



HAL
open science

Modélisation du ruissellement sur surfaces rugueuses

Nicolas Roche

► **To cite this version:**

Nicolas Roche. Modélisation du ruissellement sur surfaces rugueuses. Hydrologie. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT: . tel-00121568

HAL Id: tel-00121568

<https://theses.hal.science/tel-00121568>

Submitted on 21 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

N° attribué par la bibliothèque

/ / / / / / / / / / / / / / /

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UJF

Spécialité : ***Océan, Atmosphère, Hydrologie***

préparée au

Laboratoire d'étude des Transferts en Hydrologie et Environnement
(LTHE, UMR 5564, CNRS-INPG-IRD-UJF)

dans le cadre de l'Ecole Doctorale « ***Terre, Univers, Environnement*** »

présentée et soutenue publiquement par

Nicolas ROCHE

le 25 octobre 2006

**MODELISATION DU RUISSELLEMENT SUR SURFACES
RUGUEUSES.**

Directeur de thèse :

Jean-François Daian

JURY

M.	Philippe Belleudy	Professeur à l'INPG	Examineur
M.	Gerard Govers	Professeur à la KUL	Rapporteur
M.	Denis Dartus	Professeur à l'INPT	Rapporteur
M.	Michel Estèves	Directeur de recherche à l'IRD	Examineur
M.	Jean-François Daian	Maître de conférences à l'UJF	Directeur de thèse

“Je ne sais pas quelle image je donne de moi au monde ; en ce qui me concerne j’ai l’impression d’être un petit garçon qui joue sur le rivage de la mer, qui se divertit en trouvant un nouveau caillou tout lisse ou un coquillage plus joli que d’ordinaire, alors que le grand océan de vérité s’étend devant moi, inaccessible.”

Isaac Newton

Remerciements

Dans un premier temps je tiens à remercier Monsieur Philippe Belleudy qui, en sa qualité de premier thésard de Jean-François Daïan, a accepté de présider le jury du dernier étudiant de son ancien maître.

Je suis très reconnaissant à Messieurs Denis Dartus et Gérard Govers qui m'ont fait l'honneur d'accepter la charge de rapporteur de ce travail.

Je remercie très vivement Monsieur Michel Estèves qui est à l'origine du sujet de thèse qui m'a été proposé. Je le remercie également d'avoir bien voulu participer à mon jury.

Je tiens à exprimer ici toute ma considération et tous mes remerciements à Monsieur Jean-François Daïan, mon directeur de thèse. Tout au long de ce travail, j'ai apprécié sa confiance et ses conseils judicieux. Jean-François...NOTRE MOUVEMENT VAINCRA!!

Je remercie Michel Ricard pour la conception de notre dispositif expérimental, les "bouffes" à Saint Pierre de Chartreuse, les séances d'escalade et nos sorties de ski de randonnée.

Je tiens également à remercier l'ensemble du personnel administratif du labo pour sa disponibilité et son efficacité. Vous avez été pour moi des guides au travers de la jungle administrative.

Comment ne pas remercier les autres galériens de la science avec qui j'ai partagé ces trois ans. Je commencerai par Benoit, qui fut mon colocataire ainsi qu'un coéquipier formidable au lancer de chat ; Guillaume, troll de niveau 10 et redoutable (mini-)golfeur ; l'équipe des grimpeurs fous, Théo (notre maître à tous), David (la brute Normande), Eric (l'armoire vosgienne), Matthieu (un jour tu y arriveras !) et Micki (dit la pince) ; Alex, 118 ; Christophe, représentant local de l'OMS ; Anne-Sophie, représentante du pays basque ; et enfin Hélène, ma secrétaire.

Merci à tous les amis qui ont fait le déplacement pour assister à ma thèse : Anne, Alexandra, Ben et Isa, Elena. Merci aussi à tous ceux qui n'ont pas fait le déplacement mais m'ont encouragé à distance : Adel, Alex, Florent, Julien, Lionel, Simon et Céline.

Je remercie chaleureusement mon équipe de relecture : mon père, ma mère et mes grands-parents paternels.

Un énorme merci à Valérie pour sa patience (j'espère qu'il t'en reste) et pour s'être chargée du pot.

Newton déclara : "*J'ai vu plus loin que les autres parce que je me suis juché sur les épaules de géants*", j'aimerais dans ce qui suit adresser toute ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères aux géants sur les épaules desquels je me suis hissé pour arriver jusqu'au doctorat.

Je n'aurais sans doute pas choisi une carrière scientifique si je n'avais pas croisé le chemin d'enseignants tout aussi pédagogues que passionnants. Je tiens à exprimer ma

profonde gratitude à Messieurs Jacques Charransol et Charles Naccache qui furent mes professeurs de physique au lycée, vous ne saurez peut-être jamais à quel point vous m'avez marqué.

Je ne remercierai jamais assez mes parents, mes grands-parents, mes oncles et tantes ainsi que mon frère et ma soeur. Vous n'imaginez pas à quel point je suis fier de chacun de vous...

Merci à tous !

Résumé

Dans l'étude du ruissellement et de l'érosion à l'échelle des bassins versants, la résistance hydraulique à l'écoulement d'une surface est évaluée par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement. Nous avons à notre disposition de nombreuses expressions de ces coefficients issues de tout aussi nombreuses études expérimentales ou théoriques.

Cependant, la plupart de ces coefficients ont été établis sous l'hypothèse implicite de micro rugosité. C'est-à-dire que la lame d'eau est considérée suffisamment importante pour que l'influence des aspérités de la surface sur l'écoulement se borne à leur effet sur la friction. La diversité des tailles des rugosités sur les surfaces naturelles, fait qu'une telle hypothèse est rarement vérifiée.

Dans ce travail, nous proposons de considérer une séquence de réseaux hydrauliques fonctions du degré d'inondation de la surface. En nous appuyant sur ces réseaux, nous présentons des modèles hydrauliques afin de déterminer le coefficient de frottement de la surface en fonction du taux d'inondation. Les modélisateurs ayant besoin d'associer un coefficient de frottement à un type de surface, nous avons voulu généraliser nos résultats en appliquant notre démarche à des surfaces aléatoires de mêmes caractéristiques statistiques que la surface originale. Ce faisant, nous avons mis en évidence l'influence de la répartition spatiale des rugosités.

Si nous n'avons pas pu valider expérimentalement notre modèle numérique en raison du peu de résultats pour les faibles taux d'inondation, nous avons mis en évidence que la transition entre les régimes d'inondation partielle et marginale se traduit par une brusque augmentation de la croissance des débits.

Abstract

Numerical models, dedicated to runoff and weathering study at watershed scale, consider a friction coefficient to evaluate the surface hydraulic resistance. Both experimental and theoretical studies already gave numerous formulas for these coefficients. However, the most of these formulas has been based on analogies with resistance relationships in pipe flow or turbulent rough boundary open channel flow, with an implicit assumption of micro scale boundary roughness. So, boundary roughness only contributes to hydraulic resistance through friction effect neglecting the hydrodynamics.

Water flows over large scale roughness, naturally occurring in shallow unchannelised land surface flows, make the micro scale boundary roughness assumption unfounded.

To better account for the variable influence of roughness with varying levels of emergence, the present work considers different hydraulic network associated with the surface degree of inundation. Considering a hydraulic model we are able to compute discharge and friction coefficient versus inundation ratio. As modeller need friction coefficients related to surface characteristic class, we applied our hydraulic model to surfaces randomly generated. Our results demonstrate the roughness spatial distribution effect.

Because of experimental difficulties, we do not have enough experimental results for low inundation ratio to validate our numerical model. Nevertheless we point out transition between partial and marginal inundation is characterized by a sudden discharge increase.

Table des matières

Introduction	1
1 Brève Revue de l'Etude de la Résistance à l'Écoulement	3
1.1 Introduction	3
1.2 Les prémices de l'étude de la résistance à un écoulement	5
1.2.1 Un premier pas : l'équation de Bernoulli	5
1.2.2 Développement des premières formules empiriques	7
1.3 De coefficients universels en paramètres	11
1.3.1 Des paramètres dépendants du canal	12
1.3.2 Des paramètres dépendants de l'écoulement	16
1.4 De micro rugosités en macro rugosités	21
1.4.1 Le nombre de Reynolds comme variable principale	21
1.4.2 Le concept de Einstein-Banks	25
1.4.3 Une nouvelle variable principale : taux d'inondation	27
1.5 Conclusion	30
2 Rugosité, réseaux hydrauliques et première étude analytique	31
2.1 Introduction	32
2.2 Caractérisation de la surface	33
2.2.1 Fabrication de l'échantillon	34
2.2.2 Caractérisation statistique des rugosités	34
2.2.2.1 Rugosimétrie Laser	35
2.2.2.2 Le plan moyen de la surface	35
2.2.2.3 Variogramme de la surface	36
2.2.2.4 Histogramme des rugosités	38
2.2.3 Les Cartes des Régions Submergées	39
2.2.4 Le degré de connexion de la Carte des Régions Submergées et le seuil de percolation	41
2.2.5 Définition du taux d'inondation	43
2.3 Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon	45
2.3.1 Paramètres hydrauliques de la surface	45
2.3.2 Modélisation élémentaire du débit	50
2.4 Des réseaux hydrauliques déterminés par la micro-rugosité	57
2.4.1 Analyse d'image, Géométrie discrète et squelettisation	57
2.4.1.1 Premières Définitions	57
2.4.1.2 Axe Médian et Squelette	60
2.4.2 Identification des noeuds et des liens	64
2.4.2.1 Définition et identification des noeuds	64

2.4.2.2	Définition et identification des liens	67
2.4.3	Simplification des réseaux	68
2.4.3.1	Élimination des branches mortes et non débouchantes	68
2.4.3.2	Élimination des boucles	73
2.5	Conclusion	75
3	Modélisation Numérique de l'écoulement	77
3.1	Introduction	77
3.2	Un premier modèle hydraulique	79
3.2.1	Principe général	79
3.2.2	Modèle de perte de charge	80
3.2.2.1	Paramètres hydrauliques	80
3.2.2.2	Pertes inertielles	82
3.2.2.3	Pertes par friction	83
3.2.3	Formulations matricielles	84
3.2.3.1	La matrice des coefficients hydrauliques	84
3.2.3.2	La matrice des pseudo résistances	84
3.2.3.3	La matrice du problème des charges	85
3.2.4	La Méthode Itérative de Résolution du Problème	86
3.3	Discussion des résultats	88
3.4	Deuxième modèle hydraulique	90
3.4.1	Principe général	90
3.4.2	Écoulement sous-critique au col	93
3.4.3	Écoulement critique au col	96
3.4.4	La Méthode Itérative de Résolution du Problème	97
3.5	Discussion des résultats	100
3.5.1	Débit global sur la surface	100
3.5.2	Charges aux noeuds	104
3.5.3	Caractérisation statistique de l'écoulement local	106
3.5.3.1	Les vitesses aux cols	107
3.5.3.2	Les nombres de Reynolds	107
3.5.3.3	Les nombres de Froude	110
3.5.3.4	Rôle de la friction	112
3.5.4	Le coefficient de Darcy-Weisbach	113
3.6	Conclusion	115
4	Surfaces aléatoires	119
4.1	Introduction	119
4.2	Génération d'une surface Aléatoire	120
4.2.1	La Méthode Directe	120
4.2.2	Les Bandes tournantes	121
4.3	Les surfaces aléatoires	123
4.4	Les résultats de notre modélisation sur les surfaces aléatoires	125
4.4.1	Débits globaux sur les surfaces	125
4.4.2	Coefficients de Darcy-Weisbach	126
4.5	Conclusion	130

5	Etude Expérimentale	131
5.1	Introduction	131
5.2	Dispositif expérimental	133
5.2.1	Présentation générale	133
5.2.2	Mesure de débit	135
5.3	Mesure de l'épaisseur de la lame d'eau	136
5.3.1	Estimation de la hauteur d'eau équivalente	136
5.3.1.1	Taux de surface submergée	137
5.3.1.2	Détermination du taux de surface submergée expérimental	139
5.3.2	Mesure ou estimation ?	142
5.4	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques	143
5.4.1	Les débits	143
5.4.2	Le coefficient de Darcy-Weisbach	145
5.5	Conclusion	148
6	Les équations de Saint-Venant sur surfaces rugueuses	149
6.1	Introduction	149
6.2	Les équations de Saint-Venant classiques	150
6.2.1	Conservation de la masse	150
6.2.2	Bilan de quantité de mouvement	151
6.2.3	Bilan des forces	152
6.2.3.1	Le poids	152
6.2.3.2	Les forces de pression	153
6.2.3.3	Les forces de frottement	154
6.2.4	Equations dynamiques	154
6.3	Cas d'une surface rugueuse	155
6.3.1	Les grandeurs fluctuantes	155
6.3.2	Section spécifique et volume spécifique	157
6.3.3	Conservation de la masse	157
6.3.4	Bilan de quantité de mouvement	158
6.3.5	Bilan des forces	159
6.3.6	Equations dynamiques	160
6.4	Comparaison de Saint-Venant lisse et rugueux	160
6.4.1	Les termes supplémentaires	160
6.4.2	De Saint-Venant rugueux à Saint-Venant lisse	160
6.4.3	Paramètres équivalents et paramètres réels	161
6.5	Notre modélisation sous-maille	162
6.6	Conclusion	163
	Conclusion	165
	Références bibliographiques	167
A	Les images BMP	171
B	Les équations de Saint-Venant	175
B.1	Rappel mathématique	175
B.2	Les équations de Saint-Venant	176
B.2.1	Conditions aux limites	177

B.2.2	Condition de faible profondeur	178
B.2.3	Intégration des équations d'Euler	180
B.2.3.1	Conservation de la quantité de mouvement	180
B.2.3.2	Conservation de la masse	182
B.2.3.3	Equation de Saint-Venant	182
C	Détails sur la section triangulaire	185
C.1	Section de passage, périmètre mouillé et diamètre hydraulique	185
C.2	Nombre de Reynolds et nombre de Froude	186
C.3	Hauteur critique	187
C.4	Pertes de charge par friction dans les canaux sous-critiques	188
D	La méthode de Ferrari	189
D.1	La lettre testament de Galois	189
D.2	La méthode de Ferrari	190
E	Générateurs aléatoires	193
E.0.1	Les nombres pseudo aléatoires : la loi uniforme	193
E.0.2	Principe de simulation	194
E.0.3	Loi Gaussienne	194
Index		196

Table des figures

1.1	Archimède (287-212 avant J.C) et la vis d'Archimède	3
1.2	Toricelli (1608-1647)	4
1.3	Henri Navier (1785-1836)	5
1.4	Stokes (1819-1903)	5
1.5	Bernoulli (1700-1782)	6
1.6	Chézy (1718-1798)	7
1.7	Pierre Simon Girard (1765-1836)	9
1.8	De Prony (1755-1739)	9
1.9	Barré de Saint Venant (1797-1886)	10
1.10	Weisbach (1806-1871)	11
1.13	Coefficient de Humphreys et Abbot	12
1.11	Andrew Atkinson Humphreys (1810-1883)	13
1.12	Henry Larcom Abbot (1831-1927)	13
1.14	Coefficients de Gauckler	13
1.15	Coefficient de rugosité de Ganguillet et Kutter	14
1.16	Bazin (1829-1917)	14
1.17	Robert Manning (1816-1897)	15
1.18	Osborne Reynolds (1842-1912)	16
1.19	Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884)	17
1.20	Jean Poiseuille (1799-1869)	17
1.21	Darcy (1803-1858)	18
1.22	Ludwig Prandtl (1875-1953)	18
1.23	Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970)	19
1.24	Théodore Von Karman (1881-1963)	19
1.25	Diagramme de Moody	20
1.26	Expériences de Abrahams 1986	24
1.27	Expériences de Rauws 1988	26
1.28	Répartition frottement granulaire/frottement de forme	27
1.29	Apparente décroissance du coefficient de Darcy-Weisbach	28
1.30	Coefficients de Darcy-Weisbach calculés lors de divers expériences	28
1.31	Modèle de Lawrence	29
2.1	Régimes d'inondation	33
2.2	Moulage de la surface	34
2.3	Rugosimètre laser	35
2.4	Carte Numérique des Altitudes	35
2.5	Calcul du variogramme de la surface	37
2.6	Variogramme de la surface	38
2.7	Histogrammes des rugosités	39

2.8	Inondation progressive d'une surface	41
2.9	Carte des Aspérités Emergées	42
2.10	Algorithme des Cartes des Régions Submergées Connectées	43
2.11	Carte des Régions Submergées-Parties Connectées	44
2.12	Calcul des paramètres hydrauliques	46
2.13	Paramètres hydrauliques de l'échantillon	49
2.14	Ecoulement uniforme : débit spécifique	51
2.15	Ecoulement uniforme : nombre de Reynolds vrai	52
2.16	Ecoulement uniforme : nombre de Froude vrai	53
2.17	Coefficient de Darcy-Weisbach vrai	54
2.18	Ecoulement uniforme : nombre de Reynolds et nombre de Froude équivalents	55
2.19	Coefficient de Darcy-Weisbach équivalent	56
2.20	Coefficient de Darcy-Weisbach en fonction du nombre de Reynolds	56
2.21	Les Voisinages en géométrie discrète	58
2.22	Boules discrètes	60
2.23	Image de distance au fond	61
2.24	Boules maximales et axe médian	62
2.25	Axe médian	63
2.26	Reconstruction d'un objet à partir de son axe médian	64
2.27	Squelettes	65
2.28	Configuration de noeuds	66
2.29	Faux noeuds	66
2.30	Algorithme général de reconnaissance des liens	67
2.31	Algorithme d'élimination des branches mortes, premier passage sur l'image	69
2.32	Algorithme d'identification des voisins	70
2.33	Algorithme d'identification des voisins, le deuxième passage sur l'image. . .	71
2.34	Simplification du squelette par itération	72
2.35	Branche se terminant par une boucle	73
2.36	Squelettes : itérations	74
2.37	C.R.S et réseaux hydrauliques	76
3.1	Principe général de notre modélisation	79
3.2	Cols sur les liens	81
3.3	Calcul des sections de passage aux cols	81
3.4	Principe général de résolution du problème	88
3.5	Surface libre	89
3.6	Carte des Régions Submergées et son squelette	90
3.7	Deuxième modèle : détermination de la charge au col.	91
3.8	Ecoulement sous-critique au col : algorithme	95
3.9	Détermination du débit sur chaque lien	96
3.10	Déroulement d'une itération du modèle hydraulique	98
3.11	Enchaînement des itérations de notre modèle hydraulique	100
3.12	Débits spécifiques	101
3.13	Squelettes	102
3.14	Nombre de noeuds des réseaux	103
3.15	Charges aux noeuds	105
3.16	Fonction de distribution des vitesses	108
3.17	Fonction de distribution des nombres de Reynolds	109
3.18	Fonction de distribution des nombres de Froude	111

TABLE DES FIGURES

3.19	Influence de la friction	113
3.20	Coefficient de Darcy-Weisbach équivalent	114
3.21	Coefficient de Darcy-Weisbach vrai	114
3.22	Coefficient de Darcy-Weisbach fictif en fonction du nombre de Reynolds . .	116
3.23	Coefficient de Darcy-Weisbach vrai en fonction du nombre de Reynolds . .	116
3.24	Coefficient de Darcy-Weisbach expérimentaux	117
4.1	Surface purement aléatoire	120
4.2	Surface aleatoire anisotrope	123
4.3	Variogramme expérimental	124
4.4	Variogrammes des surfaces aléatoires	124
4.5	Débits pour une pente de 3%	126
4.6	Débits pour une pente de 5%	127
4.7	Débits pour une pente de 10%	127
4.8	Débits pour une pente de 10%	128
4.9	Débits sur la surface 1	128
4.10	Débits sur la surface 6	129
4.11	Coefficients de Darcy-Weisbach équivalents	129
5.1	Coefficient de Darcy-Weisbach expérimentaux	132
5.2	Elements du dispositif expérimental	133
5.3	Schéma de notre dispositif expérimental	134
5.4	Régime transitoire	135
5.5	Taux de surface submergée	137
5.6	Taux de surface submergée	138
5.7	Photos de l'écoulement sur le moulage	140
5.8	Histogrammes d'intensité des pixels du moulage	140
5.9	Images faite à partir des différentes composantes de l'intensité des pixels .	141
5.10	Schéma de tri des pixels du moulage	142
5.11	Image résultant de notre procédure d'estimation	142
5.12	Débits expérimentaux	143
5.13	Débits expérimentaux et numériques	144
5.14	Comparaison des taux d'inondation	145
5.15	Coefficients de Darcy-Weisbach expérimentaux	146
5.16	Coefficients de Darcy-Weisbach expérimentaux et numériques	147
5.17	Coefficient de Darcy-Weisbach expérimentaux	148
6.1	Volume fluide de contrôle	150
6.2	Sous-maille	156
C.1	Section triangulaire	186
D.1	Evariste Galois	189

Introduction Générale

Dans la très grande majorité des cas, le ruissellement en zone urbaine ou rurale est étudié par des modèles considérant une lame d'eau continue répartie sur toute la surface. Le plus souvent, ces modèles sont basés sur les équations de Saint-Venant ou d'onde cinématique. Ces équations sont également utilisées pour étudier les écoulements à surface libre dans les canaux.

Dans ces équations la résistance hydraulique à l'écoulement est prise en compte par l'intermédiaire de coefficients de frottement pouvant tenir compte des rugosités. Les coefficients les plus utilisés sont ceux de Darcy-Weisbach ou de Manning-Strickler. Mais l'importance de la résistance hydraulique dans les ouvrages d'art tels que les canaux d'alimentation en eau des villes fait que très tôt de nombreuses études se sont intéressées à ce problème et nous disposons donc d'une multitude de formules pour exprimer cette résistance. Ces études, comme les modèles à lame d'eau continue font implicitement une hypothèse de micro-rugosités. C'est à dire que les aspérités de la surface sont très petites par rapport à la hauteur de la lame d'eau.

Cela implique, entre autres, que les aspérités ne freinent l'écoulement que par leur influence sur la friction. Et qu'en aucune manière elles ne dévient le cheminement de l'eau, aucune aspérité n'émergeant. Si une telle hypothèse est parfaitement justifiée pour l'étude d'écoulements en charge dans des conduites ou d'écoulements à surface libre dans des canaux de navigation, elle l'est beaucoup moins en ce qui concerne l'étude du ruissellement.

En effet, la diversité des tailles des rugosités au sens large (cailloux, végétaux,...) et la vaste étendue des surfaces concernées font qu'en pratique nous n'observons jamais une lame d'eau de ruissellement continue et de hauteur suffisamment importante pour noyer toutes les rugosités d'un sol. Par conséquent, pour les écoulements très peu profonds sur des surfaces rugueuses, les phénomènes physiques prépondérants responsables de la résistance hydraulique ne sont plus les mêmes que ceux pris en compte pour établir les formules classiques des coefficients de frottement. De récentes études ont montré que, bien plus que le nombre de Reynolds, c'est le **taux d'inondation** qui est le paramètre important pour les écoulements peu profonds sur les surfaces rugueuses. Le taux d'inondation est un paramètre adimensionnel calculé à partir de la hauteur de la lame d'eau et d'une grandeur caractéristique des hauteurs des rugosités qui désigne le degré de recouvrement des aspérités de la surface par le fluide.

Dans notre étude, nous nous appuyons sur la caractérisation statistique d'une surface ainsi que sur sa carte numérique des altitudes afin de simuler son inondation progressive par le fluide. Le produit de cette simulation est une série de cartes des régions submergées. Chacune de ces cartes correspond à un taux d'inondation différent et nous permet de distinguer les parties submergées et émergées de la surface étudiée. A partir de ces cartes, en utilisant un algorithme de squelettisation, nous construisons pour chaque taux

d'inondation un réseau hydraulique représentatif du cheminement du fluide. C'est par le biais de la diversité de ces réseaux hydrauliques que notre modèle prend en compte l'influence variable des rugosités selon le degré d'inondation de la surface.

Sur la trame de ces réseaux, nous mettons en pratique un modèle d'écoulement basé sur les pertes de charge le long de canaux élémentaires, et la conservation du débit aux confluences de ces canaux. Afin de mettre en évidence l'influence de la répartition spatiale des rugosités sur l'écoulement et en particulier sur le coefficient de Darcy-Weisbach, nous appliquons également notre étude à des surfaces générées aléatoirement, par la méthode des bandes tournantes, ayant les mêmes caractéristiques statistiques que notre échantillon. Nous avons également développé un dispositif expérimental comprenant un moulage de la surface étudiée afin de valider notre étude numérique. A cette occasion, nous avons mis au point une méthode d'estimation de la hauteur d'eau au dessus de la surface à partir d'une photo de l'écoulement.

Enfin, nous avons examiné l'impact des particularités de l'écoulement mises en évidence par la simulation numérique à l'échelle d'un échantillon sur la formulation des équations de Saint-Venant à adopter dans la simulation à l'échelle du versant. Outre le comportement particulier du coefficient de Darcy-Weisbach, la nécessité d'une modification des termes inertiels a été mise en évidence dans le domaine des écoulements très peu profonds sur des surfaces fortement tortueuses.

1

Brève Revue de l'Etude de la Résistance à l'Écoulement

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Les prémices de l'étude de la résistance à un écoulement	5
1.2.1	Un premier pas : l'équation de Bernoulli	5
1.2.2	Développement des premières formules empiriques	7
1.3	De coefficients universels en paramètres	11
1.3.1	Des paramètres dépendants du canal	12
1.3.2	Des paramètres dépendants de l'écoulement	16
1.4	De micro rugosités en macro rugosités	21
1.4.1	Le nombre de Reynolds comme variable principale	21
1.4.2	Le concept de Einstein-Banks	25
1.4.3	Une nouvelle variable principale : taux d'inondation	27
1.5	Conclusion	30

1.1 Introduction

Avec l'invention de la pompe à vis, Archimède (287-212 avant J.C) (figure 1.1) est le premier à mettre en pratique la dynamique des fluides. Les Romains font aussi preuve d'une grande inventivité en la matière. Ils utilisent la vis d'Archimède pour l'irrigation mais aussi pour pomper l'eau des mines. Ils sont également les bâtisseurs d'aqueducs gigantesques, dont certains sont encore utilisés aujourd'hui.



FIG. 1.1 : *Archimède est le savant grec fondateur de l'hydrostatique. On lui doit également de nombreux travaux en statique, mécanique et géométrie.*

Malgré ces applications pratiques de la dynamique des fluides, il n'existe alors que peu ou pas de théorie fondamentale. Après Archimède, il faut attendre le XVII^{ième} siècle et le physicien Evangelista Torricelli (1608-1647) (figure 1.2) pour qu'intervienne une avancée scientifique dans le domaine.



FIG. 1.2 : *Né à Rome Toricelli est le secrétaire de Galilée de 1641 à 1642. Mathématicien et physicien, spécialiste en hydraulique, il est aussi connu pour la fabrication de lentilles de lunettes. Il est le premier à mesurer la pression atmosphérique.*

Toricelli, très influencé par Galilée, étudie surtout la géométrie, les lois du mouvement, l'optique et enfin les expériences barométriques. En 1643, il invente le baromètre et est le premier à mesurer la pression atmosphérique lors d'une expérience, restée célèbre, à Florence en 1644. On lui doit également la première formule donnant la vitesse de vidange d'un réservoir en fonction de la hauteur de liquide dans celui-ci.

Plus tard, le mathématicien suisse Léonhard Euler (1707-1783), applique aux fluides non visqueux les lois de la dynamique d'Isaac Newton (1642-1727). Dans le même temps, il reconnaît que les lois adaptées à la dynamique des fluides ne peuvent être exprimées que de façon approximative : fluides parfaits, incompressibles, etc.

En 1827, l'ingénieur français Henri Navier (1785-1836) (figure 1.3), à qui nous devons la théorie générale de l'élasticité (1821), essaie de prendre en compte la viscosité dans les équations du mouvement. Celles-ci ne seront précisées que plus tard, dans les années 1840, par Saint-Venant (1797-1886) puis par George Stokes (1819-1903) (figure 1.4).

Il est important de pouvoir étudier et comprendre les écoulements de fluides visqueux. Les frottements visqueux dissipent une partie de l'énergie mécanique du fluide et provoquent une chute de pression le long de l'écoulement. Dès le XVII^{ème} siècle, de nombreux ingénieurs du génie civil tentent de quantifier cette diminution de pression dans les écoulements à surface libre. Lors de la construction et de l'étude de canaux d'alimentation en eau ils proposent, comme nous le verrons plus loin, de nombreuses formules pour relier la vitesse moyenne de l'écoulement aux caractéristiques géométriques et à la pente des canaux. Si dans les premiers temps ces savants cherchent une formule universelle, ils ne tardent pas à se tourner vers des formules paramétrées. De nombreuses expériences in situ permettront alors de proposer de larges gammes de paramètres en fonction de la géométrie puis de la rugosité des canaux ou des conduites.

Des expériences menées vers le milieu du XIX^{ème} siècle suggèrent que cette diminution de pression est proportionnelle à la vitesse dans le cas des écoulements lents et plutôt proportionnelle au carré de la vitesse dans le cas des écoulements rapides. Les premières expériences sur l'étude du frottement pour des écoulements à faible vitesse dans des tuyaux sont effectuées par le physiologue français, Jean Louis Poiseuille (1799-1869) (figure 1.20), puis par l'ingénieur hydraulicien allemand Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884) (figure 1.19) en 1840. Finalement, Hunter Rouse (1906-1996) puis Lewis Moody (1880-1953) proposeront des diagrammes récapitulant les formules les plus usitées du coefficient de frottement de différents auteurs (Poiseuille, Prandtl, Blasius, etc) pour les différents



FIG. 1.3 : Ancien élève de l'école Polytechnique, Henri Navier est membre de l'académie des sciences en 1824. Bien qu'il ne comprenne pas pleinement les phénomènes physiques sous jacents il se sert des équations établies par Euler pour prendre en compte les interactions entre les molécules de fluide.



FIG. 1.4 : Sir George Gabriel Stokes, mathématicien et physicien britannique, établit de manière rigoureuse les équations du mouvement d'un fluide visqueux en 1845. Il est aussi l'un des premiers à étudier la fluorescence et la réfraction de la lumière.

régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative.

A partir du milieu du XX^{ième} siècle, certains chercheurs s'intéressent aux écoulements dans lesquels les rugosités ne sont plus de tailles négligeables devant la hauteur d'eau. Devant le peu de concordance entre leurs résultats expérimentaux et les formules existantes, ils en arrivent naturellement à proposer leurs propres formules.

1.2 Les prémices de l'étude de la résistance à un écoulement

1.2.1 Un premier pas : l'équation de Bernoulli

Les Bernoulli sont une famille de mathématiciens et physiciens suisses qui ont tous eu une influence scientifique considérable. A tel point, qu'il est bien souvent difficile de savoir auquel on doit telle ou telle loi. En ce qui concerne la célèbre équation de conservation de l'énergie dans un écoulement irrotationnel, permanent, d'un fluide parfait et incompressible, le mérite en revient à Daniel Bernoulli (1700-1782) (figure 1.5).

Alors que son père, Johann Bernoulli (1667-1748), le pousse à faire des études de médecine, Daniel est plus attiré par les mathématiques et étudie la théorie de l'énergie cinétique de son père. Dans le même temps, il termine ses études de médecine portant sur la mécanique de la respiration.

En 1725, après de multiples pérégrinations, il obtient une chaire de mathématiques à l'université de Saint Petersburg aux côtés de son frère aîné, Nicolas. Malheureusement,

ce dernier décède peu après et laisse son frère désemparé. Joahnn Bernoulli fait alors en sorte que son meilleur élève, Leonhard Euler, rejoigne son fils à Saint Petersburg. Les deux mathématiciens travailleront ensemble de 1727 à 1733. Ces six années furent les plus productives de la vie de Daniel Bernoulli, il aborda des domaines aussi divers que les systèmes oscillants, la mécanique des solides, les probabilités et évidemment l'hydrodynamique.



FIG. 1.5 : Outre la diversité, un aspect fondamental des travaux de Daniel Bernoulli est le développement important de la physique mathématique, avec l'utilisation de nombreuses théories d'Isaac Newton (1642-1727) et des méthodes de calcul de Gottfried Leibniz (1646-1716).

Lorsqu'il quitte l'université de Saint Petersburg en 1733, il laisse derrière lui un ouvrage qui ne sera publié qu'en 1738 (Bernoulli 1738, Bernoulli 2004) et qui contient la première analyse correcte de la vidange d'un réservoir basé sur la conservation de l'énergie cinétique qu'il a étudié avec son père.

Dans ce livre, nous trouvons également des discussions sur les pompes et les bases de la théorie cinétique des gaz. Il donne alors les lois de bases de cette théorie et propose même, pas dans le détail il est vrai, une loi d'état des gaz qui ne sera redonnée par Van der Waals qu'un siècle plus tard.

Nous y trouvons également l'équation qui exprime la conservation de l'énergie le long d'un écoulement, aujourd'hui appelée équation de Bernoulli :

$$\Delta h = \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) \quad (1.1)$$

Où g est l'accélération de la pesanteur, ρ la densité du fluide, z l'altitude du point, V la vitesse moyenne et p la pression. Δh est la perte de charge entre les points 1 et 2. Si $\Delta h = 0$, il y a conservation de l'énergie. Dans le cas des écoulements uniformes les termes d'énergie cinétique se simplifient.

Malheureusement, cette formule ne permet pas de connaître la perte de charge entre deux points, à moins de mesurer l'altitude et la pression en ces points. Or, les ingénieurs de l'époque ont besoin, entre autres pour la conception de réseaux d'irrigation et de canaux de navigation, d'une relation pratique leur donnant cette perte de charge en fonction des caractéristiques du fluide et des canaux. Les premières recherches sur ce thème ont donc été motivées par des problèmes d'ingénierie survenant lors de grands travaux. C'est dans ce cadre que plusieurs auteurs prestigieux ont proposé des formules empiriques.

1.2.2 Développement des premières formules empiriques

Antoine de Chézy (1718-1798) (figure 1.6), est ingénieur des Ponts et Chaussées. Il effectue les premiers nivellements sur le tracé du canal de Bourgogne en remplacement de De Règemortes en 1752. Il dirige la construction du pont de Trilport sur la Marne et du pont de Neuilly sur les plans de Perronet de 1758 à 1774. Mais il s'intéresse aussi à l'hydraulique lorsque son travail d'ingénieur l'y amène.

En 1749, Cornelius Velsen qui travaille à Amsterdam dit :

“La vitesse doit être proportionnelle à la racine carrée de la pente.”

En 1757, à Hanovre, Albert Brahms écrit :

“L'action décélétratrice du lit lors des écoulements uniformes n'est pas seulement égale à l'accélération de la gravité mais aussi proportionnelle à la racine carrée de la vitesse.”



FIG. 1.6 : Ingénieur et mathématicien français, Antoine de Chézy a laissé de nombreux mémoires manuscrits. On lui doit surtout la construction de quelques ouvrages importants, comme les ponts de Neuilly, de Mantes et du Tréport.

Ils travaillaient tous deux sur les théories et équations de Torricelli et Bernoulli . Ce sont les principales idées que Chézy a utilisées pour établir la formule qui porte désormais son nom. Cette formule il la développe à l'occasion de l'étude de la dérivation des eaux de l'Yvette pour l'alimentation en eau de Paris. Il s'agit probablement de la première équation de flux uniforme, l'équation de Chézy :

$$V = C\sqrt{Rj} \quad (1.2)$$

Où V est la vitesse moyenne, R le rayon hydraulique, j la pente de la ligne d'eau et C un coefficient de proportionnalité aujourd'hui appelé coefficient de Chézy.

Cette formule apparaît pour la première fois dans un rapport d'Antoine de Chézy à M. Perronet, alors directeur de l'école des Ponts et Chaussées, daté du 21 Octobre 1775 et intitulé “Mémoire sur la vitesse de l'eau conduite dans une rigole donnée” (Chézy 1775). On la retrouve, un an plus tard, dans un article du même auteur : “Formule pour trouver la vitesse constante que doit avoir l'eau dans une rigole ou un canal régulier” (Chézy 1776).

Dans ces publications, Chézy ne prétend pas donner de valeur universelle de la constante C , celle-ci est différente pour chaque canal, mais cela n'enlève rien au caractère révolutionnaire de cette formule qui ne connaîtra pourtant pas le succès qu'elle eût mérité à l'époque. Elle connut en fait un destin similaire à celui de son auteur.

Même si en 1797, un an avant sa mort, grâce aux efforts d'un de ses étudiants, le baron Riche de Prony, il devient le 3ème directeur de l'École des Ponts et Chaussées, Chézy se retire en 1790 dans des conditions d'extrême pauvreté.

Son travail fut oublié jusqu'à ce que de Prony, et Pierre-Simon Girard, alors ingénieur en chef à l'école des Ponts et Chaussées, le réhabilitent. Il est aussi à noter que, dans la bibliothèque de l'école des Ponts et Chaussées, se trouve un autre document de la main de Chézy, apparemment écrit après 1775, dans lequel il applique sa formule aux écoulements en charge dans les conduites du réseau d'eau de Rennes avec une constante C adaptée.

Partant de la formule de Chézy, si on veut remonter à la perte de charge correspondante, il suffit de noter que dans un écoulement uniforme on a la relation :

$$j = \frac{\Delta h}{L} \quad (1.3)$$

où L est la longueur d'écoulement considérée. Dans le cas de la relation de Chézy on obtient :

$$\Delta h = \frac{V^2 L}{C^2 R} \quad (1.4)$$

Nous le verrons plus loin cette relation fait de Chézy un visionnaire dans le domaine. Il faudra attendre 70 ans et le travail de Weisbach pour se rendre compte de la justesse de cette formulation.

En 1786, Pierre Louis Georges du Buat (1734-1809) se plaint du fait que la résistance de l'écoulement d'un fluide dans une quelconque condition soit inconnue. Sans cela les conduites ou les canaux à surface libre ne pouvaient être conçus avec la garantie qu'ils fonctionneraient comme souhaité. La même année il propose dans son ouvrage « Principes d'Hydraulique Vérifiés par un grand nombre d'expériences » (Du Buat 1786), une formule reliant la vitesse d'un écoulement au rayon hydraulique et à la pente :

$$V = \frac{243,7g \left(\sqrt{R} - 0,1 \right)}{\sqrt{\frac{1}{S}} - \ln \left(\sqrt{\frac{1}{S}} + 1,60 \right)} - 0,3 \left(\sqrt{R} - 0,1 \right) \quad (1.5)$$

Où $g = 362$ pouces, R est le rayon hydraulique du canal, S la pente de la ligne d'eau. Les constantes 0,1 et 0,3 sont elles aussi exprimées en pouces. Cette formule fut peu utilisée en raison de sa complexité.

Vers 1800, le Premier consul, Napoléon Bonaparte, décida que les Parisiens qui manquaient alors d'eau, disposeraient d'une eau de bonne qualité et en quantité suffisante. Il lance alors, par la loi du 29 floréal de l'an X, la création des canaux de Saint-Martin, Saint-Denis et de l'Ourcq.



FIG. 1.7 : *Pierre Simon Girard est ingénieur des Ponts et Chaussées. Il accompagne Bonaparte en Egypte en 1798 et participe alors à l'élaboration des plans de la ville d'Alexandrie, du port et des côtes environnantes.*

C'est le projet de Simon Girard (1765-1836) (figure 1.7) qui est retenu, il succède donc à Chézy dans les travaux d'alimentation en eau de Paris. Son projet présentait aussi l'avantage de résoudre les problèmes de navigation dans la capitale en coupant une des boucles de la Seine par des canaux. Ses travaux sur les canaux l'amènent à proposer la formule suivante en 1804 dans un ouvrage intitulé "Essai sur le mouvement des eaux courantes, et la figure qu'il convient de donner aux canaux qui les contiennent" (Girard 1804) :

$$gRj = 0,0012181 (V + V^2) \quad (1.6)$$

Chargé de la construction du canal de l'Ourcq en 1802, il utilisera alors cette formule avant de se voir déchargé du chantier. Des difficultés techniques liées aux éboulements survenus dans la butte du bois de Saint-Denis et les événements de 1814-1815 avaient stoppé les travaux.

Après de nombreuses discussions avec la ville de Paris, le chantier est confié à une société privée, moyennant une concession de 99 ans des droits de navigation. Afin de compenser la perte des travaux du canal, Girard est chargé en 1819, de diriger les travaux pour l'éclairage au gaz des grands théâtres et de plusieurs quartiers de Paris.



FIG. 1.8 : *Gaspard François Clair Marie, Baron Riche de Prony est diplômé de l'école des Ponts et Chaussées. En 1794 il est l'un des premiers professeur de mathématiques à l'école Polytechnique avant de prendre la direction de l'école des Ponts et Chaussées en 1798.*

En s'appuyant sur les travaux de Laplace dans le domaine des méthodes de régression, Gaspard de Prony (1755-1839) (figure 1.8) propose en 1804, sur la base des formules de du Buat et Girard, la formule suivante dans son livre « Recherches Physico Mathématiques sur la Théorie des eaux courantes » (De Prony 1804) :

$$gRj = 0,000436V + 0,003034V^2 \quad (1.7)$$

D'où

$$\Delta h = \frac{L}{gR} (0,000436V + 0,003034V^2) \quad (1.8)$$

Où $a = 0,000436$ et $b = 0,003034$ sont des coefficients empiriques dont on pensait qu'ils étaient indépendants de la rugosité des conduites ou des canaux. A cette

époque c'est la relation la plus largement utilisée en France dans le domaine de l'ingénierie

hydraulique.

Il est important de noter le fait que cette relation, comme la précédente, n'est pas homogène. Si cela nous choque aujourd'hui, il faut bien voir que le souci principal de Prony était de fournir une relation facilement utilisable par les ingénieurs, qui ne disposaient alors pas de nos outils de calcul. De plus, il était courant de négliger le terme proportionnel à la vitesse devant celui proportionnel au carré de celle-ci, nous retrouvons alors une équation homogène.

En 1823, l'ingénieur allemand Eytelwein propose la formule suivante (Eytelwein 1826) :

$$V = -0,0067675g + \sqrt{557,798gRj + 0,0000458g^2} \quad (1.9)$$

Il suggère également, pour une utilisation pratique, de simplifier la relation précédente pour obtenir :

$$V = 24,12\sqrt{gRj} \quad (1.10)$$

Une fois de plus, par cette simplification, on retrouve une formule du type monôme semblable à celle de Chézy.

Adhémar Jean Claude Barré de Saint Venant (1797-1886) (figure 1.9), propose lui aussi une formule du type monôme (Barré de Saint-Venant 1850).

$$V = 60(Rj)^{11/21} \quad (1.11)$$

De Saint-Venant est le successeur de Coriolis en tant que professeur de Mathématiques à l'école des Ponts et Chaussées. Il s'intéresse principalement à la mécanique, à l'élasticité et à l'hydrodynamique. Il redémontre les équations de Navier deux ans avant Stokes.



FIG. 1.9 : *Saint Venant intègre l'école Polytechnique à 16 ans en 1813. Le début de sa carrière se fait au Service des Poudres et Salpêtres, avant de passer au service des Ponts et Chaussées. Il entre à l'Académie des sciences en 1868.*

Comme nous le voyons, les formules pour exprimer la vitesse moyenne d'un écoulement dans un canal sont nombreuses. Se pose alors la question de l'invariabilité des coefficients de résistance. Arsène Jules Etienne Juvenal Dupuit (1804-1866), est nommé ingénieur d'arrondissement dans la Sarthe à sa sortie de l'école des Ponts et Chaussées. Il dirige alors les travaux sur les voies navigables et les routes. En 1850, il revient à Paris en tant que responsable de la distribution des eaux et supervise la construction des égouts. Il est donc très concerné par le problème de la résistance aux écoulements, ce qui l'amène à écrire en 1863 (Dupuit 1863) :

“Il ne faut pas s’attendre à ce qu’on arrive jamais à rien de précis pour des circonstances aussi accidentelles, aussi irrégulières que celles des grands cours d’eau naturels. Tout ce qu’on peut espérer de la théorie et de l’expérience, c’est de renfermer les erreurs dans des limites plus restreintes.”

En effet, toutes les formules empiriques précédentes, ont été établies dans des conditions très hétéroclites et ne peuvent donc en aucun cas prétendre à un caractère universel. Ainsi, il est illusoire de rechercher des coefficients universels. C’est ce qu’exprimera Henri Emile Bazin (Bazin 1865) (figure 1.16) en 1865 quand il écrira que les formules développées jusque là sont “variables à l’infini suivant la nature de la paroi dans laquelle s’opère l’écoulement”.

1.3 De coefficients universels en paramètres

En 1847, plus de 70 ans après Chézy, l’allemand Julius Albin Weisbach (1806-1871) (figure 1.10), propose une formule de type monôme (Weisbach 1850), en introduisant un coefficient de frottement f . Comme nous allons le voir, la formule proposée par Weisbach est parfaitement analogue à celle de Chézy.



FIG. 1.10 : *Julius Albin Weisbach est, entre autre, professeur de mathématiques. A partir de 1839 il s’intéresse à l’hydraulique, ce qui sera alors son principal champ de recherche.*

$$V = \sqrt{\frac{2gRj}{f}} \quad (1.12)$$

Il propose une valeur moyenne de f afin d’être en accord avec les résultats expérimentaux alors disponibles. Mais il suggère aussi que ce coefficient soit considéré comme une fonction de la vitesse moyenne de l’écoulement. C’est la première fois que l’on considère ce coefficient comme un paramètre et non plus comme une constante à déterminer. Plus tard, Weisbach exprime la perte de charge le long d’une conduite de la manière suivante :

$$\Delta h = f \frac{L V^2}{d 2g} \quad (1.13)$$

Où d est le diamètre de la conduite considérée et L sa longueur.

Si on compare cette relation avec celle obtenue par Chézy on obtient une équivalence entre les coefficients f et C .

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{C}{\sqrt{8g}} \quad (1.14)$$

Il semble donc que Chézy fut non seulement le premier à proposer une formule de flux uniforme, mais qu’en plus celle-ci est aussi la plus juste d’un point de vue phénoménologique. D’autant plus que l’équilibre des forces appliquées à un volume de fluide dans un

écoulement uniforme donne une perte de charge de la même dimension que celle donnée par les formules de Chézy et Weisbach. Le seul “point faible” de la formule de Chézy est l'unité de son coefficient $\left(\frac{m^{1/2}}{s}\right)$, alors que le coefficient de Weisbach a le bon goût d'être adimensionnel.

1.3.1 Des paramètres dépendants du canal

Toujours avec le souci d'obtenir une formule simple et efficace à l'usage des ingénieurs, divers expérimentateurs vont continuer sur les traces de Girard, Darcy, Bazin, etc, dans la recherche de paramètres seulement dépendants de la géométrie des canaux (ou des lits de rivières), de la nature des parois et de la pente. Ils choisissent donc d'ignorer les différents régimes d'écoulements (lent/rapide).

De l'autre côté de l'Atlantique, l'étude de la résistance à l'écoulement dans les canaux est aussi un sujet de préoccupation majeur. En 1824, afin d'améliorer son réseau de transport, pour des raisons commerciales et militaires, le congrès américain vote deux lois qui marquent le début de l'implication du corps des ingénieurs de l'armée dans le développement et la surveillance des axes de circulation d'importance nationale. C'est dans ce cadre que le capitain Andrew A. Humphreys (1810-1883) (figure 1.11) et le lieutenant Henry L. Abbot (1831-1927) (figure 1.12) participent à la surveillance du Mississipi dès 1857. Ils publient en 1861, un rapport (Humphreys et Abbot 1861) dans lequel ils proposent la formule suivante :

$$V = HK \sqrt{\frac{A}{P+B}} \sqrt[4]{j} \tag{1.15}$$

Où H est une constante fonction de l'importance du cours d'eau (figure 1.13), A la section mouillée, P le périmètre mouillé, B la largeur au miroir et $K = 8,28972$.

Catégorie	Valeur moyenne de H
Petits canaux ou rigoles de moins de 1m ² de section	0,8543
Ruisseaux de sections allant de 1 à 5 m ²	0,8796
Petites rivières de sections allant de 5 à 10 m ²	0,8890
Rivières de sections allant de 20 à 400 m ²	0,9223
Grands fleuves de sections supérieures à 400 m ²	0,9459

FIG. 1.13 : Valeurs du coefficient H de Humphreys et Abbot.

Comme le montre le tableau de la figure 1.13, bien que Humphreys et Abbot introduisent un paramètre dépendant de la nature du cours d'eau, il n'est pas fait explicitement référence à une quelconque rugosité et les catégories qu'ils distinguent restent assez grossières.

En 1867, Philippe Gaspard Gauckler (1826-1905), sur la base des résultats de Darcy et Bazin, propose les deux formules suivantes afin de mieux approcher les résultats expérimentaux de ses prédécesseurs (Gauckler 1867) :



FIG. 1.11 : *Humphreys est diplômé de l'Académie Militaire en 1831 et entre dans le Corps des Ingénieurs de l'armée en 1836. Il devient ingénieur en chef en 1866 avec le grade de Général.*



FIG. 1.12 : *Abbot est diplômé de l'Académie Militaire en 1854 avec le rang de second. Il se distinguera durant la guerre civile ce qui lui vaudra d'être promu au grade de Général en 1865.*

$$V = C_1 R^{4/3} j \text{ pour } j \leq 0,0007 \quad (1.16)$$

$$V = C_2 R^{2/3} j^{1/2} \text{ pour } j \geq 0,0007 \quad (1.17)$$

Bien évidemment, Gauckler propose une table des valeurs des constantes C_1 et C_2 en fonction de la nature du canal considéré (rivière, maçonnerie, etc) (figure 1.14). Mais dans le même temps il est parfaitement conscient des limites de leur emploi :

“Nous comprenons tout ce que ces coefficients présentent d'indéterminé et ce que leur emploi peut entraîner d'erreurs dans la pratique; mais nous ne pouvons ici faire plus que de poser la question, en tirant tout le parti possible des expériences, dont la science peut disposer dans le moment présent.”

Nature de la paroi	C_1	C_2
Maçonnerie de pierre de taille et de ciment	de 5220 à 6560	de 72 à 100
Bonne maçonnerie ordinaire	de 4096 à 5220	de 57 à 72
Parois en maçonnerie avec fond de terre	de 3515 à 4096	de 46 à 57
Rigoles en terre, sans herbes	de 2401 à 3515	de 32 à 44
Rigoles en terre, avec herbes sur les talus	de 1897 à 2401	de 25 à 32
Rivières	de 1677 à 2401	de 25 à 32

FIG. 1.14 : *Valeurs des coefficients C_1 et C_2 de Gauckler.*

Comme nous le verrons plus loin, la deuxième équation de Gauckler (équation 1.17) est aujourd'hui plus connue sous le nom de formule de Manning, bien que ce dernier ne la propose que 30 ans plus tard. Cependant, comme Gauckler et Manning proposent des valeurs différentes de la constante C_2 , leurs résultats sont significativement différents.

Un an plus tard, en 1869, les ingénieurs suisses, Emile Oscar Ganguillet (1818-1894) et Wilhelm Rudolph Kutter (1818-1888) sont les premiers à essayer d'exprimer le coefficient de Chézy en fonction de la pente j , du rayon hydraulique R ainsi que de la rugosité n (figure 1.15) du canal étudié (Ganguillet et Kutter 1869).

$$V = \frac{23 + \frac{0,00155}{j} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{j}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \sqrt{Rj} \quad (1.18)$$

C'est la première fois que la rugosité apparaît explicitement dans une formule de résistance hydraulique à l'écoulement.

Catégorie de cours d'eau	Valeur moyenne de n
Canaux de planches soigneusement dégauchies ou de ciment lisse	0,010
Canaux de planches brutes	0,012
Canaux de pierres de taille ou de briques ajustées	0,013
Canaux en maçonnerie brute	0,017
Canaux en terre, ruisseaux et rivières	0,025
Cours d'eau avec des détritrus ou des plantes aquatiques	0,030

FIG. 1.15 : Valeurs du coefficient de rugosité de Ganguillet et Kutter.



FIG. 1.16 : Ancien élève de l'École polytechnique et de l'École des Ponts et Chaussées, Henri Bazin est ingénieur à Tonnerre puis à Dijon. Il s'attache particulièrement à l'étude des écoulements de l'eau dans les canaux découverts. Il est élu membre non résidant de l'Académie des sciences le 5 mai 1913.

Après la mort de Darcy, son élève et collaborateur, Henri Emile Bazin (1829-1917), continue leurs expériences. Il propose, en 1865, une première formule exprimant la vitesse moyenne d'un écoulement semblable à celle de Darcy (équation 1.27), mais pour les écoulements à surface libre. Après la publication des résultats de Ganguillet et Kutter, Bazin modifie sa formule en 1897, celle-ci devient :

$$\frac{\sqrt{Rj}}{V} = 0,0115 \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right) \quad (1.19)$$

Où γ est un coefficient représentant le frottement aux parois.

Là encore, on trouve des tables où sont collectées les valeurs de γ en fonction de la nature des parois. Les formules de Bazin et Kutter sont à l'époque très largement acceptées et utilisées.

En 1889, à l'âge de 72 ans, l'ingénieur irlandais Robert Manning (1816-1897) (figure 1.17) publie la formule suivante :

$$V = 32\sqrt{Rj(1 + R^{1/3})} \quad (1.20)$$

Où, de manière classique, V est la vitesse moyenne de l'écoulement, j la pente et R le rayon hydraulique du canal.



FIG. 1.17 : *Robert Manning est assistant ingénieur lorsqu'il lit en 1848 le "Traité d'hydraulique" de D'Aubuisson des Voisins ce qui développera son intérêt pour le sujet. De 1855 à 1869 il participe au travaux du port de Dundrum Bay, en Irlande, et fait les plans du réseau d'alimentation en eau de Belfast.*

Il obtient cette formule en considérant les résultats donnés par celles de Dubuat, Eytelwein, Weisbach, Saint-Venant, Neville, Darcy, Bazin et Ganguillet et Kutter. Pour une pente donnée et un panel de valeur de R , il applique ces différentes formules et ajuste une courbe sur la moyenne des résultats. Dans le même temps il essaie une autre approche. Considérant que la pente doit être à la puissance $1/2$, il calcule quelle est la puissance de R et la constante C qui approche le mieux les résultats expérimentaux dans une formule de type Chézy. Faisant cela, il arrive au résultat suivant :

$$V = 46R^{4/7}j^{1/2} \quad (1.21)$$

Un peu plus tard dans la même année, ayant rejeté les résultats de Humphreys et Abbot (la pente du Mississippi étant beaucoup trop faible) et reconsidéré ceux de Bazin, Robert Manning propose la formule qui aujourd'hui encore porte son nom :

$$V = C_M R^{2/3} j^{1/2} \quad (1.22)$$

Il n'aimait pas cette équation, d'une part parce qu'elle n'est pas homogène et d'autre part parce qu'à l'époque il était difficile de calculer une puissance $2/3$. Il propose donc une version corrigée de cette formule (équation 1.23), mais celle-ci n'aura aucun succès.

$$V = C\sqrt{Rj} \left(R^{1/2} + \frac{0,22}{\sqrt{m}} (R - 0,15m) \right) \quad (1.23)$$

Où m est la pression atmosphérique.

Le coefficient C_M est très vite considéré comme l'inverse de n , le coefficient introduit par Kutter, du fait du peu de différence entre leurs valeurs. C'est ainsi que le coefficient

de Kutter est devenu coefficient de Manning.

En Europe, Albert Strickler (1883-1963), propose en 1923 une formule identique à celle de Manning et ce de manière indépendante. Par conséquent, l'équation 1.22 est aujourd'hui appelée équation de Manning-Strickler.

1.3.2 Des paramètres dépendants de l'écoulement

Dans les années 1830, la différence entre les régimes à faible vitesse et les régimes à grande vitesse devient évidente. Osborne Reynolds (1842-1912) (figure 1.18), décrit la transition d'un régime à l'autre et la caractérise par un nombre qui aujourd'hui porte son nom.

$$Re = \frac{vD}{\nu}$$

Où v est la vitesse du fluide, D une grandeur caractéristique de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide.



FIG. 1.18 : *Les premiers travaux d'Osborne Reynolds concernent le magnétisme et l'électricité, mais il se concentre bientôt sur l'hydraulique et l'hydrodynamique. Il a également étudié les propriétés électromagnétiques du soleil et des comètes, et a découvert des mouvements de marée dans les fleuves. Après 1873, il se concentre principalement sur la dynamique des fluides. Il étudie les changements de régime lors des écoulements : passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent.*

Le nombre de Reynolds apparaît pour la première fois en 1883 dans son article intitulé "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels".

Se basant sur les travaux de Reynolds, les différents théoriciens et expérimentateurs vont désormais étudier indépendamment les deux régimes : le laminaire et le turbulent.

De manière indépendante et quasi simultanée, Jean Poiseuille (1799-1869) (figure 1.20) et Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884) (figure 1.19), proposent pour les écoulements dans les tubes de petit diamètre et pour des vitesses faibles :

$$\Delta h = 64\nu \frac{L}{d^2} \frac{v}{2g} \quad (1.24)$$

1.3. De coefficients universels en paramètres

d est le diamètre du tube, L la longueur du tube et v la vitesse débitante de l'écoulement.



FIG. 1.19 : *Physicien et Ingénieur hydraulicien allemand, Hagen conduit, indépendamment de Poiseuille, des expérimentations qui l'amèneront à formuler la loi dite de Hagen Poiseuille.*



FIG. 1.20 : *Médecin physiologiste et physicien, Jean Poiseuille entre en 1815 à l'école Polytechnique, puis étudie la médecine, d'abord la circulation sanguine, et plus particulièrement la pression du sang dans les artères. En 1842, il est élu à l'Académie de Médecine à Paris.*

En introduisant le nombre de Reynolds dans la formule précédente, on trouve l'expression du coefficient de frottement f aujourd'hui connue sous le nom de formule de Hagen-Poiseuille :

$$f = \frac{64}{Re} \quad (1.25)$$

Nous ne savons pas qui le premier a écrit f sous cette forme, mais celle-ci est très largement utilisée, dès les années 1900.

En 1857, en se basant sur un grand nombre d'expériences, Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) (figure 1.21), propose une nouvelle expression des coefficients de Gaspard de Prony pour des écoulements turbulents dans des conduites.

La formule qu'il propose est la suivante :

$$\Delta h = \frac{L}{D} \left(\left(c + \frac{b}{D^2} \right) V + \left(c' + \frac{b'}{D} \right) V^2 \right) \quad (1.26)$$

Où les coefficients c , b , c' et b' sont des coefficients de frottement et D le diamètre de la conduite.



FIG. 1.21 : *Henry Darcy, polytechnicien et ingénieur des Ponts et Chaussées, étudie les écoulements en charge mais aussi à surface libre. On lui doit les lois de la filtration et il est aussi considéré comme un pionnier des travaux concernant la diffusion.*

Il constate également que le terme proportionnel à la vitesse peut être omis, à condition d'adapter les autres constantes.

$$\Delta h = \frac{L}{D} \left(c'' + \frac{b''}{D} \right) V^2 \quad (1.27)$$

Où c'' et b'' sont des coefficients de frottement que Darcy considère comme étant des fonctions du diamètre des conduites mais aussi de leurs rugosités. C'est la première fois que la rugosité est prise en compte explicitement dans les coefficients de frottement. C'est pour cela que le coefficient f est aujourd'hui souvent appelé "coefficient de Darcy" bien que celui-ci ne l'ait jamais proposé sous cette forme contrairement à Weisbach.

Nous l'avons déjà évoqué, à la suite des expériences de Darcy, son élève et collaborateur Henri Emile Bazin (1829-1917), s'intéresse en 1865 aux écoulements à surface libre. Il constate l'impossibilité de trouver des coefficients universels et propose une formule du type monôme mais avec deux coefficients fonctions de la nature des parois. En fait, il semble que le premier à mélanger les concepts de Weisbach et Darcy soit J.T Fanning (1837-1911) qui publie en 1877 un large échantillon de valeur de f en fonction du matériau de la conduite, de son diamètre et de la vitesse de l'écoulement.

Au début du XXI^{ème} siècle, avec le développement de nouvelles théories, on cherche enfin une expression analytique du coefficient de frottement. Ce sont Ludwig Prandtl (1875-1953) (figure 1.22), grâce à sa théorie de la couche limite turbulente, et ses étudiants, Théodore Von Karman (1881-1963) (figure 1.24), Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970) (figure 1.23) et Johann Nikuradse (1894-1979) qui feront les premières propositions.



FIG. 1.22 : *Physicien allemand, Ludwig Prandtl est le pionnier de l'aérodynamique. On lui doit, entre autres, les bases mathématiques de l'aérodynamique subsonique ainsi que l'identification et l'étude de la couche limite.*

En 1913, Blasius propose pour les conduites lisses et pour des nombres de Reynolds relativement élevés, la formule expérimentale suivante :

1.3. De coefficients universels en paramètres

$$f = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (1.28)$$

En utilisant les données de Nikuradse, Karman et Prandtl proposent une formule qui approche mieux les résultats expérimentaux pour toute la gamme turbulente.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(Re \sqrt{f} \right) - 0,08 \quad (1.29)$$

En ce qui concerne les conduites rugueuses, pour les grands nombres de Reynolds, le coefficient f devient indépendant de la vitesse et est seulement fonction de la rugosité relative $\frac{e}{D}$ (e est la taille des rugosités intérieures et D le diamètre de la conduite) introduite par Nikuradse. Karman propose la relation suivante en 1930 (elle sera confirmée par les expériences de Nikuradse trois ans plus tard) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \left(\frac{e}{D} \right) \quad (1.30)$$

La zone de transition entre les régimes laminaires et turbulents a été définie empiriquement par Nikuradse pour des conduites avec une rugosité uniforme.



FIG. 1.23 : *Paul Richard Heinrich Blasius est un des premiers étudiants de Prandtl. On lui doit les bases mathématiques de la théorie de la couche limite.*



FIG. 1.24 : *Théodore Von Karman est un physicien Hongrois. Son principal champ d'étude est l'aérodynamique, domaine dans lequel il est très prolifique. On lui doit aussi des contributions en élasticité, cristallographie et transfert de chaleur.*

En 1937, Colebrook et White montrent que pour les conduites ayant des rugosités non uniformes, la formule précédente ne donne pas des résultats très satisfaisants. Ils développent alors une formule pour le régime de transition entre un écoulement turbulent lisse et un écoulement turbulent rugueux en conduites.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s}{3,7D} + \frac{2,51}{R_p \sqrt{f}} \right) \quad (1.31)$$

Où D est le diamètre de la conduite, R_p son rayon hydraulique et k_s sa rugosité équivalente, notion introduite par Nikuradse. Ils généralisent ensuite cette équation aux écoulements à surface libre :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -c_1 \log \left(\frac{k_s}{c_2 R} + \frac{c_3}{4Re\sqrt{f}} \right) \quad (1.32)$$

Où R est le rayon hydraulique du canal, Re le nombre de Reynolds et c_1, c_2, c_3 , trois constantes dépendant notamment de la forme du canal considéré. Cette formule sera testée par de nombreux ingénieurs et chercheurs qui proposeront de nombreuses tables pour les trois constantes.

Il faut ensuite attendre 1942, pour qu'un premier effort d'intégration de toutes ces formules pour un usage pratique soit fait. C'est Hunter Rouse (1906-1996) qui le premier propose un diagramme regroupant les formules (1.24), (1.29), (1.30) et (1.31). Les deux dernières équations sont alors représentées pour différentes valeurs de la rugosité relative.

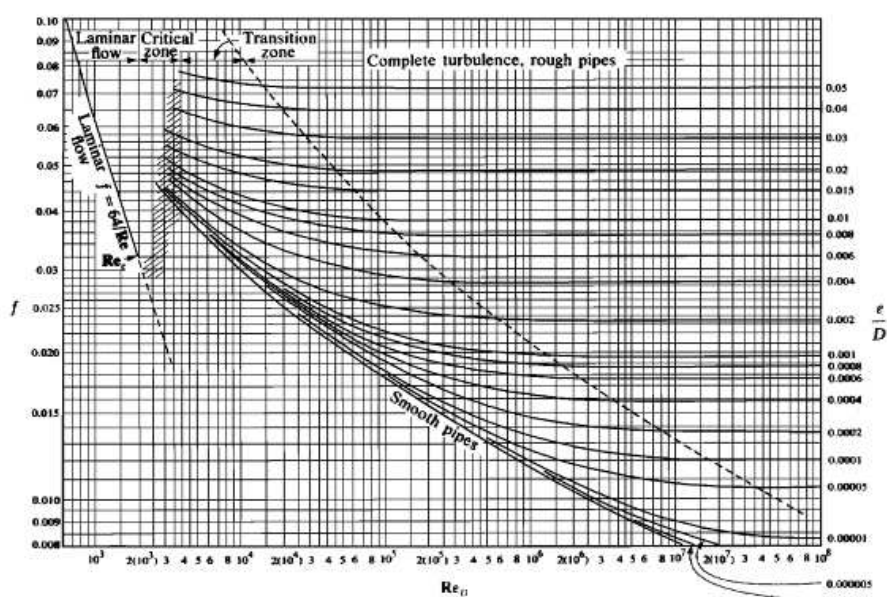


FIG. 1.25 : Diagramme de Moody

Deux ans plus tard, Lewis Moody (1880-1953), reprend le diagramme de Rouse et propose de considérer le nombre de Reynolds ainsi que le coefficient de Darcy-Weisbach comme les variables principales de celui-ci. Le diagramme représentant f en fonction du nombre de Reynolds est aujourd'hui universellement connu sous le nom de diagramme de Moody (figure 1.25), bien que divers auteurs aient participé à son élaboration.

Dans les différentes formules proposées pour exprimer la vitesse moyenne ou bien encore le coefficient de frottement f , les ingénieurs et les chercheurs ont pris en compte les effets des rugosités des parois. Cependant, très peu ont alors considéré des macro rugosités. En effet, dans toutes les formules précédentes, les rugosités sont, le plus souvent, submergées par le flot et de taille négligeable devant le diamètre de la conduite ou la profondeur d'eau dans les canaux.

1.4 De micro rugosités en macro rugosités

1.4.1 Le nombre de Reynolds comme variable principale

Les premières études considérant des écoulements minces sur des surfaces présentant des macro-rugosités ont été basées sur l'analogie avec les écoulements turbulents en conduites (Savat 1980, Abrahams, Parsons et Luk 1986). Implicitement cette analogie fait l'hypothèse que la surface ne présente que des micro rugosités complètement recouvertes par le fluide. Ces hypothèses sont rarement vérifiées dans des écoulements naturels tels que le ruissellement.

Pour les écoulements laminaires sur surfaces rugueuses, Horton propose en 1934 (Horton, Leach et Van Vliet 1934) de considérer la vitesse moyenne de l'écoulement :

$$v = \frac{gjR^2}{3\nu} \quad (1.33)$$

Où g est l'accélération de la pesanteur, R le rayon hydraulique et j la pente de l'énergie (équivalente à la pente du fond en régime uniforme). Cette expression de la vitesse moyenne découle de l'égalité des forces de gravité et de frottements. Afin de valider sa proposition Horton effectue ses propres expérimentations en canal. En faisant l'hypothèse d'un écoulement bien plus large que profond, cette formule conduit à l'expression suivante du coefficient de Darcy-weisbach :

$$f = \frac{96}{Re} \quad (1.34)$$

Avec $Re = \frac{vh}{\nu}$, où h est l'épaisseur de la lame d'eau.

Notons que lorsque nous considérons la formule classique de Poiseuille (pour des surfaces lisses et des sections circulaires) $f = \frac{64}{Re}$, la relation 1.33 s'écrit alors :

$$v = \frac{gjR^2}{2\nu} \quad (1.35)$$

Phelps montre en 1975 (Phelps 1975), que la relation 1.34 n'est valable que sur des surfaces relativement lisses. Quand les surfaces sont plus rugueuses Parsons (Parsons 1949) met en évidence expérimentalement que la formule 1.34 n'est valable qu'en dessous d'une certaine valeur du nombre de Reynolds (équation 1.36) qui dépend du sinus de l'angle de la pente (S).

$$Re_c = 30j^{-0.667} \quad (1.36)$$

Pour les valeurs supérieures du nombre de Reynolds on a :

$$f = \frac{K'}{Re} \text{ avec } \frac{K'}{96} = 1 + \frac{D^{1.25} j^{0.40}}{263} \quad (1.37)$$

D est le diamètre des grains de sable équivalents souvent égal à D_{90} .

En 1980, Savat (Savat 1980) se propose d'exprimer le coefficient de frottement à partir des mesures du débit et de la hauteur d'eau et non plus à partir de la vitesse de surface. Les résultats de son étude montrent que dans le cas d'écoulement à très faible hauteur d'eau le coefficient de Darcy est plus grand que les formules généralement utilisées.

Concernant le régime laminaire, Savat prend en compte les résultats de Phelps. Pour le régime turbulent, il compare ses résultats expérimentaux à trois types de formules :

– Manning-Strickler

$$v = \frac{70q^{0.4} j^{0.3}}{D^{0.1}} \quad (1.38)$$

– Écoulement turbulent sur fond rugueux

$$\frac{u}{v_0} = \frac{1}{K'} \ln\left(\frac{y}{D}\right) + C \quad (1.39)$$

– Écoulement turbulent sur fond lisse

$$\frac{u}{v_0} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{y v_0}{\nu}\right) + E \quad (1.40)$$

Où là encore D est le diamètre équivalent des grains composant la rugosité et v_0 est la vitesse de frottement.

