



**HAL**  
open science

# La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam

Cong Khanh Tran Luong

► **To cite this version:**

Cong Khanh Tran Luong. La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00122062

**HAL Id: tel-00122062**

**<https://theses.hal.science/tel-00122062>**

Submitted on 25 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE EN CO-TUTELLE

Présentée par  
**TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH**

Pour obtenir les titres de  
**Docteur de l'Université Joseph Fourier, Grenoble et Docteur du Vietnam**  
**Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

## **LA NOTION D'INTÉGRALE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU LYCÉE : UNE ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE LA FRANCE ET LE VIETNAM**

Soutenue le 19 Décembre 2006

### **Composition du jury**

Annie BESSOT  
Jean-Luc DORIER  
LÊ VĂN Tiến  
Isabelle BLOCH  
Marianna BOSCH  
ĐOÀN HỮU Hải  
Colette LABORDE  
LÊ THỊ Hoài Châu

Directrice de thèse  
Directeur de thèse  
Directeur de thèse  
Rapportrice  
Rapportrice  
Examinateur  
Examinatrice  
Examinatrice

Thèse préparée au sein des équipes  
**Didactique des Mathématiques (DDM), Laboratoire Leibniz – IMAG**  
**Formation de Troisième Cycle, Université de Pédagogie de Ho Chi Minh – Ville**



## Remerciements

*Mon père était maçon, et ma mère paysanne...*

Les remerciements, partie la plus « abandonnée » par les lecteurs moins « curieux », sont pour moi un moment sacré pour réfléchir sur la réalisation de ma thèse, une aventure dans un labyrinthe pour chercher son propre fil d'Ariane.

J'adresse mes immenses remerciements à Annie Bessot, qui a sacrifié la plupart de son temps à ma thèse, du point de départ au point d'arrivée. Rigoureuse, efficace et exigeante, elle m'a toujours encouragé tout au long de trois années de thèse, notamment dans les moments les plus difficiles de ma vie, lorsque ma mère est décédée. Elle a réagi devant mes choix et mes propositions de manière très ouverte, me permettant ainsi de mener cette recherche jusqu'à son achèvement. Grâce à elle, le travail difficile de thèse est devenu jour après jour une découverte intéressante à travers laquelle j'ai appris, apprends et apprendrai la méthodologie de recherche et la didactique des mathématiques. Elle est à la fois ma directrice de thèse et ma mère spirituelle.

Mes profonds remerciements vont aussi à Jean-Luc Dorier qui a enrichi mes connaissances tant didactiques que mathématiques lors des séances de travail.

Je tiens à exprimer toute ma sincère reconnaissance à Lê Văn Tiển qui m'a accordé du temps pour discuter du résumé de la thèse en vietnamien et des diapositives.

C'est pour moi un honneur qu'Isabelle Bloch et Marianna Bosch aient rapporté cette thèse. Leurs remarques claires et encourageantes sont intéressantes et utiles. Qu'elles veuillent bien recevoir ici mes chaleureux remerciements.

Toute ma gratitude revient également à Colette Laborde qui a accepté de présider le jury.

Je remercie aussi vivement Đoàn Hữu Hải et Lê Thị Hoài Châu d'avoir participé au jury.

J'ai eu le plaisir de partager avec mes collègues de l'équipe DDM des moments agréables et les remercie de m'avoir toujours encouragé. Merci pour le soutien sans restriction. Je pense fort à Afonso, Alain, Claude, Hương, Jean-François, Madeleine, Thành et Trung.

Je remercie vivement tous mes amis qui m'ont accompagné de près ou de loin, au cours de ces trois années. Je ne vous ai peut-être pas tous cités, mais sachez que je pense à vous.

Ma reconnaissance va, bien entendu, à l'Agence universitaire de la Francophonie et à la région Rhône-Alpes pour m'avoir octroyé une bourse d'étude qui m'a aidé financièrement à réaliser cette thèse.

Mes remerciements vont finalement à mon épouse Minh Hạnh et à mes fils Quang Nguyễn, Nguyễn Khoa, qui ont accepté de se priver de mois pendant trois ans de ma formation doctorale. Je peux désormais jouer au ballon avec Khoa, résoudre des exercices de maths avec Nguyễn et me promener avec Hạnh. En lisant cette présente thèse, vous verrez entre les lignes écrites tout mon amour pour vous car j'ai pensé, pense et penserai toujours à vous.



## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
I. Outils théoriques et problématique.....	2
I.1. Rapport institutionnel à un savoir comme contrainte du rapport personnel.....	2
I.2. Praxéologie mathématique.....	3
I.3. Transposition didactique.....	3
I.4. Ostensif et non-ostensif.....	4
II. Choix méthodologiques.....	5
II.1. Recours à une enquête épistémologique pour décrire un « modèle d'OM ».....	6
II.2. L'analyse institutionnelle synchronique et diachronique et ses matériaux.....	6
II.3. Recours à des expérimentations diversifiées et permanentes.....	7
III. Organisation de la thèse.....	8
<b>Partie A. Premiers éléments de l'analyse institutionnelle comparative entre la France et le Vietnam sur l'objet de savoir « intégrale »</b> .....	11
<b>Chapitre A1. Étude des programmes et des manuels au Vietnam de 1975 à nos jours</b> .....	15
I. Étude de programmes.....	15
I.1. Période 1975 – 1990.....	15
I.2. Période 1990 – 2000.....	16
I.3. Période 2000 – 2006.....	18
II. Étude de manuels.....	20
II.1. Période 1975 – 1990.....	20
II.2. Période 1990 – 2000.....	31
II.3. Période 2000 – 2006.....	34
III. Conclusion de l'étude des programmes et des manuels au Vietnam (1975 – 2006)	44
III.1. Calcul de primitive.....	44
III.2. Calcul de l'intégrale définie.....	45
III.3. Calcul d'aire.....	45
III.4. Liens entre aire, primitive, intégrale.....	45
<b>Chapitre A2. Étude des programmes et des manuels en France de 1970 à nos jours</b> .....	47
I. Étude de programmes.....	47
I.1. Période 1970 – 1980.....	47
I.2. Période 1980 – 2002.....	49
I.3. Période 2002 – 2006.....	50
II. Étude de manuels.....	51
II.1. Période 1970 – 1980.....	51
II.2. Période 1980 – 2002.....	67
II.3. Période 2002 – 2006.....	70
III. Conclusion de l'étude des programmes et des manuels en France (1970 – 2006) ...	71
III.1. Calcul de primitive.....	71
III.2. Calcul d'intégrale (définie).....	71
III.3. Calcul d'aire.....	71
III.4. Liens entre aire, primitive, intégrale.....	72
<b>Chapitre A3. Conclusion de l'étude des programmes et des manuels au Vietnam et en France</b> .....	73
<b>Partie B. Approfondissement de l'analyse institutionnelle comparative par l'étude des examens finaux, de l'apprêtage du savoir et l'étude épistémologique</b> .....	77

<b>Chapitre B1.</b> Baccalauréat en France et au Vietnam. Concours d'entrée universitaire au Vietnam .....	81
I. Baccalauréat en France .....	82
I.1. Période 1970 – 1980 .....	83
I.2. Période 1980 – 2002 .....	88
I.3. Période 2002 – 2006 .....	91
I.4. Conclusion pour le baccalauréat en France .....	93
II. Baccalauréat au Vietnam .....	94
II.1. Période 1975 – 1990 .....	94
II.2. Période 1990 – 2000 .....	96
II.3. Période 2000 – 2006 .....	98
II.4. Conclusion pour le baccalauréat au Vietnam .....	100
III. Concours d'entrée universitaire au Vietnam .....	100
III.1. Période 1975 – 1990 .....	101
III.2. Période 1990 – 2000 .....	105
III.3. Période 2000 – 2006 .....	106
III.4. Conclusion pour le concours d'entrée universitaire au Vietnam .....	108
IV. Conclusion .....	109
<b>Chapitre B2.</b> Quelques éléments sur l'apprêtage de la notion d'intégrale par les enseignants français et vietnamiens .....	111
I. Analyse a priori du questionnaire pour l'enseignant .....	111
I.1. Liens entre aire, primitive et intégrale (Partie 1) .....	111
I.2. Propriétés de l'intégrale jugées la plus facile ou la plus difficile (Partie 1) .....	112
I.3. Techniques d'intégration enseignées et ordre de leur difficulté (Partie 1) .....	115
I.4. Exercice 1, <i>non routinier</i> dans les deux institutions : solutions possibles (Partie 2) .....	117
I.5. Exercice 2, solution géométrique à noter et commenter (Partie 2) .....	121
I.6. Exercices faciles et difficiles du type « calculer $\int_a^b f(x)dx$ » (Partie 3) .....	122
II. Analyse a posteriori du questionnaire pour enseignant .....	123
II.1. Liens entre aire, primitive et intégrale (Partie 1) .....	123
II.2. Propriétés de l'intégrale jugées la plus facile ou la plus difficile (Partie 1) .....	127
II.3. Techniques d'intégration enseignées et ordre de leur difficulté (Partie 1) .....	129
II.4. Exercice 1, <i>non routinier</i> dans les deux institutions : solutions attendues (Partie 2) .....	130
II.5. Exercice 2, solution géométrique à noter et commenter (Partie 2) .....	134
II.6. Exercices d'intégration facile et difficile du type « calculer $\int_a^b f(x)dx$ » (Partie 3) .....	136
III. Conclusion .....	139
<b>Chapitre B3.</b> Une enquête épistémologique sur l'objet « intégrale » pour un retour sur l'analyse institutionnelle .....	141
I. Changement de variable et primitivation .....	143
I.1. Newton, lien entre le taux de variation instantanée de l'aire en $x$ et l'ordonnée de la courbe en $x$ .....	143
I.2. Leibniz, introduction de $\int ydx$ comme sommation des aires de rectangles infinitésimaux de dimension $(y, dx)$ .....	144

I.3. Primitivation et changement de variable après l'émergence des notions de <i>fonction</i> et de <i>limite</i> .....	146
I.4. Retour sur les manuels au Vietnam et en France : domaine de fonctionnement des deux méthodes .....	148
I.5. Conclusion.....	151
II. Notion de différentielle et notation $dx$ .....	152
II.1. Notion de <i>différentielle</i> et notation $dx$ dans les références choisies.....	152
II.2. Notion de <i>différentielle</i> et notation $dx$ dans EMS au Vietnam et en France .....	156
II.3. Conclusion.....	166
III. Calcul approché d'intégrale .....	166
III.1. Calcul approché d'intégrale dans le savoir savant.....	166
III.2. Calcul approché d'intégrale dans les traités de référence.....	171
III.3. Calcul approché d'intégrale dans EMS en France et au Vietnam .....	172
IV. Liens entre aire, primitive et intégrale.....	173
V. Organisation mathématique de référence et organisation mathématique à enseigner .....	174
V.1. Un modèle d'une organisation mathématique de référence.....	174
V.2. Organisation mathématique à enseigner .....	176
<b>Chapitre B4.</b> Conclusion de l'analyse institutionnelle comparative entre la France et le Vietnam sur l'objet de savoir « intégrale ».....	181
I. Comparaison institutionnelle sur l'objet de savoir « intégrale ».....	181
I.1. Ressemblance entre les deux institutions .....	181
I.2. Dissemblance entre les deux institutions.....	182
II. Trois éléments spécifiques du savoir à enseigner dans l'institution vietnamienne..	184
II.1. Ostensif $\int$ .....	184
II.2. Ostensif $dx$ .....	185
II.3. Contrat institutionnel sur le calcul d'aire .....	185
III. Questions sur l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam.....	186
<b>Partie C.</b> Étude du savoir effectivement enseigné au Vietnam .....	187
<b>Chapitre C1.</b> Analyse du questionnaire pour les élèves vietnamiens : rupture du contrat institutionnel par rapport au calcul d'intégrale et au calcul d'aire .....	189
I. Analyse a priori du questionnaire pour les élèves vietnamiens.....	189
I.1. Exercice 1 : calcul de primitive .....	190
I.2. Exercice 2 : Étude de sens de variation d'une fonction et d'un encadrement numérique de l'intégrale .....	193
I.3. Question : Liens entre aire, primitive et intégrale .....	197
II. Analyse a posteriori du questionnaire pour les élèves vietnamiens.....	198
II.1. Exercice 1 : Calcul de primitive.....	199
II.2. Exercice 2 : Étude de sens de variation d'une fonction et d'un encadrement numérique de l'intégrale .....	200
II.3. Question : Liens entre aire, primitive et intégrale.....	203
III. Conclusion .....	205
<b>Chapitre C2.</b> Analyse des copies du baccalauréat vietnamien 2005.....	207
I. Analyse a priori .....	208
I.1. Exercice 1 : calcul d'aire .....	208
I.2. Exercice 2 : calcul d'intégrale séparé de l'aire.....	210
II. Analyse a posteriori.....	214



II.1. Exercice 1 : calcul d'aire .....	214
II.2. Exercice 2 : calcul d'intégrale séparé de l'aire.....	219
III. Conclusion.....	228
<b>Chapitre C3.</b> Observations de classes ordinaires au moment des révisions du calcul d'intégrale et du calcul d'aire.....	231
I. Repérage des types de tâches, techniques et technologies associées, susceptibles d'être proposés dans un moment de révision pour le baccalauréat.....	233
I.1. Calcul de primitive.....	233
I.2. Calcul d'intégrale séparé des grandeurs .....	234
I.3. Calcul d'aire: deux types de calculs et trois techniques associées.....	238
II. L'observation de deux classes ordinaires au moment des révisions du thème de l'intégration .....	240
II.1. Calcul de primitive .....	243
II.2. Calcul d'intégrale séparé des grandeurs .....	246
II.3. Calcul d'aire .....	251
III. Conclusion.....	257
III.1. Calcul de primitive avec ou sans l'ostensif $\int$ .....	257
III.2. Calcul d'intégrale séparé des grandeurs.....	257
III.3. Calcul d'aire .....	258
<b>Conclusion</b> .....	261
I.1 Sur la comparaison France – Vietnam : absence de la raison d'être de la notion de l'intégrale.....	261
I.2. L'ostensif $\int$ , élément unificateur des notions de primitive et d'intégrale au Vietnam, élément séparateur des notions de primitive et d'intégrale en France.....	262
I.3. L'ostensif $dx$ et ses trois valences instrumentale et sémiotique.....	263
I.4. Le calcul de primitive sans l'ostensif $\int$ , une rupture de contrat au Vietnam.....	264
I.5. La différenciation entre calcul d'aire et calcul intégrale .....	265
I.6. Le statut problématique de l'intervalle d'intégration au Vietnam .....	266
II. Limites de notre recherche et perspectives.....	266
<b>Résumé de la thèse en vietnamien</b> .....	269
<b>Références bibliographiques</b> .....	287
<b>Annexes</b> .....	293

## Introduction

La notion d'intégrale de Riemann est d'une grande importance pour les mathématiques. L'émergence de cette notion, tout d'abord implicite dans les calculs d'aire et de volume, a dû attendre Cauchy (1823) puis Riemann (1854) pour devenir un véritable savoir mathématique. En effet, la formalisation de cette notion nécessite à la fois celle de fonction et celle de limite. Ceci permet d'entrevoir pourquoi son enseignement débute tardivement dans les deux pays concernés, la France et le Vietnam (à la fin du lycée) puis se prolonge au niveau universitaire. Or de nombreux travaux sur l'enseignement de l'Analyse (comme par exemple, ceux d'Artigue 1998, Bloch 2000, Legrand M. 1993, Schneider 2001) ont mis en avant les difficultés inhérentes à ce champ des mathématiques, qu'est l'Analyse et dont un élément central est la notion d'intégrale.

« La théorie de l'intégration joue en mathématique un rôle extrêmement important. C'est une théorie riche et complexe. » (Revuz 1996, Encyclopædia universalis, corpus 12, p. 406)

Pour Bloch (2000), « l'intégrale de Riemann, les primitives ; fonctions rationnelles et leurs primitives ; les fonctions logarithmes et exponentielle ; les fonctions usuelles [...] » font partie des « objets institutionnels prégnants » de l'Analyse, au moins au niveau des premières années d'Université :

« Selon la classification de Bosch et Nin reprise par Chauvat (Chauvat 1997), il s'agit d'objets qui ont une forte légitimité épistémologique, ce qui fait qu'ils sont présents dans les contenus de l'enseignement sous une forme peu altérée depuis à peu près 30 ans. » (Op. cité, p. 24)

Au niveau de l'enseignement des mathématiques au lycée en France, la notion d'intégrale marque son importance à partir des années 1970.

« Les frontières de l'analyse enseignée au lycée, sans être immuables, sont relativement stables à travers les évolutions des programmes d'après guerre. La dérivation a toujours été au cœur de l'analyse, l'intégration a d'abord été plus marginale, mais est devenue à partir des années 70 une autre question centrale. » (Reisz 1997, p. 214)

Dans le savoir à enseigner au lycée au Vietnam à partir de 1975, on peut mesurer l'importance de la notion d'intégrale par le temps d'enseignement qui lui est consacré (21 % des séances d'enseignement de l'Analyse dans la période 2000 – 2006) et par son intervention permanente dans les sujets du baccalauréat et du concours d'entrée universitaire.

Au Vietnam, un changement de programme a eu lieu en 1990 au niveau de la classe 12 à propos de l'intégrale définie : une nouvelle définition de l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz a été introduite. Dans un travail préalable (Tran Luong 2002), nous nous sommes interrogé sur le sens ainsi donné à la notion d'intégrale : nous avons mis en évidence qu'il y avait là un véritable problème d'enseignement pour le Vietnam.

*La comparaison avec le système éducatif français* peut permettre de tirer les leçons des similitudes et des ressemblances liées à des choix d'enseignements différents. En retour, une analyse scientifique de ces choix peut contribuer à l'amélioration de l'enseignement de cette notion complexe dans les deux systèmes.

Pour conduire cette étude scientifique, nous sommes parti des questions initiales suivantes :

Quelles sont les spécificités, en particulier du point de vue épistémologique, de la notion d'intégrale en mathématiques, dans son enseignement ? L'enseignement de la notion d'intégrale s'appuie-t-elle sur la notion d'aire ? Établit-il des liens avec la notion de primitive ? Pourquoi et comment le fait-il ? Pourquoi ne le fait-il pas ? Sur quels autres savoirs s'appuie-t-il ?

Quelles difficultés rencontrent les enseignants dans leurs pratiques d'enseignement, les élèves dans leur apprentissage ? Ces difficultés résultent-elles des choix d'enseignement ou sont-elles constitutives de la notion d'intégrale ? En particulier, quels rôles et quelles significations ont les notations  $\int$  et  $dx$  du point de vue mathématique ou du point de vue institutionnel ?

Pour travailler ces questions qui sont à l'origine de notre recherche, nous allons leur associer des outils théoriques issus principalement de la théorie de l'anthropologie du didactique de Chevallard (1985, 1989, 1992, 1998).

## I. Outils théoriques et problématique

### I.1. Rapport institutionnel à un savoir comme contrainte du rapport personnel

La théorie anthropologique du didactique s'appuie sur trois termes primitifs : *objet*, *individu*, *institution*.

Le *rapport personnel* d'un individu X à un objet de savoir O ne peut être établi que lorsque X entre dans une institution I où O existe. C'est à travers l'établissement de ce rapport que la *personne*, couple formé par un individu X et le système de ses rapports personnels  $R(X, O)$ , devient un *sujet* de I. Lorsqu'une personne entre dans une institution didactique, son rapport personnel à un objet de savoir O s'établit (s'il n'existait pas auparavant) ou se modifie (s'il existait déjà) sous la contrainte du *rapport institutionnel* à cet objet.

« Au cours du temps, le système des rapports personnels de X évolue : des objets qui n'existent pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de X change. Dans cette évolution, l'invariant est l'individu ; ce qui change est la personne. » (Chevallard 1992)

« Le problème central en didactique est donc celui de l'étude du rapport institutionnel, de ses conditions et de ses effets. L'étude du rapport personnel est un problème pratiquement fondamental, mais épistémologiquement second, de la didactique. » (Chevallard 1989b, p. 93)

Du point de vue anthropologique, notre recherche portera ainsi sur l'étude du rapport institutionnel à l'objet de savoir *intégrale*, conçu comme cadre explicatif des contraintes et conditions pour les rapports personnels des enseignants et des élèves, dans deux institutions différentes : classe de Terminale en France, et classe 12 au Vietnam.

A la lumière de ce cadre théorique, nous pouvons à présent reformuler en termes de rapport institutionnel quelques-unes des questions posées au début :

Quels sont les rapports institutionnels à l'objet de savoir *intégrale* dans chacune des deux institutions ? Quelles sont leurs spécificités et leurs ressemblances ? Comment contraignent-ils et conditionnent-ils les rapports personnels des enseignants et des élèves ?

## I.2. Praxéologie mathématique

Pour analyser le rapport institutionnel aux objets de savoir, Chevallard (1998) introduit la notion de *praxéologie mathématique* pour décrire une *organisation mathématique OM*. Une praxéologie est constituée du quadruplet  $[T/\tau/\theta/\Theta]$  où :

- T est un type de tâches, contenant au moins une tâche t, présente dans une institution donnée,
- $\tau$  est une technique permettant d'accomplir la tâche t,
- $\theta$  est une technologie justifiant la technique  $\tau$ ,
- $\Theta$  est une théorie justifiant la technologie  $\theta$ .

En termes de praxéologie mathématique, nous reformulons de nouveau quelques-unes des questions initiales.

Quels types de tâches autour de l'objet de savoir *intégrale* existent dans chacune des deux institutions ? Quelles techniques associées sont enseignées ? Lesquelles sont privilégiées ? Quels sont les discours technologiques justifiant ces techniques ? Quels sont les éléments théoriques associés à ces discours présents dans chacune des institutions ? Comment évoluent temporellement les types de tâches, techniques et technologies ? Pourquoi ?

## I.3. Transposition didactique

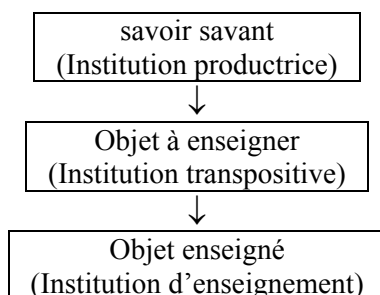
Nous rappelons brièvement la notion bien connue de transposition didactique, qui est au cœur de notre travail.

« Tout savoir S est ainsi attaché à une institution I *au moins*, dans laquelle il est mis en jeu par rapport à un domaine de réalité D. Le point essentiel est alors qu'un savoir n'existe pas *in vacuo* dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. » (Chevallard 1989)

Tout savoir, pour pouvoir vivre, doit se soumettre à un certain nombre de contraintes que nous supposons non identiques d'une institution à l'autre. Chevallard postule l'existence d'institutions transpositives qui permettent à un savoir de passer d'une institution à une autre : l'institution de transposition est une institution cachée, non visible que Chevallard appelle « noosphère » (1985).

On parlera de transposition didactique quand l'institution cible est une institution d'enseignement. Pour le savoir mathématique, nous reprenons le terme de savoir savant pour désigner la référence qui légitime l'existence et la vie d'un savoir dans l'institution d'enseignement. Nous en présenterons les conséquences méthodologiques plus loin.

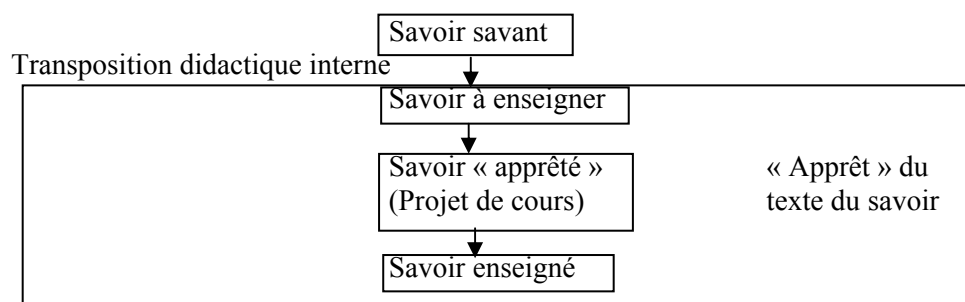
La transposition didactique peut donc se schématiser en trois chaînons :



Nous complexifions ce schéma en reprenant de Ravel (2003) la notion d'apprêtage du savoir :

« Nous entendons par savoir apprêté par un enseignant le savoir produit par celui-ci à la suite de choix mathématiques et didactiques faits dans une perspective d'enseignement du savoir à enseigner. Ce savoir apprêté se situe à l'interface de deux « mondes » : emblématique de l'activité de l'enseignant en amont des pratiques en classe, il est également le moteur de son activité en classe. » (Op. cité, p. 107)

Nous avons donc le schéma final :



En termes de transposition didactique, nous revenons sur les questions initiales pour les reformuler et les compléter.

Quels sont, dans chacune des deux institutions, les écarts entre :

- le savoir savant *intégrale* (de Riemann) et le savoir à enseigner ?
- le savoir à enseigner et le savoir apprêté ?
- le savoir apprêté et le savoir enseigné ?

En particulier : Quels types de tâches autour de l'objet de savoir intégrale sont présents ou absents dans chacune des deux institutions par rapport au savoir savant ? Pourquoi ? Quelles techniques associées sont modifiées ? Pourquoi ?

#### I.4. Ostensif et non-ostensif

La modélisation du savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre objets pose « le problème de la 'nature' des objets mathématiques et celui de leur 'fonction' dans l'activité mathématique » (Bosch et Chevallard 1999).

Bosch et Chevallard distinguent deux types d'objets : les objets *ostensifs*, les objets *non ostensifs*.

Un « *objet ostensif* –du latin *ostendre*, ‘montrer, présenter avec insistance’– pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. » (Op. cité, p. 90)

« Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces ‘objets’ qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement –au sens où on leur attribue une existence– sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu’être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). » (Ibid.)

Dans les usages humains, les objets ostensifs se distinguent des objets non ostensifs par le fait qu’ils peuvent être concrètement manipulés.

« La notation *log* et le mot ‘logarithme’ sont des objets ostensifs. En revanche, la *notion* de logarithme est un objet *non ostensif* qu’il n’est pas possible de manipuler au sens précédent. On peut seulement le ‘rendre présente’ –le *représenter*– par la manipulation d’un certain nombre d’objets ostensifs associés, telle la notation *log* par exemple. Dans la plupart des cas, les objets institutionnels se verront associés à un objet ostensif privilégié, leur *nom*, qui en permettra une évocation minimale. » (Ibid, p. 91)

La dialectique de l’ostensif et du non-ostensif se traduit par :

- L’attachement étroit à une institution donnée ;

« Ostensifs et non-ostensifs sont toujours des objets *institutionnels* dont l’existence ne dépend que très rarement de l’activité d’une seule personne. » (Ibid, p. 90)

- La co-activation d’objets ostensifs et d’objets non-ostensifs en toute activité humaine ;  
« [...] la mise en œuvre d’une technique se traduit par une *manipulation d’ostensifs réglée par des non-ostensifs*. » (Ibid, p. 92)

La valence instrumentale d’un ostensif (ou l’instrumentalité d’un ostensif) est son fonctionnement comme instrument permettant d’accomplir une tâche.

« [...] un objet ostensif y est considéré d’abord comme un *instrument* possible de l’activité humaine, c’est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d’autres, de conformer des techniques permettant d’accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. De là que nous reconnaissons à l’objet ostensif ce que nous nommerons une valence *instrumentale*, ou *instrumentalité*, valence qui existe aussi bien dans les symboles écrits (en mathématiques, par exemple) que dans les mots que l’on prononce ou dans les gestes que l’on fait » (Ibid, p. 107)

La valence sémiotique d’un ostensif (ou la sémiotité d’un ostensif) est son fonctionnement comme signe. Elle fonctionne en étroite relation avec sa valence instrumentale. Un ostensif peut perdre son instrumentalité en perdant sa sémiotité.

En termes d’ostensif, nous complétons les questions initiales par les suivantes :

Quelles sont les valences instrumentale et sémiotique des ostensifs  $\int$  et  $dx$  mises en jeu dans chacune des deux institutions ? Comment interviennent-elles dans le rapport institutionnel à la notion d’intégrale dans les institutions étudiées ?

## II. Choix méthodologiques

Nos choix méthodologiques sont guidés par l’étude de la transposition didactique.

## **II.1. Recours à une enquête épistémologique pour décrire un « modèle d'OM »**

Pour repérer les écarts entre la vie de l'objet de savoir *intégrale* dans chacune des deux institutions choisies, entre elles et avec le savoir savant de référence :

- dans un premier temps, nous prendrons comme référence un ensemble de types de tâches sur le thème de l'intégrale présents au niveau de l'Université des deux pays pour conduire une première analyse institutionnelle et ouvrir un premier champ de questions sur les OM à enseigner et les pratiques institutionnelles possibles ;

- dans un second temps, nous effectuerons une enquête épistémologique centrée sur le champ des questions posées précédemment, pour aboutir aux descriptions d'un modèle d'OM (ou OM de référence) et des OM à enseigner dans les deux institutions considérées.

Dans la description des OM, nous nous appuyerons sur ce que Bosch, Espinoza et Gascon (2002) proposent à propos de la notion de *limite de fonctions*.

« [...] une OM de référence, c'est-à-dire, un « modèle d'OM » [...] permettra d'analyser les reconstructions possibles proposées dans les programmes officiels et dans les manuels sur les limites de fonctions. Étant donné que l'un des grands types de tâches didactiques du professeur est la reconstruction de l'OM objet d'étude, le premier pas que nous proposons consiste à analyser le contenu mathématique officiel dans l'enseignement secondaire et que le professeur tendra de faire vivre chez ses étudiants. Cette analyse nous permettra de mettre en évidence les contraintes institutionnelles qui sont imputables au contenu mathématique pour son enseignement et qui, certainement, affectent son étude dans la classe. »<sup>1</sup>

## **II.2. L'analyse institutionnelle synchronique et diachronique et ses matériaux**

Les praxéologies scolaires

« peuvent être fortement naturalisées, au point de devenir complètement transparentes pour les sujets de l'institution qui les assument et les transmettent à travers leurs pratiques institutionnalisées » (Bosch et Gascon 2002, p. 32)

On peut donc faire l'hypothèse que la conscience des caractéristiques épistémologiques d'un tel ensemble de praxéologies échappe aux sujets des institutions (ici les classes terminales de l'Enseignement Mathématique Secondaire –EMS– en France et au Vietnam).

Pour tenter de dénaturer notre regard sur les praxéologies scolaires dans les deux phases décrites précédemment, nous effectuons des analyses institutionnelles comparatives suivant deux axes : diachronique et synchronique.

La comparaison *synchronique* porte principalement sur deux institutions d'enseignement : classe de Terminale en France, et classe 12 au Vietnam. Mais nous serons amené à évoquer une troisième institution, « la première année de l'Université vietnamienne », dans l'analyse de son concours d'entrée.

La raison de ce choix se trouve dans le fait que :

- La notion d'intégrale est enseignée à la fin du lycée, en classe de Terminale en France et en classe 12 au Vietnam ;

---

<sup>1</sup> En nous appuyant sur la traduction en français effectuée par Annie Bessot.

- Le baccalauréat vietnamien n'ouvrant pas l'accès à l'enseignement supérieur (contrairement à la France), un concours d'entrée universitaire est organisé pour sélectionner les meilleurs candidats. Les rédacteurs du concours étant issus de l'Université, les types de tâches et les solutions attendues dans le concours correspondent à des pratiques effectives et stables à l'Université. Ce concours pèse institutionnellement sur EMS au Vietnam.

Nous faisons référence à Le Van (2001) en ce qui concerne le choix des matériaux de l'analyse institutionnelle : programmes et manuels.

« La transposition didactique d'un objet de savoir est caractérisée par la mise en texte du savoir, donc en première approximation, par la construction des programmes et des manuels. Les programmes désignent les objets de savoir à enseigner, découpent et organisent ces objets selon les cycles ou les niveaux scolaires. Ils définissent ainsi les attentes des responsables de l'enseignement (les noosphériens) à propos de ces objets de savoir. Ils constituent un cadre pour un hypothétique texte de savoir. Les manuels représentent une mise en texte officielle des savoirs à enseigner, désignés par les programmes. » (Op. cité, p. 34)

Les deux institutions considérées étant les classes terminales de EMS, nous avons aussi pris en compte les examens finaux : baccalauréats français et vietnamien, concours d'entrée universitaire vietnamien.

L'analyse synchronique vise donc à :

- mettre en évidence et caractériser les productions différentes et similaires de la transposition didactique du même objet de savoir *intégrale* (de Riemann) dans des institutions différentes ;
- questionner les ressemblances et dissemblances institutionnelles en termes de conditions et de contraintes ;
- initier un répertoire de praxéologies existantes et envisager leurs développements possibles.

L'analyse *diachronique* nous permet de mettre en évidence l'évolution temporelle d'un système, évolution qui a abouti à son état actuel, et par conséquent, de mieux comprendre cet état (d'équilibre).

### **II.3. Recours à des expérimentations diversifiées et permanentes**

Dans notre recherche, nous ne mettons pas en place une seule expérimentation, et ne suivons pas le schéma « étude théorique, hypothèses, expérimentation ». Des hypothèses et des questions sont formulées tout le long du processus de notre travail et nous recourons à des expérimentations ou à des observations aux moments mêmes des formulations pour mettre à l'épreuve ces hypothèses ou apporter des éléments de réponses à ces questions.

Pour concevoir ces expérimentations ou ces observations, nous n'hésiterons pas à suivre le conseil de Castilla et Jullien (1991) :

« Une variable importante de toute expérimentation est son coût. Et il n'est sans doute pas inutile de rappeler qu'un coût élevé n'est pas à lui seul une garantie de qualité, c'est-à-dire qu'une expérimentation d'un coût très faible peut être tout à fait probante. » (op. cité, p. 176)



Nous mettrons donc en place un système d'expérimentations diversifiées que nous jugeons probant par rapport aux hypothèses ou aux questions de notre recherche :

- questionnaires auprès d'élèves et/ou d'enseignants ;
- observations naturalistes de classes ;
- entretiens avec enseignants et responsables de EMS.

### **III. Organisation de la thèse**

La thèse s'organise en trois parties : A, B et C.

La partie A est consacrée à une première analyse comparative entre les classes terminales de EMS en France et au Vietnam sur l'objet de savoir *intégrale*, à travers l'étude des programmes et de manuels de chacune des deux institutions durant trois périodes historiques choisies. Cette analyse nous permet d'aboutir à nos premières hypothèses et questions sur les ressemblances et dissemblances du rapport institutionnel à la notion d'intégrale dans chacune des deux institutions.

Dans la partie B, pour approfondir l'analyse institutionnelle comparative, nous effectuons :

- une étude des examens finaux : baccalauréats français et vietnamien, concours d'entrée universitaire vietnamien ;
- une étude de l'apprêtage de la notion d'intégrale par les enseignants français et vietnamiens à travers un questionnaire ;
- une enquête épistémologique sur l'objet *intégrale*.

