HAL
open science

Quelques contributions aux méthodes d'équations intégrales et à l'étude de problèmes inverses en mécanique des solides

Marc Bonnet

▶ **To cite this version:**

Marc Bonnet. Quelques contributions aux méthodes d'équations intégrales et à l'étude de problèmes inverses en mécanique des solides. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1995. tel-00121985

HAL Id: tel-00121985

https://theses.hal.science/tel-00121985v1

Submitted on 22 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques contributions aux méthodes intégrales et à l'étude des problèmes inverses en Mécanique des solides

Dossier de candidature en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches

Marc BONNET

Chargé de recherches CNRS de 1ere classe,
Laboratoire de Mécanique des Solides
Département SPI, section 9, URA 317
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex

téléphone: (1)-69333327, télécopie: (1)-69333026
courrier électronique: *bonnet@lms.polytechnique.fr*

Décembre 1994

Table des matières

Introduction **5**

1 Equations intégrales et éléments de frontière **7**
1.1 Introduction 7
1.2 Régularisation des équations intégrales 10
1.2.1 Régularisation pour l'élastostatique 10
1.2.2 Nouvelle interprétation du caractère singulier des équations intégrales. 13
1.2.3 Extension de la régularisation à l'élastodynamique 14
1.2.4 Régularisation pour les problèmes scalaires 14
1.2.5 Commentaires 15
1.3 Mise en oeuvre numérique de la régularisation 15
1.3.1 Mise en oeuvre numérique de la régularisation 15
1.3.2 Commentaires. 17
1.3.3 Exemple numérique 18
1.4 Propagation dynamique de fissure simulée par potentiels retardés régularisés 18
1.5 Utilisation des symétries géométriques. 22
1.6 Formulations variationnelles intégrales pour les problèmes aux limites mixtes 24

2 Problèmes inverses **27**
2.1 Introduction 27
2.2 Régularisation et inversion gaussienne 30
2.3 Inversion gaussienne linéaire en variable complexe pour l'acoustique 32
2.3.1 Inversion gaussienne en variable complexe 33
2.3.2 Exemple numérique d'inversion gaussienne en variable complexe . . 34
2.4 Identification de défauts dans des structures à partir de mesures vibratoires 38

3 Approche énergétique et domaines variables **47**
3.1 Introduction 47
3.2 Dérivation directe des équations intégrales dans une transformation géométrique 48
3.3 Formulations intégrales pour l'approche énergétique de la rupture fragile . 50
3.3.1 Principe des méthodes énergétiques en Mécanique de la rupture . . 50
3.3.2 La « méthode θ » 52
3.3.3 La « méthode θ-intégrale » 52
3.4 Utilisation des équations intégrales régularisées en déplacements 53
3.5 Utilisation de formulations intégrales variationnelles 57

4 Méthode de l'état adjoint pour les problèmes inverses **65**
4.1 Méthode de l'état adjoint 65
4.2 Utilisation de la méthode de l'état adjoint 68
4.3 Identification de domaines inconnus par équations intégrales de frontière . 70

5 Conclusions et perspectives **75**

Liste de publications et travaux **79**

Liste de publications et travaux **85**

Introduction

Les travaux de recherche présentés ici en vue d'obtenir l'habilitation à diriger les recherches portent au total sur une période d'environ 10 ans. Ils s'inscrivent dans deux thèmes principaux : les méthodes d'équations intégrales et d'éléments de frontière, les problèmes inverses en mécanique des solides, abordés dans cet ordre chronologique.

Ces deux thèmes, quoique distincts, se recouvrent partiellement. En effet, une proportion substantielle de problèmes inverses de la mécanique des solides concerne des situations d'essais non destructifs, pour lesquelles les mesures sont faites sur la frontière externe, et concernent des conditions aux limites ou des domaines géométriques partiellement inconnus. La modélisation du problème direct par équations intégrales de frontière donne alors l'expression mathématique la plus directe de la relation entre mesures et inconnues. Sur un plan plus général, il existe un lien très fort entre la théorie des équations intégrales et la modélisation des problèmes inverses.

Huy Duong Bui, alors aux Etudes et Recherches d'EDF, m'a proposé la régularisation des équations intégrales en élastodynamique et l'étude des aspects numériques associés comme sujet de thèse. Son choix était motivé d'une part bien sûr par l'intérêt propre de cette recherche, mais aussi en raison de ses liens avec la modélisation numérique fine de méthodes de contrôle non destructif, problème inverse très difficile dont EDF commençait à se préoccuper. Huy Duong Bui m'a ainsi sensibilisé, durant la période suivant la thèse, à l'intérêt scientifique et aux applications potentielles des problèmes inverses en Mécanique des solides. Je dois donc mon activité dans ces deux domaines à son impulsion.

méthodes d'équations intégrales de frontière. Mes premiers travaux dans ce domaine ont porté sur leur régularisation, pour l'élastostatique, élastodynamique et l'acoustique et des développements numériques associés. La reformulation sous forme intégrable des équations hypersingulières associées aux solides fissurés était également une étape importante. Une extension récente a concerné l'établissment de formulations intégrales variationnelles symétriques et régularisées. Ces travaux sont décrits au chapitre 1.

L'examen durant mon stage post-doctoral de travaux menés notamment à EDF sur la "méthode θ" (qui utilise les éléments finis) m'a conduit à explorer l'idée d'associer méthodes intégrales et dérivation par rapport au domaine. Cette recherche a conduit d'une part au développement sous deux formes successives d'une "méthode θ-intégrale", formulation de l'approche énergétique (reposant sur le calcul des dérivées par rapport au domaine de l'énergie potentielle à l'équilibre) de problèmes de mécanique de la rupture ne nécessitant que la modélisation de la frontière et des variables qu'elle supporte (chapitre 3)[1]. Elle est d'autre part applicable à de nombreux problèmes inverses pour lesquels le domaine est la variable principale, comme en témoigne l'étude numérique réalisée sur l'identification d'obstacles rigides en acoustique linéaire, utilisant éléments de frontière et dérivée par rapport au domaine (chapitre 4, section 3.2). 3

[1]Ceci comprend la thèse de Haihong Xiao dont j'ai assuré l'encadrement.

Problèmes inverses. Les problèmes inverses sont habituellement mal posés (solution inexistante, ou non unique, ou non-continue par rapport aux données mesurées), et leur résolution nécessite des approches spécifiques qui font une grande place à la prise en compte d'informations a priori et à la restriction de l'espace des solutions admissibles. J'ai mené dans ce cadre des travaux sur le développement et l'exploitation de l'inversion gaussienne linéaire puis non-linéaire[2] pour l'acoustique et mécanique vibratoire (chapitre 2), dans le cadre d'une collaboration à long terme avec le département Acoustique et Mécanique Vibratoire d'EDF.

J'ai également abordé divers aspects de la méthode de l'état adjoint qui, appliquée aux problèmes inverses, conduit d'une part à des équations d'observation permettant l'analyse du problème inverse linéarisé, d'autre part à un calcul numérique très efficace du gradient d'une fonction-coût (chapitre 4).

Ces travaux utilisent, suivant les cas, les éléments finis ou les éléments de frontière.

Cours et ouvrage. Le domaine des méthodes d'équations intégrales et d'éléments de frontière a fait de ma part l'objet de cours approfondis à l'Université de Bucarest (1993) et aux Etudes doctorales de l'Ecole Polytechnique (1994). Les documents [Bon93], [Bon94] préparés à ces occasions représentent les premières ébauches d'un ouvrage [Bon95] en cours d'achèvement, qui je l'espère comblera un vide éditorial, la littérature francophone consacrée à ce domaine étant très pauvre.

Nota. *Les citations bibliographiques faites dans ce mémoire renvoient à deux listes distinctes : celle de mes travaux (pages 79 à 84, repérées par* [B ;année :n^{0}réf]*) et celle de références de la littérature, hors travaux personnels (pages 85 à 92, repérées par* [n^0 réf.]*) .*

[2]Sujet de la thèse de Jalel BEN ABDALLAH dont j'ai assuré l'encadrement.

Chapitre 1

Equations intégrales et éléments de frontière

Afin de mieux présenter, dans les sections 1.2 et suivantes, les travaux personnels, ce chapitre débute par une première section introductive.

1.1 Introduction

La plupart des problèmes d'intérêt pratique posés par la Mécanique des solides déformables sont généralement associés à des domaines géométriques et des conditions aux limites ne permettant pas l'emploi des techniques classiques de recherche de solutions exactes : séparation de variables, transformations intégrales... et doivent donc être résolues par des méthodes numériques. Les plus couramment utilisées sont les différences finies, les éléments finis et les éléments de frontière ; la méthode des caractéristiques ou l'approche spectrale sont également rencontrées.

La méthode des éléments de frontière repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. L'étude de ces dernières a commencé il y a plus d'un siècle et constitue une branche importante de la physique mathématique classique : la théorie du potentiel (voir par exemple les ouvrages de Kellogg [43], Gunther [37]). L'identité intégrale de Somigliana pour l'élastostatique, par exemple, a été publiée en 1886 [87]. Le développement de la méthode des éléments de frontière en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des méthodes d'éléments finis et de différences finies. Les premiers développements numériques ont été proposés durant les années 1960 : Shaw [82], Rizzo [74], Cruse [27], pour n'en citer que quelques-uns.

La théorie du potentiel classique traite de surtout de champs scalaires (température, potentiel électrostatique, ondes acoustiques, potentiel des vitesses d'un fluide parfait,...) vérifiant des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le laplacien : équations de Poisson, des ondes, de la diffusion.... Par exemple, des solutions de l'équation de Poisson peuvent être représentées comme combinaisons de *potentiels* créés dans l'espace par des sources distribuées sur un volume V ou une surface S : potentiels newtoniens

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V f(\boldsymbol{y}) \frac{\mathrm{d}V_y}{\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \|}$$

de simple couche

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(\boldsymbol{y}) \frac{\mathrm{d}S_y}{\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \|}$$

ou de double couche

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \psi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \|} \, \mathrm{d}S_y$$

On peut ainsi ramener la résolution de l'équation de Poisson à une équation intégrale, posées sur la frontière du domaine d'étude (la distribution f du potentiel newtonien étant donnée : forces, masse, production de chaleur...), d'inconnue ϕ ou ψ. On note que les potentiels sont exprimés en termes d'intégrales singulières pour $\boldsymbol{x} \in V, S$. L'étude de l'existence d'une solution, pour des conditions aux limites données, est alors ramenée à celle de l'existence d'une solution à une équation intégrale de frontière, ce qui permet d'appliquer les théorèmes de Fredholm [95], étendus aux équations intégrales singulières multidimensionnelles. Cette démarche a été étendue à l'élasticité statique et dynamique, notamment par Kupradze [48], [49], qui a défini des potentiels élastiques similaires aux potentiels scalaires et démontré, au moyen d'une approche de régularisation, que les théorèmes de Fredholm sont applicables aux équations intégrales pour les problèmes fondamentaux de l'élasticité.

Les équations intégrales issues de la théorie du potentiel portent sur une inconnue intermédiaire : une distribution (réelle ou fictive) de sources, et sont sont qualifiées d'« indirectes ». Elles sont classiquement utilisées pour la formulation des problèmes fondamentaux (de Dirichlet, Neumann ou Robin). D'autres formulations intégrales, dites « directes », établissent une relation entre les variables physiques (potentiel et flux, déplacement et vecteur-contrainte) sur la frontière du domaine d'étude, et leur applicabilité n'est pas restreinte à des conditions aux limites spécifiques.

Les équations intégrales, directes comme indirectes, doivent bien sûr être résolues numériquement dans la plupart des cas, ce qui a entraîné l'apparition de la méthode des éléments de frontière. Celle-ci repose fortement sur l'adaptation de notions initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis [12] : maillage, interpolation par fonctions à support borné. L'avantage conceptuel des méthodes intégrales sur d'autres techniques comme les éléments finis est le gain d'une dimension d'espace pour la discrétisation : le support des inconnues est la frontière, et non le domaine qu'elle limite.

Domaines d'application des équations intégrales de frontière. La formulation d'équations intégrales de frontière est intimement liée à la présence d'un opérateur différentiel linéaire dans les équations locales vérifiées par les champs physiques ; les équations intégrales indirectes reposent sur un principe de superposition. Les méthodes d'éléments de frontière permettent donc principalement la résolution numérique de problèmes régis par des équations aux dérivées partielles linéaires : équation de Laplace ou de Poisson (problèmes de potentiel scalaire, d'origines physiques très nombreuses), équation des ondes en régime fréquentiel ou temporel (propagation acoustique ou électromagnétique), équations de l'élastostatique ou de l'élastodynamique linéaires, équation biharmonique (flexion des plaques élastiques). Les milieux physiques considérés doivent avoir des caractéristiques homogènes.

Dans le domaine de la Mécanique des solides, les éléments de frontière sont notamment appliqués au calcul des structures élastiques. Dans ce cas, les efficacités relatives (en termes de nombre d'inconnues et de temps de calcul) des méthodes d'éléments finis et d'équations intégrales dépendent notamment du caractère massif ou élancé du solide considéré. De nombreuses applications concernent également les solides fissurés, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile : les difficultés soulevées par le maillage par éléments finis de domaines tridimensionnels fissurés, liées en particulier à la nécessité de raffiner le

maillage autour du front de fissure, rend avantageux l'emploi d'éléments de frontière, en particulier si la fissure se propage.

Problèmes extérieurs. Un des points forts des méthodes fondées sur les équations intégrales est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude. Ce point est particulièrement important en dynamique, où une frontière artificielle crée des réflexions parasites (non physiques) d'ondes sortantes. De plus, l'utilisation de méthodes d'éléments finis ou de différences finies pour les problèmes de propagation d'ondes pose d'autres difficultés liées au fait que la discrétisation du domaine introduit une anisotropie artificielle des propriétés de propagation du milieu modélisé (voir l'étude de Bamberger et coll. [6]). Les problèmes faisant intervenir des milieux considérés comme infinis sont donc prioritairement traités par équations intégrale et éléments finis de frontière, notamment en dynamique. Ceci correspond à des applications pour l'acoustique (propagation en milieu ouvert, aérien ou sous-marin), la simulation des ondes élastiques, par exemple en géophysique, sismologie et génie parasismique, la propagation des ondes électromagnétiques, le calcul des champs élastiques créés par des inclusions, ainsi que tous les problèmes couplés dont l'un des composants occupe un domaine infini (couplage sol/structure ou sol/fluide/structure).

Problèmes avec non-linéarités. Le fait que les formulations intégrales reposent sur la présence d'un opérateur linéaire n'implique pas l'impossibilité de considérer des non-linéarités géométriques ou de comportement. Quand les équations du problème présentent une partie linéaire (comportement élasto-plastique, non-linéarités liées à des conditions aux limites ou des variations du domaine géométrique d'étude), on est conduit à la résolution d'une succession de problèmes linéaires. Les contributions des non-linéarités prennent souvent la forme de termes additionnels de sources (assimilables à des déformations ou contraintes initiales pour le cas de l'élastoplasticité), qui conduisent à des intégrales de domaine connues (le support des inconnues étant toujours la frontière), ce qui fait perdre une partie de l'avantage à formuler un problème sur la frontière plutôt que sur le domaine. Il est difficile à l'heure actuelle de donner un jugement définitif quant à l'efficacité comparée des méthode d'éléments finis et d'équations intégrales pour le traitement de non-linéarités, qui dépend fortement de l'étendue relative de la zone géométrique atteinte par les non-linéarités.

Domaines variables ou inconnus. La méthode des équations intégrales est aussi bien adaptée à la résolution de problèmes dont une variable principale est le domaine, variable ou inconnu : propagation de fissures ou de zones d'endommagement, optimisation de la forme de structures, problèmes inverses à domaine inconnu (identification d'obstacles, d'inclusions, de fissures,...), problèmes à surface libre inconnue (simulation de nappes aquatiques souterraines, ondes de gravité). Cet aspect de l'utilisation des méthodes intégrales est encore dans une phase de développement, et devrait progresser fortement durant les prochaines années.

Eléments finis vs. éléments de frontière. La question de l'efficacité relative des méthodes d'éléments finis et d'éléments de frontière a fait l'objet de nombreux débats. Il est selon nous peu pertinent de poser le problème en ces termes. La méthode des éléments finis occupe une position dominante, son champ d'application étant incontestablement plus vaste que celui des méthodes intégrales, et notre intention dans cet ouvrage n'est

nullement de défendre un point de vue contraire. Les méthodes intégrales présente une supériorité pour le traitement de certaines situations (problèmes linéaires, propagation d'ondes, présence de milieux infinis, frontières mobiles ou inconnues). Il faut donc sans doute voir les deux approches comme complémentaires plus que concurrentes, même si l'intersection de leurs domaines de compétences est loin d'être vide. Ce point de vue est d'ailleurs parfois concrétisé dans certaines méthodes mixtes reposant sur l'utilisation couplée des éléments finis (pour la portion du domaine d'étude siège de non-linéarités ou d'hétérogénéités de comportement) et de frontière (pour la partie complémentaire du domaine).

1.2 Régularisation des équations intégrales

1.2.1 Régularisation pour l'élastostatique

Les formulations intégrales reposent sur l'application d'un théorème de réciprocité analogue à la troisième formule de Green. En élastostatique, l'application du théorème de Maxwell-Betti entre l'état élastostatique (déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})$ et contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})$ au point courant $\boldsymbol{y}$ du domaine élastique Ω) inconnu et une *solution élémentaire* exacte : réponse élastique (déplacement $\boldsymbol{U}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ et contrainte $\boldsymbol{\Sigma}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$) à une force ponctuelle unitaire de direction $\boldsymbol{e}_k$ ($1 \leq k \leq 3$) appliquée en un point-source $\boldsymbol{x}$ fixé. La solution élémentaire doit être définie sur un domaine géométrique *incluant* le donaine d'étude Ω ; elle est connue sous forme analytique pour des configurations géométriques simples : espace élastique infini (solution de Kelvin), semi-infini (solution de Mindlin)... Cette démarche conduit, en présence d'efforts de volume $\boldsymbol{F}$, aux formules de *représentation intégrale* très classiques :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y + \int_{\Omega} F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ t_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_k(\boldsymbol{y}) C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_l(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\Omega} F_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{1.2}$$

valables pour $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω (et également, avec un premier membre nul, pour $\boldsymbol{x}$ extérieur à $\partial\Omega$) ; $\boldsymbol{T}^k$ désigne le vecteur-contrainte associé à la contrainte élémentaire $\boldsymbol{\Sigma}^k$. Seul le choix de sources ponctuelles pour la solution élémentaire permet l'obtention de telles formules de représentation intégrale. L'application des formules ci-dessus nécessite la connaissance préalable, sur la frontière $\partial\Omega$ (de normale unitaire $\boldsymbol{n}$ extérieure à Ω), du déplacement $\boldsymbol{u}$ et du vecteur-contrainte $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$. La résolution d'un problème élastique se fait ainsi en deux étapes :

1. *Résolution à la frontière* par rapport à celles des variables qui ne sont pas prescrites par les conditions aux limites.
2. *Calcul des champs aux points intérieurs* par des formules explicites du type (1.1), (1.2), qui utilisent le résultat de l'étape précédente.

Le caractère ponctuel des sources définissant la solution élémentaire est crucial pour ce qui est de la possibilité d'obtenir des formules de représentation telles que (1.1), (1.2). En contrepartie, les solutions élémentaires sont singulières au voisinage de $\boldsymbol{x}$. Par exemple, pour toute surface fermée S entourant $\boldsymbol{x}$, l'équilibre de la solution élémentaire statique implique :

$$\int_S T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y = -\delta_{ik}$$

et ce pour S aussi petite que l'on veut. Cela indique notamment que $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ présente une singularité en $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}$ du type $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-2}$, donc *non intégrable sur une surface contenant* $\boldsymbol{x}$. Les représentations (1.1), (1.2) ne peuvent alors pas être écrites telles quelles en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, et l'établissement d'équations intégrales d'inconnues $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ passe par un passage à la limite. Le traitement classique de cette étape (voir par exemple Kupradze [48], [49]) conduit à :

- Des *équations intégrales en déplacement* obtenues à partir de (1.1) : le déplacement en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ est relié aux déplacements et vecteurs contrainte sur l'ensemble de la frontière, au moyen d'opérateurs intégraux présentant en $\boldsymbol{x}$ une singularité intégrable au sens des valeurs principales de Cauchy (VPC).
- Des *équations intégrales en tractions*[1] obtenues à partir de (1.2) : le vecteur contrainte en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ est reliée aux déplacements et vecteurs contrainte sur l'ensemble de la frontière. Les opérateurs intégraux présentent au point-source une singularité en partie finie (PF)[2], consécutive à l'application de la loi de Hooke aux équations intégrales en déplacements, qu'il faut donc dérivér sous le signe intégral.

Ces équations intégrales sont dites de *collocation* : on impose le respect strict de l'équation en des points fixés $\boldsymbol{x}$ de la frontière. Les considérations résumées ici valent aussi en élastodynamique, acoustique, théorie du potentiel...

Utilité d'une régularisation. La présence de singularités non-intégrables dans les équations intégrales ne constitue pas un obstacle de principe majeur dans la mesure où le sens donné à la convergence des intégrales est clairement défini. Par contre, cela pose des problèmes pratiques pour leur discrétisation par éléments de frontière, car les méthodes classiques d'intégration numérique, reposant généralement sur un changement de variables (points de Gauss...), ne s'appliquent qu'avec de grandes précautions, sauf à mener à des résultats faux, comme le montrent un certain nombre d'exemples analytiques classiques. De plus, la précision d'évaluation des intégrales singulières est primordiale : elles contribuent aux termes diagonaux de la matrice du problème discret et la rendent même diagonalement dominante (donc bien conditionnée). Diverses approches s'efforcent de prendre en compte ces difficultés :

- *Méthodes particulières d'intégration numérique* (Kutt [50]) : points de Gauss adaptés à l'intégration de certaines VPC, notamment pour des intégrales singulières curvilignes. Certaines situations particulières sont ainsi couvertes.
- *Evaluation directe d'intégrales en VPC et en PF* (Guiggiani et Gigante [35], Guiggiani et coll. [36]) : le changement de variables permettant le passage sur l'élément de référence est appliqué, le passage à la limite qui définit l'intégration en VPC ou PF étant effectué *ensuite*, sur l'élément de référence.
- *Régularisation indirecte :* on utilise des identités auxiliaires vérifiées par les intégrales des solutions élémentaires elles-mêmes. Par soustraction et addition de termes convenablement choisis, la partie la plus singulière est isolée dans un terme dont la valeur est connue.

Mes recherches dans ce domaine concernent la régularisation indirecte des équations intégrales de l'élasticité statique ou dynamique.

Equations intégrales régularisées en déplacement. L'idée principale utilisée est l'évaluation de la singularité à l'aide d'une *identité de corps rigide* (l'équation intégrale

[1] « Traction »étant à prendre au sens anglophone et signifiant « vecteur contrainte »(*traction boundary integral equations*).

[2] Ce type d'équation intégrale est parfois qualifié d'« hypersingulière », notamment dans la terminologie anglo-saxonne.

correspondant à un déplacement rigidifiant statique du solide considéré), qui a été généralisée à un domaine infini [BLB85], [LB85], [Bon86], [Bon86]. Ceci permet de donner très simplement et sans calculs une forme régularisée de l'équation intégrale en déplacements, ne présentant que des singularités intégrales (dites encore *faibles*) :

$$\kappa u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \left\{ [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y = \int_{\Omega} F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \tag{1.3}$$

avec $\kappa = 0$ (Ω borné) ou $\kappa = 1$ ($\mathbb{R}^3 - \Omega$ borné). L'effet régularisant du terme $[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]$ repose sur l'hypothèse de régularité $\boldsymbol{u} \in C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$, qui conditionne également la convergence au sens de la valeur principale de Cauchy en l'absence de régularisation (Kupradze [49]). La formulation ci-dessus est équivalente à l'identité classique de Somigliana mais se prête mieux aux applications numériques.

Représentation régularisée du tenseur des contraintes à la frontière. La résolution du problème de l'équilibre d'un solide élastique fissuré est la motivation initiale pour l'étude des équations intégrales hypersingulières. En effet les équations intégrales en déplacement appliquées à ces situations présentent un phénomène dit de *dégénerescence* (Cruse [28]) : les données en efforts appliqués sur les lèvres de la fissure (provenant généralement de l'utilisation du principe de superposition pour une fissure supposée libre de contraintes) n'y apparaissent pas explicitement. On est alors conduit à écrire une équation intégrale en tractions, de façon à faire apparaître explicitement ces données.

La régularisation de ces équations intégrales en traction, singulières en PF, et plus généralement celle de la représentation intégrale du tenseur des contraintes à la frontière, nécessite deux étapes. Une transformation analytique préliminaire (intégration par parties au moyen de variantes de la formule de Stokes) de l'équation intégrale en traction conduit à une forme singulière en VPC. Cette version est ensuite régularisée par une variante de l'approche indirecte précédente, dans laquelle une certaine intégrale singulière résiduelle doit être évaluée. L'identité de corps rigide n'est cette fois pas applicable à cette intégrale, qui doit être transformée analytiquement par de nouvelles intégrations par parties [Bon86], [BB87], [BB87], [BB93] afin d'être réécrite sous forme intégrable. On obtient ainsi, par exemple, une forme régularisée de la représentation intégrale de $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$, ne présentant que des singularités intégrales :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ [t_k(\boldsymbol{y}) - t_k(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [D_{bl} u_k(\boldsymbol{y}) - D_{bl} u_k(\boldsymbol{x})] C_{ijab} \Sigma_{kl}^a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\Omega} F_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \\ &+ t_k(\boldsymbol{x}) A_{ij}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - D_{bl} u_k(\boldsymbol{x}) C_{ijab} A_{kl}^a(\boldsymbol{x},\partial\Omega)\end{aligned} \tag{1.4}$$

où $D_{ij} f = n_i f_{,j} - n_j f_{,i}$ est un opérateur différentiel tangentiel sur f. L'effet régularisant des termes $[D_{bl}\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{y}) - D_{bl}\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x})]$ et $[\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})]$ repose sur les hypothèse de régularité plus contraignantes $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}) \in C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$. Le terme résiduel $A_{ij}^k(\boldsymbol{x}, S)$ est :

$$A_{ij}^k(\boldsymbol{x}, S) = (VPC) \int_S \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \tag{1.5}$$

Un des résultats de la thèse [Bon86] fut précisément de donner de l'intégrale ci-dessus, *a priori* non convergente au sens ordinaire, une nouvelle expression, intégrable et explicite, au moyen de manipulations analytiques (intégrations par parties avec $\boldsymbol{x}$ maintenu hors

de S suivie d'un passage à la limite $\boldsymbol{x} \to S$), pour la solution élémentaire élastostatique de Kelvin. Ce résultat[3], reporté dans (1.4), achève la régularisation.

Prendre le produit contracté du résultat (1.4) avec $n_j(\boldsymbol{x})$ permet d'obtenir les équations intégrales en traction. Pour le cas particulier des fissures planes en milieu infini élastique ($\partial\Omega = \Gamma$ de normale $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$), on obtient la relation suivante entre efforts $\pm\boldsymbol{t}$ appliqués sur les lèvres de la fissure et saut de déplacement $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-$ à travers Γ :

$$
\begin{aligned}
t_3(\boldsymbol{x}) &= \pm\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\left\{\int_\Gamma [\phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{x})]\, r_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma)\right\} \\
t_\beta(\boldsymbol{x}) &= \pm\frac{\mu}{8\pi(1-\nu)}\int_\Gamma (1-2\nu)\left\{r_{,\beta}[\phi_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{x})] - r_{,\alpha}[\phi_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{x})]\right\}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \\
&\quad \mp \frac{3\mu}{8\pi(1-\nu)}\int_\Gamma 3 r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma}[\phi_{\alpha,\gamma}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\alpha,\gamma}(\boldsymbol{x})]\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \\
&\quad \pm \frac{\mu(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}\left[\phi_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\beta(\boldsymbol{x},\Gamma) - \phi_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma)\right] \\
&\quad \mp \frac{3\mu}{8\pi(1-\nu)}\phi_{\alpha,\gamma}(\boldsymbol{x}) J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x},\Gamma)
\end{aligned}
$$

avec

$$
I_\alpha(\boldsymbol{x},S) = -\int_{\partial S}\nu_a\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \qquad J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x},S) = \delta_{\alpha\beta} I_\gamma(\boldsymbol{x},S) + \delta_{\beta\gamma} I_\alpha(\boldsymbol{x},S) - \int_{\partial S} r_{,\alpha} r_{,\beta}\nu_{,\gamma}\frac{\mathrm{d}s_y}{r}
$$

($r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{\nu}$: normale extérieure à $\partial\Gamma$, (μ,ν) : module de cisaillement et coefficient de Poisson isotropes) qui s'avère être une forme encore plus régularisée de l'équation intégrale proposée par Bui [20], qui elle-même est la forme intégrale VPC de l'équation hypersingulière.

1.2.2 Nouvelle interprétation du caractère singulier des équations intégrales.

La démarche était initialement posée en termes de régularisation de formulations intégrales classiques, présentant a priori une singularité non intégrable au sens usuel. Tirant les conséquences logiques de l'approche de régularisation indirecte ainsi développée, il a été montré [BB93] qu'elle permet en fait d'évacuer complètement la nécessité d'introduire a priori des convergences très particulières, VPC ou PF, pour établir les équations intégrales.

Pour montrer ceci, l'idée principale consiste à utiliser un passage à la limite, dont on donne brièvement le principe : pour un point $\boldsymbol{x}$ fixé de $\partial\Omega$, on considère, pour tout $\epsilon > 0$, un voisinage connexe $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = v_\varepsilon$ de $\boldsymbol{x}$, dit *voisinage d'exclusion*, de diamètre $\leq \epsilon$ et de forme quelconque (voir figure 1.1). On introduit alors, selon la figure 1.1, $\Omega_\varepsilon = \Omega - v_\varepsilon$, $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial v_\varepsilon$, $e_\epsilon = \partial\Omega \cap v_\varepsilon$. Les représentations (1.1), (1.2) sont alors considérées pour le domaine Ω_ε de frontière $\partial\Omega_\epsilon = (\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon)$.

On fait subir aux intégrales non-singulières (puisque $\boldsymbol{x} \notin \Omega_\varepsilon$ par construction), des transformations analytiques bien choisies, permettant de leur donner une forme régularisée. Cette étape est suivie du passage final à la limite $\varepsilon \to 0$, qui se réduit à constater la convergence d'intégrales faiblement singulières. Ce traitement conduit à nouveau aux résultats (1.3), (1.4).

[3]non reproduit ici car la formule est lourde.

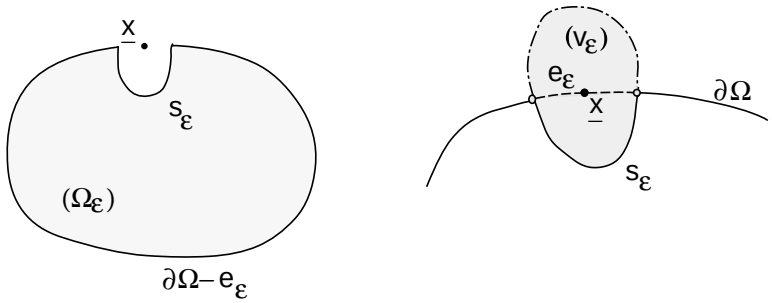


FIG. 1.1: Voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(x)$ et autres notations utilisées pour le passage à la limite $\varepsilon \to 0$.

Commentaires. Cette présentation met en évidence le fait que le caractère fortement singulier ou hypersingulier des équations intégrales n'est qu'apparent. En effet, la technique de passage à la limite évoquée permet de tout mettre sous forme intégrable, sans qu'à aucun moment n'intervienne de forme spéciale (VPC,PF) de convergence d'intégrales.

Ce point de vue n'apporte rien de plus sur le plan pratique par rapport à la méthode antérieure conduisant aux formulations (1.3), (1.4). En revanche, sur le plan fondamental, il est plutôt rassurant de voir que les équations (intégrales) de l'élasticité ne sont pas crucialement dépendantes d'un type très particulier de convergence d'intégrales très singulières.

1.2.3 Extension de la régularisation à l'élastodynamique

L'approche de régularisation indirecte a été généralisée aux équations intégrales de l'élastodynamique, dans le domaine fréquentiel aussi bien que temporel (méthode des potentiels retardés) [Bon89], [BB93]. Les formulations régularisées obtenues reposent crucialement sur l'égalité des singularités entre les solutions élémentaires dynamique et statique. Celle-ci, facilement explicable par un argument mécanique, a été explicitement mise en évidence au moyen de développements par rapport à $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ autour de $r = 0$, en série infinie pour le domaine fréquentiel [Bon86] ou limités pour le domaine temporel [Bon89]. On peut alors se ramener aux résultats obtenus en statique comme (1.3), (1.4) par soustraction et addition à la solution élémentaire dynamique de sa contrepartie statique.

La maîtrise des problèmes liés aux singularités en statique permet ainsi, par contrecoup, de résoudre également le problème de régularisation en dynamique, et joue donc un rôle très important.

1.2.4 Régularisation pour les problèmes scalaires

L'approche de régularisation indirecte, traitée dans le cadre principal de l'élastodynamique tridimensionnelle, a pu être facilement adaptée à d'autres situations similaires mais mathématiquement un peu plus simples. On a ainsi obtenu, comme « sous-produits »directs, des équations intégrales régularisées pour les problèmes scalaires ou vectoriels faisant intervenir le laplacien (potentiel, acoustique et ondes, élasticité antiplane, torsion...) [Bon86], [KBM92], [Bon93]. En effet, le parallélisme avec l'élasticité (structure de l'identité de récriprocité, propriétés des solutions élémentaires) est complet.

1.2.5 Commentaires

La régularisation, sous une forme ou une autre (incluant des méthodes « propres »d'évaluation directe d'intégrales en VPC ou PF), est une étape indispensable sur le plan pratique. Ce thème a suscité une littérature assez abondante, et continue de le faire en ce qui concerne les équations intégrales « hypersingulières »(voir par exemple Krishnasamy, Rizzo & Rudolphi [47], Nishimura & Kobayashi [66], Sladek & Sladek [85], Toh & Mukherjee [94]). L'approche résumée ici, qui a contribué à la compréhension de ces aspects, était sous-tendue par les considérations suivantes :

- *Généralité des formulations :* celles obtenues sont valables pour l'élasticité tridimensionnelle pour des domaines quelconques (y compris fissurés), finis ou infinis, ainsi que des conditions aux limites quelconques.
- *Généralité de la mise en oeuvre numérique :* les résultats obtenus ne sont pas liés à un type particulier d'interpolation de la géométrie ou des inconnues, et sont applicables à toutes les interpolations classiques.
- *Calculabilité effective de tous les termes* : les opérateurs intégraux sont réécrits en termes d'intégrales convergentes au sens usuel, et les intégrales correspondantes sont donc calculables par des méthodes numériques classiques, contrairement aux formulations intégrales classiques non régularisées.

1.3 Mise en oeuvre numérique de la régularisation

Les équations intégrales avec régularisation indirecte ont fait l'objet de développements informatiques pour l'élastodynamique (domaine fréquentiel) et l'acoustique tridimensionnelles pour des domaines finis ou infinis [Bon86], [BV87], [DB89a], [DB89b] (programme Tridyn développé pour EDF puis Astrid pour le LMS). Ceux-ci ont été conduits dans le cadre, le plus fréquemment rencontré dans la littérature, de la discrétisation par *collocation*, consistant à imposer le respect d'une équation intégrale comme (1.3) en un nombre fini de *points de collocation*[4]

Cette étape a contribué à d'autres travaux évoquées dans ce mémoire : reconstruction de vitesses vibratoires de structures (section 2.3), identification d'obstacles rigides en acoustique (section 4.3), approche « θ-intégrale »en mécanique linéaire de la rupture (chapitre 3.3).

1.3.1 Mise en oeuvre numérique de la régularisation

Au niveau numérique, l'avantage de la régularisation doit être concrétisé au stade de l'intégration numérique singulière, au moyen d'une procédure spéciale, comme suit.