D'après Nikuradse (?) $C = 8.5$ et $E = 5.5$.

En intégrant par rapport à y , Savat obtient alors la vitesse moyenne qui lui permet de calculer le coefficient de frottement. Fort de toutes ces considérations, Savat effectue une série d'expériences, desquelles il conclut que :

- La formule de White-Colebrook pour la zone de transition semble inutile pour les écoulements peu profonds et super critiques.
- La formule pour les écoulements turbulents sur des surfaces rugueuses surestime le coefficient de frottement dans la zone de transition (mais moins que la formule de White-Colebrook).
- La formule de Manning est bien en accord avec les mesures sur des surfaces relativement peu rugueuses.
- La formule de Manning sous estime le coefficient de frottement et ce de manière considérable lorsque $\frac{R}{D} < 10$.

- Le coefficient de frottement était bien prédit par la formule classique des écoulements turbulents sur surface lisse quand $D < 35.5j^{-0.4}$ ou quand $Re_D < 4$ pour toutes les pentes.

Il prend alors en compte toutes ces remarques et développe un code numérique (Savat 1980) permettant de calculer le coefficient de Darcy-Weisbach, en fonction de la pente et du régime d'écoulement. Mais ce code ne tient toujours pas compte d'éventuelles aspérités émergentes.

En 1986, Abrahams (Abrahams, Parsons et Luk 1986) étudie le ruissellement sur des échantillons de surfaces naturelles dans le désert d'Arizona. Ses échantillons sont recouverts de rochers et de végétation, si bien que suivant les débits considérés, tous les éléments constituant les rugosités ne sont pas recouverts. Dans cette étude, Abrahams cherche à obtenir sur chaque échantillon, la relation liant le coefficient de Darcy-Weisbach au nombre de Reynolds afin de les comparer aux relations similaires sur fond plat.

Ses résultats montrent deux types de courbes. Des courbes strictement décroissantes et d'autres convexes (figure 1.4.1). Abrahams va alors utiliser la relation entre l'épaisseur de la lame d'eau et le débit proposée par Richards en 1973 (Richards 1973) pour obtenir les expressions du coefficient de Darcy-Weisbach.

La relation proposée par Richards est la suivante :

$$\text{Log}(d) = f_1 + f_2 \text{Log}(Q) + f_3 (\text{Log}(Q))^2 \quad (1.41)$$

Cette relation est basée sur les travaux de Leopold et Maddock (Leopold et Maddock 1953) dans les canaux, qui furent ensuite appliqués au ruissellement par Emmett (Emmett 1970).

Considérant la relation 1.41, le coefficient de frottement est alors donné par :

$$\text{Log}(f) = k_1 + k_2 \text{Log}(Re) + k_3 (\text{Log}(Re))^2 \quad (1.42)$$

Nous le voyons, Abrahams continue de considérer le nombre de Reynolds comme le paramètre déterminant. Pourtant il distingue des régimes d'écoulements en fonction du taux d'émergence des rugosités. Pour expliquer ces résultats, il considère deux phénomènes différents.

- L'inondation progressive des aspérités de la surface qui augmente leurs trainées, ce qui a tendance à augmenter le coefficient de frottement.
- L'augmentation de la profondeur d'eau sur les parties émergées qui a tendance à faire diminuer le coefficient de frottement.

Il n'est pas le premier à proposer cette explication, Herbich et Shulits en 1964 (Herbich et Shulits 1964), Emmett en 1970 (Emmett 1970) et Barthurst en 1985 (Barthurst 1985) avaient déjà proposé cette explication.

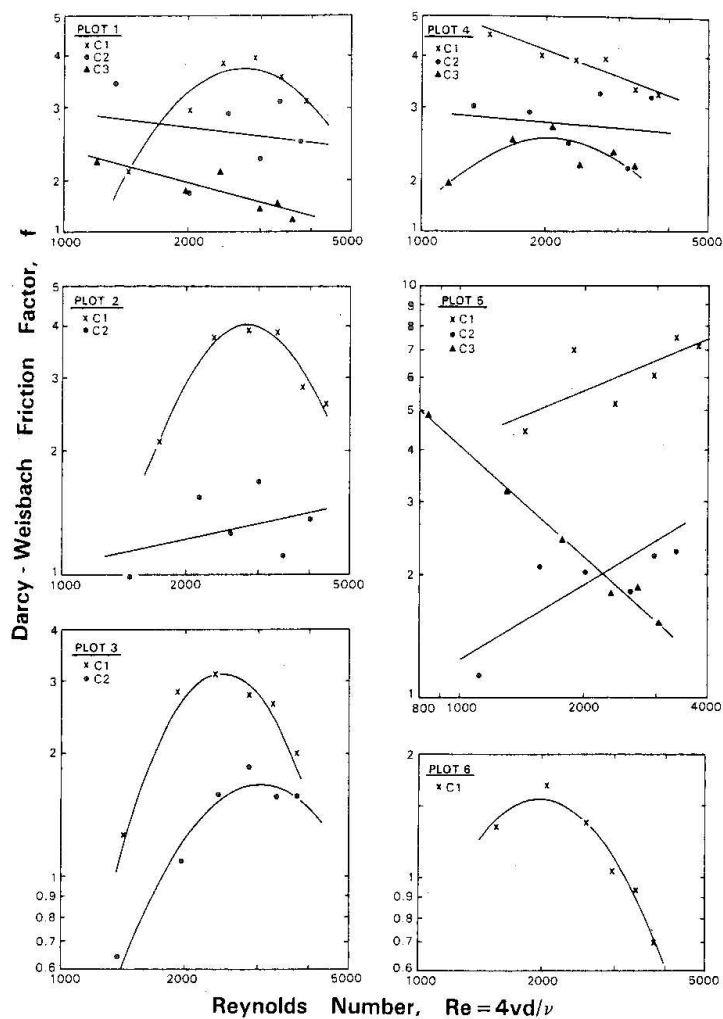


FIG. 1.26 : Relations entre le coefficient de Darcy-Weisbach et le nombre de Reynolds selon les expériences de Abrahams en 1986.

1.4.2 Le concept de *Einstein-Banks*

En 1980, Rauws (Rauws 1980) s'attache à étudier, expérimentalement, les frottements dus aux rugosités composées (sur des surfaces présentant des micro et macro rugosités) dans les écoulements peu profonds. Il veut en particulier mettre en évidence la variation des frottements imputés à des rugosités composées sur des écoulements de faible profondeur et sur des pentes raides.

Constatant que la résistance à l'écoulement a deux sources principales :

- Les frottements dus aux particules et micro-rugosités du sol.
- La résistance induite par la forme des macro-rugosités.

Ces deux sources sont respectivement désignées comme la résistance granulaire (“grain resistance”) à l'écoulement et la résistance de forme (“form resistance”). Rauws décompose alors la charge (h), les efforts (τ) et le coefficient de frottement (f) en deux parties correspondant aux deux phénomènes.

$$h = h' + h'' \quad (1.43)$$

$$\tau = \tau' + \tau'' \quad (1.44)$$

$$f = f' + f'' \quad (1.45)$$

Les grandeurs notées ' sont imputées à la résistance granulaire tandis que celles notées '' le sont à la résistance de forme. Ce concept proposé par Einstein et Banks en 1950 (Einstein et Banks 1950), doit être vérifié expérimentalement. En effet, la théorie n'est pas suffisante pour pouvoir l'imposer. Lors de leurs études, Einstein et Banks n'avaient considéré que des régimes turbulents sur des pentes faibles. Cette approche n'avait donc pas encore été vérifiée pour les écoulements peu profonds (comme dans le cas du ruissellement).

Rauws mène alors deux expériences en parallèle. L'une sur une surface lisse avec des macro-rugosités et l'autre sur une surface identique mais recouverte de sable. Ses études de la deuxième surface et le code de Savat (Savat 1980) lui permettent alors de calculer le coefficient de frottement granulaire f' .

Le coefficient de frottement de forme f'' est obtenu en étudiant la première surface (sur laquelle il n'y a pas de frottement granulaire).

$$f'' = \frac{8gh''j}{\bar{v}^2} \quad (1.46)$$

Où, de manière classique, j est la pente de l'énergie (assimilable à la pente du fond dans le cas d'un écoulement uniforme), h'' la hauteur d'eau (due aux frottements de forme) et \bar{v} la vitesse moyenne de l'écoulement.

La manière dont Rauws écrit le coefficient de frottement de forme (équation 1.46), nous indique que lui aussi fait l'hypothèse d'un écoulement bien plus large que profond et ne

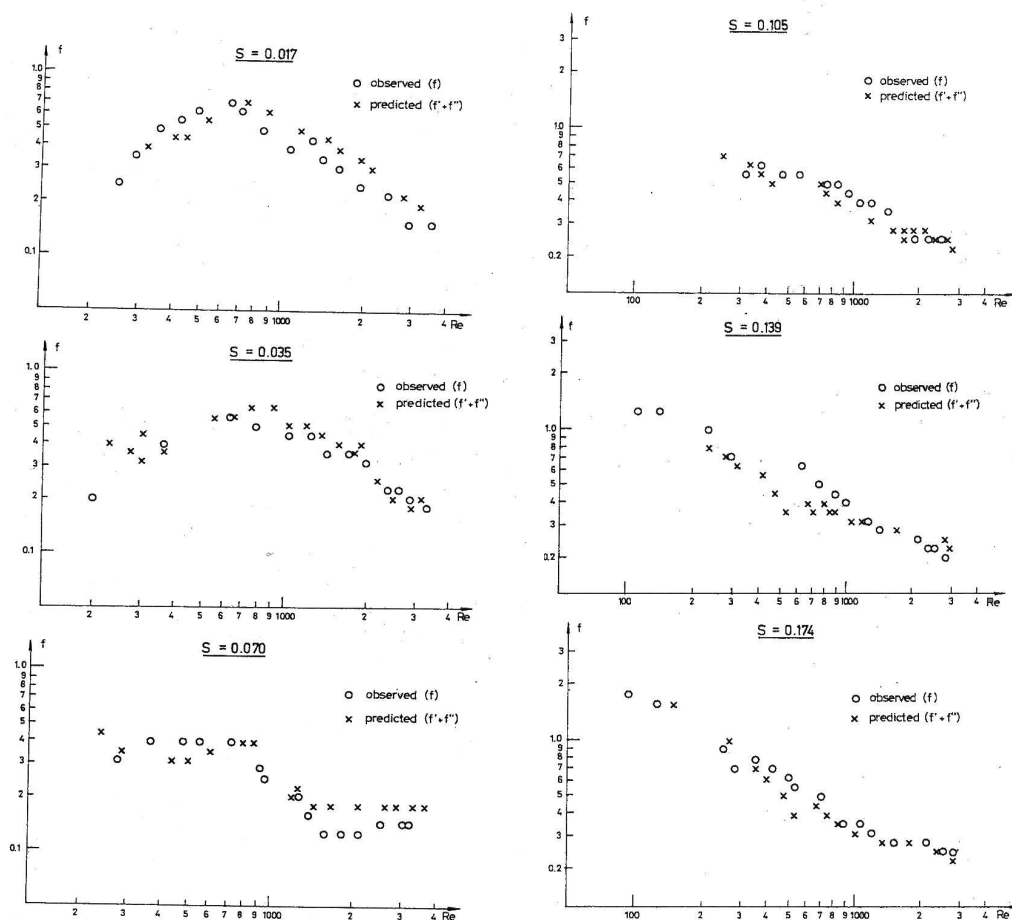


FIG. 1.27 : Comparaison entre le coefficient de Darcy-Weisbach mesuré f et celui calculé $f' + f''$. La taille caractéristique des micro-rugosités est $240\mu\text{m}$

considère donc pas l'influence de l'émergence de certaines aspérités qui peut mettre à mal cette hypothèse.

Au cours de ses expérimentations, Rauws ne distingue pas de réelle différence entre le régime laminaire et le régime turbulent (figure 1.27). Il en conclut qu'il est plus qu'incertain qu'il existe un vrai régime laminaire sur des surfaces très rugueuses. En ce qui concerne la forme des courbes représentant f en fonction de Re , Rauws aboutit à la même conclusion que Abrahams (Abrahams, Parsons et Luk 1986) sur l'importance des macro-rugosités et du phénomène de traînée qui leur est associé.

Rauws montre aussi à quel point les contributions respectives des coefficients de frottement granulaire f' et de forme f'' peuvent être très variables en fonction de la pente (figure 1.28). Par conséquent, toute étude du coefficient de Darcy-Weisbach ne peut se faire que sur des gammes d'écoulements relativement restreintes.

Une fois de plus, bien qu'ayant mis en évidence l'importance des macro-rugosités, comme Abrahams (Abrahams, Parsons et Luk 1986) avant lui, Rauws choisit de considérer le coefficient de Darcy-Weisbach comme principalement fonction du Nombre de Reynolds.

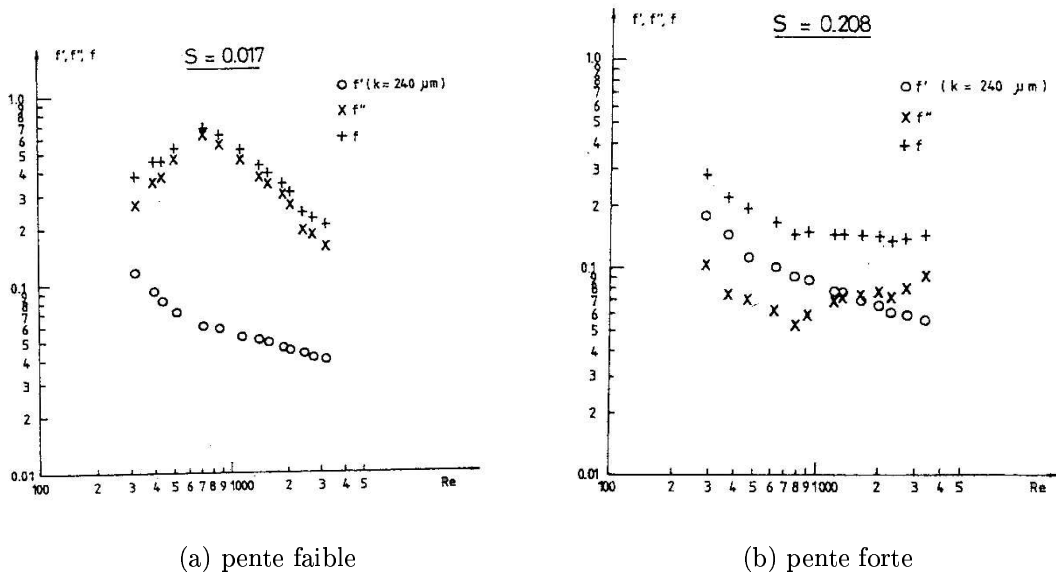


FIG. 1.28 : Contribution respective des coefficients de frottement granulaire et de forme à la résistance totale à l'écoulement.

1.4.3 Une nouvelle variable principale : taux d'inondation

Nous l'avons vu, il est courant en hydraulique du ruissellement de considérer le coefficient de Darcy-Weisbach comme étant une fonction du nombre de Reynolds. En faisant cela, les variations du coefficient de Darcy-Weisbach, observées dans les régimes de faible inondation et pour de petits nombres Reynolds, ne sont en fait qu'apparentes. Les comportements du coefficient de Darcy-Weisbach, jusque là imputés aux différences entre les régimes laminaire et turbulent, sont en fait la manifestation de l'inondation progressive de la surface. C'est ce qu'avait suggéré Abrahams en 1986 (Abrahams, Parsons et Luk 1986) et que Lawrence a mis en évidence en 1997 (Lawrence 1997).

Il n'y aurait en fait pas de réel régime laminaire, ainsi que Rauws l'avait suggéré (Rauws 1980), et l'apparente décroissance du coefficient de Darcy-Weisbach viendrait du fait que chaque point de mesure serait pris sur une courbe différente du diagramme de Moody, en fonction de l'évolution de la rugosité relative avec le taux d'inondation de la surface (figure 1.29).

Cette méprise est d'autant plus compréhensible que chaque expérimentateur n'a étudié le ruissellement que sur des gammes de paramètres hydrauliques (rugosité, nombre de Reynolds, etc) limitées. Mais si nous regroupons, comme l'a fait Lawrence (Lawrence 1997), les coefficients de frottement alors calculés sur un graphique en fonction du nombre de Reynolds (figure 1.30), il est impossible de discerner quelque tendance que ce soit.

En 1997, Lawrence (Lawrence 1997) propose, sur la base d'une étude de similarité, de faire les hypothèses suivantes dans le cas des écoulements ne recouvrant pas complètement

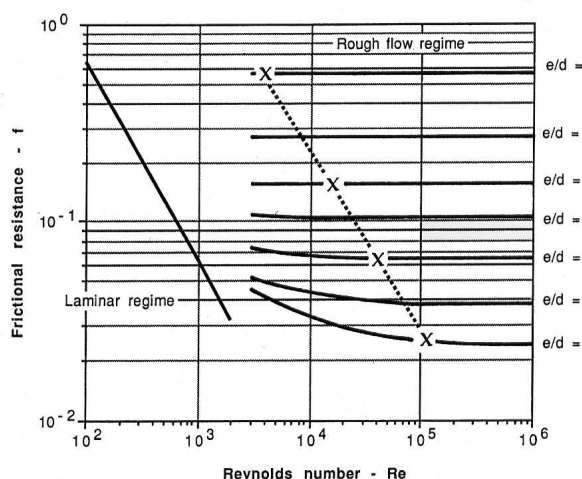


FIG. 1.29 : L'apparente décroissance du coefficient de Darcy-Weisbach ($f = \frac{96}{Re}$) sur des surfaces rugueuses en régime laminaire serait en fait un artefact dû à l'inondation progressive des aspérités de la surface.

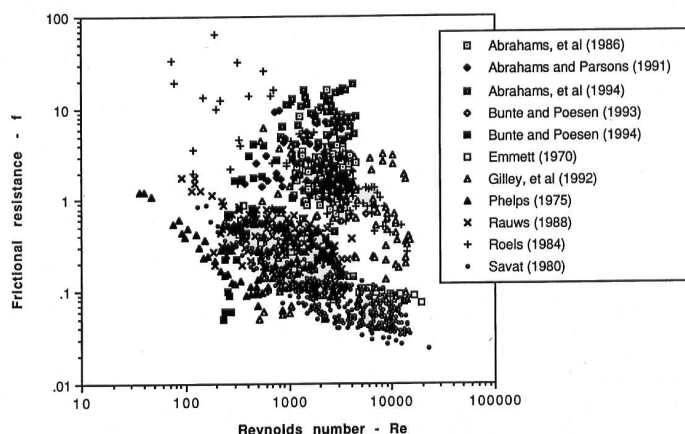


FIG. 1.30 : Coefficients de Darcy-Weisbach calculés lors de diverses expériences dont les auteurs sont cités dans l'encadré. On le voit, il est impossible de discerner une quelconque tendance du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds.

les aspérités de la surface :

- Faible influence du nombre de Reynolds (cf figure 1.30).
- Faible influence de la pente (ce qui sera d'autant plus vrai lorsque la pente sera faible).

Ce faisant, Lawrence cherche un coefficient de frottement de la forme :

$$f = f(\Lambda) \quad (1.47)$$

Où Λ est un paramètre adimensionnel appelé "taux d'inondation".

$$\Lambda = \frac{d}{k} \quad (1.48)$$

Où d est la profondeur d'eau et k une grandeur caractéristique de la rugosité de la surface.

Comme nous discernons différents régimes en fonction du nombre de Reynolds, Lawrence distingue trois régimes en fonction de ce taux d'inondation.

Pour le régime d'inondation totale ($\Lambda \geq 10$), elle utilise la formule des écoulements turbulents sur surfaces rugueuses proposée par Nikuradse (?) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,64 + 0,803 \ln(\Lambda) \quad (1.49)$$

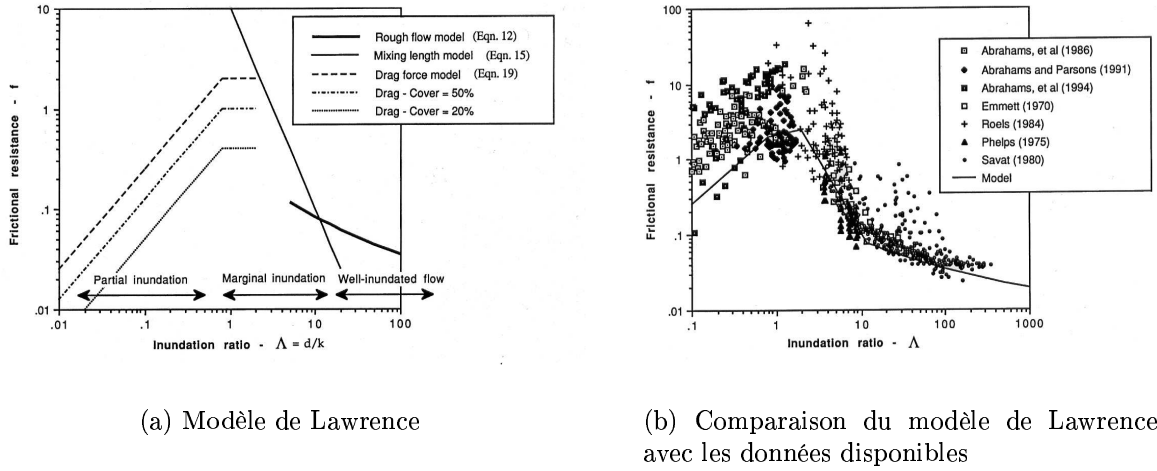


FIG. 1.31 : Lorsque nous représentons les coefficients de frottement donné par les divers expérimentateurs en fonction du taux d'inondation, il apparaît une tendance que le modèle de Lawrence tente de reproduire.

Un écoulement laminaire nécessiterait une grande profondeur d'eau et des vitesses assez faibles, ce qui est très rare lorsque l'on étudie le ruissellement.

Lors de l'inondation marginale ($2 \leq \Lambda \leq 10$), le coefficient de frottement décroît très rapidement tandis que la lame d'eau augmente :

$$f = 10 (\Lambda)^{-2} \tag{1.50}$$

Cette formule est basée sur un modèle de longueur de mélange.

Et enfin, lors de l'inondation partielle ($\Lambda \leq 2$), le coefficient de frottement est proportionnel au taux de couverture de la surface par les rugosités (P) et au taux d'inondation.

$$f = \frac{8}{\pi} P C_{dmin} \left(\frac{\pi}{4}, \Lambda \right) \tag{1.51}$$

Où C_d est le coefficient de traînée d'une demi sphère. Cette dernière formule fait appel à un modèle de force de traînée, idée sous-jacente dans les travaux d'Abrahams (Abrahams, Parsons et Luk 1986) et Rauws (Rauws 1980).

Les résultats obtenus par Lawrence semblent corroborer le fait qu'il est pertinent de considérer le coefficient de Dracy-Weisbach comme principalement fonction du taux d'inondation pour les régimes d'inondation partielle et marginale (figure 1.31). En 2000, Takken et Govers (Takken et Govers 2000) ont également fait une série d'expérience sur des surfaces rugueuses. Ils ne retrouvent pas la partie ascendante du modèle de Lawrence qui correspond à l'inondation partielle. Ils proposent à leur tour un modèle numérique dans lequel ils n'appliquent les algorithmes de Savat (Savat 1980) que sur les parties submergées de la surface étudiée, et dans lesquels ils ajoutent une optimisation de la valeur de la rugosité équivalente pour avoir une meilleure prédiction des vitesses.

Lors de travaux supplémentaires, Lawrence (Lawrence 2000) améliore son premier modèle afin de se rapprocher des données expérimentales mais aussi pour mieux prendre en compte les surfaces à rugosité composée. Elle a alors mis en évidence l'importance des déformations de surfaces libres dans la résistance hydraulique à l'écoulement. Ce travail a ensuite été repris et complété par Ferro (Ferro 2003) pour explicitement prendre en compte ces phénomènes dans le cas de l'inondation marginale.

1.5 Conclusion

Le problème de la résistance à l'écoulement a très tôt intéressé les ingénieurs. Ils ont alors cherché, de manière expérimentale ou théorique, à exprimer les pertes de charge correspondantes au travers de différentes formules et différents coefficients. Très vite, il est devenu évident qu'il ne pouvait y avoir une formule ou un coefficient universel pour caractériser la résistance à l'écoulement tant les conditions de celui-ci pouvaient être différentes.

De nos jours les trois principaux coefficients utilisés sont ceux de Chézy (C , 1775), Darcy-Weisbach (f , 1847) et Manning (C_M , 1889). Si nous considérons un écoulement uniforme et dont la profondeur est négligeable devant la largeur du canal nous avons une parfaite équivalence de ces trois coefficients :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{C}{\sqrt{8g}} = C_M \frac{R^{1/6}}{\sqrt{8g}}$$

Où R est le diamètre hydraulique du canal et g l'accélération de la pesanteur.

Mais le coefficient de Darcy-Weisbach a notre faveur puisqu'il est sans unité contrairement à ces deux homologues. De nombreux ingénieurs et chercheurs ont proposé des expressions de f pour diverses conditions d'écoulement, mais très peu se sont intéressés aux écoulements peu profonds sur des surfaces présentant des rugosités de tailles suffisantes pour qu'elles émergent. Ces derniers sont pourtant très présents dans la nature et de première importance pour l'étude du ruissellement sur les surfaces naturelles ou artificielles.

Rugosité, réseaux hydrauliques et première étude analytique

Sommaire

2.1	Introduction	32
2.2	Caractérisation de la surface	33
2.2.1	Fabrication de l'échantillon	34
2.2.2	Caractérisation statistique des rugosités	34
2.2.2.1	Rugosimétrie Laser	35
2.2.2.2	Le plan moyen de la surface	35
2.2.2.3	Variogramme de la surface	36
2.2.2.4	Histogramme des rugosités	38
2.2.3	Les Cartes des Régions Submergées	39
2.2.4	Le degré de connexion de la Carte des Régions Submergées et le seuil de percolation	41
2.2.5	Définition du taux d'inondation	43
2.3	Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon	45
2.3.1	Paramètres hydrauliques de la surface	45
2.3.2	Modélisation élémentaire du débit	50
2.4	Des réseaux hydrauliques déterminés par la micro-rugosité	57
2.4.1	Analyse d'image, Géométrie discrète et squelettisation	57
2.4.1.1	Premières Définitions	57
	Forme et fond d'une image	57
	Voisinage	58
	Distances Discrètes	58
	Boules Discrètes	59
2.4.1.2	Axe Médian et Squelette	60
	Image de Distance	60
	Définition et Construction de l'Axe Médian	60
	Construction du squelette	61
2.4.2	Identification des noeuds et des liens	64
2.4.2.1	Définition et identification des noeuds	64
2.4.2.2	Définition et identification des liens	67
2.4.3	Simplification des réseaux	68
2.4.3.1	Élimination des branches mortes et non débouchantes	68
2.4.3.2	Élimination des boucles	73
2.5	Conclusion	75

2.1 Introduction

Avant de pouvoir prendre en compte les rugosités et leur influence sur l'écoulement, nous allons devoir les définir puis les caractériser. Le *Nouveau Petit Robert* donne deux sens au mot "rugosité".

1. Il semble que ce mot apparaisse pour la première fois en 1503 et désigne alors une "petite aspérité d'une surface rugueuse, rude au toucher".
2. Puis à partir de 1812, il sert également à dénommer "l'état d'une surface rugueuse".

Ainsi, la rugosité désigne aussi bien l'état d'une surface qu'une des aspérités qui la recouvrent.

Quand nous parlons de rugosité, il faut également considérer une échelle pertinente pour le problème qui nous concerne. En effet, si une feuille d'aluminium alimentaire peut nous paraître lisse il n'en est rien si nous l'observons à l'aide d'un microscope à balayage électronique. En hydrologie de surface, la classification des irrégularités topographiques des versants selon la taille caractéristique est problématique : où finit la rugosité et où commence le micro-relief ? A quelle échelle commence-t-on à parler véritablement de relief ? En matière d'état de surface naturel, le caractère multiéchelle, voire fractal est la règle.

Une fois cette précaution prise, il n'est toujours pas évident de caractériser l'état de surface. La difficulté à appréhender la rugosité vient du fait qu'il s'agit d'un paramètre statistique.

Dans le cadre des statistiques, nous pouvons interpréter les signaux bruts que sont les hauteurs des aspérités, de différentes façons. Ainsi, il existe quantité de paramètres pour caractériser la rugosité d'une surface, la moyenne des hauteurs des différentes aspérités ou bien la hauteur de la plus grande d'entre elles, etc... Mais aucun de ces critères n'est plus pertinent qu'un autre, tout dépend de l'application que l'on veut en faire.

A partir d'un moulage de la surface que nous désirons étudier, nous allons pouvoir caractériser cette dernière de manière statistique afin de juger de la qualité de notre échantillon suivant nos critères et d'en tirer les grandeurs pertinentes nécessaires à la détermination de la rugosité et à la représentation de nos résultats. Pour juger de la justesse de notre paramètre de rugosité nous nous reposerons sur la définition du taux d'inondation qui nous servira ensuite à discerner les différents régimes d'écoulement (figure 2.1) tels que différenciés par Lawrence (1997) :

- Un régime d'inondation totale où la hauteur d'eau est très grande devant la hauteur caractéristique des rugosités : $\Lambda \gg 1$
- Un régime d'inondation marginale où la hauteur d'eau et la hauteur caractéristique des rugosités sont comparables : $\Lambda \sim 1$
- Un régime d'inondation partielle où la hauteur d'eau n'est plus suffisante pour recouvrir les rugosités : $\Lambda \ll 1$

Notons que cette classification, illustrée par la figure 2.1, est définie implicitement dans le cas d'une surface plane de référence sur laquelle les aspérités sont collées. Cette configuration qui est admise dans la grande majorité des études disponibles dans la littérature

2.2. Caractérisation de la surface

ne convient pas pour la plupart des surfaces naturelles. Nous aurons donc à examiner par la suite la question du plan de référence pour la définition de la hauteur d'eau.

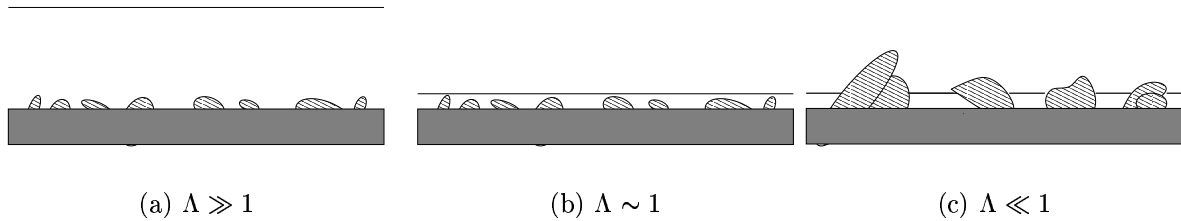


FIG. 2.1 : Les trois régimes d'écoulement discernés en fonction de la valeur du taux d'inondation. (a) inondation totale, (b) inondation marginale et (c) inondation partielle.

Dans un deuxième temps, pour mieux prendre en compte, l'influence variable des aspérités lors de l'inondation progressive de la surface, nous allons matérialiser l'élévation de la surface libre au dessus de la surface par une série d'images binaires : les **Cartes des Régions Submergées**. C'est à partir de l'ensemble de ces cartes que nous construirons nos réseaux hydrauliques en utilisant un algorithme de squelettisation basé sur les principes de la géométrie discrète.

Mais avant de détailler la construction des réseaux hydrauliques et de développer notre modèle numérique de perte de charge dans le chapitre suivant, nous allons effectuer une première analytique élémentaire de la résistance hydraulique de la surface considérée à partir des caractéristiques que nous aurons déduites grâce à l'analyse de l'échantillon.

2.2 Caractérisation de la surface

Pour la suite de notre étude nous avons besoin de mieux connaître la microtopographie de la surface à étudier. Pour cela, nous allons faire une étude statistique d'un échantillon de cette surface. Cette étude va nous permettre, dans un premier temps de juger de la qualité de l'échantillon, puis de définir une grandeur caractéristique des rugosités.

Afin de pouvoir déterminer le taux d'inondation (Lawrence 1997, Lawrence 2000), nous allons également devoir choisir une référence pour définir l'épaisseur de la lame d'eau sur la surface.

$$\Lambda = \frac{d}{k} \quad (2.1)$$

Où d est l'épaisseur de la lame d'eau et k une grandeur caractéristique de la rugosité.

C'est en nous appuyant sur les **Cartes des Régions Submergées** et la notion de percolation que nous allons définir la lame d'eau qui nous servira à préciser le taux d'inondation Λ .

2.2.1 Fabrication de l'échantillon

Nous avons choisi de travailler directement à partir du moulage de la surface que nous voulions étudier. Notre choix s'est porté sur une surface goudronnée, car nous voulions pour cette étude travailler sur une surface isotrope présentant des rugosités de taille relativement homogène. Ce faisant, nous nous affranchissons d'éventuels écoulements préférentiels du fait de l'anisotropie de la surface, ainsi que des effets de tailles de rugosités très disparates (dans ce cas la définition d'une taille caractéristique est plus délicate).

A partir d'un négatif en résine élaboré selon la méthode utilisée par Kamphorst (Kamphorst, Jetten, Guérif, Pitkänen, Iversen, Douglase et Paz 2000, Kamphorst 2000), moulé sur le terrain, nous allons créer le moulage de notre échantillon de surface. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser une résine polyester. La conception du moulage demande quelques précautions. En particulier, durant la phase de polymérisation de la résine nous avons observé un retrait, d'autant plus important que l'épaisseur de résine était grande. Pour éviter que notre échantillon ne soit bombé, nous l'avons donc armé avec des barres d'aluminium prises dans la résine.



FIG. 2.2 : Nous étalons la résine de polyester sur notre négatif tout en prenant soin d'armer le moulage avec des barres d'aluminium pour empêcher la déformation de l'échantillon lors de la phase de polymérisation de la résine.

2.2.2 Caractérisation statistique des rugosités

En 1991, Gilley et Finkner, avec le souci de mieux considérer l'influence des rugosités d'une surface sur les écoulements, proposent deux formules empiriques des coefficients de Darcy-Weisbach et Manning basées sur une taille caractéristique des aspérités : la "random roughness". Cette grandeur sera cependant jugée peu pertinente (Takken et Govers 2000) et classiquement c'est D_{90} ou D_{50} (les diamètres tels que 90% ou 50% des particules constituant le sol soient d'un "diamètre" inférieur) qui servent de grandeur caractéristique des rugosités. En ce qui nous concerne, nous avons préféré définir une grandeur caractéristique des rugosités à partir d'une étude statistique de l'échantillon de surface plutôt que d'en choisir une à priori.

2.2.2.1 Rugosimétrie Laser

Pour ce faire, nous parcourons le moulage précédemment décrit avec le rugosimètre laser disponible au laboratoire (figure 2.3). Ce dernier nous permet de mesurer l'altitude des aspérités de l'échantillon de surface avec une précision de 10^{-2} mm et un pas de 1 mm en abscisse comme en ordonnée. Ainsi, nous disposons d'une **Carte Numérique provisoire des Altitudes** de l'échantillon de surface étudié (figure 2.4).

Le faisceau du laser sur le moulage est suffisamment petit par rapport à la résolution de la grille de mesure ($1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$) pour que nous soyons affranchi des problèmes de chevauchement des mesures lors de l'échantillonnage de notre surface.

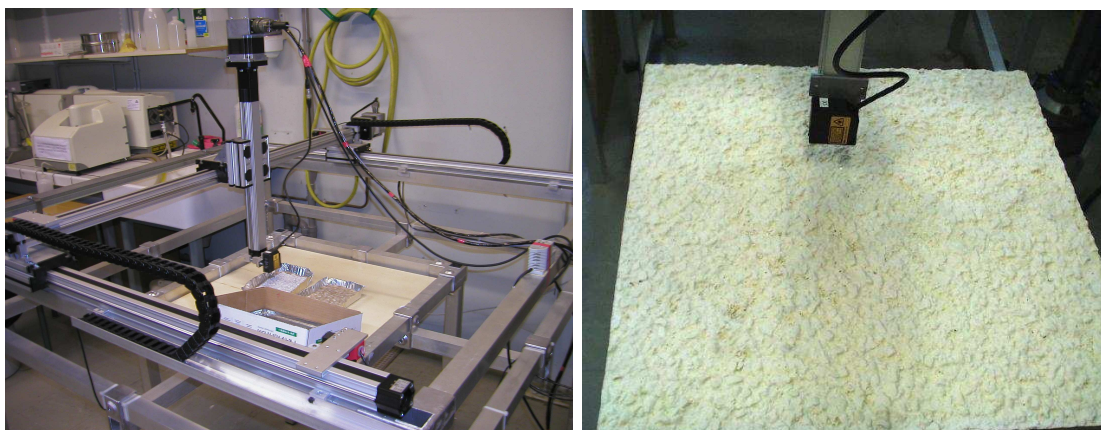


FIG. 2.3 : Grâce au rugosimètre laser nous obtenons une mesure de la hauteur des aspérités de la surface sur un grille de $60\text{cm} \times 60\text{cm}$ avec un pas de $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ et une précision de 10^{-2}mm .

2.2.2.2 Le plan moyen de la surface

La **Carte Numérique des Altitudes** obtenue à cette étape est qualifiée de provisoire, car elle est tributaire du positionnement relativement arbitraire de l'échantillon sur le

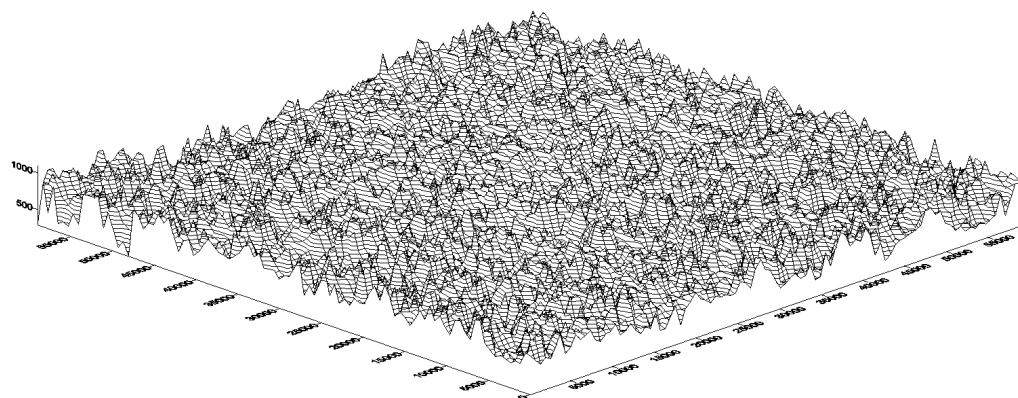


FIG. 2.4 : Carte Numérique des Altitudes de notre échantillon de surface tiré du parking de l'ENSHMG.

banc du rugosimètre. Afin de ne pas introduire de ce fait un biais dans notre démarche, nous ajustons sur la carte des altitudes provisoire un plan par la méthode des moindres carrés. Ce plan qui présente une très légère pente par rapport au banc du rugosimètre sera appelé **plan moyen de la surface**. La **Carte Numérique des Altitudes définitive** est obtenue en recalculant la position de chaque point de la surface explorée par le rugosimètre par rapport au plan moyen, qui servira de référence dans toute la suite. Dans cette nouvelle carte, la moyenne des altitudes est nulle.

2.2.2.3 Variogramme de la surface

Avant d'aller plus loin dans notre démarche, nous souhaitons savoir si l'échantillon de surface que nous avons moulé est "représentatif" du type de surface que nous voulons étudier. C'est à dire, notre échantillon est-il suffisamment grand pour que toutes les tailles d'aspérités présentes sur ce type de surface soit bien représentées?

Nous allons chercher à répondre à cette question en nous servant du variogramme de la **Carte Numérique des Altitudes**.

L'idée fondamentale sous-jacente au variogramme est que la nature n'est pas entièrement imprévisible. Dans le cas général, deux observations situées l'une près de l'autre devraient, en moyenne, se ressembler davantage que si elles étaient plus éloignées l'une de l'autre.

Considérons un point de la **Carte Numérique des Altitudes**, il est repéré par le couple de coordonnées $X = (i, j)$. i et j sont respectivement la ligne et la colonne du point sur notre grille d'échantillonnage. Deux points sur cette grille sont d'autant plus susceptibles d'avoir des altitudes comparables qu'ils sont proches. La fonction de structure ou variogramme est alors définie par :

$$\gamma(\|h\|) = E [(z(X) - z(X + h))^2] \quad (2.2)$$

avec $h = (\Delta i, \Delta j)$

Où $E[\]$ représente l'espérance (moyenne), et h est une distance.

Nous effectuons le calcul du variogramme expérimental en considérant la norme suivante :

$$\|h\| = \max(\Delta i, \Delta j) \quad (2.3)$$

L'espérance (moyenne) des carrés des écarts des altitudes est alors calculée sur des cercles (au sens de la norme que nous venons de définir) de rayon $\|h\|$ et centrés en $z(X)$ (figure 2.5).

Les caractéristiques importantes du variogramme expérimental sont :

- Le comportement aux très courtes distances, qui est directement lié au caractère plus ou moins lisse de la variable (l'altitude des rugosités dans notre cas).

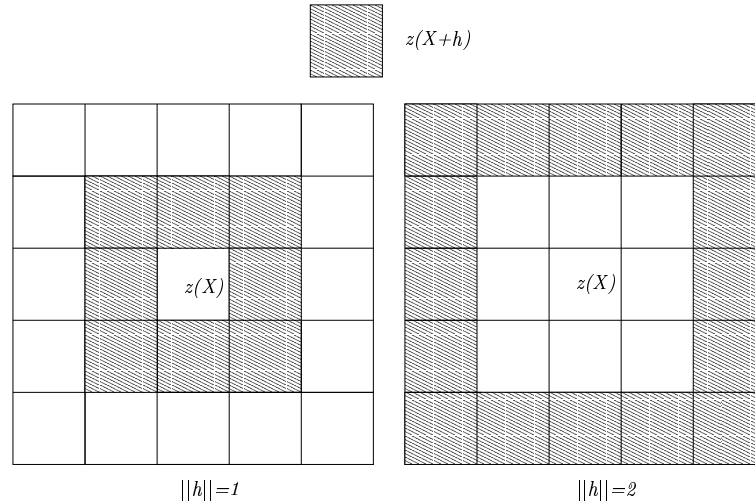


FIG. 2.5 : Le variogramme est calculé en considérant des cercles (au sens de la norme choisie) successifs de rayon de plus en plus grand.

- La portée, qui est la distance à laquelle le variogramme atteint un plateau. La portée n'existe pas toujours à l'échelle où a été réalisé l'échantillonnage. Lorsqu'elle existe, elle indique la distance à partir de laquelle il n'y a plus de corrélation.
- Le palier, qui est la valeur du plateau atteint par le variogramme (quand il existe), correspond à la variance de la variable.

Sur le variogramme expérimental que nous obtenons (figure 2.6), l'obtention d'un palier et le fait que la portée soit bien inférieure à la taille de notre échantillon nous assurent que celui-ci est suffisamment grand par rapport à la taille des aspérités pour être représentatif.

Au courte distance il n'est pas étonnant que nous ne trouvions pas d'effet de pépité, c'est à dire que le variogramme est nul à l'origine. L'effet de pépité peut avoir deux causes :

- La présence d'une structure dont l'échelle serait très inférieure à l'espacement des données (1 mm dans notre cas).
- L'influence des erreurs ou des incertitudes de mesure sur les valeurs

Mais comme nos mesures sont faites sur un support continu (le moulage de la surface), que notre maillage est suffisamment dense et le faisceau laser suffisamment fin, il est logique de ne pas trouver d'effet de pépité.

Nous pouvons définir une grandeur caractéristique des altitudes des rugosités à partir du variogramme. En effet, certains préfèrent définir l'écart type (σ_e) par rapport à un variogramme plutôt que par rapport à un histogramme. Ce choix est justifié lorsque l'expérimentateur dispose d'assez peu de points de mesure (le variogramme n'est pas sensible à une éventuelle erreur sur la moyenne), ce qui n'est pas notre cas. Ce faisant, considérant la valeur du palier de notre variogramme expérimental (figure 2.6), nous pouvons déduire la variance (σ_e^2) et l'écart type (σ_e) des altitudes des rugosités :

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &\simeq 1,9 \times 10^2 \text{ mm}^2 \\ \sigma_e &\simeq \mathbf{1,38 \text{ mm}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

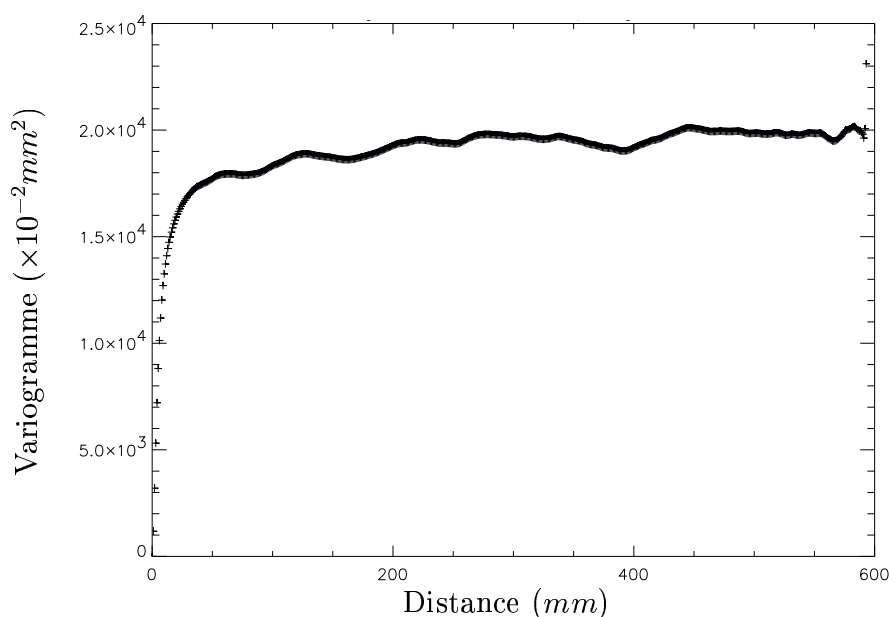


FIG. 2.6 : Variogramme expérimental de notre échantillon de surface.

De plus nous pouvons voir sur le variogramme des ondulations qui pourraient correspondre à une autre longueur caractéristique. Ces ondulations sont plus prononcées aux courtes distances, c'est parfaitement normal puisqu'elles sont le fait de l'étendue des aspérités dans le plan. La pseudo-période ($T \simeq 7,5 \text{ mm}$) de ces ondulations est facilement lisible sur le variogramme.

Cependant, cette dernière grandeur ne nous est pas d'une grande utilité pour la suite de la démarche. Elle caractérise un micro relief existant sur la surface mais dont l'extension horizontale ne justifie pas qu'il soit rangé dans la catégorie de la rugosité. Il est plutôt à considérer comme un défaut de planéité de l'échantillon susceptible d'avoir des conséquences plus ou moins sensibles sur l'écoulement. En revanche, l'écart type correspond à une grandeur caractéristique de l'altitude des rugosités, c'est plutôt lui qu'il faudra utiliser pour définir le taux d'inondation.

2.2.2.4 Histogramme des rugosités

Dans notre recherche d'une taille caractéristique des aspérités nous allons maintenant considérer l'histogramme des tailles des aspérités par rapport au plan moyen (figure 2.7). Comme nous le verrons plus longuement au moment de la définition du taux d'inondation, l'histogramme des rugosités nous permet de déterminer l'écart type des altitudes des rugosités qui nous permettra de définir une hauteur caractéristique des rugosités.

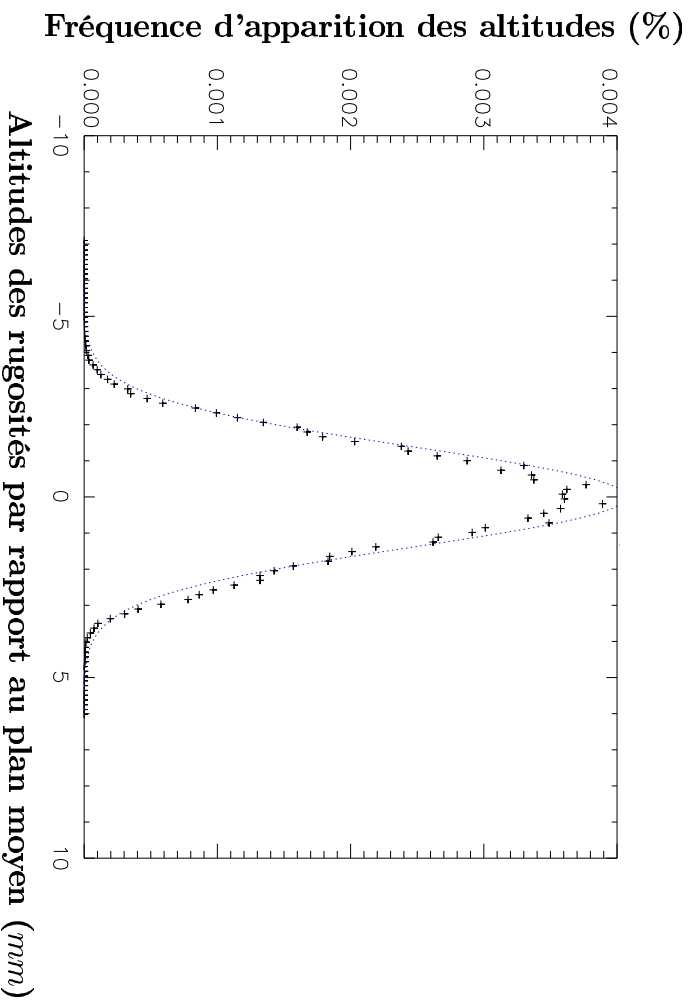


FIG. 2.7 : Histogrammes des rugosités : répartition des hauteurs des rugosités du moulage fait sur le parking de l'ENSHMG. La Distribution des tailles de rugosités suit une loi Gaussienne.

2.2.3 Les Cartes des Régions Submergées

Nous allons maintenant examiner ce que la connaissance de la morphologie de la surface étudiée et sa caractérisation statistique peuvent apporter à l'étude des écoulements qui peuvent s'y produire pour différents taux d'inondation. Dans ce but, nous proposons d'étendre au cas d'une surface rugueuse les concepts de fond et de miroir. En théorie des canaux prismatiques, le miroir désigne le plan de la surface libre pour un écoulement uniforme stationnaire, parallèle au fond du canal, lequel est un plan incliné sur l'horizontale. Dans le cas d'une surface rugueuse, ces deux plans sont tous deux parallèles au plan moyen de la surface défini plus haut. Le positionnement du fond pose un problème que nous avons déjà évoqué dans l'introduction de ce chapitre, qui sera traité par la suite. Le miroir est caractérisé par sa distance variable au fond, la hauteur d'eau. Sous le miroir se trouve le domaine submergé de la surface rugueuse dans lequel un écoulement est susceptible de se produire et dont le volume augmente avec la hauteur d'eau. Le **volume submergé** est limité par le plan du miroir, sur lequel il dessine une figure dont nous allons étudier en détail l'évolution lorsque la hauteur d'eau varie, que nous appellerons **Carte des Régions Submergées**.

Il faut noter que ce schéma élémentaire de l'inondation d'une surface rugueuse ne rend compte ni de la diversité ni de la complexité des phénomènes hydrauliques dont la surface peut être le siège, particulièrement dans les phases transitoires.

Ainsi par exemple, sur une surface rugueuse initialement sèche soumise à une pluie uniformément répartie, les cuvettes de la rugosité vont commencer à se remplir indépendamment les unes des autres avant que les niveaux d'eau soient suffisants pour amorcer

la mise en communication des cuvettes à grande échelle et l'apparition d'un écoulement général. Dans la première phase, le concept de miroir défini sur l'ensemble de la surface est inopérant. Sans parler de l'infiltration qui entre en concurrence avec le remplissage des cuvettes.

Dans les conditions qui seront celles de l'étude expérimentale qui fait l'objet du chapitre 5, on peut envisager qu'au bord supérieur d'un échantillon de surface initialement sec, on apporte un débit donné, qui va inonder la surface à partir du bord alimenté, donnant lieu à la propagation d'un front similaire à un front de percolation d'invasion, compte tenu du caractère aléatoire de la rugosité (Darboux 1999). Une fois le régime stationnaire établi, tout changement du débit d'alimentation donnera lieu à une nouvelle propagation de front. Le concept de miroir est également inadéquat dans ce cas.

Le schéma du miroir n'est donc relativement opérationnel que dans le cas d'un écoulement stationnaire. Même dans ce cas, il reste une simplification car il ne prend pas en compte l'effet de la dynamique de l'écoulement sur la forme de la surface libre, sur laquelle se répercutera de façon plus ou moins importante la rugosité de la surface. Dans la suite, nous distinguerons le miroir qui est plan, et la surface libre qui présente des fluctuations topographiques autour du miroir.

Considérant des taux d'inondation croissants de la surface, les chemins disponibles dans le volume submergé pour la circulation du fluide évoluent. Intuitivement, pour les faibles niveaux du miroir, assez peu de chemins sont empruntables par le fluide pour traverser la surface de part en part. Au fur et à mesure que le miroir s'élève, le fluide peut emprunter de plus en plus de chemins différents qui s'interconnectent de plus en plus, jusqu'à ne plus former qu'un unique canal quand la surface est entièrement inondée.

Nous allons caractériser ces différents stades de l'inondation progressive d'une surface en définissant pour chaque niveau du miroir une **Carte des Régions Submergées** (figure 2.9).

Numériquement, l'échantillon de surface est assimilé à une matrice dont chaque élément a pour valeur l'altitude de la rugosité qui lui correspond sur la grille de mesure à partir de laquelle nous avons défini la **Carte Numérique des Altitudes : C.N.A.**

$$CNA_{ij} = z(i, j)$$

Pour générer la **Carte des Régions Submergées (C.R.S.)**, pour un niveau donné du miroir, on explore la carte numérique des altitudes pixel par pixel afin de distinguer les points situés respectivement au dessus et au dessous du miroir.

- Si le point est en dessous du niveau de la surface libre nous le codons en noir en posant dans la **Carte des Régions Submergées** : $CRS_{ij} = 255$
- Si le point est en dessus du niveau de la surface libre nous posons : $CRS_{ij} = 0$

Les valeurs 255 et 0 correspondent respectivement au noir et au blanc dans le codage des images BMP 8 bits.



FIG. 2.8 : *Le miroir est défini comme un plan parallèle au plan moyen des rugosités. En faisant varier le niveau du miroir depuis le point plus bas jusqu'au plus haut, nous obtenons la série des Cartes des Régions Submergées.*

La matrice ainsi définie ne contient pas les altitudes des points mais une information binaire (255 ou 0) sur la submersion ou l'émergence de chaque point de la **Carte Numérique des Altitudes**. De cette manière, sur les **Cartes des Régions Submergées**, les parties noires correspondent aux parties submergées de la surface et les parties blanches aux parties qui émergent encore pour le niveau de miroir considéré. Pour chaque niveau de miroir, les chemins potentiellement empruntables par le fluide, c'est à dire les parties suffisamment « basses » du domaine sont donc incluses dans la **Carte des Régions Submergées**.

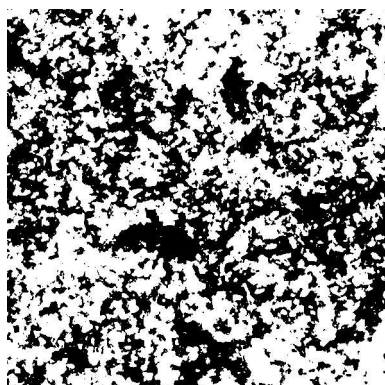
Toutes les **Cartes des Régions Submergées** sont au format bmp (Annexe A). Nous avons choisi de travailler avec ce format car il est le plus simple à manipuler.

2.2.4 *Le degré de connexion de la Carte des Régions Submergées et le seuil de percolation*

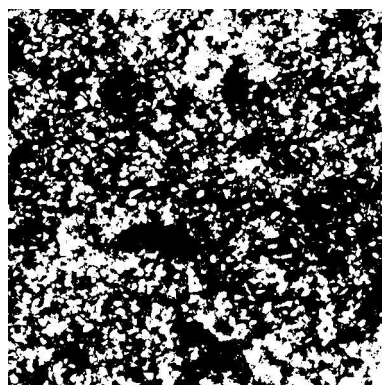
Si l'on considère la série des **Cartes des Régions Submergées**, il apparaît la notion de percolation. En effet, pour les niveaux de miroir les plus bas il n'existe aucun chemin connecté permettant de passer du bord amont de l'image au bord aval. C'est à dire qu'il n'y a pas sur l'image de moyen de passer du bord amont au bord aval de celle-ci en restant toujours sur les parties inondées.

Pour mettre en évidence le seuil de percolation, sur de nouvelles cartes nous avons représenté les seules parties inondées reliées aux bords amont **ET** aval de l'image (figure 2.11). Ces nouvelles cartes sont obtenues très simplement à partir des **Cartes des Régions Submergées** brutes.

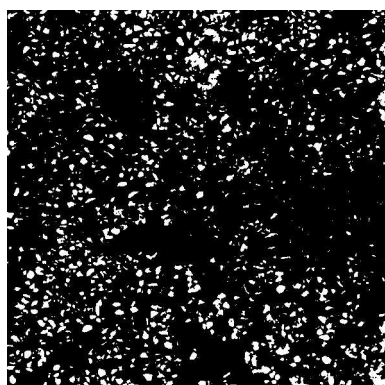
Lors d'un premier balayage de l'image, partant des pixels de la première ligne nous contrôlons leur appartenance à une partie submergée. Si tel est le cas nous ajoutons une constante α_1 à leurs valeurs (255) et nous inspectons leurs voisinages pour détecter les éventuels pixels voisins connectés. Cette même procédure est relancée pour chaque pixel connecté détecté. Cet algorithme est programmé de manière récursive ce qui nous permet de progresser de proche en proche dans la partie submergée, tout en nous assurant que le



(a) 0,25 mm en dessous du plan moyen



(b) 0,5 mm en dessus du plan moyen



(c) 1,75 mm en dessus du plan moyen



(d) 3,25 mm en dessus du plan moyen

FIG. 2.9 : *Carte des Régions Submergées pour différents niveaux de miroir. Les parties noires correspondent aux parties submergées de la surface, c'est à dire aux chemins empruntables par le fluide.*

pixel considéré n'a pas déjà été pris en compte (figure 2.10).

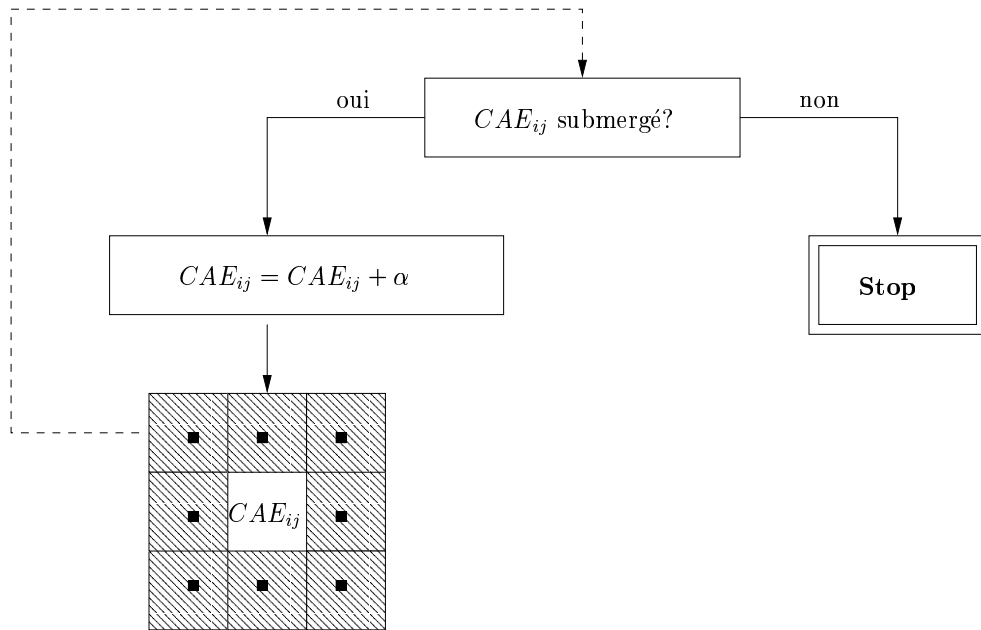


FIG. 2.10 : *Algorithme de détection des parties des Cartes des régions Submergées connectées aux deux bords de l'image. Pour chaque pixel connecté détecté nous inspectons son voisinage afin de détecter tous les pixels connectés de proche en proche.*

Dans un deuxième temps on relance cette procédure mais en partant des pixels de la dernière ligne de l'image et avec une autre constante α_2 .

En résumé :

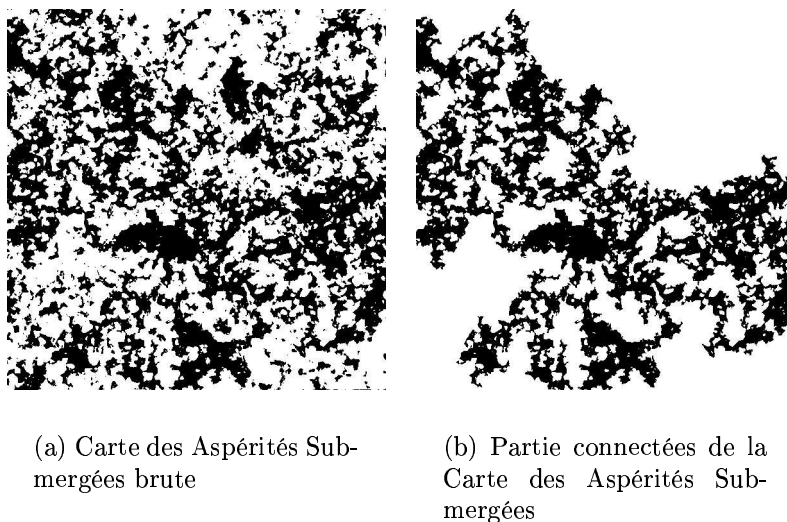
- Si $CAS_{ij} = 0$ le point n'est pas inondé.
- Si $CAS_{ij} = 255 + \alpha_1$ le point est inondé mais relié au seul bord amont de l'image.
- Si $CAS_{ij} = 255 + \alpha_2$ le point est inondé mais relié au seul bord aval de l'image.
- Si $CAS_{ij} = 255 + \alpha_1 + \alpha_2$ le point est inondé et relié aux deux bords de l'image.

Finalement, sur les nouvelles **Cartes des Régions Submergées** seuls les pixels auxquels on a ajouté $\alpha_1 + \alpha_2$ sont représentés en noir.

La première image pour laquelle il existe une partie inondée connectée aux bords amont et aval correspond au niveau de miroir de percolation. Il est évident que seuls les niveaux de miroir supérieurs au niveau de percolation nous intéressent.

2.2.5 Définition du taux d'inondation

Nous sommes maintenant en possession des éléments qui nous permettent de régler deux problèmes en suspens pour la définition d'un taux d'inondation qui soit autant que possible cohérent avec les définitions qu'on trouve dans la littérature :



(a) Carte des Aspérités Submergées brute

(b) Partie connectées de la Carte des Aspérités Submergées

FIG. 2.11 : *Carte des Régions Submergées : 0,25mm en dessous du plan moyen. Sur la Carte des régions Submergées brute nous supprimons toutes les parties inondées non connectées aux deux bords (amont et aval de l'image.)*

- la position du « fond » de la surface rugueuse, plan de référence pour la définition de la hauteur d'eau (d) d'un écoulement ayant lieu dans le domaine submergé sous un miroir donné. Dans la littérature, le fond est généralement prédéfini et les aspérités sont surajoutées, ce qui n'est pas le cas pour les surfaces naturelles.

- la taille typique des objets rugueux, souvent notée k , qui permet d'adimensionnaliser la hauteur d'eau et de définir le taux d'inondation Λ .

L'étude de la connexion du domaine submergé nous a montré qu'aucun écoulement n'est possible tant que le miroir n'a pas atteint le niveau du seuil de percolation. Ce niveau s'impose donc comme référence pour repérer le miroir et la hauteur d'eau. On sera ainsi assuré, dans la recherche de la relation qui lie le débit à la pente et à la hauteur d'eau, que le débit s'annulera en même temps que la hauteur d'eau. Cette convention permet également d'assurer la cohérence avec les travaux de la littérature qui considèrent un fond plan prédéfini.

Ce choix n'est cependant pas sans inconvénient. Au stade qui précède immédiatement le seuil de percolation, le volume submergé n'est pas nul, mais il n'est pas connecté à grande échelle. Aux très faibles hauteurs d'eau, ce volume non négligeable ne participe pas à l'écoulement. A mesure que le niveau d'eau s'élève, d'une part le volume des régions submergées connectées ou non continue à croître, d'autre part, des régions de plus en plus nombreuses se rattachent au domaine connecté. Assez rapidement, la totalité du volume submergé sera connecté. Le volume non disponible pour l'écoulement au seuil de percolation est donc progressivement réintégré dans le domaine d'écoulement. Le volume participant à l'écoulement va donc présenter une croissance critique au voisinage du seuil, comme le décrit la théorie de la percolation (? , Sahini 1994), pour se confondre en fin d'inondation avec le volume submergé. Les conséquences de ce phénomène sur les para-

2.3. Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon

mètres hydrauliques de la surface seront examinées au paragraphe suivant.

En ce qui concerne la hauteur typique de la rugosité, il est clair que l'histogramme de la **Carte Numérique des Altitudes** (figure 2.7) et l'écart-type qui en découle sont les éléments de base. La taille typique de la rugosité doit être choisie de façon que le rapport d'inondation soit proche de l'unité quand la quasi totalité de la surface est submergée. Le choix est en partie conditionné par celui du fond du canal. L'histogramme est centré sur le plan moyen, tandis que le fond est considéré comme situé au niveau de percolation. Or celui-ci est très proche du plan moyen, précisément à $0,25 \text{ mm}$ au dessous du plan moyen, tandis que l'écart-type est $\sigma = 1,38 \text{ mm}$. En choisissant 2σ comme hauteur typique de la rugosité, on voit que lorsque $\Lambda = 1$, environ 98% de la surface du miroir est dans la région submergée. Cela est le fait du caractère gaussien de l'histogramme des altitudes des rugosités.

Cependant, cette définition du taux d'inondation reste discutable. Lawrence a fait des expériences sur des surfaces artificielles où les rugosités étaient toutes de la même taille. Ainsi, lors de ses expériences, lorsque $\Lambda = 1$, toutes les rugosités sont recouvertes. Dans notre cas, il reste des rugosités émergées.

Il est vraisemblable, que considérant la définition du taux d'inondation que nous venons de donner, le passage du régime d'inondation partielle à celui d'inondation marginale se fera un peu avant que le taux d'inondation ne soit égal à l'unité. En effet, plus on se rapproche de $\Lambda = 1$ moins les rugosités émergées influencent l'écoulement. Il n'est certainement pas nécessaire que toutes les rugosités soient noyées pour que l'on passe en régime d'inondation marginale.

2.3 Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon

Avant d'aller plus loin dans l'analyse morphologique du domaine d'écoulement, nous disposons dès l'étape actuelle de suffisamment d'informations pour déterminer les paramètres hydrauliques de la surface et élaborer un modèle élémentaire d'écoulement. Il s'agit de proposer une première relation entre le débit en régime stationnaire, le taux d'inondation et la pente de la surface, et d'estimer le coefficient de Darcy Weisbach qui en découle, en vue de comparer ultérieurement ces estimations aux prévisions des modèles numériques plus élaborés (chapitre 3).

2.3.1 Paramètres hydrauliques de la surface

Pour l'étude expérimentale de la résistance hydraulique à l'écoulement, nos prédécesseurs (Takken et Govers 2000; Abrahams, Parsons et Luk 1986) ont utilisé les paramètres hydrauliques (section mouillée (S), périmètre mouillé (P) et diamètre hydraulique (D)) mesurés sur des sections transverses de leur échantillon, pour effectuer leur calcul. Notre démarche sera sensiblement la même. Afin d'effectuer une première étude analy-

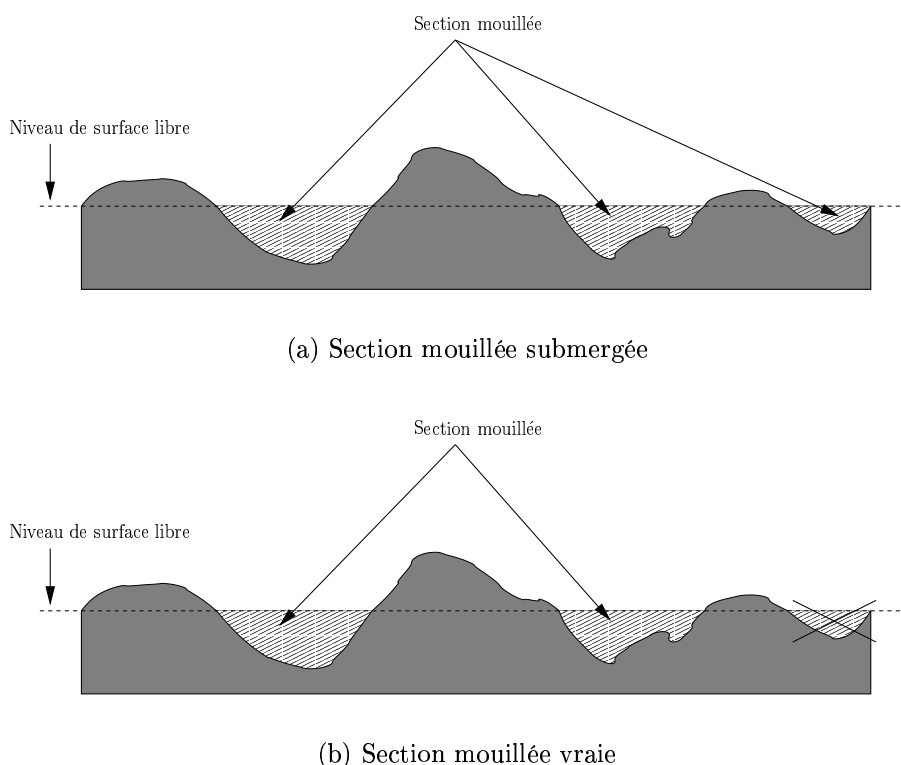


FIG. 2.12 : Lors du calcul de la section mouillée, toute la section mouillée submergée ne participe pas réellement à l'écoulement. Les squelettes nous permettent de distinguer puis d'éliminer les parties de cette section qui font en fait partie de zones isolées. La même distinction peut être faite pour le calcul du périmètre mouillé.

tique simple nous allons déterminer les paramètres hydrauliques de notre échantillon de surface pour les différentes hauteurs d'eau.