Cette partie nous permet :

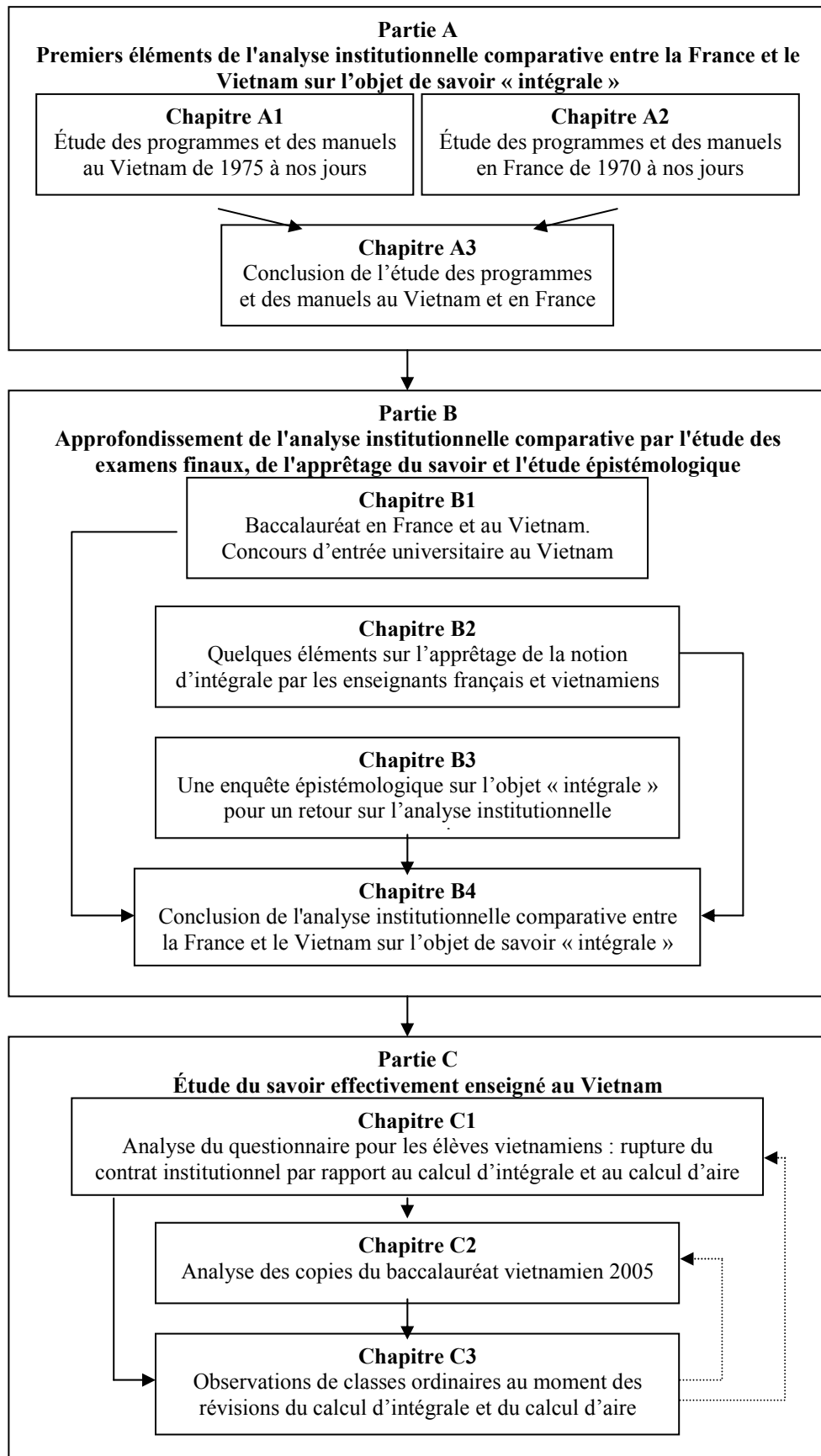
- de décrire une OM de référence,
- d'affiner la comparaison des OM à enseigner relativement au thème de l'intégration en France et au Vietnam,
- de dégager trois éléments spécifiques du savoir à enseigner dans l'institution vietnamienne.
- de questionner l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam.

Dans la partie C, nous étudions le savoir effectivement enseigné au Vietnam par différentes analyses :

- des réponses d'élèves vietnamiens à des tâches en rupture de contrat institutionnel par rapport au calcul d'intégrale et au calcul d'aire ;
- de copies corrigées du baccalauréat vietnamien 2005 ;
- de chroniques résultant d'observation naturaliste de séances de classes, au moment des révisions du calcul d'intégrale et du calcul d'aire pour le baccalauréat vietnamien.

Ces analyses conduisent à un ensemble de résultats sur l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam.

Ci-après, nous présentons la structure de notre manuscrit à l'aide d'un organigramme.





**Partie A.**  
**Premiers éléments de l'analyse institutionnelle comparative  
entre la France et le Vietnam sur l'objet de savoir « intégrale »**



Cette partie a pour objectif de mettre en évidence le rapport institutionnel à l'objet de savoir *intégrale* dans deux institutions d'enseignement différentes, l'enseignement des mathématiques dans la classe 12 au Vietnam et dans la classe de Terminale en France.

Pour cette analyse, nous prenons comme références initiales les deux manuels universitaires suivants :

- Fikhtengolz G. M. (1968), *Éléments d'analyse mathématique*, Tome I, Éditions Hayka, Moscou, traduction en vietnamien (1977), Universités et lycées professionnels, Hanoï.

- Lang S. (1964), *A first cours in calculus*, Addison-Wesley, réédition (2000), Springer.

Leur analyse permet de repérer différents types de tâches concernant le thème de l'intégrale :

• **Bloc 1. Calcul de primitive**

T1. Calculer  $\int f(x)dx$

• **Bloc 2. Calcul d'intégrale**

T2. Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

T3. Calculer approximativement  $\int_a^b f(x)dx$

• **Bloc 3. Applications de l'intégrale**

T4. Calculer la longueur d'un arc (dans un plan ou dans l'espace)

T5. Calculer l'aire d'une surface plane

T6. Calculer l'aire d'une surface de révolution

T7. Calculer le volume d'un corps

T8. Calculer le centre de gravité d'une plaque homogène

T9. Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène

T10. Calculer le travail d'une force variable

Les types de tâches présents dans ces deux manuels concernent un même genre de tâches « Calculer ». Trois objets fondamentaux sont concernés par ces calculs : *primitive*, *intégrale* et *grandeurs*. Parmi toutes les grandeurs, nous privilégions la grandeur *aire*, parce qu'elle est présente dans deux habitats, de façon implicite dans le calcul d'intégrale et de façon explicite dans les applications de l'intégrale ; mais aussi pour des raisons épistémologiques que nous développerons plus tard.

Ce premier constat nous mène à formuler les questions de départ qui serviront de trame à cette première analyse institutionnelle :

- Quels sont les types de tâches présents ? Lesquels sont absents ? Pourquoi ?
- Quelles sont les techniques de calcul introduites ? Lesquelles sont privilégiées ? Lesquelles sont absentes ? Pourquoi ?
- Quelles applications de l'intégrale sont présentes ? Lesquelles sont absentes ?
- Les applications de l'intégrale mises en jeu nécessitent-elles d'autres connaissances ? Lesquelles ?
- Quels sont les liens établis entre les trois objets fondamentaux du calcul intégral *aire*, *primitive*, *intégrale* ?

Pour chercher des éléments des réponses à ces questions, nous concentrerons notre analyse sur les types de tâches présents dans chaque institution, les techniques mises en œuvre, et les technologies qui les justifient.

Dans l'étude de programmes, nous choisissons des périodes qui marquent les moments historiques des changements curriculaires dans chaque institution.

Au Vietnam, ce sont les périodes suivantes :

- La période de transition qui a suivi la réunification du pays : 1975 – 1990. Pendant cette période, l'enseignement primaire et secondaire du pays fonctionne selon deux modalités différentes. Dans le Nord, il ne dure que dix ans et la notion d'*intégrale* est absente des programmes. Dans le Sud, il dure douze ans et la notion d'*intégrale* est introduite dans le programme d'Analyse de classe 12. Notre analyse portera donc sur l'enseignement des mathématiques au lycée dans le Sud.
- La période de la première réforme éducative : 1990 – 2000
- La période préparatoire à la deuxième réforme éducative qui entrera en vigueur au lycée au mois de septembre 2006 : 2000 – 2006

En France :

- La période de la réforme des mathématiques modernes : 1970 – 1980
- La période de la contre-réforme des mathématiques modernes : 1980 – 2002. Bien qu'il n'y ait pas de changement fondamental à propos de la notion d'*intégrale*, nous distinguerons dans cette période trois épisodes différents : 1980 – 1987 ; 1987 – 1994 ; 1994 – 2002, par la façon d'introduire la notion d'*intégrale*.
- La période actuelle : 2002 – 2006

## Chapitre A1.

### Étude des programmes et des manuels au Vietnam de 1975 à nos jours

#### I. Étude de programmes

##### I.1. Période 1975 – 1990

La notion d'*intégrale* durant cette période n'est enseignée que dans le Sud du pays où le programme d'Analyse de classe 12 s'organise en quatre chapitres durant 97 séances : la répartition des séances est donnée dans le tableau suivant :

Chapitres	Nombres de séances
Chapitre I. Applications de la dérivée	40
Chapitre II. Intégrale indéfinie	17
Chapitre III. Intégrale définie	23
Chapitre IV. Applications du calcul intégral	17
Total	97

**Tableau 1.** Répartition des 97 séances concernant l'Analyse en classe 12 (Sud Vietnam)

La notion de *dérivée* est introduite en classe 11 de façon très complète, avec la dérivée à droite et à gauche, la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables, la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables, la dérivée de la fonction réciproque d'une fonction (quand elle existe), la dérivée des fonctions puissances, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et trigonométriques réciproques. À la suite de la notion de *dérivée*, le programme de classe 11 définit la notion de *différentielle* comme suit :

On définit la différentielle d'une fonction  $f$  au point  $x_0$  relative à  $\Delta x$  par l'expression  $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ . On applique cette définition à la fonction identique pour démontrer  $dx = \Delta x$  et obtenir  $df(x_0) = f'(x)dx$ . On présente la notation  $\frac{df}{dx}$ , la signification géométrique de la différentielle, l'application de la différentielle au calcul approché, et les règles de différentiation.

Ce que le programme appelle *différentielle d'une fonction  $f$  au point  $x_0$  relative à  $\Delta x$*  est mathématiquement l'*image de  $\Delta x$  par la fonction différentielle de  $f$  au point  $x_0$* . Aussi identifie-t-il implicitement dans la démonstration de l'égalité  $dx = (x)'\Delta x$  l'*image de  $\Delta x$  par la fonction différentielle de la fonction identique* à cette fonction elle-même. L'intention de l'institution n'est pas donc d'introduire la notion de *différentielle* comme application linéaire mais de préparer l'enseignement des techniques d'intégration, surtout du changement de variable.

En classe 12, les deux thèmes majeurs de l'Analyse au programme sont la *dérivée* par ses applications à l'étude de fonctions et l'*intégrale*. À ce dernier thème, sont consacrés trois chapitres recouvrant 57 séances, soit 59 % du temps d'enseignement de l'Analyse.

Le programme prescrit le contenu de ces trois chapitres dans l'ordre suivant :

- Chapitre II. Intégrale indéfinie
  - §1. Primitive et intégrale indéfinie
  - §2. Propriétés de l'intégrale indéfinie. Tableau des intégrales indéfinies usuelles



- §3. Méthodes d'intégration pour l'intégrale indéfinie
- §4. Intégration de certaines fonctions
- Chapitre III. Intégrale définie
  - §1. Définition de l'intégrale définie
  - §2. Conditions de l'intégrabilité
  - §3. Propriétés de l'intégrale définie
  - §4. Lien entre intégrale définie et primitive
  - §5. Méthodes d'intégration pour l'intégrale définie
- Chapitre IV. Applications du calcul intégral
  - §1. Aire d'une surface plane
  - §2. Volume d'un corps géométrique
  - §3. Volume d'un corps de révolution
  - §4. Centre de gravité d'une plaque homogène
  - §5. Moment d'inertie

Les sections 4 et 5 du chapitre IV sont hors des épreuves du baccalauréat.

Pour les méthodes d'intégration, le changement de variable et l'intégration par parties sont introduits à deux reprises dans le chapitre de l'intégrale indéfinie et dans celui de l'intégrale définie. Les méthodes d'intégration selon certains types de fonctions sont étudiées de façon systématique et générale pour l'intégrale indéfinie : fonctions

rationnelles, fonctions  $x \mapsto R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$  ( $R$  est une fonction rationnelle de deux

variables et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, m$  sont cinq constantes) et fonctions transcendentes  $x \mapsto \sin^n x$ ,  $x \mapsto \cos^n x$ ,  $x \mapsto x^n \sin x$ ,  $x \mapsto x^n \cos x$ ,  $x \mapsto x^n e^x$ , ( $n$  naturel). L'élève a le droit de mobiliser les techniques introduites au moment de l'intégrale indéfinie pour calculer l'intégrale définie de fonctions analogues.

Dans ce programme, l'intégrale ne sert pas à générer de nouvelles fonctions comme la fonction exponentielle ou la fonction logarithmique, la construction des fonctions élémentaires fondamentales<sup>2</sup> étant achevée en classe 11. En revanche, l'intégrale apparaît comme un outil pour la géométrie et la physique. Un chapitre spécifique est consacré à ce rôle : calcul d'aire, calcul de volume (dont le calcul de volume d'un corps de révolution en particulier), centre de gravité d'une plaque homogène et moment d'inertie.

Cette organisation du programme exprime *a priori* l'intention de l'institution d'établir deux places égales à l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie et de mettre en valeur les applications de l'intégrale définie.

## I.2. Période 1990 – 2000

C'est durant cette période que se déroule la première réforme éducative du Vietnam. L'enseignement primaire et secondaire dure douze ans dans le Nord comme dans le Sud mais les programmes d'enseignement sont légèrement différents selon les régions. Nous continuons à analyser le programme d'Analyse de classe 12 mis en œuvre dans le Sud. Nous présentons dans le tableau 2, l'organisation et la répartition des séances du programme d'Analyse de classe 12.

---

<sup>2</sup> Sont appelées au Vietnam *fonctions élémentaires fondamentales* les fonctions suivantes : fonctions puissances, fonctions exponentielles, fonctions logarithmiques, fonctions trigonométriques et fonctions trigonométriques réciproques. La somme, la différence, le produit, le quotient et la fonction composée des fonctions élémentaires fondamentales s'appelle *fonction élémentaire*.

Chapitres	Nombres de séances
Chapitre I. Complément aux fonctions et limites	9
Chapitre II. Dérivée	19
Chapitre III. Quelques applications de la dérivée	28
Contrôle écrit en fin de semestre	1
Chapitre IV. Intégrale	25
Chapitre V. Analyse combinatoire	7
Révision et contrôle écrit en fin d'année scolaire	18
Total	107

**Tableau 2.** Répartition des 107 séances concernant l'analyse en classe 12 (Vietnam)

La notion de *dérivée*, introduite en classe 11 dans le programme précédent, se retrouve maintenant en classe 12, suivie des applications à l'étude de fonctions. Pour préparer l'enseignement de la dérivée, un nouveau chapitre « complément aux fonctions et aux limites » apparaît au début du programme. L'Analyse combinatoire est présentée pour la première fois. La notion de *différentielle* disparaît.

Par rapport au programme précédent, les thèmes majeurs augmentent en nombre : fonction, limite, dérivée, intégrale, et analyse combinatoire. Par conséquent, la proportion du calcul intégral dans le programme baisse considérablement. En effet, l'intégrale n'occupe plus qu'un chapitre de 25 séances, soit 23 % du temps d'enseignement de l'Analyse. Ainsi, le temps d'enseignement consacré à l'intégrale baisse plus de deux fois par rapport à la période précédente (23 % contre 59 %).

Les méthodes, les techniques d'intégration et les applications de l'intégrale à enseigner seront-elles réduites ? Lesquelles ?

Le programme prescrit les sections du chapitre *Intégrale* comme suit :

- Chapitre IV. Intégrale
  - §1. Primitive
  - §2. Intégrale
  - §3. Méthodes d'intégration
  - §4. Applications du calcul intégral

La notion de *primitive* remplace la notion d'*intégrale indéfinie* et la notation  $\int f(x)dx$  disparaît. C'est pourquoi, la notion d'*intégrale définie* devient tout simplement *intégrale*. En raison de la suppression de l'intégrale indéfinie, le changement de variable et l'intégration par parties sont introduits uniquement pour l'intégrale [définie]. Bien que la notion de *différentielle* ne soit pas définie, le programme autorise l'introduction des conventions  $du = u'(x)dx$ ,  $dv = v'(x)dx$  dans le but de simplifier l'écriture de la formule d'intégration par parties. Aucune section spécifique n'est réservée à l'étude systématique et générale de l'intégration selon certains types de fonctions. En revanche, on essaie de présenter à titre d'exemple certaines intégrales concrètes typiquement choisies dans la section *Méthodes d'intégration*.

Les applications de l'intégrale se réduisent au calcul d'aire et de volume d'un corps de révolution. On n'aborde pas le calcul d'un corps géométrique général.

Ainsi, l'intégrale indéfinie est supprimée, mais les deux méthodes d'intégration pour l'intégrale [définie] et deux applications de l'intégrale sont conservées.

### I.3. Période 2000 – 2006

Le ministère de l'Éducation et de la Formation du Vietnam énonce deux directives jugées fondamentales pour le remaniement et la fusion des programmes de mathématiques pour l'ensemble du pays :

- (1) L'essentiel des programmes d'Analyse de classe 12 de la période 1990 – 2000 doit rester inchangé.
- (2) La charge de l'apprentissage doit être diminuée, c'est-à-dire que le niveau de difficulté doit diminuer, en même temps que l'on simplifie les contenus trop compliqués jugés inutiles.

Le nouveau programme d'Analyse de classe 12 s'organise en 4 chapitres durant 107 séances (tableau 3).

Chapitres	Nombre de séances
Chapitre I. Dérivée	20
Chapitre II. Applications de la dérivée à l'étude de fonctions	26
Révision et examen en fin du 1er semestre	5
Chapitre III. Primitive et intégrale	23
Chapitre IV. Algèbre combinatoire	10
Pratique de calcul avec la calculatrice Casio fx-500A	3
Révision et examen en fin d'année	20
Total	107

**Tableau 3.** Répartition des 107 séances concernant l'Analyse en classe 12 (Vietnam)

Ainsi, le calcul intégral est présenté dans le chapitre III, enseigné pendant 23 séances, soit 21 % du temps d'enseignement de l'Analyse. Le temps d'enseignement réservé à ce thème est presque le même que celui de la période 1990 – 2000 (21 % contre 23 %). Les sections du chapitre sont identiques à celles du programme précédent :

- Chapitre III. Primitive et intégrale
  - §1. Primitive
  - §2. Intégrale
  - §3. Méthodes d'intégration
  - §4. Quelques applications de l'intégrale

Pour les méthodes d'intégration, le changement de variable et l'intégration par parties sont conservés. Le calcul d'aire et le calcul de volume d'un corps de révolution le sont aussi. Les seules modifications concernent les fonctions sur lesquelles porte l'intégration :

- les fonctions trigonométriques réciproques, leurs dérivées et les primitives concernées sont éliminées.
- la notion de *différentielle* est réintroduite, officiellement au service de l'intégration. À ce propos, le *Guide pour l'enseignant* écrit :

- §4. Dérivée d'ordre supérieur et §5. Différentielle

Rien n'est particulier pour ces deux sections car elles sont réduites au maximum. On suggère de reporter la notion de *différentielle* au chapitre *Primitive et Intégrale*<sup>3</sup> parce que cette notion n'est utilisée que dans ce chapitre. L'enseignant peut le faire. Ceci n'influence rien la logique du programme.

Le programme propose de présenter de façon très superficielle un exemple simple de l'application de la différentielle au calcul approché et de supprimer la notation  $\frac{df}{dx}$ , la signification géométrique de la différentielle et les règles de différentiation.

Ainsi, la réapparition de la notion de *différentielle* dans le but de servir au calcul intégral et la disparition des fonctions trigonométriques réciproques comme fonctions à intégrer marquent les seules différences entre les programmes des deux dernières périodes.

	1975 – 1990	1990 – 2000	2000 – 2006
Méthodes d'intégration	Changement de variable et intégration par parties pour intégrale indéfinie		
	Changement de variable et intégration par parties pour intégrale définie	Changement de variable et intégration par parties pour intégrale [définie]	Changement de variable et intégration par parties pour intégrale [définie]
Applications	Calcul d'aire, calcul de volume d'un corps géométrique (dont calcul de volume d'un corps de révolution)	Calcul d'aire, calcul de volume d'un corps de révolution	Calcul d'aire, calcul de volume d'un corps de révolution
	Centre de gravité d'une plaque homogène, moment d'inertie (hors des épreuves du baccalauréat)		
Différentielle	Introduction complète de la notion de <i>différentielle</i> dans le chapitre <i>Dérivée</i> en classe 11 : définition, signification géométrique, application au calcul approché et règles de différentiation	Disparition de la notion de <i>différentielle</i> Conventions $du = u'(x)dx$ , $dv = v'(x)dx$ introduites dans <i>Méthodes d'intégration</i> pour simplifier la formule d'intégration par parties	Réintroduction simplifiée de la notion de <i>différentielle</i> dans le chapitre <i>Dérivée</i> ou dans le chapitre <i>Intégrale</i> : définition, exemple simple sur son application au calcul approché

**Tableau 4.** Tableau comparatif des programmes d'Analyse en classe 12 (Vietnam)

Nous pouvons maintenant répondre en partie aux premières questions posées au début de la partie. Le changement de variable et l'intégration par parties, au fil des trois périodes, sont présents dans les programmes comme deux méthodes du calcul d'intégrale, indéfinie et définie pour le programme 1975 – 1990, d'intégrale [définie] pour les deux autres périodes. Seuls les calculs d'aire et de volume d'un corps de révolution sont deux applications de l'intégrale présentes dans tous les programmes.

Pour tenter de répondre aux autres questions, nous allons examiner les manuels.

<sup>3</sup> Dans le programme en vigueur, la notion de *différentielle* est placée dans le chapitre *Dérivée*.

## II. Étude de manuels

### II.1. Période 1975 – 1990

Comme nous l'avons noté dans l'étude de programme correspondant, le calcul intégral pendant cette période n'est enseigné que dans le Sud du pays avec comme support un seul manuel d'Analyse pour toute la région. Pour notre étude, nous nous référerons à l'édition 1979 du manuel *Analyse 12*.

L'intégrale y est présentée en trois chapitres conformément au programme : *Intégrale indéfinie*, *Intégrale définie* et *Applications du calcul intégral*. Chaque chapitre se divise en un certain nombre de sections dont chacune comprend deux parties : Cours, Exercices. Les résultats des exercices proposés sont donnés à la fin du manuel.

#### II.1.1. Analyse du chapitre *Intégrale indéfinie*

##### a. Partie *Cours*

Le manuel note  $\int f(x)dx$  une primitive quelconque de  $f$  et il appelle *intégrale indéfinie d'une fonction* l'ensemble de ses primitives qu'il note aussi  $\int f(x)dx$ . Il ne distingue cependant pas *primitive* et *intégrale indéfinie*, quoique la première soit une fonction et la deuxième, un ensemble. La notation  $\int f(x)dx$  est donc utilisée de façon abusive dans la partie *Cours* pour désigner à la fois une primitive quelconque de  $f$  et l'intégrale indéfinie de  $f$ . Dans la partie *Exercices*, cette notation est toujours prise pour désigner l'intégrale indéfinie. Ainsi, le calcul de primitive existe sous la forme du calcul d'intégrale indéfinie  $\int f(x)dx$ .

Le manuel présente le tableau des « intégrales indéfinies » usuelles :

$\int 0 \cdot dx = C$
$\int 1 \cdot dx = x + C$
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$

**Tableau 5.** Tableau des intégrales indéfinies du manuel *Analyse 12* de l'édition 1979 (Sud Vietnam)

Un texte ministériel demande à l'enseignant de compléter le manuel en ajoutant au tableau 5 les trois formules suivantes :

- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

Deux de trois intégrales supra concernent des fonctions rationnelles. De plus, un texte ministériel demande à l'enseignant d'enseigner dans la partie *Cours* de la section *Intégration de certaines fonctions* la méthode générale de décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples. Cette insistance marque la place importante que doit occuper l'intégration des fonctions rationnelles.

Dans la section *Méthodes d'intégration* du chapitre *Intégrale indéfinie*, 39 intégrales indéfinies sont proposées : 30 intégrales à changement de variable (soit 77 %), et 9 intégrales à intégration par parties (soit 23 %). Ces proportions attestent l'importance que l'institution accorde au changement de variable.

- *Regardons la méthode de changement de variable exposée dans la partie cours.*

### 1. Méthode de changement de variable

Étant donnée  $g(x)$  une fonction<sup>4</sup> continue sur l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $u(x)$  une fonction à dérivée continue sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  et  $[a, b]$  l'ensemble des images par  $u$ . Si  $G(x)$  est une primitive de  $g(x)$  sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire

$$\int g(x)dx = G(x) + C, \quad (8)$$

alors

$$\int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C. \quad (9)$$

En effet, par les hypothèses précitées, la fonction  $g[u(x)]u'(x)$  continue sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  possède des primitives sur cet intervalle. Par ailleurs, comme

$$\frac{d}{dx} G[u(x)] = \frac{dG(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = g[u(x)]u'(x),$$

on a l'égalité (9).

Supposons que l'on ait à calculer l'intégrale

$$\int f(x)dx$$

et que l'on ne connaisse pas encore une primitive de  $f(x)$ . Si l'on peut écrire

$$f(x)dx = g[u(x)]u'(x)dx$$

et si l'on connaît une primitive  $G(x)$  de  $g(x)$ , alors on a selon la formule (9) :

$$\int f(x)dx = \int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C \quad (10)$$

Nous pouvons tirer du paragraphe précité deux éléments technologiques :

- **ET0.**  $\int g(x)dx = G(x) + C \Rightarrow \int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C$
- **ET1.** Si  $f(x)dx = g[u(x)]u'(x)dx$  et si  $\int g(x)dx = G(x) + C$ , alors
 
$$\int f(x)dx = \int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C.$$

La distinction institutionnelle faite entre les éléments technologiques ET0 et ET1 est subtile. D'une part, ET0 implique ET1. D'autre part, ET0 sous la condition de reconnaissance d'une primitive  $G$  de la fonction  $g$ , nous permet d'écrire directement les primitives  $G \circ u + C$  de la fonction  $(g \circ u)u'$  sans effectuer de changement de variable. Le manuel ne développe pas cette idée. Il privilégie ET1 au détriment de ET0. En effet, les 13 exemples présentés dans la partie *Changement de variable* sont résolus en introduisant une nouvelle variable comme le titre l'impose.

À titre d'illustration, considérons le calcul d'une intégrale indéfinie proposée dans le manuel. Elle sera calculée par trois techniques différentes, la première est présentée par le manuel lui-même ; les deux dernières se fondent sur les éléments technologiques établis dans les manuels d'Analyse des classes 11 et 12 en vigueur mais qui n'apparaissent jamais dans le manuel.

**Exemple 5.** (*Exemple du manuel*) Calculer  $\int \sin^3 x \cos x dx$ .

**Solution 1.** (*Solution du manuel*) Posant  $u = \sin x$ , on a  $du = u'(x)dx = \cos x dx$ . D'où :

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

**Solution 2.** (*Solution absente du manuel, fondée sur ET1*) Comme  $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ , on a :

<sup>4</sup> Une fonction  $f$  est donnée algébriquement dans l'enseignement secondaire au Vietnam sous la forme  $y = f(x)$ . La forme  $x \mapsto f(x)$  est rarement utilisée.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

**Solution 3.** (Solution absente du manuel, fondée sur la primitivation) Comme  $\left(\frac{1}{4}\sin^4 x\right)' = \sin^3 x \cos x$ , on a :

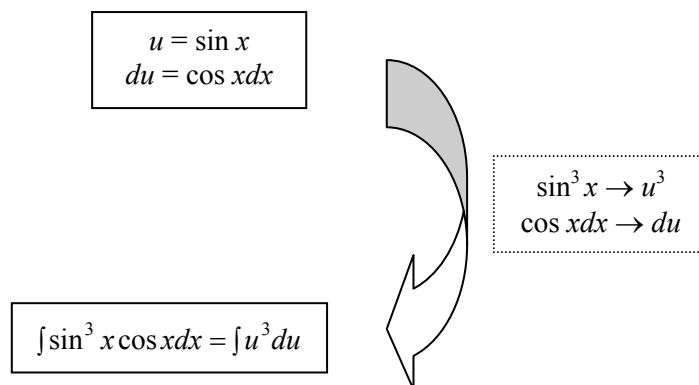
$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

Ainsi, seule la solution 1 qui utilise le changement de variable  $u = \psi(x)$  est institutionnellement privilégiée. Les solutions 2 et 3 qui mobilisent respectivement l'élément technologique ET1 et la primitivation ne le sont pas. À travers la solution 1 du manuel, nous pouvons décrire la technique pour calculer l'intégrale indéfinie  $\int f(x)dx$  par changement de variable.

Étapes de la technique	Exemple: Calculer $\int \sin^3 x \cos x dx$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choisir une variable auxiliaire <math>u = \psi(x)</math>, si <math>f(x)</math> est de la forme <math>g[\psi(x)]\psi'(x)</math></li> <li>• Calculer <math>du = \psi'(x)dx</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Poser <math>u = \sin x</math></li> <li>• Calculer <math>du = \cos x dx</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grâce aux résultats supra, ramener <math>\int f(x)dx</math> à <math>\int g(u)du</math> en substituant <math>\psi(x)</math> à <math>u</math> et <math>\psi'(x)dx</math> à <math>du</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculer <math>\int g(u)du</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Remplacer <math>u</math> par <math>\psi(x)</math> pour obtenir les primitives de <math>f</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C</math></li> </ul>

**Tableau 6.** Technique de calcul d'une intégrale indéfinie

Dans l'exemple supra, le passage de la variable  $x$  à la variable  $u$  revient à une *substitution littérale formelle* : c'est en substituant  $\sin^3 x$  à  $u^3$  et  $\cos x dx$  à  $du$  que  $\int \sin^3 x \cos x dx$  est ramenée à  $\int u^3 du$  sans se référer à la formule de changement de variable.



Après avoir explicitement énoncé le changement de variable  $u = \psi(x)$ , le manuel présente implicitement le changement de variable  $x = \varphi(t)$  à l'occasion de l'étude générale de l'intégrale  $\int R\left(x, \sqrt{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ . Cette fois-ci, malgré l'absence de la formule  $\int f(x)dx =$



$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dx$ , le manuel pose  $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ , c'est-à-dire  $x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}$ . Il calcule  $dx = \varphi'(t)dt$ , puis il écrit directement l'égalité  $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx = \int R[\varphi(t), t]\varphi'(t)dt$  sans rien expliquer. L'écriture de l'égalité se passe comme si on substituait  $x$  à  $\varphi(t)$  et par conséquent  $dx$  à  $d[\varphi(t)] = \varphi'(t)dt$ .

Ainsi, à travers l'égalité  $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx = \int R[\varphi(t), t]\varphi'(t)dt$ , la formule de changement de variable  $x = \varphi(t)$  :  $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$  est implicitement établie. La présence de  $\varphi'(t)$  dans le membre droit de la formule est institutionnellement considérée comme un résultat de la différentiation  $dx$ , non comme résultat de la dérivation d'une fonction composée. Autrement dit, le passage de  $\int f(x)dx$  à  $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$  peut s'effectuer opératoirement comme une substitution littérale formelle selon le schéma :  $x \rightarrow \varphi(t)$ ,  $dx \rightarrow d[\varphi(t)] = \varphi'(t)dt$  **sans mobiliser la formule de changement de variable comme élément technologique**.

En résumé, dans tous les exemples de la partie *Cours*, le changement de variable  $u = \psi(x)$  et  $x = \varphi(t)$  est institutionnellement lié à la différentiation respectivement  $du$  et  $dx$ , utilisée comme élément technologique permettant de passer opératoirement une variable d'intégration à une autre sans se référer à la formule de changement de variable.

- La méthode d'intégration par parties est présentée dans le manuel par le paragraphe suivant.

Soit  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions à dérivées continues sur un intervalle. Sur cet intervalle, on a :

$$d(uv) = u dv + v du.$$

On en déduit :

$$u dv = d(uv) - v du.$$

En appliquant la formule de l'intégration d'une somme, on a :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

C'est la formule d'intégration par parties.

Le manuel exemplifie dans la partie *Intégration par parties* cinq calculs mais ne donne ni instructions, ni commentaire. Puis, il présente l'application de cette méthode à l'intégration de quelques fonctions transcendentes. Ci-après un exemple du manuel d'un calcul par l'intégration par parties :

**Exemple 1.** (*Exemple du manuel*) Calculer l'intégrale  $\int \ln x dx$ .

**Solution.** On pose  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$ . On en déduit  $du = \frac{dx}{x}$  et  $v = x$  (on n'écrit pas la constante intégrale  $C$  car ceci n'intervient pas dans le résultat final). Appliquant la formule d'intégration par parties, on a :

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

**b. Partie Exercices**

Dans ce chapitre, tous les exercices proposés appartiennent au type de tâches **T1 : Calculer l'intégrale indéfinie**  $\int f(x)dx$ .

Pour résoudre ce type de tâches, l'institution propose quatre techniques :

**τ1.** On linéarise  $f(x)$  en  $\sum_{i=1}^n f_i(x)$  où une primitive  $F_i$  de  $f_i$  est donnée dans le tableau des primitives ( $i = \overline{1, n}$ ). On a :

$$\int f(x)dx = \int \sum_{i=1}^n f_i(x)dx = \sum_i \int f_i(x)dx = \sum_{i=1}^n F_i(x) + C.$$

**τ2.** On pose  $x = \varphi(t)$ , on calcule  $dx = \varphi'(t)dt$ . **En remplaçant  $x$  par  $\varphi(t)$  et  $dx$  par  $\varphi'(t)dt$** <sup>5</sup>, on a :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

**τ3.** Si  $f(x) = g[\psi(x)]\psi'(x)dx$ , on pose  $u = \psi(x)$ . On calcule  $du = \psi'(x)dx$ . Si  $\int g(x)dx = G(x) + C$ , **en remplaçant  $\psi(x)$  par  $u$  et  $\psi'(x)dx$  par  $du$** <sup>6</sup>, on a :

$$\int f(x)dx = \int g(u)du = G(u) + C = G[\psi(x)] + C.$$

**τ4.** On considère  $f(x)dx$  comme  $u(x)v'(x)dx$ . On pose  $u = u(x)$  et  $dv = v'(x)dx$ . On en déduit  $du$  et  $v$ . On a :

$$\int f(x)dx = \int u dv = uv - \int v du$$

Ces techniques se fondent sur les éléments technologiques suivants :

**ET3.** Intégration par parties pour l'intégrale indéfinie

**ET4.** Linéarité de l'intégrale indéfinie

**ET5.** Tableau des primitives usuelles

**ET6.** Définition de la notion de *différentielle*

**ET7.** Dérivée des fonctions usuelles

Les éléments technologiques suivants sont absents et remplacés par **ET6**, **ET7** :

**ET1.** Changement de variable  $u = \psi(x)$  pour l'intégrale indéfinie

**ET2.** Changement de variable  $x = \varphi(t)$  pour l'intégrale indéfinie

**II.1.2. Analyse du chapitre *Intégrale définie*****a. Partie Cours**

Après avoir étudié deux problèmes généraux du calcul d'aire et du calcul de travail d'une force variable, le manuel définit l'intégrale définie par la limite commune de sommes de Riemann.