Un élément de frontière E est décrit géométriquement au moyen d'un paramétrage $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \Delta \to \boldsymbol{y} \in E$ sur l'élément de référence Δ, en termes de N fonctions de forme N_m et noeuds $\boldsymbol{y}_m$:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{m=1}^{N} N_m(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{y}^k \tag{1.6}$$

La procédure d'intégration singulière est nécessaire quand le point singulier $\boldsymbol{x}$ est sur E. Si $\boldsymbol{\eta} \in \Delta$ désigne l'antécédent de $\boldsymbol{x} \in E$ par le paramétrage de l'élément, un système

[4]Le terme « collocation »désigne, d'une façon générale, le fait d'imposer le respect exact d'une relation dépendant d'une variable continue pour un nombre fini de valeurs de cette variable.

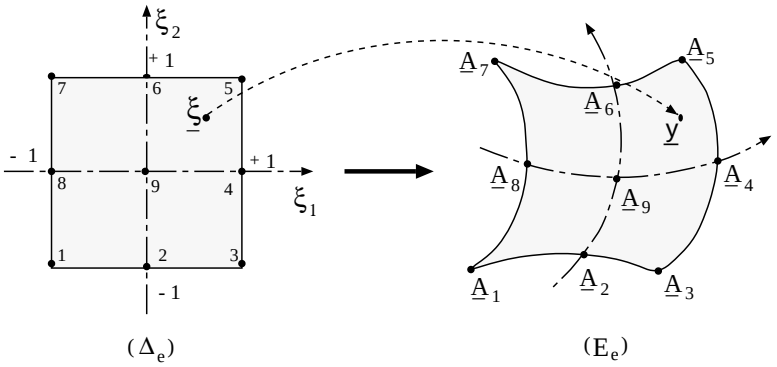


FIG. 1.2: Paramétrage d'un élément de frontière quadrangulaire à 9 noeuds

de coordonnées polaires sur Δ, (ρ, α) centré en $\boldsymbol{\eta}$, est introduit, posant :

$$(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2) + \rho(\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad \mathrm{d}\xi = \rho d\rho d\alpha \tag{1.7}$$

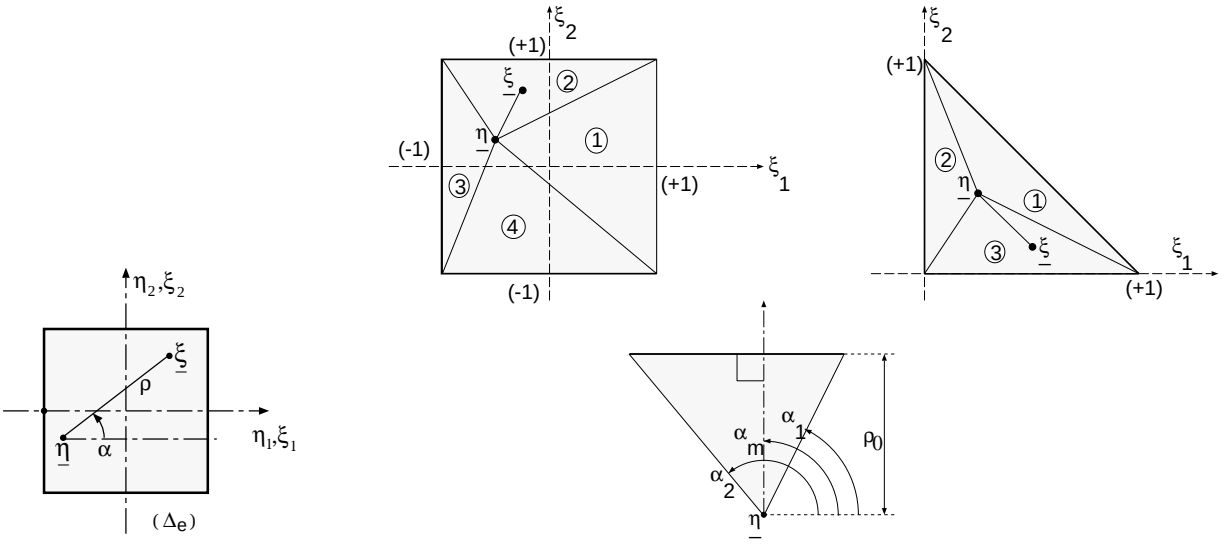


FIG. 1.3: Elément de référence : coordonnées polaires (gauche), subdivision en triangles pour les intégrations singulières (droite).

L'idée principale développée à ce stade réside dans la construction, pour toute fonction de forme polynômiale $N_m(\xi_1, \xi_2)$, d'une *fonction de forme réduite* $\hat{N}_m(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})$ telle que :

$$N_m(\boldsymbol{\xi}) - N_m(\boldsymbol{\eta}) = \rho \hat{N}_m(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})$$

de sorte que ρ apparaisse en facteur de la discrétisation de $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ et du terme $[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]$, qui joue un rôle essentiel dans le caractère régularisé de (1.3)[5] :

$$[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})] = \rho \sum_{m=1}^{N} \hat{N}_m(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{u}^m \qquad r = \rho r_0 = \rho \left| \sum_{m=1}^{N} \hat{N}_m(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{y}_m \right|$$

[5]On suppose pour simplifier la présentation une discrétisation isoparamétrique, mais la procédure présentée est clairement applicable au cas non isoparamétrique.

où le facteur $1/r_0$ est régulier en $\rho = 0$. Les solutions élémentaires $\boldsymbol{\Sigma}^k$ et $\boldsymbol{U}^k$ sont alors mises sous la forme :

$$\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\rho^2}\hat{\Sigma}_{ij}^k(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \qquad U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\rho}\hat{U}_i^k(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})$$

où $\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ sont non-singuliers en $\rho = 0$. Ce qui précède permet par exemple d'écrire les intégrales singulières typiques issues de la discrétisation de (1.3) sous une forme totalement régulière dans le système (ρ, α) :

$$\int_E [N_m(\boldsymbol{\xi}) - N_m(\boldsymbol{\eta})]T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi = \int_E \hat{N}_m(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})\hat{T}_i^k(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})J(\boldsymbol{\xi})d\rho d\alpha$$

$$\int_E N_m(\boldsymbol{\xi})U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi = \int_E N_m(\boldsymbol{\xi})\hat{U}_i^k(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})J(\boldsymbol{\xi})d\rho d\alpha$$

La description de l'élément de référence Δ en coordonnées polaires (ρ, α) utilise une subdivision en triangles (figure 1.3). Le calcul numérique effectif des intégrales élémentaires nécessite alors un dernier changement de variable $(\rho, \alpha) \to (v_1, v_2) \in [-1, 1]$, qui permet d'appliquer la méthode des points de Gauss ordinaires dans le système (v_1, v_2).

1.3.2 Commentaires.

Cette procédure d'intégration singulière, qui est une des idées développées dans la thèse [Bon86], concrétise l'opération de régularisation des équations intégrales. Elle exploite ainsi les avantages de la méthode des points de Gauss : précision, stabilité, évite les difficultés liées aux valeurs principales de Cauchy et permet *in fine* une évaluation fiable et précise des intégrales singulières. La technique évoquée est générale en ce qu'elle permet d'utiliser sans problème toutes les fonctions de forme courantes, pour la représentation aussi bien de $\partial\Omega$ (éléments de frontière courbes) que des champs inconnus (interpolations de degré élevé). Dans son principe, elle s'applique aussi aux équations intégrales « hypersingulières »dérivées de (1.4).

Le caractère singulier des équations intégrales est, en définitive, un avantage. En effet, les intégrales élémentaires singulières tendent à rendre dominants les termes proches de la diagonale dans la formulation matricielle discrétisée, et donc à produire un système linéaire final bien conditionné. Par conséquent, si on sait évaluer numériquement avec précision les intégrales singulières, on profite pleinement de l'avantage du bon conditionnement du système linéaire. Dans le cas contraire, une mauvaise évaluation des intégrales singulières est sources d'erreurs importantes, car les termes dominants de la matrice sont altérés. L'importance d'une évaluation correcte de ces intégrales, et l'intérêt de la régularisation complétée par la technique d'intégration singulière présentée, apparaissent donc clairement.

Cas des équations intégrales hypersingulières. Le fait que l'équation (1.4) nécessite $\boldsymbol{u} \in C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$ impose certaines restrictions dans l'emploi des méthodes de collocation, indépendantes de la stratégie suivie pour évaluer les intégrales singulières :

- Soit les points de collocation sont intérieurs aux éléments (avec, surtout en 3D, difficulté de faire coincider le nombre d'équations et d'inconnues et donc obligation de résoudre le problème discrétisé au sens des moindres carrés)
- Soit on utilise des éléments garantissant une interpolation $C^{1,\alpha}$ de la géométrie et des inconnues (faisable en 2D mais difficile en 3D).

car les éléments de frontière classiques ne donnent qu'une régularité $C^{0,\alpha}$ de $\boldsymbol{u}$ à la frontière entre deux éléments contigus. Ceci peut créer de réelles difficultés pour l'application aux problèmes tridimensionnels.

1.3.3 Exemple numérique

A titre d'illustration du fonctionnement de la méthode des équations intégrales régularisées, considèrons l'exemple [Bon86] de la diffraction d'une onde plane élastique par une cavité sphérique de rayon R, centrée à l'origine, à surface libre ($\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ sur $\partial\Omega$) et située dans un massif élastique infini Ω. La cavité est attaquée par une onde plane longitudinale incidente $\boldsymbol{u}^I(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_0 e^{ik_L y_3}\boldsymbol{e}_3$ se propageant selon $\boldsymbol{e}_3$. Pour calculer l'effet de la présence de la cavité, on décompose le déplacement total $\boldsymbol{u}^{total}$ en $\boldsymbol{u}^{total} = \boldsymbol{u}^I + \boldsymbol{u}$. L'inconnue $\boldsymbol{u}$ satisfait sur $\partial\Omega$ la condition de Neumann $\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{I}})$. Ce problème a une solution analytique connue (Eringen & Suhubi [32]).

Grâce à la symétrie du domaine par rapport aux trois plans de coordonnées, le maillage par éléments de frontière ne concerne qu'un octant de sphère (voir section 1.5). Deux maillages M_1 (3 éléments, 16 noeuds) et M_2 (12 éléments, 49 noeuds), employant l'élément quadrilatéral à 8 noeuds sont utilisés.

Les écarts nodaux maximaux Δu_{max} et les écarts en moyenne quadratique Δu_{moy} relevés, pour quelques valeurs du nombre d'onde adimensionnel $k_L R = \omega R/c_L$, sont :

$k_L R$	1.		2.	2.8	3.
Δu_{max}	3.5 (M_1)	0.43 (M_2)	1.5 (M_2)	5.4 (M_2)	7.7 (M_2)
Δu_{moy}	2.0 (M_1)	0.19 (M_2)	0.68 (M_2)	2.2 (M_2)	3.5 (M_2)

TAB. 1.1: Ecart entre déplacement $u\ |_{\partial\Omega}$ exact et calculé par éléments de frontière

La figure 1.4 représente les valeurs obtenues pour le module des composantes u_r, u_θ de $\boldsymbol{u}$ sur la surface de la cavité ($r/R = 1$) et en champ lointain ($r/R = 100$), (r, θ, ϕ) désignant des coordonnées sphériques centrées à l'origine et d'axe de symétrie $\boldsymbol{e}_3$ et avec le maillage M_2 ; le bon accord entre solutions analytique (traits pleins) et numérique (symboles) est apparent.

Le tableau 1.2 montre l'influence de ω (ou de la longueur d'onde) sur les résultats numériques. Plus précisément, si n désigne le nombre de côtés d'éléments (mesurés le long du diamètre de la sphère) par longueur d'onde transversale, ce tableau met en évidence un seuil sur n en-dessous duquel la précision des résultats numériques se dégrade assez rapidement ; ce seuil est d'environ $n = 3$. Cela signifie que, pour notre choix d'élément de frontière (quadrangle à 8 noeuds), il faut prévoir au minimum 3 côtés d'éléments, ou 7 noeuds, par longueur d'onde. Ces résultats numériques correspondent à $k_T R \approx 8/3$ (maillage M_1) et $k_T R \approx 4/3$ (maillage M_2).

1.4 Propagation dynamique de fissure simulée par potentiels retardés régularisés

Les potentiels retardés régularisés ont été appliqués, dans un travail réalisé en collaboration avec M. KOLLER (ingénieur détaché à l'IRIGM, Grenoble, séjour financé par l'Etat suisse) et R. MADARIAGA (IPG Paris), à la modélisation numérique de la propagation

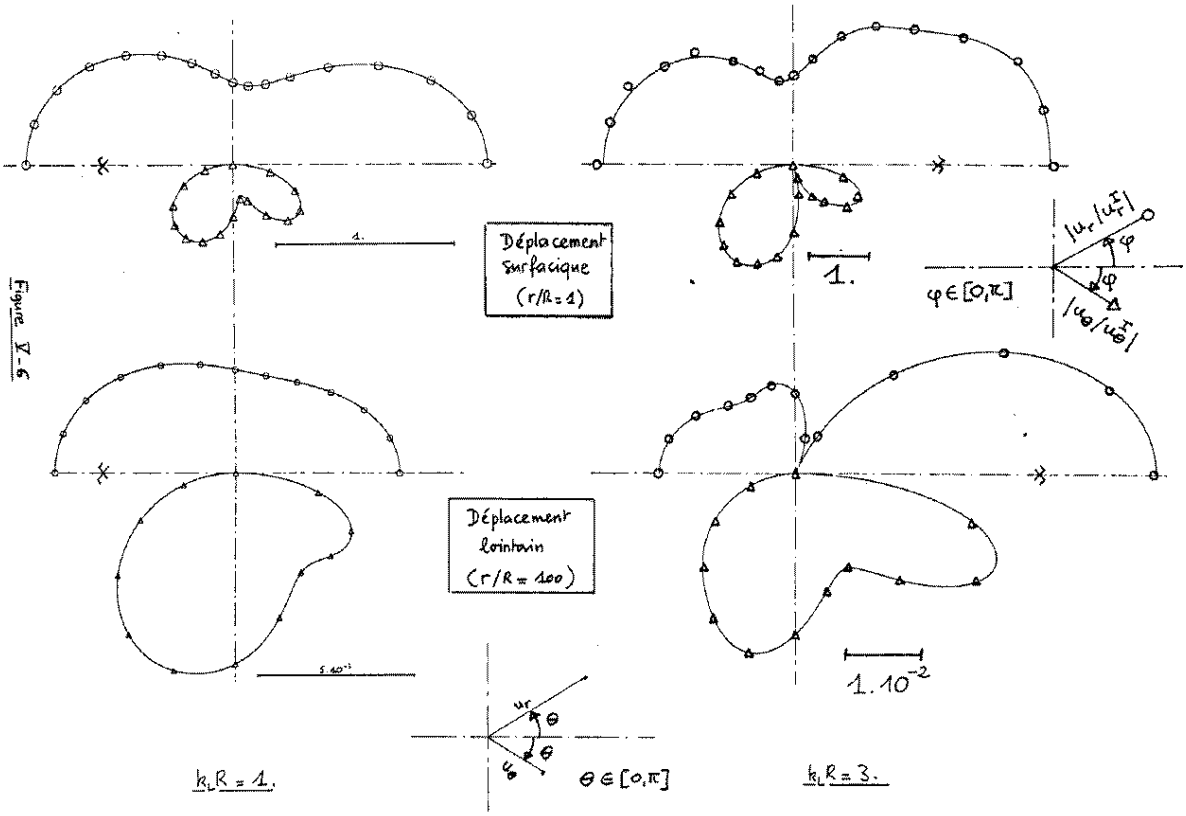


FIG. 1.4: Diffraction d'une onde plane élastique L par une cavité sphérique (d'après [Bon86])

n	Maillage M_1			Maillage M_2		
	Δu_{max}	Δu_{moy}	$[\text{Cond}\boldsymbol{K}]^{-1}$	Δu_{max}	Δu_{moy}	$[\text{Cond}\boldsymbol{K}]^{-1}$
3.34	2.1	1.8	0.11	1.4	0.79	0.032
3.	2.1	1.49	0.10	2.7	1.59	0.025
2.73	2.4	1.72	0.094	6.2	3.02	0.003
2.5	5.7	3.42	0.10	10.2	5.64	0.014
2.31	11.9	6.98	0.10	19.	10.4	0.004

TAB. 1.2: Relation entre finesse de maillage et longueur d'onde ($\boldsymbol{K}$ désigne la matrice associée à l'opérateur intégral discrétisé)

dynamique d'une fissure (les développements numériques ont été effectués par M. Koller sous mon suivi).

Ce travail reprend et applique, en le spécialisant au cas d'une fissure courbe en milieu infini et en déformation antiplane, les équations intégrales régularisées en traction (« hypersingulières ») établies dans [Bon89] pour l'élastodynamique en domaine temporel. La situation antiplane correspond à un problème scalaire (inconnue ϕ) ; la célérité c des ondes élastiques est dans ce cas unique. De plus, une solution exacte (Kostrov [46]) est connue pour la propagation d'une fissure semi-infinie suivant le critère mentionné plus bas. Ce travail avait été entrepris comme prélude à d'autres simulations pour des situations plus complexes et plus réalistes.

Equation intégrale régularisée en traction. Les efforts de contact $t^{\pm} = \sigma_{3\beta} n_\beta$ appliqués sur les lèvres $C^{\pm}$ d'une fissure courbe C sont reliés au saut $\phi(\boldsymbol{y}, t)$ du déplacement antiplan à travers C par l'équation intégrale régularisée [KBM92] :

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{\mu} t^{\pm}(\boldsymbol{x}, t) = \tau_\beta(\boldsymbol{x}) \int_{\Delta C(\boldsymbol{m}x)} \frac{y_\beta - x_\beta}{c^2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial s}(\boldsymbol{y}, t - r/c) - \frac{\partial \phi}{\partial s}(\boldsymbol{x}, t) \right] \mathrm{d}s_y \\
+ \frac{\partial \phi}{\partial s}(\boldsymbol{x}, t) \tau_\beta(\boldsymbol{x}) \left\{ [\tau_\beta \mathrm{Log} r]_{\mathbf{A}'}^{\mathbf{B}'} + \int_{\Delta C} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{R} \mathrm{Log} r \right] n_\beta(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}s_y \right\} \\
- \tau_\beta(\boldsymbol{y}) \frac{1}{c^2} \tau_\beta(\boldsymbol{x}) \int_C \int_{r/c}^{t} \ddot{\phi}(\boldsymbol{y}, t - \tau) \frac{d\tau}{(\tau^2 - r^2/c^2)^{1/2}} \, \mathrm{d}s_y \\
+ \tau_\beta(\boldsymbol{x}) \int_C \int_{r/c}^{t} \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial s}(\boldsymbol{y}, t - \tau) \frac{y_\beta - x_\beta}{c^2 (\tau^2 - r^2/c^2)^{1/2} [\tau + (\tau^2 - r^2/c^2)^{1/2}]} d\tau \, \mathrm{d}s_y \\
+ \tau_\beta(\boldsymbol{x}) \int_{C - \Delta C(\boldsymbol{m}x)} \frac{y_\beta - x_\beta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial s}(\boldsymbol{y}, t - r/c) \, \mathrm{d}s_y \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

où, par commodité, une portion $\Delta C = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}')$ contenant $\boldsymbol{x}$ est isolée (par exemple ΔC est l'union des éléments de frontière contenant $\boldsymbol{x}$).

Simulation numérique d'une propagation dynamique de fissure. Dans cet exemple [KBM92], une fissure droite C de longueur initiale ℓ_0, située sur l'axe $\boldsymbol{e}_1$ est chargée par un cisaillement antiplan (mode III) $\boldsymbol{T}^{\pm}(\boldsymbol{y}) = \pm \tau H(t) \boldsymbol{e}_3$, τ étant une constante et $H(t)$ la fonction échelon. La propagation de l'extrémité droite de C est régie par le critère $K_{III} = K_{III}^c$, égalité du facteur d'intensité de contraintes dynamique en mode III et de la ténacité du matériau élastique ; l'extrémité gauche est supposée fixe. On ne considère que la propagation de l'extrémité droite de C, et on note $\ell(t)$ la longueur de C à l'instant t ($\ell(0) = \ell$).

La fissure est discrétisée en J éléments d'égale longueur Δx, et l'intervalle d'étude $t \in [0, T]$ est découpé en I pas de temps égaux Δt. Dans l'équation intégrale (1.8), une discrétisation linéaire par morceaux en espace et en temps est adoptée pour l'inconnue $\phi(\boldsymbol{y}, t)$. La collocation de l'équation intégrale est faite aux milieux d'éléments et aux instants $t = i\Delta t$, $i = 1, 2, \ldots I$. Le ratio $c\Delta t / \Delta x$ est choisi égal à $1/2$, de manière à calculer analytiquement la plupart des intégrales élémentaires permettant la construction de l'équation de convolution discrète. Le système d'équations linéaires qui doit être résolu

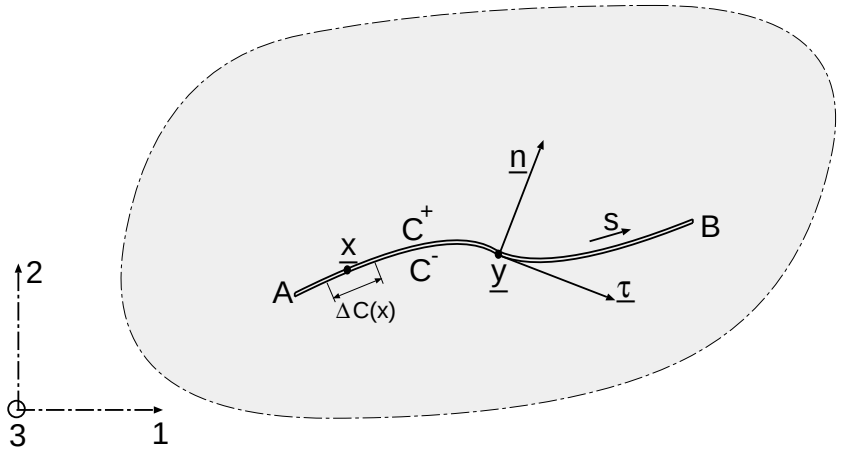


FIG. 1.5: Fissure courbe sous chargement antiplan.

à chaque pas de temps a ainsi $J-1$ inconnues et J équations, et est donc traité au sens des moindres carrés (bibliothèque de programmes LINPACK [30]).

La propagation est simulée par ajout d'un nouvel élément si le critère de propagation est vérifié, de sorte que I augmente au long de l'intégration en temps. Les résultats numériques obtenus pour la propagation de l'extrémité droite (figure 1.6) sont en accord excellent avec la solution exacte. Ils sont également meilleurs que ceux obtenus antérieurement dans [96] par différences finies, en particulier pour ce qui est de la phase d'accélération initiale.

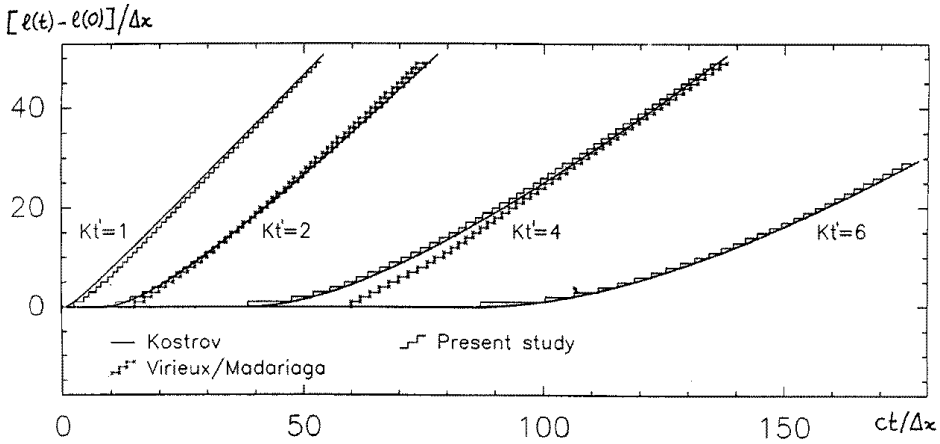


FIG. 1.6: Position $\ell(t)$ de la pointe de la fissure au cours du temps : résultats numériques de [KBM92] (équations intégrales), comparés avec ceux de [46] (analytiques) et [96] (différences finies). Les résultats sont normalisés, avec $K' = K^c_{III}/(\mu\sqrt{\pi\Delta x})$.

Ce travail a fait l'objet de publications communes [KBM92], [BK91]. Considéré comme une étape de faisabilité, il a contribué à inciter R. MADARIAGA et ses collègues à poursuivre dans cette direction pour la modélisation de situations plus directement liés à la sismologie ; ils ont par exemple incorporé la prise en compte de non-linéarités de friction ([25] et thèse d'A. COCHARD à l'IPGP).

1.5 Utilisation des symétries géométriques.

Dans le cas d'un domaine vérifiant des symétries géométriques, se pose la question de la réduction d'un problème aux limites linéaire à une « cellule de symétrie », sous-domaine minimal permettant de reconstituer le domaine initial par l'action des éléments du groupe de symétrie, et ce en présence d'un chargement non symétrique. Ce problème a été étudié de façon rigoureuse et générale, dans le cadre des formulations variationnelles débouchant sur les méthodes d'éléments finis, par A. BOSSAVIT [17]. L'analyse du problème et la déduction des règles algorithmiques permettant l'utilisation pratique des symétries géométriques dans une grande variété de cas y repose sur la théorie de la représentation des groupes finis ; c'est un bel exemple de mathématiques pures appliquées.

Cette question, qui a pourtant une grande importance pratique, était a peu près ignorée de la littérature consacrée aux méthodes d'équations intégrales. La transposition de l'approche d'A. BOSSAVIT aux méthodes intégrales est pourtant possible, comme cela est montré dans [Bon91], en se limitant aux groupes de symétrie commutatifs[6]. La « cellule

[6]La prise en compte de groupes de symétrie non commutatifs, comme les combinaisons de symétries

de symétrie »est alors une sous-frontière permettant la reconstitution de la frontière globale par action du groupe de symétrie. Seule difficulté à résoudre, cette transposition est menée de manière à éviter la discrétisation des plans de symétrie. Elle conduit à poser des équations intégrales dont le support géométrique est une « cellule de symétrie »et dans lesquelles le caractère symétrique ou antisymétrique des variables élastiques est pris en compte par l'intermédiaire de coefficients issus de la théorie de représentation linéaire des groupes finis.

Les équations intégrales ainsi obtenues [Bon91], non présentées ici, sont programmées dans ASTRID pour les symétries par rapport aux plans de coordonnées et des chargements non symétriques. Cette approche permet ainsi de réduire la discrétisation à la plus petite « cellule de symétrie »(soit un huitième de frontière initiale pour trois plans de symétrie). Les *types* de conditions aux limites sur les images de la cellule de symétrie par le groupe doivent se correspondre, mais pas nécessairement leur *valeur*.

Exemple numérique en élastodynamique. Un massif élastique infini contient une cavité sphérique, de rayon unité, chargée par des efforts de contact $\boldsymbol{t}^D = (A + B\sin\theta - C\sin\theta e^{i\phi})e^{-i\omega t}$ (A, B, C : constantes complexes, θ, ϕ : angles sphériques). Les constantes élastiques et la pulsation ω sont choisis de façon à avoir $k_L = 0.5345, k_T = 1$. Ce chargement ne présente pas de symétrie particulière ; il est par ailleurs une combinaison linéaire des modes sphériques (0,0), (1,0), (1,1) connus analytiquement (Eringen & Suhubi [32]).

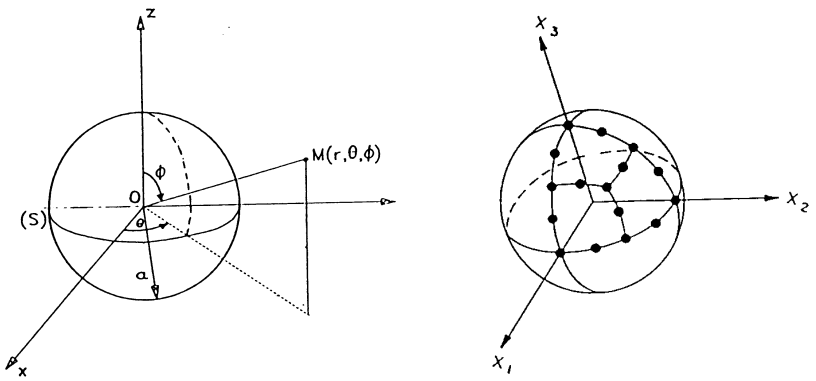


FIG. 1.7: Cavité sphérique et coordonnées sphériques (à gauche) ;
Maillage M_1 (à droite).

F84

On reprend les maillages M_1, M_2 d'un octant de sphère définis au 1.3.1. Les huit sous-problèmes correspondant à la décomposition, définie par Bossavit [17], d'un chargement quelconque en parties symétriques et antisymétriques représentent, après repérage des degrés de liberté nuls par symétrie ou antisymétrie, 33, 30, 30, 30, 26, 26, 26 et 21 inconnues scalaires pour le maillage M_1 et 120, 113, 113, 113, 105, 105, 105 et 96 pour le maillage M_2. En l'absence de ce repérage, chacun des huit sous-problèmes aurait 48 (maillage M_1) ou 147 (maillage M_2) inconnues.

La résolution sans prise en compte des symétries utilise les maillages M_3 (24 éléments, 74 noeuds et 222 inconnues scalaires) et M_4 (96 éléments, 290 noeuds et 870 inconnues scalaires) de la sphère entière obtenus par reproduction de M_1, M_2 respectivement sur les 7 octants restants.

planes et cycliques, serait possible ; l'analyse d'A. Bossavit inclut cette possibilité.

Les erreurs relatives en moyenne quadratique relevées pour le déplacement sur la frontière de la cavité sont :

$$e = 6.5 \times 10^{-3} \quad (M_1, M_3) \qquad 5.2 \times 10^{-4} \quad (M_2, M_4)$$

L'intérêt principal de cet exemple est bien sûr l'étude de l'efficacité de la prise en compte des symétries géométriques. La majeure partie du temps de calcul est consacrée aux étapes d'assemblage et de résolution. Le tableau 1.3 présente les temps de calcul (relevés sur une station de travail de type DN400) pour l'assemblage, la résolution, le calcul de la représentation intégrale en un point.

	Assemblage (s)	Résolution (s)	Post-traitement (s)
M_1	70.7	4.86	6.01
M_3	210.	171.	3.49
M_2	488.	184.	23.3
M_4	1786.	9430.	13.6

TAB. 1.3: Temps de calcul pour les quatre maillages M_1, M_2, M_3, M_4.

Le rapport des temps d'assemblage avec et sans usage de symétries vaut environ 1/4 au lieu de la valeur idéale 1/8. Ceci semble dû à la présence d'opérations supplémentaires (pondérations de matrices élémentaires par des coefficients différents pour chaque sous-problème) et à la complexité accrue de la boucle d'assemblage.

Le rapport des temps de résolution avec et sans usage de symétries vaut environ 1/35 (M_1, M_3) et 1/51 (M_2, M_4), s'approchant ainsi de la valeur idéale 1/64 pour le maillage le plus fin.

Le temps de post-traitement est plus important pour M_1 que pour M_3 (idem. avec M_2 et M_4). En cas d'utilisation de symétrie (maillages M_1, M_2), $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$ sont en fait évalués simultanément aux 8 images of $\boldsymbol{x}$ par le groupe de symétrie, mais en $\boldsymbol{x}$ seulement avec M_3, M_4.

1.6 Formulations variationnelles intégrales pour les problèmes aux limites mixtes

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de la résolution numérique d'équations intégrales par *collocation* de formulations similaires à (1.3), (1.4) en un nombre fini de points $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Quoique largement majoritaire dans la littérature, cette voie n'est ni unique ni même clairement la meilleure. En effet, une autre approche consiste à considérer ces équations intégrales au sens des résidus pondérés : par exemple (1.3) et (1.4) sont multipliées scalairement par $\tilde{t}_k(\boldsymbol{x})$ et $\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})$ et intégrées par rapport à $\boldsymbol{x}$ sur $\partial\Omega$. Un choix convenable des fonctions-test en déplacement $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et en vecteur-contrainte $\tilde{\boldsymbol{t}}$ conduit à des formulations intégrales symétriques en $(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}})$ ou $(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{t}})$ (voir [Bon93] ou Balakrishna et coll. [4]).

Cette voie est en fait, dans son principe, bien connue des mathématiciens appliqués (Nedelec [61], Hamdi [40], Becache [13]), et présente sur l'approche par collocation certaines supériorités conceptuelles liées notamment au caractère symétrique des formulations obtenues et au cadre variationnel sous-jacent, qui permet à la fois d'établir des résultats de convergence et de réduire le coût de l'inversion du système linéaire. On trouve dans la littérature des formulations variationnelles intégrales connues :

- Sous forme régularisée et pour des conditions aux limites de type homogène (problèmes de types Dirichlet ou Neumann). Ces travaux sont souvent orientés vers le traitement par méthode intégrale variationnelle de problèmes de diffraction d'ondes par des obstacles, cavités ou fissures (Cortey-Dumont [26], Becache [13]). Les formulations sont généralement indirectes (c'est-à-dire exprimées en termes d'inconnues intermédiaires et non directement des variables physiques).
- Sous forme non régularisée (contenant donc des opérateurs intégraux hypersinguliers) pour des problèmes aux limites mixtes. Certains de ces travaux (Sirtori et coll. [84]) proposent des formulations directes, c'est-à-dire exprimées en termes des variables physiques.

Etablissement d'une formulation variationnelle intégrale directe. Une formulation originale a été établie dans [Bon95c], pour le problème de l'équilibre d'un solide linéairement élastique en l'absence de forces de volume et avec conditions aux limites mixtes : déplacement imposé $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^D$ sur $S_u \subset \partial\Omega$, efforts de contact donnés $\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{t}^D$ sur $S_T = \partial\Omega - S_u$. Les principales idées utilisées dans cette démarche sont :

- Utilisation d'un principe varitionnel (Washizu [97]) : le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ solution rend stationnaire l'énergie potentielle augmentée :

$$E(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : C : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}V - \int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\boldsymbol{v} \,\mathrm{d}S - \int_{S_u} \boldsymbol{t}.(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^D) \,\mathrm{d}S$$

  où le déplacement $\boldsymbol{v}$ est libre de conditions cinématiques.
- Ecriture de la condition de stationnarité en termes d'intégrales de frontière : posant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$ et ne considérant que le sous-ensemble des $\boldsymbol{v}$ vérifiant l'équation locale d'équilibre élastique, on obtient :

$$E_{,v}(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} = \int_{S_u} \boldsymbol{u}^D.\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{\delta u}) \,\mathrm{d}S + \int_{S_T} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{\delta u}) \,\mathrm{d}S - \int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\delta\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}S - \int_{S_u} \boldsymbol{t}.\delta\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}S = 0$$

- Expression des fonctions-test $\delta\boldsymbol{u}$ en termes d'intégrales de frontière : les formules (1.1), (1.2) permettent de montrer que tout $\delta\boldsymbol{u}$ vérifiant l'équilibre statique local peut être mis sous la forme :

$$\delta u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{S_T} \tilde{u}_i(\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y - \int_{S_u} \tilde{t}_i(y) U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$

  de plus, $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{\boldsymbol{t}}$ doivent être de régularités respectives $C^{0,\alpha}$ et $C^{0,\alpha}$ par morceaux sur $\partial\Omega$.

