1 se trouve au voisinage de zéro, tandis que k_2 se déplace à l'infini. Par cette raison, le flux d'énergie, dans les processus transitoires, "coule" le long de l'axe des k de droite à gauche, tandis que le sens du flux d'enstrophie est de gauche a droite.

Si les échelles de forçage, k_f, et de dissipation, k_d, vérifient les conditions $k_f \sim k^* \ll k_d$, les intégrales donnent la possibilité de deux intervalles inertielles : celui d'énergie, $k < k_f$,

et celui d'enstrophie, $k > k_f$ (voir [33]). Cela signifie que l'énergie est transférée au domaine des grandes échelles spatiales (à gauche), alors que l'enstrophie s'est transportée par cascade dans la direction opposée (à droite) vers le domaine des petites échelles spatiales.

Une autre supposition importante est la localité spectrale des cascades, qui signifie que le flux constant d'énergie ϵ (ou d'enstrophie η), correspondant à un nombre d'onde $\mathbf{k}$, ne dépend que de k et de la densité spectrale d'énergie $E(k)$. Ainsi, en utilisant ces arguments, on peut proposer la paramétrisation suivante pour les spectres isotropiques d'énergie $2D$, dans les deux intervalles inertiels : dans le domaine inertiel d'enstrophie, $k > k_f$,

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3} \tag{1.10}$$

et dans le domaine inertiel d'énergie, $k < k_f$,

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{1.11}$$

Ici, η et ϵ représentent les taux de dissipation constants de l'enstrophie et de l'énergie qui sont égaux à leurs flux dans leurs intervalles inertiels ou à leurs taux de production par la source.

La figure 1.7 donne une vue schématique du spectre stationnaire de la turbulence $2D$.

Dans l'intervalle inertiel d'énergie, le spectre est local car, la contribution principale dans le taux de déformation sur l'échelle spatiale $\sim k^{-1}$,

$$|s_k| \sim \left[\int_0^k dk_1 {k_1}^2 E(k_1) \right]^{1/2},$$

est définie par la limite supérieure d'intégration.

Le spectre -3 dans l'intervalle de l'enstrophie, viole clairement l'hypothèse de la localité, puisque chaque octave spectral donne une contribution égale à l'intégrale, et le flux d'enstrophie, estimé par $\Phi_k = s_k k Z_2(k)$, ($Z_2(k) = k^2 E(k)$ étant le spectre d'enstrophie), a une divergence logarithmique, c'est-à-dire $s_k \sim lnk$. Certes, en choisissant la limite inférieure dans l'intégrale s_k par une certaine valeur k_0, on obtient $\Phi_k \sim ln(k/k_0)$. Toutefois, dans ce cas, le flux d'enstrophie n'est plus constant et a une croissance logarithmique. Kraichnan a suggéré une correction logarithmique du spectre -3, par la formule $E(k) \sim k^{-3} ln^{-1/3}(k/k_0)$, ce qui a résolu le problème de divergence, mais le spectre d'enstrophie ne sera plus local (parce qu'il dépend maintenant du paramètre quelconque externe k_0, qui peut être choisi arbitrairement).

En un certain sens, le spectre avec la pente -3 peut être considéré comme une séparatrice des spectres locaux et non-locaux.

Le flux d'énergie d'échelle supérieure dans la turbulence $2D$ sans dissipation des larges échelles crée un autre problème. Ici, on peut s'attendre à ce que l'énergie s'accumule aux

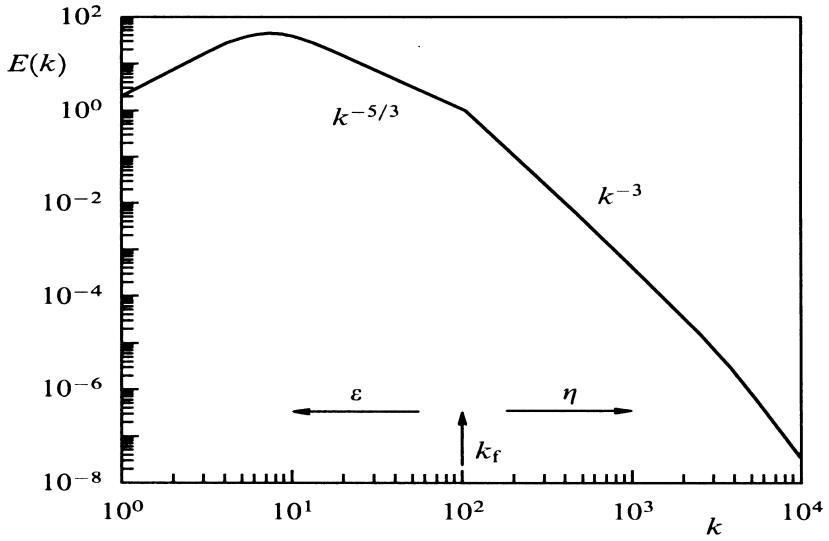


FIG. *1.7: Représentation schématique du spectre de l'énergie cinétique de la turbulence* $2D$. k_f *est le nombre d'onde de forçage. A droite, on a l'intervalle d'enstrophie caractérisé par le flux constant d'enstrophie* η, *qui se transforme à grandes valeurs de* $k > k_d$ *(pour un fluide newtonien* $k_d = (\eta/\nu^3)^{1/6}$*) en intervalle de dissipation d'enstrophie. A gauche, on a l'intervalle d'énergie caractérisé par le flux constant d'énergie* ϵ.

échelles spatiales les plus grandes, et augmente indéfiniment sans qu'aucun mécanisme de dissipation ne puisse arrêter le processus et amener le système à un régime stationnaire [72]. On peut éviter ces ennuis en introduisant une dissipation aux larges échelles (on viole, dans ce cas, l'approximation 2D), ou en considérant la turbulence évoluant librement (sans forçage).

c. Turbulence $2D$ forcée

La turbulence $2D$ forcée peut atteindre un état stationnaire (sous-entendu dans le sens statistique) si l'énergie et l'enstrophie injectées par une source sont compensées par la dissipation. Bien que la viscosité standard (proportionnelle au laplacien) est suffisante pour dissiper l'enstrophie, on utilise souvent, en simulation numérique, une dissipation hyper-visqueuse plus raide, $D = (-1)^{n+1}\nu_n \Delta^n \Omega, \quad n > 0$. Elle a pour avantage que l'intervalle inertiel d'enstrophie peut être élargi à des k plus élevés sans augmenter la grille de calcul.

Pour arrêter la cascade inverse de la turbulence forcée $2D$ et pour empêcher l'accumulation infinie d'énergie aux petits k, il faut ajouter des mécanismes de dissipation "infra-rouge" *artificielle* (absente dans les cas strictement bisimensionnels). Dans les calculs numériques, on obtient cette dissipation de plusieurs manières. On peut imposer une friction de Rayleigh sur les modes les plus bas du système (voir, par exemple, [49]) - procédure facilement implémentée dans le code pseudo-spectral. Un autre mécanisme possible de dissipation dépendant des échelles, appelé hypo-friction, est introduit par les puissances négatives du Laplacien, $(-\Delta)^{-n}$ (voir, par exemple, [8]).

Il existe des travaux dans lesquels les mécanismes artificiels de dissipation aux larges échelles ne sont pas tout à fait introduits, et où on considère la turbulence non stationnaire (quasi-stationnaire) [62] et [72].

Suivant Lilly [47], le terme de forçage est typiquement modélisé par un procédé de Markov aléatoire pour un ensemble de componsantes spectralement étroites. Dans le travail [49], on propose, pour les composantes de forçage, l'expression suivante

$$F_{k,n+1} = A_k(1-r^2)^{1/2} exp(i\theta) + rF_{k,n}.$$

Ici, A_k est l'amplitude de forçage adimensionnée, le paramètre r détermine le temps de corrélation, θ est la phase aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. L'indice n numérote les moments de temps successifs dans le schéma des calculs numériques.

D'autres auteurs [7] et [14] utilisent comme source un procédé de bruit blanc gaussien.

La résolution spatiale de 64^2 des premiers travaux (par exemple [46]) a été récemment poussée à 1096^2 (voir par exemple [8] et [13]). Mais la plupart des articles s'occupant des propriétés de la turbulence $2D$ ont une résolution typique de 256 ou 512 points de grille.

La figure 1.8 illustre la distribution de vorticité et le spectre pour la turbulence forcée (a,b) et celle de décroissance (c,d) simulée sur une grille 256^2. Pour la turbulence stationnaire, la source est localisée pour un $k \in [58, 62]$, alors que la turbulence de décroissance a un spectre initial confiné près du nombre d'onde 45. Dans la répartition de la turbulence stationnaire, on peut remarquer une présence de tourbillons localisés intenses, toutefois leur taille est de l'ordre de l'échelle de forçage (figure 1.8a). Aucune structure correspondant à l'échelle du pic d'énergie n'apparaît clairement . Dans ces simulations, le régime stationnaire a été obtenu par l'addition, dans la partie droite, de l'équation d'évolution de la friction de Rayleigh $-\lambda\Omega$, avec $\lambda = 0,03$. Le forçage était d'une amplitude unitaire pour toutes les composantes dans la bande spectrale $k \in [58, 62]$, ce qui correspond (pour un pas de temps choisi) à un flux d'énergie de $0,0009$. La pente spectrale correspond approximativement à $-5/3$ à gauche de k_f et est plus raide que le -3 prévu à droite de k_f. La turbulence de décroissance évolue vers des tourbillons

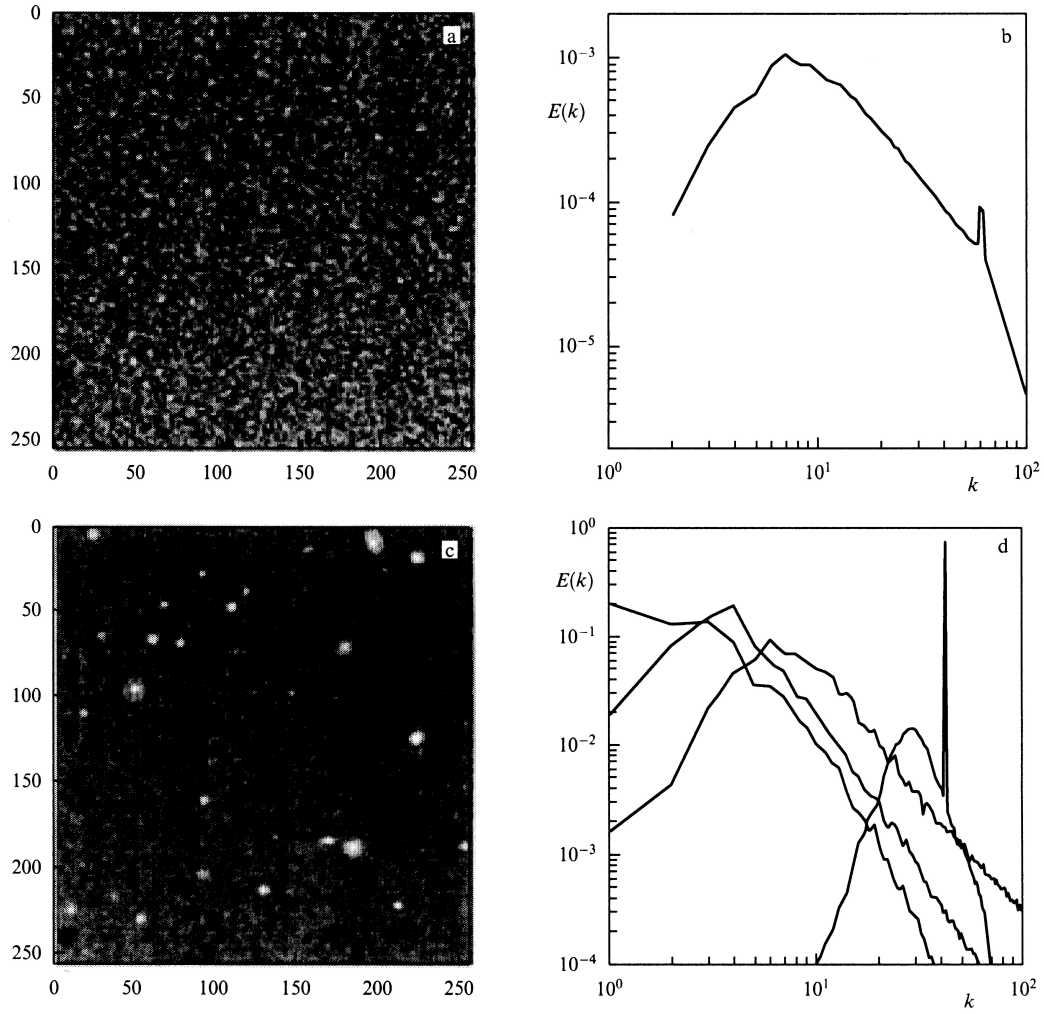


FIG. *1.8: Vorticité et spectre d'énergie en turbulence stationnaire* (a, b) *et de décroissance* (c, d)*. (a) Réalisation du champ de vorticité à un état quasi-stationnaire de l'évolution. (b) Spectre d'énergie moyenné en temps ; le forçage est localisé dans le domaine des nombres d'onde* $k_2 \in [58, 62]$ *; la stabilisation est assurée par la friction du fond. (c) Réalisation du champ de vorticité à la dernière étape du processus de décroissance,* $t_v = 124$*. (d) Evolution du spectre d'énergie de décroissance aux instants* $t_v \approx 0, 5, 40, 70, 124$*. Le spectre initial a son maximum à* $k = 45$*, et l'énergie initiale vaut* 1*.*

larges et bien développés, qui persistent pendant un temps dépassant largement une période

de référence. L'énergie évolue faiblement pendant le temps de l'évolution, l'enstrophie décroît significativement. La pente spectrale pour des larges valeurs de k grossit de sorte à être plus raide que -3 après une certaine phase initiale. L'énergie initiale de l'expérience ci-dessus était de 1. Le champ de vorticité de la figure 1.8c) est donné pour le temps adimensionné $t_v = \int_0^t dt' \sqrt{Z_2(t')} = 124$. Ce temps est mesuré en unité de temps de référence et donne le nombre de rotation des tourbillons. Les spectres de la figure 1.8d) montrent un décalage du pic spectral aux temps $t_v = 0, 5, 40, 70, 124$, pendant l'évolution.

d. Turbulence de décroissance

Beaucoup de publications sur la turbulence $2D$ ont, dans le passé, étudié le cas de décroissance, puisque ce cas semble plus naturel et ne requiert aucune dissipation aux larges échelles.

En turbulence de décroissance, l'énergie est pratiquement conservée (dans la limite d'une viscosité nulle), tandis que l'enstrophie décroît. Pour le montrer, nous enlevons la source de l'équation (1.1), et ensuite nous multiplions cette équation par la fonction de courant ψ et l'intégrons sur l'espace. La loi de décroissance d'énergie prend alors la forme suivante :

$$\partial_t E = -2\nu Z_2 = -\epsilon. \tag{1.12}$$

La loi de décroissance d'enstrophie est obtenue de façon similaire :

$$\partial_t Z_2 = -\nu \overline{|\nabla \psi|^2} \tag{1.13}$$

(la barre représente le moyennage sur l'aire). Comme l'enstrophie décroît, la partie droite de l'équation d'évolution de l'énergie reste toujours bornée. On peut donc négliger le taux de variation de l'énergie dans la limite de viscosité nulle. Ainsi, on pourrait considérer l'énergie comme étant pratiquement constante.

Pour un tel régime limite, selon Batchelor, on peut supposer que le spectre d'énergie de la turbulence de décroissance doit avoir la forme

$$E(k,t) = E^{3/2} t f(E^{1/2} k t), \tag{1.14}$$

où t est le temps, E l'énergie, qui reste constante. La fonction sans dimension f dépend d'une seule combinaison adimensionnée possible de E, k et t. De la même manière, nous pouvons obtenir la loi de décroissance pour l'enstrophie totale

$$Z_2 \sim t^{-2}. \tag{1.15}$$

Une fois de plus, les arguments dimensionnels donnent une pente de -3 pour le spectre d'énergie de la turbulence de décroissance, pour des grandes valeurs de k.

A la différence du cas $3D$, il est très difficile de trouver un système bidimensionnel pour lequel une vérification expérimentale soit vraiment possible dans une bande suffisamment large de k. Par cette raison, la plupart des résultats de la turbulence $2D$ a été obtenue en simulations numériques, tandis que les résultats expérimentaux sont relativement rares.

Il existe également des théories analytiques, [28] et [44] par exemple, avancées dans les années 60 et 70, basées sur certaines hypothèses. Leurs prémisses ont cependant été difficiles à vérifier expérimentalement ou numériquement. Nous n'allons pas en discuter ici.

McWilliams [53] a montré que des tourbillons cohérents à longue vie apparraissent au cours de l'évolution de la turbulence de décroissance. Ces tourbillons persistent pendant un temps correspondant à un grand nombre de rotations des tourbillons. Les premiers exemples de tourbillons cohérents dans la turbulence de décroissance ont probablement été donnés dans l'article [1], mais c'est McWilliams qui a démontré systématiquement que ce phénomène peut se réaliser dans des systèmes différents et pour des conditions initiales variées. La Figure 1.8*c* montre un exemple d'un champ de vorticité typique de turbulence de décroissance.

Différentes questions, en rapport avec le problème de l'évolution de la turbulence libre, ont été discutées dans la revue de S. Danilov et D. Gurarie [18].

e. Tourbillons cohérents

La conclusion principale du travail [69] est que l'apparition de tourbillons cohérents détruit l'invariance d'échelle du système et mène à la formation de spectres de pente plus raide. De plus, dans ce document, on confirme que le comportement des spectres dépend fortement des conditions initiales du système.

Le fait que, à partir d'un certain temps (après le début de l'évolution), la turbulence de décroissance dans des modèles numériques avec hyperviscosité ressemble à un ensemble de tourbillons localisés interagissants, a conduit à l'apparition de travaux où les caractéristiques de ces tourbillons localisés sont étudiées (voir [4] et [54]). Pour ce faire, nous avons besoin de sélectionner des tourbillons cohérents à partir du fond turbulent aux petites échelles. La règle de sélection la plus simple identifie le champ de vorticité qui excède un seuil prescrit (en terme de vorticité). Dans un autre algorithme, on propose d'analyser les domaines où le déterminant du gradient de vitesse prend des valeurs négatives. L'article [4] annonce que les deux méthodes fournissent des résultats similaires.

Le rôle décisif des tourbillons cohérents dans les modèles de la turbulence de décroissance

a motivé le développement de modèles basés sur le concept des tourbillons localisés (voir [3], [11] et [74]). Dans de tels modèles, les tourbillons se trouvant à des grandes distances les uns des autres, se déplacent comme des tourbillons ponctuels (à l'exception des cas où ils se rapprochent à des petites distances). Chacun des tourbillons est caractérisé par deux paramètres, le rayon du tourbillon et le niveau de vorticité (uniforme) dans le noyau. Quand deux tourbillons fusionnent, c'est-à-dire quand ils se raprochent à une distance inférieure ou égale à $1,7(R_1+R_2)$, ils sont remplacés par un seul tourbillon de rayon $({R_1}^4+{R_2}^4)^{1/4}$. De telles collisions conservent l'énergie, mais elles font décroître l'enstrophie. On a constaté cependant que différentes conditions initiales pour les répartitions selon R (voir [3], [11] et [74]) mènent à des résultats divergents.

La dynamique des tourbillons ponctuels considérée dans les travaux [11] et [74] fournit des lois d'échelle pour le nombre de tourbillons, pour la distribution de taille, pour celle de la distance entre les tourbillons, pour l'enstrophie de l'écoulement. Tous ces résultats sont en accord avec les résultats obtenus dans le cadre des approches numériques pseudospectrales (voir [54]). En se basant sur les résultats numériques de [54], et particulièrement sur la conservation de la vorticité moyenne (moyennée par rapport à tous les tourbillons), les auteurs de [11] ont proposé une hypothèse pour la turbulence de décroissance, compatible avec le numérique. En plus de la conservation de l'énergie comme pour la théorie de Batchelor (II A), les auteurs de [11] ont trouvé la conservation des extréma de vorticité. Celle-ci apparaît naturellement quand on voit la turbulence de décroissance comme un processus de fusionnement des tourbillons. La dissipation de l'enstrophie n'a lieu que sur la périphérie du tourbillon (à cause de la filamentation), et n'affecte pas le coeur du tourbillon. En supposant la conservation des extrema de vorticité, Ω_m, on peut construire les paramètres caractéristiques de temps $\tau = {\Omega_m}^{-1}$ et de longeur $l = \sqrt{E}/\Omega_m$. En supposant, de plus, que le nombre de tourbillons N_v décroît dans le temps selon une loi de puissance avec un exposant ξ : $N_v \sim t^{-\xi}$, et en écrivant l'énergie et l'enstrophie (confinées évidemment au coeur du tourbillon) sous la forme $E \sim N_v R^4 {\Omega_m}^2$, on obtient une taille de tourbillon qui grossit en $l(t/\tau)^{\xi/4}$ (conservation de l'énergie), alors que la distance entre les tourbillons grossit en $l(t/\tau)^{\xi/2}$, et l'enstrophie de l'écoulement entier décroît en $\Omega \sim \tau^{-2}(\tau/t)^{\xi/2}$. De telles conclusions sont en bon accord avec les études numériques.

Cependant, cette proposition diffère autant des résultats classiques de Batchelor que de la théorie de décroissance sélective (voir par exemple [2] et [33]). Dans [12], il est postulé que la décroissance turbulente pourrait minimiser l'enstrophie à condition que l'énergie reste fixe. Cette théorie a été appliquée pour décrire des états quasi-finaux de la décroissance turbulente

dans [52] et dans d'autres travaux. Dans l'article [12], il est montré que la décroissance sélective prédit un taux de dissipation plus rapide que ceux des simulations numériques. Ceci à cause de l'échec pour rendre compte du rôle des structures tourbillonnaires cohérentes dans le processus de ralentissement de décroissance.

Dans l'article [21], la validité et l'utilité des méthodes pseudo-spectrales pour la description de la turbulence dominée par les tourbillons, ont été mises en doute. Les arguments étaient que les méthodes pseudo-spectrales introduisent une dissipation numérique importante sur la périphérie des tourbillons, donnant ainsi une description fausse des fusionnements des tourbillons et de la filamentation résultante [43]. Il a été montré dans le travail [50] que des filaments minces sur la périphérie des tourbillons en combinaison avec une dissipation hypervisqueuse importante, amènent à une augmentation significative du taux de dissipation totale de vorticité. De plus, l'hyperviscosité peut causer des oscillations exagérées des iso-contours sur la périphérie des coeurs des tourbillons. Dans cet article, il est proposé une méthode alternative basée sur la méthode de la dynamique de contour complétée par une certaine "chirurgie de contour". Cette méthode permet, en principe, une résolution spatiale plus haute que celle des méthodes pseudo-spectrales traditionnelles et, donc, d'élargir la bande spectrale.

Dans l'article [21], il est montré que quelques caractéristiques du processus, comme la rapidité de variation des tailles des tourbillons, pour les larges tourbillons, et l'allure de décroissance de l'enstrophie, sont remarquablement différentes des résultats obtenus par des méthodes pseudo-spectrales. La critique des méthodes pseudo-spectrales, entreprise dans [21], est basée sur l'hypothèse que la frontière d'un tourbillon est nette et bien identifiée, alors que les méthodes pseudo-spectrales opèrent avec des champs lisses, sans sauts. (Il n'est pas clair de savoir comment les structures de type taches tourbillonnaires pourraient représenter des champs lisses.) D'un autre côté, le comportement différent de la turbulence de décroissance "pseudo-spectrale" à partir de la dynamique de contour peut être interprété comme une différence dans les conditions initiales, selon [69].

Toutes les observations présentées dans cette section, montrent nettement les difficultés possibles dans une description de la turbulence $2D$. La dynamique de l'évolution de la turbulence dépend fortement du comportement des structures de petites dimensions.

f. Théorie et expérience

Pour illustrer le fait que les résultats expérimentaux *peuvent* parfois radicalement ne pas s'accorder avec les prévisions des théories, présentons quelques observations récentes.

Les expériences du GASP (Global Atmospheric Sampling Program) ont conduit à des mesures détaillées des spectres de vitesse horizontale dans la troposphère supérieure et la stratosphère inférieure, dans des rangs d'échelles de $3000\,km$ à plusieurs kilomètres. Les résultats sont présents dans plusieurs articles (voir [60] par exemple). Ces expériences ont donné des spectres $\sim k^{-5/3}$ dans le rang mésoéchelle $10^{-5} div 10^{-3}\,rad/m$, alors que dans le rang des petits nombres d'onde $k < 10^{-5} rad/m$ les spectres ont des pentes de -3 (voir figure 1.9).

Des travaux plus récents [27] prennent une altitude plus basse, et obtiennent des spectres de même pente $-5/3$ dans le rang 10^{-5} à $10^{-3} rad/m$, mais de magnitude un peu plus basse. La pente augmente à $-9/4$ dans le rang 10^{-3} à 10^{-2} rad/m et donc "s'aplatit" pour des nombres d'onde plus larges.

Dans [48] sont analysées des données d'avion commercial, la base de données MOZAIC, confirmant le spectre $-5/3$ aux petites échelles, et -3 aux échelles plus larges, en accord avec les observations précédentes.

Dans [59] sont analysées les données TOGA COARE (Tropical Ocean Global Atmospheric Coupled Ocean-Atmosphere Response Experiment), qui se réfèrent à un rang allant de $1km$ jusqu'à $1000km$. La série entière de données a un spectre de pente de l'ordre de $-5/3$, mais pour des sous-séries de ces données, la pente varie entre $-5/3$ et -2. Ce travail n'a trouvé aucune pente de -3 (qui correspond aux échelles les plus larges).

Le paradoxe principal est que les deux branches spectrales (voir figure 1.7) sont disposées dans le sens inverse.

Une revue sur des tentatives d'explications des résultats d'observation a été faite, dans le pragmatisme conventionnel de la turbulence $2D$ dans [18].

L'ensemble des travaux cités nous fait donc insister sur le fait qu'une bonne théorie est insuffisante, et que l'expérience reste indispensable.

1.6.2 Turbulence quasi-bidimensionnelle

a. Influence de la rotation

Des combinaisons plus complexes que $\omega = \Delta\psi$ entre la fonction de courant et la vorticité peuvent avoir lieu dans de nombreux cas réels.

L'exemple le plus simple peut être obtenu dans le cadre du modèle classique de "l'eau peu profonde" dans le référentiel tournant avec une vitesse angulaire Ω. Les mouvements atmosphériques aux larges échelles sont caractérisés par le nombre de Rossby $Ro = UL/f$ qui est petit devant 1 dans les conditions de la Terre. Ici, f est le paramètre local de Coriolis

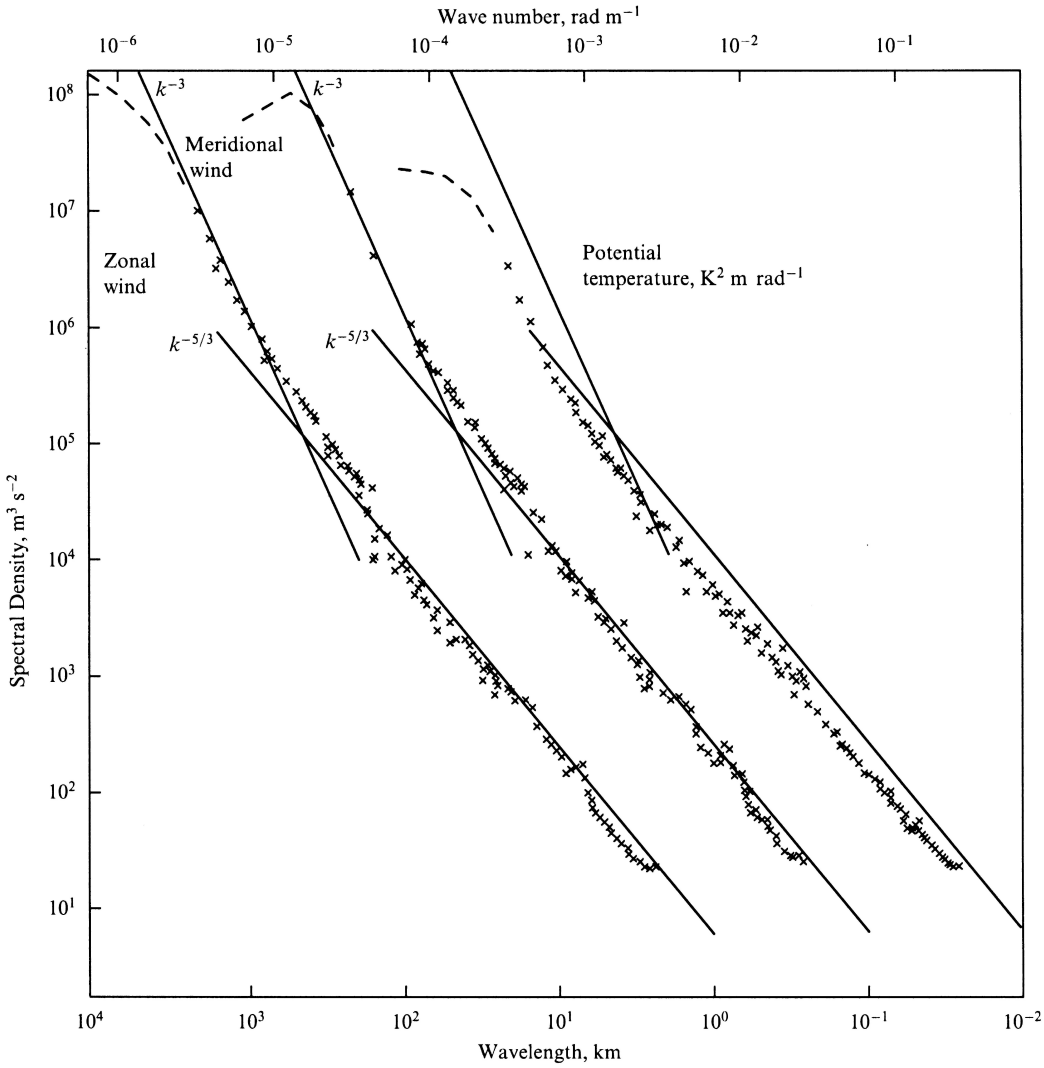


FIG. *1.9: Les mesures des spectres de vitesse horizontale dans la troposphère supérieure et la stratosphère inférieure selon des expériences du GASP (Global Atmospheric Sampling Program).*

- deux fois la vitesse angulaire de rotation de la Terre, modifiée sur la latitude, supposé constant si l'on néglige l'effet bêta-, U et L sont des échelles caractéristiques de vitesse et de longueur.

Suivant Pedlosky [64], les équations d'évolution pour ce modèle ont la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + f[\mathbf{e}_z, \mathbf{v}] + g\nabla h = 0,$$
$$\partial_t H + div H\mathbf{v} = 0. \tag{1.16}$$

Ici, $\mathbf{e}_z$ est un vecteur unité vertical, $\mathbf{v}$ est la moyenne de la vitesse intégrée sur l'épaisseur de l'écoulement du fluide, H l'épaisseur totale de la couche du fluide, $\mathbf{g}$ l'accélération dûe à la gravité, et h l'élévation de la surface du fluide. La condition $Ro \ll 1$ mène à ce que l'accélération de Coriolis excède celle locale, et à ce que l'écoulement devienne *géostrophiquement* équilibré : $f[\mathbf{e}_z, \mathbf{v}] + g\nabla h \simeq 0$.

En prenant le rotationnel de la première équation (1.16) et en éliminant $div\,\mathbf{v}$ par le biais de la seconde, on obtient l'équation d'évolution pour la vorticité relative. En la combinant avec la seconde équation, on parvient à la loi de conservation :

$$D_t\omega = 0, \quad \text{où} \quad \widehat{D}_t = \widehat{\partial}_t + (\mathbf{v} \cdot \widehat{\nabla}) \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\Delta\psi + f}{H}. \tag{1.17}$$

On a introduit ici la fonction de courant géostrophique $\psi = gh/f$.

Ne gardons dans les équations du mouvement que les termes de premier ordre par rapport au nombre de Rossby.

La dérivation de l'équation réduite exploite les lois de conservation (1.17). Ecrivons son dénominateur comme $H = H_0 + h - h_b$, où h_b est le profil du fond, H_0 la hauteur moyenne et on suppose les rapports $h/H_0, h_b/H_0$ petits et de l'ordre du nombre de Rossby. Alors, dans la première approximation, la vorticité quasi-géostrophique est donnée par l'expression

$$\omega_q = \Delta\psi + f - \frac{\psi}{{L_0}^2} + \frac{h_b f}{H_0} = \omega H_0 + o({R_0}^2), \tag{1.18}$$

où $L_0 = (gH_0)^{1/2}/f$ est un paramètre appelé le rayon de déformation de Rossby-Obukhov. Ainsi, la loi de conservation (1.17) implique l'équation quasi-géostrophique $D_t\omega_q = 0$ qui peut être réécrite sous la forme

$$\partial_t(\Delta\psi - \frac{1}{{L_0}^2}\psi) + [\psi, \Delta\psi - \frac{1}{{L_0}^2}\psi + f + f\frac{h_b}{H_0}] = 0. \tag{1.19}$$

En général, on peut aussi inclure les sources et la dissipation dans la partie droite de l'équation (1.19), $0 \to F - D$.

L'équation pour la vorticité potentielle avec un rayon de Rossby-Oboukhov fini apparaît également dans la physique de plasma sous le nom d'équation de Hasegawa-Mima (voir des manuels sur la physique de plasma).

Pour des mouvements avec l'échelle spatiale plus grande que le rayon de Rossby-Oboukhov, on peut supprimer le terme proportionnel à ${L_0}^{-2}$. Si, de plus, $h_b = 0$ et $f = Cte$, l'équation (1.19) coïncide avec l'équation $2D$ classique pour la vorticité dans un fluide incompressible.

En plus de l'influence de rotation, on doit tenir compte de l'effet des frottements du fond (pour plus de détails, voir [64], page 179).

b. Tourbillons écrantés, rayon de Rossby-Obukhov

Une valeur finie du rayon de Rossby-Oboukov L_0 entraîne un nouvel effet.

La densité de la vorticité potentielle crée une distribution de vitesse localisée (car le laplacien dans la relation entre la fonction de courant et la vorticité est remplacé par l'opérateur d'Helmholtz, $\Delta\psi - {L_0}^{-2}\psi = \omega_q$). Alors, la fonction de Green $G(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ [pour $\omega_q = \omega_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$] devient

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi}\omega_0 K_0(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{L_0}).$$

Ainsi, on peut atteindre l'affaiblissement des structures de larges échelles au-dessus de L_0. Bien qu'un rayon fini de Rossby - Obukhov puisse supprimer la cascade inverse, celle-ci ne sera pas nécessairement complètement stoppée.

Dans la limite $k \ll 2\pi/L_0 = k_{RO}$, la vorticité potentielle est approchée par l'expression $\omega_q = -\psi/{L_0}^2$ et l'équation d'évolution prend la forme

$$-{L_0}^{-2}\partial_t\psi + [\psi,\, \Delta\psi] = D + F, \tag{1.20}$$

en conservant séparément (en absence de forçage-dissipation) les intégrales

$$K = \int dxdy\, \psi\Delta\psi, \qquad P = \int dxdy\, \psi^2,$$

les énergies cinétique et potentielle.

Ces intégrales peuvent être considérées comme valeurs limites pour l'enstrophie et l'énergie totale, conservées dans le système entier. En effet, les termes principaux dans la définition de l'enstrophie et de l'énergie deviennent proportionnels, dans la limite $k \to 0$, et se transforment en "l'énergie potentielle", tandis que les termes d'ordre plus élevé que le petit paramètre $(kL_0)^2$ donne "l'énergie cinétique".

Suivant [41], les deux intégrales, K et P définissent deux cascades : la cascade de grande échelle spatiale de l'énergie potentielle, et celle de petite échelle spatiale de l'énergie cinétique. La première donne une répartition énergétique spectrale avec une pente de $-11/3$ et la deuxième avec une pente de -5.

La cascade inverse à $k < k_R$ conduit à l'accumulation d'énergie aux modes bas et à la formation de structures tourbillonnaires régulièrement espacées -"cristallisation de tourbillons"-, en accord avec la terminologie de [35].

Le rayon de Rossby fini ne peut pas arrêter la cascade inverse sans l'introduction d'un mécanisme dissipatif quelconque. Le problème d'équilibrage de cascade inverse, par frottement du fond, reste donc ouvert.

Dans ce premier chapitre, différents modèles permettant la modélisation de la turbulence ont été introduits, puis quelques difficultés liées aux simulations numériques ont été analysées. Ensuite, nous avons présenté différents points concernant la turbulence, en tenant compte de la situation actuelle.

Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à une expérience décrivant une évolution de la turbulence $2D$ dans un fluide incompressible non visqueux.

Chapitre 2

”Cristaux tourbillonnaires” dans les expériences de plasma

Afin de nous placer dans un cas précis d'évolution de la turbulence $2D$ vers des structures régulières, nous avons choisi de nous appuyer sur une expérience de plasma réalisée par Fine, Driscoll et al. [23]. Cette expérience est réalisée dans le plasma d'électrons magnétisé dont le mouvement évolue comme la turbulence $2D$ dans un fluide incompressible non visqueux. Parfois, la turbulence évolue vers des configurations en structures régulières. C'est pourquoi cette expérience servira de base pour essayer de comprendre comment la formation de structures régulières peut survenir.

2.1 Expériences aboutissant à la formation de ”cristaux tourbillonnaires”

2.1.1 Descriptif expérimental et quelques estimations

Nous commençons par donner quelques résultats expérimentaux (voir [23] et les références correspondantes), dont le dispositif expérimental est présenté schématiquement sur la figure 2.1.

Les expérimentateurs ont chauffé une spirale de tungstène à l'entrée de la conduite (sur la partie gauche de la figure), ce qui a permis d'émettre des électrons à l'intérieur de cette conduite. Ce plasma d'électrons, de densité $n \leq 10^7\, cm^{-3}$, est contenu, dans le vide ($P \leq 10^{-9}\, Torr$ [23], $P \sim 10^{-10}\, Torr$ [20]), dans une conduite aux parois métalliques de diamètre $2R_w = 7cm$. Les électrons sont capturés par un ”piège” énergétique dans la zone centrale de la

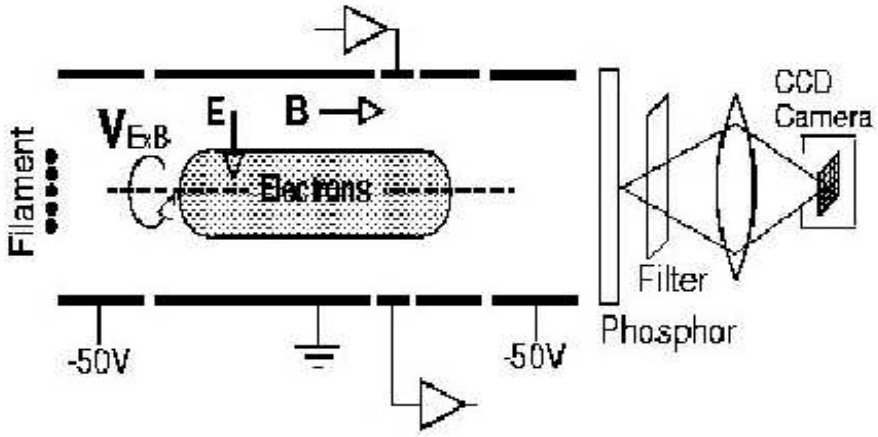


FIG. *2.1: Schéma du dispositif expérimental (conduite cylindrique) avec un diagnostique sur écran de phosphore / CCD–caméra.*

conduite. En effet, d'une part, une différence de potentiel négative ($V \leq 50$ Volts) appliquée entre les extrémités de la conduite et les parois de la zone centrale de la conduite, assure un mouvement longitudinal aux électrons dans la zone centrale du dispositif, et, d'autre part, un champ magnétique uniforme axial ($B_z \sim 4{\cdot}10^3 G$ [23], ou $B_z \sim 1\,T$ [20]) impose un mouvement radial aux électrons (il empêche aux électrons de se déplacer vers les parois) du plasma pendant l'intervalle de temps ~ 100 s. Rappelons qu'en SI $1\,Tesla(SI) = 10^4 Gauss(CGS)$.

La "colonne électronique" créée dans ce dispositif a un rayon caractéristique $R_p \sim 1,5\,cm$ et la longueur $L_p \sim 50\,cm$. L'énergie cinétique du mouvement thermique des électrons considérés comme un gaz classique ($\sim kT$) est de l'ordre de $kT < 1\,ev$. Rappelons que $1\,ev \sim 10^4\,K$. A cette température correspond la vitesse thermique $v_m \sim \sqrt{kT/m_e} \sim 3 \cdot 10^7 cm\,s^{-1}$. Les électrons ne subissent pratiquement pas de collisions entre eux car leur longueur de libre parcours est estimée, dans ces conditions, par $\lambda_{ee} > 3\,km$ (voir [34]).

En ce qui concerne le mouvement des électrons individuels, autre que le mouvement longitudinal le long de l'axe z, il est influencé par l'effet de cyclotron : les électons se déplaçant le long des lignes du champ magnétique, décrivent en même temps des trajectoires circulaires (autour du centre guidant) [voir les explications en annexe A]. Les particules ayant la vitesse caractéristique $v_m \sim \sqrt{kT/m_e} \sim 10^7 cm\,s^{-1}$ sont caractérisées par le rayon de cyclotron (de Larmor) d'orbite $a_c = v_m/\Omega_e$. La pulsation de cyclotron $\Omega = eB/m_e c \simeq 1,76 \cdot 10^7 B$, où l'induction magnétique, mesurée en Gauss, est, dans cette condition, de l'ordre de $2{\cdot}10^{-4} cm = 2\mu m$. Dans [23], on estime $a_c \sim 5\,\mu m$. Ce rayon peut être considéré comme négligeable pour les mouvements macroscopiques en question. La période de rotation est estimée

par l'expression $\tau = 2\pi/\Omega_c$, où, selon les estimations, $\Omega_c \sim 11\,Ghz$.

Les électrons "thermiques" individuels de vitesse v_m se déplacent le long de l'axe z, en subissant des réflexions contre les "bouchons de champ" aux extrémités de la conduite. La fréquence des "sauts" (entre chaque bouchon) peut être estimée par $\nu \sim v_m/2L_p \sim 0,3\,Mhz$. Dans [23], on donne $\nu \sim 0,4\,Mhz$. Outre ces mouvements, il existe encore le mouvement collectif des électrons. Dans [23], la vitesse du mouvement collectif, celle "de dérive", a été définie par l'expression $\mathbf{v}(r,\theta,z) = c\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$ avec l'hypothèse que le mouvement des électrons dans le plan perpendiculaire au champ magnétique est dû (selon le travail cité) au fort champ électrique propre $\mathbf{E}(r,\theta,z) = -\nabla\phi(r,\theta,z)$ *résultant du plasma d'électrons non–neutre.*

Si l'on prend $E \sim 10^{-2}u.CGS \sim (1 \text{ à } 3)\,V/cm,\ B \sim (3 \text{ à } 10)\cdot 10^3$ Gauss, on estime la vitesse du mouvement collectif de plasma par la valeur $v_D \sim cE/B \sim 10^5 cm/s \ll v_m \sim 10^7 cm\,s^{-1}$. Le temps caractéristique du mouvement collectif de plasma, c'est-à-dire la période de rotation, est trouvée à partir de l'expression $\tau_D \equiv f_R^{-1} = 2\pi r/v_D(r)\,s$ (ce qui donne le temps caractéristique de référence) ; dans [23], on donne $\tau_R \sim 170\,\mu s$, c'est-à-dire, $\omega_D \equiv 2\pi f_R \sim 10^4\,s^{-1}$. Pour ces expériences, le temps caractéristique entre deux collisions successives est estimé à $\tau_{col} \sim \frac{\lambda_{ee}}{v_m} \sim \frac{3.10^5 cm}{10^7 cm/s} \sim 10^{-2}s$, et le temps caractéristique par $\tau_R \sim 10^2.10^{-6} \sim 10^{-4}s$, c'est-à-dire $\tau_{col} \sim 10^2\tau_R$.

Dans les expériences citées, la répartition radiale de la densité d'électrons, moyennée suivant z, a été diagnostiquée à l'aide d'une projection de la concentration des électrons $n(r,\theta,t)$ sur un écran phosphorescent (voir la figure 2.1), que l'on définira comme étant un collecteur. Ce collecteur fournit le nombre d'électrons présents dans le plan, à la position (r,θ). La densité d'électrons est alors définie comme la concentration d'électrons divisée par l'aire du collecteur (et non pas L_p).

2.1.2 Discussion sur le modèle

Dans les conditions qui précèdent, la colonne d'électrons, entourée par un conducteur (figure 2.1), évolue comme la turbulence 2D dans un fluide incompressible non–visqueux entouré par une frontière circulaire, avec une condition de glissement : $\phi \sim \psi(R_w) = 0$.

Nous insistons ici sur le fait qu'il n'y a qu'un signe de vorticité (pris positif), car la densité d'électrons ne peut être que positive (et il n'y a pas de charge de signe opposé).

En principe, on peut observer, dans ce système, de faibles effets diffusifs non-souhaités, dûs aux fuites des électrons à travers les "bouchons" de champs aux extrémités du dispositif, et des faibles effets "visqueux" sur les petites échelles spatiales, dûs aux collisions électron-électron. Dans certains cas, ces effets non-désirables *ne sont pas* modélisés par les équations similaires

à celles de Navier-Stokes (dissipation de Landau, effet de tunnel, ...). Nous négligeons, dans ce qui suit, ces effets de dissipation.

Les écoulements d'Euler en question conservent les invariants intégraux.

La circulation totale (nombre d'électrons sur l'unité de longueur) $\Gamma_{tot} = (4\pi ec/B)N_L$, où $N_L = \int d\mathbf{x}\, n$, le moment angulaire $P_\theta = R_w^{-4} \int d\mathbf{x}\, r^2\, n/n_0$, l'énergie électrostatique (l'énergie cinétique du fluide)

$$H = \frac{1}{2} R_w^{-2} \int d\mathbf{x}\, (\phi/\phi_0)\, (n/n_0)$$

sont bien conservés. Ici, $n_0 = N_L/R_w^2$ et $\phi_0 = eN_L$.

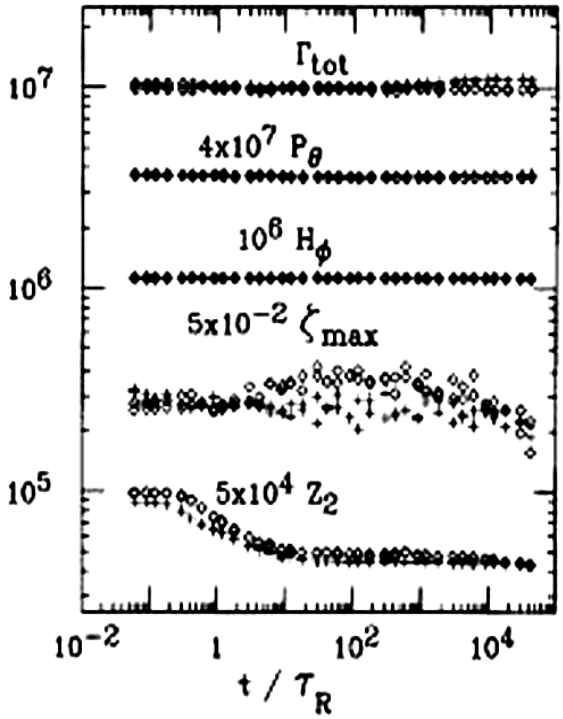


FIG. *2.2: Invariants intégraux.*

Dans les expériences [20], [23], la conservation de ces invariants a bien été confirmée. Toutefois, certains invariants, comme l'entropie S et l'enstrophie $Z_2 = \frac{1}{2} R_w^{-2} \int d\mathbf{x}\, (n/n_0)^2$, varient significativement, probablement à cause des moyennages cellulaires au cours des mesures ou de la dissipation aux petites échelles.

Pour les deux séquences qui seront présentées dans la partie suivante, les quantités intégrales mesurées sont représentatives du *mouvement 2D non-visqueux aux grandes échelles et du mouvement avec dissipation aux petites échelles* (voir la figure 2.2). Expérimentalement,

la circulation, le moment angulaire et l'énergie sont des invariants robustes. Par contre, nous verrons que l'enstrophie Z_2, qui est un invariant "fragile", décroît d'un facteur 2 pour les deux séquences en question.

2.1.3 "Cristaux tourbillonnaires" ?

Au cours de cette expérience, on a observé, et ce fait fut surprenant [23], que la relaxation de la turbulence est parfois stoppée.

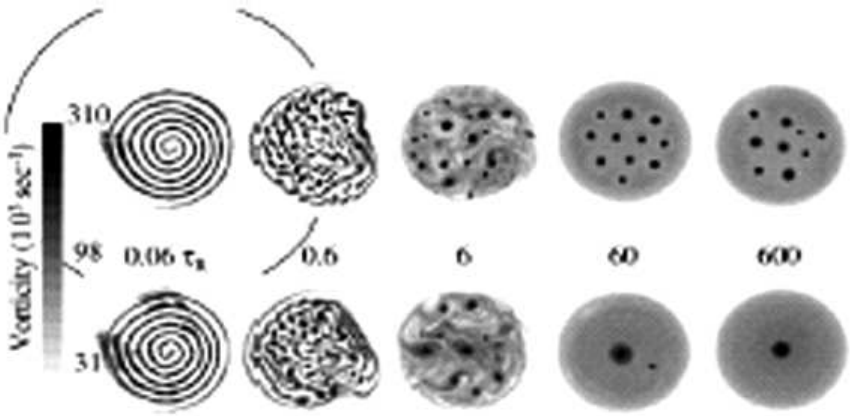


FIG. *2.3: Relaxation de la turbulence.*

La Figure 2.3 montre la répartition de la densité d'électrons obtenue expérimentalement, rapportée sur l'unité de longueur (le long de l'axe du champ magnétique), $n(r, \theta, t)$, à cinq étapes pour deux conditions initiales *légèrement* différentes (modification de la circulation totale) : la première séquence forme un cristal tourbillonnaire, tandis que la seconde séquence se relaxe rapidement vers un profil similaire à "une cloche".

Le regroupement des "super–tourbillons" individuels se stabilise donc en formant des "cristaux tourbillonnaires" qui persistent jusqu' à mille, même dix mille fois le temps de référence τ_R. On constate que la formation de ces "cristaux tourbillonnaires" résulte de la relaxation

de la turbulence bidimensionnelle aux *très grands* nombres de Reynolds, $Re \gg 1$ [1] [2].

Les "cristaux tourbillonnaires" observés sont constitués de 3 à 20 "super tourbillons" individuels d'intensité 4 à 6 fois supérieure à la vorticité environnante, arrangés en une structure qui tourne avec le fond, en ne subissant aucune déformation. Nous pouvons voir quelques "cristaux tourbillonnaires" observés au cours de ces expériences sur la figure 2.4.

FIG. *2.4: Quelques "cristaux tourbillonnaires" observés au cours des expériences.*

Pour chaque séquence (figure 2.3), l'instabilité de la configuration initiale entraîne la formation de $N_v = 50$ à 100 tourbillons d'égale circulation, qui ensuite, décroît selon la loi $N_v \sim t^{-\xi}$. La valeur de ξ s'étend de 0.2 à 1.1 pour des conditions initiales différentes, avec une valeur 0.8 communément observée. Dans l'évolution de la séquence du haut de la figure 2.3, les cristaux tourbillonnaires se forment vers $10\tau_R$ et survivent jusqu'à $10^4\tau_R$. Cette figure montre également que tant que les super-tourbillons survivent, ils ont tous la même circulation et forment une structure pratiquement régulière, comme on peut le voir à $600\tau_R$.

[1] En omettant les termes visqueux dans les équations du mouvement, on implique que les forces de frottement soient négligeables par rapport à la force d'inertie. Pour estimer le rapport de ces forces, on utilise le nombre de Reynolds. On prend $Re \sim \Omega {R_w}^2/\nu$, où la quantité ν est considérée comme le coefficient de viscosité. A cause de la vorticité Ω du mouvement qui mesure $\sim 10^5 s^{-1}$, pour $\nu \sim 10^{-6} m^2 s^{-1}$ et $R_w \sim 10^{-2} m$, le nombre de Reynolds vérifie $Re > 10^7$.

[2] Immédiatement, on peut se demander comment définir le nombre de Reynolds dans les cas où le terme dissipatif, dans les équations du mouvement quasi–hydrodynamique du plasma, n'est pas exprimé par le terme classique proportionnel au laplacien.

2.1.4 Constatation et comparaison des résultats expérimentaux et numériques

Les expérimentateurs ont tenté d'établir des estimations pour le nombre des tourbillons qui survivent et forment l'état de cristal tourbillonnaire, en égalant le temps de fusion au temps de refroidissement. Les estimations peuvent être basées sur les exposants dynamiques d'échelle ξ et η, qui déterminent le nombre de tourbillons survivants $N_v(t)$ et leur circulation totale $\Gamma_v(t)$ par

$$N_v(t) = N_v(t_0)(\frac{t}{t_0})^{-\xi}, \quad \Gamma_v(t) = \Gamma_v(t_0)(\frac{t}{t_0})^{\xi\eta}. \tag{2.1}$$

Notons que les hypothèses impliquent $\eta = 1/2$; mais, différentes valeurs ($0.2 < \eta < 0.8$) ont toutefois été observées dans les expériences et les simulations. Le "temps de fusion" peut être estimé par l'expression $-(d/dt)N_v \approx -(\Delta N_v/\Delta t) = 1/\tau_m(t)$, lorsque $\Delta N_v = -1$. Le temps de refroidissement est estimé à partir des arguments de mélange par $\tau_c(t) = D/\alpha N_v \tau_v$, où D est l'aire de la tache de vorticité, et $\alpha \approx 0.03$. Etonnement, ces simples estimations prédisent N_c à un facteur près.

Les théories statistiques exigent que les états relaxés soient déterminés à partir des invariants Γ, P_θ, H, soit par une maximisation de l'entropie S [63], soit une minimisation de l'enstrophie Z_2 [2].

On peut constater nettement que : (a) une transformation de l'écoulement turbulent en cristaux tourbillonnaires se réalise pour des systèmes non visqueux, et (b) que l'effet de formation des cristaux est défini par *l'interaction entre super–tourbillons et fond*.

Dans les mêmes travaux, on affirme que les résultats expérimentaux ont été comparés avec les simulations numériques ("vortex-in-cell simulations") réalisées avec plus de 10^6 points pour approximer les champs continus de la dynamique 2D d'Euler. Les simulations avec différents nombres de points ont vérifié que les deux effets, le refroidissement et la cristallisation, ne sont pas sensibles à une telle discrétisation.

2.2 Gaz d'électrons

Afin de ne pas alourdir le texte, nous présentons les détails du mouvement des particules chargées dans des forts champs magnétique et électrique en Annexe A.

2.2.1 Discussion sur les approches possibles

Ces dernières années, deux théories radicalement différentes ont été utilisées pour tenter de décrire la *relaxation libre* de la turbulence $2D$.

L'une des théories postule que l'écoulement turbulent est dominé par des tourbillons localisés intenses qui suivent la dynamique Hamiltonienne des tourbillons ponctuels, ponctués occasionnellement par la fusion de tourbillons environnants. L'état final est alors un seul tourbillon dans le cas de la turbulence de l'un signe de vorticité. La théorie est presqu'en accord avec la loi de puissance observée $\sim t^{-s}$ du nombre de super–tourbillons, mais elle ne peut pas expliquer pourquoi, dans certaines situations observées, une partie des tourbillons restent, lors de l'équilibre (dans l'état supposé final de la relaxation de la turbulence).

Une approche diamétralement opposée est assimilée à la théorie du maximum de l'entropie totale du fluide [63]. Celle-ci considère l'écoulement turbulent comme le résultat de permutations d'éléments de vorticité entre les cellules du domaine. Le fluide incompressible se mélange, se mixe de façon ergodique évoluant vers l'état final unique de la relaxation 2D de la turbulence. Clairement, la théorie ne peut pas expliquer les cristaux tourbillonnaires.

Il y a une approche basée sur l'hypothèse du maximum de l'entropie *régionale* du fluide quand les états de cristaux tourbillonnaires sont déterminés par la maximisation de l'entropie du fluide du fond [30]. L'idée principale de cette approche est que les régions de l'écoulement, situées entre les tourbillons intenses, sont bien mélangées. Les super–tourbillons mélangent ergodiquement le fond tourbillonnaire du fluide, le "poussant" vers l'état d'entropie maximale du fluide. Ce mélange, en retour, affecte la dynamique ponctuée des super–tourbillons, "refroidissant" leur mouvement chaotique, et les "dirigeant" vers un état d'équilibre dynamique. Néanmoins, la vorticité dans les super–tourbillons reste non mélangée avec le fond.