<sup>5</sup> On n'a pas besoin de se référer à la formule de changement de variable  $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ .

<sup>6</sup> Aussi, n'a pas-t-on besoin de se référer à la formule de changement de variable  $\int g[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int g(u)du = G(u) + C = G[\psi(x)] + C$ .

Pour préparer cette première rencontre avec l'intégrale définie, un texte ministériel recommande à l'enseignant de compléter le manuel en introduisant la notation  $\sum_{i=1}^n a_i$ , ses quelques propriétés simples, et certaines sommes remarquables écrites comme :

- $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
- $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{i=1}^n c = nc$
- $\sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$
- $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
- $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

### b. Partie Exercices

Tous les exercices se rattachent à un type de tâches unique : **T2. Calculer**  $\int_a^b f(x)dx$ .

Les calculs doivent se faire :

- à l'aide d'une subdivision particulière de l'intervalle d'intégration (9 intégrales),
- directement par la formule de Newton – Leibniz (40 intégrales),
- par changement de variable (10 intégrales),
- par intégration par parties (9 intégrales).

Les deux premières techniques sont spécifiques à l'intégrale définie : l'enjeu est clairement la formule de Newton – Leibniz qui établit le lien fondamental entre primitive et intégrale définie (40 exercices).

La proportion (changement de variable)/(intégration par parties) diminue par rapport au chapitre précédent (10/9 contre 30/9) : ces exercices sont l'occasion d'une reprise des techniques travaillées dans le chapitre précédent. Cette reprise marque l'importance pour le thème de l'intégrale de ces deux méthodes.

### II.1.3. Analyse du chapitre *Applications du calcul intégral*

#### a. Partie Cours

En accord avec le programme, le manuel présente quatre applications différentes du calcul intégral à la géométrie et à la physique : aire d'une surface plane, volume d'un corps géométrique (dont volume d'un corps de révolution en particulier), centre de gravité d'une plaque homogène, et moment d'inertie.

Comme nous l'avons annoncé, nous nous centrerons ici sur le *calcul d'aire d'une surface plane*.

Le manuel énonce trois formules du calcul d'aire d'une surface plane, d'un cas particulier à un autre plus général :

- Si  $f$  est une fonction continue positive sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors l'aire du trapèze curviligne délimité par la courbe d'équation  $y = f(x)$ , et les droites d'équations  $y = 0, x = a, x = b$  est :

$$S = \int_a^b f(x) dx .$$

- Si  $f$  est une fonction continue (pas forcément positive) sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors l'aire de la surface plane délimitée par la courbe d'équation  $y = f(x)$ , et les droites d'équations  $y = 0, x = a, x = b$  est :

$$S = \int_a^b |f(x)| dx .$$

- Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$  et :

$$\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x),$$

alors l'aire de la surface plane délimitée par les courbes d'équations  $y = f_1(x), y = f_2(x)$  et les droites d'équations  $x = a, x = b$  est :

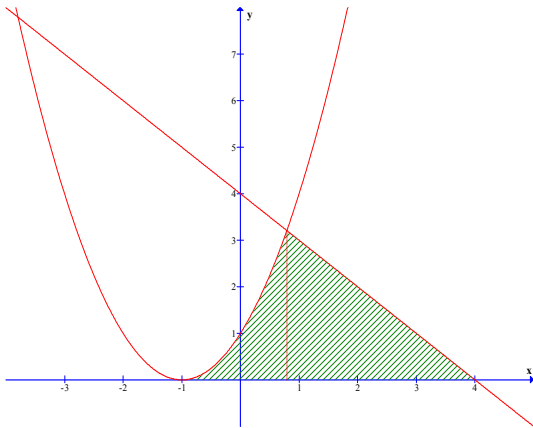
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx .$$

### b. Partie Exercices

Nous étudierons ci-dessous deux exercices représentatifs de calcul d'aire, l'un du manuel, l'autre du *Recueil d'exercices d'Analyse 12*, livre d'accompagnement officiel du manuel. Les solutions présentées sont rédigées selon les attentes institutionnelles en nous référant au manuel et au *Recueil d'exercices d'Analyse 12* :

#### Exercice 2. (Exercice du manuel)

Calculer l'aire de la surface plane délimitée par la courbe  $y = (x + 1)^2$  et les droites d'équations  $y = 0, y = 4 - x$ .



**Solution.** L'abscisse du point d'intersection de la parabole et de l'axe Ox est la racine de l'équation :

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Les abscisses des points d'intersection de la parabole et de la droite d'équation  $y = 4 - x$  sont les racines de l'équation :

$$(x + 1)^2 = 4 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 - x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

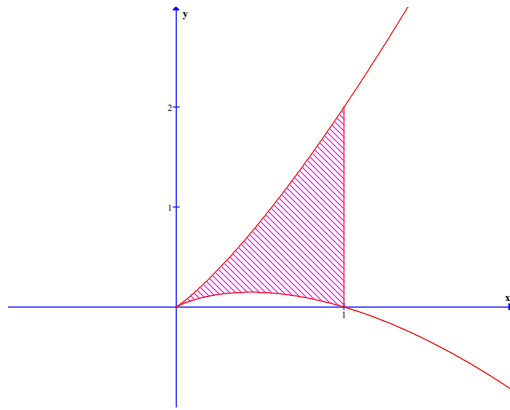
L'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation  $y = 4 - x$  et l'axe Ox est la racine de l'équation :

$$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

L'aire de la surface plane est :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{\sqrt{21}-3}{2}} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{\sqrt{21}-3}{2}}^4 (4-x) dx = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{21}-3}{2}} (x^2 + 2x + 1) dx + \int_{\frac{\sqrt{21}-3}{2}}^4 (4-x) dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^{\frac{\sqrt{21}-3}{2}} + \left[ 4x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{\sqrt{21}-3}{2}}^4 = \frac{181 - 21\sqrt{21}}{12} \text{ (u.a.)} \end{aligned}$$

**Exercice 4.13.** (Exercice du *Recueil d'exercices d'Analyse 12*)



Calculer l'aire de la surface plane délimitée par les branches de la courbe d'équation  $(y - x)^2 = x^3$  et la droite d'équation  $x = 1$ .

**Solution.** On note que  $x$  dans l'équation  $(y - x)^2 = x^3$  est positif parce que le membre gauche de l'équation est positif. Résolvant cette équation, on obtient :

$$y_1 = x + x\sqrt{x}$$

$$y_2 = x - x\sqrt{x}$$

Il est évident que  $y_1(x) \geq y_2(x)$  pour tout  $x \geq 0$  (cf. figure).

Donc :

$$S = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)] dx = \int_0^1 [(x + x\sqrt{x} - x + x\sqrt{x})] dx = 2 \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ (u.a.)}$$

À partir des solutions institutionnelles aux deux exercices supra, nous pouvons mettre en évidence certaines attentes de l'institution vis-à-vis du calcul de l'aire d'une surface plane : la réussite à ce type de tâches dépend de la compréhension de ces attentes.

Ces attentes, qui concernent le graphique et la résolution des équations, ne sont pas officiellement enjeux d'enseignement : c'est pourquoi nous les modélisons en termes de règles de contrat institutionnel :

**1. Règle RI1. Représentation graphique des fonctions**

*On doit tracer la représentation graphique des fonctions dont les courbes délimitent la surface intervenant dans le calcul d'aire. La vérification graphique de l'inégalité  $\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x)$  est autorisée.*

**2.** La valeur numérique de  $a$  et  $b$  dans la formule  $\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$ , c'est-à-dire la valeur numérique des bornes d'intégration, n'est pas forcément donnée dans la consigne. Pour la trouver, on doit résoudre algébriquement l'équation :

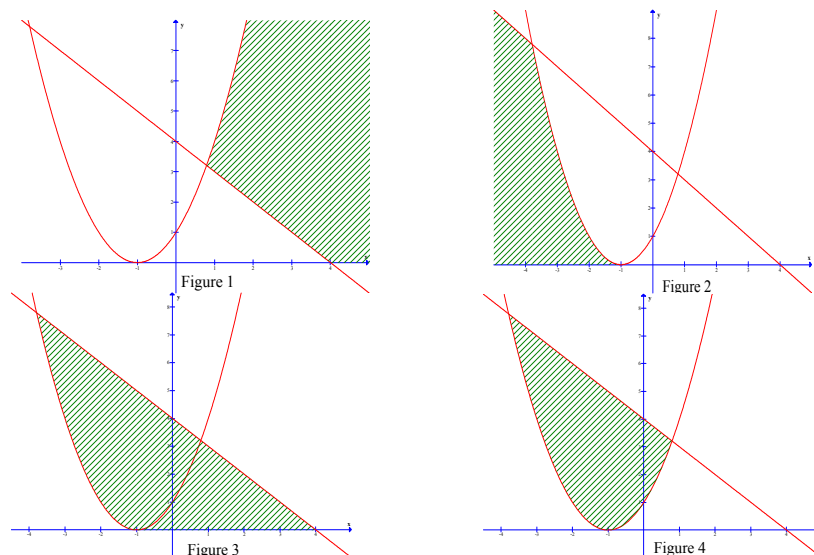
$$f_1(x) = f_2(x).$$

Le fait que l'équation  $(x + 1)^2 = 4 - x$  a deux racines non entières  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$  défavorise la résolution graphique de cette équation. On est obligé de la résoudre algébriquement.

**Règle RI2. Détermination algébrique de bornes d'intégration dans le calcul d'aire**

*Dans le cas où les bornes d'intégration ne sont pas numériquement données, on doit les calculer algébriquement comme abscisses des points d'intersection (repérés sur le graphique).*

**3.** Dans le graphique de l'exercice 2 du manuel, le domaine hachuré désigne la surface dont on doit calculer l'aire. Cependant, d'autres domaines délimités par la courbe d'équation  $y = (x + 1)^2$  et les droites d'équations  $y = 0$ ,  $y = 4 - x$  sont possibles. À titre d'exemple, nous exposons de façon non exhaustive quatre de ces domaines :



Quelles connaissances implicites permettent de restreindre les domaines possibles à un seul ?

L'étude des solutions présentées dans le *Recueil d'exercices d'Analyse 12* montre que la surface plane dont on doit calculer l'aire satisfait à la règle suivante du contrat institutionnel :

**Règle RI3. Connaissances graphiques permettant de déterminer une unique surface plane**

- La surface plane dont on demande de calculer l'aire est le plus grand domaine borné (pas forcément connexe) dont le contour est fermé, et composé seulement des courbes qui le délimitent.
- Aucun morceau de ces courbes ne doit être enfermé dans la surface.
- Chaque point d'intersection des courbes impose un changement de bornes donc d'intégrale.

À la fin de la section, le manuel propose 10 exercices de calcul d'aire qui appartiennent à un type de tâches unique dont nous exposons ci-dessous l'énoncé, la technique et la technologie :

**Type de tâches T5.** Calculer l'aire de la surface plane délimitée par  $n$  courbes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  d'équations  $y = f_1(x), y = f_2(x), \dots, y = f_n(x)$ .

**Technique**

- \* On trace les  $n$  courbes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  dans un même repère cartésien du plan.
- \* On détermine graphiquement la surface plane  $D$  délimitée par ces  $n$  courbes selon la règle RI3. On considère les points d'intersection des courbes qui se trouvent sur le contour de  $D$ <sup>7</sup>. On calcule algébriquement l'abscisse de ces points. Supposons que l'on obtienne  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_p$ . Sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que  $x_i < x_{i+1}, i = \overline{0, p}$ .
- \* Le domaine  $D$  est ainsi divisé en  $n$  sous-domaines adjacents  $D_1, D_2, \dots, D_p$  de la forme

$$D_i = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, f_{i_1}(x) \leq y \leq f_{i_2}(x)\}, i = \overline{0, p}$$

<sup>7</sup> Ce n'est pas forcément tous les points d'intersection des courbes qui se trouvent également sur le contour de  $D$ . L'exemple qui suit illustre cette remarque. Nous appelons *sommet de  $D$*  un point d'intersection des courbes données qui se trouve sur le contour de  $D$ .

où  $f_{i_1}$  et  $f_{i_2}$  sont deux éléments distincts de l'ensemble des  $f_i$  et où  $f_{i_2}(x) \geq f_{i_1}(x)$  pour tout  $x$  de  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{0, p}$ .

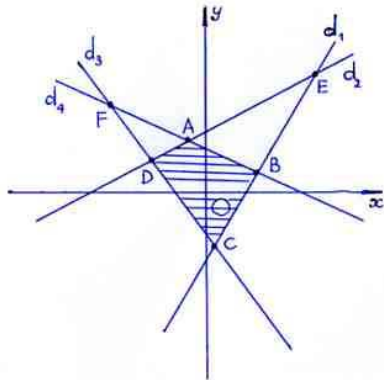
\* On calcule les intégrales pour obtenir l'aire du domaine  $D$

$$S = \sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f_{i_2}(x) - f_{i_1}(x)] dx$$

### Technologie

Les éléments technologiques suivants justifient la technique supra :

\* *Graphique* : Non seulement il aide à vérifier graphiquement l'inégalité  $f_1(x) \leq f_2(x)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , mais encore il intervient dans la localisation de la surface plane dont on doit calculer l'aire. D'où on peut :



- calculer algébriquement l'abscisse des *sommets* du domaine  $D$  en considérant uniquement les équations choisies, et pas toutes les équations obtenues par combinaison.

Considérons quatre droites  $d_1, d_2, d_3, d_4$  qui se coupent l'une l'autre aux six points A, B, C, D, E, F (cf. figure). Seuls quatre points d'intersection A, B, C, D sont les *sommets* de la surface plane  $D$  délimitée par ces quatre

droites. Les deux points E, F ne les sont pas car ils ne se trouvent pas sur le contour de  $D$ . Le calcul des abscisses des *sommets* A, B, C, D revient à résoudre algébriquement les quatre équations correspondantes (au lieu d'en résoudre  $6 = C_4^2$  si l'on n'a pas de graphique).

- décomposer le domaine  $D$  en un nombre fini de sous-domaines adjacents.

Dans l'exercice 2 du manuel étudié précédemment, la lecture du graphique permet de décomposer le domaine en question en deux sous-domaines.

\* *Additivité de l'aire* : Si  $A, B$  sont deux surfaces planes qui n'empiètent pas l'une sur l'autre, alors

$$\text{aire}(A \cup B) = \text{aire}(A) + \text{aire}(B)$$

Cette propriété permet d'écrire dans la solution de l'exercice 2 du manuel :  $S =$

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{21}-3}{2}} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{\sqrt{21}-3}{2}}^4 (4-x) dx.$$

\* *Application de l'intégrale au calcul d'aire* : Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $f_1(x) \leq f_2(x)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , l'aire de la surface plane délimitée par les courbes d'équations  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  et les droites  $x = a$ ,  $x = b$  est  $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$ .

Ainsi, dans le calcul d'aire, interviennent fortement le graphique et des règles implicites du contrat institutionnel.

### II.1.4. Types de tâches absents par rapport aux types de tâches de référence

Les types de tâches suivants sont absents du manuel :

**T3.** Calculer une valeur approchée d'une intégrale définie.

**T4.** Calculer la longueur d'un arc (dans un plan ou dans l'espace)

**T6.** Calculer l'aire d'une surface de révolution

**T10.** Calculer le travail d'une force variable

### II.2. Période 1990 – 2000

Pour cette période, nous nous référerons à l'édition 1997 du manuel *Analyse 12*.

Le manuel s'organise en cinq chapitres : *Complément aux fonctions et limites, Dérivée, Quelques applications de la dérivée, Intégrale, et Analyse combinatoire*. Chaque chapitre se divise en un certain nombre de sections dont chacune comprend deux parties : partie Cours, et partie Exercices. En plus, sont donnés à la fin de chaque chapitre les exercices de révision et à la fin du manuel les exercices de synthèse. Les résultats de tous les exercices proposés ne sont pas présents.

#### II.2.1. Notion de primitive

La notion d'*intégrale indéfinie* et la notation  $\int f(x)dx$  sont absentes. Le manuel ne présente que la notion de *primitive*, la linéarité des primitives et le tableau des primitives.

Fonctions	Primitives <sup>8</sup>
1	$x$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$e^x$	$e^x$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$ ou $-\operatorname{arccotg} x$

**Tableau 7.** Tableau des primitives du manuel *Analyse 12* de l'édition 1997 (Sud Vietnam)

Tous les exercices du manuel (20) se rattachent au même type de tâches **T'1** « calculer (ou chercher) les primitives d'une fonction ».

**Exemple 12.** Chercher les primitives de la fonction

$$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{x} - 3\cos x.$$

<sup>8</sup> Dans le but de simplifier l'écriture, le manuel convient de choisir 0 pour valeur de la constante additive C.



**Solution.** Comme une primitive de  $x^2$  est  $\frac{x^3}{3}$ , une primitive de  $x$  est  $\frac{x^2}{2}$ , une primitive de  $\frac{1}{x}$  est  $\ln|x|$  et une primitive de  $\cos x$  est  $\sin x$ , les primitives de  $f(x)$  sont

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - 3 \sin x + C \\ &= x^3 - 2x^2 + \ln(x^2) - 3 \sin x + C. \end{aligned}$$

Dans l'exemple supra, les techniques mises en œuvre reviennent à la primitivation et la technologie combine la linéarité et le tableau des primitives. Les 20 calculs de primitive proposés dans la partie exercices du manuel sont tous analogues à l'exemple présenté. Ainsi, T'1 n'est pas une variante de T1 : l'absence de l'ostensif  $\int$  élimine le travail des méthodes d'intégration, changement de variable et intégration par parties. Le seul enjeu de T'1 est donc l'usage du tableau des primitives et la linéarité : T'1 prépare la suite du cours. Dans l'ouvrage *Enseigner l'intégrale dans le programme de Mathématiques de classe 12*, (Nguyen Phu Hy et al., 1999), les auteurs ne résolvent aucun calcul de primitive du manuel : ceci confirme le caractère provisoire de ce type de tâches.

### II.2.2. Notion d'intégrale [définie]

La notion d'*intégrale indéfinie* ayant disparu au profit de la notion de *primitive*, le manuel réserve le terme *intégrale* pour désigner l'*intégrale définie*  $\int_a^b f(x)dx$ . Le manuel commence la partie *Cours* par le calcul d'aire d'un trapèze curviligne. Il démontre que l'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction considérée. Il en déduit le théorème :

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $(\alpha, \beta)$ <sup>9</sup> et  $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$  de manière que  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ . L'aire du trapèze curviligne délimité par l'axe  $Ox$ , la courbe d'équation  $y = f(x)$  et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$  est  $F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Le manuel présente ensuite, comme généralisation du calcul d'aire, la définition de l'intégrale par la formule de Newton – Leibniz.

Ainsi, la notion d'*aire* sert à définir celle d'*intégrale*. À son tour, le calcul intégral servira à calculer l'aire. Si l'enseignement se déroule comme cela, le lien entre aire et intégrale est bidirectionnel. En réalité, selon le bilan de l'enseignement des mathématiques édité en 2000 par le rectorat de Binh Thuan, « le théorème énonçant que l'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction considérée est absent de la pratique de la plupart des enseignants. Ces derniers expliquent que la démonstration du théorème est trop difficile pour leurs élèves et que ce théorème n'est jamais utilisé en pratique. Ils commencent donc la partie *Cours* par la définition de l'intégrale au moyen de la formule de Newton – Leibniz. Avec cette approche, la définition devient plus formelle et par conséquent, elle perd sa signification géométrique que le manuel prétend lui accorder ». Le lien entre aire et intégrale devient pratiquement unidirectionnel.

L'absence de la notion de *différentielle* a pour conséquence la présentation du changement de variable et de l'intégration par parties sans son intervention.

<sup>9</sup> La notation  $(a, b)$  est utilisée dans l'enseignement secondaire au Vietnam pour désigner à la fois un intervalle ouvert et un couple d'éléments. La distinction du signifiant est faite suivant le contexte.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Après l'énonciation des formules, le manuel propose les conventions  $u'(x)dx = du$ ,  $v'(x)dx = dv$  dans le but de « simplifier l'écriture de la formule de l'intégration par parties. »

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Est-ce la niche véritable de ces deux conventions ? A-t-on le droit de mettre en œuvre les deux conventions supra pour les cas suivants:  $x = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t)dt = dx$  et  $u = \psi(x) \Rightarrow \psi'(x)dx = du$  ?

Dans *Enseigner l'intégrale dans le programme de Mathématiques de 12*, nous trouvons une réponse affirmative à cette question. En effet, les auteurs posent  $x = \varphi(t)$  et écrivent  $dx = \varphi'(t)dt$  pour tous les changements de variable effectués (pages 105, 106). Cependant, ils n'appliquent pas ces conventions aux intégrations par parties : ils prennent les écritures  $u'(x)dx$  et  $v'(x)dx$  au lieu de  $du$ ,  $dv$ .

*Ceci montre que ces conventions sont institutionnellement plus utiles au changement de variable qu'à l'intégration par parties. Elles sont utilisées, en l'absence de la notion de différentielle, comme élément technologique, pour pouvoir effectuer opératoirement le changement de variable sans avoir besoin des formules concernées.*

### II.2.3. Calcul de l'aire d'une surface plane

Le calcul d'aire d'une surface plane dans ce manuel obéit aux mêmes règles du contrat institutionnel que dans la période précédente et est accompli avec la même technique.

### II.2.4. Apparition d'un nouveau type de tâches : T11. Démontrer une inégalité intégrale

Avant de présenter les méthodes d'intégration, la partie exercices propose 3 inégalités intégrales :

- $\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{8}$
- $54\sqrt{2} \leq \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x})dx \leq 108$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Considérons la deuxième inégalité. L'ouvrage *Enseigner l'intégrale dans le programme de Mathématiques de classe 12* présente deux solutions suivantes (pages 98 - 99) :

#### Solution 1.

Considérons la fonction  $y = f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$  sur l'intervalle  $[-7, 11]$ . On a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = \frac{\sqrt{11-x} - \sqrt{x+7}}{2\sqrt{x+7}\sqrt{11-x}}, \forall x \in (-7, 11)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{11-x} - \sqrt{x+7} = 0 \Leftrightarrow 11-x = x+7 \Leftrightarrow x = 2.$$

$x$	-7	2	11
$f'$		+	-
$f$	$3\sqrt{2}$	6	$3\sqrt{2}$

D'où

$$3\sqrt{2} \leq f(x) \leq 6, \forall x \in [-7, 11].$$

Selon une propriété de l'intégrale, on a :

$$54\sqrt{2} = \int_{-7}^{11} 3\sqrt{2} dx \leq \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq \int_{-7}^{11} 6 dx = 108$$

### Solution 2.

$$I = \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx = \int_{-7}^{11} \sqrt{x+7} dx + \int_{-7}^{11} \sqrt{11-x} dx = \frac{2}{3} (x+7)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-7}^{11} - \frac{2}{3} (11-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-7}^{11} =$$

$$\frac{2}{3} (18)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (18)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} 18 \cdot 3\sqrt{2} = 72\sqrt{2} < 72 \cdot \frac{3}{2} = 108.$$

Donc  $54\sqrt{2} < I < 108$ .

Pour les trois exercices supra, les deux solutions sont également possibles : la première s'appuie sur le lien entre ordre et intégration, la seconde sur le calcul de la valeur exacte de l'intégrale. Particulièrement pour l'exercice en question, la seconde solution est plus économique que la première : une fois le calcul intégral effectué, ce qui est ici possible (et ceci pour les trois exercices), la démonstration de l'inégalité se ramène à la comparaison de trois nombres.

Le manuel ne propose aucune inégalité *concernant des intégrales dont on ne peut pas calculer la valeur exacte*. Or la raison d'être d'un tel encadrement est d'approcher la valeur d'une intégrale non calculable : ainsi, ces exercices apparaissent dans le manuel comme une fin en soi.

### II.2.5. Types de tâches absents par rapport aux types de tâches de référence

Par rapport à la période précédente, en plus des types de tâches T3, T4, T6, T10, deux types supplémentaires disparaissent :

- T3. Calculer approximativement  $\int_a^b f(x) dx$
- T4. Calculer la longueur d'un arc (dans un plan ou dans l'espace)
- T6. Calculer l'aire d'une surface de révolution
- T8. Calculer le centre de gravité d'une plaque homogène
- T9. Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène
- T10. Calculer le travail d'une force variable

### II.3. Période 2000 – 2006

Pour cette période, nous nous référons à l'édition 2000 du manuel *Analyse 12*.

Le manuel s'organise en quatre chapitres : *Dérivée*, *Quelques application de la dérivée*, *Primitive et intégrale*, et *Algèbre combinatoire*. Chaque chapitre se divise en un certain nombre de sections dont chacune comprend deux parties : partie Cours, partie Exercices. À

la fin de chaque chapitre, sont donnés des exercices de révision et des textes complémentaires sur l'histoire des mathématiques. Les résultats des exercices proposés sont absents. L'organisation de ce manuel est quasiment identique à celle de la période 1990 – 2000.

Cependant, la notion de *différentielle* réapparaît à la fin du chapitre *Dérivée* avec les formules de définition :

$$\begin{aligned} dy &= y' \Delta x \text{ ou } df(x) = f'(x) \Delta x \\ dx &= \Delta x \\ dy &= y' dx \text{ ou } df(x) = f'(x) dx \end{aligned}$$

et un exemple simple de l'application de la différentielle au calcul approché. Par rapport au manuel de la période 1975 – 1990, la signification géométrique de la différentielle, la notation  $\frac{df}{dx}$ , et les règles de différentiation ne sont pas réintroduites. L'enjeu de la réapparition simplifiée de la différentielle, selon le *Guide pour l'enseignant*, est au service du calcul intégral. L'enseignant a le droit de reporter cette notion au moment de l'enseignement du chapitre *Primitive et Intégrale*.

### II.3.1. Notion d'intégrale indéfinie

La notion d'*intégrale indéfinie* et la notation  $\int f(x)dx$  réapparaissent. Le manuel appelle *intégrale indéfinie* de  $f$  la famille de ses primitives et il la note  $\int f(x)dx$ . Comme dans la période 1975 – 1990, une primitive quelconque de  $f$  et la famille des primitives de  $f$  ne sont pas distinguées. Aussi la notation  $\int f(x)dx$  désigne-t-elle de façon abusive les deux notions.

Conformément au programme, le manuel n'introduit pas de méthodes d'intégration en tant que telles pour l'intégrale indéfinie. Cependant, dans la partie *Propriétés des primitives*, il présente grâce à l'ostensif  $\int$  la propriété suivante (*implicitement* rattachable au changement de variable) :

- $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$
  - **Attention.** Comme  $u'(x)dx = du$ , la propriété peut être réécrite comme suit, en posant  $u = u(x)$  :
- $$\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C \quad (u = u(x))$$

La propriété supra est, du point de vue mathématique, la formule de changement de variable. L'usage de l'écriture  $du = u'(x)dx$  permet de la présenter dans la partie « *Attention* » comme une substitution littérale formelle grâce à laquelle le manuel adjoint au tableau des primitives usuelles les primitives des fonctions composées correspondantes :

Primitives des fonctions usuelles	Primitives des fonctions composées ( $u = \psi(x)$ )
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C \ (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln u  + C \ (u = u(x) \neq 0)$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u dx = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u dx = -\cos u + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot} gx + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{cot} gu + C$

**Tableau 8.** Tableau des primitives du manuel Analyse 12 de l'édition 2000 (Vietnam)

Rappelons les éléments technologiques du calcul de primitive que nous avons énoncés dans l'analyse du manuel de la période 1975 - 1990 :

- **ET0.**  $\int g(x)dx = G(x) + C \Rightarrow \int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C$
- **ET1.** Si  $f(x)dx = g[u(x)]u'(x)dx$  et si  $\int g(x)dx = G(x) + C$ , alors  
 $\int f(x)dx = \int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C$ .

Nous notons **ET'0** l'élément technologique exprimé dans la partie *Attention* précitée du manuel :

- **ET'0.**  $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C \ (u = u(x))$

Pour mettre en évidence la différence subtile entre ET0, ET1 et ET'0 dans les techniques de calcul de primitive, nous examinerons un calcul de primitive proposé dans le manuel. Nous donnons quatre solutions possibles : la première, présentée dans le manuel, se fonde sur l'ET'0 ; les autres, absentes du manuel, se fondent respectivement sur les éléments technologiques ET0, ET1 et la primitivation.

**Exemple 5.** Calculer  $\int \sin^4 x \cos x dx$

**Solution 1.** (Solution du manuel)  $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C$ .

**Solution 2.** (Solution non attendue) Comme  $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$ , on a :

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (\sin x)' dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

**Solution 3.** (Solution non attendue) On pose  $u = \sin x$ . On a  $du = \cos x dx$ . D'où :

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

**Solution 4.** (Solution non attendue) Comme  $\left(\frac{\sin^5 x}{5}\right)' = \sin^4 x \cos x$ , on a :

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Dans la solution 1, on ne pose pas de nouvelle variable. On reconnaît  $\cos x dx$  comme  $d(\sin x)$  et on considère  $\sin x$  dans  $\sin^4 x d(\sin x)$  comme variable indépendante pour écrire les primitives de  $x \mapsto \sin^4 x \cos x$ .

Les techniques proposées pour le type de tâche T1 sont les suivantes :

**$\tau 1$ .** On linéarise  $f(x)$  en  $\sum_{i=1}^n f_i(x)$  où une primitive  $F_i$  de  $f_i$  est donnée dans le tableau des primitives ( $i = \overline{1, n}$ ). On a :

$$\int f(x) dx = \int \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n F_i(x) + C.$$

**$\tau 3$ .** Si  $f(x) = g[\psi(x)]\psi'(x)$  et si  $\int g(x) dx = G(x) + C$ . En considérant  $u$  comme variable indépendante, on a :

$$\int f(x) dx = \int g(u) du = G(u) + C = G[\psi(x)] + C.$$

Les éléments technologiques qui justifient les techniques supra sont les suivants :

- **ET'0.**  $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$  ( $u = u(x)$ )
- **ET4.** Linéarité de l'intégrale indéfinie
- **ET5.** Tableau des primitives usuelles
- **ET6.** Définition de la notion de *différentielle*
- **ET7.** Dérivée des fonctions usuelles

L'élément technologique suivant est absent et remplacé par ET6, ET7 :

- **ET1.** Changement de variable  $u = \psi(x)$  pour l'intégrale indéfinie

Nous résumons l'évolution du type de tâches T1, de 1975 jusqu'à 2006 dans l'enseignement des mathématiques au Vietnam, par le tableau 9 suivant :

Notions, notation, méthodes introduites		Période 1975 – 1990	Période 1990 – 2000	Période 2000 - 2006
Primitive		Oui	Oui	Oui
Intégrale indéfinie		Oui	Non	Oui
$\int f(x)dx$		Oui	Non	Oui
Différentielle		Oui	Non	Oui
Changement de variable	$x = \varphi(t)$	Oui	Non	Non
	$u = \psi(x)$	Oui	Non	Non, remplacé par ET'0
Intégration par parties		Oui	Non	Non
Particularités		<ul style="list-style-type: none"> <li>• La différentiation permet d'effectuer le changement de variable comme une substitution littérale formelle.</li> </ul> <p style="text-align: center;">⇓</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Le changement de variable est effectué, mais justifié par la différentiation, pas par ses formules.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• La différentiation permet d'économiser une nouvelle variable.</li> </ul> <p style="text-align: center;">⇓</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Le changement de variable implicite est effectué, justifié par la différentiation et ET'0.</li> </ul>

Tableau 9. Évolution du type de tâches T1 « Calculer  $\int f(x)dx$  » de 1975 à 2006 au Vietnam

### II.3.2. Notion d'intégrale [définie]

La notion d'intégrale est définie par la formule de Newton – Leibniz comme dans le manuel de 1990 – 2000 avec une petite modification : le manuel ne présente pas le théorème du lien entre aire variable sous la courbe et primitive. Il démontre directement que si  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$ , l'aire du trapèze curviligne délimité par la courbe  $y = f(x)$ , l'axe Ox et les droites d'équations  $x = a, x = b$  est  $F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Le manuel présente explicitement une formule d'intégration par parties et deux types de changement de variable, appelés respectivement changement de variable de type 1 et de type 2 :  $x = u(t)$  et  $t = v(x)$ . Nous illustrons par des exemples extraits du manuel, les techniques privilégiées, notamment la technique analogue à celle mise en jeu dans le type de tâche T1, permettant d'économiser une nouvelle variable.

**Exemple 1.** Calculer  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

**Solution.** (Solution du manuel)

On pose  $x = \sin t \left( t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ . Quand  $x = 0, t = 0$ , quand  $x = 1, t = \frac{\pi}{2}$ . Donc on pose  $x = \sin$

$t$  avec  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . On a :

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \left( \text{car } t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right);$$

$$dx = \cos t dt.$$

D'où :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

**Exemple 2.** Calculer  $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$ .

**Solution.** (*Solution du manuel*)

On pose  $t = 2x + 1$ . Quand  $x = 0$ ,  $t = 1$ . Quand  $x = 1$ ,  $t = 3$ .

On a  $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$ . Donc :

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt = \frac{t^4}{8} \Big|_1^3 = 10.$$

**Attention.** On peut présenter de façon commode sans introduire la variable  $t$  comme suit :

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (2x+1)^3 d(2x+1) = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{1}{8} (81-1) = 10.$$

**Exemple 3.** Calculer  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$ .

**Solution.** On pose  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^5} \end{cases}$ , on a  $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{4x^4} \end{cases}$

D'où :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = \left[ -\frac{\ln x}{4x^4} \right]_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{4x^4} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16} \left( \frac{1}{16} - 1 \right) = \frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}.$$

Les techniques proposées sont les mêmes que celles de la période 1990 – 2000 plus une technique spécifique fondée sur l'élément technologique ET'0 permettant d'économiser une nouvelle variable.