Formulation variationnelle intégrale directe. Le report de $\delta\boldsymbol{u}$ ainsi construit dans la condition de stationnarité conduit à la formulation variationnelle intégrale directe suivante pour le problème d'équilibre élastique :

$$\text{Trouver } \bar{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{V}_u, \boldsymbol{t} \in \mathcal{V}_T$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{B}_{uu}(\bar{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{B}_{tu}(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{u}}) & = \mathcal{L}_u(\tilde{\boldsymbol{u}}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\bar{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{t}}) + \mathcal{B}_{tt}(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{t}}) & = \mathcal{L}_t(\tilde{\boldsymbol{t}}) \end{array} \right. \qquad \forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{V}_u,\ \forall \tilde{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{V}_T \tag{1.9}$$

où les formes bilinéaires et linéaires sont données par :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{uu}(\bar{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{u}}) &= \int_{S_T}(R\bar{u})_{iq}(\boldsymbol{x})\int_{S_T}B_{iqks}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(R\tilde{u})_{ks}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x\\
\mathcal{B}_{tu}(\boldsymbol{t},\tilde{\boldsymbol{u}}) &= -\int_{S_u}\int_{S_T}t_k(\boldsymbol{x})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\tilde{u}_i(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x\\
\mathcal{B}_{ut}(\bar{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{t}}) &= -\int_{S_u}\int_{S_T}\bar{u}_i(\boldsymbol{x})T_i^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\tilde{t}_k(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y\\
\mathcal{B}_{tt}(\boldsymbol{t},\tilde{\boldsymbol{t}}) &= \int_{S_u}\int_{S_u}t_k(\boldsymbol{x})\tilde{t}_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x\\
\mathcal{L}_u(\tilde{\boldsymbol{u}}) &= \int_{S_T}t_k^D(\boldsymbol{x})\left\{(\kappa-1)\tilde{u}_k(\boldsymbol{x})+\int_{S_T}[\tilde{u}_i(\boldsymbol{y})-\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})]n_j(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\right\}\mathrm{d}S_x\\
&\quad-\int_{S_T}t_k^D(\boldsymbol{x})\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})\int_{S_u}n_j(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x\\
&\quad-\int_{\partial\Omega}(Rw)_{iq}(\boldsymbol{x})\int_{S_T}B_{iqks}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(R\tilde{u})_{ks}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x\\
\mathcal{L}_t(\tilde{\boldsymbol{t}}) &= \int_{S_u}\tilde{t}_k(\boldsymbol{x})\left\{\kappa u_k^D(\boldsymbol{x})+\int_{S_u}[u_i^D(\boldsymbol{y})-u_i^D(\boldsymbol{x})]n_j(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\right\}\mathrm{d}S_y\\
&\quad+\int_{S_u}\int_{S_T}[w_i(\boldsymbol{x})-u_i^D(\boldsymbol{y})]n_j(\boldsymbol{x})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\tilde{t}_k(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y\\
&\quad-\int_{S_T}\int_{S_u}t_k^D(\boldsymbol{x})\tilde{t}_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x
\end{aligned}
$$

et avec les espaces de fonctions admissibles $\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_T$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_u &= \left\{\boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{u}\in C^{0,\alpha}(S_T)\text{ et }\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}\text{ sur }\partial S_T\right\}\\
\mathcal{V}_T &= \left\{\tilde{\boldsymbol{t}}\mid \tilde{\boldsymbol{t}}\text{ continus par morceaux sur }S_u\right\}
\end{aligned}
$$

On a utilisé l'opérateur différentiel tangentiel $(Ru)_{iq}=e_{jfq}n_ju_{i,f}$ et la notation $\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$, où $\boldsymbol{w}\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ est choisi de sorte que $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}^D$ sur S_u[7].

L'obtention du résultat ci-dessus nécessite un calcul soigneux, reposant sur :

- L'utilisation de résultats antérieurs, notamment l'équation intégrale régularisée (1.3).
- Une double intégration par parties de l'intégrale initialement la plus singulière, suivant une méthode utilisée par Nedelec [61] et qui repose sur l'identité suivante vérifiée par la solution élémentaire :

$$
C_{klab}\frac{\partial}{\partial z_b}\Sigma_{ij}^a(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})=e_{jfq}e_{lhs}\frac{\partial}{\partial x_f}\frac{\partial}{\partial z_h}B_{ikqs}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\qquad(\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{x})
$$

- Un passage à la limite $\tilde{S}\to\partial\Omega$ dans les intégrales doubles, où $\tilde{S}$ est une surface auxiliaire fermée régulière entourant $\partial\Omega$.

Commentaires. Le résultat (1.9), obtenu à partir des conditions de stationnarité de l'énergie potentielle élastique augmentée, est effectivement une formulation *variationnelle* intégrale ; il pouvait également être établi en termes de résidus pondérés pour les équations

[7] Ceci afin de conserver la symétrie de la formulation en cas de données en déplacement non nulles ; merci à D. Clouteau pour ce commentaire pertinent.

intégrales (1.3), (1.4) sans faire référence à un principe variationnel [Bon93]. De plus, la formulation est symétrique par rapport à $(\bar{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}})$ et $(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{t}})$.

La formulation (1.9) est *directe*, exprimée en termes des grandeurs physiques $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ sur $\partial\Omega$, ce qui tranche avec la plupart de celles proposées dans la littérature, qui sont *indirectes*, c'est-à-dire exprimées en termes d'inconnues intermédiaires, et doivent donc être suivies du calcul *aux points de la frontière* de formules de représentation intégrale. Si nécessaire, une formulation indirecte peut très facilement être obtenue au moyen d'une combinaison adéquate de (1.9) écrite pour Ω et $\mathbb{R}^3 - \Omega$.

La forme bilinéaire $\mathcal{B}_{uu}$ ne dépend effectivement de $\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}$ que par leur trace sur S_T, malgré la présence de dérivées cartésiennes de $\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}$: l'introduction d'un paramétrage local de S_T : $(\xi_1, \xi_2) \in \Delta \to \boldsymbol{y}(\xi_1, \xi_2) \in S_T$ de base naturelle $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ permet en effet de montrer que

$$e_{abc} n_a(\boldsymbol{y}) u_{b,c}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{e}_c \, \mathrm{d}S_y = (u_{,\xi_1} \boldsymbol{a}_2 - u_{,\xi_2} \boldsymbol{a}_1) \, d\xi_1 d\xi_2$$

Le calcul effectif des intégrales élémentaires utilise alors la formule ci-dessus appliquée au paramétrage d'un élément de frontière.

De par le caractère faiblement singulier des intégrales, (1.9) se prête aux applications. Nous ne l'avons toutefois pas encore utilisé sur le plan numérique. La motivation qui a conduit à son obtention, en-dehors de son intérêt intrinsèque, est la perspective de son application future à l'approche énergétique de problèmes d'évolution : stabilité et propagation de systèmes de fissures, changement de phase élastique avec dissipation à l'interface (chapitre 3.3), pour laquelle l'utilisation de formulations symétriques procure un avantage important.

Cette démarche, menée pour l'élasticité tridimensionnelle, est bien sûr transposable à d'autres contextes : élastodynamique, acoustique, théorie du potentiel...

Chapitre 2

Problèmes inverses

Les sections 2.3 et 2.4 présentent les travaux personnels, les deux premières sections servant d'introduction.

2.1 Introduction

L'identification de la distribution d'un paramètre physique dans un solide (constantes de Lamé, conductivités, lois de comportement d'interfaces...), la recherche de domaines géométriques inconnus (fissures, inclusions, cavités,...), le recalage de modèles éléments finis de structures sont des exemples représentatifs des nombreux problèmes inverses posés par la Mécanique des matériaux, des structures et des systèmes et ses applications aux problèmes de l'ingénieur.

Par « problème inverse », on entend généralement des situations de « mesure indirecte » : on souhaite évaluer quantitativement une certaine grandeur physique $\boldsymbol{m}$ *inaccessible à l'expérience* à partir de la mesure d'une autre grandeur $\boldsymbol{d}$ *directement accessible à l'expérience*, connaissant un *modèle mathématique* $\boldsymbol{G}$ *du problème direct* qui donne explicitement $\boldsymbol{d}$ à partir de $\boldsymbol{m}$:

$$\text{Trouver } \boldsymbol{m} \in \mathcal{M} \text{ tel que } \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}) \qquad \boldsymbol{d} \in \mathcal{D} \text{ donné} \tag{2.1}$$

(ou, plus généralement, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d}) = 0$) et qu'il faut donc *inverser*. Par exemple, le problème direct pourrait être un calcul de structure élastique classique, avec des forces imposées sur la frontière et une distribution spatiale des constantes élastiques connue : les méthodes classiques permettent alors de calculer le déplacement à la frontière. Le problème inverse consisterait alors à tenter d'évaluer la distribution *inconnue* de constantes élastiques, connaissant forces *et* déplacements sur la frontière.

Au vu de la définition ci-dessus, on pourrait être conduit à appeler « problème inverse »toute situation appelant la résolution d'une équation (algébrique, matricielle, différentielle, aux dérivées partielles, intégrale, ...) ou la minimisation d'une fonctionnelle, y compris dans les cas les plus classiques et les mieux connus. Les problèmes qui, pour toute mesure $\boldsymbol{d}$, admettent une *solution unique* $\boldsymbol{m}$ *continue par rapport à* $\boldsymbol{d}$ sont dits « bien posés »[1] ; ils sont généralement résolus (de manière exacte ou approchée) par des méthodes classiques. On réserve généralement dans la littérature, le qualificatif d'« inverse »à ceux des problèmes d'inversion (au sens ci-dessus) qui sont *mal posés* : l'existence, l'unicité et la continuité de la solution $\boldsymbol{m}$ par rapport aux mesures $\boldsymbol{d}$ ne sont pas toutes vérifiées. En pratique, on rencontre fréquemment une forte sensibilité de l'inversion vis-à-vis de petites

[1] Conditions introduites par Hadamard, et souvent associées à son nom dans la littérature.

erreurs sur $\boldsymbol{d}$, de sorte que si $\boldsymbol{m}$ est une solution de (2.1) pour les données exactes $\boldsymbol{d}$, on ait

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m} + \delta\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{d} + \delta\boldsymbol{d}$$

avec $\delta\boldsymbol{m}$ « grand »même pour $\delta\boldsymbol{d}$ « petit ».

La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La perception actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques. Les causes d'incertitude sont nombreuses : les données ont une origine expérimentale, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure, et sont collectées en nombre fini, même si elles sont décrites dans le modèle mathématique par des fonctions. L'algorithme d'inversion lui-même peut parfois créer une altération des données : interpolation requise pour la discrétisation d'un modèle initialement continu par exemple. Enfin, le modèle procède d'une idéalisation de la réalité physique et repose sur des hypothèses simplificatrices et est donc également une source d'incertitudes, d'autant que certains paramètres du modèle (constantes physiques d'un milieu par exemple) ne sont connus que de manière expérimentale, donc approximativement.

La sensibilité des problèmes inverses aux incertitudes induit un changement d'optique important vis-à-vis du concept de solution du problème inverse, car la recherche des solutions *au sens strict* associées par le modèle aux données effectives $\boldsymbol{d}_{obs}$ n'est plus un objectif pertinent. En effet, tout $\boldsymbol{m}$ qui reproduit *aux incertitudes près*, via le modèle physique, la mesure $\boldsymbol{d}_{obs}$ est une réponse a priori possible au problème inverse. D'autre part, un problème inverse, pour un modèle physique et une mesure donnés, peut n'avoir aucune solution au sens strict mais beaucoup de solutions « à ϵ près » : il peut se produire que $\boldsymbol{d}_{obs} \notin \boldsymbol{G}(\mathcal{M})$ mais $(\boldsymbol{d}_{obs}+\delta\boldsymbol{d}) \in \boldsymbol{G}(\mathcal{M})$, si la mesure effective $\boldsymbol{d}_{obs}$ est entachée d'erreur ou si le modèle $\boldsymbol{G}$ est approché.

Exemple : problème inverse en gravimétrie. En prospection gravimétrique, on souhaite déterminer la distribution de masse volumique $\rho(\boldsymbol{y})$ dans une certaine région souterraine V à partir de mesures en certains points $\boldsymbol{x}$ de la surface de la perturbation créée sur la composante verticale $g_3(\boldsymbol{x})$ de l'accélération de la pesanteur, sachant que

$$g_3(\boldsymbol{x}) = \mathcal{G}\frac{\partial}{\partial x_3}\int_V \frac{1}{\parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel}\rho(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V \tag{2.2}$$

$\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation universelle de Newton.

On peut faire la remarque suivante : soit $f(\boldsymbol{y})$ une fonction scalaire définie sur V et telle que :

$$(\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{d}V) \qquad f(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial}{\partial n} f(\boldsymbol{y}) = 0 \tag{2.3}$$

Puisque $\Delta(1/\parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel) = 0$ $(\forall \boldsymbol{y} \in V)$ la troisième formule de Green permet d'écrire :

$$\int_V \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}\Delta f\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V}\left\{\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}\right\}\mathrm{d}S = 0 \tag{2.4}$$

ce qui implique que les distributions de masse volumique ρ et $\rho + \Delta f$ (f vérifiant (2.3)) sont indiscernables du point de vue du champ de gravitation créé à l'extérieur de V.

Si on prend par exemple pour V une région sphérique de rayon R et $\boldsymbol{x}$ un point extérieur à V, il est bien connu que le champ de gravitation créé en $\boldsymbol{x}$ par un V sphérique de masse volumique $\rho(r)$ à symétrie sphérique est égal à celui qui régnerait si toute le masse

de V était concentrée au centre de la sphère. En d'autres termes, toutes les distributions $\rho(r)$ à symétrie sphérique et de même masse totale créent, hors de V, le même champ de gravitation.

Le problème de la gravimétrie est donc essentiellement sous-déterminé ; des informations supplémentaires indépendantes (« informations a priori ») sur $\rho(\boldsymbol{y})$ sont donc nécessaires.

Cet aspect sous-déterminé s'*ajoute* aux autres aspects mal posés : en effet, $\rho(\boldsymbol{y})$ (inconnue du problème inverse), est gouvernée par (2.2), qui est une équation intégrale de première espèce, dont l'inversion est connue pour être une opération mal posée (Tikhonov & Arsenine [92]), très sensible aux erreurs sur les données $g_3(\boldsymbol{x})$. Dans cet exemple, les pathologies propres à ce type d'équation viennent donc *en sus* du caractère sous-déterminé de l'inversion gravimétrique, qui est donc mal posée à deux titres différents. Ces remarques laissent augurer des difficultés qui attendent quiconque tenterait d'évaluer $\rho(\boldsymbol{y})$ par une discrétisation « naïve »de (2.2).

Caractéristiques essentielles des méthodes d'inversion. Ce qui précède montre clairement que le développement de méthodes permettant la résolution pratique de problèmes inverses posés par la Mécanique doit mettre l'accent sur les aspects suivants :

Stabilisation de l'inversion vis-à-vis de données perturbées. Le problème inverse doit être reformulé de manière à incorporer des *informations a priori* complémentaires : indications générales (valeurs de références, bornes, positivité, régularité,...), quantification des incertitudes expérimentales et de modélisation. Cette opération, discutée en section 2.2, porte le nom consacré de *régularisation*[2]. Elle est parfois réalisable par l'introduction et l'interprétation de variables aléatoires, de façon à modéliser les incertitudes en présence ; nous avons développé cet aspect sous une forme particulière : l'inversion gaussienne (sections 2.2 à 2.4).

Utilisation de formulations variationnelles ou d'équations intégrales. En effet, le problème direct est en général posé comme un problème d'évolution et/ou aux limites. Les algorithmes de résolution de problèmes inverses intègrent ainsi les outils numériques (éléments finis ou de frontière) permettant d'envisager des configurations assez générales, en particulier telles que le problème direct n'admet pas de solution analytique. Cet aspect intervient dans tous nos travaux qui concernent les problèmes inverses.

Calcul efficace de la fonction-coût et son gradient. La résolution numérique du problème inverse passe généralement par la minimisation d'une certaine fonction-coût. Le calcul d'une valeur de la fonction-coût ou de son gradient nécessitant généralement la résolution numérique d'un (ou plusieurs) problème(s) direct(s), elle représente l'essentiel du temps de calcul consacré à la phase de minimisation. La méthode la plus efficace et élégante pour le calcul du gradient est celle de l'état adjoint, que nous avons étudiée et mise en oeuvre pour la modélisation de problèmes inverses en thermique ou en acoustique ; cet aspect est discuté au chapitre 4.

[2]Le terme *régularisation*, consacré dans ce contexte, n'a rien a voir avec la régularisation des équations intégrales singulières évoquée au chapitre précédent ; il signifie plutôt « lissage ».

2.2 Régularisation et inversion gaussienne

Régularisation des problèmes inverses. Comme le suggère le préambule, toute « théorie de l'inversion »doit tenir compte du caractère éventuellement incomplet, imprécis et/ou redondant des données. Une voie maintenant classique, appelée *régularisation*, a été ouverte par une école de mathématiciens soviétiques (voir l'ouvrage de Tikhonov & Arsénine [92]), qui consiste à reformuler (2.1) comme problème de minimisation « augmenté » :

$$\min_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}} d(\boldsymbol{d}_{obs} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m})) + \alpha R(\boldsymbol{m}) \tag{2.5}$$

où d est une distance et la *fonctionnelle stabilisatrice* $R(\boldsymbol{m})$, positive, est choisie de manière à exprimer mathématiquement une *information a priori* sur $\boldsymbol{m}$ (valeurs physiques de référence, bornes, régularité,...) et $\alpha > 0$ est un (petit) *paramètre de régularisation.* Parfois le point de vue « dual »est adopté :

$$\min_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}} R(\boldsymbol{m}) \qquad \text{avec} \quad d(\boldsymbol{d}_{obs} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m})) \leq \delta$$

Dans tous les cas, il est démontré que l'introduction d'information a priori par le biais de R diminue la sensibilité de la solution $\boldsymbol{m}$ aux erreurs de mesure. On observe depuis une dizaine d'années l'apparition de travaux (Engl & Neubauer [31], Kitagawa & Hosoda [44] Tikhonov et coll. [93]) portant sur la *régularisation optimale*, qui consiste à déterminer par voie algorithmique la meilleure valeur du paramètre de régularisation α, à niveau d'erreur δ donné sur $\boldsymbol{d}$, ainsi que des applications de cette approche (Rohal-Ilkiv [77]).

Inversion stochastique. Une autre voie est l'approche probabiliste, ou « inversion stochastique », des problèmes inverses (Menke [57], Tarantola [91]) ;nous la présentons un peu plus longuement que la régularisation car nos travaux concernant l'inversion gaussienne en relèvent.

L'inversion stochastique met en oeuvre le point de vue suivant lequel l'information possédée sur une variable $\boldsymbol{x}$ peut être décrite au moyen d'une fonction densité de probabilité $f_X(\boldsymbol{x})$. Le traitement des problèmes inverses, selon cette approche, procède comme suit. Les mesures $\boldsymbol{d}$ et les inconnues $\boldsymbol{m}$ sont dans un premier temps considérées comme statistiquement indépendantes. On introduit :

- Une loi d'erreur sur les mesures $\boldsymbol{d}$, sous la forme d'une densité de probabilité $f_D(\boldsymbol{d})$.
- Des informations *a priori* sur les valeurs de $\boldsymbol{m}$ (être positif, être compris entre telle et telle valeur, etc...) qui correspondent généralement à une connaissance *qualitative* de l'inconnue $\boldsymbol{m}$, également sous la forme d'une densité de probabilité $f_M(\boldsymbol{m})$.
- Une loi d'erreur qui caractérise le degré supposé d'exactitude du modèle physique direct $\boldsymbol{G}$, exprimée par une densité de probabilité $f_G(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d})$.

Les densités f_M et f_D décrivent l'état de notre connaissance de $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{m}$ *avant prise en compte du modèle physique* $\boldsymbol{G}$ (ce stade est qualifié d'*a priori*), tandis que la densité f_G permet d'exprimer une plus ou moins grande confiance. En fait $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{m}$ sont *corrélés* du fait de l'existence du modèle physique $\boldsymbol{G}$. Tarantola propose donc de traduire mathématiquement cette *conjonction* de deux états d'information indépendants sur les grandeurs $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{d}$ par une densité de probabilité *a posteriori* $F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d})$. Cette densité décrit donc toute l'information que l'on possède après exploitation de la corrélation par le modèle $\boldsymbol{G}$. L'opération de conjonction $f_1, f_2 \to C(f_1, f_2)$ de deux états d'information (représentés par deux densités de probabilité f_1, f_2), telle que Tarantola la définit, repose sur une analogie avec le connecteur logique « et »et conduit à la densité *a posteriori*

$F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d})$ suivante :

$$F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d}) = \frac{f_D(\boldsymbol{d}) f_M(\boldsymbol{m}) f_G(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d})}{\mu(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d})} \tag{2.6}$$

μ désignant la densité de probabilité dite *d'information nulle* ou encore d'*ignorance totale*. Ce concept de conjonction peut aussi être interprété comme l'écriture d'une probabilité conditionnelle « généralisée »(présentation bayésienne), pour laquelle la relation $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m})$ constitue le supplément d'information. Le résultat (2.6) est l'élément central de l'approche stochastique des problèmes inverses. Il fournit *la solution* du problème inverse au sens où la densité a posteriori $F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d})$ contient *toute* l'information disponible sur $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{d}$ après prise en compte (a) des erreurs de mesure, (b) des informations a priori et (c) du modèle physique. Dans la pratique, on souhaite surtout connaître la loi de probabilité *a posteriori* $F_M(\boldsymbol{m})$ sur $\boldsymbol{m}$ (loi marginale de F à $\boldsymbol{m}$ fixé) :

$$F_M(\boldsymbol{m}) = \int_D F(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d}) d\boldsymbol{d} \tag{2.7}$$

qui résume toute l'information connue sur $\boldsymbol{m}$, qu'il reste donc à analyser pour en tirer des conclusions utiles : valeurs de $\boldsymbol{m}$, incertitudes sur ces résultats et estimateurs de dispersion, etc. La possibilité de définir et calculer des indicateurs de dispersion et de corrélation, qui fournissent des informations sur le *degré de confiance* vis-à-vis de l'estimation obtenue $\boldsymbol{m}$, constitue un avantage conceptuel important. Notons que cette brève présentation de principe ne s'applique telle quelle qu'aux problèmes inverses discrets ou discrétisés. Certaines extensions à la dimension infinie sont toutefois possibles (Tarantola [91]).

Inversion gaussienne. La méthode d'inversion gaussienne est l'explicitation des idées ci-dessus au cas où les diverses densités de probabilité sont gaussiennes, un vecteur aléatoire $\boldsymbol{y} = [y_j]_{j=1,N}^t$ de loi gaussienne $\mathcal{N}(\langle \boldsymbol{y} \rangle, \boldsymbol{C})$ de moyenne $\langle \boldsymbol{y} \rangle$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{C}$ (définie positive) étant caractérisé par la densité de probabilité :

$$f(\boldsymbol{y}) = \left[(2\pi)^N det(\boldsymbol{C})\right]^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \langle \boldsymbol{y} \rangle)^t \boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{y} - \langle \boldsymbol{y} \rangle)\right)$$

Si on suppose que

- L'écart entre la mesure observée $\boldsymbol{d}_{obs}$ et la mesure vraie $\boldsymbol{d}$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\boldsymbol{d}_{obs}, \boldsymbol{C}_d)$.
- L'écart entre les mesures réelle $\boldsymbol{d}$ et calculée $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m})$ (incertitude de modélisation) suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}), \boldsymbol{C}_T)$.
- L'information a priori sur $\boldsymbol{m}$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}_{prior}, \boldsymbol{C}_M)$.

L'intégrale (2.7) est calculable analytiquement et la loi de probabilité a posteriori sur $\boldsymbol{m}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} F_M(\boldsymbol{m}) &= \text{cste} \exp(-S(\boldsymbol{m})/2) \\ S_M(\boldsymbol{m}) &= (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{d}_{obs})^t \boldsymbol{C}_D^{-1} (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{d}_{obs}) + (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{prior})^t \boldsymbol{C}_M^{-1} (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{prior}) \\ \boldsymbol{C}_D &= \boldsymbol{C}_d + \boldsymbol{C}_T \end{aligned} \tag{2.8}$$

Les incertitudes de modélisation et de mesure s'ajoutent, on peut donc raisonner comme si le modèle était exact.

Critique a posteriori de l'hypothèse gaussienne. Un autre trait saillant des lois gaussiennes est que la valeur de $S(\langle \boldsymbol{m} \rangle)$ suit une loi du χ^2 à M (M : nombre de mesures) degrés de liberté, dont la moyenne et l'écart-type valent respectivement M et $(\sqrt{2M})$ [91]. Une valeur éloignée, en valeur relative, de l'intervalle $[M - \sqrt{2M}, M + \sqrt{2M}]$ signifie que les hypothèses gaussiennes formulées doivent être remises en cause : soit elles sont fondamentalement inadéquates, soit le résultat de l'inversion est faussé par un petit nombre de mesures *aberrantes*. Ce *manque de robustesse* des méthodes de moindres carrés, dont l'inversion gaussienne est une forme évoluée, est bien connu.

Commentaires. Les approches de régularisation et d'inversion stochastique) mettent en oeuvre des points de vue différents. Elles procèdent toutefois toutes deux du souci d'incorporer et de représenter mathématiquement des informations a priori qui viennent compléter les données expérimentales qu'il s'agit d'inverser. Elles présentent d'autre part la caractéristique commune de conduire fréquemment à des problèmes de minimisation. La différence entre les deux approches réside dans l'interprétation des quantités qui composent la fonctionnelle à optimiser.

Par exemple, si dans la formule d'inversion gaussienne (2.8) on prend $\boldsymbol{C}_M = \sigma_M^2 \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}_D = \sigma_D^2 \boldsymbol{I}$, la minimisation de $S(\boldsymbol{m})$ revient à une régularisation du type (2.5) avec $\alpha = (\sigma_D/\sigma_M)^2$ comme paramètre de régularisation et $R(\boldsymbol{m}) = |\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{prior}|^2$ comme fonctionnelle stabilisatrice. Toutefois, dans la philosophie de la première approche, α doit être *ajusté* suivant des considérations fonctionnelles et algorithmiques (théorie de la régularisation optimale) ; pour la deuxième, sa valeur est *fixée* et égale au rapport de deux indicateurs statistiques représentatifs des incertitudes sur $\boldsymbol{d}$ et sur l'information a priori. Remarquons quand même qu'une connaissance précise de cette dernière n'est guère réaliste.

Enfin, pour autant que nous puissions en juger, l'approche de Tikhonov semble mieux adaptée à l'inversion de problèmes continus que l'approche probabiliste qui permet surtout d'aborder des problèmes inverses déjà discrétisés (ou discrets). Tarantola considère que l'argument « technologique », suivant lequel de toute manière une fonction sera toujours représentée, dans un ordinateur, par une suite finie de nombres tronqués, suggère que la théorie des problèmes inverses puisse être limitée à la dimension finie. Cela permettrait d'évacuer les difficultés soulevées par l'extension aux problèmes continus des concepts issus de la théorie des probabilités. Mais dans cette hypothèse, la théorie ne saura pas proposer de critère permettant de répondre à la question : qu'est-ce qu'une *bonne* discrétisation du problème inverse continu ?

Indiquons qu'une synthèse plus complète sur les problèmes mal posés et leur régularisation a été présentée dans [Bon89]. D'autres considérations générales ont été présentées dans [BB89] (à propos des équations intégrales appliquées à l'identification de défauts), [BC93] (à propos de l'identification de constantes élastiques).

2.3 Inversion gaussienne linéaire en variable complexe pour l'acoustique

On parle d'inversion gaussienne linéaire quand le modèle physique $\boldsymbol{G}$ est linéaire : $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{m}$. Dans ce cas, la quantité $S(\boldsymbol{m})$ est quadratique et F_M est gaussienne. Elle est donc entièrement caractérisée par (i) sa moyenne $\langle \boldsymbol{y} \rangle$ et (ii) sa matrice de covariance $\boldsymbol{C}$. Le calcul de ces deux quantités, à partir des données $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{m}_{prior}$, $\boldsymbol{C}_M$, $\boldsymbol{d}_{obs}$, $\boldsymbol{C}_D$, ne fait

intervenir que l'algèbre linéaire (une seule inversion de matrice) :

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{G}^t \boldsymbol{C}_D^{-1} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{C}_M^{-1}]^{-1} \qquad \langle \boldsymbol{m} \rangle = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{G}^t \boldsymbol{C}_D^{-1} \boldsymbol{d}_{obs} + \boldsymbol{C}_M^{-1} \boldsymbol{m}_{prior}] \tag{2.9}$$

Le cadre gaussien, par la simplicité de sa mise en oeuvre et de l'interprétation du résultat, est privilégié : c'est l'unique choix de lois de probabilité pour lequel la solution d'un problème inverse associé à $\boldsymbol{G}$ linéaire ne nécessite qu'une inversion de matrice et ne fasse pas intervenir un algorithme (itératif) d'optimisation. Il fournit en fait une interprétation probabiliste de méthodes classiques de moindres carrés « pondérés »et « régularisés »au sens de Tikhonov :

- Si $\boldsymbol{C}_M = \infty$ (ie pas d'information a priori sur la valeur de $\boldsymbol{m}$), on retrouve l'ajustement « simple »par moindres carrés entre paramètres inconnus et mesures (recherche de quasi-solutions).
- Si $\boldsymbol{C}_M < \infty$ on retrouve l'ajustement par moindres carrés avec addition d'un terme « régularisant »dont le coefficient multiplicateur quantifie les degrés relatifs de confiance accordes aux mesures et aux informations a priori.

2.3.1 Inversion gaussienne en variable complexe

A l'occasion d'une étude soutenue par EDF/AMV[3] [Bon90], [Bon91], nous avons étendu l'inversion gaussienne linéaire au traitement de problèmes inverses discrétisés en variable complexe. Du point de vue des applications, cette étude est motivée par l'existence de nombreux problèmes inverses linéaires liés aux vibrations et à l'acoustique (donc traités en variable complexe) dans les installations d'EDF, qui se ramènent généralement à déterminer des forces ou autres sources, ainsi que des conditions aux limites, dans des situations mal posées.

Cette extension est relativement simple, sauf en ce qui concerne l'interprétation des matrices de covariance (à coefficients complexes, hermitiennes, définies positives) associées aux variables aléatoires complexes : leur emploi signifie qu'on fait l'hypothèse selon laquelle, pour un couple de composantes complexes du vecteur aléatoire, les corrélations entre parties réelles et entre parties imaginaires sont égales tandis que les corrélations croisées entre une partie réelle et une partie imaginaire sont opposées[4]. Diverses améliorations originales d'ordre algorithmique, que nous décrivons brièvement ci-après, ont été proposées, mises en oeuvre et testées à cette occasion ; elles utilisent la matrice de covariance *a posteriori* $\boldsymbol{C}$ (2.9), résultat de l'inversion gaussienne.

Calcul d'indicateurs de qualité du résultat. A partir de la matrice de covariance *a posteriori* $\boldsymbol{C}$ (2.9), on peut par exemple définir les quantités :

$$\langle \sigma^{post} \rangle = [\det(\boldsymbol{C})]^{1/2n} \qquad r = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_M^{-1}) \tag{2.10}$$

respectivement moyenne géométrique des écarts-types *a posteriori* sur $\boldsymbol{m}$ et indicateur de proximité du résultat $\boldsymbol{m}$ de l'inversion gaussienne à la solution que donnerait en l'absence de mauvais conditionnement la méthode des moindres carrés simples. On doit avoir $r \leq 1$ par construction car $\boldsymbol{C}_M, \boldsymbol{C}$ sont définies positives ; $r = 1$ est la valeur ideale.

[3]Département Acoustique et Mécanique Vibratoire, Direction des Etudes et Recherches, EDF, Clamart.

[4]Par conséquent, en termes d'autocorrélation, les parties réelles et imaginaire d'un nombre aléatoire gaussien ont des variances égales et une corrélation nulle

Elimination automatique de mesures aberrantes. D'autre part, la robustesse de l'algorithme a été améliorée par élimination automatique de données aberrantes. Cette dernière fonctionnalité repose sur le calcul de l'effet de la suppression d'une mesure, fait tour à tour pour toutes les mesures, associé au test du χ^2 utilisé pour décider de la conservation ou de la suppression d'une donnée. Afin d'éviter de refaire une inversion complète pour chaque donnée supprimée, nous avons eu l'idée d'utiliser des formules de réactualisation d'inverses de matrices pour des perturbations de rang 1 [38]. Ainsi, le résultat $(\langle \boldsymbol{m} \rangle^\star, \boldsymbol{C}^\star)$ que donne l'inversion gaussienne après suppression de la ligne $\boldsymbol{g}$ de $\boldsymbol{G}$ et de la valeur correspondante d de $\boldsymbol{d}$ est exprimé en fonction de $(\langle \boldsymbol{m} \rangle, \boldsymbol{C})$ correspondant à $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{d})$ complets comme :

$$\boldsymbol{C}^\star = \boldsymbol{C} + \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{g}\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}^T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}^T)(\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}^T)^T \tag{2.11}$$

$$\langle \boldsymbol{m} \rangle^\star = \langle \boldsymbol{m} \rangle + \frac{\boldsymbol{g}\langle \boldsymbol{m} \rangle - d}{\boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{g}\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}^T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}^T) \tag{2.12}$$

On a fait l'hypothèse que les incertitudes expérimentales sont indépendantes, et donc que $\boldsymbol{C}_D$ est diagonale ; $\boldsymbol{\sigma}^2$ dans (2.11-2.12) désigne le terme diagonal de $\boldsymbol{C}_D$ correspondant à la mesure supprimée. Une fois $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{C})$ connu, le calcul de (2.11-2.12) est clairement beaucoup plus rapide qu'une réinversion complète.

Logiciel d'inversion gaussienne. Cette étude a conduit à l'écriture en FORTRAN d'un logiciel d'inversion gaussienne, susceptible de traiter tout problème inverse linéaire en variable complexe, qui nous semble inclure tous les perfectionnements que l'on peut envisager dans le cadre de cette approche. Il est actuellement implanté au sein d'EDF/AMV et a été depuis utilisé par ce département pour le traitement d'applications liées à des besoins internes et nécessitant l'inversion de données expérimentales réelles, comme :

- Démonstration du caractère anti-vibratoire d'une bretelle de ligne (via une identification de forces équivalentes) [3].
- Etude des vibrations d'un dôme d'alternateur de centrale nucléaire (identification de conditions aux limites inconnues).
- Etude en cours sur l'apport de l'inversion stochastique gaussienne dans les techniques d'intensimétrie vibratoire.

2.3.2 Exemple numérique d'inversion gaussienne en variable complexe

Une étude des performances comparées de cette méthode et de celle des moindres carrés ordinaires met nettement en évidence les améliorations résultant de la prise en compte d'information *a priori*. Le problème inverse de la reconstruction de la vitesse normale $U(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ de vibration d'un solide Ω à l'aide de valeurs connues de la pression $p(\boldsymbol{x}_i)$, en des capteurs $\boldsymbol{x}_i$ extérieurs au solide, créée par son rayonnement acoustique[5] [Bon90], [Bon91].

Le problème direct : calculer $\{p(\boldsymbol{x}_i)\}$ connaissant U, est linéaire. Il est résolu à l'aide de la méthode des éléments de frontière (chapitre 1.2) : l'équation intégrale reliant (p, U) sur $\partial\Omega$ est résolue en p pour U donné, puis les $\{p(\boldsymbol{x}_i)\}$ sont calculés à l'aide de la formule de représentation intégrale.

[5] Parfois appelé *holographie acoustique*

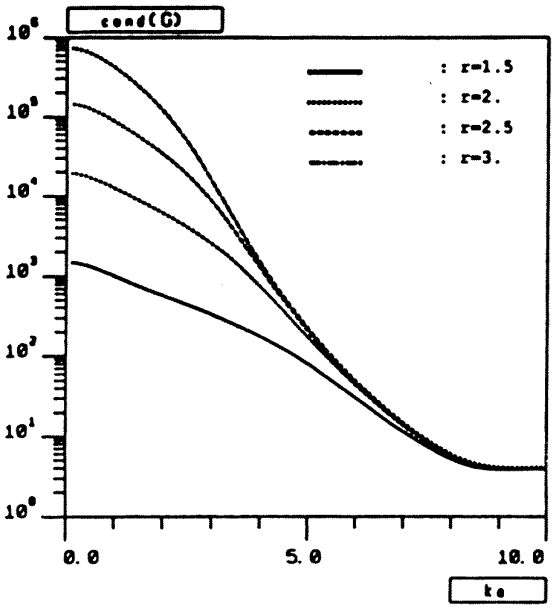


FIG. 2.1: Nombre de conditionnement Cond($\boldsymbol{G}$) : sphère en vibration axisymétrique, solution exacte, 10 coefficients et 10 capteurs

Le problème inverse (calculer U connaissant $\{p(\boldsymbol{x}_i)\}$) est mal conditionné. Pour le voir, on a représenté (figure 2.1 ci-dessus), pour un solide Ω sphérique (rayon a) en vibration axisymétrique[6], le nombre de conditionnement Cond($\boldsymbol{G}$) de la matrice $\boldsymbol{G}$ (10×10, coefficients complexes) donnant les valeurs de p en 10 capteurs en fonction des 10 premiers coefficients du développement de U sur les polynômes de Legendre. Cond($\boldsymbol{G}$) prend des valeurs d'autant plus grandes (jusqu'à 10^3 à 10^6, valeurs élevées pour une matrice de taille modeste), et donc le problème inverse est d'autant plus mal posé, que la distance ra des capteurs au centre de la sphère est grande et que la fréquence adimensionnelle ka est basse.