Maintenant que l'expérience de plasma (ainsi que ses résultats) a été bien détaillée, nous allons passer à son étude analytique.

2.2.2 Approche hydrodynamique

Les expérimentateurs ont choisi l'approche hydrodynamique pour tenter de comprendre pourquoi la relaxation de la turbulence $2D$ s'arrête parfois, menant à la formation de "cristaux tourbillonnaires".

a. Equations de base

On considère un plasma d'électrons dans un fort champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$. Traité comme un fluide classique, le système est caractérisé par la densité d'électrons $n(\mathbf{r}, t)$ et la vitesse hydrodynamique $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Ici, $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, z)$. Si nous négligeons les effets dissipatifs, la dynamique est déterminée par les équations de continuité et d'Euler (voir par exemple [34], p.100) :

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0,$$
$$\Big(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\Big)\mathbf{v} = e\nabla\Big(\Phi + \Phi_{ext}\Big) - \Omega_e[\mathbf{v}, \mathbf{e}_3] - \frac{1}{m_e n}\nabla p,$$

et les équations moyennées de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e n, \quad [\nabla, \mathbf{B}] = -\frac{4\pi e}{c} n\mathbf{v}, \tag{2.2}$$

où $\partial_t = d/dt$, $eB/m_e c$ est la fréquence de cyclotron des électrons, c est la célérité de la lumière, $-e$ est la charge (négative), $e > 0$, et m_e la masse d'électron, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Le plasma d'électrons est considéré dans un fort champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$. $n(\mathbf{r}, t)$ est la densité d'électrons et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ la vitesse hydrodynamique. Ici, $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, z)$. Les effets dissipatifs sont négligés. Le premier terme, $\sim \Phi$, du membre droit de cette équation représente un résultat moyenné de leurs interactions, $\Phi_{ext}(\mathbf{r})$ est le champ électrique dû aux parois, charges extérieures, ..., le terme $\sim \Omega_e$ est la force de Lorenz, le terme $p = nkT_e$ est la pression des électrons du gaz à la température T_e.

Ce système doit être complété par une équation d'état quelconque. Dans la littérature (par exemple, voir [34], ch.3, §4), on utilise les modèles avec (a) $p = An$ (l'équation d'état isothermique) ; (b) $p = An^{5/3}$ (l'équation d'état adiabatique) ; ou même (c) $p = 0$, qui décrit parfois bien le plasma dans les champs magnétiques forts ($B^2/8\pi \gg p$).

On peut prendre l'équation d'état sous forme $T_e = C^{te}$.

Dans ce cas, nous avons l'ensemble des équations 2.2, qui peut également se présenter sous la forme

$$\partial_t ln(n) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) ln(n) = -div(\mathbf{v}),$$
$$\Big(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\Big)\mathbf{v} = -\nabla h - \Omega_e[\mathbf{v}, \mathbf{e}_3], \tag{2.3}$$

où

$$h = -e\Phi[n; \mathbf{r}] - e\Phi_{ext}(\mathbf{r}) + \frac{kT_e}{m_e} \ln\, n(\mathbf{r}). \tag{2.4}$$

La fonctionnelle $\Phi[n; \mathbf{r}]$ est une solution de l'équation

$$\Delta\Phi[n; \mathbf{r}] = 4\pi e n(\mathbf{r}). \tag{2.5}$$

b. Quelques informations et estimations

Dans le cadre du modèle proposé, l'écoulement du plasma fortement magnétisé devient pratiquement bidimensionnel, s'effectuant dans le plan (r, θ).

Dans une série de publications de Driscoll et al., les auteurs ont utilisé le modèle dans lequel l'évolution collective des électrons est décrite par le système d'équations, formulées en termes de "vorticité" Ω et de "fonction de courant" ψ, définies respectivement par

$$\Omega(r, \theta, t) \equiv \frac{4\pi|e|c}{B} n, \quad \psi(r, \theta, z) \equiv -\frac{c}{B}\phi(r, \theta, z). \tag{2.6}$$

La "vorticité" Ω, dans le cadre de ce modèle, est proportionnelle à la densité d'électron n, qui est mesurée dans le dispositif expérimental.

Remarquons que $\Omega \sim 12 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-4}\, n \sim 2 \cdot 10^{-2}\, n\, s^{-1}$. Dans les domaines, où la concentration d'électrons $n \sim 10^7\, cm^{-3}$, l'estimation est de $\Omega \sim 2 \cdot 10^5\, s^{-1}$.

Le système des équations dynamiques (2.3) peut être reformulé sous la forme (voir Annexe B)

$$\begin{aligned} \Big[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\Big]\Omega = 0, \\ \mathbf{v} = \nabla\psi \times \mathbf{z}, \quad \Big(v_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\psi e_k \equiv \epsilon_{ij3}\partial_j\psi\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si l'on pose (c'est cette approximation qui a été utilisée dans la remarque 1, page 40) que

$$\nabla^2\psi = -\Omega, \tag{2.8}$$

les équations de départ deviennent analogues aux équations d'Euler 2D pour vorticité.

A titre de comparaison des termes de l'expression (2.4), prenons $kT_e \sim 1\, ev \sim 10^4\, K = 1,38 \cdot 10^{-12}\, erg$. Si $D \leq 1\, cm^2$ est l'aire droite caractéristique de la colonne électronique [figure 2.5], et $n \sim 10^6\, cm^{-3}$ la concentration moyenne d'électrons, l'énergie électrostatique propre peut être (probablement) estimée par l'expression $4\pi e^2 nD$, ce qui donne la valeur $\sim 4\pi(4,8 \cdot 10^{-10})^2 10^6 (1 \div 2) \sim 10^{-12}$ erg. : la magnitude est de même ordre que l'énergie thermique.

Négligeons donc l'influence du champ extérieur en posant $|\Phi_{ext}| < 1\, V$. Ces estimations nous permettront d'utiliser l'expression approchée dans les calculs analytiques. Nous avons donc

$$h = F(n) \simeq \frac{kT_e}{m_e} \ln n(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

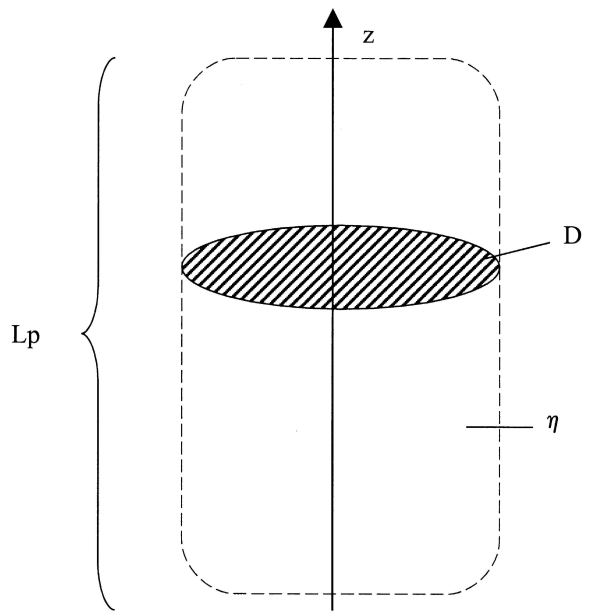


FIG. *2.5: Colonne électronique*

lorsqu'on a $n \leq 10^5\, cm^{-3}$, $T_e \geq 10^4\, K$. Si $n \geq 10^6\, cm^{-3}$, $T_e \leq 10^4\, K$, il est convenable d'utiliser l'approximation

$$h \simeq -e\Phi[n; \mathbf{r}]. \tag{2.10}$$

Comme nous l'avons vu, cette approche hydrodynamique est celle qui a été proposée par les expérimentateurs pour tenter de trouver l'origine de la présence des "cristaux tourbillonnaires". Or, le nombre de particules ($\sim 10^9$ particules) ne nous paraît pas assez grand pour constituer un milieu continu. C'est pourquoi nous allons utiliser l'approche cinétique.

2.3 Equation de Vlasov

Nous commençons par rappeler quelques informations très importantes. Les expériences en question ont été réalisées dans un milieu de plasma d'électrons se trouvant dans de très forts champs magnétique et électrique. Le nuage de plasma est constitué de $N \sim nR^2L \lesssim 10^9$ électrons. En tenant compte des conditions de l'expérience, les particules individuelles peuvent être considérées comme des particules classiques ponctuelles, régies par les équations dynamiques de la mécanique classique $d_t\mathbf{V}_i = q'(\mathbf{E}_i(\mathbf{x}_i, t) + c^{-1}\,\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i))$ (voir A.1 pour les caractéristiques et $q' = q/m$). Le champ $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ est le champ électrique dans l'approximation électrostatique, qui, grâce à l'invariance de jauge du potentiel ϕ, est défini à *une*

constante arbitraire près. L'induction magnétique, $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$, est orientée le long de l'axe z et est considérée dans notre analyse comme indépendante des coordonnées et du temps. A partir de A.2, nous avons vu que le mouvement des électrons individuels est constitué de plusieurs parties. Tout d'abord, les électrons effectuent un mouvement longitudinal le long de l'axe z. Ce mouvement est le même que ce soit en présence ou en absence de champ magnétique. En présence des "bouchons" énergitiques (éléctrostatiques) aux extrémités du dispositif (figure 2.1), les électrons "chauffés" effectuent des réflexions successives sur ces bouchons avec un temps caractéristique de mouvement $\tau_{th} \sim L/v_{th} \sim T^{-1/2}$. Les électrons décrivent en même temps des trajectoires circulaires autour des lignes de champs $\mathbf{B}$, avec un temps caractéristique (de Larmor) $\tau_L \sim \omega_L^{-1} \sim B^{-1}$. Finalement, on assiste au mouvement collectif des électrons "de dérive", qui est un *mouvement macroscopique* de rotation autour de l'axe des z, dont le temps caractéristique (collectif) est $\tau_{col} \sim B/E$. Tous ces mouvements sont effectués pour les champs électriques non homogènes et non stationnaires. Si les champs sont suffisamment forts, on peut obtenir que $\tau_{col} \gg \tau_{th}, \tau_L$. Cela permet de faire un moyennage, sur l'intervalle de temps $\sim \Delta t$, par rapport aux mouvements rapides en "éliminant" (par cette procédure) tous les z–mouvements des particules : $\tau_{col} \gg \Delta t \gg \tau_{th}, \tau_L$.

Lorsque le plasma d'électrons est en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ fort (plus précisement, lorsque la densité d'énergie magnétique dépasse l'énergie thermique du plasma, $\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$), le champ magnétique introduit un élément fort d'anisotropie. Dans cette situation, le mouvement "lent" du plasma peut être découplé dans les directions perpendiculaires et longitudinales au champ magnétique $\mathbf{B}$ (voir [31], [71] par exemple). Lorsque le nombre de particules est grand, $N \gg 1$, on peut introduire la fonction de leur distribution qui vérifie *l'équation de Vlasov* [37], § 27 :

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_t F + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F + q'(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})\partial_{\mathbf{v}} F = 0. \tag{2.11}$$

La distribution d'électrons $f(\mathbf{x}, z, v_\parallel, t)$, définie par $f(\mathbf{x}, z, v_\parallel, t) = \int d\mathbf{v}_\perp\, F(\mathbf{x}, z, \mathbf{v}_\perp, v_\parallel, t)$ dans la "guiding–center approximation", c'est-à-dire lorsque $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{V}_D + \mathbf{v}'_\perp$, est régi par l'équation qui découle de celle de Vlasov :

$$\begin{aligned} &\partial_t f + (\mathbf{V}_D \cdot \nabla_\perp)f + v_\parallel \partial_z f - q'(\partial_z \phi)\frac{\partial f}{\partial v_\parallel} \\ &= -\int d\mathbf{v}'_\perp \left(\mathbf{v}'_\perp \cdot \nabla_\perp F + \frac{1}{c} q' \mathbf{v}'_\perp \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}'_\perp} \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ici, $\mathbf{V}_D = -(c/B^2)\nabla_\perp \phi \times \mathbf{B}$ est la vitesse de dérive dans la direction de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. En effet, il faut tenir compte du fait que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\partial_{\|}\phi + \frac{1}{c}\mathbf{v}' \times \mathbf{B}.$$

Supposons que tous les mouvements transversaux, outre celui de dérive, soient petits (voir [34] et [71], p.323), c'est-à-dire $|\mathbf{v}'_{\perp}| \ll |\mathbf{V}_D|$. Dans ce cas, l'intégrale de l'équation (2.12) peut ne pas être prise en compte dans le calcul qui suit. Nous avons donc

$$\partial_t f + (\mathbf{V}_D \cdot \nabla_{\perp}) f + v_{\|}\partial_z f - q'(\partial_z \phi)\frac{\partial f}{\partial v_{\|}} \simeq 0. \tag{2.13}$$

Le champ ϕ est couplé avec la concentration d'éléctrons n par l'équation de Poisson (voir la remarque 1, page 40)

$$\Delta_{\perp}\,\phi + \partial_z^2 \phi = -4\pi m q' n, \tag{2.14}$$

où

$$n = \int dv_{\|} \underline{d\mathbf{v}_{\perp}\, F(\mathbf{x}, z, \mathbf{v}_{\perp}, v_{\|}, t)} = \int dv_{\|}\, f(\mathbf{x}, z, v_{\|}, t).$$

Le champ $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ contient le champ externe donné ϕ_0, qui vérifie $\Delta\phi_0 = 0$, et le champ auto–accordé d'électrons, Φ. Il est défini par le champ propre des électrons en mouvement, dont la répartition est donnée par l'équation (2.14) (voir [37] § 27).

L'équation (2.13) est satisfaite par l'expression

$$f = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{l_{\|}} A\left(\frac{v_{\|}^2}{2} + q'\phi(\mathbf{x}_{\perp}, z, t)\right) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\perp j}(t)). \tag{2.15}$$

En effet, en posant cette expression dans l'équation (2.13) et en égalisant les coefficients devant la fonction de Dirac et sa dérivée par rapport à l'argument, on trouve deux équations : l'une pour l'évolution de $\mathbf{x}_{\perp j}(t)$, et la seconde pour ϕ : $\partial_t\phi + \mathbf{V}_D \cdot \nabla\phi = 0$ prise où $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp j}(t)$. Lorsque $\dot{\mathbf{x}}_{\perp j}(t) = \mathbf{V}_D$, on trouve simplement que $\phi = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t), z) + C^{te}$. La constante peut être arbitraire, même complexe.

Le paramètre $l_{\|}$ est défini par la condition de normalisation suivante :

$$\int dz\, d\mathbf{x}\, dv_{\|}\, f = \sum_j \frac{1}{l_{\|}} \int dz \int_{-v_{max}}^{+v_{max}} dv_{\|}\, A\left(\frac{v_{\|}^2}{2} + q'\phi(\mathbf{x}_j, z, t)\right) = N. \tag{2.16}$$

Supposons que la fonction A *soit paramétrée par un seul paramètre*. Soit, par exemple, l'expression

$$A\left(\frac{v_{\|}^2}{2} + q'\phi(\mathbf{x}, z, t)\right) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\beta(\frac{v_{\|}^2}{2} + q'\phi_0 + q'\Phi)\right], \tag{2.17}$$

où $\beta^{-1} > 0$ (ici) joue le rôle de la "température". On note toutefois que le système, ayant un volume fini, $|\mathbf{x}_\perp| \leq l_\perp,\ |z| \leq l_\parallel$, et ayant une vitesse maximale possible, $|v_\parallel| \leq v_{max}$, peut être caractérisé par une température aussi bien positive que négative [67].

La localisation spatiale suivant l'axe z est assurée par convergence de l'intégrale

$$0 < l_\parallel \equiv l_\parallel[\phi] = \frac{1}{N}\sum_j \int dz\, e^{-\beta q'\phi_0(\mathbf{x}_j,z,t)-\beta q'\Phi(\mathbf{x}_j,z,t)} < +\infty. \tag{2.18}$$

Passons à l'équation pour le potentiel. Elle prend la forme

$$\Delta_\perp \Phi + \partial_z^2\Phi = -4\pi q\frac{1}{l_\parallel}\, e^{-\beta q'\phi_0}\, e^{-\beta q'\Phi}\sum_{j=1}^{N}\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp j}(t)). \tag{2.19}$$

Adimensionnons cette équation en introduisant les échelles caractéristiques spatiales (longitudinale $l_\parallel$ et transversale $l_\perp$) d'une localisation du champ : $z \to l_\parallel z,\ \mathbf{x} \to l_\perp\mathbf{x},\ \Phi \to \Phi_0\Phi,\ \Phi_0 = (\beta q')^{-1}$. On obtient

$$\begin{aligned}\Delta_\perp \Phi + (\frac{l_\perp}{l_\parallel})^2\partial_z^2\Phi &= -\frac{4\pi q}{l_\parallel\Phi_0}\, e^{-\beta q'\phi_0}\, e^{-\beta q'\Phi_0\Phi}\sum_{j=1}^{N}\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp j}(t))\\ &= -\frac{4\pi\beta q^2}{ml_\parallel}\, e^{-\beta q'\phi_0}\, e^{-\Phi}\sum_{j=1}^{N}\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp j}(t)) \equiv -c_1 e^{-\Phi},\end{aligned} \tag{2.20}$$

où $c_1 = (4\pi\beta q^2/ml_\parallel)\, e^{-\beta q'\phi_0}\sum_{j=1}^{N}\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp j}(t))$. Cette équation peut être écrite sous la forme

$$\Delta_\perp \Phi + (\frac{l_\perp}{l_\parallel})^2\partial_z^2\Phi + c_1 e^{-\Phi} = 0. \tag{2.21}$$

Si $l_\parallel$ est suffisamment grand, $l_\parallel \gg l_\perp$, on peut négliger les dérivées par rapport à z et poser que $\Phi'(\mathbf{x}, z, t) \simeq \Phi'(\mathbf{x}, t)$. L'équation devient

$$\Delta_\perp \Phi + c_1 e^{-\Phi} = 0. \tag{2.22}$$

Ici,

$$c_1 = \frac{4\pi\beta q^2 N}{ml_\parallel}\, e^{-\beta q'\phi_0}\, \overline{\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp 1}(t))} \to \frac{4\pi\beta q^2 N}{ml_\parallel}\, e^{-\beta q'\phi_0}, \tag{2.23}$$

où

$$\overline{\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp 1}(t))} \equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta^{(2)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp j}(t)) \to 1,$$

et

$$n \equiv \frac{1}{4\pi q}\frac{1}{\beta q'}\frac{1}{l_\perp^2}c_1\, e^{-\Phi} = \frac{1}{l_\parallel\, l_\perp^2}N\, e^{-\beta q'\phi_0}\, e^{-\Phi}$$
$$= -\frac{m}{\pi q^2\beta}\frac{1}{l_\perp^2}\,[-\frac{c_1}{4}\, e^{-\Phi}] \equiv -\frac{m}{\pi q^2\beta}\frac{1}{l_\perp^2}\,[-c_2\, e^{-\Phi}].$$

On peut remarquer que $N \simeq n_0 l_\parallel l_\perp^2$ et $\omega_p^2 = 4\pi q^2 n_0/m$. Dans ce cas, on peut estimer $|c_1| \simeq \omega_p^2\beta l_\perp^2$.

L'image qualitative est donc que le système des électrons chauffés avec leur *répartition spatiale moyennée* le long de z dans le sens indiqué, peut être assimilé à des "barres" chargées de longueur $l_\parallel$ (en expérience $l_\parallel \sim 10^2 m$), d'épaisseur de l'ordre du rayon de Larmor ($d \sim 5\,\mu m$) et rigides (à cause du champ magnétique fort) *macroscopiques* qui sont orientées le long de l'axe z et se déplacent sans changer leur orientation, en ne subissant jamais de collisions. Les barres ne se touchent jamais, elles ne subissent pas d'intersection (voir la figure 2.6). En effet, il n'y a jamais de fusion entre les électrons. Les effets de bord peuvent être négligés lorsqu'on pose que $l_\perp \ll l_\parallel$.

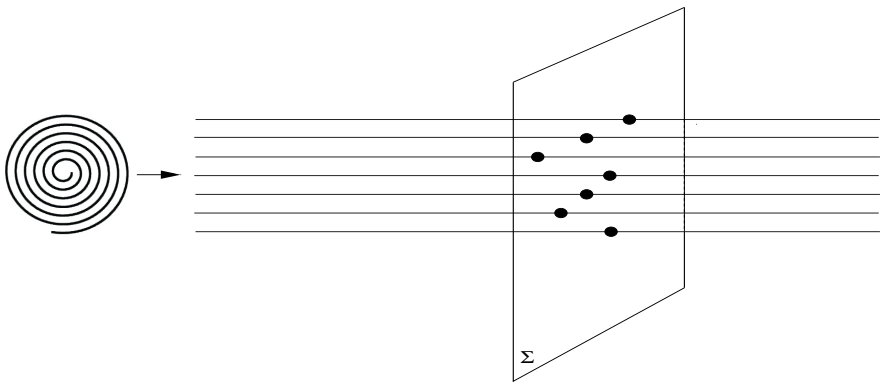


FIG. *2.6: Système des barres rigides.*

Les coordonnées de ces "barres" dans le plan perpendiculaire à z sont $\mathbf{r}_i = (x_i,\, y_i),\ i = 1, ..., N \gg 1$. Elles sont toujours orientées le long de l'axe z et ne se déforment pas lorsque le champ magnétique est fort. Lorsque la vitesse de dérive de la $i-$ème barre dans le plan $x0y$ est $\mathbf{V}_{D\,i}$, le mouvement de cette $i-$ème barre est régi par l'équation

$$d_t\mathbf{r}_i = \mathbf{V}_{Di} \equiv cB^{-2}\mathbf{E}_{\perp i}\times\mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \frac{l_\perp}{\tau}d_t\mathbf{r}_i = -\frac{1}{l_\perp}\nabla_i\frac{c}{B}\Phi_0\Phi\times\mathbf{b}. \tag{2.24}$$

Ici, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{r} \rightarrow l_\perp\mathbf{r}$, et $\Phi \rightarrow \Phi_0\Phi$. Introduisons $H = -\frac{cm\tau}{B\beta q l_\perp^2}\Phi = -\frac{q}{|q|}\frac{cm\tau}{B\beta|q|l_\perp^2}\Phi$. L'échelle temporelle τ peut être prise égale à $\tau = l_\perp^2\beta/\omega_L$, où $\omega_L = |q|B/mc$. Les équations prennent

alors la forme adimensionnée suivante :

$$d_t \mathbf{r}_i = \nabla_i H \times \mathbf{b} \equiv \nabla_i (-\frac{q}{|q|}\Phi) \times \mathbf{b}. \tag{2.25}$$

Ce système d'équations pour les composantes est reécrit sous la forme

$$\partial_t x_i = \partial_{y_j} H, \qquad \partial_t y_j = -\partial_{x_i} H \tag{2.26}$$

qui est *similaire aux équations du mouvement d'une particule de masse unitaire dans le plan infini* $x0y$, dans le champ *auto–accordé*, qui vérifie l'équation (2.22)

$$\Delta_\perp \Phi + c_1 e^{-\Phi} = 0 \quad \rightarrow \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2)\Phi = -c_1 e^{-\Phi} \quad \text{avec} \quad c_1 = \omega_p^2 \beta l_\perp^2. \tag{2.27}$$

Il s'agit d'une équation non linéaire qui peut être résolue dans des cas particuliers, dont nous discuterons au chapitre 6.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à une série d'expériences de plasma dont l'écoulement évolue parfois vers des configurations en structures régulières. Nous avons tenté de comprendre ce phénomène par le biais de deux approches : l'approche hydrodynamique, puis l'approche cinétique basée sur l'équation de Vlasov.

Chapitre 3

Tourbillons ponctuels

Le présent chapitre contient un traitement analytique du cas de l'ensemble de N tourbillons ponctuels, ainsi que les tourbillons écrantés dans un domaine infini et se termine par la base pour le calcul numérique.

3.1 Définition

Les tourbillons ponctuels sont utilisés lorsque la vorticité $q = -\Delta\psi$ (où ψ est la fonction de courant) prend la forme $q(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$ dans les équations de mouvement des particules (équations (B.20) en approche hydrodynamique et équations (2.25) en approche statistique).

Parfois, cette vorticité peut être remplacée par la "vorticité potentielle" ($q = -\Delta\psi + \frac{1}{R^2}\psi$), il s'agit alors des tourbillons "écrantés" :

$$-\Delta\psi + \frac{1}{R^2}\psi = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \tag{3.1}$$

Lorsque $R \to \infty$ dans 3.1, on reconnaît le cas des tourbillons ponctuels. La fonction de courant et la vorticité sont alors liées par la relation

$$q = -\Delta\psi = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \tag{3.2}$$

Pour ne pas surcharger le rapport, nous nous limitons aux explications et équations dont nous aurons besoin dans cette thèse. Pour de plus amples informations sur les tourbillons ponctuels, on peut se référer à la thèse de Stéphane Decossin [19].

3.2 Equations à résoudre

3.2.1 Hamiltonien

Introduisons l'énergie totale du système fluide, l'Hamiltonien, définie par $H = (1/2)\int d\mathbf{x}\, v^2 = -(1/2)\int d\mathbf{x}\, \psi\Delta\psi$. Dans le cas du plan illimité, l'Hamiltonien prend la forme :

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i,j}{}' \gamma_{(i)}\gamma_{(j)} \ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, \tag{3.3}$$

où, $-(1/2\pi)\ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ est la fonction de Green, $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$: solution de l'équation $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, et $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est la fonction de Dirac dans le plan illimité.

Comme nous pouvons le voir dans [19], cette formulation correspond à la théorie classique des tourbillons ponctuels se déplaçant dans le plan illimité $x0y$ (voir [36]). Selon Kirchhoff (1876), les équations de mouvement d'un tourbillon ponctuel peuvent être écrites ainsi :

$$\gamma_i \partial_t x_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}, \quad \gamma_i \partial_t y_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \tag{3.4}$$

où la fonction $\Psi(x_i, y_i)$ est fréquemment appelée "énergie cinétique d'interaction". Dans le cas considéré ,

$\Psi = -\int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sum_{i=1}^{N} \gamma_{(i)} \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}^{(i)}) = (1/2\pi)\sum_{i=1}^{N} \gamma_{(i)} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$.

Notons, cependant, que la fonction ne doit pas entraîner une énergie "cinétique" des tourbillons dans le sens habituel. Ceci à cause du fait particulier qu'un tourbillon localisé produit une vitesse et non une accélération. Comme résultat, un tourbillon isolé reste au repos contrairement à un point matériel, qui se déplace uniformément et de façon rectiligne (ceci est dû à son inertie) dans un repère Galiléen.

Les tourbillons ponctuels forment, par conséquent *un système Hamiltonien très particulier* et une application formelle, à un tel système, des approches statistiques traditionnelles peut mener à des difficultés dans la compréhension des résultats finaux.

L'Hamiltonien (3.3) s'applique en l'absence de frontières. Cependant, la présence des frontières exige juste l'introduction d'une expression modifiée du noyau $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

3.2.2 Tourbillons écrantés dans un domaine infini

Considérons le cas spécial des mouvements bidimensionnels de fluide dans un domaine infini.

Nous associons une fonction de courant à la vorticité par la relation $q = (\Delta - 1/R^2)\psi$.

Pour N tourbillons ponctuels, d'intensité γ_j, localisés en $\mathbf{x}_j(t)$, l'Hamiltonien est donné par l'expression

$$H = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i,j=1,i\neq j}^{N} \gamma_i\gamma_j \left[\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R}\right)\right]. \tag{3.5}$$

Ici, la fonction de Bessel $K_0(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|/R)$ est la fonction de Green de l'opérateur $(\Delta - 1/R^2)$. Les interactions longue portée sont donc négligeables : $K_0(x) \sim \sqrt{\pi/2x}e^{-x}$ lorsque $x \gg 1$. Pour une courte portée, les interactions sont de même nature que dans le cas classique : $K_0(x) \sim C - \ln x$ lorsque $x \ll 1$. L'Hamiltonien (3.5) est rendu symétrique en fonction des permutations $i \leftrightarrow j$.

Les équations de mouvement des centres des tourbillons deviennent

$$\gamma_{(i)}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y}, \gamma_{(i)}\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Nous utilisons parfois les notations suivantes : $\partial_1 \equiv \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ et $\partial_2 \equiv \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$.

3.3 Equations adimensionnées

Nous considérons le système de N tourbillons identiques ($\gamma_1 = ... = \gamma_N = \Gamma/N$). Prenons $\mathbf{x}_i = R\mathbf{x}_i{}'$, $t = \tau t'$. Adimensionnons les équations (3.6). Nous trouvons

$$\frac{1}{\tau}\frac{2\pi R^2}{\Gamma}\frac{\partial x_i{}'}{\partial t'} = \frac{1}{2N}\frac{\partial}{\partial y_i{}'}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1,m\neq n}^{N}[K_0|x_i{}' - x_j{}'|].$$

On choisit le temps de référence $\tau = 2\pi R^2/\Gamma$ et on désigne par $\overline{H}$ l'Hamiltonien adimensionné

$$\overline{H} = \frac{1}{2N}\sum\nolimits_{m=1}^{N}\sum\nolimits_{n=1,m\neq n}^{N} K_0(|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|). \tag{3.7}$$

Alors, on obtient

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y_i{}'}\overline{H}.$$

Nous parvenons donc à l'équation, où le prime a été omis

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial y}. \tag{3.8}$$

De la même façon, nous parvenons à la seconde équation

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x}. \tag{3.9}$$

Ces deux équations du mouvement des tourbillons seront utilisées dans les calculs numériques.

En prenant la dérivée de $\overline{H}$ par rapport aux coordonnées, on trouve par exemple pour la composante x

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_i} = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} K_0'(|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|)\frac{x_i - x_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \tag{3.10}$$

Le coefficient 1/2 disparaît parce qu'on prend les dérivées deux fois, $\partial_i x_m, \quad \partial_i x_n$; le prime pour la fonction de McDonald signifie une dérivée par rapport à l'argument, $K_0(s)' = -K_1(s)$. Il est commode d'introduire le vecteur unitaire défini par $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)/|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$. On trouve alors, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \partial_t x_i &= \frac{1}{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} K_1(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)(\mathbf{n}_{ij}\cdot\mathbf{e}_x), \\ \partial_t y_i &= -\frac{1}{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} K_1(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)(\mathbf{n}_{ij}\cdot\mathbf{e}_y). \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.4 Coordonnées polaires

En utilisant les propriétés des Jacobiens, on peut reformuler ce système en coordonnées polaires (r_i, θ_i), où le passage de (x_i, y_i) à (r_i, θ_i) est donné par $x_i = r_i \cos\theta_i, \quad y_i = r_i \sin\theta_i$.

Mais, tout d'abord, calculons le Jacobien de transformation $\partial(r_i, \theta_i)/\partial(x_i, y_i)$. En utilisant les propriétés des Jacobiens, on trouve :

$$\frac{\partial(r_i, \theta_i)}{\partial(x_i, y_i)} = \frac{1}{\frac{\partial(x_i, y_i)}{\partial(r_i, \theta_i)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -r_i\sin\theta_i & r_i\cos\theta_i \end{vmatrix}} = \frac{1}{r_i},$$

avec $r_i \neq 0$ et $r_i > 0$.

$$\partial_t r_i = \frac{\partial(r_i,\theta_i)}{\partial(t,\theta_i)} =$$
$$\frac{\partial(r_i,\theta_i)}{\partial(x_i,y_i)}\frac{\partial(x_i,y_i)}{\partial(x_i,\theta_i)}\frac{\partial(x_i,\theta_i)}{\partial(t,\theta_i)} + \frac{\partial(r_i,\theta_i)}{\partial(x_i,y_i)}\frac{\partial(x_i,y_i)}{\partial(y_i,\theta_i)}\frac{\partial(y_i,\theta_i)}{\partial(t,\theta_i)}$$
$$= \frac{1}{r_i}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta_i}. \tag{3.12}$$

De façon analogue, on trouve la seconde équation

$$\partial_t \theta_i = -\frac{1}{r_i}\frac{\partial \overline{H}}{\partial r_i}, \tag{3.13}$$

avec l'Hamiltonien dépendant des angles θ_i et distances r_i.

$$\overline{H} = \frac{1}{2N}\sum\nolimits_{m,n=1}^{N} K_0\Big(\sqrt{r_m^2 + r_n^2 - 2r_m r_n \cos(\theta_m - \theta_n)}\Big). \tag{3.14}$$

Nous calculons les dérivées avec $\partial s_{mn}/\partial r_i$, où $s_{mn} = \sqrt{\ldots}$, $K_0(s_{mn})' = -K_1(s_{mn})$, et nous les utilisons dans les sommes :

$$-\sum_{m,n} K_1(s_{mn})\frac{\partial s_{mn}}{\partial r_i} = -2\sum_j K_1(s_{ij})\frac{\Big(r_i - r_j\cos(\theta_i - \theta_j)\Big)}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}}$$

et

$$-\sum_{m,n} K_1(s_{mn})\frac{\partial s_{mn}}{\partial \theta_i} = -2\sum_j K_1(s_{ij})\frac{r_i r_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}}.$$

On trouve (ici $s_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}$) les équations

$$\partial_t r_i = \Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}{}'\Big)\Big(-\frac{1}{s_{ij}}K_1(s_{ij})\Big) r_j \sin(\theta_i - \theta_j),$$
$$\partial_t \theta_i = -\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}{}'\Big)\Big(-\frac{1}{s_{ij}}K_1(s_{ij})\Big)\Big(1 - \frac{r_j}{r_i}\cos(\theta_i - \theta_j)\Big). \tag{3.15}$$

Dans les sommes, il n'y a pas de termes avec $i = j$. Le facteur $-K_1(s_{ij})$ est la dérivée du noyau $K_0(s_{ij})$ de l'Hamiltonien par rapport à l'argument. Ce fait nous donne une possibilité de considérer des modèles différents (on peut prendre n'importe quelle fonction pour K_0, comme par exemple la fonction de Bessel, la fonction exponentielle, ...).

3.5 Conclusion : base pour le calcul numérique

Dans le cas général, l'Hamiltonien a la forme

$$H = \frac{1}{4\pi}\sum_{i,j}{}' \gamma_{(i)}\gamma_{(j)} J(\frac{|\mathbf{x}_{ij}|}{R}). \tag{3.16}$$

On considère le système de N tourbillons identiques ($\gamma_1 = ... = \gamma_N = \Gamma/N$).

On adimensionne l'Hamiltonien et les équations, les distances sont normalisées sur R, et le temps sur $2\pi R^2/\Gamma$, et dans les équations adimensionnées (3.15), la fonction $-K_1(s)$ est remplacée par la dérivée du noyau J(s) de l'Hamiltonien par rapport à l'argument J'(s).

On désigne par $\langle ... \rangle_j = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}{}' ...$ l'opérateur de moyennage arithmétique par rapport aux coordonnées j : (r_j, θ_j).

Les équations deviennent

$$\begin{aligned} \partial_t r_i &= \langle s_{ij}^{-1} J'(s_{ij}) r_j \sin\theta_{ij}\rangle_j, \\ \partial_t \theta_i &= -\langle s_{ij}^{-1} J'(s_{ij})(1 - \frac{r_j}{r_i}\cos\theta_{ij})\rangle_j, \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j,\ s_{ij} \equiv |\mathbf{x}_{ij}| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$.

Si $J(s_{ij}) \to C - \ln s_{ij}$, on trouve $J'(s_{ij}) \to -s_{ij}^{-1}$, ce qui donne une version traditionnelle du mouvement des tourbillons ponctuels :

$$\begin{aligned} \partial_t r_i &= -\langle s_{ij}^{-2} r_j \sin\theta_{ij}\rangle_j, \\ \partial_t \theta_i &= \langle s_{ij}^{-2}(1 - \frac{r_j}{r_i}\cos\theta_{ij})\rangle_j. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au concept des tourbillons ponctuels, qui est un modèle dont nous allons nous servir par la suite. Nous l'avons défini puis nous avons présenté l'Hamiltonien, qui est à la base des équations de mouvement que nous aurons à résoudre. Finalement, nous avons adimensionné ces équations de mouvement pour nous préparer aux calculs numériques.

Chapitre 4

Champ auto–accordé

Dans ce chapitre, nous allons d'abord regarder si deux systèmes tourbillonnaires ayant les mêmes invariants globaux évoluent forcément vers les mêmes configurations finales. Ensuite, nous allons nous intéresser au rôle que peuvent jouer les fluctuations des champs extérieurs dans la formation de structures régulières.

4.1 Introduction

Si on laisse évoluer un "gaz" de $N \gg 1$ tourbillons bidimensionnels, de même signe, laissé seul, comme tout système macroscopique fermé, il devrait passer à l'état d'équilibre statistique. L'un des arguments est que l'évolution de la fonction de répartition des tourbillons, selon l'équation cinétique pour des systèmes réels, doit s'accompagner de l'accroissement de l'entropie (voir, par exemple, [39]). En se basant sur cet argument de la mécanique statistique et en tenant compte que l'évolution de la turbulence est régie par des équations fortement non linéaires (les composantes de champs interagissent intensément et doivent donc se mélanger très rapidement), on peut conclure qu'un système de N tourbillons doit évoluer vers une répartition finale universelle : la turbulence bidimensionnelle, initialement créée dans un domaine limité de l'espace et se développant librement (en absence de dissipation et de forçage), devrait évoluer vers une configuration finale indépendante des angles. Discutons des limites de validité de cette hypothèse largement répendue. Soit un système constitué d'un grand nombre de tourbillons ponctuels. La vitesse angulaire de chaque tourbillon i est alors $\Omega_i \simeq \dot{\theta}_i$ (cf (4.3) pour des précisions sur θ), où θ_i est la coordonnée angulaire du tourbillon et $\dot{\theta}_i$ sa dérivée par rapport au temps. La valeur moyenne de Ω_i peut être estimée par $\overline{\Omega} \sim \Gamma/d^2$, où Γ est la circulation totale et d le diamètre du domaine de localisation des tourbillons. Mais chaque tourbillon, influencé par l'ensemble des autres tourbillons, a une vitesse angulaire dif-

férente distribuée autour de $\overline{\Omega}$ selon une certaine loi. C'est pourquoi, les tourbillons ayant par exemple à l'instant initial $t = 0$ les mêmes valeurs θ_i (c'est-à-dire $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_0$) "s'envolent" très vite ; un processus de mélange très rapide des tourbillons par rapport aux angles a donc lieu.

Supposons que la répartition des tourbillons par rapport à θ et Ω à l'instant $t = 0$ soit donnée par une fonction quelconque $f(\theta_0, \Omega)$, où $\theta_0 = \theta(t = 0)$. Décomposons cette fonction en deux parties, sous la forme $f(\theta_0, \Omega) = \overline{f}(\Omega) + f_1(\theta_0, \Omega)$, où $\overline{f}(\Omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \; f(\theta_0, \Omega)$ est indépendante de θ_0. La fonction $f_1(\theta_0, \Omega_i)$ vérifie la condition $\overline{f_1}(\theta_0, \Omega) = 0$. Evidemment, cette fonction est de signe variable par rapport au premier argument. On peut toujours trouver un intervalle $\Delta\theta_{12} = \theta_{01} - \theta_{02} \sim \pi$ et donc $f_1(\theta_{01}, \Omega) \sim -f_1(\theta_{02}, \Omega)$: sur l'intervalle $\Delta\theta_0 \sim \pi$, la fonction f_1 change de signe. Pour $t > 0$, comme $\theta_i \sim \theta_{0i} + \Omega_i t$, la fonction de répartition devient $f(\theta - \Omega t, \Omega) = \overline{f}(\Omega) + f_1(\theta - \Omega t, \Omega)$, où $\theta - \Omega t$ appartient à $[0, 2\pi]$ (modulo 2π). Pour différentes valeurs de Ω_1 et Ω_2, les termes dépendant du temps dans le premier argument deviennent prédominants par rapport aux angles initiaux et on peut estimer que la fonction de signe variable f_1 change de signe quand $(\Omega_2 - \Omega_1)t \sim \pi$, c'est-à-dire pour une variation des vitesses angulaires $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \sim \pi\, t^{-1}$. Cette estimation simple montre que la fonction devient de signe variable pour le second argument aussi. Au fur et à mesure, quand $t \to \infty$, en passant de Ω à $\Omega + \Delta\Omega$ de plus en plus proche, avec $\mid \Delta\Omega \mid \ll \mid \overline{\Omega} \mid$, la fonction f_1 devient de plus en plus oscillante par rapport au second argument, c'est-à-dire par rapport à Ω.

Mais, toutes les grandeurs observables contiennent en soi un moyennage statistique quelconque, c'est-à-dire, dans notre cas, un moyennage de la fonction de répartition par rapport aux Ω. La partie rapidement fluctuante de la fonction f_1 peut être fréquemment négligée. En effet, il existe toujours, dans des systèmes réels, une dissipation physique qui devient forte aux petites échelles en supprimant tous les processus qui pourraient se réaliser dans ce domaine. Le même effet (dissipation numérique) existe dans le calcul numérique quand une dissipation artificielle s'introduit aux petites échelles. Finalement, toutes les procédures expérimentales contiennent un moyennage statistique quelconque intrinsèque. Ces arguments ont évidemment un caractère général et sont appliqués à toutes les grandeurs changeant rapidement ("phases") et variant dans des intervalles finis [40]. C'est ce qui permettrait d'obtenir que $\langle f_1 \rangle \to 0$, avec une convergence rapide. Ce serait un moyennage de la fonction de répartition par rapport aux angles θ. Après seulement plusieurs tours de révolution du système, pour un système avec une dissipation quelconque, pour $t \gg \overline{\Omega}^{-1}$, on devrait parvenir à $f(\theta, \Omega) \to \overline{f}(\Omega)$ (à une fonction moyennée par rapport aux angles), ce qui pourrait se traduire

par une concentration axisymétrique des tourbillons par rapport au centre du système.

D'autre part, on peut supposer, comme cela est postulé en mécanique statistique (voir [63], [65] et [73]), que la configuration finale, si elle existe, n'est fixée que par les intégrales globales du système. Parmi ces intégrales, ce sont l'énergie totale du système et les moments, notamment la circulation Γ et l'enstrophie Z_2, qui jouent un rôle déterminant. On peut s'attendre à ce que la configuration finale, lorsqu'elle est régie par les lois de la mécanique statistique, soit indépendante des conditions initiales du problème.

Alors, si le processus est effectivement régi par les contraintes de la mécanique statistique, *des configurations initialement différentes* ayant les *mêmes* intégrales globales doivent évoluer vers la même configuration finale axisymétrique de la vorticité.

Dans ce contexte, les questions suivantes se posent :

(a) Est-il possible de construire, en principe, des *répartitions* de vorticité avec les *mêmes* invariants globaux ?

(b) Si tel est le cas, les systèmes, partant de *différentes répartitions initiales* de vorticité et ayant les *mêmes* invariants globaux, évoluent-ils vers un *état final unique* ou vers des *états finaux différents* ?

4.2 Evolution de 2 configurations différentes ayant les mêmes invariants globaux

Dans cette section, nous allons tenter de répondre à ces deux questions, qui n'ont pas encore été abordées dans la littérature scientifique, à notre connaissance. Pour ce faire, nous allons utiliser l'expérience numérique directe pour un modèle de N tourbillons ponctuels.

On considère donc un fluide incompressible composé de N tourbillons ponctuels d'intensité égale $\gamma_i = ... = \gamma_N = \Gamma/N$. Le système est un système Hamiltonien, dont le mouvement des centres des tourbillons est régi par les équations suivantes :

$$\gamma_i \partial_t x_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \gamma_i \partial_t y_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Nous choissisons de travailler dans un domaine illimité, ce qui nous donne l'Hamiltonien (3.3).

Tout d'abord, pour les simulations numériques, il convient d'utiliser des équations adimensionnées, que nous assurons par $x_i \to Rx_i$, $y_i \to Ry_i$ et $t \to \tau t$ avec $\tau = 2\pi R^2 \Gamma^{-1}$. Ensuite, nous introduisons les coordonnées polaires (r_i, θ_i) par simple commodité, qui sont données

par la transformation $x_i = r_i cos\theta_i$, $y_i = r_i sin\theta_i$, avec $r_i > 0$. Enfin, nous passons aux variables "action-angle" (J_i, θ_i), où $J_i = {r_i}^2/2$, afin d'obtenir le système d'équations canoniques suivant :

$$\partial_t J_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta_i}, \quad \partial_t \theta_i = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial J_i},$$

avec l'Hamiltonien adimensionné donné par $\overline{H} = -(4\pi)^{-1} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1, n\neq m}^{N} ln[J_m + J_n - 2\sqrt{J_m J_n} cos(\theta_m - \theta_n)]$, à une constante près. On considère que la configuration initiale des N tourbillons s'effectue sur un anneau, de vorticité donnée, avec les coordonnées radiales $r_s = 1$ et les coordonnées angulaires

$$\theta_s = 2\pi N^{-1} e(s-1)\Theta(K-s) + 2\pi N^{-1}(1-e)(s-1)\Theta(s-K). \tag{4.1}$$

Ici, $s = 1, 2, .., N$ et $1 < K < N$. Le premier tourbillon a les coordonnées $r_1 = 1$ et $\theta_i = 0$. La série des K premiers tourbillons est distribuée avec un pas de $2\pi N^{-1} e$, et les autres tourbillons sont distribués avec un pas de $2\pi N^{-1}(1-e)$, avec $0 < e < 1$. La fonction $\Theta(z)$ est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 quand $z > 0$ et 0 pour $z < 0$. si $z = 0$, $\Theta(0) = 1/2$. Ainsi, la distribution annulaire initiale a une certaine asymétrie pour différents (K, e), mais le moment cinétique (intégrale du mouvement) $\overline{P}$, défini par $\overline{P} = -(1/2) \sum r_i'^2$, reste le même, ainsi que l'enstrophie Z_2 et les autres moments (pour différentes valeurs des paramètres K et e).

L'Hamiltonien du système est une fonction qui dépend des paramètres K et e : $H = H(e, K)$. Comme cet Hamiltonien est conservé, il est donné par sa valeur initiale, H_0, qui est calculée à partir de la distribution initiale des tourbillons :

$$H_0(e, K) = -(4N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} ln(1 - cos\theta_{ij}),$$

avec $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$, calculé à partir de (4.1). Nous n'avons laissé que les termes dépendant des angles dans cette expression.

La circulation Γ est fixée par le nombre de tourbillons N. Dans la structure du modèle, toutes les autres intégrales de mouvement Z_i (enstrophie Z_2, ...) sont observées automatiquement. Nous fixons arbitrairement le nombre total de tourbillons à $N = 750$, les premiers tourbillons à $K = 260$. Les Hamiltoniens $H(e, K)$, avec K fixé ne sont fonctions que de e et leur courbe nous permet de trouver e_1 et e_2 correspondants au H choisi pour chacun des cas. Nous prenons l'Hamiltonien initial à $H_0 = 0,25$ ce qui donne $e_1 = 0,108$ et $e_2 = 0,624$ pour $K = 260$ (voir la figure 4.1).

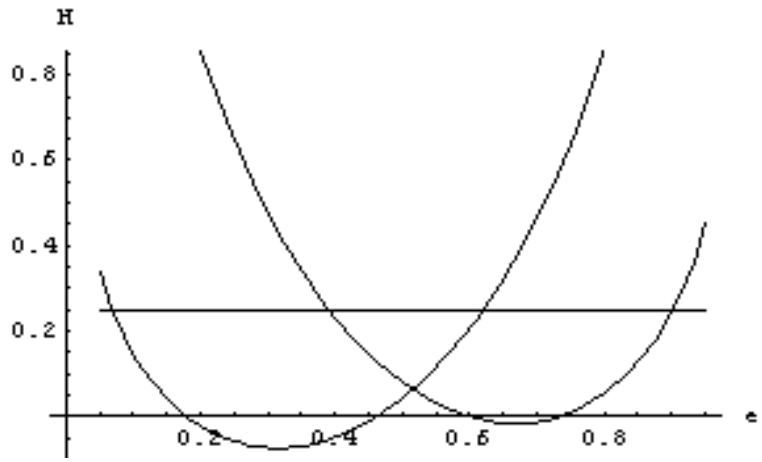


FIG. *4.1: Représentation de* e_1 *et* e_2 *correspondant à* $H_0 = 0,25$ *pour* $N = 750$ *et* $K = 260$.

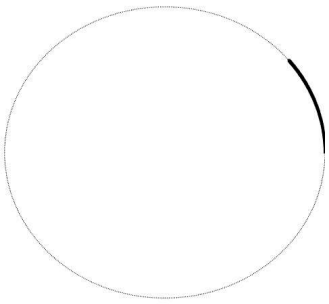


FIG. *4.2: Anneau initial correspondant à* $H_0 = 0,25$, $K = 260$ *et* $e_1 = 0,108$.

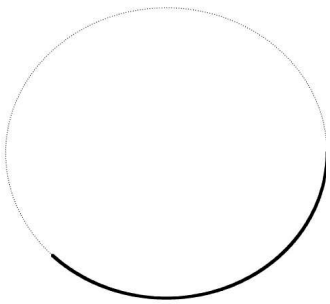


FIG. *4.3: Anneau initial correspondant à* $H_0 = 0,25$, $K = 260$ *et* $e_2 = 0,624$.

L'évolution des configurations de tourbillons pour les systèmes donnés par les figures 4.2 et 4.3, qui correspondent aux configurations trouvées avec $H_0 = 0,25$, $K = 260$, $e_1 = 0,108$ et $e_2 = 0,624$, a été étudiée. Ces configurations initiales ont été intégrées numériquement à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. La conservation de l'énergie et du moment angulaire a été contrôlée pendant les calculs. L'analyse montre que les paramètres ont de petites variations avec les erreurs définies par $|H_i - H_0| / |H_0| < 3.10^{-3}$ et $|P_i - P_0| / |P_0| < 2.10^{-7}$ pendant le procédé d'itération de $t = 0$ à $t = 50$, ce qui correspond à 50 temps de référence. Malgré l'écart quadratique relativement significatif pour l'Hamiltonien, qui devrait mener, en principe, à l'intensification du processus de mélange grâce aux erreurs numériques s'accumulant, aucune tendance visible de chaotisation n'a été observée.

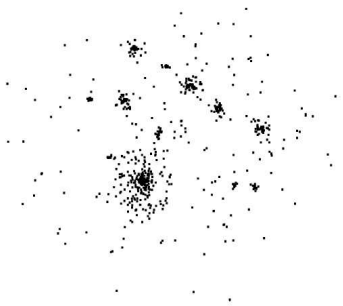


FIG. *4.4: Configuration des tourbillons à l'instant* $t \sim 50$ *pour* $K = 260$ *et* $e_1 = 0,108$.

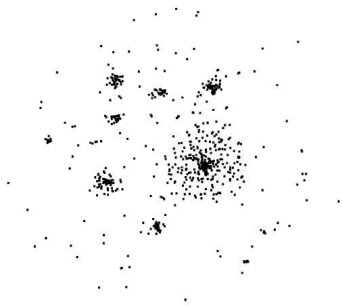


FIG. *4.5: Configuration des tourbillons à l'instant* $t \sim 50$ *pour* $K = 260$ *et* $e_2 = 0,624$.

Les résultats finaux des calculs (pour $t > 50$) sont présentés sur les figures 4.4 et 4.5. Le temps $t \sim 50$ est en accord avec les résulats présentés dans les expériences de *Huang et al.* [29] et *Fine et al.* [23], dans lesquelles on observe des structures régulières pour des temps $t \sim 60$ (ces structures sont déjà formées bien avant ce temps). Les figures 4.4 et 4.5 montrent nettement que les champs tourbillonnaires caractérisés par les répartitions initialement différentes et ayant les mêmes invariants globaux, ne tendent visiblement pas à évoluer vers une configuration universelle, unique et axisymétrique. En effet, on remarque bien la présence d'amas s'organisant différemment dans les deux cas présentés.

Nous pouvons expliquer la présence de ces amas par le fait que la fonction de répartition des tourbillons, présentée dans la section 4.1, comporte une partie fluctuante, $f_1(\theta_0, \Omega)$, qui est nulle (à cause du moyennage) pour les expériences et les méthodes de modes spectraux, mais qui ne l'est pas dans notre cas. Si nous enlevions cette fonction fluctuante, tout se passerait comme si le système évoluait vers une configuration axisymétrique. Donc, les résultats des figures 4.4 et 4.5 ne s'inscrivent pas dans les prédictions basées sur les arguments habituels de la mécanique statistique, ce qui pourrait être estimé comme énigmatique. Cependant, nous avons vu dans le chapitre précédent, que les expériences de *Fine et al.* [23] mènent également à la formation de structures régulières (les "cristaux tourbillonnaires"). La situation n'est donc pas aussi évidente qu'on pourrait le penser : le système $2D$, en évoluant en absence d'une dissipation et d'un forçage (physique ou numérique), n'oublie pas les conditions initiales de sa répartition.

Nous allons maintenant tenter de comprendre, par analyse théorique et expérience numérique, pourquoi les structures régulières peuvent parfois apparaître.

4.3 Etude analytique

Les expériences (voir [23]) sur la turbulence $2D$ *sans forçage et en quasi–absence de dissipation* montrent que la relaxation de la turbulence peut *parfois* être stoppée, menant à une formation de "cristaux tourbillonnaires" au lieu de la formation d'une tache centrale symétrique prévue par des mécanismes statistiques. Les causes de l'apparition de structures régulières ne sont actuellement pas claires. Nous montrons que l'approche hydrodynamique classique permet d'expliquer en principe une cause possible de formation de telles structures. Après avoir effectué l'analyse théorique, nous appliquons l'expérience numérique afin d'en confirmer les prévisions.

4.3.1 Système Hamiltonien

Le système expérimental présenté dans le chapitre 2, en section 2.3, est équivalent au modèle de "barres" rigides, électriquement chargées, avec des axes orientés le long du champ magnétique externe et dans ce contexte est analogue au système de tourbillons ponctuels se déplaçant dans le plan perpendiculaire au champ. Le système est donc un système de Hamilton. L'Hamiltonien, qui est défini comme l'énergie totale du système, exprimé en terme de variables canoniques (x_i, y_i), est (sous la forme adimensionnée en utilisant les échelles caractéristiques spatiale R et temporelle τ) $H = (2N)^{-1} \sum_{i\neq j;i,j=1}^{N} H_{ij}$. Ici, H_{ij} désigne "l'Hamiltonien d'interaction" entre les "tourbillons" i et j. Pour des tourbillons ponctuels dans le plan infini, $H_{ij} = -ln\, r_{ij}$. Dans l'hydrodynamique classique, quand $H_{ij} = ln\, r_{ij}$, le champ de vitesses créé par les tourbillons, est de longue portée, $v \sim r^{-1}$, et, donc, les tourbillons sont influencés, pas seulement par les tourbillons voisins, mais aussi et très fortement par les tourbillons se trouvant aux grandes distances.

Nous pouvons justifier qualitativement cette observation (voir [19]) en considérant un grand nombre de tourbillons répartis de façon homogène et positionnés autour d'un tourbillon (i) (voir la figure 4.6). En effet, chaque tourbillon se trouvant à la distance r du tourbillon (i), crée pour lui la vitesse $v \sim r^{-1}$. Choisissons une bande concentrique, de largeur Δr, se trouvant à la distance r du tourbillon (i). Supposons qu'il y ait "beaucoup" de tourbillons dans cette bande. En considérant n, la concentration des tourbillons, et $2\pi r\Delta r$, le "volume" dans lequel ceux-ci se trouvent, le champ des vitesses, là où se trouve le tourbillon (i), dû à l'influence de l'ensemble des autres tourbillons, peut être estimé sous la forme $\sim r^{-1} n 2\pi r\Delta r$. Cette vitesse, induite par l'ensemble des tourbillons se trouvant dans la bande, devient donc indépendante de r.

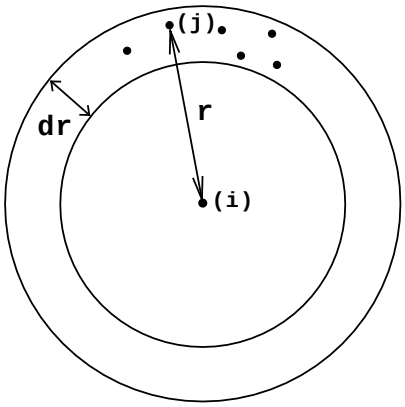


FIG. *4.6: Répartition de tourbillons autour d'un tourbillon (i).*

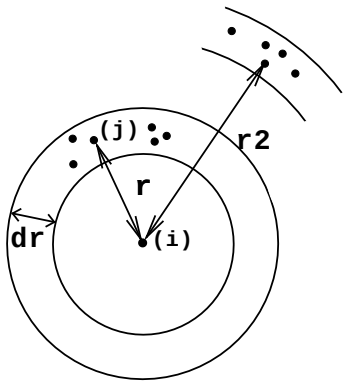


FIG. *4.7: Influence des tourbillons situés à une distance r_2 supérieure à r.*

Ceci signifie que l'influence des tourbillons situés dans une bande de même largeur Δr, mais à une distance plus grande (r_2), a même valeur (figure 4.7).