Les paramètres hydrauliques de l'échantillon étudié à définir en fonction du taux d'inondation Λ sont la section d'écoulement $S(\Lambda)$, le périmètre mouillé $P(\Lambda)$ (miroir non compris) (figure 2.12) et le diamètre hydraulique $D(\Lambda)$, lié aux deux premiers par :

$$D = \frac{4S}{P} \quad (2.5)$$

Dans le cas d'un échantillon dont la largeur L est suffisamment grande, la section et le périmètre sont proportionnels à la largeur, on peut donc caractériser de façon plus générale la rugosité de la surface étudiée en s'affranchissant de la largeur de l'échantillon particulier considéré, en définissant une **section spécifique** en mètres et un **périmètre spécifique** sans unités :

$$s = \frac{S}{L} \quad \text{et} \quad p = \frac{P}{L} \quad (2.6)$$

2.3. Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon

Pour calculer les paramètres hydrauliques de la surface pour un taux d'inondation donné nous avons choisi de les calculer sur toutes les lignes parallèles aux bords amont et aval définis au paragraphe 2.2.4 de la **Carte Numérique des Altitudes** (paragraphe 2.2.2) et d'en faire la moyenne. Nous présentons ici différentes méthodes de calcul des paramètres hydrauliques de la surface, qui diffèrent par le degré de prise en compte de ce que nous savons du volume submergé.

- La première méthode ignore tout de la rugosité, considérant le niveau du miroir (d) par rapport au plan de percolation et la section mouillée comme un rectangle de hauteur d et aussi large que l'échantillon. Dans ce cas nous parlerons de paramètres hydrauliques équivalents, car c'est ainsi qu'est représentée la lame d'eau en écoulement dans la modélisation du ruissellement à grande échelle selon les équations de Saint Venant, telle qu'elle est envisagée dans la plupart des travaux portant sur le coefficient de Darcy Weisbach (Lawrence 2000). Ce point mérite une discussion approfondie, qui sera abordée au chapitre 6. Pour cette section d'écoulement fictive, les paramètres hydrauliques sont les suivants, avec l'hypothèse de grande largeur :

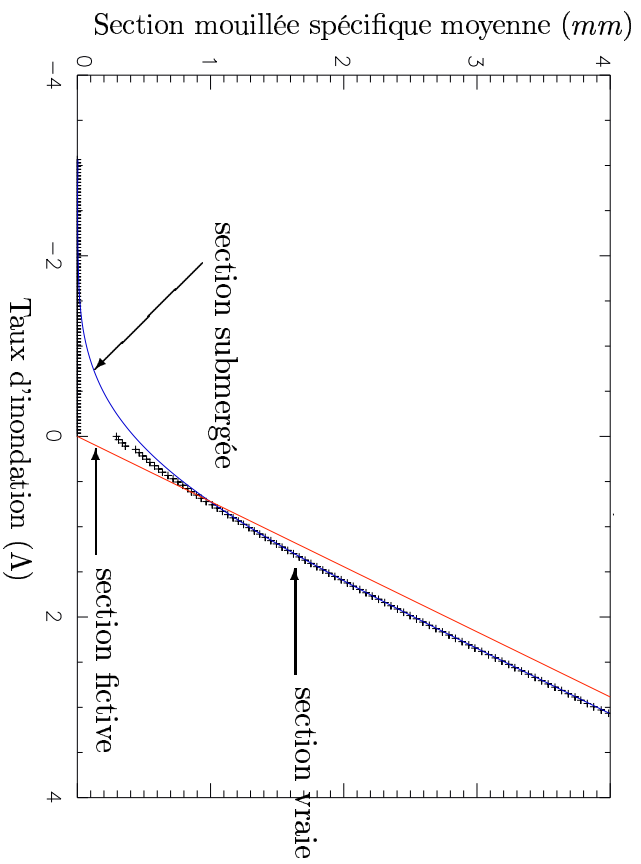
$$\begin{aligned} S &= Ld & s &= d \\ P &= L & p &= 1 \\ D_H &= 4d \end{aligned} \tag{2.7}$$

- La seconde méthode pour obtenir les paramètres hydrauliques de la surface consiste à les calculer en utilisant uniquement le niveau du miroir et la **Carte Numérique des Altitudes** (figure 2.12(a)). La section mouillée est alors calculée en utilisant la méthode des trapèzes et le périmètre mouillé par une simple interpolation linéaire entre chaque points de la grille de la **Carte Numérique des Altitudes**.
- Enfin, nous pouvons calculer la section mouillée en ne prenant en compte sur chaque ligne que la partie de la section qui appartient aux parties connectées de la **Carte des régions Submergées** correspondante. Nous parlerons alors de paramètres hydrauliques vrais en ce sens qu'il prennent en compte au mieux la géométrie réelle du volume à travers lequel l'écoulement est susceptible d'avoir lieu. Ce sont donc ces paramètres hydrauliques que nous allons prendre en compte dans notre modèle hydraulique élémentaire.

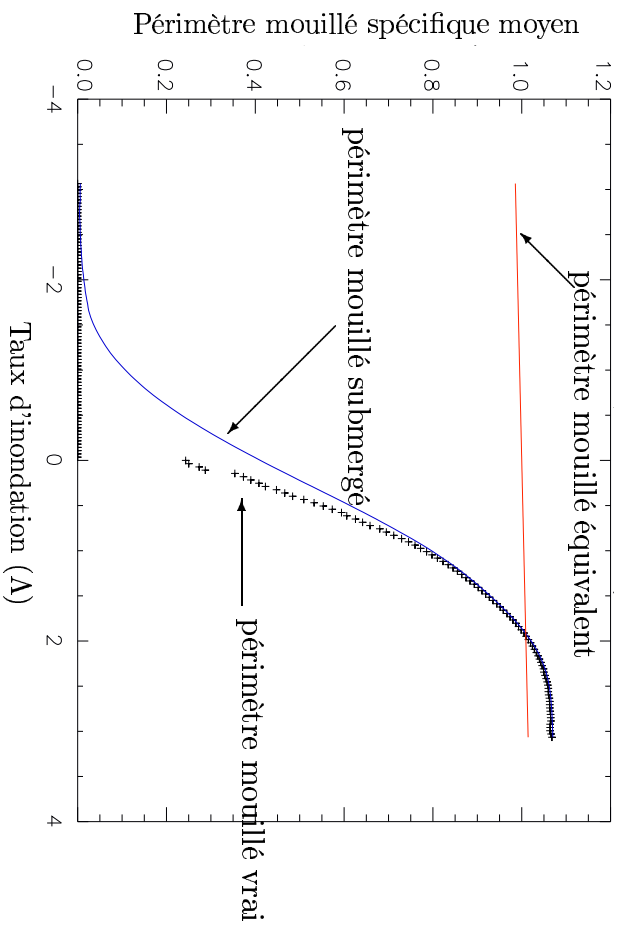
Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 2.13 en fonction du taux d'inondation.

Sur les différentes courbes de la figure 2.13 sont représentés les paramètres correspondants aux trois sections que nous venons de définir, que nous appellerons respectivement fictive, submergée, et réelle. Sur ces courbes et notamment sur l'évolution des sections spécifiques, nous distinguons parfaitement le seuil de percolation situé à $\Lambda = 0$.

La section submergée commence à croître avant le stade de percolation, tandis que la section fictive et la section réelle restent nulles. Au seuil de percolation, on observe une discontinuité de la section réelle. Ceci provient du fait que dès qu'apparaît un premier chemin connecté dans le volume submergé, tout le volume antérieurement accumulé dans les dépressions qui composent ce chemin passe brutalement dans le domaine connecté.

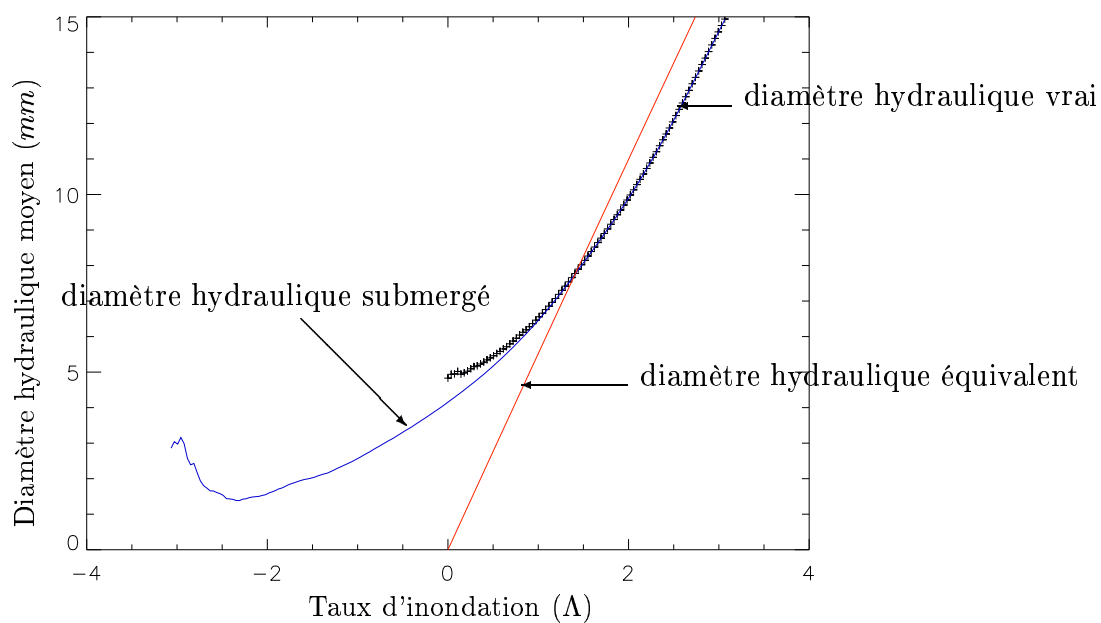


(a) Sections mouillées spécifiques moyennes



(b) Périmètres mouillés spécifiques moyen

2.3. Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon



(d) Diamètres hydrauliques moyens

FIG. 2.13 : Il y a plusieurs manières de calculer les différents paramètres hydrauliques de notre surface. Ces différentes manières diffèrent par leur degré de prise en compte de notre connaissance du volume submergé.

Après le seuil de percolation, au fur et à mesure que les différents chemins s'interconnectent, il y a de moins en moins de parties submergées de la surface qui ne participent pas à l'écoulement. Aux forts taux d'inondation, il n'y a plus de différence entre la section submergée et la section d'écoulement vraie, ainsi qu'entre les paramètres hydrauliques correspondants. Cependant, un décalage constant persiste entre la section spécifique fictive qui s'identifie à la hauteur fictive d dès le seuil de percolation, et la section réelle. Ce décalage correspond au volume situé au dessous du plan de percolation qui n'est jamais comptabilisé dans la section fictive et au contraire se rattache progressivement à la section réelle à mesure que l'inondation progresse. La valeur asymptotique du périmètre mouillé spécifique (légèrement supérieure à 1) est, quant à elle, d'une nature différente : il s'agit d'un facteur de tortuosité associé à la rugosité de la surface.

2.3.2 Modélisation élémentaire du débit

L'hypothèse simplificatrice fondamentale pour cette première approche élémentaire est que l'écoulement sur la surface rugueuse que nous venons de caractériser est identique à l'écoulement uniforme dans un canal prismatique qui aurait les mêmes caractéristiques hydrauliques (section mouillée, périmètre mouillé et rayon hydraulique). Il est clair que ce qui est fondamentalement négligé dans cette première approche, c'est le caractère tortueux du volume submergé mis en évidence par les **Cartes des Régions Submergées**, et les importantes conséquences qu'il a certainement sur l'écoulement et la relation entre débit, pente et hauteur d'eau.

Pour cette étude nous avons considéré les relations suivantes :

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (2.8)$$

$$j = f(Re) \frac{v^2}{2gD} \quad (2.9)$$

Où v est la vitesse de l'écoulement supposé uniforme à travers la section spécifique réelle s , D le diamètre hydraulique de l'échantillon de surface, g l'accélération de la pesanteur, j la pente de la surface, Re le nombre de Reynolds et $f(Re)$ le coefficient de Darcy-Weisbach.

Afin d'obtenir une équation dont la seule inconnue soit Re , éliminons la vitesse entre ces deux équations :

$$j = Re^2 f(Re) \frac{\nu^2}{2gD^3} \quad (2.10)$$

Partant de cette relation et considérant les relations $f(Re)$ disponibles, nous pouvons obtenir le nombre de Reynolds en fonction du diamètre hydraulique et de la pente.

Dans le cas laminaire nous utilisons la formule de Poiseuille $\left(f = \frac{64}{Re}\right)$, pour ce qui est du cas turbulent, dans un souci de simplicité, nous adoptons la formule de Blasius

2.3. Étude analytique élémentaire de la perte de charge sur l'échantillon

$\left(f = \frac{0,316}{Re^{1/4}}\right)$. Nous obtenons alors les expressions suivantes, dans lesquelles le diamètre hydraulique est une fonction du taux d'inondation (figure 2.15) :

– Dans le cas laminaire :

$$Re = \frac{gD^3j}{32\nu^2} \quad (2.11)$$

– Dans le cas turbulent :

$$Re = \left(\frac{2gD^3}{0,316\nu^2j}\right)^{4/7} \quad (2.12)$$

Dans la pratique, étant donnés un taux d'inondation et une pente, le nombre de Reynolds est calculé selon chacune de ces formules, et seul est retenu celui qui convient selon sa valeur par rapport à 2000. A noter que dans certains cas, aucune des deux valeurs n'est acceptable du fait que l'écoulement se situe dans la région de transition entre les régimes laminaire et turbulent. De là proviennent les lacunes dans les graphiques représentant les résultats.

Les résultats les plus significatifs de ce calcul sont présentés sur les figures 2.14 à 2.19, tous représentés en fonction du taux d'inondation.

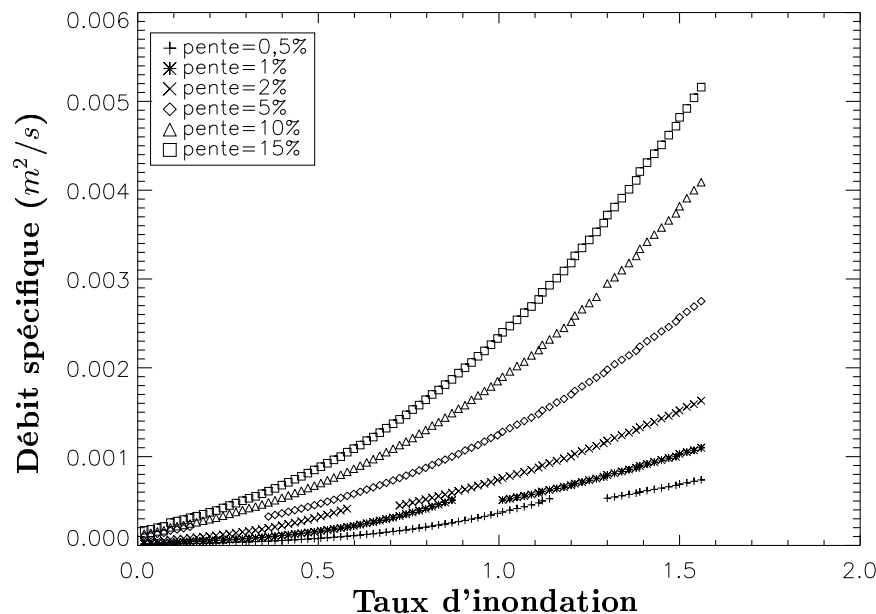


FIG. 2.14 : Représentation des débits spécifiques en fonction du taux d'inondation. La discontinuité des courbes est le fait du passage d'un régime laminaire à un régime turbulent.

Le débit spécifique (figure 2.14) présente une croissance d'allure parabolique en fonction du taux d'inondation. Les courbes se distinguent nettement selon la pente.

Le nombre de Reynolds calculé avec les paramètres hydrauliques vrais (figure 2.15) indique la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement uniforme supposé. Il est toujours

croissant avec le taux d'inondation.

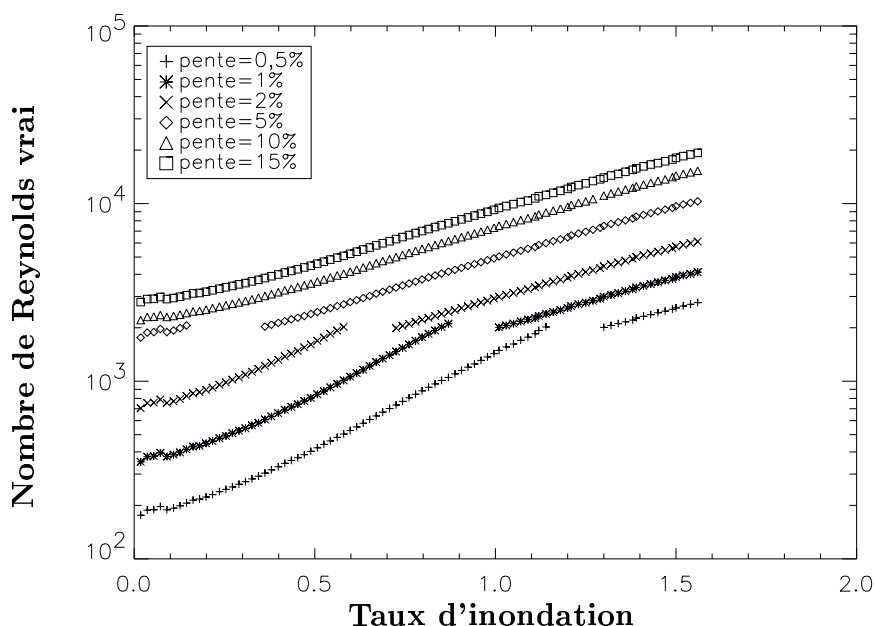


FIG. 2.15 : Nombre de Reynolds vrai en fonction du taux d'inondation. Plus la pente est forte plus la transition laminaire turbulent se fait pour des taux d'inondation faible. Pour les pentes les plus fortes, nous n'observons plus de régime laminaire.

Pour les pentes inférieures à 10%, le régime présente une transition turbulente pour des taux d'inondation d'autant plus précoces que la pente est plus forte. Pour les plus grandes pentes, le régime est turbulent dès le taux d'inondation de percolation. Le nombre de Froude "vrai" présenté figure 2.16, dont la position par rapport à l'unité indique le caractère sub ou supercritique de l'écoulement, est calculé selon la définition qui s'applique aux sections non rectangulaires :

$$Fr = \frac{v^2 L_m}{gS} \quad (2.13)$$

où la vitesse moyenne v est naturellement relative à la section d'écoulement vraie S , L_m est la largeur au miroir (s et l_m étant les grandeurs spécifiques correspondantes). L_m est donnée par la dérivée de la section réelle d'écoulement par rapport à la hauteur d'eau :

$$L_m = \frac{dS}{dd} \quad (2.14)$$

Ce nombre de Froude est ici calculé en pratique en fonction du nombre de Reynolds vrai en explicitant la vitesse en fonction de celui-ci :

$$Fr = \frac{\nu^2 l}{g} \frac{Re^2}{D^2 S} \quad (2.15)$$

Nous observons que dès que la pente dépasse 5 pour mille, l'écoulement uniforme considéré est supercritique pour toutes les hauteurs d'eau. Un tel écoulement serait concevable dans un canal véritablement prismatique, mais on sait que dans les canaux naturels à fond irrégulier comme les torrents de montagne, on assiste en fait à la succession sur de

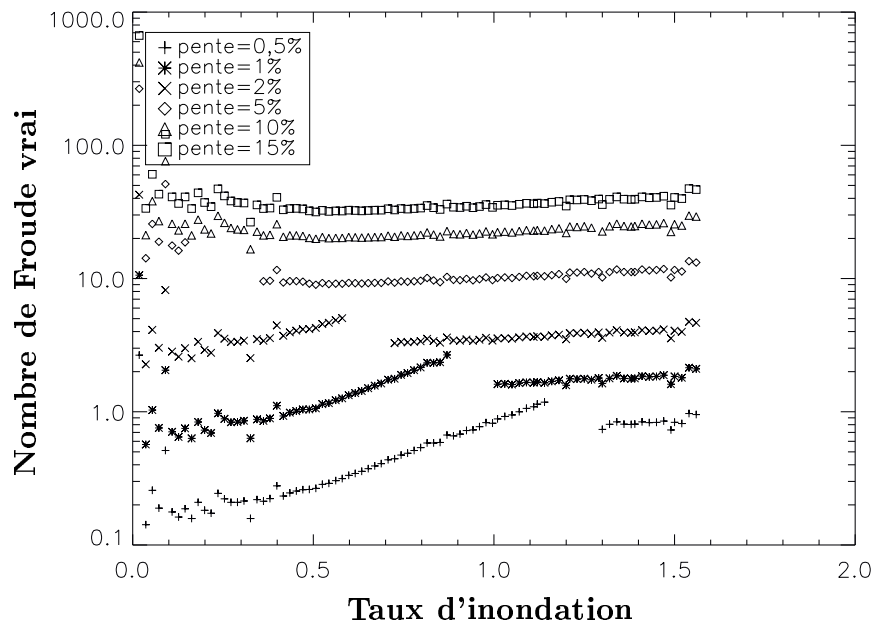


FIG. 2.16 : Nombre de Froude vrai en fonction du taux d'inondation. Pour les pentes les plus faibles nous observons le passage d'un régime sub-critique à un régime super-critique. Mais très rapidement, nous n'observons plus de régime sub-critique.

très courtes distances de portions d'écoulement supercritique et subcritique séparés par des perturbations du type ressaut hydraulique. Il est probable que c'est ce qui se produira dans l'écoulement réel sur la surface rugueuse considérée, tant que le taux d'inondation n'est pas suffisant pour que le domaine d'écoulement puisse être traité comme un canal à fond plan dont la rugosité est petite par rapport à la hauteur d'eau. Ces remarques qui seront confirmées et explicitées au chapitre 3 mettent en évidence les limites du modèle élémentaire proposé ici.

La représentation du coefficient de frottement en fonction du taux d'inondation (fig 2.17) apporte peu d'informations. Le modèle étant fondé sur la friction, le coefficient de Darcy Weisbach est lié au nombre de Reynolds par les relations de Poiseuille et Blasius. Le nombre de Reynolds n'étant pas lié au taux d'inondation, le graphique obtenu est peu significatif. Il ne confirme pas en tout cas, dans le domaine de l'inondation partielle, la tendance à la croissance du coefficient de frottement avec le taux d'inondation proposée par Lawrence (Lawrence 1997, Lawrence 2000).

Les figures 2.18 et 2.19 représentent les nombres de Reynolds et Froude ainsi que le coefficient de Darcy Weisbach, tous relatifs à la section fictive rectangulaire (Ld) et aux paramètres hydrauliques équivalents correspondants, notamment le diamètre hydraulique ($D = 4d$). Le principal changement avec ce nouveau mode de calcul réside dans la vitesse moyenne, qui est sous évaluée, d'autant plus fortement que le taux d'inondation est plus petit. Comme on pouvait le prévoir, c'est surtout la région des faibles taux d'inondation qui est affectée, avec des Reynolds équivalents fortement sous estimés. Le coefficient de frottement équivalent (qui est celui qui devrait être pris en compte dans l'application des équations de Saint Venant à grande échelle) présente une décroissance plus accentuée avec le taux d'inondation, en comparaison du comportement du coefficient "réel". Comme le coefficient "réel", il n'est pas fonction univoque du taux d'inondation, les écarts selon la

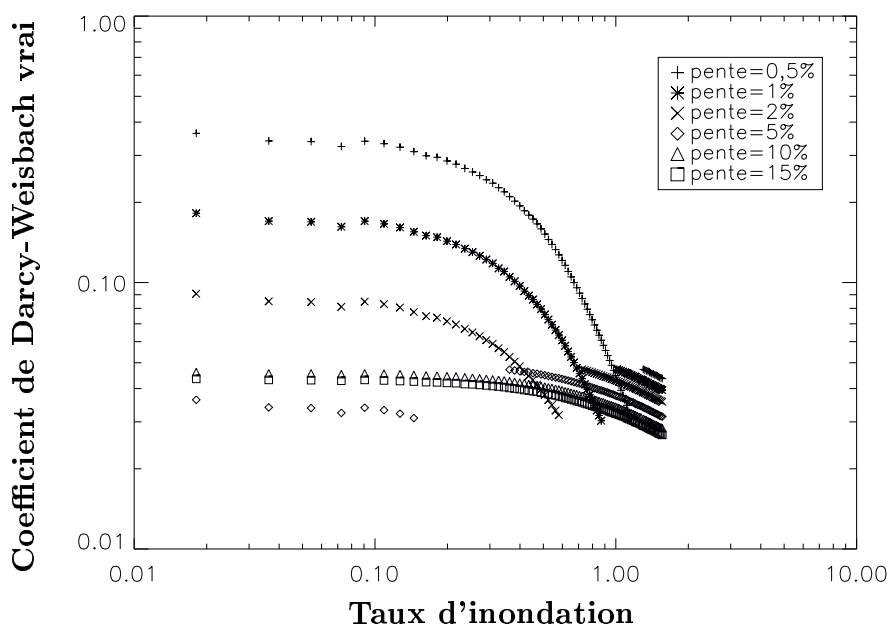


FIG. 2.17 : Coefficient de Darcy-Weisbach calculé avec les paramètres hydrauliques vrais.

pende restent importants.

Enfin, la figure 2.20 représente le coefficient de Darcy-Weisbach équivalent en fonction du nombre de Reynolds équivalent. C'est une indication sur l'erreur qui serait commise par le modélisateur qui ignorerait la rugosité de la paroi et appliquerait les équations de Saint-Venant avec le coefficient de Darcy-Weisbach standard pour l'écoulement laminaire ou turbulent lisse. Pour chacune des pentes considérées, le comportement du coefficient équivalent tend à se rapprocher du coefficient standard aux forts nombres de Reynolds équivalents, qui sont atteints aux forts taux d'inondation.

De cette étude élémentaire découlent deux principales conclusions, qui seront éclairées et développées par la suite :

- Le caractère généralement torrentiel de l'écoulement supposé uniforme conduit à mettre fortement en doute la validité d'une telle hypothèse pour représenter l'écoulement réel sur une surface rugueuse dans le domaine de l'inondation partielle et même marginale.
- L'utilisation des équations de Saint Venant, impliquant de fait la simplification d'une section d'écoulement équivalente rectangulaire est également fortement sujette à caution dans le domaine de l'inondation partielle, surtout si on emploie pour le coefficient de Darcy Weisbach les formulations classiques. La prise en compte de la morphologie réelle de la section d'écoulement a en effet une influence déterminante sur tous les paramètres hydrauliques et notamment la vitesse moyenne d'écoulement et le coefficient de Darcy-Weisbach.

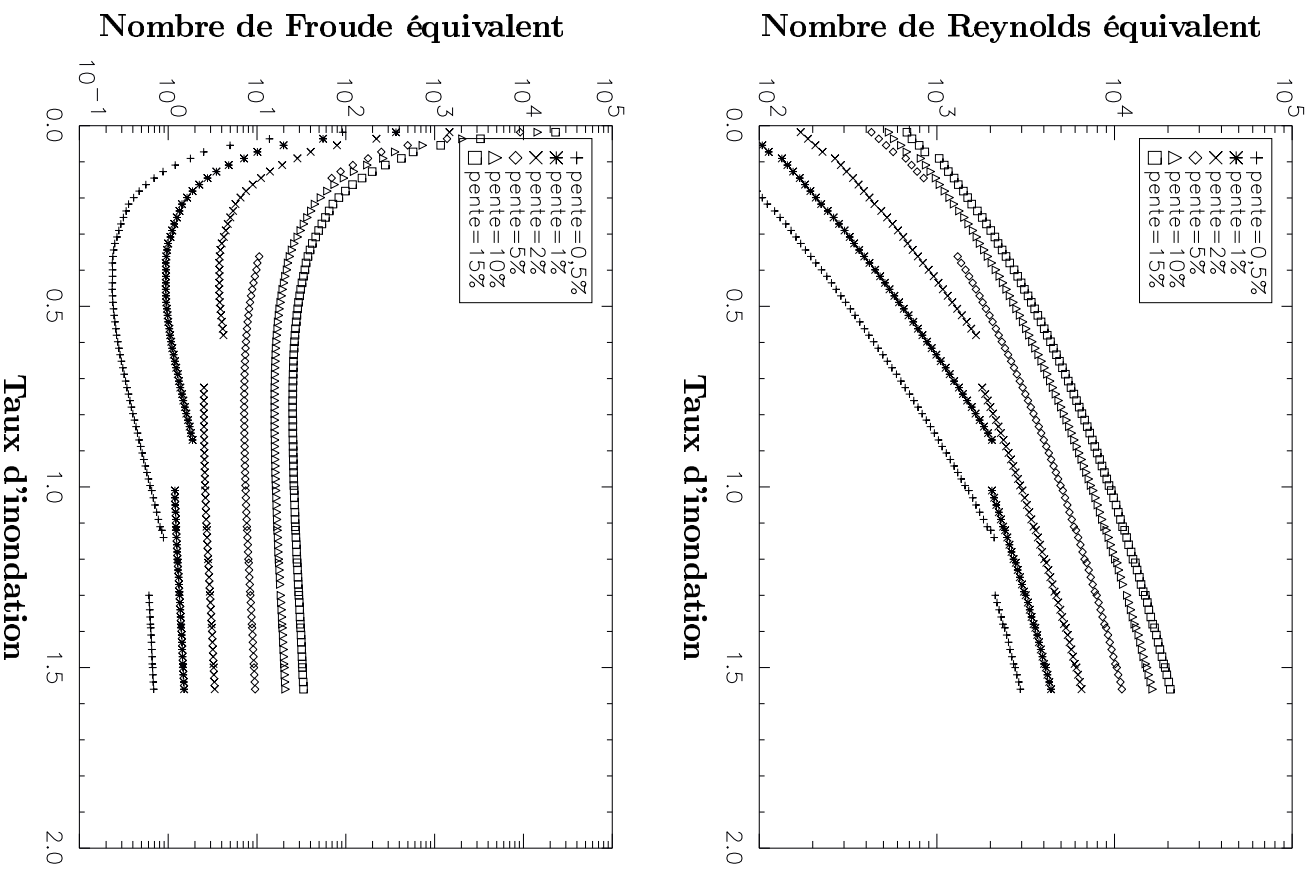


FIG. 2-18 : Nombre de Reynolds et nombre de Froude équivalents en fonction du taux d'inondation.

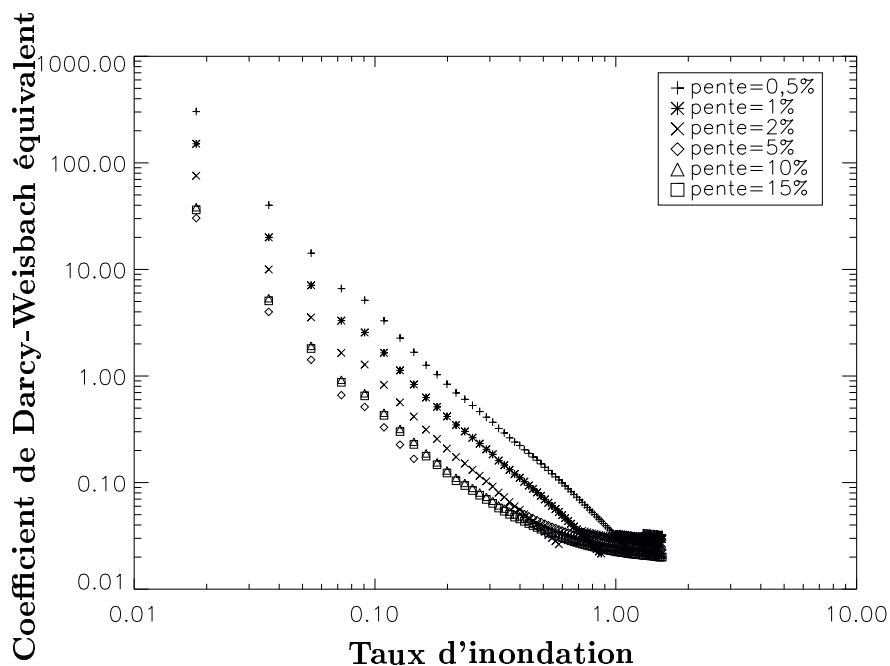


FIG. 2.19 : Coefficient de Darcy-Weisbach calculé avec les paramètres hydrauliques équivalents.

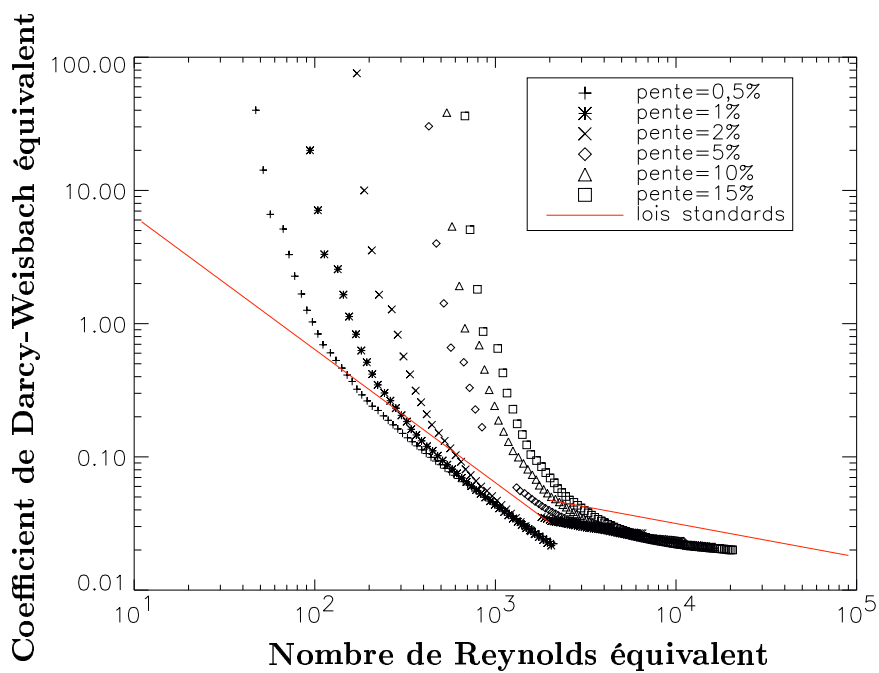


FIG. 2.20 : Coefficient de Darcy-Weisbach équivalent en fonction du nombre de Reynolds équivalent.

2.4 Des réseaux hydrauliques déterminés par la micro-rugosité

En utilisant la théorie de la géométrie discrète, l'analyse d'image (Montanvert et Chassery 1991 ; Coster et Chermant 1989 ; Gonzales et Wood 1992) permet de squelettiser une image. Les squelettes ont beaucoup été utilisés dans l'étude des transferts dans les milieux poreux (Laurent et Frendo-Rosso 1992 ; Pieritz 1992), nous allons les utiliser pour étudier l'écoulement d'un bord à l'autre de l'échantillon de surface. Le squelette extrait d'une **Carte des Régions Submergées** peut être interprété comme un réseau tracé sur le miroir qui contourne les aspérités émergées. Dans la modélisation du chapitre 3, il sera considéré comme un ensemble de lignes de courant indicatives de l'écoulement sous-jacent dans le volume submergé.

Le principe de notre démarche est de considérer un réseau hydraulique évoluant avec le niveau de surface libre. Les algorithmes d'analyse d'image vont nous permettre de définir la succession de réseaux correspondant à l'inondation progressive de la surface. C'est donc en squelettisant les **Carte des Régions Submergées** que nous allons construire les réseaux correspondants aux différents niveaux du miroir.

2.4.1 Analyse d'image, Géométrie discrète et squelettisation

La géométrie discrète considère une image comme la représentation discrète d'un objet continu (notion de pixels). Il faut donc adapter la géométrie euclidienne à l'espace discret \mathbb{Z}^2 et assurer une certaine cohérence entre les définitions données dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{Z}^2 (Montanvert et Chassery 1991). Dans ce qui suit nous ne nous intéresserons qu'aux notions de base qui nous permettront de comprendre comment est construit le squelette d'une image à partir de celle-ci.

2.4.1.1 Premières Définitions

Forme et fond d'une image

Une image binaire de taille $N \times M$ à valeur dans $\{0, 1\}$ (dans $\{0, 255\}$ en ce qui nous concerne) est codée par une matrice d'entiers de même taille.

Nous pouvons distinguer les pixels d'une image ($I(i, j)$) suivant deux classes :

- Les points de la *forme* sont tels que $I(i, j) = 1$ (ou 255).
- Les points du *fond* de l'image sont tels que $I(i, j) = 0$.

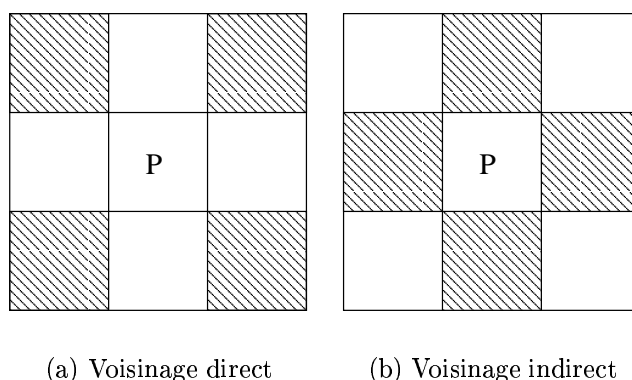


FIG. 2.21 : Les pixels voisins (en blanc) du pixel P dépendent de la définition du voisinage.

La **forme** peut représenter plusieurs **objets** (les objets sont en fait les composantes connexes de la forme) et certaines composantes du fond peuvent représenter des trous dans les objets.

Voisinage

Un point P de l'image est défini par ses coordonnées cartésiennes (qui ne prennent évidemment que des valeurs entières) : abscisse et ordonnée (sur notre grille de mesure). Les coordonnées (i,j) d'un pixel sont associées respectivement aux indices de ligne et de colonne d'une matrice, définissant ainsi le repère de \mathbb{Z}^2 utilisé pour représenter les images. Le point P a 4 voisins directs et 4 voisins indirects (figure 2.21).

Définition 1 (Voisins directs) On appelle *voisins directs* d'un pixel P , les pixels qui ont une arête en commun avec P .

Définition 2 (Voisins indirects) On appelle *voisins indirects* d'un pixel P , les pixels qui ont un coin en commun avec P .

Distances Discrètes

La définition de distance dans un espace discret est la même que dans un espace continu.

Définition 3 (Distance Discrète) On appelle *distance discrète* sur un espace \mathcal{E} une application $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant pour tout A, B, C appartenant à \mathcal{E} :

- $d(A, B) \geq 0$; $d(A, B) = 0 \iff A = B$
- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

La notion de voisinage est intimement liée à celle de métrique. En effet les quatre voisins directs (aussi appelés points adjacents) sont également caractérisés comme étant les points

situés à une distance égale à 1 pixel du point P, en prenant pour distance la somme des différences des coordonnées des points en abscisse et en ordonnée. Cette distance est notée d_4 et est appelée en anglais *City Block* ou *Square Distance*.

$$d_4(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

La distance d_4 entre les points A et B est le nombre de déplacements qu'il faut effectuer pour aller d'un point à l'autre en autorisant seulement les déplacements vers les voisins directs.

Une autre distance en rapport avec les voisinages directs et indirects est la distance notée d_8 définie par :

$$d_8(A, B) = \max(|x_B - x_A|, |y_B - y_A|)$$

Cette distance est appelée en anglais *Chessboard Distance* ou *Diamond Distance*. Les voisins directs et indirects sont alors caractérisés par $d_8(A, B) \leq 1$.

La distance d_8 entre les points A et B est donc le nombre de déplacements qu'il faut effectuer pour aller d'un point à l'autre en autorisant les mouvements vers les voisins directs et indirects.

Les distances d_4 et d_8 sont les premières à avoir été utilisées dans les algorithmes car ce sont les plus simples. Ces distances élémentaires ne différencient pas les déplacements vers les voisins directs et indirects. En effet, que nous nous déplaçons vers un voisin direct ou indirect nous comptons un déplacement unitaire. Il existe des distances qui pondèrent les déplacements élémentaires par une valeur significative du déplacement euclidien réalisé suivant qu'ils soient vers un voisin direct ou indirect (1 vers un un voisin direct et $\sqrt{2}$ vers un voisin indirect). Ces distances sont plus proches de la distance euclidienne mais nous n'en parlerons pas car le programme que nous avons choisi pour effectuer la squelettisation de nos images utilise la distance d_8 .

Boules Discrètes

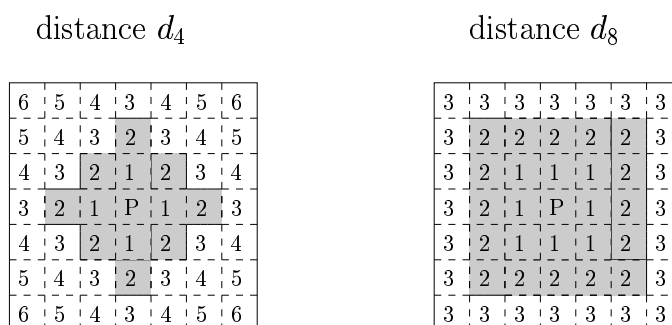
Définition 4 (Boules Discrètes) Une *boule discrète* pour la distance d de centre P et de rayon r est définie par :

$$B_d(P, r) = \{Q/d(P, Q) \leq r\}$$

C'est à dire qu'une boule discrète contient tous les points qui sont situés autour du point P à une distance r (figure 2.22).

A partir de ces quelques notions de base en géométrie discrète nous allons maintenant définir les différents concepts qui ensuite serviront à la construction des squelettes.

Boules discrètes



Boule discrète de rayon 2

FIG. 2.22 : Suivant la *distance discrète* considérée les *boules discrètes* n'incluent pas les mêmes pixels.

2.4.1.2 Axe Médian et Squelette

Image de Distance

Définition 5 (Image de Distance) Etant donné une image, dans cette image on peut définir des points dits **points de références**. On peut alors construire une image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance entre le point P et le point de référence le plus proche.

Le choix des points de référence est laissé à l'utilisateur, il y a donc autant d'images de distance que de possibilités de choisir un ensemble de points de références. Cependant il existe un cas particulier qui consiste à choisir comme référence l'ensemble des points du fond de l'image (c'est à dire les points n'appartenant pas à l'objet que l'on veut représenter), dans ce cas nous parlons **d'image de distance au fond** (figure 2.23).

Définition et Construction de l'Axe Médian

Dans l'espace discret, l'axe médian est un concept qui fait intervenir le recouvrement d'un objet par des boules discrètes afin d'obtenir une *image minimale* de celui-ci.

Considérons une image formée d'un ensemble \mathcal{O} de points appartenant aux différents **objets** de la **forme** et d'un ensemble \mathcal{F} de points constituant le fond de l'image. A partir de l'image de distance au fond on peut reconstruire la forme en recouvrant chaque pixel la constituant par des boules discrètes de rayon R_p .

$$R_p = d_f - 1$$

d_f est la distance au fond du pixel considéré. Notons au passage que le pixel est alors considéré comme une boule de rayon nul.

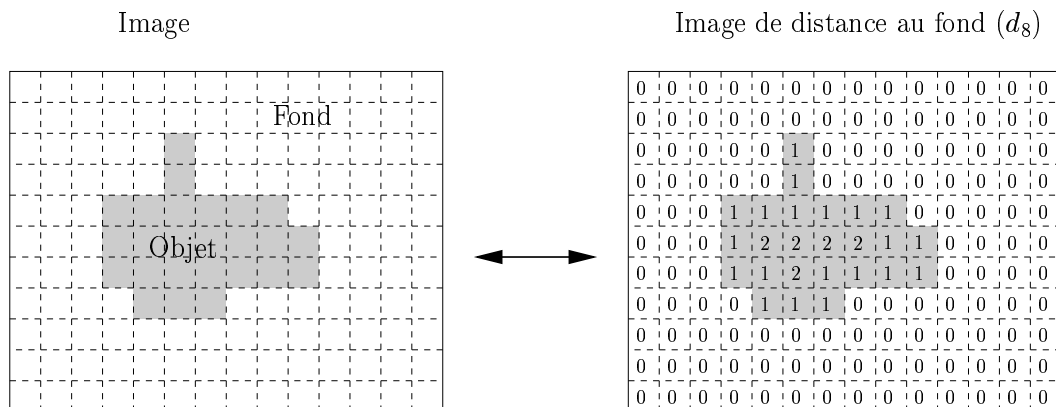


FIG. 2.23 : Sur une image de distance chaque pixel est codé en fonction de sa distance la plus proche à un ensemble de **points de référence**. Dans le cas particulier où l'ensemble des **points de référence** est l'ensemble des points n'appartenant pas à l'**objet** nous avons une **image de distance au fond**.

Seulement toutes les boules ainsi définies ne sont pas nécessaires à la reconstruction exacte de la forme.

Définition 6 (Boules maximales) Une **boule discrète** est dite **maximale** dès lors qu'elle n'est pas entièrement recouverte par une autre. La boule discrète de centre P et de rayon R_p est maximale si et seulement si :

$$\forall Q \in \mathcal{O}, B_d(P, R_p) \not\subset B_d(Q, R_Q)$$

Attention une boule maximale peut être recouverte par la réunion de plusieurs boules discrètes comme le montre la figure 2.24.

Définition 7 (Axe médian) L'**axe médian** est composé de l'ensemble des centres P des boules maximales, complété des rayons associés.

Considérant les définitions d'une boule maximale et de l'axe médian, il est évident que les points de celui-ci ne seront pas les mêmes suivant la distance discrète prise en compte (figure 2.25). A partir des seuls points de l'**axe médian** nous pouvons reconstruire la forme de départ de manière exacte (figure 2.26). Donc finalement connaître l'**axe médian** d'une image revient à connaître l'image elle même.

Construction du squelette

Il y a plusieurs manières de construire le squelette d'une image. Nous n'aborderons ici que très succinctement une des méthodes fréquemment utilisées afin qu'il n'y ait aucun malentendu sur l'origine ou la construction des réseaux que nous allons générer. Il est important de noter que l'élaboration de ces réseaux est faite à partir d'une information 2D (les **Cartes des Régions Submergées**) et ne prend en compte aucun critère hydraulique.

Thiel propose dans sa thèse (Thiel 1994), une construction du squelette uniquement basée sur l'image de distance au fond. Cette méthode comporte trois principales étapes :

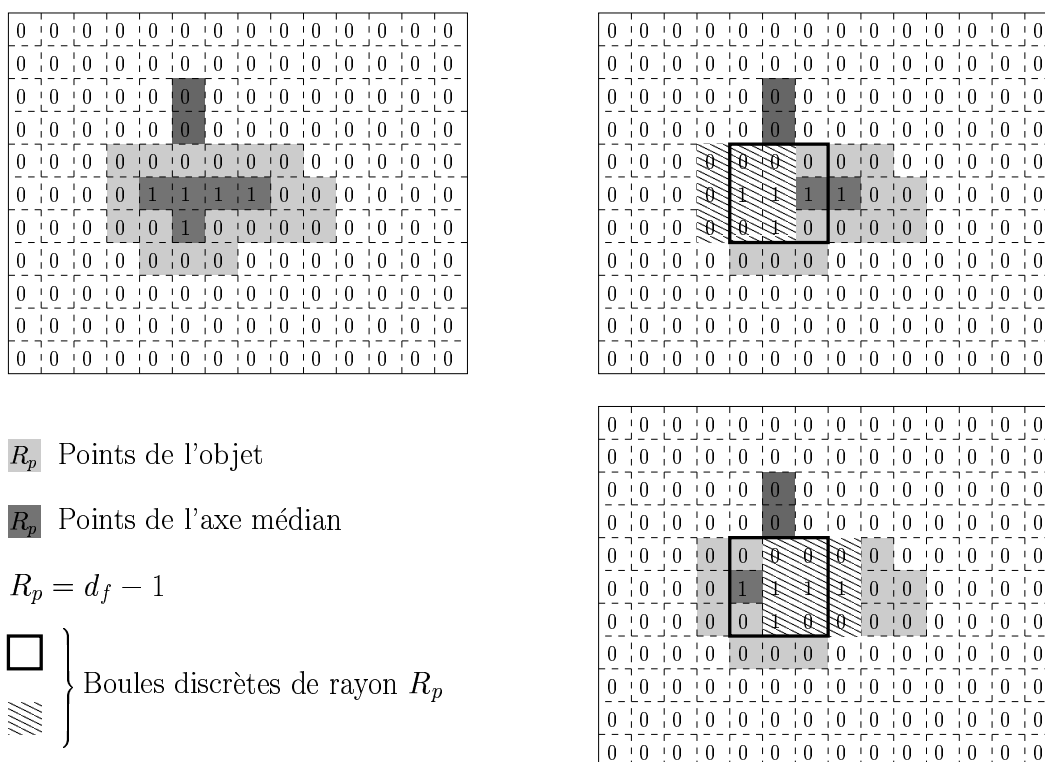


FIG. 2.24 : La boule discrète délimitée par les traits gras est recouverte par l'union des deux boules discrètes voisines (hachurées). Mais il s'agit tout de même d'une **boule maximale** car aucune autre boule discrète seule ne la recouvre.

1. Le calcul de l'image de distance au fond et extraction de l'axe médian.
2. La propagation de la ligne médiane.
3. L'extraction du squelette.

En ce qui concerne la première étape, il est à noter que si tous les points de l'axe médian appartiennent au squelette, celui-ci est dit réversible (car nous pouvons alors reconstruire exactement la forme de départ à partir du squelette comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent (figure 2.26)).

L'ensemble des points de l'axe médian appartenant à un objet donné de l'image n'est en général pas connecté, il faut donc pour avoir un squelette continu représentatif de l'objet considéré, le compléter avec d'autres points que ceux de l'axe médian (il est important de noter que le squelette de la forme n'est quant à lui pas forcément continu). Ces points supplémentaires sont les points selles, mais ceux-ci ne suffisent pas à connecter complètement le squelette d'un objet. Il faut alors inspecter le voisinage des points où le squelette s'interrompt pour leur appliquer la méthode dite du "gradient positif". Cette méthode consiste à calculer le gradient des "poids" (sur l'image de distance au fond les pixels sont codés en fonction de leur plus courte distance au fond) de chaque point, nous rajoutons alors au squelette les points qui maximisent ce gradient.

2.4. Des réseaux hydrauliques déterminés par la micro-rugosité

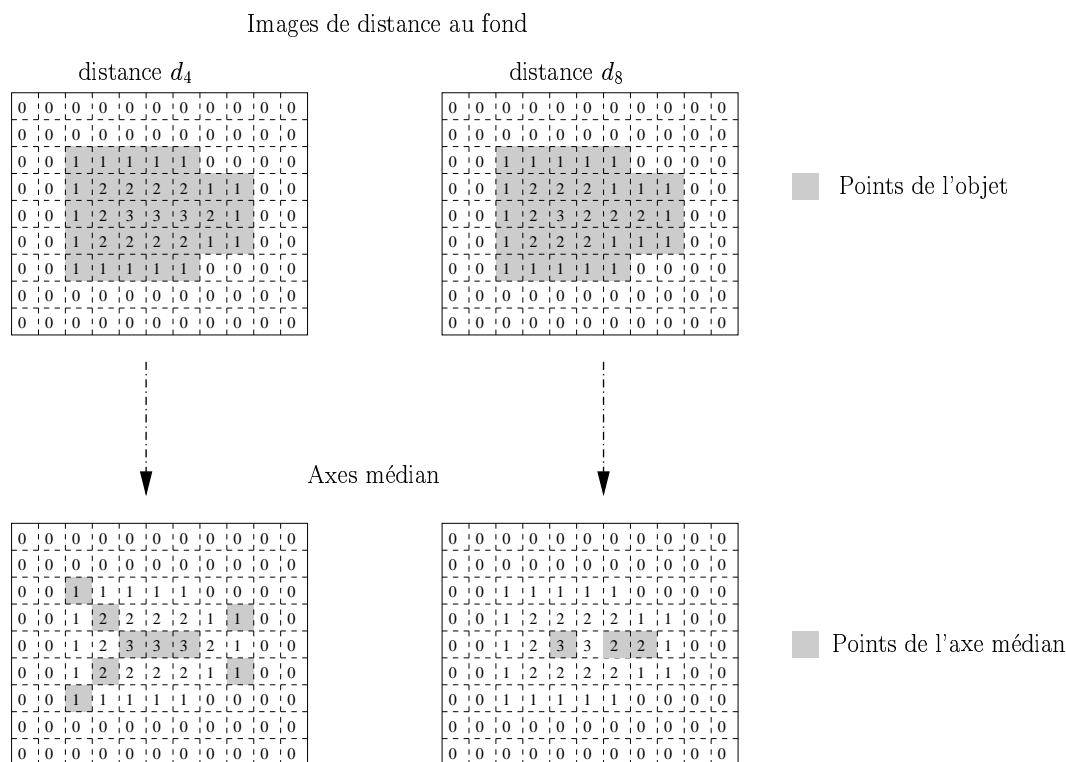


FIG. 2.25 : Sur l'image de distance au fond chaque pixel est codé en fonction de sa distance au pixel du fond le plus proche. L'axe médian est alors composé de l'ensemble des centres des boules maximales. L'axe médian, tout comme l'image de distance au fond, dépend de la distance discrète considérée.

Enfin la dernière étape consiste à supprimer les branches dues aux effets de bords et à affiner le squelette afin qu'il soit en tout point d'une épaisseur de un pixel.

La dernière étape provoque souvent l'élimination du squelette de points de l'axe médian. On n'a donc plus un squelette réversible, mais les algorithmes sont faits de telle manière que les points éliminés sont ceux qui engendrent le moins de changements lors de la reconstruction de l'image.

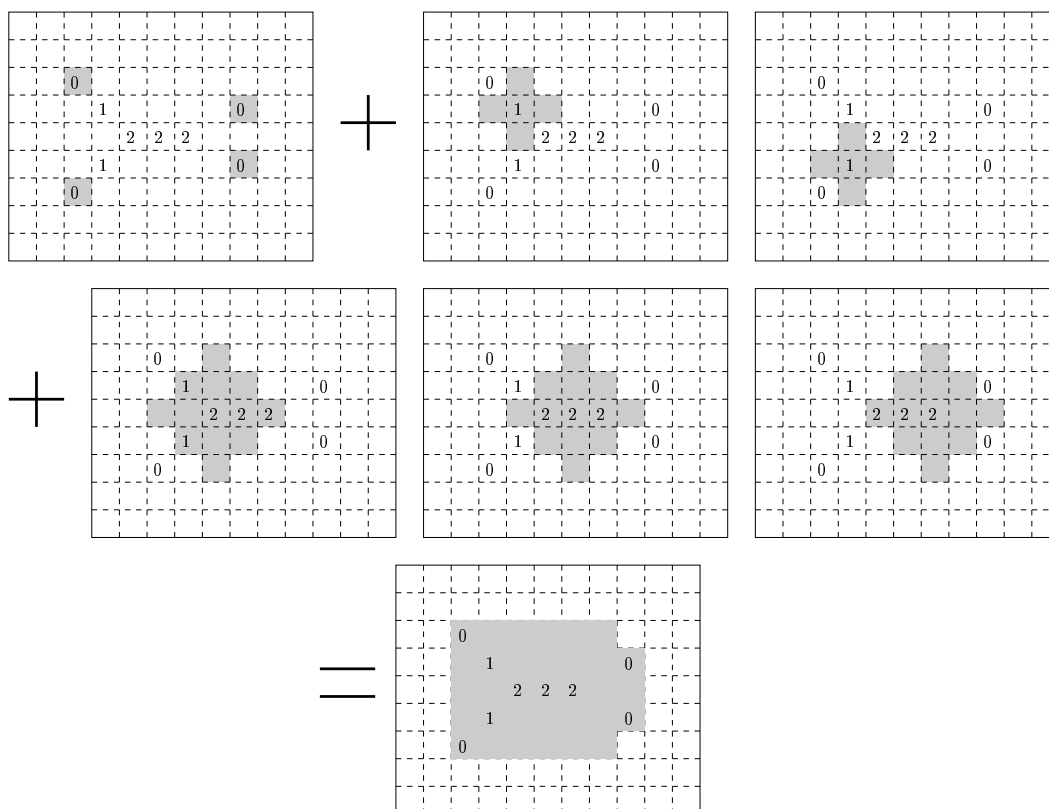


FIG. 2.26 : Nous considérons l'objet déjà présenté sur la figure 2.25 et plus particulièrement son **axe médian** (pour la distance d_4 mais le résultat est le même quelle que soit la distance considérée). La superposition des **boules discrètes maximales** déterminées par l'axe médian permet de reconstruire l'objet de départ de manière exacte. Ici l'axe médian nous permet de déterminer 4 boules de rayon nul, 2 boules de rayon 1 et 3 boules de rayon 2.

2.4.2 Identification des noeuds et des liens

Les squelettes des **Cartes des Régions Submergées** (figure 2.27) nous servent de base pour les réseaux hydrauliques sur lesquels nous allons appliquer notre modèle. Mais pour complètement déterminer ces réseaux nous devons définir des noeuds et des liens sur les squelettes.

2.4.2.1 Définition et identification des noeuds

Dans un premier temps, nous pouvons définir un noeud comme étant la convergence d'au moins trois branches du squelette. Mais nous devons préciser cette définition au niveau du pixel afin qu'elle soit utilisable pratiquement dans les codes de programmation, et ainsi permettre une reconnaissance automatique des noeuds.

Définition 8 (Noeud) *Un pixel du squelette est un **noeud** si et seulement si au moins trois de ses voisins (directs ou indirects) appartiennent au squelette.*

Malheureusement cette définition des noeuds est source de problèmes. Comme nous allons le voir, il existe des configurations où plusieurs pixels d'un même voisinage sont

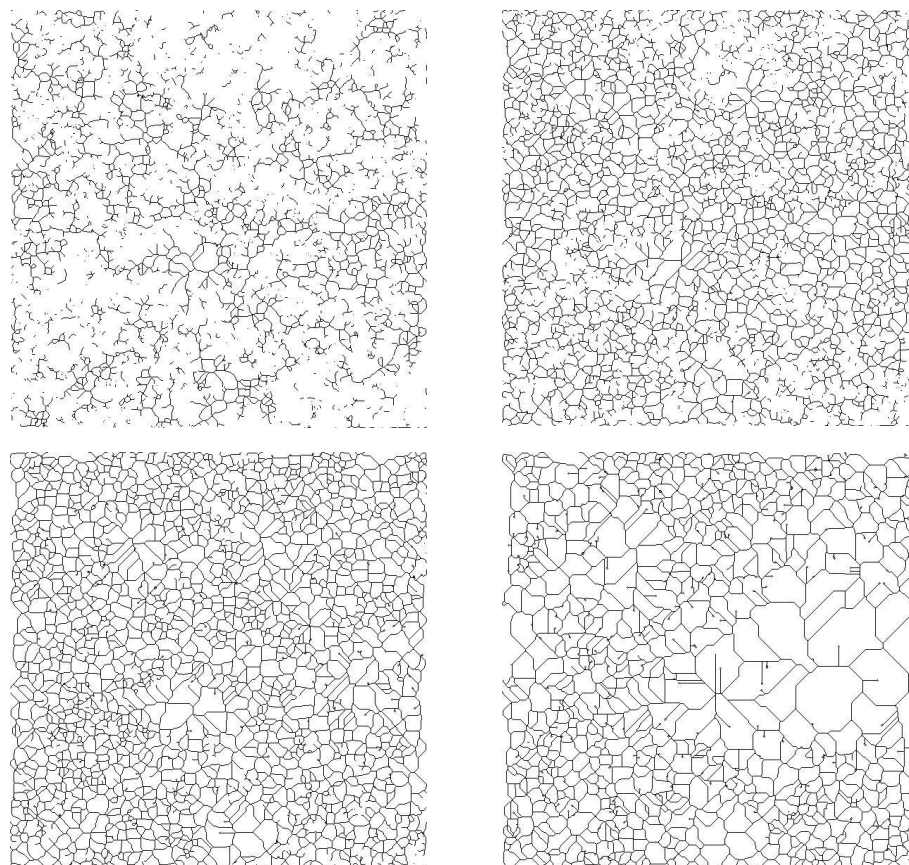


FIG. 2.27 : Squelettes correspondant aux *Cartes des Régions Submergées*. Les branches des squelettes vont servir de base à notre réseau.

reconnus comme des noeuds. De plus, il se peut que les trois pixels du squelette dans le voisinage du noeud n'appartiennent pas à trois branches différentes.

Mettons nous dans le cas idéal où seulement trois pixels du squelette sont dans le voisinage d'un point. Il y a alors 56 manières de placer ces trois pixels dans les huit cases qui entourent le noeud ($C_3^8 = 56$).

Si nous considérons les symétries et les rotations, ces 56 possibilités se réduisent à 10 cas différents (figure 2.28).

Comme le montre la figure 2.28 les pixels entourant un noeud (pixel central sur la figure) peuvent eux aussi être identifiés comme des noeuds bien qu'ils n'en soient pas au sens premier du terme (convergence de trois branches). Ces situations sont sources de nombreux noeuds voisins surnuméraires.

Les angles droits sur une branche (figure 2.29) ainsi que les cas où nous avons quatre (ou plus) pixels du squelette dans le voisinage d'un autre pixel, appartenant eux aussi au squelette, sont aussi générateurs de nombreux noeuds surnuméraires.

En ce qui concerne les noeuds surnuméraires causés par les angles droits sur les branches du squelette nous les éliminons (nous verrons comment à partir de la définition des liens). En ce qui concerne les autres noeuds surnuméraires nous avons décidé de les conserver afin de ne pas trop alourdir le code. En effet, leur élimination aurait nécessité un traitement

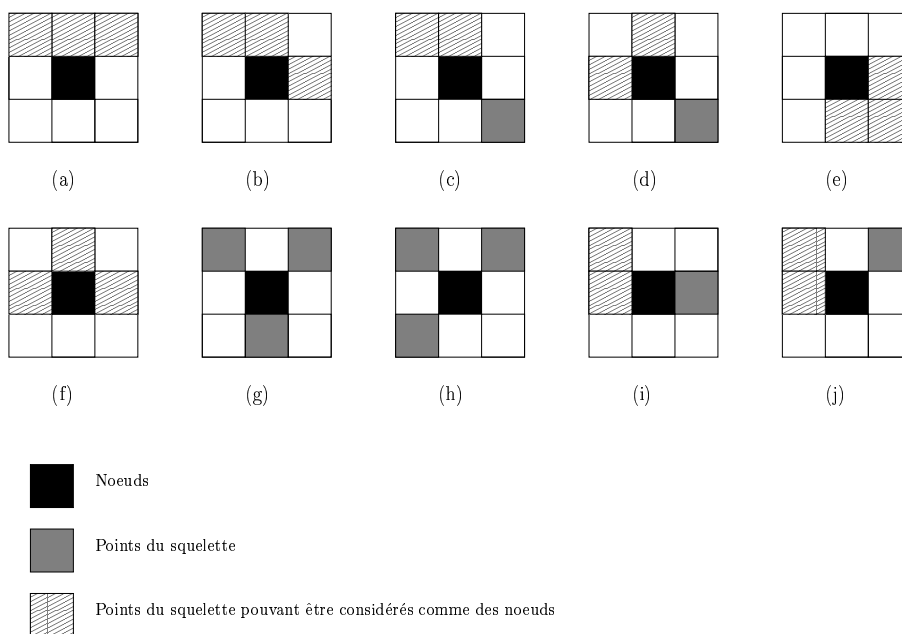


FIG. 2.28 : Au niveau d'un noeud, les pixels voisins peuvent, le cas échéant, être aussi identifiés comme des noeuds. Nous avons alors des noeuds surnuméraires.

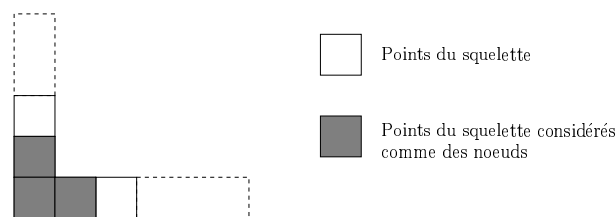


FIG. 2.29 : Les angles droits sur le squelette sont générateurs de "faux" noeuds. Cependant, ces faux noeuds sont facilement détectables et donc facile à supprimer.

au cas par cas de tous les noeuds afin de les conserver ou de les éliminer. En revanche, pour ne pas avoir trop de noeuds et pour éviter le problème des liens de longueur nulle entre deux noeuds voisins nous avons choisi de considérer des amas de noeuds plutôt que des noeuds.

En résumé la détection des noeuds sur le réseau se fait en trois étapes :

1. Identification des noeuds par inspection du voisinage des points du squelette.
2. Elimination des noeuds générés par les angles droits du squelette.
3. Regroupement des noeuds voisins en amas.

Ces trois étapes peuvent laisser des noeuds ou amas surnuméraires sur certaines branches du squelette. Ces problèmes viennent une fois encore des configurations problématiques que nous avons évoquées (figure 2.28). Mais nous le verrons dans le paragraphe suivant, ces amas sont très faciles à identifier et donc à supprimer.

Il nous faut aussi rajouter des *noeuds de bords*, en effet il nous faut définir des points d'entrée et de sortie sur notre image. Ces points d'entrée et de sortie serviront également à imposer les conditions aux limites de notre problème.

Définition 9 (Noeud de Bord) *Un pixel du squelette est un noeud de bord si et seulement si :*

- Il a un et un seul voisin (direct ou indirect) appartenant au squelette.
- Il est situé sur la première ou la dernière ligne de l'image.

En posant cette définition, nous anticipons sur la modélisation du chapitre 3 où le squelette sera considéré comme la matrice de l'écoulement à travers l'échantillon entre un bord arbitrairement choisi comme bord amont, et le bord opposé, considéré comme aval.

Maintenant que nous avons défini les noeuds, nous devons savoir comment ils sont reliés entre eux, c'est à dire déterminer l'ensemble des *liens*. Ce sont ces *liens* qui font la complexité du réseau et qui, nous le verrons quand nous aborderons le modèle numérique, porteront les informations nécessaires à la paramétrisation du problème.

2.4.2.2 Définition et identification des liens

Une fois que l'ensemble des noeuds est défini l'identification des liens est des plus simple. Dans tout ce qui suit nous parlerons indifféremment de noeuds ou d'amas de noeuds, cela n'a aucune importance sur la manière de définir ou d'identifier l'ensemble des liens.

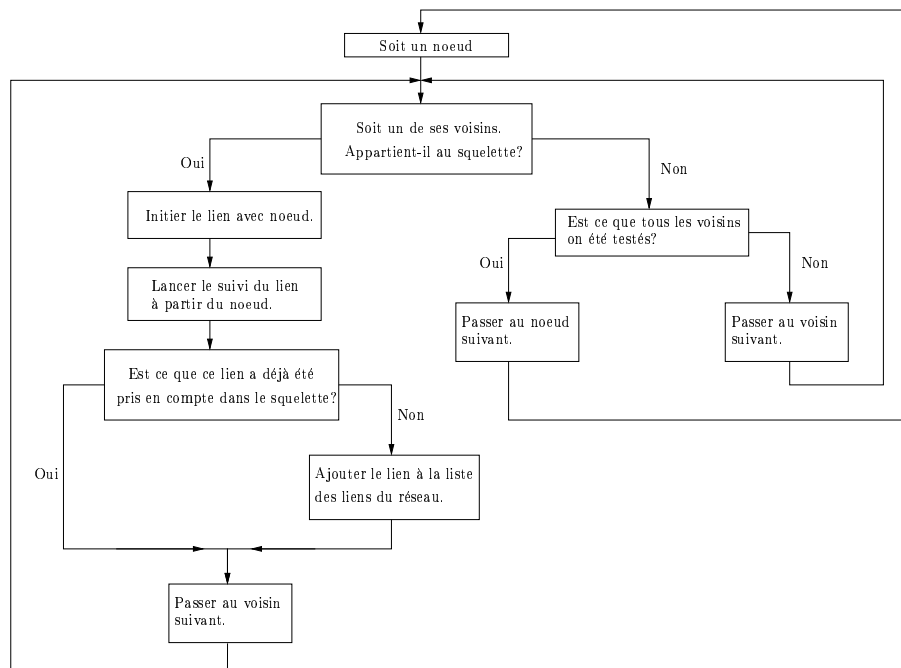


FIG. 2.30 : Algorithme général de recherche des liens.