Des résultats de reconstruction numérique ont été obtenus sur l'exemple d'un cylindre vibrant (axe z, rayon $R = 1m$, longueur $6m$), la vitesse de vibration « exacte »à reconstruire étant donnée (en coordonnées cylindriques (θ, z) sur la surface $r = R$) par :

$$U(\theta, z) = \begin{cases} \cos^2\theta \cos^2(\pi z/3) & |z| \leq 1.5, \quad |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.13}$$

On a défini 282 capteurs $\boldsymbol{x}_i$: deux grilles carrées G1,G2 disposées symétriquement par rapport à l'axe du cylindre, écartées de $10m$ et de côté $10m$, en contiennent chacune $11^2 = 121$, les 40 autres étant disposées sur un carré C de côté $10m$ et situé parallèlement et à égale distance de G1,G2 (figure 2.2). La surface $\partial\Omega$ est discrétisée par 54 éléments de frontière à 8 noeuds, supportant au total $n = 188$ valeurs nodales de U, inconnues du problème inverse discrétisé. Les 282 valeurs $p(\boldsymbol{x}_i)$ sont synthétiques (calculées numériquement). On a considéré deux nombres d'onde acoustiques $kR = 0.5, kR = 2$. Le modèle physique discrétisé $\boldsymbol{G}$ est une matrice complexe 188×282 pleine. L'information a priori introduite consiste en :

- Une matrice de covariance $\boldsymbol{C}_M$ dont les coefficients ont la forme $(C_M)_{ij} = \sigma_M^2 \exp(|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j| / L)$, où les $\boldsymbol{y}_k$ sont les noeuds du maillage de $\partial\Omega$ et L est une *longueur de corrélation*

[6]Problème classique possédant une solution exacte en termes de fonctions de Bessel et d'harmoniques sphériques

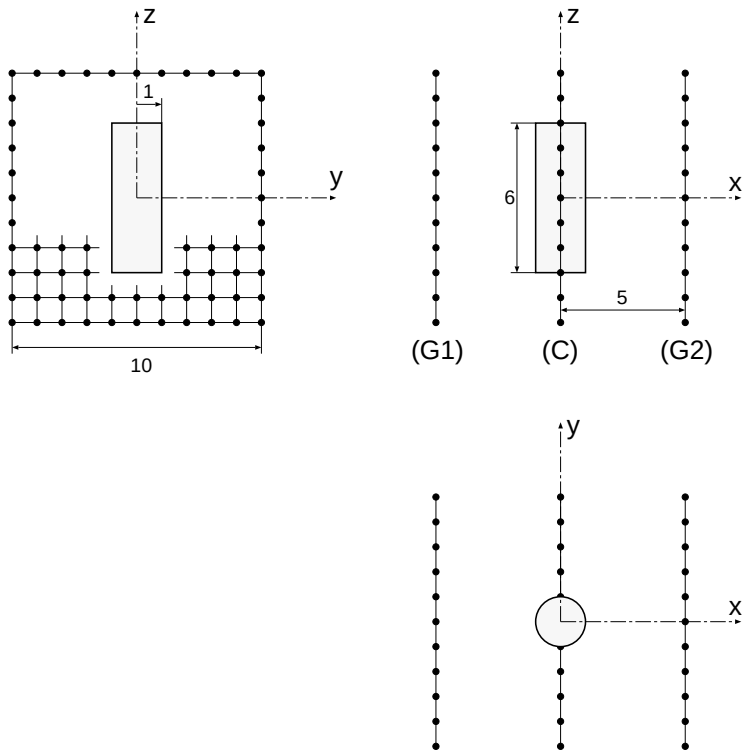


FIG. 2.2: Configuration géométrique du cylindre vibrant et des capteurs de pression

permettant d'exprimer un certain degré de connaissance qualitative sur la fréquence spatiale de vibration de $\partial\Omega$; les informations a priori sont donc σ_M et L.

– Une matrice de covariance $\boldsymbol{C}_D = \mathrm{Diag}\{\sigma_j^2\}$ avec $\sigma_j = 10^{-3}\,|p(\boldsymbol{x}_j)|$[7].

On notera que cet exemple particulier de matrice de covariance a priori $\boldsymbol{C}_M$ est assez intéressant car il illustre une manière non immédiate d'introduire une donnée a priori physiquement fondée (L dépend de la connaissance du comportement vibratoire de la structure).

La figure 2.3 montre qu'une valeur trop petite < 1 de L dégrade le résultat, ainsi qu'une valeur ($= 1$) trop petite de σ_M, ce dernier cas correspondant à une information a priori trop restrictive. La figure 2.4 présente pour la génératrice $\theta = 0$ du cylindre les valeurs nodales U_j encadrées par $U_j \pm (C_{jj}/2)^{1/2}$; on voit que la solution « exacte »est à l'intérieur de cet encadrement. Le tableau 2.1 mettent en évidence le fait que l'inversion gaussienne résiste mieux que la méthode des moindres carrés ordinaire à l'introduction d'erreurs, simulées à l'aide de nombres aléatoires gaussiens d'écart-type $\sigma_P \times |p(\boldsymbol{x}_i)|$. Le tableau 2.2 présente les valeurs des indicateurs (2.10) calculés à partir du résultat $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C})$ de l'inversion gaussienne (et sans connaître la solution exacte !). On voit que ces dernières suivent la même tendance que l'erreur L^2 entre solution numérique et exacte (les valeurs « idéales »sont $\langle \sigma^{post} \rangle = 0^+$, $r = 1^-$).

Enfin, la figure 2.5 montre l'algorithme d'élimination de mesures aberrantes au moyen du test du χ^2 en action : les valeurs nodales de U obtenues sur la génératrice $\theta = 0$ sont représentées aux divers stades d'élimination de mesures aberrantes. Sur cet exemple particulier, les trois (sur 282) valeurs aberrantes de p (n°s 76, 77, 78) qui avaient été introduites dans les données ont été détectées et le résultat final (c.à.d sans utiliser les

[7]Valeur en fait peu vraisemblable pratiquement, car trop faible, et donc mal choisie, mais ce point est de peu d'importance ici puisque l'exemple présenté n'a porté que sur des données simulées.

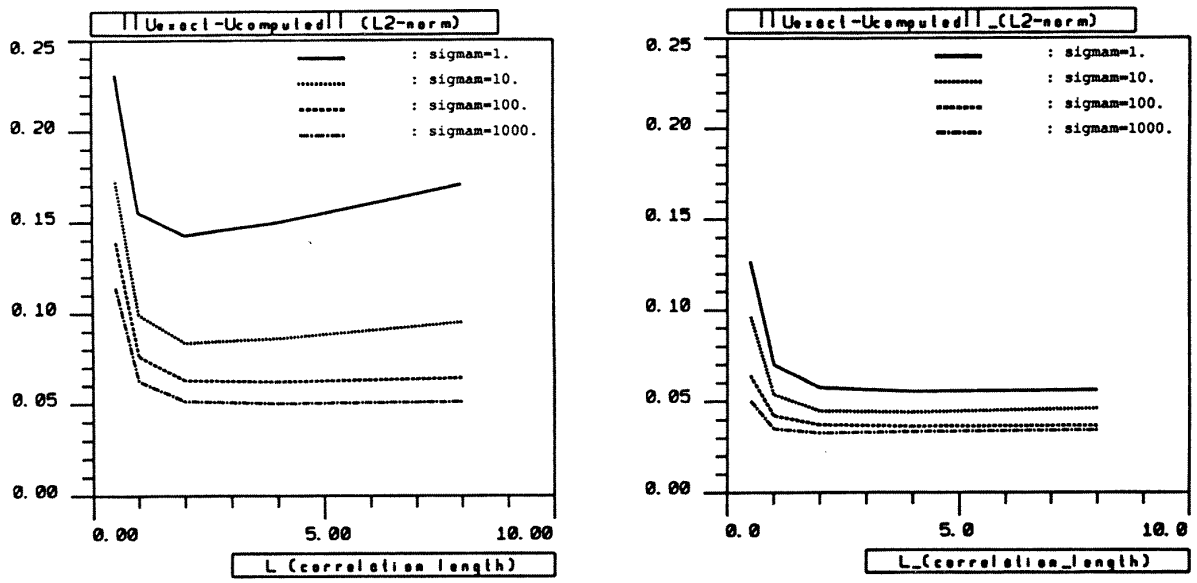


FIG. 2.3: Erreur relative L^2 entre solution « exacte »(2.13) et calculée par inversion gaussienne pour U, en fonction de L et pour quelques valeurs de σ_M (à gauche :$kR = 2$, à droite : $kR = 0.5$).

données aberrantes) pour U calculé.

Commentaires. Cet exemple met nettement en évidence l'amélioration apportée par la prise en compte d'informations *a priori* et l'influence du choix de ces dernières : les meilleurs résultats sont obtenus quand les valeurs de L, σ_M sont compatibles avec la solution U effective. De même, l'évolution des indicateurs a posteriori $\langle \sigma^{post} \rangle, r$ (calculés à

	Inversion gaussienne		Moindres carrés	
	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \boldsymbol{m} \rangle)\}$	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \boldsymbol{m} \rangle)\}$
$\sigma_p = 0.$	0.0086	0.	$1.6\,10^{-7}$	0.
$\sigma_p = 10^{-5}$	0.0089	0.	0.23	$1.0\,10^{-121}$
$\sigma_p = 10^{-4}$	0.024	0.	2.27	$1.6\,10^{-75}$
$\sigma_p = 10^{-3}$	0.23	$8.4\,10^{-98}$	22.7	$8.7\,10^{-3}$
$\sigma_p = 10^{-2}$	1.37	1.	227.	0.63
$\sigma_p = 10^{-1}$	2.09	1.	2271.	1.

	Inversion gaussienne		Moindres carrés	
	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \boldsymbol{m} \rangle)\}$	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \boldsymbol{m} \rangle)\}$
$\sigma_p = 0.$	0.0018	0.	$1.6\,10^{7}$	0.
$\sigma_p = 10^{-5}$	0.0033	0.	0.022	$8.7\,10^{-122}$
$\sigma_p = 10^{-4}$	0.024	0.	0.22	$5.6\,10^{-75}$
$\sigma_p = 10^{-3}$	0.24	$1.8\,10^{-93}$	2.18	$7.7\,10^{-30}$
$\sigma_p = 10^{-2}$	1.25	1.	21.8	0.62
$\sigma_p = 10^{-1}$	2.37	1.	218.	1.

TAB. 2.1: Comparaison d'erreurs relatives quadratiques sur U reconstruit par inversion gaussienne ou moindres carrés ordinaires, en fonction de l'écart-type σ_p du bruit simulé (en haut : $kR = 0.5$, en bas : $kR = 2.$).

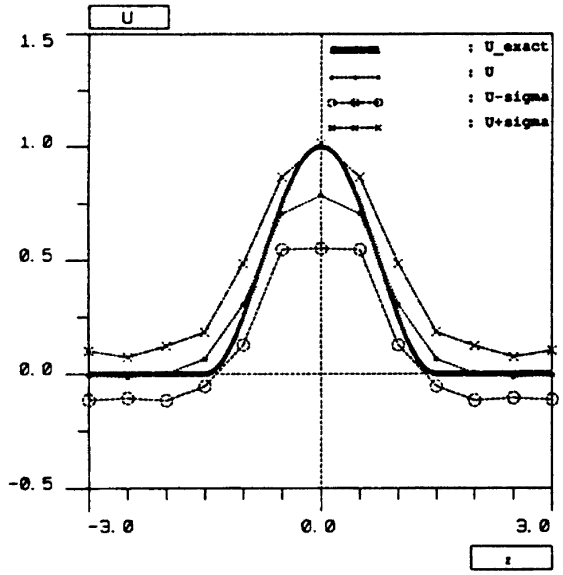


FIG. 2.4: Encadrement des valeurs nodales de U à l'aide des écarts-types diagonaux *a posteriori*

partir de la matrice de covariance a posteriori) et celle de l'erreur effectivement commise sur la solution du problème inverse sont concordantes. Enfin, la recherche et l'élimination de données aberrantes, qui par le biais du test du χ^2 fait usage de l'interprétation gaussienne du résultat de l'inversion, fonctionne très bien, ce qui fournit un remède pratique aux problèmes de robustesse communs à toutes les méthodes de type moindres carrés.

Ces remarques tendent à confirmer l'intérêt pratique que peut présenter la démarche d'inversion gaussienne pour les problèmes inverses linéaires.

2.4 Identification de défauts dans des structures à partir de mesures vibratoires

La suite naturelle du travail qu'on vient d'évoquer consiste à étendre l'inversion gaussienne au cas où le modèle physique est non-linéaire. Ceci couvre un très grand nombre de situations. Cette recherche bénéficie encore du soutien et de la coopération[8] d'EDF/AMV, pour qui certains problèmes sont susceptibles de relever de ce traitement.

C'est notamment le cas pour la surveillance de structures en service au moyen de

[8]Qui comprend notamment la fourniture de données expérimentales.

	champ lointain		champ proche	
	$kR = 0.5$	$kR = 2.$	$kR = 0.5$	$kR = 2.$
Erreur L^2	$8.38\,10^2$	$4.48\,10^{-2}$	$1.44\,10^{-3}$	2.610^{-4}
$\langle\sigma^{post}\rangle$ (2.10)	0.57	0.080	0.010	$2.8\,10^{-3}$
r (2.10)	0.316	0.523	0.908	0.976

TAB. 2.2: Indicateurs de confiance $\langle\sigma^{post}\rangle, r$ et erreur L^2 pour quatre cas (« champ lointain »et « champ proche »désignent respectivement le jeu de capteurs décrit dans le texte et un autre similaire mais tels que G1, G2 et C sont rectangulaires ($2.5m \times 6.5m$) et G1,G2 sont distants de $2.5m$).

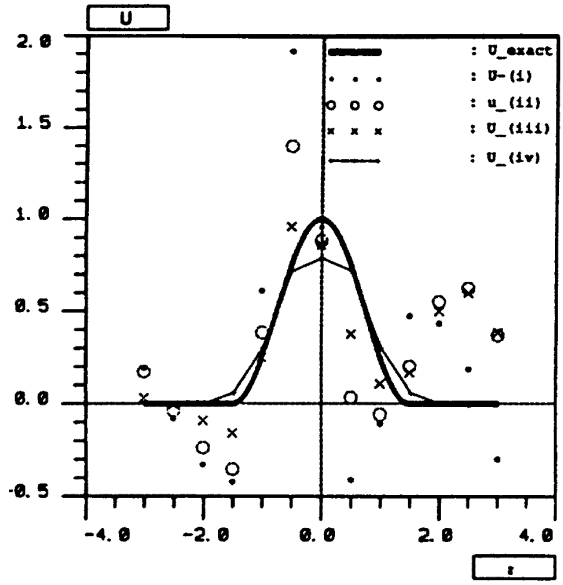


FIG. 2.5: Valeurs nodales de U, pour les mêmes noeuds que sur la figure 2.4, après détection et élimination automatique de (i) aucune donnée (ii) donnée 78 (iii) données 78,77 (iv) données 78, 77 et 76, par l'algorithme.

mesures modales (fréquences propres et valeurs de déplacements modaux), dont le but est l'identification de zones endommagées. C'est un problème difficile en raison de la pauvreté des données disponibles[9], de la complexité des structures, de la petitesse (en étendue et en variation relative des caractéristiques mécaniques) des défauts envisagés. Il est généralement abordé par le biais de l'identification paramétrique de modèles éléments finis de structures (coefficients multiplicatifs des matrices de masse et de raideur), les défauts étant donc représentés à l'aide de variations de masse ou de raideur.

L'extension de l'inversion gaussienne à ce type de problème inverse non-linéaire vise ici encore la prise en compte d'informations a priori et la modélisation des incertitudes sur les données mesurées, ainsi que l'obtention d'indicateurs de qualité sur le résultat de l'identification. Ce travail a été pour la plus grande part effectué dans le cadre de la thèse de J. BEN ABDALLAH, sous ma direction.

Définition du problème inverse. Il s'agit d'identifier des défauts structuraux, supposés décrits par des perturbations de raideur ou de masse d'une structure élastique, par l'intermédiaire d'un modèle éléments finis de la structure et, outre des conditions aux limites bien posées, des données vibratoires (valeurs propres λ et composantes de modes propres $\boldsymbol{X}$ liés par $(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{M}$ étant les matrices globales de raideur et de masse). Les inconnues sont des paramètres adimensionnels multiplicatifs k_i et m_i tels que :

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{K}_i \qquad\qquad \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{M}_i$$

$(\boldsymbol{K}_i,\ \boldsymbol{M}_i)$ étant n couples de matrices de raideur et de masse pour une structure sans défaut (matrices élémentaires du modèle éléments finis ou regroupements de telles matrices en macro-éléments). Le problème direct est : $\boldsymbol{m}$ étant donné, trouver $\boldsymbol{d} = (\lambda, \boldsymbol{X})$; le *modèle*

[9]Disposer des capteurs de déplacement sur des aéroréfrigérants de centrales nucléaires est une opération pénible et onéreuse !

physique $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m})$, non-linéaire en $\boldsymbol{m}$, donne les grandeurs spectrales $\boldsymbol{d} = (\lambda, \boldsymbol{X})$ en fonction des paramètres de masse et de raideur $\boldsymbol{m} = \{k_i, m_i\}$.

La reconstruction (par voie analytique ou numérique) des caractéristiques mécaniques de poutres élastiques à l'aide de données spectrales a été abordée par Barcilon [10], Ben-Haïm [15], Gladwell [34], entre autres. Sur le plan mathématique, il ressort notamment de ces travaux que la donnée du spectre complet des fréquences propres de la structure pour une configuration donnée de conditions aux limites ne permet pas à elle seule cette reconstruction : il est donc nécessaire, pour une structure en service, de disposer aussi d'informations sur les déformées modales.

Méthodes de pré-localisation Un travail préliminaire [BBA91], [BBA92] a permis de comparer les aptitudes à la localisation préliminaire (avant inversion des données) du support géométrique des défauts de deux méthodes existantes : calcul d'une "erreur en loi de comportement répartie" (Reynier [72], Ladevèze et coll. [51]) ou procédure d'orthogonalisation de vecteurs propres mesurés (Andriambololona [1]). L'erreur en loi de comportement répartie a donné en moyenne les meilleurs résultats sur les simulations effectuées.

Inversion. Nous avons ainsi été amenés à proposer la mise en oeuvre combinée, pour le problème inverse considéré ici, de l'inversion gaussienne non-linéaire et du calcul préliminaire de l'erreur en loi de comportement répartie, utilisée comme information a priori (pré-localisation) [BBA93]. Les données nécessaires à une inversion, en plus de $\boldsymbol{d}$, sont donc :

1. Une information *a priori* sur $\boldsymbol{m}$, décrite par une variable aléatoire $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}_{prior}, \boldsymbol{C}_M)$ où $\boldsymbol{m}_{prior}$ est le jeu de paramètres de la structure de référence (sans défaut) et $\boldsymbol{C}_M$ est une matrice diagonale construite à partir de valeurs d'erreur en loi de comportement obtenues sur chaque (macro-) élément.
2. La donnée des incertitudes de mesure, supposées gaussiennes, de moyenne nulle et d'opérateur de covariance $\boldsymbol{C}_D$.

On est conduit à chercher $\langle \boldsymbol{m} \rangle$ minimisant $S(\boldsymbol{m})$ donné par (2.8) par rapport à $\boldsymbol{m}$. L'information *a priori* $\boldsymbol{m}_{prior}, \boldsymbol{C}_M$ permet une régularisation du problème inverse.

La minimisation est effectuée à l'aide d'un algorithme de type Quasi-Newton (BFGS), qui utilise le gradient de S par rapport à $\boldsymbol{m}$. Ce dernier est calculé à partir d'une expression analytique, de façon à éviter l'emploi des différences finies. Nous avons au voisinage de $\langle \boldsymbol{m} \rangle$:

$$2S(\boldsymbol{m}) = 2S(\langle \boldsymbol{m} \rangle) + (\boldsymbol{m} - \langle \boldsymbol{m} \rangle)\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{m} - \langle \boldsymbol{m} \rangle) + o(\| \boldsymbol{m} - \langle \boldsymbol{m} \rangle \|^2)$$

où $\boldsymbol{C}$, l'inverse du Hessien de S en $\boldsymbol{m}$, se comporte (au second ordre près en $\boldsymbol{m} - \langle \boldsymbol{m} \rangle$) comme une matrice de covariance *a posteriori* et permet d'obtenir *a posteriori* des indications sur la fiabilité du résultat $\langle \boldsymbol{m} \rangle$.

Il faut souligner que, le modèle physique étant ici non-linéaire, parler d'inversion *gaussienne* non-linéaire est ici un abus de langage : on voit clairement dans la définition (1.7) que la densité *a posteriori* F_M n'est gaussienne que quand $\boldsymbol{G}$ est linéaire. En fait, les valeurs à convergence de $\boldsymbol{m}$ et de l'inverse du hessien de $S(\boldsymbol{m})$ permettent de définir une variable aléatoire gaussienne tangente, que l'on interprète par analogie au cas linéaire et avec une prudence accrue.

Mise en oeuvre numérique Les aspects suivants sont incorporés dans le programme informatique développé dans le cadre de cette étude :

- Interprétation de la variable gaussienne tangente à convergence en termes de calcul d'indicateurs a posteriori de la qualité de l'inversion.
- Regroupement d'éléments finis en macro-éléments.
- Algorithme de détection a posteriori de mesures aberrantes par le test du χ^2.

Les tests numériques, portent sur des données soit synthétiques, soit réelles. Ces dernières, fournies par EDF/AMV, concernent deux poutres (une avec masselotte, une avec section variable). Les données synthétiques permettent la simulation de bruit expérimental. Les résultats obtenus mettent notamment en évidence le caractère nécessaire de la régularisation en cas de données bruitées. La phase finale de cette étude, en cours, porte sur une structure cylindrique (banc d'expériences à EDF/AMV) sur laquelle un défaut sera artificiellement introduit. Une inversion gaussienne sera alors effectuée à partir des mesures réelles sur cette structure avec défaut.

Sur le plan informatique, le programme actuel est écrit en FORTRAN. Il est raisonnablement validé dans son état actuel mais sa forme ne permet pas encore son utilisation sur un autre site. Il est envisagé de conclure ce travail par la fourniture à EDF/AMV d'une version opérationnelle, faisant appel aux fonctionnalités de la bibliothèque MATLAB.

Exemple avec données synthétiques ou réelles. Un dispositif expérimental, installé au sein d'EDF/AMV, consiste en une poutre métallique encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$ (figure 2.6) : module d'Young $E = 1.205\,10^{11}$ Pa, masse volumique 7800 kg/m^3, longueur $L = 0.92$ m ; la section a pour aire $A = 2\,10^{-4}$ m^2 et pour inertie $I = 4.166\,10^{-10}$ m^4. Une masse ajoutée $m = 7.5\,10^{-2}$ kg est fixée en $x = 0.54$ m. Ce montage a pour but de tester si les méthodes d'identification de défauts parviennent à détecter la masse ajoutée, à partir de mesures de fréquences et modes propres.

Un modèle élément fini de la poutre (13 éléments à 4 degrés de liberté de flexion chacun : flèche et rotation aux deux extrémités) a été utilisé pour l'inversion gaussienne (figure 2.6) ; certains noeuds coincident avec les capteurs. La masse ajoutée est située sur l'élément 8. L'inversion gaussienne est effectuée soit en prenant pour inconnues les coefficients de raideur et masse de chaque élément (26 inconnues), soit en regroupant les éléments en 6 macro-éléments comme indiqué en figure 2.6 (12 inconnues).

Influence de la régularisation. Elle est testée à l'aide de données synthétiques pour les 5 premiers modes (fréquences, déplacements modaux aux 5 capteurs). La figure 2.8 montre les coeefficients de masse obtenus sans régularisation ($\boldsymbol{C}_M = \boldsymbol{0}$) et respectivement sans et avec macro-éléments. Dans ce dernier cas, les résultats sont montrés

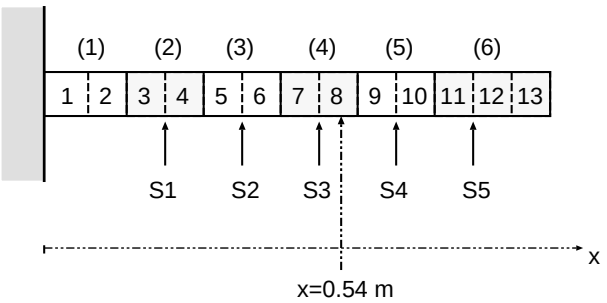


FIG. 2.6: Maillage de la poutre, positions des capteurs (S1 à S5) et de la masse ajoutée, macro-éléments.

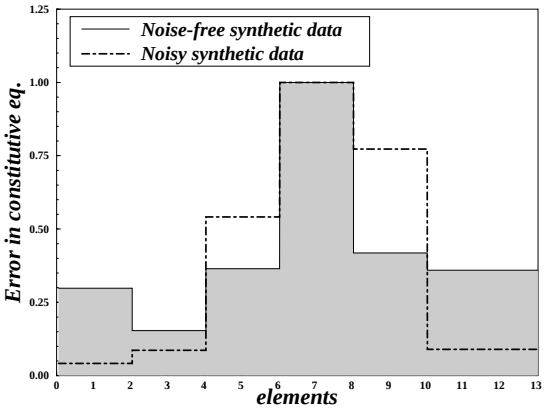


FIG. 2.7: Erreur en loi de comportement répartie (poutre avec masselotte, 12 inconnues).

pour des données non bruitées (courbe grisée) ou bruitées (bruit uniforme simulé au moyen de nombres aléatoires uniformément répartis, multiplicatif, d'écart-type 1% pour les fréquences et 5% pour les modes). Les résultats avec données bruitées et 12 inconnues, figure 2.8d, ne sont pas inacceptables, au contraire de ceux avec données bruitées et 26 inconnues, non montrés sur la figure 2.8g, qui sont très mauvais.

La figure 2.7 montre l'erreur en loi de comportement répartie (cas à 12 inconnues) utilisée pour définir les termes de $\boldsymbol{C}_M$, qui tend à localiser correctement la masse ajoutée (plus ou moins, selon la présence ou l'absence de bruit).

Les résultats obtenus sur données simulées et avec régularisation sont présentés en figure 2.10 (données bruitées) et figure 2.9 (données non bruitées), sans et avec utilisation de macro-éléments. Ces figures montrent également les valeurs de

$$k_i \pm \sqrt{C_{i,i}} \qquad m_i \pm \sqrt{C_{i+n,i+n}}$$

Comme anticipé, l'usage de la régularisation améliore les résultats en présence de bruit, au prix d'une légère perte de précision en l'absence de bruit.

Elimination de mesures aberrantes. Un exemple d'élimination automatique de mesures aberrantes à l'aide du test du χ^2, sur les données synthétiques définies plus haut, est présenté en figure 2.11. Deux valeurs aberrantes ont été simulées par addition d'une

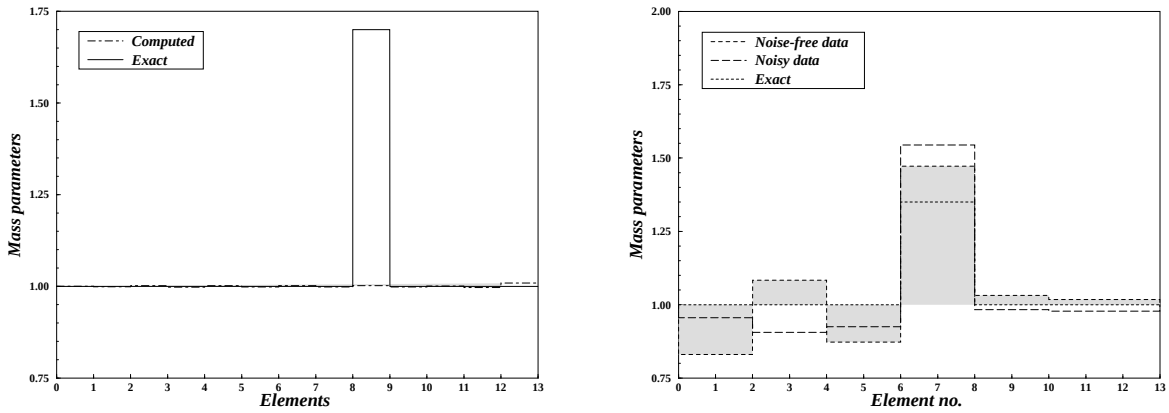


FIG. 2.8: Valeurs des paramètres de masse, sans régularisation, sans bruit (à gauche : cas à 26 inconnues, à droite : cas à 12 inconnues).

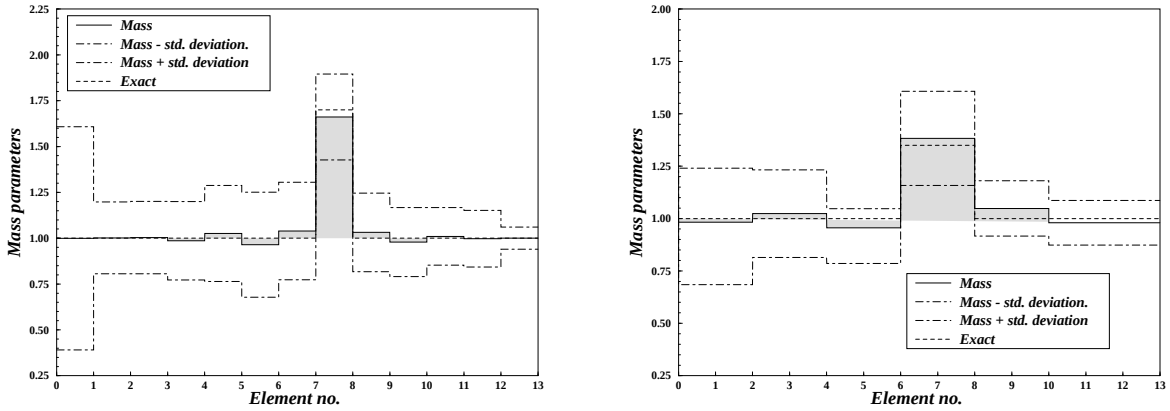


FIG. 2.9: Valeurs des paramètres de masse, avec régularisation, sans bruit (à gauche : cas à 26 inconnues, à droite : cas à 12 inconnues).

perturbation de 20% à la 2e fréquence propre et au 1er mode propre mesuré en S1. Les données ne sont pas autrement bruitées, et on a pris $\boldsymbol{C}_D = (0.01)^2\boldsymbol{I}$. Les valeurs des m_i sont montrées à trois stades : avant élimination, après élimination d'une donnée aberrante, après élimination des deux donnée aberrantes (grisé). Comme dans le cas des problèmes inverses linéaires, cette composante de la méthode d'inversion exploite le caractère gaussien (au moins au second ordre en $\boldsymbol{m} - \langle \boldsymbol{m} \rangle$) des variables en présence.

Inversion des données réelles. Les mesures disponibles jugées fiables par l'expérimentateur concernent les modes de flexion n°s 3,4 : fréquences, valeurs des déplacements modaux en 5 capteurs, situés en $x = 0.22$, 0.36, 0.50, 0.64, 0.78. Les m_i identifiés sont présentés en figure 2.12 (grisé), et comparés avec les résultats d'inversion des des données correspondantes simulées, pour les modes 3,4 ou 1 à 5. La masse totale identifiée à partir des données réelles, quoique répartie entre les éléments 7 et 8, est acceptable en ce que la valeur prédite de la masse totale ajoutée est proche de la réalité. On observe aussi l'amélioration des résultats simulés quand on passe de 2 à 5 modes mesurés.

Dans tous les résultats qui précèdent, masses *et* raideurs étaient inconnues : l'information selon laquelle on cherchait un défaut de masse n'a pas été introduite dans $\boldsymbol{C}_M$ (cela aurait été possible en jouant sur la pondération des termes diagonaux de $\boldsymbol{C}_M$).

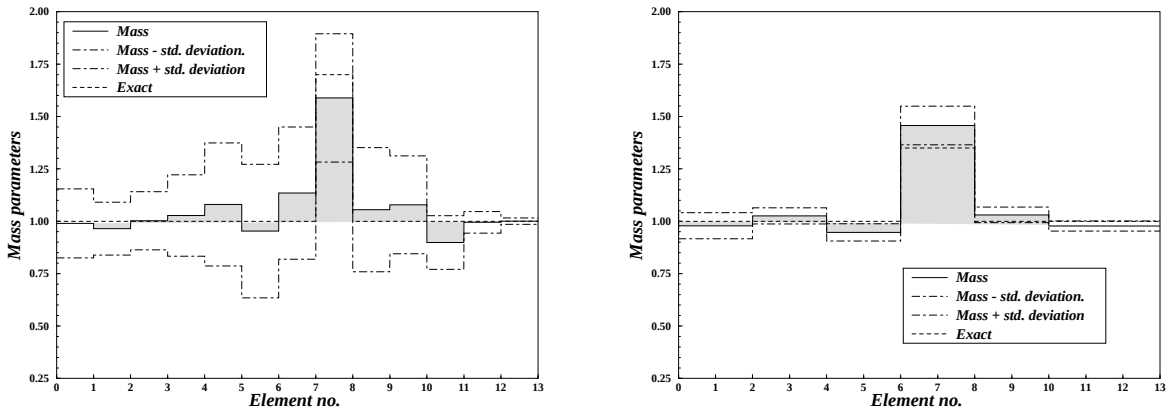


FIG. 2.10: Valeurs des paramètres de masse, avec régularisation, avec bruit (à gauche : cas à 26 inconnues, à droite : cas à 12 inconnues).

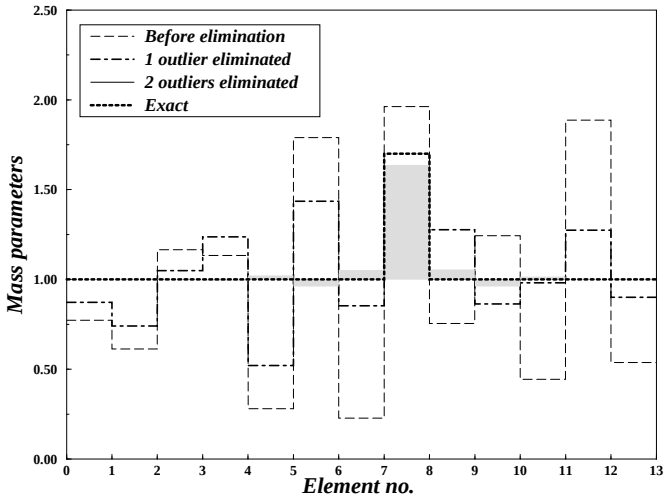


FIG. 2.11: Exemple d'élimination automatique de mesures aberrantes à l'aide du test du χ^2 : paramètres de masse.