En prenant la somme par rapport à toutes les bandes concentriques possibles, on voit que l'impact de tous les tourbillons du plan est beaucoup plus prédominant que celui des tourbillons voisins. On peut, donc, conclure que ce ne sont pas les tourbillons voisins qui influencent fortement le mouvement du tourbillon (i), mais l'ensemble de tous les tourbillons, même ceux très éloignés.

Remarquons que dans le cas de N grand, le mouvement du tourbillon (i) ne perturbe pas significativement le mouvement des autres.

De cette observation qualitative, deux conclusions immédiates découlent : (a) chaque tourbillon de cet ensemble contenant un très grand nombre de tourbillons se déplace de façon quasi–indépendante du mouvement de ses voisins ; et (b) tout se passe comme si le tourbillon choisi se meut dans le champ moyenné créé par l'ensemble des autres tourbillons. Tout se passe alors comme si chaque tourbillon se meut dans le champ auto–accordé, en fait, moyenné par rapport aux coordonnées des autres tourbillons.

Nous choisissons alors le $i-$ème tourbillon et nous introduisons l'expression $H_i = D^{-1}\int_D d\mathbf{x}_j H_{ij} \equiv \langle H_{ij}\rangle$. Ici, D est le domaine d'intégration dont la dimension est définie par la loi de conservation du moment cinétique (H_i est l'Hamiltonien moyenné par rapport aux positions de *tous les autres* tourbillons). Introduisons l'opérateur $\widehat{M_i}\ [...] \equiv (N^{-1}\sum_j - D^{-1}\int d\mathbf{x}_j)[...]$ et regroupons les termes dans l'Hamiltonien. Après quelques ma-

nipulations mathématiques, l'Hamiltonien prend la forme

$$H = \sum_{s=1}^{N} H_s + \frac{N}{2}\widehat{M_i}\widehat{M_j}(H_{ij} - \langle\langle H_{ij}\rangle\rangle) \equiv$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left(H_s + \frac{1}{2}\widehat{M_i}\widehat{M_j}(H_{ij} - \langle\langle H_{ij}\rangle\rangle)\right). \tag{4.2}$$

Le premier terme dans l'Hamiltonien décrit des effets collectifs qui dominent lorsque $N \gg 1$. Selon la définition, H_s ne dépend que du module du vecteur-rayon $\mathbf{x}_s$, $r_s = |\mathbf{x}_s|$. Le second terme décrit des effets fluctuants, stochastiques dûs aux interactions individuelles des tourbillons et qui sont significatifs sur la périphérie de la distribution. Si $N \gg 1$, le dernier terme de (4.2) est petit. En effet, lorsque $N \gg 1$, (a) l'écart quadratique entre $H(r_i)$ et $N^{-1}\sum_{j=1}^{N} H_{ij}$ est faible et (b) la norme de l'opérateur $\widehat{M_i}$ est petite. Remplaçons l'expression exacte $\frac{1}{2}\widehat{M_i}\widehat{M_j}(H_{ij} - \langle H_{ij}\rangle)$ par sa valeur moyennée par rapport au mouvement des autres (sauf i) tourbillons, $W(\mathbf{x}_s)$ et considérons ce terme comme une fonction "mono-particule", dans le seul but de passer de la dépendence "multi-particules" à celle "mono–particule". Une telle procédure est équivalente à celle analogue à [55], p.158. Selon la définition, la fonction $W(\mathbf{x}_s, t)$ a la valeur moyenne nulle, $\langle W_s\rangle$, c'est-à-dire c'est une fonction oscillante par rapport à l'angle θ_s et/ou par rapport au temps.

Ainsi, le problème se réduit au problème du mouvement d'une "particule" de "masse" unitaire dans le champ auto–accordé $H_s + W_s$. Dans ce qui suit, nous omettons l'indice i en considérant le mouvement d'un seul tourbillon d'essai. Passons aux variables "angle–action", définies par la transition $(x, y) \to (\theta, J)$, avec $x = \sqrt{2J}\, sin\,\theta$ et $y = \sqrt{2J}\, cos\,\theta$. Les équations du mouvement du tourbillon d'essai en terme de ces variables deviendront

$$\partial_t J = -\partial_\theta H = -\partial_\theta W, \qquad \partial_t \theta = \partial_J H = \Omega(J) + \partial_J W. \tag{4.3}$$

Lorsqu'il y a une perturbation stochastique dans l'Hamiltonien, on peut s'attendre à ce que la trajectoire du tourbillon soit constituée de deux parties : régulière et fluctuante. Suivant des idées exposées dans [32], pour des grandeurs régulières moyennées par rapport aux fluctuations stochastiques *rapides*, on trouve

$$\partial_t \overline{J} = -\overline{\partial_\theta H} = -\frac{\Omega'}{2\omega^2}\partial_\theta U \partial_{\theta\theta} U + ... = -\partial_\theta\left(H(\overline{J}) + \frac{\Omega'}{4\omega^2}(\partial_\theta U)^2\right),$$
$$\partial_t \overline{\theta} = \overline{\partial_J H} = \Omega(\overline{J}) + \frac{\Omega'}{2\omega^2}\partial_\theta U \partial_{J\theta} U + \ ... = \partial_J\left(H(\overline{J}) + \frac{\Omega'}{4\omega^2}(\partial_\theta U)^2\right) + ... \tag{4.4}$$

Ici, $\Omega' \equiv \partial_J \Omega(\overline{J})$. Désignons $H_{eff} = H(\overline{J}) + (\Omega'/4\omega^2)(\partial_\theta U)^2 \equiv H + H' = H(r_i) + \varepsilon V(r_i, \theta_i, t)$, $\varepsilon \ll 1$. Tout se passe comme si un tourbillon d'essai se meut suivant une

trajectoire moyennée dans un champ moyenné H_{eff} variable dans l'espace. Par définition, $V(r,\theta,t) = V(r,\theta+2\pi,t)$ est une fonction périodique des angles, $V(r,\theta) = V(r,\theta+2\pi)$, c'est-à-dire

$$V(r,\theta,t) = \frac{1}{2}\sum_m [V_m(r,t)e^{im\theta} + c.c.], \tag{4.5}$$

où le symbole *c.c.* représente la conjugaison complexe, $V_m = V^*_{-m}$. Les équations (4.4) nous donnent

$$\begin{aligned} \partial_t J &= -\frac{1}{2}\varepsilon \sum_m \Big(imV_m(t)\, e^{im\theta} + \, c.c. \Big), \\ \partial_t \theta &= \Omega(J) + \frac{1}{2}\varepsilon \sum_m \Big((\partial_J V_m(t))\, e^{im\theta} + \, c.c. \Big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nous allons maintenant considérer un cas particulier.

4.3.2 Analogie avec le pendule non linéaire

On considère le cas des perturbations qui sont localisées au voisinage d'un niveau J_0, près duquel H' possède un maximum net, c'est-à-dire l'excitation est significative au voisinage de ce niveau. C'est le cas de la périphérie d'une tache tourbillonnaire. Dans ce cas, la dérivée $\partial_J V_m \mid_{J_0} = 0$. On peut simplifier les équations (4.6) au voisinage de J_0 en posant $r_1 = r - r_0$, avec $|r_1| \ll r_0 \equiv \sqrt{2J_0}$, et en ne gardant que les termes principaux dans la partie de droite des équations. En posant $\theta = \theta_1 + \Omega(J_0)t$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t r_1 &\simeq -\varepsilon(2r_0)^{-1} \sum_m [imV_m(r_0,t)\, e^{i(m\Omega(r_0)t + m\theta_1)} + c.c.], \\ \partial_t \theta_1 &= \Omega(r) - \Omega(r_0) + ... = r_0\Omega'(J_0)r_1 + \, ... \end{aligned} \tag{4.7}$$

On suppose qu'il n'y ait qu'un seul m. Les équations simplifiées (4.7) pour cette composante deviennent

$$\partial_t r_1 = -i\varepsilon(2r_0)^{-1} mV_m(t)\, e^{i(m\theta_1 + \Delta_m t)} + c.c.\,, \quad \partial_t \theta_1 = r_0\Omega'(J_0)r_1. \tag{4.8}$$

Développons en série la fonction *lente* $V_m(t) \sim \sum_n V_{mn} \exp[-in\gamma t]$. On peut montrer que, à droite, le terme dit résonant $V_{mn}\exp[-in\gamma t]$ vérifiant $\Delta_{mn} = m\Omega(J_0) - n\gamma \to 0$, est le plus important (voir également [15] et [76]), c'est-à-dire ne gardons que lui. Dans ce cas, $|r_1| \sim \varepsilon/\Delta_{mn}$ et ne sera pas petit. Le coefficient V_{mn} peut être complexe. Nous le prenons donc

sous la forme $V_{mn} = |V|exp(i\varphi)$. On introduit une nouvelle variable, $\psi = m\theta_1 + \Delta_{mn}t + \varphi + \pi$. Alors,

$$\partial_t r_1 \simeq -\varepsilon m r_0^{-1}|V|\, sin\, \psi, \qquad \partial_t \psi = \Delta_{mn} + m r_0 \Omega'|_{r_0}\, r_1, \tag{4.9}$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur. Le système (4.9) peut être réécrit en forme canonique $\partial_t r_1 = -\partial_\psi \tilde{H}$, $\partial_t \psi = \partial_{r_1}\tilde{H}$, avec l'Hamiltonien $\tilde{H} = (1/2)mr_0\Omega'|_{r_0}(r_1)^2$ $-\varepsilon m|V|(r_0)^{-1}\ cos\,\psi\ +\Delta_{mn}\, r_1$. Les équations (4.9) sont analogues à celles du pendule non linéaire $\ddot{\psi} + \Omega_N^2\, sin\psi = 0$, avec $\Omega_N^2 = m^2\varepsilon(r_0)^{-1}|V|r_0\Omega'|_{r_0}$. Rappelons que les différents aspects de la théorie et des applications du modèle d'un oscillateur non linéaire pour des particules chargées dans le plasma sont donnés dans les travaux [15]. La transition de $\theta \to \psi$ signifie que nous sommes passés au repère tournant, $\psi = m_0\theta + \varphi + \pi = m\theta_1 + \Delta_{mn}t + \varphi + \pi$. Si $\Delta_{mn} = 0$, les positions des points d'équilibre dans ce repère tournant sont définies par l'expression $m_0\theta_{1k} = k\pi + C^{te}$ (constante arbitraire). Les positions d'équilibre stable sont données par $\theta_{1k} = k\pi/m_0$, avec k pair et les positions d'équilibre instable par $\theta_{1k} = k\pi/m_0$, avec k impair. Les trajectoires possibles du tourbillon d'essai sont topologiquement différentes aux voisinage des points de l'équilibre *stable* et *instable*. Dans le premier cas, ce sont les orbites fermées : tout se passe comme si les tourbillons étaient "capturés" au voisinage de ces points.

Les estimations sont valables lorsque $0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1 \ll 1/\varepsilon$, où $\delta = \Omega_0^{-1} r_0 \Omega_0'$, avec $\Omega_0 = \Omega(r_0) \equiv (r^{-1}\partial_r H)|_{r_0}$, qui peut être estimé comme $\Omega_0 \sim r_0^{-2} H_0$ parce qu'il n'y a pas, ici, d'échelle spécifique. Le phénomène de formation des structures régulières appelées "cristaux tourbillonnaires" aura donc lieu lorsque $m_0 \neq 0$ (il y a une inhomogénéité angulaire dans la distribution initiale des tourbillons), $\partial_{JJ}H_s(J) \neq 0$ et la partie stochastique, fluctuante, de l'Hamiltonien, qui est essentiellement localisée sur la périphérie, varie dans le temps d'essai rapidement, $\varepsilon \sim \Omega'(J)/\omega^2 \ll 1$.

Suite à cette étude théorique sur la formation de structures régulières, nous allons appliquer les simulations numériques afin de confirmer nos résultats.

4.3.3 Application numérique

L'objectif de cette section est d'appliquer les calculs numériques basés sur les équations formulées dans ce chapitre, afin de vérifier l'exactitude de nos résultats.

Nous nous plaçons en fait dans le cas décrit dans la section 4.3.1. Le système décrivant le mouvement des centres des tourbillons est donc :

$$\partial_t \overline{J_i} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta_i}, \quad \partial_t \overline{\theta_i} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J_i},$$

qui peut être réécrit comme :

$$\partial_t \overline{J_i} = -\frac{\partial H_{eff}}{\partial \theta_i}, \quad \partial_t \overline{\theta_i} = \frac{\partial H_{eff}}{\partial J_i},$$

avec $H_{eff} = H(\overline{J_i}) + \varepsilon V(r_i, \theta_i, t)$.

Pour les calculs numériques, la forme de l'Hamiltonien est la suivante :

$$H_{eff} = H_0 exp(-\frac{{r_i}^2}{a^2}) + \varepsilon exp(-\frac{(r_i - r_0)^2}{b^2})(1 - cos(m\theta_i - nt)).$$

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\partial_t J_i = \frac{m\varepsilon}{r_i + \varepsilon'} exp(-\frac{(r_i - r_0)^2}{b^2}) sin(m\theta_i - nt),$$
$$\partial_t \theta_i = \frac{2}{a^2} exp(-\frac{{r_i}^2}{a^2}) + \frac{2\varepsilon(r_i - r_0)}{b^2(r_i + \varepsilon')} exp(-\frac{(r_i - r_0)^2}{b^2})(1 - cos(m\theta_i - nt)),$$

où ε' est un paramètre très petit, ajouté pour éviter les problèmes de singularité ($\varepsilon' \ll 1$).

Pour ces calculs, nous avons pris $N = 750$ tourbillons identiques ($\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_N = \Gamma/N$, avec $\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1$) distribués initialement sur une spirale de 7 spires, avec un rayon maximum de $R = 0,375$. On suppose que les conditions initiales sont telles qu'elles assurent une inhomogénéité cachée axiale correspondante à $m_0 = 3$ pour le premier cas et $m_0 = 5$ pour le second cas, avec le maximum se trouvant à $r_0 = 0,3$ (pour les deux cas considérés). Pour simplifier au maximum les simulations, nous avons choisi d'utiliser la "fonction–approximatrice" $V(r_i, \theta_i) = (1 - \cos m\theta_i) \exp[-(r_i - r_0)/b^2]$ avec $b = 0,1$, $\varepsilon = 0,5$; en fait, nous avons considéré $n = 0$, c'est-à-dire que $V(r_i, \theta_i, t)$ ne dépend plus du temps t. L'étude numérique utilise un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4. Pendant le processus d'évolution, nous avons suivi la conservation de l'énergie totale du système, H. Ce paramètre est le plus sensible aux erreurs numériques de simulation, c'est pourquoi nous n'avons pas jugé utile de suivre les autres invariants globaux. Si cet Hamiltonien ne subit que de faibles variations au cours du calcul, les autres intégrales du mouvement sont automatiquement conservées.

Les figures 4.8 et 4.9 représentent respectivement les configurations initiales en spirale de l'expérience de *Fine et al.* [23], qui est, en fait, une spirale de tungstène chauffée pour permettre l'émission d'électrons dans le système, puis la spirale, composée de $N = 999$ tourbillons ponctuels, qui est notre état de base pour la simulation numérique. Nous avons choisi cette représentation initiale afin de nous placer le plus près possible de la configuration initiale de l'expérience [23], pour pouvoir ensuite vérifier notre théorie statistique au sujet des résultats obtenus dans les expériences de *Fine et al.*

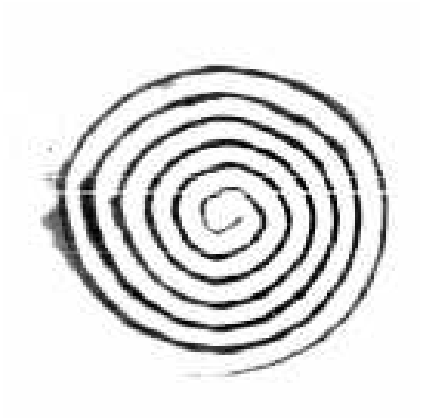


FIG. *4.8: Spirale initiale de l'expérience [23].*

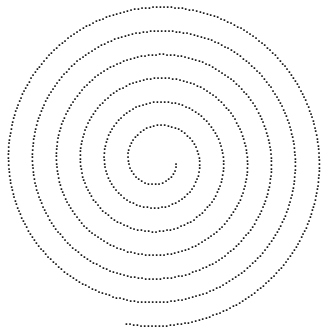


FIG. *4.9: Spirale initiale de nos simulations.*

FIG. *4.10: Formation de* 3 *et de* 5 *"super-tourbillons".*

La figure 4.10 représente les configurations pour des évolutions au temps $t \sim 100$, avec $m = 3$ et $m = 5$ respectivement, $r_0 = 0,375$ et $b = 0,1$ pour les deux cas. On remarque que pour les deux cas, il existe la formation de zones qui piègent les tourbillons ponctuels en ne les laissant plus ressortir, qu'on appelle "super-tourbillons". En fait, pour le premier cas, nous avons perturbé 3 domaines et dans le deuxième, 5, et on observe bien que pour chaque cas, chaque perturbation amène bien à un super tourbillon.

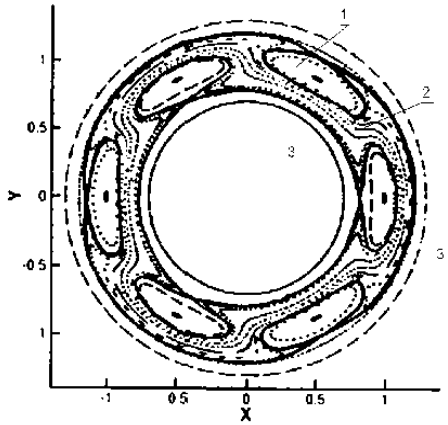


FIG. *4.11: Les tourbillons se trouvant initialement dans les domaines perturbés y sont piégés, alors que ceux se trouvant à l'extérieur coutournent ces zones.*

La figure 4.11 présente l'évolution de tourbillons en fonction de l'endroit où ils se situent au départ. Pour ce calcul, on a utilisé $N = 16$ tourbillons, $m = 6$, $r_0 = 1$ et $b = 0,1$. On constate qu'un tourbillon se trouvant initialement dans une zone de "capture" se retrouve piégé dans cette zone (zone (1)). Les zones de "capture" existent à partir d'une valeur minimale du potentiel V. Elles sont séparées du reste du domaine par les séparatrices. Chaque tourbillon se trouvant, initialement, à l'extérieur des zones de "capture" suit un trajet qui contourne les zones (1). En résumé, il y a plusieurs possibilités : (a) des tourbillons, se trouvant par hasard dans le domaine (1) dès la configuration de départ, effectueront dans ce domaine un mouvement régulier, en formant un "super-tourbillon" ; (b) des tourbillons se trouvant initialement dans les domaines (2) et (3) effectueront des mouvements stochastiques, désordonnés, pénétrant des domaines (2) vers (3) à travers les points hyperboliques, à cause des effets de dissipation toujours existant ; (c) finalement, une tache quasi-homogène de rayon $r_f > r_0$ peut se former au centre du domaine.

La figure 4.12 nous présente deux "cristaux tourbillonnaires" obtenus par *Fine et al.* Pour ces deux configurations, on observe des structures contenant 3 et 5 "taches", que nous

FIG. *4.12: Deux "Cristaux tourbillonnaires" observés dans les expériences [23], possédant* 3 *et* 5 *taches.*

allons comparer à nos résultats numériques. En fait, on remarque que nos configurations contenant 3 et 5 "super-tourbillons" (figure 4.10) se rapprochent visuellement des "cristaux tourbillonnaires" de la figure 4.12. Ceci confirme qualitativement l'idée qu'une formation de structures régulières peut être provoquée par des fluctuations dynamiques dans le système. Rappelons toutefois que les expérimentateurs ont observé que parfois des structures régulières apparaissent, mais pas toujours. En situation actuelle, comme les magnitudes de paramètres fluctuants ne sont pas bien déterminées (et même leur nature n'est pas claire), il serait exagéré de faire des estimations quantitatives : nous nous limitons donc aux explications qualitatives.

Dans ce chapitre, nous avons vu que deux systèmes tourbillonnaires ayant les mêmes invariants globaux n'évoluent pas forcément vers les mêmes configurations finales. Ensuite, on peut dire que le modèle dynamique utilisé dans notre travail indique l'importance du rôle des fluctuations des champs extérieurs, qui peuvent être cruciales pour la réalisation des structures régulières.

Chapitre 5

Mécanique statistique des tourbillons ponctuels

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les fonctions thermodynamiques pour analyser le comportement des tourbillons ponctuels dans un domaine borné. En fait, nous allons mettre en place un principe d'évolution des configurations en fonction de leur température initiale.

5.1 Mécanique statistique des tourbillons ponctuels

5.1.1 Introduction générale

On trouvera quelques informations sur la mécanique statistique et la thermodynamique en annexe C.

Commençons par rappeler brièvement quelques principes physiques de base.

Soit un système Hamiltonien avec les coordonnées généralisées q_i et les moments p_i.

Dans toutes les considérations, nous utilisons la notation $X = (X_1, \dots, X_N) \equiv (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots q_N, p_N)$. Le produit de toutes les différentielles est noté par $dX = dX_1 dX_2 \dots dX_N \equiv dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 \dots dq_N dp_N$. L'Hamiltonien, $H = H[X, R]$, dépend des variables dynamiques q_i, p_i et d'un paramètre externe R, ou d'un petit nombre de paramètres $R_s,\ s = 1, \dots, M$, décrivant l'influence des facteurs externes.

Les équations d'Hamilton pour les variables canoniques q_i, p_i sont la série d'équations différentielles du premier ordre par rapport au temps. Les valeurs de tous les $X(t)$ à $t \neq 0$ sont complétement définies par leur valeur à $t = 0$. Ces propriétés permettent d'introduire la "trajectoire de phase". En mécanique classique, on suppose que ces "trajectoires" ne s'interceptent pas.

Quand tous les R_s sont fixés, les "trajectoires" d'un système appartiennent à une surface d'énergie $H = H[X, R] = E = C^{te}$.

Du point de vue de la mécanique, l'état d'un système est complétement défini par les variables canoniques X. Nous appellerons cet état *micro–canonique* : l'état d'un micro-modèle.

Dans l'approche *macroscopique*, l'état d'un système est défini par un nombre limité de paramètres appelés "paramètres mesurables". Dans cette voie, une multitude d'états microscopiques différents correspondent au même état macroscopique du système. En résultat, la macro-description du système, par un nombre limité de macro-paramètres, est incomplète et ne peut être décrite que par des méthodes probabilistes.

En partant de la formulation micro-canonique, nous supposons que l'état du système est complétement défini par son Hamiltonien total.

Rappelons quelques postulats classiques.

La configuration d'un système est caractérisée par un ensemble de variables canoniques $X = \{X_i\}$, qui correspond au point X de l'espace de phase. L'égalité $H[X, R] = E$ "découpe" une hyper-surface dans l'espace de phase : les états de phases possibles sont localisés sur cette hyper-surface. L'intégrale

$$\Gamma'(E, R) \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial E} = \int_{D^N} dX \delta(E - H[X, R]) \tag{5.1}$$

détermine une densité énergétique d'états de phase, c'est-à-dire un nombre d'états du système qui se situent entre les énergies E et $E + dE$. Ici, $\delta(s)$ est la fonction de Dirac d'argument s.

Le volume de l'espace de phase est défini par l'intégrale

$$0 \leq \int_{E_0}^{+\infty} dE\, \Gamma'(E, R) = D^N \leq +\infty. \tag{5.2}$$

Ici, on suppose que $H[x_i, R] < +\infty$ et que le volume de phase pour l'état caractérisé par $E = E_0$ est nul.

Il découle de (5.1) et (5.2) que la distribution micro-canonique de probabilité d'énergie est donnée par l'expression

$$w_{mc}(E) = D^{-N} \delta(E - H[X, R]). \tag{5.3}$$

En suivant [37], l'entropie est définie à l'aide de la densité d'états de phase, par l'expression

$$S(E, R) = \ln[\Gamma'(E, R)] + C_1^{te}. \tag{5.4}$$

Cette formulation est correcte mais différente de la définition, (disons traditionnelle) utilisant le volume de phase totale (voir les livres, où l'idée de L. Boltzmann est discutée en détail).

Cependant, la formulation (5.4) est plus naturelle. D'un autre côté, l'espace de phase total pour les systèmes avec un volume de phase fini peut être défini de deux manières : par $\Gamma(E,R) = \int_{D^N} dX\theta(E - H[X,R])$ et par $\Gamma_1(E,R) = \int_{D^N} dX\theta(H[X,R] - E)$. Evidemment, $\Gamma_1(E,R) = D^N - \Gamma(E,R)$. Cependant, il semble plus naturel que la théorie ne dépende pas du choix de la forme concrète de Γ ou Γ_1 ou de leur valeur.

La différentielle de $S(E,R)$ est donnée par

$$dS(E,R) = dE\frac{\partial \ln \Gamma'(E,R)}{\partial E} + dR\frac{\partial \ln \Gamma'(E,R)}{\partial R}. \tag{5.5}$$

L'expression (5.5) détermine la "relation thermodynamique" de base suivante :

$$dS(E,R) = \beta\, dE + \beta F_R\, dR, \tag{5.6}$$

et permet d'introduire la température

$$\partial_E S(E,R) = \Gamma'(E,R)^{-1}\partial_E \Gamma'(E,R) = \beta \equiv \theta^{-1}, \tag{5.7}$$

et la "force généralisée" donnée par $F_R = \partial_R \ln \Gamma'(E,R)/\partial_E \ln \Gamma'(E,R)$.

La densité des états de phase, Γ', est complétement caractérisée par l'Hamiltonien $H[X,R]$.

5.1.2 Approximation auto-corrélée

Soit un grand nombre de "particules" $N \gg 1$, qui interagissent dans le système. Dans ce cas, chaque particule se meut dans un champ créé par l'ensemble des autres particules. Si le potentiel d'interaction est de courte portée, le mouvement d'une particule est causé par son interaction avec les particules les plus proches. Si le potentiel de l'interaction est de longue portée, le mouvement des particules est causé par l'action collective de l'ensemble des "particules".

Dans ce cas, l'Hamiltonien de chaque "particule" est décomposé en deux parties : partie moyennée (qui respecte les mouvements de toutes les autres particules) et partie fluctuante, c'est-à-dire $H(x_1, \ldots x_N) = \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{x}_i) + H'$. Il est évident que les fluctuations se manifestent fortement sur la périphérie de la distribution des particules seulement.

Si on néglige les fluctuations de l'Hamiltonien, H', le problème est considéré dans le cadre de l'*approximation du champ principal*. La fonction $U_i(\mathbf{x}_i)$ est la partie de l'Hamiltonien total (partie de l'Hamiltonien qui est moyennée et qui respecte le mouvement des autres éléments) qui est défini par les *effets collectifs*. La fonction $U_i(\mathbf{x}_i)$ est donc caractéristique d'un champ auto-corrélé du système au point x_i.

Puisque le système tronqué a un nombre fini d'éléments identiques N et que ce nombre d'éléments est grand, les déviations $H' = H - \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{x}_i)$ sont, en moyenne, petites ; toutefois, la déviation peut prendre localement toutes les valeurs possibles. Dans un tel cas, dans le système comprenant un nombre fini d'éléments, les fluctuations de H *sont admises*, c'est-à-dire le système évolue comme si il était en contact avec un "thermostat".

Ayant à l'esprit que le système a un nombre fini, N, d'éléments *identiques*, le volume de phase du système est en fait plus petit que celui défini par l'équation (5.1) : en effet, les mêmes états physiques correspondent à des états de configuration avec des permutations différentes $N!$ d'éléments. Ainsi, la densité des états de phase peut être remplacée par $\Gamma'(E,R) \to (N!)^{-1}\Gamma'(E,R)$, c'est-à-dire

$$\Gamma'(E,R) \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial E} = \frac{1}{N!}\int_{D^N} dX \delta(E - H[X,R]). \tag{5.8}$$

Cette modification n'est pas importante si le nombre N est fixé.

5.2 Champ auto–accordé des tourbillons

Quelques informations sur la dynamique des tourbillons ponctuels sont données en annexe D.

Soit un système de N tourbillons identiques, positifs.

Adimensionnons les équations de leur évolution en utilisant les échelles caractéristiques suivantes : spatiale R, temporelle $\tau = 2\pi R^2/\Gamma$ et énergétique $H_0 = \Gamma^2/2\pi N$.

Après cette opération, l'Hamiltonien, qui est normalement l'énergie totale (adimensionnée sur H_0) du système, exprimée en termes des variables canoniques x_i, y_i (adimensionnées), prend la forme

$$H = \frac{1}{2N}\sum_{i\neq j; i,j=1}^{N} H_{ij}. \tag{5.9}$$

Ici, H_{ij} est "l'Hamiltonien des interactions" entre les tourbillons i et j. Le facteur un-demi est présent car le terme décrivant l'interaction entre les tourbillons i et j apparaît dans la somme double deux fois, H_{ij} et H_{ji}. Dans les équations du mouvement des tourbillons, nous ne comptabilisons donc pas deux fois le même processus.

Le mouvement des tourbillons obéit aux équations adimensionnées suivantes :

$$\partial_t x_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_i}, \qquad \partial_t y_i = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_i}. \tag{5.10}$$

Pour les tourbillons ponctuels, $H_{ij} = \ln r_{ij}$. Il y a donc une singularité lorsqu'on prend $r_{ij} \to 0$. Normalement un tourbillon ponctuel ne s'influence pas par lui même, c'est pourquoi, afin d'éviter le problème d'apparition des singularités dans les sommes de type (5.9), on soustrait les termes diagonaux en indiquant que $i \neq j$ dans la somme.

Rappelons que, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, tout se passe alors comme si chaque tourbillon se meut dans le champ auto–accordé, en fait, moyenné par rapport aux coordonnées des autres tourbillons.

Discutons ce thème plus en détail.

Pour ne pas rencontrer le problème de l'auto–action, réécrivons (5.9) sous forme symétrique, en remplaçant le terme singulier $\ln r_{ij}$ par l'expression $\ln(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{1/2}$, où $\epsilon \ll 1$. Un tel changement signifie qu'un petit domaine, de rayon $\sim \epsilon$, autour de chaque tourbillon est éliminé de la considération. Rappelons qu'on travaille avec des r_{ij} adimensionnés. Dans ce qui suit, nous allons considérer H comme la limite de H_ϵ quand $\epsilon \to 0$. Après le calcul, le terme singulier, $\sim \ln \epsilon$, est soustrait, même s'il est infiniment grand, parce qu'il ne dépend pas des variables dynamiques.

L'expression pour l'Hamiltonien s'écrit sous la forme

$$H^{(\epsilon)} = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} H_{ij}^{(\epsilon)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2N} \sum_i N \int d\mathbf{x}_j w_1(\mathbf{x}_j) H_{ij}^{(\epsilon)} + \frac{1}{2N} \sum_i N \left(\frac{1}{N} \sum_j - \int d\mathbf{x}_j w_1(\mathbf{x}_j) \right) H_{ij}^{(\epsilon)}.$$

Ici, $w_1(\mathbf{x}_j)$ est la probabilité de trouver le j-ème tourbillon au voisinage de $\mathbf{x}_j$. Pour une répartition homogène, on a $w_1(\mathbf{x}_j) \to D^{-1}$, où D est le domaine d'intégration. Indiquons que la structure concrète de $w_1(\mathbf{x}_j)$ doit être trouvée à partir d'une analyse spéciale complémentaire.

Désignons l'opérateur entre parenthèses par $\widehat{M}_j$.

On obtient

$$H^{(\epsilon)} = \frac{1}{2} \sum_i U_i^{(\epsilon)} + \frac{N}{2} \frac{1}{N} \sum_i \widehat{M}_j H_{ij}^{(\epsilon)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_i U_i^{(\epsilon)} + \frac{N}{2} \int d\mathbf{x}_i w_1(\mathbf{x}_i) \widehat{M}_j H_{ij}^{(\epsilon)} + \frac{N}{2} \widehat{M}_j \widehat{M}_i H_{ij}^{(\epsilon)}. \tag{5.11}$$

Après quelques manipulations simples, on trouve que

$$H^{(\epsilon)} = \frac{1}{2} \sum_i U_i^{(\epsilon)} + \frac{1}{2} \sum_j U_j^{(\epsilon)} + \frac{N}{2} \left[\widehat{M}_i \widehat{M}_j - \int d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_j w_1(\mathbf{x}_i) w_1(\mathbf{x}_j) \right] H_{ij}^{(\epsilon)},$$

ou, sachant que les indices i et j dans les deux premières sommes sont muets,

$$H^{(\epsilon)} = H_0 + \sum_i U_i^{(\epsilon)} + \frac{N}{2} \widehat{M}_i \widehat{M}_j H_{ij}^{(\epsilon)},$$

où

$$H_0 = -\frac{N}{2}\langle H_{ij}^{(\epsilon)}\rangle \equiv -\frac{N}{2}\int d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_j w_1(\mathbf{x}_i) w_1(\mathbf{x}_j) H_{ij}^{(\epsilon)}.$$

L'intégrale double par rapport aux $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$, H_0, peut être omise. Elle ne présente pas d'intérêt, parce que c'est une constante qui ne se manifeste pas dans les équations de la dynamique et ne détermine que le niveau à partir duquel l'énergie commence à compter. Egalement, d'après la définition, le terme H_0 peut être mis sous le symbole de l'opérateur $\widehat{M}_j\widehat{M}_i$: $\widehat{M}_i H_0 = 0$.

En soustrayant la constante, on obtient, après une symétrisation des indices :

$$H^\epsilon \to H^\epsilon = \sum_{s=1}^{N} U_s^{(\epsilon)} + \underbrace{\frac{N}{4}\left[\widehat{M}_i\widehat{M}_j + \widehat{M}_j\widehat{M}_i\right]\left(H_{ij}^{(\epsilon)} - \langle H_{ij}^{(\epsilon)}\rangle\right)}_{H'}. \tag{5.12}$$

Ici, $U_i^{(\epsilon)}$ est défini par

$$U_i^{(\epsilon)} = \int_D d\mathbf{x}_j w_1(\mathbf{x}_j) H_{ij}^{(\epsilon)}. \tag{5.13}$$

Si $N \gg 1$, on peut s'attendre (voir la sous-section sur la lemme de Gibbs) à ce que l'écart entre $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} H_{ij}$ et $U(r_i)$ soit petit *en moyenne*, par exemple $\sim N^{-1/2}$, quoique, formellement, il peut être arbitraire. Alors, dans l'approximation qui nous intéresse et selon la mise en relief exécutée des termes prédominants, la première somme de (5.12) est prédominante et le dernier petit terme (fluctuant), H', peut être omis.

La valeur de $H_i^{(\epsilon)}$ peut évidemment être soit positive, soit négative.

Dans ce qui suit, nous ne gardons que la partie essentielle dans l'expression de l'Hamiltonien

$$H^{(\epsilon)} \to H = \sum_i U_i, \tag{5.14}$$

en négligeant les fluctuations. Le problème se réduit donc au problème du mouvement des "particules", non interagissant entre elles, dans les champs extérieurs, auto–accordés, U_i (toutefois, dans ce qui suit, nous garderons le même terme : "tourbillon").

Le mot "auto–accordé" signifie que le champ U_i est défini par l'intégrale d'une quantité multipliée par la probabilité de trouver une configuration quelconque, qui est à son tour une fonction de U_i.

L'omission du terme fluctuant dans l'Hamiltonien amène à ce que l'énergie totale du fluide ne soit plus conservée : elle subit de petites fluctuations. Tout se passe comme si le système interagissait avec un *thermostat* en effectuant un échange chaotique et continu d'énergie. En conséquence, c'est la "température" du système qui est fixée par celle du thermostat, et non l'énergie. La distribution spatiale des tourbillons va donc être caractérisée par celle similaire à la distribution canonique (de Gibbs).

L'idée dominante de la discussion ci-dessus a été que, pour $N \gg 1$, "l'énergie" moyenne U_i du tourbillon i est la fonctionnelle (5.13), fonction de la probabilité de se trouver dans un état : $U_i = U_i[w_1]$. Maintenant, pour boucler l'étude, il faut trouver la dépendence $w_1 = w_1(U_1)$.

5.2.1 Commentaires sur le volume de l'espace de phase pour les tourbillons ponctuels

Au cours de leur mouvement, les tourbillons peuvent s'approcher les uns des autres, se concentrer au voisinage de la frontière ∂D, ... La distance mutuelle minimale est déterminée par les lois de conservation du moment cinétique et de l'énergie. Les configurations possibles sont régies par les mêmes lois. Tous les points de D sont accessibles pour les tourbillons.

Nous supposons qu'aucun tourbillon n'entre en contact avec la frontière ∂D. En effet, le système ayant initialement une énergie *finie* E donnée, restera toujours sur l'hyper–surface énergétique correspondant à cette énergie E, tandis qu'une position sur la frontière correspondrait à E infinie.

Le volume de phase total est de $\Gamma(E) \leq D^N$. Il est donc limité par une frontière ∂D qui correspond à l'hyper–surface énergétique $\partial_E D$, caractérisée par la valeur $E = +\infty$. Alors, l'hyper–surface énergétique sur laquelle le mouvement des tourbillons est effectué, avec E finie, *n'intercepte jamais la frontière* $\partial_E D$.

C'est pourquoi la définition (5.1) reste valable pour les tourbillons.

5.2.2 Intégrales d'états pour $N \gg 1$

Nous pouvons réécrire (5.8) comme

$$\begin{aligned}\Gamma'(E,R) &= \frac{1}{2\pi N!}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikE}\int_{D^N} dX\, e^{-ikH[X,R]} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\left[\frac{1}{N!}\, e^{ikE}\int_{D^N} dX\, e^{-ikH[X,R]}\right],\end{aligned} \tag{5.15}$$

en utilisant les définitions

$$\Theta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{k}\, e^{iks}, \quad \delta(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{iks}. \tag{5.16}$$

On considère l'expression

$$I(k,E) = e^{ikE}\frac{1}{N!}\int_{D^N} dX\, e^{-ikH[X,R]}. \tag{5.17}$$

En laissant $H = \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{x}_i)$, nous obtenons

$$I(k,E) = e^{ikE}\frac{1}{N!}\left[\int_D dq_1 dp_1\, e^{-ikU_1[X_1,R]}\right]^N = \exp G_1(k), \tag{5.18}$$

où

$$G_1(k) = ikE - \ln N! + N\ln\int_D dq_1 dp_1 e^{-ikU_1[X_1,R]}. \tag{5.19}$$

Changeons ik en ν. Alors

$$G(\nu) = \nu E - \ln N! + N\ln\int_D dq_1 dp_1 e^{-\nu U_1[X_1,R]}, \tag{5.20}$$

et nous pouvons réécrire l'expression pour les états de densité d'énergie comme

$$\frac{\partial\Gamma(E,R)}{\partial E} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu\, \exp G(\nu). \tag{5.21}$$

Le volume de phase est évidemment

$$\Gamma(E,R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\nu}{\nu}\, \exp G(\nu), \tag{5.22}$$

à cause de $\partial_E G(\nu) = \nu$.

Si le nombre N est grand, mais fini, on peut utiliser la *méthode de descente la plus rapide* pour trouver les valeurs asymptotiques des intégrales. Comme ν est indépendant de N pour des grands nombres, la valeur asymptotique est déterminée par les points stationnaires de la fonction G(ν). Le point stationnaire est donc déterminé par l'équation

$$G_\nu\,|_{\nu=\beta} \equiv \frac{\partial G}{\partial \nu}\,|_{\nu=\beta} = E - \frac{N}{Z_1(\beta)}\int_D dX_1 U_1(X_1,R)\times \times\exp(-\beta U_1(X_1,R)) = 0, \tag{5.23}$$

avec

$$Z_1(\beta) = \int_D dX_1 \exp(-\beta U_1[X_1,R]). \tag{5.24}$$

Une solution de l'équation (5.23) donne "l'équation d'état" : $\beta = \beta(E,N)$.

5.2.3 Probabilité, somme statistique et température

Soit la notation

$$w_1(X_1) = Z_1^{-1} \exp[-\beta U_1[X_1, R]]. \tag{5.25}$$

L'expression (5.25) détermine la densité de probabilité des "coordonnées", qui est normalisée par

$$\int_D dX_1 w_1 = 1. \tag{5.26}$$

L'expression

$$Z_1(\beta, R) = \int_D dX_1 e^{-\beta U_1[X_1,R]} \tag{5.27}$$

est appelée la "somme statistique", ou "l'intégrale des états". En sauvant la somme statistique, nous pouvons trouver toutes les fonctions thermodynamiques.

En introduisant le moyennage partiel statistique, par définition

$$\langle A(X)\rangle_1 = \int_D dX_1\, A(X_1, \ldots)\, w_1(\beta, X_1), \tag{5.28}$$

nous obtenons que, au point $\nu = \beta$, l'énergie

$$E - N \int_D dX_1 U_1[X_1, R]\, w_1(X_1) = 0, \tag{5.29}$$

peut être réécrite sous la forme

$$E - N\langle U_1\rangle_1 = 0. \tag{5.30}$$

Ici, U_1 est calculée à partir de la représentation $H = \sum_{i=1}^N U_i(X_i)$. Il existe une dépendance entre E, R, et $\theta = \beta^{-1}$, donnée par (5.30).

Ayant calculé les dérivées de $G(\nu)$ au point $\nu = \beta$, (5.23), nous pouvons trouver à partir de (5.24) que la seconde dérivée au même point est donnée par

$$\begin{aligned} G_{\nu\nu} \mid_\beta &= N \int_D dX_1 U_1(X_1) \partial_\nu w_1(X_1) \mid_\beta = \\ &= -N\langle U_1^2\rangle_1 + N\langle U_1\rangle_1^2 \\ &= -N\langle [U_1 - \langle U_1\rangle_1]^2\rangle_1 \equiv -N\Delta^2, \end{aligned} \tag{5.31}$$

avec $\Delta = \mid U_1 - \langle U_1\rangle_1 \mid$.

Introduisons la notation $F(\beta, R, N) = -N\beta^{-1} \ln Z_1$. Nous obtenons alors l'estimation suivante pour la densité du nombre d'états

$$\begin{aligned}\partial_E \Gamma(E, R) &\simeq \exp(\beta E - \ln N! - \beta F) \\ &\times [\frac{1}{2\pi i} \int_C d\nu \, \exp(-\frac{N}{2} \Delta^2 (\nu - \beta)^2] \\ &\simeq \frac{C^{te}}{N^{1/2}\Delta} \exp(\beta E - \ln N! - \beta F),\end{aligned} \tag{5.32}$$

et

$$\partial_{EE} \Gamma(E, R) \simeq \beta \partial_E \Gamma(E, R). \tag{5.33}$$

En fait, ayant l'extrémum local au point $\nu = \beta$, pour obtenir les valeurs asymptotiques des intégrales, nous pouvons déformer la ligne d'intégration d'un chemin où passe le point $\nu = \beta$. Par conséquent, en accord avec la méthode de descente la plus rapide, si $G_{\nu\nu}|\beta|^2 \sim N\Delta^2\beta^2 \gg 1$, dans la principale approximation, nous trouvons nécessairement toutes les intégrales.

La structure de (5.32) et (5.33) permet immédiatement d'introduire une définition de la température, θ ($\beta \equiv \theta^{-1}$). En fait, pour $N \gg 1$, on obtient $\beta = (\partial_{EE}\Gamma(E, R))/\partial_E \Gamma(E, R) \to \beta$.

Pour des tourbillons ponctuels, la densité énergétique des états est une fonction exponentiellement dépendante de l'énergie (ce fait ne contredit pas les postulats de la mécanique statistique, voir [67], p.314).

5.2.4 Introduction de fonctions thermodynamiques

Il est commode d'introduire la fonction

$$F(\beta, R, N) = -N\beta^{-1} \ln Z_1, \tag{5.34}$$

où il est rendu compte que l'Hamiltonien, et par conséquent F, dépend du paramètre externe R.

Dans ce cas, nous pouvons réécrire l'expression (5.25) sous la forme

$$w_1(X_1) \equiv \exp[\beta N^{-1} F - \beta U_1[X_1, R]]. \tag{5.35}$$

Une telle expression, dans la mécanique classique des particules, est appelée distribution canonique de Gibbs.

Exprimons maintenant l'énergie interne des tourbillons à l'aide de Z_1. Calculons pour cela la dérivée de l'équation (5.26) par rapport à β (nous utilisons (5.35)) :

$$\int_D dX_1[\beta\frac{\partial F}{\partial\beta} + F - NU_1[X_1, R]] \\ \times \exp[\beta N^{-1}F - \beta U_1[X_1, R]] = 0, \tag{5.36}$$

ou

$$E = N\langle U_1[X_1, R]\rangle_1 = \\ \int_D dX_1[\beta\frac{\partial F}{\partial\beta} + F]\exp[\beta N^{-1}F - \beta U_1[X_1, R]] = \\ = \beta\frac{\partial F}{\partial\beta} + F = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1. \tag{5.37}$$

L'expression pour l'entropie peut être estimée à partir de la définition (5.4) comme

$$S(E, R) = \ln\Gamma(E, R) \simeq \\ \beta E + N\ln\int_D dX_1 e^{-\beta U_1[X_1,R]} - N\ln N + \ldots = \\ = \beta E - \beta F - N\ln N + \ldots = \\ = -N\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1 + N\ln Z_1 - N\ln N + \ldots = \\ = -N\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\beta}\ln Z_1\right) - N\ln N + \ldots. \tag{5.38}$$

Des petits termes d'ordre N^{-1}, $N^{-1}\ln N^{-1}$ sont abandonnés dans le membre de droite de cette expression. Rappelons que, à la "limite thermodynamique", $N \to \infty$, l'énergie libre est définie par l'expression $F = E - TS$. Le terme $N^{-1}\ln N^{-1}$ dans la partie droite de l'expression reflète le fait que le volume de phase pour un système de N éléments identiques est plus petit à cause du facteur $N!$ et, par cette raison, l'énergie libre et la somme statistique ont été modifiées. Pour un procédé pour lequel le nombre d'éléments n'est pas modifié, ce terme n'est pas significatif.

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient la définition classique

$$S(E, R) = -N\int_D dX_1\, w_1(X_1)\,\ln w_1(X_1) - N\ln N. \tag{5.39}$$

En fait, en approximation thermodynamique, l'entropie est déterminée par

$$S(E, R) = -\frac{\partial F}{\partial(\beta^{-1})}, \tag{5.40}$$

où $\theta = \beta^{-1}$ est la "température" du gaz tourbillon. En utilisant (5.37), on obtient

$$S(E,R) = -\frac{\partial F}{\partial(\beta^{-1})} = -\beta F + \beta E =$$
$$-\int_D dX_1[\beta F - \beta N U_1]\exp[\beta N^{-1}F - \beta U_1[X_1,R]], \tag{5.41}$$

d'où le résultat (5.39).

Ainsi, l'entropie est proportionnelle à la valeur moyennée de la probabilité de densité logarithmique, et n'est pas la valeur moyennée d'une valeur mécanique. En conséquence, la température, β^{-1}, et l'entropie ont des valeurs caractérisant un ensemble statistique, mais pas un micro-état mécanique du système.

5.2.5 Fluctuations de l'Hamiltonien

Soit la valeur moyennée d'un volume phase

$$\langle u\rangle = \int_{D^N} dX u(X,R)\exp[\beta F - N\beta U_1[X_1,R]], \tag{5.42}$$

où $w_{full} \equiv w^N = \exp[\beta F - N\beta U_1[X_1,R]]$. En différentiant cette valeur par rapport à β, nous obtenons

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial\beta} = \langle u[F - NU_1]\rangle + \langle u\rangle\beta\frac{\partial F}{\partial\beta} =$$
$$= -\langle uH\rangle + \langle u\rangle\langle H\rangle. \tag{5.43}$$

En notant $\langle\langle u\rangle(H - \langle H\rangle)\rangle = 0$, on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial\beta} = -\langle(u - \langle u\rangle)(H - \langle H\rangle)\rangle. \tag{5.44}$$

En prenant $u = H$, nous obtenons l'expression (lemme de Gibbs) :

$$\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\beta} = -\langle(H - \langle H\rangle)^2\rangle. \tag{5.45}$$

Ainsi, la fluctuation relative de l'énergie est estimée par (5.45). Nous avons également, pour $u = H$:

$$\epsilon^2 \equiv (\frac{\Delta(E)}{E})^2 = \frac{\langle(H - \langle H\rangle)^2\rangle}{\langle H\rangle^2} = -\frac{1}{\langle H\rangle^2}\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\beta} = -\frac{1}{N}\frac{1}{\langle U_1\rangle^2}\frac{\partial\langle U_1\rangle}{\partial\beta}. \tag{5.46}$$

Cette expression tend vers zéro quand $N \to \infty$, et par conséquent, les fluctuations relatives (spontanées) de l'Hamiltonien $H - \langle H\rangle$ sont petites, $\epsilon \sim N^{-1/2} \ll 1$.

5.3 Tourbillons ponctuels dans un récipient cylindrique

Les expériences en laboratoire sont généralement exécutées dans des récipients aux dimensions finies, qui sont entourés par des parois solides imperméables. Dans cette sous-section, on décrit comment la présence de telles frontières physiques influence le procédé d'auto-organisation dans les écoulements (quasi-)2D turbulents.

Que se passe-t-il quand les tourbillons s'approchent des parois ? Comment la géométrie des récipients influence les formes des structures de l'auto-organisation ?

Nous considérons un *système dynamique* de tourbillons identiques, de circulation Γ/N et de coordonnées instantanées $\mathbf{x}_i(t)$, adimensionnées par l'échelle spatiale R, où $i = 1, \ldots, N \gg 1$, et où R est le rayon du récipient. L'échelle temporelle est $\tau = 2\pi R^2/\Gamma$.

Dans ce cas, les équations dynamiques pour les coordonnées adimensionnées des centres des tourbillons sont

$$\partial_t x_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_i}, \quad \partial_t y_i = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_i}, \tag{5.47}$$

où l'Hamiltonien adimensionné (voir [9] pour comparer) est défini par

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{N} \overline{U}_i, \tag{5.48}$$

avec

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N}{}' \, g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \left[\frac{1}{N} \ln(1 - r_i^2) \right]. \tag{5.49}$$

Ici, $N \simeq N - 1 \gg 1$, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, $i \neq j$. Le terme $[\ldots] = N^{-1} \ln(1 - r_i^2)$ peut être omis dans les calculs qui suivent. La double somme respecte i, j de toutes les paires, c'est-à-dire il y a $N(N-1) \simeq N^2$ termes individuels dans cette somme. Le facteur 2 reflète la condition de symétrie $i \rightleftharpoons j$ dans l'expression de l'Hamiltonien.

Les équations de mouvement sont donc de forme standard. Si $\Gamma < 0$, on a $\tau < 0$. Dans ce cas, il suffit de faire la permutation $x_i \rightleftharpoons y_i$ et la forme des équations reste la même.

Le noyau $g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ est donné par l'expression

$$g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2} \ln r_{ij}^2 - \frac{1}{2} \ln(1 - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + r_i^2 r_j^2). \tag{5.50}$$

L'asymétrie dans les termes logarithmiques provient des conditions aux frontières (que l'on doit respecter).

L'espace de phase est évidemment limité et son volume est $(\pi R^2)^N \to \pi^N$.

Réécrivons l'expression (5.50) sous une forme plus commode

$$g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2}\ln(a - \cos\,\theta_{ij}) + \frac{1}{2}\ln(2r_i r_j)$$
$$-\frac{1}{2}\ln(b - \cos\,\theta_{ij}) - \frac{1}{2}\ln(2r_i r_j) == \frac{1}{2}\,\ln\frac{a - \cos\,\theta_{ij}}{b - \cos\,\theta_{ij}}, \tag{5.51}$$

où $a = (r_i^2 + r_j^2)/2r_i r_j$ et $b = (1 + r_i^2 r_j^2)/2r_i r_j$. Si $r_i = 1$ (ou $r_j = 1$), nous obtenons $a = b$ et $g|_{r_i=1} = 0$.

La somme dans (5.49), avec (5.51), tient compte des "interactions" des tourbillons dans l'espace illimité. Cette interaction donne $-E_{min}$ (la valeur de l'énergie minimale $-E_{min}$ est définie par conservation du moment angulaire) quand $r_{ij} \to r_{min}$ (pour le cas considéré de s tourbillons de même signe). La somme dans (5.49), avec (5.51), tient également compte de l'interaction de chaque tourbillon avec les images de tous les *autres* tourbillons. Ces derniers termes deviennent singuliers si $r_i, r_j \to R$, c'est-à-dire si un tourbillon touche la frontière.

Nous négligeons les termes qui décrivent l'interaction "tourbillon image" de chaque tourbillon pour $N \gg 1$.

A cause des combinaisons variées des termes avec $r_i \to R$ ou $r_{ij} \to 0$, on remarque que H peut avoir les valeurs limites suivantes : $-E_{min}$ (quand $r_{ij} \to 0$) et $+\infty$ (quand $r_s \to 1$).

En remplaçant $(2N)^{-1}\sum_j \ldots \to \int_D d\mathbf{x}\, w_1(\mathbf{x}) \ldots$ et en négligeant les petits termes d'ordre $N^{-1/2} \to 0$, nous pouvons écrire (pour les valeurs adimensionnées) :

$$\overline{U}_1(\mathbf{x}_1) = \int_D' d\mathbf{x}\, w_1(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) + [\ldots]. \tag{5.52}$$

L'équation (5.52) peut être réécrite sous la forme

$$\overline{U}_1(\mathbf{x}_1) =$$
$$= e^{\beta F_1} \int_D' d\mathbf{x}\, g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) e^{-\beta \overline{U}_1(\mathbf{x})} + [\ldots], \tag{5.53}$$

où, le point singulier possible dans l'intégrale peut être éliminé, et où l'expression (5.25) a été utilisée.

Nous pouvons écrire l'équation qui suit pour trouver la fonction $Y(\mathbf{x}_1) = \exp(-\beta \overline{U}_1(\mathbf{x}))$:

$$-\beta^{-1}\ln Y(\mathbf{x}_1) = e^{\beta F_1} \int_D' d\mathbf{x}\, g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) + [\ldots]. \tag{5.54}$$

L'équation pour $w(\mathbf{x}_1)$ est évidemment

$$-\beta^{-1}\ln\, w_1(\mathbf{x}_1) - \int_D' d\mathbf{x}\, g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) w_1(\mathbf{x}) = -F_1 + [\ldots]. \tag{5.55}$$

5.4 Distribution axialement symétrique

5.4.1 Formulation du problème et quelques estimations préliminaires

Soit une distribution axialement symétrique $w_1(\mathbf{x}_1) = w_1^{(0)}(r_1)$. Dans ce cas, à partir de l'équation (5.55), nous obtenons :

$$-\frac{1}{\beta}\ln w_1^{(0)}(r_1) - \int_0^1 dr\, r\, w_1^{(0)}(r) \times \\ \times\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \ln\frac{b-\cos(\theta-\theta_1)}{a-\cos(\theta-\theta_1)}\right] = -F_1. \tag{5.56}$$

Le terme $N^{-1}\ln(1-r_1^2)$ est omis ici.

En utilisant les expressions données en Annexe E, nous réécrivons l'équation (5.56) comme

$$-\frac{1}{\beta}\ln w_1^{(0)}(r_1) - \pi\int_0^1 dr\, r\, w_1^{(0)}(r) \times \\ \times\Big[(\ln r_1)\theta(r_1-r) + (\ln r)\theta(r-r_1)\Big] = -F_1, \tag{5.57}$$

ou

$$-\frac{1}{\beta}\ln w_1^{(0)}(r_1) - \pi\left[\int_0^{r_1} dr\, r\, w_1^{(0)}(r)\right]\ln r_1 \\ -\pi\int_{r_1}^1 dr\, r\, w_1^{(0)}(r)\ln r = -F_1. \tag{5.58}$$

La solution de cette équation dépend des paramètres β et F_1, c'est-à-dire $w_1^{(0)} = w_1^{(0)}[\beta, F_1; r]$. Cette fonction est normalisée par la condition

$$2\pi\int_0^1 dr\, r\, w_1^{(0)}[\beta, F_1; r] = 1, \tag{5.59}$$

qui donne l'équation d'état, c'est-à-dire la dépendance $F_1 = F_1(\beta)$. Sachant que $F_{1(adimensionn)} = F_{1(dimensionn)}/F_0$ est une énergie libre adimensionnée, le R n'apparaît pas dans le coefficient de normalisation $F_0 = \Gamma^2/2\pi N$.