Définition 10 (Lien) *Un lien est un ensemble de pixels appartenant au squelette et reliant deux noeuds entre eux.*

Remarque 1 *Les deux noeuds font partie du lien, le noeud de départ est logiquement le premier pixel du lien et le noeud d'arrivée est le dernier.*

La recherche des liens consiste donc à établir la liste de tous les pixels du squelette reliant les noeuds entre eux. La définition précédente est très simple et la recherche des liens sur un réseau s'appuie essentiellement sur celle ci. En revanche il faut être vigilant afin de définir correctement les "départs" et "arrivées" des liens (voir règle 1).

Règle 1 *Lorsque l'on parcourt un lien on ne peut rencontrer d'embranchement si ce n'est en un noeud, c'est à dire au début ou à la fin du dit lien.*

Cette règle nous assure qu'un lien ne contient que deux noeuds. La traduction discrète de cette règle est qu'un pixel appartenant au lien ne peut avoir que deux voisins au plus, **sauf au voisinage des noeuds.**

L'algorithme de la figure 2.30 résume la méthode de recherche des liens. Nous considérons tous les noeuds les uns après les autres. A partir des noeuds, nous progressons de proche en proche sur le squelette jusqu'à ce que nous trouvions un autre noeud qui met alors fin au lien. Si le lien ainsi défini n'a pas déjà été pris en compte nous le rajoutons à l'ensemble des liens sinon nous passons à l'identification d'un autre lien. La progression de proche en proche sur les différentes branches du squelette se fait à l'aide de fonctions récursives et avec le souci de ne pas considérer deux fois un même pixel. Cela nous assure que chaque branche du squelette n'est parcourue qu'une fois et dans un seul sens.

2.4.3 Simplification des réseaux

Pour chaque niveau de surface libre, l'ensemble des noeuds et des liens forme un réseau élémentaire. Il faut dans un deuxième temps le simplifier le plus possible afin de diminuer le temps de traitement du problème par la méthode de résolution numérique. Pour cela nous allons, entre autres, supprimer les boucles isolées dans lesquelles le débit sera de toute façon nul et les parties du squelette ne participant pas au transport du fluide d'un bout à l'autre de la plaque.

Le travail qui est exposé dans cette partie porte exclusivement sur le squelette. Nous définissons donc une nouvelle image binaire, constituée maintenant des points du squelette et non de la **Carte des Régions Submergées**, et d'un fond qui est l'ensemble des points n'appartenant pas au squelette.

2.4.3.1 Elimination des branches mortes et non débouchantes

Définition 11 (Branches mortes) *On appelle **branche morte** un lien qui n'est pas relié par d'autres liens aux **deux** extrémités de la plaque.*

L'élimination des branches mortes revient en fait à rechercher les parties du squelette connectées aux **deux** bords de l'image du squelette. Cette recherche se fait, de manière analogue à la recherche des parties connectées des **Cartes des Régions Submergées** (voir paragraphe 2.2.3), en trois étapes :

1. Un premier parcours de l'image du squelette depuis le haut.
2. Un deuxième parcours de l'image du squelette depuis le bas.
3. Un tri des pixels de l'image du squelette.

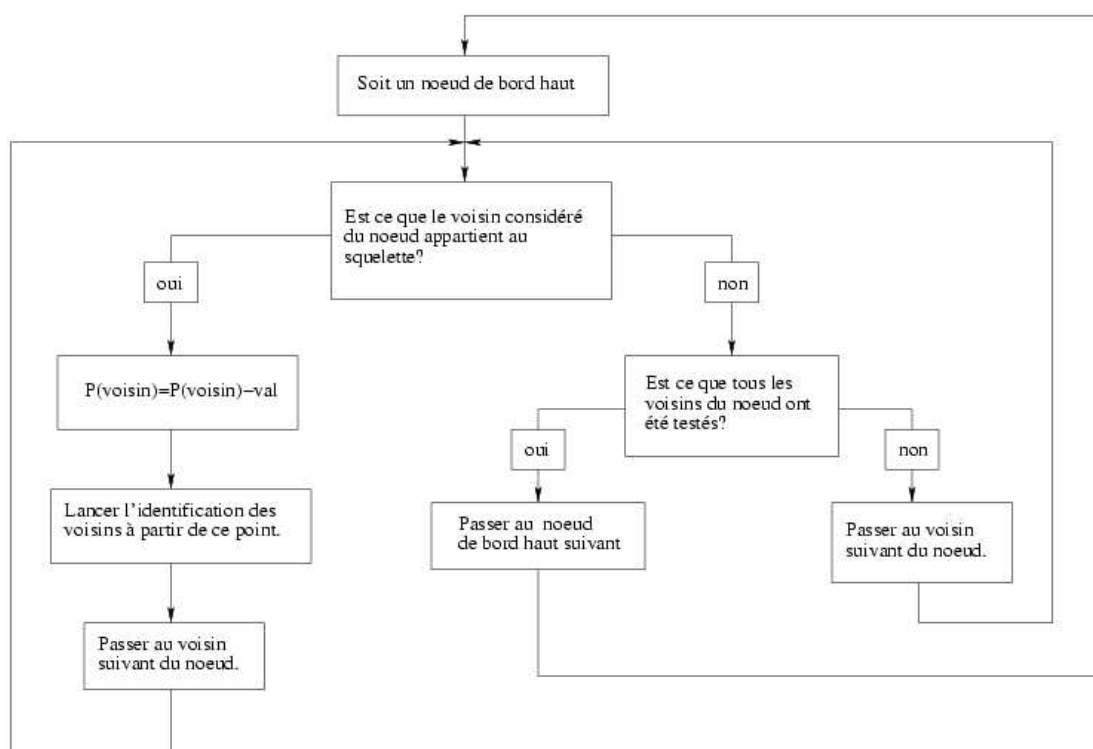


FIG. 2.31 : *Algorithme d'élimination des branches mortes, le premier passage sur l'image se fait à partir des noeuds de bord haut. "val" vaut alors 10.*

Le premier passage sur l'image sert à identifier les pixels du squelette qui sont accessibles depuis le bord haut. Le deuxième passage identifie les pixels accessibles depuis le bord bas. Le tri des pixels consiste à ne garder que les pixels accessibles depuis les deux bords.

Le premier passage sur l'image est géré par l'algorithme de la figure 2.31. Les éléments de la matrice de notre image peuvent prendre deux valeurs :

- 255 s'ils appartiennent au squelette.
- 0 s'ils appartiennent au fond de l'image.

la procédure d'identification des points du squelette (procédure de l'algorithme de la figure 2.31) se fait en suivant l'algorithme de la figure 2.32. C'est ce dernier algorithme qui gère la propagation de proche en proche de la valeur 245 sur les pixels du squelette.

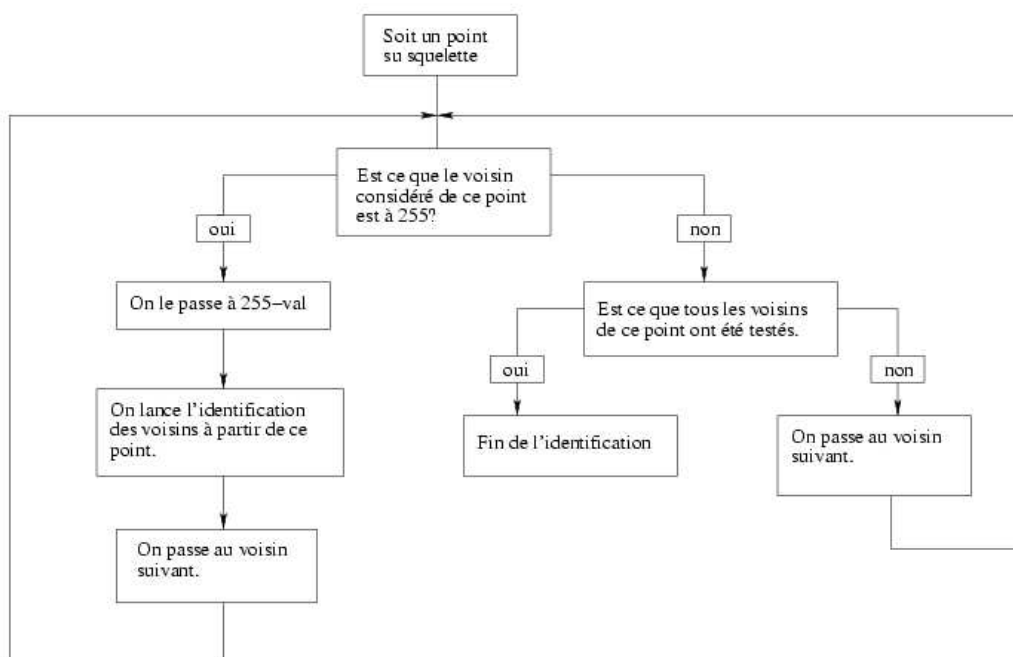


FIG. 2.32 : *Algorithme d'identification des voisins : cet algorithme permet l'identification des voisins qui font partie du squelette.*

Pour le premier passage on considère un à un les noeuds d'entrée (sur le bord haut de l'image du squelette). A partir de ces noeuds nous contaminons petit à petit les pixels du squelette accessibles depuis le noeud considéré en changeant leur valeur (245 au lieu de 255). Ainsi, après le premier passage les pixels de l'image peuvent prendre trois valeurs :

- 255 s'ils appartiennent au squelette et qu'ils ne sont pas accessibles depuis le bord amont.
- 245 s'ils appartiennent au squelette et qu'ils sont accessibles depuis le bord amont.
- 0 s'ils appartiennent au fond de l'image.

Le deuxième passage sur l'image est géré par le même algorithme que celui présenté sur la figure 2.31 à ceci près que *val* vaut alors 20 et que nous considérons alors les noeuds de sortie (sur le bord aval de l'image du squelette). Par contre l'identification des voisins doit prendre en compte que les pixels peuvent prendre trois (255, 245 et 0) et non plus deux valeurs (figure 2.33).

Après le deuxième passage sur l'image on a des pixels à 255, 245, 235 et 225.

- Les pixels dont la valeur est 255 ne sont reliés à aucun des deux bords, ils appartiennent donc à des branches isolées non reliées aux bords et ne pourront donc en

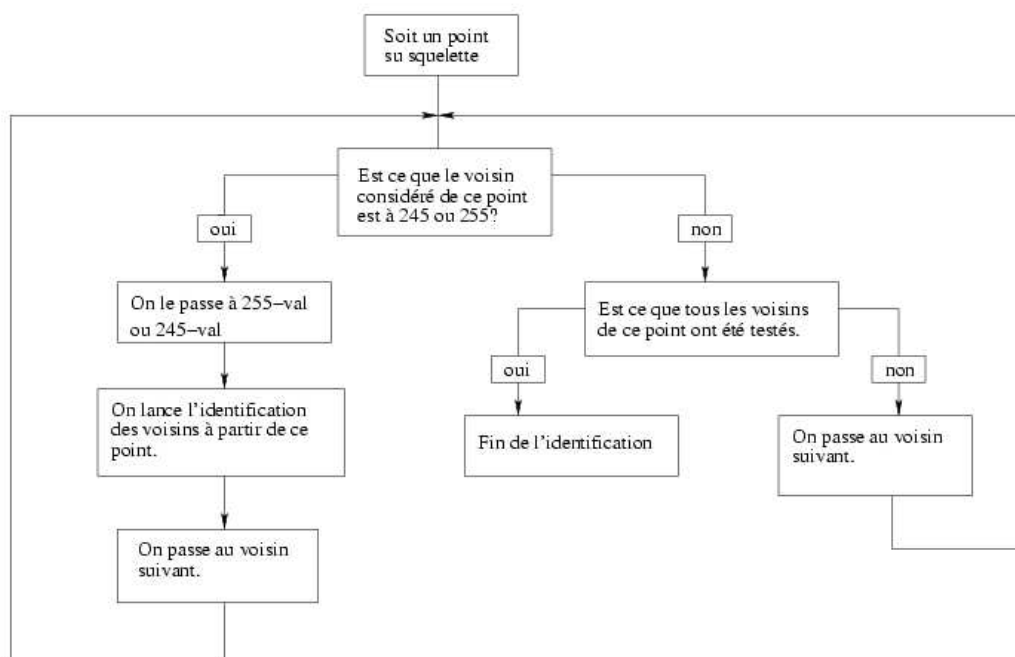


FIG. 2.33 : Algorithme d'identification des voisins, le deuxième passage sur l'image. "val" vaut alors 20.

rien participer au transport du fluide d'un bord à l'autre de la plaque. Il faut donc les éliminer en les mettant à 0.

- Les pixels à 235 ou 245 sont reliés à un seul des deux bords (respectivement le bas et le haut). Là encore les branches auxquelles ils appartiennent ne participent pas à l'écoulement du fluide d'un bout à l'autre de la plaque, ils sont donc à éliminer.
- Finalement seuls les pixels à 225 ont été testés lors des deux passages sur l'image du squelette. Ces points appartiennent donc à des branches accessibles depuis les **deux** bords de l'image, ce sont ces branches qui constitueront notre réseau simplifié.

Nous avons effectué cette première simplification sur des squelettes issus des **Cartes des Régions Submergées** brutes. Nous aurions pu directement squelettiser les parties connectées des **Cartes des Régions Submergées** (figure 2.10) le résultat aurait été le même, ces deux procédures sont parfaitement équivalentes.

Les branches mortes ne sont pas les seules branches inutiles de notre réseau, nous devons également éliminer les *branches non débouchantes*.

Définition 12 (Branches non débouchantes) *On appelle **branche non débouchante** un lien qui ne se termine pas par un noeud ou bien encore un lien dont un des noeuds n'est relié à aucun autre lien.*

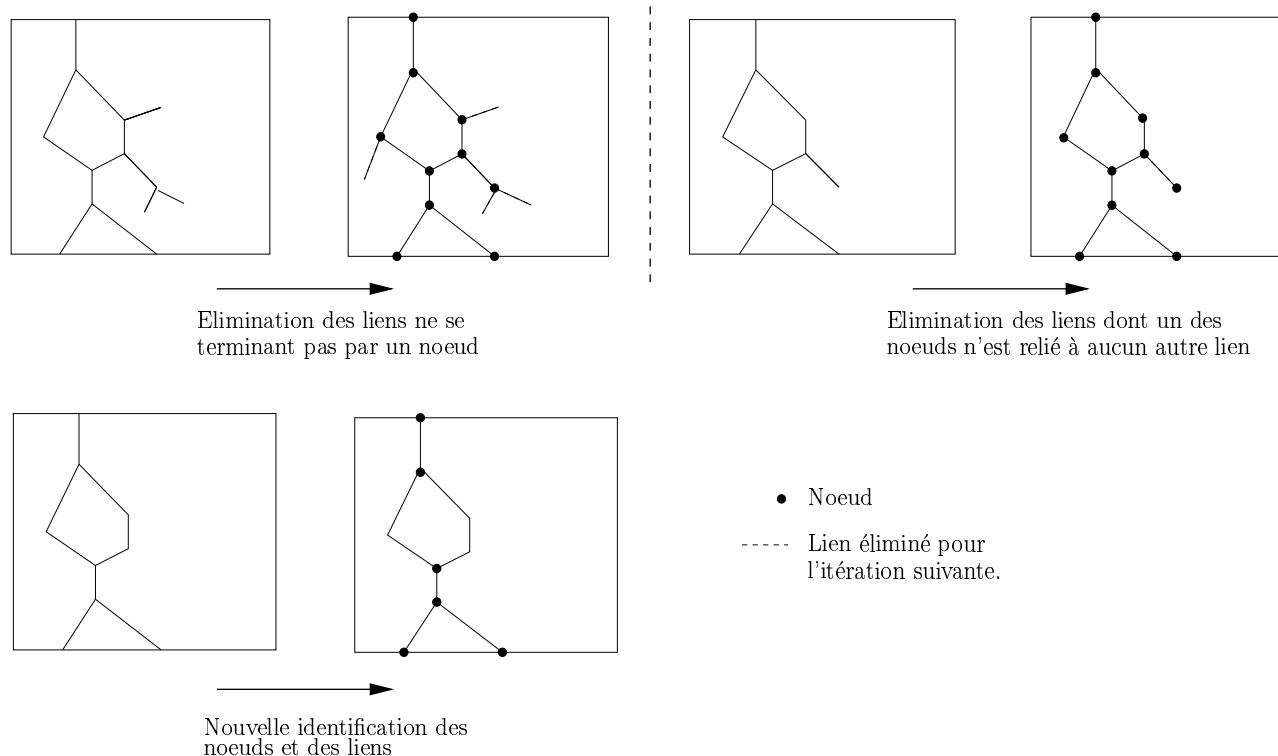


FIG. 2.34 : *Élimination par un processus itératif des liens inutiles du point de vue hydraulique. La recherche automatique des noeuds et liens du réseau conduit inévitablement à la définition de liens inutiles d'un point de vue hydraulique. Les liens ne se terminant pas par un noeud sont éliminés naturellement d'une itération à l'autre. Les liens dont un des noeuds ne se retrouve pas dans un autre lien doivent également être éliminés.*

L'élimination des liens inutiles se fait par itération. Les itérations se poursuivent tant que le nombre de noeuds n'est pas constant d'une itération à l'autre.

Ainsi, les liens qui ne se terminent pas par un noeud (figure 2.34) sont naturellement éliminés d'une itération à l'autre puisqu'en fait il faut un noeud de début et un noeud de fin pour être considéré comme un lien.

Les liens dont un des noeuds n'est relié à aucun autre lien sont éliminés par une procédure spéciale. Pour différencier ces noeuds problématiques, il suffit de compter dans combien de liens intervient le noeud en question. En comptant, le nombre de liens dans lequel le noeud considéré intervient on peut également facilement repérer les noeuds surnuméraires dus aux angles droit du squelette.

- Si le noeud n'intervient que dans **un seul lien**, ce dernier est un lien non débouchant.
- Si le noeud n'intervient que dans **deux liens**, il s'agit d'un noeud surnuméraire (causé par un angle droit ou une configuration *exotique* des pixels comme sur la figure 2.28).
- Si le noeud intervient dans **plus de deux liens**, le noeud et les liens considérés ne doivent pas être éliminés lors de cette itération.

2.4.3.2 Elimination des boucles

Afin que la procédure d'élimination des liens non débouchants soit la plus efficace possible il faut dans un premier temps éliminer les boucles. En effet, si une branche du squelette se termine par une boucle, elle ne sera pas reconnue comme non débouchante (figure 2.35).

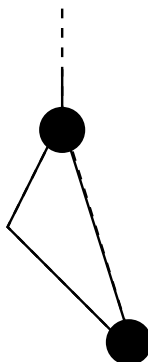


FIG. 2.35 : Les branches se terminant par une boucle ne participent pas à l'écoulement. Les algorithmes précédemment décrits ne permettent pas de les éliminer, il faut donc les rechercher sur le réseaux et les supprimer.

Il peut aussi arriver qu'il y ait des boucles plus compliquées (avec trois noeuds ou plus), mais pour ne pas trop compliquer le code et ne pas rallonger le temps de traitement en considérant trop de cas particuliers, nous nous sommes contenté de supprimer les boucles telles que présentées sur la figure 2.35.

Notre réseau n'est donc pas complètement optimisé, mais nous avons cherché à le simplifier le plus possible, par des procédures automatiques et des critères objectifs.

En résumé, chaque itération de l'élaboration de nos réseaux hydrauliques à partir des squelettes se fait en cinq étapes :

1. Identification des noeuds (ou amas de noeuds)
2. Identification des liens
3. Elimination des branches mortes (parties non connectées du squelette)
4. Elimination des boucles
5. Elimination des branches non débouchantes

Ces cinq étapes sont répétées autant de fois qu'il faut, jusqu'à ce que le nombre de noeuds soit stable d'une itération à l'autre (figure 2.36).

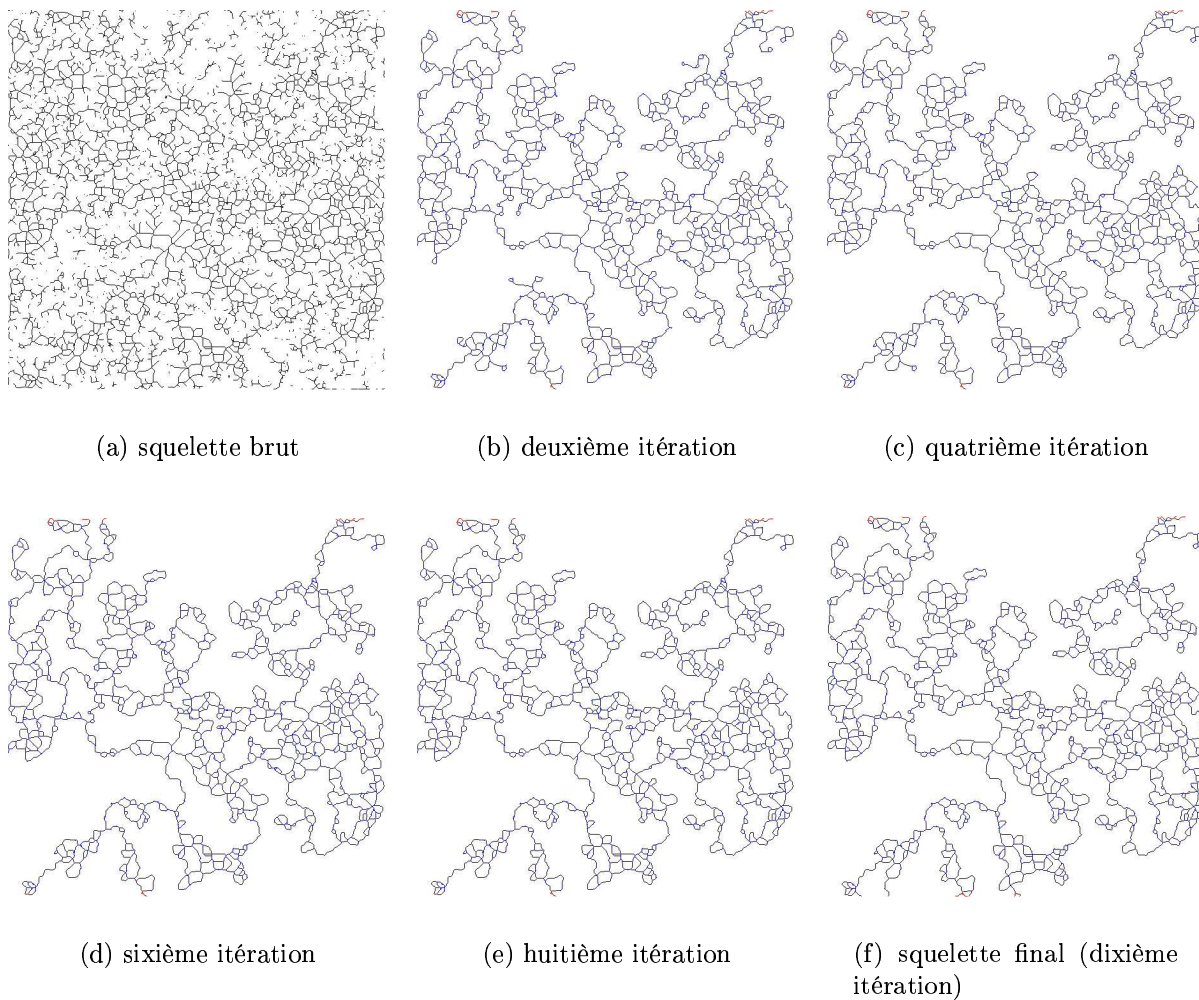


FIG. 2.36 : Nous utilisons les différents algorithmes de simplification précédemment décrits de manière itérative afin d'éliminer toutes les branches inutiles d'un point de vue hydraulique et d'obtenir ainsi les squelettes les plus simples possibles.

2.5 Conclusion

Une brève analyse statistique du moulage d'un échantillon de surface nous a permis de caractériser les hauteurs des rugosités. Nous avons alors pu en déduire une hauteur caractéristique adéquate et ainsi définir le taux d'inondation Λ .

A partir de l'étude de la **Carte Numérique des Altitudes** nous avons introduit un schéma élémentaire de représentation de l'inondation progressive de la surface. Celui-ci nous a permis d'obtenir la succession des **Cartes des Régions Submergées**. Loin de prendre en compte la complexité de l'écoulement réel, ce schéma a cependant le mérite de nous fournir une information sur la variabilité de l'influence des micro rugosités sur les chemins d'écoulements.

En nous appuyant sur les **Cartes des Régions Submergées**, au moyen d'un algorithme de squelettisation et de diverses considérations géométriques nous avons pu finalement mettre en place une succession de réseaux hydrauliques (figure 2.37). Chacun de ces réseaux correspond à un taux d'inondation différent et c'est au travers de la diversité de ces réseaux hydrauliques que notre modèle prend en compte l'influence des micro rugosités de la surface.

Dans le chapitre suivant, nous allons paramétrer ces réseaux afin de pouvoir modéliser le débit global sur la surface. Nous pourrons alors comparer ce débit global aux résultats de notre étude élémentaire (paragraphe 2.3.2).

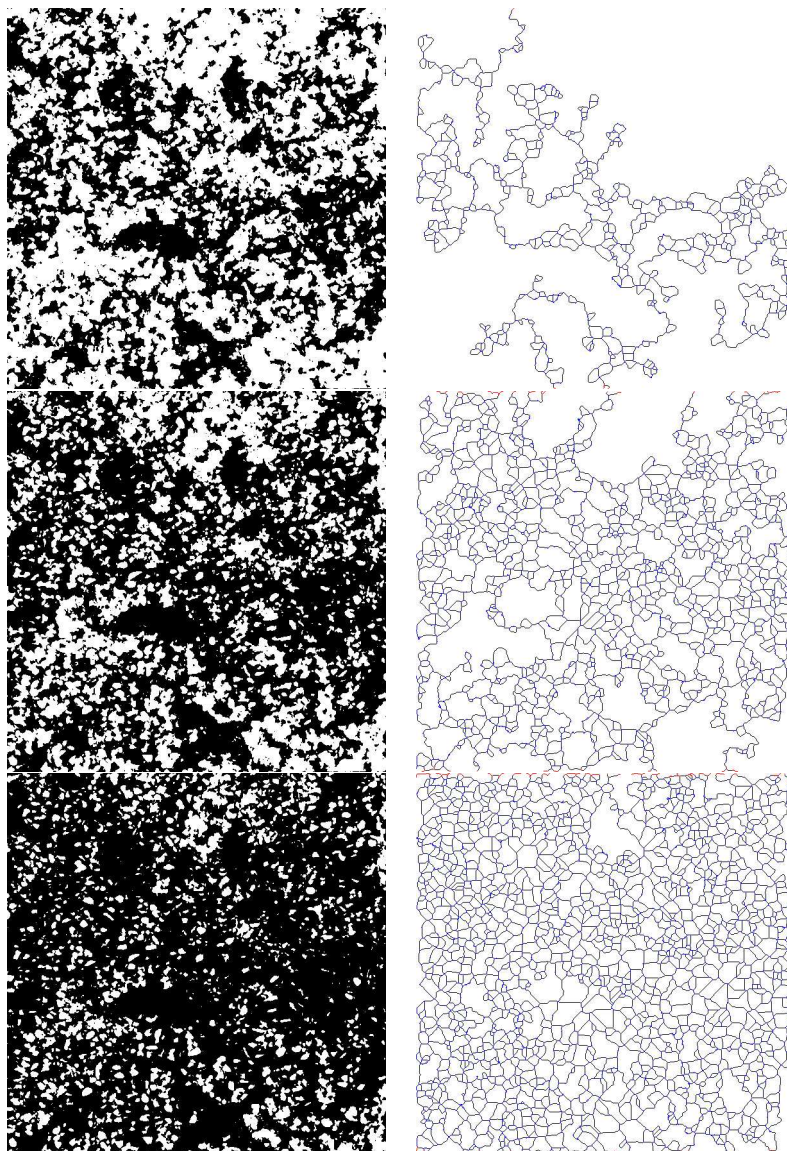


FIG. 2.37 : *A partir de la série des **Cartes des Régions Submergées** nous avons construit une série de réseaux hydrauliques. C'est au travers de la diversité de ces réseaux que notre modèle prend en compte la variabilité de l'influence des micro rugosités.*

3

Modélisation Numérique de l'écoulement

Sommaire

3.1	Introduction	77
3.2	Un premier modèle hydraulique	79
3.2.1	Principe général	79
3.2.2	Modèle de perte de charge	80
3.2.2.1	Paramètres hydrauliques	80
3.2.2.2	Pertes inertielles	82
3.2.2.3	Pertes par friction	83
3.2.3	Formulations matricielles	84
3.2.3.1	La matrice des coefficients hydrauliques	84
3.2.3.2	La matrice des pseudo résistances	84
3.2.3.3	La matrice du problème des charges	85
3.2.4	La Méthode Itérative de Résolution du Problème	86
3.3	Discussion des résultats	88
3.4	Deuxième modèle hydraulique	90
3.4.1	Principe général	90
3.4.2	Écoulement sous-critique au col	93
3.4.3	Écoulement critique au col	96
3.4.4	La Méthode Itérative de Résolution du Problème	97
3.5	Discussion des résultats	100
3.5.1	Débit global sur la surface	100
3.5.2	Charges aux noeuds	104
3.5.3	Caractérisation statistique de l'écoulement local	106
3.5.3.1	Les vitesses aux cols	107
3.5.3.2	Les nombres de Reynolds	107
3.5.3.3	Les nombres de Froude	110
3.5.3.4	Rôle de la friction	112
3.5.4	Le coefficient de Darcy-Weisbach	113
3.6	Conclusion	115

3.1 Introduction

Le chapitre précédent nous a permis de décrire de façon détaillée pour chaque niveau de miroir la morphologie du volume submergé et de la partie de ce volume qui participe

effectivement à l'écoulement. Le réseau simplifié tracé sur le miroir, obtenu par squelettisation et élimination des branches inactives ou surabondantes, constitue le premier niveau d'information sur le domaine d'écoulement. Une information de second niveau est fournie par le codage de ce réseau par la "distance au fond" (au sens de l'analyse d'image), qui s'interprète comme la demi-largeur au miroir en chaque point des canaux dont les liens du réseau constituent les lignes médianes. Enfin, pour accéder au troisième niveau d'information sur ces canaux, il faut descendre sous le miroir et définir, au moyen de la **Carte Numérique des Altitudes**, la forme et l'aire de la section droite de chaque canal en chacun de ses points.

Dans le présent chapitre, nous utilisons ces informations morphologiques pour modéliser l'écoulement. Trois hypothèses et simplifications fondamentales sont admises pour chacun des deux modèles hydrauliques présentés :

- Chaque noeud (ou amas de noeuds) du réseau, carrefour d'au moins trois liens, est un bassin quasi hydrostatique, où par conséquent l'altitude locale de la surface libre s'identifie à la charge hydraulique.
- Les liens du réseau sont des canaux à ciel ouvert de section droite lentement variable où le fluide est en écoulement axial localement quasi uniforme. Le col de chacun de ces canaux est situé au point du lien qui présente la plus petite "distance au fond", autrement dit la plus petite largeur au miroir. On suppose implicitement que l'aire de la section droite au col est également minimale, ou qu'elle joue le rôle de section de contrôle. Cette section droite est prise pour base pour l'évaluation des pertes de charges dans le canal en fonction du débit qui y circule. Les informations concernant la section droite aux points du canal autres que le col ne sont pas exploitées, dans un souci de simplicité.
- Enfin, il est également admis que la surface libre de l'écoulement s'identifie quasiment au miroir, c'est-à-dire que les effets dynamiques sur la forme de la surface libre sont négligeables. Autrement dit, le domaine de l'écoulement est pratiquement celui qui est défini par le volume submergé sous le miroir plan. Cette hypothèse revient à étendre le schéma élémentaire d'écoulement uniforme développé au chapitre précédent, tout en autorisant des variations en direction et en intensité de la vitesse dans le domaine d'écoulement.

La dernière de ces hypothèses, qui est la plus importante, demande à être vérifiée a posteriori pour chaque simulation d'écoulement, après résolution numérique du problème. C'est précisément la raison pour laquelle deux modèles hydrauliques sont présentés. Le premier d'entre eux s'est en effet avéré incohérent, la surface libre obtenue s'écartant dans tous les cas considérablement du miroir initialement défini. Ce premier modèle est néanmoins développé ci-après, d'une part pour mettre en évidence ses insuffisances et montrer le besoin absolu d'un schéma plus élaboré, d'autre part parce que certains éléments essentiels resteront applicables dans le second modèle.

3.2 Un premier modèle hydraulique

3.2.1 Principe général

Le principe général de notre premier modèle est de considérer que chacun des noeuds d'un réseau est en fait un réservoir. Les échanges entre réservoirs se font au travers de canaux représentés par les liens du réseau (figure 3.1). Sur chacun des canaux nous considérons une perte de charge (ΔH_{ij}) dépendant du débit (Q_{ij}) circulant dans le lien. Nous considérons le régime comme permanent, le niveau d'eau h_i dans chaque réservoir est assimilé à la charge hydraulique.

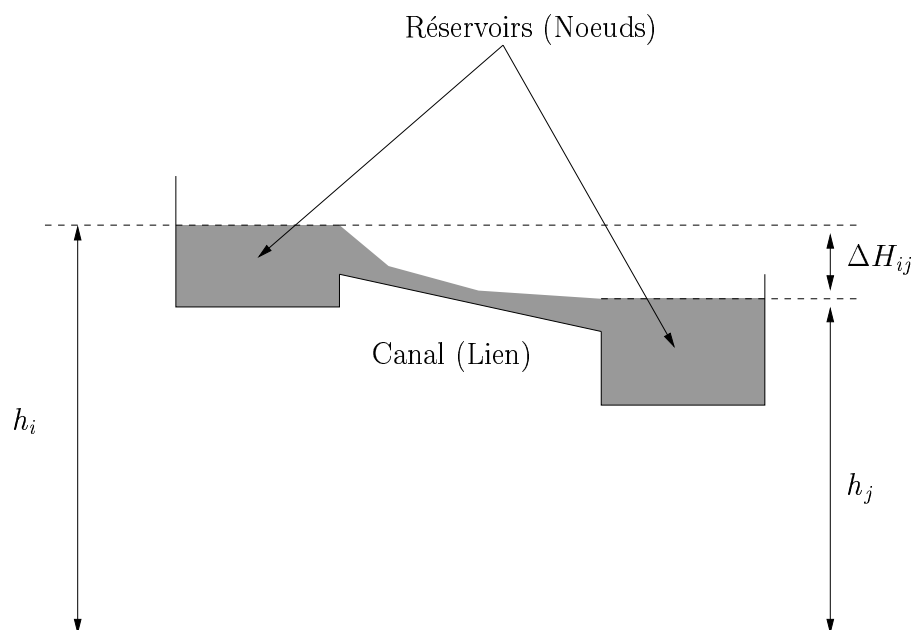


FIG. 3.1 : Sur chacun des réseaux nous considérons chaque noeud comme un réservoir de niveau constant, et chaque lien comme un canal siège d'une perte de charge ΔH_{ij} . C'est cette dernière, une fois précisée, qui nous permettra de calculer le débit sur le lien correspondant.

Les inconnues de notre problème sont les potentiels h_i et les flux Q_{ij} , liées par les lois de conservation des flux aux noeuds et des relations entre flux et chute de potentiel aux bornes des liens. A la différence des réseaux linéaires gouvernés par les lois de Kirchhof, qui peuvent être résolus par simple inversion de matrice, nous avons affaire à des réseaux hydrauliques où la chute de potentiel n'est pas proportionnelle au débit, mais se rapproche a priori plutôt d'une chute quadratique :

$$h_i - h_j = \pm M_{ij} (Q_{ij}) Q_{ij}^2 \quad (3.1)$$

où les **coefficients hydrauliques** M_{ij} peuvent dépendre ou non du débit selon que les pertes de charge sont approximativement ou rigoureusement quadratiques.

Pour bénéficier néanmoins de la méthode matricielle, nous définissons par ailleurs une **pseudo résistance hydraulique** R_{ij} fonction du débit :

$$h_i - h_j = R_{ij} (Q_{ij}) Q_{ij} \text{ avec } R_{ij} = M_{ij} (Q_{ij}) |Q_{ij}| \quad (3.2)$$

où le débit est compté algébriquement.

Ainsi, si les débits sont donnés, il en est de même des résistances, et les charges aux noeuds s'obtiennent par inversion de matrice. D'où découle la méthode itérative adoptée, qui s'apparente à une méthode implicite avec prédicteur :

- A l'itération (n) , les charges $h_i^{(n-1)}$ sont données soit par l'initialisation, soit par l'itération $(n-1)$.
- L'équation 3.1 est utilisée pour obtenir une évaluation du débit $Q_{ij}^{(n)}$.
- Les débits obtenus sont utilisés pour déterminer les pseudo-résistances R_{ij} et constituer la matrice du problème.
- Par inversion, on obtient l'estimation suivante des charges $h_i^{(n)}$.
- Le critère d'arrêt porte sur la variation de l'estimation des charges entre deux itérations successives.

3.2.2 *Modèle de perte de charge*

Il faut maintenant que nous choissions un modèle de perte de charge et que nous paramétrions les réseaux en fonction du modèle choisi. C'est à dire que nous devons expliciter ΔH_{ij} en fonction du débit Q_{ij} et, à partir de la **Carte Numérique des Altitudes** et des **squelettes**, apprécier les différents paramètres nécessaires au calcul de la perte de charge.

3.2.2.1 *Paramètres hydrauliques*

Comme nous l'avons indiqué en introduction, nous prenons pour base les caractéristiques du col pour paramétrer chacun des liens. Pour chaque réseau correspondant à un niveau de miroir donné nous avons besoin de connaître les grandeurs suivantes :

- la section de passage de chaque col
- la longueur de chaque lien
- le diamètre hydraulique de chaque col

Le col est normalement caractérisé par la section de passage la plus petite sur le lien. Mais, par souci de rapidité, nous avons préféré localiser le col en utilisant *l'image de distance au fond* (voir paragraphe 2.4.1.2) de la **Carte des Régions Submergées** correspondante. C'est à dire que nous supposons que le col est situé là où la largeur au miroir est la plus petite.

3.2. Un premier modèle hydraulique

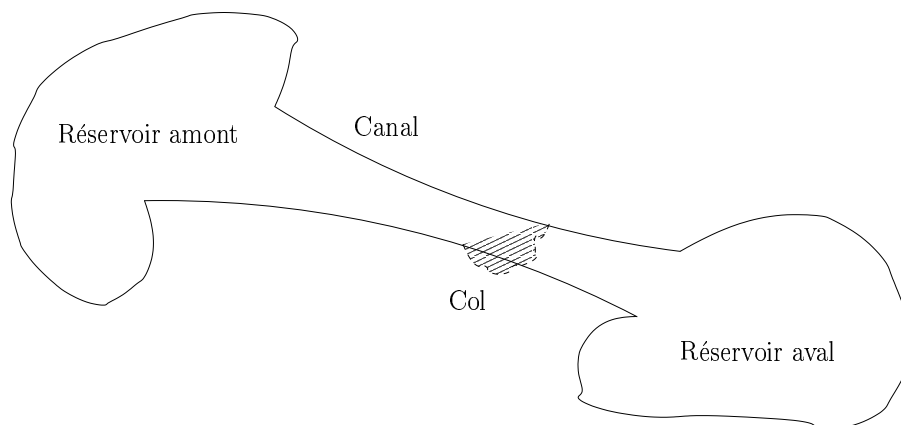


FIG. 3.2 : Sur chaque lien du réseau nous localisons un col. A l'aide de la **Carte Numérique des Altitudes**, en utilisant la méthode des trapèzes nous calculons la section de passage de ce col.

Le calcul de la section de passage du col se fait par la méthode des trapèzes en utilisant la **Carte Numérique des Altitudes**. Dans ce premier modèle, nous n'avons pas considéré la déformation de la surface libre au passage du col. Ces différents paramètres sont donc calculés pour le niveau du miroir considéré, et par conséquent restent constants tout au long de la procédure de résolution des équations. Ils sont à déterminer à partir de la **Carte Numérique des Altitudes** et des squelettes.

Les sections aux cols sont calculées par la méthode des trapèzes à partir de la **Carte Numérique des Altitudes**, les diamètres hydrauliques aux cols sont calculés à partir des sections et des périmètres mouillés. Ces derniers sont eux aussi calculés à partir de la **Carte Numérique des Altitudes**, par interpolation linéaire.

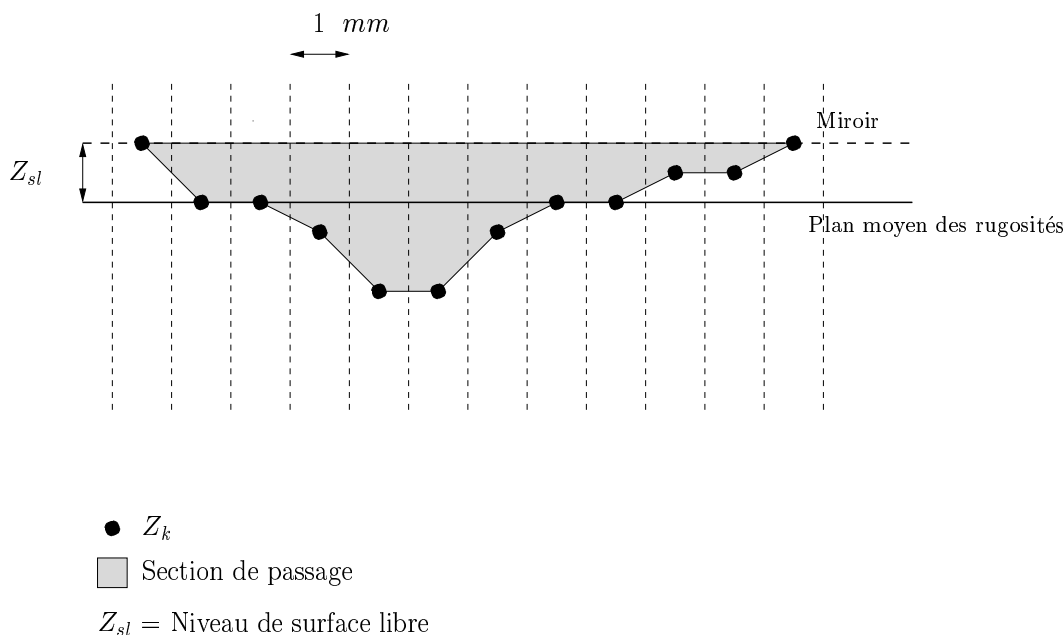


FIG. 3.3 : Sur chaque lien, nous calculons par la méthode des trapèzes la section de passage du col afin de pouvoir par la suite paramétrer notre modèle de perte de charge.

Connaissant le niveau de surface libre (z_{sl}), les sections sont calculées par la formule suivante :

$$S = \sum_k \frac{(z_{sl} - z_k)(z_{sl} - (z_{k+1}))}{2} \text{ mm}^2 \quad (3.3)$$

Et les périmètres mouillés nous sont donnés par :

$$P = \sum_k \sqrt{1 + ((z_{k+1}) - z_k)^2} \text{ mm} \quad (3.4)$$

Les sections et périmètres mouillés sont calculés le long de la droite représentant la largeur au miroir. Cette droite relie le col aux points émergés les plus proches sur la carte des distances au fond. (z_{k+1}) représente le point suivant sur la droite ainsi définie.

3.2.2.2 Pertes inertielles

Dans un premier temps nous avons considéré un modèle de perte de charge purement inertiel, c'est à dire que nous avons complètement négligé les frottements visqueux. Comme nous l'avons déjà vu (voir chapitre 1) plusieurs auteurs ont mis en évidence l'importance des rugosités émergées sur l'écoulement (Herbich et Shulits 1964, Emmett 1970, Barthurst 1985, Rauws 1980, Abrahams, Parsons et Luk 1986). Dans son étude analytique, Lawrence propose même que lors de l'inondation partielle d'une surface les forces de trainées causées par les rugosités émergées sont la principale source de dissipation de l'énergie (Lawrence 1997, Lawrence 2000). Ces considérations nous ont amené à formuler les pertes de charge sur les liens de la manière suivante :

$$\Delta H_{ij} = \frac{v_{ij}^2}{2g} \quad (3.5)$$

L'équation de conservation de l'énergie devient donc :

$$h_i - h_j = \frac{v_{ij}^2}{2g} \quad (3.6)$$

Où v_{ij} est la vitesse débitante du fluide dans la section du col du lien (figure 3.2).

Sur chaque lien du réseau considéré la perte de charge correspond donc à l'énergie cinétique au col. Autrement dit, on considère que l'écoulement au col débouche brutalement dans le réservoir aval avec dissipation intégrale de l'énergie cinétique.

Si nous remplaçons la vitesse au col par son expression en fonction du débit sur le lien et de la section du col, nous obtenons :

$$\Delta H_{ij} = \frac{Q_{ij}^2}{2gS_{ij}^2} \quad (3.7)$$

Avec S_{ij} la section de passage au col et Q_{ij} le débit sur le lien entre les noeuds i et j .

3.2.2.3 Pertes par friction

Dans un deuxième temps, afin de voir quelle part elle pouvait prendre dans la perte totale d'énergie, nous avons tenu compte de la friction laminaire ou turbulente. Les pertes de charges dues aux frottements sur le lien ij ($\Delta_{linéaire}H_{ij}$) peuvent être estimées de la manière suivante :

$$\Delta_{linéaire}H_{ij} = \alpha \frac{f L_{ij} v_{ij}^2}{D_{ij} 2g} \quad (3.8)$$

Où f est le coefficient de Darcy-Weisbach local, L_{ij} la longueur du lien, D_{ij} le diamètre hydraulique au col.

La formulation de la perte par friction au moyen de la vitesse au col et du diamètre hydraulique de celui-ci tend a priori à la surestimer considérablement. Pour éviter une intégration le long du lien, lourde et sans doute illusoire, nous nous sommes contentés d'introduire un coefficient modérateur $\alpha < 1$, invariable dans l'ensemble du réseau, permettant de moduler l'importance relative de la friction dans la perte de charge globale du réseau. L'influence de ce coefficient sur le résultat sera examinée.

Chaque lien étant considéré comme un canal lisse, nous avons choisi d'utiliser les formules classiques pour le coefficient de Darcy-Weisbach. Pour les écoulements laminaires nous utilisons donc la formule de Poiseuille :

$$f = \frac{64}{Re} \quad (3.9)$$

Pour le régime turbulent, nous avons opté pour la formule de Blasius, pour sa facilité de mise en oeuvre :

$$f = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (3.10)$$

En effet les autres formules, de type Nikuradse, nécessitent la résolution d'une équation non linéaire, ce qui allongerait considérablement le temps de calcul. Nous avons également choisi de ne pas appliquer de formules particulières pour la zone de transition entre le régime laminaire et turbulent pour les mêmes raisons et de plus Savat (Savat 1980) a montré que dans cette zone les formules de la zone turbulente sont tout à fait acceptables pour des écoulements peu profonds ou supercritiques. Nous avons donc prolongé les lois de Poiseuille et Blasius jusqu'à leur intersection sur le diagramme de Moody. La transition entre régime laminaire et turbulent se trouve ainsi abaissée à $Re = 1190$ environ.

Donc en considérant les pertes de charges linéaires, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\begin{aligned} h_i - h_j &= \frac{Q_{ij}^2}{2gS_{ij}^2} + \alpha \frac{fL_{ij}}{D_{ij}} \frac{Q_{ij}^2}{2gS_{ij}^2} \\ &= \left(1 + \alpha \frac{fL_{ij}}{D_{ij}}\right) \frac{Q_{ij}^2}{2gS_{ij}^2} \end{aligned}$$

3.2.3 Formulations matricielles

3.2.3.1 La matrice des coefficients hydrauliques

La formule de perte de charge qui vient d'être définie au paragraphe précédent doit être appliquée sur chacun des liens du réseau considéré. Elle traduit la relation approximativement quadratique entre la chute de potentiel et le débit au noeud.

$$|h_i - h_j| = M_{ij} (Q_{ij}) Q_{ij}^2 \quad (3.11)$$

D'après le paragraphe précédent, le coefficient hydraulique M_{ij} s'exprime de la façon suivante dans le cas où nous considérons les pertes de charge inertielles et linéaires :

$$M_{ij} = \begin{cases} \left(1 + \alpha \frac{fL_{ij}}{D_{ij}}\right) \frac{1}{2gS_{ij}^2} & \text{si les noeuds } i \text{ et } j \text{ sont reliés} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si les pertes par friction sont ignorées ($\alpha = 0$), ce coefficient se réduit à l'inverse du carré de la section au col, il est donc fixé une fois pour toutes par le niveau du miroir considéré. Si au contraire la friction est prise en compte, les coefficients hydrauliques dépendent plus ou moins de la vitesse au col, donc du débit Q_{ij} , par le biais du coefficient de Darcy-Weisbach local f . Les coefficients hydrauliques peuvent être rangés dans une matrice symétrique.

Cette matrice peut être vue comme l'analogie des matrices de résistances parfois utilisées dans l'étude des problèmes linéaires comme les transferts thermiques dans les milieux poreux (Jegatheesan 1987, Franck et Lobb 1988). Mais l'analogie s'arrête là, car comme nous l'avons déjà remarqué nos équations ne sont pas linéaires et nous ne pouvons pas calculer de conductance équivalente sur nos réseaux. Cependant, l'introduction de cette matrice va nous permettre de construire plus facilement la matrice du problème comme nous allons le voir dans ce qui suit.

3.2.3.2 La matrice des pseudo résistances

En réécrivant la formule 3.11 de la façon suivante :

$$h_i - h_j = M_{ij} (Q_{ij}) |Q_{ij}| Q_{ij} \quad (3.12)$$

$$\text{avec } R_{ij} = M_{ij} (Q_{ij}) |Q_{ij}| \quad (3.13)$$

nous faisons apparaître ce que nous appellerons de manière abusive la “résistance” hydraulique du lien. De plus, la formule devient ainsi algébrique avec la convention $Q_{ij} > 0$ lorsque l’écoulement se fait de i vers j . Ainsi, comme le montre l’équation 3.12 on a bien $h_i > h_j$ lorsque l’écoulement se fait de i vers j .

Le terme de “résistance” hydraulique est abusif car notre modèle de perte de charge n’est pas linéaire comme le voudrait une stricte analogie avec les lois de Kirschhoff.

3.2.3.3 La matrice du problème des charges

Ensuite, la base de notre problème est la conservation du débit en chaque noeud du réseau. Au noeud i nous écrivons donc :

$$\sum_{j \neq i} Q_{ij} = 0$$

Q_{ij} est le débit sur le lien entre les noeuds i et j , à ce titre Q_{ij} n’a de sens que si i et j sont reliés.

L’équation de conservation du débit au noeud i exprimée en fonction des charges s’écrit donc :

$$\sum_{j \neq i} \frac{h_i - h_j}{R_{ij}} = 0$$

$$h_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{R_{ij}} \right) - \sum_{j \neq i} \frac{h_j}{R_{ij}} = 0 \quad (3.14)$$

Si nous supposons les résistances R_{ij} données, le système que nous devons résoudre pour déterminer les charges h_i sera donc constitué des N équations de conservation du débit en chacun des N noeuds du réseau considéré. Nous notons N_E le nombre de noeuds sur la frontière amont (Entrée) et N_S le nombre de noeuds sur la frontière aval (Sortie).

La matrice du problème est donc une matrice de taille $N \times N$ dont les coefficients sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_{ii} = 1 & \text{si } 0 \leq i \leq N_E - 1 \\ A_{ii} = 1 & \text{si } N - N_S \leq i \leq N - 1 \\ A_{ii} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{R_{ij}} & \text{si } N_E - 1 < i < N - N_S \\ A_{ij} = -\frac{1}{R_{ij}} & \end{array} \right.$$

3.2. Un premier modèle hydraulique

itérative. Le principe de cette méthode est le suivant (figure 3.4) :

1. Initialisation des charges aux noeuds $h_i^{(0)}$, en les identifiant à l'altitude des points correspondants du miroir.
2. Calcul d'une première estimation des débits correspondant à ces charges en utilisant l'équation de Bernoulli et les sections aux cols en ignorant les pertes par friction :

$$|Q_{ij}^{(1)}| = S_{ij} \sqrt{2g|h_i^{(0)} - h_j^{(0)}|}$$

3. A partir de cette estimation des débits nous calculons successivement les coefficients hydrauliques et les pseudo résistances, puis nous construisons la matrice du système. La résolution du système nous donne les nouvelles charges.
4. Nous relançons le processus avec les nouvelles charges. Cependant, dès la seconde itération, l'évaluation du débit est affinée en y intégrant le cas échéant les pertes de charge par friction au moyen du coefficient hydraulique adéquat.

En ce qui concerne l'initialisation des charges, pour un réseau donné, nous avons logiquement choisi de considérer le miroir utilisé pour construire la **Carte des Régions Submergées** et donc le réseau correspondant. Nous rappelons, que la surface libre finale est supposée peu différente du miroir initial, plane et parallèle au plan moyen des rugosités. La validité de cette hypothèse sera à vérifier une fois que notre méthode aura convergé et sera discutée dans le paragraphe suivant.

Les débits sur chaque lien et pour l'itération en cours (n), sont calculés en fonction des charges amont et aval sur celui-ci issues de l'itération précédente ($n - 1$) et des coefficients hydrauliques. Ces derniers étant dans le cas général fonction du débit que nous sommes précisément en train d'évaluer, ils ne peuvent être calculés qu'au moyen des débits évalués à l'itération précédente ($n - 1$). Alternativement, une équation non algébrique aurait pu être résolue pour obtenir le débit, mais cette solution n'a pas été retenue afin d'alléger le code. Nous pouvons alors construire la matrice des débits en nous aidant de la *matrice des coefficients hydrauliques* de la manière suivante :

$$Q_{ij}^{(n)} = \begin{cases} Q_{ij}^{(n)} = \sqrt{\frac{2g|h_i^{(n)} - h_j^{(n)}|}{M_{ij}(Q_{ij}^{(n-1)})}} \text{ si } M_{ij}(Q_{ij}^{(n-1)}) \neq 0 \\ 0 \text{ si } M_{ij}(Q_{ij}^{(n-1)}) = 0 \end{cases}$$

Connaissant le débit pour l'itération considérée (n) sur chaque lien nous pouvons facilement construire la matrice du problème et l'inverser par la méthode de Gauss. Nous obtenons alors les charges $h_i^{(n)}$ qui serviront à calculer les débits de l'itération suivante ($n + 1$).

A chaque fois que nous inversons un système du type $A^{(n)}H^{(n)} = S$ (où l'indice est associé au numéro de l'itération), les nouvelles charges (n) vérifient la conservation du débit en chaque noeud. La condition d'arrêt de notre méthode itérative concerne donc les charges. Si d'une itération à l'autre les charges ont varié d'une valeur inférieure à un seuil fixé nous stoppons le processus.

Si $\|H^{(n+1)} - H^{(n)}\| \leq \epsilon$ le processus est stoppé.

Avec $\|H\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} h_i^2}$

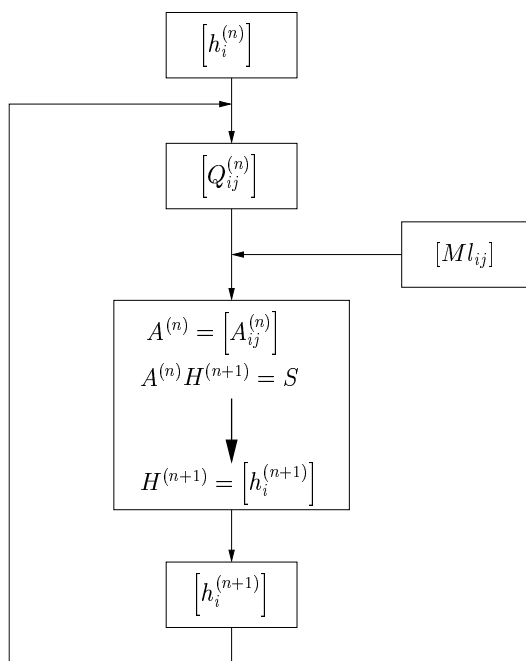


FIG. 3.4 : Si nous considérons que les inconnues de notre système sont les charges aux noeuds et que les débits sur chaque lien sont des paramètres dépendant de ces inconnues nous pouvons mettre en oeuvre une méthode itérative de résolution du problème dont voici le principe général.

3.3 Discussion des résultats

Dans ce premier modèle les principaux résultats sont les charges aux noeuds (h_i) ainsi que les débits sur chacun des liens (Q_{ij}). Les sections de passage aux cols étant constantes il est alors très facile de calculer les vitesses correspondantes. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, nous avons fait une hypothèse très importante quant à la forme de la surface libre et nous devons dès lors vérifier sa validité.

Après convergence de l'algorithme, nous obtenons pour une pente et un taux d'inondation donnés, les charges aux noeuds du réseau correspondant. Un exemple de la répartition des charges dans le plan est donné sur la figure 3.5. Les charges sont représentées en fonction de la distance au bord aval. Dans cette représentation, le miroir se présente comme une droite qui est la ligne de pente de la surface. Nous constatons que les charges s'écartent considérablement du miroir, l'importance de ces écarts étant à apprécier par comparaison

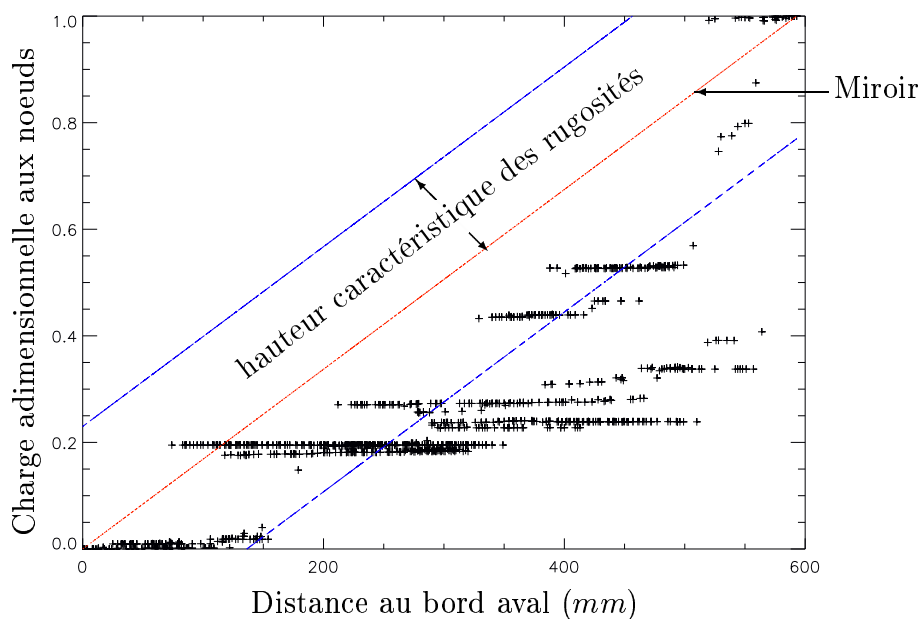


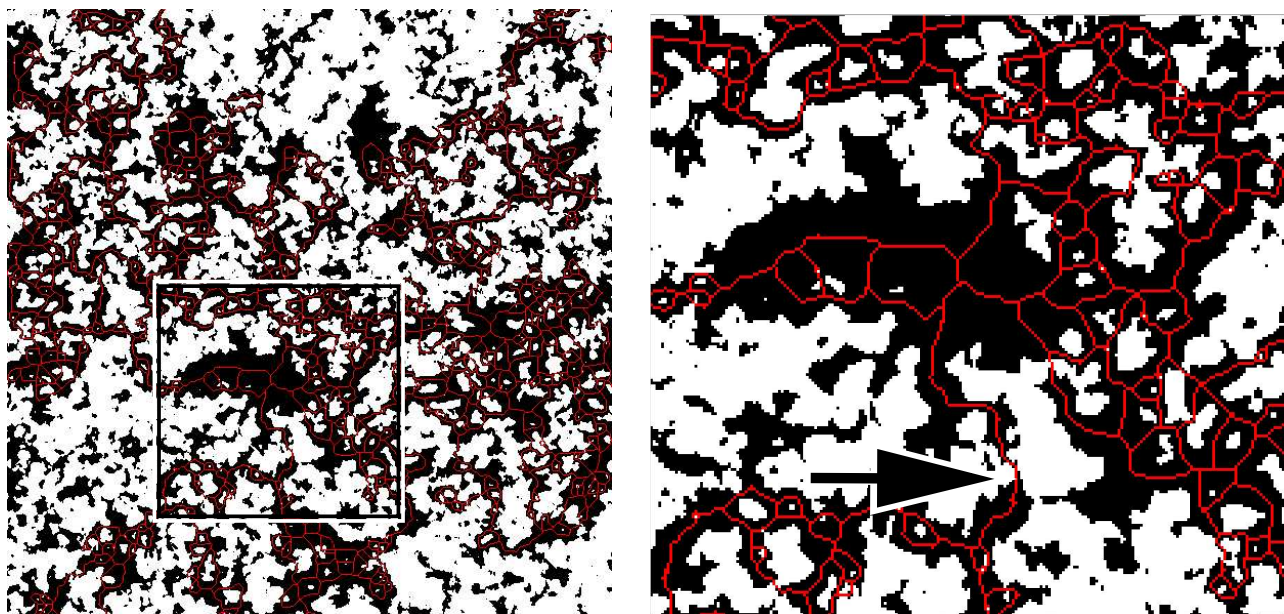
FIG. 3.5 : La perte de charge sur notre échantillon de surface se fait en “marches d’escalier” et de manière brutale. Notre premier modèle est donc incapable de simuler des charges vraisemblables.

avec la hauteur typique des rugosités indiquée sur la figure. Ce qui va à l’encontre de notre hypothèse. **Notre premier modèle est donc inopérant.**

Si nous examinons plus en détail la répartition spatiale des charges finales (figure 3.5), nous observons des zones très étendues à charge quasiment constante, sortes de vastes flaques hydrostatiques. L’essentiel de la perte de charge sur la surface se produit par à-coups et très localement, concentrée en quelques noeuds du réseau. Pour comprendre la raison de ce phénomène il faut observer attentivement les **Cartes des Régions Submergées** ainsi que les squelettes correspondants. Sur la figure 3.6 nous pouvons voir que le squelette traverse des étranglements sévères où la largeur au miroir est particulièrement petite (jusqu’à un pixel). Les cols situés en ces points ont une section de passage particulièrement petite que le débit doit cependant traverser. Des vitesses considérables apparaissent dans ces étranglements, engendrant une perte de charge également importante.

En dehors de ces quelques singularités, l’écoulement circule dans des liens dont les cols sont beaucoup plus larges, où les pertes de charge sont comparativement très faibles. Tous les noeuds situés en amont de l’un de ces goulots d’étranglement ont quasiment la même charge, ce qui explique les larges paliers que nous pouvons observer sur la figure 3.5. Ces singularités sont alors le siège de pertes de charge importantes, puisque les sections des cols n’évoluent pas avec les charges amont et aval des liens correspondants.

Dans une telle configuration, les pertes de charge inertielles sont largement dominantes devant les pertes de charge linéaires et le paramètre α que nous avons introduit dans l’équation 3.8 du paragraphe 3.2.2.3 est sans influence notable sur les résultats de nos simulations. Comme nous venons de le remarquer cela est dû au fait que l’essentiel de la perte de charge provient de quelques étranglements du domaine. De plus, ces étrangle-



(a) Carte des Régions Submergées et son squelette

(b) Zoom

FIG. 3.6 : *L'image (b) correspond au zoom de la zone encadrée sur l'image (a). Sur l'image (b) nous distinguons nettement un passage particulièrement étroit puisqu'à l'endroit pointé par la flèche la largeur au miroir fait 1 pixel.*

ments engendrent de larges régions à surface libre quasi horizontale incompatibles avec l'hypothèse de base de notre modélisation selon laquelle la surface libre s'éloigne peu du miroir parallèle à la ligne de pente.

C'est donc aux effets de ces étranglements du réseau qu'il faut remédier. Ce sera l'objet de notre second modèle, dans lequel nous allons libérer les hauteurs d'eau aux cols de façon à ce que les sections correspondantes s'ajustent aux débits locaux, permettant une répartition plus régulière des pertes de charge dans le plan d'écoulement.

3.4 Deuxième modèle hydraulique

Le principal problème de notre premier modèle est donc qu'il ne prend pas en compte l'évolution de la surface libre aux cols. Dans ce deuxième modèle, le principe général de résolution reste sensiblement le même, mais nous allons adapter le modèle de perte de charge afin de pouvoir à chaque itération calculer la charge aux cols.

3.4.1 Principe général

Nous supposons toujours que les noeuds sont des réservoirs de niveau constant lors d'une itération, en revanche nous considérons maintenant que les cols fonctionnent

3.4. Deuxième modèle hydraulique

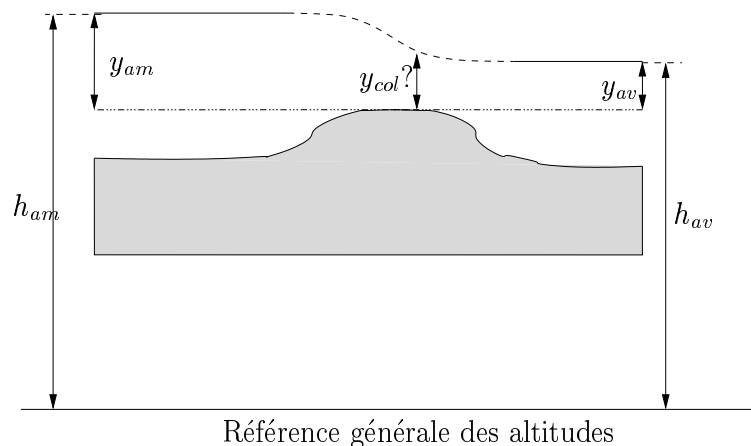


FIG. 3.7 : *Connaissant les charges amont et aval sur le lien nous allons déterminer la hauteur d'eau au col en fonction des différents régimes d'écoulement.*

comme des seuils. Le but de ce deuxième modèle est donc de déterminer le régime d'écoulement sur le lien en fonction des charges amont et aval afin d'en déduire la hauteur d'eau (y_{col}) et la vitesse (v_{col}) au col (figure 3.7). La notation y désigne, dans le lien considéré, l'altitude locale de la surface libre dont nous prenons maintenant en compte l'écart au miroir, mesurée avec une référence locale située au point bas de la section droite au col.

Rappelons pour cela quelques fondements de la théorie des canaux à ciel ouvert. Nous allons utiliser les notions de charge spécifique et de nombre de Froude. La charge spécifique dans une section droite donnée d'un canal est la charge hydraulique où l'altitude de la surface libre est mesurée à partir du point bas de la section droite considérée. Lorsqu'on étudie, pour un débit donné, la charge spécifique en fonction de la hauteur d'eau dans la section, on obtient une caractéristique qui passe par un minimum pour une hauteur d'eau appelée critique. Le nombre de Froude est un paramètre hydraulique sans dimension définie de façon à être égal à 1 pour la hauteur d'eau critique, et respectivement inférieur ou supérieur à 1 selon que la hauteur d'eau est supérieure ou inférieure à la valeur critique. Sa définition générale, indépendamment de la géométrie de la section droite considérée, est :

$$Fr = \frac{v_{col}^2 L}{gS}$$

où v est la vitesse d'écoulement, L la largeur au miroir et S l'aire de la section droite.

Le nombre de Froude décrit le rapport des forces d'inertie aux forces de pesanteur, ou encore le rapport de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle de l'écoulement local. Plus ce rapport est élevé dans une région donnée d'un canal ou d'un cours d'eau, plus on a affaire à un écoulement "dynamique", en opposition aux régions "tranquilles" où, à l'extrême, les vitesses sont nulles. En fonction du nombre de Froude nous pouvons distinguer trois régimes d'écoulement :

- Le régime **fluvial** ou **sous-critique**, pour lequel $Fr < 1$. Dans ce cas, les ondes de gravité peuvent remonter le courant, l'amont est influencé par l'aval.
- Le régime critique, pour lequel $Fr = 1$. Ce régime correspond au débit maximum pour une charge spécifique donnée.
- Le régime **torrentiel** ou **sur-critique** pour lequel $Fr > 1$. Dans ce cas, les ondes de gravité ne peuvent pas remonter le courant, l'amont n'est pas influencé par l'aval.

En écoulement permanent, selon le débit et les conditions à l'amont et à l'aval du canal considéré, nous pouvons distinguer quatre configurations d'écoulement sur les canaux que représentent les liens (Lencastre 1966) :

- L'écoulement est sous-critique tout le long du canal.
- L'écoulement d'abord sous-critique (en amont du col) devient super-critique (en aval du col). Le col oblige l'écoulement à devenir super-critique puis celui-ci repasse en régime sous-critique avant la fin du canal ce qui provoque un ressaut hydraulique. Nous avons la hauteur d'eau critique au droit du seuil.
- L'écoulement est super-critique tout le long du canal.
- L'écoulement d'abord super-critique devient sous-critique (en amont du col) puis redevient super-critique en aval du col. Lors du passage du régime sous-critique au régime super-critique on observe un ressaut hydraulique puis une chute en aval du col lorsque l'écoulement redevient super-critique. Nous avons la hauteur d'eau critique au droit du seuil.