Nous résumons l'évolution du type de tâches T2 de 1975 jusqu'à 2006 dans l'enseignement des mathématiques au Vietnam, par le tableau 10 suivant :



Période	1975 – 1990	1990 – 2000	2000 - 2006	
Définition de l'intégrale	Limite commune de sommes de Riemann	Formule de Newton - Leibniz	Formule de Newton - Leibniz	
Méthodes d'intégration	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Changement de variable</li> <li>• Intégration par parties</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Changement de variable</li> <li>• Intégration par parties</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Changement de variable</li> <li>• Intégration par parties</li> </ul>	
Particularités	Différentiation	Suppression de la notion de <i>différentielle</i>	Réapparition de la notion de <i>différentielle</i>	
	↓ Changement de variable = Substitution littérale formelle	↓ Conventions ↓ Changement de variable = Substitution littérale formelle	↓ Changement de variable = Substitution littérale formelle	↓ Changement de variable « implicite » (sans nouvelle variable)

**Tableau 10.** Évolution du type de tâches T2 « Calculer  $\int_a^b f(x)dx$  » de 1975 à 2006 au Vietnam

### II.3.3. Calcul de l'aire d'une surface plane

Le calcul d'aire à cette époque est proposé sans la demande préalable d'étude de fonctions et effectué par deux méthodes : la première, mobilisant la lecture du graphique et donc les règles du contrat institutionnel, ressemble à celle présente dans les manuels précédents, la seconde s'appuie sur la formule suivante sans recourir à aucun graphique :

Soient  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , et  $C_1$ ,  $C_2$  leurs courbes représentatives. L'aire de la surface plane délimitée par les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$  et les courbes  $C_1$ ,  $C_2$  est donnée par la formule :

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

Dans le *Guide pour l'enseignant*, les auteurs du manuel expliquent clairement l'utilisation de la formule supra :

Pour calculer l'intégrale  $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ , il faut d'abord résoudre l'équation  $f_1(x) - f_2(x) = 0$  afin de déterminer l'abscisse des points d'intersection des deux courbes [représentatives respectivement de  $f_1$  et  $f_2$ ] sur l'intervalle  $[a, b]$ . Supposons que l'équation ait pour solutions  $\alpha$ ,  $\beta$  et que  $a \leq \alpha < \beta \leq b$ . On a :

$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_a^\alpha |f_1(x) - f_2(x)| dx + \int_\alpha^\beta |f_1(x) - f_2(x)| dx + \int_\beta^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

Pour éliminer le signe de valeur absolue en calculant par exemple,  $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ , on peut mobiliser l'une de deux méthodes suivantes :

1. Tracer les courbes représentatives de  $f_1$  et  $f_2$  sur un même repère, puis éliminer le signe de valeur absolue en s'appuyant sur la position relative de deux courbes.
2. Étudier le signe de  $f_1(x) - f_2(x)$  grâce à la propriété suivante :  
Si l'équation  $f_1(x) - f_2(x) = 0$  n'a aucune solution sur  $[\alpha, \beta]$ , alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$$

Cette propriété très commode ne nécessite ni le graphique, ni l'étude de signe de  $f_1(x) - f_2(x)$  sur chacun des intervalles concernés<sup>10</sup>.

Examinons un exemple du manuel pour mieux comprendre l'idée des auteurs :

*Exemple 1.* Calculer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes d'équations :

$$y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2.$$

*Solution.* Posant  $f_1(x) = x^3, f_2(x) = 0$ , on a  $f_1(x) - f_2(x) = x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1, 2]$ . L'aire à calculer est :

$$S = \int_{-1}^2 |x^3| dx = \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^2 |x^3| dx = \left| \int_{-1}^0 x^3 dx \right| + \left| \int_0^2 x^3 dx \right| = \left| \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| \frac{16}{4} \right| = 4\frac{1}{4}.$$

La solution ne recourt à aucun graphique. Elle permet donc d'éviter les règles RI1, RI2, RI3 du contrat institutionnel. Ceci marque, pour la première fois depuis 1975, l'évolution du type de tâches T3.

Le manuel propose 9 exercices de calcul d'aire dans la partie exercices et 3 autres exercices dans la révision du chapitre. Comme nous l'avons déjà dit, aucun de ces 12 exercices n'est attaché à une étude de fonctions. Deux méthodes sont possibles dans le manuel pour résoudre ces exercices :

- **Méthode « graphique ».** On trace les courbes délimitant le domaine en question pour ramener les exercices au calcul d'aire « classique ». Bien sûr, on doit mettre en œuvre les règles RI1, RI2, RI3.

- **Méthode « déplacement de la valeur absolue ».** On effectue une solution identique à l'exemple du manuel, absente du *Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12* publié par la Maison d'édition Université nationale de Ho Chi Minh – Ville en 2004.

Une méthode non proposée dans le manuel est fortement présente dans les solutions du *Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12* :

**Méthode « élimination de la valeur absolue ».** On ne trace pas les courbes. On utilise la formule  $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ . On étudie le signe de  $f_1(x) - f_2(x)$  sur  $[a, b]$  puis on élimine le signe de valeur absolue pour obtenir une intégrale « habituelle ».

Dans ce *Guide*, les auteurs reprennent les 12 exercices de calcul d'aire du manuel unique et les résolvent autrement :

- 6 de ces 12 exercices sont résolus par la troisième méthode. Nous notons que ces 6 exercices ne touchent que des droites, des paraboles dont les propriétés sont préalablement enseignées et très pratiquées.

- Les 6 exercices restants sont résolus par la première méthode.

Pourquoi la deuxième méthode n'est pas-t-elle mobilisée dans le *Guide* ? Nous supposons que cette méthode n'est pas conforme aux pratiques institutionnelles et stables de l'EMS. Nous reviendrons à cette question dans le chapitre B1.

<sup>10</sup> Souligné par nous.

Revenons maintenant sur le calcul d'aire « classique ». Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse qu'il existe des attentes de l'institution de l'ordre du contrat vis-à-vis du calcul de l'aire d'une surface plane, surface rendue unique par des connaissances graphiques que l'élève de classe 12 doit apprendre sans qu'elles ne soient jamais explicitées (Règle RI3)

Pour valider cette hypothèse et montrer que la règle RI3 (implicite) du contrat institutionnel sur la détermination d'une surface fait bien l'objet d'un apprentissage au niveau de la classe 12 (sans être explicitement enseignée à ce niveau), nous avons effectué une enquête sous forme d'un questionnaire auprès d'élèves de classe 11 et de classe 12.

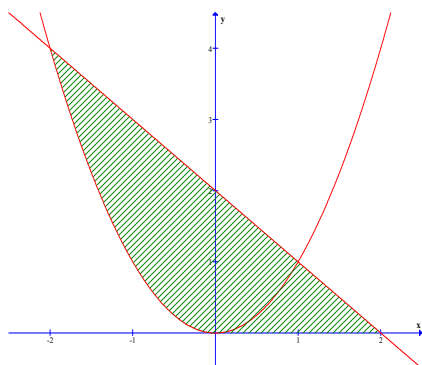
Nous avons envoyé le 20 mars 2006 ce questionnaire à 138 élèves de quatre classes d'un lycée dit d'élite (lycée Tran Hung Dao, académie de Binh Thuan). L'expérimentation a duré 10 minutes.

Classe 11 M <i>Spécialité en Mathématiques</i>	Classe 11 I <i>Spécialité en Informatique</i>	Classe 12 M <i>Spécialité en Mathématiques</i>	Classe 12 I <i>Spécialité en Informatique</i>
36	37	31	34
Total : 138			

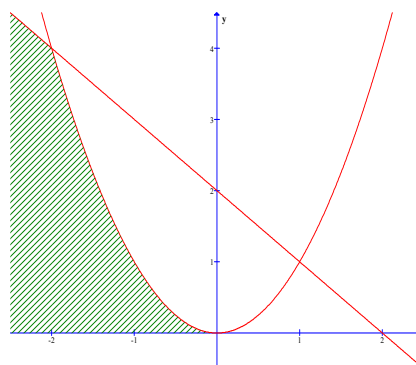
**Tableau 11.** *Effectif des quatre classes participant à l'enquête*

Nous donnons ci-après le texte du questionnaire.

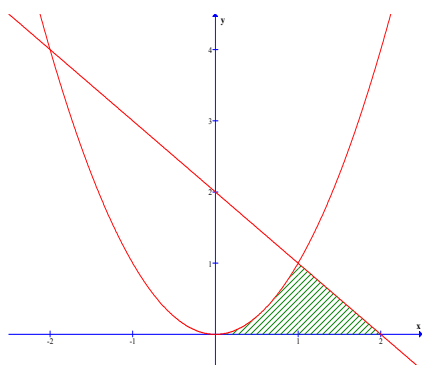
On considère une surface plane délimitée par la parabole d'équation  $y = x^2$ , la droite d'équation  $y = 2 - x$  et l'axe des abscisses.  
 Pour chacune des figures ci-dessous, dire si elle peut ou non être une représentation graphique correspondant à la description ci-dessus.



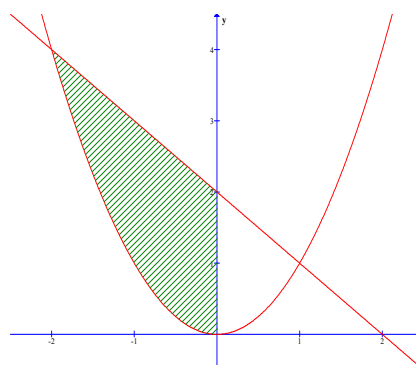
Oui   
 Non



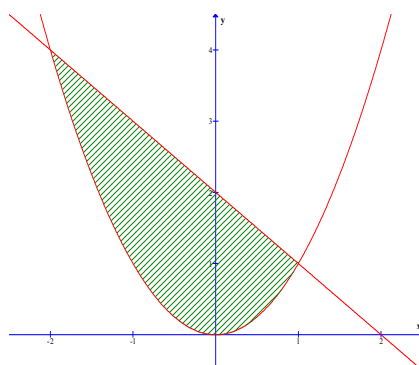
Oui   
 Non



Oui   
 Non



Oui   
 Non



Oui   
 Non

Les figures proposées dans le questionnaire sont mathématiquement cinq représentations graphiques *possibles* de la surface plane correspondant à sa description « classique » au Vietnam dans le type de tâche T3. Seule la troisième figure est institutionnellement la réponse attendue relativement aux connaissances graphiques de la règle RI3, connaissances graphiques permettant le rejet des autres figures :

- Dans la première figure, un morceau de la parabole est contenu à l'intérieur de la surface.
- Dans la deuxième figure, la surface n'est pas finie, et son contour n'est pas fermé.

- Dans la quatrième figure, le contour de la surface est composé d'une partie de l'axe des ordonnées.
- Dans la dernière figure, l'axe des abscisses ne participe pas au contour de la surface.

Nous avons obtenu les résultats suivants (plusieurs choix par élève sont autorisés) :

Classe	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
11 M	10	11	27	1	16
11 I	9	12	18	8	21
12 M	1	0	30	0	0
12 I	5	7	30	1	1

**Tableau 12.** *Choix de figures des élèves*

Les résultats valident notre hypothèse :

- Alors que les choix des classes 11 se répartissent entre les différentes figures proposées, ceux des classes 12 se concentrent sur la figure 3. Les connaissances graphiques de la règle RI3 sont bien apprises en classe 12 et ignorées avant.
- Le nombre d'élèves choisissant la figure 3 est plus élevé dans les classes Mathématiques que dans les classes Informatiques (97 % contre 88 %).
- La classe 12 M donne des résultats presque « parfaits » : tous les élèves sauf un choisissent la figure 3 à l'exclusion de toute autre. L'élève qui se singularise choisit la figure 1. Parmi les connaissances de la règle RI3, le critère : « *aucun morceau des courbes n'est enfermé dans la surface* » semble le plus difficile à admettre.

### II.3.4. Type de tâches T11 : Démontrer une inégalité intégrale

Le manuel propose quatre inégalités intégrales. En nous référant à l'ouvrage *Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12*, nous constatons que les solutions attendues sont les mêmes que celles de la période précédente.

### II.3.5. Types de tâches absents par rapport aux types de tâches de référence

Les types de tâches absents du manuel sont les mêmes que ceux dans la période précédente :

- T<sub>3</sub>. Calculer approximativement  $\int_a^b f(x)dx$
- T<sub>4</sub>. Calculer la longueur d'un arc (dans un plan ou dans l'espace)
- T<sub>6</sub>. Calculer l'aire d'une surface de révolution
- T<sub>8</sub>. Calculer le centre de gravité d'une plaque homogène
- T<sub>9</sub>. Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène
- T<sub>10</sub>. Calculer le travail d'une force variable

## III. Conclusion de l'étude des programmes et des manuels au Vietnam (1975 – 2006)

### III.1. Calcul de primitive

Le calcul de primitive est effectué de façon différente dans les trois périodes.

Dans la première période (1975 – 1990), le calcul de primitive existe sous la forme de calcul d'intégrale indéfinie  $\int f(x)dx$  avec deux méthodes d'intégration : changement de variable et intégration par parties. Il occupe une place égale au calcul d'intégrale définie.

La différentiation permet d'effectuer le changement de variable comme une substitution littérale formelle sans se référer aux deux formules de changement de variable.

Dans la deuxième période (1990 – 2000), la notion de *primitive* n'est introduite que pour définir la notion d'*intégrale [définie]* par la formule de Newton – Leibniz. La notion d'*intégrale indéfinie* et la notation  $\int f(x)dx$  sont supprimées. En l'absence de l'ostensif  $\int$  et des méthodes d'intégration, le calcul de primitive n'est effectué qu'en combinant la linéarité et le tableau des primitives. Il devient un type de tâches provisoire.

Dans la troisième et dernière période (2000 – 2006), le calcul de primitive existe de nouveau avec la réapparition de l'ostensif  $\int$  et en l'absence des méthodes d'intégration. Mais l'élément technologique **ET'0**:  $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$ , équivalent au changement de variable  $u = \psi(x)$ , permet d'effectuer des calculs de primitive sans poser explicitement de nouvelle variable.

### III.2. Calcul de l'intégrale définie

Dans la première période (1975 – 1990), l'intégrale définie est introduite comme la limite commune de sommes de Riemann. Dans les deux dernières périodes, elle est définie par la formule de Newton – Leibniz comme une généralisation du calcul d'aire d'un trapèze curviligne.

Malgré des définitions différentes, les méthodes d'intégration sont les mêmes : changement de variable et intégration par parties. Au fil des trois périodes, la notion de différentielle joue un rôle plus important dans le changement de variable que dans l'intégration par parties. Elle est si importante que le manuel de la deuxième période propose deux conventions  $u'(x)dx = du$ ,  $v'(x)dx = dv$ . Elle permet, comme dans le calcul de primitive, d'effectuer opératoirement le changement de variable sans se référer aux formules requises. Un nouvel élément technologique analogue à celui ET'0 pour calcul de primitive est mis en œuvre permettant d'effectuer le changement de variable « implicite » sans poser de nouvelle variable.

### III.3. Calcul d'aire

Le calcul d'aire est un élément invariant dans le domaine des applications du calcul intégral dans l'ensemble des trois périodes.

Dans les deux premières périodes, le calcul d'aire est effectué en recourant au graphique. Il nécessite le respect de règles du contrat institutionnel relevant de connaissances implicites sur le graphique, sur la surface plane dont on doit calculer l'aire, et sur la détermination des bornes d'intégration.

Dans la dernière période, apparaît parallèlement au calcul d'aire « classique » un calcul d'aire détaché du graphique qui marque l'évolution de ce type de tâches. Mais en réalité, le calcul d'aire sans l'étude de fonctions est souvent résolu en recourant à un graphique tracé dans la solution, l'étude de la fonction qui a conduit à ce graphique devant rester dans la sphère privée.

### III.4. Liens entre aire, primitive, intégrale

Dans les trois périodes, les liens établis entre aire, primitive et intégrale sont monodirectionnels selon le schéma : primitive  $\rightarrow$  intégrale  $\rightarrow$  aire. Concrètement, le calcul

de primitive sert au calcul de l'intégrale. À son tour, ce dernier sert au calcul d'aire. Mais le sens inverse des flèches n'existe pas.

Quoique l'aire du trapèze curviligne soit généralisée dans la partie cours des deux dernières périodes pour aboutir à la définition de l'intégrale, aucun exercice n'est proposé pour calculer une intégrale à partir d'une aire. De même, l'intégrale dépendant de la borne supérieure est présente dans les trois périodes mais elle n'est jamais utilisée pour calculer des primitives. Enfin, le lien direct entre aire et primitive n'est pas établi à l'exception du manuel de la deuxième période (1990 – 2000) qui présente dans la partie cours l'aire variable sous la courbe comme une primitive de la fonction considérée.

## Chapitre A2.

### Étude des programmes et des manuels en France de 1970 à nos jours

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux programmes et aux manuels de la classe de *Terminale scientifique* en France qui reflètent le plus clairement les enjeux institutionnels vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques et en particulier de la notion d'*intégrale*.

#### I. Étude de programmes

##### I.1. Période 1970 – 1980

La réforme des mathématiques modernes est une tentative pour rapprocher le savoir enseigné des mathématiques contemporaines. Cela va se traduire en particulier par l'apparition, pour la première fois dans l'enseignement secondaire, du terme *Analyse*.

Cette réforme entre en vigueur pour les classes de *Sixième* et de *Seconde* en 1969. Elle touche tous les niveaux de classe de l'enseignement secondaire avec les programmes de 1973. Les programmes transitoires de 1971 sont destinés aux lycéens qui, pour une raison ou une autre, n'ont pas pu suivre antérieurement au collège les programmes de mathématiques modernes. En 1973, avec l'achèvement de la mise en œuvre des nouveaux programmes au collège, de nouveaux programmes entrent en vigueur au lycée pour la seconde fois. Cependant, seul le programme de *Seconde* change de forme par rapport à celui de 1971. Les programmes de *Première* et de *Terminale* conservent les contenus et les ordres de présentation.

L'intégrale est définie comme limite commune de sommes de Riemann ou par les fonctions en escalier. L'étude de l'intégrabilité est limitée aux fonctions monotones ou continues par morceaux.

« On pourra suivre l'exposé classique de la théorie de Riemann pour une fonction monotone. Mais on pourra aussi mettre à profit les fonctions en escalier abordées dès la classe de Seconde ; on étudiera l'intégrale des fonctions en escalier sur  $[a, b]$ , puis on en déduira celle des fonctions monotones, enfin on formulera pour les fonctions continues les résultats analogues que l'on admettra. » (Circulaire 71-244 du 26 juillet 1971)

Le changement de variable et la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples sont absents du programme. Seule l'intégration par parties est introduite comme méthode d'intégration.

Les notions d'*intégrale indéfinie*, et la notation  $\int f(x)dx$  qui lui est associée sont explicitement rejetées car « présentant des inconvénients ». La primitive est exprimée sous la forme d'une intégrale dépendant de la borne supérieure.

« La notation traditionnelle  $\int f(x)dx$  pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction  $f$  présente des inconvénients, et il vaut mieux l'éviter. Chacune des primitives de la fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $I$  se note :

$$\int_a^x f(t)dt + C,$$

$a$  étant un élément de  $I$  et  $C$  un nombre réel quelconque. » (Ibid)



Avec cette notation, le programme exprime l'intention d'établir un lien bidirectionnel entre intégrale et primitive : la première permet de calculer la deuxième et vice-versa à travers respectivement l'intégrale dépendant de la borne supérieure et la formule de Newton – Leibniz.

Quoique la théorie générale des ensembles quarrables soit à exclure, le programme réserve une partie spécifique aux notions d'*ensemble quarrable* et d'*aire* et aussi au calcul d'aire.

« Il est seulement demandé de savoir que, dans un plan affine euclidien, il existe une famille d'ensemble de points, dits ensembles quarrables, tels qu'on peut définir une application  $\mathcal{A}$ , dite *aire*, de cette famille sur  $\mathbf{R}_+$  [...]. » (Ibid)

« On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire...)

Application du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  définie par :  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq f(x)$  ;  $f$  étant une fonction positive monotone par morceaux, puis une fonction positive continue.

Extension à  $b < a$  et à une fonction négative. » (Programme de Terminale C de 1971)

La circulaire 71-244 du 26 juillet 1971 propose d'établir un lien entre aire et primitive : l'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction considérée

« On pourrait, pour une fonction continue sur  $[a, b]$ , retrouver ce résultat  $[\mathcal{A}(E) = \int_a^b f(x)dx]$

par un raisonnement classique utilisant la dérivée par rapport à  $x$  de  $\int_a^x f(t)dt$ . »

et aussi un lien entre intégrale et aire : intégrale d'une fonction positive Riemann-intégrable n'est autre que l'aire d'un ensemble quarrable.

« On admettra enfin que,  $f$  étant une fonction positive, monotone sur  $[a, b]$  ou plus généralement telle que  $f \in \mathbf{I}$ , l'ensemble  $E$  des points  $M(x, y)$  définis dans un repère orthonormé par  $a \leq x \leq b$  et  $0 \leq y \leq f(x)$  est quarrable [...]. »

Les applications de l'intégrale autres que le calcul d'aire ne font pas partie des épreuves de mathématiques du baccalauréat. Ainsi, le calcul d'aire devient l'unique application de l'intégrale.

L'intégrale est mobilisée pour générer la fonction logarithme népérien  $x \mapsto \text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$

( $x > 0$ ). Les solutions des équations différentielles  $y' = ay$  ( $a$  constante),  $y'' + \omega^2 y = 0$  ( $\omega$  constante non nulle) sont présentées mais ne font pas partie des épreuves de mathématiques du baccalauréat. Toute généralité sur les équations différentielles est hors du programme.

Ainsi, le programme, à travers les contenus d'enseignement proposés, exprime l'intention d'établir les liens bidirectionnels entre *intégrale*, *primitive* et *aire* :

- La primitive est identifiée à l'intégrale dépendant de la borne supérieure.
- L'aire variable sous la courbe est une primitive.

- L'intégrale d'une fonction positive Riemann-intégrable est l'aire d'un ensemble quarrable.

La notion d'aire semble occuper une place centrale.

## I.2. Période 1980 – 2002

C'est la période de la contre-réforme des mathématiques modernes. Elle prétend réduire la théorisation et la formalisation au strict nécessaire. Elle privilégie une conception des mathématiques dont la finalité est la résolution de problèmes : l'accent est mis sur l'activité des élèves.

« Les programmes actuels de mathématiques pour le premier cycle ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action...

Le présent programme est celui d'une classe de Seconde pour tous ; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de description de structures, et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. » (Introduction au programme de *Seconde* de 1982)

En nous appuyant sur la façon d'introduire la notion d'*intégrale*, nous distinguons dans cette période trois épisodes différents dont chacun conserve, pour l'essentiel, les objectifs et la substance du précédent : 1980 – 1987, 1987 – 1994, 1994 – 2002.

### I.2.1. Épisode 1980 – 1987

La notion de *primitive* est antérieurement introduite en *Première*. L'intégrale n'est définie que pour les fonctions continues sur un intervalle fermé, borné par la formule de Newton-Leibniz et notée par  $\int_a^b f(t)dt$ . Cette définition permet de supprimer l'étude de l'intégrabilité. Les propriétés suivantes de l'intégrale sont présentées : relation de Chasles, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne et valeur moyenne.

Pour les méthodes d'intégration, le changement de variables affines et l'intégration par parties sont présents. Ainsi, le changement de variable est un savoir nouveau dans cet épisode par rapport à la période précédente.

On introduit aussi le *calcul approché* d'une intégrale (T3) et comme méthode de calcul approché, la méthode des rectangles avec majoration du reste. On en déduit une interprétation de la valeur moyenne d'une fonction  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  comme limite d'une suite.

La fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  exprime l'unique primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  qui prend la valeur 0 en un point  $a$  de  $I$ . À titre d'exemple on suggère l'étude de quelques fonctions de la forme  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ , où  $f$  n'a pas de primitive explicite.

Aucun élément théorique sur la notion d'aire n'est présent dans ce programme. L'intégrale permet le calcul de l'aire d'une partie de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  définie par  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq f(x)$ , où  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$ . Les autres applications de l'intégrale, comme dans la période précédente, ne font pas partie des épreuves de mathématiques du

baccalauréat. Ainsi, le calcul d'aire reste privilégié mais la notion d'*ensemble quarrable* a disparue.

Les équations différentielles du premier ordre et les équations différentielles linéaires du second ordre sont introduites et peuvent faire l'objet du sujet du baccalauréat. Mais les formules préalablement données dans le cours détachent la résolution de ces équations de la primitivation.

### I.2.2. Épisode 1987 – 1994

Le programme conserve l'essentiel du précédent. Les modifications sont les suivantes :

La notion de primitive est introduite en *Terminale* et non en *Première* comme dans l'épisode précédent. L'existence des primitives est admise.

Pour les méthodes d'intégration, le changement de variables affines est supprimé. Seule l'intégration par parties est conservée.

### I.2.3. Épisode 1994 – 2002

C'est dans cet épisode que la *Terminale C* prend le nom de *Terminale S*.

Le programme précise que « toute intégration par parties doit faire l'objet d'une indication. Toute technicité est exclue ». Toute formule de changement de variable est hors du programme. En revanche, la primitivation des fonctions de la forme  $t \mapsto f(at + b)$ ,  $e^u u'$ ,  $u^\alpha u'$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha \neq -1$ ),  $\frac{u'}{u}$  ( $u$  étant à valeurs strictement positives) est impérativement exigée.

« Les élèves doivent savoir connaître si un exemple donné de fonction est l'une de ces formes. Ils doivent aussi savoir exploiter une périodicité ou une symétrie pour le calcul d'intégrales, [...] » (Programme de Terminale S)

En particulier, le rôle de l'aire est formulé explicitement :

« Dans le cas d'une fonction positive, l'interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire. » (Ibid)

« Il convient d'interpréter en termes d'aires certaines de ces propriétés (relation de Chasles, intégration d'inégalités, valeur moyenne d'une fonction, ...) afin d'éclairer leur signification. » (Ibid)

### I.3. Période 2002 – 2006

On propose une double approche :

« Pour une fonction continue positive sur  $[a, b]$ , introduction de la notation  $\int_a^b f(x)dx$  comme

*aire sous la courbe.* »

« On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. »

Le lien bidirectionnel entre intégrale et primitive est établi :

« Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , et si  $a$  un point de  $I$ , la fonction  $F$  telle que  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$ . »

« Calcul de  $\int_a^b f(x)dx$  à l'aide d'une primitive de  $f$ . »

Pour les méthodes d'intégration, le programme présente la primitivation

« Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de  $\frac{u'}{u}$ ,  $u'e^u$ ,  $u'u^n$ . »

et l'intégration par parties (sans indication).

« On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties. »

Les applications de l'intégrale sont étendues à la géométrie, à la physique et au calcul de probabilité. La présentation de ces applications est également « une façon de préparer le théorème liant intégrales et primitives, particulièrement frappant dans le cas du point mobile ».

Les équations différentielles  $y' = ay + b$  sont présentes dans le programme. Les équations  $y'' + \omega^2 y = 0$  sont reportées en physique.

## II. Étude de manuels

### II.1. Période 1970 – 1980

Comme nous l'avons dit, le programme de Terminale C de 1971 propose deux façons de définir la notion d'*intégrale* : soit par les sommes de Riemann, soit par les fonctions en escalier. C'est pourquoi nous choisissons deux manuels correspondant à ces deux définitions :

- Mathématiques Terminale C, E, tome 1, collection Cossart et Théron, Bordas, 1971.
- Mathématique, Terminales C, D, E, tome 2, collection Durrande, Technique & Vulgarisation, 1973.

Nous les notons respectivement M1 et M2.

#### II.1.1. Étude du manuel M1

Le manuel est édité en trois tomes dont le premier traite de la notion d'*intégrale*. Ce tome se répartit en cinq chapitres dont chacun se divise en un certain nombre de sections comprenant deux parties : partie *Cours*, et partie *Exercices*. Ci-dessous l'organisation globale du tome.

- Chapitre I. Notions générales
- Chapitre II. Les entiers relatifs
- Chapitre III. Les nombres réels
- Chapitre IV. Fonctions numériques d'une variable réelle
- Chapitre V. Calcul intégral
  - § Intégrale d'une fonction numérique
  - § Calcul des aires planes
  - § Applications du calcul intégral

## a. Intégrale d'une fonction numérique

### a.1. Partie Cours

Le manuel introduit l'intégrale définie d'une fonction monotone  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  par la limite commune de sommes supérieures et inférieures attachées à toute subdivision de  $[a, b]$ , et il la note  $\int_a^b f(x)dx$ . Il définit ensuite la notion de *somme de Riemann* attachée à une subdivision de  $[a, b]$  et il démontre que pour une fonction monotone  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f(x)dx$  est aussi la limite commune de sommes de Riemann attachées à toute subdivision de  $[a, b]$ . Il généralise cette définition pour toute fonction déterminée sur  $[a, b]$ .

Le manuel admet l'intégrabilité des fonctions suivantes :

- fonctions bornées monotones par morceaux sur  $[a, b]$ ,
- fonctions continues par morceaux (dont fonctions continues en particulier).

Les propriétés suivantes de l'intégrale définie sont démontrées : linéarité, relation de Chasles, positivité, et valeur moyenne d'une fonction continue.

Le manuel démontre que si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $J$  et si  $a$  un élément

de  $J$ , la fonction  $F$  déterminée par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est continue et dérivable sur  $J$  et  $F'(x) =$

$f(x)$  pour tout  $x$  de  $J$ . Il « appelle primitive ou intégrale indéfinie d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $J$  toute fonction continue et dérivable sur  $J$  et  $y$  admettant  $f$  pour fonction dérivée » et il la note  $\int f(x)dx$ .

Ainsi, à la différence des trois manuels au Vietnam que nous avons analysés, ce manuel identifie officiellement les deux notions de *primitive* et d'*intégrale indéfinie*. Il les note  $\int f(x)dx$  quoique l'usage de cette notation soit déconseillé par le programme comme nous l'avons dit dans l'analyse de programme de la période 1970 – 1980. Pourquoi le manuel introduit-il cette notation, malgré l'injonction du programme ? On trouve dans le manuel ce seul commentaire :

On la note  $\int f(x)dx$ . D'où le nom d'intégrale indéfinie, par opposition à l'intégrale définie dont les bornes sont précisées. On notera bien qu'une intégrale définie est un nombre et une intégrale indéfinie une fonction.

Ainsi, la notation  $\int f(x)dx$  serait utilisée (au lieu de la notation  $\int_a^x f(t)dt + C$ ) en relation avec le nom d'intégrale définie.

Mais nous pouvons faire l'hypothèse que la présence de cette notation est liée à l'intention des auteurs d'accorder une place égale aux techniques d'intégration pour le calcul de primitive [intégrale indéfinie] et d'intégrale définie. En effet, *c'est l'existence de l'ostensif  $\int$  qui permet l'énoncé et le travail des techniques d'intégration comme l'intégration par partie ou le changement de variable.*

Dans la suite, le manuel présente « le calcul de l'intégrale définie au moyen des primitives »

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  sur  $[a, b]$ . On note «  $[F(x)]_a^b$  » la différence  $[F(b) - F(a)]$ .

et le tableau des primitives usuelles.

Fonction	Primitive
0	$C$
$x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbf{Q} - \{-1\}$ )	$\frac{x^\alpha}{\alpha + 1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + C$

**Tableau 13.** *Tableau des primitives du manuel M1 Mathématiques Terminale C, E, collection Cossart et Théron, Bordas 1971*

Comme l'indique le manuel, ce tableau sera enrichi par la linéarité des primitives, et par l'étude de nouvelles fonctions dans le chapitre VI *Fonctions logarithmiques et exponentielles*.

À la fin de la partie *Cours*, le manuel réserve un endroit spécifique pour présenter la linéarité des primitives, élément technologique au service du calcul de primitives, et l'intégration par parties pour l'intégrale indéfinie, puis pour l'intégrale définie.

D'autre part, si  $F$  et  $G$  sont des primitives de  $f$  et  $g$  respectivement sur le même intervalle,  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  et  $kF$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) une primitive de  $kf$ ; cela permet d'enrichir le tableau des primitives et, en particulier, de calculer la primitive d'une fonction polynôme.

Enfin, si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ ,  $\frac{1}{a}F(ax + b)$  est une primitive de  $f(ax + b)$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes ( $a \neq 0$ ).

Plus généralement, si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ ,  $F[u(x)]$  est une primitive de  $f[u(x)]u'(x)$ , où  $u(x)$  est une fonction dérivable. Ainsi, si nous avons à calculer

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx,$$

nous pouvons considérer la fonction

$$u(x) = \sin x.$$

Nous sommes ramenés à calculer les primitives de  $u^2$ , qui sont  $\frac{u^3}{3} + C$ . D'où

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C. \text{ »}$$

« [...] on peut écrire sous la forme abrégée

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du + C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire, en remplaçant  $v'(x) \cdot dx$  et  $u'(x) \cdot dx$  par  $dv$  et  $du$  respectivement.

C'est la méthode d'intégration par parties.

Elle est également applicable à une intégrale définie :

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = \int_a^b [u(x).v(x)]' dx - \int_a^b u'(x).v(x)dx,$$

soit

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = u(b).v(b) - u(a).v(a) - \int_a^b u'(x).v(x)dx .$$

L'élément technologique du calcul de primitive dans le paragraphe supra n'est autre que **ET0** énoncé dans l'étude de manuel (1975 – 1990) au Vietnam :

• **ET0.**  $\int g(x)dx = G(x) + C \Rightarrow \int g[u(x)]u'(x)dx = G[u(x)] + C$

La partie *Cours* s'achève par le traitement de deux exemples d'intégration par parties, le premier pour l'intégrale indéfinie, le second pour l'intégrale définie.

1. Soit à calculer  $\int x \cos x dx$ .

On pose  $\begin{cases} u = x, \\ dv = \cos x dx, \end{cases}$  d'où  $\begin{cases} du = dx, \\ v = \sin x. \end{cases}$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx + C ,$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

2. Soit à calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx$ .

On pose  $\begin{cases} u = x, \\ dv = \sin x \cos x dx, \end{cases}$  d'où  $\begin{cases} du = dx, \\ v = \frac{\sin^2 x}{2}. \end{cases}$

$$I = \left[ x \frac{\sin^2 x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{2} dx ,$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx .$$

Or  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ , d'où

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} .$$

À propos des deux exemples supra, nous pouvons observer :

- La notation *différentielle* intervient dans les deux exemples sans que la notion de différentielle ait fait l'objet d'un enseignement explicite, contrairement au Vietnam.

- Dans l'exemple 2, le manuel écrit directement le résultat du calcul  $v = \frac{\sin^2 x}{2}$  à partir de  $dv = \sin x \cos x dx$  sans en expliquer le détail. L'enjeu est la technique fondée sur l'élément technologique **ET0** déjà travaillée dans le calcul de primitive :

$$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

C'est pourquoi le manuel n'utilise pas la technique suivante, plus économique pour le calcul :

$$dv = \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4} \cos 2x$$

$$I = \left[ -\frac{1}{4} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{8} + \left[ \frac{1}{8} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

### a.2. Partie Exercices

La partie *Exercices* de la section *Intégrale d'une fonction numérique* propose les types de tâches suivants :

**T1.** Calculer  $\int f(x) dx$  (21 exercices).

**T1a.** Établir (ou démontrer) une relation de récurrence entre deux intégrales indéfinies (3 exercices).

**T1b.** Exprimer  $\int f(x)g(x)dx$  en fonction de  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  (4 exercices).