Indicateurs a posteriori sur la solution. Une fois la matrice de covariance $\boldsymbol{C}$ calculée, on peut considérer comme dans le cas linéaire le calcul d'indicateurs a posteriori : $\langle\sigma^{post}\rangle = [\det(\boldsymbol{C})]^{1/2n}$ (moyenne géométrique des écarts-types de la loi gaussienne tangente *a posteriori*) ou $\langle\gamma\rangle = [\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_M^{-1})]^{1/2n}$ (rapport des moyennes géométriques des écarts-types *a posteriori* et *a priori*, qui mesure le gain relatif d'information apporté par l'inversion). Voici par exemple les valeurs obtenues pour la poutre avec masselotte, avec 26 inconnues :

	modes 3,4 mesurés	modes 3-4 simulés	modes 1 à 5 simulés
$\langle\sigma^{post}\rangle$	0.453	0.421	0.0448
$\langle\gamma\rangle$	0.592	0.575	0.089

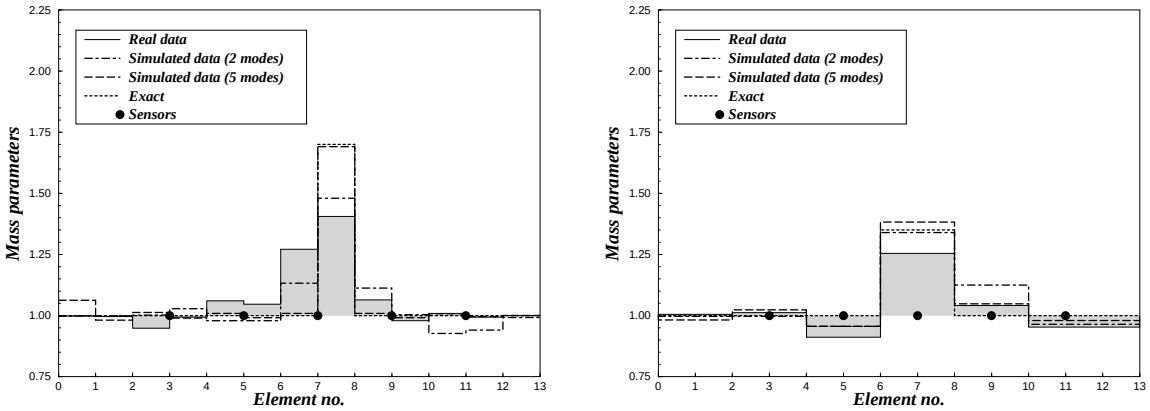


FIG. 2.12: Données réelles (modes n°s 3,4) et comparaison avec des données simulées, paramètres de masse (à gauche : cas à 26 inconnues, à droite : cas à 12 inconnues).

et on voit que leur classement relatif recoupe celui, apparent sur la figure 2.12, de la qualité des valeurs des paramétres de masse fournies par l'inversion.

Conclusion et perspectives. L'algorithme d'inversion gaussienne non-linéaire, produit de cette étude, est assez général et pourra donc voir ultérieurement des applications autres que les problèmes d'identification par correction paramétrique, motivation initiale de ce travail. Toutefois, l'exploitation de l'aspect gaussien au niveau du dépouillement et de l'interprétation *a posteriori* des résultats est encore insuffisante ; les prochains développements devront l'approfondir, afin de pouvoir exploiter au maximum les résultats du calcul.

La dernière phase de cette étude, en cours de réalisation, comprend l'inversion de données expérimentales sur une structure (coque cylindrique) avec défaut. Les résultats obtenus par l'inversion gaussienne non-linéaire seront comparés avec ceux obtenus par une autre méthode de recalage, développée par INTESPACE [79], déjà implantée au sein d'EDF/AMV. Ainsi, l'inversion gaussienne non-linéaire aura, au terme de ce travail, subi les épreuves des données réelles et de la comparaison.

Chapitre 3

Approche énergétique en rupture fragile et équations intégrales sur domaines variables

3.1 Introduction

La considération des variations premières et secondes de fonctionnelles intégrales dans une transformation de domaine géométrique intervient dans nombre de situations où le domaine lui-même est une variable importante. Parmi celles-ci figurent les problèmes d'optimisation de forme, où la fonction-objectif et les contraintes sont généralement des intégrales posées sur le domaine de la structure ou sa frontière et faisant intervenir les variables mécaniques (déplacement, contraintes...), qui dépendent elles-mêmes de la forme de la structure. Les problèmes inverses géométriques, où le domaine est partiellement inconnu (identification de fissures, défauts,...) constituent une famille de problèmes voisine de la précédente. La partie inconnue du domaine (ou de sa frontière) est généralement recherchée de façon à minimiser une distance entre valeurs calculées (pour une configuration géométrique fixée) et données (pour la configuration géométrique réelle, inconnue) d'une certaine grandeur mécanique. Enfin, les problèmes d'évolution en mécanique de la rupture ou de l'endommagement font fréquemment intervenir des fronts géométriques dont la propagation suit un critère de type Griffith, dans lequel la dérivée seconde de l'énergie potentielle à l'équilibre par rapport à des perturbations du front joue un rôle essentiel. Toutes ces situations ont pour point commun de faire intervenir les variations de fonctionnelles intégrales qui dépendent du domaine géométrique de manière directe (par l'intermédiaire du support d'intégration) mais aussi indirecte (par l'intermédiaire de l'état mécanique, solution d'un problème aux limites).

Pour de nombreuses raisons, il est important de pouvoir évaluer les variations premières et secondes de telles fonctionnelles. La plupart des algorithmes d'optimisation utilisent les dérivées premières de la fonctionnelle optimisée, les algorithmes de type Newton utilisant même les dérivées secondes. De plus, une évaluation précise des dérivées secondes donne le moyen pratique de vérifier a posteriori que la solution vérifie les conditions d'optimalité. Enfin, nous avons évoqué plus haut le rôle joué par la dérivée seconde de l'énergie potentielle dans certains problèmes. Par ailleurs, il est bien connu que l'estimation de telles dérivées par différences finies (qui ici reposent sur des perturbations petites mais finies du domaine géométrique) sont numériquement coûteuses, en raison de la nécessité de résoudre un problème aux limites sur chaque domaine perturbé, et très sensibles aux petites erreurs faites sur l'évaluation de la fonctionnelle elle-même (Tikhonov & Arsenin

[92]).

Ceci conduit à s'intéresser aux méthodes analytiques de dérivation dans une transformation de domaine. Elles consistent essentiellement à décrire une variation du domaine par rapport à sa configuration actuelle par la donnée d'un champ $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y})$ de « vitesse »de transformation de la frontière. Cela permet de reprendre les résultats classiques de la cinématique des milieux continus, et notamment les formules de dérivation matérielles d'intégrales, à ceci près que le « mouvement », utilisé pour décrire mathématiquement un changement infinitésimal du domaine support d'un problème aux limites et non une transformation matérielle, est fictif. Simon [83] a traité le concept mathématique de dérivée par rapport au domaine. D'autres travaux (voir par exemple Haug et coll. [41], Petryk et Mroz [68]) sont orientés vers les méthodes d'éléments finis. Pourtant, le fait que tous les problèmes évoqués ont le domaine ou sa frontière comme variable principale, il est naturel d'envisager l'utilisation de méthodes d'équations intégrales, qui représentent en quelque sorte la modélisation « minimale ». On cherche alors à calculer les variations de fonctionnelles en combinant les équations intégrales de surface et la dérivation par rapport à un domaine variable. Cela peut être accompli au moyen soit de la dérivation directe, soit de la méthode de l'état adjoint.

Méthode de l'état adjoint. La fonctionnelle intégrale est augmentée d'un terme de contrainte exprimant que l'équation d'état doit rester vérifiée sur les domaines perturbés. L'étude des variations de ce lagrangien conduit à isoler une valeur spécifique pour le champ des multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte : c'est l'*état adjoint*. La variation de la fonctionnelle peut alors être calculée dans toute transformation infinitésimale du domaine [Bon93], [Bon92], ([Bon93]). Cette approche est élégante et efficace : d'une part une expression explicite de la première variation par rapport au domaine de la fonctionnelle intégrale est obtenue, d'autre part elle permet l'évaluation numérique du gradient au moindre coût. Elle ne donne par contre pas la valeur des variations de l'état lui-même, contrairement à la dérivation directe. D'autre part, elle repose sur l'utilisation de formules de dérivation de type « eulérien », ce qui est problématique par exemple en mécanique de la rupture en raison du fait que les singularités élastiques en front de fissure sont aggravées par l'emploi de dérivées « eulériennes »et deviennent non-intégrables. La méthode de l'état adjoint est l'objet du chapitre 4.

Dérivation directe. Elle consiste à dériver dans une transformation de domaine donnée les équations de l'état mécanique. Cela permet le calcul de la dérivée de l'état, utilisé comme résultat intermédiaire pour l'évaluation de la dérivée de la fonctionnelle intégrale. Cette méthode permet l'emploi de formules de dérivation de type lagrangien, ce qui la rend applicable par exemple en présence de singularités en front de fissure.

Ce chapitre présente la dérivation directe des équations intégrales de l'élasticité (section 3.2) et son application à l'approche énergétique de la mécanique de la rupture linéaire : « méthode θ-intégrale », transposition de la « méthode θ »classique (section 3.3 et suivantes).

3.2 Dérivation directe des équations intégrales dans une transformation géométrique

Transposant les concepts classiques de la cinématique des milieux continus (voir par exemple Salençon [80]), le changement du domaine est décrit mathématiquement par une

famille de difféomorphismes $\boldsymbol{F}$ dépendant d'un *paramètre cinématique* (temps fictif) η (description de type « lagrangien ») :

$$\boldsymbol{X} \in \Omega \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta) \in \Omega(\eta) \text{et} (\forall \boldsymbol{X} \in \Omega) \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, 0) = \boldsymbol{X} \tag{3.1}$$

On définit la *vitesse de transformation* $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \eta)$, « vitesse »au point courant $\boldsymbol{x}$, en représentation « eulérienne », associée à la transformation $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \eta) = \boldsymbol{F}_{,\eta}(\boldsymbol{X}, \eta) \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta) \tag{3.2}$$

La dérivée « lagrangienne »$\overset{\star}{f}$ d'une fonction quelconque $f(\boldsymbol{x}, \eta)$, représentative des variations de f en suivant le « mouvement[1] »$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta)$, est donnée par :

$$\overset{\star}{f}\,(\boldsymbol{x}, \eta) = f_{,\eta}(\boldsymbol{x}, \eta) + \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}, \eta).\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \eta) \tag{3.3}$$

Cette définition, appliquée habituellement à des transformations matérielles, est classique en cinématique des milieux continus ($\boldsymbol{\nabla} f$ désigne le gradient eulérien de f, par rapport à $\boldsymbol{x}$).

Les dérivées matérielles d'intégrales sur un domaine $\Omega(\eta)$ ou une surface $S(\eta)$ transportés par la transformation géométrique $\boldsymbol{F}$ sont données par les formules :

$$\frac{d}{d\eta} \int_{\Omega(\eta)} f \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega(\eta)} \left[\overset{\star}{f} + f \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \right] \mathrm{d}S \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{d\eta} \int_{S(\eta)} f \, \mathrm{d}S = \int_{S(\eta)} \left[\overset{\star}{f} + f \operatorname{div}_S \boldsymbol{\theta} \right] \mathrm{d}S \tag{3.5}$$

La formule précédente est alors appliquée à l'équation intégrale qui gouverne l'état pour une configuration géométrique fixée (« équation d'état »). Cette équation intégrale doit être prise sous forme régularisée. Le résultat est exprimé en termes des dérivées lagrangiennes des variables sur la frontière, l'évolution de ces dernières étant ainsi suivie en accompagnant le mouvement de la frontière. Par exemple, à partir de l'équation intégrale régularisée (1.3) pour l'élastostatique, nous avons établi le résultat suivant, qui gouverne les dérivées $\overset{\star}{\boldsymbol{u}}, \overset{\star}{\boldsymbol{t}}$ des variables élastiques à la frontière [Bon90], [Bon95b] :

$$\begin{aligned} &\kappa \, \overset{\star}{u}_k \, (\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \left\{ [\overset{\star}{u}_i \, (\boldsymbol{y}) - \overset{\star}{u}_i \, (\boldsymbol{x})] \Sigma^k_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) - \overset{\star}{t}_i \, (\boldsymbol{y}) U^k_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} t_i(\boldsymbol{y}) \left\{ [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] U^k_{i,r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + U^k_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) D_r \theta_r(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] D_{rj} u_i(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{is}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{3.6}$$

L'équation intégrale dérivée ci-dessus est régularisée. Son second membre est linéaire par rapport à la vitesse de transformation $\boldsymbol{\theta}$ et dépend des variables élastiques $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$, qui doivent donc être connues à ce stade. Le même opérateur intégral agit sur $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ dans l'équation intégrale initiale (1.3) et sur les dérivées $(\overset{\star}{\boldsymbol{u}}, \overset{\star}{\boldsymbol{t}})$ ici.

La méthode de dérivation matérielle d'équations intégrales s'applique *a priori* à toutes situations décrites en termes d'équations intégrales de frontière régularisées : élastodynamique et acoustique, solides fissurées,... et les propriétés mentionnées ci-dessus demeurent vraies.

[1] Les guillemets, qui rappellent que les termes correspondants font référence à une transformation F géométrique et non matérielle, seront abandonnés dans la suite pour ne pas alourdir l'écriture .

La validité mathématique de la dérivation n'est pas évidente si elle est appliquée à des équations intégrales non régularisées, singulières en valeur principale ou partie finie, mais est en revanche parfaitement licite pour les équations intégrales régularisées, qui ne présentent que des singularités intégrables. On peut donc souligner que la possibilité d'obtenir des équations intégrales dérivées est un sous-produit important de l'approche de régularisation indirecte (chapitre 1).

Supposant le domaine décrit en pratique par un nombre N fini de paramètres (parfois dits « de conception ») : centre, rayon, position des noeuds du maillage,... le calcul du gradient d'une fonctionnelle intégrale par cette approche demande la résolution de N équations intégrales dérivées. Celles-ci sont écrites en termes des *mêmes opérateurs intégraux* que l'équation intégrale d'état. Le supplément de calcul numérique nécessaire à l'évaluation du gradient est donc restreint à la construction de N nouveaux seconds membres et la résolution de N systèmes linéaires, chacun d'eux utilisant la matrice déjà construite et factorisée lors de la résolution de l'équation d'état.

La dérivation directe permet d'évaluer non seulement le gradient d'une fonctionnelle intégrale, mais encore les sensibilités en tout point du domaine des variables mécaniques par rapport au changement de domaine.

3.3 Formulations intégrales pour l'approche énergétique de la rupture fragile

Considérons un solide Ω fissuré, Γ désignant la (réunion des) fissures présentes. Il est maintenant bien connu que beaucoup de problèmes de Mécanique de la rupture peuvent être abordés par des méthodes énergétiques. En particulier, la dérivée première de l'énergie potentielle à l'équilibre W par rapport à une extension du front de fissure $\partial\Gamma$ définit le taux de restitution d'énergie $\Gamma(s)$ (caractéristique de la dissipation d'énergie par avancement de la fissure Γ, et relié à la singularité des contraintes dans le cas élastique), par :

$$\int_\Gamma G\theta_\nu \,\mathrm{d}s + W_{,\Omega}.\boldsymbol{\theta} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta \tag{3.7}$$

Θ désignant l'ensemble de toutes les vitesses de transformation $\boldsymbol{\theta}$ décrivant une extension du front de fissure. Ensuite, l'étude de l'extension réelle de la fissure (calcul de la vitesse d'extension du front, étude de l'unicité de la solution en vitesse et de l'instabilité éventuelle de cette extension) au moyen d'un critère du type Griffith $g(G) \leq 0$ nécessite celle des variations de G, donc le calcul des dérivées secondes de W.

3.3.1 Principe des méthodes énergétiques en Mécanique de la rupture

Les premières applications du point de vue énergétique ont consisté à calculer, au moyen de modèles éléments finis, des valeurs numériques approchées de la dérivée première de l'énergie potentielle à l'équilibre W dans une extension de fissure (et donc du taux de restitution d'énergie G), obtenues par différences finies. C'est la méthode de l'extension virtuelle de fissure, proposée par Hellen [42] et Parks [67] : pour un problème bidimensionnel, on suppose une extension (virtuelle) de la fissure Δl et on calcule la variation de l'énergie potentielle ΔW de la structure fissurée. La valeur de G peut alors être obtenue par sa définition :

$$G \simeq -\frac{\Delta W}{\Delta l}$$

La méthode des différences finies peut engendrer des erreurs numériques non contrôlées suivant le choix de l'accroissement virtuel de fissure Δl, en raison des difficultés numériques déjà mentionnées liées à l'opération de dérivation numérique.

Une approche pour le problème continu est développée par exemple dans le cadre général des matériaux standard généralisés (Halphen & Nguyen [39], Nguyen & Stolz [64], Pradeilles-Duval [70]) dont le propos est de donner un formalisme unique pour le traitement de nombreux problèmes mécaniques dans lesquels intervient une dissipation, celle-ci pouvant être interne (plasticité,...) ou concentrée le long de surfaces ou interfaces (extension de fissures, endommagement, changement de phase,...). Cette approche a conduit à des résultats généraux pour la formulation du « problème en vitesse »(effet d'un incrément de chargement sur la structure) et les conditions de stabilité et de non-bifurcation de la réponse de la structure à l'incrément. La particularisation de cette approche à la Mécanique de la rupture permet de relier la vitesse réelle d'extension de fissure $\boldsymbol{\mu}$ à la vitesse d'évolution du chargement $\boldsymbol{\lambda}'$ par l'inégalité variationnelle

$$\mu \in \Theta_c, \forall \theta \in \Theta_c \qquad (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}).(\Phi_{,\Gamma\Gamma}.\boldsymbol{\theta} + W_{,\Gamma\lambda}.\boldsymbol{\lambda}') \geq 0 \tag{3.8}$$

(Φ désignant la somme de l'énergie potentielle à l'équilibre $W(\boldsymbol{\lambda}, \Gamma)$ et de l'énergie potentielle de dissipation $W^d(\Gamma) = G_c \int_\Gamma \mathrm{d}S$) qui tient compte du critère de Griffith (de seuil G_c), et dans laquelle $\Theta_c \in \Theta$ désigne l'ensemble des vitesses d'extension compatibles avec le critère de Griffith.

Analyse de la stablité et de la bifurcation. Pour l'analyse de la stabilité (contrôlabilité par la variable de chargement $\boldsymbol{\lambda}$) et de la bifurcation, la forme quadratique

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}.\Phi_{,\Gamma\Gamma}.\boldsymbol{\theta} \tag{3.9}$$

joue un rôle très important. Ensuite, suivant Nguyen [63], l'extension de la fissure à partir de l'état d'équilibre actuel est stable si

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0 \qquad \forall \theta \in \Theta_c,\ \theta_\nu \neq \mathbf{0} \tag{3.10}$$

(où la forme quadratique Q est donnée par $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}.\Phi_{,\Gamma\Gamma}.\boldsymbol{\theta}$) ; la solution du problème en vitesse d'extension (3.3) est de plus unique si la condition plus forte

$$Q(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) > 0 \qquad \forall \theta \in \Theta_c\ \forall \mu \in \Theta_c,\ \theta_\nu \neq \mu_\nu \tag{3.11}$$

est réalisée.

L'évaluation pratique des dérivées première $W_{,\Gamma}.\boldsymbol{\theta}$ et secondes $W_{,\Gamma\Gamma}W_{,G\lambda}$ de W joue ainsi un rôle important pour la simulation incrémentale du processus d'extension de la fissure. Cette étape peut être accomplie par la « méthode θ »(Destuynder et coll. [29], Mialon [58], Suo et Combescure [88]), orientée vers l'emploi des éléments finis, ou la « méthode θ-intégrale »résultant de nos travaux ; toutes deux reposent sur un calcul analytique de dérivées de W et une discrétisation du résultat. La dérivation analytique est plus précise et plus économe en temps de calcul que l'emploi de différences finies. L'économie provient du fait que le calcul des dérivées de l'énergie potentielle est fait sur une configuration géométrique fixe.

3.3.2 La « méthode θ »

Rappelons brièvement le principe de la « méthode θ ». L'énergie potentielle à l'équilibre W, donnée (en élasticité linéaire et en l'absence d'efforts de volume) par :

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V - \int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S$$

($\boldsymbol{u}$ étant le déplacement solution du problème d'équilibre élastique avec données aux limites $\boldsymbol{u}^D = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}^D$) est dérivée dans une transformation de domaine, pour obtenir, après prise en compte de l'équation d'équilibre élastique sous forme variationnelle, l'expression :

$$\overset{\star}{W} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}) \right\} \mathrm{d}V \tag{3.12}$$

On note que l'expression ci-dessus donne la dérivée de W en fonction de $\boldsymbol{\theta}$ et de l'état élastique actuel : conformément à la théorie et de la même manière que l'intégrale J, la dérivée de l'état élastique dans la transformation de domaine n'apparaît pas. La matérialisation de cette propriété dans (3.12) repose sur une utilisation astucieuse du caractère symétrique de la formulation variationnelle de l'équilibre élastique.

L'expression (3.12), reportée dans (3.7), se prête à une discrétisation par éléments finis. La construction d'une base $\boldsymbol{\theta}_1, \ldots \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{NC}}$ définissant un sous-espace de dimension finie NC de Θ et l'évaluation de $\overset{\star}{W}$ ci-dessus pour chaque $\boldsymbol{\theta}_k$ permet ainsi à partir de (3.7) la construction d'un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales de G en NC noeuds du front $\partial\Gamma$. Le calcul de la vitesse réelle d'extension au moyen d'un critère de type Griffith peut ensuite être développé, sous réserve d'établir les expressions des dérivées de $\overset{\star}{W}$, éq. (3.12), dans une variation du domaine ou du chargement.

Précisons que (3.12) est obtenue par dérivation matérielle d'intégrales au moyen des formules (3.4-3.5), de façon à faire apparaître des dérivées de type lagrangien. Ceci présente l'avantage sur une dérivation de type eulérien de ne pas conduire à des singularités élastiques non intégrables le long de $\partial\Gamma$. En contrepartie, la formule (3.12) masque le fait, établi par ailleurs [58], [70] que la valeur prise par $\overset{\star}{W}$ dépend uniquement de la trace normale $\theta_\nu \mid_{\partial\Gamma}$ de $\boldsymbol{\theta}$ le long de $\partial\Gamma$ et non de son prolongement sur Ω. On a en quelque sorte troqué la lisibilité du résultat contre sa calculabilité effective.

3.3.3 La « méthode θ-intégrale »

Les méthodes d'équations intégrales de frontière sont d'un emploi fréquent en Mécanique de la rupture. Les avantages habituellement procurés par les méthodes d'éléments de frontière sont liés au gain d'une dimension d'espace dans la formulation et la discrétisation. De plus, si on s'intéresse au suivi numérique de trajets d'extension de fissures dans des situations tridimensionnelles, il est beaucoup plus facile de réactualiser le maillage (en éléments de frontière) d'une surface que le maillage éléments finis d'un volume, et ce d'autant plus que le problème du remaillage est généralement compliqué par la nécessité de transporter un maillage raffiné au voisinage du front de fissure. Ces remarques militent pour l'utilisation de méthodes intégrales pour la formulation de problèmes d'extension, quand cela est possible ; la mise en oeuvre de ces dernières, par rapport aux méthodes d'éléments finis, est toutefois complexe en présence de non-linéarités géométriques ou de comportement.

Ces considérations nous ont incité à développer les bases d'une approche « θ-intégrale »de problèmes tridimensionnels de Mécanique linéaire de la rupture, c'est-à-dire à formuler

une chaîne de traitement de problèmes d'extension qui permette de mener le calcul effectif des dérivées première et seconde de W par rapport à une extension de $\partial\Gamma$ en ne manipulant que des quantités (données ou inconnues) portées par la *frontière* du solide fissuré. Celle-ci repose sur le calcul des dérivées de W à l'aide de l'expression suivante, ne contenant que des intégrales de frontière :

$$W = \frac{1}{2}\int_{S_u} \boldsymbol{u}^D.\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{S_T} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{t}^D\,\mathrm{d}S \tag{3.13}$$

dont les conditions d'application sont restrictives : linéarité géométrique et de comportement, absence d'efforts de volume[2].

La méthode θ-intégrale ne conduit pas à des résultats nouveaux concernant les principes ou les aspects physiques de l'approche énergétique de la Mécanique de la rupture. Sa contribution originale réside dans la reformulation de ces approches en termes d'éléments de frontière et en leur mise en oeuvre numérique dans ce contexte. Deux variantes de l'approche θ-intégrale, reposant sur l'emploi de formulations intégrales du type collocation et variationnelle respectivement, ont été abordées.

3.4 Utilisation des équations intégrales régularisées en déplacements

Les méthodes d'éléments de frontière pour les solides élastiques fissurés reposent le plus souvent sur la discrétisation d'équations intégrales en traction. On a évoqué au chapitre 1 les difficultés liées à leur régularisation. De plus, ces formulations sont lourdes et la forme régularisée du terme résiduel A^k_{ij} (1.5) renferme les éléments de courbure de la fissure Γ. Prendre la dérivée lagrangienne des équations intégrales en traction conduirait donc à une équation intégrale dérivée très lourde et comprenant des quantités (dérivées lagrangiennes de courbures) délicates à manipuler sur le problème discrétisé.

On est ainsi amené à chercher à définir un traitement reposant sur les équations intégrales en déplacements, d'un maniement plus facile mais moins naturellement associées aux solides fissurés[3]. L'approche multirégion (Cruse [28]) répond à ce souci. Elle consiste à décomposer le domaine fissuré Ω en deux parties complementaires fictives Ω^+ et Ω^-, séparées par une surface S qui contient la fissure Γ (figure 3.1). Le problème du solide fissuré est alors transformé en deux problèmes élastiques couplés, pour chacun desquels une équation intégrale en déplacements classique (1.3) peut être utilisée. Cette approche de la méthode θ-intégrale, initialement proposée dans [BX91], est générale du point de vue de la géométrie et des conditions aux limites ; elle a constitué le thème du travail de thèse de H. Xiao [100] fait sous ma direction (voir également les références [BX93], [BH93], [BX95]).

La dérivée première de W dans une extension virtuelle de fissure (vitesse $\boldsymbol{\theta}$ laissant fixe la frontière extérieure) et en l'absence de variation de chargement (données aux frontières $\boldsymbol{u}^D$ et $\boldsymbol{t}^D$ invariables) est simplement donnée par :

$$W_{,\Gamma}.\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\int_{S_u} \overset{\star}{\boldsymbol{t}}\,.\boldsymbol{u}^D\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\,\overset{\star}{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}S \tag{3.14}$$

[2]Notons cependant que certaines classes d'efforts de volume, telles que les intégrales de volume qui apparaissent dans la méthode des équations intégrales sont transformables en intégrales de frontière (ce qui comprend notamment la gravité, l'inertie de rotation, les effets d'une distribution stationnaire de température), pourraient être incorporées.

[3]En raison de leur dégenerescence sur la fissure, signalée en section 1.2.

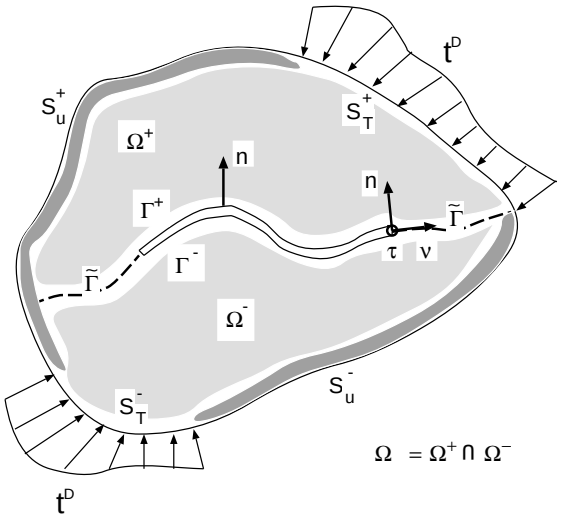


FIG. 3.1: Solide élastique fissuré Ω : méthode multirégions

L'évaluation de cette expression demande le calcul de la dérivée première $(\overset{\star}{\boldsymbol{u}}, \overset{\star}{\boldsymbol{t}})$ des variables élastiques portées par la frontière pour $\boldsymbol{\theta}$ donné, qui est gouvernée sur chaque sous-domaine $\Omega^{\pm}$ par l'équation intégrale (3.6). Substituer à $W_{\Gamma}.\boldsymbol{\theta}$ l'expression (3.14) de $\overset{\star}{W}$ dans l'équation variationnelle (3.7) permet, après discrétisation, le calcul de G.

La construction du problème en vitesse repose alors sur le calcul des dérivées de (3.14) dans l'extension réelle de vitesse $\boldsymbol{\mu}$ (pour un chargement invariable) et par rapport au chargement (pour une fissure fixe), qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta}(W_{,\Gamma}.\boldsymbol{\theta}) &= \boldsymbol{\theta}.(W_{,\Gamma\Gamma}.\boldsymbol{\mu} + W_{,\Gamma\lambda}.\boldsymbol{\lambda}') \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{S_u} \mathrm{d}v\boldsymbol{t}.\boldsymbol{u}^D\,\mathrm{d}S - \int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\,\mathrm{d}v\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\int_{S_u}\left[\overset{\star}{\boldsymbol{t}}.(\boldsymbol{u}^D)' + \overset{\star}{\boldsymbol{t}}'.\boldsymbol{u}^D\right]\mathrm{d}S - \int_{S_T}\left[\boldsymbol{t}^D.\,\overset{\star}{\boldsymbol{u}}' + (\boldsymbol{t}^D)'.\,\overset{\star}{\boldsymbol{u}}\right]\mathrm{d}S\right\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Cette expression nécessite le calcul des dérivées secondes ($\mathrm{d}v\boldsymbol{u}$, $\mathrm{d}v\boldsymbol{t}$) et $(\overset{\star}{\boldsymbol{u}}', \overset{\star}{\boldsymbol{t}}')$ de l'état élastique ($(^{\vee})$ désigne la dérivée dans la transformation de vitesse $\boldsymbol{\mu}$ et à chargement constant). Celles-ci sont gouvernées par des équations intégrales obtenues par dérivation de (3.6) dans l'extension réelle de vitesse $\boldsymbol{\mu}$ (pour un chargement invariable) et par rapport au chargement (pour une fissure fixe) ; elles sont données dans la thèse [100].

Les équations intégrales en déplacement et leurs dérivées premières et secondes, nécessaire à la mise en oeuvre de cette version de la méthode θ-intégrale, sont formulées en termes du même opérateur intégral, qui ne doit donc être construit et factorisé qu'une seule fois, les équations intégrales dérivées ne différant que par leurs seconds membres. On s'attend ainsi à ce que le temps de calcul nécessaire à la construction du problème en vitesse d'extension (3.3) pour une configuration donnée soit du même ordre de grandeur que celui nécessaire pour la simple résolution numérique de l'équilibre élastique.

Les résultats numériques obtenus jusqu'ici ne portent que sur le calcul de G, la phase suivante (construction et résolution du problème en vitesse d'extension) n'ayant pas à ce jour été achevée. La mise en oeuvre numérique de la méthode θ-intégrale repose notamment sur le développement de fonctions d'interpolation vectorielles $\boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{\xi})$ permettant

la définition d'un prolongement des vitesses normales d'extension $(\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{\nu})\ |_{\partial\Gamma}$, de la forme :

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{NC}} \boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{\xi})\theta_k$$

où θ_k désigne la valeur de θ_ν au noeud k du front de fissure. Ces fonctions sont construites de sorte que leur support géométrique soit restreint aux couronnes d'éléments de frontière immédiatement adjacents au front, et d'autre part que l'interpolation ci-dessus se réduise à une interpolation unidimensionnelle classique quand $\boldsymbol{y} \in \partial\Gamma$.

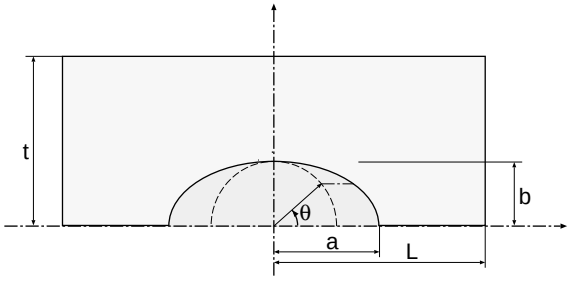


FIG. 3.2: Fissure semi-elliptique débouchante : notations géométriques pour le plan de fissure

Exemple numérique : fissure semi-elliptique débouchante. La fissure semi-elliptique débouchante située sur le plan $z = 0$ dans un solide parallélipipédique ($-L \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq t$, $-H \leq z \leq H$), soumis à une traction uniforme $\pm p\boldsymbol{e}_z$ en $z = \pm H$, est un problème classique en mécanique de la rupture (voir fig. 3.2 pour les notations géométriques). En raison des symétries géométriques, seuls le quart $x \geq 0, z \geq 0$ de la frontière extérieure du solide et la moitié $x \geq 0$ du plan de fissure ont été maillés. Au total 136 éléments à 9 noeuds ont été utilisés pour les résultats reproduits ci-après ; le (demi-) front de fissure représente 6 côtés d'éléments, de sorte que G et la vitesse d'extension virtuelle du front sont représentées par interpolation quadratique de 13 valeurs nodales. Deux variantes de maillage (figure 3.3) sont utilisées, les espacements angulaires (au sens de la figure 3.2) entre deux noeuds du front étant respectivement uniformes

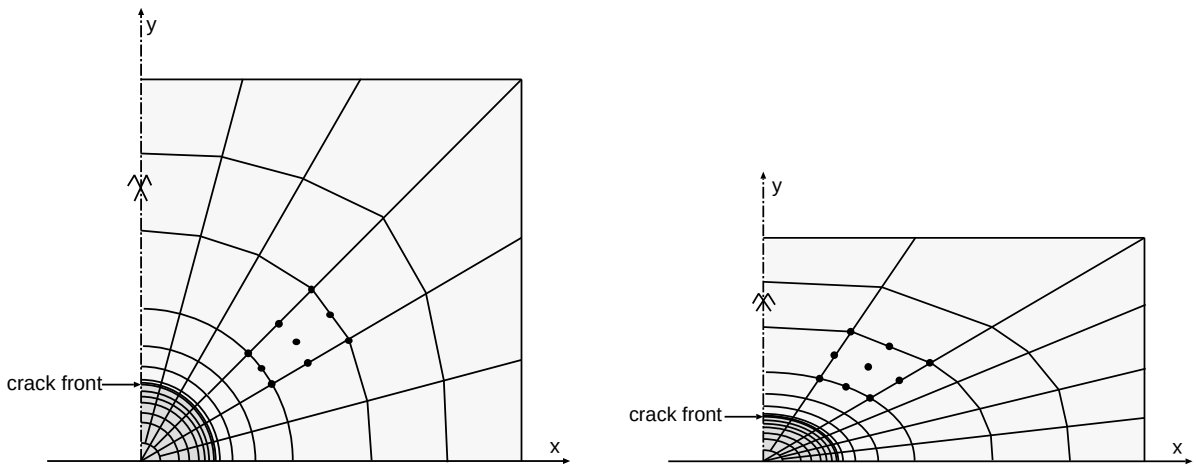


FIG. 3.3: Fissure semi-elliptique débouchante : maillage par éléments de frontière du plan de fissure (à gauche : maillage M1, $b = a$; à droite, maillage M2, $b-0.6a$)

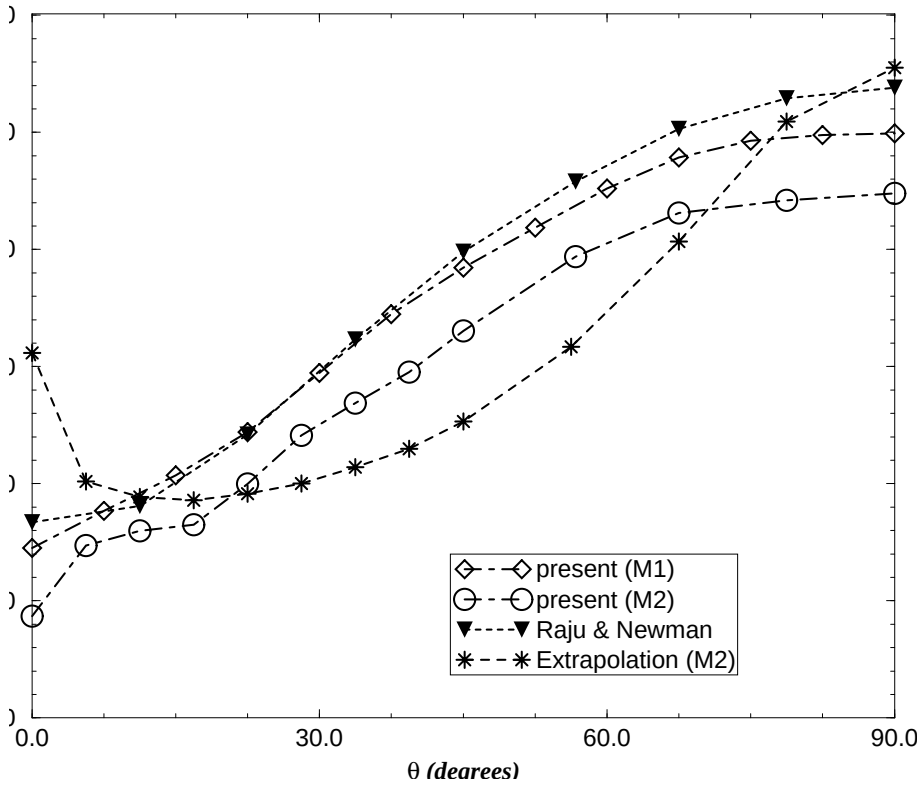


FIG. 3.4: Fissure semi-elliptique débouchante allongée ($b = 0.4a$) : comparaisons.