Appliquant ces règles au cas de l'écoulement le long d'un lien du réseau représentatif de notre surface rugueuse, les deux noeuds limitant le lien étant considérés comme des réservoirs hydrostatiques, l'écoulement doit être sous-critique à l'entrée et à la sortie du lien. Ainsi, seules les deux premières configurations d'écoulement que nous venons d'évoquer sont en accord avec notre modèle. En résumé :

- Soit l'écoulement est sous-critique tout au long du lien et les pertes de charges sont essentiellement de type linéaire (la friction domine).
- Soit l'écoulement en aval du col est super-critique, nous avons la hauteur d'eau critique au col. Les pertes de charge sont alors essentiellement de type inertiel (ressaut hydraulique lors du passage du régime super-critique au régime sous-critique avant le deuxième réservoir ou chute dans celui-ci, selon le niveau qui y règne).

Dans ce qui suit nous allons détailler les hypothèses et les équations qui nous permettent de calculer la hauteur d'eau et la vitesse au col dans les deux configurations d'écoulement que nous avons retenu.

3.4.2 *Écoulement sous-critique au col*

Dans le cas d'un écoulement sous-critique au col, la perte de charge est essentiellement due au frottement. Nous faisons également l'hypothèse que les frottements sont négligeables en amont du col, nous avons donc le système suivant :

$$\begin{cases} y_{col} + \frac{v_{col}^2}{2g} = y_{am} \\ h_{am} - h_{av} = \alpha f' \frac{L}{D_{col}} \frac{v_{col}^2}{2g} \end{cases} \quad (3.15)$$

Où les indices *col*, *am* et *av* se rapportent respectivement au col, et aux réservoirs situés à l'amont et à l'aval de celui-ci. g est l'accélération de la pesanteur, v la vitesse, L la longueur du lien, D son diamètre hydraulique. h représente la charge aux noeuds (niveau de surface libre mesurée par rapport à la référence générale) tandis que y est la hauteur d'eau mesurée par rapport au point bas de la section droite du col.

f' est le coefficient de Darcy-Weisbach. Comme dans notre premier modèle les liens sont supposés être des canaux lisses, nous utilisons les formules classiques (Poseuille et Blasius) pour calculer le coefficient de frottement. Le coefficient α permet de modérer la surestimation des pertes de charge due à l'utilisation des paramètres au col.

La première équation du système 3.15 exprime la conservation de l'énergie entre le réservoir (noeud) amont et le col. La deuxième équation indique que la perte de charge entre les réservoirs amont et aval est due aux frottements visqueux $\left(\alpha f' \frac{L}{D_{col}} \frac{v_{col}^2}{2g} \right)$.

Pour pouvoir résoudre ce système nous faisons l'hypothèse supplémentaire que la section de passage au col est triangulaire. Cette simplification nous évite de prendre en compte la forme réelle de la section droite au col pour l'évaluation des paramètres hydrauliques comme nous l'avons fait dans notre premier modèle (paragraphe 3.2.2 et figure 3.3). La hauteur d'eau au col étant maintenant variable, il aurait fallu en effet réévaluer tous les paramètres hydrauliques à chaque itération, complication sans doute superflue compte tenu des nombreuses autres approximations du modèle hydraulique. Nous substituons donc à la section droite réelle une section triangulaire fictive dont le sommet respecte le point bas du col et dont l'angle au sommet (α_{col}) est calculé à partir de l'aire de la section droite de référence définie par la position du miroir (Voir annexe C).

Nous avons donc pour le diamètre hydraulique :

$$D_{col} = 2y_{col} \sin(\alpha_{col}) \quad (3.16)$$

Où α_{col} est le demi-angle au sommet du triangle représentant la section de passage.

Le nombre de Reynolds est donné par :

$$Re = \frac{v_{col} D_{col}}{\nu} \quad (3.17)$$

Où ν est la viscosité cinématique du fluide.

Ainsi dans les cas laminaires, à partir du système 3.15 et en utilisant la formule de Poiseuille, on obtient la hauteur d'eau au col (y_{col}) en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{K^2}{2g}y_{col}^4 + y_{col} - y_{am} = 0 \quad (3.18)$$

avec $K = \frac{(h_{am} - h_{av})g \sin^2(\alpha_{col})}{8\nu L}$

S'il y a plusieurs racines réelles et positives à cette équation nous pouvons déterminer celle qui est en accord avec notre modèle sachant que nous devons alors avoir :

$$y_{col} \in [y_{cr}, y_{am}]$$

Où $y_{cr} = \frac{4}{5}y_{am}$ est la hauteur d'eau critique au dessus du col (Voir annexe C).

Par contre, dans le cas d'un écoulement turbulent nous considérons la formule Blasius et y_{col} est alors solution de l'équation :

$$\frac{0,316\nu^{1/4}L}{2g(2\sin(\alpha_{col})^{5/4})}(2g(y_{am} - y_{col}))^{7/8} = (h_{am} - h_{av})y_{col}^{5/4} \quad (3.19)$$

Si nous notons :

$$f(y_{col}) = \frac{0,316\nu^{1/4}L}{2g(2\sin(\alpha_{col})^{5/4})}(2g(y_{am} - y_{col}))^{7/8} - (h_{am} - h_{av})y_{col}^{5/4}$$

Nous avons alors :

$$\frac{d}{dy_{col}}f(y_{col}) = -\frac{7}{8}\frac{0,316\nu^{1/4}L}{2g(2\sin(\alpha_{col})^{5/4})}(2g)^{7/8}(y_{am} - y_{col})^{-1/8} - \frac{5}{4}(h_{am} - h_{av})y_{col}^{1/4}$$

Sachant que dans le cas d'un écoulement sous-critique au col nous devons avoir :

$$y_{cr} < y_{col} \leq y_{am}$$

Avec $y_{cr} = \frac{4}{5}y_{am}$ pour une section triangulaire (Voir Annexe C).

La fonction $f(y_{ij})$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[y_{cr}, y_{am}]$, nous pouvons donc résoudre l'équation 3.19 par dichotomie sur cet intervalle.

De plus comme $f(y_{am}) = -(h_{am} - h_{av})y_{am}^{5/4} < 0$, l'équation 3.19 admet une solution si et seulement si :

$$\frac{0,316\nu^{1/4}L}{2g(2\sin(\alpha_{col})^{5/4})}(2g\frac{y_{am}}{5})^{7/8} - (h_{am} - h_{av})(\frac{4y_{ij}}{5})^{5/4} > 0$$

3.4. Deuxième modèle hydraulique

Une fois que nous connaissons la hauteur d'eau au col il est aisé, en utilisant la première équation du système 3.15 d'en déduire la vitesse du fluide au col (équation 3.20) :

$$v_{ij} = \sqrt{2g(y_{am} - y_{col})} \quad (3.20)$$

Ainsi que la section de passage au col (S_{ij}) et donc finalement le débit sur le lien :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= y_{col}^2 \tan(\alpha_{col}) \\ Q_{ij} &= v_{ij} S_{ij} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De même que pour le premier modèle, pour ne pas risquer d'introduire une cause d'instabilité dans notre code numérique, nous ignorons la discontinuité du coefficient de Darcy-Weisbach à la transition (paragraphe 3.2.2.3).

Nous ne pouvons pas savoir à priori quel est le régime d'écoulement d'un lien. Nous calculons donc les conditions des deux régimes ($y_{lam}, v_{lam}, Re_{lam}$ et $y_{turb}, v_{turb}, Re_{turb}$), puis si les deux systèmes (laminaire et turbulent) admettent une solution nous faisons notre choix à l'aide des nombres de Reynolds (figure 3.8). Dans ce cas, pour que le régime laminaire (respectivement turbulent) soit vraisemblable il faut que $Re_{lam} < Re_{limite}$ (respectivement $Re_{turb} > Re_{limite}$).

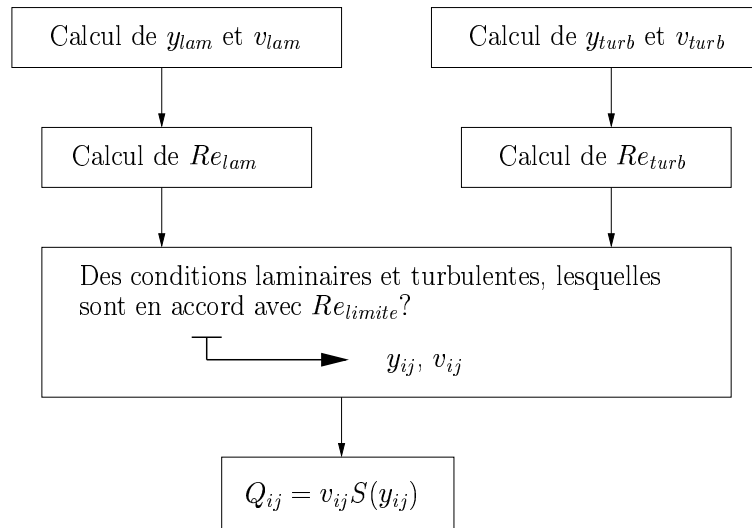


FIG. 3.8 : Dans le cas d'un écoulement sous-critique au col, nous calculons les hauteurs d'eau et les vitesses au col pour les régimes laminaire et turbulent. Dans un second temps, en fonction du nombre de Reynolds (calculé au col), nous déterminons lequel de ces régimes est adéquat.

3.4.3 Écoulement critique au col

Pour un niveau d'eau amont donné (y_{am}), si nous considérons des valeurs décroissantes du niveau d'eau aval (y_{av}), l'écoulement est sous critique tant que nous n'avons pas atteint les conditions critiques au col. C'est à dire, si nous tenons compte de notre hypothèse d'une section de passage triangulaire au col (Voir Annexe C) :

$$y_{cr} = \frac{4}{5}y_{am} \text{ et } v_{cr} = \sqrt{2g\frac{y_{am}}{5}} \quad (3.22)$$

Où y_{cr} et v_{cr} sont la hauteur d'eau critique et la vitesse critique au col.

La valeur limite de y_{av} est donnée par :

$$y_{av} = y_{am} - f'(Re_{cr}) \frac{v_{cr}^2 L}{2gD_{cr}} \quad (3.23)$$

Pour des valeurs inférieures de y_{av} l'écoulement aval est supercritique au delà du col. Nous avons alors un ressaut ou une chute avant le réservoir aval responsable d'une perte de charge supplémentaire.

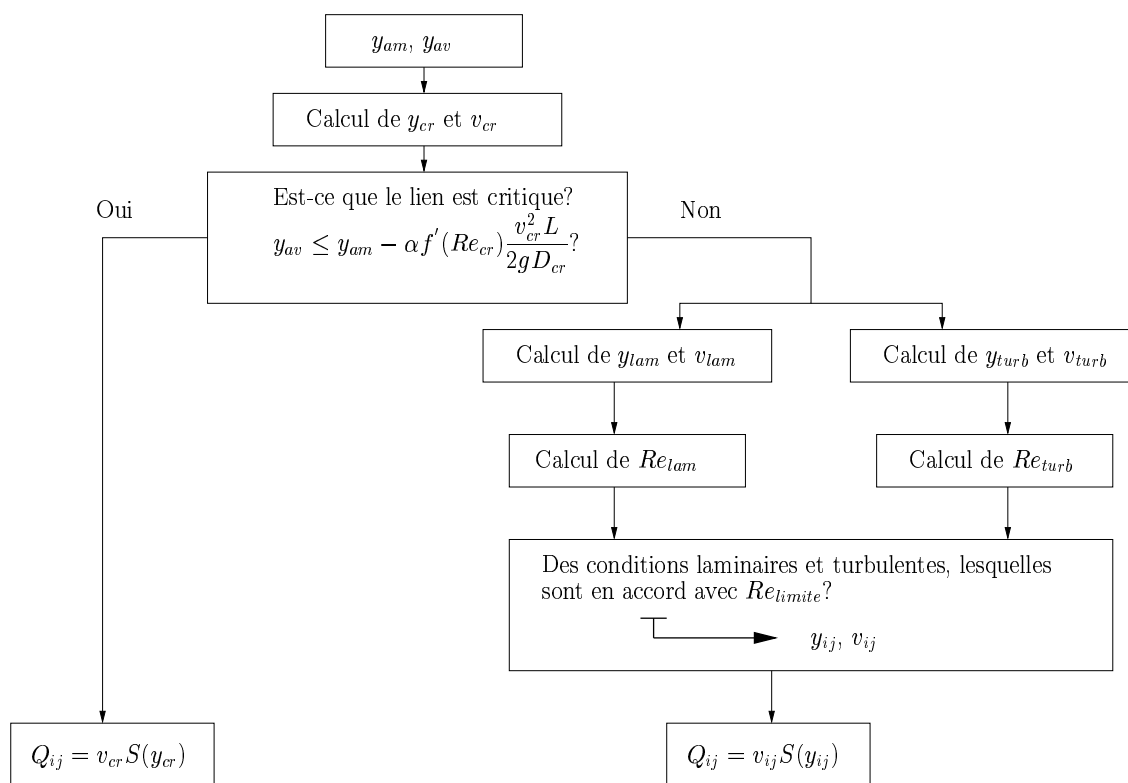


FIG. 3.9 : Sur chaque lien, nous devons identifier quel est le régime d'écoulement (sous-critique ou critique) afin de pouvoir calculer le débit sur le lien.

Le calcul du débit dans un lien présenté dans ce paragraphe et le précédent ne se conçoit évidemment que si y_{am} est positif. Or, au cours de la résolution itérative du problème, voire même dans la configuration finale, il peut arriver que cette condition ne soit satisfaite

par aucune des charges régnant aux noeuds adjacents. Nous avons donc fixé pour chaque noeud un niveau minimum en dessous duquel la charge de celui-ci ne peut aller. Ce niveau minimum est bien évidemment fonction des cotes du fond au noeud et des points bas des liens qui lui sont reliés. Si ce niveau minimum est atteint au noeud amont d'un lien le débit est alors fixé à 0.

3.4.4 La Méthode Itérative de Résolution du Problème

Pour chaque réseau considéré notre méthode consiste à modifier, au fur et à mesure des itérations, les charges aux noeuds afin de finir par satisfaire la conservation du débit en chaque noeud. Celle-ci s'écrit :

$$\forall i \quad \sum_{j \in \mathcal{E}} Q_{ij} = 0 \quad (3.24)$$

Où \mathcal{E} est l'ensemble des noeuds qui sont reliés au noeud i par un ou plusieurs liens.

Pour cela (figure 3.10) :

1. Nous initialisons les charges ($h_i^{(0)}$) en considérant le miroir qui a servi à générer la **Carte des Régions Submergées** et le réseau correspondant.
2. A partir de ces charges, en utilisant les équations décrites aux paragraphes précédents (paragraphes 3.4.2 et 3.4.3), nous calculons les débits ($Q_{ij}^{(0)}$) sur chacun des liens du réseau.
3. Nous faisons alors la somme algébrique de ces débits en chaque noeud ($Q_i^{(0)}$).

$$Q_i^{(0)} = \sum_{j \in \mathcal{E}} Q_{ij}^{(0)} \quad (3.25)$$

4. Finalement, nous modifions les charges en conséquence ($h_i^{(1)}$).

Contrairement au premier modèle où l'actualisation des charges à chaque itération était faite par une méthode implicite (inversion de matrice), nous adoptons ici une méthode qui s'apparente plutôt à un schéma explicite. En effet, la méthode implicite exige la connaissance des pseudo-résistances des liens, qui permettent d'explicitier la perte de charge dans chaque branche du réseau. Or, dans le second modèle, en cas d'écoulement supercritique avec ressaut ou chute, la perte de charge est déterminée non par une résistance connue a priori, mais par le niveau aval : le ressaut se positionne dans le canal de façon à dissiper l'énergie requise pour atteindre le niveau du bassin aval. Il est exclu dans ce cas de définir a priori les coefficients hydrauliques (paragraphe 3.2.3.1) et les pseudo-résistances. La méthode d'actualisation des charges sera donc de type explicite, comme exposé ci après.

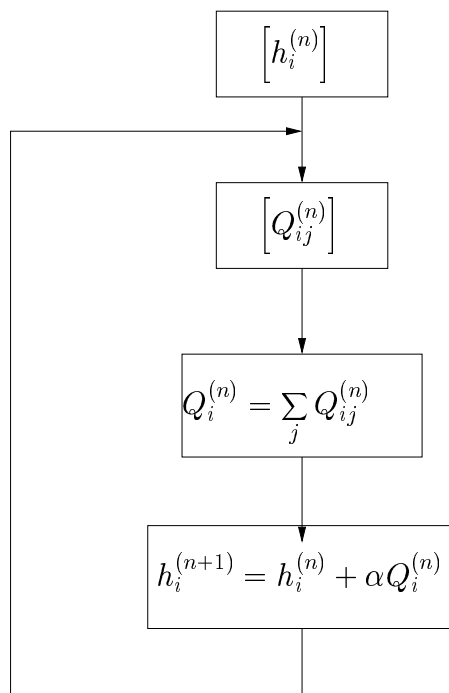


FIG. 3.10 : A partir des charges nous pouvons calculer les débits sur chaque lien (voir figure 3.9). Dans un deuxième temps nous faisons les bilans de ces débits en chaque noeud. Puis nous calculons les nouvelles charges en fonction de ces bilans.

Par convention, $Q_{ij} > 0$ quand l'écoulement se fait de i vers j . Ainsi, lorsque $Q_i > 0$, le réservoir correspondant au noeud i se vide. Les nouvelles charges aux noeuds sont donc calculées de la manière suivante :

$$h_i^{(1)} = h_i^{(0)} - \beta Q_i^{(0)} \quad (3.26)$$

Où β est un coefficient représentant la faculté d'accumulation des réservoirs durant l'itération en cours. Le coefficient β doit être ajusté à chaque itération pour obtenir une convergence satisfaisante de l'algorithme.

Ces différentes opérations sont répétées jusqu'à ce que nous ayons atteint le régime permanent. Dans le cas présent, nous avons adopté un critère de convergence portant sur les débits totaux entrant dans le domaine par la frontière amont et sortant par la frontière aval. La différence relative entre les débits entrant et sortant $\left(\Gamma = \frac{|Q_{entrée} - Q_{sortie}|}{Q_{entrée}} \right)$ doit être inférieure à une valeur préalablement fixée (ϵ).

$$\text{Le critère d'arrêt est : } \Gamma = \frac{|Q_{entrée} - Q_{sortie}|}{Q_{entrée}} < \epsilon \quad (3.27)$$

Une fois que l'algorithme a convergé, les charges obtenues sont telles qu'en chaque noeud la somme algébrique des débits soit la plus petite possible. Il est important de noter qu'en aucune manière nous ne cherchons par cette méthode à calculer les charges d'un régime transitoire correspondant à l'avancée d'un front fluide sur la surface.

3.4. Deuxième modèle hydraulique

Le choix de β est délicat. Deux critères relatifs aux valeurs des charges ainsi calculées ont été introduits afin d'assurer la convergence du calcul. Ils sont le résultat d'ajustements successifs du code selon une démarche relativement empirique.

1. L'évolution entre deux itérations de la charge en un noeud ($h_i^{n+1} - h_i^n$) a été limitée à une valeur raisonnable par rapport à la hauteur caractéristique des rugosités préalablement définie. Ce critère permet de limiter les risques de divergence du code en empêchant de trop brusques variations des charges.
2. En chaque noeud il a été interdit à la charge de descendre en dessous de la valeur minimum qui correspond à une hauteur d'eau nulle ou à un débit nul sur un des liens qui lui sont reliés. Ce deuxième critère s'impose naturellement. Il permet d'éviter au calcul de diverger vers des situations aberrantes telles que l'apparition de charges en dessous de la surface rugueuse ou de y_{am} négatif.

De plus, il est apparu nécessaire de rajouter une condition sur les débits en chaque lien. A chaque itération nous examinons les débits sur tous les liens. Si l'un de ces débits est trop grand devant le débit d'entrée nous abaissons arbitrairement la charge amont du lien concerné.

Lors de l'itération n , la charge amont d'un lien est arbitrairement modifiée si :

$$|Q_{ij}^{(n)}| > \delta Q_{entre} \quad (3.28)$$

δ est un coefficient qui dépend de Γ , lorsque $\Gamma \sim \epsilon$ alors $\delta = 1$.

Il est clair qu'une telle intervention sur les niveaux des charges est illégitime, et se traduit nécessairement par une violation temporaire des lois d'écoulement adoptées. Elle n'est donc pratiquée qu'à titre provisoire, et peut être vue comme une réinitialisation des charges destinée à empêcher le processus numérique de dériver vers une situation instable ou une éventuelle solution inacceptable. Une fois opéré ce réajustement, le processus doit reprendre jusqu'à la convergence naturelle. C'est la fonction de la variable "test" évoquée sur la figure 3.11 qui permet d'assurer que le calcul ne se termine pas sur une modification arbitraire des charges.

L'ensemble de ces dispositifs numériques vise à obtenir la convergence du calcul vers une solution telle que le réseau considéré reste valide, c'est à dire que les charges aux noeuds ne soient pas trop éloignées du miroir qui a servi à générer la **Carte des Régions Submergées** et le squelette correspondant.

Ceci nous permet d'aborder un point fondamental de notre modélisation. Le modèle hydraulique que nous proposons est appliqué sur des réseaux différents dépendant du taux d'inondation considéré. Pour un taux d'inondation donné, des connexions entre noeuds initialement identifiées sur la **Carte des Régions Submergées** peuvent être rendues inactives à l'issue du processus numérique du fait de hauteurs d'eau amont situées au dessous du seuil du canal correspondant. En revanche, nous ne prenons pas en compte les nouvelles connexions qui pourraient s'établir localement lorsque la hauteur d'eau augmente. De telles incohérences sont acceptables dans la mesure où elles restent limitées à

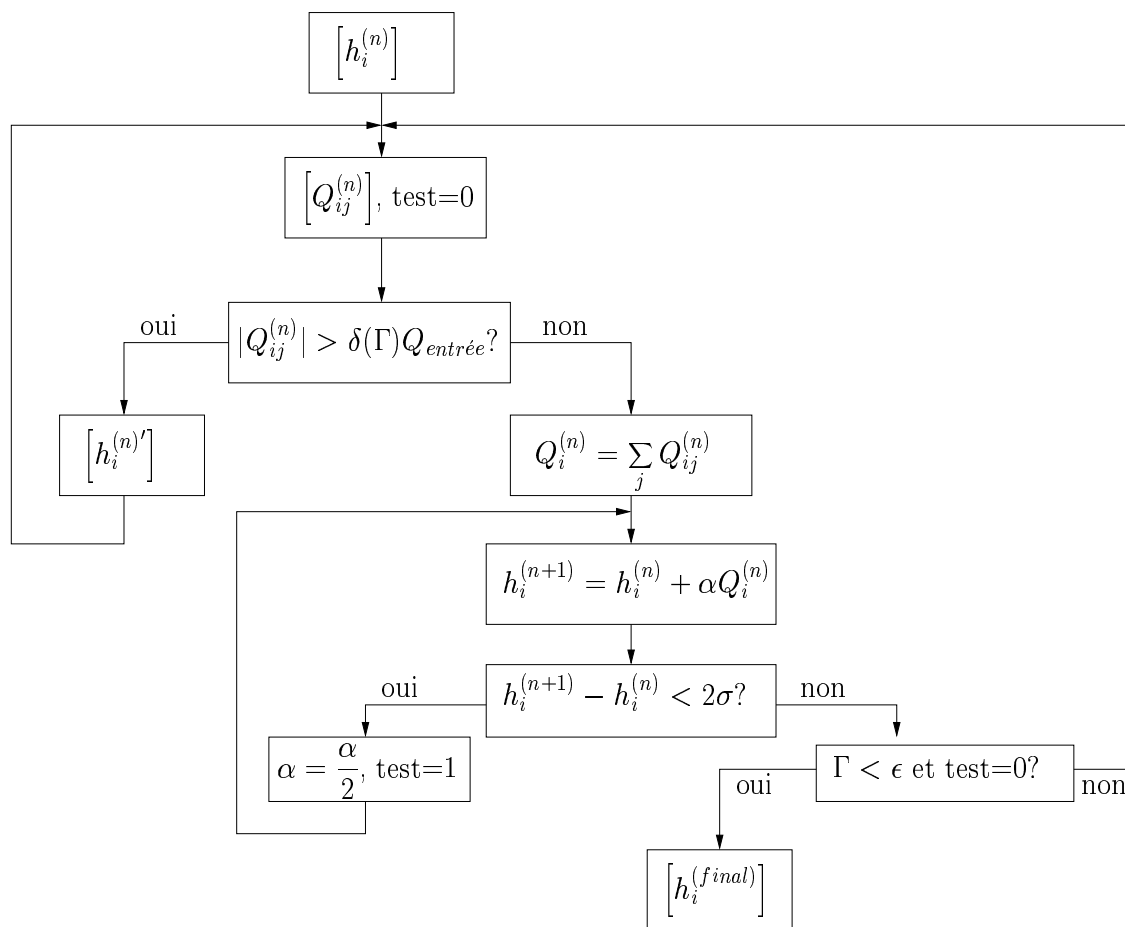


FIG. 3.11 : *Algorithme présentant l'enchaînement des itérations de notre modèle hydraulique. Tout au long des itérations nous effectuons différents tests (sur les valeurs des débits et des charges) afin d'améliorer la rapidité de notre méthode.*

quelques sites dans le réseau, c'est à dire lorsque la surface libre obtenue s'écarte modérément du miroir initial. On peut caractériser la surface libre par l'ensemble des charges aux noeuds. Toutefois, il s'agit d'une approximation qui ne prend pas en compte les déformations dues à l'écoulement dans les liens.

Gardant en vue toutes ces réserves, le résultat numérique nous donne accès à un large ensemble de données telles que les débits sur chaque lien, les charges en chaque noeud, les nombres de Reynolds et de Froude ainsi que les vitesses aux différents cols. Toutes ces données vont nous permettre d'analyser l'écoulement.

3.5 Discussion des résultats

3.5.1 Débit global sur la surface

Tout d'abord nous allons nous intéresser aux débits globaux sur la surface car comme nous allons le voir ils nous permettent de faire un premier commentaire sur le domaine

de validité de notre modélisation. En effet, comme le montre la figure 3.12, qu'elle que soit la pente, le débit calculé a tendance à augmenter avec le taux d'inondation. Mais, pour des taux d'inondation proches de 1 nous observons, pour cette surface, une baisse conséquente des débits calculés qui n'a évidemment pas lieu d'être dans la réalité.

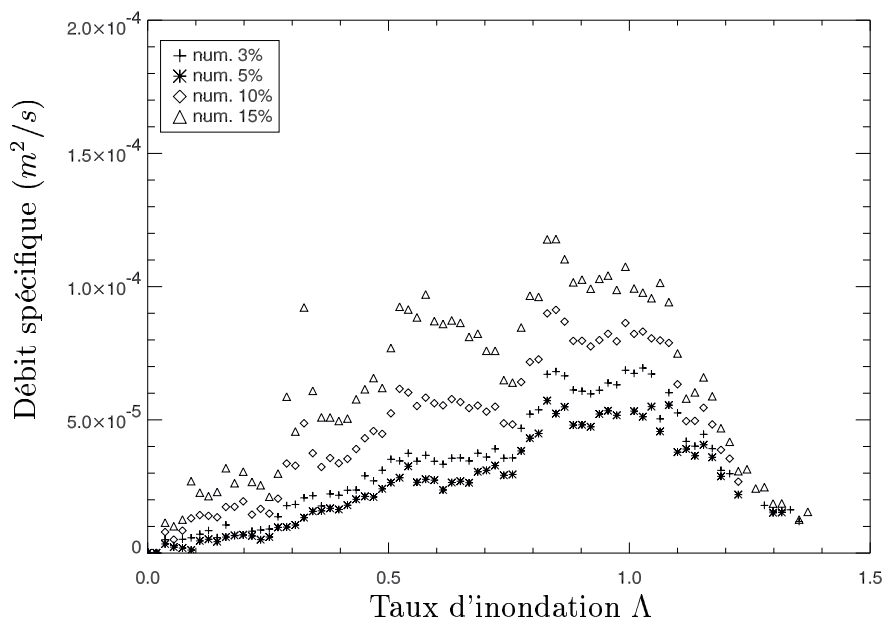


FIG. 3.12 : Débits spécifiques numériques pour différentes pentes. Sur ces courbes, la chute conséquente des débits pour les forts taux d'inondation indique clairement une première limite du domaine de validité de notre modélisation.

Cette baisse est en fait une conséquence de l'altération de nos réseaux (figure 3.13). En effet, lorsque seules quelques rugosités émergent, les squelettes ne sont plus représentatifs des véritables chemins d'écoulement (figure 3.13).

Intéressons nous de plus près à l'évolution du nombre de noeuds des réseaux avec le taux d'inondation (figure 3.14), et essayons de faire un parallèle avec l'évolution de l'écoulement réel.

Dans un premier temps, pour les faibles taux d'inondation, voisins du seuil de percolation, l'écoulement doit contourner de larges régions émergées ou non connectées. Puis au fur et à mesure que le taux d'inondation augmente l'écoulement se répartit dans des canaux de plus en plus nombreux. Ce qui se traduit sur la figure 3.14 par une augmentation du nombre de noeuds dans les réseaux (de $\Lambda = 0$ à $\Lambda \simeq 0,6$).

Dans un deuxième temps les différents canaux s'interconnectent et certains fusionnent pour donner naissance à des canaux plus importants. Sur la figure 3.14 nous pouvons alors observer une diminution du nombre de noeuds (à partir de $\Lambda \simeq 0,6$).

Dans la partie de la figure 3.14 qui correspond aux réseaux dégénérés (à partir de $\Lambda \simeq 1$) les réseaux sont en fait plus compliqués que nécessaire. En effet les quelques rugosités émergentes ne sont plus la source de chemins d'écoulement réellement dissociés et l'écoulement réel évolue probablement vers plus d'uniformité. Cependant, l'algorithme de squelettisation continue de générer des branches différentes pour contourner ces quelques obstacles.

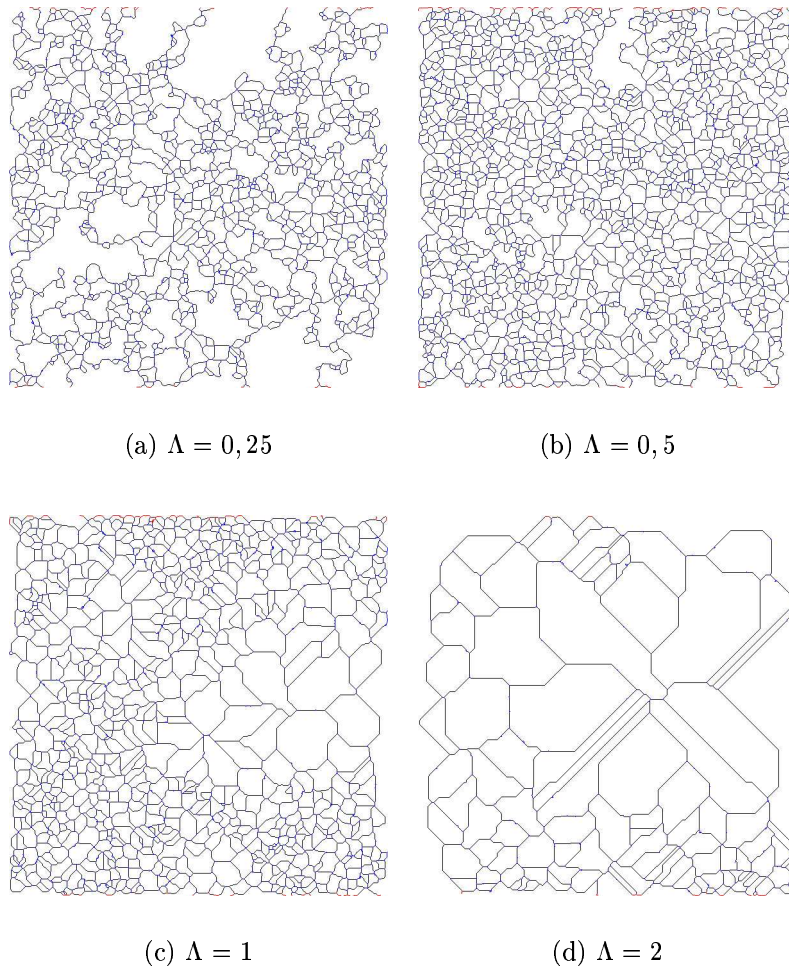


FIG. 3.13 : *Pour les taux d'inondation très importants, seules quelques rugosités isolées émergent encore. Les squelettes correspondant à ces taux d'inondation deviennent alors trop tortueux par rapport à la réalité de l'écoulement.*

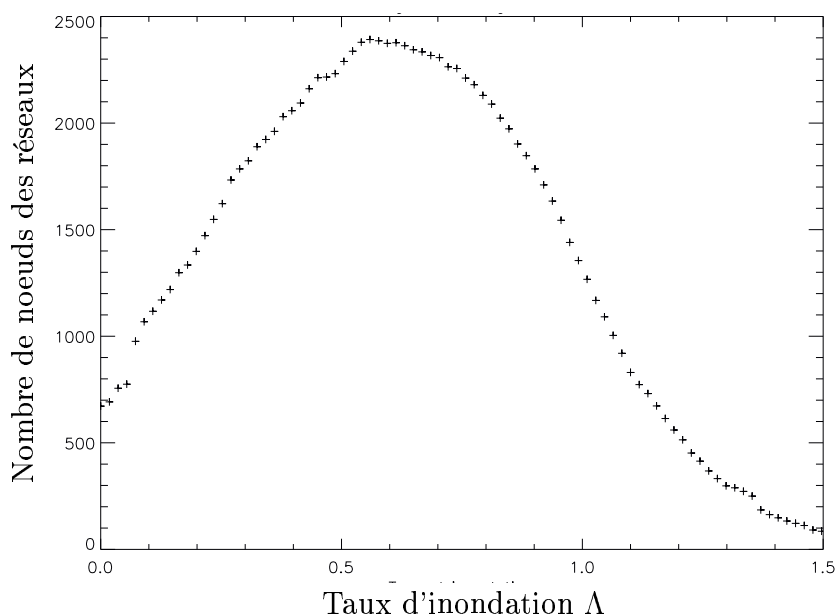


FIG. 3.14 : Evolution du nombre de noeuds des réseaux tirés de l'échantillon de notre surface. Dans un premier temps le réseau a tendance à se compliquer au fur et à mesure que le taux d'inondation augmente. Après avoir un maximum le nombre de noeuds diminue fortement jusqu'à rendre nos réseaux désuets pour notre modélisation.

Ce résultat met en évidence l'influence des réseaux et de leurs connexions sur le débit modélisé. Nous nous attendions à ce comportement puisque notre modèle a justement pour but de mieux prendre en compte l'influence des micro rugosités sur l'écoulement par le biais de ces réseaux. Cependant, il s'avère que les réseaux correspondant aux forts taux d'inondation doivent être considérés comme non représentatifs des lignes de courant réelles. Bien évidemment les résultats attachés à ces réseaux ne doivent pas être pris en compte, c'est une première limite du domaine de validité de notre modélisation. L'examen des figures 3.12 et 3.14 nous conduit à **proposer un taux d'inondation d'environ 0,8 comme limite supérieure de validité de notre modèle.**

Nous notons une importante irrégularité de l'évolution du débit en fonction du taux d'inondation, d'autant plus accentuée que la pente est plus grande. La croissance continue du débit avec le taux d'inondation n'est pas assurée, loin s'en faut. Ce comportement est vraisemblablement à attribuer à des effets inattendus et assez erratiques de l'évolution de la structure du réseau à mesure que le niveau d'eau s'élève. On retrouve en effet dans l'ensemble les mêmes accidents pour les mêmes taux d'inondation sur les courbes relatives aux différentes pentes. Le procédé de squelettisation s'avère, semble-il, relativement précaire, sur cet échantillon en tout cas. Ceci apparaît visuellement à l'examen des réseaux au voisinage du seuil de percolation (voir figure 2.37), ce qui n'est pas surprenant compte tenu du caractère fractal bien connu des structures dans cette région. En revanche, pour les taux d'inondation moyens, les réseaux semblent visuellement assez réguliers. L'hydraulique révèle, semble-t-il, l'importance de défauts mineurs peu apparents sur l'aspect des réseaux.

Il faut aussi s'interroger sur la représentativité de l'échantillon étudié et sur les défauts topologiques qu'il est susceptible de présenter. De tels défauts n'ont pas été mis en évidence manifestement dans l'étude statistique de la rugosité, mais ils apparaissent assez nettement à l'examen des **Cartes des Régions Submergées** (voir figure 2.37). Des dépressions d'assez grande étendue apparaissent dès les faibles taux d'inondation. Ces défauts, qui peuvent être à l'origine de comportements hydrauliques inattendus, font vraisemblablement de l'échantillon étudié un exemplaire de médiocre représentativité. C'est ce qui nous conduira au chapitre suivant à tester le modèle hydraulique sur des surfaces générées.

Enfin, pour mémoire, comparons ces résultats à l'évaluation élémentaire du débit obtenue au paragraphe 2.3.2 au moyen de l'hypothèse de pertes de charge de friction laminaire ou turbulente dans un écoulement uniforme sur fond rugueux. On constate que ces deux évaluations sont sans commune mesure. Pour un même taux d'inondation de 0,8 et une même pente de 15%, le calcul numérique donne un débit 150 fois plus petit que notre première évaluation. Ceci montre que la non uniformité du champ de vitesse joue un rôle largement prépondérant dans les mécanismes d'écoulement et de dissipation d'énergie. La tortuosité des lignes de courant et surtout la constriction et la dissipation localisée due aux larges variations des sections locales d'écoulement sont, selon notre modélisation, les principaux facteurs de la perte de charge. La suite de l'analyse va confirmer ce fait.

3.5.2 Charges aux noeuds

Dans notre premier modèle, la perte de charge totale sur la surface était concentrée sur quelques liens à la section de passage particulièrement petite. Avec cette deuxième modélisation nous avons éliminé ce problème, comme le montre clairement la figure 3.15, en permettant aux sections de passage aux cols d'évoluer en fonction des charges.

Sur la figure 3.15 la première bissectrice représente le niveau du miroir qui a servi à générer le réseau correspondant. Les deux autres droites représentent l'intervalle $\pm 2\sigma$, soit le double de l'écart-type des hauteurs de rugosité (voir paragraphes 2.2.2.3 et 2.2.2.4). Cet écart est adopté comme la limite de la déviation de la charge admissible en quelques points sans altération grave du réseau d'écoulement.

C'est l'intervalle raisonnable autour du niveau du miroir dans lequel les charges doivent rester. Sur la figure 3.15, cet intervalle est représenté comme les charges sous une forme adimensionnée par la dénivellation entre les frontières amont et aval de l'échantillon. C'est pourquoi il semble diminuer avec la pente.

Par référence à cet intervalle, on constate que l'épaisseur relative du nuage des points représentant les charges aux noeuds augmente avec la pente, atteignant pour la pente de 15% un ordre de grandeur à la limite de l'acceptable au regard du critère que nous avons adopté. Aux faibles pentes, le nuage est sensiblement centré sur la première bissectrice. On peut donc estimer qu'en moyenne, le taux d'inondation réel est du même ordre que celui qui résulte de la position du miroir, indiqué sur la figure 3.15, sans toutefois prendre en considération l'abaissement de la surface libre dans les liens. Mais aux fortes pentes apparaît une tendance du nuage à s'incurver systématiquement en dessous de la première bissectrice par endroits. Le taux d'inondation de la surface s'avère dans

3.5. Discussion des résultats

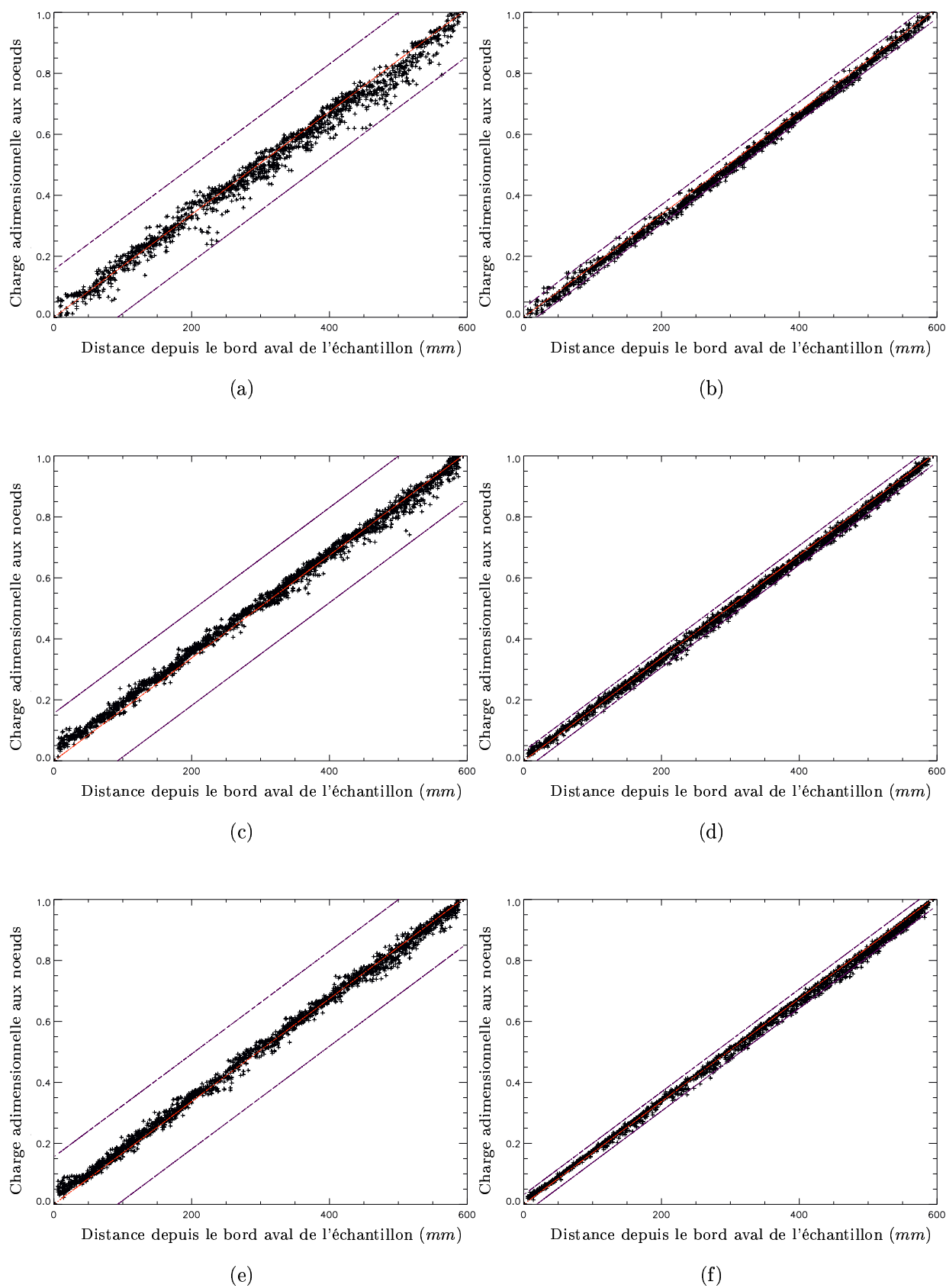


FIG. 3.15 : Charge adimensionnelle aux noeuds en fonction de leur éloignement au bord aval. La première bissectrice représente le niveau du miroir.

ce cas sensiblement inférieur à celui qui est prévu par le miroir qui est à l'origine du réseau.

Nous pouvons aussi remarquer qu'à pente constante, plus le taux d'inondation augmente moins les charges sont dispersées autour de la surface initiale. C'est certainement la conséquence de l'augmentation du nombre de connexions dans les réseaux (comme nous en avons déjà discuté dans le paragraphe précédent (figure 3.14)).

Nos résultats numériques révèlent donc que le fait de négliger les effets dynamiques sur la forme et la position moyenne de la surface libre s'avère être une approximation acceptable aux faibles pentes et faibles taux d'inondation, mais devenant assez grossière aux fortes pentes.

3.5.3 Caractérisation statistique de l'écoulement local

Afin de caractériser l'écoulement local, nous calculons en chaque col différentes grandeurs notées génériquement Γ : la vitesse, le nombre de Reynolds et le nombre de Froude. Puis nous déterminons la fonction de distribution ($F_{\Gamma}(X)$) de chacune d'elles. Plutôt que d'établir cette statistique selon le nombre d'occurrences d'une valeur donnée de la variable X , il nous paraît plus significatif de l'établir selon le débit traversant les cols où cette valeur apparaît. Si en effet une valeur de Γ apparaît très fréquemment, mais dans des liens transportant peu de débit, la statistique selon le nombre d'occurrences lui donnera une importance qu'elle n'a pas en réalité pour l'écoulement. Nous parlerons donc de fonction de distribution cumulée selon les débits de chacune des trois grandeurs considérées. Le mode de calcul de cette fonction (équations 3.29) est le suivant. La liste des cols ij , avec la valeur du débit Q_{ij} qui les traverse et la valeur Γ_{ij} de la grandeur Γ , est rangée dans l'ordre des valeurs croissantes de Γ . La fonction $F_{\Gamma}(X)$ s'obtient alors par cumul des débits :

$$F(X) = \frac{\sum_{\Gamma=0}^{\Gamma=X} Q_{ij}}{\sum_{\Gamma=0}^{\Gamma=\Gamma_{max}} Q_{ij}} \quad (3.29)$$

Où Q_{ij} est le débit sur le lien considéré et où Γ représente tour à tour la vitesse (v_{ij} , figure 3.16), le nombre de Reynolds (Re_{ij} , figure 3.17) et le nombre de Froude (Fr_{ij} , figure 3.18). Nous verrons dans les paragraphes suivants comment sont calculées ces différentes grandeurs.

Ainsi, d'après l'équation 3.29, pour la vitesse par exemple, $F_v(X)$ représente la part du débit total qui s'écoule au travers de liens où la vitesse est inférieure à X .

3.5.3.1 Les vitesses aux cols

Les vitesses aux cols, tout comme les hauteurs d'eau aux cols, sont des résultats directs de notre simulation. Il n'y a donc aucun calcul supplémentaire à effectuer pour les obtenir. La figure 3.16 représente la fonction de distribution selon les débits des vitesses aux cols pour deux pentes différentes et trois taux d'inondation compris dans le domaine de validité de notre modèle.

Les gammes de vitesses simulées sont de l'ordre de grandeur des vitesses observées lors du ruissellement sur des surfaces naturelles (,). De plus la pente comme le taux d'inondation ont une influence modérée sur la gamme des vitesses simulées. Nous observons une tendance à l'augmentation générale de la représentativité des fortes vitesses avec la pente et avec le taux d'inondation.

Sur cette statistique des vitesses comme sur celles des autres grandeurs, apparaît un cas singulier (pente 3%, taux d'inondation 0,5) pour lequel aucune vitesse n'est inférieure à 88 mm/s, contrairement à ce qui se produit dans les autres cas cités, où la vitesse est assez régulièrement répartie jusqu'à 0. Cet accident confirme la remarque faite à propos des débits (paragraphe 3.5.1) sur les aléas de la squelettisation et de l'échantillonnage.

3.5.3.2 Les nombres de Reynolds

Afin de calculer le nombre de Reynolds correspondant à chaque col, nous avons besoin de la vitesse au col (v_{col}), du diamètre hydraulique du col (D_{col}) ainsi que de la viscosité cinématique du fluide (ν). Comme nous venons de le remarquer dans le paragraphe précédent, les vitesses aux cols sont des résultats directs de notre simulation, quant au fluide considéré il s'agit de l'eau et donc $\nu = 10^{-6}m^2/s$.

En ce qui concerne le diamètre hydraulique des cols, considérant notre hypothèse de section triangulaire aux cols nous rappelons l'équation C.7 :

$$D_{col} = 2y_{col}\sin(\alpha_{col})$$

Où y_{col} est un résultat direct de notre simulation et α_{col} le demi angle au sommet de la section triangulaire calculé lors de l'initialisation du code.

Nous avons alors :

$$Re = \frac{v_{col}2y_{col}\sin(\alpha_{col})}{\nu}$$

La figure 3.17 représente donc la fonction de distribution selon les débits des Reynolds aux cols pour deux pentes différentes et trois taux d'inondation compris dans le domaine de validité de notre modèle.

Plus le taux d'inondation est grand, plus la part du débit passant par des Reynolds élevés est importante. La pente en revanche n'a pas une influence déterminante semble-t-il

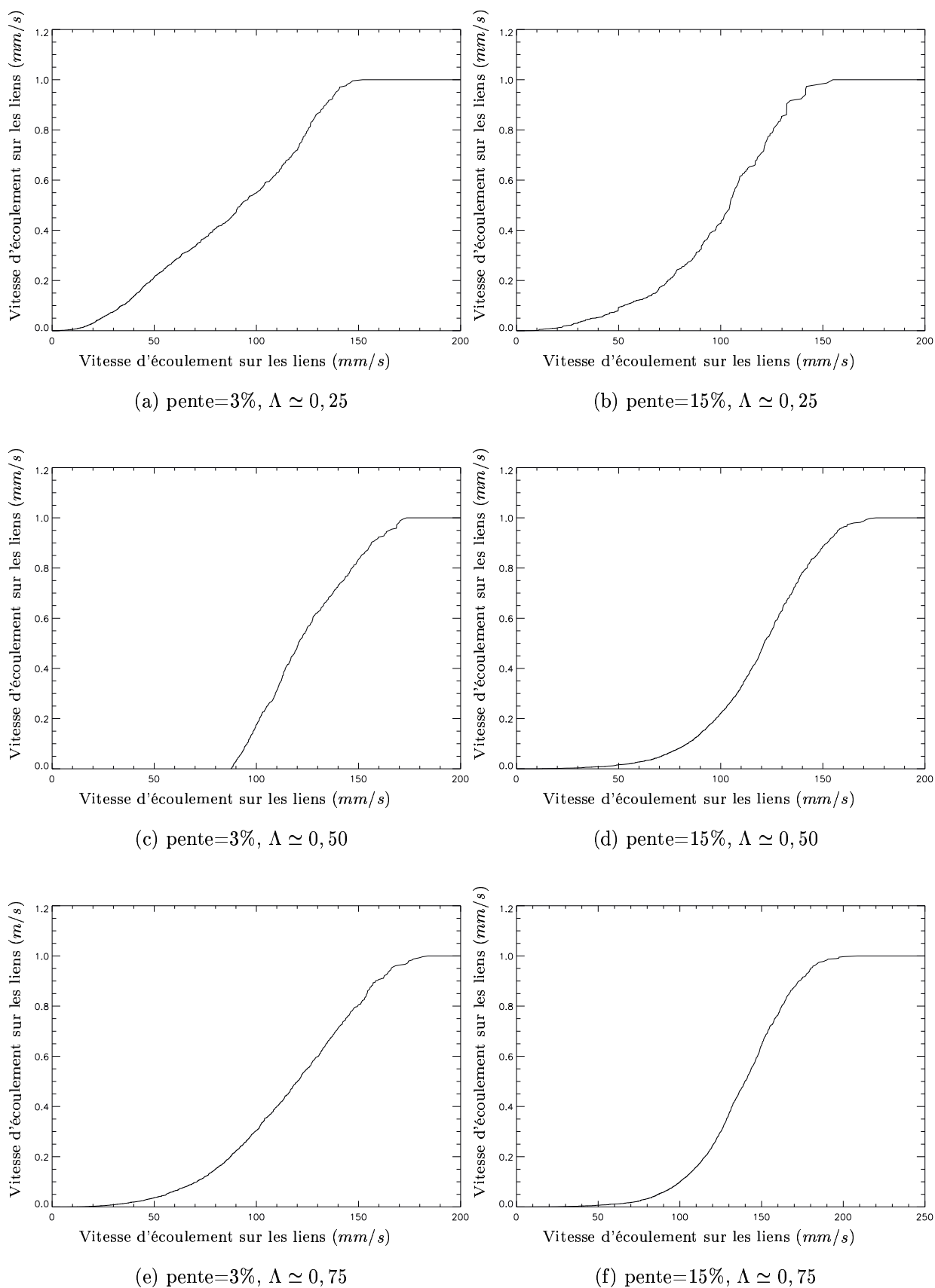


FIG. 3.16 : Ni la pente, ni le taux d'inondation ne semblent avoir une influence remarquable sur les gammes de vitesses simulées.

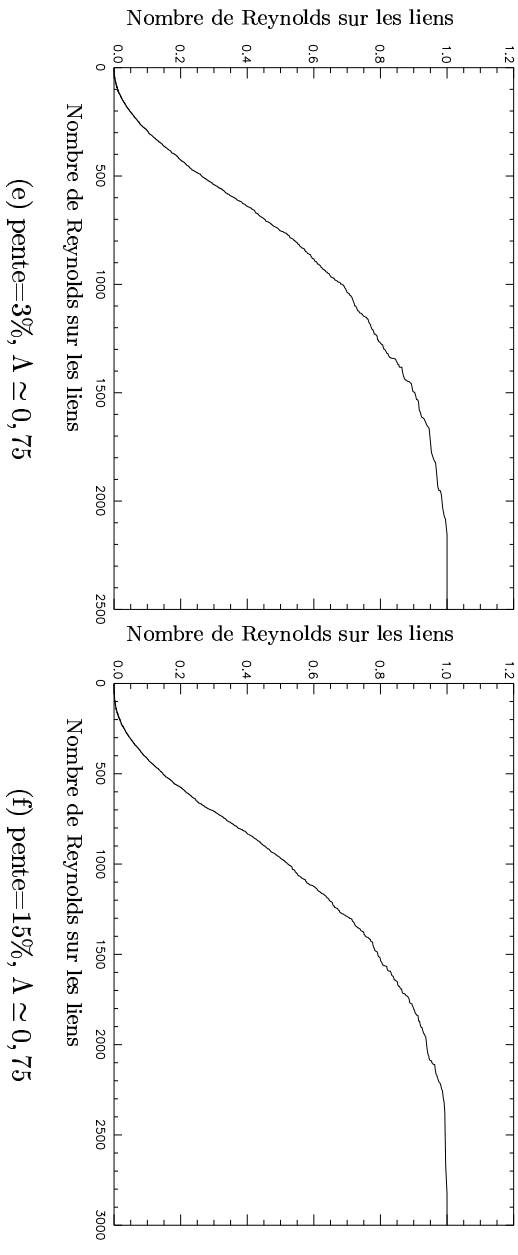
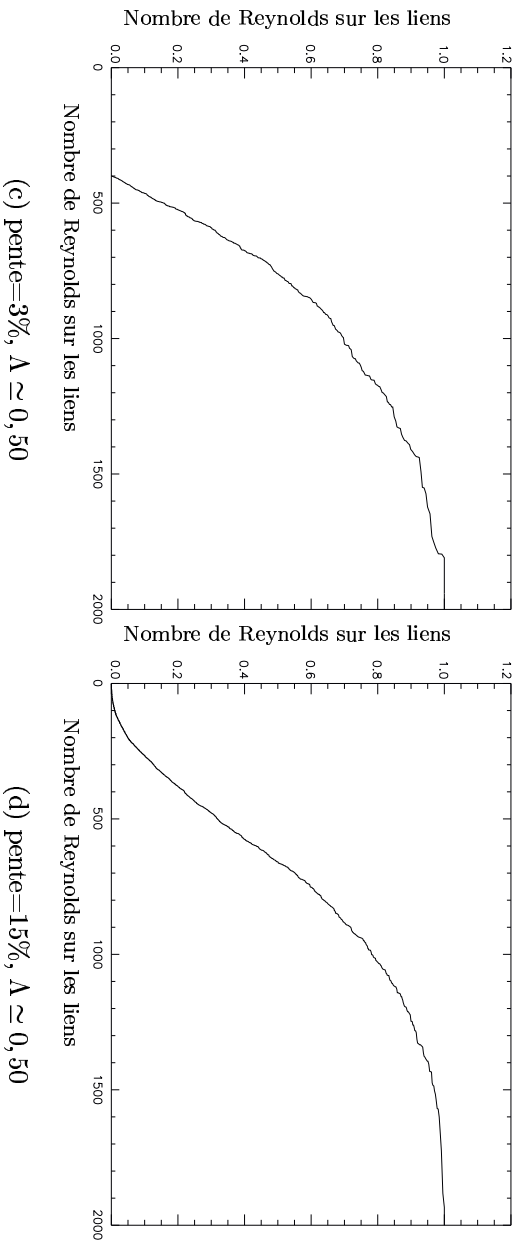
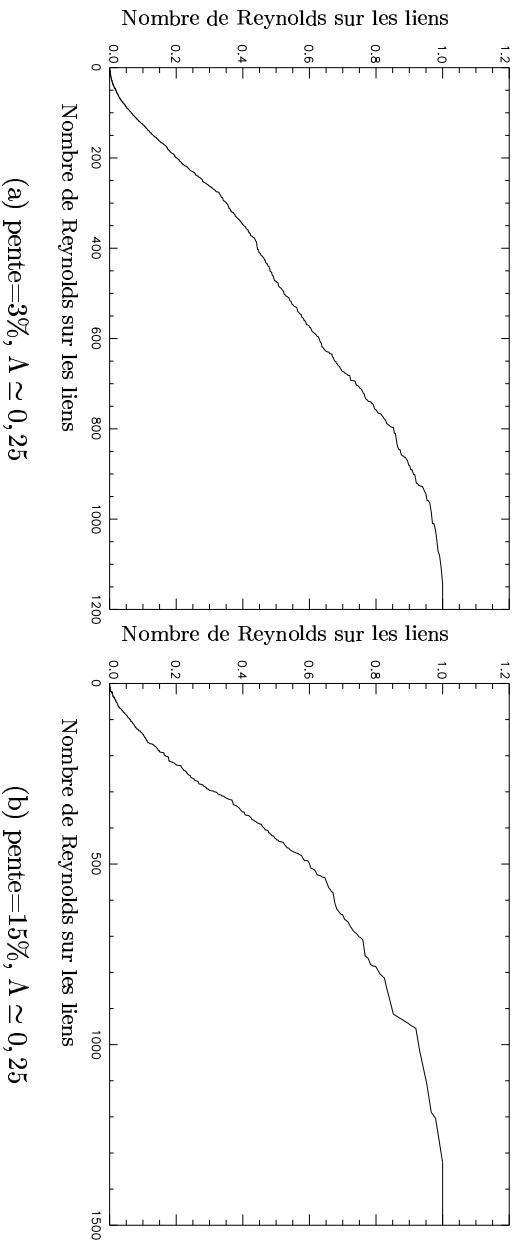


FIG. 3.17 : *Quels que soient la pente ou le taux d'inondation, la grande majorité des nombres de Reynolds reste dans le domaine laminaire.*

sur la distribution des Reynolds.

Dans l'interprétation de cette distribution, il faut garder en mémoire que le nombre de Reynolds est calculé au col de chaque canal, sans qu'on puisse dire si cette valeur est représentative pour l'ensemble du canal. En cas d'écoulement subcritique, la vitesse est maximale au col, mais le diamètre hydraulique est minimal. Pour l'écoulement supercritique, il est encore plus délicat de prévoir l'évolution du Reynolds le long du canal, notamment en aval du col. Par ailleurs, il faut rappeler que dans notre mode de calcul des pertes de charge de friction, le passage à la formule de Blasius a lieu pour un Reynolds sensiblement inférieur à 2000 (parag 3.2.2.3).

Sous ces réserves, on observe que, même pour les pentes et les taux d'inondation les plus forts, les nombres de Reynolds simulés restent en quasi totalité inférieurs à 2000. Globalement l'écoulement peut être qualifié de laminaire, mais proche de la transition turbulente dans une partie du domaine qui n'est pas négligeable aux forts taux d'inondation. Cette proximité de la transition turbulente est une des difficultés fréquemment rencontrées dans l'étude du ruissellement dans les conditions de l'inondation partielle.

3.5.3.3 Les nombres de Froude

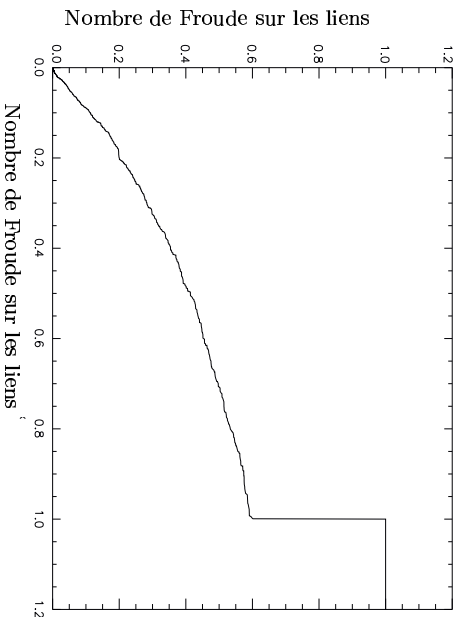
Un autre paramètre important de l'écoulement local est le nombre de Froude. Celui-ci va nous permettre de mettre en évidence la fraction du débit qui passe par des liens critiques. En considérant notre hypothèse d'une section de passage triangulaire (voir annexe C), le nombre de Froude en un col est donné par :

$$Fr_{col} = \frac{2v_{col}^2}{gy_{col}} \quad (3.30)$$

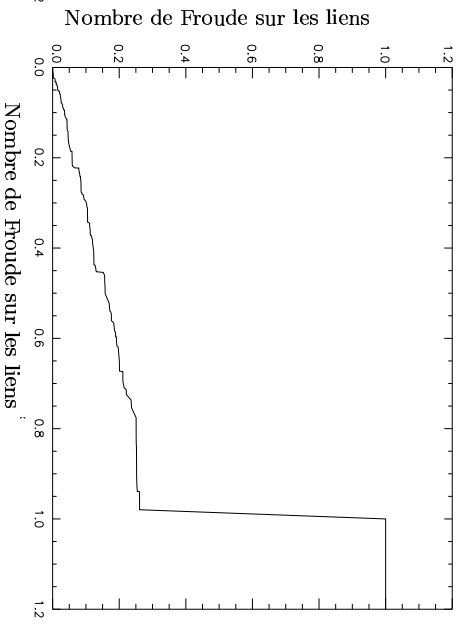
Comme le montre la figure 3.18, et comme nous avons pu le constater au cours des différentes simulations que nous avons effectuées, pour les pentes supérieures à 5%, quel que soit le taux d'inondation nous avons un minimum de 70 à 80% du débit qui passe par des liens critiques. Pour les pentes plus faibles cette part minimum tombe à 40%, ce qui reste tout de même relativement conséquent.

Le qualificatif de torrentiel ne convient pas cependant pour caractériser dans son ensemble l'écoulement car, dans la modélisation adoptée, les passages supercritiques sont immédiatement suivis de ressauts ou chutes et de retour à l'état sous critique avant l'arrivée au noeud suivant. On a ainsi, selon les résultats de notre modélisation du moins, une situation analogue à celle qui prévaut dans les torrents montagnards à forte pente et faible hauteur d'eau. Du point de vue des pertes de charge, la conséquence essentielle de ce fait est que la friction n'est sans doute pas la source principale de dissipation. On s'attend donc à ce que les pertes de charge, qui sont de nature principalement inertielle, soient essentiellement déterminées par la topographie de la rugosité, avec une influence directe du nombre de Reynolds global peu significative. L'étude du coefficient de Darcy-Weisbach va nous permettre de préciser ce point.

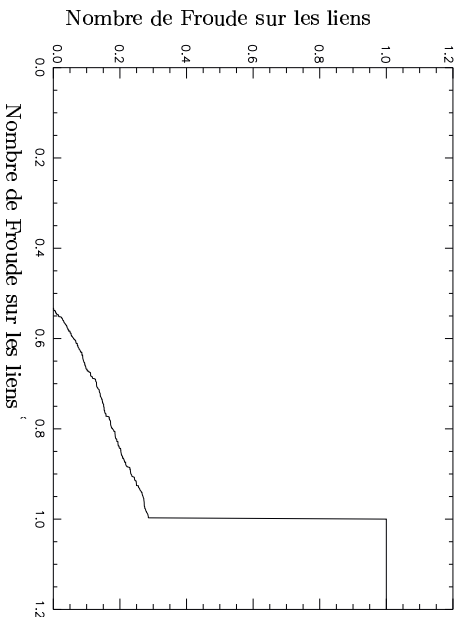
Remarquons enfin que l'association d'un écoulement globalement laminaire avec un régime supercritique est un cas assez singulier, rarement rencontré et traité en mécanique



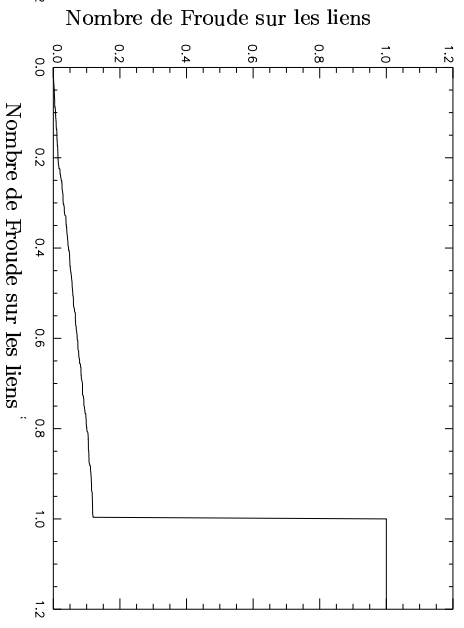
(a) pente=3%, $\Lambda \approx 0,25$



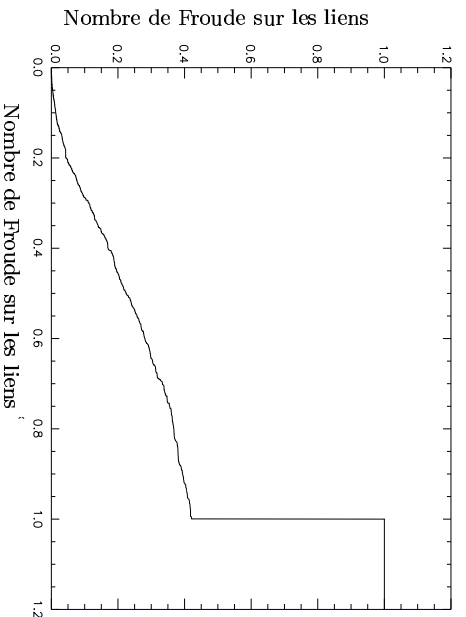
(b) pente=15%, $\Lambda \approx 0,25$



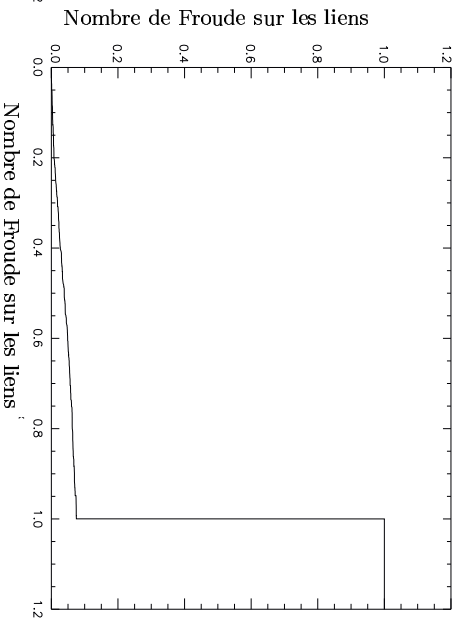
(c) pente=3%, $\Lambda \approx 0,50$



(d) pente=15%, $\Lambda \approx 0,50$



(e) pente=3%, $\Lambda \approx 0,75$



(f) pente=15%, $\Lambda \approx 0,75$

FIG. 3.18 :

des fluides. On est ainsi amené à se demander s'il est légitime d'appliquer au ruissellement des concepts empruntés à la théorie des canaux à ciel ouvert. En particulier, le schéma de l'écoulement quasi uniforme dans une section droite est principalement justifié en théorie des canaux par le caractère hautement turbulent de l'écoulement, condition qui est loin d'être satisfaite dans les micro canaux auxquels on a affaire dans le ruissellement. On peut supposer par exemple que ce que nous appelons ressaut hydraulique dans notre modélisation n'ait pas le caractère franc de ce qui peut s'observer dans les canaux de grande dimension, en raison de l'influence locale non négligeable de la viscosité. Le ressaut s'interprète plutôt comme une région perturbée, sans profil de vitesse bien défini, où la dissipation visqueuse est particulièrement intense en raison du désordre du champ de vitesse local. Nous verrons au chapitre 6 quels éléments d'information peut apporter sur ce point l'observation visuelle des écoulements.

3.5.3.4 Rôle de la friction

parafriktion]

Tout comme dans notre premier modèle (paragraphe 3.2.2.3) nous avons introduit dans la formule de perte de charge par friction (équation 3.8, rappelée ci-dessous) un coefficient modérateur (α). Nous rappelons que ce coefficient à été introduit car la formulation classique des pertes par friction fait intervenir la vitesse moyenne de l'écoulement et non pas la vitesse au col comme dans nos modèles.

$$\Delta_{linéaire} H_{ij} = \alpha \frac{f L_{ij}}{D_{ij}} \frac{v_{ij}^2}{2g}$$

Dans tout ce qui précède ce coefficient est égal à 1. Pour les faibles pentes, une part relativement importante du débit passe par des canaux sous critiques (figure 3.18). C'est dans ces configurations d'écoulement que la valeur du coefficient modérateur α est susceptible d'avoir le plus de répercussions sur le débit. La figure 3.19 nous montre les débits simulés avec $\alpha = 1$ (les croix) et $\alpha = 0,1$ (en trait continu).