**T2.** Calculer  $\int_a^b f(x) dx$  (22 exercices).

**T2a.** Établir (ou démontrer) une relation de récurrence entre deux intégrales définies (5 exercices).

**T11.** Démontrer une inégalité entre deux intégrales définies (3 exercices).

Nous vérifions ici notre hypothèse sur la place égale accordée au travail des techniques attribué au calcul de primitive - intégrale indéfinie et définie, résultant de la présence de l'ostensif  $\int$  commun. L'enjeu est clairement le calcul d'intégrale indéfinie et d'intégrale définie avec, comme méthodes de calcul, l'intégration par parties et l'élément technologique ET0. Ce dernier existe dans les trois manuels (manuel de la période 1975 – 1990 au Vietnam, manuel de la période 2000 – 2006 au Vietnam, et le manuel en question en France), mais son habitat dans chaque manuel est différent : dans le premier manuel précité, la technique associée n'est pas utilisée ; dans le deuxième, elle est mobilisée en combinant différentiation et changement de variable « implicite » (sans nouvelle variable) ; dans le dernier, elle est utilisée en évitant la différentiation.

Contrairement au type de tâches T11 présent dans les deux dernières périodes au Vietnam (1990 – 2000, 2000 – 2006), dans ce manuel, ce type porte ici sur des intégrales non calculables. De ce fait, l'inégalité ne peut se résoudre par la comparaison de trois nombres.



La présence de ce type de tâches sert ici à l'étude de la convergence d'une suite dont les termes *non calculables* sont de la forme  $\int_a^b f_n(x)dx$ .

Parmi les nouveaux types de tâches par rapport aux types de tâches de référence :

- T1a. Établir (ou démontrer) une relation de récurrence entre deux intégrales indéfinies,
  - T1b. Exprimer  $\int f(x)g(x)dx$  en fonction de  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,
  - T2a. Établir (ou démontrer) une relation de récurrence entre deux intégrales définies, nous nous centrerons sur le type de tâches T1b pour deux raisons : d'une part, les types de tâches T1a et T2a sont respectivement des sous-types de tâches de T1 et T2 ; et d'autre part, le type de tâches T1b reflète une particularité du manuel.
- Examinons donc un exercice du manuel dont nous avons rédigé la solution en nous appuyant sur les éléments du cours.

**Exercice 334** (page 308). Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Exprimer  $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$  au moyen de la fonction  $f$ .

**Solution.** (Solution attendue)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - f(x) + C$$

Les primitives de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  étant absentes de la partie *Cours*, on n'a pas le droit d'explicitier l'expression algébrique de la fonction  $f$ :  $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^x = \arctan x$ .

L'enjeu de l'exercice est l'usage de l'intégrale dépendant de la borne supérieure  $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$  comme une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  pour donner l'ensemble des primitives de  $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ .

Étant un sous-type de tâches de T1, T1b permet un travail sur l'intégrale dépendant de la borne supérieure comme primitive : dans la partie *Cours*, elle permet de générer de nouvelles fonctions comme la fonction logarithmique ou la fonction exponentielle ; dans la partie *Exercices*, elle permet d'exprimer une primitive inconnue d'une fonction. Cette idée n'est pas développée dans l'institution d'enseignement au Vietnam, malgré la présence de l'intégrale dépendant de la borne supérieure dans les trois périodes de 1975 jusqu'à 2006.

## b. Calcul des aires planes

### b.1. Partie *Cours*

Le manuel réserve une place spécifique au calcul d'aire. Les autres applications de l'intégrale seront présentées dans une autre section. Ceci montre le rôle très particulier du calcul d'aire dans l'organisation du manuel.

Conformément au programme, le manuel admet la notion d'*aire*, c'est-à-dire l'existence des ensembles quarrables  $E$  du plan euclidien tels que l'on puisse associer à chacun d'eux un nombre positif  $\mathcal{A}(E)$ , appelé son aire et vérifiant les axiomes suivants (présentés dans M1) :

- Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles quarrables disjoints,  $E \cup F$  est quarrable et
 
$$\mathcal{A}(E \cup F) = \mathcal{A}(E) + \mathcal{A}(F).$$
- Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles quarrables et si  $F \subset E$ ,  $E - F$  est quarrable et
 
$$\mathcal{A}(E - F) = \mathcal{A}(E) - \mathcal{A}(F).$$
- Un rectangle est quarrable et son aire est égale au produit des longueurs de ses côtés.

Nous pouvons déduire le deuxième axiome du premier :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= \mathcal{A}(F \cup (E - F)) = \mathcal{A}(F) + \mathcal{A}(E - F) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}(E - F) = \mathcal{A}(E) - \mathcal{A}(F). \end{aligned}$$

Cependant, l'indépendance du système d'axiomes n'est pas l'enjeu du manuel. Ces trois axiomes sont introduits pour préparer la suite.

Le manuel se propose d'utiliser le calcul intégral dans le calcul de l'aire  $\mathcal{A}$  d'un ensemble quarrable  $E = \{M(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  où  $f$  est une fonction positive sur  $[a, b]$ . Il démontre que

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx,$$

pour les cas suivants :  $f$  est monotone sur  $[a, b]$ ,  $f$  est monotone par morceaux sur  $[a, b]$ , et  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

Enfin, il démontre trois formules du calcul d'aire :

- Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions monotones par morceaux ou continues par morceaux sur  $[a, b]$  et
 
$$\forall x \in [a, b], 0 \leq f(x) \leq g(x),$$

L'aire du domaine  $E$  défini par  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$  est  $\mathcal{A} = \int_a^b (g - f)(x) dx$ .

- Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions monotones par morceaux ou continues par morceaux sur  $[a, b]$  et
 
$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x),$$

L'aire du domaine  $E$  défini par  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$  est  $\mathcal{A} = \int_a^b (g - f)(x) dx$ .

- Soit  $\varphi$  une fonction monotone par morceaux ou continue par morceaux sur  $[a, b]$ . L'aire du domaine  $E$  défini par  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y \in [0, \varphi(x)] \end{cases}$  est  $\mathcal{A} = \int_a^b |\varphi(x)| dx$ .

Ci-dessous un de deux exemples du calcul d'aire du manuel :

- Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $E$  limité par les deux paraboles d'équations  $y = f(x) = x^2 - 3x - 1$ ,  $y = g(x) = -x^2 - x + 3$ .

**Solution.** (*Solution du manuel*)

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= -2(x^2 - x - 2) \\ &= -2(x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Les points communs aux deux paraboles sont donc (Fig. 5,6) A(-1, 3) et B(2, -3). Pour  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $g(x) - f(x) \geq 0$ . D'où

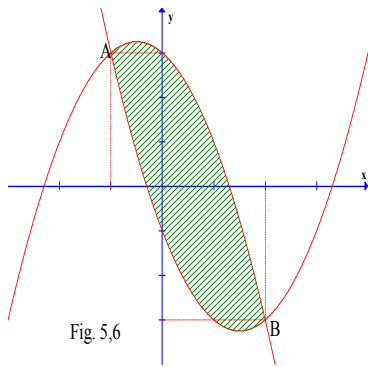


Fig. 5,6

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^2 (g - f)(x) dx \\ \mathcal{A} &= 2 \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \\ \mathcal{A} &= 2 \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\ \mathcal{A} &= 2 \left[ \left( -\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] \\ \mathcal{A} &= 9 \end{aligned}$$

## b.2. Partie Exercices

Le manuel propose :

- 6 calculs d'aire,
- 2 interprétations géométriques d'une intégrale,
- 1 étude de quarrabilité au moyen des sommes de Riemann.

L'enjeu est clairement le calcul d'aire. Le système d'inéquations  $a \leq x \leq b$ ,  $f(x) \leq y \leq g(x)$  désignant le domaine dont on doit calculer l'aire permet d'éviter toutes les connaissances hors du thème *intégrale* et en particulier les règles RI1, RI 2, RI3 du contrat institutionnel.

Le signe de  $g(x) - f(x)$  vérifié graphiquement dans le calcul d'aire des manuels au Vietnam l'est algébriquement dans ce manuel. La règle RI1 (*Représentation graphique des fonctions*) que nous avons énoncée dans l'analyse du manuel de 1975 - 1990 doit être modifiée en partie comme suit :

### Règle RI'1. Représentation graphique des fonctions

*On doit tracer la représentation graphique des fonctions dont les courbes délimitent la surface intervenant dans le calcul d'aire. La vérification graphique de l'inégalité  $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$  est interdite. On doit l'effectuer algébriquement.*

Ainsi, le graphique ne joue pas le rôle de « support » comme dans le calcul d'aire au Vietnam. Il est présent dans la solution simplement comme illustration permettant d'interpréter géométriquement la surface en question. L'élève n'a pas le droit de l'utiliser pour déterminer les éléments de l'intégrale au service du calcul d'aire.

Les règles RI2 (*Détermination algébrique de bornes d'intégration dans le calcul d'aire*), RI3 (*Connaissances graphiques permettant de déterminer une unique surface plane*) interviennent aussi dans l'exemple supra comme dans les trois manuels au Vietnam.

Cependant, dans quelques exercices du manuel, le domaine dont on doit calculer l'aire est donné algébriquement sous la forme  $\{M(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ . Dans ces cas, les règles RI'1, RI 2, RI3 n'interviennent pas, et l'élève n'a qu'à calculer l'intégrale

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \text{ en mobilisant deux autres règles de correspondance plus simples :}$$

- Les nombres de l'inéquation en  $x$  donnent les bornes d'intégration.
- La différence des deux fonctions de l'autre inéquation donne la fonction à intégrer.

### c. Applications du calcul intégral

#### c.1. Partie *Cours*

Les applications suivantes de l'intégrale sont présentées :

- calcul général de volume d'un corps géométrique ; en particulier, volume d'un prisme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône et d'une sphère ; mais aucune étude spécifique sur le calcul d'un corps de révolution,
- calcul de moment d'inertie,
- calcul de distance parcourue par un point mobile,
- calcul de quantité d'électricité d'un courant alternatif,
- calcul de puissance d'un courant alternatif.

#### c.2. Partie *Exercices*

La partie *Exercices* ne propose pas exhaustivement toutes les applications étudiées dans la partie *Cours*. Seuls les types de tâches suivants sont présents :

- T7.** Calculer le volume d'un corps
- T9.** Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène

Les types de tâches suivants sont absents par rapport aux types de tâches de référence :

- T4.** Calculer la longueur d'un arc (dans un plan ou dans l'espace)
- T6.** Calculer l'aire d'une surface de révolution
- T8.** Calculer le centre de gravité d'une plaque homogène
- T10.** Calculer le travail d'une force variable

### d. Conclusion pour le manuel M1

Dans ce manuel, deux méthodes d'intégration sont introduites pour l'intégrale indéfinie comme pour l'intégrale définie : une technique s'appuyant sur l'élément technologique ET0 (changement de variable implicite) et l'intégration par parties. Le calcul d'aire joue un rôle particulier dans l'organisation du manuel. Le système d'inéquations  $a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)$  désignant le domaine dont on doit calculer l'aire permet d'éviter toutes les connaissances hors du thème *intégrale* et les règles RI'1, RI 2, RI3 du contrat institutionnel. La primitive sert à calculer l'intégrale définie. Mais l'intégrale définie ne sert pas à calculer les primitives en raison de la présence de l'ostensif  $\int f(x)dx$  au détriment de l'intégrale dépendant de la borne supérieure  $\int_a^x f(t)dt$ . Le calcul d'intégrale

indéfinie et celui d'intégrale définie occupent deux places égales dans l'organisation du manuel. L'intégrale dépendant de la borne supérieure apparaît dans la partie Exercices comme un outil utile à exprimer une primitive d'une fonction selon cette fonction elle-même sans avoir besoin de nouvelle notation. L'intégrale sert aussi à calculer l'aire mais l'inverse n'est pas réalisé. Le lien entre primitive et aire n'est pas directement établi.

Définition de l'intégrale définie	Limite commune de sommes de Riemann	
Notation pour primitive	Primitive = Intégrale indéfinie, notée $\int f(x)dx$	
Méthodes d'intégration	Pour l'intégrale indéfinie	* Élément technologique ET0 (changement de variable implicite) * Intégration par parties
	Pour l'intégrale définie	
Calcul d'aire	* Placé hors des applications de l'intégrale * Surface plane donnée par mots ou système d'inégalités * Connaissances hors de l'intégrale, RI'1, RI2, RI3 : provisoires	
Applications de l'intégrale	* Volume d'un corps * Moment d'inertie d'une plaque homogène	
Liens entre aire, primitive, intégrale en partie <i>Exercices</i>	* Primitive $\rightarrow$ Intégrale $\rightarrow$ Aire * Intégrale $\rightarrow$ Primitive * Aire $\rightarrow$ Intégrale * Aire $\rightarrow$ Primitive * Primitive $\rightarrow$ Aire	

**Tableau 14.** Notion d'intégrale dans le manuel M1 Mathématiques Terminale C, E, collection Cossart et Théron, Bordas 1971

### II.1.2. Étude du manuel M2

Le tome 2 du manuel qui traite de la notion d'*intégrale* est découpé en trois chapitres dont chacun se divise un certain nombre de sections comprenant deux parties : partie *Cours*, et partie *Exercices*. Ci-dessous l'organisation globale du tome.

- Chapitre 23. Calcul différentiel
- Chapitre 24. Calcul intégral
  - Intégrale d'une fonction numérique
  - Fonctions primitives d'une fonction numérique
  - Applications du calcul intégral
- Chapitre 25. Exemples de fonctions d'une variable réelle

#### a. Intégrale d'une fonction numérique

##### a.1. Partie *Cours*

Le manuel commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier puis l'interprète comme aire algébrique. À cette occasion, il énonce des conditions sur la notion d'aire, définie comme une application  $S$  d'une famille de parties  $D$  du plan euclidien vers  $\mathbf{R}^+$  :

$$S(D) \geq 0$$

$$S(\emptyset) = 0$$

$$D \text{ et } D' \text{ isométriques} \Rightarrow S(D) = S(D')$$

$$D \cap D' = \emptyset \Rightarrow S(D \cup D') = S(D) + S(D')$$

L'enjeu de ces conditions est de préparer le calcul d'aire dans la suite.

L'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle fermé, borné  $[a, b]$  est définie par la valeur commune des bornes des intégrales des fonctions en escalier majorant et minorant  $f$ . Le manuel la note  $\int_a^b f(x)dx$  et l'identifie à l'aire algébrique de l'ensemble des points  $M(x, y)$ , tels que  $x$  soit compris entre  $a$  et  $b$ , et  $y$  entre 0 et  $f(x)$ . Ainsi, l'intégrale est identifiée à l'aire algébrique.

Le manuel démontre ensuite l'intégrabilité des fonctions monotones sur  $[a, b]$  et admet celle des fonctions bornées, monotones par intervalles et des fonctions continues. Il établit les propriétés suivantes de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, relation d'ordre, et formule de la moyenne. Cette dernière est également interprétée en termes d'aire algébrique. Ceci révèle le rôle organisateur de l'aire algébrique dans le manuel.

L'intégrale dépendant de la borne supérieure est introduite comme une fonction déterminée par une intégrale. Sa propriété est énoncée de façon identique à celle du manuel M1.

Le chapitre se termine par la présentation du changement de variable affine pour une intégrale :

**Théorème.** Si, dans l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ , on effectue le changement de variable  $x = \varphi(t) = mt + n$ , alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta mg(t)dt$$

avec  $g = f \circ \varphi$ ,  $a = m\alpha + n$ ,  $b = m\beta + n$ .

**Remarque.** Dans l'égalité du théorème ci-dessus, on vérifie que  $dx$ , remplacé par  $mdt = \varphi'(t)dt$ , se comporte comme une différentielle.

Ainsi, le changement de variable  $x = mt + n$  est explicitement présenté pour l'intégrale [définie]. La notation différentielle est introduite dans un chapitre précédent du manuel à travers la notation de Leibniz  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ , mais la notion de différentielle ne l'est pas :

**Remarque** (p. 99)

La notation différentielle conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow dy = f'(x) dx \\ z = g(y) &\Rightarrow dz = g'(y) dy \\ z = u(x) &\Rightarrow dz = u'(x) dx \end{aligned}$$

## a.2. Partie Exercices

Le manuel propose :

- 8 calculs d'intégrale des fonctions en escalier,
- 3 calculs d'aire arithmétique et algébrique d'un domaine délimité par une fonction en escalier,
- 5 calculs d'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  à l'aide des fonctions en escalier,
- 1 étude d'intégrabilité,
- 3 études de l'intégrale de fonctions respectivement paire, impaire et périodique,
- 3 calculs de valeur moyenne,
- 4 représentations graphique d'une fonction déterminée par l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

L'enjeu est donc le calcul d'intégrale d'une fonction en escalier et le calcul d'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  à l'aide des fonctions en escalier. Ces tâches sont provisoires.

## **b. Fonctions primitives d'une fonction numérique**

### **b.1. Partie Cours**

Le manuel présente la définition de la notion de *primitive*, l'existence de fonctions primitives, la fonction primitive prenant une valeur donnée en un point donné et la relation entre intégrale et primitive (formule de Newton – Leibniz). Il présente ensuite les fonctions primitives usuelles. Le manuel adjoint au tableau des primitives usuelles les résultats correspondants, obtenus par le changement de variable affine. Contrairement au manuel M1, la notion d'intégrale indéfinie et l'ostensif associé  $\int$  sont absents : nous pouvons prévoir que le tableau des primitives sera complexifié par rapport à celui du manuel M1 (tableau 15).

Fonction	Fonctions primitives
<b>a) Fonctions définies sur <math>\mathbf{R}</math></b>	
$f(x) = 0$	$F(x) = C$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \in \mathbf{N})$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$ $a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$ $a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}$
<b>b) Fonctions définies sur <math>I (I \subset \mathbf{R})</math></b>	
$I = \mathbf{R}^*, f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$I = \mathbf{R}^{+*}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$I = \mathbf{R}^{+*}, f(x) = x^m$	$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ $m \in \mathbf{Q}, m \neq -1$
$I = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > a\}$ $f(x) = (x - a)^m$	$F(x) = \frac{(x - a)^{m+1}}{m+1} + C$ $m \in \mathbf{Q}, m \neq -1$
$I = \mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z} \right\}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $f(x) = 1 + \cot^2 x$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C$
$I = \mathbf{R} - \{ \pi\mathbf{Z} \}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$F(x) = -\operatorname{cot} x + C$
$I = \mathbf{R} - \left\{ -\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{a}\mathbf{Z} \right\}$ $a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax + b)}$	$F(x) = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax + b) + C$

**Tableau 15.** Tableau des fonctions primitives usuelles du manuel M2  
Mathématique, Terminales CDE, collection Durrande, 1973

Le manuel présente aussi la linéarité des primitives et l'intégration par parties pour primitive et intégrale. Il mobilise également la notation différentielle pour simplifier l'écriture de formule :

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , la dérivée du produit  $uv$ , sur  $I$ , est telle que :



$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Il s'ensuit que, pour tout  $t$  de  $I$  :

$$u(t)v'(t) = (uv)'(t) + u'(t)v(t).$$

Donc :

$$\int_a^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x v(t)u'(t)dt$$

[...]

En remarquant que, sur  $I$ ,  $u'(t)dt$  est la différentielle,  $du$ , de  $u(t)$  et  $v'(t)dt$  la différentielle,  $dv$ , de  $v(t)$ , la formule s'écrit parfois :

$$\int_a^x u dv = [uv]_a^x - \int_a^x v du$$

Si  $a$  et  $b$  désignent deux réels de l'intervalle  $I$ , il en résulte que :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Soit :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

La présence de l'intégrale dépendant de la borne supérieure comme primitive va permettre un travail (justifié) sur les techniques d'intégration. Lesquelles ?

Regardons deux exemples corrigés du manuel sur le calcul de primitive :

1. Déterminer les fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto x \sin 3x$ .

Si l'on pose, pour tout  $x$  réel,

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin 3x \end{cases}, \text{ il s'ensuit que } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{\cos 3x}{3} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \int_a^x t \sin 3t dt + C &= -\left[\frac{t \cos 3t}{3}\right]_a^x + \int_a^x \frac{\cos 3t}{3} dt \\ \int_a^x t \sin 3t dt + C &= -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + C_1. \end{aligned}$$

2. Déterminer les fonctions primitives de la fonction  $f: f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

La fonction  $g$ , définie par  $g(x) = \sqrt{u(x)}$ , a pour fonction dérivée  $g'$ , telle que  $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ .

La fonction  $g$ , définie par  $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ , a pour fonction dérivée  $g'$ , telle que  $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Donc :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow F(x) = \sqrt{1+x^2} + C.$$

T1 existe sous la forme « calculer (ou déterminer) les primitives de  $f$  ». Pour l'effectuer, on calcule  $\int_a^x f(t)dt + C$  si ce calcul nécessite l'intégration par parties (exemple 1) ou on

effectue une primitivation sans notation  $\int_a^x f(t)dt$  (exemple 2). Si l'intégration par parties est commune à M1 et M2, la notation différentielle intervient dans M1 mais non dans M2. On peut l'expliquer par la présence de la formule sous deux formes :  $\int u dv = uv - \int v du$  (M1) ou  $\int_a^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x v(t)u'(t)dt$  (M2).

À propos des méthodes de calcul (de primitive et d'intégrale), M1 privilégie l'élément technologique ET0 et l'intégration par parties tandis que M2 privilégie la primitivation et l'intégration par parties.

### b.2. Partie Exercices

Le manuel propose 36 calculs de primitive et 40 calculs d'intégrale. Donc nous avons deux types de tâches :

**T1.** Calculer (ou déterminer) les primitives d'une fonction

**T2.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

### c. Applications du calcul intégral

Le manuel rappelle la notion d'*aire algébrique* énoncée dans le chapitre *Intégrale d'une fonction numérique*. Il se propose de calculer l'aire arithmétique du domaine plan déterminé par l'ensemble  $\{M(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$  puis il aboutit à la formule

$$A = \int_a^b (f - g)(x)dx .$$

À l'exception que l'on peut vérifier graphiquement l'inégalité  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$  dans le calcul d'aire de M2, le calcul d'aire et les autres applications de l'intégrale dans ce dernier sont identiques à ceux du manuel M1. L'aire à calculer peut être donnée par des mots ou par un système d'inéquations. Ce dernier rend inutile les règles du contrat institutionnel RI1, RI2, RI3.

### d. Conclusion pour le manuel M2. Comparaison avec M1, M2 et les manuels au Vietnam

Nous résumons notre analyse de l'existence de la notion d'*intégrale* dans le manuel M2 dans le tableau 16.

Les différences fondamentales entre les manuels M1 et M2 se trouvent dans les méthodes d'intégration et dans le rôle de l'intégrale dépendant de la borne supérieure. Ce dernier mène à deux notations différentes des primitives. Nous comparons les deux manuels M1, M2 dans le tableau 17.

Définition de l'intégrale [définie]	* Fonctions en escalier * L'intégrale définie s'appelle intégrale en l'absence de l'intégrale indéfinie	
Notation pour primitive	* Une primitive : $\int_a^x f(t)dt$ * Les primitives : $\int_a^x f(t)dt + C$	
Méthodes d'intégration	Pour le calcul de primitive	* Primitivation
	Pour le calcul d'une intégrale	* Intégration par parties
Calcul d'aire	* Placé dans les applications de l'intégrale * Surface plane décrite par mots ou système d'inéquations * Connaissances hors de l'intégrale, RI'1, RI2, RI3 : provisoires	
Applications de l'intégrale	* Volume d'un corps * Moment d'inertie d'une plaque homogène	
Liens entre aire, primitive, intégrale en partie Exercices	* Primitive $\rightarrow$ Intégrale $\rightarrow$ Aire * Intégrale $\rightarrow$ Primitive * Aire $\rightarrow$ Intégrale * Aire $\rightarrow$ Primitive * Primitive $\rightarrow$ Aire	

**Tableau 16.** Notion d'intégrale dans le manuel M2 Mathématique, Terminales CDE, collection Durrande, 1973

	M1	M2
Définition de l'intégrale	Sommes de Riemann	Fonctions en escalier
Objets principaux	* Aire * Intégrale indéfinie [= primitive] * Intégrale définie	* Aire [arithmétique], aire algébrique * Primitive * Intégrale
Méthodes d'intégration	* ET0 + intégration par parties  * $\int f(x)dx$  * Notation différentielle dans l'intégration par parties	* Primitivation + intégration par parties  * $\int_a^x f(t)dt + C$ ou sans notation * Sans notation différentielle
Calcul d'aire	* On doit vérifier algébriquement $g(x) \geq f(x)$	* On peut vérifier graphiquement $g(x) \geq f(x)$
Liens entre objets principaux en Exercices	* Primitive $\rightarrow$ Intégrale $\rightarrow$ Aire * Intégrale $\rightarrow$ Primitive * Aire $\rightarrow$ Intégrale * Aire $\rightarrow$ Primitive * Primitive $\rightarrow$ Aire	* Primitive $\rightarrow$ Intégrale $\rightarrow$ Aire * Intégrale $\rightarrow$ Primitive * Aire $\rightarrow$ Intégrale * Aire $\rightarrow$ Primitive * Primitive $\rightarrow$ Aire

**Tableau 17.** Comparaison de deux manuel M1 et M2

Les différences fondamentales entre les manuels au Vietnam et les manuels M1, M2 sur le thème « intégrale » se trouvent dans les méthodes d'intégration, dans le rôle de la différentielle et dans le rôle de l'intégrale dépendant de la borne supérieure :

- Le changement de variable pour l'intégrale [définie] est présent dans les trois manuels du Vietnam. Il ne l'est pas dans M1 et M2 en France.

- La différentielle intervient plus fortement dans le changement de variable que dans l'intégration par parties au Vietnam. Elle n'intervient que dans l'intégration par parties dans M1.
- L'intégrale dépendant de la borne supérieure est présente dans la partie *Cours* des trois manuels du Vietnam et elle n'intervient absolument pas dans la partie *Exercices*. Au contraire, elle est utilisée dans M1 et M2 sous deux formes différentes.

## II.2. Période 1980 – 2002

Pour les trois épisodes de cette période, nous choisissons les trois manuels suivants :

- *Mathématiques* Terminales C et E, IREM Strasbourg, librairie Istra, 1983,
- *Mathématiques* Terminales C et E, collection Fractale, Bordas, 1992,
- *Mathématiques* Terminale S, collection Dimathème, Didier, 1994.

Nous les notons respectivement M3, M4, M5.

Une évolution de l'organisation est frappante dans M4 et M5 : aux parties *Cours* et *Exercices* s'ajoutent des activités préparatoires, des travaux pratiques et des exercices commentés.

### II.2.1. Étude du manuel M3

Le manuel s'organise en 18 chapitres.

1. Analyse combinatoire
2. Continuité et limites
3. Suites
4. Intégrale d'une fonction continue  
Étude : Calcul approché d'une intégrale
5. Fonction logarithme népérien
6. Fonctions continues sur un intervalle  
Étude : Exposants rationnels
7. Dérivation des fonctions
8. Théorème des accroissements finis
9. Fonction exponentielle
10. Fonctions puissances – Croissances comparées
11. Développements limités
12. Applications des développements limités
13. Exemples d'études de fonctions
14. Suites récurrentes
15. Équations différentielles
16. Calculs numériques
17. Applications du calcul intégral
18. Probabilités et dénombrements
19. Statistiques : séries doubles  
Étude : Linéarisation par changements de variables

#### a. Chapitre Intégrale d'une fonction continue

##### a.1. Partie Cours

Le chapitre *Intégrale d'une fonction continue* débute par la notion intuitive d'aire. Il démontre ensuite que l'aire variable sous la courbe est dérivable et admet comme dérivée la fonction considérée : la notion de *primitive* et le lien entre deux primitives d'une même fonction sont ainsi introduites. L'existence de primitives des fonctions continues ainsi que l'existence unique de la primitive prenant une valeur donnée en un point a donné sont

également établies : cette dernière primitive est notée  $\int_a^x f(t)dt$ . Ci-dessous le tableau des primitives usuelles du manuel (tableau 18) et le tableau de primitivation (tableau 19) :

$f(x)$	$F(x)$	I
$a, a \in \mathbf{R}$	$ax$	$\mathbf{R}$
$x$	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$
$x^n, n \in \mathbf{Z} - \{-1, 0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbf{R}$ , si $n > 0$ ] $0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ si $n < -1$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbf{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

**Tableau 18.** Tableau des primitives usuelles du manuel M3  
Mathématiques Terminales C, E, IREM Strasbourg, librairie Istra, 1983

Fonction	Primitive	Condition supplémentaire
$f + g$	$F + G$	
$\lambda f$	$\lambda F$	
$F^n, n \in \mathbf{N}^*$	$\frac{1}{n+1}F^{n+1}$	
$\frac{F'}{F^2}$	$-\frac{1}{F}$	$\forall x \in I, F(x) \neq 0$
$x \mapsto f(ax + b) = F'(ax + b)$ $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$	$ax + b \in I$

**Tableau 19.** Tableau de primitivation du manuel M3  
Mathématiques Terminales C, E, IREM Strasbourg, librairie Istra, 1983

Les trois dernières lignes du tableau 19 présentent les éléments technologiques du calcul de primitive.

Le théorème du lien entre l'aire variable sous la courbe et la primitive permet au manuel de définir l'intégrale d'une fonction continue par la formule de Newton – Leibniz comme une généralisation de l'aire. Les propriétés suivantes de l'intégrale sont présentées : linéarité, positivité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne. Cette dernière est interprétée en terme d'aire.

Pour les méthodes d'intégration, ce manuel présente l'intégration par parties, le changement de variable affine et la primitivation. En particulier, une remarque du manuel indique que l'« on peut aussi utiliser l'interprétation géométrique pour calculer certaines intégrales. Ainsi, en reprenant l'exercice 1 du §1.2. on trouve :  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}$  ». Le

chapitre se termine par des exemples de fonctions définies par une intégrale. Ceci exprime que l'intégrale est un outil pour générer de nouvelles fonctions.

## a.2. Partie Exercices

Le manuel propose :

**T1.** 19 calculs de primitive et 7 calculs de primitive prenant une valeur donnée en un point donné,

**T2.** 17 calculs d'intégrale,

**T5.** 11 calculs d'aire,

**T11.** 3 inégalités intégrales,

- 3 calculs de valeur moyenne,

Ainsi, le type de tâches T1 apparaît sous la forme « calculer les primitives d'une fonction ». Pour le types de tâches T2 : calculer  $\int_a^b f(x)dx$ , il apparaît une nouvelle technique : on interprète l'intégrale comme une aire et on calcule cette aire par les formules élémentaires connues.

## b. Étude de calcul approché d'une intégrale

Les méthodes suivantes sont mises en œuvre : méthode des rectangles, méthode des trapèzes, et méthode des tangentes. Ainsi, le type de tâches T3 : « calculer approximativement  $\int_a^b f(x)dx$  » est présent pour la première fois avec trois techniques : méthode des rectangles, méthode des trapèzes, et méthode des tangentes.

## c. Étude du chapitre Applications de l'intégrale

Les applications de l'intégrale dans ce manuel sont les mêmes que celles du manuel M1.

### II.2.2. Étude du manuel M4

Le type de tâches T1 « calculer les primitives d'une fonction » est identique à celui du manuel M3.

Pour le type de tâches T2 « calculer  $\int_a^b f(x)dx$  », l'usage de l'interprétation géométrique au service de calcul d'intégrale est absent.

Le type de tâche T3 « calculer approximativement  $\int_a^b f(x)dx$  » est présent avec trois techniques : méthode des rectangles, méthode des trapèzes, et méthode du point milieu remplaçant la méthode des tangentes dans M3. L'utilisation de calculatrice programmée pour T3 est également présentée.

Le type de tâches T5 « calculer l'aire d'une surface plane » est identique à celui de M1.

Le type de tâches T11 « démontrer une inégalité intégrale » est similaire à celui du manuel M1.

Les types de tâches absents par rapport aux types de tâches de référence :

- T4. Calculer la longueur d'un arc (dans un plan ou dans l'espace)
- T6. Calculer l'aire d'une surface de révolution
- T8. Calculer le centre de gravité d'une plaque homogène
- T9. Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène
- T10. Calculer le travail d'une force variable

### II.2.3. Étude du manuel M5

Conformément au programme, toutes les propriétés de l'intégrale sont interprétées en terme d'aire dans la mesure du possible.

Les types de tâches présents dans ce manuel T1, T3, T11 sont identiques à ceux du manuel M4. Les types de tâches absents sont les mêmes que ceux de M4.

Nous observons les évolutions suivantes concernant respectivement les types de tâches T2 et T5 :

- L'interprétation géométrique au service de calcul d'intégrale réapparaît :

**Exercice 27** (page 188). Après avoir donné la nature de la courbe  $C$  représentant la fonction  $f$ :  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , interpréter géométriquement  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ , puis calculer cette intégrale.

**Solution** (du manuel).  $C$  est le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon 1 situé dans le demi-plan d'équation  $y \geq 0$ . Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi.$$

- Tous les domaines dont on doit calculer l'aire sont algébriquement donnés (exercices 22, 23, 24, 25, 26, 28, page 188) sous la forme :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Le calcul d'aire dans ces cas ne nécessite que les connaissances du thème « intégrale ».

### II.3. Période 2002 – 2006

Nous choisissons le manuel *Mathématiques* Terminale S, Bréal, 2002 pour cette période et nous le notons M6.

#### II.3.1. Changements dans la partie *Cours* de M6

Nous notons les changements suivants autour du thème « intégrale » dans la partie *Cours* du manuel M6 par rapport à M5 :

- L'intégrale est définie par limite commune de deux suites adjacentes.
- L'approximation de l'intégrale par calcul numérique disparaît.
- L'intégrale à bornes infinies apparaît pour préparer le calcul de probabilité des variables aléatoires continues.

À l'exception des changements supra, la partie *Cours* concernant le thème « intégrale » est analogue à celle du manuel M5.

#### II.3.2. Changements dans la partie *Exercices* de M6

Par rapport au manuel M5, il y a les changements suivants dans la partie *Exercices* de M6 :

- Quoique l'approximation de l'intégrale par *calcul numérique* disparaisse dans la partie *Cours*, la partie *Exercices* propose le type de tâches T3 : calculer approximativement  $\int_a^b f(x) dx$  par *encadrement numérique*. Ce type de tâches est donc lié étroitement au type de tâches T11 : démontrer une inégalité intégrale et il apporte une nouvelle raison d'être à T11.

- Pour le type de tâches T5 : calcul d'aire d'une surface plane, le manuel ne prend qu'un de deux systèmes d'inéquations  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$  ou  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y \text{ compris entre } f(x) \text{ et } g(x) \end{cases}$  pour désigner le domaine dont on doit calculer l'aire. Ces deux systèmes permettent d'éviter les règles du contrat institutionnel RI1, RI2, RI3.

Les types de tâches présents T1, T2 sont identiques à ceux du manuel M5.

Les types de tâches absents sont les mêmes que ceux dans M5.

### III. Conclusion de l'étude des programmes et des manuels en France (1970 – 2006)

#### III.1. Calcul de primitive

Dans la première période (1970 – 1980), la présence des notations  $\int f(x)dx$  (M1) et  $\int_a^x f(t)dt + C$  (M2) permet aux auteurs de présenter l'intégration par parties comme une méthode de calcul d'une intégrale indéfinie (M1) et des primitives (M2). De plus, M1 propose une autre technique (changement de variable implicite) justifiée par l'élément technologique ET0 et M2 la primitivation.

Dans les dernières périodes (1980 – 2002, 2002 – 2006), l'ostensif  $\int$  étant absent, l'intégration par parties disparaît comme méthode de calcul de primitive et la primitivation devient l'unique méthode de calcul enseignée.