($\Delta\theta = \pi/24$, maillage M_1) ou non-uniformes ($\Delta\theta = \pi/32$ (resp. $\pi/16$) for $\theta \in [0, \pi/4]$ (resp. $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$),, maillage M_2 ; $\theta = 0$ correspond au point de débouchement du front.

Les figures 3.4 à 3.7 présentent des comparaisons sur le facteur d'intensité de contraintes adimensionnel $K_I^\star = K_I/K_I^e$, où :

$$K_I^e = \frac{1}{Q} p\sqrt{\pi a} \qquad Q = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} d\theta \quad k^2 = \begin{cases} 1 - (b/a)^2 & (b \leq a) \\ 1 - (a/b)^2 & (b \geq a) \end{cases}$$

Les valeurs numériques de $K_I^\star$ ont été obtenues par la formule d'Irwin à partir des valeurs de G calculées par méthode θ-intégrale. Elles sont comparées à des valeurs proposées par Newman & Raju [62] (provenant de simulations par éléments finis) et par Tanaka & Itoh [90] (figures 3.5, 3.6) (obtenues à l'aide d'un élément spécial perfectionné qui permet la représentation de la singularité usuelle en front de fissure mais aussi celle, différente et fonction de ν, au point de débouchemment). On s'attend à ce que ces dernières valeurs donnent la meilleure référence près du point de débouchement. Les figures 3.5, 3.6 mettent en évidence la meilleure aptitude du maillage M2, comparé à M1, à reproduire le pic secondaire près du point de débouchement. De façon générale, nos résultats présentent un accord satisfaisant avec les résultats de [62], [90]. Les valeurs de $K_I^\star$ obtenues par extrapolation de l'ouverture normale de fissure sont également reportées ; elles présentent un accord moins satisfaisant, bien que la discrétisation ait utilisé des éléments avec noeud au quart.

3.5 Utilisation de formulations intégrales variationnelles

L'approche décrite dans la section précédente ne repose pas sur l'utilisation d'un principe variationnel et une formulation symétrique. Pour cette raison, le calcul de la dérivée n^{eme} de l'énergie potentielle par rapport au domaine nécessite celui de la dérivée n^{eme} de l'état élastique, tandis que la méthode θ classique se contente de la $(n-1)^{eme}$. Ceci est pénalisant en pratique, et n'est pas très élégant. En particulier les seconds membres de l'équation intégrale gouvernant les dérivées *secondes* de l'état élastostatique, obtenue par dérivation de (1.7) dans un champ de vitesses de transformation $\boldsymbol{\mu}$ [100], ont des expressions volumineuses, de programmation délicate et entraînant un volume d'intégrations numériques élevé. De plus, des difficultés ont été rencontrées et sont à ce jour mal élucidées : sensibilité de l'intégration numérique au maillage et au nombre de points de Gauss sur les éléments situés le long du front, support des fonctions d'interpolation $\boldsymbol{B}^k$.

C'est pourquoi, les inconvénients de l'approche exposée dans la section précédente devenant progressivement apparents, l'idée de faire appel aux formulations intégrales variationnelles (section 1.6), s'est progressivement imposée à nous. En effet, grâce au caractère symétrique de ces dernières [Bon93], [Bon94], [Bon94], les dérivées de W admettent des expressions analogues par leur structure à celles de la méthode θ classique.

Cette solution, présentant au plan conceptuel de nombreux avantages, est assez lourde à mettre en oeuvre en toute généralité, notamment en raison de la relative complexité des expressions des formes bilinéaire et linéaire entrant dans la formulation intégrale-variationnelle et plus encore de leurs dérivées par rapport au domaine. Des simplifications apparaissent si on considère des catégories particulières de problèmes. A ce jour, nous

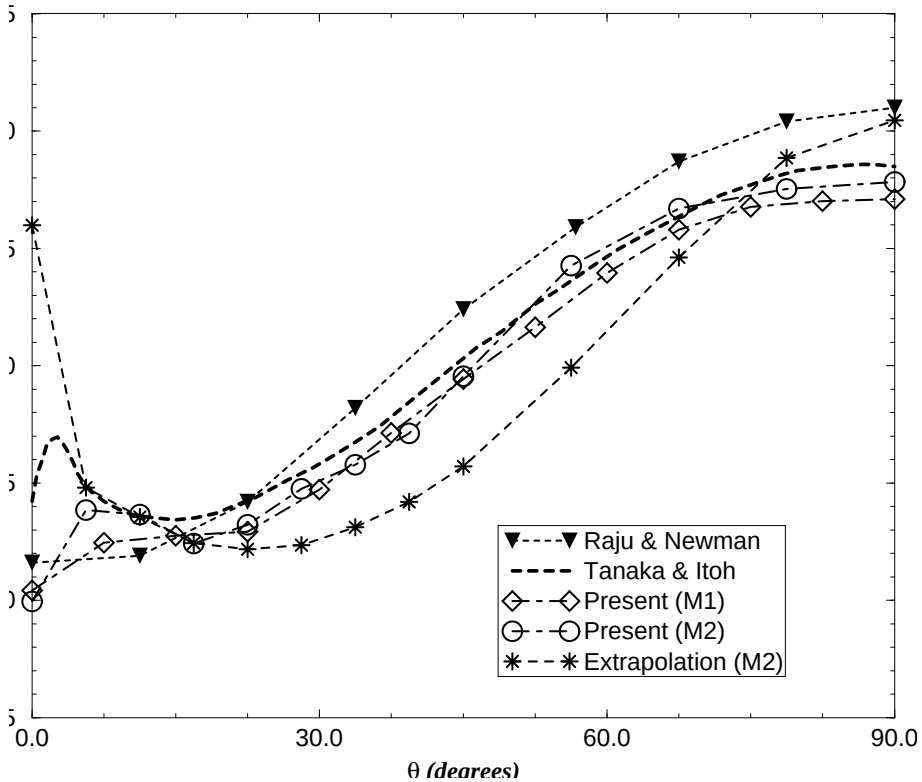


FIG. 3.5: Fissure semi-elliptique débouchante allongée ($b = 0.6a$) : comparaisons.

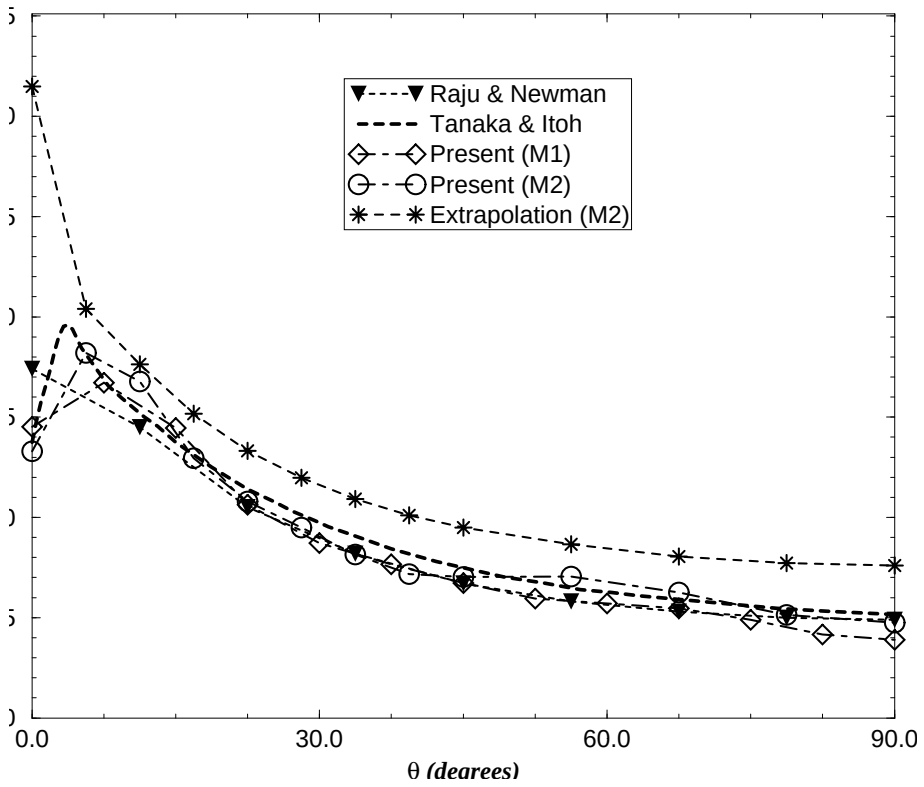


FIG. 3.6: Fissure semi-circulaire débouchante ($b = a$) : comparaisons.

avons développé en détail [Bon99] cette voie pour la situation modèle d'une fissure plane de forme quelconque dans un milieu élastique infini tridimensionnel. La démarche suivie

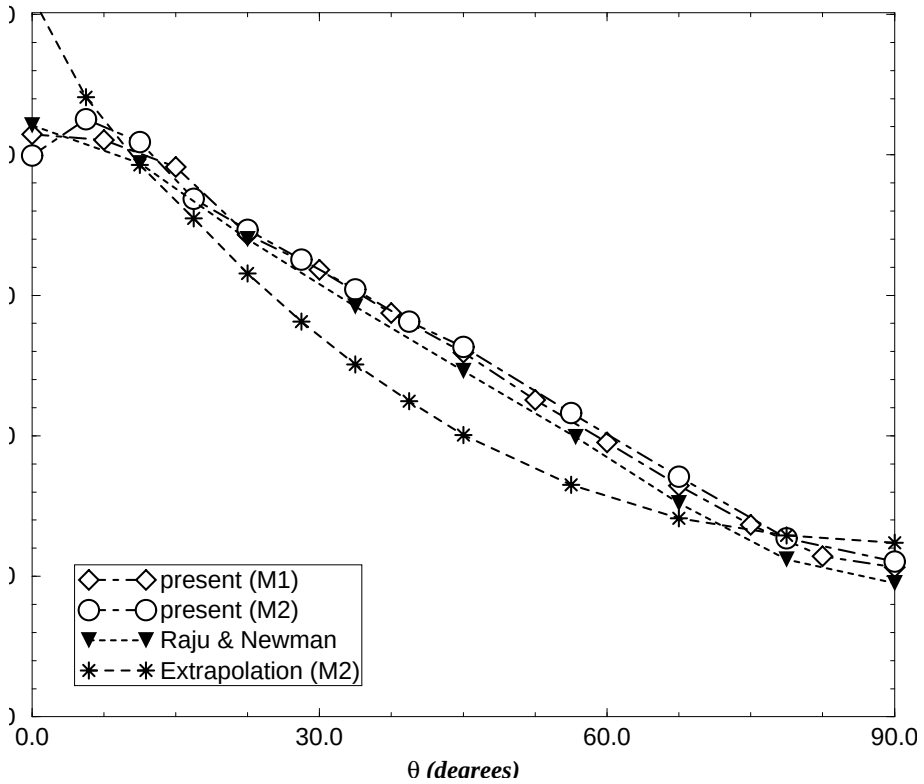


FIG. 3.7: Fissure semi-elliptique débouchante profonde ($b = 2a$) : comparaisons.

se généralise sans difficulté essentielle, au prix d'un accroissement de la complexité des expressions à manipuler et évaluer numériquement.

Problème en vitesse d'extension pour une fissure plane en milieu infini. Un milieu infini tridimensionnel Ω élastique isotrope rapporté à un repère cartésien orthonormé $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ (module de cisaillement μ, coefficient de Poisson ν), contient une fissure Γ de lèvres $\Gamma^{\pm}$, chargée symétriquement par des tractions $\pm\boldsymbol{T}$, dans le cadre des petites perturbations ; les forces de volume sont nulles. Désignons par $\boldsymbol{n}$ (resp. $\boldsymbol{\nu}$) la normale unitaire à Γ orientée de Γ^- vers Γ^+ (resp. à $\partial\Gamma$, situé dans le plan tangent à Γ et sortant de Γ). L'ouverture de fissure $\boldsymbol{\varphi}$ (saut à travers Γ du déplacement $\boldsymbol{u}$) réalisant l'équilibre élastique du système minimise par rapport aux champs d'ouverture admissibles $\boldsymbol{\psi}$ l'énergie potentielle $E(\boldsymbol{\psi}; \boldsymbol{T}, \Gamma)$:

$$E(\boldsymbol{\psi}; \boldsymbol{T}, \Gamma) = \frac{1}{2}\mathcal{B}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}) - \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{T} \rangle_\Gamma \quad \text{en posant} \quad \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{T} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \psi_i(\boldsymbol{x}) T_i(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S_x \tag{3.16}$$

et est donc solution de l'équation intégrale variationnelle

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{V} = \{\boldsymbol{\psi} : \Gamma \to \mathbb{R}^3, \ \boldsymbol{\psi}\,|_{\partial\Gamma} = \boldsymbol{0}, \ \mathcal{B}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}) < \infty\} \qquad \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{T} \rangle_\Gamma \tag{3.17}$$

où $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \mathcal{B}_{uu}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$, en utilisant l'expression de $\mathcal{B}_{uu}$ associée à la formulation variationnelle (1.9) et pour $S_T = \Gamma$. La formulation (3.17) est dûe à Nedelec [61], Bui [20] et Bonnemay [16] ayant antérieurement donné les équations correspondantes pour une fissure plane.

On peut facilement montrer que l'énergie potentielle à l'équilibre vaut :

$$W(\boldsymbol{T}, \Gamma) = -\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{T} \rangle_\Gamma \tag{3.18}$$

Dérivées premières de $\boldsymbol{\varphi}$. Notons $\overset{\star}{\cdot}$ la dérivation lagrangienne dans la vitesse d'extension $\boldsymbol{\theta}$ et *à chargement constant* (soit pour $\overset{\star}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\nabla T.\theta}$), $(\cdot)'$ la dérivée $\partial(\cdot)/\partial t$ *en l'absence de toute variation du domaine.* Les dérivées $\boldsymbol{\varphi}'$ et $\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}}$ sont respectivement gouvernées par les formulations variationnelles :

$$(\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{V}) \qquad \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{T}' \rangle_\Gamma \tag{3.19}$$

$$(\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{V}) \qquad \mathcal{B}(\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\psi}) = -\langle \boldsymbol{\nabla \phi.\theta}, \boldsymbol{T} \rangle_\Gamma - \mathcal{B}^1(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}; \boldsymbol{\theta}) \tag{3.20}$$

où l'expression explicite (en termes d'intégrales sur $\Gamma \times \Gamma$) du terme complémentaire $\mathcal{B}(\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\psi})$, bilinéaire en $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ et linéaire en $\boldsymbol{\theta}$, est donnée dans [Bon93]. Le résultat (3.20) est obtenu par dérivation de l'équation variationnelle (3.17) dans une extension de fissure de vitesse $\boldsymbol{\theta}$ au moyen de (3.5) ; suivant Mialon [58], on a posé $\overset{\star}{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{0}$ pour la fonction-test, l'espace $\mathcal{V}(t)$ associé à $\Gamma(t)$ pouvant être mis en bijection avec $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}$ par transport : $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{V} \to \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} t) \in \mathcal{V}(t)$.

Dérivée première de W et taux de restitution d'énergie. Premier résultat de ce travail, l'équation variationnelle gouvernant le taux de restitution d'énergie G est :

$$(\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta) \qquad \int_{\partial\Gamma} G(s)\theta_\nu(s) \, \mathrm{d}s = -\boldsymbol{\theta}.W_{,\Gamma}(\boldsymbol{T}, \Gamma) = -\langle \boldsymbol{\nabla \phi.\theta}, \boldsymbol{T} \rangle_\Gamma - \frac{1}{2}\mathcal{B}^1(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}; \boldsymbol{\theta}) \tag{3.21}$$

Elle est bien exprimée en termes de champs et d'intégrales (simples ou doubles) sur Γ uniquement, ce qui était notre objectif. Pour l'obtenir, on dérive (3.18) au moyen de (3.5) :

$$\frac{d}{dt}P(\boldsymbol{T},\Gamma) = P_{,\Gamma}(\boldsymbol{T},\Gamma).\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\left[\langle \boldsymbol{\nabla\phi}.\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{T}\rangle_\Gamma - \langle \overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}},\boldsymbol{T}\rangle_\Gamma\right] \tag{3.22}$$

Comme $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}$, $\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathcal{V}$, on particularise la fonction-test $\boldsymbol{\psi}$ dans les équations (3.17) et (3.20) par $\boldsymbol{\psi} = \overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}}$ et $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$ respectivement, d'où :

$$\langle \overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}},\boldsymbol{T}\rangle_\Gamma = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi},\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}}) \qquad \mathcal{B}(\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}},\boldsymbol{\varphi}) = -\mathcal{B}^1(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi};\boldsymbol{\theta}) - \langle \boldsymbol{\nabla\phi}.\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{T}\rangle_\Gamma$$

Le résultat (3.21) découle alors de la symétrie de $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$, et on voit ainsi le rôle joué par cette propriété dans l'élimination de la dépendance de (3.21) en $\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}}$.

DÉRIVÉES SECONDES DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE. Notant $\overset{\vee}{\cdot}$ la dérivation lagrangienne dans la vitesse d'extension $\boldsymbol{\mu}$ et *à chargement constant*, les dérivées $\boldsymbol{\theta}.P_{,\Gamma\Gamma}(\boldsymbol{T},\Gamma).\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\theta}.P_{,\Gamma T}(\boldsymbol{T},\Gamma)\boldsymbol{T}'$ sont ensuite données [Bon93] par :

$$\boldsymbol{\theta}.P_{,\Gamma T}(\boldsymbol{T},\Gamma)\boldsymbol{T}' = \langle \boldsymbol{\nabla\phi}.\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{T}'\rangle_\Gamma - \langle \overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}},\boldsymbol{T}'\rangle_\Gamma \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}.P_{,\Gamma\Gamma}(\boldsymbol{T},\Gamma).\boldsymbol{\mu} = {}& \frac{1}{2}\mathcal{B}^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}) - \mathcal{B}(\overset{\star}{\boldsymbol{\varphi}},\overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}) \\ & + \langle \boldsymbol{\nabla\phi}.\boldsymbol{\theta},(\boldsymbol{T}\mathrm{div}_S\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nabla T}.\boldsymbol{\mu})\rangle_\Gamma - \langle \boldsymbol{\nabla\phi}.\boldsymbol{\nabla\mu}\cdot\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{T}\rangle_\Gamma\end{aligned} \tag{3.24}$$

Le résultat (3.23-3.24) isole les contributions respectives à la variation de G de l'évolution du front et du chargement, et exprime le problème (3.8) en termes de champs et d'intégrales (simples ou doubles) sur Γ uniquement. Elles mènent à une forme quadratique $Q(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta})$ symétrique.

Commentaires. Les équations (3.20), (3.21) et (3.24-3.23), principaux résultats de ce travail, permettent avec la formulation (3.17) de traiter numériquement l'ensemble du problème par éléments finis de frontière. Présentées par commodité pour une fissure en milieu infini, elles s'étendent sans modification à un solide multifissuré (Γ' étant l'union des fissures), avec tractions prescrites sur la frontière extérieure S, prenant $\Gamma \equiv S \cup \Gamma'$.

Mise en oeuvre numérique. La discrétisation adoptée utilise des quadrangles à 9 noeuds ; des éléments spéciaux (du type « noeud au quart »), permettant la représentation de la singularité du gradient de déplacement, sont employés le long du front. Les fonctions de forme vectorielles $\boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{\xi})$, permettant l'interpolation des valeurs nodales sur $\partial\Gamma$ de $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}$, sont ici encore utilisées.

Des exemples numériques concernant l'évaluation de G le long du front et l'étude du problème en vitesse d'extension ont été obtenus. Le plus significatif d'entre eux est présenté ci-après.

Exemple numérique. Le problème de la fissure circulaire de rayon a située dans le plan (Oy_1y_2) chargée par deux forces ponctuelles $\pm F\boldsymbol{e}_3$ appliquées symétriquement, aux points $(0,0,\pm h)$ (fig. 3.5) a une solution exacte connue (Tada, Paris, Irwin [89]) :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{F^2}{(\pi h)^3}\frac{\alpha(\kappa+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^4} \qquad \left(\alpha = \frac{a}{h}\ ,\ \kappa = \frac{2-\nu}{1-\nu}\right) \tag{3.25}$$

On a utilisé trois maillages $\mathcal{M}(8,2)$, $\mathcal{M}(12,3), \mathcal{M}(16,5)$, $\mathcal{M}(n,p)$ étant composé de p couronnes de n éléments chacune ; le maillage $\mathcal{M}(n,p)$ a ainsi $2n$ noeuds sur le front de fissure, associés à autant de valeurs de G et de vitesses normales d'extension. De même, la matrice de la forme quadratique $Q(\theta,\mu)$ discrétisé est $2n \times 2n$ symétrique.

Calcul de G. La figure 3.8 présente l'erreur relative faite sur les valeurs nodales de G obtenues soit par extrapolation du saut de déplacement, soit à l'aide de la méthode θ-intégrale, pour $h/a \in [2, 2.5]$ et sur le maillage $\mathcal{M}(12,3)$. On remarque notamment que, malgré l'utilisation d'élément spéciaux, qui améliorent le calcul direct des singularités le long du front, la méthode θ-intégrale fournit les résultats les plus précis.

Problème en vitesse d'extension. Il découle de (3.25) que :

$$\frac{dG}{d\alpha} > 0 \quad (\alpha > \alpha_m) \qquad \text{et} \qquad \frac{dG}{d\alpha} < 0 \quad (0 < \alpha < \alpha_m)$$

avec

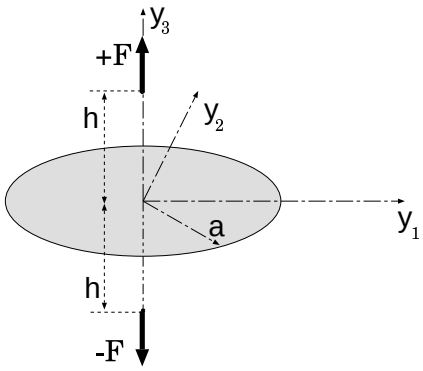
$$\alpha_m^2 = \frac{\sqrt{16\nu^2 - 72\nu + 105} - 2\nu + 9}{2(2-\nu)}$$

ce qui montre que l'extension circulaire, supposée vérifier le critère de Griffith classique $G - G_c$, est stable si $\alpha > \alpha_m$ et instable sinon. La valeur critique $\alpha = \alpha_m$ correspondra donc à la perte du caractère défini positif pour la forme quadratique $Q(\theta,\theta)$. Cette dernière a été construite pour $h/a = \alpha^{-1}$ balayant l'intervalle $[2., 2.5]$ avec un pas de 0.005 et sur le maillage $\mathcal{M}(12,3)$; cela donne $\alpha_m \approx 2.27$. Ensuite, un balayage plus fin a été fait pour $\alpha^{-1} \in [2.26, 2.28]$ avec un pas de 0.0005 et sur les trois maillages $\mathcal{M}(8,2), \mathcal{M}(12,3), \mathcal{M}(16,5)$. Les valeurs numériques ainsi obtenues pour α_m sont :

Maillage	Encadrement de α	Erreur relative
$\mathcal{M}(8,2)$	$2.267 \leq \alpha_m^{-1} \leq 2.2675$	$\leq 3.910^{-3}$
$\mathcal{M}(12,3)$	$2.268 \leq \alpha_m^{-1} \leq 2.2685$	$\leq 3.510^{-3}$
$\mathcal{M}(16,5)$	$2.277 \leq \alpha_m^{-1} \leq 2.275$	$\leq 7.010^{-4}$

et on voit qu'elles sont en excellent accord avec la valeur analytique $\alpha_m \approx 2.27589$ (on a ici $\nu = 0.3$). Quand $\alpha > \alpha_m$ (extension stable), l'incrément de rayon da est relié à celui de chargement dF par :

$$\frac{da}{dF} = \frac{2}{F}\frac{\alpha(1+\alpha^2)(\kappa+\alpha^2)}{3\alpha^4 + (7\kappa - 5)\alpha^2 - \kappa}$$



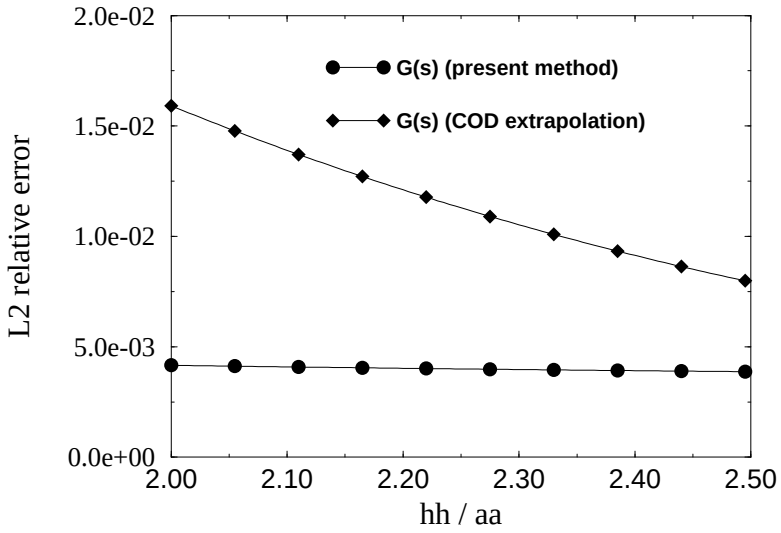


FIG. 3.8: Erreur relative $L2$ sur G obtenue (a) par méthode θ-intégrale (b) par extrapolation des déplacements.

L'écart relative sur la vitesse normale d'extension calculée numériquement comparée à la solution ci-dessus, pour diverses valeurs de α^{-1} et sur le maillage $\mathcal{M}(16,5)$, est présentée en figure 3.9. On y voit clairement la détérioration de précision quand h/a s'approche du seuil α_m^{-1}, associée à une dégradation du conditionnement de Q. Il faut noter que le calcul numérique ne tient pas compte du caractère axisymétrique du problème considéré, ce qui

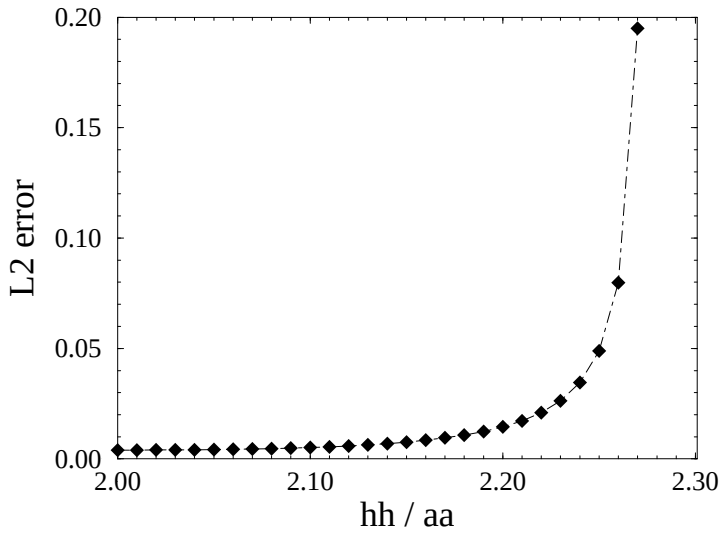


FIG. 3.9: Erreur relative L^2 sur la vitesse d'extension :
maillage $\mathcal{M}(16,5)$, $2. \leq h/a \leq 2.3$.

indique que le caractère circulaire de l'extension est retrouvé numériquement.

Commentaire. Les résultats numériques obtenus pour les fissures planes sont très encourageants : la solution exacte (cas de fissure circulaire ou elliptique pour diverses formes de chargement) est très bien retrouvée, y compris pour la valeur de la dérivée seconde de l'énergie et ses conséquences (étude de la stabilité de l'extension). Ceci nous semble confirmer l'intérêt d'une extension de cette démarche à d'autres situations où les dérivées de l'énergie potentielle jouent un rôle important : changement de phase élastique, délaminage de plaques, stabilité de systèmes de fissures... A noter que la formulation générale de ces problèmes est traitée dans la thèse [70].

Chapitre 4

Méthode de l'état adjoint pour les problèmes inverses

4.1 Méthode de l'état adjoint

La résolution numérique des problèmes inverses passe généralement par la minimisation d'une fonction-coût $\mathcal{J}$, généralement construite comme distance d'écart mesure-calcul augmentée d'un terme régularisant, telle (2.5) ou l'exposant (2.8) d'une densité a posteriori gaussienne. En mécanique des solides[1], la valeur de $\mathcal{J}$ est définie à travers la résolution d'un problème direct d'évolution et/ou aux limites, qui demande en pratique un calcul numérique par éléments finis ou de frontière, différences finies,...

De plus, on cherche chaque fois que cela est possible à utiliser des méthodes de minimisation avec gradient. L'évaluation du gradient de $\mathcal{J}$ par différences finies demande la résolution numérique d'un problème direct pour chaque perturbation finie $\Delta\boldsymbol{m}$ de l'inconnue $\boldsymbol{m}$ du problème inverse. Si cette dernière est de dimension finie N, cela représente au total $N+1$ problèmes directs pour une évaluation de $\mathcal{J}(\boldsymbol{m})$ et son gradient. On imagine sans peine que cela peut conduire à des temps de calcul prohibitifs. De plus, la dérivation numérique est une opération mathématiquement mal posée (Tikhonov & Arsénine [92]), dont le résultat est très sensible à d'éventuelles erreurs sur les valeurs de $\mathcal{J}(\boldsymbol{m})$ et $\mathcal{J}(\boldsymbol{m}+\Delta\boldsymbol{m})$ et sur le choix du pas $\Delta\boldsymbol{m}$.

Il faut alors faire appel soit à la dérivation directe (abordée au chapitre précédent pour les domaines variables), soit à la méthode de l'état adjoint. Cette dernière, objet du présent chapitre, conduit à une expression analytique du gradient de $\mathcal{J}$ en fonction des solutions aux problèmes direct et adjoint. Le calcul de ces deux états utilise les mêmes éléments de discrétisation. Le recours aux différences finies est évité. Cette méthode est brièvement exposée ci-après sur la formulation du problème inverse de la conductivité thermique (traitée dans [BBP89], [BBMP93], avec H.D. Bui, H. Maigre, J. Planchard), de façon à mettre en évidence ses principales caractéristiques sur un exemple précis. La même démarche est applicable à un grand nombre de situations, que le problème direct soit linéaire ou non, et conduit à des conclusions similaires.

Exemple : un problème inverse en conduction thermique. Considérant un solide Ω thermiquement conducteur (de conductivité isotrope $k(\boldsymbol{y})$ inhomogène), on peut s'intéresser au problème de la reconstruction de $k(\boldsymbol{y})$ inconnu à partir de mesures externes (connaissance simultanée de la température et du flux thermique sur une portion

[1] et aussi en acoustique, thermique,...

de la frontière). Ce type de problème intervient par exemple en contrôle non destructif thermique, les inhomogénéités de k étant alors considérées comme indicatrices de défauts internes.

Problème direct. Supposant la conductivité $k(\boldsymbol{y})$ connue, trouver la température $u_k(\boldsymbol{y}, t)$ solution du problème de conduction instationnaire (pour fixer les idées, on suppose la température initiale (à $t = 0$) nulle et le flux thermique donné égal à f en tout point de $\partial\Omega$).

Problème inverse. Supposant que sur $S \subset \partial\Omega$ la température u a la valeur mesurée $u^D(\boldsymbol{y}, t)$ (conditions aux limites surabondantes sur S), on cherche à utiliser ce supplément d'information pour évaluer le coefficient inconnu $k(\boldsymbol{y})$. La manière la plus simple de procéder consiste à poser le problème inverse comme la minimisation d'une fonctionnelle d'écart $\mathcal{J}(k)$, par exemple :

$$\mathcal{J}(k) = J(u) \qquad J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_S (u_k(\boldsymbol{x}, t) - u^D(\boldsymbol{x}, t))^2 \,\mathrm{d}S_x \,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

La méthode de l'état adjoint. L'idée consiste à considérer la minimisation de $\mathcal{J}(k)$ par rapport à k comme une minimisation de $J(u)$ par rapport à k sous la *contrainte* que u est solution du problème de conduction associé à la conductivité k. Cette contrainte est exprimable par une formulation faible, et on introduit alors un lagrangien :

$$\mathcal{L}(u, v; k) = J(u) + \int_0^T \left\{ \int_\Omega [u_{,t} v + k \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} v] \,\mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega} f v \,\mathrm{d}S \right\} \mathrm{d}t \tag{4.2}$$

dans lequel la fonction-test $v \in \mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega),\ v(\cdot, 0) = 0 \text{ dans } \Omega\}$ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. On considère alors la variation de $\mathcal{L}$ sous l'effet de perturbations $\delta u, \delta k$:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_{,u}.\delta u + \mathcal{L}_{,k}.\delta k$$

Seul l'effet net de δk étant recherché, le choix du multiplicateur v peut être restreint en imposant que $\delta\mathcal{L} = 0$ pour $\delta k = 0$, soit :

$$\mathcal{L}_{,u}\delta u = 0 \qquad \forall \delta u \in \mathcal{V} \tag{4.3}$$

Cela définit un *état adjoint* $v = v_k$, qui tous calculs faits est solution de la formulation faible :

$$J_{,u}.w + \int_\Omega \left\{ (vw)\,|_{t=T} + \int_0^T [-v_{,t} w + k \boldsymbol{\nabla} v \boldsymbol{\nabla} w] \,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}V = 0 \qquad \forall w \in \mathcal{V}$$

dont on voit qu'elle est associée à l'équation de la chaleur *rétrograde* avec condition *finale* $v(\cdot, T) = 0$. On remarque aussi que le terme $J_{,u}.w$ correspond pour l'état adjoint v_k à un flux imposé et fonction de l'écart $u_k - u^D$.

Comme résultat de cette démarche, la variation $\delta\mathcal{J}$ induite par δk est donc finalement donnée par l'expression explicite :

$$\delta J = \delta\mathcal{L}(u_k, v_k; k) = \int_0^T \int_\Omega \delta k \boldsymbol{\nabla} u_k \boldsymbol{\nabla} v_k \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

Commentaires. Le problème inverse thermique et le résultat (4.4) associé fournissent une bonne illustration de la méthode de l'état adjoint et mettent en évidence les points qui suivent.

Calcul du gradient. La résolution des problèmes direct et adjoint permet d'obtenir explicitement le gradient complet de $\mathcal{J}(k)$. Sur un plan pratique, cela permet un calcul numérique stable et économique du gradient de $\mathcal{J}$, et donc d'utiliser efficacement les méthodes de minimisation avec gradient. De plus, le calcul numérique de l'état adjoint v_k réutilise certaines opérations d'assemblage (en particulier la construction et la factorisation de l'opérateur « de rigidité »$\int_0^T \int_\Omega k \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t$, et est donc plus économique que celui de l'état u. Par conséquent, une évaluation de $\mathcal{J}$ et de son gradient ne coûte pas beaucoup plus cher qu'une évaluation de $\mathcal{J}$ seule.