Intéressons nous à quelques estimations utiles avant de résoudre l'équation (5.58). Les cas extrêmes sont donnés par :

$$-\frac{1}{\beta}\ln w_1^{(0)}(0) - \pi\int_0^1 dr\, r\, w_1^{(0)}(r)\ln r = -F_1, \tag{5.60}$$

et

$$-\frac{1}{\beta}\ln w_1^{(0)}(r\to 1)\to -F_1. \tag{5.61}$$

La seconde expression montre que la probabilité de trouver des tourbillons au voisinage de la frontière n'est pas petite, seulement si le produit βF_1 est positif. Il faut cependant être attentif car l'équation (5.58) n'est valable que hors d'une très fine couche au voisinage immédiat de la frontière.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} w_1^{(0)}(r\to 1) &\to w_1^{(0)}(0)\,\exp\left[-\beta\pi\int_0^1 ds\,s\,w_1^{(0)}(s)\,\ln\frac{1}{s}\right] \\ &\sim w_1^{(0)}(0)\,\exp\left[-\beta\pi\,\ln\frac{1}{r_c}\right], \end{aligned} \tag{5.62}$$

car $0<s<1$. Ici, $2<r_c^{-1}<3$ est un certain facteur numérique intermédiaire.

Dans cette approximation, un pic central intense se forme quand $\beta>1$.

5.4.2 Solution analytique

Introduisons la fonction $Y(r;\mu)$ à partir de la relation $w_1^{(0)}(r)=Y(r;\mu)\,\exp(\beta F_1)$. Ici, le paramètre μ est défini par $\mu=\pi\beta\exp(\beta F_1)$, c'est-à-dire

$$F_1=\frac{1}{\beta}\ln\frac{\mu}{\pi\beta}. \tag{5.63}$$

L'équation devient

$$\begin{aligned} \ln Y(r)+\mu\Bigg[\left(\int_0^r ds\,s\,Y(s)\right)\ln r\,+ \\ +\int_r^1 ds\,s\,Y(s)\ln s\Bigg]=0. \end{aligned} \tag{5.64}$$

La fonction $Y(r,\mu)$ est normalisée par la condition

$$2\mu\int_0^1 ds\,s\,Y(s,\mu)=\beta. \tag{5.65}$$

En dérivant l'équation (5.64), nous obtenons l'équation intégro-différentielle équivalente :

$$Y'(r)+\mu\frac{1}{r}Y(r)\int_0^r ds\,s\,Y(s)=0. \tag{5.66}$$

L'équation non-linéaire (5.66) a pour solution

$$Y(r)=\frac{a}{(1+\frac{1}{8}\mu a\,r^2)^2}, \tag{5.67}$$

où $a = Y(0)$ est un facteur de magnitude.

En effet, en calculant l'intégrale et la dérivée de $Y(r) = a/(1+\eta\, r^2)^2$, on trouve que

$$\int_0^r ds\, s\, Y(s) = \frac{a}{2}\frac{r^2}{1+\eta\, r^2} \tag{5.68}$$

et

$$Y'(r) = -\frac{4\eta a r}{(1+\eta\, r^2)^3}. \tag{5.69}$$

En posant ces deux expressions dans l'équation (5.66) et en comparant les termes de gauche et de droite, nous trouvons

$$\eta = \frac{1}{8}\mu a. \tag{5.70}$$

Maintenant, nous utilisons la condition de normalisation (5.65), qui donne

$$2\mu \int_0^1 ds\, s\, Y(s) = \frac{\mu a}{1+\frac{1}{8}\mu a} = \beta. \tag{5.71}$$

La condition de bord donne

$$Y'(1) = -\frac{1}{2}\frac{\mu a^2}{(1+\frac{1}{8}\mu a)^3} = -\frac{\beta}{2}, \tag{5.72}$$

ou

$$Y(1) = \frac{a}{(1+\frac{1}{8}\mu a)^2} = 1. \tag{5.73}$$

Nous trouvons à partir de là que le paramètre μ s'exprime par

$$\mu = \frac{8}{a}(\pm\sqrt{a}-1), \tag{5.74}$$

tandis que

$$\beta = \pm\frac{8(\pm\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}}. \tag{5.75}$$

Finalement, nous trouvons

$$\beta F_1 = \ln\frac{\mu}{\pi\beta} = \ln\left[\pm\frac{8}{a}(\pm\sqrt{a}-1)\frac{\sqrt{a}}{8\pi(\pm\sqrt{a}-1)}\right] = \ln\left[\pm\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\right]. \tag{5.76}$$

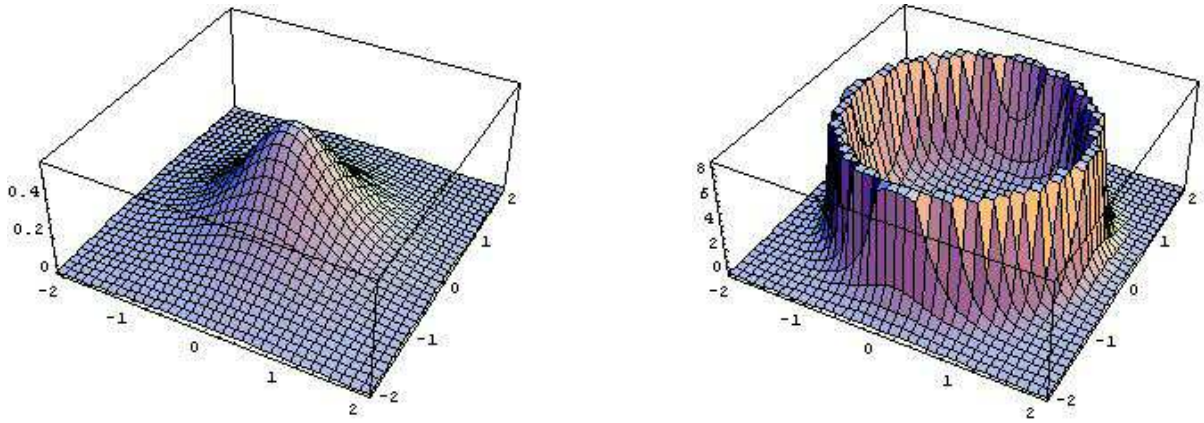


FIG. *5.1: Fonction $w_1(r,a)$ pour $a=\pi$ à gauche et $a=\pi^{-1}$ à droite.*

Cette expression montre que seule la solution avec le signe plus et avec $0<a<\infty$ a un sens physique. Ainsi, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
Y(r) &= \frac{a}{(1+(\sqrt{a}-1)\,r^2)^2},\\
\beta &= \frac{8(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}},\\
F_1 &= \frac{\sqrt{a}}{8(\sqrt{a}-1)}\ln\left[\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\right],\\
\mu &= \frac{8}{a}(\sqrt{a}-1),\\
w_1^{(0)}(r) = Y(r)\,e^{\beta F_1} = \frac{\mu}{\pi\beta}Y(r) &= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{a}}{(1+(\sqrt{a}-1)\,r^2)^2}. \qquad (5.77)
\end{aligned}
$$

Le comportement de la fonction $w_1(r,a)$ est donné en figure 5.1. On remarque que pour $a=\pi$, $w_1(r,a)$ forme un pic central, ce qui donne une beaucoup plus grande probabilité de trouver les tourbillons au centre du domaine. Pour $a=\pi^{-1}$, $w_1(r,a)$ forme une forte concentration de tourbillons sur la frontière du domaine, ce qui représente une forte probabilité de retrouver les tourbillons près de la frontière, plutôt que dans tout le domaine.

De même, les figures 5.2-5.4 donnent l'évolution de la fonction de probabilité $w_1(r,a)$ en fonction des paramètres r et a. Rapellons que a est un paramètre de magnitude, donc $0<a<+\infty$ et r est le rayon, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Nous avons choisi $y=0$ et $-1<x<1$ donc $0<r<1$. Ces figures montrent que pour un paramètre de magnitude assez petit $0<a<1$ (qui correspond à un β négatif), la probabilité de trouver les tourbillons près de la frontière, c'est-à-dire $\mid r \mid\sim 1$, est beaucoup plus importante que de trouver les tourbillons dans l'ensemble du domaine. Par contre pour $a>1$ (c'est-à-dire $\beta>0$), les tourbillons se concentrent au centre du domaine. Dans le domaine intermédiaire, c'està-dire dans le domaine proche de $a\sim 1$, les tourbillons se dispersent dans tout le domaine.

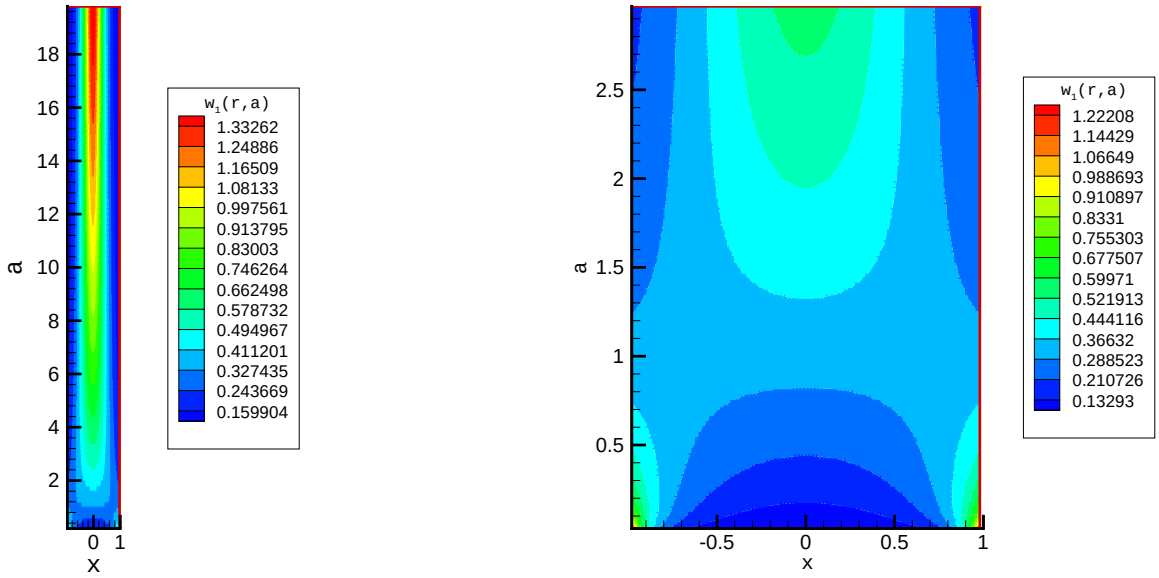


FIG. *5.2: Représentation 2D de* $w_1(r,a)$ *pour* $0 < r < 1$ $(-1 < x < 1)$ *et* $0 < a < 20$ *sur le graphe de gauche et* $0 < a < 3$ *sur le graphe de droite.*

5.5 Fonctions thermodynamiques

Les formules obtenues donnent le résultat de base du travail. Toutes les fonctions thermodynamiques peuvent maintenant être trouvées.

L'entropie totale est calculée à partir de

$$S(\beta) = NS_1(\beta) = N\beta^2\partial_\beta F_1 =$$
$$= N\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a}\left[\partial_a\frac{(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}}\right]^{-1}\partial_a\left[\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)}\ln\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\right]. \tag{5.78}$$

Ici, $[\partial_a((\sqrt{a}-1)/\sqrt{a})]^{-1} = 2a^{3/2}$.

L'énergie totale est donnée par

$$E(\beta) = NE_1(\beta) = N\partial_\beta(\beta F_1) =$$
$$= N\left[\partial_a\frac{8(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}}\right]^{-1}\partial_a\left[\ln\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\right], \tag{5.79}$$

et peut être réécrite comme

$$E(\beta) = \frac{N}{4}a^{3/2}\partial_a\left[\ln\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\right], \tag{5.80}$$

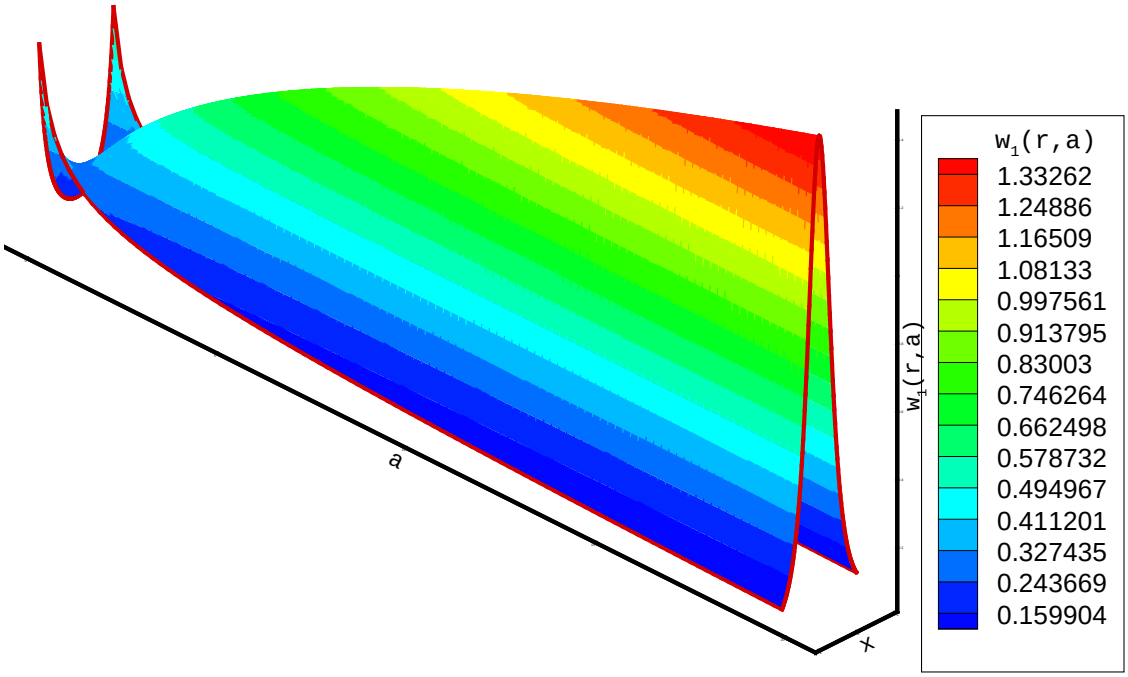


FIG. *5.3: Représentation 3D de* $w_1(r,a)$ *pour* $0 < r < 1$ $(-1 < x < 1)$ *et* $0 < a < 20$.

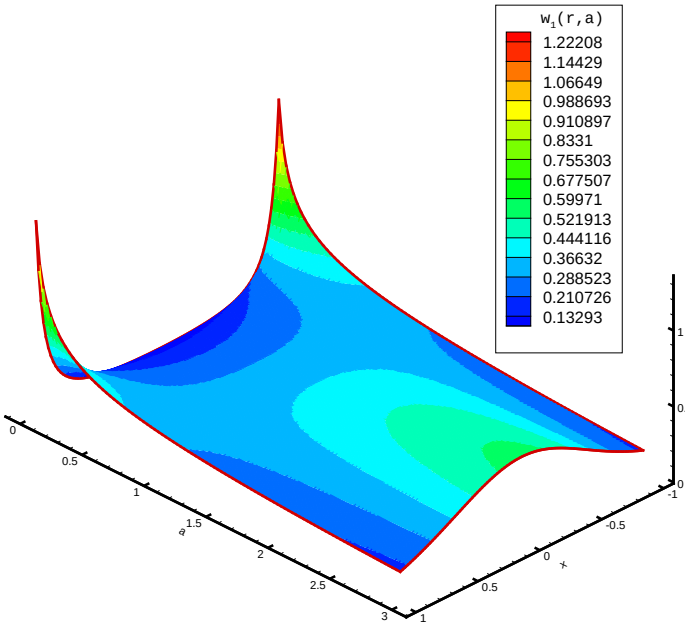


FIG. *5.4: Représentation 3D de* $w_1(r,a)$ *pour* $0 < r < 1$ $(-1 < x < 1)$ *et* $0 < a < 3$.

soit

$$E(\beta) = -\frac{1}{8} N \sqrt{a}. \tag{5.81}$$

La température, θ, est donnée par

$$\theta \equiv \beta^{-1} = \frac{\sqrt{a}}{8(\sqrt{a}-1)} \quad \rightarrow \quad \sqrt{a} = \frac{8\theta}{8\theta - 1} \equiv \frac{8}{8-\beta} > 0, \tag{5.82}$$

c'est-à-dire $\theta > 1/8$ ou $\theta < 0$.

L'énergie libre est donnée en fonction de la température θ, par

$$F(\theta) = NF_1 = N\theta \ln \left[\frac{8\theta - 1}{8\pi\theta} \right]. \tag{5.83}$$

L'énergie interne vaut

$$E(\theta) = N \frac{\theta}{1 - 8\theta}. \tag{5.84}$$

Les figures 5.5 et 5.6 représentent l'allure des courbes de

- $\sqrt{a} = 8\theta/(1-8\theta)$,
- $E(a)/N = -\sqrt{a}/8$,
- $E/N = e(\theta)$.

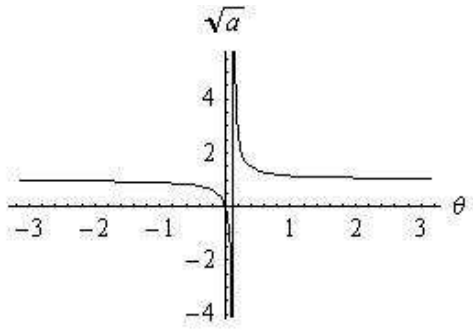
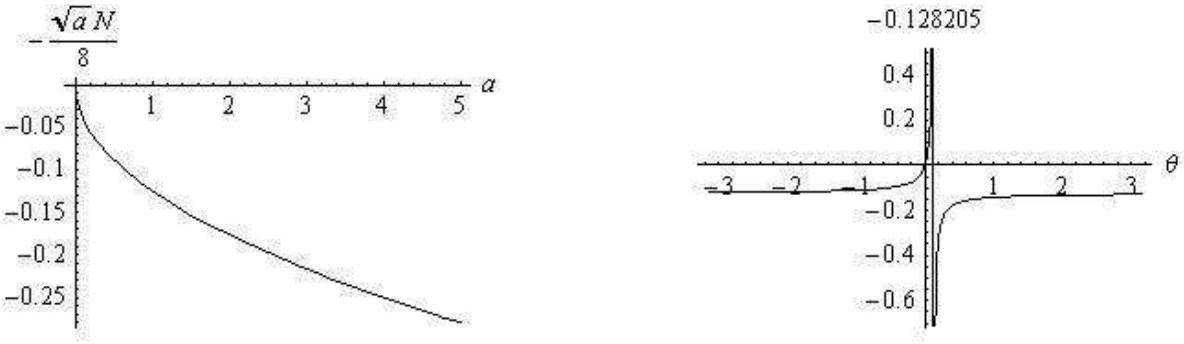


FIG. *5.5: Dépendance* $\sqrt{a} = 8\theta/(1 - 8\theta)$.



a) b)

FIG. *5.6: a) Dépendance* $E(a) = -\sqrt{a}N/8$. *b) Dépendance température-énergie* $E/N = e(\theta)$.

5.6 Bref commentaire sur le résultat

Nous avons montré que la répartition des tourbillons ponctuels dans un domaine borné est décrite par la distribution de probabilité similaire à celle de Gibbs [1]

$$w_c(X) = Z_c^{-1} \exp[-\beta H[X]]. \tag{5.86}$$

L'énergie totale de l'écoulement du fluide n'est évidemment pas strictement conservée dans ce cas : il existe une transmission d'énergie dans le thermostat (voir [5], p.4450). La "somme statistique" est donc donnée par l'intégrale

$$Z(\beta) = \int_D dX \exp(-\beta H[X]). \tag{5.87}$$

Le paramètre β peut être positif ou négatif. Le domaine des valeurs possibles de β est défini par convergence de l'intégrale (5.87) et la condition $w_c(X) \geq 0$. La "température" β^{-1} est reliée à l'énergie moyennée $\langle E \rangle$ par

$$\langle E \rangle = \int dX\, H[X]\, Z^{-1} \exp[-\beta H[X]]. \tag{5.88}$$

La valeur de l'énergie E est calculée à partir de la distribution initiale des tourbillons

$$E = \frac{1}{2N} \sum_{i,j}{}' \ln \frac{b_{ij} - \cos\theta_{ij}}{a_{ij} - \cos\theta_{ij}}, \tag{5.89}$$

où $a_{ij} = (r_i^2 + r_j^2)/2r_ir_j$ et $b_{ij} = (1 + r_i^2 r_j^2)/2r_ir_j$. Si $r_i = 1$ (ou $r_j = 1$), nous obtenons $a = b$ et $g|_{r_i=1} = 0$.

L'équation (5.37), $E = N\partial_\beta\Big(\beta F_1(\beta)\Big)$, fixe la valeur de β correspondant à la configuration initiale donnée. Si $\beta > 0$, le système évolue vers une configuration avec une tache centrale. Si $\beta \sim 0$, une tache quasi-uniforme est formée. Si $\beta < 0$, une distribution axialement symétrique de vorticité apparaît avec un maximum près du bord.

Les conclusions théoriques, indiquées sous forme de la distribution finale des tourbillons, vont être confirmées par les estimations numériques.

[1] La distribution (5.86) peut être obtenue à partir de la distribution micro–canonique

$$w_{mc}(X) = \Lambda_{mc}\, \delta(E - H_{th} - H[X, R]), \tag{5.85}$$

où une interaction avec le thermostat peut être prise en considération. Voir différents articles pour une telle démonstration (par exemple [10], [56]).

5.7 Estimations numériques

L'objectif de cette section est de considérer numériquement deux configurations initiales différentes (l'une avec $\beta > 0$ et l'autre avec $\beta < 0$) et d'analyser vers quelle tendance semblent évoluer les tourbillons, afin de confirmer les résultats analytiques.

Pour ce faire, nous considérons un ensemble de tourbillons qui se déplacent dans un domaine de forme circulaire. Cette frontière circulaire est représentative de la conduite des expériences [23].

Nous nous plaçons en fait dans le cas décrit dans la section 5.3. Le système décrivant le mouvement des centres des tourbillons est alors (5.47) donc, en coordonnées polaires,

$$\partial_t r_i = \frac{1}{r_i}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta_i}, \quad \partial_t \theta_i = -\frac{1}{r_i}\frac{\partial \overline{H}}{\partial r_i},$$

avec $\overline{H} = \sum_{i=1}^{N} \overline{U}_i$, et

$$\overline{U}_i = \frac{1}{4N}\sum_{j=1}^{N}\left[\ln\left({r_i}^2 + {r_j}^2 - 2r_i r_j cos\theta_{ij}\right) - \ln\left(1 + {r_i}^2{r_j}^2 - 2r_i r_j cos\theta_{ij}\right)\right] + \frac{1}{2N}\ln\left(1 - {r_i}^2\right).$$

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{aligned}
\partial_t r_i = \frac{1}{2N(r_i+\varepsilon)}\sum_{j=1}^{N}\Bigg(&\frac{-r_i r_j sin(\theta_i - \theta_j)}{{r_i}^2 + {r_j}^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon} + \\
&+\frac{r_i r_j sin(\theta_i - \theta_j)}{1 + {r_i}^2{r_j}^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon}\Bigg), \\
\partial_t \theta_i = -\frac{1}{2N(r_i+\varepsilon)}\Bigg[&\frac{-2r_i}{1 - {r_i}^2 + \varepsilon} + \sum_{j=1}^{N}\Bigg(\frac{-r_i + r_j cos(\theta_i - \theta_j)}{{r_i}^2 + {r_j}^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon} + \\
&+\frac{2r_i {r_j}^2}{1 + {r_i}^2{r_j}^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon}\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}$$

où ε est un petit paramètre que l'on doit ajuster pour éviter de tomber sur des singularités. Pour nos simulations, ce paramètre était de $\varepsilon = 10^{-5}$.

La valeur de l'énergie E est calculée à partir de la configuration initiale des tourbillons (5.89).

L'expression pour l'énergie est liée au parmètre θ par la formule 5.84, sachant que θ est donné par 5.82.

Le schéma numérique utilisé est un schéma de Runge–Kutta standard d'ordre 4 avec une amélioration du pas temps adaptatif. Les calculs ont été réalisés en double précision.

L'énergie totale et le moment angulaire sont contrôlés au cours des évolutions des configurations.

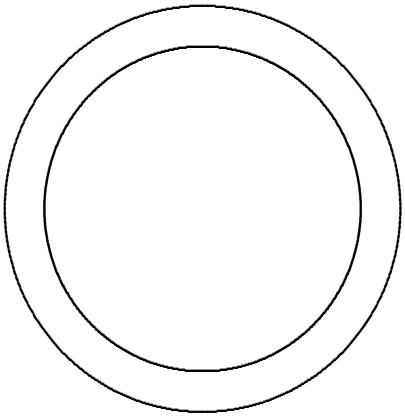


FIG. *5.7: Cercle unitaire et configuration initiale (t=0) du cercle 0,8.*

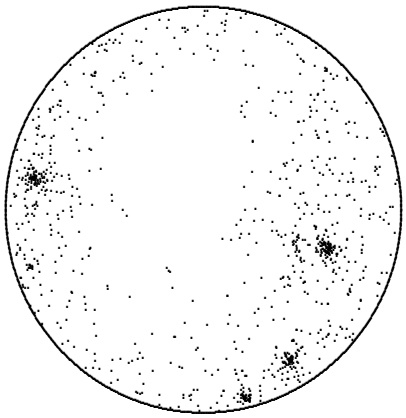


FIG. *5.8: Cercle unitaire et configuration à t=10,48.*

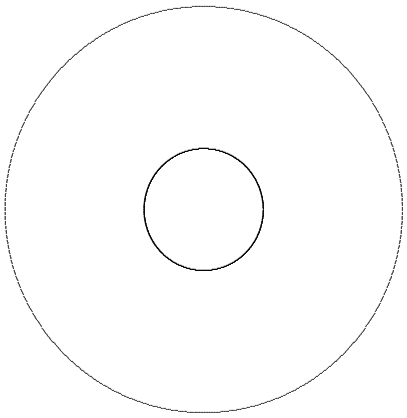


FIG. *5.9: Cercle unitaire et configuration initiale (t=0) du cercle 0,3.*

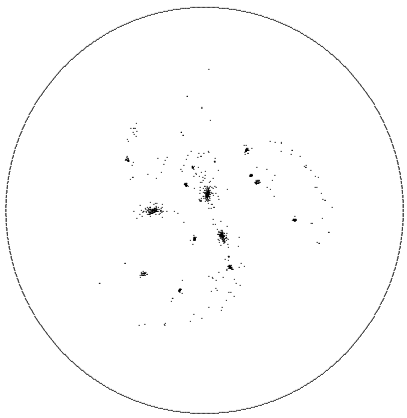


FIG. *5.10: Cercle unitaire et configuration à t=7,63.*

Nous étudions deux configurations composées de $N = 990$ tourbillons de même intensité.

Les figures 5.7 et 5.8 présentent l'évolution d'un cercle de N tourbillons dont le rapport de rayon est $\frac{r_1}{R} = 0.8$, où R est le rayon du cercle représentant la frontière et r_1 le rayon du cercle de configuration initial. La température est de $\theta = -0.794$ ($\theta < 0$). L'Hamiltonien initial est de $H_0 = 107.89$. Les figures 5.9 et 5.10 présentent l'évolution d'un cercle de N tourbillons dont le rapport de rayon est $\frac{r_1}{R} = 0.3$, où R est le rayon du cercle représentant la frontière et r_1 le rayon du cercle de configuration initial. La température est de $\theta = 0.158$ ($\theta > 0$). L'Hamiltonien initial est de $H_0 = 597.33$. L'erreur maximale sur l'Hamiltonien ($\Delta H/H_0$) pour les deux évolutions est de l'ordre de 10^{-3}.

Ces deux cas permettent de confirmer qualitativement les résultats analytiques en montrant qu'en choisissant une représentation initiale :

- avec une température négative, le système évolue vers une configuration contenant "plusieurs" taches à proximité de la frontière,

- avec une température positive, le système évolue vers une configuration avec une tache centrale.

Il est très difficile de reproduire une configuration avec $\theta \sim \infty$ ($\beta \sim 0$), c'est pourquoi nous n'avons pas considéré ce troisième cas de figure.

Dans ce chapitre, nous étions placés dans la mécanique statistique des tourbillons ponctuels. Nous avons vu comment utiliser des fonctions thermodynamiques pour suivre le comportement des tourbillons ponctuels et surtout, comment évolue une configuration dans un domaine borné, suivant sa température initiale.

Chapitre 6

Structures multi-pétales

Après avoir fait un bref rappel sur une série d'expériences de plasma [23], nous discuterons la possibilité de formation de structures régulières, basée sur l'équation de Vlasov. De nouvelles solutions exactes représentant une structure N-polygonale de tourbillons vont être construites (les solutions sont globalement lisses).

6.1 Rappel sur l'expérience de Fine et al. [23]

6.1.1 Généralités

La dynamique macroscopique dans un gaz d'électrons, piégé axialement par un champ électrostatique $\mathbf{E}_0$ de potentiel ϕ_0, $\mathbf{E}_0 = -\nabla\phi_0$, et radialement par un champ magnétique intense homogène, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, est analogue à la dynamique d'un fluide bidimensionnel non visqueux, aussi longtemps que le mouvement d'aller-retour des électrons individuels est plus rapide que le mouvement transversal de dérive des centres guidants $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ (voir [31], [38], [71]). Par cette analogie, les équations de mouvement du plasma d'électrons sont analogues aux équations d'Euler qui régissent les écoulements $2D$ incompressibles non visqueux. La vorticité q est reliée à la densité du fluide d'électrons n et l'induction magnétique B par $q \sim q_e n/B$.

Les résultats expérientaux de [20], [23] montrent que la relaxation de la "vorticité" vers une configuration attendue axi–symétrique peut *parfois* être stoppée, menant à une formation de domaines réguliers ayant une concentration plus élévée d'électrons, c'est-à-dire de "vorticité" (figure 6.1). Les causes de l'apparition des structures régulières ne sont toutefois actuellement pas claires bien que des efforts significatifs ont été faits en appliquant les idées de l'approche de la mécanique statistique (voir les mêmes travaux [20], [23] et les expériences numériques basées sur les équations du modèle de type Navier–Stokes). Pour des échelles spatiales fines

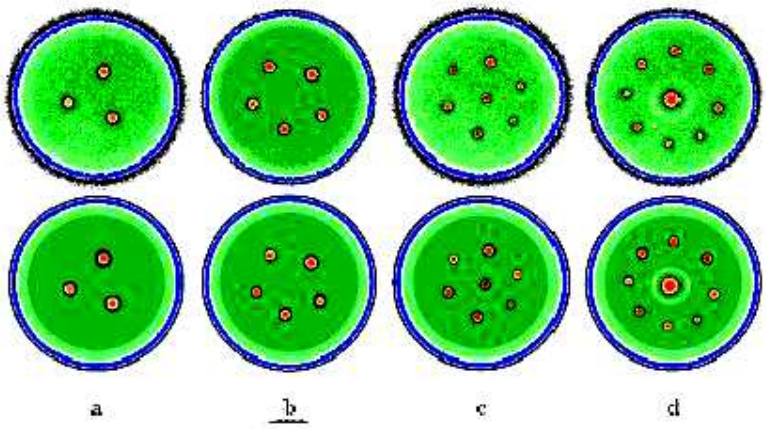


FIG. *6.1: Cristaux tourbillonnaires observés dans une colonne d'électrons magnetisée (Refs [20], [23]). Les Figures montrent des cristaux tourbillonnaires avec* 3 *à* 9 *tourbillons intenses immergés dans un fond de basse vorticité. Dans un équilibre de cristal tourbillonnaire, la distribution de vorticité entière est stationnaire dans le repère tournant.*

ou des temps longs, les effets diffusifs du plasma, non contenus dans les équations, deviennent significatifs ; cependant, ceci n'est pas le cas dans l'équation générale modélisée par Navier–Stokes [23], p.3278.

L'étude des structures d'équilibre, les cristaux tourbillonnaires, est un problème hydrodynamique de grand intérêt. Cependant, au delà de l'hydrodynamique, le fait que les taches tourbillonnaires émergent parfois en structures régulières dans les plasmas non–neutres, a ajouté davantage d'élan à l'étude de tels problèmes (voir [20], [22], [23]).

6.1.2 Résultats obtenus

Les expériences exposées dans une série de travaux [20], [23] et réalisées dans le gaz d'électrons fortement magnétisé donnent des observations très intéressantes sur l'évolution de la turbulence $2D$ *sans forçage et en quasi–absence de dissipation.* Par commodité, les résultats principaux de ces expériences sont résumés brièvement sous la forme de figures (figures 6.1–6.4), tirées des articles mentionnés.

Le système est fortement anisotrope ; on a constaté au chapitre 2, l'absence significative de dépendence sur z dans les champs (figure 2.1). La configuration finale est très sensible aux petites variations des conditions initiales (figures 6.2 et 6.3). Rappelons que les principaux moments sont conservés (figure 2.2). Cette conservation montre nettement que l'impact

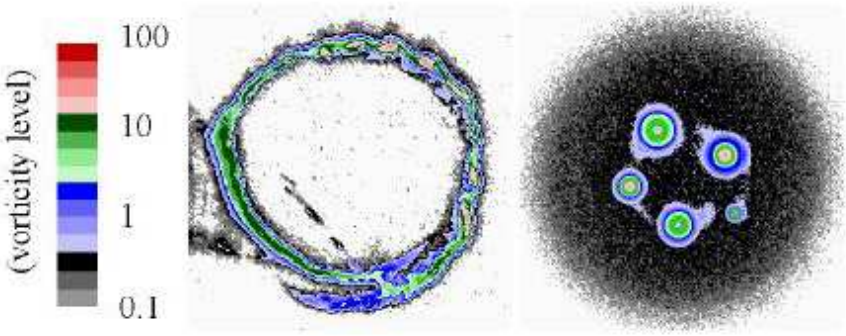


FIG. *6.2: Exemple d'un cristal tourbillonnaire formé à partir d'un anneau. (a) Condition initiale de l'expérience. (b) Etat de cristal tourbillonnaire observé.*

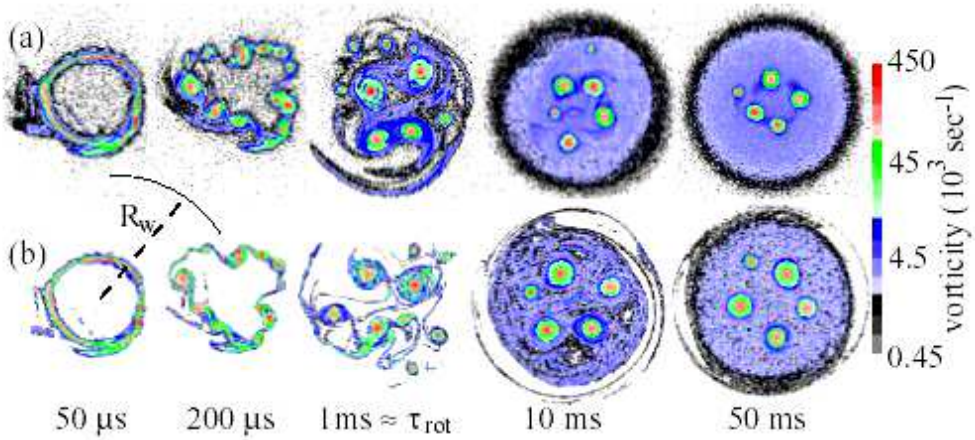


FIG. *6.3: Formation d'un cristal tourbillonnaire [20] à partir d'une distribution de vorticité angulaire : (a) expérience, (b) simulation. La vorticité expérimentale est obtenue à partir de la relation* $\Omega = 4\pi|q|cn/B$. *L'évolution est donnée dans un repère de référence qui tourne avec la fréquence* $5,872 \cdot 10^3\, rad/s$.

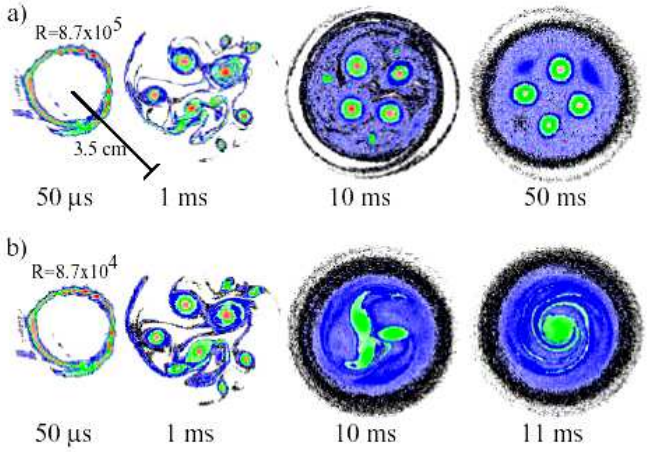


FIG. *6.4: Effets de la viscosité dans les équations de Navier–Stokes. a) Evolution d'un anneau instable vers un cristal tourbillonnaire de viscosité* $\nu = 0,127\,cm^2/s$*, ajoutée pour la simulation. b) Quand* $\nu = 1,27\,cm^2/s$*, la viscosité est suffisamment élevée pour prévenir la formation de cristaux tourbillonnaires. L'évolution est donnée dans un repère tournant avec une fréquence de* $\omega = 5,87 \cdot 10^3\,rad/s$*. Les nombres de Reynolds sont a)* $Re = 8,7 \cdot 10^5$ *et b)* $Re = 8,7 \cdot 10^4$.

d'une dissipation peut être négligée sur l'intervalle de temps de l'expérience. Le système quasi-parfait, n'a donc pas le temps "d'oublier", sur cet intervalle, ses conditions initiales : le temps de relaxation dans ce système particulier est trop grand. Les structures obtenues, finalement, (figure 6.1) sont trop régulières pour être expliquées par des mécanismes statistiques voir probabilistes. Les tentatives de reproduire les structures régulières numériquement ont montré qu'il suffit d'ajouter une petite dissipation artificielle dans les calculs numériques pour observer la disparition des structures régulières (voir figure 6.4 prise de [20]).

6.2 Théorie basée sur l'équation de Vlasov

Lorsque le nombre de particules est grand, $N \sim nR^2L \gg 1$, mais pas trop, le libre parcours est extrêmement grand ; il est donc préférable d'utiliser une description cinétique. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.3 du chapitre 2, la distribution d'électrons est régie par l'équation 2.13, où le champ couplé Φ est donné par 2.14.

Il suffit d'ajouter $\int dv_\parallel\, v_\parallel\, f(v_\parallel^2, ...) = 0$, dans les limites symétriques sur la vitesse longi-

tudinale, aux deux équations qui précèdent, pour obtenir :

$$\partial_t n + (\mathbf{V}_D \cdot \nabla_\perp) n = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_t n + \epsilon_{ij} \partial_i \psi \partial_j n = 0, \tag{6.1}$$

où $\psi = -cB^{-1}\phi$ et $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij3}$ le tenseur de Levi-Civita. Il y a donc conservation des moments (Casimirs)

$$\begin{aligned} \partial_t n^m + \epsilon_{ij} \partial_i \psi \partial_j n^m &= 0 \\ \rightarrow \quad \partial_t n^m + \partial_i (\epsilon_{ij} \psi \partial_j n^m) &= 0 \\ \rightarrow \quad K_m = \int d\mathbf{x}_\perp dz \, n^m(\mathbf{x}_\perp, t). & \end{aligned} \tag{6.2}$$

Les valeurs numériques de ces intégrales sont fixées par les répartitions initiales de $n^m(\mathbf{x}_\perp, 0)$.

De même, il y a conservation de l'énergie définie par l'expression

$$E = \frac{1}{2} q' \int d\mathbf{x} dz \, n \, \phi \quad \leftarrow \quad \partial_t (n \, \phi) + \phi \epsilon_{ij} \partial_i \psi \partial_j n = 0, \tag{6.3}$$

car $\epsilon_{ij} \partial_i \psi \partial_j \phi = 0$ et $\partial_t \phi = 0$.

Le champ $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, où le potentiel est défini à une fonction arbitraire du temps près $\phi \rightarrow \phi + C(t)$, contient le champ externe donné ϕ_0, $\Delta \phi_0 = 0$, et le champ auto–accordé d'électrons, Φ. Il est défini par le champ propre des électrons en mouvement dont la répartition est donnée par l'équation (2.14) (voir [38] § 27). Nous supposons que le rôle du champ ϕ_0 consiste à assurer l'existence des "bouchons" aux extrémités du dispositif, aux points $z \simeq \pm l_\parallel / 2$; on peut alors poser $\phi_0 \simeq 0$ dans le reste du domaine.

L'état stationnaire est caractérisé par la condition $\partial_t f = 0$. Dans ce cas, l'équation (2.13) est satisfaite par l'expression

$$f = f_s \left(\frac{v_\parallel^2}{2} + q' \phi(\mathbf{x}_\perp, z) \right), \tag{6.4}$$

où $f_s(u)$, en absence de mécanismes concrets de dissipation ou de l'intégrale de collisions dans la partie droite de l'équation de Vlasov (qui met en relief la forme individuelle de $f_s(u)$), est une fonction *arbitraire* de son argument, qui est compatible avec les conditions initiales. En effet, en posant cette expression dans l'équation (2.13), on trouve que les deux derniers termes se simplifient automatiquement, tandis que le terme $f_s'(u) \mathbf{V}_D \cdot \nabla_\perp \phi \times \mathbf{b} \equiv 0$.

L'état perturbé peut être résolu en prenant la forme $f = f_s + f_1(\mathbf{x}_\perp, z, t)$ et en linéarisant les équations de base. Selon Landau, il peut exister une petite dissipation, γ_L, dite dissipation de Landau. Mais, elle peut être négligée dans l'analyse, lorsque $t \ll \gamma_L$.

6.2.1 Equation non linéaire pour le potentiel

En examinant les résultats de l'expérience présentée en partie 6.1, on peut se demander si le système se trouvait au voisinage de l'état d'équilibre statistique. En effet, on peut penser que le système reste proche de son état initial et se trouve donc loin de l'état d'équilibre statistique (thermodynamique). Il est donc hors équilibre.

Les champs hydrodynamiques sont caractérisés non seulement par les amplitudes de champs, mais aussi par leurs phases. Les combinaisons de leurs phases sont responsables d'une formation, au hasard, de structures régulières, quasi–régulières parce que les conditions initiales ne sont pas oubliées (elles peuvent ne pas être détruites durant le temps de l'expérience).

De ce fait, les tentatives, pour expliquer le phénomène observé, basées sur le concept de la mécanique statistique sont physiquement mal fondées. En effet, le postulat principal de la mécanique statistique est que le système doit oublier les conditions initiales, les phases de champ doivent être mélangées, l'observation doit s'effectuer à un temps dépassant largement le temps de relaxation du système. Toutes ces exigences ne sont certainement pas respectées dans les expériences en question et l'explication des cristaux tourbillonnaires doit donc se baser sur d'autres principes que l'approche statistique.

Si le système était régi par les lois de la mécanique statistique et se trouvait dans l'état d'équilibre thermique avec la température $T = \beta^{-1}$, il serait caractérisé par la répartition classique de Maxwell des vitesses : $\int dz\, f(v_\parallel, z) \sim \exp\left(-\beta v_\parallel^2\right)$. Ce n'est pas le cas.

En effet, le système en question est composé d'un nombre très grand (mais fini) de particules, $1 \ll N < \infty$. Il ne peut donc pas être considéré comme purement thermodynamique car, pour un système thermodynamique, il faut que $N \to \infty$, $V \to \infty$, mais avec $n = N/V$ borné quand même. Dans notre cas, les particules se trouvent dans un volume fini, $|\mathbf{x}_\perp| \leq l_\perp$, $|z| \leq l_\parallel/2$, et ont des vitesses maximales limitées à tout instant, $|v_\parallel| \leq v_{max} < \infty$. Le volume de phase du système en question est donc borné.

De plus, supposons que la répartition des vitesses dans notre système, à l'instant initial, est caractérisée par la figure 6.5 b : la valeur moyenne de la vitesse des particules est localisée au voisinage de v_m.

Supposons que la fonction $f_s(u)$ *puisse être paramétrée par un seul paramètre* reflétant le fait que $f(v_\parallel, ...)$ possède un maximum net au voisinage de $v \sim v_{max}$, $f_s|_{v=v_{max}} > f_s|_{v=0}$, et une quasi–absence de particules avec des vitesses dépassant $|v_{max}|$. Une répartition caracté-

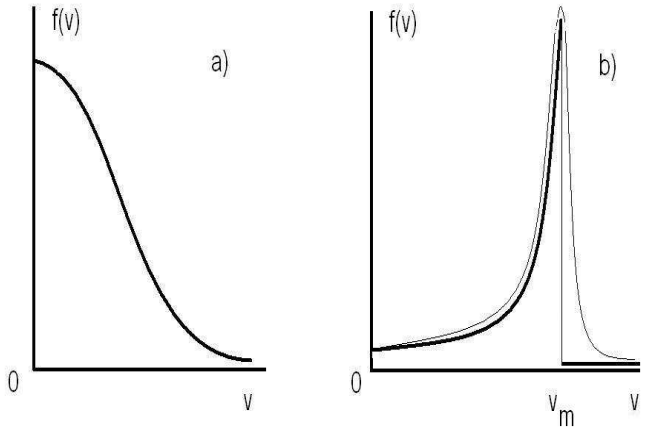


FIG. *6.5: Fonction de distribution des vitesses.*

risée par une telle particularité est qualitativement présentée, par exemple, par l'expression

$$f_s\left(\frac{v_\parallel^2}{2} + q'\phi(\mathbf{x}, z, t)\right) = C\,\frac{N}{l_\parallel l_\perp^2}\theta(v_{max} - v_\parallel)\,\theta(v_{max} + v_\parallel)\,\theta(\frac{l_\parallel}{2} - z)$$
$$\times\theta(\frac{l_\parallel}{2} + z)\,\exp\left[-\beta(\frac{v_\parallel^2}{2} + q'\Phi)\right]. \tag{6.5}$$

Le paramètre $l_\parallel$ est défini par la condition de normalisation suivante :

$$\int d\mathbf{x}_\perp\, dz\, dv_\parallel\, f_s = N. \tag{6.6}$$

La répartition des vitesses ressemble à la répartition classique avec la "température" β^{-1}. En prolongeant cette analogie, on peut (très conditionnellement) dire que c'est une définition de la "somme statistique". Pour une répartition initiale quelconque et $l_\parallel$ donné, cette formule définit une valeur de β, qui peut être positive comme négative. Une localisation spatiale suivant l'axe z est assurée par convergence de l'intégrale

$$0 < l_\parallel \equiv l_\parallel[\phi] = \int_{-\frac{l_\parallel}{2}}^{+\frac{l_\parallel}{2}} dz\, e^{-\beta q'\Phi(\mathbf{x},z)} < +\infty. \tag{6.7}$$

L'équation pour le potentiel prend alors la forme

$$\Delta_\perp\,\Phi + \partial_z^2\Phi = -4\pi q' m\frac{N}{l_\parallel l_\perp^2}\,e^{-\beta q'\Phi}. \tag{6.8}$$

Adimensionnons l'équation (6.8) en introduisant les échelles caractéristiques spatiales (longitudinale $l_\parallel$ et transversale $l_\perp$) de la localisation du champ : $z \to l_\parallel z$, $\mathbf{x} \to l_\perp \mathbf{x}$, $\Phi \to \Phi_0 \Phi$, $\Phi_0 = (\beta q')^{-1}$. On obtient

$$\Delta_\perp \Phi + (\frac{l_\perp}{l_\parallel})^2 \partial_z^2 \Phi = -\frac{4\pi q N}{l_\parallel \Phi_0} e^{-\beta q' \Phi_0 \Phi} \equiv -c_1 e^{-\Phi}, \tag{6.9}$$

où $c_1 = (4\pi\beta q^2 N/m l_\parallel) = (4\pi q^2 N/m l_\parallel l_\perp^2)\beta l_\perp^2 \sim \omega_p^2 \beta l_\perp^2$ où $\omega_p^2 = 4\pi q^2 N/m l_\parallel l_\perp^2$. Si $l_\parallel$ est suffisamment grand, $l_\parallel \gg l_\perp$, on peut négliger les dérivées par rapport à z et poser que $\Phi'(\mathbf{x}, z, t) \simeq \Phi'(\mathbf{x}, t)$. L'équation devient alors :

$$\Delta_\perp \Phi + c_1 e^{-\Phi} = 0. \tag{6.10}$$

La concentration est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} n &\equiv \frac{1}{4\pi q} \frac{1}{\beta q'} \frac{1}{l_\perp^2} c_1 \, e^{-\Phi} = \frac{1}{l_\parallel \, l_\perp^2} N \, e^{-\Phi} \\ &= -\frac{m}{\pi q^2 \beta} \frac{1}{l_\perp^2} [-\frac{c_1}{4} \, e^{-\Phi}] \equiv -\frac{m}{\pi q^2 \beta} \frac{1}{l_\perp^2} [-c_2 \, e^{-\Phi}]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.2.2 Solution générale

Introduisons les variables complexes $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$. Dans ce cas, le Laplacien prend la forme $\widehat{\Delta} = 4\widehat{\partial}_z \widehat{\partial}_{\overline{z}}$ et l'équation (6.10) devient

$$\widehat{\partial}_z \widehat{\partial}_{\overline{z}} \Phi = -c_2 e^{-\Phi}, \tag{6.12}$$

où $c_2 = c_1/4 = \omega_p^2 \beta l_\perp^2/4$.

On peut montrer, par substitution directe, que la solution de l'équation (6.12) est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= -\ln \left(\frac{f'(z) \, \overline{f}'(\overline{z})}{-c_2 (1 + f(z) \overline{f}(\overline{z}))^2} \right) \\ &= -\ln \left(\frac{f'(z) \, \overline{f}'(\overline{z})}{(1 + f(z) \overline{f}(\overline{z}))} \right) - \ln \left(\frac{1}{-c_2} \right), \end{aligned} \tag{6.13}$$

où $f(z)$ est une fonction analytique arbitraire. En effet,

$$\partial_{\overline{z}} \Phi = -\partial_{\overline{z}} \ln \overline{f}' + \partial_{\overline{z}} \ln(1 + f\overline{f}) = -\frac{\overline{f}''}{\overline{f}'} + \frac{f\overline{f}'}{1 + f\overline{f}}. \tag{6.14}$$

Il en résulte que

$$\partial_z \partial_{\overline{z}} \Phi(x, y) = \partial_z \frac{f\overline{f}'}{1 + f\overline{f}} = \frac{f'\overline{f}'}{(1 + f\overline{f})^2}. \tag{6.15}$$

En portant l'équation (6.15) au second membre de l'équation (6.12), on obtient

$$-c_2 e^{-\Phi} = \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2}, \tag{6.16}$$

ce qui donne le résultat recherché.

Il y a alors plusieurs possibilités :

a) lorsque $c_2 > 0$, c'est-à-dire $\beta > 0$, le potentiel est complexe : $\Im\,\Phi = \pi$. Une solution réelle pour Φ n'existe pas. Cela signifie que l'hypothèse initiale (6.5) est fausse.

b) lorsque $c_2 = 0$, c'est-à-dire $\beta = 0$, une solution réelle, bornée à l'infini, existe : $\Phi = C^{te}(= 0)$.

c) enfin, dans le cas $c_2 < 0$, c'est-à-dire $\beta < 0$, le potentiel, borné et localisé, est réel.

La concentration *des points dans le plan* $x0y$ est alors donnée par la formule

$$\begin{aligned} n_\perp \equiv n l_\parallel &= -\frac{m}{\pi q^2 \beta}\frac{1}{l_\perp^2} l_\parallel \left[-c_2\, e^{-\Phi}\right] \\ &= -\frac{m}{\pi q^2 \beta}\frac{1}{l_\perp^2} l_\parallel \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2} \\ &= n_0 l_\parallel \left[-\frac{1}{\omega_p^2 l_\perp^2 \beta}\right] \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Cette expression permet de définir le paramètre $l_\perp$ par l'expression $\omega_p^2 l_\perp^2 |\beta| = 1$. La fonction $f(z)$ sera alors normalisée par

$$\int dxdy\, \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2} = \pi. \tag{6.18}$$

Nous allons montrer que l'intégrale

$$\int dxdy\, \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2} \equiv \int d\mathbf{x}\, \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2} \tag{6.19}$$

est π- indépendante du choix de la fonction $f(z)$. Ici, $z = x+iy$, $\overline{z} = x-iy$. En fait, l'intégrale s'écrit

$$\frac{i}{2}\int dz \wedge d\overline{z}\, \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2}, \tag{6.20}$$

où nous utilisons le produit vectoriel défini par $dz \wedge d\overline{z} = -2i\, dx\, dy = -2i d\mathbf{x}$. Nous changeons la variable d'intégration : $z \to f$. Ici, $df = dz\, f'$. Le domaine d'intégration devient donc le plan complexe f entier. Nous voyons que l'intégrale peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\int dz \wedge d\overline{z}\, \frac{f'\overline{f}'}{(1+f\overline{f})^2} &= \frac{i}{2}\int df \wedge d\overline{f}\, \frac{1}{(1+f\overline{f})^2} = -\frac{i}{2}\int df \wedge d\overline{f}\, \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial \overline{f}}\frac{1}{1+f\overline{f}} \\ &= -\frac{i}{2}\int df \wedge d\overline{f}\, \frac{\partial}{\partial \overline{f}}\left[\frac{1}{f}\frac{1}{1+f\overline{f}}\right] + \frac{i}{2}\int df \wedge d\overline{f}\, \left[\frac{\partial}{\partial \overline{f}}\frac{1}{f}\right]\frac{1}{1+f\overline{f}} = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{6.21}$$

La première intégrale, I_1, est transformée en utilisant la forme complexe du théorème de Green dans l'intégrale de contour

$$\int_D dz \wedge d\overline{z}\, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Psi(z, \overline{z}) = -\int_{\partial D} dz\, \Psi(z, \overline{z}). \tag{6.22}$$

Ici, $\Psi(z, \overline{z})$ représente une certaine fonction du domaine D, ∂D est la frontière de ce domaine et la variable imaginaire $z \equiv f$. Le domaine d'intégration étant le plan complexe f entier, nous pouvons prendre, comme contour, un cercle de rayon $R \to \infty$, et nous voyons que cette première intégrale est nulle : $I_1 = 0$. Sachant que, pour z complexe, la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = \pi \delta^{(2)}(\mathbf{x}) \tag{6.23}$$

est la fonction de Dirac bidimensionnelle standard [voir, par exemple, E. Madelung, *Die Mathematischen Hilfsmittel Des Physikers*, Springer-Verlag, Berlin, 1957], nous obtenons le résultat requis : $I_2 = \pi$. En fait, à l'aide de l'équation (6.22), si D est le cercle de rayon $R \to \infty$, on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_D dz \wedge d\overline{z}\, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = -\lim_{R\to\infty} \int_{\partial D} dz\, \frac{1}{z} = -2i\pi, \tag{6.24}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{R\to\infty} \int_D (-2i d\mathbf{x})\, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = -2i\pi. \tag{6.25}$$

On peut faire quelques remarques (voir [17], [45], [75]) concernant le choix de la fonction $f(z)$. Il est naturel de supposer que cette fonction soit analytique dans le domaine physique z. Si la dérivée de $f(z)$ s'annule en un point du domaine physique de z, par exemple en $z = z_k$, c'est-à-dire $f(z)|_{z\to z_k} \sim (z - z_k)^s$, la répartition de n s'annule en ce point strictement et une répartition singulière pour Φ aura lieu (en ce point) : $\Phi \sim 2(s-1)\ln|z - z_k|$. Cette observation découle de la forme de l'équation (6.13) car $\Phi \sim \ln[f'(z)\overline{f}'(\overline{z})] + \ldots$. D'autre part, la fonction $f(z)$ peut avoir des pôles simples en quelques points du domaine physique quand $f(z)|_{z\to z_j} \sim (z - z_j)^{-1}$, car les pôles de second ordre dans les numérateurs et dénominateurs de l'expression (6.13) se compensent mutuellement, menant à une solution non singulière en ces points.

6.2.3 Distribution polynomiale

Soit le polynome $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$.