#### III.2. Calcul d'intégrale (définie)

Dans la première période (1970 – 1980), l'intégrale est définie comme limite commune de sommes de Riemann ou comme valeur commune des bornes des intégrales des fonctions en escalier majorant et minorant  $f$ . Dans la deuxième période (1980 – 2002), la définition est réduite à la formule de Newton – Leibniz. La troisième et dernière période (2002 – 2006) voit un retour de la définition de la notion d'intégrale basée sur la notion de limite, mais cette fois-ci comme limite commune de deux suites adjacentes.

Malgré quatre définitions différentes durant les trois périodes, les méthodes d'intégration enseignées sont les mêmes : primitivation et intégration par parties. Contrairement au Vietnam, la notion de *différentielle* n'est jamais introduite et ne joue donc aucun rôle dans l'intégration, l'ostensif  $dx$  n'a que la valence sémiotique d'indicateur de variable d'intégration. La méthode de changement de variable qui donne une valence instrumentale à l'ostensif  $dx$  n'est corrélativement jamais enseignée.

#### III.3. Calcul d'aire

Le calcul d'aire est un élément stable dans le domaine des applications du calcul intégral durant les trois périodes.

La description d'une surface plane quarrable par le système d'inéquations

$$\{M(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

permet d'éviter :

- la mise en jeu de connaissances mathématiques hors du thème *intégrale* comme la résolution algébrique d'équations,



- le respect de règles du contrat institutionnel relevant de connaissances implicites sur le graphique que nous avons mis en évidence précédemment dans le cas de l'EMS au Vietnam.

### **III.4. Liens entre aire, primitive, intégrale**

Dans les trois périodes, les liens établis entre aire, primitive et intégrale sont bidirectionnels selon le schéma : primitive  $\Leftrightarrow$  intégrale  $\Leftrightarrow$  aire. La notion de primitive sert au calcul d'intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz. L'intégrale sert au calcul de primitive à travers l'intégrale dépendant de la borne supérieure. L'intégrale est un outil du calcul d'aire et l'interprétation géométrique d'une intégrale permet de calculer un certain nombre d'intégrales.

Le lien direct entre aire et primitive n'est pas établi à l'exception du cas des manuels de la deuxième période (1980 – 2002) qui présentent dans la partie cours l'aire variable sous la courbe comme une primitive de la fonction considérée.

### Chapitre A3.

## Conclusion de l'étude des programmes et des manuels au Vietnam et en France

Nous revenons maintenant aux questions posées au début de la partie A pour y répondre.

Au Vietnam, le logos de l'intégrabilité est partiellement présent dans la première période (1975 – 1990) et absent dans les dernières périodes (1990 – 2000, 2000 – 2006), la formule de Newton-Leibniz permettant cet effacement. En l'absence du bloc pratique, la technologie de l'intégrabilité dans la première période ne justifie que les techniques mobilisées dans les calculs, calcul de primitive et calcul d'intégrale.

En France, le statut de l'intégrabilité dans la période 1970 – 1980 est identique à celui de la première période (1975 – 1990) au Vietnam. L'intégrabilité disparaît dans la deuxième période (1980 – 2002) en même temps que la formule de Newton – Leibniz joue le rôle d'élément technologique pour l'existence et le calcul d'intégrale. Dans la troisième et dernière période (2002 – 2006), l'intégrabilité réapparaît mais sa trace est infime dans le logos et absente de la praxis.

*Nous pouvons dire que les deux institutions privilégient le calcul : calcul de primitive et calcul de grandeurs (calcul d'intégrale et calcul d'aire en particulier).*

L'absence du développement en série (y compris du développement de Taylor avec reste et du développement asymptotique) réduit les possibilités des techniques de calcul approché à deux ou trois méthodes numériques (principalement méthode des rectangles et méthode des trapèzes).

- *Pour l'intégrale indéfinie*, les méthodes de calcul ne sont pas stables d'une période à l'autre dans les deux institutions.

Au Vietnam, dans la première période (1975 – 1990), le calcul d'une intégrale indéfinie occupe une place importante, égale à celle du calcul d'intégrale définie, avec deux méthodes d'intégration : changement de variable et intégration par parties. L'intervention de la différentielle permet d'effectuer le changement de variable comme substitution littérale formelle sans se référer à la formule requise. Dans la deuxième période (1990 – 2000), le calcul de primitive est quasiment absent. Il réapparaît dans la troisième période (2000 – 2006) avec l'élément technologique ET0 équivalant au changement de variable  $u = \psi(x)$  et économisant une nouvelle variable en considérant  $\psi(x)$  dans  $d(\psi(x))$  comme variable indépendante.

En France, dans la première période (1970 – 1980), le calcul de primitive existe soit sous la forme « calculer  $\int f(x)dx$  » avec l'élément technologique ET0 et l'intégration par parties,

soit sous la forme « calculer  $\int_a^x f(t)dt + C$  » (avec intégration par parties) et sans notation

spécifique (avec primitivation). Dans les deux dernières périodes (1980 – 2000, 2000 – 2006), seule la primitivation est proposée pour calculer les primitives.

- *Pour l'intégrale définie*, les méthodes d'intégration sont plus stables au fil des trois périodes dans les deux institutions. Au Vietnam, ce sont le changement de variable et l'intégration par parties. En France, ce sont l'intégration par parties et la primitivation (à l'exception du seul manuel M1 : intégration par parties et ET0).

- *Le calcul d'aire d'une surface plane et le calcul de volume* sont deux applications permanentes dans les deux institutions. S'il est proposé après une étude de fonctions, le

calcul d'aire nécessite des connaissances hors du thème « intégrale » comme la résolution algébrique des équations et le respect de règles implicites de lecture graphique (contrat institutionnel). En revanche, dans la dernière période, le calcul d'aire est parfois proposé hors de l'étude de fonctions et il est effectué sans avoir besoin du graphique. En France, dans les deux manuels récents analysés (M5 et M6), le domaine dont on doit calculer l'aire, est donné sous une de deux formes :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x), \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y \text{ compris entre } f(x) \text{ et } g(x). \end{cases}$$

Pour la deuxième forme, l'élève doit étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  sur  $[a, b]$ . Pour la première, il n'a qu'à calculer  $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ .

• *Les liens entre aire, primitive et intégrale* au Vietnam sont monodirectionnels selon le schéma :

Primitive  $\rightarrow$  Intégrale  $\rightarrow$  Aire

Cela signifie que la connaissance de primitive permet de calculer l'intégrale et le calcul d'intégrale sert au calcul d'aire. Le sens inverse des flèches n'existe pas en partie *Exercices* quoique la partie *Cours* présente l'intégrale dépendant de la borne supérieure et le lien entre aire variable sous la courbe et primitive.

En France, les liens entre primitive et intégrale sont bidirectionnels. La connaissance de primitive permet de calculer l'intégrale et l'intégrale à son tour permet de calculer les primitives à travers l'intégrale dépendant de la borne supérieure. L'intégrale participe aussi à la génération de nouvelles fonctions en France tandis que toutes les fonctions usuelles sont introduites avant l'introduction de la notion d'*intégrale* au Vietnam.

En plus, l'interprétation géométrique de l'intégrale permet de calculer l'intégrale à partir de l'aire. Ce lien n'est pas établi au Vietnam.

	Au Vietnam	En France
Définition de l'intégrale	1. Sommes de Riemann 2 et 3. Formule de Newton – Leibniz	1. Sommes de Riemann / Fonctions en escalier 2. Formule de Newton – Leibniz 3. Suites adjacentes
Notation pour primitive : <i>Présence ou non de l'ostensif</i> ∫	1. $\int f(x)dx$ 2. Disparition 3. Réapparition $\int f(x)dx$	1. $\int f(x)dx / \int_a^x f(t)dt + C$ 2 et 3. Absence
Méthodes d'intégration pour l'intégrale indéfinie / calcul de primitive (T1)	1. Changement de variable + intégration par partie 2. Absence 3. ET'0 (Changement de variable implicite avec différentiation)	1. ET0 (Changement de variable implicite) + Intégration par parties ou Primitivation + Intégration par parties 2 et 3. Primitivation
Méthodes d'intégration pour l'intégrale [définie] (T2)	1, 2 et 3. Changement de variable + intégration par parties	1. ET0 (Changement de variable implicite) + Intégration par parties ou Primitivation + Intégration par parties 2 et 3. Primitivation + Intégration par parties
Calcul approché (T3)	Absence durant les trois périodes	1. Absence 2. Présence 3. Présence (en liaison avec T11)
Encadrement d'intégrale (T11)	1. Absence 2 et 3. Présence (sans liaison avec T3)	1 et 2. Présence (en liaison avec étude de suites) 3. Présence (en liaison avec T3)
Calcul d'aire (T5) <i>Présence ou non d'un système d'inéquations (SI) pour décrire une surface plane</i>	Absence SI <b>Exige</b> Connaissances algébriques Règles RI1, RI2, RI3	Présence SI <b>Évite</b> Connaissances algébriques Règles RI1, RI2, RI3
Autres applications (T4, T6, T7, T8, T9, T10)	1. Calcul de volume, centre de gravité, moment d'inertie (T7, T8, T9) 2 et 3. Calcul de volume (T7)	1. Calcul de volume, centre de gravité, moment d'inertie (T7, T8, T9) 2 et 3. Calcul de volume (T7)
Liens entre aire, primitive, intégrale	<b>Inchangés</b> durant trois périodes Primitive → Intégrale → Aire Intégrale ↔ Primitive Aire ↔ Intégrale Aire ↔ Primitive Primitive ↔ Aire	<b>Inchangés</b> durant trois périodes Primitive → Intégrale → Aire Intégrale → Primitive (sauf M1) Aire → Intégrale (M4, M5) Aire ↔ Primitive Primitive ↔ Aire
Notion et notation différentielle	Présence : notion de différentielle et notation différentielle Changement de variable = substitution littérale formelle	1. Présence : notation différentielle 2 et 3. Absence : notion de différentielle

**Tableau 20.** Comparaison de l'objet de savoir « intégrale » au Vietnam et en France au fil des trois périodes 1, 2 et 3 (3 étant la période actuelle)

Nous avons ainsi obtenu une première description institutionnelle du savoir « intégrale » à enseigner dans les deux institutions d'enseignement que sont la classe 12 au Vietnam et la classe de Terminale en France.

Quelles sont les pratiques institutionnelles effectives : sur quels types de tâches portent-elles ? Quelles solutions sont mises en place ?

Nous chercherons dans le chapitre suivant à rassembler un ensemble d'indices pour répondre à ces questions.

L'enseignement du thème de l'intégrale se déroulant dans les deux pays à la fin du lycée, pour cela, nous avons choisi d'analyser les sujets d'examens terminaux de EMS comme les baccalauréats en France et au Vietnam et le concours d'entrée à l'Université au Vietnam.

Ces examens emblématiques, car sanctionnant l'enseignement secondaire, sont pour nous des observatoires pour déterminer ce que l'institution de chacun des pays juge fondamental pour le savoir à enseigner, c'est-à-dire ce qu'elle considère comme les principaux enjeux mathématiques de l'enseignement de l'intégrale et qui contraint nécessairement ce qui est effectivement enseignée dans les classes et donc les pratiques institutionnelles effectives.

**Partie B.**  
**Approfondissement de l'analyse institutionnelle comparative  
par l'étude des examens finaux, de l'apprêtage du savoir et  
l'étude épistémologique**



Cette partie est consacrée à approfondir l'analyse institutionnelle comparative du savoir à enseigner « intégrale » dans les deux institutions en considérant :

- Les examens finaux de l'enseignement secondaire comme les baccalauréats en France et au Vietnam, le concours d'entrée universitaire au Vietnam.
- La transposition interne du savoir par le fait que l'enseignant, sous les contraintes du savoir à enseigner (chapitres A1, A2) et des examens finaux (B1), apprête le savoir pour l'enseigner effectivement (Ravel 2003).
- Une enquête épistémologique pour interroger l'écart entre un savoir de référence et le savoir à enseigner dans EMS en France et au Vietnam.





## **Chapitre B1.**

### **Baccalauréat en France et au Vietnam. Concours d'entrée universitaire au Vietnam**

Dans les chapitres A1 et A2, nous avons ébauché une première description institutionnelle du savoir « *intégrale* » à enseigner dans la classe 12 au Vietnam et la classe de Terminale en France. Notre analyse dans ce chapitre portera sur les baccalauréats en France et au Vietnam et le concours d'entrée universitaire au Vietnam, épreuves considérées comme des observatoires permettant de déterminer ce qui pèse institutionnellement sur le savoir effectivement enseigné dans les deux institutions et donc sur les pratiques institutionnelles.

En effet, nous considérons avec Chevallard (2000) que ces épreuves exposent une vérité institutionnelle, à valeur de verdict objectif (ou *véridiction*) sur une institution :

La véridiction a ainsi une fonction d'objectivation. Elle expose une vérité institutionnelle – je dirais presque une subjectivité – à d'autres vérités d'institutions, pour en apprécier la force, en soutenir la réalité au-delà du cadre protecteur particulier à l'intérieur duquel elle s'est d'abord construite [...] (Chevallard 2000, p. 33)

Nous interrogerons donc la « *diffraction institutionnelle* » (op. cité, p. 29) des savoirs en considérant les trois institutions dans lesquelles s'inscrivent ces épreuves : la terminale S en France, la classe 12 au Vietnam et enfin l'université au Vietnam, puisque les rédacteurs du concours sont issus de cette institution.

Pour conduire cette étude, nous confronterons les types de tâches proposés dans les manuels analysés à ceux proposés dans les sujets des baccalauréats et du concours. Nous faisons l'hypothèse suivante :

*Les types de tâches et les solutions attendues dans ces épreuves correspondent à des pratiques effectives et stables, propres à chacune des institutions considérées.*

Ce qui s'est passé en 2003 en France pour l'épreuve du Baccalauréat S, première épreuve après la réforme de 2002, conforte cette hypothèse. Nous en rendons compte brièvement.

Le sujet de mathématiques de la série S a soulevé un véritable scandale. Combelles, présidente de la régionale d'Aix-Marseille de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) se faisant le porte-parole des enseignants, conteste la légitimité des épreuves en estimant que « les deuxièmes exercices, l'un adressé aux 'spécialistes', l'autre aux 'non-spécialistes' étaient tous deux franchement difficiles » et que « le problème portait sur une toute petite partie du programme ». Un sujet de baccalauréat, explicite-t-elle :

« doit permettre à un élève moyen de faire la preuve qu'il a bien acquis les notions essentielles qu'il avait à apprendre. C'est là la raison d'être de l'épreuve. Il doit donc porter sur de larges portions du programme, et il ne doit pas présenter de difficultés excessives [...]. Car les évolutions doivent être annoncées et préparées, et elles doivent rester mesurées pour que le système soit en mesure de les absorber : si les règles du jeu changent, la moindre des choses est d'en avertir les joueur ! ».

Cette indignation et ces propos attestent bien que ce sujet était en rupture de contrat sur ce que doit être une épreuve de baccalauréat.

Jullien, Matheron et Schneider (2003) analysent cette rupture en tant que professeurs de mathématiques et en tant que didacticiens comme une inadéquation du sujet à un rapport institutionnel non encore stabilisé :

Identifier, décrire le rapport institutionnel est une difficulté objective. À cette difficulté s'ajoute ici le fait que, le programme étant nouveau cette année, ce rapport institutionnel ne s'est pas encore stabilisé et est mal connu. Chaque professeur de mathématiques de Terminale S a été amené à faire constamment des choix, tout en traitant le programme officiel. En effet, si celui-ci lui fournit le cadre général de son enseignement, c'est à l'enseignant qu'il revient de remplir avec précision ce cadre [...]

Ils reconnaissent à cette épreuve le pouvoir de faire évoluer et de stabiliser ce rapport institutionnel mais pour eux, ce n'est pas son objectif premier :

Bien sûr, un sujet de baccalauréat contribue à faire évoluer et à stabiliser peu à peu ce rapport institutionnel. Cette fonction est d'ailleurs largement prise en compte au cours du temps, par les professeurs et les élèves, en particulier par leur travail sur les Annales. Mais elle n'est pas l'objectif premier de ce dispositif et sa prise en compte lors de la conception d'un sujet doit être maîtrisée et rester limitée ; ce qui n'a visiblement pas été le cas en juin 2003, comme le montre l'analyse de la rupture de contrat dont nous venons de fournir quelques éléments.

Le débat sur le sujet de mathématiques de 2003 conforte notre hypothèse sur le fait que les épreuves du baccalauréat pour être conformes au rapport institutionnel doivent être attachées à des pratiques effectives et stabilisées de l'institution d'enseignement, ici la Terminale C ou S.

## **I. Baccalauréat en France**

En France, le baccalauréat est créé par le décret organique du 17 mars 1808. À l'époque, l'examen ne comporte que les épreuves orales portant sur des auteurs grecs et latins, sur la rhétorique, l'histoire, la géographie et la philosophie. Étant également le premier grade universitaire, ce diplôme a la double particularité de sanctionner la fin des études secondaires et d'ouvrir l'accès à l'enseignement supérieur.

En 1968, cinq nouvelles séries sont créées :

- Série A : Philosophie – Lettres
- Série B : Économie et Social
- Série C : Mathématiques et Sciences physiques
- Série D : Mathématiques et Sciences de la nature
- Série E : Mathématiques et Technique

Les baccalauréats technologique et professionnel sont créés respectivement en 1968 et 1985.

En 1993, les nouvelles séries du baccalauréat général sont instituées : ES (économique et social), L (littéraire), S (scientifique). Ces trois séries visent la poursuite d'études supérieures (universités, grandes écoles, instituts universitaires de technologie).

En cohérence avec les analyses institutionnelles effectuées auparavant, nous nous limitons aux sujets de mathématiques du baccalauréat de la série S qui reflètent le plus clairement les enjeux institutionnels vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques, et en particulier de la notion d'*intégrale*.

Les mathématiques donnent lieu à l'épreuve la plus importante de la série S au baccalauréat par son coefficient de notation le plus élevé, à savoir 7 ou 9 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité. (Voir le tableau 21)

<b>Épreuves obligatoires</b>			
<i>Épreuves anticipées</i>	<i>Coefficient</i>	<i>Nature</i>	<i>Durée</i>
1. Français	2	écrite	4 h
2. Français	2	orale	20 min
<i>Épreuves terminales</i>	<i>Coefficient</i>	<i>Nature</i>	<i>Durée</i>
3. Mathématiques	7 ou 9 <sup>11</sup>	écrite	4 h
4. Physique – Chimie <sup>12</sup>	6 ou 8 <sup>13</sup>	écrite et pratique	3h30 et 1 h
5. Sciences de la vie et de la Terre	6 ou 8 <sup>14</sup>	écrite	3h30
ou Biologie – Écologie	5 + 2	écrite et pratique	3h30 et 1h30
ou sciences de l'ingénieur	4 + 5	écrite et pratique	4h et 3h
6. Histoire – Géographie	3	écrite	4 h
7. Langue vivante étrangère 1	3	écrite	3 h
8. Langue vivante étrangère 2	2	écrite	2 h
9. Philosophie	3	écrite	4 h
10. Éducation physique et sportive (EPS)	2	contrôle en cours de formation	

**Tableau 21.** *Épreuves obligatoires et coefficients du baccalauréat S actuel*

Nous examinerons les épreuves du baccalauréat sur les trois périodes pour mieux comprendre l'état actuel de cette épreuve en ce qui concerne la notion d'*intégrale*.

### I.1. Période 1970 – 1980

Nous rappelons ici les types de tâches présents dans deux manuels analysés M1 et M2 de cette période :

**T3.** Calculer  $\int f(x)dx$  (ou déterminer les primitives d'une fonction)

**T4.** Établir (ou démontrer) une relation entre deux intégrales indéfinies

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

**T6.** Établir (ou démontrer) une égalité ou inégalité entre deux intégrales définies

**T8.** Calculer une grandeur autre que l'aire

et les types de tâches absents :

**T1.** Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

**T2.** Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale

**T7.** Calculer approximativement une intégrale

<sup>11</sup> Pour le candidat ayant choisi la discipline comme enseignement de spécialité.

<sup>12</sup> La partie pratique repose sur une évaluation des capacités expérimentales des élèves des établissements publics et privés sous contrat, organisée pendant l'année scolaire terminale : la note attribuée à l'ensemble de l'épreuve de sciences physique et chimique prend en compte les résultats de cette évaluation. Les candidats individuels ou des établissements privés hors contrat ne présentent que l'épreuve écrite.

<sup>13</sup> Pour le candidat ayant choisi la discipline comme enseignement de spécialité.

<sup>14</sup> Pour le candidat ayant choisi la discipline comme enseignement de spécialité.

### I.1.1. Existence de l'intégrale

Nous avons constaté dans le chapitre A2 que les manuels M1, M2 présentent des conditions d'intégrabilité dans la partie *Cours*, mais ne proposent aucune étude de l'intégrabilité dans la partie *Exercices*.

Nous trouvons cependant dans des sujets du baccalauréat de cette période des exercices portant sur l'existence de l'intégrale, comme par exemple :

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle  $t$ , définies et continues sur  $[0, \pi]$ , ainsi que leur fonction dérivée première  $f'$ . [...]

Soit  $f$  une fonction, élément de  $\mathcal{E}$ . Justifier l'existence, pour tout nombre réel  $x$  strictement positif, de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt .$$

(Session normale de 1976, Dijon, série C)

**Solution attendue**<sup>15</sup> (*Annales corrigés du baccalauréat, 1975 – 1976, Vuibert*)

Sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , les fonctions de la variable  $t$ ,  $e^{-tx}$  et  $f(t)$ , sont définies et continues. Il en résulte que le nombre

$$\int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt$$

est bien déterminé.

Proposant de « justifier l'existence de l'intégrale », au lieu de « démontrer l'intégrabilité », la consigne semble s'alléger, mais l'enjeu est double : l'accent est mis à la fois sur une propriété des fonctions continues (le produit de deux fonctions continues sur un intervalle est une fonction continue sur cet intervalle), et sur l'existence de l'intégrale des fonctions continues (autre propriété des fonctions continues).

L'existence de l'intégrale est ainsi justifiée par la continuité. Les autres conditions d'intégrabilité n'y interviennent pas. On peut en déduire que les pratiques institutionnelles effectives de l'époque avaient à mettre en place *une règle de justification de l'intégrabilité d'une fonction par la continuité de cette fonction sur l'intervalle d'intégration*.

### I.1.2. Calcul de primitive

Nous avons explicité dans le chapitre A2 deux OM à enseigner différentes du calcul de primitive, présentes respectivement dans les manuels M1 et M2.

Pour calculer une primitive quelconque, M1 mobilise la notation  $\int f(x)dx$ , tandis que M2 met en œuvre deux options : notation  $\int_a^x f(t)dt + C$  pour le calcul nécessitant l'intégration par parties, ou sans l'ostensif  $\int$  pour le calcul nécessitant la primitivation.

Pour calculer la primitive s'annulant en un point donné, M1 et M2 utilisent l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

M1 propose particulièrement une convention de notation différentielle pour abrégé l'écriture de la formule d'intégration par parties.

$$u'(x)dx = du \text{ et } v'(x)dx = dv$$

<sup>15</sup> Par la suite, les solutions attendues sont des solutions données dans des annales.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Regardons le calcul de primitive suivant, proposé au baccalauréat de la période considérée.

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = (x + 1)e^{-|x|}. \text{ [...]}$$

Déterminer une primitive de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

Déterminer une primitive de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty, 0[$ .

Déterminer la primitive de  $f$  qui s'annule en  $x = 0$ . (Session de remplacement de 1975, Poitiers, série C)

**Solution attendue.** (*Annales corrigés du baccalauréat, 1975 – 1976, Vuibert*)

Les restrictions de  $f$  aux intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  sont respectivement

$$f_1(x) = (x + 1)e^x \text{ et } f_2(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

**Détermination d'une primitive de  $f_1$ .** En effectuant une intégration par parties, nous obtenons une primitive

$$F_1(x) = \int (x + 1)e^x dx = \int (x + 1)d(e^x) = (x + 1)e^x - \int e^x dx,$$

soit

$$F_1(x) = xe^x.$$

**Détermination d'une primitive de  $f_2$ .** En opérant de la même manière avec  $f_2$ , il vient

$$F_2(x) = \int (x + 1)e^{-x} dx = \int -(x + 1)d(e^{-x}) = -(x + 1)e^x + \int e^{-x} dx,$$

soit

$$F_2(x) = -(x + 2)e^{-x}.$$

**Détermination de la primitive de  $f$  qui s'annule pour  $x = 0$ .** Cette primitive, qui peut s'écrire

$\int_0^x f(t)dt$ , représente l'aire algébrique limitée par la courbe (C) [de  $f$ ], l'axe Oy, l'axe  $x'Ox$  et la parallèle à Oy d'abscisse  $x$ .

• Pour  $x < 0$ , son expression est donc

$$F_1(x) - F_1(0) = xe^x.$$

• Pour  $x > 0$ , son expression est donc

$$F_2(x) - F_2(0) = -(x + 2)e^{-x} + 2.$$

Dans la solution supra, l'usage des ostensifs  $\int$  et différentielle est conforme à l'usage préconisé par M1 et M2. En plus, la mobilisation de la notation différentielle comme par exemple  $d(e^{-x})$  permet d'économiser deux fonctions auxiliaires  $u, v$  dans l'intégration par parties.

Il semble donc y avoir une cohérence institutionnelle entre le savoir à enseigner et les pratiques institutionnelles effectives en ce qui concerne l'usage des ostensifs  $\int$  et différentielle dans le calcul de primitive.

On remarque aussi l'importance du couple (intervalle de définition, fonction primitive) dans les questions posées et dans les solutions attendues. Par exemple, on attend des candidats qu'ils écrivent : la primitive de  $f$  qui s'annule en  $x = 0$  est sur  $]-\infty, 0[$  :  $x \mapsto xe^x$  et sur  $]0, +\infty[$  :  $x \mapsto -(x + 2)e^{-x} + 2$ . On peut penser que cette association attendue entre une primitive et son intervalle de définition marque les pratiques institutionnelles effectives de cette période.

### I.1.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs

Au baccalauréat, le domaine dont on doit calculer l'aire est donné sous deux modes : par des mots ou par un système d'inéquations. Nous en présentons ci-dessous deux exemples extraits d'épreuve du baccalauréat.

**Exemple 1.** (Session normale de 1979, Poitiers, série C)

On suppose désormais que  $a$  est un nombre réel non nul appartenant à  $] -1, 1[$ . On pose

$$g_a(x) = \frac{x+a}{ax+1}$$

pour  $x \in \mathbf{R}$  (sic) et on note  $C_a$  la courbe représentative de  $g_a$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1° Étudier la fonction  $g_a$  et tracer sur le même dessin les deux courbes  $C_{1/2}$  et  $C_{-1/2}$ .

2° Montrer que  $C_a$  et  $C_{-a}$  sont isométriques.

3° Trouver un réel  $b$  tel que

$$\frac{x+a}{ax+1} = \frac{1}{a} + \frac{b}{ax+1}$$

pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$  (sic).

4° Calculer l'aire géométrique de la partie du plan délimitée par  $C_a$  et  $C_{-a}$ .

**Exemple 2** (Session normale de 1979, Nancy-Metz, série C)

Pour tout  $x$  réel strictement positif, on pose

$$f(x) = x - 1 - \text{Log } x,$$

où la notation  $\text{Log } x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ .

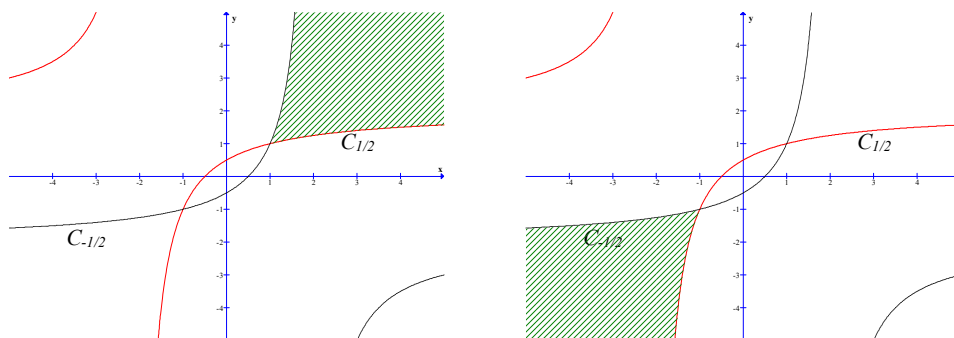
1° Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé  $Oxy$ , en précisant notamment les branches infinies.

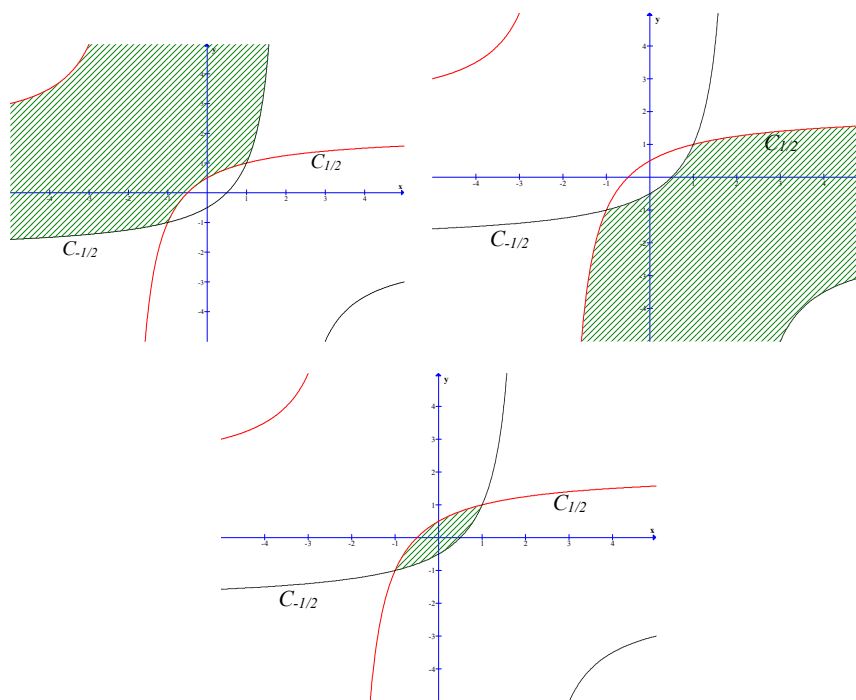
2° Soit  $h$  un nombre réel donné tel que  $0 < h \leq 1$ .

Calculer l'aire  $A(h)$  du domaine  $D_h$  formé des points dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient les inégalités

$$h \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x).$$

Le domaine dont on doit calculer l'aire dans le premier exemple est institutionnellement unique, mais ne l'est pas mathématiquement. Les illustrations ci-dessous, analogues à celles des chapitres A1 et A2, donnent cinq domaines mathématiquement possibles, mais seul le dernier est institutionnellement attendu.





Au contraire, dans le second exercice, il faut savoir associer à un système d'inéquations l'intégrale  $\int_h^1 f(x)dx$  dont on nous dit que c'est une aire, en évitant une lecture graphique de la surface.

Les deux exercices supra s'opposent : le premier s'appuie sur un système complexe de trois règles, non enseignées explicitement, concernant le graphique (contrat institutionnel, voir chapitres A1, A2, A3), le second sur deux règles implicites « simples » de mise en correspondance entre un système d'inéquations et l'écriture d'une intégrale « définie » (contrat institutionnel, voir chapitre A2).

Sur 11 calculs d'aire proposés au baccalauréat E de 1979, tous les domaines sont définis par des systèmes d'inéquations. Sur les 7 calculs d'aire proposés au baccalauréat C de la même année, le nombre de domaines analogues est 2. (Voir tableau 22 ci-après)

La définition d'une surface plane par un système d'inéquations dans les épreuves du baccalauréat ne serait-elle pas une première tentative de l'institution pour imposer dans les pratiques effectives, l'évitement du recours à des règles graphiques implicites et complexes pour déterminer l'unique surface dont on doit calculer l'aire ?



Série C		Série E	
Nombre de sujets étudiés : <b>24</b>		Nombre de sujets étudiés : <b>24</b>	
Nombre de sujets proposant un calcul d'aire : <b>7</b>		Nombre de sujets proposant un calcul d'aire : <b>11</b>	
Définition par des mots : <b>5</b> sujets (Corse, Limoges, Lyon, Nice, Poitiers)	Définition par système d'inéquations : <b>2</b> sujets (Nancy-Metz, Toulouse)	Définition par des mots : <b>0</b> sujets	Définition par système d'inéquations : <b>11</b> sujets (Aix-en-Provence, Besançon, Corse, Lille, Montpellier, Nancy- Metz, Nice, Reims, Rouen, Strasbourg, Toulouse)

**Tableau 22.** Définition de la surface dont on doit calculer l'aire dans les épreuves du baccalauréat en France (Session normale de 1979, séries C, E)

Les autres types de tâches du *calcul d'aire* ou d'autres grandeurs sont cohérents aux types de tâches analysés dans M1 et M2.

Par rapport à T6, on peut demander dans les épreuves soit d'encadrer numériquement une intégrale soit d'écrire une relation de récurrence.

#### I.1.4. Conclusion pour la période 1970 – 1980

L'étude des épreuves du Baccalauréat durant cette période montre une cohérence avec l'OM à enseigner par les types de tâches proposés et les solutions attendues en ce qui concerne le calcul de primitive et le calcul d'aire.

Cependant apparaît dans les épreuves une règle de justification de l'intégrabilité d'une fonction par sa continuité sur l'intervalle d'intégration, absente des manuels M1, M2 : on peut en déduire que cette règle est effectivement enseignée et fait vivre modestement dans l'OM effectivement enseignée une composante pratique de la question de l'intégrabilité (OM1).

De plus, dans le calcul d'aire (d'une surface), l'épreuve du baccalauréat atteste pour la terminale C de deux modes d'écriture de l'intégrale définie : l'une recourant à une lecture graphique de la surface après une étude « classique » de la fonction à intégrer, l'autre évitant cette lecture graphique. Nous en déduisons que ces deux modes doivent être présents dans les pratiques effectives.

#### I.2. Période 1980 – 2002

Nous rappelons ici les types de tâches présents dans les manuels analysés M3, M4, M5 de la période et précisons en italique les changements par rapport à la période précédente :

**T3.** Déterminer les primitives d'une fonction (*disparition de l'ostensif*)

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

**T6.** Établir (ou démontrer) une égalité ou inégalité entre deux intégrales définies

**T7.** *Calculer approximativement une intégrale*

**T8.** Calculer une grandeur autre que l'aire

et les types de tâches absents :

**T1.** Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

**T2.** Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale

**T4.** Établir (ou démontrer) une relation entre deux intégrales indéfinies (disparition)

Nous allons étudier les modifications, si elles existent, de ces types de tâches au baccalauréat. Notons que durant cette période est mise en place une épreuve nationale.

### I.2.1. Existence de l'intégrale

L'intégrale étant définie pour les fonctions continues sur un intervalle fermé, borné par la formule de Newton – Leibniz, le problème de l'intégrabilité n'est pas posé dans les manuels.

La justification de l'existence de l'intégrale disparaît aussi du baccalauréat.