Dans un premier temps, nous pensions surestimer les pertes de charge par friction en considérant $\alpha = 1$. Ce faisant nous surestimons les pertes de charges par friction sur les liens sous-critiques (Annexe C). Cependant, il nous est impossible devant la complexité des réseaux de savoir par avance quelles conséquences sur le débit peut avoir une modification de α .

En effet, diminuer α a pour conséquence d'augmenter le nombre de liens supercritiques. La friction peut de moins en moins assurer la perte de charge exigées par la pente. A la limite, pour $\alpha = 0$, tous les liens sont supercritiques puisqu'il n'y a plus d'autre source de perte de charge que l'inertie. Le débit critique étant un débit maximum, nous pourrions penser que plus α est petit plus le débit global est grand. Nous observons cependant le contraire sur la figure 3.19.

Il est en fait **impossible** de faire un tel raisonnement. Le débit critique est un débit maximum **pour une charge amont donnée**. Le fait de modifier α fait changer toutes les charges d'une manière que nous ne connaissons pas a priori. **Il nous est donc impossible**

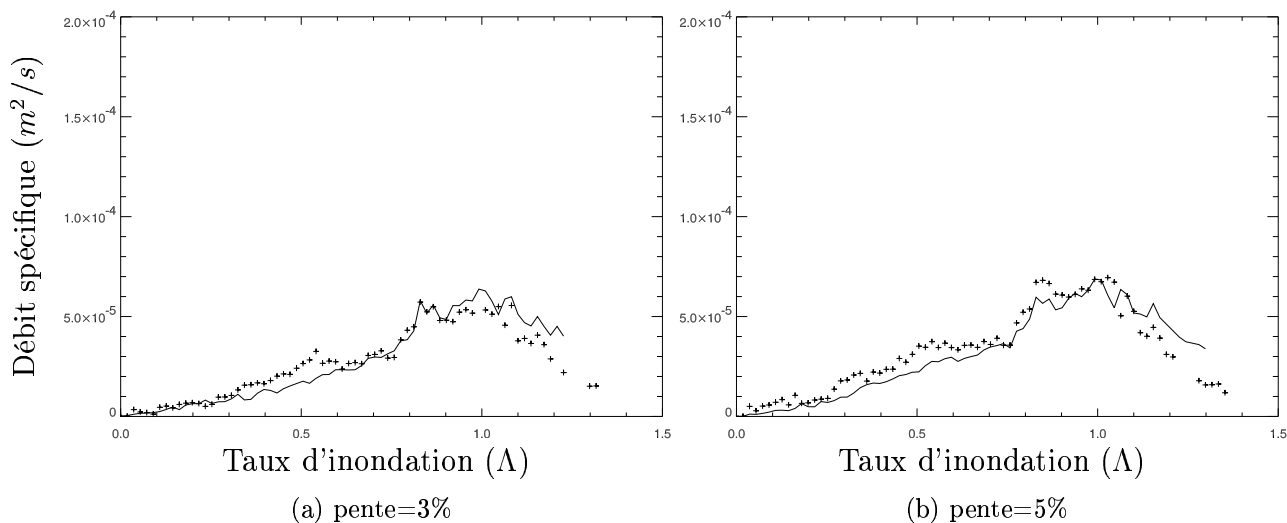


FIG. 3.19 : Même pour les faibles pentes, la valeur du coefficient modérateur α n'a pas beaucoup d'influence sur le débit dans le domaine de validité de notre modèle. Les **croix** représentent les débits simulés avec $\alpha = 1$ tandis que le trait continu représente ceux simulés avec $\alpha = 0, 1$.

de prévoir si le débit global est surestimé ou sousestimé. Toutefois, la valeur de α semble avoir assez peu d'influence sur le débit global comme le montre la figure 3.19.

3.5.4 Le coefficient de Darcy-Weisbach

À partir des débits calculés par notre modèle et des paramètres géométriques de notre surface nous sommes en mesure de calculer le coefficient de Darcy-Weisbach de celle-ci. Le coefficient de Darcy-Weisbach est donné par la formule suivante :

$$f = \frac{2gD \sin(\theta)}{v^2} \quad (3.31)$$

Où g est l'accélération de la pesanteur, D le diamètre hydraulique de la surface, $\sin(\theta)$ la pente de la surface et v la vitesse moyenne de l'écoulement.

Reste donc à savoir comment calculer le diamètre hydraulique D et la vitesse moyenne v . En effet, comme nous l'avons souligné dans le paragraphe 2.3.1 (figures 2.12 et 2.13), nous pouvons calculer les paramètres hydrauliques moyens de la surface de plusieurs manières. Rappelons pour mémoire que les paramètres hydrauliques fictifs ignorent tout de la rugosité et prennent en compte une section mouillée rectangulaire dont la hauteur est le niveau du miroir. Quant aux paramètres hydrauliques vrais ils sont issus du calcul de la section mouillée et du périmètre mouillé participant à l'écoulement. Les coefficients de Darcy-Weisbach fictif et vrai sont représentés en fonction du taux d'inondation respectivement sur les figures 3.20 et 3.21.

La croissance du coefficient de Darcy-Weisbach fictif avec le taux d'inondation nous rappelle le modèle de force de traînée (figure 1.31) introduit par Lawrence (Lawrence 1997, Lawrence 2000). En revanche, nous ne retrouvons pas ce comportement pour le co-

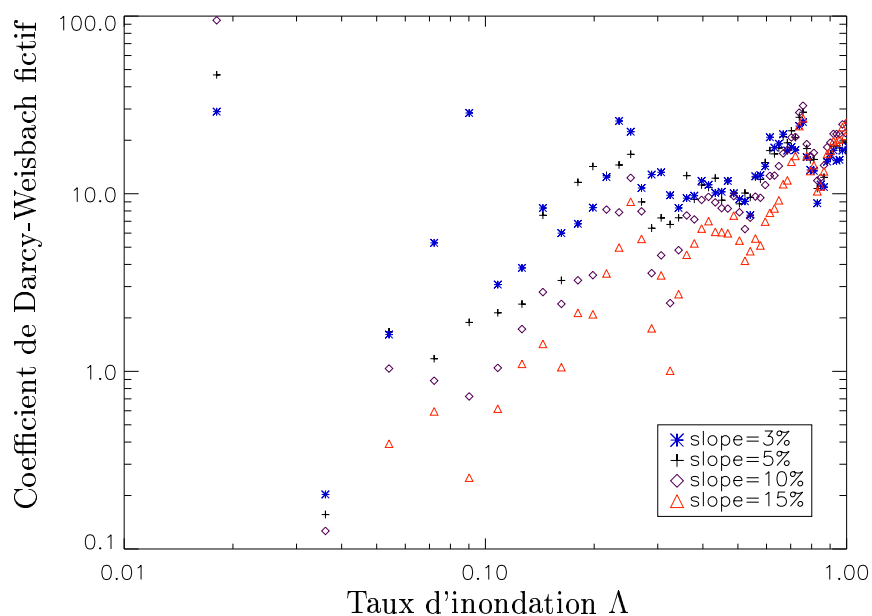


FIG. 3.20 : *Coefficient de Darcy-Weisbach fictif.* Dans le domaine de validité de notre modèle ($\Lambda < 0,8$), le coefficient de frottement fictif a un comportement analogue à celui d'un modèle de force de traînée.

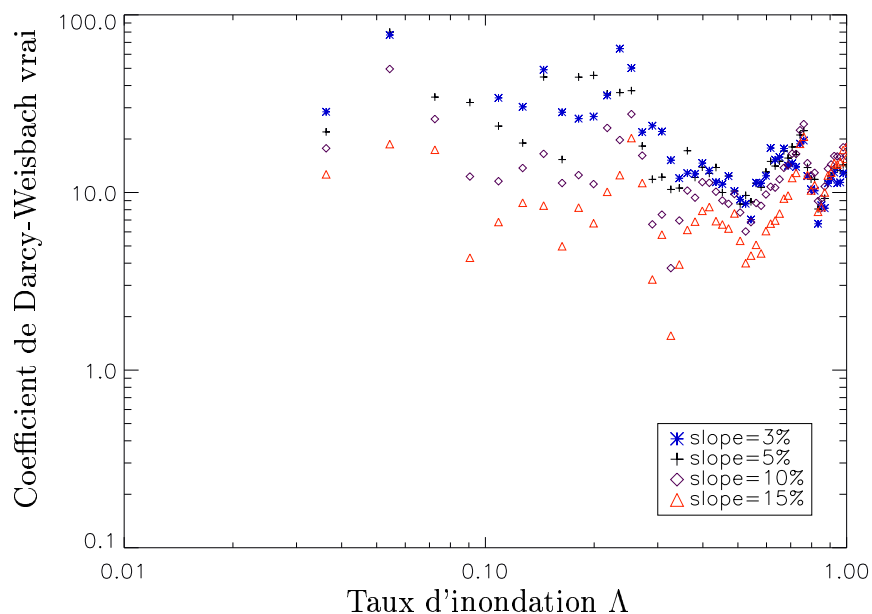


FIG. 3.21 : *Coefficient de Darcy-Weisbach vrai.* En utilisant les paramètres hydrauliques vrais de la surface nous perdons l'analogie avec les modèles de force de traînée.

efficient de Darcy-Weisbach calculé avec les paramètres hydrauliques vrais.

Pour les faibles taux d'inondation, la différence entre les coefficients vrais et fictifs est particulièrement marquée. Mais, plus le taux d'inondation augmente plus cette différence s'amenuise du fait que les paramètres hydrauliques vrais et fictifs sont de moins en moins différenciables (figure 2.13). Nous observons par ailleurs que les comportements erratiques

pour $\Lambda < 0, 1$, liés au voisinage du seuil de percolation se manifestent de façon très nette sur les coefficients de Darcy-Weisbach (figures 3.20 et 3.21), alors qu'ils étaient peu visibles sur l'évolution des débits (figure 3.12).

3.6 Conclusion

Indépendamment du choix du modèle de perte de charge, l'hypothèse la plus contraignante sur laquelle repose notre approche est l'utilisation du miroir pour générer le réseaux. Il est alors évident que si la surface libre s'éloigne trop du miroir le réseau correspondant ne pourra plus être considéré comme représentatif des chemins d'écoulement. Les résultats du premier modèle que nous avons développé, se sont révélés incompatibles avec cette hypothèse. Cette incompatibilité venant de singularités sur les réseaux. Pour éliminer ces singularités nous avons développé un deuxième modèle prenant en compte l'évolution des sections de passage aux cols des canaux représentés par les liens du réseau.

Sous réserves de nos différentes hypothèses concernant la surface libre et le calcul des nombres de Froude et de Reynolds, notre deuxième modèle nous permet de tirer quelques conclusions. Quels que soient la pente ou le taux d'inondation, les nombres de Reynolds restent en très grande partie dans le domaine laminaire (figure 3.17). Cependant, une grande partie du fluide s'écoule par des canaux en régime critique (figure 3.18). Il semble donc que, de manière analogue aux écoulements turbulents, ce soit l'inertie qui principalement gouverne l'écoulement. Ce résultat est confirmé par le peu d'influence du coefficient modérateur (α) des pertes de charge par friction (figure 3.19).

Cela explique sans doute pourquoi un nombre de Reynolds global pour caractériser l'ensemble d'un écoulement sur de tels échantillons est un très mauvais paramètre. Les figures 3.22 et 3.23 représentent respectivement le coefficient de Darcy-Weisbach équivalent en fonction du nombre de Reynolds équivalent global et le coefficient de Darcy-Weisbach vrai en fonction du nombre de Reynolds vrai global.

Les nombres de Reynolds globaux sont calculés à partir des vitesses débitantes (calculées à partir des sections mouillées équivalentes ou vraies) et des diamètres hydrauliques (équivalents ou vrais) de la surface. Sur ces figures nous ne retrouvons pas les comportements classiques du coefficient de frottement (lois de Poiseuille et Blasius). Les valeurs affichées ne sont pas non plus comparables aux lois classiques.

Sans entrer dans le détail de la définition du taux d'inondation par nos prédécesseurs nous avons voulu comparer nos résultats numériques aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature (Savat 1980, Rauws 1980, Emmett 1970, Phelps 1975, Roels 1984, Gilley, Kottwitz et Wieman 1992, Bunte et Poesen 1994, Bunte et Poesen 1993) (**Ces résultats nous ont été aimablement communiqués par Deborah Lawrence**). Sur la figure 3.24 les résultats expérimentaux sont représentés par des carrés pâles tandis que nos résultats numériques sont représentés par des croix en caractères gras. Comme nous pouvons le voir, les coefficients de Darcy-Weisbach équivalents calculés par notre méthode s'incluent parfaitement dans les données expérimentales disponibles.

Notre modèle ne prétend pas reproduire la réalité de l'écoulement local. Il donne néanmoins des résultats tout à fait comparables aux expériences (figure 3.24) et nous permet

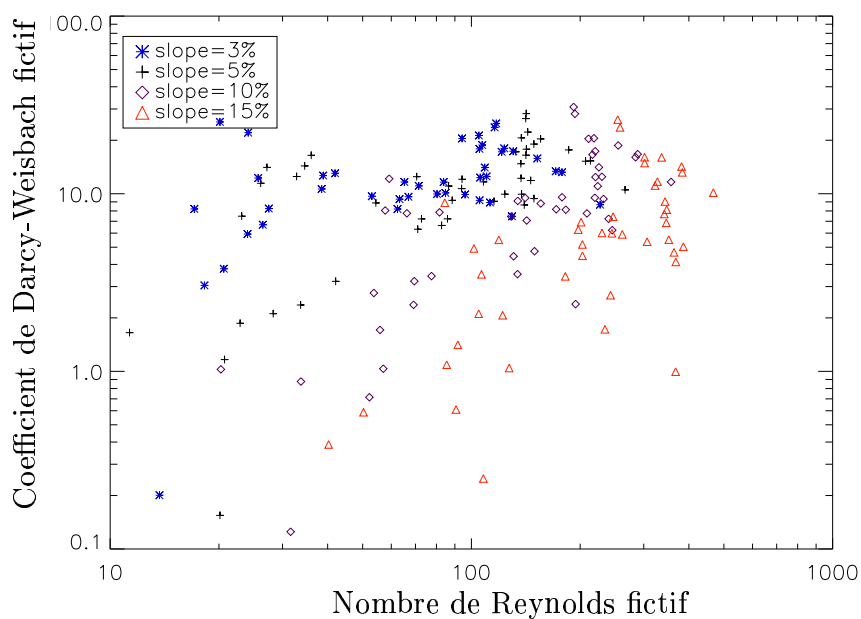


FIG. 3.22 : Coefficient de Darcy-Weisbach fictif.

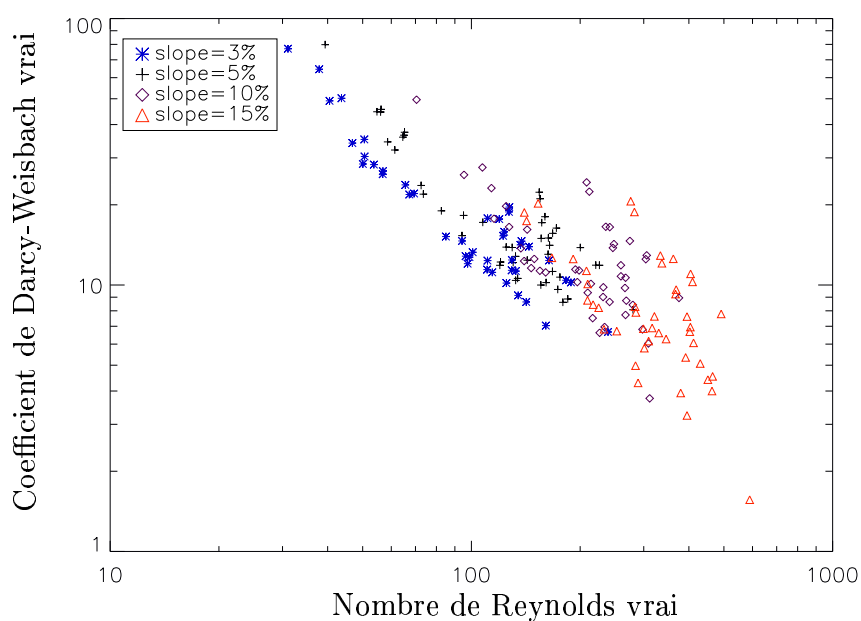


FIG. 3.23 : Coefficient de Darcy-Weisbach vrai.

de mettre en évidence quelques principes :

- Dans les écoulements très peu profonds sur des surfaces présentant des macro rugosités, l'inertie gouverne l'écoulement.
- Le seul nombre de Reynolds global est un très mauvais paramètre pour caractériser de tels écoulements.

3.6. Conclusion

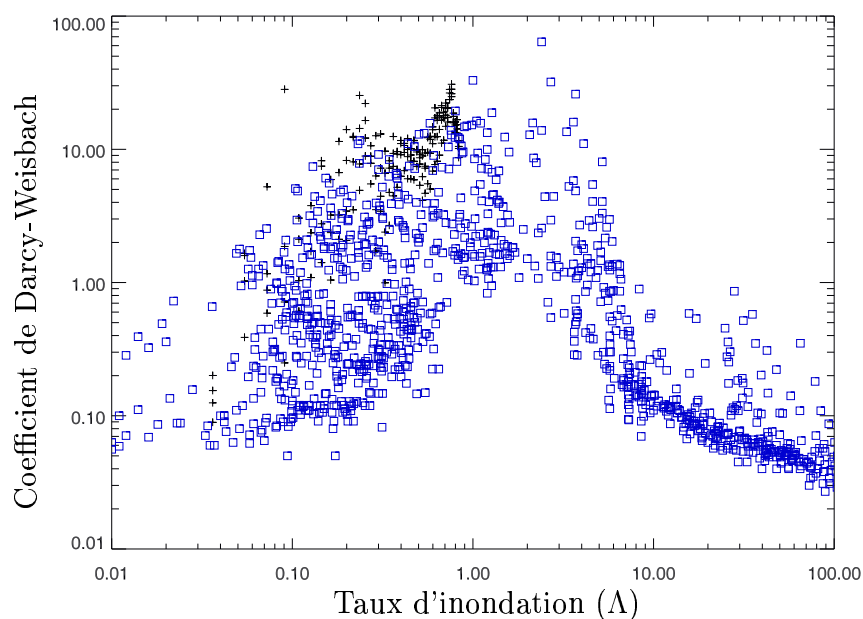


FIG. 3.24 : *Nos résultats numériques et les résultats disponibles dans la littérature sont parfaitement comparables.*

Comme nous l'avons souligné dans la conclusion du chapitre 2, notre modèle prend en compte la variabilité de l'influence des micro rugosités au travers de la diversité des réseaux hydrauliques. Il est évident que la répartition spatiale des rugosités sur la surface n'est pas sans incidence sur les squelettes et donc sur les réseaux. De plus, nous l'avons remarqué au paragraphe 3.5.1, l'examen des **Cartes des Régions Submergées** a jeté un doute sur la représentativité de notre échantillon. Dans le chapitre suivant nous allons donc tester notre modèle hydraulique sur des surfaces générées aléatoirement présentant les mêmes caractéristiques statistiques que notre échantillon.

4

Surfaces aléatoires

Sommaire

4.1	Introduction	119
4.2	Génération d'une surface Aléatoire	120
4.2.1	La Méthode Directe	120
4.2.2	Les Bandes tournantes	121
4.3	Les surfaces aléatoires	123
4.4	Les résultats de notre modélisation sur les surfaces aléatoires	125
4.4.1	Débits globaux sur les surfaces	125
4.4.2	Coefficients de Darcy-Weisbach	126
4.5	Conclusion	130

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons développé un modèle hydraulique original afin de mieux prendre en compte l'influence des rugosités sur les écoulements très peu profonds. La principale particularité de notre modèle est qu'il prend en compte un réseau hydraulique différent pour chaque taux d'inondation. Le taux d'inondation est défini à partir de la caractérisation statistique des altitudes des rugosités.

Au chapitre 2, dans le paragraphe 2.2.2.3, nous avons vu que, du point de vue des hauteurs des rugosités, notre échantillon de surface pouvait être considéré comme représentatif du type de surface dont il est tiré. En revanche dans le chapitre 3, au paragraphe 3.5.1, les courbes du débit ainsi que l'examen des **Cartes des Régions Submergées** nous ont montré que du point de vue de la répartition spatiale des rugosités la représentativité de notre échantillon était assez médiocre.

Dans le présent chapitre nous allons donc nous attacher à connaître l'influence de la répartition spatiale des rugosités sur les résultats de notre modélisation. Pour cela, nous allons utiliser notre connaissance statistique de notre échantillon (paragraphe 2.2.2). Nous allons générer des surfaces ayant les mêmes caractéristiques statistiques que notre échantillon, mais sur lesquelles les rugosités seront réparties de manière aléatoire.

En appliquant notre modèle à ces surfaces aléatoires nous pourrons alors déterminer l'influence de la répartition spatiale des rugosités sur le débit et le coefficient de Darcy-Weisbach.

4.2 Génération d'une surface Aléatoire

Il existe bien des méthodes numériques pour générer des nombres de manière aléatoire (Annexe E). Mais les surfaces que nous devons générer doivent respecter deux critères pour que nous les considérons comme statistiquement homologues de notre échantillon. Les surfaces doivent avoir :

- le même histogramme des hauteurs des rugosités que l'échantillon original
- le même variogramme (paragraphe 2.2.2.3) que l'échantillon original.

Le premier critère nous assure que les hauteurs des rugosités des surfaces générées seront comparables à celles de la surface originale. Ainsi, nous avons pour toutes les surfaces la même hauteur caractéristique des rugosités et donc la même définition du taux d'inondation.

Les surfaces issues de processus purement aléatoires (figure 4.1) ne sont pas des représentations réalistes de surfaces naturelles. En effet, les surfaces naturelles présentent une certaine distance de corrélation liée à l'étendue spatiale et la nature des objets constituant la rugosité de la surface (cailloux, végétaux, ...). C'est par le biais de la portée et de la valeur du plateau du variogramme que nous allons tenir compte de ce fait.

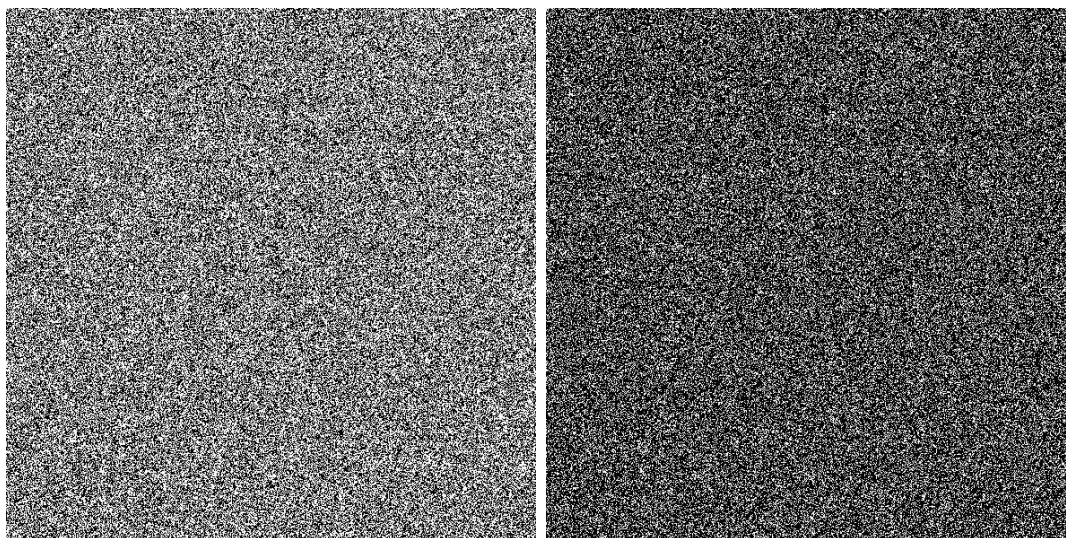


FIG. 4.1 : Ces deux *Cartes des Régions Submergées* sont issues de la même surface aléatoire générée par un processus dans lequel aucune covariance spatiale n'a été prise en compte. Une telle surface n'est pas une représentation réaliste d'une surface naturelle.

4.2.1 La Méthode Directe

La méthode la plus simple pour générer un champ aléatoire en tenant compte de la covariance est la *méthode directe*. Cette méthode repose principalement sur les deux

théorèmes suivants :

Théorème 1 - *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \sim N_d(m, \Gamma)$ (X est un vecteur Gaussien de dimension d de vecteur moyen μ et de matrice de covariance Γ)
2. Il existe une matrice A telle que :
 - $rg(A) = rg(\Gamma)$
 - $AA^T = \Gamma$
3. $X = m + A\xi_d$ avec $\xi_d \sim N_d(0, Id)$

A est appelée matrice racine carrée autoadjointe et est obtenue par la méthode de Cholesky ou la méthode de factorisation LU, les deux méthodes sont équivalentes dans le cas des matrices symétriques définies positives (ce qui est le cas des matrices de covariances).

Théorème 2 - *Si A est symétrique définie positive, A est factorisable LU et si on impose $L_{ii} > 0$ il existe une factorisation unique de la forme $A = LL^T$.*

Malheureusement le principal problème de cette méthode est qu'elle requiert la mémorisation de la matrice de covariance qui dans le cas d'une surface de $600mm \times 600mm$, avec un point tous les millimètres, a une taille trop importante pour être mémorisée (La matrice de covariance est alors une matrice 360000×360000). Nous avons envisagé d'autres algorithmes ne nécessitant pas la mémorisation de la matrice de covariance, mais le calcul systématique de ses termes en utilisant le variogramme. Dans ce cas c'est le temps de calcul nécessaire pour la méthode de Cholesky (ou LU) qui est le facteur limitant.

4.2.2 Les Bandes tournantes

Afin de pallier à ces problèmes nous avons utilisé le logiciel **R**. **R** est un logiciel qui permet la manipulation de données en offrant des facilités de calcul et de présentation graphique de ceux-ci, mais il est de plus en plus utilisé comme un outil statistique, notamment grâce au package **Random Fields** de Martin Schlater. Dans ce package la méthode retenue pour la génération de champs aléatoires est celle des *bandes tournantes* (Mantoglou et Wilson 1982). Le principe de cette méthode est de générer sur des "droites" des suites aléatoires gaussiennes stationnaires et ensuite de considérer un point de l'espace.

Considérons Z_s un champ aléatoire de \mathbb{R}^3 basé sur un processus gaussien stationnaire et monodimensionnel Y .

$$Z_s(x) = Y(\langle x, s \rangle)$$

Où s est le vecteur directeur de la droite et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace considéré. Le champ aléatoire Z_s est tel qu'il est égal à Y sur la droite et constant

sur tous les hyper-plans orthogonaux à cette droite.

Le déroulement de la méthode se fait en deux étapes :

- La génération de suites aléatoires sur les droites.
- Le calcul des valeurs prises par le champ multidimensionnel en fonction des valeurs sur les droites. Ce qui revient à la superposition de tous les champs Z_s .

La première étape peut se faire en utilisant n'importe quelle méthode (méthode directe, méthode exponentielle...), le plus important est qu'elle soit rapide puisqu'il faut générer un grand nombre de "droites", il faudra donc adapter la méthode au regard de la fonction de covariance considérée. En ce qui concerne la deuxième étape, dans le cas bidimensionnel les droites passent toutes par l'origine et sont séparées par des angles égaux. Pour $x = (x_1, x_2)$, un point donné de \mathbb{R}^2 nous aurons alors :

$$\langle x, (\cos(\phi), \sin(\phi)) \rangle = x_1 \cos(\phi) + x_2 \sin(\phi)$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{(n)}} \sum_{j=1}^n Z_j$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{(n)}} \sum_{j=1}^n Y_j \left(x_1 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + x_2 \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right)$$

Numériquement nous ne générons pas une suite aléatoire sur une droite, mais un vecteur aléatoire. Il est donc évident que l'argument de Y ne peut être qu'un entier, ce qui n'est pas le cas dans la formule précédente. Pour remédier à ce problème il ne faut pas prendre la moyenne des deux valeurs de la suite dont les indices encadrent $x_1 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + x_2 \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, ce qui aurait pour effet de lisser la fonction de covariance. Il faut donc choisir parmi ces deux valeurs de la suite celle dont l'indice est le plus près de $x_1 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + x_2 \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$.

Il faut aussi s'assurer que le nombre de droites considérées est suffisamment important pour que les champs aléatoires générés soient isotropes. Dans le cas contraire des directions privilégiées peuvent apparaître dans le champ comme le montre les **Cartes des Régions Submergées** de la figure 4.2.

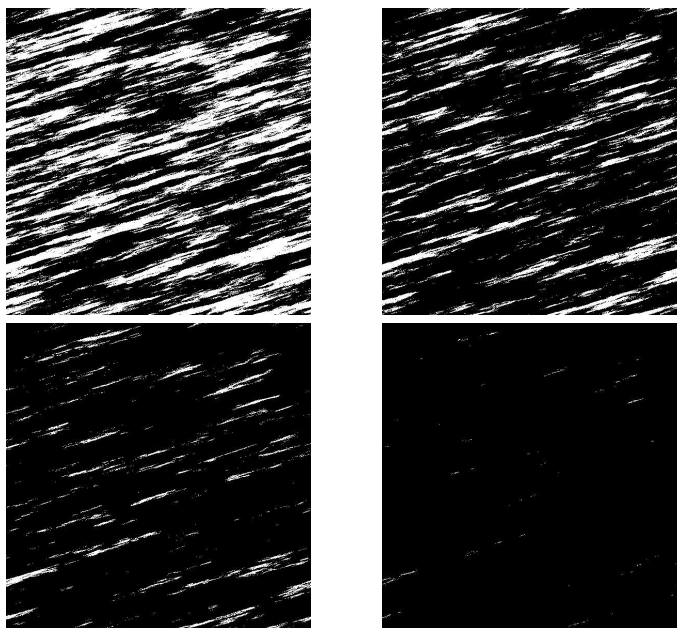


FIG. 4.2 : Lors de la génération d'une surface aléatoire, un nombre insuffisant de droites dans la méthode des bandes tournantes provoque une anisotropie dans le champ aléatoire généré. Cette anisotropie est évidente sur les *Cartes des Régions Submergées* tirées de la dite surface.

4.3 Les surfaces aléatoires

Nous utilisons donc les fonctionnalités du package **Random Fields** du logiciel **R** pour générer nos surfaces aléatoires. Pour cela, nous devons, entre autres, préciser quel modèle de variogramme nous désirons. Au vu du variogramme expérimental de notre échantillon de surface (figure 4.3), nous choisissons un modèle **exponentiel** dont les paramètres sont la portée et la variance.

De cette manière nous générons une vingtaine de surfaces aléatoires ayant des propriétés statistiques proches de celles de notre échantillon. Elles ont toutes des histogrammes des hauteurs des rugosités proches de celui de notre échantillon original. Mais bien plus important encore des variogrammes semblables au variogramme expérimental.

Sur la figure 4.4, nous avons représenté le variogramme expérimental (en trait continu) et les variogrammes (losanges bleus) de toutes les surfaces aléatoires générées. Comme nous pouvons le constater, les surfaces aléatoires ont sensiblement la même variance (valeur du plateau du variogramme) et la même portée (abscisse à laquelle le variogramme atteint le plateau) que l'échantillon original.

Pour information nous avons également comparé le variogramme expérimental de notre surface au variogramme moyen des surfaces aléatoires générées par la méthodes des bandes tournantes.

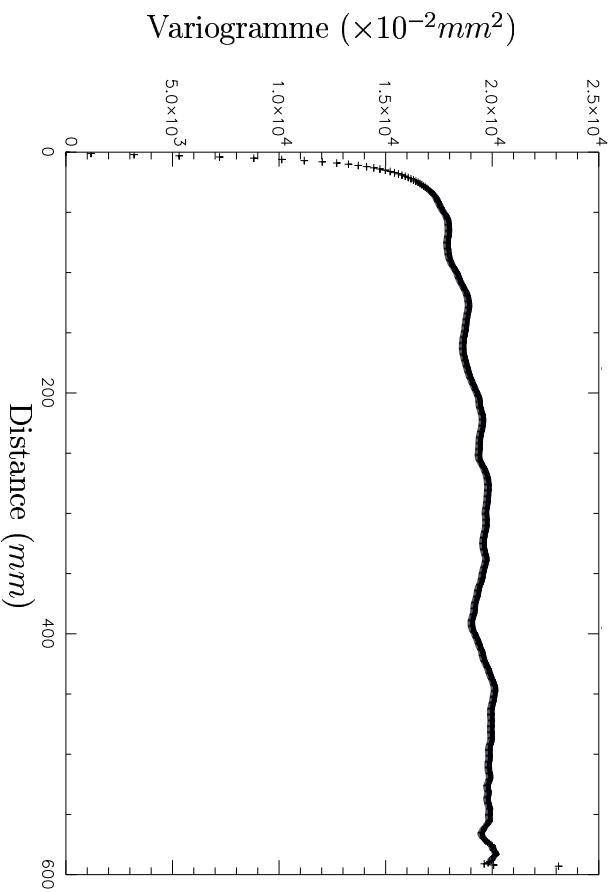
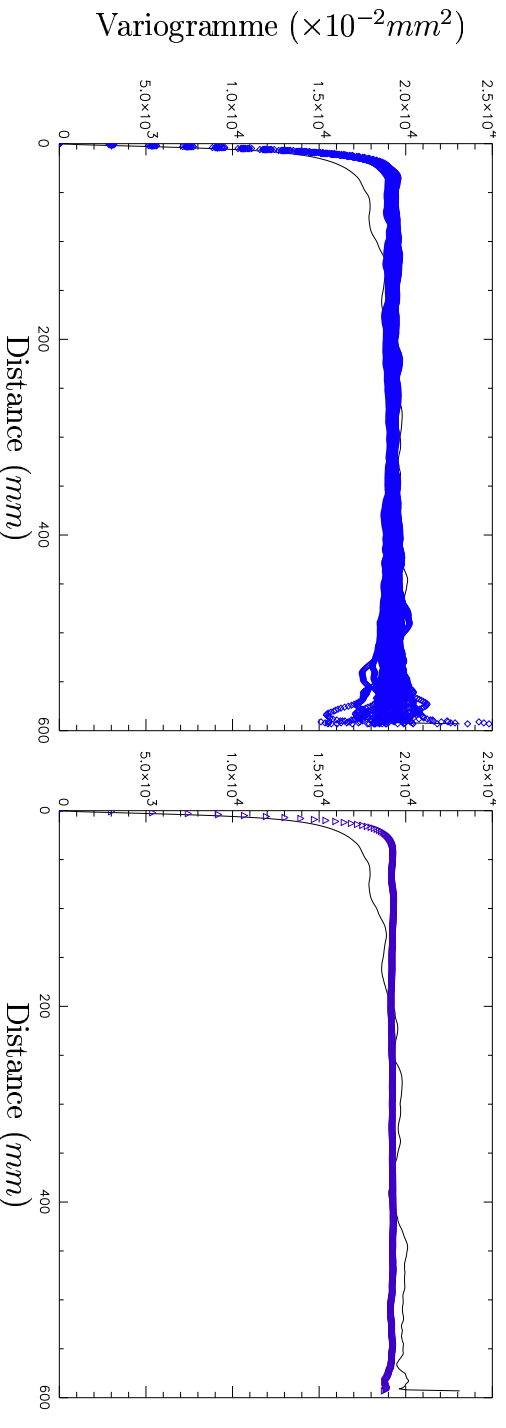


FIG. 4.3 : Variogramme expérimental de notre échantillon de surface. L'allure du variogramme expérimental ressemble fortement à celle d'un variogramme exponentiel. Pour paramétrer un variogramme exponentiel nous avons besoin de la variance (valeur du plateau) et de la portée (abscisse à laquelle le plateau est atteint) de l'échantillon.



(a) Variogrammes des différentes surfaces aléatoires

(b) Variogramme moyen des différentes surfaces aléatoires

FIG. 4.4 : Nous générons, par la méthode des bandes tournantes, des surfaces aléatoires ayant des variogrammes très proches du variogramme expérimental de notre échantillon de surface.

4.4 Les résultats de notre modélisation sur les surfaces aléatoires

Si les surfaces ainsi générées ont des propriétés statistiques proches, elles diffèrent cependant de par leurs répartitions spatiales des rugosités. Afin de mettre en évidence l'influence de cette répartition spatiale sur les débits et le coefficient de Darcy-Weisbach nous appliquons notre processus de modélisation aux différentes surfaces aléatoires. Pour cela, pour chaque surface, nous effectuons les étapes suivantes :

- Nous générons la série des **Cartes des Régions Submergées** et identifions le niveau du miroir correspondant au seuil de percolation. Celui-ci nous servira alors de niveau de référence.
- A partir de la série des **Cartes des Régions Submergées** nous générons la série des squelettes. En nous appuyant sur ces derniers nous identifions les noeuds et les liens qui vont constituer nos réseaux hydrauliques.
- Nous pouvons alors appliquer notre modèle hydraulique aux différents réseaux afin d'obtenir les débits globaux pour les différentes pentes ainsi que les coefficients de Darcy-Weibach.

4.4.1 Débits globaux sur les surfaces

Le principal résultat de notre modélisation est le débit global sur la surface. Lors de notre étude sur la surface originale nous avons observé une brusque et incohérente chute des débits à partir d'un certain taux d'inondation (chapitre 3, paragraphe 3.5.1, figure 3.12). C'est à partir de cette remarque que nous avons défini le domaine de validité de notre modèle. Lors de l'application de notre modèle hydraulique aux surfaces rugueuses nous avons, le plus souvent, observé le même phénomène pour des taux d'inondation entre 0,6 et 0,8.

Les figures 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 représentent les débits spécifiques globaux en fonction du taux d'inondation pour les 20 surfaces aléatoires que nous avons générées par la méthode des bandes tournantes. Considérant la dispersion des résultats obtenus, il est bien évident que la répartition spatiale des rugosités joue un rôle important dans notre modélisation. Un rôle bien plus important que la prise en compte de la friction (chapitre 3, paragraphe ??, figure 3.19).

Les figures 4.9 et 4.10 représentent les débits globaux pour différentes pentes sur deux des surfaces aléatoires considérées dans notre étude. Pour l'ensemble des surfaces aléatoires nous avons retrouvé la même influence de la pente. C'est à dire qu'à un taux d'inondation donné, l'augmentation de la pente entraîne une augmentation du débit. Mais, dans notre recherche de caractérisation de l'écoulement sur un type de surface, nous constatons que la répartition spatiale des rugosités engendre une dispersion des courbes de débit compa-

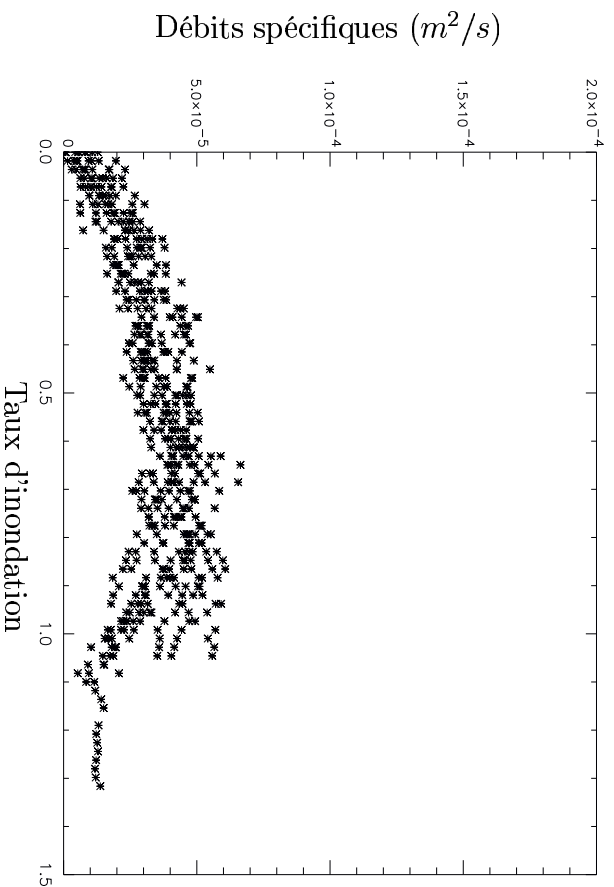


FIG. 4.5 : Débits globaux calculés sur les surfaces aléatoires pour une pente générale de 3%.

rables aux écarts dus à la pente sur une surface donnée. Malgré cette dispersion, l'influence de la pente sur le nuage de points reste très lisible.

4.4.2 Coefficients de Darcy-Weisbach

Sur la figure 4.11, nous avons représenté les coefficients de Darcy-Weisbach équivalents calculés à partir des simulations sur nos 20 surfaces aléatoires générées par la méthode des bandes tournantes. Dans le domaine de validité de notre modèle ($\Lambda < 0, 8$) les résultats sur les surfaces aléatoires sont tout à fait comparables à ceux de notre surface originale (chapitre 3, paragraphe 3.5.4, figure 3.20).

Nous retrouvons, pour l'ensemble des surfaces aléatoires un comportement analogue à celui d'un modèle de force de traînée. Malgré la dispersion des résultats, les coefficients de Darcy-Weisbach des différentes surfaces sont toujours dans la même gamme de valeur.

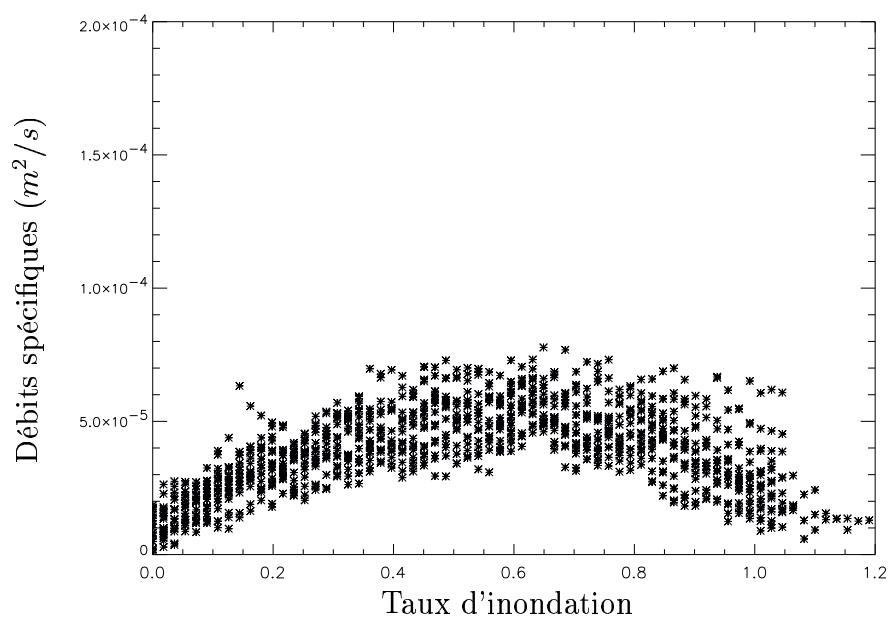


FIG. 4.6 : Débits globaux calculés sur les surfaces aléatoires pour une pente générale de 5%.

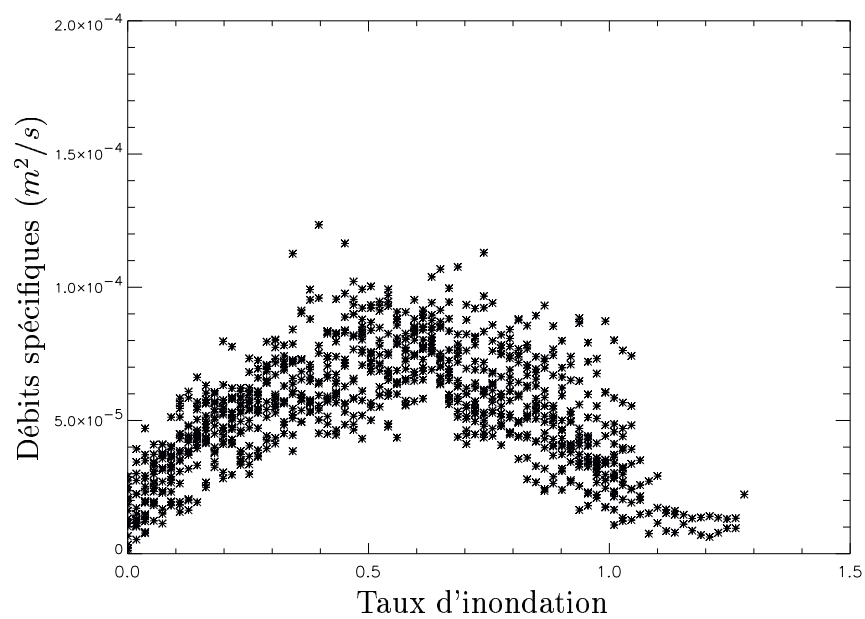


FIG. 4.7 : Débits globaux calculés sur les surfaces aléatoires pour une pente générale de 10%

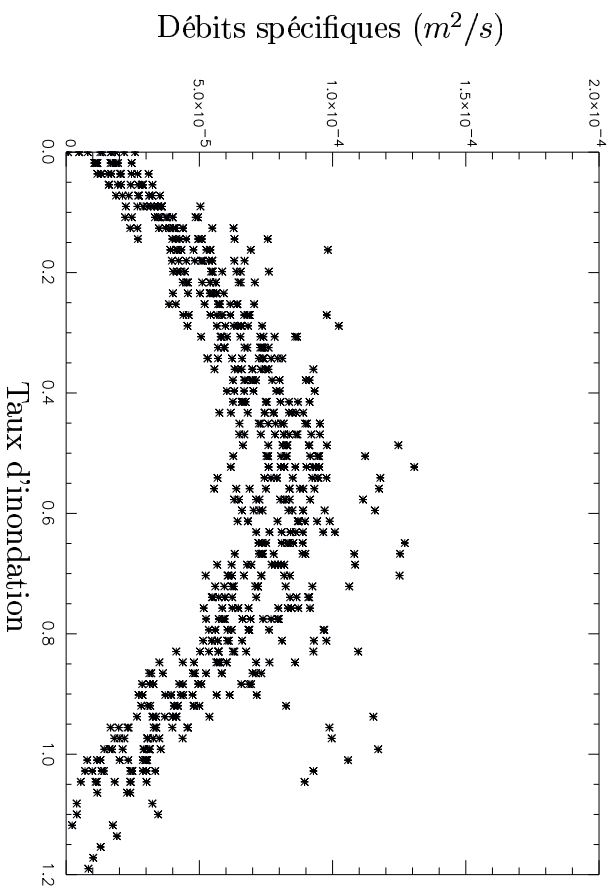


FIG. 4.8 : Débits globaux calculés sur les surfaces aléatoires pour une pente générale de 15%

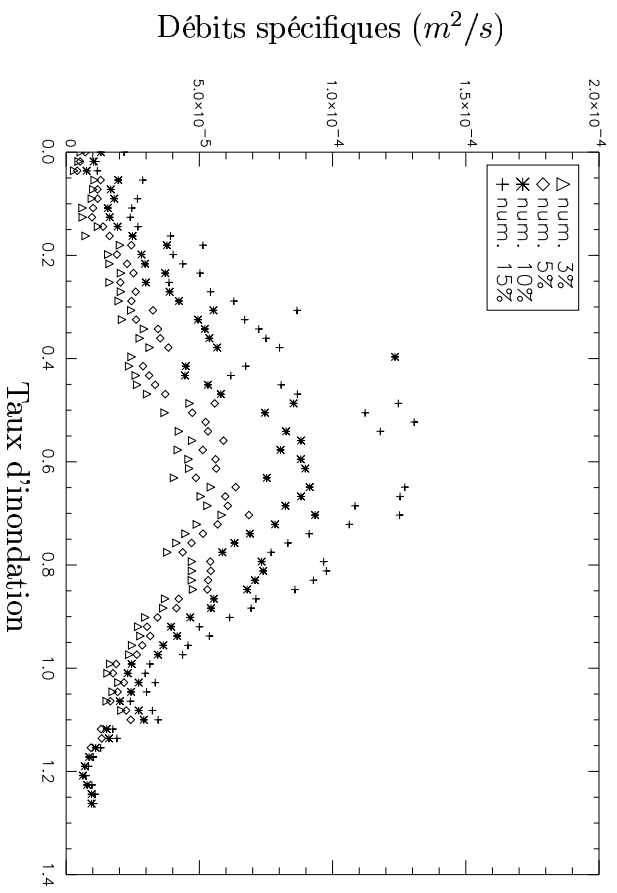


FIG. 4.9 : Débits globaux calculés sur la surface aléatoire numéro 1 pour les pentes générales 3, 5, 10 et 15%.

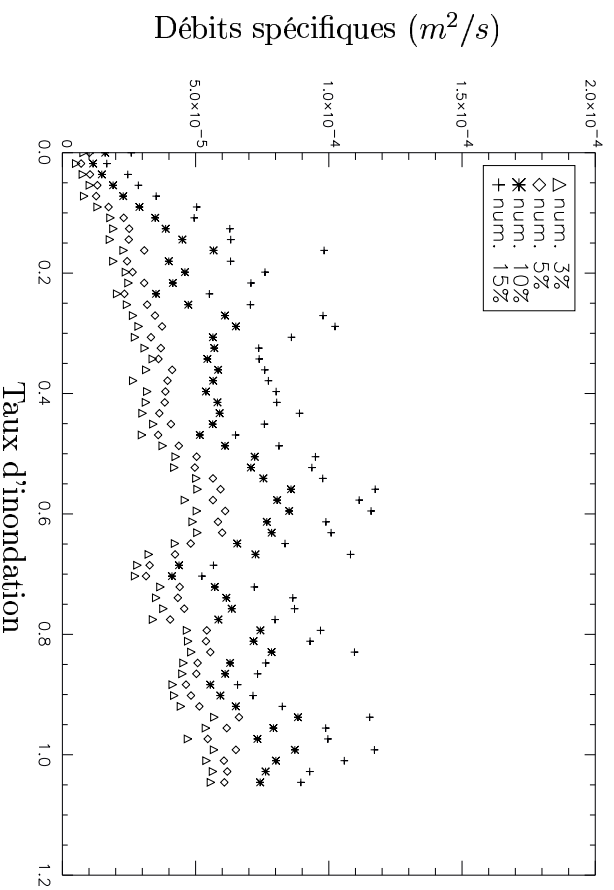


FIG. 4.10 : Débits globaux calculés sur la surface aléatoire numéro 6 pour les pentes générales 3, 5, 10 et 15%.

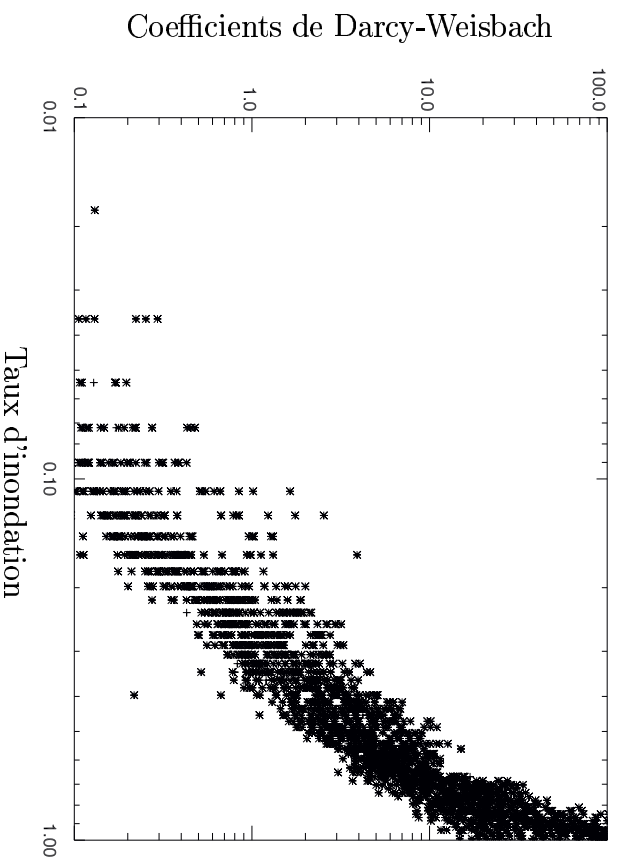


FIG. 4.11 : Coefficients de Darcy-Weisbach équivalents pour l'ensemble des surfaces aléatoires et pour toutes les pentes.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons cherché à caractériser un écoulement sur un type de surface donnée. La représentativité de notre surface originale n'étant pas idéale du point de vue de la répartition spatiale des rugosités, nous avons choisi d'appliquer notre modèle hydraulique à des surfaces aléatoires. Pour cela nous avons généré 20 surfaces statistiquement homologues à notre échantillon original à l'aide de la méthode des bandes tournantes. La répartition spatiale des rugosités est responsable d'une dispersion relativement importante de nos résultats. Il apparaît donc que dans le cas des écoulements en régime d'inondation partielle, la répartition spatiale des rugosités est un paramètre tout aussi important à prendre en compte que la pente et bien plus important que le nombre de Reynolds global, dont nous avons déjà souligné le peu de pertinence dans le chapitre précédent.

Cependant, malgré la dispersion des résultats, le coefficient de Darcy-Weisbach équivalent calculé pour les surfaces aléatoires présente toujours un comportement analogue au modèle de force de traînée. Fort de ces constatations, nous avons voulu valider notre modèle numérique en effectuant nos propres expérimentations. Notre démarche expérimentale, ainsi que nos résultats expérimentaux sont l'objet du chapitre suivant.

5

Etude Expérimentale

Sommaire

5.1	Introduction	131
5.2	Dispositif expérimental	133
5.2.1	Présentation générale	133
5.2.2	Mesure de débit	135
5.3	Mesure de l'épaisseur de la lame d'eau	136
5.3.1	Estimation de la hauteur d'eau équivalente	136
5.3.1.1	Taux de surface submergée	137
5.3.1.2	Détermination du taux de surface submergée expérimental	139
5.3.2	Mesure ou estimation ?	142
5.4	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques	143
5.4.1	Les débits	143
5.4.2	Le coefficient de Darcy-Weisbach	145
5.5	Conclusion	148

5.1 Introduction

Dans la conclusion du chapitre 3 (paragraphe 3.6, figure 3.24), nous avons comparé les coefficients de Darcy-Weisbach fictifs calculés par notre modèle avec ceux obtenus expérimentalement par nombre de nos prédécesseurs (Savat 1980, Rauws 1980, Emmett 1970, Phelps 1975, Roels 1984, Gilley, Kottwitz et Wieman 1992, Bunte et Poesen 1994, Bunte et Poesen 1993) (pour plus de commodités la figure 3.24 est rappelée ci-après, figure 5.1). Cependant, tous n'ont pas la même définition du taux d'inondation et certains ont mené leurs expériences sur des surfaces présentant plusieurs tailles caractéristiques de hauteur de rugosités (Bunte et Poesen 1994, Bunte et Poesen 1993, Gilley, Kottwitz et Wieman 1992, Rauws 1980). Donc, même si la figure 5.1 nous permet de juger qualitativement de la justesse de nos résultats numériques, elle ne nous permet pas de les valider expérimentalement d'un point de vue quantitatif.

Pour cela, nous avons mis au point un dispositif expérimental incluant le moulage déjà évoqué au chapitre 2 (paragraphe 2.2.1). Pour étudier expérimentalement la résistance hydraulique à l'écoulement en fonction du taux d'inondation, et plus particulièrement le coefficient de Darcy-Weisbach, il est nécessaire de pouvoir mesurer le débit et la hauteur moyenne d'eau au-dessus de la surface.

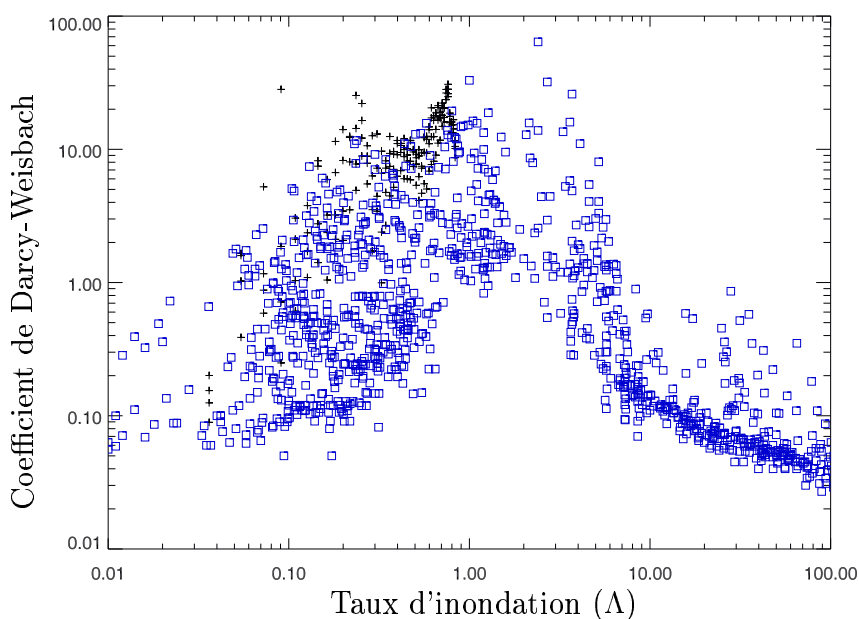


FIG. 5.1 : Nos résultats numériques (croix noires) sont tout à fait comparables aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature (carrés bleus).

Du point de vue expérimental, si la mesure du débit ne pose généralement pas de problème, il est plus délicat de mesurer une hauteur d'eau. Dans notre cas cette mesure est d'autant plus délicate que le fond de notre moulage n'est pas plat. En effet, dans la plupart des études expérimentales les surfaces étudiées sont construites en collant sur une plaque plane des rugosités artificielles (Savat 1980, Rauws 1980, Lawrence 1997), notre échantillon de surface étant obtenu à partir du moulage d'une surface réelle, nous n'avons pas de référence physique évidente pour la mesure des hauteurs d'eau. Ce problème de référence a déjà été abordé théoriquement par le biais de la théorie de la couche limite (Schlichting 1968, Grigson 1984) mais cela reste un problème expérimental délicat.

Savat obtient la hauteur d'eau moyenne au-dessus de ses échantillons en pesant le volume de fluide sur ceux-ci et en divisant simplement par leur surface (Savat 1980). Rauws, propose quant à lui de mesurer le débit spécifique (débit par unité de largeur en m^2/s) et de diviser par la vitesse moyenne du fluide obtenue par le suivi d'un colorant injecté dans l'écoulement (Rauws 1980). Les expérimentations de Savat et Rauws ne considèrent malheureusement pas de rugosités émergentes.

En revanche, Abrahams, dans son étude du ruissellement sur des surfaces naturelles très rugueuses (Abrahams, Parsons et Luk 1986), considère de nombreuses rugosités émergentes et un fond non plat. Il calcule alors la hauteur d'eau moyenne sur quelques sections transverses de ses échantillons à l'aide d'une fine jauge graduée.

Plus récemment, Vlachogiannis et Bontozoglou ont proposé une méthode de mesure de la hauteur d'eau en se basant sur la fluorescence d'un colorant (Vlachogiannis et Bontozoglou 2002). Ils constatent que la hauteur d'eau sur la surface ($h(x, y, t)$) et l'intensité de la fluorescence ($I(x, y, t)$) sont reliées linéairement.

$$I(x, y, t) = a(x, y)h(x, y, t) + b(x, y) \quad (5.1)$$

5.2. Dispositif expérimental

Les coefficients $a(x, y)$ et $b(x, y)$ doivent être calibrés, généralement en utilisant un écoulement sur une surface lisse et en faisant parallèlement des mesures à l'aide d'un micromètre. Malheureusement cette méthode de mesure nécessite un appareillage spécial (moulage transparent, laser...) assez lourd à mettre en place et coûteux.

Dans ce qui suit nous allons dans un premier temps présenter notre dispositif expérimental, puis nous introduirons la hauteur d'eau équivalente et nous détaillerons le principe de notre estimation de celle-ci sur notre échantillon. Enfin, nous pourrions comparer nos résultats expérimentaux avec les résultats de notre modèle numérique et ainsi valider nos résultats numériques.

5.2 Dispositif expérimental

5.2.1 Présentation générale

Notre dispositif expérimental est des plus simples et est représenté schématiquement sur la figure 5.3. Nous disposons d'un réservoir d'une vingtaine de litres qui alimente, grâce à une pompe (figure 5.2(a)), un trop plein (figure 5.2(b)). Celui-ci nous permet de garder le débit constant durant toute la durée d'une mesure. D'une mesure à l'autre, nous pouvons à notre gré, faire varier le débit en changeant la charge au-dessus de l'échantillon (i.e. la position du trop plein par rapport à l'échantillon). En amont du moulage nous avons disposé un système de petits bassins qui se déversent les uns dans les autres (figure 5.2(c)). Ils nous permettent de limiter les turbulences et d'alimenter aussi uniformément que possible l'échantillon. Dans le même but nous avons mis en place à l'entrée des bassins un dispositif qui permet de dissiper l'énergie cinétique du jet d'alimentation (figure 5.2(c)). Ces bassins permettent également une alimentation uniforme de l'échantillon de surface.

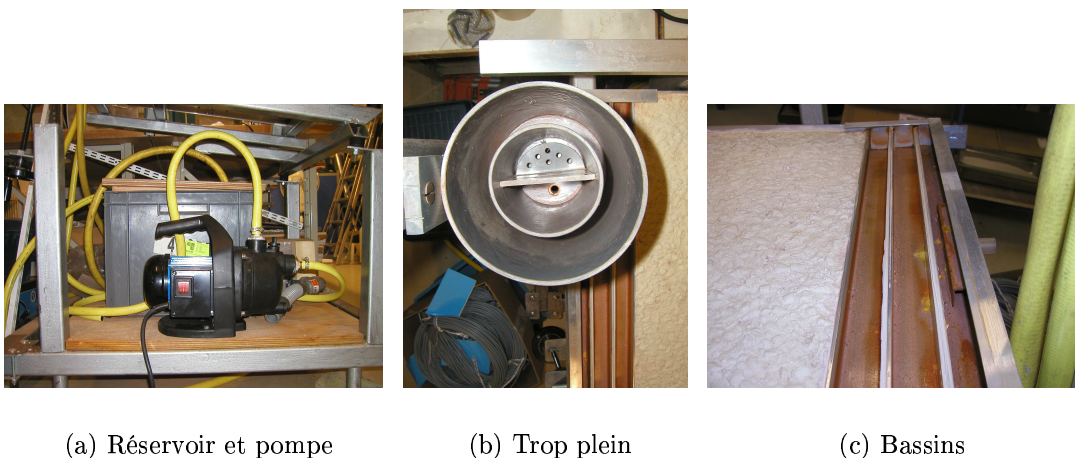


FIG. 5.2 : Le **réservoir**, par le biais d'une **pompe**, alimente le **trop plein**. Sur le bord aval de l'échantillon, une succession de **bassins** assure une alimentation uniforme de celui-ci.

Le positionnement de l'échantillon sur le bâti de notre dispositif expérimental est réglable autour de deux axes. Cela nous permet de faire varier la pente générale de notre échantillon (dans le sens de l'écoulement) mais aussi l'inclinaison du moulage dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

Comme nous sommes dans l'incapacité de repérer physiquement le plan moyen des rugosités sur notre moulage, ce deuxième réglage nous permet d'empêcher que la totalité de l'écoulement ne se fasse d'un côté ou de l'autre de l'échantillon. Avant chaque série d'expériences nous réglons cette inclinaison du moulage de manière subjective en veillant à ce que l'écoulement se répartisse sur celui-ci.

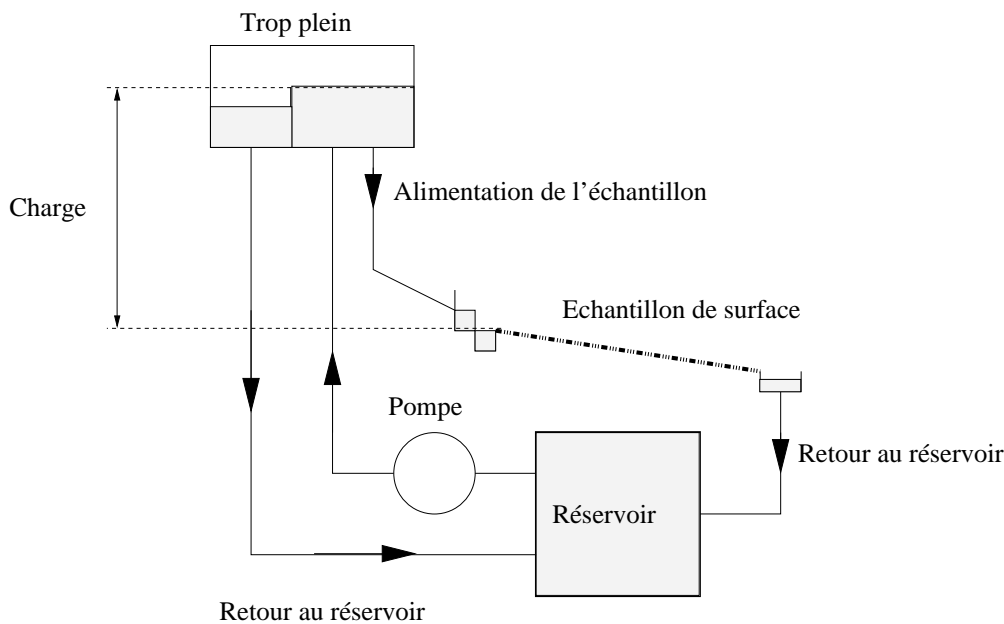


FIG. 5.3 : représentation schématique de notre dispositif expérimental incluant le moulage de la surface étudiée.

Les débits que nous avons observé dans un premier temps étant trop importants, nous avons inséré dans le tuyau d'alimentation un gicleur. Celui-ci, en diminuant brutalement la section de sortie du tuyau d'alimentation, occasionne une perte de charge supplémentaire qui limite le débit et permet d'éviter la submersion trop rapide de l'échantillon. Nous possédons plusieurs gicleurs, de différents diamètres, ce qui nous permet de couvrir une assez large gamme de débits dans les domaines d'inondation partielle et marginale.

Concernant notre protocole expérimental, signalons que les problèmes de mouillage de l'échantillon sont très importants pour les écoulements très peu profonds tels que ceux que nous considérons. Lors de la mise en route de nos expérimentations, nous avons pu constater que certaines régions de l'échantillon, très clairement suffisamment basses pour être submergées et connectées, ne participaient pas à l'écoulement (figure 5.4). Nous devons donc veiller à bien mouiller tout l'échantillon avant toute estimation. Ce faisant nous nous affranchissons des problèmes de mouillage et submergeons artificiellement les zones isolées considérées dans le calcul du taux de submersion.

Soulignons également que, contrairement à notre approche numérique (chapitre 3, paragraphe 3.4.4), nous ne contrôlons pas les niveaux de surface libre amont et aval mais le

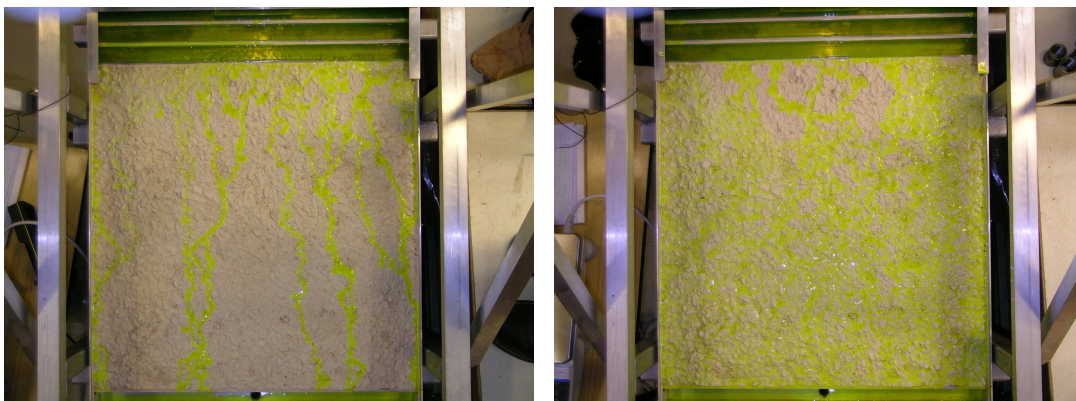


FIG. 5.4 : Lors de la mise en route de nos expérimentations, des zones qui devraient être submergées ne le sont pas à cause de problèmes de mouillage de l'échantillon dus au effet de la tension superficielle.

débit. Ainsi, sur notre dispositif expérimental, le niveau de surface libre amont s'établit spontanément afin de faire passer le débit. A l'aval nous avons une chute libre. Cependant le remous provenant de cette chute devrait s'étendre sur une région très petite, et par conséquent perturber faiblement l'écoulement dans son ensemble.

5.2.2 Mesure de débit

Nous avons choisi de mesurer le débit par pesée. Pour cela, après que le régime permanent se soit établi, nous pesons le volume d'eau écoulée sur la surface en un temps donné. La mesure se fait au moins sur une minute et pour au moins un litre d'eau écoulé.