Lorsque la concentration $n(\mathbf{x}_\perp, a_1, \ldots, a_m)$ dépend de m constantes via $f(z)$, alors ces constantes sont fixées par les Casimirs (6.2).

Lorsque $z \to 0$, on obtient

$$n_\perp \sim \left.\frac{f'(z)\,\overline{f}'(\overline{z})}{(1+f(z)\overline{f}(\overline{z}))^2}\right|_{z\to 0} \sim \frac{|a_1|^2}{(1+|a_0|^2)^2} = C^{te}. \tag{6.26}$$

Il n'y a donc pas de concentration à l'origine du système de coordonnées lorsque $a_1 = 0$.

Si $z \to \infty$, on obtient

$$n_\perp \sim \left.\frac{f'(z)\overline{f}'(\overline{z})}{(1+f(z)\overline{f}(\overline{z}))^2}\right|_{z\to\infty} \sim \frac{m^2}{|z|^{2(m+1)}} \to 0, \tag{6.27}$$

qui correspond à une répartition axi–symétrique et décroissante rapidement aux grandes distances.

L'équation $f'(z) = a_1 + ... + ma_m z^{m-1} = 0$ a $m-1$ racines, z_k. Il y a donc, en principe, $i \leq m-1$ points dans le plan z, où la concentration n devient nulle.

6.2.4 Cas particuliers

Afin de modéliser une distribution de $(m-1)$ boucles, prenons le cas le plus simple avec la fonction $f(z) = a_1 z + a_m z^m$. Ici, $a_1,\ a_m$ sont des constantes complexes. On voit que, pour une telle répartition, la concentration de n, au point $z = 0$, n'est pas nulle : $n(0) = |a_1|^2$. La fonction a un pôle d'ordre m à l'infini, mais cette singularité est hors du domaine physique qui nous intéresse. On trouve que

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)\,\overline{f}'(\overline{z})}{[1+f(z)\overline{f}(\overline{z})]^2} &= \frac{(a_1+ma_m z^{m-1})(\overline{a}_1+m\overline{a}_m\overline{z}^{m-1})}{[1+(a_1 z+a_m z^m)(\overline{a}_1\overline{z}+\overline{a}_m\overline{z}^m)]^2}\\ &\to \frac{m}{2|a_1||a_m|r^{m+3}}\,\frac{A_m(r)+\cos(m-1)\theta}{[B_m(r)+\cos(m-1)\theta]^2},\end{aligned} \tag{6.28}$$

où

$$A_m(r) = \frac{|a_1|^2 r^{-(m-1)} + m^2|a_m|^2 r^{(m-1)}}{2m|a_1||a_m|}, \quad B_m(r) = \frac{(1+|a_1|^2r^2)r^{-(m+1)} + |a_m|^2 r^{m-1}}{2|a_1||a_m|}. \tag{6.29}$$

Il faut que les coefficients satisfassent la condition $B_m(r) > 1$. Dans ce cas, il n'y a pas de singularités dans la distribution de $n(r)$. C'est bien le cas car $|a_1|^2x^{-1} + |a_m|^2 x \geq 2|a_1||a_m|$.

Les paramètres a_1, a_m, m et β sont fixés par les invariants globaux $E,\ P,\ N,\ K_2$ ($\equiv$ enstrophie). S'il y a d'autres coefficients, on tient compte d'autres moments (d'ordre supérieur).

Considérons maintenant la fonction $f(z) = a_1(z + z^m)$. [En fait, toute fonction de $f(z) = a_1 z + a_m z^m$ peut être transformée ainsi par la transformation $z \to \mu z$ avec $\mu^{m-1} = a_1/a_m$.]

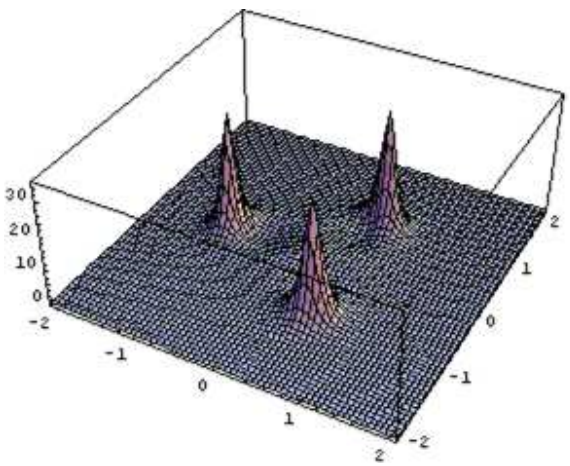


FIG. *6.6: Structure* 3*-pétales pour* $r = \pi^{-1}$.

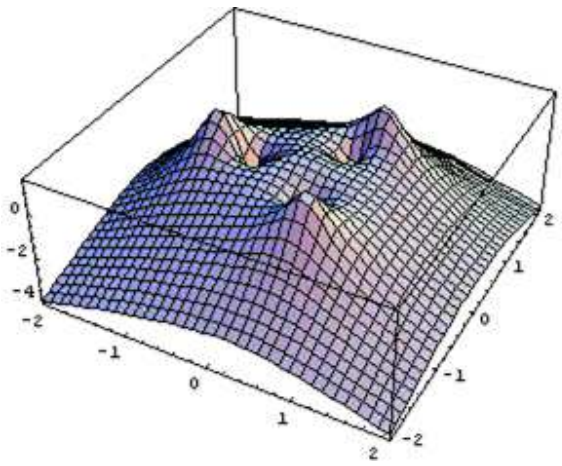


FIG. *6.7: La même structure* 3*-pétales présentée en échelle logarithmique.*

Nous avons donc $f'(z) = a_1(1 + mz^{m-1})$. D'où, nous montrons que

$$n_\perp = \frac{f'(z)\,\overline{f}'(\overline{z})}{[1 + f(z)\overline{f}(\overline{z})]^2} = \frac{|a_1|^2(1 + mz^{m-1})(1 + m\overline{z}^{m-1})}{|a_1|^4[|a_1|^{-2} + (z + z^m)(\overline{z} + \overline{z}^m)]^2}$$
$$= \frac{{a_1}^2(1 + mz^{m-1})(1 + m\overline{z}^{m-1})}{[{a_1}^2 + z\overline{z}(1 + z^{m-1})(1 + \overline{z}^{m-1})]^2}, \tag{6.30}$$

où $r = |a_1|^{-2}$ est un réél.

Si $m = 4$, les calculs conduisent à

$$n_\perp = \frac{r(1 + 8x^3 + 16x^6 - 24xy^2 + 48x^4y^2 + 48x^2y^4 + 16y^6)}{(r + x^2 + 2x^5 + x^8 + y^2 - 4x^3y^2 + 4x^6y^2 - 6xy^4 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8)^2}. \tag{6.31}$$

Si $m = 5$, les calculs donnent

$$n_\perp = \frac{r(1 + 10x^4 + 25x^8 - 60x^2y^2 + 100x^6y^2 + 10y^4 + 150x^4y^4 + 100x^2y^6 + 25y^8)}{(r + x^2 + 2x^6 + x^{10} + y^2 - 10x^4y^2 + 5x^8y^2 - 10x^2y^4 + 10x^6y^4 + 2y^6 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10})^2}.$$

Les figures 6.6-6.11 illustrent ces résultats avec :

- $f(z) = \frac{1}{\pi}(z + z^4)$

-$f(z) = f(z) = \frac{1}{\pi}(z + z^5)$

-$f(z) = f(z) = \frac{1}{\pi^8}(z + z^5)$.

Les figures 6.12-6.18 présentent quelques répartitions de la concentration $n_\perp$ en fonction de différentes formes de $f(z)$, qui respectent la condition de normalisation (6.18), mais n'ayant plus forcément la forme $f(z) = a_1(z + z^m)$:

- $f(z) = \frac{1}{\pi}(z + z^4)$

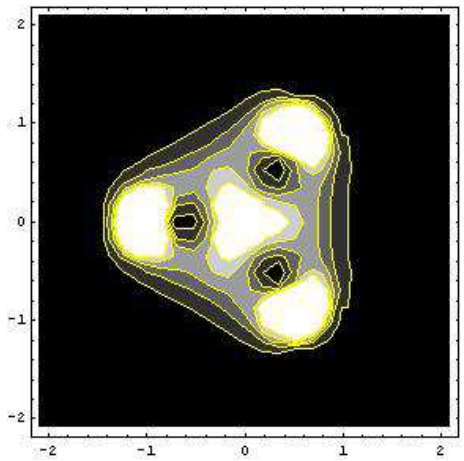


FIG. *6.8: Vue 2D de la structure 3-pétales pour* $r = \pi^{-1}$.

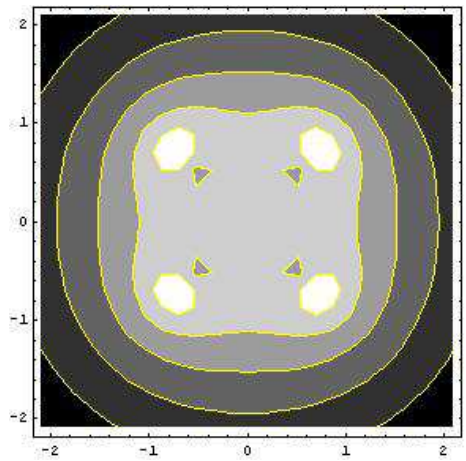


FIG. *6.9: Vue 2D de la structure 4-pétales pour* $r = \pi^{-1}$.

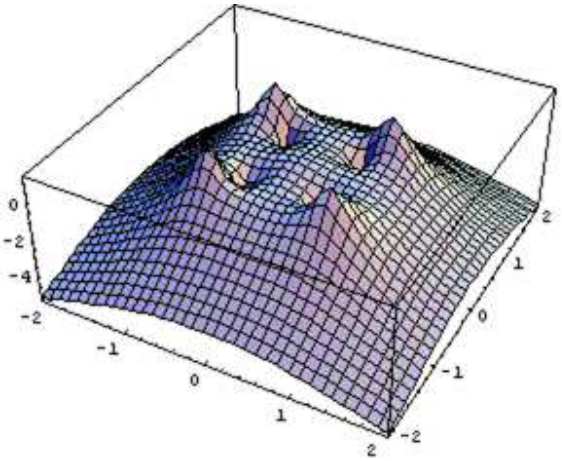


FIG. *6.10: Structure 4-pétales (échelle logarithmique) pour* $r = \pi^{-1} \simeq 0,3$.

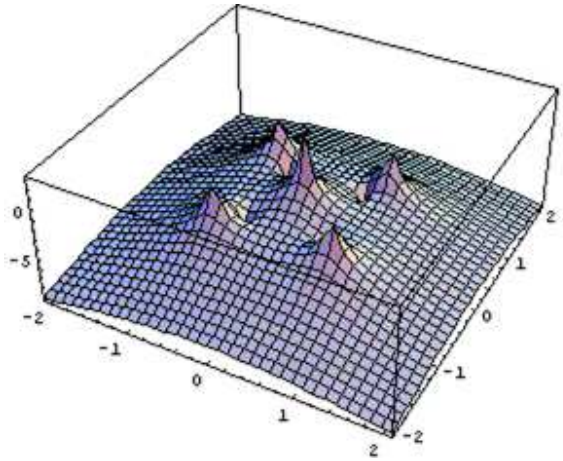


FIG. *6.11: Structure 4-pétales (échelle logarithmique) pour* $r = \pi^{-8} \ll 1$.

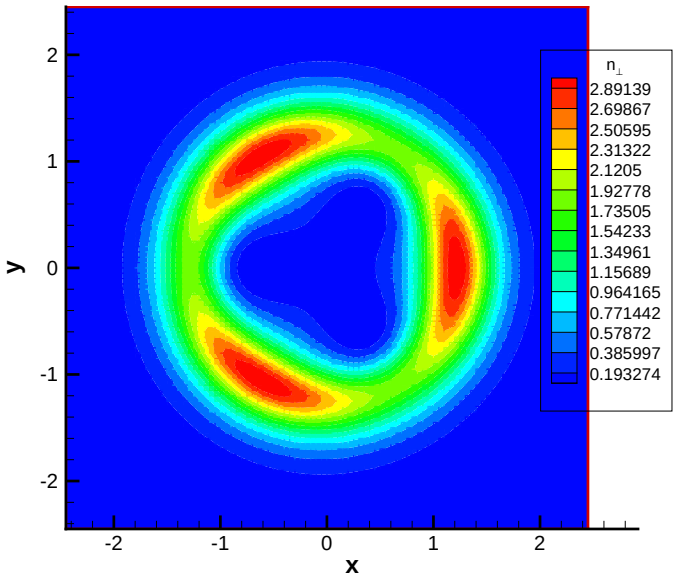


FIG. *6.12: Représentation 2D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1}{\pi}(z+z^4)$.

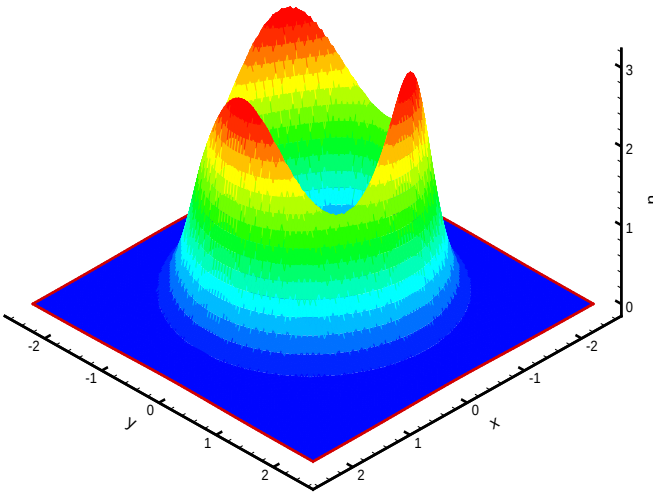


FIG. *6.13: Représentation 3D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1}{\pi}(z+z^4)$.

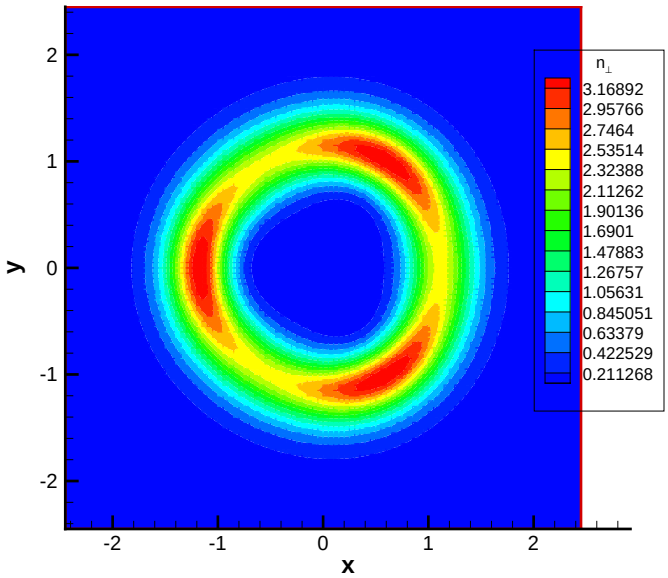


FIG. *6.14: Représentation 2D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1+i}{4\pi}(z+4z^4)$.

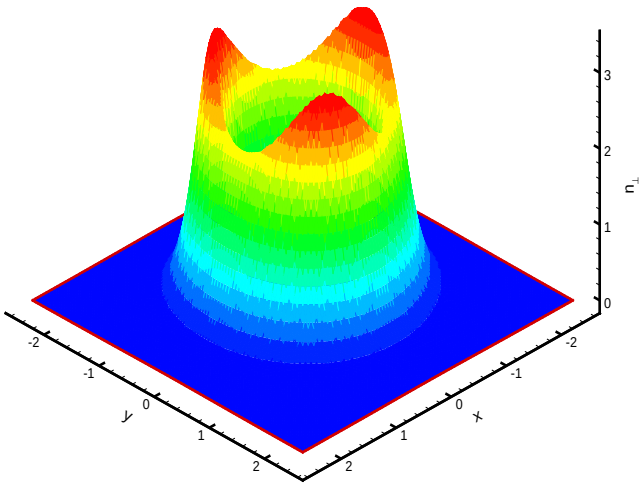


FIG. *6.15: Représentation 3D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1+i}{4\pi}(z+4z^4)$.

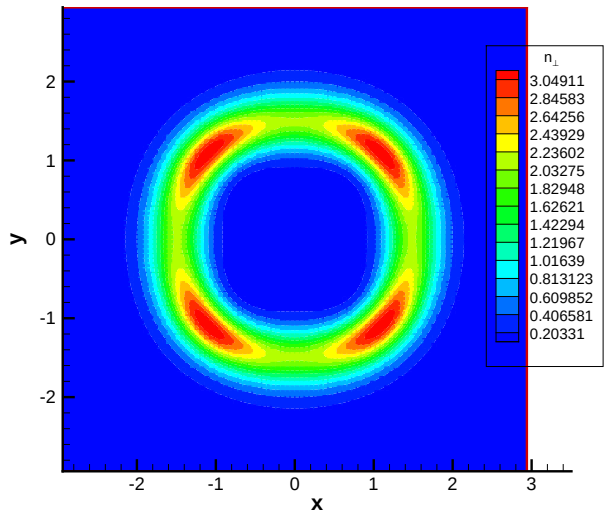


FIG. *6.16: Représentation 2D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1}{\pi^2}(z+z^5)$.

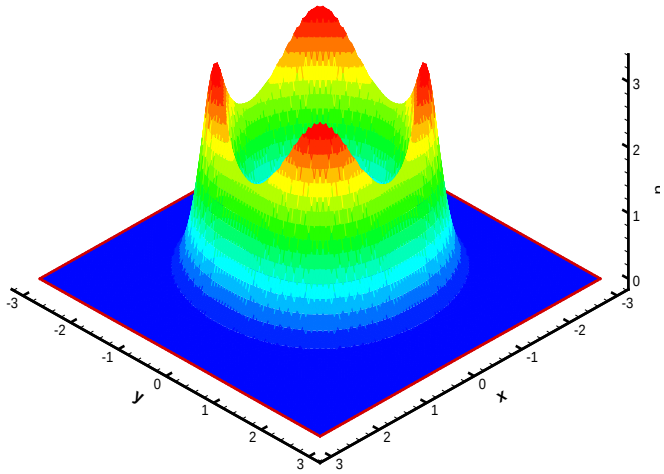


FIG. *6.17: Représentation 3D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1}{\pi^2}(z+z^5)$.

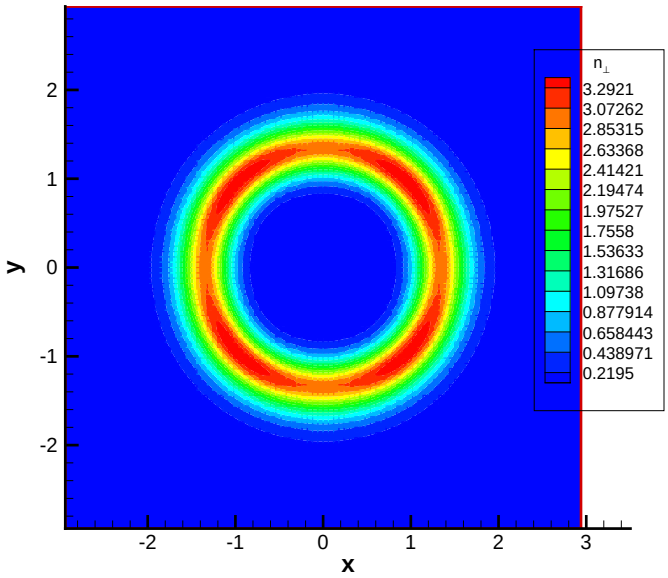


FIG. *6.18: Représentation 2D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1+i}{4\pi^2}(z+5z^5)$.

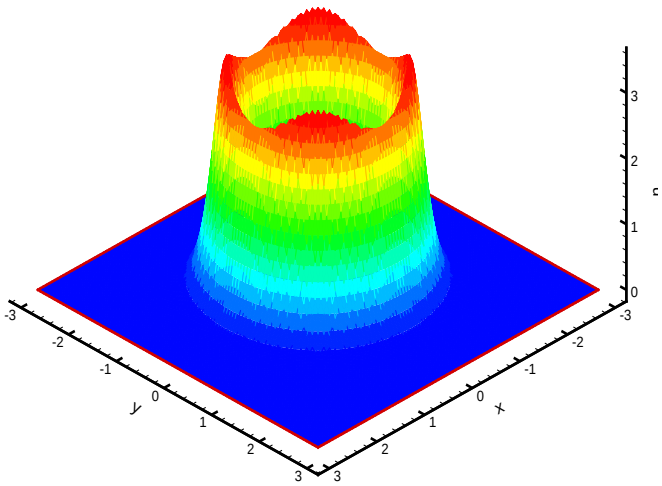


FIG. *6.19: Représentation 3D de* $n_\perp$ *pour* $\frac{1+i}{4\pi^2}(z+5z^5)$.

- $f(z) = \frac{1}{4\pi}(1+i)z + \frac{1}{\pi}(1+i)z^4$
- $f(z) = \frac{1}{\pi^2}(z+z^5)$
- $f(z) = \frac{1}{4\pi^2}(1+i)z + \frac{5}{4\pi^2}(1+i)z^5$.

Remarquons que $f(z)$ est une fonction complexe, et que a_i (pour $i = 1, ..., m$) peut également être complexe. En chosissant a_i sous forme complexe, on amène à une rotation de la fonction $f(z)$, mais on ne change pas la position de la répartition de $n_\perp$ car celle-ci ne dépend que de $\mid a_i \mid^2$ (pas de rotation), mais on assiste tout de même à une déformation du système, ce qui peut être observé sur les figures 6.15 et 6.19.

La condition de normalisation est donnée par :

$$\int_0^\infty dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{m}{2|a_1||a_m|r^{m+3}} \times n_0 l_\parallel\, l_\perp^2\, [-\frac{1}{\omega_p^2 l_\perp^2 \beta}]\, \frac{A_m(r) + \cos(m-1)\theta}{[B_m(r) + \cos(m-1)\theta]^2} = N \equiv n_0 l_\parallel l_\perp^2. \tag{6.32}$$

Le calcul de l'intégrale par rapport à l'angle est effectué selon

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{a + \cos(m-1)\theta}{[b + \cos(m-1)\theta]^2} = \left[(b-a)\frac{\partial}{\partial b} + 1\right] \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{b + \cos(m-1)\theta} = \left[(b-a)\frac{\partial}{\partial b} + 1\right] \frac{2\pi(m-1)}{(b^2-1)^{1/2}}, \tag{6.33}$$

où le calcul de l'intégrale I_m est donné en annexe E.4.

L'énergie est donnée par l'expression

$$E = \frac{1}{2} q' l_\parallel \int d\mathbf{x}_\perp\, n\, \Phi, \tag{6.34}$$

c'est-à-dire, en grandeurs adimensionnées

$$E = \frac{1}{2} q' l_\parallel l_\perp^2 \Phi_0 \int dr\, r d\theta\, n\, \Phi = -\frac{1}{2} N \frac{1}{\beta} [-\frac{1}{\omega_p^2 l_\perp^2 \beta}] \times \int dr\, r\, d\theta\, \frac{f' \overline{f}'}{(1 + f\overline{f})^2} \ln\left(\frac{f'(z)\, \overline{f}'(\overline{z})}{(1 + f(z)\overline{f}(\overline{z}))}\right) - \frac{1}{2} N \frac{1}{\beta} \ln\left(-\frac{4}{\omega_p^2 l_\perp^2 \beta}\right). \tag{6.35}$$

Soit $r = a$ fixe. Les positions des extrema sont définies par la condition

$$n \sim \frac{A_m(a) + \cos(m-1)\theta}{[B_m(a) + \cos(m-1)\theta]^2},$$
$$n' \sim -[(m-1)\sin(m-1)\theta] \times [B_m(a) + \cos(m-1)\theta] \times [B_m(a) - 2A_m(a) - \cos(m-1)\theta] = 0, \tag{6.36}$$

d'où, il découle que $\theta_m^{(1)} = k\pi/(m-1),\ 0 \le k \le m-1$. Lorsque $\left[B_m(a) + \cos(m-1)\theta\right] > 0$ toujours, ce facteur peut être omis. Des extrema complementaires vont apparaître lorsque $|B_m(a) - 2A_m(a)| < 1$. Les maxima se trouvent aux points où $n'' < 0$.

6.3 Discussion

Les résultats de l'analyse présentée sur les figures 6.6 à 6.18 donnent des images similaires à celles de l'expérience. En effet, on observe bien des pics de vorticité, formant des structures multi-pétales. Ces résultats confirment au moins qualitativement l'idée que la formation de structures régulières peut être provoquée par des lois dynamiques, non statistiques. Rappelons que les structures régulières observées n'apparaissaient que parfois (et pas toujours), ce qui peut être lié aux perturbations initiales présentes dans la distribution des vitesses. Toutefois, en situation actuelle, comme les magnitudes des paramètres fluctuants ne sont pas bien déterminées et comme même leur nature n'est pas claire, il serait exagéré de faire des estimations quantitatives : on ne peut se limiter qu'à des explications qualitatives.

Le système en question donne probablement un exemple du système qui ne passe pas à l'état d'équilibre thermodynamique au cours de l'expérience.

En effet, si à un moment initial quelconque, le système macroscopique isolé ne se trouvait pas en équilibre statistique (par exemple, s'il était artificiellement mis hors de cet équilibre par des actions extérieures, puis ensuite s'il était laissé à lui-même, donc redevenu un système isolé), dans la suite il reviendra obligatoirement vers cet équilibre. L'intervalle de temps durant lequel le système doit passer à l'équilibre statistique est appelé temps de relaxation. Lorsqu'il est question d'intervalles de temps *suffisamment grands*, on sous-entend des temps d'observation supérieurs au temps de relaxation. Ce n'est probablement pas respecté dans les travaux mentionnés.

L'expression (6.5) est *analogue* à la répartition canonique, où β^{-1} joue un rôle similaire à la "température". Le paramètre de normalisation C est défini par la condition [1] $C \int dv_{\|} \exp(-\beta v_{\|}^2/2) = 1$, avec les limites non infinies, ce qui permet d'avoir $\beta < 0$. Le choix de la fonction de répartition, sous forme proposée, est expliqué exclusivement par le souhait d'obtenir une solution analytique : d'autres formes mènent à des difficultés de résolution analytique du problème.

Indiquons, à ce propos, que les systèmes caractérisés par la "température" β^{-1} positive et négative, ne sont pas interdits par les lois de la mécanique statistique (voir par exemple [67]). En effet, l'exigence que la température d'un système thermodynamique soit toujours positive découle du fait que la somme statistique Z du système, contenant un nombre *illimité* d'éléments, doit converger (voir par exemple [37], [67]). Dans notre cas, a) le nombre de particules dans le système en question est fini, $1 \ll N < +\infty$, b) l'énergie maximale du

[1] S'il s'agit d'un système de particules s'attirant dans un référentiel tournant avec une vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$, il faut remplacer $c^{-1}\mathbf{B} \to 2\mathbf{\Omega}$, $q' \to 1$ dans 2.13 et $m \to -Gm$ (voir [37]).

système est définie par des conditions initiales et elle est bornée, c) la densité du nombre des états d'un tel système est bornée également. Dans ce cas, la somme statistique est transformée en somme finie, et elle a une valeur finie pour n'importe quelle valeur de la température (aussi bien positive que négative) [67].

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la possibilité de formation de structures régulières, en se basant sur l'équation de Vlasov. De nouvelles solutions exactes représentant une structure N-polygonale de tourbillons sont apparues.

Chapitre 7

Tourbillons-sources

Dans ce chapitre, nous considérons quelques particularités du mouvement des *tourbillons-sources* interagissants dans un domaine de configuration arbitraire. Sous ce nom, nous sous-entendons des tourbillons-sources ponctuels bidimensionnels, mais aussi des tourbillons-puits ponctuels bidimensionnels. Nous tenterons également de trouver les équations du mouvement pour les *tourbillons-sources écrantés* et de discuter quelques solutions de ces équations.

7.1 Introduction

La turbulence bidimensionnelle standardisée (c'est-à-dire continue) peut être *approximativement* étudiée dans le cadre d'un modèle possédant un nombre fini de degrés de liberté.

La troncature peut être réalisée soit dans les équations du mouvement d'un fluide en négligeant, ou en modélisant, la dynamique des "petites échelles" dans le cadre de certaines approximations, ou bien dans le modèle du fluide lui-même en représentant le champ de vorticité par un nombre fini de tourbillons ponctuels [63] (pour le concept des tourbillons ponctuels, voir les livres [36], [40], [57] et [68] par exemple). Dans ce qui suit, on ne considère que des tourbillons-sources ponctuels.

Dans ce chapitre, nous déduisons les équations de mouvement d'un système de N *tourbillons-sources* discrets (tourbillons ponctuels ayant *des intensités complexes* $\kappa_j = \gamma_j + i\mu_j,\ j = 1, 2,\ \ldots\ N$) évoluant dans un domaine borné D, d'aire S. Le paramètre γ décrit l'intensité du tourbillon, tandis que μ décrit l'intensité de la source, $\mu > 0$, ou du "puits", $\mu < 0$. Dans cette voie, les structures avec intensités complexes décrivent les tourbillons hélicoïdaux divergents/convergents. Précisons que les structures possédant de telles propriétés ne sont pas interdites par les lois de la nature. Une particularité caractéristique des tourbillons-sources est le mouvement convergent (divergent) radial du fluide dans sa proxi-

mité. Les tornades ou typhons dans l'atmosphère de la Terre sont de bons exemples. Dans le cas de typhons, lorsqu'on observe une convergence de l'air au dessus de la surface océanique, il y a de la convection à l'intérieur d'une petite zone centrale de ce tourbillon gigantesque, qui assure globalement la conservation de la masse. Dans les larges échelles, une telle structure (tourbillon-source ou tourbillon-puits) peut être modélisée par un tourbillon-source ponctuel.

Les causes physiques des sources ou puits peuvent être variées, mais nous n'allons pas discuter ici de leur nature.

La bibliographie sur le mouvement des sources-puits tourbillonnaires et sur leurs interactionsest pauvre. Il n'y a pratiquement rien dans les livres classiques [36], [40], [42], [57] et [68]. Rappelons les premiers travaux [70] pour lesquels un tourbillon-source a été utilisé pour décrire un courant-jet. Dans le travail [51], le mouvement du fluide autour d'un tourbillon-puits immobile a été étudié. Quelques aspects d'interaction entre un tourbillon-source et un obstacle dans un écoulement stationnaire et non-stationnaire ont été discutés dans [61].

L'objectif principal de ce chapitre est d'attirer l'attention sur la dynamique des systèmes les plus simples de tourbillons-sources, ordinaires ou écrantés, qui peuvent être appliqués dans des branches variées de la turbulence.

7.2 Présentation générale

On considère un plan *illimité*, dans lequel les coordonnées d'un point sont $W = \xi + i\eta$. Dans ce plan, l'écoulement d'un fluide incompressible est complétement caractérisé par le potentiel complexe $\phi(W)$, dont la dérivée détermine la vitesse complexe par :

$$U_j - iV_j = \frac{d}{dW}\phi(W), \tag{7.1}$$

pour $j = 1, ...N$.

Les pôles isolés des fonctions analytiques admettent l'interprétation physique suivante :

- *source placée à l'origine du système des coordonnées* : son potentiel complexe a pour expression $f(W) = (2\pi)^{-1}\mu \ln W$, μ étant une constante caractérisant le débit de la source ;

- *tourbillon* : le potentiel complexe de l'écoulement plan créé par l'unique tourbillon, placé à l'origine du système des coordonnées, est donné par l'expression $f(W) = (2\pi i)^{-1}\gamma \ln W$.

On peut proposer l'union en un seul point d'un tourbillon et d'une source (voir par exemple [42], p. 58). On voit donc qu'une ramification logarithmique d'un potentiel complexe s'interprète comme un tourbillon-source placé en ce point.

Supposons que N *tourbillons-sources* ponctuels se trouvent dans le plan aux points W_1, $W_2, \ldots,$ W_N. Le potentiel complexe créé par les N tourbillons-sources en un point W du plan est [1]

$$\phi(W) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} \kappa_k \ln(W - W_k). \tag{7.2}$$

Les tourbillons-sources ont pour intensités *complexes* κ_1, $\kappa_2, \ldots,$ κ_N. On peut prendre $\kappa_s = \gamma_s + i\mu_s = |\kappa_s| e^{i\delta_s}$. Les paramètres réels γ_s (tourbillon) et μ_s (source) peuvent être aussi bien positifs que négatifs.

Dans ce qui suit, nous supposons que $Im \sum_s \kappa_s = 0$, c'est-à-dire il n'y a pas de variation de la masse globalement.

On cherche la trajectoire $W_j(t)$ du j^{ieme} tourbillon-source.

On postule (pour les tourbillons, selon Helmholtz) que la vitesse du *tourbillon-source ponctuel* est confondue avec la vitesse du fluide au point dans lequel il se trouve, W_j. L'équation

$$\dot{\overline{W}} \equiv \dot{\xi}_j - i\dot{\eta}_j = U_j - iV_j \tag{7.3}$$

est donc l'équation du mouvement du j^{ieme} tourbillon-source dans le plan W.

La vitesse du *fluide* au point, où se trouve le tourbillon-source j, est alors donnée par la relation (7.1), en élininant l'auto-action singulière du tourbillon-source lui-même :

$$U_j - iV_j = \left\{ \frac{d}{dW} \left(\phi(W) - \frac{\kappa_j}{2\pi i} \ln(W - W_j) \right) \right\}_{W=W_j}. \tag{7.4}$$

Dans ce qui suit, nous parlerons de vitesse du tourbillon-source, sans préciser qu'il s'agit de la vitesse de son centre.

[1] Les tourbillons-sources écrantés sont décrits dans le cadre de ce modèle par l'expression du potentiel plus complexe : $\ln Z \to -K_0(Z/L)$ (dans un plan illimité). Ici, $K_0(Z/L)$ est la fonction de Bessel d'argument imaginaire. L'échelle caractéristique L, dans la dynamique des fluides géophysiques, est le rayon de déformation de Rossby-Obukhov (voir le Chapitre 1). L'échelle correspondante pour un supraconducteur est la profondeur de pénétration de London. L'échelle correspondante pour le plasma est le rayon de Larmor effectif, ... La fonction de Bessel a les asymptotes $K_0(Z) \simeq -0,577 + \ln 2 - \ln Z$ quand $|Z| \ll L$, et $K_0(Z/L) \simeq \sqrt{\pi/2Z}\, e^{-Z}$ quand $|Z| \gg 1$. Si toutes les distances entre les tourbillons-sources sont plus petites que L alors on peut appliquer tous les résultats des tourbillons-sources ordinaires aux whrils écrantés.

7.2.1 Considération des frontières

a. Frontière simple

Lorsque la frontière ∂M d'un domaine M du plan W est une paroi solide, l'équation du mouvement du tourbillon-source est à modifier, car, il faut respecter les conditions aux frontières. (en dynamique des fluides, condition de non pénétration de la paroi). Pour respecter ces conditions, le potentiel complexe de l'écoulement doit être complété par une *fonction analytique quelconque*, $F(W)$, de façon à ce que le nouveau potentiel $\Phi_M(W)$ satisfasse la condition aux frontières, c'est-à-dire

$$\phi_M(W) \quad \rightarrow \quad \Phi_M = \phi_M(W) + F(W). \tag{7.5}$$

La condition $Im\Phi_M|_{\partial M} = 0$ (ou $= C^{te}$ quelconque ou une fonction arbitraire du temps) signifie que la frontière immobile est imperméable au fluide.

Pour les tourbillons-sources dans un cercle de rayon R, on trouve, par la méthode des images par exemple, que

$$\Phi_M(W) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\left(\kappa_k \ln(W - W_k) - \overline{\kappa}_k \ln(\frac{R^2}{W} - \overline{W}_k)\right). \tag{7.6}$$

En effet, sur la frontière,

$$\Phi_M(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\left(\kappa_k \ln(Re^{i\theta} - r_k e^{i\theta_k}) - \overline{\kappa}_k \ln(Re^{-i\theta} - r_k e^{-i\theta_k})\right). \tag{7.7}$$

Puisque le second terme de cette expression est la conjugaison complexe du premier, et que $\ln Y = \ln|Y| + iarg\, Y$, la partie imaginaire de l'expression (7.7) est nulle : $Im\,\Phi_M|_{\partial M} = 0$.

On pourrait tenter d'utiliser le potentiel

$$\Phi_M(W) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\left(\kappa_k \ln(W - W_k) - \overline{\kappa}_k \ln(W - \frac{R^2}{\overline{W}_k})\right), \tag{7.8}$$

ce qui semble plus "naturel". Toutefois, cela n'est possible [6] que lorsque $\sum_{k=1}^{N}\kappa_k = 0$. En effet, la formule (7.6) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi_M(W) = {} & \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\left(\kappa_k \ln(W - W_k) - \overline{\kappa}_k \ln(W - \frac{R^2}{\overline{W}_k})\right) \\ & \underbrace{- \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\overline{\kappa}_k\left(i\pi + \ln\overline{W}_k\right)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1}^{N}\overline{\kappa}_k\right)\ln W}.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Le terme indépendant de W ne se manifeste pas dans les équations dynamiques puisque l'on prend la dérivée du potentiel. Le terme proportionnel à $\ln W$ n'a pas d'intérêt quand $\sum_{k=1}^{N} \kappa_k = 0$.

b. Point W=0

Le point $W = 0$ n'est pas accessible physiquement (voir [19], page 98).

c. Frontière de configuration complexe

Dans le cas général, le problème, dû à la complexité possible de la frontière du domaine D, peut être résolu en faisant une transformation conforme du domaine D en domaine M de frontière ∂M, de confuguration plus simple.

Considérons alors la transformation conforme $z = z(W)$ qui transforme le domaine D du plan z en domaine M du plan W. Par définition de la transformation conforme [42], le potentiel créé, au point z du domaine D, par les tourbillons-sources placés aux points z_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ est égal au potentiel créé, au point W du domaine M, par les tourbillons-sources placés aux points W_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Les *intensités* des tourbillons-sources restent les *mêmes* après la transformation conforme. Autrement dit nous avons :

$$\Phi_D(z) = \Phi_M(W),$$
$$\Phi_M(W)|_{z\to z_j} = \frac{1}{2\pi i}\kappa_j \ln(W - W_j) + \Phi_{jM},$$

où $\Phi_M(W)$ vérifie les conditions aux limites. Par exemple, $Im\{\Phi_M(W)\} = 0$ sur la frontière[2] ∂M.

La fonction Φ_{jM} est la fonction analytique, située où se trouve le j^{ieme} tourbillon-source.

L'équation (7.4) s'écrit alors

$$u_j - iv_j = \frac{d}{dz}\left(\Phi_M(W) + \frac{i\kappa_j}{2\pi}\ln(W - W_j) + \frac{i\kappa_j}{2\pi}\ln\frac{z - z_j}{W - W_j}\right)_{z=z_j}$$
$$= \frac{dW}{dz}\left[\frac{d}{dW}\left(\Phi_M(W) + \frac{i\kappa_j}{2\pi}\ln(W - W_j)\right) + \frac{i\kappa_j}{2\pi}\frac{d}{dW}\left(\ln\frac{z - z_j}{W - W_j}\right)\right]_{W=W_j}. \tag{7.10}$$

Examinons de plus près le dernier terme de l'équation (7.10).

[2]En fait, si la frontière ∂M est composée de plusieurs éléments topologiquement séparés, la condition qui suit doit être écrite pour chacun des ∂M_m, et, pour deux segments distincts, on peut avoir deux constantes différentes (voir, par exemple, [42]).

Développons $z(W)$ en série au voisinage de W_j. A l'ordre deux près, un tel développement s'écrit :

$$z(W) = z(W_j) + \frac{dz}{dW}|_j(W - W_j) + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dW^2}|_j(W - W_j)^2,$$

c'est-à-dire

$$z = z_j + \frac{dz}{dW}|_j(W - W_j) + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dW^2}|_j(W - W_j)^2 + \dots,$$

d'où

$$\frac{z - z_j}{W - W_j} = \frac{dz}{dW}|_j + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dW^2}|_j(W - W_j) + \dots,$$

et

$$\frac{d}{dW}(\ln\frac{z - z_j}{W - W_j})\Big|_j =$$
$$\frac{d}{dW}\left(\frac{dz}{dW}|_j + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dW^2}|_j(W - W_j) + \dots\right)\Big/\left(\frac{dz}{dW}|_j + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dW^2}|_j(W - W_j) + \dots\right)\Big|_j =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dW^2}\Big/\frac{dz}{dW}\right)\Big|_j.$$

Le dernier terme de (7.10) peut donc s'écrire :

$$\frac{i\kappa_j}{2\pi}\left[\frac{dW}{dz}\frac{d}{dW}\left(\ln\frac{z - z_j}{W - W_j}\right)\right]_{W=W_j} = \frac{i\kappa_j}{4\pi}\left(\frac{d^2z}{dW^2}\right)\left(\frac{dz}{dW}\right)^{-2}\Big|_{W=W_j}.$$

La vitesse complexe du fluide au point z_j dans le domaine D du plan z vaut alors :

$$\dot{\bar{z}} \equiv u_j - iv_j =$$
$$\frac{dW}{dz}\left(\frac{d}{dW}(\Phi_{D'}(W) + \frac{i\kappa_j}{2\pi}\ln(W - W_j))\right)_{W=W_j} +$$
$$+\left(\frac{i\kappa_j}{4\pi}(\frac{d^2z}{dW^2})(\frac{dW}{dz})^2\right)_{W=W_j}. \tag{7.11}$$

En tenant compte de

$$\dot{\bar{z}}_j = u_j - iv_j = \overline{\frac{dz}{dW}}\dot{\overline{W}}_{W=W_j}, \tag{7.12}$$

nous trouvons l'équation

$$\dot{\overline{W_j}} = \lim_{W\to W_j}\left[\frac{d}{dW}[\Phi_{D'}(W) + \frac{i\kappa_j}{2\pi}\ln(W - W_j)] +\right.$$
$$\left.+\frac{i\kappa_j}{4\pi}\frac{d}{dW}\ln\frac{dz}{dW}\right]\left|\frac{dz}{dW}\right|^{-2}, \tag{7.13}$$
$$avec \quad Im\{\Phi_M(W)\}|_{\partial M} = 0.$$

Cette dernière équation décrit le mouvement du centre du tourbillon-source se trouvant au point z_j dans le domaine D du plan z en terme des variables $(W_j, \overline{W_j})$ du domaine M. Connaissant $W_j(t)$, nous pouvons reconstituer $z_j(t) = z(W_j(t))$ dans le domaine déformé D.

7.2.2 Etude du mouvement

a. Equations du mouvement des tourbillons-sources pour un cercle perturbé

Soit, dans cette section, $\sum_{k=1}^{N} \kappa_k = K \equiv \Gamma + iM \neq 0$, et $M = 0$.

L'équation du mouvement des tourbillons-sources dans un cercle s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{dz}{dW}\right|_j^2 \dot{\overline{W_j}} = \\
&\lim_{W\to W_j}\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{d}{dW}\left(\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N\prime}\kappa_k \ln(W-W_k) - \sum_{k=1}^{N}\overline{\kappa}_k \ln(W-\frac{R^2}{\overline{W}_k})\right)\right.\right. \\
&\left.\left. +\overline{K}\ln W\right] - \frac{\kappa_j}{4\pi i}[\frac{d}{dW}\ln\frac{dz}{dW}]\right\} = \\
&\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N\prime}\frac{\kappa_k}{W_j-W_k} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{\kappa}_k\overline{W}_k}{R^2-W_j\overline{W}_k}\right) \\
&+\frac{\overline{K}}{2\pi i}\frac{1}{W_j} - \frac{\kappa_j}{4\pi i}\lim_{W\to W_j}[\frac{d}{dW}\ln\frac{dz}{dW}].
\end{aligned} \tag{7.14}$$

La forme alternative de l'équation, commode pour les calculs numériques, est

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{dz}{dW}\right|_j^2 \dot{\overline{W_j}} = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N\prime}\frac{\kappa_k}{|W_j-W_k|^2}(\overline{W}_j-\overline{W}_k) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{\kappa}_k\overline{W}_k}{|R^2-W_j\overline{W}_k|^2}(R^2-\overline{W}_jW_k)\right) + \\
&+\frac{\overline{K}}{2\pi i}\frac{\overline{W}_j}{|W_j|^2} - \frac{\kappa_j}{4\pi i}\lim_{W\to W_j}[\frac{d}{dW}\ln\frac{dz}{dW}].
\end{aligned} \tag{7.15}$$

b. Formulation Hamiltonienne

L'équation (7.15) peut être présentée sous le forme hamiltonienne

$$\kappa_j\left|\frac{dz}{dW}\right|_j^2\frac{d\overline{W}_j}{dt} = +i\frac{\partial H}{\partial W_j} \quad \rightleftharpoons \quad \kappa_j\frac{d\overline{z}_j}{dt} = +i\frac{\partial H}{\partial z_j}. \tag{7.16}$$

La conjugaison complexe donne alors

$$\overline{\kappa}_j \left| \frac{dz}{dW} \right|_j^2 \frac{dW_j}{dt} = -i \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{W}_j}. \tag{7.17}$$

L'Hamiltonien défini à une constante près, est donné par

$$\begin{aligned} H[W, \overline{W}] = -\frac{1}{4\pi} \Bigg(& \sum_{m,n=1, m\neq n}^{'N} \kappa_m \kappa_n \ln(W_m - W_n) + \sum_{m,n=1, m\neq n}^{'N} \overline{\kappa}_m \overline{\kappa}_n \ln(\overline{W}_m - \overline{W}_n) \\ & + \sum_{m,n=1,}^{N} \kappa_m \overline{\kappa}_n \ln \frac{1}{R^2 - W_m \overline{W}_n} + \sum_{m,n=1,}^{N} \overline{\kappa}_m \kappa_n \ln \frac{1}{R^2 - \overline{W}_m W_n} \\ & + 2\overline{K} \sum_{k=1}^{N} \kappa_k \ln W_k + 2K \sum_{k=1}^{N} \overline{\kappa}_k \ln \overline{W}_k - \sum_{k=1}^{N} \kappa_k^2 \ln \frac{dz_k}{dW_k} - \sum_{k=1}^{N} \overline{\kappa}_k^2 \ln \frac{d\overline{z}_k}{d\overline{W}_k} \Bigg). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Evidemment, $H = \overline{H}$. Les variables W et $\overline{W}$ sont supposées indépendentes.

c. Lois de conservation

La conservation de l'énergie n'est généralement pas respectée si $\mu_s \neq 0$:

$$\frac{dH}{dt} = \partial_t H + \sum_{s=1}^{N} \left[\dot{z}_s \frac{\partial H}{\partial z_s} + \dot{\overline{z}}_s \frac{\partial H}{\partial \overline{z}_s} \right] = \partial_t H + i \Big[H, H \Big]_{ps}, \tag{7.19}$$

avec le pseudo-crochet de Poisson, défini par

$$\Big[A, B \Big]_{ps} = \sum_{s=1}^{N} \left[\frac{1}{\kappa_s} \frac{\partial A}{\partial z_s} \frac{\partial B}{\partial \overline{z}_s} - \frac{1}{\overline{\kappa}_s} \frac{\partial A}{\partial \overline{z}_s} \frac{\partial B}{\partial z_s} \right] = -\overline{\Big[B, A \Big]_{ps}}. \tag{7.20}$$

Soit $\partial_t H = 0$. Alors, on a

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{s=1}^{N} \left[-\frac{i}{\overline{\kappa}_s} \frac{\partial H}{\partial \overline{z}_s} \frac{\partial H}{\partial z_s} + \frac{i}{\kappa_s} \frac{\partial H}{\partial z_s} \frac{\partial H}{\partial \overline{z}_s} \right] = 2 \sum_{s=1}^{N} \mu_s \frac{1}{|\kappa_s|^2} \left| \frac{\partial H}{\partial z_s} \right|^2 = 2 \sum_{s=1}^{N} \mu_s |\dot{z}_s|^2. \tag{7.21}$$

Ainsi, pour la conservation de l'énergie, il faut nécessairement que le système contienne des tourbillons-sources avec $\mu_s > 0$, et des tourbillons-sources avec $\mu_s < 0$.

Le moment angulaire général est défini par l'expression $L_\theta = \int d\mathbf{x}\, [\mathbf{x}, \mathbf{v}]$, qui peut être présentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_\theta &= \int_D d\mathbf{x}\, [\nabla \frac{1}{2} r^2, \mathbf{v}] \\ &= \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x}\, rot\, (r^2 \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x}\, r^2\, rot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}\, r^2 - \frac{1}{2} \int_D d\mathbf{x}\, r^2\, \Omega. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Si, dans l'espace illimité, la vitesse décroît aux grandes distances comme $v \sim r^{-2}$ (ensemble de tourbillons positifs et négatifs, ...), le premier terme disparaît, et

$$L_\theta = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \kappa_j |z_j|^2. \tag{7.23}$$

Si $|r|^2_{\partial D} = R^2$, la formule devient

$$L_\theta - R^2\Gamma = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \kappa_j |z_j|^2, \tag{7.24}$$

et, lorsque $\Gamma = 0$, nous obtiendrons le résultat 7.23.

La dérivée est donnée par :

$$\frac{dL_\theta}{dt} = -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[z_j\frac{\partial H}{\partial z_j} - \frac{\kappa_j}{\overline{\kappa}_j}\overline{z}_j\frac{\partial H}{\partial \overline{z}_j}\right]. \tag{7.25}$$

Contrairement à l'Hamiltonien, l'invariance du moment n'est pas robuste, dans le sens où de petites perturbations de la frontière du domaine détruisent cette invariance.

d. Discussion sur la possibilité de passage en espace 2D illimité

Pour "l'espace illimité", il est évident que les termes dépendants de la frontière doivent disparaître dans l'hamiltonien.

Montrons ce fait.

Soit $z = W + \epsilon R f(W/R)$ et $W_j = W_0 + W'_j$, $|W'_j| \leq L \ll |W_0| \sim R$. Tout se déroule dans un petit domaine (par rapport à M) de l'espace. Les deux premiers termes dans l'expression de l'Hamiltonien ne changeront pas car ce sont les termes correspondant à l'espace illimité. Nous écrivons donc ici que les termes représentant la frontière :

$$\begin{aligned}
H[W,\overline{W}] &= ... + \sum_{m,n=1,}^{N} \kappa_m\overline{\kappa}_n \ln\frac{1}{R^2 - W_m\overline{W}_n} + 2\overline{K}\sum_{k=1}^{N}\kappa_k \ln W_k - \sum_{k=1}^{N}\kappa_k^2 \ln\frac{dz_k}{dW_k} + c.c. \\
&= ... + \sum_{m,n=1,}^{N} \kappa_m\overline{\kappa}_n \ln\frac{1}{R^2 - (W_0+W'_m)(\overline{W}_0+\overline{W}'_n)} + 2\overline{K}\sum_{k=1}^{N}\kappa_k \ln(W_0+W'_k) + c.c. - ... \\
&= ... + \sum_{m,n=1,}^{N} \kappa_m\overline{\kappa}_n \frac{1}{R^2 - |W_0|^2}(\overline{W}_0 W'_m + W_0\overline{W}'_n) + 2\frac{\overline{K}}{W_0}\sum_{k=1}^{N}\kappa_k W'_k + c.c. - ... \\
&= ... + 2\overline{K}\left[\frac{\overline{W}_0}{R^2 - |W_0|^2} + \frac{1}{W_0}\right]\sum_{k=1}^{N}\kappa_k W'_k - R^{-1}[\ln(1+\epsilon f')]'\sum_{k=1}^{N}\kappa_k^2 W'_k + c.c. + ...
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Si $\sum_{k=1}^{N} \kappa_k W'_k = 0$, ou $\sum_{k=1}^{N} \kappa_k = 0$, il n'y a pas d'écoulement induit, et l'impact d'une frontière non déformée est de second ordre par rapport à $L^2/R^2 \ll 1$. L'influence de la déformation de la frontière peut devenir significative si $|f''| \gg 1$.

e. Comparaison

Dans un cercle de rayon R pour les tourbillons purs (c'est-à-dire $Im\kappa_s = 0$), l'Hamiltonien devient

$$H[W, \overline{W}] = -\frac{1}{4\pi}\Bigg(\sum_{m,n=1, m\neq n}^{'N} \gamma_m \gamma_n \ln |W_m - W_n|^2 + \sum_{m,n=1,}^{N} \gamma_m \gamma_n \ln \frac{1}{|R^2 - W_m \overline{W}_n|^2} \Bigg). \quad (7.27)$$

Nous devons comparer cette expression avec la formule pour l'Hamiltonien des tourbillons purs, utilisée dans le travail [9]

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{m>n}^{N,N} \gamma_m \gamma_n \Big(\ln r_{mn}^2 - \ln(R^4 - 2R^2 \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + r_m^2 r_n^2) \Big) + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \ln(R^2 - r_i^2), \quad (7.28)$$

où $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$. En fait, la formule est la même que (7.27) au facteur 1/2 près ($\sum_{m,n=1, m\neq n}^{'N} ... \neq \sum_{m>n}^{N,N} ...$).

7.3 Equations du mouvement des tourbillons-sources dans un cercle

7.3.1 Equations du mouvement

Soit $z = W$. Choisissons les échelles caractéristiques spatiale et temporelle : $W \to RW$, $t \to \tau t$, $\kappa_s \to |\kappa|\kappa_s$. Les équations deviendront

$$\frac{R}{N\tau} \dot{\overline{W}}_j = -i \frac{|\kappa|}{2\pi R} \Bigg[\Bigg(\frac{1}{N} \sum_{k=1,\, k\neq j}^{N\prime} \Bigg) \frac{\kappa_k}{|W_j - W_k|^2 + \epsilon_1^2} (\overline{W}_j - \overline{W}_k) + \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Bigg) \frac{\overline{\kappa}_k \overline{W}_k}{|1 - W_j \overline{W}_k|^2 + \epsilon_1^2} (1 - \overline{W}_j W_k) \Bigg] - i \frac{|\kappa|}{2\pi R} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{\kappa}_n \Bigg) \frac{\overline{W}_j}{|W_j|^2}. \quad (7.29)$$

Posons $\tau = 2\pi R^2/|\kappa|N$. Depuis que l'on a coupé la singularité par ϵ_1, on peut ne pas écrire le prime dans la somme (on tient compte de tous les termes). On obtient alors

$$\dot{\overline{W}_j} =$$
$$= -i\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\right)\left[\frac{\kappa_k}{|W_j - W_k|^2 + \epsilon_1^2}(\overline{W}_j - \overline{W}_k) + \frac{\overline{\kappa}_k \overline{W}_k}{|1 - W_j\overline{W}_k|^2 + \epsilon_1^2}(1 - \overline{W}_j W_k)\right]$$
$$-i\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\overline{\kappa}_n\right)\frac{\overline{W}_j}{|W_j|^2}. \qquad (7.30)$$

Soit $W_j = r_j\, e^{i\theta_j},\ |\kappa_s| = 1,\ \kappa_s = e^{i\delta_s}$: les tourbillons-sources sont identiques en module. Notons que, par exemple, pour $\kappa_m = 1 - i,\ \delta_m = -\pi/4$, tandis que pour $\kappa_m = -1 + i,\ \delta_m = +3\pi/4$. Mais $tg\,\delta_m (= -1)$ reste le même.