### I.2.2. Calcul de primitive

Dans les manuels analysés, le calcul de primitive est proposé en l'absence de l'ostensif  $\int$ , et résolu par primitivation. L'intégration par parties n'y intervient pas. En revanche, le calcul de la primitive s'annulant en un point donné est institutionnellement attaché à l'intégrale dépendant de la borne supérieure, qui permet de mobiliser l'ostensif  $\int$  et éventuellement l'intégration par parties.

Dans les sujets du baccalauréat, le calcul de primitive n'apparaît pas explicitement comme un type de tâches « indépendant ». Étant identifié institutionnellement à la primitivation, il intervient implicitement dans le calcul d'intégrale et dans la résolution d'équations différentielles comme une technique. Nous présentons ci-dessous deux exemples, le premier concerne la mise en œuvre du calcul de primitive dans le calcul d'une intégrale, le second dans la résolution d'une équation différentielle.

#### Exemple 1 (Session de remplacement, 1990)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  et la fonction  $g$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ .

1° Calculer  $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ .

#### Solution attendue

Posant  $u(x) = 1 + x^2$ , on a  $u'(x) = 2x$  et  $f(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$ . Une primitive de  $f$  est donc

$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ . Finalement  $I_1 = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ .

#### Exemple 2 (D'après problème Nouvelle-Calédonie, 1992)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$ , telle que  $f(0) = \ln(2)$ , et soit  $g$  la fonction définie par l'égalité

$$f(x) = e^{2x}g(x).$$

a) Calculer  $g(0)$ .

b) Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $g'(x)$  et de  $g(x)$ .

c) Montrer que  $f$  est solution de (E)  $[y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}]$  si, et seulement si

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

d) En déduire l'expression de  $g(x)$ , puis celle de  $f(x)$  de telle sorte que  $f$  soit solution de (E).

**Solution attendue**

a)  $g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = \ln 2$

b)  $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$

c)  $f$  est solution de (E) si et seulement si

$$f'(x) - 2f(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow 2f(x) + e^{2x}g'(x) - 2f(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow e^{2x}g'(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

d)  $g$  est la primitive de  $x \mapsto \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$  vérifiant  $g(0) = \ln 2$ . Alors  $g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + C$  et  $\ln 2 + C = \ln 2$ . Donc  $C = 0$  et  $g(x) = \ln(1 + e^{-2x})$ . Finalement,  
 $f(x) = e^{2x}g(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$ .

### I.2.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs

Dans les sujets du baccalauréat, on continue à définir la surface dont on doit calculer l'aire par deux modes : par des mots ou par un système d'inéquations. Quand on recourt au premier mode, la surface dont on doit calculer l'aire est « simplifiée » graphiquement : elle est toujours délimitée par deux droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) et par deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  représentatives respectivement des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  telles que le signe de  $f_1(x) - f_2(x)$  ne change pas sur  $[a, b]$ .

Cela se voit clairement dans les quatre derniers sujets nationaux de la période, de 1999 à 2002. Nous donnons ci-dessous l'exemple du sujet 2002.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}]$ . On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , (unité graphique 2 cm). [...]

#### Partie A

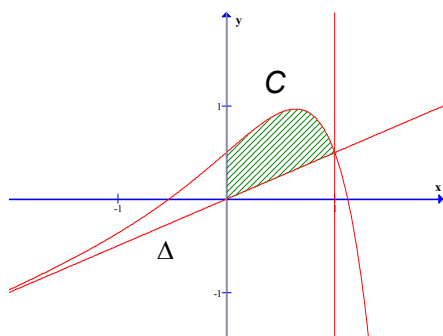
1.b. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à  $C$ . Étudier la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ . [...]

4. Étudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation. [...]

#### Partie C

1. Construire la courbe  $C$  de la partie A sur la feuille annexe.

2. Calculer l'aire  $\mathcal{A}$ , en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan délimité par la courbe  $C$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$  (on pourra utiliser une intégration par parties).



**Solution attendue.** (Proposée par Jean-Pierre Prigent sur le site de l'académie de Poitiers)

Sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $f$  est dérivable et positive donc l'aire du domaine délimité par la courbe  $C$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = 1$  est donnée, en unités d'aire, par  $\int_0^1 \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] dx$  et en  $\text{cm}^2$  par  $\mathcal{A} = 4 \int_0^1 \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] dx$ .

Sur quoi peut-on s'appuyer pour écrire l'intégrale *supra* ? Les valeurs 0, 1 dans les équations  $x = 0$ ,  $x = 1$  donnent les bornes d'intégration. Pour écrire la fonction à intégrer, on a deux possibilités : soit on détermine les positions relatives de  $C$  et  $\Delta$  sur  $[0, 1]$  en recourant au graphique, soit on étudie algébriquement le signe de  $f(x) - \frac{1}{2}x$  sur  $[0, 1]$  sans considérer le graphique.

Nous pouvons en déduire que les pratiques institutionnelles effectives de l'époque avaient à mettre en place *l'une des deux règles supra pour écrire l'intégrale servant au calcul d'aire*.

Le calcul approché d'intégrale par des méthodes numériques, tâches nouvellement introduites par la réforme, est absent du baccalauréat. On peut en déduire que ce calcul approché reste marginal, sinon absent, dans les pratiques institutionnelles<sup>16</sup>. Cependant on pressent une intention institutionnelle de l'introduire. Qu'en sera-t-il dans la période suivante ?

Par contre, l'encadrement numérique d'une intégrale, présent par T6 dans la période précédente, reste la seule trace du calcul approché. L'écriture d'une relation de récurrence reste présente dans les épreuves.

Les autres types de tâches sont identiques à ceux du baccalauréat de la période précédente.

#### **I.2.4. Conclusion pour la période 1980 – 2002**

La disparition de toute trace de l'étude de l'existence d'une intégrale (intégrabilité) découle du changement de la définition de l'intégrale. On peut en déduire que la question de l'intégrabilité d'une fonction disparaît aussi des pratiques institutionnelles.

L'absence de l'ostensif  $\int$  efface l'intégration par parties du calcul de primitive. La primitivation et le calcul de primitive deviennent alors un amalgame qui a un statut de technique pour le calcul d'une intégrale ou pour la résolution d'une équation différentielle. Dans le calcul d'aire, la surface plane dont on doit calculer l'aire est simplifiée par rapport à la période précédente.

La seule trace du calcul approché est l'encadrement numérique d'une intégrale.

### **I.3. Période 2002 – 2006**

Le sujet de mathématiques du baccalauréat S de 2003 provoque de nombreuses réactions comme nous l'avons commenté au début de ce chapitre. Durant l'année scolaire 2003 – 2004, le groupe des mathématiques de l'inspection générale de l'éducation nationale publie une batterie d'exercices pouvant servir d'exemples pour la confection de sujets des baccalauréats S et ES. En 2004 – 2005, il continue ce travail destiné à contribuer à l'évolution des sujets et compléter la banque d'exercices. Cependant il déclare :

Tout d'abord une remarque de bon sens : pour une part importante, les exercices posés au baccalauréat des années précédentes (de 1995 à 2003) sont conformes à la nouvelle maquette [...] et ont un contenu conformes aux nouveaux programmes.

---

<sup>16</sup> Le calcul approché n'est présent que dans la partie *Travaux pratiques* par exemple, dans *Mathématiques Terminales C, E*, collection *Transmath*, éditions Nathan 1989. Il est absent dans *Mathématiques, Terminales C, E*, éditions Didier 1992.

Depuis la session 2005, des questions de cours, identifiées comme « restitution organisée de connaissances » apparaissent dans le sujet du baccalauréat S.

Pour notre analyse et de façon analogue aux périodes précédentes, nous rappelons ici les types de tâches présents dans le manuel analysé de la période (M6), et précisons en italique les changements (minimes) par rapport à la période précédente :

**T3.** Déterminer les primitives d'une fonction (l'ostensif  $\int$  continue à être absent)

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

**T6.** Établir (ou démontrer) une égalité ou inégalité entre deux intégrales définies

**T7.** Calculer approximativement une intégrale (*par encadrement numérique*)

**T8.** Calculer une grandeur autre que l'aire

et les types de tâches absents :

**T1.** Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

**T2.** Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale

**T4.** Établir (ou démontrer) une relation entre deux intégrales indéfinies

### **I.3.1. Existence de l'intégrale**

Malgré la nouvelle définition de l'intégrale par la limite commune de deux suites adjacentes pour les fonctions continues sur un intervalle fermé, borné, le manuel M6 ne propose aucun exercice sur l'existence de l'intégrale.

La justification de l'existence de l'intégrale est absente des sujets du baccalauréat de cette période, ainsi que dans la batterie d'exercices. Nous pouvons en déduire que les pratiques institutionnelles effectives de cette période ne mettent pas en place de façon stable d'exigence de justification de l'existence d'une intégrale et que celle-ci reste à la charge de l'enseignant ou de l'institution.

### **I.3.2. Calcul de primitive**

Le calcul de primitive explicitement proposé apparaît uniquement dans le sujet de septembre 2004 pour préparer une intégration par parties. Dans les autres sujets, il devient une technique au service du calcul d'intégrale et de la résolution d'équations différentielles plutôt qu'un type de tâches explicite.

Le type de tâches T4 (relation entre deux intégrales) est absent du M6 comme des sujets du baccalauréat.

Nous notons une forte présence des équations différentielles au service de la modélisation des phénomènes naturels et scientifiques. La résolution de ces équations nécessite l'usage de l'intégrale comme outil. Le calcul de primitive continue à y intervenir de façon implicite.

Le statut du calcul de primitive de cette période est quasiment identique à celui de la période précédente.

### **I.3.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs**

Durant cette période, le calcul d'aire n'apparaît plus dans aucun sujet. En revanche, l'interprétation géométrique d'une intégrale est présente dans deux sujets : septembre 2003

et juin 2006. Le calcul d'autres grandeurs que l'aire est totalement absent. Cela révèle l'intention de renforcer le lien bidirectionnel entre intégrale et aire d'une part et atteste l'importance accordée au calcul d'aire d'autre part. Malgré l'absence momentanée du calcul d'aire dans les sujets, nous supposons que l'évolution de la définition de la surface plane dont on doit calculer l'aire continue à se poursuivre dans les pratiques institutionnelles et stables de l'enseignant.

Le calcul de  $\int_a^b f(x)dx$  (détaché du calcul d'aire), explicitement proposé comme type de tâches « indépendant », apparaît dans plusieurs sujets (septembre 2003, septembre 2004, septembre 2005, juin 2006). Il est aussi présent, mais de façon implicite, dans la résolution d'équations différentielles (juin 2003) et dans l'étude des probabilités des variables aléatoires continues (juin 2004, septembre 2005).

Le type de tâches T6 (égalité ou inégalité entre deux intégrales définies) a deux variantes : démonstration d'une relation de récurrence (juin 2006), démonstration d'une inégalité (septembre 2004). La seconde variante est attachée à l'étude de suites (septembre 2004, juin 2006). Le calcul approché d'une intégrale, déduit de la seconde variante de T6, est momentanément absent.

### **I.3.4. Conclusion pour la période 2002 – 2006**

Cette période ressemble à la précédente par l'absence de l'étude de l'intégrabilité et le statut du calcul de primitive. Sa particularité est marquée par l'absence du calcul approché et celui des grandeurs, y compris l'aire. Par contre, le calcul d'intégrale et l'établissement d'égalités ou d'inégalités d'intégrales sont fortement présents dans les épreuves et mis en relation avec l'étude de suites, la résolution d'équations différentielles et le calcul de probabilité.

### **I.4. Conclusion pour le baccalauréat en France**

L'étude des sujets du baccalauréat durant trois périodes (dont la dernière est en continuation) montre une cohérence avec le savoir à enseigner par les types de tâches proposés et les solutions attendues en ce qui concerne le calcul de primitive et le calcul d'aire.

La justification de l'intégrabilité par la continuité dans des sujets de la première période fait vivre modestement dans le savoir effectivement enseigné une composante pratique de la question de l'intégrabilité. Elle est absente dans les deux dernières périodes. Nous pouvons en déduire que la question de l'intégrabilité d'une fonction disparaît aussi des pratiques institutionnelles.

L'absence de l'ostensif  $\int$  fait disparaître l'intégration par parties du calcul de primitive dans les deux dernières périodes. La primitivation et le calcul de primitive deviennent alors un amalgame qui a un statut de technique pour le calcul d'une intégrale ou pour la résolution d'une équation différentielle.

Dans le calcul d'aire (d'une surface) pour la série S, avec une « simplification » de la surface plane dans la dernière période, deux modes d'écriture de l'intégrale requise restent concurrents : l'un recourant à une lecture graphique de la surface après une étude « classique » de la fonction à intégrer, l'autre évitant cette lecture graphique. Nous en déduisons que ces deux modes doivent être présents dans les pratiques effectives.

La seule trace du calcul approché est l'encadrement numérique d'une intégrale.

Le calcul d'intégrale et l'établissement d'égalités ou d'inégalités d'intégrales (T5 et T6) interviennent largement au travers de l'étude de suites, d'équations différentielles, et des probabilités.

## II. Baccalauréat au Vietnam

Contrairement à la France, le baccalauréat au Vietnam sanctionne la fin des études secondaires, mais n'ouvre pas l'accès à l'enseignement supérieur.

Le baccalauréat se compose de 6 épreuves écrites. Variant d'année en année, la liste des 6 épreuves du baccalauréat est annoncée fin mars, plus de deux mois avant l'examen ayant lieu début juin. Trois épreuves y sont toujours présentes : littérature, mathématiques, et langue étrangère. Trois autres épreuves varient parmi les cinq disciplines suivantes : histoire, géographie, physique, chimie, et biologie.

Bien qu'aucun coefficient ne soit appliqué, les mathématiques donnent lieu à une épreuve importante par leur présence permanente au baccalauréat ainsi que par la durée de l'épreuve.

Le sujet des mathématiques touche principalement le programme de la classe 12.

3 épreuves permanentes		Les disciplines concernant 3 épreuves non permanentes	
Littérature	150 minutes	Histoire	90 minutes
Mathématiques	150 minutes	Géographie	90 minutes
Langue étrangère	90 minutes	Physique	90 minutes
		Chimie	90 minutes
		Biologie	90 minutes

Tableau 23. Épreuves du baccalauréat vietnamien

### II.1. Période 1975 – 1990

Nous rappelons ici les types de tâches présents dans le manuel analysé :

**T3.** Calculer  $\int f(x)dx$  (ou déterminer les primitives d'une fonction)

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

**T6.** Établir (ou démontrer) une égalité ou inégalité entre deux intégrales définies

**T8.** Calculer une grandeur autre que l'aire

et les types de tâches absents :

**T1.** Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

**T2.** Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale

**T4.** Établir (ou démontrer) une relation entre deux intégrales indéfinies

**T7.** Calculer approximativement une intégrale

### II.1.1. Existence de l'intégrale

En 1981, dans un texte officiel sur la révision pour le baccalauréat, le ministère de l'Éducation nationale prescrit l'étude de l'intégrabilité comme suit :

[L'élève doit] maîtriser les conditions nécessaire et suffisante enseignées de l'intégrabilité, et les propriétés de l'intégrale définie.

et joint un exercice servant de modèle :

Soit  $f$  la fonction déterminée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{1-x}} & (x \neq 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

$f$  est-elle intégrable sur  $[0, 1]$  ?  $f$  est-elle intégrable sur  $[1, 2]$  ?

*Solution attendue.*

•  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$ . Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{1-x}} = +\infty$ . La fonction  $f$  n'est donc pas bornée sur  $[0, 1]$ . Elle n'est *pas intégrable* sur cet intervalle.

•  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty$ . Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{1-x}} = 0 = f(1)$ . La fonction  $f$  est continue à droite en 1 et donc continue sur  $[1, 2]$ . Elle est *intégrable* sur cet intervalle.

La fonction à étudier est donnée par deux expressions algébriques. L'étude de son intégrabilité sur chacun de deux intervalles donnés nécessite, entre autres, un calcul de limite et les notions de « fonction bornée », « fonction continue » (et non « continue » comme en France dans la même période). La fonction est intégrable sur un intervalle, mais ne l'est pas sur un autre. Ce résultat montre que l'intégrabilité dépend non seulement de la fonction, mais encore de l'intervalle.

Voici l'intention de l'institution, mais dans les faits, l'étude de l'intégrabilité n'est jamais présente dans les épreuves du baccalauréat de cette période. Apparaîtra-t-elle dans la période suivante ?

### II.1.2. Calcul de primitive

Le texte ministériel ci-après décrit les exigences institutionnelles du calcul de primitives au baccalauréat comme suit :

- Maîtriser les propriétés de l'intégrale indéfinie.
- Savoir par cœur et utiliser aisément le tableau des intégrales indéfinies usuelles (incluant les formules complétées).
- Maîtriser à fond les deux méthodes d'intégration. Les utiliser pour résoudre tous les exercices du manuel.

Cela légitime encore une fois :

- le statut d'élément technologique du tableau des intégrales indéfinies usuelles, surtout en présence de l'ostensif  $\int$  ;
- la stabilité des exercices du manuel.

Attaché à l'ostensif  $\int$  et donc au changement de variable et à l'intégration par parties, le calcul de primitive du baccalauréat est identique à celui du manuel. L'intégrale indéfinie



devient une intégrale définie sans bornes, et vice versa l'intégrale définie devient une intégrale indéfinie avec bornes.

### II.1.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs

Le type de tâches T5. Calculer  $\int_a^b f(x)dx$  (incluant le calcul d'aire) apparaît constamment au baccalauréat.

Les intégrales à calculer (n'étant pas présentées comme des aires) sont analogues aux intégrales proposées dans le manuel de la période.

Le calcul d'aire est toujours proposé après l'étude de l'un de quatre types de fonctions suivants : fonctions du troisième degré, fonctions bicarrées, fonctions homographiques, et fonctions  $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ . Dans ce calcul, la classe de fonctions à intégrer se restreint considérablement, mais les règles du contrat institutionnel fonctionne et nécessite fortement des connaissances en dehors de l'intégrale. C'est par ces règles que le calcul d'aire n'est pas identique au calcul d'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ . Nous avons effectivement deux types de tâches différents :

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$  (excluant le calcul d'aire)

**T'5.** Calculer l'aire délimitée par des courbes

Pour le type de tâches T8. Calculer une grandeur autre que l'aire (longueur, volume, centre de gravité, moment d'inertie, travail d'une force, etc.), seul le calcul de volume d'un corps de révolution est présent quelquefois au baccalauréat.

Les types de tâches suivants sont absents du baccalauréat :

**T6.** Établir (ou démontrer) une égalité ou inégalité entre deux intégrales définies

**T7.** Calculer approximativement une intégrale

Ainsi, le calcul d'aire et d'autres grandeurs au baccalauréat consiste en T5, T'5 et T'8 (calculer le volume d'un corps de révolution).

### II.1.4. Conclusion pour la période 1975 - 1990

Malgré la tentative de l'institution, l'étude de l'intégrabilité est absente des épreuves du baccalauréat.

Le calcul de primitive et le calcul d'intégrale existent, et se concentrent sur le calcul exact. Ni le calcul approché, ni l'encadrement fonctionnel ou numérique n'apparaissent.

Le calcul d'aire est toujours proposé dans le cadre d'une étude classique de fonction. La liste des courbes délimitant la surface plane est très limitée.

## II.2. Période 1990 – 2000

Nous rappelons ici les types de tâches présents dans le manuel analysé, et précisons en italique le changement par rapport à la période précédente :

**T'3.** Calculer les primitives des fonctions *simples* (*disparition de l'ostensif*)

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

**T'6.** Démontrer une *inégalité* entre deux intégrales

**T8.** Calculer une grandeur autre que l'aire

et les types de tâches absents :

**T1.** Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

**T2.** Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale

**T4.** Établir (ou démontrer) une relation entre deux intégrales indéfinies

**T7.** Calculer approximativement une intégrale

### **II.2.1. Existence de l'intégrale**

L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé, borné étant définie par la formule de Newton – Leibniz, le manuel ne propose aucun exercice sur l'intégrabilité, voire sur la justification de l'existence de l'intégrale.

De même, ce type de tâches est absent du baccalauréat.

Nous pouvons en déduire que la vérification de la continuité de la fonction à intégrer est absente des pratiques effectives.

### **II.2.2. Calcul de primitive**

En l'absence de l'ostensif  $\int$  et des méthodes de calcul, le calcul de primitive dans le manuel n'est proposé que pour des fonctions simples, et effectué par la déduction directe du tableau des primitives usuelles et de la linéarité.

Au baccalauréat, ce calcul n'est jamais explicitement proposé. Il intervient implicitement dans le calcul d'intégrale, comme technique, à travers la formule de Newton - Leibniz.

### **II.2.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs**

Au baccalauréat, le calcul d'aire est très présent, succédant toujours à une étude classique de fonction. La détermination de la surface doit toujours se faire dans le respect des règles du contrat institutionnel sur la lecture du graphique et la résolution d'inéquations.

Le calcul de volume se restreint à celui d'un corps de révolution. Il apparaît moins que le calcul d'aire.

Le calcul d'intégrale est identique à celui de la période précédente.

La démonstration d'un encadrement numérique d'une inégalité est absente du baccalauréat.

### **II.2.4. Conclusion pour la période 1990 - 2000**

Malgré le changement de la définition de l'intégrale, la justification de l'existence de l'intégrale continue à s'absenter dans les épreuves du baccalauréat de cette période.

La disparition de l'ostensif et des méthodes d'intégration associée efface le calcul de primitive du baccalauréat. Celui-ci intervient implicitement, à travers la formule de Newton – Leibniz, dans le calcul d'intégrale comme une technique, ou plus précisément,

comme une application directe du tableau des primitives usuelles et de la linéarité, car la primitivation n'est pas enseignée.

Le calcul d'aire ou d'autres grandeurs au baccalauréat est identique à celui du manuel.

L'étude des sujets du baccalauréat de cette période montre une cohérence avec l'OM à enseigner par les types de tâches proposés et les solutions attendues.

### II.3. Période 2000 – 2006

De façon analogue aux périodes précédentes, nous rappelons ici les types de tâches présents dans le manuel analysé et précisons en italique le changement par rapport à la période précédente :

**T3.** Calculer  $\int f(x)dx$  (*réapparition de l'ostensif*)

**T5.** Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

**T'6.** Démontrer un encadrement numérique de l'intégrale

**T8.** Calculer une grandeur autre que l'aire

et les types de tâches absents :

**T1.** Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

**T2.** Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale

**T4.** Établir (ou démontrer) une relation entre deux intégrales indéfinies

**T7.** Calculer approximativement une intégrale

#### II.3.1. Existence de l'intégrale

Par définition, l'existence de l'intégrale est institutionnellement identique à la continuité sur l'intervalle d'intégration. Dans le manuel comme au baccalauréat, la justification de cette existence est absente. Nous pouvons en déduire qu'elle ne fait pas partie des exigences stables dans les pratiques effectives.

#### II.3.2. Calcul de primitive

Malgré la réapparition de l'ostensif  $\int$ , le calcul de primitive n'apparaît pas explicitement, sauf dans l'exercice suivant de la session 2003 :

##### Exercice 2.1.

Calculer la primitive  $F(x)$  de la fonction  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$  en sachant que  $F(1) = \frac{1}{3}$ .

##### Solution attendue.

$F(x)$  est de la forme

$$F(x) = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{(x+1)^3 - 2}{(x+1)^2} dx = \int \left( x+1 - \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C$$

Puisque  $F(1) = \frac{1}{3}$ , on a  $\frac{1}{2} + 1 + 1 + C = \frac{1}{3}$ . Soit  $C = -\frac{13}{6}$ . Donc  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$ .

L'enjeu de cet exercice n'est pas l'usage de l'intégrale dépendant de la borne supérieure (comme cela pourrait être le cas en France). Le choix de  $F(1) = 1/3$  (et non de  $F(1) = 0$ ) bloque mathématiquement l'usage de l'intégrale dépendant de la borne supérieure (qui n'est efficace que pour la primitive *s'annulant* en un point donné).

La solution attendue montre que l'étude préalable suivante n'est pas exigée et ne fait donc pas partie des pratiques institutionnelles :

La fonction  $f$  n'est pas définie en  $x = -1$  et sa limite en cette valeur à droite ou à gauche est  $-\infty$  : elle est donc non bornée en  $-1$ . Elle ne possède des primitives que sur  $]-\infty, -1[$  ou sur  $]-1, +\infty[$ . Puisque  $1$  appartient à  $]-1, +\infty[$ , nous avons

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6} \text{ sur } ]-1, +\infty[.$$

Par une rupture du contrat aux fonctions « ordinaires », la solution attendue n'associe pas aux fonctions « primitives »  $F$  un intervalle de définition (sur lequel elles sont continues).

La résolution de l'exercice repose sur l'usage de la valence instrumentale de l'ostensif  $\int$  pour donner les primitives d'une fonction sous la forme standard  $F(x) + C$ , puis déterminer la constante par la résolution d'une équation algébrique.

Dans les autres sujets de la période, le calcul de primitive n'est pas proposé explicitement. À travers la formule de Newton – Leibniz, il intervient implicitement dans le calcul d'intégrale (sessions 2001, 2002, 2004, 2005, 2006).

### II.3.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs

Le calcul d'une aire délimitée par des courbes, sans l'étude préalable des fonctions, apparaît à trois reprises (2002, 2003, 2006) alors qu'il était absent des périodes précédentes. Ce type d'exercices est présent même si un calcul d'aire « classique<sup>17</sup> » peut être proposé parallèlement comme dans le sujet 2002.

Nous en présentons ci-dessous un exemple et sa solution proposée par le ministère de l'Éducation et de la Formation :

#### Exercice 2.1. (Session 2006)

Calculer l'aire de la surface plane délimitée par la courbe représentative de la fonction  $y = e^x$  et les droites d'équations  $y = 2$ ,  $x = 1$ .

#### Solution attendue

Résoudre l'équation :  $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

L'aire de la surface plane à chercher :

$$S = \int_{\ln 2}^1 |e^x - 2| dx = \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1 = (e - 2) - (2 - 2\ln 2) = e + 2\ln 2 - 4 \text{ (u.a)}$$

Dans la solution attendue, aucune étude préalable de fonction n'est demandée, ni par conséquent de tracé de courbe représentative. Par conséquent, les règles du contrat institutionnel de détermination d'une surface unique basée sur le graphique, n'interviennent plus dans de tels exercices. La fonction à intégrer étant donnée, la réponse attendue s'appuie sur une règle de correspondance simple entre deux valeurs de  $x$  et l'écriture d'une intégrale définie. La présence de tels exercices ne serait-elle pas une tentative de l'institution pour simplifier la production de la solution attendue dans le calcul d'aire ?

Par rapport à cinq apparitions du calcul d'aire dans les sujets, le calcul de volume d'un corps de révolution apparaît uniquement dans la session de 2004. Ceci montre l'importance du calcul d'aire dans l'épreuve du baccalauréat.

<sup>17</sup> C'est-à-dire le calcul d'aire effectué après une étude préalable d'une ou des fonctions à intégrer.

L'encadrement numérique d'une intégrale est totalement absent des sujets de la période.

#### **II.3.4. Conclusion pour la période 2000 – 2006**

La justification de l'existence de l'intégrale continue à être absent des épreuves du baccalauréat.

Sauf un exercice de l'épreuve 2003, le calcul de primitive n'est pas explicitement proposé. Intervenant implicitement dans le calcul d'intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz, il devient une technique plutôt qu'un type de tâches explicite.

L'apparition du calcul d'aire hors de l'étude préalable des fonctions serait une tentative de l'institution pour simplifier la production de la solution attendue dans le calcul d'aire. L'apparition permanente du calcul d'aire par rapport à celle du calcul de volume montre l'importance institutionnelle du premier.

L'encadrement numérique et le calcul approché d'une intégrale sont absents.

#### **II.4. Conclusion pour le baccalauréat au Vietnam**

Quelque soit la définition de l'intégrale, la justification de l'existence de l'intégrale est absente durant les trois périodes étudiées.

Le calcul de primitive est proposé explicitement dans la première période. Il ne l'est pas dans les deux dernières périodes, malgré la réapparition de l'ostensif  $\int$  dans la troisième période. Il devient une technique au service du calcul d'intégrale. Le calcul de la primitive prenant une valeur donnée en un point donné apparaît une seule fois, et est sans relation avec l'intégrale dépendant de la borne supérieure (pourtant présente dans la partie cours des manuels).

Dans les trois périodes, le calcul d'aire est posé dans les épreuves après une étude classique de fonction et résolu en s'appuyant sur le graphique de la fonction étudiée. Dans la dernière période, le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions est posé parallèlement au calcul d'aire « classique ».

Le calcul d'intégrale ne concerne que le calcul exact. L'encadrement numérique et le calcul approché d'une intégrale sont toujours absents. L'intégrale n'intervient ni dans l'étude des suites, ni dans celle des équations différentielles, ni dans celle des probabilités, contrairement à la France actuellement.

### **III. Concours d'entrée universitaire au Vietnam**

Le baccalauréat n'ouvrant pas l'accès à l'enseignement supérieur, le concours d'entrée universitaire est organisé pour sélectionner les meilleurs candidats, dans la limite de la capacité d'accueil des universités, en considérant leurs scores totaux au concours.

Étant organisé annuellement en juillet, ce concours national se compose de trois épreuves écrites dont la liste dépend de quatre sections principales<sup>18</sup>.

Section A : mathématiques, physique, chimie

Section B : mathématiques, biologie, chimie

Section C : littérature, histoire, géologie

---

<sup>18</sup> Nous ne comptons pas les sections artistiques ou sportives, destinées à des établissements particuliers.

Section D : littérature, mathématiques, langue étrangère. Cette section comprend quatre sous-sections D1, D2, D3, D4, selon la langue étrangère présente au concours : anglais, français, russe ou chinois.

Le taux de réussite est maintenu de façon constante à près de 20 %.

*Avant 2002*, chacune des universités désignait indépendamment une commission éphémère pour la rédaction des sujets de concours.

Rappelons notre hypothèse à propos du concours : *les types de tâches et les solutions attendues dans le concours correspondent à des pratiques effectives et stables, propres ici aux universités concernées.*

*En 2002* s'opère une rupture : les sujets de concours deviennent nationaux (donc un seul sujet par section pour toutes les universités). De plus, ils sont rédigés par une commission permanente ministérielle qui s'appuie sur une connaissance approfondie de l'EMS.

L'hypothèse précédente n'est donc plus valable. La question est de savoir comment se particularise le concours par rapport au baccalauréat : on peut prévoir que *certain types de tâches et les solutions attendues dans le concours ne correspondent plus à des pratiques effectives et stables de l'EMS vietnamien, tout en n'étant pas absentes.* Nous allons chercher à préciser et vérifier cette hypothèse.

### III.1. Période 1975 – 1990

#### III.1.1. Existence de l'intégrale en relation avec calcul de limite

L'existence d'une intégrale n'apparaît pas comme une fin en soi dans le concours. Mais elle peut être attendue pour justifier l'existence par exemple d'une limite de suite représentant une somme de Riemann. Ce type de tâches absent du manuel et du baccalauréat est un type de tâches classique à l'université.

A titre d'exemple, examinons l'exercice suivant :

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e \right) \quad (\text{Concours 1987})$$

*Solution attendue.*

Considérer la fonction  $f$  déterminée par  $f(x) = e^x$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ .

On subdivise régulièrement  $[0, 1]$  par les points  $x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Sur chacun des sous-intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$ , on choisit  $\xi_i = x_i$ .

On établit la somme de Riemann de  $f$  sur  $[0, 1]$  relative à la subdivision et aux choix des  $\xi_i$ .

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e \right)$$

$f$  étant continue sur  $[0, 1]$  et donc intégrable sur cet intervalle, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e$$

Dans la solution supra, c'est l'intégrabilité de  $f$  sur  $[0, 1]$  qui garantit la convergence vers  $\int_0^1 f(x) dx$  de n'importe quelle somme de Riemann de  $f$  sur  $[0, 1]$ . L'étude de l'intégrabilité

n'est pas explicitement demandée dans la consigne, mais elle devient un élément technologique du calcul de limite via une somme de Riemann.

### III.1.2. Calcul de primitive

Dans le concours de cette période, le calcul de primitive est souvent proposé sous une des deux formes suivantes : *établir (ou démontrer) une relation de récurrence* ou *calculer l'intégrale indéfinie d'une fonction du type  $R(\sin x, \cos x)$ ,  $R$  étant une fonction rationnelle de deux variables.*

Nous en donnons ci-dessous deux exemples.

#### Exemple 1. (Concours 1988)

Soit  $I_n = \int (a^2 + x^2)^n dx$ . Trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ).

**Solution attendue.**

$$\text{Posant } \begin{cases} u = (a^2 + x^2)^n \\ dv = dx \end{cases}, \text{ on a } \begin{cases} du = 2nx(a^2 + x^2)^{n-1} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I_n = x(a^2 + x^2)^n - 2n \int x^2 (a^2 + x^2)^{n-1} dx = x(a^2 + x^2)^n - 2nI_n + 2na^2 I_{n-1}$$

$$(2n + 1)I_n = x(a^2 + x^2)^n + 2na^2 I_{n-1}$$

#### Exemple 2. (Concours 1988)

Calculer l'intégrale indéfinie  $I = \int \frac{\cos dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ .

**Solution attendue.**

$$I = \int \frac{\cos dx}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - 1} dx = \int \frac{du}{u^3 - 1} \quad \text{où } u = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{u^3 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{Bu + C}{u^2 + u + 1} \Leftrightarrow 1 \equiv (A + B)u^2 + (A - B + C)u + A - C \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{3} \int \frac{u + 2}{u^2 + u + 1} du = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{6} \int \frac{2u + 1}{u^2 + u + 1} du - \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \ln |u| - \frac{1}{6} \ln |u^2 + u + 1| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2u + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{6} \ln |\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

Ce dernier exercice nécessite de coordonner plusieurs savoir-faire couvrant le calcul de primitive enseigné (transformation trigonométrique, changement de variable, décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples et intégration de fonctions rationnelles). C'est par la polyvalence exigée et donc la complexité de la solution attendue que ce type d'exercice apparaît très souvent dans le sujet du concours. Ces attentes à propos de l'intégrale sont celles du début de l'université.

### III.1.3. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs

#### a. Nouvelle signification du changement de variable

Dans certains sujets du concours, le changement de variable devient non pas un outil de calcul (comme il l'est dans EMS) mais un outil de démonstration pour établir une relation entre deux intégrales relativement génériques.

Examinons l'exercice suivant :

**Exercice.** (Concours 1981)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  où  $a + b = \pi$ . Démontrer que

$$\int_a^b xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_a^b f(\sin x)dx.$$

En appliquant ce résultat, calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx, \quad J = \int_0^{\pi} x\sqrt{1 + \sin x} dx.$$

**Solution attendue.**

Posons  $x = \pi - u$ , on a  $dx = -du$  et  $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = b \\ u = a \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(\sin x)dx &= \int_b^a (\pi - u)f(\sin u)(-du) = \int_a^b (\pi - u)f(\sin u)du = \int_a^b (\pi - x)f(\sin x)dx = \\ &= \pi \int_a^b f(\sin x)dx - \int_a^b xf(\sin x)dx \\ \Rightarrow \int_a^b xf(\sin x)dx &= \frac{\pi}{2} \int_a^b f(\sin x)dx \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \int_0^{\pi} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx \quad (\text{car } x \in [0, \pi], \text{ donc } \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2} \text{ positifs}) \\ &= \left[ -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = 4 \end{aligned}$$

Selon l'égalité démontrée, on a

$$J = \frac{\pi}{2} I = 2\pi$$

#### b. Encadrement numérique

La démonstration d'une inégalité intégrale, absente du manuel de cette période, est présente dans des sujets du concours.