Equation d'observation pour le problème inverse linéarisé. Sur un plan plus théorique, un résultat tel que (4.4) peut être interprété comme une « équation d'observation »associée au problème inverse linéarisé (cas où l'inconnue k se met sous la forme $k_0 + \delta k$, k_0 étant une valeur de référence connue et δk l'écart à k_0 inconnu mais petit en valeur relative) qui donne un lien mathématique direct entre une fonction connue de l'observable u^D et l'inconnue δk dans le cas linéarisé.

Ces équations d'observation ont souvent (c'est le cas pour (4.4)) la structure d'*équations intégrales de première espèce* (Tricomi [95], Wing [99]). Cette classe d'équations est connue pour être mal posée : d'une part la sensibilité de l'inconnue δk aux petites perturbations du second membre est très grande, d'autre part l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas garanties. L'obtention de telles équations d'observation par l'intermédiaire de la méthode de l'état adjoint permet donc de mettre en évidence le caractère mal posé du problème inverse linéarisé, qu'on s'attend donc *a fortiori* à retrouver en l'absence de linéarisation.

D'autres équations d'observation sont discutées dans [BBP89], [BBMP93] (avec H.D. Bui, H. Maigre, J. Planchard) pour la thermique ou dans [BC93] (avec A. Constantinescu) pour l'identification de coefficients élastiques hétérogènes).

Dans le même ordre d'idées, si on prend $2\mathcal{J} = [u(\boldsymbol{x}, \tau) - u^D(\boldsymbol{x}, \tau)]^2$ pour un point $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ et un instant $\tau \geq 0$ fixés, l'état adjoint dépend de $\boldsymbol{x}, \tau$: $v_k = v_k(\boldsymbol{y}, t; \boldsymbol{x}, \tau)$ et le résultat (4.4) conduit à la relation :

$$[u(\boldsymbol{x}, \tau) - u^D(\boldsymbol{x}, \tau)] + \int_0^T \int_\Omega \delta k \boldsymbol{\nabla} u_k(\boldsymbol{y}, t) \boldsymbol{\nabla} v_k(\boldsymbol{y}, T - t; \boldsymbol{x}, \tau) \, \mathrm{d}V_y \, \mathrm{d}t = 0$$

en écrivant que l'inconnue δk est telle que $u(\boldsymbol{x}, \tau) = u^D(\boldsymbol{x}, \tau)$ pour tout $(\boldsymbol{x}, \tau)$, et donc que $\delta J = -\mathcal{J}$. On est également en présence d'une équation intégrale de première espèce.

Rôle pratique de la méthode de l'état adjoint. Il faut souligner que la méthode de l'état adjoint permet, sur le plan numérique, de tirer le maximum d'une formulation donnée mais ne conduit pas à une formulation modifiée du problème inverse ; elle ne rend pas mieux posé un problème mal posé. Par contre, il est parfaitement possible de combiner régularisation de Tikhonov ou inversion stochastique et méthode de l'état adjoint, de façon à appliquer efficacement une méthode de minimisation avec gradient à un problème inverse régularisé.

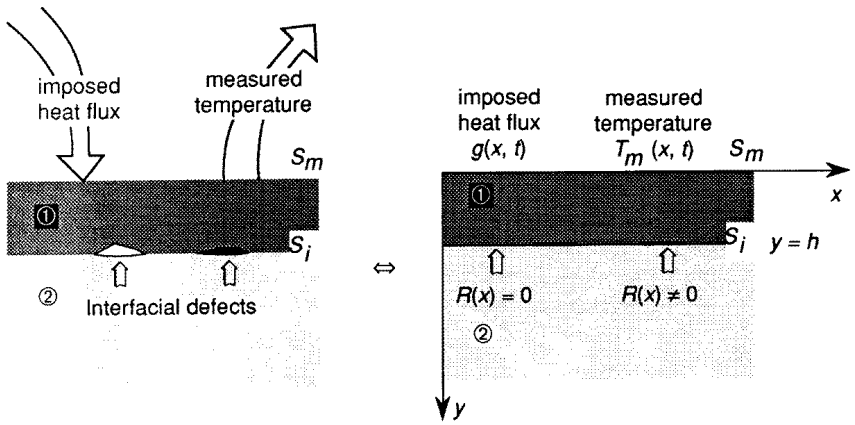


FIG. 4.1: Identification de résistances d'interface : schéma de principe

4.2 Utilisation de la méthode de l'état adjoint

Quelques exemples d'utilisation de la méthode de l'état adjoint auxquels nous avons contribué sont brièvement décrits ci-après. L'utilisation conjointe de la méthode d'état adjoint et de la dérivée par rapport au domaine est présenté à part, en section 4.3.

Identification de la résistance d'interface. Dans un travail fait avec H. MAIGRE et M. MANAA [BMM92], une démarche similaire a été appliquée à une situation relativement simple : la quantification de résistances thermiques d'interface R au moyen de mesures de température en surface, pour des géométries unidimensionnelles et en régime transitoire. La résistance R représente la gêne induite sur la conduction thermique à travers une interface S_i, liée à un défaut (délamination, présence de matière parasite,...), et est définie comme le coefficient de proportionnalité entre le flux thermique q (continu) et le saut de la température u à travers S_i :

$$[\![u]\!](\boldsymbol{y}, t) = -R(\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{y}, t)$$

Supposons le flux thermique imposé sur toute la frontière de l'échantillon (condition à la frontière bien posée pour le problème direct, pour lequel R serait connue). L'identification utilise des informations surabondantes sur une partie S_m la frontière, à savoir des mesures $u_m(\boldsymbol{y}, t)$ de la température, et est formulée comme un problème de minimisation :

$$\mathcal{J}(R) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{S_m} [u_{calc}(\boldsymbol{y}, t; R) - u_m(\boldsymbol{y}, t)]^2 \, dSdt + \alpha I(R)$$

la fonctionnelle $\mathcal{J}$ dépendant de R de manière implicite à travers la solution u_{calc} du problème direct.

Le tableau 4.1 montre quelques résultats de simulation dans le cas unidimensionnel (R indépendante de x, fig. 4.1), réalisés avec ou sans bruit simulé sur les données : la fonctionnelle $\mathcal{J}$ a été minimisée, sans terme régularisant ($I(R) = 0$), au moyen d'un algorithme de descente assez « artisanal »qui utilise le gradient, évalué à l'aide de la méthode de l'état adjoint. Les résultats numériques mettent en évidence la grande sensibilité au niveau de bruit sur les données, ce qui met clairement en évidence la nécessité de régulariser le problème inverse.

τ	k_1	k_2	R simulé	R calculé		
				0%bruit	1%bruit	3%bruit
12	1	1	1	1 – 1	0.84 – 1.14	0.54 – 1.49
12	10	1	1	1 – 1	0.94 – 1.05	0.83 – 1.19
12	1	10	1	1 – 1	0.92 – 1.06	0.75 – 1.23
12	1	1	3	3 – 3	2.46 – 3.47	1.7 – 4.9
6	1	1	1	1 – 1	0.57 – 1.68	
4	1	1	1	1 – 1	0.16 – 6.5	

TAB. 4.1: Reconstruction de la résistance d'interface : exemple unidimensionnel simulé [BMM92]

Ce travail a été poursuivi par H. MAIGRE et B. BERNAY (stagiaire ENSTA) sur des situations bidimensionnelles en régime stationnaire, l'algorithme étant développé dans le cadre du code d'éléments finis CASTEM 2000.

Il était en fait motivé par la perspective d'un projet BRITE, pour lequel le LMS avait été sollicité pour travailler sur l'inversion numérique de données thermiques (obtenues par exemple au moyen de la thermographie infra-rouge) permettant de remonter à la détermination par voie non destructive de divers défauts, et notamment des résistances d'interfaces, dans des échantillons. Ce travail aurait notamment consisté en l'application de la méthode de l'état adjoint à des fonctions-coût régularisées (au sens de Tikhonov), les problèmes direct et adjoint étant résolus numériquement par éléments finis (en espace) et différences finies (en temps) de manière à pouvoir traiter des éprouvettes de formes arbitraires. L'échec de la soumission de ce projet a pour l'instant entraîné une mise en sommeil de ce travail, que nous ne désespérons pas voir redémarrer dans le futur.

Problème inverse pour les essais dynamiques avec les barres d'Hopkinson. Laurent ROTA, dans son travail de thèse, applique l'approche inverse à l'interprétation quantitative des données expérimentales fournies par les barres d'Hopkinson. Ce dispositif permet de mesurer forces *et* déplacements en fonction du temps aux deux extrémités d'un échantillon, dans des conditions de dynamique rapide. Ces informations sont surabondantes si le comportement du matériau constitutif de l'échantillon est connu.

Dans cette étude, l'état mécanique de l'échantillon dépend du temps et d'une coordonnée d'espace. On cherche à affaiblir les hypothèses simplificatrices (état mécanique uniforme dans l'échantillon) habituellement utilisées pour le dépouillement des mesures, qui consiste en la détermination des paramètres $\{p_i\}$ associés au modèle de comportement postulé. Cette stratégie repose alors sur la minimisation d'une fonctionnelle d'écart mesure-calcul $\mathcal{J}(\{p_i\})$. Celle-ci procède de manière itérative, selon un algorithme classique, et chaque évaluation de $\mathcal{J}$ exige la simulation numérique de la dynamique de l'éprouvette pour un comportement donné, c'est-à-dire un jeu donné de paramètres $\{p_i\}$. Les premiers résultats obtenus par L. ROTA sont encourageants [78]. Les recherches en cours portent notamment sur la définition des fonctionnelles d'écart entre données mesurées et calculées, dans l'esprit des fonctionnelles d'erreur en loi de comportement développées au LMT, ENS Cachan.

La méthode de l'état adjoint est utilisée pour le calcul numérique du gradient de la fonctionnelle d'écart. Le problème direct (à paramètres de comportement donnés) est non-linéaire, alors que l'état adjoint est solution d'un « problème linéaire tangent ». En raison du caractère dynamique du problème inverse considéré, le gradient de la fonctionnelle d'écart est finalement exprimé sous la forme de l'intégrale spatiale d'un produit de

convolution temporel entre les états primaire (problème avec conditions initiales) et adjoint (problème avec conditions finales). Le calcul numérique de ce produit de convolution est assez gourmand en temps de calcul, il exige de plus le stockage de toutes les valeurs espace-temps du problème direct et le stockage ou le re-calcul des opérateurs linéaires tangents à tous les pas de temps.

Un calcul typique (20 pas d'espace, pas de temps de 100 μs) représente 25 itérations pour l'algorithme de minimisation et dure environ 18 minutes sur une station de travail HP-APOLLO 400. Le calcul de $\mathcal{J}$ et de son gradient prennent environ 1 et 6 secondes de calcul respectivement. Les paramètres $\{p_i\}$ étant ici au nombre de quatre (modèle de Sokolowski-Malvern), on peut estimer que la technique de l'état adjoint n'est pas substantiellement plus rapide qu'une technique de dérivation directe par rapport aux paramètres $\{p_i\}$, qui demanderait de résoudre un problème d'évolution associé à une variation de chaque p_i. Toutefois, l'état adjoint ne dépend pas du nombre de paramètres $\{p_i\}$, et devient d'autant plus performante que leur nombre est élevé.

4.3 Identification de domaines inconnus par équations intégrales de frontière

Ce travail [Bon92], [Bon93], [Bon93] avait pour but d'illustrer la mise en oeuvre conjointe de la méthode de l'état adjoint, la dérivation dans une transformation de domaine et l'utilisation des équations intégrales de frontière. Nous avons donc considéré un problème-modèle : l'identification d'un obstacle rigide spatialement borné Ω^-, de frontière Γ, situé dans un milieu acoustique infini $\Omega = \mathcal{R}^3 - \Omega^-$. Une onde de pression incidente $p^I(\boldsymbol{y})\exp(-i\omega t)$, donnée et telle que $(\Delta + k^2)p^I = 0$, induit l'apparition d'une onde p diffractée par l'obstacle, solution du problème direct :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega \\ p_{,n} + p^I_{,n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ p = O(r),\ p_{,r} + ikp = O(r) & r = |\boldsymbol{y}| \to +\infty \end{cases} \tag{4.5}$$

La solution p de (4.5) dépend de Γ : $p = p_\Gamma$.

Problème inverse. On cherche à identifier la forme, inconnue, de Ω^- (donc de Γ), à partir de données supplémentaires sous la forme de valeurs connues $\hat{p}$ de p sur une *surface de mesure* C extérieure à Γ et en minimisant une distance $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}(\Gamma) = J(p) \qquad \text{avec} \quad J(p) = \frac{1}{2}\int_C |p - \hat{p}|^2 \,\mathrm{d}S \tag{4.6}$$

Etat adjoint. Ici encore une fonctionnelle augmentée est introduite :

$$\mathcal{L}(p, w; \Gamma) = J(p) + \mathcal{A}(p, w; \Gamma) \tag{4.7}$$

dans laquelle la contrainte $\mathcal{A}(p, w; \Gamma)$, associée au champ de multiplicateurs w, est la formulation faible du problème direct (4.5) :

$$\mathcal{A}(p, w; \Gamma) \equiv \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\nabla} p.\boldsymbol{\nabla}\overline{w} - k^2 p\overline{w})\,\mathrm{d}V_y + \int_\Gamma \overline{w} p^I_{,n}\,\mathrm{d}S_y = 0 \qquad (\forall w,\ (4.5_3 \text{ et } w \in H^1_{loc}(\Omega))$$

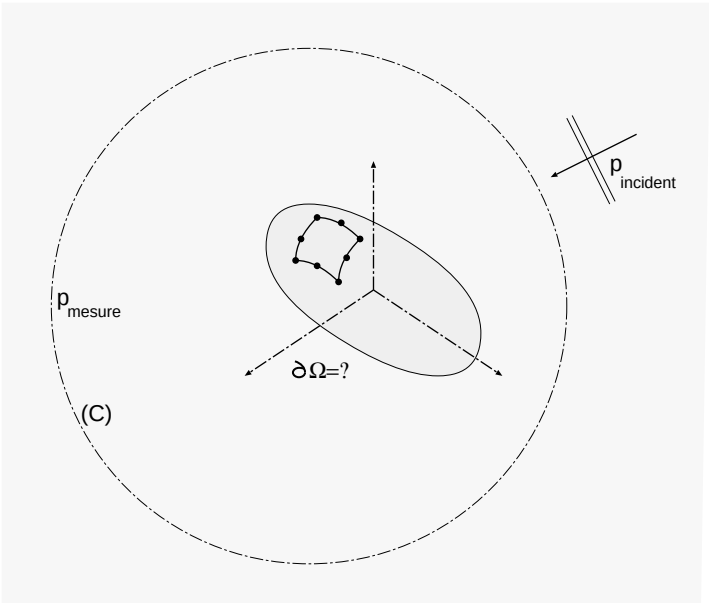


FIG. 4.2: Detection d'un obstacle au moyen d'ondes acoustiques : schéma de principe.

On dérive cette fonctionnelle dans une transformation de domaine (évolution de Γ), en appliquant des formules de type eulérien. L'état adjoint w_Γ est alors défini par la condition $\mathcal{L}_{,p}p_{,\tau} = 0$, $\forall p_{,\tau} \in H^1_{loc}(\Omega)$, et est solution du problème :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)w = -\left|\overline{p_\Gamma - \hat{p}}\right| \delta_C & \text{dans } \Omega \\ w_{,n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ w = O(r),\ w_{,r} + ikw = O(r) & r = |\boldsymbol{y}| \to +\infty \end{cases} \tag{4.8}$$

On remarque, ce qui est un fait général, que l'état adjoint est associé à une source proportionnelle à l'écart entre grandeur mesurée et calculée ; il est donc en particulier nul quand ces dernières coincident.

Equations intégrales directe et adjointe. Les problèmes direct (4.5) et adjoint (4.8) sont respectivement gouvernés par les équations intégrales régularisées :

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) + \int_\Gamma p(\boldsymbol{y})[G_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - G^0_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y + \int_\Gamma [p(\boldsymbol{y}) - p(\boldsymbol{x})]G^0_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ = -\int_\Gamma p^I_{,n}(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}) + \int_\Gamma w(\boldsymbol{y})[G_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - G^0_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y + \int_\Gamma [w(\boldsymbol{y}) - w(\boldsymbol{x})]G^0_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ = \int_C \left|\overline{p_\Gamma - \hat{p}}\right|(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}C_y \end{aligned} \tag{4.10}$$

où $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = e^{ikr}/(4\pi r)$ et $G^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1/(4\pi r)$ désignent les solutions élémentaires dynamique et statique et $r = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|$. On remarque immédiatement que le même opérateur intégral gouverne les deux équations intégrales. Une fois l'assemblage et la factorisation de ce dernier effectués lors de la résolution du problème direct et l'évalution de $\mathcal{J}(\Gamma)$, le calcul de l'état adjoint ne nécessite que l'assemblage du second membre de (4.10) et la résolution d'un système d'équations triangulaire.

Dérivée de $\mathcal{J}(\Gamma)$ par rapport au domaine. Nous avons ainsi pu établir que la dérivée matérielle de $\mathcal{J}(\Gamma)$ est donnée par :

$$\overset{\star}{\mathcal{J}}=\overset{\star}{\mathcal{L}}\,(p_\Gamma, w_\Gamma; \Gamma) = \int_\Gamma (\mathcal{J}_{,\Gamma}.\theta)\,\mathrm{d}S\mathcal{J}_{,\Gamma} = \boldsymbol{\nabla}_S\overline{w}_\Gamma.\boldsymbol{\nabla}_S(p_\Gamma + p^I) - k^2\overline{w}_\Gamma(p_\Gamma + p^I)$$

Cette formule donne, d'une manière explicite et élégante, le gradient de $\mathcal{J}(\Gamma)$ par rapport à Γ comme une forme linéaire (*dérivée par rapport au domaine, Simon* [83]) en θ, vitesse normale d'évolution de Γ dont le noyau $\mathcal{J}_{,\Gamma}$ est construit en termes des états direct et adjoint. Nous avons traité dans [Bon95a] l'extension de cette démarche aux cas d'obstacles pénétrables en acoustique et de cavités en élastodynamique.

Application numérique. Elle a été faite pour la recherche d'un obstacle rigide de forme « n-ellipsoïdale »(n est un exposant : $n = 1, 2, +\infty$ donnant respectivement un octaèdre, un ellipsoïde et un parallélipipède), définie par 10 paramètres (3 coordonnées du centre de gravité géométrique, 3 axes principaux, 3 angles d'Euler et l'exposant n).

La surface courante Γ, sur laquelle porte la minimisation de $\mathcal{J}(\Gamma)$, est discrétisée ainsi que les valeurs de p par éléments finis de frontière : 24 quadrilatères courbes à 8 noeuds, dans l'exemple traité. Elle est décrite par un nombre fini N de paramètres, qui sont les inconnues de la minimisation. Deux possibilités ont été traitées :

- Les noeuds du maillage sont pilotés par les valeurs des paramètres géométriques d'un n-ellipsoïde ($N = 10$).
- Les coordonnées des noeuds du maillage ($N = 222$ dans notre exemple) : l'information a priori sur la forme inconnue est alors beaucoup moins forte que dans le cas précédent.

La minimisation de $\mathcal{J}$ utilise la méthode BFGS avec « line-search »imparfait (Fletcher [33]).

La figure 4.3 présente les valeurs de $\mathcal{J}$ et des erreurs relatives e_V, e_S, e_I commises sur le volume, l'aire et l'inertie géométrique (prise par rapport à une origine et des axes fixés) de Ω^-, en fonction du numéro d'itération de l'algorithme de minimisation. On remarque que le cas à 9 inconnues (l'exposant n était absent de la recherche pour cet exemple) fournit d'excellents résultats, probablement parce que le problème inverse, que l'on sait mal posé en toute généralité, devient ici bien posé en raison de la restriction très forte des formes possibles. Avec 222 inconnues, le centre d'inertie, le volume et l'inertie géométrique (représentative de l'orientation dans l'espace) de l'obstacle inconnu sont convenablement retrouvés. Une aire trop importante de 30% environ est trouvée, symptôme d'oscillations de la surface reconstruite par EFF. Les résultats de la figure 4.3 ont été obtenus avec une surface initiale assez proche de celle recherchée, ce qui montre qu'en pratique l'utilisation des coordonnées nodales comme paramètres géométriques gouvernant l'évolution de Γ est une mauvaise solution. En revanche, d'excellents résultats continuent d'être obtenus, avec 10 inconnues, en prenant des surfaces initiales relativement éloignées de la solution [Bon95a]. Dans le cas où la solution était un parallélipipède ($n = +\infty$), la valeur trouvée pour n était de l'ordre de 1000 (donc infinie en pratique) ; il a été constaté que les deux derniers tiers des itérations étaient prsque totalement utilisés à la recherche de n seul.

La méthode BFGS [33], [71] avec « line-search »imparfait [33] a été retenue après essais avec gradient conjugué et BFGS avec « line-search »parfait, car elle est apparue comme la plus efficace (nombre d'évaluations de fonction-coût et gradient nécessaires), et parfois la meilleure du point de vue du résultat atteint à convergence. Elle est d'autre part sensible à l'initialisation du « line-search »(qui doit utiliser des valeurs pertinentes du point de

vue dimensionnel) et à une bonne programmation de la formule BFGS elle-même (erreurs d'arrondi possibles dans la réactualisation du pseudo-hessien).

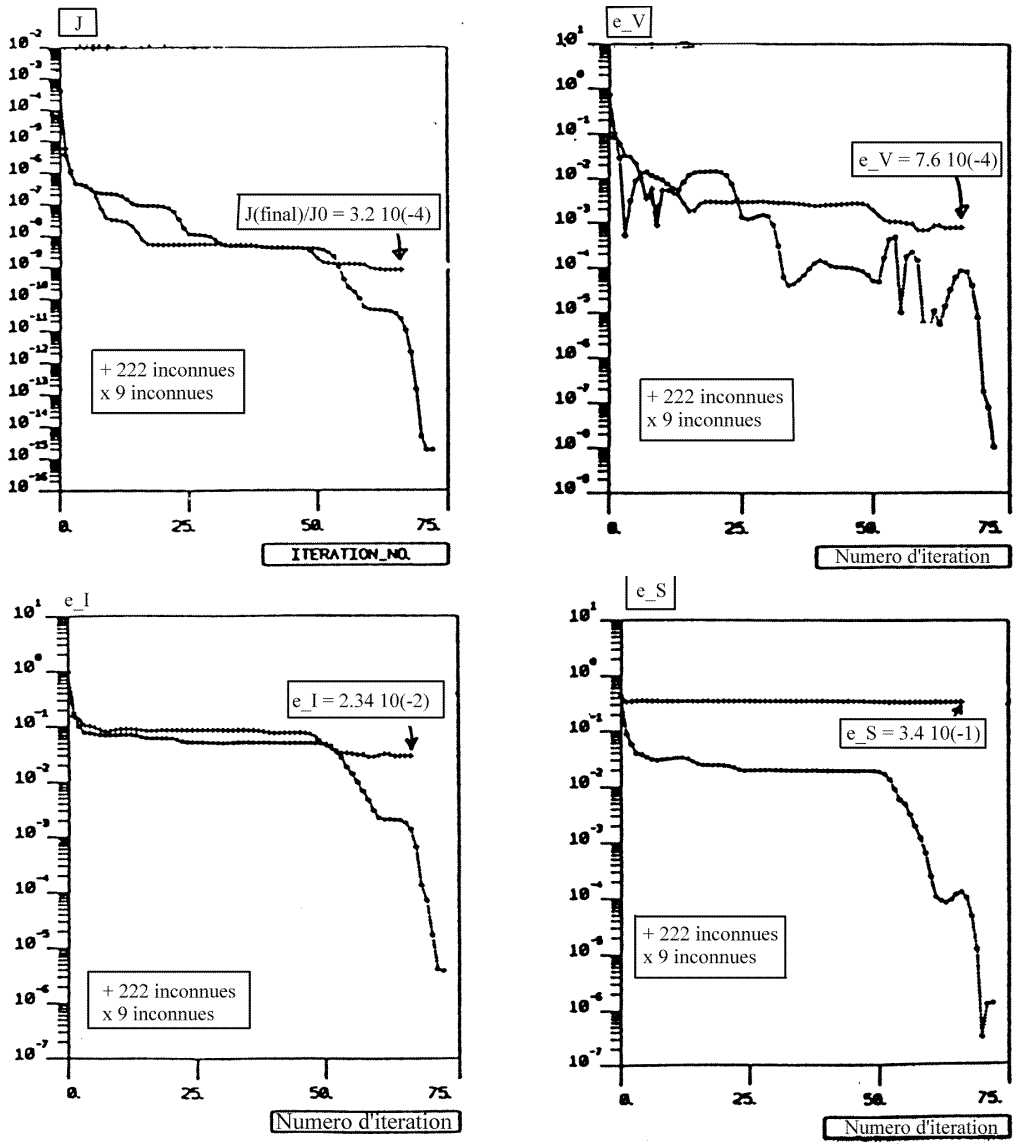


FIG. 4.3: Detection d'un obstacle au moyen d'ondes acoustiques : comparaison entre 9 et 222 inconnues.

Commentaires et perspectives. Cette démarche est applicable à des situations plus générales faisant intervenir des milieux linéaires et homogènes : domaine d'étude borné, autres contextes tels que l'élasticité ou la thermique, régime transitoire... Elle permet d'utiliser une méthode de minimisation avec gradient dans des conditions optimales pour ce qui est de la rapidité et de la précision du calcul du gradient et donc a un intérêt clair du point de vue numérique. En revanche, elle n'apporte pas d'éclairage particulier sur certaines questions plus fondamentales telles que l'existence ou l'unicité de la solution au problème inverse pour les données en notre possession.

Les très bons résultats numériques que nous avons obtenus pour des exemples à faible nombre de paramètres géométriques valident l'efficacité des composants de la méthode d'inversion, et notamment celle du calcul numérique du gradient de $\mathcal{J}$ (celui-ci demande un supplément de temps calcul d'environ 30% du temps nécessaire à une évaluation de

$\mathcal{J}$ seule[2]). L'emploi couplé d'éléments de frontière et de l'état adjoint est très efficace sur le plan numérique. La détérioration des résultats qui apparaît avec l'augmentation du nombre de paramètres géométriques, qui était attendue, souligne clairement la nécessité d'introduire une régularisation pour traiter ce type de problème inverse, conduisant à minimiser une fonction-coût augmentée $\mathcal{J}(\Gamma)+\alpha P(\Gamma)$ $(0 < \alpha \ll 1)$. On peut par exemple proposer de pénaliser les courbures élevées et les sauts de normale sur les frontières d'éléments, avec :

$$P(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}(\mathrm{div}_S \boldsymbol{n})^2 \,\mathrm{d}S + \beta \int_L (1 - \boldsymbol{n}^+.\boldsymbol{n}^-)\,\mathrm{d}s$$

D'autre part, à notre connaissance, trouver des représentations paramétrées permettant de décrire des formes tridimensionnelles (surfaces fermées) aussi générales que possible à l'aide d'un nombre de paramètres géométriques aussi réduit que possible est un problème largement ouvert.

[2]Comparer le rapport 0,3 :1 constaté ici au rapport 6 :1 relevé pour la méthode de l'état adjoint en régime temporel (page 70).

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

En ce qui concerne le thème général des méthodes d'équations intégrales et d'éléments de frontière, on peut dire *a posteriori* que les travaux que nous avons menés ont surtout consisté en l'investigation de certains aspects "innovants" de la méthodologie : régularisation, dérivation dans un domaine variable, exploitation des symétries géométriques, méthodes variationnelles et approche θ-intégrale. Le choix de ces aspects et les résultats obtenus sont, pour autant que nous puissions en juger, au niveau des préoccupations et de l'état de l'art international.

Nous considérons l'aspect "régularisation" comme maintenant bien compris, et essentiellement achevé (ce qui n'était sans doute pas vrai cinq ans plus tôt), grâce aux travaux apparus ces quelques dernières années, parmi lesquels notre contribution personnelle. Les divers angles d'attaque relevés pour le problème de la régularisation ont mené à des conclusions identiques, la plus importante d'entre elles sur le plan pratique étant le caractère "incontournable", et contraignant, de l'exigence d'une interpolation de régularité $C^{1,\alpha}$ (donc en particulier dérivable) au point de collocation pour les équations intégrales hypersingulières, considérées sous forme régularisée ou non. Le travail restant à faire dans ce domaine particulier consiste principalement à affiner les techniques numériques qui permettent de tirer parti de principes maintenant établis.

Les difficultés pratiques liées à la nécessité d'employer des interpolations dérivables, ainsi que la lourdeur générale des formulations, associées aux équations intégrales "hypersingulières", nous laissent penser que les méthodes intégrales variationnelles exerceront une concurrence plus importante dans le futur, comme le suggère également l'observation de tendances récentes dans la littérature internationale. De fait, les formulations intégrales variationnelles avaient à l'origine été développées dans le double but d'éviter les problèmes liés aux fortes singularités et d'obtenir des formulations symétriques. Les travaux "fondateurs" anciens de 12 ou 15 ans issus de la communauté des mathématiques appliqués avaient rencontré peu d'écho dans la communauté de la mécanique numérique, et restent toujours fortement ignorés. Il est vrai que la construction des formes bilinéaires en présence de conditions aux limites mixtes, aspect essentiel en mécanique des structures, n'avait guère été abordée. C'est pourquoi notre contribution [Bon95c], qui comble cette lacune, devrait permettre une meilleure compréhension et diffusion de l'approche variationnelle intégrale. Actuellement, avec A. Frangi, une étude démarre sur le sujet de formulations intégrales variationnelles pour la statique des plaques, qui constitueraient à notre connaissance des résultats entièrement originaux.

L'aspect "domaine variable et dérivation" est très prometteur et suscite un intérêt rapidement croissant au plan international, comme en témoigne la référence [BB95]. Cela tient à la variété des situations qui peuvent relever de ce type de technique, main-

tenant mieux comprise : problèmes inverses d'identification de domaines, optimisation de forme, et aussi approche énergétique θ-intégrale en rupture. Il faut noter que la régularisation des équations intégrales joue un rôle important dans la mesure où le caractère mathématiquement licite des dérivations d'intégrales est alors garanti. En ce qui concerne l'identification de formes inconnues, l'approche que nous avons menée jusqu'ici pour le problème modèle en acoustique linéaire peut assez facilement (dans le principe) être étendue aux problèmes d'identification en élastodynamique ou en thermique, et aussi à la recherche de fissures ; chaque situation particulière diffère principalement par la définition de l'état adjoint nécessaire au calcul du gradient d'une fonction-coût. Le traitement de problèmes d'optimisation de forme au moyen de méthodes intégrales et dérivation par rapport au domaine doit aussi être envisagé. D'autre part, l'approche θ-intégrale est actuellement très originale par rapport à l'état de l'art et correspond à un large champ d'application potentiel, presque entièrement inexploré. Par exemple, une fois obtenues des formulations intégrales variationnelles pour les plaques, on envisage (en liaison avec l'OR[1] "stabilité" et notamment dans le cadre du travail actuellement démaré d'A. FRANGI) le calcul numérique de taux de restitution d'énergie pour les plaques fissurées[2] et l'étude numérique de problèmes de délaminage (stabilité du front et résolution du problème en vitesse d'extension). D'autre situations sont envisageables, comme l'étude de systèmes de fissures. Dans tous ces exemples, les calculs sont reportés à la frontière, qui inclut fissure ou front de délaminage. L'expérience acquise actuellement dans ce secteur me porte à privilégier nettement, pour les recherches futures, l'emploi de formulations variationnelles intégrales. Ces dernières rendent l'approche θ-intégrale plus élégante (en raison de leur caractère symétrique et de l'économie ainsi permise d'un ordre de dérivation pour l'état élastique), mais aussi plus performante et robuste sur le plan numérique.

L'application de méthodes intégrales à la recherche de domaines inconnus est notamment associée à des problèmes inverses : identification de fissures, contrôle non-destructif numérique,... sur lesquels beaucoup reste à faire. Les travaux menés jusqu'ici sur un problème modèle mettent en évidence l'importance que revêt la possibilité de représenter des formes aussi générales que possible tout en minimisant le nombre de paramètres géométriques, aspect non encore maîtrisé pour les situations tridimensionnelles. De plus, le résultat d'inversion devenant sensible aux erreurs sur les données à mesure que le nombre de paramètres augmente, il est nécessaire d'envisager la régularisation du problème inverse, par exemple au moyen de l'inversion gaussienne non-linéaire. Moyennant ces nécessaires perfectionnements et suivant les opportunités d'applications qui seraient rencontrées dans le futur, la formulation du problème comme minimisation d'une distance calcul-mesure et le calcul du gradient de cette dernière à l'aide de l'état adjoint est transposable sans difficulté de principe à des situations liées (par exemple) à l'élastodynamique ou la thermique.

Il faut souligner ici encore que beaucoup de problèmes inverses correspondent à des situations d'essais non destructifs, et donc à des mesures effectuées sur la frontière du système considéré. Les équations intégrales fournissent alors la relation mathématique la plus directe entre mesures et inconnues, et ont une place privilégiée pour l'étude de situation ù soit des conditions aux limites soit une partie de la frontière elle-même sont inconnues. L'examen d'actes de conférences récentes montre d'ailleurs que les méthodes d'équations intégrales et d'éléments de frontière sont utilisées dans une proportion sub-

[1] OR : "Opération de Recherches". Le Laboratoire de Mécanique des Solides en comprend actuellement dix.

[2] Sujet envisagé d'une collaboration future avec S. Mukherjee, Cornell Univ., USA, à la suite de son séjour sabbatique au Laboratoire de Mécanique des Solides.

stantielle (de l'ordre du quart ou du tiers) des travaux présentés. D'autre part, il y a une convergence naturelle entre méthode d'état adjoint et formulations intégrales variationnelles, liée au caractère symétrique de ces dernières, qui n'a pas encore été exploité. L'exploration de ces recouvrements entre mes deux thèmes de recherche est encore loin d'être complète.

Concernant les problèmes inverses, d'autres sujets pourront être abordés dans le futur. On pense notamment aux problèmes de la détermination par le calcul de contraintes résiduelles, de l'identification de coefficients de frottement locaux, de lois de contact ou de la détermination de lois de comportement d'interfaces minces, par exemple en collage, qui intéressent l'O.R. "durabilité" et qui pourraient être traités en collaboration. Il faut noter que tous ces problèmes se prêtent bien a priori à l'utilisation de méthodes intégrales : un algorithme est proposé dans ce sens par Ballard et Constantinescu [5] pour les contraintes résiduelles, tandis que pour les autres problèmes évoqués les variables essentielles sont confinées à la frontière du ou des solides en présence.

Le thème de la modélisation du contrôle non destructif thermique a été l'objet d'un travail d'ampleur nettement plus faible que souhaité initialement. En effet, le LMS avait été pressenti avec l'Onera pour travailler sur des techniques d'inversion numérique dans le cadre d'un projet européen Brite portant sur le développement de méthodes de contrôle non destructif thermique ;celui-ci, malgré deux présentations successives (avril 1992, avril 1993), n'a pas été retenu par la CEE malgré des appréciations positives des experts. La réussite de cette soumission aurait donné les moyens d'accomplir un travail très intéressant, où simulations et inversions numériques auraient été confrontées à l'expérience. Ce volet de mon activité reste donc quelque peu "en sommeil" mais ne demande qu'à resurgir dans le futur.

Sur un plan plus théorique, la reformulation par équations intégrales de l'approche dite de quasi-réversibilité, introduite par Lions et Lattès [52] dans le but de stabiliser la solution de certains problèmes mal posés dans lesquels une partie de la frontière du domaine supporte des données aux limites surabondantes tandis qu'une autre n'en supporte aucune (comme le problème de Cauchy pour le Laplacien), constitue une direction inexplorée à ce jour et qui permettrait de faire un lien supplémentaire entre méthodes d'équations intégrales et problèmes inverses. La résolution pratique d'assez nombreux problèmes inverses, comme par exemple l'estimation de la température en peau interne (supposée inaccessible expérimentalement) d'un tube à partir de mesures de température *et* flux en peau externe, pourrait bénéficier de cette approche, qui fait jouer un rôle privilégié aux variables définies sur la frontière.