Puisque $\dot{\overline{W}}_j = \dot{r}_j\, e^{-i\theta_j} - i\dot{\theta}_j r_j e^{-i\theta_j} = \overline{W}_j[-i\dot{\theta}_j + r_j^{-1}\dot{r}_j]$, on a

$$-\,ir_j^2\dot{\theta}_j + r_j\dot{r}_j =$$
$$-i\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\right)\left[\frac{1}{r_j^2 + r_k^2 - 2r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k) + \epsilon_1^2}(r_j^2 e^{i\delta_k} - r_jr_k e^{i(\theta_j - \theta_k + \delta_k)})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1 - 2r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2r_k^2 + \epsilon_1^2}(r_jr_k e^{i(\theta_j - \theta_k - \delta_k)} - r_j^2r_k^2 e^{-i\delta_k})\right] - i\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-i\delta_n}\right). \qquad (7.31)$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, on trouve

$$r_j\dot{r}_j =$$
$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\right)\left[\frac{r_j^2\sin\delta_k - r_jr_k\sin(\theta_j - \theta_k + \delta_k)}{r_j^2 + r_k^2 - 2r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k) + \epsilon_1^2} + \frac{r_jr_k\sin(\theta_j - \theta_k - \delta_k) + r_j^2r_k^2\sin\delta_k}{1 - 2r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2r_k^2 + \epsilon_1^2}\right]$$
$$-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\delta_n\right),$$
$$r_j^2\dot{\theta}_j =$$
$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\right)\left[\frac{r_j^2\cos\delta_k - r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k + \delta_k)}{r_j^2 + r_k^2 - 2r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k) + \epsilon_1^2} + \frac{r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k - \delta_k) - r_j^2r_k^2\cos\delta_k}{1 - 2r_jr_k\cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2r_k^2 + \epsilon_1^2}\right]$$
$$+\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos\delta_n\right). \qquad (7.32)$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_k ... &= N^{-1}\sum_{k=1}^{N} ... , \\
G_{1k} &= [r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k) + \epsilon_1^2]^{-1}, \\
G_{2k} &= [1 - 2r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k) + r_j^2 r_k^2 + \epsilon_1^2]^{-1}, \\
R_{1sk} &= r_j^2 \sin\delta_k - r_j r_k \sin(\theta_j - \theta_k + \delta_k), \\
R_{2sk} &= r_j r_k \sin(\theta_j - \theta_k - \delta_k) + r_j^2 r_k^2 \sin\delta_k, \\
R_{1ck} &= r_j^2 \cos\delta_k - r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k + \delta_k), \\
R_{2ck} &= r_j r_k \cos(\theta_j - \theta_k - \delta_k) - r_j^2 r_k^2 \cos\delta_k, \\
S &= N^{-1}\sum_{n=1}^{N} \sin\delta_n, \\
C &= N^{-1}\sum_{n=1}^{N} \cos\delta_n. \qquad (7.33)
\end{aligned}$$

Les équations prennent alors une forme plus compacte (commode) pour le calcul numérique :

$$\begin{aligned}
\sqrt{r_j^2 + \epsilon_1^2}\,\frac{dr_j}{dt} &= \widehat{S}_k\Big[G_{1k}R_{1sk} + G_{2k}R_{2sk}\Big] - S, \\
(r_j^2 + \epsilon_1^2)\,\frac{d\theta_j}{dt} &= \widehat{S}_k\Big[G_{1k}R_{1ck} + G_{2k}R_{2ck}\Big] + C. \qquad (7.34)
\end{aligned}$$

Pour éviter les singularités dans les calculs, on peut remplacer, dans les dénominateurs de toutes les expressions, les termes qui peuvent s'annuler par les expressions régulières : $|W_j - W_k|^2 \to |W_j - W_k|^2 + \epsilon_1^2 R^2$ et $|R^2 - W_j\overline{W}_k|^2 \to |R^2 - W_j\overline{W}_k|^2 + \epsilon_1^2 R^2$, $|W_j|^2 \to |W_j|^2 + \epsilon_1^2 R^2$, avec $\epsilon_1 \ll 1$.

7.3.2 Simulations numériques

a. Domaine illimité

Nous allons maintenant regarder l'évolution de quelques tourbillons-sources dans un domaine illimité, dont le modèle intègre les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{{r_i}^2 + \epsilon^2}\frac{\partial r_i}{\partial t} &= N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \frac{{r_i}^2 sin\delta_j - r_i r_j sin(\theta_i - \theta_j + \delta_j)}{{r_i}^2 + {r_j}^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) + \epsilon^2} \\
({r_i}^2 + \epsilon^2)\frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \frac{r_i r_j cos\delta_j - r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j + \delta_j)}{{r_i}^2 + {r_j}^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) + \epsilon^2}. \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

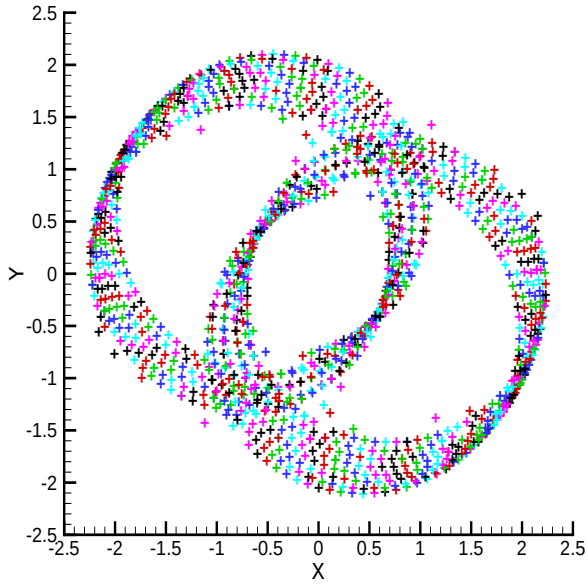


FIG. *7.1: Evolution de* 4 *tourbillons-sources dans un domaine illimité.*

Le paramètre ϵ^2 a été ajouté dans les dénominateurs afin d'éviter les problèmes dûs aux singularités : $\epsilon = 0.001$ dans les calculs réalisés. Le modèle numérique utilisé est un schéma de Runge–Kutta d'ordre 4, avec un pas temps adaptatif. Les intégrations sont exécutées avec une double précision et pour des cycles de $\Delta t = 0.00001$, en utilisant un pas temps adaptatif jusqu'à ce que l'erreur soit moins tolérable que 10^{-9}.

La figure 7.1 représente l'évolution de 4 tourbillons-sources dont la configuration initiale forme un losange centré à l'origine du domaine d'espace illimité. Cette évolution a été suivie jusqu'à $t \sim 30$. On a choisi le paramètre δ de l'ordre de 0.1. Elle montre que les tourbillons-sources suivent un trajet en spirale autour de leur point de départ. Certes, les trajectoires des tourbillons-sources s'interceptent nous empêchant de voir clairement ces trajectoires, mais nous allons choisir d'exagérer les valeurs des paramètres pour permettre une meilleure visualisation des trajectoires. La figure 7.2 part de la même configuration de départ que la précédente, mais on a alors choisi un δ de 1. On repère nettement que la trajectoire des tourbillons est bien en spirale, avec deux tourbillons qui s'attirent au centre du domaine, alors que les deux autres se repoussent très loin du centre.

La figure 7.3 représente l'évolution de 20 tourbillons-sources dont la configuration initiale forme un cercle de rayon $r = 0.8$, centré à l'origine du domaine. Cette évolution a également

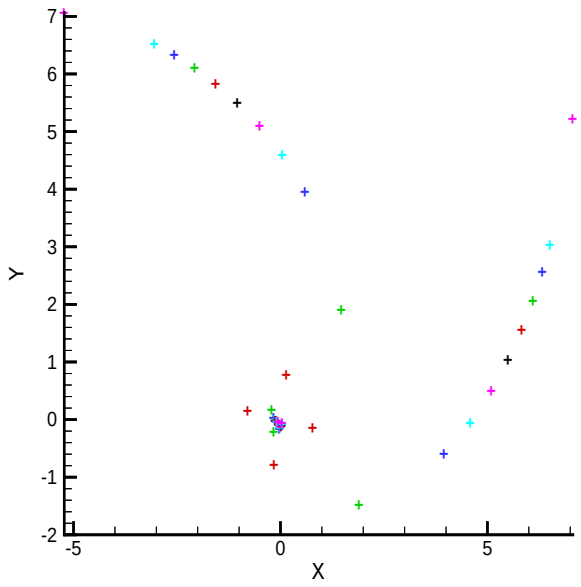


FIG. *7.2: Evolution de* 4 *tourbillons-sources dans un domaine illimité.*

été exagérée pour permettre une bonne visualisation des trajectoire. Cette évolution (pour des temps allant de $t = 0$ à $t = 4 \quad 10^{-4}$ pour $\delta = 1$) confirme les résultats de celle avec 4 tourbillons-sources, c'est-à-dire que les tourbillons ayant δ négatif s'attirent pour se rejoindre au centre du domaine, tandis que ceux avec δ positif se repoussent. De plus, chaque tourbillon-source suit un trajet en forme de spirale.

b. Domaine de frontière circulaire

Nous allons maintenant regarder l'évolution de quelques tourbillons-sources dans un domaine de frontière circulaire, dont le modèle intègre les équations d'évolution suivantes :

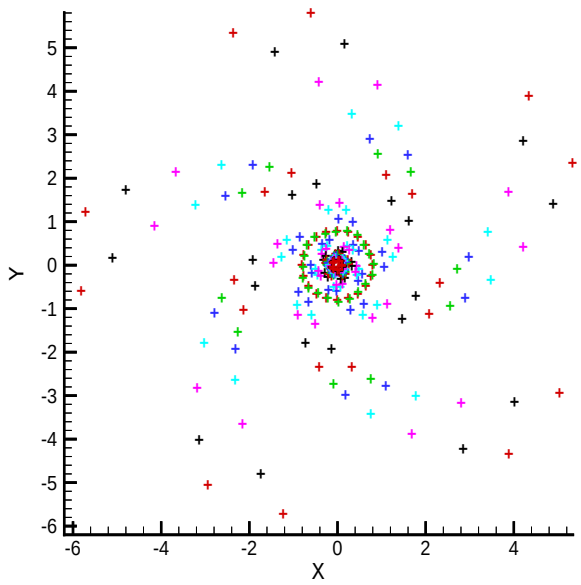


FIG. *7.3: Evolution de* 20 *tourbillons-sources dans un domaine illimité.*

$$\sqrt{{r_i}^2+\epsilon^2}\frac{\partial r_i}{\partial t} = N^{-1}\sum_{j=1}^{N}[\frac{{r_i}^2 sin\delta_j - r_i r_j sin(\theta_i-\theta_j+\delta_j)}{{r_i}^2+{r_j}^2-2r_i r_j cos(\theta_i-\theta_j)+\epsilon^2}$$
$$+\frac{r_i r_j sin(\theta_i-\theta_j-\delta_j)+{r_i}^2{r_j}^2 sin\delta_j}{1-2r_i r_j cos(\theta_i-\theta_j)+{r_i}^2{r_j}^2+\epsilon^2}] - N^{-1}\sum_{k=1}^{N} sin\delta_k,$$
$$({r_i}^2+\epsilon^2)\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = N^{-1}\sum_{j=1}^{N}[\frac{{r_i}^2 cos\delta_j - r_i r_j cos(\theta_i-\theta_j+\delta_j)}{{r_i}^2+{r_j}^2-2r_i r_j cos(\theta_i-\theta_j)+\epsilon^2}$$
$$+\frac{r_i r_j cos(\theta_i-\theta_j-\delta_j)-{r_i}^2{r_j}^2 cos\delta_j}{1-2r_i r_j cos(\theta_i-\theta_j)+{r_i}^2{r_j}^2+\epsilon^2}] + N^{-1}\sum_{k=1}^{N} cos\delta_k. \tag{7.36}$$

De même que précédemment $\epsilon = 0.001$ et le modèle numérique utilisé est un schéma de Runge–Kutta d'ordre 4, avec un pas temps adaptatif. Les intégrations sont exécutées avec une double précision et pour des cycles de $\Delta t = 0.00001$, en utilisant un pas temps adaptatif jusqu'à ce que l'erreur soit moins tolérable que 10^{-9}.

La figure 7.4 représente l'évolution de 4 tourbillons-sources dont la configuration initiale forme un losange centré à l'origine du domaine de frontière. Cette évolution a été suivie jusqu'à $t \sim 20$. On a choisi le paramètre δ de l'ordre de 0.1. En fait, au cours de l'évolution, on s'est aperçu que les tourbillons se sont d'abord placés le long de la frontière suivant

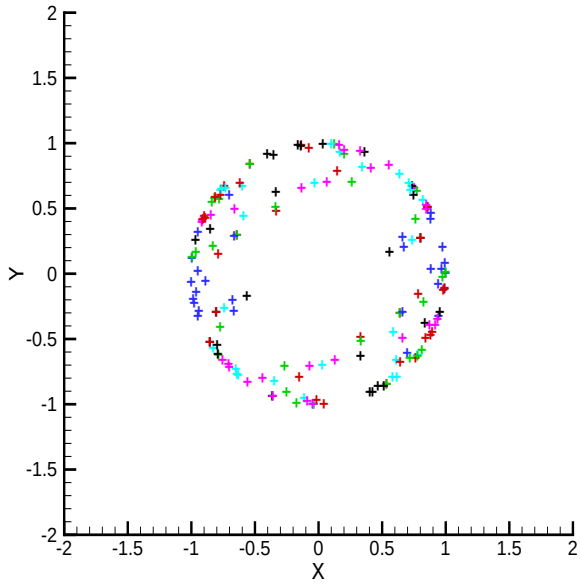


FIG. *7.4: Evolution de* 4 *tourbillons-sources dans un domaine ayant une frontière circulaire.*

une trajectoire en spirale, puis ils se sont attirés deux par deux et ont ensuite suivi cette trajectoire circulaire le long de la frontière sans jamais changer de direction.

Il est bien connu, par la dynamique traditionnelle des tourbillons, que l'intensité d'un tourbillon image est de signe opposé. Il est facile de voir, dans le cas d'une frontière plane ou circulaire, que l'intensité de la source (ou du puits) image est de même signe que la source (puits) original. Ceci mène à l'attraction inévitable des tourbillons-sources vers des obstacles rigides.

A partir des solutions les plus simples, présentées dans ce chapitre, on peut voir que la dynamique des tourbillons-sources mérite de plus amples explorations. La dynamique traditionnelle des tourbillons est un cas très particulier de la dynamique du mouvement des tourbillons-sources, quand les intensités de la source (puits) sont nulles et quand chaque distance mutuelle est plus petite que la distance caractéristique de l'écrantation.

Conclusion

Ce travail de thèse avait pour but d'analyser quelques aspects des mécanismes possibles d'apparition de structures tourbillonnaires quasi–régulières dans un milieu turbulent. On a supposé que le mouvement du milieu pouvait être examiné dans le cadre de l'approximation bidimensionnelle, dont les limites d'application ont été indiquées.

Les principaux résultats sont présentés ci-dessous.

• Un examen de la situation concernant les recherches actuelles, tant au niveau théorique, numérique, qu'expérimental, dans le domaine de la turbulence 2D, en vue de son auto-organisation possible, a été fait. Ce bilan a pris la forme d'une brève revue, exposée dans la partie introductive du manuscrit. Un intérêt spécial a été porté sur l'évolution de la turbulence libre et non sur la turbulence forcée. Une discussion sur les modèles théoriques efficaces de modélisation de la turbulence (modèles des taches, des tourbillons ponctuels, ...) a été effectuée. Il faut noter que les résulats numériques doivent être comparés à ceux des études expérimentales, car parfois ils ne vont pas dans le même sens.

• L'examen de la situation actuelle montre qu'il existe, pour des fluides de faible viscosité, une série d'expériences concernant l'évolution de la turbulence $2D$ aboutissant, sous certaines conditions, à la formation de structures tourbillonnaires régulières bien marquées. Un intérêt particulier a été porté sur les expériences de Fine et al. (voir [20], [23]). Une analyse du schéma expérimental et des résultats obtenus au cours des expériences de plasma dans le fort champ magnétique, a été dressée. On observe que la relaxation de la turbulence vers l'état final d'équilibre statistique peut parfois être stoppée au cours de son évolution. Ce phénomène amène à la formation de structures tourbillonnaires régulières, appelées "cristaux tourbillonnaires". Pour tenter d'expliquer les causes de formation de ces structures, nous avons utilisé une approche basée sur l'équation cinétique de Vlasov. En fait, nous avons rejeté l'approche traditionnelle hydrodynamique à cause du nombre trop petit de particules formant l'écoulement. La possibilité d'obtenir des structures multi-pétales pour la répartition

de vorticité a été montrée.

• L'analyse détaillée de ces expériences a permis, dans certains cas, d'assimiler le système d'électrons chauffés dont la répartition spatiale a été moyennée le long de l'axe z, à des barres rigides macroscopiques, chargées, orientées le long de l'axe z du champ magnétique extérieur, et qui se déplacent sans jamais s'intercepter. Un tel modèle permet de réduire le problème de l'évolution de la turbulence 2D au problème de déplacement d'un nombre fini de barres, et finalement au problème du mouvement des points d'intersection de ces barres avec le plan perpendiculaire à leur axe. Les équations du mouvement de ces points sont identiques à celles de tourbillons ponctuels 2D.

• Pour tenter de comprendre l'apparition des cristaux tourbillonnaires, il faut se placer dans deux cas de figures : (a) les structures régulières ne sont pas encore au stade final de leur évolution (dans ce cas, on parle d'auto-organisation), et en fait, il s'agit simplement d'une configuration à un temps donné d'un régime transitoire, *avant* d'avoir atteint un certain temps caractéristique, appelé "temps de relaxation" ; ou, au contraire, (b) l'état dans lequel on se trouve se situe à un temps supérieur au temps de relaxation. S'il est connu, à priori, qu'il n'y a pratiquement pas de dissipation dans le système, on peut soupçonner que la configuration observée se trouve à un temps donné plus petit que le temps de relaxation. Les structures régulières sont donc un effet de transition.

• L'importance des invariants globaux, ainsi que des conditions initiales, sur un scénario possible d'évolution de la turbulence a été constatée dans les expériences de plasma. On peut donc dire que le système $2D$, évoluant en absence de dissipation et de forçage, n'oublie pas ses conditions initiales de répartition.

• L'importance que peuvent jouer des fluctuations extérieures des champs sur l'évolution de la turbulence $2D$ dans le plasma chargé vers des structures régulières, a été discutée.

• Dans la situation où l'on décrit l'expérience de plasma, le temps d'observation est beaucoup plus petit que le temps de relaxation, et le système est donc loin de l'équilibre statistique (thermodynamique). Alors, le système n'a pas encore oublié les conditions initiales et les principes de la mécanique statistique ne sont pas encore applicables. Si l'expérience présente la particularité d'une répartition initiale des vitesses des particules

ayant un maximum net au voisinage d'une vitesse quelconque $v_{max} \neq 0$, alors la fonction de répartition peut posséder une structure multi-pétale. Une telle possibilité a été confirmée par l'observation de taches régulières dans les expériences de plasma.

• Lorsque le temps d'observation dépasse largement le temps de relaxation, nous sommes placés dans le domaine où les lois de la mécanique statistique régissent pour le gaz de tourbillons ponctuels. Dans ces conditions, un principe d'évolution de tourbillons ponctuels dans un domaine borné de phase, suivant leur "température" initiale, a été mis en place. Si l'espace de phase est borné, le système admet l'existence de "températures" négatives. Dans le cas d'une "température" négative, une transition de phase peut se produire.

• Nous avons présentés les tourbillons-sources au dernier chapitre car jusqu'à présent ils ont été très peu étudiés dans les ouvrages scientifiques. Nous avons vu que ces structures tourbillonnaires apparaissent soit sous forme de tourbillons-sources ou tourbillons-puits, et que les lignes de courant autour de ces tourbillons avaient des formes de spirales.

• L'analyse faite dans cette thèse peut servir de point de départ à divers développements analytiques et numériques.

Annexe A

Caractéristiques du mouvement des particules chargées

A.1 Introduction

Le plasma d'électrons pur confiné par le champ magnétique est un excellent système pour des observations *quantitatives* de la dynamique 2D d'un fluide non-visqueux, de la turbulence 2D et de l'auto-organisation de la turbulence bidimensionnelle.

Le plasma *neutre* est constitué de particules positives (ions) et négatives (électrons). Le plasma *chargé* est constitué de particules du même signe de charge.

Le mouvement d'une particule chargée, de masse m et de charge électrique q, est régi par l'équation de Newton, avec la force de Lorenz dans le membre droit

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]\right). \tag{A.1}$$

Ici, c est la célérité de la lumière, de valeur $c \simeq 3 \cdot 10^{10}\, cm/s$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ représentent l'intensité et l'induction des champs électrique et magnétique respectivement, et sont mesurés en u.CGS ($1\, u.CGS/cm = 3 \cdot 10^4\, V/m$) et Gauss (en SI, on utilise "tesla" : $1\, Tesla = 10^4\, Gauss$). La charge de l'électron est $q = -e$, où $e = 4,8 \cdot 10^{-10}\, u.CGS = 1,6 \cdot 10^{-19}\, C$.

Ces équations doivent être complétées par les équations de Maxwell (dans le vide, en SI, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{B}$) parce que les particules chargées en mouvement créent les champs électrique et magnétique qui déterminent à leur tour le mouvement de ces particules

$$\begin{aligned} div\, \mathbf{D} = 4\pi q, \quad rot\, \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} q\mathbf{v} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}, \\ div\, \mathbf{H} = 0, \quad rot\, \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Considérons le cas important des champs constants dans l'espace et indépendants du temps.

A.1.1 Mouvement d'un électron

On considère le mouvement d'une particule chargée dans le champ électrique $\overline{E} \sim e^{-iwt}$ et dans le champ magnétique constant $B_0 = cte$, avec $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|}$. On a donc

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], \tag{A.3}$$

où e est une charge positive.

Il est évident que la vitesse $\mathbf{v}$ varie avec le temps selon la même loi que le champ $\mathbf{E}$: $\mathbf{v} \sim \mathbf{E} \sim e^{-iwt}$. On néglige la variation spatiale de $\mathbf{E}$ dans le domaine du mouvement de la particule. On trouve

$$iw\mathbf{v} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]. \tag{A.4}$$

La solution de cette équation algébrique contient des termes orientés le long de $\mathbf{E}$, $\mathbf{b}$ et $[\mathbf{E}, \mathbf{b}]$, car $[\mathbf{E}, \mathbf{b}]$ est perpendiculaire à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{b}$. Nous prenons donc la vitesse sous la forme $\mathbf{v} = a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{b} + a_3[\mathbf{E}, \mathbf{b}]$. L'équation (A.4) devient alors :

$$iw\mathbf{v} = iw[a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{b} + a_3[\mathbf{E}, \mathbf{b}]] = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{b} + a_3[\mathbf{E}, \mathbf{b}], \mathbf{B}_0],$$

avec $\mathbf{B}_0 =\mid B_0 \mid \mathbf{b}$.

En développant, on parvient à

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{b} + a_3[\mathbf{E}, \mathbf{b}] &= \frac{e}{imw}\mathbf{E} + \frac{e}{iwmc} \mid B_0 \mid a_1[\mathbf{E}, \mathbf{b}] \\ &+ \frac{e}{iwmc} \mid B_0 \mid a_2[\mathbf{b}, \mathbf{b}] + \frac{e}{iwmc} \mid B_0 \mid a_3[[\mathbf{E}, \mathbf{b}], \mathbf{b}]. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Or, $[\mathbf{b}, \mathbf{b}]$ est nul car le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul, ce qui nous amène à

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{b} + a_3[\mathbf{E}, \mathbf{b}] &= \frac{e}{imw}\mathbf{E} + \frac{e}{iwmc} \mid B_0 \mid a_1[\mathbf{E}, \mathbf{b}] \\ &+ \frac{e}{iwmc} \mid B_0 \mid a_3[\mathbf{b}(\mathbf{E}.\mathbf{b}) - \mathbf{E}(\mathbf{b}.\mathbf{b})], \end{aligned}$$

avec $(\mathbf{b}.\mathbf{b}) = \mathbf{b}^2 = 1$.

Par identification, nous avons

$$\begin{cases} a_1 &= \frac{e}{imw} - \frac{e|B_0|}{imwc}a_3 \\ a_2 &= \frac{e|B_0|}{imwc}a_3(\mathbf{E}.\mathbf{b}) \\ a_3 &= \frac{e|B_0|}{imwc}a_1. \end{cases}$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (A.5), on parvient à

$$\begin{cases} a_1 &= -\frac{iew}{m(w^2-w_{BE}^2)} \\ a_2 &= \frac{w_{BE}^2}{w^2}\frac{iew}{m(w^2-w_{BE}^2)}(\mathbf{E}.\mathbf{b}) \\ a_3 &= \frac{iw_{BE}}{w}\frac{iew}{m(w^2-w_{BE}^2)}, \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mathbf{v} = -\frac{iew}{m(w^2-w_{BE}^2)}\{\mathbf{E} - \frac{w_{BE}^2}{w^2}\mathbf{b}(\mathbf{E}.\mathbf{b}) - i\frac{w_{BE}^2}{w^2}[\mathbf{E},\mathbf{b}]\}, \tag{A.6}$$

où $w_{BE} = \frac{eB_0}{mc}$ est la pulsation du cyclotron.

A.1.2 Cas particulier

Si $\mathbf{E}.\mathbf{b} = 0$ et $w \longrightarrow \infty$, on trouve

$$\mathbf{v} \longrightarrow -\frac{e}{mw_{BE}^2}[\mathbf{E},\mathbf{b}]. \tag{A.7}$$

Dans notre cas, les champs magnétique B et électrique E sont perpendiculaires, la vitesse $\mathbf{v}$ a donc une seule composante v_θ.

Nous avons $\mathbf{B}_0 \sim \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{E} \sim \mathbf{e}_\rho$, donc $\mathbf{v} \sim \mathbf{e}_\theta$. D'où

$$\mathbf{v} = \frac{eE}{mw_{BE}}\mathbf{e}_\theta, \tag{A.8}$$

car $[\mathbf{E},\mathbf{b}] = \mathrm{A} = -E\mathbf{e}_\theta$, où A est la matrice $\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \mathrm{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

La particule décrit une orbite circulaire de rayon qui est déterminé par le champ électrique (différent du rayon de Larmor), défini par $r_B = \frac{v_T}{w_B}$.

Nous avons donc

$$-m\frac{v^2}{r_B}\mathbf{e}_\rho = -\frac{e}{c}vB_0\mathbf{e}_\rho,$$

d'où $r_B = \frac{v}{(\frac{eB_0}{mc})}$.

A.2 Particularités du mouvement des particules chargées

Dans cette section, nous allons étudier les particularités du mouvement des particules chargées dans les champs magnétique et électrique.

Soit le vecteur unitaire orienté le long du champ magnétique : $\mathbf{e} = \mathbf{B}/B$. On peut donc décomposer le champ électrique en deux parties, longitudinale et transversale : $\mathbf{E} = E_{\|}\mathbf{e} + \mathbf{E}_{\perp}$.

Multiplions l'équation (A.1) par $\mathbf{e}$. On trouve alors

$$\frac{dv_{\|}}{dt} = \frac{q}{m}E_{\|}. \tag{A.9}$$

On voit que le mouvement le long de l'axe z est le même qu'en absence de champ magnétique.

Il y a conservation de l'énergie "longitudinale" : $E_{\|tot} = mv_{\|}^2 + q\Phi(z)$, où l'intensité du champ $\mathbf{E}$ est liée au potentiel Φ par la relation $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. On a donc $E_{\|}(z) = -\partial_z\Phi(z)$. Les particules capturées par un "puits" énergetique "sautent" d'un mur énergétique à l'autre, $z_1 \leq z \leq z_2$ (voir la figure A.1).

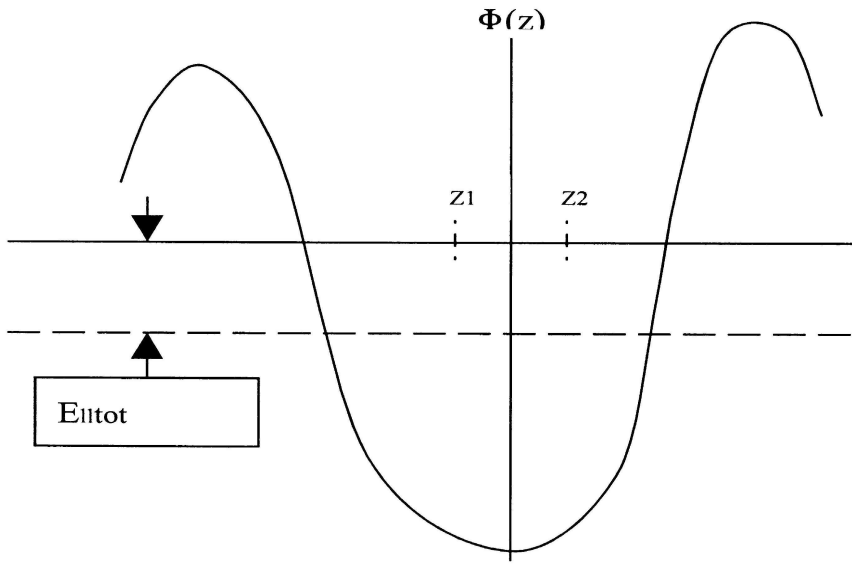


FIG. *A.1: "Puits" énergétique.*

Le mouvement transversal (dans le plan perpendiculaire à l'axe z) de la même particule est régi par l'équation

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_{\perp} = \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{B}]\right), \tag{A.10}$$

qui est obtenue à partir de (A.1) et (A.9) en prenant $\mathbf{v} - v_{\|}\mathbf{e}$. Si l'on pose

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}'_{\perp} + c\frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2} = \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}_D, \tag{A.11}$$

on trouve, pour la composante $\mathbf{v}'_{\perp}$, l'équation

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}'_{\perp} = \frac{qB}{mc}[\mathbf{v}'_{\perp}, \mathbf{e}]. \tag{A.12}$$

Cette équation montre que la particule se trouvant dans le référentiel (R') [figure A.2] qui se déplace avec la vitesse $\mathbf{v}_D$, tourne dans (R') avec la vitesse angulaire égale à la pulsation de cyclotron $\Omega_c = eB/mc$ autour de l'axe $0z$. Le sens de rotation est déterminé par le signe de q.

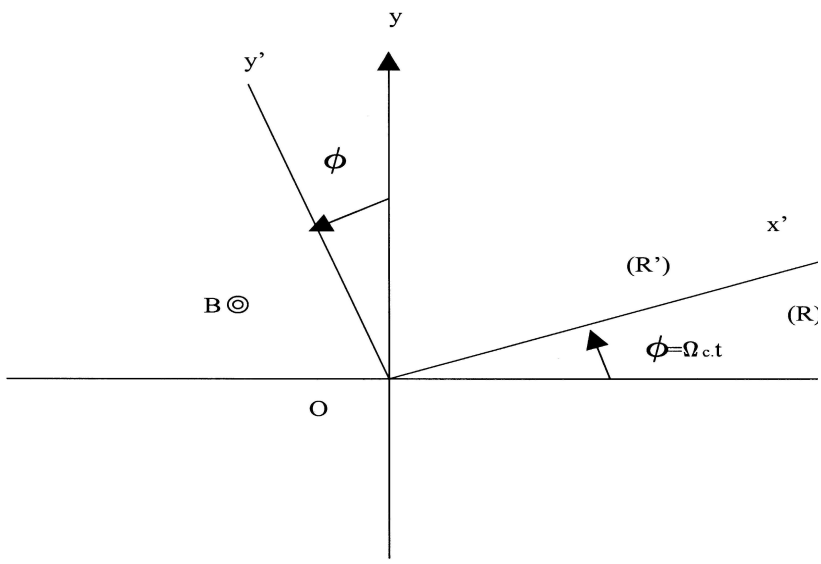


FIG. *A.2: Référentiels.*

La grandeur

$$\mathbf{v}_D = c\frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2} \tag{A.13}$$

est la vitesse de *dérive*. Elle caractérise un *effet collectif*. Elle ne dépend ni de la charge, ni de la masse de la particule. Lorsqu'on a $v_D/\Omega_c \ll 1$, la particule décrit une trajectoire circulaire autour d'un point (centre) qui se déplace lentement avec la vitesse de dérive v_D (figure A.3) : cette approximation est appelée l'approximation du *centre guidant*.

Alors, l'ensemble des particules chargées se déplace en collectif, ce qui donne la possibilité de considérer l'ensemble des particules comme un *fluide*.

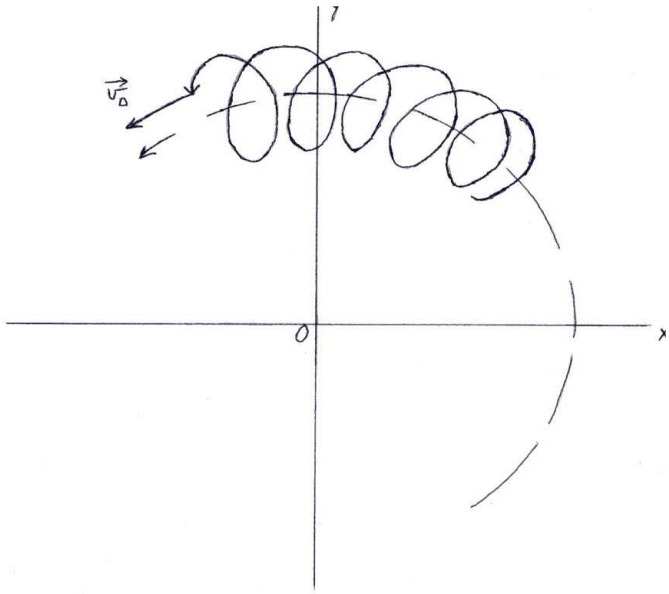


FIG. *A.3: Approximation du centre guidant.*

Annexe B

Modèle de base

B.1 Equations de base

Soit un système hydrodynamique dont l'évolution est régie par le système d'équations suivant :

$$\Big(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\Big)\mathbf{v} = -\nabla h - [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}], \tag{B.1}$$

$$\partial_t n + \nabla\cdot(n\mathbf{v}) = 0, \tag{B.2}$$

où ∂_t désigne la dérivée partielle par rapport au temps, ∇ représente l'opérateur de gradient, $\nabla\cdot$ ... est la divergence, [... , ...] est le produit vectoriel.

L'équation de continuité peut être réécrite sous la forme

$$\Big(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\Big) ln\, n = -div\, \mathbf{v}. \tag{B.3}$$

Dans ce qui suit, on considère le cas $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_3$, avec $\Omega = cte$.

Donnons deux exemples de modèle considéré par un tel système :

1. Dans le contexte du plasma, ce système décrit l'écoulement d'un fluide chargé dans un champ magnétique fort. Alors, la grandeur h doit être remplacée par $kT_e \ln n/m_e$, qui désigne le potentiel généralisé. Le vecteur $\mathbf{B}$ est l'induction du champ magnétique, $[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]$ est la force de Lorentz, $\Omega = eB/mc \equiv \Omega_c$ est la pulsation du cyclotron
2. Dans le contexte géophysique, le système peut décrire l'écoulement 2D pour une couche liquide *peu profonde* d'un fluide parfait dans un référentiel tournant avec la vitesse angulaire de rotation $(1/2)\mathbf{\Omega}$.

a. Vitesse de l'écoulement

Multiplions vectoriellement la première équation (B.1) par $\mathbf{\Omega}$

$$[\mathbf{\Omega}, \Big(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\Big)\mathbf{v}] = [\mathbf{\Omega}, \Big(-\nabla h - [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]\Big)].$$

Lorsque $\Omega = cte$, on obtient

$$(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{\Omega}, \nabla h] - [\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]].$$

En utilisant les formules connues de l'analyse vectorielle, on trouve que $[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]] = \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}) = -\mathbf{v}(\Omega\cdot\Omega)$, car $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{v}$ sont dans des directions perpendiculaires.

De ces expressions, nous déduisons que

$$(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{\Omega}, \nabla h] + \Omega^2\mathbf{v},$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\mathbf{v} = -\frac{[\nabla h, \mathbf{\Omega}]}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^2}\Big(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\Big)[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]. \tag{B.4}$$

Comparons maintenant en grandeur le membre de gauche et celui de droite.

Soit $|\mathbf{v}| \sim V$. On obtient, pour le second terme de droite, l'estimation

$$\Omega^{-2}\{\partial_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\}[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}] \sim \Omega^{-2}\, max\,\{T^{-1},\ V\,L^{-1}\}\,\Omega\,V.$$

Pour pouvoir appliquer la méthode d'itération, il faut que $\Omega T \gg 1,\ V \ll \Omega L$: ce qui signifie qu'on considère l'évolution relativement *lente* par rapport au temps caractéristique, et l'on considère que les vitesses sont *faibles*.

On pose donc que

$$\mathbf{v}^{(n+1)} = -\frac{[\nabla h, \mathbf{\Omega}]}{\Omega^2} + \underbrace{\frac{1}{\Omega^2}\Big(\partial_t + \mathbf{v}^{(n)}\cdot\nabla\Big)[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}^{(n)}]}. \tag{B.5}$$

On peut presenter cette équation sous la forme symbolique suivante :

$$\mathbf{v}^{(n+1)} = -\frac{[\nabla h, \mathbf{\Omega}]}{\Omega^2} + \hat{N}^{(n)}[\mathbf{e}_3, \mathbf{v}^{(n)}], \tag{B.6}$$

où $\mathbf{e}_3$ est le vecteur unitaire suivant $\mathbf{\Omega}$ et l'opérateur non linéaire $\hat{N}^{(n)}$ est donné par

$$\hat{N}^{(n)}\ldots = \frac{1}{\Omega}\Big(\partial_t + \mathbf{v}^{(n)}\cdot\nabla\Big)\ldots \quad . \tag{B.7}$$

Pour la première itération, nous aurons

$$\mathbf{v}^{(1)} = -\frac{[\nabla h, \mathbf{\Omega}]}{\Omega^2}. \tag{B.8}$$

Puis, nous trouvons :

$$\mathbf{v}^{(2)} = -\frac{[\nabla h, \mathbf{\Omega}]}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^2}\Big(\partial_t + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla\Big)[\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}^{(1)}],$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)} + \frac{1}{\Omega}(\partial_t + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla)[\mathbf{e}_3, \mathbf{v}^{(1)}].$$

Pour l'itération suivante, on a

$$\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}^{(1)} + \frac{1}{\Omega}(\partial_t + \mathbf{v}^{(2)} \cdot \nabla)[\mathbf{e}_3, \mathbf{v}^{(2)}],$$

et ainsi de suite.

En se limitant aux termes d'ordre $\leq (\nabla h)^2$, nous parvenons à

$$\mathbf{v}^{(2)} = -\frac{[\nabla h, \mathbf{e}_3]}{\Omega} + \frac{1}{\Omega}\Big(\partial_t + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla\Big)[\mathbf{e}_3, [-\frac{\nabla h}{\Omega}, \mathbf{e}_3]]. \tag{B.9}$$

Posons $h = h_0(1+\eta)$, et introduisons l'échelle spatiale caractéristique, $R^2 = h_0/\Omega^2$. Le paramètre R représente le rayon d'écrantation pour les phénomènes de plasma, ou le paramètre de Rossby pour les phénomènes géophysiques.

Dans ce cas,

$$\mathbf{v}^{(2)} = -\Omega R^2[\nabla\eta, \mathbf{e}_3] - R^2\{\partial_t + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla\}[\mathbf{e}_3, [\nabla\eta, \mathbf{e}_3]]. \tag{B.10}$$

Remarquons que nous pouvons faire quelques simplifications dans cette expression : en effet, $[\mathbf{e}_3, [\nabla\eta, \mathbf{e}_3]] = \nabla\eta(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3 \cdot \nabla\eta)$, avec $(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = 1$ et $(\mathbf{e}_3 \cdot \nabla\eta) = 0$, car $\mathbf{e}_3$ et $\nabla\eta$ sont dans des directions perpendiculaires.

On obtient donc

$$\mathbf{v} \simeq -\Omega R^2[\nabla\eta, \mathbf{e}_3] - R^2\partial_t\Delta\eta - R^2(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla)[\mathbf{e}_3, [\nabla\eta, \mathbf{e}_3]]. \tag{B.11}$$

b. Equation de continuité

Calculons maintenant $div\,\mathbf{v}$ pour ensuite l'introduire dans (B.2).

Pour le premier terme, nous aurons $\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} \sim \nabla \cdot [\nabla\eta, \mathbf{e}_3]$. En notation symbolique, on trouve que l'expression $A \equiv \partial_i\varepsilon_{ij3}\partial_j\eta = \varepsilon_{ij3}\partial_i\partial_j\eta$ est égale à zero, car si on permute $i \leftrightarrow j$, on

obtient $\varepsilon_{ji3}\partial_j\partial_i\eta = -\varepsilon_{ij3}\partial_i\partial_j\eta = -A$ (ce qui prouve que l'expression en question ($A = -A$) est nulle).

Pour le second, comme $[\mathbf{e}_3, [\nabla\eta, \mathbf{e}_3]] = \nabla\eta(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3 \cdot \nabla\eta)$, avec $(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = 1$ et $(\mathbf{e}_3 \cdot \nabla\eta) = 0$, car $\mathbf{e}_3$ et $\nabla\eta$ sont dans des directions perpendiculaires, nous trouvons l'expression $-R^2\partial_t\Delta\eta$, où $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ est l'opérateur de Laplace 2D.

Pour le dernier terme, on trouve $-R^2\partial_i\left(v_j^{(1)}\partial_j\partial_i\eta\right)$.

Finalement, l'équation (B.2) devient :

$$\partial_t\left(\ln n - R^2\Delta\eta\right) - R^2\partial_i\left(v_j^{(1)}\partial_j\partial_i\eta\right) = 0. \tag{B.12}$$

Regardons en détail l'expression $R^2\partial_i\left(v_j^{(1)}\partial_j\partial_i\eta\right)$, qui peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\partial_i\{(v_j{}^{(1)}\partial_j)\partial_i\eta\} &= (\partial_i v_j{}^{(1)})\partial_j\partial_i\eta + v_j{}^{(1)}\partial_j\partial_i\partial_i\eta \\ &= (\partial_i v_j{}^{(1)})\partial_j\partial_i\eta + v_j{}^{(1)}\partial_j\Delta\eta.\end{aligned}$$

Le premier terme ici s'annule : en effet, $(\partial_i v_j{}^{(1)})\partial_j\partial_i\eta$ est proportionnel (aux termes d'ordres supérieurs près) à $\sim (\partial_i\varepsilon_{jk3}\partial_k\eta)\partial_j\partial_i\eta = \varepsilon_{jk3}(\partial_i\partial_k\eta)(\partial_j\partial_i\eta)$. Si l'on permute les indices muets $j \leftrightarrows k$, on obtient

$$A = \varepsilon_{jk3}(\partial_i\partial_k\eta)(\partial_i\partial_j\eta) = \varepsilon_{kj3}(\partial_i\partial_j\eta)(\partial_i\partial_k\eta) = -\varepsilon_{jk3}(\partial_i\partial_k\eta)(\partial_i\partial_j\eta) = -A,$$

ce qui donne $A = 0$.

Lorsque dans ce cas $R^2\partial_i\{(v_j{}^{(1)}\partial_j)\partial_i\eta\} = R^2 v_j{}^{(1)}\partial_j\Delta\eta$, on parvient à

$$\partial_t(\ln n - R^2\Delta\eta) - R^2(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla)\Delta\eta = 0. \tag{B.13}$$

Pour l'approximation utilisée, on a

$$(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) = -\Omega R^4[\nabla, \mathbf{e}_3] \cdot \nabla\Delta\eta. \tag{B.14}$$

En tenant compte du fait que les vecteurs $\nabla\, n$ et $\nabla\,\eta$ sont colinéaires - en effet $1+\eta = \ln\, n$, où l'unité est sans intérêt - on a

$$-\Omega[\nabla\eta, \mathbf{e}_3] \cdot \nabla \ln\, n \equiv 0.$$

On ajoute cette expression à l'équation obtenue, et on trouve finalement

$$\partial_t(\frac{\eta}{R^2} - \Delta\eta) - \Omega R^2[\nabla\eta, \mathbf{e}_3] \cdot \nabla(\frac{\eta}{R^2} - \Delta\eta) = 0, \tag{B.15}$$

avec

$$\mathbf{v}^{(1)} = -\Omega R^2[\nabla\eta, \mathbf{e}_3]. \tag{B.16}$$

Remarquons que nous respectons la condition de non compressibilité, $\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0$, car nous avons vu précédemment que $\nabla \cdot [\nabla\eta, \mathbf{e}_3] = 0$.

B.2 Fonction de courant et vorticité potentielle

Introduisons la "fonction de courant" selon la formule

$$v_i^{(1)} = \epsilon_{ij3}\partial_j\psi = -\Omega R^2\epsilon_{ij3}\partial_j\eta, \tag{B.17}$$

d'où

$$\psi = -\Omega R^2\eta. \tag{B.18}$$

La "vorticité potentielle" est définie par l'expression

$$q = -\Delta\psi + \frac{1}{R^2}\psi. \tag{B.19}$$

Ici, $R \sim \sqrt{kT_e/m_e}/\Omega_c$ est le rayon du cyclotron.

L'évolution de cette grandeur est régie par l'équation (B.15), qui prend la forme

$$\Big(\partial_t + (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla)\Big)q = 0. \tag{B.20}$$

Annexe C

Informations sur la mécanique statistique et thermodynamique

Il semble utile de préciser quelques points sur les fondaments de la mécanique statistique, ainsi que sur la manifestation possible des *conditions initiales*.

La physique statistique classique ou *statistique* étudie les lois particulières régissant le comportement et les propriétés des systèmes macroscopiques, c'est-à-dire des systèmes composés d'un très grand nombre de particules. En écrivant les équations du mouvement d'un système, en nombre égal aux degrés de liberté du système, et en les intégrant, on peut, tout au moins en principe, obtenir une description complète du mouvement du système. Mais si le système considéré, quoique soumis aux lois de la mécanique classique, a un grand nombre de degrés de liberté, pour appliquer les méthodes de la mécanique, il est indispensable d'écrire et de résoudre un nombre égal d'équations différentielles, ce qui est pratiquement impossible. Il faut noter que, même si l'on pouvait écrire la solution générale de ces équations, il serait absolument impossible d'y introduire les *conditions initiales* pour les vitesses et les coordonnées des particules, ne serait–ce qu'à cause du temps et de la quantité de papier nécessaires.

A première vue, on pourrait conclure que lorsque le nombre de particules est grand, les propriétés du système mécanique deviennent infiniment compliquées et il devient donc impossible de trouver, dans le comportement du système macroscopique, toute trace de loi. Mais, il en est tout autrement et dans un système composé d'un grand nombre de particules on voit apparaître des lois toutes particulières. Ces lois, dites statistiques, proviennent justement de la présence d'un grand nombre de particules composant le système et ne peuvent en aucun cas se réduire à des *lois purement mécaniques* (*équations dynamiques + conditions initiales*). Les lois statistiques *perdent tout sens lorsque l'on passe à un système mécanique ayant un nombre relativement petit de degrés de liberté, à un système mécanique régi par des équations dynamiques d'évolution complétées par des conditions initiales,* d'où leur caractère spécifique.

Soit un système *macroscopique*. Supposons le système isolé, c'est–à–dire n'interagisant avec aucun autre système. Imaginons que nous avons isolé une partie de ce système. Cette partie, tout en étant très petite par rapport au système tout entier, reste macroscopique ($N \sim 10^9$ dans le cas de l'expérience en question). Il est évident que lorsque le nombre de particules dans le système entier est suffisamment grand, le nombre de particules dans la petite partie peut également être assez grand. Nous appellerons de telles parties relativement petites mais macroscopiques, des sous–systèmes. Le sous–système obtenu est de nouveau un système mécanique, mais non plus isolé. Bien au contraire, il est soumis à des actions diverses de la part des autres parties du système. A cause du grand nombre de degrés de liberté des autres parties, les interactions ont un caractère compliqué. L'état du sous–système considéré variera donc dans le temps également d'une manière compliquée. Pour obtenir la solution du problème donnant le comportement du sous–système, il faut résoudre le problème mécanique pour le système isolé en entier, c'est-à-dire *écrire et résoudre toutes les équations différentielles du mouvement pour des conditions initialisables*. Mais, fort heureusement, c'est justement cette impossibilité de fixer des conditions initiales et variations infiniment compliquées des sous–systèmes (rendant inapplicables les méthodes de la mécanique), qui permet d'aborder le problème d'un tout autre côté.

Ce qui précède montre que la statistique permet de faire des déductions et des prévisions concernant le comportement des systèmes macroscopiques ayant un caractère aléatoire. Il faut cependant remarquer que le caractère aléatoire des résultats de la statistique classique ne provient pas de la nature même des objets considérés, mais uniquement du fait que les résultats sont obtenus à partir d'un nombre de données *moindre* que celui qui aurait été nécessaire pour la description mécanique complète (*il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs initiales des coordonnées et des impulsions*).

Cependant, en pratique, lorsque que l'on applique la statistique aux systèmes macroscopiques, son caractère aléatoire ne se manifeste généralement pas du tout. Ceci provient du fait que, lorsque l'on observe un système macroscopique quelconque (se trouvant dans des conditions extérieures stationnaires, c'est-à-dire ne dépendant pas du temps) *durant un intervalle de temps suffisamment long, toutes les grandeurs physiques caractérisant ce système se trouvent être pratiquement constantes (égales à leurs valeurs moyennes)* et ce n'est que très général (c'est d'autant plus vrai que le système considéré est plus compliqué).

Si, à l'aide de la fonction de distribution statistique des états représentés par des points dans le volume $dqdp = dq_1...dq_N dp_1...dp_N$ de l'espace de phase $\rho(p, q)$, on construit la fonction de distribution des probabilités des différentes valeurs de la grandeur quelconque $f(p, q)$,

cette fonction aura un maximum très net pour $f = \bar{f}$ (où $\overline{f} = \int dqdpf(p,q)\rho(p,q)$), et ne différera notablement de zéro que très près du point correspondant au maximum. Ainsi, la statistique, qui permet de calculer les valeurs moyennes des grandeurs caractérisant les systèmes macroscopiques, permet de faire des prédictions se réalisant avec une grande précision pour la majeure partie d'un intervalle de temps suffisamment long *pour que l'influence des conditions initiales disparaisse*. En ce sens, les prédictions de la statistique ont un caractère non pas aléatoire, mais pratiquement déterminé. Si un système macroscopique isolé se trouve dans un état tel que les grandeurs physiques "macroscopiques" relatives à une de ses parties (qui est elle-même un système macroscopique) sont égales avec une précision relativement grande à leurs valeurs moyennes, on dit que ce système se trouve *en équilibre statistique* (on dit aussi équilibre *thermodynamique*).

Ainsi, si on observe un système macroscopique isolé durant un intervalle de temps suffisant, la majeure partie de ce temps le système se trouvera en équilibre statistique. Si à un moment initial quelconque, le système macroscopique isolé ne se trouvait pas en équilibre statistique (par exemple, s'il était artificiellement mis hors de cet équilibre par des actions extérieures, puis était laissé à lui-même, donc redevenu un système isolé), dans la suite il reviendra obligatoirement vers cet équilibre. L'intervalle de temps durant lequel le système doit obligatoirement passer à l'équilibre statistique est appelé temps de relaxation. Lorsque ci–dessus il était question d'intervalles de temps suffisamment grands, on sous-entendait de temps supérieurs au temps de relaxation.

Ce n'est pas le cas observé par les expérimentateurs [23] ("... the character of the relaxed state generally depends strongly on initial conditions and dynamics").

Annexe D

Dynamique des tourbillons ponctuels

D.1 Champs tourbillonnaires

Que connaît-on sur les tourbillons bidimensionnels ?

Cette annexe a été tirée de [19].

Les modèles décrivant les systèmes bidimensionnels tourbillonnaires (vortex-like fields), sont régis par l'équation d'évolution

$$\partial_t \Omega - \epsilon_{ij} \partial_i \psi \partial_j \Omega = 0, \tag{D.1}$$

où le champ de "vorticité généralisé" Ω et la "fonction de courant" ψ, avec $v_i = \epsilon_{ij} \partial_j \psi,\ i, j = 1, 2$, ($\epsilon_{ij}$ est le tenseur antisymétrique de Levi-civitta, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$) sont reliés par la relation de l'opérateur,

$$\Omega = \hat{L}(\psi). \tag{D.2}$$

Pour l'équation d'Euler bidimensionnelle, $\Omega = -\Delta\psi$, et $\hat{L}(\psi) \equiv -\Delta\psi$. Il existe d'autres modèles, par exemple, les modèles de "vorticité cachée" définis à l'aide de l'opérateur $\hat{L} = -(\Delta - 1/a^2)$: (i) le modèle de plasma basé sur l'équation de Hasegawa-Mima, (ii) le modèle axial des tourbillons électriques, et (iii) le modèle barotropique quasi-géophyique, ...

Sans la formulation Hamiltonienne, il n'est pas évident de savoir comment construire la mécanique statistique. Cette formulation inclut quelques éléments de base et pas seulement l'Hamiltonien.

Le modèle régi par (D.1) - (D.2) donne un exemple de système Hamiltonien avec un nombre continu de degrés de liberté. De tels systèmes évoluent selon la loi

$$\partial_t u_i = \{u_i,\ H\} = \int d\mathbf{x}' \{u_i,\ u'_j\} \frac{\delta H}{\delta u_j(\mathbf{x}')}, \tag{D.3}$$

où l'Hamiltonien du système, H, est la quantité -énergie- dépendant fonctionnellement des champs u_i, l'opérateur $\delta/\delta u$ est l'opérateur de dérivée fonctionnelle. Les dérivées des variables dynamiques, $F[u]$, sont calculées en utilisant la relation $\delta u_i(\mathbf{x})/\delta u_j(\mathbf{x}') = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.

La structure Hamiltonnienne du système, avec un nombre continu de degrés de liberté, est constituée de l'Hamiltonien donné par l'énergie totale H, et le crochet fonctionnel de Poisson $\{.\,,\,.\}$. Ce crochet est antisymétrique bilinéaire et satisfait l'identité fonctionnelle de Jacobi présentée symboliquement sous la forme

$$\{A,\,\{B\,,\,C\}\} + \{B,\,\{C\,,\,A\}\} + \{C,\,\{A\,,\,B\}\} = 0. \tag{D.4}$$

La conservation de l'énergie provient de la formulation donnée des équations dynamyques, car $\partial_t H = -\{H, H\} = 0$.

Pour les VL-champs bidimensionnels, les équations d'évolution (D.1)-(D.2) peuvent être réécrites sous la forme hamiltonnienne

$$\partial_t \Omega = \{\Omega, H\} = \int d\mathbf{x}'\{\Omega, \Omega'\}\frac{\delta H}{\delta \Omega'} = \epsilon_{ik}\partial_i \frac{\delta H}{\delta \Omega}\partial_k \Omega, \tag{D.5}$$

avec les crochets fonctionnels de Poisson

$$\{\Omega,\,\Omega'\} = \epsilon_{ik}\partial'_i\Omega'\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{D.6}$$

et l'Hamiltonien

$$H = -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\Omega'. \tag{D.7}$$

La fonction de Green est la solution de l'équation

$$\hat{L}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x},\mathbf{x}'). \tag{D.8}$$

Ces équations de mouvement peuvent être appliquées lorsque le fluide est confiné dans un domaine borné ; dans ce cas, l'Hamiltonien est modifié et doit être déterminé en terme de fonction de Green dépendant de la géométrie de domaine.

D.2 Difficultés

Deux obstacles évidents sont rencontrés dans les applications des méthodes approximatives aux systèmes fluides. Tout d'abord, les fluides ont un nombre infini de degrés de liberté. Ensuite, les fluides parfaits ont un nombre infini d'intégrales de mouvement (circulation,

enstrophie, et autres moments dynamiques) et de "Casimirs", Z_k, (les Casimirs du crochet fonctionnel de Poisson satisfont la condition $\{u_i, Z_k\} = 0$). Les "trajectoires" du système dans l'espace de phase infini-dimensionnel sont les sous-sections du nombre infini de surfaces correspondant aux intégrales de mouvement.

Ce fait est dû à la formulation des équations de mouvement du fluide en terme de dérivées fonctionnelles (D.5).

Quoi qu'il en soit, dans ce cas, une application formelle des méthodes approximatives aux systèmes hydrodynamiques avec un nombre continu de degrés de liberté, avec des *crochets fonctionnels de Poisson dépendants des champs*, (par exemple similaires à (D.6), c'est-à-dire sous la forme *non canonique*) peut amener à des équations qui n'ont pas la forme conservative : la perte de la conservation dans les systèmes de Liuville est fréquemment observée dans les expériences numériques. Cette perte de conservation, de même qu'une violation possible de la propriété de Jacobi, (D.4), dans les simulations peut avoir lieu, non pas à cause des changements physiques dans le système, mais à cause des erreurs numériques accumulées dans le schéma de calcul.

Cette remarque a une signification particulière dûe au fait que l'on utilise des modèles discrets avec une correspondance adéquate avec des analogies continues.

Une sélection des méthodes approximatives ou numériques imposent une exigence spéciale sur la structure du crochet fonctionnel de Poisson (D.6) : les méthodes approximatives sont effectivement plus réalisées dans le contexte de la formulation *canonique* lorsque, dans ce cas, les crochets fonctionnels de Poisson sont indépendants des variables de champs. Dans ce cas, seul un objet pour l'approximation reste : l'Hamiltonien et correspond aux calculs, qui peuvent avoir un caractère encombrant, récurent, et ne sont pas repliés avec l'augmentation du nombre d'itérations.

Pour cette raison, il est préférable de formuler les équations d'évolution pour les champs similaires aux champs tourbillonnaires dans la direction où les crochets fonctionnels de Poisson sont *indépendants des champs*.