Considérant la vitesse des réflexes humains nous admettons que nous commettons pour chaque mesure du temps une erreur de deux secondes (une seconde au déclenchement et une seconde à l'arrêt du chronomètre). Soit, en considérant la durée minimum d'une mesure, une erreur relative de 3% au maximum sur la mesure du temps :

$$\left(\frac{\Delta t}{t}\right)_{max} = \frac{2s}{60s} \simeq 0,03$$

En ce qui concerne la pesée proprement dite, nous pouvons parfaitement distinguer le chiffre des dizaines de grammes défilier sur le cadran de notre balance. Nous pouvons donc affirmer que pour chaque mesure nous effectuons une erreur de l'ordre de 20grammes sur le poids (10grammes au déclenchement et 10grammes à l'arrêt de la pesée). Soit, en considérant le poids minimum d'eau pour nos mesures, une erreur relative maximum de l'ordre de 2% sur le poids :

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{max} = \frac{20g}{1000g} = 0,02$$

Ce qui nous fait une erreur relative maximum sur les débits de l'ordre de 5% :

$$\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_{max} = \left(\frac{\Delta t}{t}\right)_{max} + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{max} \simeq 0,05$$

5.3 Mesure de l'épaisseur de la lame d'eau

Comme nous l'avons déjà souligné dans l'introduction de ce chapitre, notre principal problème est l'absence de référence physique évidente pour les hauteurs des rugosités mais aussi pour la mesure de la hauteur d'eau au-dessus de celles-ci. En effet s'il est facile numériquement de définir un plan moyen des rugosités, il est bien moins aisé de le repérer sur notre moulage. La mesure de la hauteur d'eau moyenne au-dessus des rugosités est pourtant cruciale pour l'obtention des coefficients de frottements de Darcy-Weisbach sur l'échantillon.

Nous aurions pu mesurer la hauteur d'eau au-dessus des rugosités par un système de sonde micrométrique ou bien encore de sonde à ultrason. Ces deux types de mesures nécessitent un balayage complet de la surface, ce qui est une procédure assez longue et fastidieuse. Pour gagner du temps, nous pourrions éloigner la sonde à ultrason de l'échantillon, mais ce serait alors au détriment de la précision, de plus le balayage complet de l'échantillon resterait assez long.

Nous aurions également pu utiliser des sondes piezométriques reliées au fond du moulage de notre échantillon de surface. Cette solution n'est pas satisfaisante puisque ces sondes ne permettraient alors pas de mesurer la pression statique relative à la hauteur d'eau au dessus de la sonde. Le fond n'étant pas plat, les lignes de courant de l'écoulement ne seront certainement pas parallèles au fond et nos sondes mesureraient en fait une pression dynamique.

La mesure directe de la hauteur d'eau sur un échantillon de surface comme le nôtre n'est donc pas facilement envisageable. Il nous faut donc un autre moyen d'accéder à la hauteur d'eau moyenne au-dessus du moulage. Dans les chapitres précédents (chapitres 2 et 3), nous avons introduit une hauteur d'eau équivalente au dessus de la surface. Cette hauteur d'eau équivalente correspond au niveau du miroir (voir chapitre 2 paragraphe 2.2.3) au dessus du seuil de percolation. D'après sa définition, il est évident que cette hauteur d'eau n'est pas à proprement parler une hauteur d'eau moyenne au dessus des rugosités. Nous avons pourtant choisi de calculer le coefficient de Darcy-Weisbach à l'aide de cette hauteur équivalente (nous avons justifié ce choix dans le chapitre précédent). Il nous faut donc un moyen simple et rapide d'estimer cette hauteur expérimentalement.

Ainsi, nous avons mis au point une méthode **d'estimation** de la hauteur d'eau équivalente qui ne nécessite pas la connaissance physique d'un plan de référence. Cependant, cette méthode est basée sur des hypothèses contraignantes et par ce fait n'a pas la prétention de remplacer des systèmes de mesures comme ceux précédemment cités. Il est donc important de noter que nous ne proposons qu'une **estimation** de cette hauteur d'eau et non pas une mesure.

5.3.1 Estimation de la hauteur d'eau équivalente

En étudiant la **Carte Numérique des Altitudes** et l'ensemble des **Cartes des Régions Submergées**, il est facile de déterminer numériquement un plan de référé-

rence (plan de percolation), le **taux d'inondation** (Λ , voir chapitre 2 paragraphe 2.2.5) et parallèlement le pourcentage de surface submergée (taux de surface submergée) correspondant. Dès lors, si nous pouvons déterminer expérimentalement le taux de surface submergée de notre moulage nous pourrions estimer le taux d'inondation correspondant ainsi que la hauteur d'eau équivalente.

5.3.1.1 Taux de surface submergée

Numériquement, l'inondation progressive de la surface, et par conséquent le calcul du taux de surface submergée, peut se faire de deux manières différentes. La première consiste simplement à augmenter progressivement le niveau du miroir de la rugosité la plus basse à la rugosité la plus haute. C'est de cette manière qu'ont été générées les **Cartes des Régions Submergées**. Sur la figure 5.5 est représenté le taux de surface submergée calculé par cette méthode à partir de la **Carte Numérique des Altitudes** en fonction du taux d'inondation.

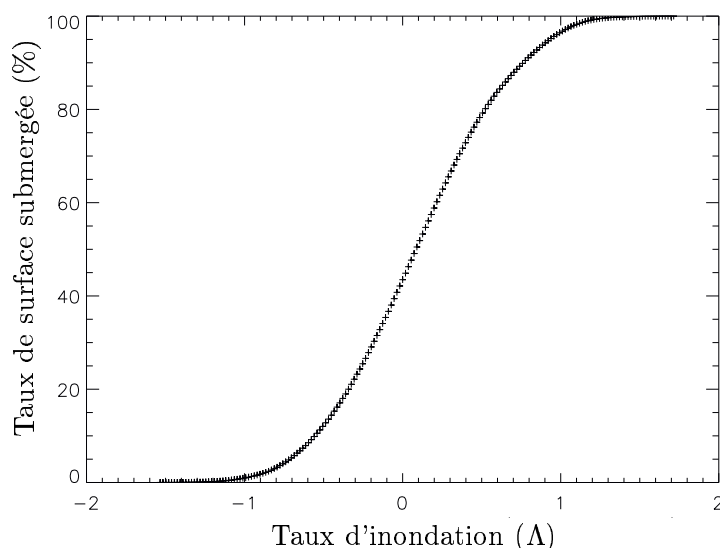


FIG. 5.5 : Taux de surface submergée, calculé sans distinguer les zones isolées et les zones connectées en fonction du taux d'inondation.

La seconde possibilité consiste à faire descendre progressivement le niveau du miroir de la rugosité la plus haute à la plus basse. Au cours de la descente du miroir certaines régions se trouvent isolées par rupture de leurs connexions avec les bords de la plaque. Le niveau du miroir dans chacune de ces régions se trouve bloqué au niveau atteint au moment de la déconnexion, tandis qu'il continue à diminuer dans la partie connectée de la surface submergée.

Ce mode d'évolution de la surface submergée est celui qui correspond le mieux au protocole expérimental adopté. Nous avons en effet, avant toute mesure, effectué un mouillage forcé de toute la surface (paragraphe 5.2.1) afin de nous affranchir des effets d'hydrophobie possible de notre surface.

Nous avons représenté les deux taux de surface submergée ainsi obtenus numériquement sur la figure 5.6. Pour les forts taux de surface submergée la différence entre les deux courbes est minime car il n'y a alors aucune zone isolée. Au fur et à mesure que le niveau

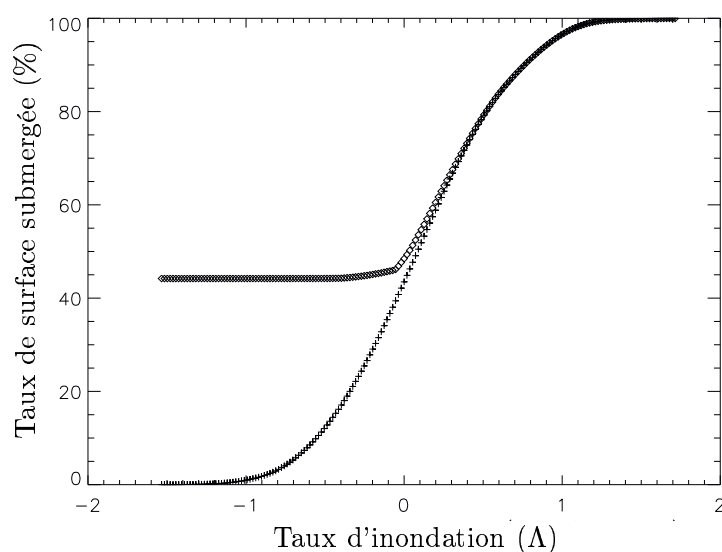


FIG. 5.6 : Comparaison du taux de surface submergée calculé avec la première méthode et du taux de surface submergée calculé en stoppant la progression du miroir dans les zones isolées de l'échantillon.

du miroir diminue des zones isolées apparaissent ce qui explique ensuite que le taux de surface submergée soit plus grand que lorsque nous ne prenons pas en compte la formation de ces bassins. Cependant la différence n'est pas très importante. En dessous du seuil de percolation les zones isolées sont prépondérantes et le taux de surface submergée tend vers une constante non nulle.

Quand le miroir passe en dessous du seuil de percolation, le taux de surface submergée continue à diminuer car notre procédure continue de vidanger les zones reliées aux bords amont ou aval alors même qu'il n'existe plus de chemin percolant d'un bord à l'autre sur la surface. Toutefois, la faible pente de la courbe en dessous du seuil de percolation indique que ces zones ont peu d'influence. Quoi qu'il en soit, la partie de la courbe située en dessous du seuil de percolation est expérimentalement inintéressante.

La figure 5.6 montre également que l'influence des zones isolées diminue très rapidement après le seuil de percolation.

Dans l'écoulement réel, les bassins hydrostatiques qui se forment dans les régions isolées ont une surface libre horizontale, tandis que dans les zones participant à l'écoulement la surface libre a dans l'ensemble la pente générale de l'échantillon. L'extension de ces bassins dépend donc de la pente générale. De plus, comme la condition aval est une condition de chute libre et non de niveau imposé, les régions qui au cours de la descente du miroir, se trouvent déconnectées de l'amont tout en restant connectées à l'aval vont dès cette étape se vider jusqu'à un niveau qui les déconnecte aussi de l'aval. Quelques régions aval vont donc à certaines étapes avoir un niveau inférieur à celui du miroir.

Par souci de simplicité nous ne pouvons pas prendre en compte tous ces phénomènes dans notre calcul du taux de surface submergée. Cependant, la principale cause d'erreur de notre méthode de calcul de la surface submergée et d'estimation de la hauteur d'eau au-dessus de la surface qui en découle est probablement liée aux déformations de la surface libre d'origine dynamique. La surface libre réelle est certainement assez éloignée du plan idéal représenté par le concept de miroir, ainsi que nous pouvons nous en rendre compte

par l'examen visuel d'un écoulement sur notre échantillon.

Notre méthode repose sur une hypothèse fondamentale difficilement vérifiable : **les surélévations et les dépressions de la surface libre par rapport au miroir se compensent dans l'ensemble pour générer un taux de surface submergée proche de celui qui est calculé à partir du plan idéal du miroir.**

Quoi qu'il en soit, dans notre démarche d'estimation de la hauteur d'eau équivalente, à l'instar de notre modélisation (voir chapitre 3), nous ne cherchons pas à reproduire la réalité de l'écoulement local. Notre but est, là encore, de rechercher des conditions équivalentes d'écoulement sur l'ensemble de notre échantillon qui représenteraient de manière adéquate la somme des phénomènes locaux.

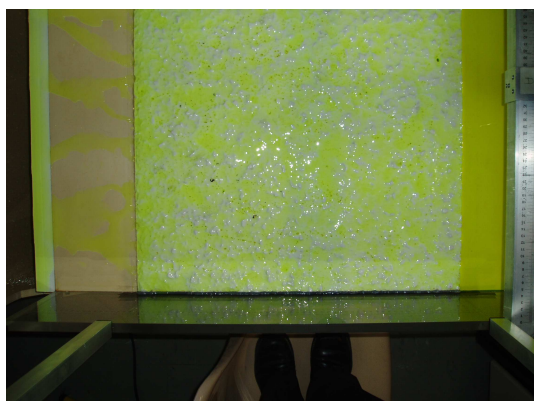
5.3.1.2 Détermination du taux de surface submergée expérimental

A partir de photos de nos expérimentations nous allons déterminer le taux de surface submergée de notre moulage pour différentes conditions d'écoulements (pente, débit). Sur ces photos il nous faut donc discerner les pixels correspondant à des parties immergées ou émergées. Ce choix va évidemment se faire sur la couleur des pixels (figure 5.7(a)). Afin d'accentuer la différence de couleur entre les zones submergées et les zones émergées du moulage nous avons versé dans l'eau un colorant (fluorescéine).

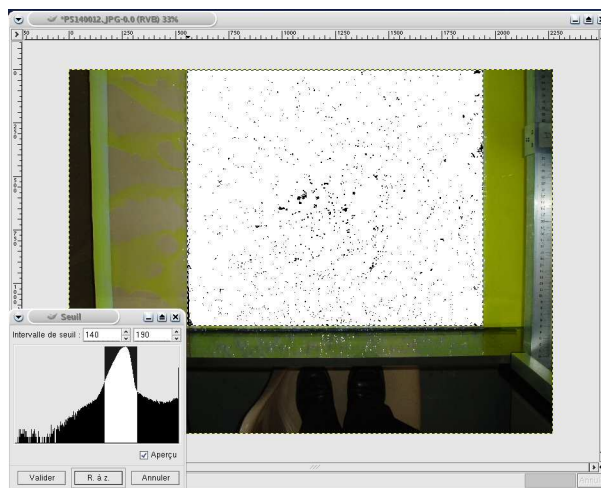
Nous avons utilisé des images *bmp 24 bits* (voir annexe A) pour la simplicité de ce format d'image. En effet, dans les images *bmp* les valeurs des pixels sont tout simplement "rangés" les uns à la suite des autres sans aucune compression. Chaque pixel est codé sur trois octets, un pour le rouge, un pour le vert et un pour le bleu (c'est le code RGB). Pour faire notre tri des pixels on peut donc s'intéresser à ces trois octets, à deux ou bien à seulement un.

Comme on peut le voir sur la figure 5.7(b) la détermination des zones immergées n'est pas si aisée. L'histogramme d'intensité de couleur de l'image présente effectivement un pic pour les intensités autour de 150, mais malheureusement, presque tous les pixels, qu'ils soient immergés ou pas, de la zone d'étude sont situés dans ce pic. De plus, l'histogramme de l'intensité des seuls pixels de la zone d'étude (figure 5.8(a)) présente un écart type trop faible pour nous permettre de faire un tri satisfaisant des pixels. Nous ne pourrions donc pas faire le tri des pixels émergés et immergés en effectuant un simple seuillage sur leur intensité.

Considérons donc chaque couleur séparément. Comme le montre la figure 5.8(b), c'est l'intensité de Bleu des pixels de la zone d'étude qui présente le plus gros écart type. Cela se traduit par un meilleur contraste entre les parties immergées et les parties émergées sur l'image prenant en compte la seule composante bleu des pixels (figure 5.9(c)). Les histogrammes d'intensité de rouge et de vert ont des écarts type comparables à celui de l'intensité moyenne et sur les images des seules composantes rouge (figure 5.9(a)) ou verte (figure 5.9(b)) des pixels nous ne pouvons pas distinguer les zones immergées des zones émergées. Nous avons donc dans un premier temps décidé de choisir comme seul critère

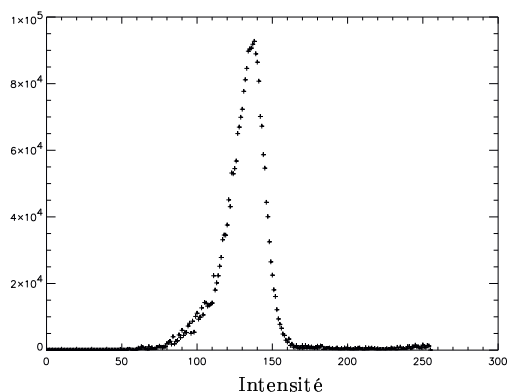


(a) Sur le moulage nous pouvons discerner les zones inondées ou non grâce à la fluorécéïne.

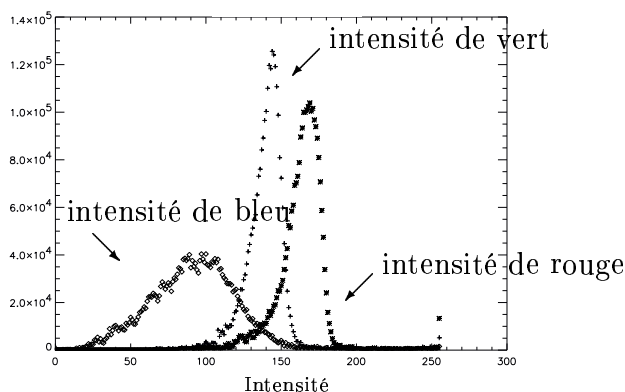


(b) Les valeurs d'intensité des pixels du moulage sont toutes très proche ce qui rend d'autant plus difficile leur tri.

FIG. 5.7 : *Si la fluorécéïne permet de mieux discerner les parties émergées et immergées du moulage, l'intensité moyenne des pixels du moulage ne semble pas être un bon critère de tri.*



(a) Histogramme de l'intensité moyenne des pixels du moulage.



(b) Histogrammes de l'intensité de rouge, vert et bleu des pixels du moulage.

FIG. 5.8 : *L'histogramme de l'intensité moyenne des pixels du moulage a un écart type trop faible pour permettre un tri satisfaisant des pixels immergés ou non. Il en est de même pour les histogrammes d'intensité de rouge et de vert. En revanche, l'écart type de l'histogramme d'intensité de bleu est beaucoup plus important et va nous permettre de différencier les zones immergées ou non du moulage.*

de sélection des pixels leur intensité de Bleu.

Les faibles intensités de bleu correspondent aux parties submergées de la surface, tandis que les fortes intensités de bleu correspondent aux parties émergées. Dans le cas idéal, tous les pixels submergés devraient avoir la même intensité de bleu ce qui provoquerait un pic d'intensité sur l'histogramme. Malheureusement, du fait de l'éclairage mais aussi



(a) Image faite à partir de la seule composante rouge des pixels de l'image originale.

(b) Image faite à partir de la seule composante verte des pixels de l'image originale.

(c) Image faite à partir de la seule composante bleu des pixels de l'image originale.

FIG. 5.9 : De ces trois images, seule celle faite à partir de la composante bleu des pixels permet encore de distinguer les zones émergées et immergées.

des hauteurs d'eau différentes sur le moulage les valeurs d'intensité de bleu semblent bien réparties et nous n'observons pas sur l'histogramme le pic attendu (figure 5.8(b)).

Au lieu de faire un simple seuillage sur l'intensité de bleu des pixels du moulage nous avons choisi de mettre en oeuvre une procédure un peu plus complexe.

Dans un premier temps chaque pixel du moulage est affecté à une **classe d'intensité de bleu**. Pour cela nous répartissons sur la gamme d'intensité complète ($[0, 255[$) N classes avec les seuils (α_i avec $0 < i < N$) correspondants. Nous parcourons le moulage pixel par pixel en affectant à chacun d'eux une **classe d'intensité de bleu**. Après chaque affectation, la borne supérieure de la classe concernée est recalculée en faisant la moyenne des intensités de bleu des pixels de cette classe (figure 5.10).

Une fois ce classement des pixels effectué, il ne reste plus qu'à choisir le nombre de classes à affecter aux régions submergées. Il est évident qu'une classe de pixel ne peut être submergée sans que toutes les classes inférieures le soient également. Nous associons donc à chaque classe un unique taux de submersion. Le choix du nombre de classes à affecter aux régions submergées se fait en comparant l'image originale (figure 5.7(a)) et celle où les pixels du moulage sont codés de manière binaire en fonction de leur submersion ou non (figure 5.11).

Le seuillage n'intervenant que dans un deuxième temps, lors du choix du nombre de classes à affecter aux régions submergées, cette manière de définir un seuil est un peu moins arbitraire qu'un simple seuillage. De plus, comme dans un premier temps nous avons groupé les pixels d'intensité voisine par paquets, nous n'avons à choisir un seuil que parmi N valeurs au lieu de 256 (l'intensité de bleu des pixels étant codée par un entier compris entre 0 et 255).

En résumé, les deux principales étapes de notre procédure de détermination expérimentale du taux de submersion de la surface sont :

- Le tri des pixels du moulage en fonction des classes d'intensité de bleu.
- Le choix du nombre de classes à affecter aux régions submergées.

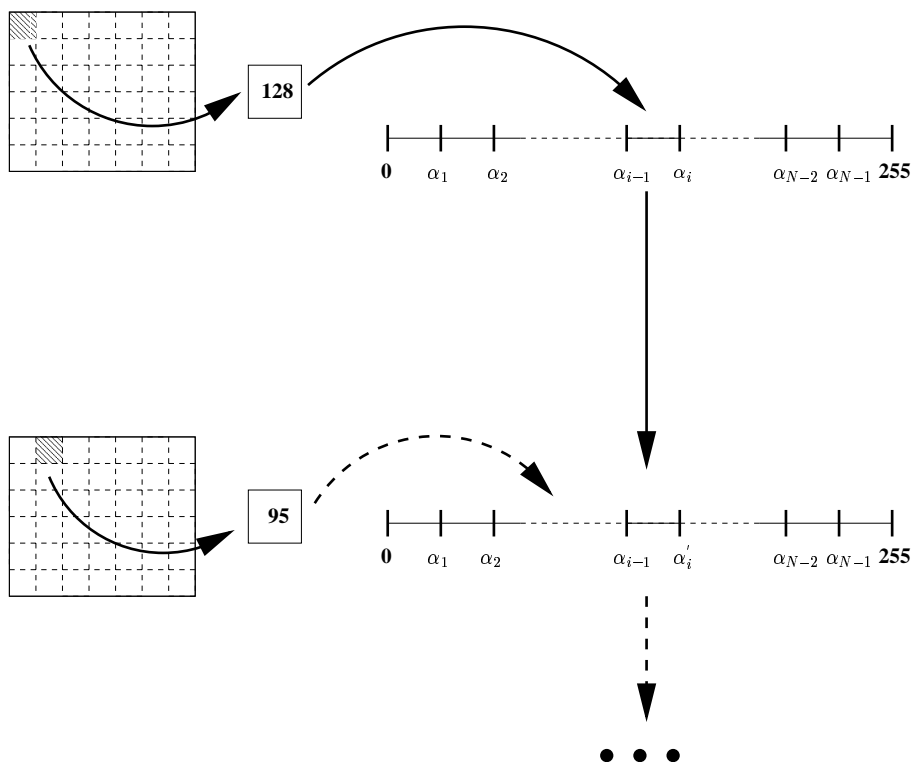


FIG. 5.10 : Lorsqu'un pixel du moulage est affecté à classe d'intensité de bleu i , la borne α_i est recalculée en faisant la moyenne des intensités de bleu des pixels de la classe i et devient α'_i .

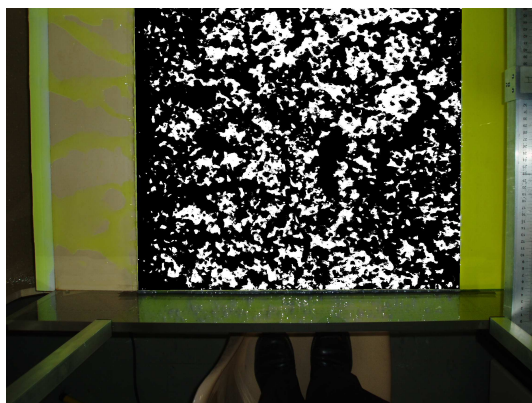


FIG. 5.11 : Sur l'image résultant de notre procédure les pixels du moulage sont codés de manière binaire en fonction de leur submersion ou de leur immersion. Les parties noires et blanches du moulage correspondent respectivement aux zones immergées et émergées du moulage.

5.3.2 Mesure ou estimation ?

La méthode décrite ci-avant n'est pas une méthode de mesure pour deux principales raisons. La première vient du fait que nous ne cherchons pas la **hauteur d'eau moyenne** mais une **hauteur d'eau équivalente** qui n'a rien de physique. De plus cette hauteur d'eau équivalente utilise la notion de miroir qui elle même fait l'hypothèse, très réductrice, d'une surface libre plane et ne prend donc pas en compte les effets dynamiques de l'écoulement sur celle-ci.

La deuxième raison qui fait de notre méthode une estimation de la hauteur d'eau équivalente et non une mesure vient du choix arbitraire du nombre de classes à affecter aux régions submergées que nous faisons sur des critères subjectifs (en comparant l'image binaire, du type de la figure 5.11, avec l'image originale correspondante).

D'autres méthodes existent pour trier les pixels d'une image. Nous aurions par exemple pu utiliser des filtres (ex : Sobel) ou bien encore faire une transformée de Fourier ou en Ondlettes de l'image pour effectuer une détection de contour sur le moulage. Toutes ces méthodes, comme la nôtre, demandent de fixer arbitrairement des paramètres. Nous avons donc opté pour une procédure plus simple et évolutive (du fait que les différents seuils sont recalculés automatiquement au fur et à mesure que l'image est parcourue).

5.4 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques

5.4.1 Les débits

Les débits expérimentaux en fonction du taux d'inondation sont représentés sur la figure 5.12. Beaucoup de nos points expérimentaux sont en dehors du domaine de validité de notre modèle. En effet, nous avons éprouvé de grandes difficultés à obtenir des taux de surface submergée très faibles. Les effets de la tension superficielle et l'ignorance des effets dynamiques sur la surface libre de notre méthode d'estimation sont très certainement responsables de ce fait.

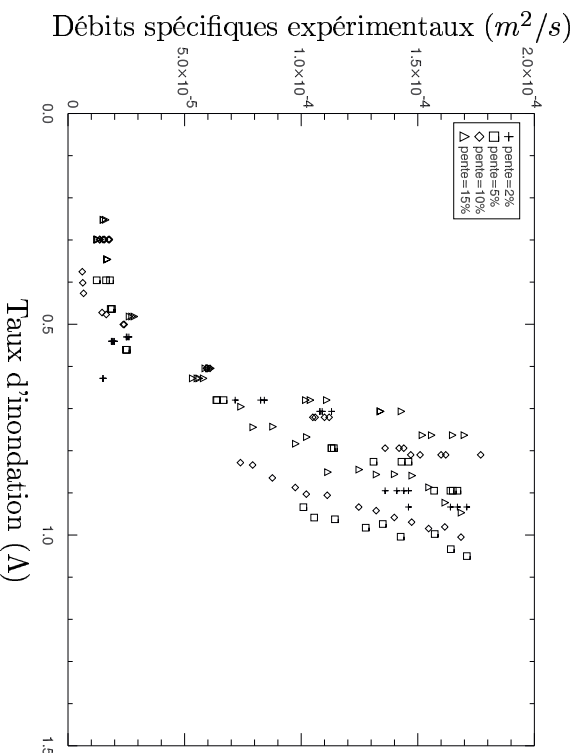


FIG. 5.12 : Beaucoup de nos points expérimentaux sont en dehors du domaine de validité de notre modèle à cause de la tension superficielle et de la déformation de la surface libre due à l'écoulement.

Pour les taux d'inondation supérieurs à 0,7 - 0,8, l'éventuelle influence de la pente est occultée par la dispersion des résultats. Mises à part les incertitudes dues à la mesure du débit et à l'estimation du taux d'inondation Λ , cette dispersion est sans doute la conséquence des erreurs de positionnement de l'échantillon sur le bâti de notre dispositif expérimental (nous avons fait plusieurs séries d'expériences). Ces erreurs étant amplifiées par le caractère chaotique de l'écoulement. En ce qui concerne les taux d'inondation plus faibles, contrairement aux résultats numériques, les résultats expérimentaux ne mettent pas en évidence une quelconque influence de la pente sur les débits.

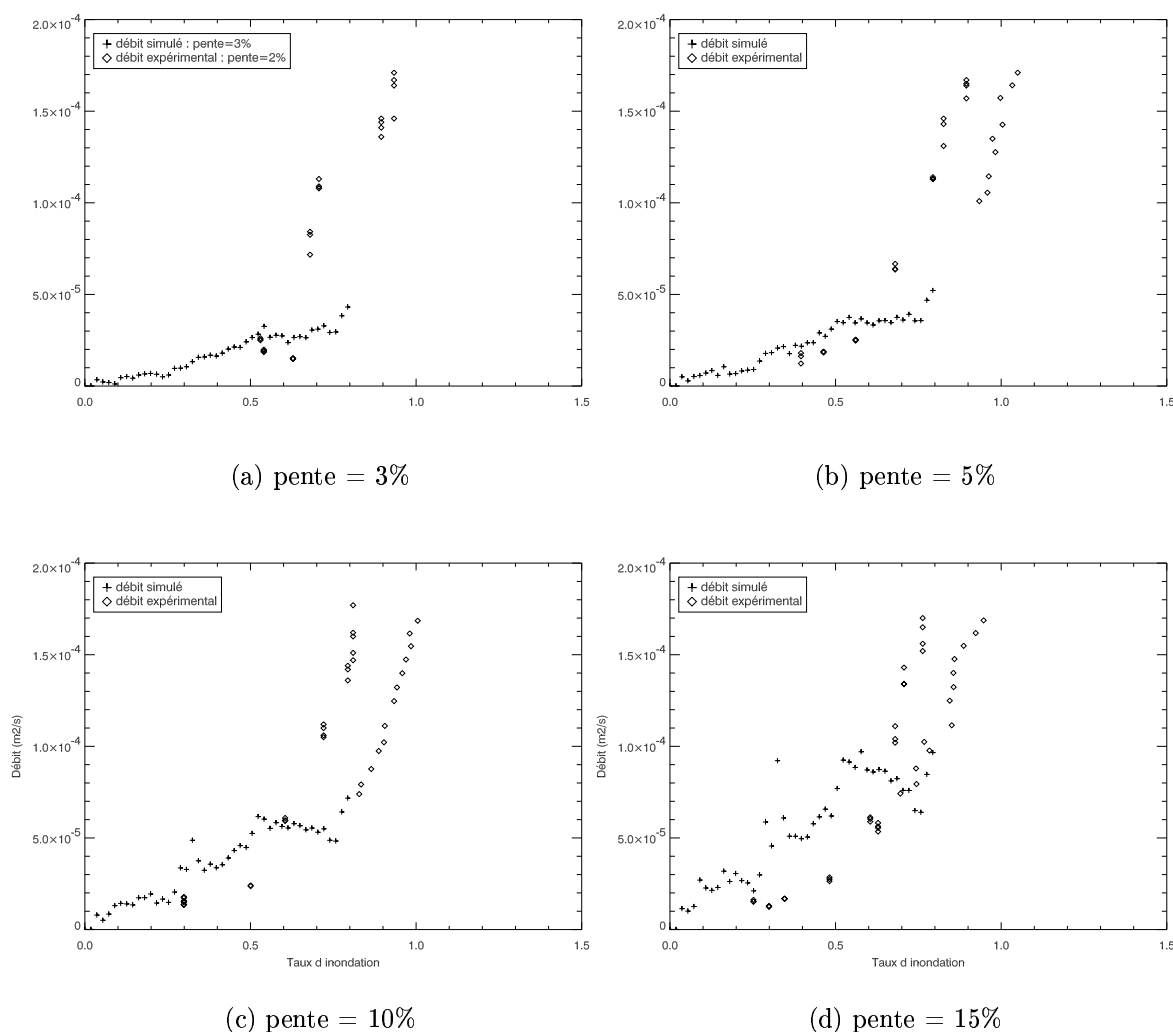


FIG. 5.13 : Comparaison des débits expérimentaux et numériques.

Sur la figure 5.13, nous avons superposé les débits expérimentaux et numériques pour chacune des pentes considérées. Dans un premier temps, nous pouvons constater que quelle que soit la pente et le taux d'inondation, les débits calculés par notre modèle sont de l'ordre de grandeur des débits expérimentaux. De plus, les points expérimentaux en dehors du domaine de validité du modèle prolongent de manière cohérente les courbes des débits calculés. Ils indiquent une forte accélération de la croissance du débit dans le domaine des taux d'inondation voisins de l'unité, où précisément le modèle numérique

perd sa validité. Cette forte accélération de la croissance du débit est le signe du passage du régime de l'inondation partielle à celui de l'inondation marginale.

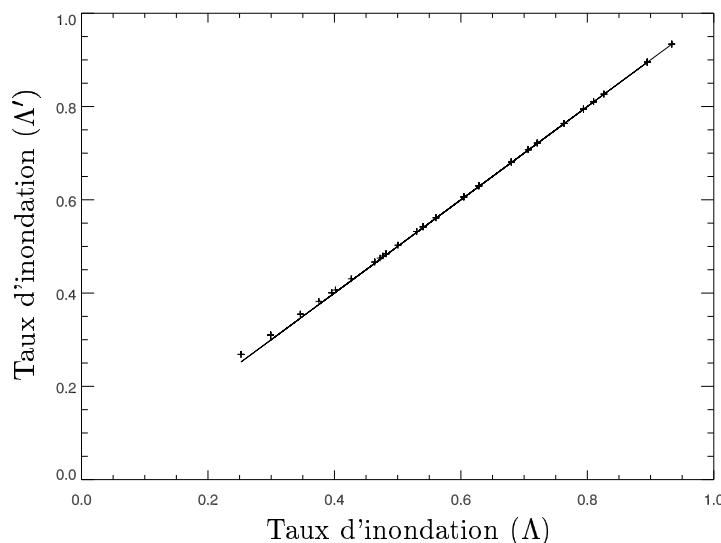


FIG. 5.14 : La différence entre les deux modes de calcul du taux d'inondation est infime dans le domaine que nous couvrons expérimentalement.

Dans le domaine de validité de notre modèle ($\Lambda < 0,8$), celui-ci surestime légèrement les débits. Cette surestimation s'accroît pour les fortes pentes et les forts taux d'inondation.

Il est également intéressant de remarquer que dans le domaine de taux d'inondation que nous couvrons expérimentalement la différence entre les deux modes de calcul du taux d'inondation (Λ qui ne distingue pas les zones isolées et Λ' qui les distingue) présentés dans le paragraphe 5.3.1.1 est infime (figure 5.14). Ce n'est donc pas là la source principale de l'imprécision sur l'évaluation expérimentale du taux d'inondation.

5.4.2 Le coefficient de Darcy-Weisbach

À partir des débits expérimentaux et de notre estimation de la hauteur d'eau équivalente, nous sommes en mesure de fournir le coefficient de Darcy-Weisbach expérimental de notre échantillon de surface. Nous allons donc pouvoir comparer nos résultats expérimentaux à ceux déjà disponibles dans la littérature, aux résultats de notre modèle élémentaire et bien évidemment aux résultats de notre modélisation numérique.

La figure 5.15 représente le coefficient de Darcy-Weisbach équivalent expérimental en fonction du taux d'inondation. Cette figure confirme ce que nous soupçonnions dès l'examen des débits, les écoulements que nous avons étudiés se situent tous dans la région de transition entre le régime d'inondation partielle et le régime d'inondation marginale. Nous empiétons d'ailleurs largement sur ce dernier. Cette transition se caractérise par une brusque accélération de la croissance du débit (figure 5.12) et une chute remarquable du coefficient de Darcy-Weisbach, cohérentes avec l'ensemble des données de la littérature (figure 5.17 et Lawrence 1997, Lawrence 2000). Chaque auteur ayant choisi une longueur

caractéristique des rugosités différentes, nous avons une multitude de définitions du taux d'inondation. Nous devons donc rester prudents lorsque nous comparons nos données à celles de la littérature. En revanche si nous ne pouvons nous fier aux valeurs du taux d'inondation, le comportement du débit et du coefficient de Darcy-Weisbach sont de très bons indicateurs du régime d'écoulement.

Comme pour les débits (figure 5.12), la dispersion des résultats obtenus occulte une éventuelle influence de la pente.

Afin de valider notre modèle numérique, nous allons voir si nos résultats numériques et expérimentaux se complètent de manière cohérente. Nous allons également examiner si, sur la gamme de taux d'inondation commune aux deux types de résultats, ceux-ci sont comparables (figure 5.16).

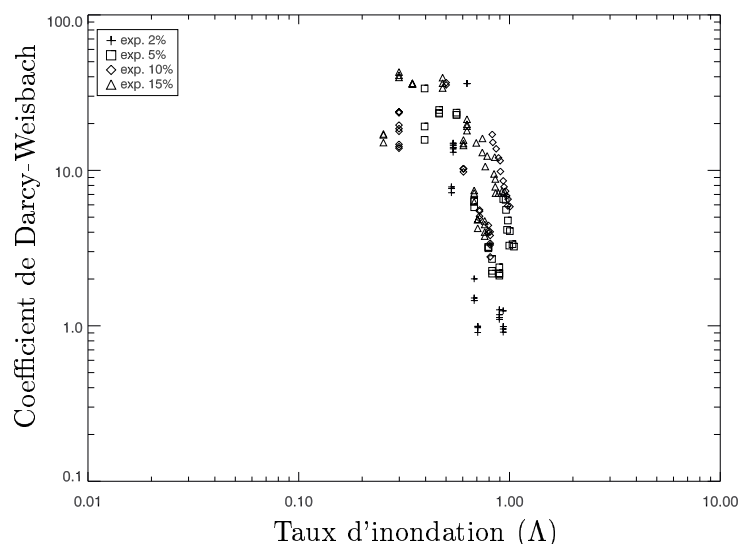


FIG. 5.15 : Nos résultats expérimentaux se situent en majorité dans le domaine de l'inondation marginale.

De prime abord, nous pouvons remarquer que le modèle et les expériences donnent des résultats du même ordre de grandeur et même comparables sur la gamme commune de taux d'inondation. Cependant, le peu de points expérimentaux dans le domaine de validité de notre modèle ne nous permet pas d'aller plus loin dans la comparaison de nos résultats numériques et expérimentaux.

La figure 5.17 présente nos résultats expérimentaux parmi ceux de la littérature (Savat 1980, Rauws 1980, Emmett 1970, Phelps 1975, Roels 1984, Gilley, Kottwitz et Wieman 1992, Bunte et Poesen 1994, Bunte et Poesen 1993). Nonobstant les différentes définitions du taux d'inondation, nous pouvons voir que nos résultats numériques sont parfaitement comparables à ceux de la littérature situés dans le domaine d'écoulement marginal.

Sur la figure 5.17, nous revenons également sur les résultats du modèle élémentaire présenté au chapitre 2 (paragraphe 2.3.2). Rappelons que ce modèle tient compte uniquement des pertes de charge par friction sur une surface lisse et une hauteur moyenne égale à la hauteur d'eau équivalente. Il est donc normal que le coefficient de Darcy-Weisbach

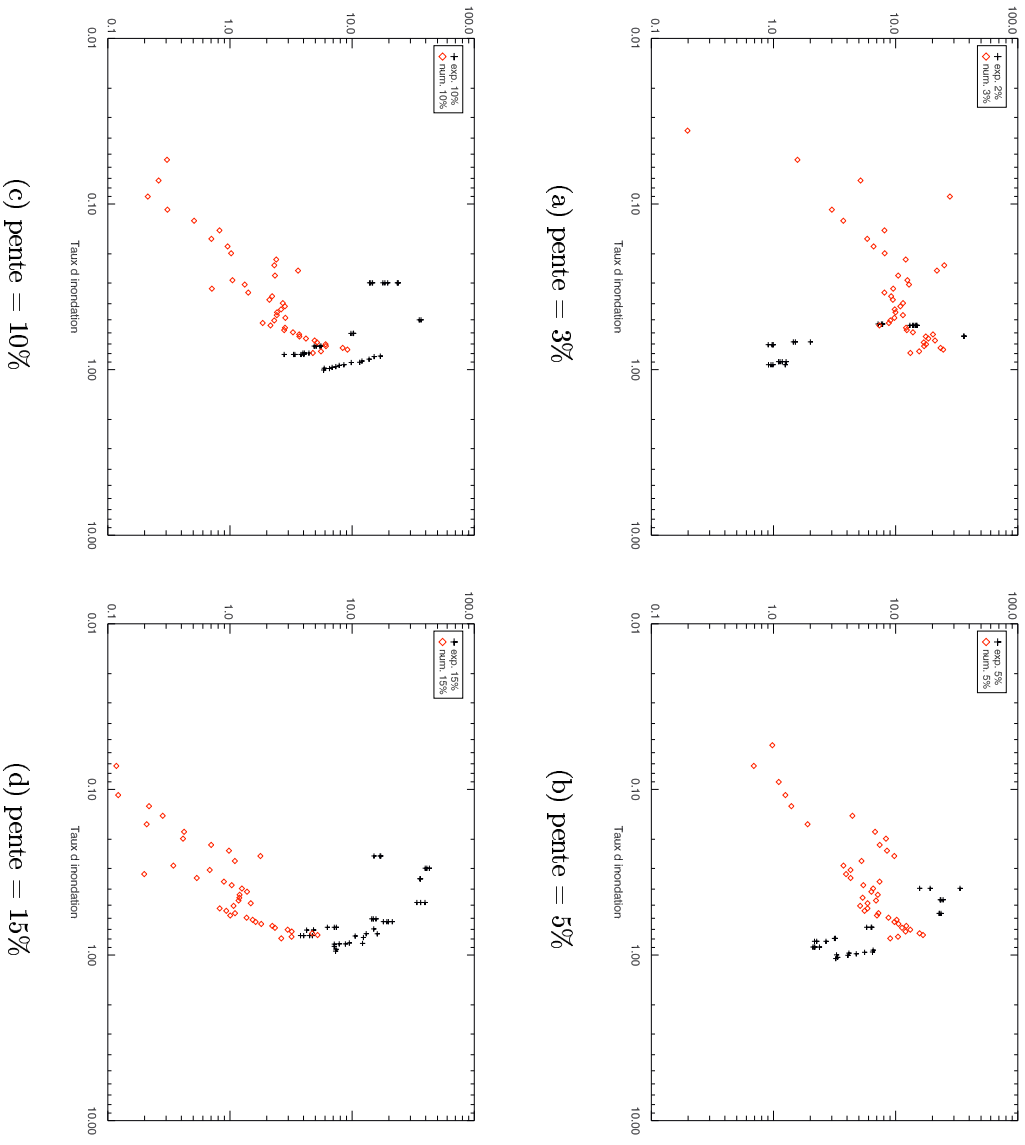


FIG. 5.16 : Comparaison des coefficients de Darcy-Weisbach expérimentaux et numériques.

ainsi calculé soit sans comparaison avec les résultats de la littérature, ceux-ci considérant des écoulements gouvernés par l'inertie.

Enfin, rappelons la formule de Nikuradse (? , équation 5.2) utilisée par Deborah Lawrence dans son modèle analytique (Lawrence 1997, Lawrence 2000). Cette formule peut être obtenue à partir de la relation de Nikuradse en remarquant que la rugosité relative $(\frac{\epsilon}{d})$, où ϵ est un grandeur caractéristique des rugosités et d la hauteur d'eau) de Nikuradse est l'inverse du taux d'inondation.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,64 + 0,803ln(\Lambda) \quad (5.2)$$

Comme le montre la figure 5.17, cette formule correspond bien aux différentes données expérimentales de la littérature pour les forts taux d'inondation. La formule de Blasius $(f = \frac{0.316}{Re^{1/4}})$, sur laquelle est basé notre modèle élémentaire, a été développée pour des nombres de Reynolds modérément élevés ($Re \simeq 10000$) tandis que la formule de Nikuradse pour les surfaces rugueuses fait la part belle à la rugosité relative et ignore le nombre de

Reynolds. C'est donc un hasard, sans aucune justification physique si pour les grands taux d'inondation ces deux formules se rejoignent.

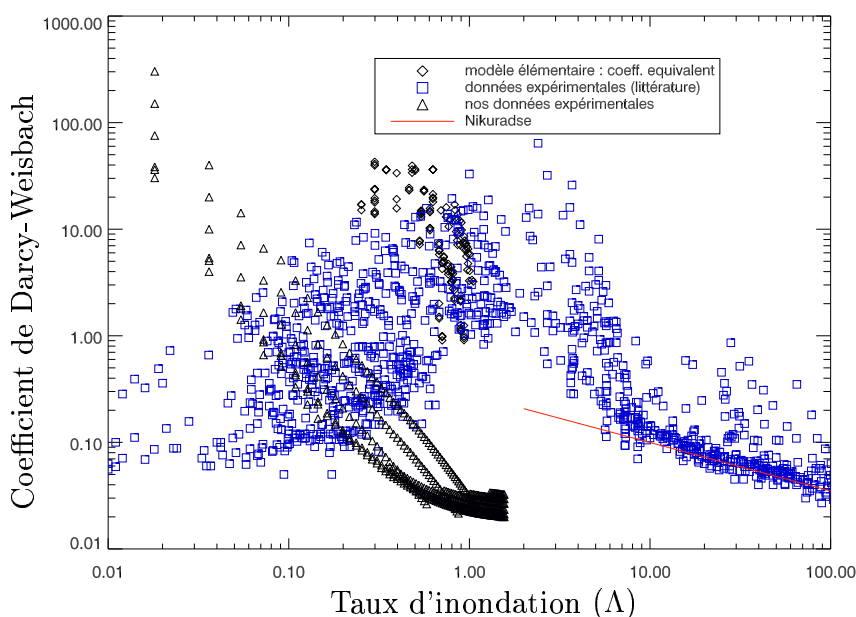


FIG. 5.17 : Sur ce graphique nous avons regroupé les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature, les résultats de notre modèle élémentaire, ceux de nos expériences et enfin la formule de Nikuradse.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté notre dispositif expérimental, nous avons détaillé notre méthode d'estimation de la hauteur d'eau à partir de photos de l'écoulement. A cause de l'hypothèse très réductrice d'un miroir plan, mais aussi à cause de la subjectivité de la détermination du taux de surface submergée, cette méthode ne prétend pas se substituer aux moyens de mesure classique (sondes millimétriques, à ultrasons...). Cependant elle permet d'obtenir rapidement et avec un seul cliché de l'écoulement une **estimation** de la hauteur d'eau équivalente au dessus du moulage.

Au vu du comportement du coefficient de Darcy-Weisbach, la grande majorité de nos résultats expérimentaux se situent dans la zone de transition entre les régimes d'inondation partielle et marginale. La dispersion de nos résultats pour une même pente générale de la surface, du fait de conditions d'écoulements variables d'une expérimentation à une autre, indiquent que bien plus que cette pente, la répartition de l'écoulement sur la surface est un paramètre remarquable. Cela est certainement une conséquence du caractère chaotique, turbulent, de ce type d'écoulement.

Bien que nos résultats numériques et expérimentaux se complètent de manière rationnelle, le peu de points expérimentaux dans le domaine de validité de notre modèle ne nous permet pas une comparaison profitable et pertinente du modèle et de l'expérience.

6

Les équations de Saint-Venant sur surfaces rugueuses

Sommaire

6.1	Introduction	149
6.2	Les équations de Saint-Venant classiques	150
6.2.1	Conservation de la masse	150
6.2.2	Bilan de quantité de mouvement	151
6.2.3	Bilan des forces	152
6.2.3.1	Le poids	152
6.2.3.2	Les forces de pression	153
6.2.3.3	Les forces de frottement	154
6.2.4	Equations dynamiques	154
6.3	Cas d'une surface rugueuse	155
6.3.1	Les grandeurs fluctuantes	155
6.3.2	Section spécifique et volume spécifique	157
6.3.3	Conservation de la masse	157
6.3.4	Bilan de quantité de mouvement	158
6.3.5	Bilan des forces	159
6.3.6	Equations dynamiques	160
6.4	Comparaison de Saint-Venant lisse et rugueux	160
6.4.1	Les termes supplémentaires	160
6.4.2	De Saint-Venant rugueux à Saint-Venant lisse	160
6.4.3	Paramètres équivalents et paramètres réels	161
6.5	Notre modélisation sous-maille	162
6.6	Conclusion	163

6.1 Introduction

Le modèle mathématique de Saint-Venant à deux dimensions dans le plan horizontal découle de l'intégration verticale de l'équation de conservation de la masse et des équations de conservation de la quantité de mouvement en posant différentes hypothèses fondamentales dont celle de pression hydrostatique le long d'une verticale au fond (ou quasi-normale au fond), ou ondes longues (voir Annexe B). Nous avons choisi dans ce chapitre de présenter l'obtention des équations de Saint-Venant en faisant un bilan de quantité de mouvement sur un élément de volume. Cette méthode nous permettra dans

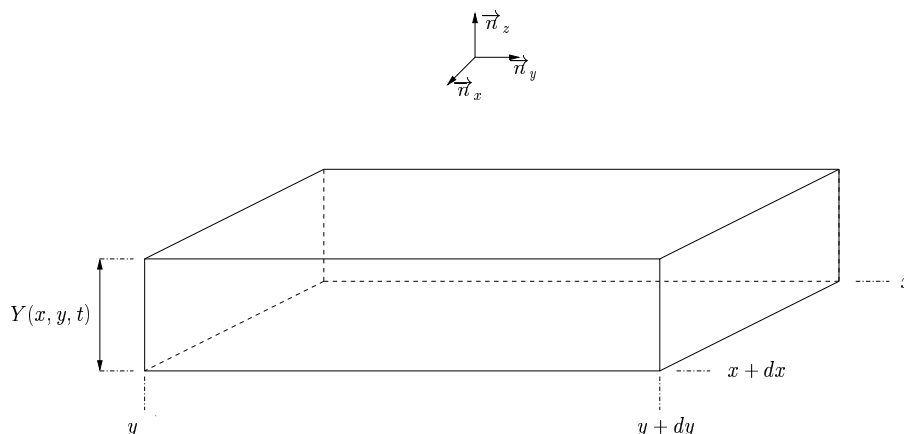


FIG. 6.1 : En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un élément de volume $h(x, y, t)dxdy$ nous allons retrouver les équations de Saint-Venant classique.

un deuxième temps de généraliser les équations de Saint-Venant au cas qui nous intéresse, c'est à dire un écoulement dans lequel la lame d'eau est fortement tortueuse du fait d'aspérités émergentes.

Rappelons que les hypothèses fondamentales des équations de Saint-Venant sont :

- pente générale faible (la normale au fond est quasi-verticale)
- les composantes horizontales de la vitesse sont bien plus grandes que la composante verticale
- pression hydrostatique sur une normale au fond

6.2 Les équations de Saint-Venant classiques

Dans ce qui suit nous nous proposons de retrouver les équations de Saint-Venant sous leur forme classique en effectuant un bilan de quantité de mouvement et de masse sur un élément de volume fluide. Soit un volume fluide de contrôle $Y(x, y, t)dxdy$ (figure 6.1). $Y(x, y, t)$ est la hauteur d'eau au dessus de la surface, elle peut s'écrire :

$$Y(x, y, t) = h(x, y, t) - b(x, y)$$

Où $h(x, y, t)$ représente la surface libre par rapport à une référence absolue et $b(x, y)$ représente le fond de l'écoulement par rapport à la même référence absolue. Afin d'effectuer un bilan de quantité de mouvement sur cet élément de fluide nous allons devoir exprimer les résultantes des différentes forces qui agissent sur celui-ci.

6.2.1 Conservation de la masse

Soit l'élément de volume de la figure 6.1. Son volume étant donné par $Y(x, y, t)dxdy$, sa masse à un instant t ($M(t)$) nous est donné par :

$$dM(t) = \rho Y(x, y, t) dx dy$$

La variation de masse d'un instant t à un instant $t + dt$ est alors donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} dM(t) dt = dM(t + dt) - dM(t) = \rho \frac{\partial}{\partial t} Y(x, y, t) dx dy dt \quad (6.1)$$

Faisons maintenant le bilan des flux de masse à travers les 4 faces latérales du volume de fluide (figure 6.1). Les faces inférieure et supérieure de notre volume de contrôle étant respectivement en dessous du fond et au dessus de la surface libre, et les bilans que nous effectuons portant sur le fluide contenu dans le volume de contrôle, nous ne considérons pas de flux de masse au travers de ses faces supérieure et inférieure. Considérons les faces de vecteur normal \vec{n}_x , la masse les traversant entre les instants t et $t + dt$ est donnée par :

$$dM_x(t) = \rho u(x, y, t) Y(x, y, t) dt dy \quad \text{en } x \quad (6.2)$$

$$dM_{x+dx}(t) = \rho u(x + dx, y, t) Y(x + dx, y, t) dt dy \quad \text{en } x+dx \quad (6.3)$$

Finalement le bilan de masse traversant les faces de vecteur normal \vec{n}_x s'écrit :

$$dM_x(t) - dM_{x+dx}(t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} [u(x, y, t) Y(x, y, t)] dx dy dt \quad (6.4)$$

De manière analogue, nous avons pour les faces de normale \vec{n}_y :

$$dM_y(t) - dM_{y+dy}(t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} [v(x, y, t) h(x, y, t)] dx dy dt \quad (6.5)$$

Ainsi, le bilan de masse sur l'élément de volume s'écrit :

$$\frac{\partial Y(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [u(x, y, t) Y(x, y, t)] - \frac{\partial}{\partial y} [v(x, y, t) Y(x, y, t)] \quad (6.6)$$

6.2.2 Bilan de quantité de mouvement

Nous allons maintenant effectuer un bilan de quantité de mouvement sur notre volume de fluide. De manière classique, nous retrouvons dans ce bilan un terme d'accumulation et des termes de flux au travers des surfaces latérales de notre volume de contrôle. Aux instants t et $t + dt$ la quantité de mouvement contenue dans notre volume s'exprime par :

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \rho \vec{U}(x, y, t) Y(x, y, t) dx dy && \text{à l'instant } t \\ \vec{p}(t + dt) &= \rho \vec{U}(x, y, t + dt) Y(x, y, t + dt) dx dy && \text{à l'instant } t+dt \end{aligned}$$

Avec $\vec{U} = [u, v, 0]^t$. Et donc la variation de quantité de mouvement contenue dans notre volume **par unité de temps** est donnée par :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(Y(x, y, t) \vec{U}(x, y, t) \right) dx dy \quad (6.7)$$

Le bilan flux de quantité de mouvement au travers des faces de normales \vec{n}_x de notre volume de contrôle entre les instants t et $t + dt$ est donné par :

$$\begin{array}{ll} \rho u(x, y, t) \vec{U}(x, y, t) dt & Y(x, y, t) dy \quad \text{en } x \\ \rho u(x + dx, y, t) \vec{U}(x + dx, y, t) dt & Y(x + dx, y, t) dy \quad \text{en } x+dx \end{array}$$

Donc sur ces faces le bilan des flux de quantité de mouvement **par unité de temps** s'écrit :

$$-\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, y, t) \vec{U}(x, y, t) Y(x, y, t) \right) dx dy \quad (6.8)$$

De manière analogue, nous obtenons pour les faces de normales \vec{n}_y :

$$-\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(v(x, y, t) \vec{U}(x, y, t) Y(x, y, t) \right) dx dy \quad (6.9)$$

Si nous décomposons les équations 6.8 et 6.9 sur les axes x et y de notre tièdre nous obtenons :

$$-\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^2(x, y, t) Y(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y, t) v(x, y, t) Y(x, y, t)) \right) dx dy \quad \text{sur } x \quad (6.10)$$

$$-\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y, t) v(x, y, t) Y(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2(x, y, t) Y(x, y, t)) \right) dx dy \quad \text{sur } y \quad (6.11)$$

6.2.3 Bilan des forces

6.2.3.1 Le poids

Le poids du volume fluide contenu dans notre élément de volume s'exprime très facilement en fonction de la pente générale du fond, de la masse volumique du fluide et de l'accélération de la pesanteur. Les composantes du poids sur les axes x et y sont données par :

$$\begin{array}{ll} \rho g \frac{\partial b}{\partial x} Y dx dy & \text{sur } x \\ \rho g \frac{\partial b}{\partial y} Y dx dy & \text{sur } y \end{array}$$

Vectoriellement nous pouvons écrire :

$$\rho g Y \nabla b dx dy \quad (6.12)$$

6.2.3.2 Les forces de pression

Comme nous l'avons déjà souligné, une des hypothèses fondamentales des équations de Saint-Venant est de considérer la pression comme hydrostatique sur la verticale du point (x, y) . Cette hypothèse vient du fait que nous considérons l'accélération du fluide horizontale, nous faisons la même hypothèse concernant les contraintes de cisaillement sur une particule $Y dx dy$. de même avec les contraintes au fond. Ainsi, d'après l'équation dynamique le gradient de pression étoilée doit également être horizontal. C'est-à-dire que $\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$, nous avons donc :

$$p(x, y, z, t) = \rho g (h(x, y, t) - z) \quad (6.13)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide, g l'accélération de la pesanteur.

La résultante des forces de pression sur une face de normale \vec{n}_x du volume de contrôle s'obtient par intégration sur l'axe z entre $b(x, y)$ et $h(x, y, t)$ et s'écrit de la manière suivante :

$$dP_x(x, y, t) = \rho g \frac{Y^2(x, y, t)}{2} dy \quad (6.14)$$

La résultante des forces de pression sur l'élément de volume sur l'axe des x nous est alors donnée par :

$$P_x = P_{\vec{n}_x}(x, y) - P_{\vec{n}_x}(x + dx, y) = \rho g \left(\frac{Y^2(x, y, t)}{2} - \frac{Y^2(x + dx, y, t)}{2} \right) dy \quad (6.15)$$

$$P_x = -\rho g \frac{1}{2} \frac{\partial Y^2(x, y, t)}{\partial x} dx dy \quad (6.16)$$

En effectuant un raisonnement analogue sur les faces de normale \vec{n}_y du volume de contrôle nous obtenons la résultantes des forces de pression sur l'axe des y .

$$P_y = -\rho g \frac{1}{2} \frac{\partial Y^2(x, y, t)}{\partial y} dx dy \quad (6.17)$$

Ainsi, la résultante globale sur le volume de fluide élémentaire est donnée par :

$$\vec{dP} = -\rho g \nabla \left(\frac{Y^2(x, y, t)}{2} \right) dx dy = -\rho g Y \nabla (Y) dx dy \quad (6.18)$$

6.2.3.3 Les forces de frottement

Afin d'exprimer les forces de frottement, nous adopterons comme cela se fait généralement une formulation de la contrainte analogue à celle qui s'applique aux écoulements uniformes. Dans un écoulement uniforme les forces de frottement, de pression et de gravité sont en équilibre. C'est à dire que le gradient de pression étoilée s'exerçant sur la hauteur Y compense exactement la contrainte de frottement au fond. Pour un écoulement uniforme de direction x , nous avons donc :

$$\tau_x = -Y(x, y, t) \frac{\partial p^*}{\partial x} = -\rho g Y(x, y, t) \frac{\partial H}{\partial x} \quad (6.19)$$

Où τ est la contrainte de direction \vec{n}_x , et H la ligne de charge. Ainsi, $\frac{\partial H}{\partial x}$ est la pente de la ligne de charge dans la direction x généralement notée S_{fx} .

Nous généralisons cette expression des frottements à notre écoulement bidirectionnel, nous avons donc finalement pour la force de frottement sur l'élément de surface $dxdy$:

$$\vec{\tau} dxdy = -\rho g Y(x, y, t) \nabla(H) dxdy \quad (6.20)$$

Le gradient de charge est généralement considéré comme opposé à la vitesse locale et évalué au moyen du coefficient de Darcy-Weisbach.

6.2.4 Equations dynamiques

Finalement, en considérant les équations 6.6, 6.8, 6.9, 6.12, 6.18 et 6.20 nous sommes en mesure d'écrire les équations dynamiques de Saint-Venant. Ces équations considèrent une lame d'eau continue. La surface peut être rugueuse, l'influence des aspérités étant incluse dans les forces de frottements. En revanche les aspérités ne peuvent en aucun cas dévier l'écoulement. Les équations dynamiques de Saint-Venant sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(Yu) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(u^2Y) + \frac{\partial}{\partial y}(uvY) \right) = -gY \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t}(Yv) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(uvY) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2Y) \right) = -gY \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Nous notons S_x et S_y les pentes du fond dans les directions x et y (respectivement $-\frac{\partial b}{\partial x}$ et $-\frac{\partial b}{\partial y}$). Nous posons également S_{fx} et S_{fy} les pentes de la ligne de charge dans les directions x et y (respectivement $-\frac{\partial H}{\partial x}$ et $-\frac{\partial H}{\partial y}$). De plus, en explicitant les dérivées des produits dans les équations dynamiques et en considérant l'équation de conservation de la

masse nous pouvons retrouver l'expression classique des équations de Saint-Venant, d'où Y est éliminé et où le premier membre correspond à la dérivée particulaire de la vitesse. Il faut également remarquer que $\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$ car $b(x, y)$ est indépendant du temps. Nous arrivons alors au résultat suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - S_x + S_{fx}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - S_y + S_{fy}\right) \end{cases} \quad (6.22)$$

6.3 Cas d'une surface rugueuse

Dans la première partie de ce chapitre nous avons détaillé l'obtention des équations de Saint-Venant dans le cas d'une surface lisse ou dans le cas de rugosités bien plus petites que l'épaisseur d'eau sur la surface. Mais que deviennent ces équations lorsque nous considérons une surface sur laquelle les rugosités sont suffisamment grosses pour dévier l'écoulement ? Les rugosités provoquent des variations de la hauteur d'eau et de la vitesse dans notre volume élémentaire. Il nous faut alors réévaluer chacun des termes de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement par des intégrales sur les bords de notre domaine en tenant compte des fluctuations de la hauteur d'eau et de la vitesse.

6.3.1 Les grandeurs fluctuantes

Comme cela se fait en turbulence nous allons décomposer les grandeurs intervenant dans nos équations en la somme d'une valeur moyenne et d'une perturbation. Contrairement à la turbulence nous ne considérons pas une moyenne d'ensemble mais une moyenne volumique. Dans ce qui suit nous allons examiner l'effet des fluctuations sur les bilans de masse et de quantité de mouvement. Les propriétés des fluctuations sous-maille seront déterminées pour un régime **uniforme et permanent**, dans le but d'établir une relation entre moyenne des fluctuations et grandeurs moyennes. Notre objectif est de parvenir à des équations macroscopiques ne faisant intervenir que les grandeurs moyennes et leurs gradients macroscopiques. Dans ces équations, pourront figurer les gradients des termes de fluctuations, bien que les intégrales qui permettent d'exprimer les moyennes des termes de fluctuations soient calculées en l'absence de gradient d'ensemble.

Soient ξ et η les paramètres adimensionnels qui vont nous permettre de parcourir notre maille $Y dx dy$ (figure 6.2). nous allons décomposer la hauteur d'eau, les vitesses et les flux en une valeur moyenne indépendante de ces paramètres et une valeur fluctuante fonction de ces paramètres.

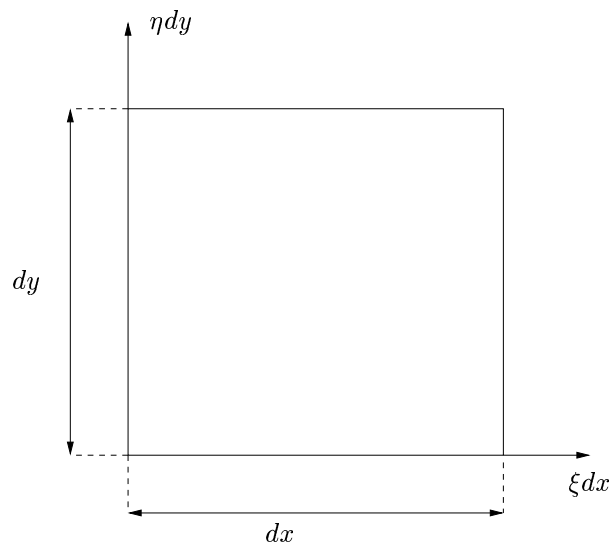


FIG. 6.2 : Pour prendre en compte les perturbations induites par les rugosités, nous allons faire des bilans de masse et de quantité de mouvement sous-maille en considérant les grandeurs moyennes et les fluctuations.

$$\begin{aligned}
 Y &= \bar{Y} + Y'(\xi, \eta) \\
 u &= \bar{u} + u'(\xi, \eta) \\
 v &= \bar{v} + v'(\xi, \eta) \\
 q_x &= uY = \bar{u}\bar{Y} + (uY)'(\xi, \eta) \\
 q_y &= vY = \bar{v}\bar{Y} + (vY)'(\xi, \eta)\dots
 \end{aligned}$$

Les moyennes sur l'élément de fluide des grandeurs peuvent être définies de deux manières différentes. Nous pouvons définir des moyennes surfaciques ou des moyennes volumiques :

$$\bar{X} = \int X d\xi \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \int X d\eta \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \int \int X d\xi d\eta \quad (6.23)$$

Ces intégrales sont faites sur les frontières du domaine fluide ou dans le domaine fluide. Cela revient à considérer les sections participant à l'écoulement (pour les moyennes surfaciques) ou le volume submergé participant à l'écoulement (pour les moyennes volumiques) que nous avons déjà évoquées dans le chapitre 2. En régime globalement **permanent et uniforme**, c'est à dire en l'absence de gradient des grandeurs moyennes, nous avons égalité de toutes ces définitions.

6.3.2 Section spécifique et volume spécifique

La section spécifique moyenne (en mètres) d'écoulement est calculée à partir de toutes les sections transversales participant à l'écoulement. C'est à dire que nous balayons en fait tout le volume submergé et prenons en compte les sections mouillées effectives. Nous avons donc :

$$s = \int Y d\xi = \int Y d\eta \quad (6.24)$$

Le volume spécifique participant à l'écoulement (en m^3/m^2) est calculé de la manière suivante :

$$\omega = \int \int Y d\xi d\eta \quad (6.25)$$

Le fait que nous calculions la section spécifique moyenne en considérant tout le volume submergé participant à l'écoulement et le fait que nous soyons en régime **permanent et uniforme** nous assure que :

$$s = \omega = \bar{Y} \quad (6.26)$$

Notons qu'à la différence des évaluations faites dans le chapitre 2, nous considérons ici que la section et le volume spécifiques s et ω résultent d'une hauteur d'eau $Y(\xi, \eta)$ variable sous maille. Ce point appellera une discussion ultérieure.

6.3.3 Conservation de la masse

Le terme d'accumulation du bilan de masse est facile à exprimer si nous tenons compte des considérations sur le volume spécifique du paragraphe précédent. La variation de masse par unité de temps dans notre sous maille est simplement donnée par $\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t}$.

Considérons maintenant le flux de masse moyen au travers des parois latérales par unité de temps :

$$\rho \int uY d\eta = \rho \int q_x d\eta$$

En prenant en considération l'équation 6.38 nous avons :

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\int q_x d\eta \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x} (\overline{uY})$$

Nous avons une relation équivalente pour le flux de masse au travers de surfaces de normale \vec{n}_y . Finalement le bilan de masse sur notre élément de volume s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{uY}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{vY}) = 0 \quad (6.27)$$

6.3.4 Bilan de quantité de mouvement

Nous allons maintenant évaluer les différents termes du bilan de quantité de mouvement dans le cas où les rugosités influencent la direction de l'écoulement et où la lame d'eau est particulièrement tortueuse. En considérant les équations 6.23 nous obtenons pour le terme d'accumulation de quantité de mouvement :

$$\rho \int \int uY d\xi d\eta = \rho \overline{uY}$$

Et donc :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \int uY d\xi d\eta \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\overline{uY}) \quad (6.28)$$

Considérons maintenant le flux de quantité de mouvement au travers des surfaces latérales. Selon la direction x ces flux sont donnés par :

$$\int Y u^2 d\eta \quad \text{et} \quad \int Y uv d\xi$$

Introduisons dans ces expressions la décomposition des grandeurs en valeur moyenne et perturbation. Considérant la relation 6.23 et le fait que les valeurs moyennes ne dépendent évidemment pas de ξ et η nous avons :

$$\begin{aligned} \int u(uY) d\eta &= \int (\bar{u} + u')(\bar{uY} + (uY)') d\eta \\ \int u(uY) d\eta &= \underbrace{\bar{u}\bar{uY}}_1 + \underbrace{\bar{u}(uY)'}_2 + \underbrace{u'(\bar{uY})}_3 + \underbrace{u'(uY)'}_4 \end{aligned}$$

Les termes **2** et **3** sont nuls, car la moyenne des fluctuations est nulle. Il reste donc finalement :

$$\int u(uY) d\eta = \bar{u}\bar{uY} + \overline{u'(uY)'} \quad (6.29)$$

De manière analogue, nous pouvons montrer que :

$$\int u(vY) d\eta = \bar{u}\bar{vY} + \overline{u'(vY)'} \quad (6.30)$$

Nous effectuons également ce travail sur l'axe y , et nous pouvons alors définir deux tenseurs dont les divergences donneront les termes convectifs de l'accélération du mouvement moyen (Θ) et les termes de l'accélération dus aux fluctuations (Γ).

$$\Theta = \begin{bmatrix} \bar{u}\bar{uY} & \bar{v}\bar{uY} \\ \bar{u}\bar{vY} & \bar{v}\bar{vY} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \overline{u'(uY)'} & \overline{v'(uY)'} \\ \overline{u'(vY)'} & \overline{v'(vY)'} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Le tenseur Θ s'exprime à partir des grandeurs moyennes tandis que le tenseur Γ , probablement non nul, provient des fluctuations de vitesse induites par la rugosité sous maille. Le tenseur Γ contient des termes d'ordre 2 des fluctuations analogues aux tensions de Reynolds en turbulence. Finalement le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{UY}}{\partial t} + \nabla \cdot \Theta + \nabla \cdot \Gamma \right) \quad (6.33)$$

6.3.5 Bilan des forces

Les forces s'appliquant sur notre volume de contrôle sont : le poids du fluide dans le volume submergé participant à l'écoulement, la pression sur les surfaces latérales et les forces de contact sur le fond. Contrairement aux écoulements considérés dans le paragraphe 6.2, les forces de contact sur le fond ne tiennent pas seulement compte de la friction. Elles incluent les forces de pression sur le fond rugueux, leur résultante n'est dans ce cas pas forcément nulle du fait des forces de traînée. Les composantes de cette résultante sur les axes x et y sont notées respectivement τ_{ox} et τ_{oy} .