Il n'existe pas de méthode générale, au sens fort et un peu algorithmique du terme, permettant d'extraire des réponses concrètes. Par contre, un cadre de pensée et des méthodes, développés par les Mathématiques et diverses branches de la Physique, se sont dégagés assez clairement. L'accent est mis sur l'information possédée ou souhaitée (mesures, connaissance des incertitudes, recherches d'informations complémentaires), la modélisation (représentation mathématique de la physique considérée, choix de représentation des grandeurs inconnues) et l'adéquation entre les deux (la finesse de la modélisation choisie pour l'inconnue doit être commensurable avec l'information disponible dans les données). L'accent est aussi mis sur la sensibilité aux données incertaines, le doute (le résultat de l'inversion est-il fiable ? cette fiabilité est-elle évaluable ?). Un grand nombre de situations peuvent en pratique être considérées comme des problèmes inverses et donc relever de ce mode de pensée et des techniques de résolution le rendant, dans une certaine mesure, opératoire (régularisation, inversion stochastique). Ces dernières conduisent fréquemment à des problèmes d'optimisation. Il importe alors de maximiser l'efficacité

de la méthode d'optimisation retenue, ce que permet notamment la méthode de l'état adjoint.

Dans toutes ces situations, un travail important est nécessaire pour obtenir soit des résultats concrets soit des indications nettes sur la faisabilité effective et les conditions qui lui sont associées. Ce travail trouve généralement la plus grande partie de sa justification dans la perspective d'applications immédiates ou potentielles. Les problèmes inverses sur lesquels mon activité future portera concrètement sera donc en partie dépendant de facteurs externes, et notamment des possibilités de collaboration qui se présenteront avec le milieu industriel ou scientifique (de façon soit interne avec d'autres thèmes du laboratoire, soit externe). Par exemple, notre groupe est pressenti [3] pour l'identification de la distribution des gouttelettes d'eau dans les turbomachines à partir de mesures optiques de diffraction laser ; des sollicitations externes ont aussi en partie motivé mes travaux relatifs à l'inversion gaussienne. En contrepartie, l'engagement de travaux est parfois conditionné par l'environnement extérieur, comme l'échec du projet BRITE le montre *a contrario*.

Les perspectives dans ce domaine me paraissent en fait devoir être considérées à l'échelle du groupe (OR "problèmes inverses", composante que je contribue à animer de l'activité du Laboratoire de Mécanique des Solides), plus qu'en termes de recherche personnelle. En effet, la multiplicité des directions d'application potentielles d'un mode de pensée et de méthodes de résolution complexes et multidisciplinaires nécessitent sans doute une certaine "masse critique" de culture et d'expérience accumulés et partagés par un groupe.

[3] par EDF, Direction des Etudes et Recherches, Chatou

Références bibliographiques

[1] Andriambololona, H. *Optimisation des essais et recalage de modèles structuraux*. Thèse de Doctorat, Université de Besançon, France (1990).

[2] Aubry, D., Clouteau, D. Seismic site effect and soil structure interaction. In W. B. Krätzig, et al. (eds.), *Structural Dynamics, vol. 2*, pp. 731–738. A. A. Balkema, Rotterdam (1991).

[3] Audebert, S. Characterization of the damping effect of a vibrating system. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 327–336. Springer-Verlag (1993). (IUTAM Symposium, 11-15 Mai 1992, Tokyo, Japon).

[4] Balakrishna, C, Gray, L J, Kane, J H. Efficient analytical integration of symmetric Galerkin boundary integrals over curved elements : elasticity formulation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **117**, 157–179 (1994).

[5] Ballard, P., Constantinescu, A. On the inversion of subsurface residual stresses from surface stress measurements. *J. Mech. Phys. Solids*, **42**, 1767–1788 (1994).

[6] Bamberger, A., Chavent, G., Lailly, P. Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire. Rapport no. 41, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (1980).

[7] Bamberger, A, Ha Duong, T. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide. *Math. Meth. in Appl. Sc.*, **8**, 598–608 (1986).

[8] Banerjee, P. K., Ahmad, S., Manolis, G. D. Advanced Elastodynamic Analysis. In D. E. Beskos (ed.), *Boundary Element Methods in Mechanics*. North Holland (1987).

[9] Banerjee, P. K., Butterfield, R. *Boundary element methods in engineering sciences*. McGraw Hill, London (1981).

[10] Barcilon, V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A 304**, 211–251 (1982).

[11] Barone, M. R., Yang, R. J. A Boundary Element Approach for Recovery of Shape Sensitivities in Threedimensional Elastic Solids. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **74**, 69–82 (1989).

[12] Batoz, J. L., Dhatt, G. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, Paris (1990).

[13] Becache, E. A variational boundary integral equation method for an elastodynamic antiplane crack. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **36**, 969–993 (1993).

[14] Ben Abdallah, J. *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1995).

[15] BEN-HAÏM, Y. Identification of certain polynomial nonlinear structures by adaptive selectively-sensitive excitation. *ASME J. Vibr. Acoust.*, **115**, 246–255 (1993).

[16] BONNEMAY, P. *Equations intégrales pour l'élasticité plane*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, France (1979).

[17] BOSSAVIT, A. Symmetry, groups and boundary value problems : a progressive introduction to noncommutative harmonic analysis of partial differential equations in domains with geometrical symmetry. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **56**, 167–215 (1986).

[18] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. Fluid-structure Interaction. In D. E. Beskos (ed.), *Boundary Element Methods in Mechanics*. North Holland (1987).

[19] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. *Boundary element techniques*. Springer-Verlag (1984).

[20] BUI, H. D. An Integral Equation Method for Solving the Problem of a Plane Crack of Arbitrary Shape. *J. Mech. Phys. Solids*, **25**, 29–39 (1977).

[21] BUI, H D. On the variational boundary integral equations in elastodynamics with the use of conjugate functions. *J. Elast.*, **28**, 247–256 (1992).

[22] BURCZYNSKI, T., FEDELINSKI, P. Boundary elements in shape design sensitivity analysis and optimal design of vibrating structures. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **9**, 195–201 (1992).

[23] CHOI, J. O., KWAK, B. M. Boundary Integral Equation Method for Shape Optimization of Elastic Structures. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **26**, 1579–1595 (1988).

[24] CLOUTEAU, D. *Propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes. Application à la tenue des ouvrages sous séismes*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, France (1990).

[25] COCHARD, R., MADARIAGA, R. Dynamic faulting under rate-dependent friction. PAGEOPH, **142**, 419–445 (1994).

[26] CORTEY-DUMONT, PH. *Simulation numérique de problèmes de diffraction d'ondes par une fissure*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, France (1985).

[27] CRUSE, T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 1259–1274 (1969).

[28] CRUSE, T. A. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers (1988).

[29] DESTUYNDER, PH., DJAOUA, M., LESCURE, S. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *J. Mécan. Théor. Appl.*, **2**, 113–135 (1983).

[30] DONGARRA, J. J., BUNCH, J. R., MOLER, C. B., STEWART, G. B. LINPACK *users'guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA (1979).

[31] ENGL, H. W., NEUBAUER, A. Optimal parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization. In l H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*. Academic Press (1987).

[32] ERINGEN, A. C., SUHUBI, E. S. *Elastodynamics (vol II - linear theory)*. Academic Press (1975).

[33] FLETCHER, R. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and sons (1987).

[34] GLADWELL, G. M. L. *Inverse problems in vibration*. Martinus Nijhoff (1986).

[35] Guiggiani, M., Gigante, A. A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. *ASME J. Appl. Mech.*, **57**, 906–915 (1990).

[36] Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T. J., Rizzo, F. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, 604–614 (1992).

[37] Gunther, N. M. *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Gauthier-Villars, Paris (1934).

[38] Hager, W. W. Updating the inverse of a matrix. *SIAM Review*, **31**, 221–239 (1989).

[39] Halphen, B., Nguyen, Q. S. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Mécanique.*, **14**, 39–63 (1975).

[40] Hamdi, M. A. *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains*. Thèse de Doctorat, Université Technologique de Compiègne, France (1982).

[41] Haug, E. J., Choi, K. K., Komkov, V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press (1986).

[42] Hellen, T. K. On the method of virtual crack extension. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **9**, 187–207 (1975).

[43] Kellogg, O. D. *Fundations of potential theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1967).

[44] Kitagawa, T., Hosoda, Y. New approaches to the optimal regularization. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 21–26. Springer-Verlag (1993). (IUTAM Symposium, 11-15 Mai 1992, Tokyo, Japon).

[45] Kohn, R., McKenney, A. Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *(in preparation)*, **6**, 389–414 (1990).

[46] Kostrov, B. V. Unsteady propagation of longitudinal shear cracks. *Int. J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, **30**, 1241–1248 (1966).

[47] Krishnasamy, G., Rizzo, F. J., Rudolphi, T. J. Hypersingular boundary integral equations : their occurrence, interpretation, regularization and computation. In P. K. Banerjee, S. Kobayashi (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*, vol. 7 : Advanced Dynamic Analysis, chap. 7. Elsevier (1992).

[48] Kupradze, V. D. *Dynamical problems in elasticity*, vol. 3 of *Progress in solids mechanics*. North Holland (1963).

[49] Kupradze, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).

[50] Kutt, H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerische Mathematik*, **24**, 205–210 (1975).

[51] Ladeveze, P., Reynier, M., Nedjar, D. Parametric correction of finite element models using modal tests. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 91–100. Springer-Verlag (1993). (IUTAM Symposium, 11-15 Mai 1992, Tokyo, Japon).

[52] Lattes, R., Lions, J. L. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Dunod (Paris) (1967).

[53] LAVRENTIEV, M. M. *Some improperly posed problems of mathematical physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1967).

[54] LEBLOND, J. B. Equations intégrales régularisées pour un corps bidimensionnel contenant une fissure de forme quelconque. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II,*, **303**, 1521–1524 (1986).

[55] LEBLOND, J. B., MOUCHRIF, S. Etude de trajets de propagation de fissures en mécanique linéaire tridimensionnelle de la rupture – application à la fracturation hydraulique. Rapport d'étude, GDR "Mécanique des Roches" (1992).

[56] MAIER, G, MICCOLI, S, NOVATI, G, SIRTORI, S. A Galerkin symmetric boundary-element method in plasticity : formulation and implementation. In J. H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, S. N. Atluri (eds.), *Advances in Boundary Element Techniques*, pp. 288–328. Springer-Verlag (1993).

[57] MENKE, W. *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*. Academic Press (1984).

[58] MIALON, P. Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode θ. Bulletin EDF/DER série c vol. 3, Electricité de France (1987).

[59] MUKHERJEE, S. *Boundary element methods in creep and fracture*. Elsevier (1982).

[60] MUKHERJEE, S., CHANDRA, A. Nonlinear solid mechanics. In D. E. Beskos (ed.), *Boundary element methods in mechanics.*, vol. 1, pp. 285–332. North Holland (1987).

[61] NEDELEC, J. C. Integral equations with non integrable kernels. *Integral equations and operator theory*, **5**, 562–572 (1982).

[62] NEWMAN, J. C., RAJU, I. S. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. *Engng. Frac. Mech.*, **15**, 185–192 (1981).

[63] NGUYEN, Q. S. Bifurcation and stablity of time-independent dissipative systems. Advanced course on bifurcation and stability of dissipative systems, CISM lectures, Udine, Italy (1991).

[64] NGUYEN, Q. S., STOLZ, C. Energy methods in fracture mechanics : bifurcation and second variations. In *Applications of Multiple Scaling in Mechanics* (1986). (IUTAM-ISIMM Symposium, Dourdan, France, June 2–5, 1986.

[65] NGUYEN, Q. S., STOLZ, C., DEBRUYNE, G. Energy methods in fracture mechanics : stability, bifurcation and second variations. *Engng. Structures*, **9**, 157–173 (1990).

[66] NISHIMURA, N., KOBAYASHI, S. A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems. *Comp. Mech.*, **4**, 319–328 (1989).

[67] PARKS, D. M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip strees intensity factors. *Int. J. Fract.*, **10**, 487–501 (1974).

[68] PETRYK, H., MROZ, Z. Time derivatives of integrals and functionals defined on varying volume and surface domains. *Arch. Mech.*, **38**, 694–724 (1986).

[69] POLIZZOTTO, C. An energy approach to the boundary element method ; Part I : Elastic solids,. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **69**, 167–184 (1988).

[70] PRADEILLES-DUVAL, R. M. *Evolution de systèmes avec surfaces de discontinuité mobiles : application au délaminage*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1992).

[71] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. *Numerical recipes : the art of scientific computing (second edition)*. Cambridge press (1992).

[72] Reynier, M. *Sur le contrôle de modélisations éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1990).

[73] Rezayat, M., Shippy, D. J., Rizzo, F. J. On time-harmonic elastic wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **55**, 349–367 (1986).

[74] Rizzo, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, **25**, 83–95 (1967).

[75] Rizzo, F. J., Shippy, D. J. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional elasticity. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **11**, 1753–1768 (1977).

[76] Rizzo, F. J., Shippy, D. J., Rezayat, M. A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **21**, 115–129 (1985).

[77] Rohal-Ilkiv, B., Orszaghova, Z., Hruz, T. A stepwise technique for inverse problem in optimal boundary control of thermal systems. In M. Raynaud N. Zabaras, K. A. Woodbury (ed.), *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*, pp. 147–154. ASME publications, New York, USA (1993). (proceedings, Palm Coast, Florida, USA, 14-18 June 1993).

[78] Rota, L. An inverse approach for identification of dynamic constitutive laws. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 157–164. A. A. Balkema, Rotterdam (1994). (International Symposium on Inverse Problems, Clamart, 2-4 nov. 1994).

[79] Roy, N. A., Girard, A., Dupuis, P. E. Updating finite element models : a direct energy approach. In *StruCoMe, Paris, Nov. 19–22* (Nov. 19–22, 1990).

[80] Salencon, J. *Mécanique des milieux continus (vols. 1,2,3)*. Presses de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1992).

[81] Sanchez-Sesma, F. J., Campillo, M. Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features : a boundary integral formulation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 2234–2253 (1991).

[82] Shaw, R. P. Diffraction of acoustic pulses by obstacles of arbitrary shape with a Robin condition – part A. *J. Acoust. Soc. Am.*, **41**, 855–859 (1962).

[83] Simon, J. Second variations for domain optimization problems. In W. Schappacher F. Kappel, K. Kunisch (ed.), *Control theory of distributed parameter systems and applications.*, vol. 91 of *International Series of Numerical Mathematics*, pp. 361–378. Birkhäuser Verlag, Basel (1989).

[84] Sirtori, S., Maier, G., Novati, G., Miccoli, S. A Galerkin symmetric boundary element method in elasticity : formulation and implementation. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **35**, 255–282 (1992).

[85] Sladek, J., Sladek, V. Three-dimensional curved crack in an elastic body. *Int. J. Solids Struct.*, **19**, 425–436 (1983).

[86] Sladek, J., Sladek, V. Dynamic stress-intensity factors studied by boundary integro-differential equations. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **23**, 919–928 (1986).

[87] SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope. *Il Nuovo Ciemento, serie III*, **20**, 181–185 (1886).

[88] SUO, X. Z., COMBESCURE, A. Sur une formulation mathématique de la dérivée de l'énergie potentielle en théorie de la rupture fragile. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II,*, **308**, 1119–1122 (1989).

[89] TADA, H., PARIS, P., IRWIN, G. The stress analysis of cracks handbook. Tech. rep., Del. Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, USA (1973).

[90] TANAKA, M., ITOH, H. New crack elements for boundary element analysis of elastostatics considering arbitrary stress singularities. *Appl. Math. Modelling*, **11**, 357–363 (1987).

[91] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).

[92] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).

[93] TIKHONOV, A. N., GONCHARSKI, A. V., STEPANOV, V. V., YAGODA, A. G. *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. Kluwer Academic Publishers (1995).

[94] TOH, K. C., MUKHERJEE, S. Hypersingular and finite part integrals in the boundary element method. *Int. J. Solids Struct.*, **31**, 2289–2312 (1994).

[95] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).

[96] VIRIEUX, J., MADARIAGA, R. Dynamic faulting studied by a finite difference method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 345–369 (1982).

[97] WASHIZU, K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press (1975).

[98] WENDLAND, W L. Mathematical properties and asymptotic error estimates for elliptic boundary element methods. In T A Cruse (ed.), *Advanced boundary element methods*, pp. 475–489. Springer-Verlag (1988).

[99] WING, G. M. *A primer on integral equations of the first kind*. SIAM Publications, Philadelphia, USA (1991).

[100] XIAO, H. *Equations intégrales de frontière, dérivation par rapport au domaine et approche énergétique pour les solides élastiques fissurés*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1994).

[101] ZABARAS, N., WOODBURY, K. A., RAYNAUD, M. (eds.). *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*. ASME publications, New York, USA (1993). (proceedings, Palm Coast, Florida, June 14-18, 1993).

[102] ZHANG, Q., MUKHERJEE, S. Second-order design sensitivity analysis for linear elastic problems by the derivative boundary element method. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **86**, 321–335 (1991).

Publications et travaux (actualisation 1998

Remarques :
- *L'ouvrage [Bon95] a connu deux stades antérieurs [Bon93] et [Bon94] (polycopiés de cours).*
- *Les références [Bon93], [Bon95b], [Bon95c], [Bon94], [BX95], [Bon95] sont des contributions invitées.*
- *Ma contribution au document collectif [BPRR95] représente, outre le travail de coordination, environ 140 pages et 40-50% du volume complet.*
- *Les documents d'enseignement [Bon90], [Bon92a], [Bon92b] sont assez courts (20 à 30 pages).*

Distinction

Prix Estrade-Delcros, Houllevigue, Saintour, Jules Mayher, décerné par l'Académie des Sciences (1995).

Ouvrage

[Bon95] Bonnet, M. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Editions / Eyrolles, Paris, France (1995).

Thèses

[Bon86] Bonnet, M. *Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique tridimensionnelle.*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris (Nov. 1986). publiée dans le Bulletin EDF/DER série C, 1/2, 1987.

[Bon95] Bonnet, M. *Quelques contributions aux méthodes d'équations intégrales et à l'étude de problèmes inverses en Mécanique des solides.*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (23 Oct. 1995).

Actes de manifestations scientifiques, coordination d'ouvrages collectifs

[BB95] Bui, H. D., Bonnet, M. (eds.). *Unknown or variable domains, inverse problems.*, Engng. Anal. with Bound. Elem., vol. **15**(2) (special issue) (1995).

[BTB+94] Bui, H. D., Tanaka, M., Bonnet, M., Luzzato, E., Maigre, H., Reynier, M. (eds.). *Inverse problems in engineering mechanics.*. Balkema, Rot-

terdam (1994). Proceedings of the Second International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Clamart, France, 2–4 nov. 1994.

[RBS92] REYNIER, M., BONNET, M., STOLZ, CL. Problèmes inverses en Mécanique des solides : méthodes de résolution, applications. Journée scientifique CSMA, Ecole Polytechnique (22 octobre 1992) : recueil des contributions écrites des intervenants, remis aux participants (1992).

Articles

[BLB85] BUI, H. D., LORET, B., BONNET, M. Régularisation des équations intégrales de l'élastostatique et de l'élastodynamique. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, **300**, 633–636 (1985).

[BM96] BONNET, M., MUKHERJEE, S. Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Struct.*, **33**, 4461–4480 (1996).

[Bon91] BONNET, M. A numerical investigation for a source inverse problem in linear acoustics. *J. Acoust.*, **4**, 307–334 (1991).

[Bon93] BONNET, M. A regularized galerkin symmetric BIE formulation for mixed elastic boundary-value problems. *Bound. Elem. Abstracts and Newsletter*, **4**, 109–113 (1993).

[Bon94] BONNET, M. Equations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, **318**, 429–434 (1994).

[Bon95a] BONNET, M. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 121–136 (1995).

[Bon95b] BONNET, M. Regularized BIE formulations for first- and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures*, **56**, 799–811 (1995).

[Bon95c] BONNET, M. Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 93–102 (1995).

[Bon97] BONNET, M. Differentiability of strongly singular and hypersingular boundary integral formulations with respect to boundary perturbations. *Comp. Mech.*, **19**, 240–246 (1997).

[BX95] BONNET, M., XIAO, H. Computation of energy release rate along a crack front using material differentiation of elastic BIE. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 137–150 (1995).

[KBM92] KOLLER, M. G., BONNET, M., MADARIAGA, R. Modelling of dynamical crack propagation using time-domain boundary integral equations. *Wave Motion*, **16**, 339–366 (1992).

Articles acceptés, à paraître

[BG98] BONNET, M., GUIGGIANI, M. Tangential derivative of singular boundary integrals with respect to the position of collocation points. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **41**, 1255–1275 (1998).

[FB98] Frangi, A., Bonnet, M. A Galerkin symmetric and direct BIE method for Kirchhoff elastic plates : formulation and implementation. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **41**, 337–369 (1998).

[PMB98] Poon, H., Mukherjee, S., Bonnet, M. Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **22**, 257–269 (1998).

Articles soumis

[BBN02] Bonnet, M., Burczyński, T., Nowakowski, M. Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal crack using BIE and adjoint variable approach. *Int. J. Solids Struct.*, **39**, 2365–2385 (2002).

[BPM98] Bonnet, M., Poon, H., Mukherjee, S. Hypersingular formulation for boundary strain evaluation in the context of a CTO-based implicit BEM scheme for small strain elasto-plasticity. *Int. J. Plasticity*, **14**, 1033–1058 (1998).

Chapitre de livre

[BB93] Bonnet, M., Bui, H. D. Regularization of the displacement and traction BIE for 3D elastodynamics using indirect methods. In J. H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, S. N. Atluri (eds.), *Advances in Boundary Element Techniques*, pp. 1–29. Springer-Verlag (1993).

Communications à des conférences internationales publiées dans des ouvrages

[BB97] Bonnet, M., Burczyński, T. Sensitivity approach for internal crack or void perturbation using boundary integral equation and adjoint approach. In Z. Mróz W. Gutkowski (ed.), *Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (Zakopane, Poland, May 26–30, 1997)*, pp. 187–192. Institut of Fundamental Technological Research, Warsaw, Poland (1997).

[BBA94] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Structural parameter identification using nonlinear Gaussian inversion. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 235–242. A. A. Balkema, Rotterdam (1994). (International Symposium on Inverse Problems, Clamart, 2-4 nov. 1994).

[BBA98] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Nonlinear Gaussian inversion applied to structural parameter identification. In D. Delaunay, Y. Jarny, K. Woodbury (eds.), *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*, pp. 213–220. ASME publications, New York, USA (1998). (proceedings, Le Croisic, France, 9-14 june 1998).

[BF96] Bonnet, M., Frangi, A. A new variational direct boundary integral formulation for Kirchhoff plates. In *Numerical methods in engineering '96 (proceedings of the second* Eccomas *conference, Paris, sept. 1996)*, pp. 439–445 (1996).

[BM95] Bonnet, M., Mukherjee, S. The consistent tangent operator and BEM formulations of regular and sensitivity problems in elasto-plasticity. In Shan-Fu Shen, Paul Dawson (eds.), *Simulation of Materials Processing : Theory,*

Methods and Applications, pp. 33–38. A. A. Balkema (1995). (Numiform'95, USA).

[BMM92] BONNET, M., MAIGRE, H., MANAA, M. Numerical reconstruction of interfacial defects and interface thermal resistances using thermal measurements. In D. Balageas (ed.), *Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92)*, pp. 266–271. Editions Européennes Thermique et Industrie (1992). Congrès QIRT 92, 7-9 juillet 1992, Paris).

[Bon89] BONNET, M. Regularized boundary integral equations for three-dimensional bounded or unbounded elastic bodies containing curved cracks of arbitrary shape under dynamic loading. In C. A. Brebbia, N. G. Zamani (eds.), *Boundary element techniques : applications in engineering*, pp. 171–189. Comp. Mech. Publ., Southampton (1989).

[Bon90] BONNET, M. Shape differentiation of regularized BIE : application to 3-D crack analysis by the virtual crack extension approach. In A. Chaudouet C.A. Brebbia (ed.), *Boundary Elements in Mechanical and Electrical Engineering*, pp. 43–57. Comp. Mech. Publ., Southampton, Springer-Verlag (1990).

[Bon91] BONNET, M. On the use of geometrical symmetry in the boundary element methods for 3D elasticity. In C.A. Brebbia (ed.), *Boundary element technology VI*, pp. 185–201. Comp. Mech. Publ., Southampton / Elsevier, Southampton, Boston (1991).

[Bon92] BONNET, M. A numerical approach for shape identification problems using BIE and shape differentiation. In F. Paris C.A. Brebbia, J. Dominguez (ed.), *Boundary Elements XIV (vol. 2 : stress analysis, computational aspects)*, pp. 541–553. Comp. Mech. Publ., Southampton (1992).

[Bon93] BONNET, M. Identification of Unknown Obstacles Using Boundary Elements and Shape Differentiation. In M. Raynaud N. Zabaras, K. A. Woodbury (ed.), *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*, pp. 85–92. ASME publications, New York, USA (1993). (proceedings, Palm Coast, Florida, USA, 14-18 June 1993).

[Bon94] BONNET, M. Shape differentiation of Galerkin BIE : application to energy methods in fracture mechanics. In *Boundary Element Method XVI*. Comp. Mech. Publ., Southampton (1994). (Southampton, UK, 13-15 juillet 1994).

[Bon95] BONNET, M. Differentiability of strongly singular BIE formulations with respect to boundary perturbations. In G. Yagawa S. N. Atluri, T. A. Cruse (eds.), *Computational Mechanics'95*, pp. 2800–2805. Springer-Verlag (1995).

[BX91] BONNET, M., XIAO, H. Numerical evaluation of G for 3D cracks using shape differentiation of regularized BIE. In S. N. Atluri, D. E. Beskos, R. Jones, G. Yagawa (eds.), *Computational Mechanics' 91*, pp. 137–140. ICES Publications, Atlanta (USA) (1991). (ICES'91 Symposium, Melbourne, Australie, août 1991).

[BX95] BONNET, M., XIAO, H. Energy release rate computation using material differentiation of elastic BIE in 3-D elastic fracture. In G. Yagawa S. N. Atluri, T. A. Cruse (eds.), *Computational Mechanics'95*, pp. 2856–2861. Springer-Verlag (1995).

Dont conférences Iutam

[BB87] Bui, H. D., Bonnet, M. Regular BIE for three-dimensional cracks in elastodynamics. In T. A. Cruse (ed.), *IUTAM symposium on advanced boundary element methods : applications in solid and fluid mechanics*, pp. 41–48. Springer-Verlag (1987).

[BBMP93] Bonnet, M., Bui, H. D., Maigre, H., Planchard, J. Identification of heat conduction coefficient : application to nondestructive testing. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *IUTAM symposium on inverse problems in engineering mechanics*, pp. 475–488. Springer-Verlag (1993).

[Bon93] Bonnet, M. Shape identification using acoustic measurements : a numerical investigation using BIE and shape differentiation. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *IUTAM symposium on inverse problems in engineering mechanics*, pp. 191–200. Springer-Verlag (1993).

[Bon97] Bonnet, M. Stability of moving fronts under Griffith criterion : a computational approach using integral equations and domain derivatives. In M. Fremond P. Argoul, Q. S. Nguyen (eds.), *IUTAM symposium on variations of domains and free boundary problems in solid mechanics*, pp. 269–276. Springer-Verlag (1997).

Communications a des conferences internationales

[BB89] Bonnet, M., Bui, H. D. On some inverse problems for determining volumic defects by electric current using BIE approaches : an overview. In *Proceedings of the 6th National Japanese Conf. on Boundary Elements Methods (Tokyo, Japan)*, pp. 179–198 (Dec. 1989).

[BB97] Bonnet, M., Burczyński, T. A BIE-adjoint variable approach to shape sensitivity in the presence of internal cracks or voids. In *US National Conference on Computational Mechanics (Aug. 6–8, San Francisco, USA)* (1997).

[Bon93] Bonnet, M. Shape identification problems using boundary elements and shape differentiation. In *Proceedings of the Second National Conference on Boundary and Finite Elements (Sibiu, Romania)* (13–15 May 1993).

[BPM97] Bonnet, M., Poon, H., Mukherjee, S. Elasto-plastic numerical analysis with a CTO-based implicit hypersingular BEM. In *Sixth International Symposium on Plasticity and its Current Applications (Juneau, Alaska, USA)* (14–18 Jul. 1997).

[PMB96] Poon, H., Mukherjee, S., Bonnet, M. Numerical implementation of an implicit BEM approach for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. In *ASME Mechanics and Materials Conference (Baltimore, USA)* (12–14 Jun. 1996).

Communications à des conférences nationales publiéees dans des ouvrages

[BBA95] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Inversion gaussienne non-linéaire appliquée à l'identification paramétrique des structures. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, pp. 473–478. Hermès (1995).

[Bon89] BONNET, M. Equations intégrales de surface et approches connexes en dynamique transitoire. In R. Ohayon J. M. Fouet, P. Ladevèze (ed.), *Calcul des structures et intelligence artificielle*, vol. 3, pp. 53–70. Pluralis (1989).

[Bon91] BONNET, M. Identification et contrôle par équations intégrales de frontière et variation de domaine. In R. Ohayon J. M. Fouet, P. Ladevèze (ed.), *Calcul des structures et intelligence artificielle*, vol. 4. Pluralis (1991).

[Bon93] BONNET, M. Equations intégrales et dérivation par rapport au domaine : application à l'identification de domaines en acoustique linéaire. In *Colloque National de Calcul des Structures*. Hermès (1993).

[LB85] LORET, B., BONNET, M. Méthode d'équations intègrales régulières et singulières pour les structures géotechniques soumises à des sollicitations dynamiques. In *Tendances actuelles en calcul des structures*. Pluralis (1985).

[LBM97] LEDERER, G., BONNET, M., MAITOURNAM, H.M. Modélisation par équations intégrales du frottement sur un demi-espace élasto-plastique. In *Troisième Colloque National de Calcul des Structures*, pp. 435–440. Presses Académiques de l'Ouest (1997).

Communications à des conférences nationales

[BB87] BUI, H. D., BONNET, M. Equation intégrale régulière pour une fissure en élastodynamique 3D. In *Actes du 8e Congrès Français de Mécanique (Nantes)* (Sep. 1987).

[BC93] BONNET, M., CONSTANTINESCU, A. Quelques remarques sur l'identification de modules élastiques à l'aide de mesures sur la frontière. In *Actes du 11e Congrès Français de Mécanique (Villeneuve d'Ascq)* (Sep. 1993).

[BK91] BONNET, M., KOLLER, M. G. Simulation numérique par potentiels retardés de la propagation dynamique de fissures sous chargement antiplan. In *Actes du 10e Congrès Français de Mécanique (Paris)* (Sep. 1991).

[Bon86] BONNET, M. Equations intégrales régularisées pour l'élastodynamique stationnaire. In *Congrès National d'Analyse Numérique* (1986).

[Bon89] BONNET, M. Equations integrales regulières et dérivation par rapport à un domaine variable : application à une classe de problèmes inverses en élasticité linéaire. In *Actes du 9e Congrès Français de Mécanique (Metz)* (Sep. 1989).

[Bon93] BONNET, M. Formulation par équations intégrales variationnelles du problème en vitesse de propagation de fissures en milieu élastique linéaire. In Cl. Stolz R. M. Pradeilles-Duval (ed.), *Actes de la Journée de travail sur les discontinuités mobiles, (Ecole Polytechnique, Palaiseau)* (May 1993).

[Bon94] BONNET, M. Résolution de problèmes inverses par approche probabiliste : principes et exemples. In *Colloque GEO (Aussois)* (21–25 Nov. 1994).

Actions de formation, cours

[Bon90] BONNET, M. Introduction à la résolution de problèmes d'élasticité par équations integrales de frontière. Polycopié, DEA de Mécanique des Solides et des Structures, option Mécanique non linéaire (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (1990).

[Bon92a] Bonnet, M. Introduction à la méthode des éléments finis pour l'élasticité linéaire. Polycopié, DEA de Mécanique des Solides et des Structures, option Mécanique non linéaire (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (1992).

[Bon92b] Bonnet, M. Introduction au calcul tensoriel pour la mécanique des milieux continus. Cours de Mécanique des Milieux Continus, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (Paris) (1992).

[Bon93] Bonnet, M. Equations intégrales et éléments de frontière en Mécanique des Solides : Théorie, mise en oeuvre, applications. Polycopié, cours invité, Faculté de Mathématiques de Bucarest (Roumanie) 300 pages env. (10–20 May 1993).

[Bon94] Bonnet, M. Equations intégrales et éléments de frontière en Mécanique des Solides. Polycopié, cours Ecole Doctorale, Polytechnique (Palaiseau), 220 pages (1994).

[BPRR95] Bonnet, M. (coordination), Pilvin, Ph., Raynaud, M., Reynier, M. Problèmes inverses en Mécanique des Solides. Polycopié de cours, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur (Paris), 300 pages env. (17–19 Oct. 1995).

Notes internes et rapports de contrats de recherche

[BBA91] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Identification de défauts dans les structures vibrantes : un aperçu des méthodes existantes. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Jul. 1991).

[BBA92] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Localisation de défauts dans des structures au moyen de mesures vibratoires : examen de deux méthodes numériques. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Sep. 1992).

[BBA93] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Inversion gaussienne pour l'identification de défauts par correction paramétrique : méthodologie. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Mar. 1993).

[BBA94] Bonnet, M., Ben Abdallah, J. Inversion gaussienne pour l'identification de défauts par correction paramétrique : examen numérique sur des structures à petit nombre de degrés de liberté. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Jun. 1994).

[BBP89] Bonnet, M., Bui, H. D., Planchard, J. Problèmes inverses pour l'équation de la chaleur : applications au contrôle non destructif thermique. Note interne, Electricité de France (1989).

[BC95] Bonnet, M., Constantinescu, A. Rapport d'étude concernant des modifications du logiciel distinv. Rapport contrat EDF/LMS, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Dec. 1995).

[BH93] Bonnet, M., H., Xiao. Problème en vitesse de propagation de fissure et dérivation par rapport au domaine des équations intégrales de l'élastostatique. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Dec. 1993).

[BN94] Bonnet, M., Nguyen, Q. S. Propagation des fissures planes dans des solides tridimensionnels. Rapport LMS / dret, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Nov. 1994).

[Bon89] BONNET, M. Un aperçu des approches existantes pour la description mathématique et la résolution des problèmes inverses. Rapport LMS / EDF et note interne LMS, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Oct. 1989).

[Bon90] BONNET, M. Traitement numérique de problèmes inverses de source en acoustique linéaire. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Aug. 1990).

[Bon95] BONNET, M. Inversion gaussienne pour l'identification de défauts par correction paramétrique. Rapport final contrat EDF/LMS, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Dec. 1995).

[BV87] BONNET, M., VOLDOIRE, F. Résolution par équations intégrales du problème de deux fissures parallèles en milieu plan soumis à une traction uniforme. Note interne hi 73/5795, Electricité de France (1987).

[BX93] BONNET, M., XIAO, H. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie G par dérivation par rapport au domaine des équations intégrales régularisées de l'élastostatique. Rapport LMS / EDF, Laboratoire de Mécanique des Solides (Ecole Polytechnique, Palaiseau) (Jan. 1993).

[DB89a] D'ANFRAY, PH., BONNET, M. Notice d'utilisation du programme TRIDYN. Note interne hi 72/6558, Electricité de France (1989).

[DB89b] D'ANFRAY, PH., BONNET, M. Programme TRIDYN : organisation interne. Note interne hi 72/6564, Electricité de France (1989).

Travaux soumis ou en préparation, communications proposées

[Bon99] BONNET, M. Stability of crack fronts under Griffith criterion : a computational approach using integral equations and domain derivatives of potential energy. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **173**, 337–364 (1999).