D.3 VL-champs singuliers

Dans le cas bidimensionnel, une possibilité pour la troncature est d'approximer le champ de vorticité à l'aide d'un modèle de tourbillon ponctuel (i) les tourbillons ponctuels sont les solutions exactes des équations d'Euler, (ii) ils respectent toutes les intégrales de mouvement du fluide. Si $N \to \infty$, la solution converge vers la solution des équations d'Euler. Les tour-

billons ponctuels sont d'excellents candidats pour le rôle de structures élémentaires. L'avantage principal des tourbillons ponctuels, dans ce contexte, est leur localisation aux petites échelles. Rappelons qu'à condition d'une quasi absence de dissipation, lorsque le nombre de Reynolds est extrêmement grand, l'utilisation d'autres approches numériques traditionnelles est extrêmement difficile.

Naturellement, les modèles avec des champs singuliers présentent des modèles mathé–matiques commodes dans les situations où les effets des noyaux des tourbillons peuvent être considérés comme négligeables.

Nous pouvons surmonter les difficultés si nous construisons une telle troncature des équations d'Euler, qui respecte automatiquement toutes les intégrales du mouvement du fluide et ont un nombre fini de degrés de liberté N. Ayant à l'esprit que la théorie formulée peut être étendue aux champs continus et aux systèmes de taches ou aux VL-champs singuliers, nous fixons maintenant notre intérêt sur les VL-champs singuliers.

On considère un VL-champ ("tourbillonnaire") singulier, $\Omega(\mathbf{x}) = -\Delta\Phi$, où

$$\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{(i)} \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)}). \tag{D.9}$$

Ici, $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)})$ est la fonction de Dirac bidimensionnelle. Dans ce cas, nous obtenons que

$$\{\Omega, \Omega'\} = \sum_{m,n}{}' \sum_{i,k} \gamma_{(m)} \gamma_{(n)} \partial_k \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial'_i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{x_k^{(m)}, x_i^{(n)}\}. \tag{D.10}$$

En substituant cette expression dans (D.6) et en comparant les coefficients des fonctions delta et de leurs dérivées, on trouve que les crochets de Poisson, pour les coordonnées des "tourbillons" singuliers, sont donnés par la formule :

$$\{x_k^{(m)}, x_i^{(n)}\} = \gamma_{(m)}^{-1} \delta_{mn} \epsilon_{ik}. \tag{D.11}$$

Le point crucial de cette formulation est que les crochets de Poisson sont indépendants des variables de champ.

Pour trouver l'équation de mouvement des singularités de champ, nous calculons au départ $\partial_t x_i^{(m)}$. Nous obtenons que

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \partial_t \Omega' = \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \{\Omega', H\}. \tag{D.12}$$

En tenant compte des lois de la dérivation fonctionnelle, nous obtenons la relation suivante :

$$\int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \{\Omega',\, H\} = \{x_i^{(m)},\, H\} = \int d\mathbf{x}' \{x_i^{(m)},\, x'^{(n)}_j\} \frac{\delta H}{\delta x'^{(n)}_j}, \tag{D.13}$$

et en utilisant (D.11), nous trouvons finalement que :

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int d\mathbf{x}' \{x_i^{(m)},\, x'^{(n)}_j\} \frac{\delta H}{\delta x'^{(n)}_j} = \gamma^{-1}_{(m)} \epsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j^{(m)}}. \tag{D.14}$$

L'équation (D.14) est générale car elle est appliquée à la distribution tourbillonnaire (D.9) avec (D.8), pour un domaine borné arbitraire.

C'est le cas le plus simple qui est utilisé largement en théorie traditionnelle et pour les applications numériques. Si $v_i = \epsilon_{ij}\partial_j \psi,\ \Omega = -\Delta\psi$, l'Hamiltonien -énergie totale du système- $H = (1/2)\int d\mathbf{x}\, v^2 = -(1/2)\int d\mathbf{x}\, \psi\Delta\psi$, peut être présenté, dans le cas d'un plan infini, comme $H = (1/4\pi)\sum_{i,j}{}' \gamma_{(i)}\gamma_{(j)} \ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$. Ici, $-(1/2\pi)\ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ est la fonction de Green, $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$: solution de l'équation $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, où $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est la fonction de Dirac dans un domaine infini.

L'équation de mouvement est donnée par (D.14).

Cette formulation spéciale correspond exactement au concept traditionnel pour les tourbillons ponctuels se déplaçant dans un plan infini $x0y$. Le résultat classique de Kirchoff (1876) statut que les équations du mouvement du tourbillon ponctuel peuvent être écrites comme $\gamma_i \partial_t x_i = \partial\psi/\partial y_i,\ \ \gamma_i \partial_t y_i = -\partial\psi/\partial x_i$. Ici, la fonction de courant $\psi = \psi(x_i, y_i)$ est fréquemment appelée "l'énergie cinétique d'interaction". Notons toutefois que la fonction de courant n'évoque pas une énergie "cinétique" des tourbillons dans le sens habituel. Ceci est lié au fait particulier qu'un tourbillon ponctuel produit une vitesse, et non une accélération : certes le terme $\gamma_{(n)}\partial_t x_i$ a la dimension d'une accélération LT^{-2}, mais celui-ci n'est pas une accélération. C'est la vitesse de déplacement du tourbillon multiplié par un facteur, $\gamma_{(m)}$, qui a la dimension $[\gamma_{(m)}] = T^{-1}$. Les tourbillons ponctuels forment donc un système Hamiltonien très particulier.

Annexe E

Compléments mathématiques

E.1 Intégrale $A_n(b,a) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \ln \frac{b-\cos\theta}{a-\cos\theta} \, \exp in\theta$

On considère l'intégrale

$$A_n(b,a) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \ln \frac{b-\cos\theta}{a-\cos\theta} \, \exp in\theta. \tag{E.1}$$

En introduisant

$$B_n(c) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\exp in\theta}{c-\cos\theta}, \tag{E.2}$$

nous pouvons écrire l'intégrale (E.1) comme

$$A_n(b,a) = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} dc \, B_n(c). \tag{E.3}$$

L'intégrale $B_n(b,a)$ peut être réécrite comme

$$B_n(c) = -i\int_{-\pi}^{\pi} d(e^{i\nu}) \frac{e^{i(n-1)\nu}}{c-\frac{1}{2}(e^{i\nu}+e^{-i\nu})}, \tag{E.4}$$

ou sous la forme d'intégrale de contour

$$B_n(c) = +2i\int_{C} dz \frac{z^n}{z^2-2cz+1}, \tag{E.5}$$

où $z = \exp(i\theta)$. Cette intégrale de contour est calculée sur le cercle unité C.

Dans le plan complexe z, il y a 2 pôles $z_{1,2}$: $z_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2-1}$, $Imc = 0$, $c > 1$ et le point de bifurcation $z = 0$ si n n'est pas un entier.

Soit $n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. La valeur de l'intégrale (E.5) est définie par le résidu en $z_1 = c - \sqrt{c^2-1}$ seulement, car $z_2 = 1/z_1$ est hors du cercle.

Après le contour fermé C, nous obtenons

$$B_n(c) = +2i\frac{z_1^n}{2\sqrt{c^2-1}}(i2\pi) = \frac{d}{dc}\left[\frac{2\pi}{n}\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)^n\right]. \tag{E.6}$$

En rassemblant ces résultats, nous trouvons que

$$\begin{aligned} A_n(b,a) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \ln\frac{b-\cos\theta}{a-\cos\theta}\, \exp in\theta = \\ &= \frac{\pi}{n}\left[\left(b-\sqrt{b^2-1}\right)^n - \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n\right]. \end{aligned} \tag{E.7}$$

En utilisant les expressions pour a et b, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} A_n(b,a) &= -\frac{\pi}{n}\left[\left(\frac{r^2+r_1^2-|r^2-r_1^2|}{2r_1r}\right)^n\right. \\ &\left.-\left(\frac{1+r^2r_1^2-|1-r^2r_1^2|}{2r_1r}\right)^n\right] = -\frac{\pi}{n}\left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n - \left(rr_1\right)^n\right], \end{aligned} \tag{E.8}$$

car $r, r_1 < 1$. Ici, $r_>$ ($r_<$) est le plus grand (plus petit) des r et r_1, et on a $n \neq 0$.

Si $n = 0$, on a

$$A_0(b,a) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \ln\frac{b-\cos\theta}{a-\cos\theta} = \pi\ln\frac{b-\sqrt{b^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}, \tag{E.9}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A_0(b,a) &= -\pi\left[\ln\frac{r^2+r_1^2-|r^2-r_1^2|}{2r_1r}\right. \\ &\left.-\ln\frac{1+r^2r_1^2-|1-r^2r_1^2|}{2r_1r}\right] = -\pi\left[\ln\frac{r_<}{r_>} - \ln rr_1\right]. \end{aligned} \tag{E.10}$$

Finalement, cette expression peut être donnée par la formule

$$\begin{aligned} A_0(b,a) &= -\pi\left[\ln\frac{r_<}{r_>} - \ln rr_1\right] = \\ &+2\pi(\ln r_1)\Theta(r_1-r) + 2\pi(\ln r)\Theta(r-r_1), \end{aligned} \tag{E.11}$$

où $\Theta(s)$ est la fonction de Heaviside.

E.2 Composantes de Fourier pour $\ln(1-\lambda\cos\theta)$

En calculant les intégrales de type (5.13), nous pouvons utiliser des identités usuelles. Pour une fonction périodique, $V(\theta) = V(\theta+2\pi)$, on a la représentation

$$V(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp in\theta, \tag{E.12}$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \, V(\theta') \, \exp(-in\theta'). \tag{E.13}$$

Ayant $V(\theta) = \ln(1 - \lambda \cos \theta)$, nous obtenons (les calculs sont identiques à ceux de la section précédente)

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \cos n\theta \, \ln\Big(a - \cos \theta\Big) = \\ -\frac{2\pi}{n}\Big(a - [a^2 - 1]^{1/2}\Big)^n, \tag{E.14}$$

quand $n > 0$. Si $n = 0$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \ln\Big(1 - \lambda \cos \theta\Big) = \pi \ln\Big(1 + [1 - \lambda^2]^{1/2}\Big). \tag{E.15}$$

Soit $\lambda = 2r_1 r/(r_1^2 + r^2)$. Les coefficients sont

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \, V(\psi) \, \exp(-in\psi) = \\ = -\frac{1}{n}\left(\frac{(r_1^2 + r^2) - |r_1^2 - r^2|}{2r_1 r}\right)^n = -\frac{1}{n}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n. \tag{E.16}$$

Ici, $r_>$ ($r_<$) est le plus grand (plus petit) des r et r_1.

E.3 Moment angulaire

Le rôle du moment angulaire n'est pas clair.

Il reste à considérer un invariant qui survient à cause de la symétrie azimutale de l'Hamiltonien dans (5.49), à savoir le moment angulaire $P_\theta = \int d\mathbf{x} \, [\mathbf{x}, \mathbf{v}]$. Soit la condition $\psi|_{\partial D} = 0$. Après plusieurs opérations, nous trouvons

$$P_\theta = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \, r^2 \, \Omega. \tag{E.17}$$

Ainsi, pour les tourbillons ponctuels,

$$P_\theta = -\frac{1}{2} \sum \gamma_i r_i^2. \tag{E.18}$$

Il n'y a pas d'autres invariants dynamiques.

La conservation du moment implique que l'espace phase accessible *est borné même sans une paroi cylindrique*. En fait, la valeur maximale du domaine peut être estimée à partir de

$2P'_\theta = N\langle r_i^2\rangle|_{t=0} = r_{max}^2$. Si $r_{max} \ll R$, les effets de bord sont petits. Dans le cas contraire, $\langle r_i^2\rangle \sim R$, les effets de bord sont prédominants.

Contrairement à l'Hamiltonien, l'invariance du moment n'est pas robuste dans le sens où de petites perturbations du problème détruisent cette invariance (par exemple, de petites perturbations des parois du cylindre sont elliptiques).

E.4 Intégrale $I_m(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{B_m(r)+\cos(m-1)\theta}$

Dans les calculs du coefficient de normalisation, de la distribution énergétique, ..., il est fréquemment nécessaire de calculer l'intégrale

$$I_m(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{B_m(r) + \cos(m-1)\theta}. \tag{E.19}$$

Cette intégrale peut être réécrite sous la forme d'intégrale de contour

$$I_m(r) = -2i(m-1)\int_C \frac{dz}{z^2 + 2B_m z + 1}, \tag{E.20}$$

où $z = \exp(i\theta)$; l'intégrale est calculée sur le cercle unité C dans le plan complexe z. Il y a deux pôles $z_{1,2}$: $z_{1,2} = -B_m \pm \sqrt{B_m^2 - 1}$. Remarquons que $ImB_m = 0$ et $B_m > 1$. Il y a aussi le point de bifurcation $z = 0$ si m n'est pas un entier. On obtient

$$\begin{aligned} I_m(r) = \Bigg[&-2i(m-1)\frac{1}{z_1 - z_2}\int_C \frac{dz}{z - z_1} \\ &-2i(m-1)\frac{1}{z_1 - z_2}\int_C \frac{dz}{z - z_2}\Bigg]. \end{aligned} \tag{E.21}$$

Soit $m \geq 0,\ m = 1, 2, \ldots$. La valeur de l'intégrale (E.21) est donc définie par le résidu en $z_1 = -B_m + \sqrt{B_m^2 - 1}$ seulement, car z_1 se trouve dans le contour, tandis que $z_2 = 1/z_1$ et le second pôle se trouve donc hors du cercle.

Après le calcul de l'intégrale de contour le long de C, nous obtenons

$$I_m(r) = [-2i(m-1)\frac{1}{2\sqrt{B_m^2 - 1}}(i2\pi)] = \frac{2\pi(m-1)}{\sqrt{B_m^2 - 1}}. \tag{E.22}$$

Il y a une convergence de l'intégrale dans (6.32)

$$\begin{aligned} J_m &= 2\pi(m-1)\int_0^\infty \frac{dr}{r^{m+2}}[(B_m - A_m)\partial_{B_m} + 1] \\ &\qquad\qquad \times \frac{1}{\sqrt{B_m^2 - 1}} \\ &= 2\pi(m-1)\int_0^\infty \frac{dr}{r^{m+2}(B_m^2-1)^{3/2}} \times \\ &\qquad \times[-(B_m - A_m)B_m + (B_m^2 - 1)] \\ &= 2\pi(m-1)\int_0^\infty \frac{dr}{r^{m+2}(B_m^2-1)^{3/2}}[A_m B_m - 1]. \end{aligned} \tag{E.23}$$

En effet, on a, pour $r \ll 1$ ou $r \gg 1$, $B_m(r) \gg 1$. Sur la limite inférieure, $A_m(r) \sim r^{-(m-1)}$, $B_m(r) \sim r^{-(m+1)}$. Dans le domaine $r \gg 1$, $A_m(r) \sim r^{m-1}$, $B_m(r) \sim r^{m-1}$. Rappelons que lorsque $A_m > 1$ et $B_m > 1$ strictement, l'intégrale (E.23) est positive.

Bibliographie

[1] C. Basdevant and al. A study of barotropic model flows : intermittency, waves and predictibility. *J. Atmos. Sci.*, 38 :2305–2326, 1981.

[2] G. K. Batchelor. *Phys. Fluids Suppl. II*, 12 :233, 1969.

[3] R. Benzi and al. A simple point vortex model for two-dimensional decaying turbulence. *Phys. Fluids A*, 4 (5) :1036–1039, 1992.

[4] R. Benzi, S. Patarnello, and P. Santangelo. Self-similar coherent structures in two-dimensional decaying turbulence. *J. Phys. A*, 21 :1221–1237, 1988.

[5] V. L. Berdichecsky. Statistical mechanics of point vortices. *Phys. Rev. E*, 51, 5 :4432, 1995.

[6] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, and M. A. Sokolovskii. Fundamental and applied problems in the theory of vortices. *Institute of computer Science*, 704, 2003.

[7] V. Borue. Spectral exponents of enstrophy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :3967–3970, 1993.

[8] V. Borue. Inverse energy cascade instationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72 :1475–1478, 1994.

[9] O. Bühler. Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder. *Phys. Fluids*, 14, 7 :2139, 2002.

[10] E. Caglioti and al. A special class of stationary flows for two-dimensional euler equation : a statistical mechanics description. *Commun. Math. Phys.*, 143 :501–525, 1992.

[11] G. F. Carnevale and al. Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2735–2737, 1991.

[12] G. F. Carnevale and al. Rates,pathways, and end states of nonlinear evolution in decaying two-dimensional turbulence : Scaling theory versus selective decay. *Phys. Fluids A*, 4 :1314–1316, 1992.

[13] R. Chasnov. On the decay of two-dimensional homogeneous turbulence. *J. Phys. Fluids*, 9 :171–180, 1997.

[14] A. Chekhlov and al. The effect of small-scaloe forcing on large-scale structures in two-dimensional flows. *Physica D*, 98 :321–334, 1996.

[15] B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5) :263–379, 1979.

[16] A. J. Chorin. Partition functions and equilibrium measures in two-dimensional and quasi-three-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 8 (10) :2656–2660, 1996.

[17] D. G. Crowdy. A class of exact multipolar vortices. *Phys. Fluids*, 11 :2556, 1999.

[18] S. Danilov and D. Gurarie. Quasi-two-dimensional turbulence. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 170 (9) :921–968, 2000.

[19] S. Decossin. Etude de l'auto-organisation des structures tourbillonnaires bidimensionnelles localisées. *Thèse*, 2002.

[20] C. F. Driscoll, D. Z. Jin, D. A. Schecter, E. J. Moreau, and D. H. Dubin. Dynamics, statistics and vortex crystals in the relaxation of 2d turbulence. *Phys. Scr.*, 84 :76–80, 2000.

[21] D. G. Dritschel. Vortex proporties of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, 5 :984–997, 1993.

[22] D. Durkin and J. Fajans. Experiments of two-dimensional vortex patterns. *Phys. Fluids*, 12 :289, 2000.

[23] K. S Fine, A. S. Cass, W. G. Flynn, and C. F. Driscoll. Relaxation of 2d turbulence to vortex crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3277–3280, 1995.

[24] V. P. Goncharov, V. M. Gryanik, and V. I. Pavlov. Venusian "hot spots" : Physical phenomenon and its quantification. *Phys. rev. E*, 66 (6) :066304, 2002.

[25] V. P. Goncharov and V. Pavlov. Multipetal vortex structures in two-dimensional models of geophysical fluid dynamics and plasma. *JETP*, 119 (4) :685–699, 2001.

[26] H. P. Greenspan. The theory of rotating fluids. *Cambride : Cambridge University Press*, 1968.

[27] U. Högström, A-S Smedman, and H. Bergström. A case study of two-dimensional startified turbulence. *J. Atmos. Res.*, 56 :959–976, 1999.

[28] G. Holloway. Eddies, waves, circulation and mixing : Statistical geifluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18 :91–147, 1986.

[29] X. P. Huang and C. F. Driscoll. Relaxation of $2d$ turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy state. *Phys. Rev. Lett.*, 72 :2187, 1994.

[30] D. Z. Jin and D. H. Dubin. Theory of vortex crystal formation in two-dimensional turbulence. *Physics of plasmas*, 7 (5), 2000.

[31] S. S. Kadomtsev. Plasma turbulence. *New York Academic*, 1965.

[32] P. L. Kapitsa. Dynamic stability of a pendulum with oscillating suspension point. *JETP*, 21(5) :588–597, 1951.

[33] R. H. Kraichman. An almost-markovian galilean-invariant turbulence model. *J. Fluid Mech.*, 47 :525, 1971.

[34] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics.* McGrew-Hill Book, 1973.

[35] N. Kukharkin, S. A. Orszag, and V. Yakhot. Quasicrystallization of vortices in drift-wave turbulence. *Phys. Rev.Lett.*, 75 :2486–2489, 1995.

[36] H. Lamb. Hydrodynamics. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1932.

[37] L. Landau and E. M. Lifshitz. Statistical physics. *Pergamon Press Oxford-New York*, 1969.

[38] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. Physique théorique : cinétique physique. *MIR, Moscou.*

[39] L. D. Landau and E.-M Lifchitz. *Physique statistique.* 5. Nauka, Moscou, 1979.

[40] L. D. Landau and E.-M Lifchitz. *Fluid Mechanics.* second ed., revised. Pergamon Press, Oxford, New York, 1987.

[41] V. D. Larichev and J. C. McWilliams. Weakly decaying turbulence in a equivalent-barotropic fluid. *Phys. Fluids A*, 3 :938–950, 1991.

[42] M. Lavrentiev and B. Chabat. Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques. *Mir, Moscou*, 1980.

[43] B. Legras and D. Dritschel. A comparison of the contour surgery and pseudospectral method. *J. Comput. Phys.*, 104 (2) :287, 1993.

[44] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids 3d ed.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[45] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. Regular and stochastic motion. *N.Y. : Springer–Verlag*, 1999.

[46] D. K. Lilly. Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl. II*, 12 :240–249, 1969.

[47] D. K. Lilly. Numerical simulation studies of two-dimensional turbulence : I. models of statistically steady turbulence. *Geophys. Fluid Dyn. 3*, pages 289–319, 1972.

[48] E. Lindborg. Can the atmospheric kinetic energy qpectrum be explained by two-dimensional turbulence ? *J. Fluid Mech.*, 388 :259–288, 1999.

[49] M. E. Maltrud and G. K. Vallis. energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and geophysic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 228 :321–342, 1991.

[50] A. Mariotti, B. Legras, and D. Dritschel. Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows. *Phys. Fluids A*, 6 :3954, 1994.

[51] A. Masotti. Note idrodinamiche. *Societa Editrica "Unita e pensiero", Milano*, 1935.

[52] W. H. Matthaeus and al. Selective dacay and coherent vortices in two-dimensional incompressible turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2731–2734, 1991.

[53] J. C. McWilliams. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 146 :21–43, 1984.

[54] J. C. McWilliams. The vortices of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 219 :361–385, 1990.

[55] A. B. Migdal. *Qualitative methods in quantum theory.* M., Nauka, 1975.

[56] J. Miller, P. B. Weichman, and M. C. Gross. Statistical mechanics, euler's equations, and jupiter's red spot. *Phys. Rev. A*, 45, 4 :2328, 1992.

[57] L. M. Milne-Thomson. Theorical hydrodynamics. *McMillan*, 2000.

[58] A. S. Monin. *Theoritical Geophysical Fluid Dynamics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[59] A. S. Monin and R. V. Ozmidov. *Okeanskaya turbulentnost' (Ocean Turbulence).* gidrometeoizdat, Leningrad, 1981.

[60] G. D. Nastrom and K. S. Gage. A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, 42 :950–960, 1985.

[61] A. E. Novikov and E. A. Novikov. Vortex-sink dynamics. *Phys. Rev. E*, 54 (4) :3681–3686, 1996.

[62] T. Nozawa and S. Yoden. Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, 9 :2081–2093, 1997.

[63] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Nuevo Cimento*, Suppl. 6 :279, 1949.

[64] J. Pedlosky. Geophysical fluid dynamics. *Springer-Verlag, New York*, 1987.

[65] Y. B. Pointin and T.-S. Lundgren. Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container. *Phys. fluids*, 19 :1479, 1976.

[66] P. B. Rhines. Geostrophic turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11 :401–441, 1979.

[67] Yu. B. Rumer and M. Sh. Rivkyn. Thermodynamics, statistical physics and kinetics. *M. : Nauka*, 1977.

[68] P. G. Saffman. Vortex dynamics. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1992.

[69] P. Santangelo, R. Benzi, and B. Legras. The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self-similarity. *Phys. Fluids A*, 1 :1027–1034, 1989.

[70] V. Shtern and F. Hussain. Azimutal instability of divergent flows. *J. Fluid Mech.*, 256 :535, 1993.

[71] P. L. Simon and R. N. Sudan. Plasma turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :317, 1990.

[72] L. M. Smith and V. Yakhot. Finite-sized in forced two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 274 :115, 1994.

[73] J. Sommeria, C. Staquet, and R. Robert. Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer. *J. Fluid Mech.*, 233 :661, 1991.

[74] J. B. Weiss and J. C. McWilliams. Temporal scaling behavior of decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, 5 :608, 1993.

[75] E. J. Yarmchuk, M. J. Gordon, and R. E. Packard. Observations of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium. *Phys. Rev. Lett.*, 43 :214, 1979.

[76] G. M. Zaslavskii and P. Z. Sagdeev. Introduction in nonlinear physics. *M. : Nauka*, 1988.

Nonlinear Processes in Geophysics, 0000, 1–11, 2005
SRef-ID: 1607-7946/npg/2005-0000-1
European Geosciences Union
© 2005 Author(s). This work is licensed
under a Creative Commons License.

Nonlinear Processes in Geophysics

Evolution of localized vortices in the presence of stochastic perturbations

E. Bécu[1] **and V. Pavlov**[2]

[1]Laboratoire de Mécanique de Lille, Boulevard Paul Langevin, 59 655 Villeneuve d'Ascq, France
[2]UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Lille 1, 59 655 Villeneuve d'Ascq, France

Received: 21 July 2005 – Revised: 11 November 2005 – Accepted: 18 November 2005 – Published:

Abstract. We consider the evolution of a distribution of N identical point vortices when stochastic perturbations in the Hamiltonian are present. It is shown that different initial configurations of vorticity with identical integral invariants may exist. Using the Runge-Kutta scheme of order 4, it is also demonstrated that different initial configurations with the same invariants may evolve without having any tendency to approach to a unique final, axially symmetric, distribution. In the presence of stochastic perturbations, if the initial distribution of vortices is not axially symmetric, vortices can be trapped in certain domains whose location is correlated with the configuration of the initial vortex distribution.

1 Introduction

There exist 2-D vortex systems, the evolution of which can be modeled by a great number of point vortices. One can suppose that a unique "gas" composed of $N \gg 1$ vortices of the same sign is a closed macroscopic system, it should evolve to a final state of statistical equilibrium, i.e. to an universal configuration.

In fact, two-dimensional turbulence evolution (even in the absence of dissipation and forcing) is governed by strongly nonlinear equations. On account of this, the field components interact intensively and have to quickly get mixed up. Therefore, one can assume that the system evolves to a state of statistical equilibrium that is axially symmetric.

Let us first discuss the physical meaning and validity of this largely used hypothesis.

For this purpose consider a system consist of a great number of point vortices. The angular velocity of each vortex i is $\Omega_i = \dot{\theta}_i$ (cf Eq. 1) where θ_i is the angular vortex coordinate and $\dot{\theta}_i$ its temporal derivative). The magnitude of Ω_i can be estimated by $\bar{\Omega} \sim \Gamma/d^2$, Γ being the total circulation and d a characteristic domain diameter corresponding to the vortices location. Each vortex is influenced by all other surrounding vortices having a different angular velocity distributed about the mean angular velocity $\bar{\Omega}$ according to a certain law. That is why vortices, having for example the same values of θ_i at $t=0$ (i.e. $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_0$) will disperse. Hence, the rapid process of vortices mixing with respect to angular position will occur.

Consider a function that depends on θ and Ω which describes the distribution of vortices and that at time $t=0$ can be written in the form $f(\theta_0,\ \Omega)$. Here, $\theta_0 = \theta(t=0)$. Function $f(\theta_0,\ \Omega)$ can be decomposed in two parts:

$$f(\theta_0, \Omega) = \overline{f}(\Omega) + f_1(\theta_0, \Omega),$$

where the averaged component,

$$\overline{f}(\Omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta_0\ f(\theta_0, \Omega),$$

does not depend on θ_0. The function $f_1(\theta_0, \Omega_i)$ complies with the condition $\overline{f_1}(\theta_0, \Omega) = 0$. Consequently, f_1 is a alternating–sign function with respect to the first argument. One can always find an interval $\Delta\theta_{12} = \theta_{01} - \theta_{02} \sim \pi$ where the sign of the function f_1 changes, i.e. $f_1(\theta_{01}, \Omega) \sim -f_1(\theta_{02}, \Omega)$. For $t>0$, $\theta_i \sim \theta_{0i} + \Omega_i t$ and the distribution function becomes

$$f(\theta - \Omega t, \Omega) = \overline{f}(\Omega) + f_1(\theta - \Omega t, \Omega).$$

Here, $\theta - \Omega t$ belongs to the interval $[0, 2\pi]$ (modulo 2π). For different values of Ω_1 and Ω_2, the terms which involves the time dependence become predominant in comparison with initial angles. Hence, the function f_1 changes sign when $(\Omega_2 - \Omega_1)t \sim \pi$, i.e. for angular velocity variations $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \sim \pi\, t^{-1}$. This simple estimation shows that $f_1 = f - \overline{f}$ becomes an alternating-sign function with respect to the second argument as well. As $t \to \infty$, the interval between any Ω and $\Omega + \Delta\Omega$ becomes very small, i.e. $|\Delta\Omega| \ll |\overline{\Omega}|$, and the function f_1 becomes more and more oscillating with respect to the second argument Ω.

Correspondence to: E. Bécu
(emilie.becu@ed.univ-lille1.fr)

These arguments are of a general nature and can be applied to any variables ("phases") which change in a finite domain (Landau and Lifshitz, 1987; Landau and Lifchitz, 1979).

In this way, the contribution of the alternating-sign function $f_1 = f - \overline{f}$ is generally neglected. In fact, in real systems, the presence of a physical dissipation suppresses all processes on small time scales. The analogous mechanism (numerical dissipation) exists in numerical experiments when an artificial dissipation occurs at small scales. Finally, experimental processes retain a statistically indifferent intrinsic average caused by experimental conditions (cf for example experiments on study of quasi-final turbulence configuration Marteau et al., 1995; Danilov et al., 2002; Danilov and Gurari, 2000, and the references presented in these works).

In this context, several questions arise. If a real or an artificial dissipation is absent, what is the influence of non-vanishing fluctuations in the Hamiltonian of the system on possible scenarios of its evolution? Can different initial repartitions of vorticity be built which have the same global invariants (energy, enstrophy, moments, etc.)? If it is possible, do the systems, starting from different initial distributions of vorticity but having the same global invariants, evolve to a unique, universal, final state? Or do the systems evolve to different final states? Or even to no final state? Is it of vital importance on the processes of permanently existing small–scale end rapidly varying fluctuations? All these questions are motivated by the fact that systems with extremely weak dissipation are observed in nature.

2 Different initial configurations with the same global invariants

2.1 Model

We have to select a model complying with all conservation laws and which would be pertinent even on small space scales. In consequence, some of the traditional methods cannot be used and due to numerical difficulties at small scales. In fact, it is known that one of the difficulties in the description of turbulence is the expansion of the motion at small scales, to scales beyond those of viscous dissipation, when calculations come only from local mean–field at the scale of numerical resolution. The behavior of the turbulence, corresponding to explicit scales, is usually numerically modeled in a statistical sense; another way consists to introduce empirically different forms of turbulent viscosity which model energy transfer through intermediate scales, etc. However, it can be sometimes observed in two–dimensional turbulence that calculated magnitudes and phases of fluctuations of higher modes do not satisfy conservation laws. For this reason, we consider the model of point vortices, i.e. the model of elementary vortex structures for which the vorticity is strongly concentrated in small moving domains. This model is attractive for several reasons and has been largely used in many studies (cf Onsager, 1949; Miller et al., 1992; Pointin and Lundgren, 1959; Sommeria et al., 1991; Brands et al., 1999; Pavlov et al., 2002 and references therein).

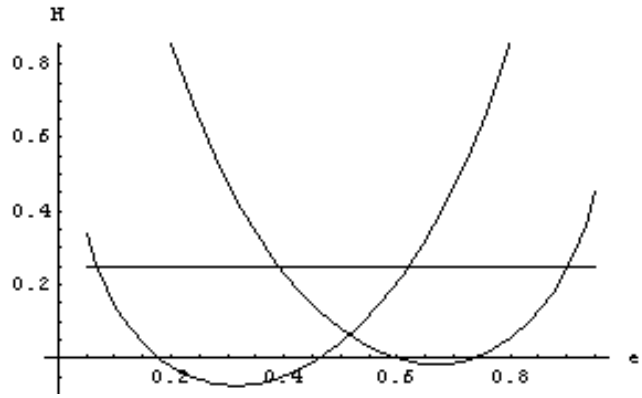


Fig. 1. The graphic representation of e_1 and e_2 corresponding to H_0=0.25 for N=750 and K=260.

2.2 Numerical simulations

Consider an incompressible fluid containing $N \gg 1$ vortices with intensity γ_i, $i=1, \ldots, N$. The vorticity concentration is taken in the form $\Omega = \sum_j \gamma_j \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_j)$ where $\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ is Dirac's function. The equations of motion of the centers of the vortices are: $\gamma_i \partial_t x_i = \partial_j H$, $\gamma_i \partial_t y_i = -\partial_i H$ which constitues a hamiltonian system. For the unbounded space, the Hamiltonian, i.e. kinetic energy of the fluid, expressed in terms of the canonical variables x_i, y_i, $H = \frac{1}{2}\int_D d\boldsymbol{x}\, v^2$, can be written in the form

$$H = -(4\pi)^{-1} \sum_{i,j;i\neq j} \gamma_i \gamma_j \ln|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|.$$

Here, $-(1/2\pi)\ln|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$ is a Green function which satisfies the equation $\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$. The kinetic energy of the fluid can be written as $H = \frac{1}{2}\int_D d\boldsymbol{x}\, \psi\Omega$, with $d\boldsymbol{x} = dxdy$, $\Omega = -\Delta\psi$, and velocity components $v_i = \varepsilon_{ij}\partial_j\psi$, with $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ and $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$.

For the following numerical simulations performed in the present work, it is convenient to use dimensionless variables. The transformation is accomplished by $x_i \to Rx_i$, $y_i \to Ry_i$, $t \to \tau t$, where $\tau = 2\pi R^2 \Gamma^{-1}$. Note that the vortices have a identical intensity $\gamma_i = \Gamma/N$. Let $(x_i, y_i) \to (\theta_i, J_i)$, with $x_i = \sqrt{2J_i}\sin\theta_i$ and $y_i = \sqrt{2J_i}\cos\theta_i$. The variables (θ_i, J_i), where $J_i \equiv {r_i}^2/2$, $r_i = |\boldsymbol{x}_i|$, are introduced in order to keep the canonical structure of the evolution equations. It follows that:

$$\partial_t J_i = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\bar{H}, \qquad \partial_t\theta_i = -\frac{\partial}{\partial J_i}\bar{H}. \tag{1}$$

The dimensionless Hamiltonian is then given by:

$$\bar{H} = -(4N)^{-1} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1, n\neq m}^{N} \ln\, G_{mn},$$

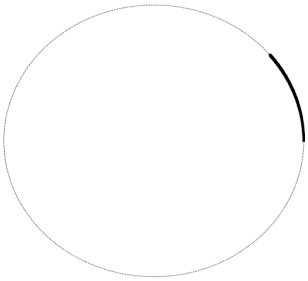


Fig. 2. Initial annulus of the distribution of vortices with K=260 and e_1=0.108.

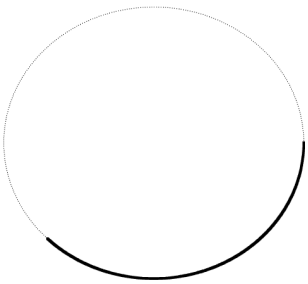


Fig. 3. Initial annulus of the distribution of vortices with K=260 and e_2=0.624.

where

$$G_{mn} = [J_m + J_n - 2\sqrt{J_m J_n}\cos(\theta_m - \theta_n)].$$

Consider an initial distribution of vortices on an annulus: all vortices have the same radial coordinates r_s=1. The angular coordinates of every vortex are chosen as follows:

$$\theta_s = 2\pi N^{-1} e(s-1)\Theta(K-s) + \\ 2\pi N^{-1}(1-e)(s-1)\Theta(s-K), \quad (2)$$

in which s=1, 2, ..., N and $1<K<N$. The first vortex has the angular coordinate θ_1=0. The set of the first K vortices is distributed with a spacing of $2\pi N^{-1}e$, all the others are distributed with a spacing of $N^{-1}(1-e)$. Here, $0<e<1$. The function $\Theta(z)$ is Heaviside's function, $\Theta(z)$=1 when $z>0$ and $\Theta(z)$=0 when $z<0$. In this way, the initial distribution of vortices is not symmetric. However the kinetic moment, one of the motion integrals, $\bar{P}$, defined by $\bar{P}=-\frac{1}{2}\sum r_i'^2$, as well as the enstrophy Z_2 and other moments are unchanged for different values of the parameters K and e.

The Hamiltonian of the system is a function of the parameters e, K : $H=H(e, K)$. This Hamiltonian being conserved, it is given by the initial value, H_0 which is calculated from an initial vortex distribution :

$$H_0(e, K) = -(4N)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\ln(1-\cos\theta_{ij}).$$

$\theta_{ij}=\theta_i-\theta_j$ is calculated from Eq. (2). In this expression, only terms depending on angles appear.

Fig. 4. Distribution of vortices at $t\sim$50 with K=260 and e_1=0.108.

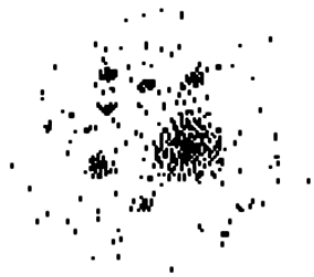


Fig. 5. Distribution of vortices at $t\sim$50 with K=260 and e_2=0.624.

Moreover, the circulation Γ is fixed by the number of vortices N. In the structure of the model, all other motion integrals Z_i (enstrophy Z_2, ...) are automatically conserved. For instance let N=750 and K=260. The Hamiltonian $H(e, K)$, with fixed K is a function of e only. The dependence $H=H_K(e)$ allows to graphically find e_1 and e_2 for a given value of H (see Fig. 1). For example let the initial value H_0=0, 25. Then, for K=260, the corresponding values are e_1=0, 108 and e_2=0, 624 (see Figs. 2 and 3).

The evolution of a vortex distribution for a system with the given initial conditions has been numerically studied by using a 4th order Runge-Kutta scheme. The conservation of the energy H and of the angular momentum P has been checked during the calculations. The analysis shows that parameters have small variations with errors defined by $|H_i-H_0|/|H_0|\leq 3\cdot 10^{-3}$, $|P_i-P_0|/|P_0|\leq 2\cdot 10^{-7}$. The iteration process has been performed from t=0 to t=50 which corresponds to 50 reference cycles. Although quadratic difference being relatively significant for the Hamiltonian which could lead in principle to intensification of a mixing process because of the accumulation of numerical errors, no visible tendency to a gradual homogenization has been observed.

The final results of calculations (for $t\geq$50) are presented in Figs. 4 and 5. The time at $t\sim$50 agrees with the results presented in the experiment of Huang and Driscoll (1994); Fine et al. (1995) (Fig. 6). According to the experiments, a formation of radically different configurations has already been observed for $t\sim$60 and this justify our compilations.

Figures 4 and 5 show that vortex distributions having different initial distributions and characterized by identical global invariants, do not evolve to an universal axially

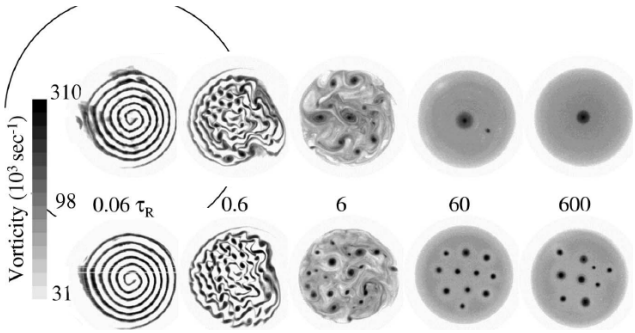


Fig. 6. "Vortex crystals" observed in the experiments of Huang and Driscoll (1994); Fine et al. (1995).

symmetric distribution. It is observed that vortex "clusters" are auto-organized in different ways. This can be explained by the fact that the Hamiltonian contains a non-vanishing fluctuating part which affects the evolution processes in the weakly dissipating system. If this fluctuating part has to be disregarded, the system would evolve to the axially symmetric configuration. This observation is qualitatively confirm to the recent experiments on "vortex crystal" formation (Fine et al., 1995; Huang and Driscoll, 1994) (see Fig. 6). Indeed, in these experiments, it has been observed that a 2-D system evolving without dissipation and forcing (physical or numerical), does not forget the structure of the initial vortex distribution. These observations are correlated with our calculations and confirm qualitatively the hypothesis of Batchelor (1967) that a quasi–final state of a perfect vortex system is fixed by its history and "keeps in mind" its initial configuration.

Note also that a different final state can appear depending on the initial configuration: (a) "basic" states reaching a maximum vorticity in the center , (b) "vortex crystals", and (c) states where no strong vortices persist and which probably correspond to principle of "minimum enstrophy".

3 Perturbations and formation of vortex clusters

Let us now consider the evolution of a vortex gas in the presence of chaotic internal and external perturbations. Having in mind a possible comparison with experimental data, we choose a configuration where the vortices are placed in a spiral (cf Fig. 7) similar to the initial spiral distribution of vorticity in Fig. 6.

3.1 Analytical consideration

The dimensionless Hamiltonian (normalized with the characteristic spatial scale R and the temporal one τ) of a system composed of $N \gg 1$ point vortices is

$$H = (2N)^{-1} \sum_{i \neq j; i,j=1}^{N} H_{ij}. \tag{3}$$

Here, H_{ij} is the Hamiltonian of the interaction between vortices i and j. For point vortices in an infinite plane, the Hamiltonian is $H_{ij} = -\ln r_{ij}$ and is characterized by a long–distance interaction. If $N \gg 1$, vortices are not only influenced by neighboring vortices, but in essence by all the vortices, including those far away. This observation allows one to conclude that: (a) each vortex of the system containing a great number of vortices, moves quasi-independently with respect to the motion of its neighbor; (b) the situation is as if the selected vortex was in a self-consistent field created by all the vortices, including those far away.

Let us introduce the expression $H_i = D^{-1} \int_D d\boldsymbol{x}_j H_{ij} \equiv \langle H_{ij} \rangle$. Here, D is an integration domain with a dimension defined by the conservation of momentum. The expression H_i can be interpreted as the Hamiltonian of the ith vortex averaged with respect to positions of all other vortices. The average can be also carried out by using a probabilistic approach if one introduces $P(\boldsymbol{x}_j)$, which gives the probability of finding the vortex j in the vicinity of $\boldsymbol{x}_j$. In this case, H_i can be defined by $H_i = \int_D d\boldsymbol{x}_j P(\boldsymbol{x}_j) H_{ij}$. It is noticed that a concrete structure of $P(\boldsymbol{x}_j)$ would require an additional special analysis; so, we limit ourselves to the simplest approximation when $P(\boldsymbol{x}_j) = D^{-1}$. Let us then introduce the operator $\widehat{M}_i\ [...] \equiv (N^{-1} \sum_j - D^{-1} \int d\boldsymbol{x}_j)[...]$. After some mathematical manipulations, the Hamiltonian (3) takes the following form:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{s=1}^{N} H_s + \frac{N}{2} \widehat{M}_i \widehat{M}_j (H_{ij} - \langle H_{ij} \rangle) \\ &\equiv \sum_{s=1}^{N} \left(H_s + \underline{\frac{1}{2} \widehat{M}_i \widehat{M}_j (H_{ij} - \langle H_{ij} \rangle)} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

The first term of the Hamiltonian defined by Eq. (4) describes the collective effects of the energy, which dominate when $N \gg 1$. According to the definition, H_s depends only on $r_s = |\boldsymbol{x}_s|$. The second term describes stochastic fluctuations caused by individual interactions between vortices. These effects are obviously significant near a peripheral zone of the vortices' distribution. If $N \gg 1$, the last term of Eq. (4) is small. Indeed when $N \gg 1$, (a) the averaged quadratic deviation of $H(r_i)$ from the sum $N^{-1} \sum_{j=1}^{N} H_{ij}$ and (b) the operator norm $\widehat{M}_i$ are small. By replacing the exact expression $\frac{1}{2} \widehat{M}_i \widehat{M}_j (H_{ij} - \langle H_{ij} \rangle)$ by its value averaged with respect to the motions of all other (except i) vortices, $W(\boldsymbol{x}_s)$, we partly simplify the Hamiltonian. Such a procedure is similar to the one of Midgal (1975), p. 158, when one passes from the "multi-particles" description to the "mono-particle" description. According to its definition, the function $W(\boldsymbol{x}_s, t)$ has a zero average value $\langle W_s \rangle$, i.e. it is a oscillating function with respect to angle θ_s and/or with respect to time (see Sect. 2). The function W_s preserves all the information about an initial distribution of vortices.

So, the problem reduces to a problem of a motion of a "particle" with a unit "mass" in a self–consistent field $H_s(r_s) + W_s(r_s, \theta_s, t)$. For simplicity of the notation, we will further omit the index i, considering the motion of a test vortex. We use the variables defined by the transformation

$(x, y)\rightarrow(\theta, J)$, with $x=\sqrt{2J}\ \sin\theta$ and $y=\sqrt{2J}\ \cos\theta$ (such a transformation is largely used in some nonlinear problems). The equations of motion of the test vortex become

$$\partial_t J = -\partial_\theta H = -\partial_\theta W,$$
$$\partial_t \theta = \partial_J H = \Omega(J) + \partial_J W. \tag{5}$$

If there is a stochastic disturbance in the Hamiltonian, internal and external $W_s(r_s, \theta_s, t)\neq 0$, it can be assumed that a vortex trajectory consists of two parts: regular and fluctuating (we follow here the idea formulated for Kapitsa's pendulum, see Kapitsa, 1951). For regular variables averaged with respect to stochastic fast fluctuations, the procedure of averaging leads to:

$$\partial_t \overline{J} = -\overline{\partial_\theta H}$$
$$= -\overline{\theta_1 \partial_{\theta\theta} W(\overline{J}, \overline{\theta})} - \overline{J_1 \partial_{\theta J} W(\overline{J}, \overline{\theta})} + \dots ,$$
$$\partial_t \overline{\theta} = \overline{\partial_J H}$$
$$= \Omega(\overline{J}) + \overline{J_1 \partial_{JJ} W(\overline{J}), \overline{\theta})} + \overline{\theta_1 \partial_{J\theta} W(\overline{J}, \overline{\theta})} + \dots . \tag{6}$$

Subtracting one equation from the other, we obtain for $J_1=J-\overline{J}$ and $\theta_1=\theta-\overline{\theta}$

$$\partial_t J_1 = -\partial_\theta W(\overline{J}, \overline{\theta}) + \dots$$
$$\partial_t \theta_1 = J_1 \partial_J \Omega(\overline{J}) + \partial_J W(\overline{J}, \overline{\theta}) + \dots . \tag{7}$$

We look for solutions in the form $W\sim U e^{-i\omega t}$, $J_1, \theta_1 \sim e^{-i\omega t}$:

$$J_1 = \frac{1}{i\omega}\partial_\theta U(\overline{J}, \overline{\theta}),$$
$$\theta_1 = 7 - \frac{1}{i\omega}\frac{1}{i\omega}\partial_\theta U(\overline{J}, \overline{\theta})\partial_J \Omega(\overline{J}) - \frac{1}{i\omega}\partial_J U(\overline{J}, \overline{\theta}). \tag{8}$$

Substituting these expressions in Eq. (6), omitting the imaginary terms (field variables are real; appearance of the imaginary number i is equivalent to a difference in phase of a harmonic function of $\pi/2$) and putting in the $1/2$ factor (average of a harmonic function on the period), we find

$$\partial_t \overline{J} = -\overline{\partial_\theta H} = -\frac{\Omega'}{2\omega^2}\partial_\theta U \partial_{\theta\theta} U + \dots$$
$$= -\partial_\theta\left(H(\overline{J}) + \frac{\Omega'}{4\omega^2}(\partial_\theta U)^2\right),$$
$$\partial_t \overline{\theta} = \overline{\partial_J H} = \Omega(\overline{J}) + \frac{\Omega'}{2\omega^2}\partial_\theta U \partial_{J\theta} U + \dots$$
$$= \partial_J\left(H(\overline{J}) + \frac{\Omega'}{4\omega^2}(\partial_\theta U)^2\right) + \dots . \tag{9}$$

Here, $\Omega'\equiv\partial_J \Omega(\overline{J})$.

We can define the "effective" Hamiltonian as

$$H_{\rm eff} = H(\overline{J}) + (\Omega'/4\omega^2)(\partial_\theta U)^2 \equiv$$
$$= H + H' = H(r_i) + \varepsilon V(r_i, \theta_i, t). \tag{10}$$

Note that this is equivalent to the situation where a test vortex moved along an averaged trajectory defined by the averaged Hamiltonian $H_{\rm eff}$ which is a coordinate dependent function. The disturbance of a fundamental state is characterized by a small non-dimensional parameter $\varepsilon\ll 1$. By definition, $V(r, \theta, t)$ is a periodic function with respect to θ, $V(r, \theta, t)=V(r, \theta+2\pi, t)$ and can be expanded into a Fourier series:

$$V(r, \theta, t) = \frac{1}{2}\sum_m [V_m(r, t)e^{im\theta} + c.c.]. \tag{11}$$

Here, the abbreviation $c.c.$ represents the complex conjugation. The disturbance V is a real function. For this reason, both positive and negative m are present in the sum (11): the Fourier coefficients satisfy the condition $V_m=V^*_{-m}$.

Then Eq. (9) reduced to

$$\partial_t J = -\frac{1}{2}\varepsilon\sum_m\left(imV_m(t)\, e^{im\theta} + c.c.\right),$$
$$\partial_t \theta = \Omega(J) + \frac{1}{2}\varepsilon\sum_m\left((\partial_J V_m(t))\, e^{im\theta} + c.c.\right). \tag{12}$$

When the fluctuation is neglected ($\varepsilon=0$), the solutions are $J(t)=J^0$, $\theta(t)=\Omega(J^0)t+\theta^0$, with θ^0 being the initial phase.

Let us consider the case where disturbances are localized near a level J_0, near when H' has a distinct maximum, i.e. the excitation is important near this level. In this case the derivative $\partial_J V_m\ |_{J_0}\ =0$. We can simplify Eq. (12) near J_0 by putting $r_1=r-r_0$, with $|r_1|\ll r_0\equiv\sqrt{2J_0}$, and keeping only principal terms in the right-hand side of the equations. Taking $\theta=\theta_1+\Omega(J_0)t$, we obtain

$$\partial_t r_1 \simeq -\varepsilon(2r_0)^{-1}\times$$
$$\times\sum_m [imV_m(r_0, t)\, e^{i(m\Omega(r_0)t+m\theta_1)} + c.c.],$$
$$\partial_t \theta_1 = \Omega(r) - \Omega(r_0) + \dots = r_0\Omega'(J_0)r_1 + \dots . \tag{13}$$

We suppose now that the conditions of the problem are such that there is only one, a governing term, in the sum on m. The simplified Eqs. (13) for this spectral component become

$$\partial_t r_1 = -i\varepsilon(2r_0)^{-1} m V_m(t)\, e^{i(m\theta_1+m\Omega(r_0)t)} + c.c.$$
$$\partial_t \theta_1 = r_0\Omega'(J_0)r_1. \tag{14}$$

Since $V_m(t)$ is dependent on time it can be expanded into a Fourier series of the form $V_m(t)\sim\sum_n V_{mn}\exp[-in\gamma t]$. It can be shown that the term in the resulting sum with respect to n, $V_{mn}\exp[-i(m\Omega(J_0)-n\gamma)t]$ that satisfies the condition $\Delta_{mn}=m\Omega(J_0)-n\gamma\ \rightarrow\ 0$, is the most important (see also Chirikov, 1969, 1978, 1979; Zaslavskii and Sagdeev, 1988), and hence is the only term that need be kept. In this case $|r_1|\sim\varepsilon/\Delta_{mn}$ and when $\Delta_{mn}=m\Omega(J_0)-n\gamma\ \rightarrow\ 0$, and $\varepsilon\neq 0$, the magnitude of r_1 can be significant.

The complex coefficient V_{mn} is written in the form $V_{mn}=|V|\exp(i\varphi)$. Introducing a new variable, $\psi=m\theta_1+\Delta_{mn}t+\varphi+\pi$, one obtains

$$\partial_t r_1 \simeq -\varepsilon m r_0^{-1}|V|\ \sin\psi,$$
$$\partial_t \psi = \Delta_{mn} + m r_0\Omega'|_{r_0}\, r_1, \tag{15}$$

by neglecting the terms of high order. The system (15) can be put in the canonical form

$$\partial_t r_1 = -\partial_\psi \tilde{H},\ \ \partial_t \psi = \partial_{r_1}\tilde{H},$$

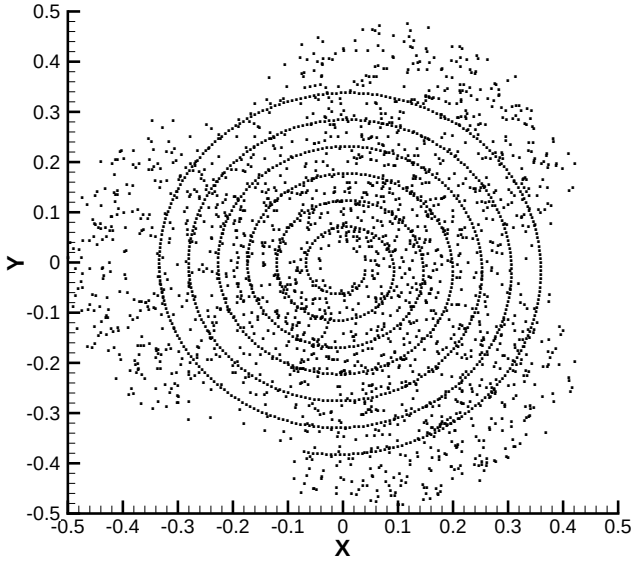


Fig. 7. Observation of 3 "super vortices", zones which trap localized vortices. The initial vortex distribution on the spiral is shown.

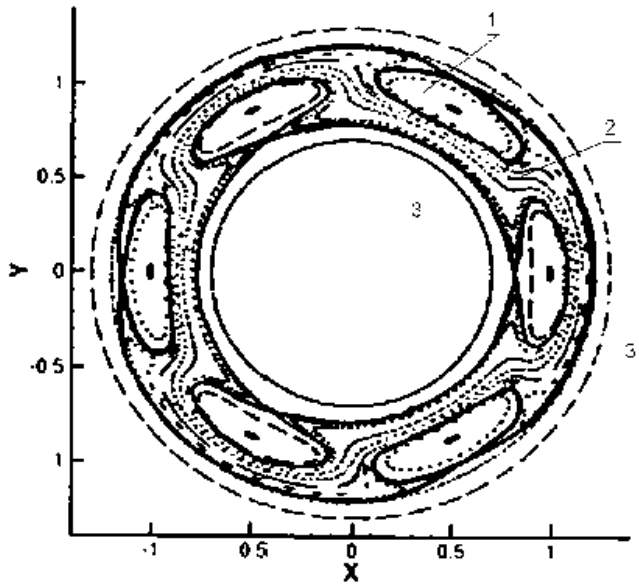


Fig. 8. The numerical calculation showing the self-organisation of 2-D vortices into "super-vortices". The vortices, which are in the disturbed domain, stay but others circumvent these zones.

with the Hamiltonian

$$\tilde{H} = (1/2)mr_0\Omega'|_{r_0}(r_1)^2 - \varepsilon m|V|(r_0)^{-1}\cos\psi + \Delta_{mn}\, r_1.$$

Moreover (15) are isomorphous to the non linear pendulum equations $\ddot{\psi}+\Omega_N^2 \sin\psi=0$, with $\Omega_N^2=m^2\varepsilon(r_0)^{-1}|V|$ $r_0\Omega'|_{r_0}$. The different aspects of the theory and applications of a non linear oscillator model to laden particles in a plasma are given in the above cited works. Equilibrium positions correspond to points $\psi_k=k\pi$, where $k=0, \pm1, \pm2, ...$ If k is even or zero, i.e. $\psi_k=0, \pm2\pi, \pm4\pi, ...$, the corresponding points are points of a stable equilibrium of the pendulum. If k is uneven, i.e. $\psi_k=\pm\pi, \pm3\pi, ...$, the corresponding points are hyperbolic, i.e. points of unstable equilibrium. Through these points pass the "separating lines". The transformation of $\theta\rightarrow\psi$ means that we have passed the rotation reference, $\psi=m_0\theta+\varphi+\pi=m\theta_1+\Delta_{mn}t+\varphi+\pi$. If $\Delta_{mn}=0$, the points of the equilibrium positions in this rotation reference are defined by the expression $m_0\theta_{1k}=k\pi+C^{te}$ (c is an arbitrary constant). The stable equilibrium positions are given by $\theta_{1k}=k\pi/m_0$, with k even and the unstable equilibrium positions are given by $\theta_{1k}=k\pi/m_0$, with k uneven. The possible trajectories of a test vortex are topologically different near the stable and unstable equilibrium points. In the first case, these lie on closed orbits, where the situation is as if vortices are kept near these points.