$\vec{S} = [S_x, S_y]^t$ étant la pente générale du fond de l'élément $dx dy$, la composante du poids selon le plan de l'écoulement se calcule avec la formule suivante :

$$\rho g \omega \vec{S} = \rho g \overline{Y} \vec{S} \quad (6.34)$$

En ce qui concerne la pression sur les parois latérales, l'expression de la pression sur les parois de normale \vec{n}_x nous est donnée par :

$$-\rho g \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{Y^2}{2} d\eta$$

Or :

$$\int \frac{Y^2}{2} d\eta = \frac{1}{2} \left(\overline{Y^2} + \overline{Y'^2} + 2\overline{Y Y'} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{Y^2} + \overline{Y'^2} \right)$$

Nous voyons apparaître un terme $\Pi = \frac{1}{2} \overline{Y'^2}$ non nul, provenant des fluctuations des hauteurs d'eau. Du fait de l'égalité des différentes moyennes (équation 6.23) nous avons également sur les surfaces de normale \vec{n}_y :

$$\int \frac{Y^2}{2} d\xi = \frac{1}{2} \left(\overline{Y^2} + \overline{Y'^2} + 2\overline{Y Y'} \right) = \frac{1}{2} \overline{Y^2} + \Pi$$

Ainsi, du fait de l'équation 6.23, le terme de pression supplémentaire est le même sur toutes les faces latérales de notre volume de contrôle. La résultante des forces de pression sur les parois latérales de notre maille s'écrit :

$$-\rho g \bar{Y} \nabla \bar{Y} - \rho g \nabla \Pi \quad (6.35)$$

6.3.6 Equations dynamiques

En considérant les équations 6.33, 6.34, 6.35 et les frottements exprimés par $\vec{\tau}_0 = [\tau_{0x}, \tau_{0y}]$, nous pouvons écrire les équations dynamiques de Saint-Venant dans le cas d'une lame d'eau tortueuse. Nous avons donc :

$$\frac{\partial \vec{UY}}{\partial t} + \nabla \cdot \Theta + \nabla \cdot \Gamma = -g \bar{Y} \nabla \bar{Y} - g \nabla \Pi + gw \nabla b + \frac{\vec{\tau}}{\rho} \quad (6.36)$$

Ce qui s'écrit en projection sur x et y :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{uY}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{uuY}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{uvY}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y} = -g \bar{Y} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} - g \frac{\partial \Pi}{\partial x} + g \bar{Y} S_x + \frac{\tau_{0x}}{\rho} \\ \frac{\partial \bar{vY}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{vuY}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{vvY}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial y} = -g \bar{Y} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} - g \frac{\partial \Pi}{\partial y} + g \bar{Y} S_y + \frac{\tau_{0y}}{\rho} \end{cases} \quad (6.37)$$

6.4 Comparaison de Saint-Venant lisse et rugueux

6.4.1 Les termes supplémentaires

Dans les équations de Saint-Venant, établies dans le cas d'une lame d'eau fortement tortueuse, nous avons des termes supplémentaires dus aux fluctuations des vitesses et de la hauteur d'eau. Ces termes supplémentaires proviennent des flux de quantité de mouvement au travers des surfaces latérales ($\nabla \Gamma$) et des forces de pression sur les parois latérales de notre élément de fluide ($\nabla \Pi$). L'expression du tenseur Γ et de Π sont données dans le paragraphe 6.3.5 de ce chapitre. Ce sont des moments d'ordre 2 des perturbations, analogues aux contraintes de Reynolds dans les équations du même nom. Dans notre cas, ces contraintes inertielles supplémentaires ne sont pas la conséquence d'instabilités intrinsèques de l'écoulement mais résultent de la tortuosité de la surface.

6.4.2 De Saint-Venant rugueux à Saint-Venant lisse

Moyennant la prise en compte des termes supplémentaires ($\nabla \Gamma$ et $\nabla \Pi$), pouvons nous retrouver la forme des équations de Saint-Venant sur une surface lisse à partir des

équations de Saint-Venant sur une surface rugueuse? Cela est en fait possible si nous admettons que :

$$\int u'Y'd\xi d\eta = \overline{u'Y'} = 0 \quad \text{et} \quad \int v'Y'd\xi d\eta = 0 \quad (6.38)$$

En effet, si les équations 6.38 sont vraies, nous avons pour uY par exemple :

$$\begin{aligned} \overline{uY} &= \overline{(\bar{u} + u')(\bar{Y} + Y')} \\ \overline{uY} &= \overline{uY} + \underbrace{\overline{uY'}}_1 + \underbrace{\overline{u'Y}}_2 + \underbrace{\overline{u'Y'}}_3 \end{aligned}$$

Les termes **1** et **2** sont nuls car $\overline{u'} = 0$ et $\overline{Y'} = 0$. En revanche, la nullité du terme **3** n'est pas aussi immédiate. En régime **permanent et uniforme**, la moyenne de $q_x = uY$ n'a rigoureusement aucune fluctuation. Nous avons alors $\overline{uY} = \overline{u}\overline{Y}$, ce qui implique la nullité du terme **3**. S'agissant des débits, nous avons égalité entre la moyenne du produit et le produit des moyennes. **Il est important de noter que cela n'est vrai que pour les débits.**

Considérant les équations 6.38, nous pouvons mettre les équations de Saint-Venant prenant en compte les perturbations (équations 6.27 et 6.37) sous une forme plus classique en faisant ressortir la dérivée particulière du champ de vitesse (équations 6.39).

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{Y}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{1}{\bar{Y}} \left(\frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y} \right) &= -g\frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} - g\frac{1}{\bar{Y}}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + gS_x + \frac{1}{\bar{Y}}\frac{\tau_{0x}}{\rho} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{\bar{Y}} \left(\frac{\partial \Gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial y} \right) &= -g\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} - g\frac{1}{\bar{Y}}\frac{\partial \Pi}{\partial y} + gS_y + \frac{1}{\bar{Y}}\frac{\tau_{0y}}{\rho} \end{aligned} \right. \quad (6.39)$$

6.4.3 Paramètres équivalents et paramètres réels

Le fait de considérer une lame d'eau continue (d'épaisseur \bar{Y}) ou une lame d'eau discontinue (d'épaisseur locale Y) revient à faire la distinction que nous avons fait dans les chapitres précédents quand nous avons considéré des paramètres hydrauliques vrais ou équivalents (chapitre 2, paragraphe 2.3.1).

Dans la pratique, le passage de Y à \bar{Y} n'est pas trivial car il faut connaître la fonction $s(d)$ (d est le niveau de la surface libre par rapport à une référence absolue) caractéristique de la rugosité de la surface. Pour la même raison il n'est pas évident d'obtenir la moyenne des vitesses réelles $\bar{u} = \frac{\bar{q}_x}{s}$. Il est en revanche bien plus aisé de calculer une vitesse de

Darcy (vitesse calculée avec les paramètres équivalents) : $u_{equ} = \frac{\bar{q}_x}{d}$.

Par conséquent, le coefficient de Darcy-Weisbach réel (c'est à dire calculé avec les paramètres hydrauliques réels de la surface, voir chapitre 2 paragraphe 2.3.1) est bien plus

délicat à obtenir en pratique que le coefficient de Darcy-Weisbach équivalent.

De ce fait, la plupart des expériences menées jusqu'ici pour étudier le coefficient de Darcy-Weisbach de surfaces partiellement inondées ont donné des coefficients équivalents. Si les coefficients de Darcy-Weisbach réels et équivalents se confondent pour les forts taux d'inondations, il n'en est rien pour le régime d'inondation partielle. Il faudrait donc exprimer les équations de Saint-Venant en ne considérant que des paramètres équivalents ($u_{equ} = \frac{s}{d}\bar{u}$, $v_{equ} = \frac{s}{d}\bar{v}$). Ce choix n'est cependant pas judicieux. En effet, en reportant les vitesses équivalentes dans les équations de Saint-Venant nous faisons apparaître des termes supplémentaires venant des dérivées spatiales et temporelles de $\frac{s}{d}$. Par exemple :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_{equ} \frac{d}{s} \right) = u_{equ} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d}{s} \right) + \frac{d}{s} \frac{\partial u_{equ}}{\partial t}$$

Ces termes supplémentaires ne se simplifiant pas, il n'est pas aisé de considérer les équations de Saint-Venant pour les grandeurs équivalentes. Mais comme nous venons de le souligner, le plus souvent c'est un coefficient de Darcy-Weisbach équivalent qui est utilisé dans ces équations. Si cela n'a aucune importance pour les forts taux d'inondation, en régime d'inondation partielle la différence entre les coefficients vrais et équivalents est conséquente (voir chapitre 3, paragraphe 3.5.4).

Le modélisateur devrait donc tenir compte de cette différence lorsqu'il souhaite représenter la résistance hydraulique d'un écoulement très peu profond sur une surface rugueuse. C'est à dire qu'il faut prendre en compte le fait que nous trouvons généralement dans la littérature des coefficients de Darcy-Weisbach exprimés en fonction de paramètres équivalents tandis que les équations de Saint-Venant (pour un écoulement tortueux ou non) considèrent les vraies grandeurs (moyenne sous maille des vitesses et hauteur d'eau locales).

6.5 Notre modélisation sous-maille

Du point de vue de la modélisation du ruissellement à l'échelle d'un bassin versant, notre modèle numérique doit être considéré comme un modèle sous-maille. Dans ce cas, nos simulations pourraient donner des informations sur les termes supplémentaires ($\nabla\Gamma$ et $\nabla\Pi$). En effet, dans la mesure où les intégrales Γ_{ij} et Π sont prises sur les frontières latérales de la maille $Ydx dy$, il n'y a pas d'inconvénient à adopter des frontières non rectilignes qui coupent tous les canaux du réseau au niveau de leur col, où les vitesses et les sections droites sont connues. De plus, en l'absence de gradient d'ensemble, ces intégrales peuvent être évaluées sur n'importe quelle transversale passant par les cols, de direction générale x ou y . Ce qui revient, selon les équations 6.23 à les évaluer de façon volumique sur la totalité des cols du domaine. Ce travail n'a pas pu malheureusement être mené à bien dans les délais impartis.

6.6 Conclusion

Nous avons développé les équations de Saint-Venant pour les surfaces rugueuses par une méthode analogue à ce qui est fait en turbulence avec les équations de Reynolds. Ce faisant, nous avons mis en évidence des termes inertiels supplémentaires provenant des flux de quantité de mouvement ainsi que des forces de pression additionnelles sur les faces latérales de notre maille. Ces termes supplémentaires accentuent probablement la prédominance de l'inertie en régime d'inondation partielle. Moyennant de légères modifications, notre modèle numérique devrait être en mesure de nous donner les ordres de grandeurs relatifs des termes moyens et des fluctuations.

Il est évident que les équations de Saint-Venant font intervenir des grandeurs réelles (vitesses et hauteur d'eau). Mais expérimentalement, il est très difficile, voire impossible d'avoir accès aux grandeurs réelles lors de l'étude d'écoulements sur des surfaces réelles en régime d'inondation partielle. C'est pourquoi, le plus souvent, les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature pour ces écoulements sont tacitement calculés avec des grandeurs équivalentes.

Ainsi, si le modélisateur désire utiliser les équations de Saint-venant tenant compte de la tortuosité de la surface, il devra jongler avec les deux types de paramètres (réels et équivalents) afin de modéliser la contrainte sur le fond au moyen du coefficient de Darcy-Weisbach.

Conclusion Générale

Dans l'étude du ruissellement sur les surfaces naturelles des bassins versants ou sur les surfaces artificielles des zones urbaines, l'épaisseur des écoulements considérés est de l'ordre de grandeur, voire inférieure, à la taille de certaines aspérités de la surface. Les aspérités déviant l'écoulement, leur rôle dans la résistance hydraulique à l'écoulement ne se cantonne plus seulement à l'augmentation de la friction. Dans les modèles utilisant les équations de Saint-Venant ou celles des ondes cinématiques, la contrainte au fond peut être exprimée en fonction du coefficient de Darcy-Weisbach. Les formules classiques de ce coefficient (Poiseuille, Blasius, Nikuradse, ...), établies dans le cas d'écoulements d'épaisseur bien plus importante que la taille des rugosités, ne prennent en compte le rôle des rugosités que dans le phénomène de friction.

L'étude de ce type d'écoulement suggère que le paramètre important n'est pas, comme dans les formules classiques, le nombre de Reynolds mais le taux d'inondation. Dans notre étude numérique mais aussi expérimentale, nous avons donc cherché à représenter le débit et le coefficient de Darcy-Weisbach en fonction du taux d'inondation défini à partir d'une étude statistique de notre surface.

Notre modèle numérique, même s'il ne prétend pas reproduire la réalité de l'écoulement (du fait d'hypothèses contraignantes, en particulier sur nos réseaux) nous a permis de mettre en évidence certains principes. Tout d'abord, dans notre modélisation, l'écoulement s'organise systématiquement de telle manière sur nos réseaux que la plupart des canaux participant à l'écoulement sont en régime critique. Les pertes de charges inertielles sont alors prépondérantes et la friction joue un rôle mineur. La pente a une influence évidente sur nos simulations de débits. Mais en effectuant des simulations sur des surfaces statistiquement homologues à notre échantillon original, nous avons mis en évidence une grande dispersion des résultats qui indique le rôle tout aussi évident de la répartition spatiale des rugosités dans l'échantillon considéré.

Nonobstant les difficultés rencontrées dans la définition du taux d'inondation, nos résultats numériques sont comparables aux résultats disponibles dans la littérature. Mais afin de valider notre démarche nous avons effectué nos propres expérimentations. Au vu du comportement du coefficient de Darcy-Weisbach la majorité de nos résultats expérimentaux se situent dans la zone de transition entre les régimes d'inondation partielle et marginale, région qui est en dehors du domaine de validité de notre modèle numérique. Expérimentalement cette zone de transition se caractérise par une brusque accélération de la croissance des débits avec le taux d'inondation qui implique une toute aussi brusque décroissance du coefficient de Darcy-Weisbach.

Malgré tout cela, nos résultats expérimentaux et numériques se complètent de manière cohérente.

Afin de définir un coefficient de Darcy-Weisbach pour un type de surface donné, il faut caractériser cette surface. Notre échantillon peut être considéré comme représentatif, du point de vue de la hauteur des rugosités, du sol dont il est issu. En revanche, du point de vue de la répartition spatiale des rugosités, il est difficile de trouver un échantillon représentatif. C'est à dire un échantillon sur lequel il n'y aurait pas de dispersion des résultats due à l'influence de la répartition spatiale des rugosités. Nous pensons contourner cette difficulté en considérant une surface assez simple et relativement homogène (surface goudronnée), mais ce ne fût pas le cas. Se pose alors la question de l'existence d'une taille limite raisonnable (ou non) d'échantillon qui permettrait de déterminer le coefficient de Darcy-Weisbach pour un type de surface donnée.

Nous rejoignons là des préoccupations bien connues de ceux qui étudient la théorie des milieux poreux. Que ce soit pour la prise de moyenne (avec les formules de Whitaker) ou pour la théorie de l'homogénéisation (Sanchez-Palencia, Auriault) l'existence d'une surface élémentaire représentative est un point délicat. Cette question sera d'autant plus critique pour les surfaces naturelles ayant des tailles de rugosités très disparates.

C'est le problème bien connu de la séparation des échelles : est-il possible ou non de définir une échelle microscopique et une échelle macroscopique des phénomènes ? En l'absence de séparation d'échelle, il est vain de tenter la caractérisation sur un échantillon, quelle que soit sa taille. A l'extrême, lorsque les structures présentent un caractère fractal, il est impossible de définir un échantillon représentatif. Il n'est pas exclu que les surfaces naturelles comme celle dont nous avons tenté de caractériser les propriétés hydrauliques soient le plus souvent de cette nature.

La source du caractère chaotique des écoulements très peu profonds sur les surfaces rugueuses est la tortuosité des chemins d'écoulement. Afin d'examiner les conséquences des fluctuations de vitesses et de hauteur d'eau sur les équations de Saint-Venant nous avons effectué un bilan de quantité de mouvement et de masse sur les faces latérales de notre sous maille en décomposant nos grandeurs en la somme d'une grandeur moyenne et d'une perturbation. Ce procédé est analogue à ce qui se fait en turbulence pour obtenir les équations de Reynolds, à ceci près que nous avons remplacé la moyenne d'ensemble par une moyenne volumique. Ce faisant nous avons mis en évidence des termes d'inertie supplémentaires à prendre en compte pour l'étude d'écoulements très peu profonds sur des surfaces très rugueuses. Moyennant quelques modifications, notre modèle numérique devrait être capable de nous donner les ordres de grandeurs relatifs des valeurs moyennes et des fluctuations. Cela devrait également être possible expérimentalement en étudiant l'écoulement sur notre échantillon au moyen de méthodes PIV.

Références bibliographiques

- Abrahams A., A. Parsons et S.-H. Luk** (1986). Resistance to overland flow on desert hillslopes. *Journal of Hydrology* **88**.
- Allamaras R., R. Burwell, W. Larson et R. Holt** (1966). Total porosity and random roughness of the interrow zone as influenced by tillage. *USDA Conservation Resource Report* **7**.
- Barré de Saint-Venant A.** (1850). Mémoire sur des formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.* **31**.
- Barthurst J.** (1985). Flow resistance estimation in mountain rivers. *Journal of Hydraulic Engineering* **111**.
- Bazin H.** (1865). *Recherches hydrauliques entreprises par M. H. Darcy et continuées par M. H. Bazin.*
- Bernoulli D.** (1738). *Hydrodynamica.*
- Bernoulli D.** (2004). *Hydrodynamique (traduit par Jean Peyroux).* A. Blanchard.
- Box G. et M. Muller** (1958). A note on the generation of random normal deviates. *Annals Math. Stat.* **29**, pp. 610–611.
- Bunte K. et J. Poesen** (1993). Effects of rock fragments covers on erosion and transport of noncohesive sediment by shallow overland flow. *Water Resources Research* **29**.
- Bunte K. et J. Poesen** (1994). Effects of rock fragments size and cover on overland flow hydraulics, local turbulence and sediment yield on aén erodible soil surface. *Earth Surface Processes and Landforms* **19**.
- Chézy A. d.** (1775). *Mémoire sur la vitesse de l'eau conduite dans une rigole donnée.* Fonds Ancien de l'Ecole National des Ponts et Chaussées.
- Chézy A. d.** (1776). *Formule pour trouver la vitesse constante que doit avoir l'eau dans une rigole ou un canal régulier.* Fonds Ancien de l'Ecole National des Ponts et Chaussées.
- Coster M. et J. Chermant** (1989). *Précis d'Analyse d'Images.* Presse du CNRS.
- Darboux F.** (1999). *Modélisations numérique et expérimentale du ruissellement. Effet de la rugosité sur les distances de transfert.* Ph. D. thesis, Editions de Géosciences Rennes.
- De Prony G. R.** (1804). *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes.* Imprimerie de Monsieur.
- Du Buat P. L. G.** (1786). *Principes d'hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences.* Imprimerie de Monsieur.
- Dupuit J.** (1863). *Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes suivies de considérations relatives au régime des grandes eaux, au débouché à leur donner, et à la marche des alluvions dans les rivières à fond mobile.*
- Einstein H. et R. Banks** (1950). Fluid resistance of composite roughness. *Amer. Geophys. Union Transactions* **31**.

- Emmett W.** (1970). The hydraulics of overland flow on hillslopes. *US. Geol. Surv. Prof. Pap.* **662-A**.
- Eytelwein J.-A.** (1826). Von der bestimmung der wassermenge eines stormes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* **1**.
- Ferro V.** (2003). Flow resistance in gravel-bed channels with large scale roughness. *Earth Surface Processes and Landforms* **28**.
- Franck D. J. et C. J. Lobb** (1988). Highly efficient algorithm for percolative transport studies in two dimension. *Physical Review B* **37**(1), pp. 302–307.
- Gauckler P. A.** (1867). Etudes théoriques et pratiques sur l'écoulement et le mouvement des eaux. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.* **64**.
- Gilley J., E. Kottwitz et G. Wieman** (1992). Darcy-weisbach roughness coefficients for gravel and cobble surfaces. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* **118**.
- Girard P. S.** (1804). *Essai sur le mouvement des eaux courantes, et la figure qu'il convient de donner aux canaux qui les contiennent.* Imprimerie de Paris.
- Gonzales R. et R. Wood** (1992). Digital image processing. *Addison-Wesley Publishing.*
- Grigson C.** (1984). Nikuradse's experiments. *AIAA J.* **22**.
- Guanguillet E. et W. Kutter** (1869). Versuch zur augstellung einer neuen allgeneinen formel für die gleichformige bewegung des wassers in canalen und flussen. *Zeitschrift des Osterreichischen Ingenieur-und Architekten-Vereines* **21**(1), pp. 6–25.
- Herbich J. et S. Shulits** (1964). Large-scale roughness in open-channel flow. *Journal of Hydraulic Division Proc. ASCE* **90**.
- Horton R., H. Leach et R. Van Vliet** (1934). Laminar sheet-flow. *Amer. Geophys. Union Transactions* **2**.
- Humphreys A. A. et H. L. Abbot** (1861). *Physics and hydraulics of the Mississipi.* U.S. Army Corps of Engineer.
- Jegatheesan R.** (1987). A new development of bus impedance building algorithm closely related to bus admittance matrix. *Electric machines and power systems* **12**(1), pp. 43–56.
- Kamphorst E.** (2000). *Mesures et méthodes d'estimation de la capacité de stockage d'eau dans le micro-relief créé par les opérations de travail du sol.* Ph. D. thesis, Thèse de doctorat INAPG.
- Kamphorst E., V. Jetten, J. Guérif, J. Pitkänen, B. Iversen, J. Douglase et A. Paz** (2000). Predicting depressionnal storage from soil surface roughness. *Soil Science Society of America Journal* **64**.
- Laurent J. et C. Frendo-Rosso** (1992). Application of image analysis to the estimation of aac thermal conductivity. In W. F.H. (Ed.), *Advances in Autoclaved Aerated Concrete*, Balkema, Rotterdam, pp. 65–70.
- Lawrence D.** (1997). Macroscale surface roughness and frictionnal resistance in overland flow. *Earth Surface Processes and Landforms* **22**.
- Lawrence D.** (2000). Hydraulic resistance in overland flow during partial and marginal surface inundation : Experimental observations and modeling. *Water Resources Research* **36**.
- Lencastre A.** (1966). *Manuel d'hydraulique générale.*
- Leopold L. et T. J. Maddock** (1953). The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications. *US. Geol. Surv. Prof. Pap.* **525**.
- MacLaren M. D. et G. Marsaglia** (1965). Uniform random number generators. *J. ACM* **12**(1), pp. 83–89.

- Mantoglou A. et J. Wilson** (1982). The turning bands methods for simulation of random fields using line generation by a spectral method. *Water Resources Research* **18**, pp. 1379–1394.
- Marsaglia G.** (1963). Generating discrete random variables in a computer. *Commun. ACM* **6**(1), pp. 37–38.
- Montanvert A. et J. M. Chassery** (1991). *Géométrie discrète en analyse d'image*. Hermès.
- Parsons D.** (1949). Depths of overland flow. *Soil Conservation Technique Paper* **82**.
- Phelps H. O.** (1975). Shallow laminar flows over rough granular surfaces. In *HY 3*, Proceedings ASCE, pp. 367–384.
- Pieritz R.** (1992). *Modélisation et Simulation de Milieux Poreux par Réseaux Topologiques*. Ph. D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Rauws G.** (1980). Laboratory experiments on resistance to overland flow due to composite roughness. *Journal of Hydrology* **103**.
- Richards K.** (1973). Hydraulic geometry and channel roughness—a non linear system. *Am. J. Sc.* **273**.
- Roels J.** (1984). Flow resistance in concentrated overland flow on rough slope surfaces. *Earth Surface Processes and Landforms* **9**.
- Sahini M.** (1994). *Applications of percolation theory*.
- Savat J.** (1980). Resistance to flow in rough supercritical sheet flow. *Earth Surface Processes* **5**.
- Schlichting H.** (1968). *Boundary Layer Theory*.
- Stauffer D. et A. Aharony** (1994 (second printing)). *Introduction to percolation theory*.
- Takken I. et G. Govers** (2000). Hydraulics or interrill overland on rough bare soil surfaces. *Earth Surface Processes and Landforms* **25**.
- Thiel E.** (1994). *Les distances de chanfrein en analyse d'images : fondements et applications*. Ph. D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Vlachogiannis M. et V. Bontozoglou** (2002). Experiments on laminar film flow along a periodic wall. *Journal of Fluid Mechanics* **457**.
- Von Neumann J.** (1951). Monte carlo simulation. *NBS Appl. Math series* **12**(36).
- Weisbach J.** (1850). *Lerbuch der ingenieur und maschinen mechanik : mit den nöthigen hülfslernen aus der analysis für den unterricht an technischen lehranstalten*.



Les images BMP

Le format *Bitmap* est le format d'image le plus simple qui soit puisque les informations qu'il contient sont stockées les unes à la suite des autres. Comme dans le cas des fichiers *Bitmap 8 bits* (c'est à dire 256 couleurs) il n'y a aucune compression, les fichiers images sont relativement "gros" mais cela permet de travailler facilement sur ces images sans se soucier du choix d'un algorithme de décompression. Un fichier *Bitmap* est composé de 4 zones :

- *Le header* : il indique les caractéristiques principales du fichier (son type, sa taille, et l'emplacement de l'image dans le fichier).
- *La zone bitmap info* : elle définit les caractéristiques essentielles de l'image, c'est pourquoi on la distingue du *header* mais elle suit directement celui-ci.
- *La palette* : c'est un tableau contenant la liste des couleurs pour le mode 8 bits (la palette n'est présente que dans ce mode). Une couleur est codée sur 4 octets R/G/B/Réservé (Red/Green/Blue+une couleur réservée en cas d'évolution du format), la taille de la palette est donc de 1024 octets.
- *L'image* : elle est stockée normalement suivant le format défini dans *la zone bitmap info*. Attention elle est stockée à l'envers (il faut la lire en B/G/R/Réservé et le premier pixel correspond au dernier de l'image).

Le Header			
Position (Hexa-décimal)	Position (Octet)	Type (sous VB)	Description
00h	1	Integer	Signature : Les deux premiers octets nous donnent la signature du fichier : BM. Elle indique que l'on se trouve en présence d'un fichier bitmap (1 ^{er} octet=B et 2 ^e octet=M).
02h	3	Long	Taille du fichier en octets : Pour information, on utilise 4 octets pour coder la taille de l'image. On les notera respectivement dans l'ordre d'arrivée dans le fichier : o1,o2,o3,o4. On obtient alors la taille de l'image en effectuant le calcul suivant $Taille = o1 + o2 * 256 + o3 * 256^2 + o4 * 256^3$.
06h	7	Integer	Réservé : Valeur réservée à une évolution ultérieure du format.
08h	9	Integer	Réservé : Valeur réservée à une évolution ultérieure du format.
0Ah	11	Long	Offset de l'image : L'offset de début du raster par rapport au début du fichier. En d'autres termes, il indique l'endroit du fichier où commence les données. L'Offset est codé sur un octet.

La Zone Bitmap Info			
Position (Hexa- décimal)	Position (Octet)	Type (sous VB)	Description
0Eh	15	Long	Taille de la zone Bitmap Info
12h	19	Long	Largeur de l'image : Donne la largeur de l'image en pixels.
16h	23	Long	Hauteur de l'image : Donne la hauteur de l'image en pixels.
1Ah	27	Integer	Bit par pixel : Indique le nombre de bits par pixel. On a pour une image : – monochrome : 1 bit – 16 couleurs : 4 bits – 256 couleurs : 8 bits – 16 millions de couleurs : 24 bits Les valeurs sont alors respectivement 1, 4, 8 ou 24.
1Eh	31	Long	Format de compression : Indique le type de compression utilisée. Les fichiers BMP peuvent en effet contenir des données raster compressées selon une méthode de type RLE, mais cette possibilité est rarement utilisée. Les valeurs sont alors : – 0 : non compressée – 1 : compressée à 8 bits par pixel – 2 : compressée à 4 bits par pixel
22h	35	Long	Taille de l'image en octets : Indique la taille du raster quand l'image est compressée ou la taille de celle-ci lorsqu'elle ne l'est pas.
26h	39	Long	Pixels par mètre suivant l'horizontale : Résolution horizontale en pixels par mètre. Cette valeur est facultative et par défaut vaut 0 (la résolution en pixels par mètre sert pour l'impression).
26h	39	Long	Pixels par mètre suivant l'horizontale : Résolution horizontale en pixels par mètre. Cette valeur est facultative et par défaut vaut 0 (la résolution en pixels par mètre sert pour l'impression).
2Ah	43	Long	Pixels par mètre suivant la verticale : Résolution verticale en pixels par mètre. Cette valeur est facultative et par défaut vaut 0 (la résolution en pixels par mètre sert pour l'impression).
2Eh	47	Long	Nombre de couleurs différentes : Indique le nombre de couleurs différentes ou le nombre de couleurs utilisées dans l'image (facultatif, 0 par défaut).
32h	51	Long	Nombre de couleurs importantes : Indique le nombre de couleurs importantes pour l'affichage (facultatif, 0 par défaut toutes les couleurs sont importantes).

B

Les équations de Saint-Venant

B.1 Rappel mathématique

Afin d'obtenir les équations de Saint-Venant à partir des équations de conservation de quantité de mouvement et de masse nous allons être amené à intégrer ces dernières le long de l'axe des z . Dans ce petit rappel nous allons montrer d'où proviennent les différents termes qui apparaîtront lors de cette intégration. Nous faisons ici le calcul pour la dérivée suivant x , le calcul est exactement le même pour les dérivées suivant y et t .

Soit la fonction $g(x, y, t) = \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \phi(x, y, z, t) dz$, nous voulons par exemple calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$. Il est évident que la principale difficulté de cette intégration vient du fait que les bornes de l'intégrale dépendent elles aussi de x . Nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{b(x+\Delta x, y)}^{h(x+\Delta x, y, t)} \phi(x + \Delta x, y, z, t) dz - \int_{b(x, y)}^{h(x, y, t)} \phi(x, y, z, t) dz \right)$$

Cette égalité peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} & \left(\int_{b(x, y)}^{h(x, y, t)} \phi(x + \Delta x, y, z, t) - \phi(x, y, z, t) dz \right. \\ & \left. + \int_{h(x, y, t)}^{h(x+\Delta x, y, t)} \phi(x + \Delta x, y, z, t) dz - \int_{b(x, y)}^{b(x+\Delta x, y)} \phi(x + \Delta x, y, z, t) dz \right) \end{aligned}$$

Nous intervertissons alors la limite et la première intégrale (Δx n'intervenant plus dans les bornes), de plus nous introduisons $\Phi(x, y, Z, t) = \int_a^Z \phi(x, y, z, t)$, avec $a \in [b(x, y), h(x, y, t)]$, une primitive de ϕ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} = \int_{b(x, y)}^{h(x, y, t)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z, t) - \phi(x, y, z, t)}{\Delta x} dz \\ + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Phi(x, y, h(x + \Delta x, y, t), t) - \Phi(x, y, h(x, y, t), t)) \end{aligned}$$

Or, si nous faisons un développement limité au premier ordre de $\Phi(x, y, Z, t)$ en $Z = h(x, y, t)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, h(x + \Delta x, y, t), t) &= \Phi(x, y, h(x, y, t), t) \\ &+ (h(x + \Delta x, y, t) - h(x, y, t))g(x, y, h(x, y, t), t) + o((h(x + \Delta x, y, t) - h(x, y, t))^2) \end{aligned}$$

Nous reportons cette expression dans l'égalité précédente et considérons la limite. De plus, dans la première intégrale nous reconnaissons la dérivée partielle de ϕ en x . Nous avons donc finalement la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \phi(x, y, z, t) dz &= \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z, t) dz \\ &+ \phi(x, y, h(x, y, t), t) \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, t) - \phi(x, y, b(x, y), t) \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \end{aligned}$$

B.2 Les équations de Saint-Venant

Dans ce qui suit nous allons considérer l'écoulement d'un fluide incompressible et non visqueux. Les équations d'Euler régissent un tel écoulement et peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho g z) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Où u, v et w sont les trois composantes de la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique du fluide considéré, et g l'accélération de la pesanteur. Les trois composantes de la vitesse ainsi que la pression sont des fonctions de l'espace et du temps :

$$u = u(x, y, z, t) \quad v = v(x, y, z, t) \quad w = w(x, y, z, t) \quad p = p(x, y, z, t)$$

En tenant compte de l'équation de continuité nous pouvons réécrire ce système sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho gz) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

B.2.1 Conditions aux limites

Nous allons écrire les conditions aux limites du domaine fluide. Ces conditions portent sur la vitesse verticale. Nous définissons la surface libre et le fond de la manière suivante :

$$\begin{aligned} z &= h(x, y, t) \text{ pour la surface libre} \\ z &= b(x, y) \text{ pour le fond} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont des conditions de non pénétration, c'est à dire que le fond est imperméable et qu'il n'y a pas d'embrun à la surface.

En ce qui concerne la surface libre, nous définissons la fonction implicite $F = z - h(x, y, t)$. Le vecteur normal de cette surface est donné par :

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La vitesse d'une particule fluide à la surface est donnée par :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \frac{u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad (\text{B.1})$$

La vitesse normale de l'interface nous est donnée par :

$$V_n = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Or :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

D'où :

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

la vitesse normale de la surface libre s'écrit donc finalement :

$$V_n = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad (\text{B.2})$$

Faire l'hypothèse qu'il n'y a pas d'embrun à la surface revient à dire que la vitesse d'une particule fluide à la surface libre et la vitesse de la surface libre sont égales. En écrivant l'égalité de ces deux vitesses (équations B.1 et B.2) on obtient la condition à la surface libre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} + w \\ \Leftrightarrow w|_{z=h(x,y,t)} &= \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{z=h(x,y,t)} \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue nous obtenons la condition sur le fond :

$$w|_{z=b(x,y)} = \left(u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} \right)_{z=b(x,y)}$$

B.2.2 Condition de faible profondeur

Nous allons écrire notre système sous forme adimensionnelle et utiliser notre hypothèse de faible profondeur. Pour adimensionnaliser nos équations nous avons besoin des gran-

B.2. Les équations de Saint-Venant

deux caractéristiques suivantes :

- H une longueur caractéristique sur l'axe Oz
- L une longueur caractéristique sur les axes Ox et Oy
- U une vitesse caractéristique sur les axes Ox et Oy
- W une vitesse caractéristique sur l'axe Oz
- $T = \frac{L}{U}$ un temps caractéristique
- $P = U^2$ une pression caractéristique

L'hypothèse de faible profondeur se traduit par :

$$\frac{H}{L} = \frac{W}{U} = \epsilon \ll 1$$

Les grandeurs étoilées sont les grandeurs adimensionnelles. Le système adimensionnel s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U^2}{L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* u^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ \frac{U^2}{L} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{*2}}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* v^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\ \epsilon^2 U^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z} \right) = U^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{\partial}{\partial z^*} (g^* z^*) \right) \\ \frac{U}{L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Finalement nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* u^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{*2}}{\partial y^*} + \frac{\partial w^* v^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\ \epsilon^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{\partial}{\partial z^*} (g^* z^*) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \end{array} \right.$$

Si nous négligeons les termes en ε^2 l'équation de conservation de la quantité de mouvement en z nous indique que la pression est hydrostatique. Finalement le système dimensionnel que nous devons considérer est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(gz) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

B.2.3 Intégration des équations d'Euler

Nous allons maintenant intégrer par rapport à z le système d'équation précédent de $z = b(x, y)$ à $z = h(x, y, t)$ en utilisant la formule rappelée au premier paragraphe de cette annexe.

B.2.3.1 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant x devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} uv \, dz + [uw]_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} = \\ & -\frac{1}{\rho} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial p}{\partial x} \, dz + u|_{z=h(x,y,t)} \frac{\partial h}{\partial t} - u|_{z=b(x,y)} \frac{\partial b}{\partial t} + (u|_{z=h(x,y,t)})^2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ & - (u|_{z=b(x,y)})^2 \frac{\partial b}{\partial x} + (uv)|_{z=h(x,y,t)} \frac{\partial h}{\partial y} - (uv)|_{z=b(x,y)} \frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned}$$

Si nous regroupons les différents termes en facteur de $u|_{z=h(x,y,t)}$ et $u|_{z=b(x,y)}$ nous obtenons :

B.2. Les équations de Saint-Venant

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} uv \, dz = \\
 & -\frac{1}{\rho} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial p}{\partial x} \, dz + \underbrace{u|_{z=h(x,y,t)} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u|_{z=h(x,y,t)} \frac{\partial h}{\partial x} + v|_{z=h(x,y,t)} \frac{\partial h}{\partial y} - w|_{z=h(x,y,t)} \right)}_{=0 \text{ (condition limite à la surface libre)}} \\
 & - \underbrace{u|_{z=b(x,y)} \left(u|_{z=b(x,y)} \frac{\partial b}{\partial x} + v|_{z=b(x,y)} \frac{\partial b}{\partial y} - w|_{z=b(x,y)} \right)}_{=0 \text{ (condition limite au fond)}}
 \end{aligned}$$

Finalement, nous avons donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} uv \, dz = -\frac{1}{\rho} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial p}{\partial x} \, dz$$

L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement suivant y se fait de manière analogue et donne le résultat suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} v \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} v^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} uv \, dz = -\frac{1}{\rho} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial p}{\partial y} \, dz$$

L'intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant z sur l'intervalle $[z, h(x, y, t)]$ (qui après notre hypothèse de faible profondeur revient à considérer la pression comme hydrostatique) donne :

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g(h(x, y, t) - z)$$

Considérant cette dernière équation nous avons :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y}$$

Et donc, en remarquant que h ne dépend pas de z et par conséquent $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ non plus, nous avons :

$$-\frac{1}{\rho} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -g(h(x,y,t) - b(x,y)) \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{\rho} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} \frac{\partial p}{\partial y} dz = -g(h(x,y,t) - b(x,y)) \frac{\partial h}{\partial y}$$

B.2.3.2 Conservation de la masse

Si nous intégrons l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} v dz + [w]_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} - u|_{z=h(x,y,t)} \frac{\partial h}{\partial x} + u|_{z=b(x,y)} \frac{\partial b}{\partial x} - v|_{z=h(x,y,t)} \frac{\partial h}{\partial y} + v|_{z=b(x,y)} \frac{\partial b}{\partial y} = 0$$

En considérant les conditions aux limites pour les vitesses cette équation devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} v dz = 0$$

B.2.3.3 Equation de Saint-Venant

Nous introduisons les valeurs moyennes des composantes de la vitesse :

$$\bar{u}(x,y) = \frac{1}{h(x,y,t) - b(x,y)} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} u dz \quad \text{et} \quad \bar{v}(x,y) = \frac{1}{h(x,y,t) - b(x,y)} \int_{b(x,y)}^{h(x,y,t)} v dz$$

Finalement les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial z} = -g \left(\frac{\partial(h-b)}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial z} = -g \left(\frac{\partial(h-b)}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(gz) = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

B.2. Les équations de Saint-Venant

Il est inutile de préciser des conditions aux limites pour les vitesses car elles sont déjà prises en compte dans ce système. Pour obtenir la forme classique des équations de Saint-Venant nous sommes obligés de faire des hypothèses quant aux variations des vitesses u et v .

Détails sur la section triangulaire

Dans notre deuxième modèle hydraulique nous souhaitons prendre en compte l'évolution des sections de passages aux cols. Cependant, pour ne pas alourdir la méthode numérique, nous ne souhaitons pas recalculer ces sections à partir de la **Carte Numérique des Altitudes** à chaque itération de l'algorithme. Nous avons donc fait l'hypothèse que ces sections sont triangulaires et nous allons ainsi pouvoir calculer les différents paramètres hydrauliques nécessaires à notre modélisation à partir de la seule donnée de la hauteur d'eau mesurée par rapport au point bas de la section du col $y_{col}^{(n)}$.

C.1 Section de passage, périmètre mouillé et diamètre hydraulique

Lors de la phase d'initialisation de notre modèle, pour chaque col, nous calculons la largeur au miroir ($L_{col}^{(0)}$) et la section de passage ($S_{col}^{(0)}$) correspondant au miroir. Ces deux grandeurs sont obtenues directement à partir de la **Carte Numérique des Altitudes** et de la **Carte des Régions Submergées**. La section $S_{col}^{(0)}$ est obtenue par la méthode des trapèzes et $L_{col}^{(0)}$ est la longueur du segment passant par le col et le point émergé le plus proche et prolongé jusqu'au côté opposé du canal.

A partir de ces données nous sommes en mesure de calculer la hauteur d'eau initiale mesurée par rapport au point bas de la section du col $y_{col}^{(0)}$ ainsi que le demi angle au sommet (α_{col}) correspondant.

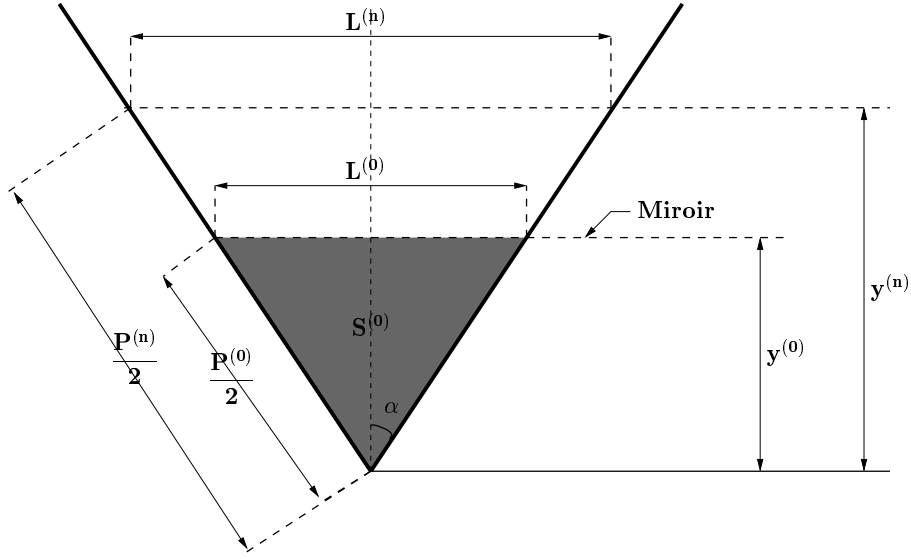
$$S_{col}^{(0)} = 2L_{col}^{(0)}y_{col}^{(0)} \iff y_{col}^{(0)} = \frac{2S_{col}^{(0)}}{L_{col}^{(0)}} \quad (C.1)$$

$$S_{col}^{(0)} = \left(y_{col}^{(0)}\right)^2 \tan(\alpha_{col}) \iff \alpha_{col} = \arctan\left(\frac{S_{col}^{(0)}}{\left(y_{col}^{(0)}\right)^2}\right) \quad (C.2)$$

Le périmètre mouillé initial nous est donné par :

$$\frac{P_{col}^{(0)}}{2} = \frac{y_{col}^{(0)}}{\cos(\alpha)} \iff P_{col}^{(0)} = \frac{2y_{col}^{(0)}}{\cos(\alpha)} \quad (C.3)$$

Finalement, le diamètre hydraulique initial nous est donné par :



α : demi angle au sommet de la section

$y^{(0)}$: hauteur d'eau mesurée par rapport au point bas de la section

$P^{(0)}$: périmètre mouillé correspondant à la hauteur d'eau $y^{(0)}$

$S^{(0)}$: section mouillée correspondant à la hauteur d'eau $y^{(0)}$

$L^{(0)}$: largeur au miroir correspondant à la hauteur d'eau $y^{(0)}$

FIG. C.1 : Afin de pouvoir prendre en compte l'évolution des sections de passage aux cols nous faisons l'hypothèse que celles-ci sont triangulaires.

$$D_{col}^{(0)} = \frac{4S_{col}^{(0)}}{P_{col}^{(0)}} \implies D_{col}^{(0)} = 2y_{col}^{(0)} \sin(\alpha_{col}) \quad (C.4)$$

Pour les itérations suivantes nous calculons la section de passage $S_{col}^{(n)}$, le périmètre mouillé $P_{col}^{(n)}$ et le diamètre hydraulique $D_{col}^{(n)}$ en fonction de leur valeur initiale et de la hauteur d'eau donnée par le calcul. Nous avons donc :

$$\frac{S_{col}^{(n)}}{S_{col}^{(0)}} = \frac{\left(y_{col}^{(n)}\right)^2 \tan(\alpha_{col})}{\left(y_{col}^{(0)}\right)^2 \tan(\alpha_{col})} \iff S_{col}^{(n)} = S_{col}^{(0)} \left(\frac{y_{col}^{(n)}}{y_{col}^{(0)}}\right)^2 \quad (C.5)$$

$$\frac{P_{col}^{(n)}}{P_{col}^{(0)}} = \frac{2y_{col}^{(n)} \cos(\alpha_{col})}{\cos(\alpha_{col}) 2y_{col}^{(0)}} \iff P_{col}^{(n)} = P_{col}^{(0)} \frac{y_{col}^{(n)}}{y_{col}^{(0)}} \quad (C.6)$$

$$\frac{D_{col}^{(n)}}{D_{col}^{(0)}} = \frac{2y_{col}^{(n)} \sin(\alpha_{col})}{2y_{col}^{(0)} \sin(\alpha_{col})} \iff D_{col}^{(n)} = D_{col}^{(0)} \frac{y_{col}^{(n)}}{y_{col}^{(0)}} \quad (C.7)$$

C.2 Nombre de Reynolds et nombre de Froude

Considérant les paramètres hydrauliques dont nous venons de préciser le calcul, nous allons définir les nombres adimensionnels de Reynolds et de Froude dans le cas d'une section triangulaire. Classiquement, le nombre de Reynolds est donné par :

C.3. Hauteur critique

$$Re_{col}^{(n)} = \frac{v_{col}^{(n)} D_{col}^{(n)}}{\nu}$$

Considérant notre hypothèse de section triangulaire et l'équation C.7 nous obtenons :

$$Re_{col} = \frac{v_{col} D_{col}^{(0)} y_{col}^{(n)}}{y_{col}^{(0)} \nu} \quad (C.8)$$

Pour donner l'expression correcte du nombre de Froude pour une section triangulaire nous allons considérer l'énergie spécifique au col :

$$E(y_{col}) = y_{col} + \frac{v_{col}^2}{2g} = y_{col} + \frac{Q^2}{2g S_{col}^2}$$

$$E(y_{col}) = y_{col} + \frac{Q^2}{2g y_{col}^4 \tan^2(\alpha_{col})} \quad (C.9)$$

Le nombre de Froude vaut 1 quand l'énergie spécifique est minimum. Ainsi, si nous dérivons cette dernière équation par rapport à y_{col} nous obtenons la relation suivante :

$$0 = 1 + \frac{2v_{col}^2}{g y_{col}} \implies Fr_{col}^{(n)} = \frac{2 \left(v_{col}^{(n)} \right)^2}{g y^{(n)}} \quad (C.10)$$

C.3 Hauteur critique

Nous désirons obtenir la hauteur d'eau critique au col $(y_{col})_{critique}$ en fonction de la hauteur d'eau amont y_{am} dans le cas d'une section triangulaire. Pour cela, nous écrivons la conservation de l'énergie spécifique entre l'amont et le col dans les conditions d'un écoulement critique :

$$y_{am} = (y_{col})_{critique} + \frac{(v_{col})_{critique}^2}{2g} \quad (C.11)$$

L'amont étant considéré comme un bassin hydrostatique il n'y a pas de terme d'énergie cinétique dans l'expression de son énergie spécifique. Dans les cas d'un écoulement critique le nombre de Froude vaut 1 $\left(\frac{2 (v_{col})_{critique}^2}{g (y_{col})_{critique}} = 1 \right)$, ce qui nous donne :

$$(y_{col})_{critique} = \frac{4}{5} y_{am} \quad (C.12)$$

C.4 Pertes de charge par friction dans les canaux sous-critiques

Concernant les pertes de charge par friction en régime sous-critique un doute subsiste sur le fait que nous les maximisons ou pas en prenant en compte la vitesse au col. En effet, ces pertes de charge sont données par :

$$\Delta H = f \left(\frac{vD}{\nu} \right) \frac{v^2 L}{2gD} \quad (\text{C.13})$$

Si la vitesse v est maximum au col, le diamètre hydraulique D lui est minimum au col. Donc $\frac{v^2}{D}$ est effectivement maximum. En revanche il subsiste un doute sur le nombre de Reynolds ($Re \sim vD$) et donc sur le coefficient de Darcy-Weisbach f .

Le coefficient f étant une fonction décroissante du nombre de Reynolds, si celui-ci est maximum f sera minimum. C'est pourquoi nous ne sommes pas sûrs de maximiser les pertes de charge par friction en régime sous-critique en les calculant avec la vitesse et diamètre hydraulique au col.

Heureusement ce doute peut être levé par une simple analyse dimensionnelle. Nous avons :

$$\frac{v^2}{D} = \frac{Q^2 P}{S^2 4S} \sim \frac{P}{S^3} \quad (\text{C.14})$$

Où Q est le débit, S la section mouillée au col et P le périmètre mouillé au col. Considérons l'expression du nombre de Reynolds $Re \sim \frac{1}{P}$. Le coefficient de Darcy-Weisbach est donné par :

$$f \sim \frac{1}{Re^m} \quad (\text{C.15})$$

m vaut 1 pour les écoulements laminaires (loi de Poiseuille) et 1/4 pour les écoulements turbulents (loi de Blasius). Nous avons donc pour les pertes de charge par friction :

$$\Delta H \sim \frac{P^{m+1}}{S^3} \quad (\text{C.16})$$

Pour aller plus loin, nous allons prendre en compte les expressions du périmètre mouillé et de la section mouillée au col en fonction de la hauteur d'eau au col (y) dans le cadre de notre hypothèse d'une section de passage triangulaire. Nous avons donc finalement :

$$\Delta H \sim \frac{y^{m+1}}{y^6} \sim \frac{1}{y^{5-m}} \quad (\text{C.17})$$

Comme la hauteur d'eau est minimum au col pour les écoulements sous-critiques, nous avons bien maximisé les pertes de charge par friction en les calculant à partir des vitesses et diamètres hydrauliques aux cols.

D

La méthode de Ferrari

D.1 La lettre testament de Galois

Evariste Galois est né à Bourg-la-Reine le 25 octobre 1811. Il entre à 12 ans au lycée Louis-le-Grand, où il suit une scolarité d'abord honorable, avant de marquer assez vite des signes de lassitude. Dès 1827-1828, Galois lit Legendre (Eléments de géométrie), Lagrange (textes sur la résolution des équations), Euler, Gauss, Jacobi. Il obtient alors le 1er prix au Concours Général de mathématiques, mais échoue à l'entrée à Polytechnique (la légende veut qu'il ait jeté un chiffon au visage d'un examinateur lui posant une question trop simple).



FIG. D.1 : *Evariste Galois (1811-1832), mathématicien français, fait preuve très jeune de très grandes capacités en mathématiques. Malheureusement, sa mort accidentelle ne lui laissera pas le loisir d'étoffer son oeuvre pourtant déjà assez conséquente.*

Il entre en octobre 1828 en spéciales à Louis-le-Grand. Le professeur, Mr Richard, admire le génie mathématique de son élève et garde les copies qu'il confiera à un autre de ses élèves : Charles Hermite. C'est l'époque où il publie son premier article dans les Annales mathématiques de Joseph Gergonne (il démontre un théorème sur les fractions continues périodiques). Il rédige aussi un premier mémoire sur la théorie des équations, envoyé à l'Académie des Sciences, il sera "perdu" par Cauchy.

En prison¹, il continuera ses travaux. Libéré en 1832, il s'éprend en mai 1832 d'une femme, Stéphanie D., avec qui il rompt le 14 mai. On ne sait trop pourquoi, mais un duel semble en résulter quelques jours plus tard ("Je meurs pour une infâme coquette"). La nuit précédente, le 29 mai, Galois rassemble ses dernières découvertes dans une lettre adressée à son ami Auguste Chevalier :

¹Durant un dîner, Galois leva son verre tout à fait spontanément à la santé du roi Louis-Philippe alors qu'il tenait un couteau dans l'autre. Pour ce geste, mal interprété, il fut condamné à 10 mois de prison.

"Mon cher Ami, j'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles. Les unes concernent la théorie des Équations, les autres les fonctions Intégrales. Dans la théorie des équations, j'ai recherché lesquelles étaient résolubles par radicaux. On pourra faire avec tout cela trois Mémoires. Le premier est écrit ; et malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens avec les corrections que j'y ai faites. Le second contient des applications assez curieuses de la théorie des équations.(..) Tu sais mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations, depuis quelques temps, étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori, dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes, quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données, sans que la relation put cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps, et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain, qui est immense.

Tu feras imprimer cette lettre dans la Revue encyclopédique. Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète. Tu prieras publiquement Jacobi et Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes. Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gachis. Je t'embrasse avec effusion. "

De cette lettre naquit la légende selon laquelle Galois fit ses découvertes majeures en une seule nuit. Il meurt de péritonite le 31 mai 1832 dans les bras de son jeune frère Alfred. Il est enterré dans la fosse commune du cimetière de Montparnasse. Ses amis républicains préparent un soulèvement à l'occasion de ses obsèques. Reporté au 5 juin, il conduira au massacre du cloître de Saint-Méry.

Les travaux de Galois ne sont redécouverts qu'une dizaine d'années plus tard par Liouville, qui le 4 septembre 1843 annonce à l'Académie des Sciences qu'il vient de trouver dans les papiers de Galois une solution aussi exacte que profonde au problème de la résolubilité par radicaux. Ce n'est qu'en octobre 1846 qu'il publie les textes sans y joindre de commentaires. A partir de 1850, les écrits de Galois sont enfin accessibles par les meilleurs mathématiciens, et les travaux de Kronecker, Dedekind, Cayley conduisent à l'Algèbre Moderne.

D.2 La méthode de Ferrari

Lodovico Ferrari (1522-1565) est un mathématicien italien, élève et collaborateur de Jérôme Cardan. Ce dernier, n'arrivant pas à résoudre une équation du 4^{ime} degré aurait demandé à Ferrari (qui était alors son secrétaire) de s'en occuper, et c'est à cette occasion que Ferrari aurait mis au point sa méthode éponyme.

Toute équation du 4^{ime} degré peut se mettre sous la forme :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

En faisant le changement de variable $x = \frac{y - a}{4}$ nous pouvons nous ramener à une équation du 4^{ème} degré dans laquelle il n'y a pas de terme en x^3 .

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} p &= 16b - 6a^2 \\ q &= 64c - 32ab + 8a^3 \\ r &= 256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4 \end{aligned}$$

Si $q = 0$, nous avons une équation bicarrée que nous résolvons en faisant le changement de variable $Y = y^2$. Si $q \neq 0$ nous pouvons écrire :

$$y^4 + r = -py^2 - qy$$

Si nous ajoutons $2y^2\sqrt{r}$ aux deux membres de cette égalité nous pouvons écrire :

$$(y^2 + \sqrt{r})^2 = -py^2 - qy + 2y^2\sqrt{r} \tag{D.1}$$

En reportant ce dernier résultat dans le développement de $(y^2 + \sqrt{r} + z)^2$ nous obtenons :

$$(y^2 + \sqrt{r} + z)^2 = (y^2 + \sqrt{r})^2 + 2(y^2 + \sqrt{r})z + z^2 \tag{D.2}$$

$$= -py^2 - qy + 2y^2\sqrt{r} + 2(y^2 + \sqrt{r})z + z^2 \tag{D.3}$$

$$= (-p + 2z + 2\sqrt{r})y^2 - qy + 2z\sqrt{r} + z^2 \tag{D.4}$$

$$\tag{D.5}$$

Si nous développons cette dernière égalité, nous constatons qu'elle est équivalente à l'équation D.1. Nous devons donc résoudre cette dernière équation, pour cela nous allons choisir z de telle manière que le deuxième membre de cette égalité se mette sous la forme d'un carré. Le deuxième membre de cette égalité étant un polynôme du deuxième degré en y , nous pouvons le mettre sous la forme d'un carré si son discriminant est nul, c'est à dire :

$$8z^3 + 4(6\sqrt{r} - p)z^2 + 8(2r - p\sqrt{r})z - q^2 = 0 \tag{D.6}$$

Cette égalité est souvent appelée équation de Ferrari. En utilisant la méthode de Cardan nous pouvons trouver les solutions de cette équation. Notons z_0 une solution réelle de cette équation. En reportant z_0 dans l'égalité D.4 nous pouvons écrire :

$$(y^2 + \sqrt{r} + z_0)^2 = (Ay + B)^2 \tag{D.7}$$

avec $A^2 = 2\sqrt{r} - p + 2z_0$ et $B = -\frac{q}{2A}$. En utilisant la troisième identité remarquable nous pouvons finalement écrire D.7 sous la forme :

$$(y^2 + \sqrt{r} + z_0 - Ay - B)(y^2 + \sqrt{r} + z_0 + Ay + B) = 0 \quad (\text{D.8})$$

Un produit de facteur est nul si un des deux facteurs est nul, nous obtenons donc deux équations du second degré à résoudre. Ces deux équations vont nous donner quatre solutions en y qui sont autant de solutions en x en utilisant le changement de variable $x = \frac{y - a}{4}$.

Générateurs aléatoires

Pour générer des nombres aléatoires manuellement il faut placer des boules numérotées dans une urne et en tirer au hasard avec remise. Par contre, sur ordinateur, les nombres tirés ne sont jamais aléatoires mais “pseudo-aléatoires”. En effet ils sont issus d’un calcul déterministe dont le résultat est suffisamment “désordonné” pour ne pas être distingué de ce que donnerait le hasard.

Générer des nombres aléatoires sur ordinateur revient donc à créer une suite d’entiers :

$$I_{n+1} = f(I_n)$$

La valeur de départ I_0 , appelée *graine*, doit être donnée par l’utilisateur. Le caractère déterministe du processus implique que la même graine donnera la même suite de nombres. D’autre part, la suite se reproduit au bout d’un certain nombre d’itération que l’on appelle *période*. Si la fonction f a été correctement choisie, chaque nombre a la même probabilité d’apparaître, on dit alors qu’ils suivent une *loi uniforme*.

E.0.1 Les nombres pseudo aléatoires : la loi uniforme

Les générateurs dont nous allons parler ici sont ceux introduits par George Marsaglia (Marsaglia 1963, MacLaren et Marsaglia 1965), ils sont dits de type *Multiplication avec Retenue* (Multiplication With Carry : MWC). Ils se présentent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (aI_n + c_n) \bmod(b) \\ c_{n+1} &= (aI_n + c_n) \operatorname{div}(b) \end{aligned}$$

a est le *multiplicateur*, b la *base*, c_n la *retenue*. $(X) \bmod(b)$ est le reste de la division de (X) par b et $(X) \operatorname{div}(b)$ est la partie entière de la division de (X) par b . Pour $b = 2^{16}$, si a est choisi dans le tableau suivant, la période de retour du générateur aléatoire sera de : $a \times 2^{31} - 1$.

1791398085	1929682203	1683268614	1965537969	1675393560
1967773755	1517746329	1447497129	1655692410	1606218150
2051013963	1075433238	1557985959	1781943330	1893513180
1631296680	2131995753	2083801278	1873196400	1554115554

E.0.2 Principe de simulation

Pour simuler des variables aléatoires de loi donnée, on dispose principalement de deux moyens :

- L'inversion de la fonction de répartition. En effet si la fonction de répartition de la loi est F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ alors la loi de $X = F^{-1}(U)$ a comme fonction de répartition F . F^{-1} est ici l'inverse à droite de F , c'est à dire que :

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x/F(x) \leq \alpha\}$$

La méthode de la *transformation inverse* est basée sur le théorème suivant :

Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x)$, alors U la variable aléatoire définie par $U = F(X)$ a une distribution uniforme sur $[0,1]$.

- Dans le cas où la fonction de répartition ne s'inverse pas (ce qui est le cas pour la plupart des phénomènes physiques) mais que l'on connaît la densité f , nous utilisons une méthode d'échantillonnage dont la plus simple est la *méthode de rejet de Von Neumann* (Von Neumann 1951). Elle consiste à générer des données suivant une distribution de fonction de densité proche de celle désirée et d'ensuite éliminer une certaine proportion de ces données de manière à se ramener à des données qui suivent la distribution attendue. Soit g une densité pour laquelle on sait simuler facilement des variables aléatoires et telle que : $f(x) \leq a \times g(x)$ pour un coefficient a donné.

1. Générer un tirage de la loi de densité g , soit x le résultat.
2. Générer un tirage d'une loi uniforme sur $[0,1]$, soit u le résultat.
3. Si $u \leq \frac{f(x)}{a \times g(x)}$ alors x est une valeur acceptable sinon on recommence le processus depuis l'étape 1.

E.0.3 Loi Gaussienne

Nous sommes toutefois parfois obligés d'avoir recours à des méthodes ad-hoc pour certaines lois, et notamment pour la loi gaussienne. En effet la méthode de transformation inverse ne s'applique pas au cas gaussien car on ne sait pas calculer explicitement la fonction de répartition d'une loi gaussienne.

$$\text{densité}_{\text{gaussienne}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Quant à la méthode de rejet elle est applicable au cas gaussien avec $g(x) = e^{-x}$ et $a = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$ (cette valeur de a est la valeur optimale, elle assure que 76% des valeurs simulées seront retenues), mais elle est moins efficace et moins facile à mettre en oeuvre que la méthode de *Box-Muller* (Box et Muller 1958). Cette dernière consiste à générer deux séries de nombres aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$ que l'on note U_1 et U_2 et d'ensuite considérer la suite de nombres aléatoires suivante :

$$X = \cos(2\pi U_1) \sqrt{-2 \log U_2}$$

On peut alors montrer que la variable aléatoire X suit une loi gaussienne centrée réduite.

Remarque 2 $Y = \sin(2\pi U_1) \sqrt{-2 \log U_2}$ suit aussi une loi gaussienne centrée réduite et est indépendante de X .

Ensuite, il est facile de montrer que $\mu + \sigma X$ suit une loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 (en utilisant les fonctions caractéristiques).

Les surfaces générées par ce processus respectent certes la répartition gaussienne des valeurs des altitudes mais en aucune manière la covariance spatiale de l'échantillon de surface n'est prise en compte. En effet sur une surface naturelle telle que celle que nous considérons on ne peut pas avoir de pente trop abrupte, en clair un maximum de hauteur des rugosités ne peut pas se retrouver juste à côté d'un minimum. Il faut donc prendre en compte une certaine covariance spatiale de l'échantillon pour avoir des surfaces aléatoires exploitables.

Index

A

Abbot, 12
aléatoire
... , générateur, 193
... , nombre, 193
Archimède, 3
axe médian, 60–62

B

bassin hydrostatique, 78
Bazin, 11, 18
Bernoulli, 5, 7
Blasius, 18, 83
... , formule de, 94, 115
boucle du
... , squelette, 73
boule
... , discrète, 59
... , maximale, 61
branches mortes, 68
branches non débouchantes, 71

C

Carte des Régions Submergées, 33, 39, 40,
71, 80, 87, 97, 185
Carte Numérique des Altitudes, 35, 40,
47, 75, 78, 81, 136, 185
Cartes des Régions des régions Submer-
gées, 75
Cartes des Régions Submergées, 33, 61,
89, 99, 125, 136
Cauchy, 189
Chézy, 7
... , coefficient de, 14
classe d'intensité, 141
coefficient modérateur, 112
coefficients hydrauliques, 79, 84
Colebrook, 19

D

débit

... , global, 100, 125
Darcy, 17
... , coefficient de, 21, 27
de Prony, 8, 9
distance au fond, 78
distance discrète, 58
domaine de validité, 101
domaine submergé, 39, 44, 77
du Buat, 8
Dupuit, 10

E

effet de pépite, 37
Euler, 4, 6

F

Fanning, 18
Finkner, 34
fonction de distribution, 106
fonction de répartition, 194
fond d'une image, 57, 69
forme, 57, 60, 61
friction, 112
frottements de formes, 26
frottements granulaires, 26
Froude
... , nombre de, 110

G

géométrie discrète, 57
Galois, 189
Ganguillet, 14
Gauckler, 12
Gilley, 34
Girard, 8, 9

H

Hagen, 4, 16
hauteur d'eau équivalente, 133, 136
histogramme des rugosités, 39
Horton, 21

Humphreys, 12

I

image

- ..., binaire, 57
- ..., bmp, 40, 41, 171
- ..., de distance, 60
- ..., distance au fond, voir image de distance

image de distance au fond, 61

K

Kirchhof

- ..., lois de, 79

Kutter, 14

L

largeur au miroir, 80

liens, 67

M

macro-rugosités, 25

Manning, 13, 14

Manning-Strickler, 22

micro-rugosités, 25

microtopographie, 33

miroir, 39, 78, 104, 113, 115, 125, 136–138

Moody, 20, 83

mouillage, 134

N

Navier, 4

Nikuradse, 18, 22

noeuds, 64

- ..., amas de, 66

- ..., de bords, 67

- ..., surnuméraires, 65

O

objets, 58, 60

P

périmètre spécifique, 46

paramètres hydrauliques

- ..., équivalents, 47

- ..., fictifs, 113

- ..., vrais, 47, 113

percolation, 33, 41, 125

plan moyen des aspérités, 36

points de références, 60

Poiseuille, 4, 16, 21, 83

- ..., formule de, 94, 115

portée, 37

Prandtl, 18

R

réseaux élémentaires, 68

réseaux hydrauliques, 57, 73, 99, 117

résistance hydraulique, 79

Reynolds, 16

- ..., nombre de, 93, 107

Richards, 23

Rouse, 20

rugosimètre laser, 35

rugosités

- ..., micro, 21, 117

- ..., répartition spatiale, 117

S

Saint-Venant, 4

Savat, 22

section spécifique, 46

seuil

- ..., percolation, 41, 125, 136

squelette, 57, 61, 69, 73, 81, 117, 125

squelettes, 80, 89

squelettisation, 33, 75, 101

Stokes, 4

Strickler, 16

surface aléatoire, 120, 123

surface libre, 40

T

taux d'inondation, 75, 137

taux de surface submergée, 134, 137

Torricelli, 3, 7

V

variance, 37

variogramme, 36, 123

voisins, 58

- ..., directs, 58

- ..., indirects, 58

volume submergé, voir domaine submergé

Von Karman, 18

W

Weisbach, 11

White, 19

THESE DE DOCTORAT DE L'UJF

Titre de l'ouvrage :

MODELISATION DU RUISSELLEMENT SUR SURFACES RUGUEUSES.

Nom de l'auteur :

Nicolas ROCHE

Etablissement :

**Laboratoire d'étude
des Transferts en Hydrologie et Environnement
(LTHE, UMR 5564, CNRS-INPG-IRD-UJF)**

Résumé :

Dans l'étude du ruissellement et de l'érosion à l'échelle des bassins versants, la résistance hydraulique à l'écoulement d'une surface est évaluée par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement. Nous avons à notre disposition de nombreuses expressions de ces coefficients issues de tout aussi nombreuses études expérimentales ou théoriques.

Cependant, la plupart de ces coefficients ont été établis sous l'hypothèse implicite de micro rugosité. C'est-à-dire que la lame d'eau est considérée suffisamment importante pour que l'influence des aspérités de la surface sur l'écoulement se borne à leur effet sur la friction. La diversité des tailles des rugosités sur les surfaces naturelles, fait qu'une telle hypothèse est rarement vérifiée.

Dans ce travail, nous proposons de considérer une séquence de réseaux hydrauliques fonctions du degré d'inondation de la surface. En nous appuyant sur ces réseaux, nous présentons des modèles hydrauliques afin de déterminer le coefficient de frottement de la surface en fonction du taux d'inondation. Les modélisateurs ayant besoin d'associer un coefficient de frottement à un type de surface, nous avons voulu généraliser nos résultats en appliquant notre démarche à des surfaces aléatoires de mêmes caractéristiques statistiques que la surface originale. Ce faisant, nous avons mis en évidence l'influence de la répartition spatiale des rugosités.

Si nous n'avons pas pu valider expérimentalement notre modèle numérique en raison du peu de résultats pour les faibles taux d'inondation, nous avons mis en évidence que la transition entre les régimes d'inondation partielle et marginale se traduit par une brusque augmentation de la croissance des débits.

Mots clés :

Modélisation hydrologique ; variabilité hydro-climatique ; Afrique de l'Ouest ; analyses de sensibilité et d'incertitudes ; AMMA ; GR4J ; TOPMODEL.