The result of qualitative analysis shows that the theory is valid if

$$0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1 \ll 1/\varepsilon,$$

where $\delta=\Omega_0^{-1}r_0\Omega_0'$, with $\Omega_0=\Omega(r_0)\equiv(r^{-1}\partial_r H)|_{r_0}$, which can be approximated by $\Omega_0\sim r_0^{-2}H_0$ because there is no specific scale.

This simple analysis permits one to establish conditions and possible scenarios for the self-organization of point vortices into clusters which become apparent in observations of "super-vortices". An example of such a situation is the effect of a regular structure formation, similar to observed "vortex crystals", which would occur when $m_0\neq0$ (there is a angular inhomogeneity in a initial distribution of vortices), $\partial_{JJ}H_s(J)\neq0$ and the stochastic fluctuating part of the Hamiltonian, which is essentially localized on the circle, varies quickly in the test time, $\varepsilon\sim\Omega'(J)/\omega^2 \ll 1$.

3.2 Numerical confirmation

These remarks agree with the numerical calculations (Figs. 7 and 8) based on the discussed equations. For calculations, we took $N=750$ test vortices initially accommodated on a 6 spiral branch with a maximal radius $R=0,375$. We used a "rough function" $V=(1-\cos 3\theta_i))\exp[-(r_i-r_0)/b^2]$ with $b=0,1$, $\varepsilon=0.5$. The corresponding result is shown in Fig. 7. The second test has been performed with the function $V=\cos 3\theta_i \exp[-(r_i-r_0)/b^2]$, for 16 test vortices and the parameters $r_0=1$, $b=0,1$, $\varepsilon=0,5$ (Fig. 8). The numerical results show that a vortex initially localized in a region of "capturing", will be enclosed in this area (1). The region of "capturing" is defined from a minimum of the potential, V. These regions are separated from the rest of the area by a "separating line". There are a few possibilities: (a) point vortices localized initially in the domain 1, cluster together forming "super-vortices"; (b) vortices initially in domains (2) and (3) move stochastically, penetrating from (2) into (3) via the hyperbolic points (zones). The domains (2) and (3) finally form a quasi-homogeneous patch having a radius $r_f>r_{\rm init}$ of a relatively small concentration of vortices, while domains with a higher concentration of vortices will be organized in domains (1).

4 Discussion

The present work was motivated by a few reasons and observations.

Experiments by Huang and Driscoll (1994); Fine et al. (1995) on 2-D freely evolving turbulence without forcing and dissipation show that the relaxation of a turbulent system to a basic state can be sometimes arrested (Fig. 6). The formation of regular vortex lattices ("vortex crystals") can be observed. These "vortex crystals" are composed of 5−20 individual "super-vortices" with an intensity 4−6 times larger than the surrounding vorticity. This regular structure rotates in conjunction with the background and does not undergo any deformation while the time $\geq\sim 10^4$ times larger than characteristic reference time.

The experiments have been conducted in electronic plasma placed in a very strong magnetic field. In such a situation, the system can be described in the framework of the model of point vortices.

Really, the motion of individual electrons include fast and slow components. First, the "heated" electrons move along of the magnetic field lines (axis z). In presence of an energetic "closure fitting" on the dispositive ends, "heated" electrons are submitted to successive reflections from these closure fittings with a characteristic time $\tau_{th}\sim L/v_{th}\sim T^{-1/2}$. The electrons follow in the same time circular trajectories around field lines, $\boldsymbol{B}$, with a characteristic time (of Larmor) $\tau_L\sim\omega_L^{-1}\sim B^{-1}$. Finaly, they participate in a collective motion which is a rotating macroscopic collective motion around the axis z whose characteristic time is $\tau_{\rm col}\sim B/E$. If the fields are intense, one can assume the condition $\tau_{\rm col}\gg\tau_{th},\,\tau_L$. Let Δt be an exposure time of observation on the monitor (Fig. 9) that satisfies the condition $\tau_{\rm col}\gg\Delta t\gg\tau_{th},\,\tau_L$. In this case, the averaging with respect to fast motions permits one to eliminate all z-dependencies of fields from the consideration.

After averaging with respect to fast motions along the magnetic field and, in this way, "smearing" the electric charge in a spatial domain of volume $V\sim a^2L$, this electron system is similar to a system of N macroscopic charged "bars", $L\sim 1$ m, of very small diameters a (Larmor's radius, $a\sim 5\,\mu$ m) aligned with the magnetic induction, $\boldsymbol{B}$, and moving on a timescale of the order of the macroscopic time without changing their orientation. The "bars" never touch; in fact there are no contacts between electrons. The characteristic time, τ_R (the turnover time), of the collective azimuthal motion of the "bars" (of electrons whose fast longitudinal motions have been averaged), is macroscopically great.

If $a/L\ll 1$, i.e. $a\to 0$, the effects containing the factor a/L can be neglected.

The coordinates of these "bars" in the plane perpendicular to the magnetic field are $x_i,\ y_i,\ i=1,\ \ldots,\ N$. We obtain thus the two-dimensional system whose motion in the $x-y$ plane is controlled by equations isomorphous to the equations of motion of two-dimensional point vortices (with the Hamiltonian – energy of interaction expressed in terms of canonical variables – depending logographically of distances between the "bars").

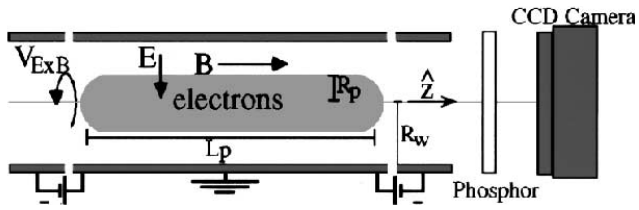


Fig. 9. Experiment of plasma: scheme of experimental apparatus.

The integral quantities which can be assimilated with energy, enstrophy, etc, measured in these experiments for the sequences leading to the different final configurations (Fig. 6), do not change during the experiments, i.e. the system is not dissipative.

These qualitative arguments explain why we choose the model of point vortices. In the framework of our model and in the presence of stochastic fluctuations and in absence of a dissipation, the clustering of point vortices can stop due to the spontaneous formation of regular *dynamical* vortex structures.

The observed regular structure can be explained without incorporating special physical arguments beyond the description. A good qualitative agreement between results of our analysis and the experiments concerning the evolution of the great number of "vortices" was observed.

The numerical simulations showed that different initial configurations of vortices having identical dynamical invariants, do not evolve to an universal axially symmetric distribution. This can be explained by the fact that the fluctuating part of the Hamiltonian, which can be neglected in some experiments and numerical studies, plays an important role in the study.

As concluding remarks, let us present some explanations and give useful references (see also Miller et al., 1992; Danilov and Gurari, 2000; Pavlov et al., 2002) concerning some numerical approaches to the problem of the 2-D-turbulence evolution.

Two-dimensional flows of an incompressible fluid is usually described by the evolution equation for vorticity, having the form $\partial_t\Omega+[\Omega,\,\psi]=F+D$. Here, all notations are standard, the vorticity field can be both continuous as for the most part of works and discontinuous as in our model, F the forcing, and D the dissipation. If $F=0$, or if, after averaging, a fluctuating part of the forcing can be grouped with the Hamiltonian (Sect. 3), $H\to H_{\rm eff}$, the omission of dissipative terms in the governing equations signifies that we consider the effects of formation of dynamic regular structures at an initial stage of decaying turbulence (see further) when viscous effects have not yet become apparent.

In numerical analysis when $F\neq 0$, and $D\neq 0$, the forcing term is usually localized in the vicinity of a small space scale (large wave number k_f), and the dissipation operator D combines frictional and viscous terms. The latter usually contains

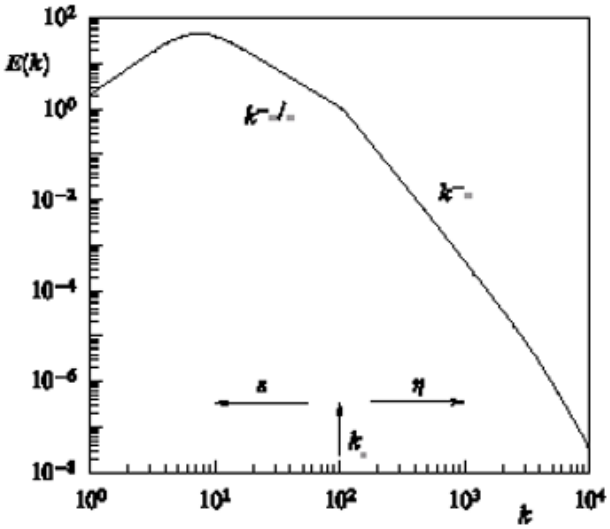


Fig. 10. Schematic view of the kinetic energy spectrum of 2-D turbulence. k_f is the forcing wave-number. On the right is the enstrophy interval characterized by the enstrophy flux η, which transforms into the enstrophy dissipation range for large $k_d=(\eta/\nu^3)^{1/6}$ (Newtonian fluid). On the left is the energy interval characterized by the energy flux ϵ.

the classical viscous term, $D=\nu\Delta\Omega$, with a constant coefficient of viscosity ν (Newtonian fluid), but may include other dissipative effects. For computational purposes, one often applies the so-called hypofriction and hyper-viscosity rule, $D=((-1)^{n+1}\lambda_n(-\Delta)^{-n}+(-1)^{m+1}\nu_m\Delta^m)\Omega$. The λ_n-term serves to suppress the upscale energy cascade, the ν_m-viscosity halts the downscale enstrophy cascade. For instance, the natural physical dissipation in 2-D or quasi-2-D flows is due to bottom friction in geophysical applications, which correspond to $n=0$ (Ekman friction). Such friction equally damps all modes, with large and small space scales. Hypofriction with a negative power for the Laplacian in $D(n>0)$, was proposed for a turbulent phenomenology. It selectively suppresses the greatest modes of the system and recreates a dissipation-free (inertial) interval in the energy range, but it has no direct physical relevance. It has the advantage that the inertial (enstrophy) interval may be pushed to higher k without increasing the computational grid.

The evolutional equation can be written in the equivalent form $\partial_t\Omega+\{\Omega,\delta H/\delta\Omega\}=F+D$ where the functional Poisson bracket, $\{.,.\}$ is introduced (see Goncharov and Pavlov, 2001; Pavlov et al., 2002, 2001).

In the absence of forcing-dissipation, the equation conserves a few integrals: kinetic energy, E, enstrophy, Z_n. Furthermore, this evolutional equation gives rise to an infinite set of conserved integrals, called Casimirs (moments Z_n, isolevel areas of vorticity in the xy-plane, etc).

The basic equation for a flat domain is usually solved by pseudo-spectral methods. In the Fourier representation (discrete or continuous), this equation takes on the form $\partial_t\Omega_{\mathbf{k}}+J_{\mathbf{k}}=D_{\mathbf{k}}+F_{\mathbf{k}}$. Here, $J_{\mathbf{k}}$ denotes the $\mathbf{k}$th Fourier mode of the Jacobian $J(\Omega,\psi)$, i.g. of $\{\Omega,\delta H/\delta\Omega\}$ which in spectral methods is implemented via fast Fourier transform (going back and forth between the $\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{x}$-spaces, and replacing convolutions with products). One looks for the spectral energy density $E(k,t)$.

Forced 2-D turbulence can attain a statistically stationary state (Fig. 10), if the energy and enstrophy injected by a source are balanced by the dissipation.

The decaying case, when $F=0$ and $D\neq0$, seems natural and requires no large-scale artificial dissipation. In some limiting regime (Batchelor, 1969) postulated the energy spectrum of the decaying turbulence to evolve according to the law $E(k,t)=E^{3/2}tf(E^{1/2}kt)$ defined in terms of a single parameter – the total (nearly conserved) energy E – and the dimensionless function f (of the only possible dimensionless combination of E, k and t). By the same argument we could get the decay law for the total enstrophy $Z_2\sim t^{-2}$. Once again, the dimensional arguments would give a slope of -3 for the energy spectrum of the decaying turbulence at large k.

Unlike the 3-D case, one has only very limited experimental verification of the 2-D turbulence laws. One could simulate it (to some extent) in the laboratory environment, but only within a limited range of scales. Therefore, the bulk of 2-D-turbulence results were obtained in numerical simulations, with somewhat tenuous and speculative links to experiments and observation.

There are also analytic theories, advanced in the 60s and 70s and based on certain closure assumptions. Their premises, however, are also hard to verify experimentally or numerically.

Let us add some useful references for both numerical experiences and modal spectral calculations on the decaying turbulence (see Danilov and Gurari, 2000).

McWilliams (1984) has shown decaying turbulence to evolve into long-lived coherent vortices, which persist for many turnover periods. The first examples of coherent vortices in decaying turbulence appeared in the early papers of Fornberg (1977); Basdevant et al. (1981), but McWilliams demonstrated this phenomena in different systems and for various initial conditions. Figure 11 shows a typical vorticity field of decaying turbulence.

The paper of McWilliams (1984) takes an initial spectrum $E(k,0)$ with a slope of -3 at large k, and resolves the system on a 256^2 grid. As the system evolves its spectrum steepens to -5, and the enstrophy transfer drops to zero. But the vorticity kurtosis shoots from the initial Gaussian value of 3 to several dozen. Vortices form at intermediate scales (between the initial state and the box size).

The vortices can slow down the cascade processes (see McWilliams, 1990b), since they carry the bulk of enstrophy, but do not stretch and filament one another. Paper of Santangelo et al. (1989) made a systematic study of decaying turbulence and its spectra in an attempt to reconcile the multitude of reported spectral slopes. It uses a high resolution 1024-grid and long time integration of the initial Gaussian field of zero mean value and the initial energy spectrum $E(k,0)\sim k[1+(k/k_0)^{\gamma+1}]^{-1}$ for $k_0=6$, and $\gamma=6$.

The initial evolution creates vortex filaments via stretching by the large-scale velocity field. They carry over small-scale eddies as passive tracers, hence developing a slope -3 in the enstrophy range. At the next stage large coherent vortices evolve from the local vorticity extrema, and start breaking down into smaller size vortices. Due to two different mechanisms of vortex formation, no universal distribution of vortices by size and intensity appears as evident in their spectra.

The energy spectra have an interval of steep slope at small k, and a shallower (closer to -3) interval in the small vortices range. The total energy remains nearly constant during the evolution, while the enstrophy declining does not, however, drop to zero. Indeed, large-scale stable vortices lock up a sizable fraction of enstrophy, and will not let it cascade to small scales.

The main conclusion of Santangelo et al. (1989) is that the -3 spectrum could appear only at an intermediate stage of the process. Large vortices destroy scale invariance and steepen the low-mode spectra. Besides, the paper claims that the resulting spectral shape strongly depend on the initial state of the system. In particular, an initially steep spectrum produces π/k_0-size vortices that dominate the future evolution of the system. Shallower initial spectra, like the -3 used by McWilliams (1984); Benzi et al. (1988), give a broad spectrum of vortex sizes. Paper of Santangelo et al. (1989) sets the borderline initial slope for the two patterns somewhere between -3 and -6 .

The appearance of coherent vortices in the decaying turbulence allows them to be studied as statistical vortex ensembles (Benzi et al., 1988; McWilliams, 1990a; Carnevale et al., 1991; Benzi et al., 1992; Weiss and McWilliams, 1993). For this purpose, one needs to select coherent vortices from the small-scale turbulent background. The simplest selection rule identifies regions of vorticity field that exceed a prescribed threshold (in terms of rms vorticity). Another census analyzes the determinant of the velocity gradient and seeks regions where it takes negative values. Paper of Benzi et al. (1988) claims that the two methods give similar results. The initial -3 spectrum (at 512-resolution) evolves to $k^{-4,3}$. The authors estimate the vortex contribution to the energy spectrum to have a slope of $-6+\alpha$, depending on the vortex size distribution. That yields an energy slope of -4.1, close to the observed value. At the final stages of evolution the dynamics of coherent vortices can be well approximated by point vortices.

Paper by McWilliams (1990a) studies the characteristics of 2-D vortices, particularly their time evolution. It takes an initial state with the energy spectrum $E(k,0)=k^6(k+2k_0)^{-18}$, on a 450^2 grid. The vortices are selected by comparison with the "ideal" vortex profile. Their number decays in time, as $N\sim t^{-0,71}$. The maximal vorticity decreases, but its mean absolute value over all vortices remains nearly constant. The mean vortex size grows as $t^{0,2}$, and the mean separation as $t^{0,4}$. The vortices maintain a nearly Gaussian profile, but unlike (Benzi et al., 1988) this profile is not universal. The difference between the two cases could be attributed to different initial conditions. Finally, the

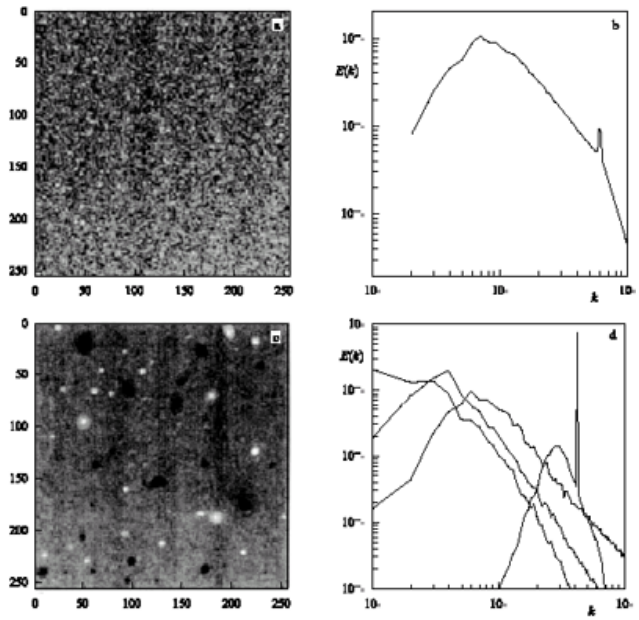


Fig. 11. Vorticity and energy spectra in stationary **(a, b)** and decaying **(c, d)** turbulence. (a) Realization of vorticity field at the quasistationary stage of evolution, (b) time-averaged energy spectrum, forced at wave numbers $k_2 \in [58, 62]$ and stabilized by the bottom friction; (c) Realization of vorticity field at the late stage of the decay process, t_v=124; (d) Evolution of the energy spectrum during the decay phase ($t_v\simeq 0, 5, 40, 70, 124$). The initial spectral peak at $k\simeq 45$, and initial energy equals 1.

enstrophy decreases as $t^{-0,4}$, in stark contrast to results of Batchelor (1969).

The prominent role of vortices in the decaying turbulence motivated the development of vortex models (Carnevale et al., 1991; Benzi et al., 1992; Weiss and McWilliams, 1993). Authors of these works assume that vortices behave like point vortices, at large separations, and each is determined by two parameters – the vortex radius and (uniform) vorticity level. When two vortices collide, that is come within a distance $1,7(R_1+R_2)$ of their radii, they merge into a single vortex of radius $(R_1^4+R_2^4)^{1/4}$. Such collisions conserve energy and decrease enstrophy, and thus can account for the enstrophy loss due to vortex straining and filamentation in real systems. Different initial conditions in papers by Carnevale et al. (1991); Benzi et al. (1992); Weiss and McWilliams (1993), however, lead to divergent results. Thus Benzi et al. (1992) has vortex sizes distributed initially according to the R^{-3} law, which corresponds to the -3 spectrum of numerical simulations (Benzi et al., 1988). The terminal size-distribution comes close to R^{-2}, which gives a -4 energy slope (close to -4.1 Benzi et al., 1988). The number of vortices decays as $t^{-0.6}$, which differs from the $t^{-0.7}$ law (McWilliams, 1990a), the $t^{-0.75}$ law (Carnevale et al., 1991), and the $t^{-0.72}$ law (Weiss and McWilliams, 1993).

The point-vortex dynamics analyzed by Carnevale et al. (1991); Weiss and McWilliams (1993), provides scaling laws for the vortex number, size distribution, distance distribution,

and enstrophy, which agree with the pseudo-spectral results obtained by McWilliams (1990a). Based on the numeric results of McWilliams (1990a), particularly the conservation of average vorticity amplitude (over all vortices), Carnevale et al. (1991) proposed a hypothesis for decaying turbulence, consistent with the numerical observations.

Except energy conservation, as in the Batchelor theory (Batchelor, 1969), Carnevale et al. (1991) postulated the conservation of vorticity extrema. The latter follows naturally, when one views decay turbulence as the process of vortex merging. The enstrophy decay is confined to the vortex periphery (caused by filamentation), but it does not affect vortex cores. Assuming the conservation of vortex extrema Ω_m one could introduce the time and length parameters $\tau=\Omega_m^{-1}$, $l=\sqrt{E}/\Omega_m$. Assuming further a power decay law for the number of vortices N_v with an exponent ξ : $N_v \sim t^{-\xi}$, and writing the energy and enstrophy (confined in vortex cores) as $E \sim N_v R^4 \Omega_m^2$, $Z_2 \sim N_v R^2 \Omega_m^2$, one gets the mean vortex size to grow as $l(t/\tau)^{\xi/4}$ (energy conservation), while the distance between vortices grows as $l(t/\tau)^{\xi/2}$, and the enstrophy of the entire flow decays as $\Omega \sim \tau^{-2}(\tau/t)^{\xi/2}$. Such conclusions also agree with the numerical studies.

The proposed scaling differs from the classical Batchelor results, as well as the selective decay theory (see for instance Salmon, 1988). The latter postulates that turbulent decay should minimize enstrophy, subjected to the energy constraint (Carnevale et al., 1992). This theory was applied to describe late stages of turbulent decay in papers of Mattaeus et al. (1991a,b) and others. Paper of Carnevale et al. (1992) shows selective decay to predict higher decay rates than numerical simulations, as it fails to account for the role of coherent vortex structures in slowing the decay process.

The validity and utility of pseudo-spectral methods for two-dimensional turbulence dominated by vortices has been questioned by Dritschel (1993). It has been argued that pseudo-spectral methods introduce significant numerical dissipation on the vortex periphery, thus giving a wrong description of vortex mergers and the resulting filamentation (see Legras and Dritschel, 1993). Paper of Mariotti et al. (1994) demonstrated that thin filaments on the periphery, subjected to strong hyper-viscous dissipation, bring about a sharp increase of the overall dissipation rate of vorticity. Furthermore, the hyper-viscosity could cause undue oscillations of iso-contours on the periphery of vortex cores. He proposed an alternative method of contour dynamics, augmented by the so-called surgery. It allows in principle a higher spatial resolution than pseudo-spectral methods and, hence, a broader spectral range. The dissipation scale (which cuts off fine structures) corresponds to resolution 7000 in pseudo-spectral methods. The paper finds that the vortex size distribution is not self-similar, and steepens as the system evolves. The corresponding energy spectra vary from nearly k^{-5} at large scales to k^{-3} at small ones. It also finds that some other characteristics, like the growth rate of vortex sizes for large vortices and the decay rate of enstrophy, are markedly different from the pseudospectral results. The reason for such a departure, however, is not only the overall decrease of dissipation, as claimed by the author, but may include other factors, such as sharp boundaries of the vortex patches, in the contour dynamics.

Let us stress that the entire decay process is due to the enstrophy dissipation at short wavelengths. Without such dissipation, the system would relax to a statistical equilibrium state with an equipartition energy spectrum k^{-1} (see, for instance, a paper of Holloway, 1986). One could expect the numerical dissipation to be equally important. Indeed, the key process of large scale condensation (vortex merger) is largely determined by small-scale dissipation.

The criticism about in respect of pseudo-spectral methods (see paper of Dritschel, 1993) is based on the notion of a well identified (sharp) vortex boundary, while these methods operate with smooth fields, without jumps. It is not clear to what extent vortex patches could represent smooth fields. On the other hand the different behavior of pseudo-spectral decaying turbulence from that of contour dynamics could be interpreted as a difference in initial conditions, in the spirit of the paper of Santangelo et al. (1989).

Papers of Chasnov (1997); Bartello and Warn (1996); Chasnov and Herring (1998) describe the dependence of the decay characteristics on the enstrophy dissipation mechanism. The main result is that one should not expect the statistics of coherent vortices to be universal. They should rather depend on the type of viscous dissipation and the Reynolds number (if the latter is not too large).

5 Conclusion

The evolution of strongly localized vortices (with a single sign of vorticity, without forcing and without dissipation) in a flow in the presence of stochastic perturbations has been analyzed. The analysis have been made in the framework of a 2-D point-vortex model.

It was shown that relaxation of system to an axially symmetrical configuration can be stoped due to the spontaneous formation of a regular structure of localized vortices. The observed clusters can be explained without an incorporating of special physics arguments beyond a 2-D euler model. A good quantitative agreement between plasma experiments at $Re \to \infty$ and the numerical integration of the proposed model in the evolution of the great number of vortices, was found.

An analytical consideration and a numerical analysis were performed to find out if the predictions of statistical mechanics (it predict a relaxation of system to the axially symmetrical configuration) could be due to the existence of a fluctuating part of the hamiltonian in the model and the absence of dissipation. It was be noted that even a small level of numerical dissipation can completely destroy the observed process of a vortex structure formation.

Edited by: A. Provenzale
Reviewed by: Two referees

References

Bartello, P. and Warn, T.: Self-similarity of decaying two-dimensional turbulence, J. Fluid Mech., 326, 357–372, 1996.

Batchelor, G. K.: An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, p. 537, 1967.

Batchelor, G. K.: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence, Phys. Fluids Suppl. II, 12, 233, 1969.

Basdevant, C., Legras, B., Sadourny, R., and Béland, M.: A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability, J. Atmos. Sci., 38, 2305–2326, 1981.

Benzi, R., Patarnello, S., and Santangelo, P.: Self-similar coherent structures in two-dimensional decaying turbulence, J. Phys. A, 21, 1221–1237, 1988.

Benzi, R., Colella, M., Briscolini, M., and Santangelo, P.: A simple point vortex model for two-dimensional dcaying turbulence, Phys. Fluids A, 4, 1036–1939, 1992.

Brands, H., Chavanis, P. H., Pastmanter, R., and Sommeria, J.: Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices, Phys. Fluids, 11(11), 3465, 1999.

Carnevale, G. F., McWilliams, J. C., Pomeau, Y., Weiss, J. B., and Young W. R.: Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence, Phys. Rev. Lett., 66, 2735–2737, 1991.

Carnevale, G. F., McWilliams, J. C., Pomeau, Y., Weiss, J. B., and Young W. R.: Rates, pathways, and end states of non linear evolution in decaying two-dimensional turbulence: Scaling theory versus selective dacay, Phys. Fluids A, 4, 1314–1316, 1992.

Chasnov, J. R.: On the decay of two-dimensional homogeneous turbulence, Phys. Fluids, 9, 171–180, 1997.

Chasnov, J. R. and Herring, J. R.: Self-Similar Decay of two-Dimensional Turbulence, Advances in turbulence, 415–418, 1998.

Chirikov, B. V.: Research cocerning the theory of nonlinear resonance and the stochasticity, Preprint 267, 1969, Novosibirsk, Institute of Nuclear Physics, Engl. Trans., CERN Trans., 71–40, 1971.

Chirikov, B. V.: Motion stability problem of a charged particle in a magnetic snare [Problema ustoiichivosti dvijenija zarjajennoii chastizy v magnitnoii lovushke.], Preprint 78–23, Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 1978.

Chirikov, B. V.: A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Rep., 52(5), 263-379, 1979.

Danilov, S., Dolzhanskii, F. V., Dovzhenko, V. A., and Krymov, V. A.: Experiments on free decay of quasi–two–dimensional turbulent flows, Phys. Rev. E, 65, 036316, 2002.

Danilov, S. D. and Gurari, D.: Quasi-two-dimensional turbulence. Physics – Uspekhi, 43(9), 863–900, 2000.

Dritschel, D. G.: vortex properties of two-dimensional turbulence, Phys. Fluids A, 5, 984–997, 1993.

Fine, K. S., Cass, A. S., Flynn, W.-G., and Driscoll, C.-F.: Relaxation of 2-D turbulence to vortex crystals, Phys. Rev. Lett., 75, 3277, 1995.

Fornberg, B. J.: A numerical study of 2-D turbulence, Comput. Phys., 25, 1–37, 1977.

Goncharov, V., Pavlov, V. : Multipetal Vortex Structures in Two-Dimensional Models of Geophysical Fluid Dynamics and Plasma, J. Experimental and Theoretical Phys., 92, 4, 594–607 2001.

Holloway, G.: Statistical geofluid mechanics, Ann. Rev. Fluid Mech., 18, 91–147, 1986.

Huang, X. P. and Driscoll, C. F.: Relaxation of 2-D turbulence to a mataequilibrium near the minimum enstrophy state, Phys. Rev. Lett. 72, 2187, 1994.

Kapitsa, P. L.: Dynamic stability of a pendulum with oscillating suspension point, JETP, 21(5), 588–597, 1951.

Landau, L. D. and Lifchitz, E.-M.: Physique statistique, vol. 5, Nauka, Moscou, 1979a.

Landau, L. D. and Lifchitz, E.-M.: Cinétique physique, vol. 10, Mir, Moscou, p. 26, 1979b.

Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: Fluid Mechanics, 2nd ed., rev., Pergamon Press, Oxford, New York, 1987.

Legras, B. and Dritschel, D. J.: A comparison of the contour surgery and pseudospectral method, Comput. Phys., 104, 287, 1993.

Matthaeus, W. H., Stribling, W. T., Martinez, D., Oughton, S., and Montgomery, D.: Selective decay and coherent vortices in two-dimensional incompressible turbulence, Phys. Rev. Lett., 66, 2731–2734, 1991.

Matthaeus, W. H., Stribling, W. T., Martinez, D., Oughton, S., and Montgomery D.: Decaying, two-dimensional, Navier-Stockes turbulence at very long times, Physica D, 51, 531–538, 1991.

Mariotti, A., Legras, B., and Dritschel, D. G.: Vortex stripping erosion of coherent structures in two-dimensional flows, Phys. Fluids, 6, 3954–3962, 1994.

Marteau, D., Cardoso, O., and Tabeling, P.: Equilibrium states of two–dimensional turbulence: an experimental study, Phys. Rev. E, 51(5), 5124, 1995.

McWilliams, J. C.: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow, J. Fluid Mech., 146, 21, 1984.

McWilliams, J. C.: The vortices of geostrophic turbulence, J. Fluid Mech., 219, 387–404, 1990a.

McWilliams, J. C.: A demonstration of the suppression of turbulent cascades by coherent vortices in two-dimensional turbulence, Phys. Fluids A, 2, 547–552, 1990b.

Migdal, A. B.: Qualitative methods in quantum theorie, Nauka, 1975.

Miller, J., Weichman, P. B., and Cross, M. C.: Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, Phys. Rev. A , 45(4), 2328–2359, 1992.

Onsager, L.: Statistical hydrodynamics, Nuevo Cimento Suppl. 6, 279, 1949.

Pavlov, V., Buisine, D. and Goncharov, V. Formation of vortex clusters on a sphere, Nonlin. Processes Geophys., 8, 9–19, 2001.

Pavlov, V., Buisine, D., and Decossin, S.: Whether two-dimensional turbulence evolves to a unique state, Phys. Fluids, 14(11), 3739–3745, 2002.

Pointin, Y. B., and Lundgren, T.-S.: Statistical mechanics of two–dimensional vortices in a bounded container, Phys. Fluids, 19, 1459, 1976.

Salmon, R.: Lectures on Geophysical Fluid Dynamics, Oxford University Press, 1998.

Santangelo, P., Benzi, R., and Legras, B.: The generation of vortices in high-resolution, two-dimnsional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breacking of self-similarity, Phys. Fluids A, 1, 1027–1034, 1989.

Sommeria, J., Staquet, C., and Robert, R.: Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer, J. Fluid Mech., 233, 661, 1991.

Weiss, J. B. and McWilliams, J. C.: Temporal scaling behavior of decaying two-dimensional turbulence, Phys. Fluids A, 5, 608–621, 1993.

Zaslavskii, G. M. and Sagdeev, P. Z.: Introduction in Nonlinear Physics, M., Nauka, 1988.

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 835–840

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

Evolution de configurations de tourbillons avec les mêmes invariants globaux

Emilie Bécu *, Vadim Pavlov

Laboratoire de mécanique de Lille, UMR 8107, université de Lille 1, boulevard Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu le 26 avril 2004 ; accepté le 13 mai 2004

Disponible sur Internet le 10 août 2004

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

Dans cette Note, nous étudions l'évolution de la répartition de N tourbillons localisés identiques. Nous montrons, en utilisant l'expérience numérique directe, plus précisément le schéma de Runge–Kutta à l'ordre 4, représenté par le modèle des tourbillons ponctuels, que des répartitions initiales, de vorticité différentes avec les mêmes invariants globaux, peuvent exister. Nous montrons que des configurations initiales avec les mêmes invariants peuvent évoluer vers des états quasi-finaux complétement différents. ***Pour citer cet article : E. Bécu, V. Pavlov, C. R. Mecanique 332 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Evolution of configurations of vortices with the same global integral invariants. In this Note, we address the question of the evolution of a distribution of N identical localized vortices. Using direct numerical simulation, (here the Runge–Kutta scheme of order 4), together with the localized-vortices model, we show that different initial distributions of vorticity with identical integral invariants may exist. We show that the initial configurations with the same invariants may evolve to totally different quasi-final states. ***To cite this article: E. Bécu, V. Pavlov, C. R. Mecanique 332 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Tourbillons localisés ; Auto-organisation

Keywords: Fluid mechanics; Localized vortices; Self organization

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : emilie.becu@ed.univ-lille1.fr (E. Bécu), Vadim.Pavlov@univ-lille1.fr (V. Pavlov).

1631-0721/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2004.05.005

Abridged English version

There exists a point of view based on statistical mechanical arguments (see for instance [1,2]), which affirms that two-dimensional turbulence, of full circulation Γ, initially created in a some space region, of space scale a, and evolving freely (without dissipation and forcing), should pass to a unique final axi-symmetrical distribution. In fact, two-dimensional turbulence evolution is governed by strongly nonlinear equations. In this situation, field components interact intensively and mix rapidly. For $t \gg \tau$, after only a few characteristic times of rotation (period of revolution $\tau = 2\pi a^2/\Gamma$), the system could be considered to be stochastic. It is natural to suppose that the final configuration, C_{F}, must be fixed by global invariants of the system (circulation, enstrophy, full kinetic energy, etc.) and is independent of initial conditions. Thus, if the process of evolution is governed by the restrictions of a statistical mechanical character, different initial configurations C_{I} with the same global invariants should evolve to the unique final axi-symmetrical configuration of vorticity, C_{F}.

Two questions arise immediately. Firstly, is it possible to build different C_{I} with the same global invariants? And the second one, do different initial configurations with the same invariants evolve to the unique, universal final configuration?

We have used direct numerical simulations to answer these questions. We have considered the model of localized vortices, because this model assures the respect of all conservation laws. The basic Hamiltonian equations for the system evolving freely are Eq. (1). We have started with an annular initial configuration. Different initial configurations with the same global invariants have been found; it also has been shown that the system does not evolve towards a unique axi-symmetric configuration of vorticity. 'Clusters' of vortices have been observed, not a unique central peak of vorticity. This fact is probably explained by the existence of the fluctuating part, f_1, of the vortex distribution function (see (1)), which cannot be suppressed in experiments, or after averaging. The obtained results could be considered as enigmatic, but recent plasma experiences on 'vortex crystal' formation show that the situation is not obvious: it is clear that a perfect system which evolves in the absence of dissipation and forcing, does not forget the initial conditions. The obtained results are in agreement with Batchelor's (see [3]) arguments that a quasi-final state of a vortex system must be governed by history details preceding the state. Hence, different quasi-final configurations have been found in the depending on possible initial configurations: (a) basic states which reach a maximum vorticity at the center, (b) 'vortex crystals' and (c) states where no strong vortex persists and which correspond probably to the principle of the 'minimum of enstrophy'.

1. Présentation

Si on laisse évoluer un « gaz » de $N \gg 1$ tourbillons ponctuels bidimensionnels, de même signe, laissé seul, comme tout système macroscopique fermé, il doit tenter de passer à l'état d'équilibre statistique. Naturellement, l'évolution de la fonction de répartition des tourbillons selon l'équation cinétique doit s'accompagner de l'accroissement de l'entropie (cf., par exemple, [1,2]). En se basant sur ces arguments de Mécanique Statistique, on peut conclure qu'un système de N tourbillons doit évoluer vers une répartition finale universelle. Selon ce point de vue, on peut s'attendre à ce que la turbulence bidimensionnelle, initialement créée dans un domaine de l'espace et se développant librement (en absence de dissipation et de forçage), évolue vers une configuration finale axi-symmétrique. En effet, l'évolution de la turbulence bidimensionnelle est gouvernée par des équations fortement non linéaires. Les composantes de champs interagissent intensément et doivent donc se mélanger très rapidement. Il est naturel de supposer, dans ces conditions, que le système évoluerait vers l'équilibre statistique, dont la configuration est indépendante des angles.

Discutons premièrement des limites de validité de cette hypothèse largement répandue. Soit un système constitué d'un grand nombre de tourbillons ponctuels. La vitesse angulaire de chaque tourbillon i est alors $\Omega_i = \dot{\theta}_i$ (cf. (1) pour des précisions sur θ), où θ_i est la coordonnée angulaire du tourbillon et $\dot{\theta}_i$ sa dérivée par rapport au temps. La valeur moyenne de Ω_i peut être estimée par $\overline{\Omega} \sim \Gamma/d^2$, où Γ est la circulation totale et d le diamètre du

domaine de localisation des tourbillons. Mais les différents tourbillons, influencés par l'ensemble de tous les tourbillons, ont des vitesses angulaires différentes distribuées autour de $\overline{\Omega}$ selon une certaine loi. C'est pourquoi, les tourbillons ayant par exemple à l'instant initial $t = 0$ les mêmes valeurs θ_i (i.e. $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_0$) « s'envolent » très vite ; un processus de mélange très rapide des tourbillons par rapport aux angles a donc lieu.

Supposons que la fonction de répartition des tourbillons par rapport à θ et Ω à l'instant $t = 0$ soit donnée par une fonction quelconque $f(\theta_0, \Omega)$, où $\theta_0 = \theta(t = 0)$. Décomposons cette fonction en deux parties, sous la forme $f(\theta_0, \Omega) = \bar{f}(\Omega) + f_1(\theta_0, \Omega)$, où $\bar{f}(\Omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_0\, f(\theta_0, \Omega)$ est indépendante de θ_0. La fonction $f_1(\theta_0, \Omega_i)$ vérifie la condition $\bar{f}_1(\theta_0, \Omega) = 0$. Evidemment, cette fonction est de signe variable par rapport au premier argument. On peut toujours trouver un intervalle $\Delta\theta_{12} = \theta_{01} - \theta_{02} \sim \pi$ et donc $f_1(\theta_{01}, \Omega) \sim -f_1(\theta_{02}, \Omega)$: sur l'intervalle $\Delta\theta_0 \sim \pi$, la fonction f_1 change de signe. Pour $t > 0$, comme $\theta_i \sim \theta_{0i} + \Omega_i t$, la fonction de répartition devient $f(\theta - \Omega t, \Omega) = \bar{f}(\Omega) + f_1(\theta - \Omega t, \Omega)$, où $\theta - \Omega t$ appartient à $[0, 2\pi]$ (modulo 2π). Pour de différentes valeurs de Ω_1 et Ω_2, les termes dépendant du temps dans le premier argument deviennent prédominants par rapport aux angles initiaux et on peut estimer que la fonction de signe variable f_1 change de signe quand $(\Omega_2 - \Omega_1)t \sim \pi$, i.e. pour une variation des vitesses angulaires $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \sim \pi\, t^{-1}$. Cette estimation simple montre que la fonction devient de signe variable pour le second argument aussi. Au fur et à mesure, quand $t \to \infty$, en passant de Ω à $\Omega + \Delta\Omega$ de plus en plus proches, avec $|\Delta\Omega| \ll |\overline{\Omega}|$, la fonction f_1 devient de plus en plus oscillante par rapport au second argument, i.e. par rapport à Ω.

Dans ce contexte, l'apport d'une fonction, f_1, oscillant rapidement autour des moyennes est toujours faible. Cette partie rapidement fluctuante de la fonction peut être négligée dans la plupart des cas. En effet, il existe toujours, dans des systèmes réels, une dissipation physique qui devient forte aux petites échelles en supprimant tous les processus qui pourraient se réaliser dans ce domaine. Le même effet (dissipation numérique) existe dans le calcul numérique quand une dissipation artificielle s'introduit aux petites échelles. Finalement, toutes les procédures expérimentales contiennent un moyennage statistique quelconque intrinséque (cf. par exemple les expériences sur l'étude d'une répartition quasi-finale de la turbulence [4,5]).

Les arguments exposés précédemment ont évidemment un caractère général et sont appliqués à toutes les grandeurs changeant rapidement (« phases ») et variant dans des intervalles finis [6].

C'est ce qui nous permettrait d'obtenir, dans le contexte de notre travail, que $\langle f_1 \rangle \to 0$, avec une convergence rapide. Dans notre cas, ce serait un moyennage de la fonction de répartition par rapport aux angles θ. Après seulement plusieurs tours de révolution du système, pour un système avec une dissipation quelconque, pour $t \gg \overline{\Omega}^{-1}$, on devrait parvenir à $f(\theta, \Omega) \to \bar{f}(\Omega)$ (à une fonction moyennée par rapport aux angles), ce qui pourrait se traduire par une concentration axi-symmétrique des tourbillons par rapport au centre du système.

D'autre part, on peut supposer, comme cela est postulé dans la Mécanique Statistique (cf. [7–12]), que la configuration finale, si elle existe, n'est fixée que par les intégrales globales du système. Parmi ces intégrales, ce sont l'énergie totale du système et les moments, notamment la circulation Γ et l'enstrophie Z_2, qui jouent évidemment un rôle déterminant. On peut s'attendre à ce que la configuration finale, lorsqu'elle est gouvernée par les lois de la Mécanique Statistique, soit indépendante des conditions initiales du problème.

Donc, si le processus est effectivement gouverné par les contraintes de la Mécanique Statistique, *des configurations initialement différentes* ayant les *mêmes* intégrales globales doivent évoluer vers la même configuration finale axi-symétrique de la vorticité.

Dans ce contexte, deux questions se posent immédiatement. Est-il possible de construire, en principe, des *répartitions* de vorticité initiales *différentes* qui ont les *mêmes* invariants globaux ? Et, si tel est le cas, les systèmes, partant de *différentes répartitions initiales* de vorticité ayant les *mêmes* invariants globaux, évoluent-ils vers un *état final unique* ou vers des *états finaux différents*, ou même évoluent-ils vers aucun état final ?

A notre connaissance, ces questions n'ont pas encore été abordées dans la littérature scientifique, et ce, probablement, pour des raisons diverses : le système tourbillonnaire est gouverné par des équations d'évolution fortement non linéaires et leurs solutions analytiques ne sont pas envisageables, les approches basées sur les principes variationnels admettent des formulations diverses (cf. [7–12]), etc.

Le but principal de ce travail est d'appliquer l'expérience numérique directe pour tenter de répondre à ces questions.

Pour cela, il faut choisir un modèle mathématique pertinent, qui, en absence de dissipation, respecte toutes les lois de conservation. Dans ce contexte, les méthodes traditionnellement utilisées, par exemple le modèle de décomposition en modes spectraux, ne peuvent pas être retenues car ils présentent des problèmes numériques en petites échelles. En effet, il est bien connu qu'une des difficultés fondamentales en description de la turbulence est l'expansion du mouvement aux petites échelles, au delà de l'échelle de dissipation visqueuse, quand les calculs ne proviennent que du champ moyenné localement, à l'échelle d'une maille numérique. Le comportement de la turbulence correspondant à ces échelles explicites est habituellement numériquement modélisé au sens statistique ; des formes différentes de la viscosité turbulente sont introduites empiriquement, modélisant les transferts d'énergie à travers les échelles intermédiaires, etc. On observe fréquemment, en turbulence bidimensionnelle, que les fluctuations des magnitudes et des phases de modes supérieurs au cours de calculs n'assurent pas les lois de conservation. Par cette raison, parmi les modèles libres de ces contraintes, notre choix s'est porté sur celui de tourbillons localisés, i.e. des structures tourbillonnaires élémentaires dont la vorticité est très concentrée et très élevée par rapport au reste du domaine. Remarquons que de nombreuses études (cf. [7–12]) montrent que le modèle de tourbillons localisés malgré sa simplicité apparente, est très séduisant car il permet, par exemple d'extraire les caractéristiques générales de l'auto-organisation des structures parfois très complexes, par des procédés simples.

2. Expérience numérique directe

Soient $N \gg 1$ tourbillons ponctuels d'intensité γ_i, $i = 1, N$. Les équations de mouvement des centres des tourbillons sont : $\gamma_i \partial_t x_i = \partial_j H, \gamma_i \partial_t y_i = -\partial_i H$. Ce système est un système Hamiltonien. L'Hamiltonien $H = \frac{1}{2}\int_D \mathrm{d}\mathbf{x}\, v^2$, i.e. l'énergie cinétique de l'écoulement d'un fluide à une constante près, exprimée par les variables canoniques x_i, y_i, peut être écrit sous la forme $H = -(4\pi)^{-1}\sum_{i,j;\ i\neq j}\gamma_i\gamma_j \ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, où la vorticité a été choisie sous la forme $\Omega = \sum_j \gamma_j \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Ici, $(1/2\pi)\ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ est la fonction de Green dans l'espace 2D illimité, $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, où $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est la fonction de Dirac. Rappelons que l'énergie cinétique d'un fluide peut être réécrite sous la forme $H = \frac{1}{2}\int_D \mathrm{d}\mathbf{x}\, \psi\Omega$, où $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = -\Delta\psi$, et les composantes de la vitesse $v_i = \varepsilon_{ij}\partial_j\psi$, avec $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ et $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$.

A la place de coordonnées cartésiennes, il est commode d'introduire les coordonnées polaires (r_i, θ_i) par le passage de coordonnées cartésiennes (x_i, y_i) à (r_i, θ_i) par la transformation $x_i = r_i\cos\theta_i$, $y_i = r_i \sin\theta_i$ avec $r_i > 0$. Une transition au système d'équations adimensionnées (par commodité pour les calculs numériques) est assurée par $x_i \to Rx_i$, $y_i \to Ry_i$, $t \to \tau t$ où $\tau = 2\pi R^2\Gamma^{-1}$. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des tourbillons d'intensité identique $\gamma_i = \Gamma/N$. Pour que le système d'équations soit canonique, passons aux variables « action-angle » (J_i, θ_i), où $J_i \equiv {r_i}^2/2$:

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\overline{H}, \qquad \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial J_i}\overline{H} \tag{1}$$

avec l'Hamiltonien donné par $\overline{H} = -(4N)^{-1}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1,\ n\neq m}^{N}\ln[J_m^2 + J_n^2 - 2\sqrt{J_m J_n}\cos(\theta_m - \theta_n)]$, à une constante près.

L'expérience numérique est organisée de la façon suivante : la distribution initiale des $N \gg 1$ tourbillons s'effectue sur un anneau, de vorticité donnée, avec les coordonnées $r_s = 1$ et

$$\theta_s = 2\pi N^{-1} e(s-1)\Theta(K-s) + 2\pi N^{-1}(1-e)(s-1)\Theta(s-K) \tag{2}$$

Ici, $s = 1, 2, \ldots, N$ et $1 < K < N$. Le premier tourbillon a la coordonnée $\theta_1 = 0$. La série des K premiers tourbillons est distribuée avec un pas $2\pi N^{-1}e$, les autres tourbillons sont distribués avec un pas $2\pi N^{-1}(1-e)$, $0 < e < 1$. La fonction $\Theta(z)$ est la fonction de Heaviside, $\Theta(z) = 1$ quand $z > 0$ et $\Theta(z) = 0$ quand $z < 0$. Si

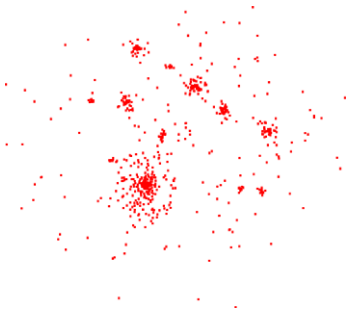


Fig. 1. Configuration des tourbillons à l'instant $t \sim 50$ pour $K = 260$ et $e_1 = 0,108$.

Fig. 1. Configuration of vortices at $t \sim 50$ with $K = 260$ and $e_1 = 0.108$.

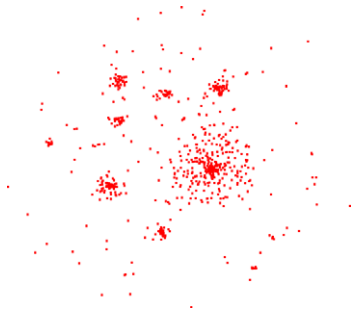


Fig. 2. Configuration des tourbillons à l'instant $t \sim 50$ pour $K = 260$ et $e_2 = 0,624$.

Fig. 2. Configuration of vortices at $t \sim 50$ with $K = 260$ and $e_2 = 0.624$.

$z = 0$, $\Theta(0) = \frac{1}{2}$. La distribution annulaire initiale a ainsi une certaine asymétrie pour différents (K, e), mais le moment cinétique (intégrale du mouvement) $\overline{P}$, défini par $\overline{P} = -\frac{1}{2}\sum r_i'^2$, reste le même. L'Hamiltonien $H(e, K)$ est calculé à partir de $H(e, K) = -(4N)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\ln(1 - \cos\theta_{ij})$, avec θ_{ij} provenant de (2), avec $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$. Dans cette expression, nous n'avons laissé que les termes dépendant des angles. La circulation Γ est fixée par le nombre de tourbillons N. Dans la structure du modèle, toutes les autres intégrales de mouvement, Z_i (enstrophie Z_2, etc.) sont conservées automatiquement. Nous fixons arbitrairement le nombre total de tourbillons à $N = 750$, les premiers tourbillons à $K = 260$. Les Hamiltoniens $H(e, K)$, avec K fixé ne sont fonction que de e et leur courbe nous permet de trouver e_1 et e_2 correspondants au H choisi pour chacun des cas. Nous prenons l'Hamiltonien initial à $H_0 = 0{,}25$. Nous aurons $e_1 = 0{,}108$ et $e_2 = 0{,}624$ pour $K = 260$.

L'étude de l'évolution de configuration des tourbillons pour un système donné avec des conditions initiales associées a été intégrée numériquement avec un schéma de Runge–Kutta d'ordre 4. La conservation de l'énergie et du moment angulaire a été contrôlée pendant les calculs. L'analyse montre que les paramètres ont de petites variations avec les erreurs définies par $|H_i - H_0|/|H_0| \leqslant 3 \times 10^{-3}$, $|P_i - P_0|/|P_0| \leqslant 2 \times 10^{-7}$ pendant le procédé d'itération de $t = 0$ to $t = 50$ qui correspond à 50 temps de référence. Malgré l'écart quadratique relativement significatif pour l'Hamiltonien, qui devrait mener, en principe, à l'intensification du processus de mélange grâce aux erreurs numériques s'accumulant, aucune tendance visible de la chaotisation n'a été observée.

Les résultats finaux des calculs (pour t ~ 50) sont présentés sur les Figs. 1 et 2.

3. Conclusion

Les Figs. 1 et 2 montrent nettement que les champs tourbillonnaires caractérisés par les répartitions initialement différentes et ayant les mêmes invariants globaux, ne tendent visiblement pas à évoluer vers une configuration universelle, unique et axi-symmétrique. En effet, on remarque bien la présence de « clusters » s'organisant différemment dans les deux cas présentés. Nous pouvons l'expliquer par le fait que la fonction de répartition des tourbillons, présentée en 1, comporte une partie fluctuante, $f_1(\theta_0, \Omega)$, qui est nulle (à cause du moyennage) pour les expériences et les méthodes de modes spectraux, mais qui ne l'est pas dans notre cas. Si nous enlevons cette fonction fluctuante dans notre étude, tout se passera comme si le système évoluait vers une configuration axi-symétrique. Les résultats des Figs. 1 et 2 ne s'inscrivent donc pas dans les prédictions basées sur les arguments habituels de la Mécanique Statistique, ce qui pourrait être estimé énigmatique. Cependant, des expériences récentes sur la formation des cristaux tourbillonnaires [13,14] montrent que la situation n'est pas si évidente qu'on pourrait le penser : le système 2D, en évoluant en absence d'une dissipation et d'un forçage (physique ou numérique),

n'oublie pas les conditions initiales de sa répartition. Notre étude confirme, en un certain sens, les arguments de Batchelor [3], qui soutenait que l'état quasi-final du système tourbillonnaire est fixé par l'histoire qui précéde cet état. Nous avons observé qu'en fonction des conditions initiales plusieurs états finaux peuvent donc être formés : (a) états « basiques » qui atteignent un état maximum au centre (du probablement au mélange complet des tourbillons), (b) « cristaux tourbillonnaires », et (c) les états correspondants au « minimum de l'enstrophie », où aucun tourbillon fort ne persiste.

Références

[1] L.D. Landau, E.-M. Lifchitz, Physique statistique, vol. 5, Nauka, Moscou, 1979.
[2] L.D. Landau, E.-M. Lifchitz, Cinétique physique, vol. 10, Mir, Moscou, 1979, p. 26.
[3] G.K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967, p. 537.
[4] D. Marteau, O. Cardoso, P. Tabeling, Equilibrium states of two-dimensional turbulence: an experimental study, Phys. Rev. E 51 (5) (1995) 5124.
[5] S. Danilov, F.V. Dolzhanskii, V.A. Dovzhenko, V.A. Krymov, Experiments on free decay of quasi-two-dimensional turbulent flows, Phys. Rev. E 65 (2002) 036316.
[6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, second ed., revised, Pergamon Press, Oxford, New York, 1987.
[7] L. Onsager, Statistical hydrodynamics, Nuevo Cimento Suppl. 6 (1949) 279.
[8] J. Miller, P.B. Weichman, M.C. Cross, Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, Phys. Rev. A 45 (4) (1992) 2328–2359.
[9] Y.B. Pointin, T.-S. Lundgren, Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container, Phys. Fluids 19 (1976) 1459.
[10] J. Sommeria, C. Staquet, R. Robert, Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer, J. Fluid Mech. 233 (1991) 661.
[11] H. Brands, P.H. Chavanis, R. Pastmanter, J. Sommeria, Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices, Phys. Fluids 11 (11) (1999) 3465.
[12] V. Pavlov, D. Buisine, S. Decossin, Whether two-dimensional turbulence evolves to a unique state, Phys. Fluids 14 (11) (2002) 3739–3745.
[13] K.S. Fine, A.S. Cass, W.-G. Flynn, C.-F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to vortex crystals, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 3277.
[14] X.P. Huang, C.F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to a mataequilibrium near the minimum enstrophy state, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2187.

Titre :

Structures régulières dans la turbulence bidimensionnelle

Résumé :

On observe parfois, dans les milieux turbulents bidimensionnels, la formation de structures tourbillonnaires localisées, quasi-régulières. Dans ce travail, nous examinons différents mécanismes pouvant expliquer la formation de ces structures. Tout d'abord, nous étudions l'influence de fluctuations extérieures sur les conditions initiales de l'écoulement, c'est-à-dire nous examinons le rôle que ces fluctuations peuvent jouer sur la formation de structures régulières. Ensuite, nous appliquons les lois de la mécanique statistique pour mettre en place un principe d'évolution des tourbillons suivant la "température" de leur configuration initiale. Enfin, nous nous placerons dans le cas où le système se trouve encore à un temps antérieur à celui de relaxation. Nous verrons apparaître des structures tourbillonnaires multi-pétales. Des structures plus complexes, les tourbillons-sources, seront étudiées dans la partie finale du travail.

Mots clés :

Turbulence $2D$, gaz des tourbillons localisés, structures régulières multi-pétales.

Title :

Regular structures in two-dimensional turbulence

Abstract :

In flow of bidimensional (in average) turbulence, quasi regular and localized vortex structures have sometimes been observed in experiments. The aim of this study is to model the formation of such organization by different theoritical approaches and to perform numerically. Firstly, the effect of external perturbations on initial conditions of flow is investigated. Secondly, laws of statistical mechanisms are applied to set a principle for the evolution of vortices. This principle is established following initial temperature conditions of system. Thirdly, we focus on the case where the system remains below its relaxation time which reveals apparance of multi-petal vortex structures. Finally, sink-vortices, which are more complex, are analyzed in more details.

Keywords :

$2D$ turbulence, gas of localized vortices, multi-petals regular structures.