**Exercice.** (Concours 1985)

Démontrer que  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq 1 - \frac{1}{e}$ .

**Solution attendue.**

Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ , on a  $x^2 \leq x$ . Donc  $-x^2 \geq -x$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ . Par conséquent :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$



**c. Nouveau statut de l'intégrale dépendant de la borne supérieure**

Comme nous l'avons dit dans l'analyse institutionnelle, l'intégrale n'intervient pas dans la génération de nouvelles fonctions. L'intégrale dépendant de la borne supérieure est bien présente dans la partie cours, mais jamais dans la partie exercices.

Dans le sujet du concours, l'intégrale dépendant de la borne supérieure change de statut pour devenir un outil permettant de générer de nouvelles fonctions. Elle intervient non seulement dans l'étude de fonctions, mais encore dans la résolution d'équations.

Nous en donnons ci-dessous trois exemples :

**Exemple 1. (Concours 1980)**

Étant donnée la fonction  $f$  déterminée sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$ . Calculer  $f'(x)$ .

**Solution attendue.**

En posant  $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$ , on a  $g'(x) = \sqrt{1+x^4}$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ .

Puisque  $f(x) = g(x^2)$ , on a  $f'(x) = 2xg'(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ .

**Solution optimale mais non attendue.**

On note  $F$  une primitive de  $x \mapsto \sqrt{1+x^4}$ . On a  $f(x) = F(x^2) - F(0)$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ .

Il en résulte que  $f'(x) = 2xF'(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ .

**Exemple 2. (Concours 1982)**

Résoudre l'équation  $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$ ,  $x > \sqrt{2}$  en utilisant le changement de variable  $t = \frac{1}{u}$ .

**Solution attendue**

Posant  $t = \frac{1}{u}$ , on a  $dt = -\frac{du}{u^2}$ , et  $\begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2}/2 \\ u = 1/x \end{cases}$

$$\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = -\int_{\sqrt{2}/2}^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u \Big|_{\sqrt{2}/2}^{1/x} = -\arcsin \frac{1}{x} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\arcsin \frac{1}{x} + \frac{\pi}{4}$$

On a l'équation

$$-\arcsin \frac{1}{x} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \arcsin \frac{1}{x} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 > \sqrt{2}.$$

**Exemple 3. (Concours 1982)**

Étant donnée la fonction  $f$  déterminée sur  $\mathbf{R}$  par

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt.$$

Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle  $f$  admet un minimum.

**Solution attendue**

$D = \mathbf{R}$

$$f'(x) = (x-1)(x-2)^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$$

$f'(x)$  est donc du signe de  $x-1$ .  $x-1$  est négatif pour  $x < 1$ , et positif pour  $x > 1$ .  $f$  admet donc un minimum en  $x = 1$ .

Dans le premier et le dernier exercices, l'intégrale dépendant de la borne supérieure est considérée comme une fonction dont on cherche la dérivée.

Dans le deuxième exercice, elle n'est pas considérée comme une fonction. Les valences sémiotique et instrumentale de la borne supérieure  $x$  permettent de calculer l'intégrale (en considérant  $x$  comme une valeur numérique), puis de résoudre l'équation (en considérant  $x$  comme une inconnue).

### III.1.4. Conclusion pour le concours de la période 1975 – 1990

L'écart entre le savoir à enseigner dans le manuel et celui dans le concours est considérable : les types de tâches proposés ne sont pas tous dans le topos de l'élève de la classe 12 de l'EMS.

Les types de tâche et leurs solutions attendues correspondent en fait à des pratiques institutionnelles du début de l'université.

### III.2. Période 1990 – 2000

Dans cette période, les programmes de mathématiques des régions du Sud sont légèrement différents à ceux des régions du Nord. Dans le Sud, comme nous l'avons analysé dans le chapitre A1, l'intégrale est définie par la formule de Newton – Leibniz pour les fonctions continues sur un intervalle fermé, borné. L'ostensif  $\int$  est absent et le calcul de primitive devient un type de tâches provisoire dans le manuel.

Par conséquent, l'étude de l'intégrabilité, le calcul de primitive, et l'intégrale dépendant de la borne supérieure disparaissent du concours qui par là amorce une prise en compte des pratiques institutionnelles de l'EMS.

Apparaissant très peu, le calcul d'aire, une fois proposé, est détaché de l'étude de fonctions.

L'écart avec le baccalauréat se traduit par l'intervention d'une classe de fonctions à intégrer plus riche dans le concours que dans le manuel. Par conséquent, les techniques d'intégration de l'EMS deviennent insuffisantes. Nous en prenons deux exemples (exercices et solutions attendues selon les annales).

#### Concours d'entrée à l'université de pédagogie de Ho Chi Minh – ville. Session 2000.

**Section A.** Calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx, J = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$$

**Solution attendue.**

**Calculer I**

Poser

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -3\}$$

$$\Leftrightarrow A(x+3) + B(x+2) = 4x+11 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x + (3A+2B) = 4x+11 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}$$

On a le système d'équations :

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

Enfinement :

$$I = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int_0^1 \left( \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln|x+2| \Big|_0^1 + \ln|x+3| \Big|_0^1 = \ln \frac{9}{2}$$

**Calculer J**

On a pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left( \frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \end{aligned}$$

Donc :

$$J = \int_0^\pi \cos^4 x dx = \int_0^\pi \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \left[ \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}$$

**Concours d'entrée à l'université de pédagogie de Ho Chi Minh – ville. Session 2000.**

**Section D.** Soit  $n$  un nombre naturel non nul.

a. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 (1+x)^n dx$ .

b. Calculer la somme  $S = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$ .

**Solution attendue.**

a.  $I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

b.  $I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) dx = \left[ C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$   
 $= C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n \Rightarrow S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ .

Dans le premier exercice, le calcul de  $I$  nécessite la décomposition de la fonction à intégrer en éléments simples, ce qui ne fait pas partie des pratiques effectives et stables de la classe 12. La même remarque s'applique, dans le second exercice, pour la reconnaissance de la somme à calculer comme valeur d'une intégrale.

L'écart entre le concours et les attentes institutionnelles de l'EMS diminue au niveau des types de tâches mais pas au niveau des techniques requises.

Cette diminution toute relative marque cependant une amorce de prise en compte de ce qui est enseigné dans EMS. Elle débouche en 2001 sur la création d'un concours national rédigé par une commission ministérielle, connaissant le manuel et le programme.

**III.3. Période 2000 – 2006**

La période est marquée par la formation d'une commission ministérielle se chargeant de la rédaction des sujets de concours depuis 2002. Pour conduire l'analyse de cette partie, nous nous entrerons sur l'étude des 15 sujets nationaux des trois sections A, B, D, sortis de 2002 à 2006.

**III.3.1. Existence de l'intégrale et calcul de primitive**

La justification de l'existence de l'intégrale est absente des 15 sujets.

Le calcul de primitive, proposé comme un type de tâches explicite, ainsi que l'établissement (ou la démonstration) d'une relation de récurrence pour l'intégrale indéfinie le sont aussi. Intervenant implicitement dans le calcul d'intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz, le calcul de primitive devient une technique.

Nous notons ici une cohérence du concours avec EMS et le baccalauréat de la même période.

### III.3.2. Calcul d'intégrale, d'aire et d'autres grandeurs

#### a. Calcul d'intégrale

Ce calcul apparaît de façon constante dans 12 sujets de trois sections (A, B, D) des quatre années récentes (de 2003 à 2006). L'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx \quad (\text{section D, 2005})$$

est « habituelle » à EMS et au baccalauréat, mais les 11 intégrales qui restent ne relèvent pas des pratiques institutionnelles effectives et stables. Parmi elles, nous pouvons en citer une :

$$I_3 = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} \quad (\text{section B, 2006})$$

Cette intégrale nécessite une transformation algébrique, un changement de variable, et une décomposition d'une fraction en éléments simples.

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}.$$

Poser  $t = e^x$ ,  $dt = e^x dx$ ,  $x = \ln 3 \Rightarrow t = 3$ ,  $x = \ln 5 \Rightarrow t = 5$ .

$$I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5 \left( \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt = [\ln|t-2| - \ln|t-1|]_3^5 = \ln \frac{3}{2}.$$

#### b. Calcul d'aire

Parallèlement au calcul d'aire « classique », il existe un calcul d'aire hors de l'étude de fonctions (sections A, B, 2002), comme par exemple :

##### Exemple (Section A, 2002)

Calculer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes d'équations  $y = |x^2 - 4x + 3|$ ,  $y = x + 3$ . (Section A, 2002)

##### Solution de la commission ministérielle.

On voit que l'équation  $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$  a deux solutions  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5$ .

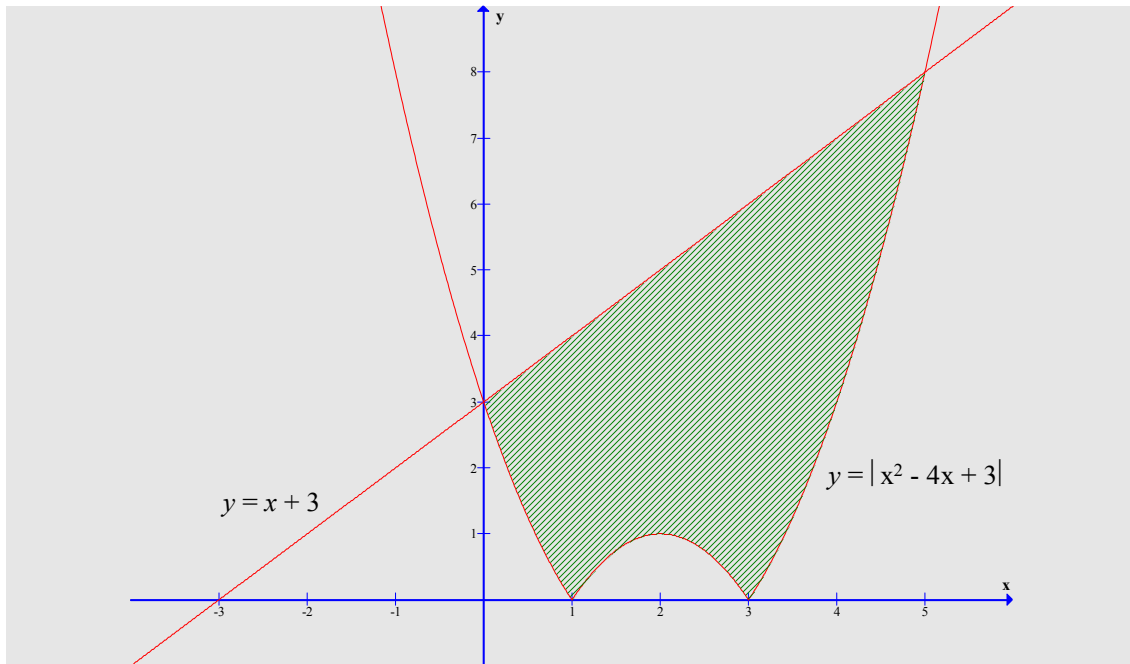
Par ailleurs,  $|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3$  pour tout  $x$  de  $[0, 5]$ .

$$\text{Donc } S = \int_0^5 (x+3 - |x^2 - 4x + 3|) dx = \int_0^1 (x+3 - x^2 + 4x - 3) dx + \int_1^3 (x+3 + x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^5 (x+3 - x^2 + 4x - 3) dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx =$$

$$\left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right]_1^3 + \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_3^5 = \frac{109}{6} \quad (\text{u.a})$$

Si le candidat dessine le graphique suivant, il ne doit pas expliciter l'inégalité  $|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3$  pour tout  $x$  de  $[0, 5]$ .



Ainsi, la solution de la commission ministérielle pécjore l'utilisation du graphique pour préférer la démonstration algébrique de l'inégalité :

$$|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3 \text{ pour tout } x \text{ de } [0, 5].$$

Ceci est conforme à l'évolution du calcul d'aire dans EMS et au baccalauréat.

### c. Autres types de tâches

Les relations de récurrence, l'encadrement numérique, le calcul approché d'une intégrale sont absent des sujets de concours durant cette période, comme ils le sont des pratiques institutionnelles effectives et stables (baccalauréat).

### III.3.3. Conclusion pour le concours de la période 2000 – 2006

Seuls le calcul d'aire et le calcul d'intégrale interviennent dans les sujets de concours de cette période.

Le calcul d'aire dans les épreuves du concours est compatible avec celui présent dans celles du baccalauréat.

Certains calculs d'intégrale et leurs solutions attendues au concours ne correspondent à aucune pratique effective et stable de l'EMS. Mais les éléments des solutions sont présents dans EMS, parfois hors du thème de l'intégrale (comme, par exemple, la démonstration algébrique de l'inégalité  $|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3$  dans la solution ci-dessus), parfois dans la partie cours de ce thème.

Mais c'est dans cette période que l'écart entre le savoir à enseigner dans le manuel et celui évalué au concours est le plus faible.

### III.4. Conclusion pour le concours d'entrée universitaire au Vietnam

Avant 2002, les types de tâches et les solutions attendues dans le concours correspondent à des pratiques effectives et stables, propres aux universités concernées.

À partir de 2002, on vérifie bien que certains calculs d'intégrale (T5) et leurs solutions attendues au concours ne correspondent pas à des pratiques effectives et stables de l'EMS vietnamien. Mais elles ne sont pas absentes : elles peuvent demander à l'élève le recours à des pratiques institutionnelles, algébriques par exemple, hors du thème de l'intégration ou déplacer dans le topos du candidat, ce qui, dans le manuel, est de la responsabilité de l'enseignant.

Cette diffraction du savoir entre les deux épreuves, le baccalauréat et le concours, transforme donc le topos de l'élève qui n'est plus celui de l'EMS. On peut donc s'attendre à l'existence de dispositifs didactiques intermédiaires permettant ce déplacement. En effet au Vietnam, sont organisés des cours supplémentaires préparant au concours.

#### **IV. Conclusion**

Dans la première période en France (1970 – 1980), la justification de l'existence de l'intégrale par la continuité est présente au baccalauréat.

Dans le concours d'entrée universitaire au Vietnam de la période correspondante (1975 – 1990), l'existence de l'intégrale n'est pas explicitement proposée, mais elle peut être attendue pour justifier l'existence d'une limite de suite représentant une somme de Riemann.

Dans l'ensemble des périodes suivantes, la justification de l'existence de l'intégrale est absente des épreuves des baccalauréats des deux pays, ainsi que dans le concours d'entrée à l'université au Vietnam.

Le calcul de primitive est explicitement proposé dans la première période dans les épreuves des baccalauréats des deux pays et dans le concours au Vietnam. En France, dans les deux dernières périodes, le calcul de primitive, en l'absence de l'ostensif  $\int$ , devient une technique (analogue à la primitivation) plutôt qu'un type de tâches. La situation est la même pour le baccalauréat et le concours au Vietnam dans les périodes correspondantes, malgré la réapparition de l'ostensif  $\int$  dans la dernière période.

Le calcul d'aire au baccalauréat en France durant la dernière période subit une évolution avec la « simplification » de la surface. Au Vietnam de la même période, l'institution montre l'intention d'éviter la lecture graphique en introduisant le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions.

Le calcul d'intégrale dans le baccalauréat en France, à travers le calcul exact (et donc des méthodes de calculs), mais aussi l'établissement de relation de récurrence et l'encadrement numérique, occupe la place la plus importante, d'autant plus qu'il intervient dans l'étude des suites, d'équations différentielles et de probabilité. Au Vietnam, dans le baccalauréat et dans le concours, le calcul d'intégrale n'intervient que dans le thème intégral strict.

Avant 2002, les types de tâches et les solutions attendues du concours d'entrée au Vietnam correspondent à des pratiques effectives et stables propres aux universités concernées. À partir de 2002, l'écart entre le savoir dans le manuel de la classe 12 et au concours diminue tout en restant important en exigeant une véritable transformation du topos de l'élève. L'existence de cours supplémentaires préparant au concours participe au déplacement du topos de l'élève de l'EMS vers celui du candidat au concours.



## **Chapitre B2.**

### **Quelques éléments sur l'apprêtage de la notion d'intégrale par les enseignants français et vietnamiens**

L'étude effectuée dans les chapitres A1 et A2 a ébauché une première description institutionnelle du savoir à enseigner *intégrale* dans la classe 12 au Vietnam et la classe de terminale en France. Dans le chapitre B1, nous avons cherché des indices sur les pratiques institutionnelles effectives et stables en analysant les baccalauréats en France et au Vietnam, et le concours d'entrée universitaire au Vietnam.

Sous les contraintes du savoir à enseigner (A1, A2) et des examens finaux (B1), un enseignant est en partie responsable de la transposition interne du savoir par le fait qu'il apprête le savoir pour l'enseigner effectivement (Ravel 2003). Dans l'apprêtage du savoir à enseigner l'enseignant doit aménager des moments d'institutionnalisation (partie cours) et des moments de travail de la technique et de l'évaluation (partie exercices) pour mener à bien l'étude du savoir à enseigner.

« Ainsi, un enseignant qui prépare son cours est assujetti à la fois au programme scolaire, aux différents manuels qu'il consulte mais il est également guidé par ses représentations sur les mathématiques et sur l'apprentissage des élèves. Ces différents assujettissements contraignent sa pratique tout en lui permettant de faire des choix d'apprêtage du savoir dans une relative liberté. » (Ravel 2003, p. 110)

Notre questionnaire cherche à recueillir des informations sur cet apprêtage de la notion d'*intégrale* : la partie 1 du questionnaire concerne l'institutionnalisation du savoir, alors que les parties 2 et 3 du questionnaire concernent le travail de la technique et l'évaluation.

#### **I. Analyse *a priori* du questionnaire pour l'enseignant**

Le questionnaire comporte trois parties dont l'intégralité du texte se trouve dans les annexes.

- Dans la partie 1, nous cherchons à répondre aux questions suivantes : quels liens les enseignants cherchent-ils à mettre en place entre aire, primitive et intégrale ? Dans leur enseignement, quelle propriété de l'intégrale jugent-ils la plus facile ? la plus difficile ? Quelles techniques d'intégration enseignent-ils et comment jugent-ils leur ordre de difficulté ?

- Dans la partie 2, nous proposons deux exercices. Pour le premier, seul le texte est donné et l'enseignant est invité à rédiger la solution qu'il attend. Pour le second, le texte est accompagné d'une solution que l'enseignant doit noter et commenter.

- Dans la partie 3, nous demandons à l'enseignant d'écrire deux exercices de type « calcul d'une intégrale » (T5), l'un qu'il juge facile, l'autre difficile.

##### **I.1. Liens entre aire, primitive et intégrale (Partie 1)**

Comme nous l'avons dégagé dans les chapitres précédents, l'aire, la primitive et l'intégrale sont trois éléments constitutifs de la notion d'*intégrale*. Les liens entre ces éléments, reflètent ce que l'enseignant cherche à institutionnaliser de l'objet de savoir *intégrale* dans chacune de deux institutions.



Nous présentons dans le tableau 24 les liens possibles entre aire, primitive et intégrale dans les deux institutions, en nous référant aux analyses effectuées dans les chapitres précédents.

Liens possibles entre aire, primitive et intégrale dans deux institutions	
Aire – Intégrale	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Le calcul de l'aire (sous la courbe) mène à la définition de l'intégrale (de Riemann). L'intégrale est une généralisation de l'aire.</li> <li>• L'aire (sous la courbe) sert à interpréter géométriquement l'intégrale.</li> <li>• L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe).</li> </ul>
Intégrale – Primitive	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz.</li> <li>• L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné.</li> </ul>
Aire – Primitive	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction en question.</li> </ul>

**Tableau 24.** *Liens possibles entre aire, primitive, intégrale en France et au Vietnam (Programme de 2002 en France et celui de 2000 au Vietnam)*

## I.2. Propriétés de l'intégrale jugées la plus facile ou la plus difficile (Partie 1)

Nous considérons une propriété comme un élément technologique, qui peut fonder la pratique.

Différents points de vue peuvent servir au *jugement subjectif* de l'enseignant sur la facilité ou la difficulté d'une propriété de l'intégrale :

- l'organisation de son enseignement, c'est-à-dire la place que cette propriété peut y occuper, le rôle qu'elle peut jouer (facilité de son enseignement)
- le champ des pratiques qu'elle fonde (importance technologico-pratique)
- les effets de son enseignement sur l'apprentissage de l'élève (facilité de son apprentissage et de son usage par l'élève).

De plus, à travers ce jugement, sont formulées *indirectement* les principales propriétés pour l'enseignant sur la notion d'intégrale.

Nous donnons dans le tableau 25 les principales propriétés de l'intégrale, candidates à être jugées la plus facile et la plus difficile dans les deux institutions observées. Nous les avons choisies en raison de leur importance technologico-pratique.

Propriétés	France <sup>19</sup>	Vietnam <sup>20</sup>
Intégrale et aire	Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ ( $a \leq b$ ). L'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est égale à l'aire (en unités d'aire) du domaine caractérisé par le système d'inéquations : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$	Si la fonction $f(x)$ est continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ , alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du trapèze curviligne délimité par la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ .
Valeur moyenne	Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ . $a$ et $b$ sont deux éléments de $I$ tels que $a < b$ . La valeur moyenne de $f$ sur $[a, b]$ est le nombre réel égal à : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx .$	
Relation de Chasles	Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a, b, c$ trois réels quelconques de l'intervalle $I$ : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$	Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle $K$ et $a, b, c$ trois éléments de $K$ : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
Linéarité	Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ . $a$ et $b$ deux réels de $I$ et $k$ un réel quelconque. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx .$ $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$	Soit $f(x), g(x)$ deux fonctions continues sur un intervalle $K$ : $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbf{R}).$ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$
Ordre et intégration	Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ . $a$ et $b$ sont deux éléments de $I$ tels que $a \leq b$ . Si $f$ est positive sur $[a, b]$ , alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . Si $f$ est négative sur $[a, b]$ , alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ . Si pour tout réel $x$ de $[a, b]$ , $f(x) \leq g(x)$ , alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .	Soit $f(x), g(x)$ deux fonctions continues sur un intervalle $K$ et $a, b$ deux éléments de $K$ : $f(x) \geq 0 \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$ $f(x) \geq g(x) \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .$
Inégalité de la moyenne	Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ , $a$ et $b$ deux réels de $I$ , $m$ et $M$ deux réels. Si $a \leq b$ et si pour tout $x \in [a, b]$ , $m \leq f(x) \leq M$ , alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ . Si, pour tout $x \in I$ , $ f(x)  \leq M$ , alors $\left  \int_a^b f(x)dx \right  \leq M b-a $ .	Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle $K$ et $a, b$ deux éléments de $K$ : $m \leq f(x) \leq M \text{ sur } [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

<sup>19</sup> Nous donnons ces propriétés telles qu'elles sont énoncées dans Bréal 2002.

<sup>20</sup> Nous donnons ces propriétés telles qu'elles sont énoncées dans le manuel unique 2000 (traduites par nous).

Propriétés	France	Vietnam
Intégrale dépendant de la borne supérieure et primitive	Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle de $I$ et $a$ un élément de $I$ . La fonction $F$ définie sur $I$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive sur $I$ de la fonction de $f$ qui s'annule en $a$ .	Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $K$ et $a$ un élément de $K$ . $t$ varie sur l'intervalle $[a, b]$ $\Rightarrow G(t) = \int_a^t f(x)dx$ est une primitive de $f(t)$ et $G(a) = 0$ .
Formule de Newton-Leibniz	Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $F$ une primitive de $f$ sur $I$ . Si $a$ et $b$ sont deux éléments quelconques de $I$ , alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$	Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle $K$ , $a$ et $b$ deux éléments quelconques de $K$ , $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur $K$ . La différence $F(b) - F(a)$ s'appelle intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)$ et se note par $\int_a^b f(x)dx.$
Changement de variable		<b>Type 1.</b> Si : 1) la fonction $x = u(t)$ possède une dérivée continue sur $[\alpha, \beta]$ , 2) la fonction composée $f(u(t))$ est déterminée sur $[\alpha, \beta]$ . 3) $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$ , alors : $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[u(t)]u'(t)dt.$ <b>Type 2.</b> 1) Poser $t = v(x)$ , $v(x)$ est une fonction à dérivée continue. 2) Exprimer $f(x)dx$ en $t$ et $dt$ . Supposons $f(x)dx = g(t)dt$ . 3) Chercher une primitive $G(t)$ de $g(t)$ . 4) Calculer $\int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt = G(t) _{v(a)}^{v(b)}$ . 5) Conclure $\int_a^b f(x)dx = G(t) _{v(a)}^{v(b)}$ .
Intégration par parties	Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle $I$ . Si $a$ et $b$ sont deux éléments quelconques de $I$ , alors : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$	Si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions à dérivées continues sur un intervalle $I$ , alors : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x)) _a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ soit $\int_a^b u(x)dv = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du.$
Intégrale et volume	On considère un solide délimité par les plans d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ (où $a$ et $b$ sont des réels tels que $a \leq b$ ). On désigne par $B(z)$ la section plane de ce solide avec le plan perpendiculaire à $(Oz)$ de cote $z$ ( $a \leq z \leq b$ ) $S(z)$ l'aire de la section $B(z)$ . Le volume $V$ , en unités de volume, de ce solide est égal à : $V = \int_a^b S(z)dz.$	Soit $T$ un solide délimité par deux plans parallèles $(\alpha)$ et $(\beta)$ . On construit l'axe $(Ox)$ de manière qu'il soit perpendiculaire aux plans $(\alpha)$ et $(\beta)$ . Soit $S(x)$ l'aire de la section plane de ce solide avec le plan $(\gamma)$ , plan perpendiculaire à l'axe $(Ox)$ en point d'abscisse $x$ ( $a \leq x \leq b$ ). Supposons que $S(x)$ soit une fonction continue de $x$ . On a démontré que le volume $V$ du solide $T$ est donné par la formule : $V = \int_a^b S(x)dx.$

Tableau 25. Propriétés candidates pour le jugement des enseignants en France et au Vietnam (Programmes en vigueur)

### **I.3. Techniques d'intégration enseignées et ordre de leur difficulté (Partie 1)**

Dans les deux institutions, à côté des « grandes méthodes » comme l'intégration par parties, il existe des techniques d'intégration associées à la reconnaissance d'une certaine classe de fonctions : dans tous les cas, il faut apprendre à reconnaître à travers l'écriture algébrique d'une fonction à intégrer la classe de fonctions à laquelle appartient cette fonction pour décider de la manipulation pertinente pour le calcul demandé.

De façon analogue à la partie précédente, différents points de vue peuvent intervenir dans le *jugement subjectif* de l'enseignant sur ce qu'est une technique d'intégration et sur son ordre de difficulté :

- la place que cette technique peut occuper dans l'organisation de son enseignement (facilité de son enseignement)
- les intégrales qu'elle permet de calculer (importance pratique)
- les effets de son enseignement sur l'apprentissage de l'élève (facilité de son apprentissage et de son usage par l'élève).

À travers ce jugement, sont formulées *indirectement* les techniques d'intégration privilégiées par l'enseignant de chacune des institutions, classe terminale en France et au Vietnam.

Ceci nous permet aussi de déduire les types d'intégrales qui sont proposées en priorité dans des tâches de calcul dans chacune des deux institutions.

Nous donnons dans le tableau 26 les techniques d'intégration candidates à être enseignées dans les deux institutions en nous référant à l'analyse effectuée dans les chapitres précédents, en particulier à celle des exemples et des exercices de deux manuels, l'un en France (Bréal 2002), l'autre au Vietnam (manuel unique 2000).

France	Vietnam
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b f(u(x))u'(x)dx</math>, une primitive <math>F</math> de <math>f</math> est connue</li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>F \circ u</math> est une primitive de <math>(f \circ u)u'</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b f(u(x))u'(x)dx</math>, une primitive <math>F</math> de <math>f</math> est connue</li> </ul> <p><math>\tau 1</math> : <math>t = u(x)</math></p> <p><math>\tau 2</math> : <math>\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_a^b f(u)du</math></p>
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_0^a R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx</math>, <math>R</math> : fonction rationnelle de deux variables</li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>x = asint, t \in [0, \pi/2]</math></p>
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>x = atant, t \in ]-\pi/2, \pi/2[</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b \frac{(Ax + B)dx}{(x - \alpha)(x - \beta)}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>\frac{Ax + B}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{C}{x - \alpha} + \frac{D}{x - \beta}</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b \frac{(Ax + B)dx}{(x - \alpha)(x - \beta)}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>\frac{Ax + B}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{C}{x - \alpha} + \frac{D}{x - \beta}</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b x^\alpha \ln x dx, \alpha \in \mathbf{R}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = \ln x, dv = x^\alpha dx</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b x^\alpha \ln x dx, \alpha \in \mathbf{R}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = \ln x, dv = x^\alpha dx</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) \ln x dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = \ln x, dv = P(x)dx</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) \ln x dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = \ln x, dv = P(x)dx</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) \cos(\alpha x + \beta) dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = P(x), dv = \cos(\alpha x + \beta) dx</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) \cos(\alpha x + \beta) dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = P(x), dv = \cos(\alpha x + \beta) dx</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) \sin(\alpha x + \beta) dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = P(x), dv = \sin(\alpha x + \beta) dx</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) \sin(\alpha x + \beta) dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = P(x), dv = \sin(\alpha x + \beta) dx</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) e^{\alpha x + \beta} dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = P(x), dv = e^{\alpha x + \beta} dx</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b P(x) e^{\alpha x + \beta} dx, P(x)</math> : polynôme de <math>x</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = P(x), dv = e^{\alpha x + \beta} dx</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b e^x \cos x dx, \int_a^b e^x \sin x dx</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : Intégration par parties à deux reprises</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b e^x \cos x dx, \int_a^b e^x \sin x dx</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : Intégration par parties à deux reprises</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b x(\ln x)^n dx, n \in \mathbf{N}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = x(\ln x)^n, dv = dx</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_a^b (\ln x)^n dx, n \in \mathbf{N}</math></li> </ul> <p><math>\tau</math> : <math>u = (\ln x)^n, dv = dx</math></p>

Intégrales associées : calcul de deux intégrales I, J à travers le calcul de $\alpha I + \beta J$ , $\gamma I + \delta J$ et la résolution d'un système d'équations à deux inconnues	
Calcul d'une intégrale à l'aide d'un calcul d'aire	
Calcul d'une intégrale par linéarisation	

**Tableau 26.** Techniques d'intégration candidates à être enseignées dans les deux institutions (Terminales France et Vietnam, programmes en vigueur)

#### I.4. Exercice 1, *non routinier* dans les deux institutions : solutions possibles (Partie 2)

Il s'agit de rédiger la solution attendue à l'exercice suivant :

On donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  :

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$		3		2
	-1		1	

On définit la fonction  $F$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Étudier le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $\mathbf{R}$ .

Cet exercice s'inspire de ceux proposés dans la batterie d'exercices éditée en France par les inspecteurs généraux de l'éducation nationale en 2004 : il est non routinier en France par le fait qu'il associe la définition de l'intégrante par un tableau de variations et l'étude d'une intégrale dépendant de la borne supérieure. L'intention des auteurs de cette batterie est que ce type d'exercices devienne routinier.

D'après le programme de seconde en vigueur en France, une fonction peut être « définie par une courbe, un tableau de données ou une formule ». Le non-dit du programme sur la nature des données à afficher dans un tableau nous permet de penser qu'un tableau de variations est acceptable. Ainsi la représentation d'une fonction<sup>21</sup> par son tableau de variations est conforme aux programmes en France. Par contre, le tableau de données en général et le tableau de variations en particulier ne sont pas mis en œuvre au Vietnam pour *définir* une fonction. L'exercice 1 est non seulement non routinier, mais en rupture par rapport au contrat didactique sur l'étude des fonctions au Vietnam.

Le fait que la fonction à intégrer  $f$  n'est donnée que par son tableau de variations :

- bloque totalement la recherche de la formule algébrique *explicite* de la fonction  $F$  par n'importe quel moyen mathématique ;
- oblige à utiliser les informations du tableau pour étudier le signe de  $f$  et en déduire le sens de variation de  $F$ .

<sup>21</sup> Au plan mathématique, un tableau de variations ne détermine pas une seule fonction, mais une classe de fonctions.

La valeur annulant la fonction sur  $]-\infty, 0[$  ne figurant pas explicitement dans le tableau, il devient nécessaire de démontrer son existence et son unicité pour étudier le signe de  $f$ .

Les variables didactiques et les valeurs choisies dans cet exercice sont les suivantes :

- Mode de représentation des fonctions (dans l'exercice : tableau de variations, intégrale dépendant de la borne supérieure)
- Les valeurs marquant les changements de signe de  $f(x)$  sont données ou non (dans l'exercice, elles ne sont pas données, mais on peut déduire qu'il y en a une et une seule et en donner un encadrement)

Pour les solutions possibles, nous faisons intervenir deux cadres : l'analytique (A) et le géométrique (G). Nous tenons compte aussi d'une règle du contrat didactique de l'étude des fonctions de l'institution vietnamienne : *dans l'étude du sens de variation d'une fonction, il faut dresser son tableau de variations. Si son domaine de définition est  $\mathbf{R}$ , il faut y faire figurer ses limites en l'infini*. Nous présentons ci-dessous les solutions possibles à l'exercice en mettant en trame foncée la partie correspondante à la règle du contrat didactique que nous venons de mentionner pour l'institution vietnamienne.

**Solution 1.** *Théorème des valeurs intermédiaires – Étude de signe de la dérivée.* (A)

- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer l'existence et l'unicité de la valeur  $\alpha \in ]-\infty, 0[$  telle que  $f(\alpha) = 0$ .
- Calculer la dérivée de  $F : F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ . La variation de  $F$  dépend donc du signe de  $f$ .
- Déduire du signe de  $f$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, \alpha[$  et  $]\alpha, +\infty[$  le sens de variation de  $F$  :  $F$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, \alpha[$  et strictement croissante sur  $]\alpha, +\infty[$ .

- Calculer la limite de  $F$  en  $+\infty$  :

$$\forall x > 0, f(x) \geq 1 \Rightarrow \forall x > 0, F(x) = \int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x 1 \cdot dx = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

- Calculer la limite de  $F$  en  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \exists M > 0, \forall x \leq -M, f(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, \int_x^{-M} f(t)dt \leq \int_x^{-M} -\frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}(x + M)$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, \int_x^0 f(t)dt + \int_{-M}^0 f(t)dt \leq \frac{1}{2}(x + M) + \int_{-M}^0 f(t)dt = \frac{1}{2}x + C \text{ où } C = \frac{1}{2}M + \int_{-M}^0 f(t)dt$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, \int_x^0 f(t)dt \leq \frac{1}{2}x + C$$

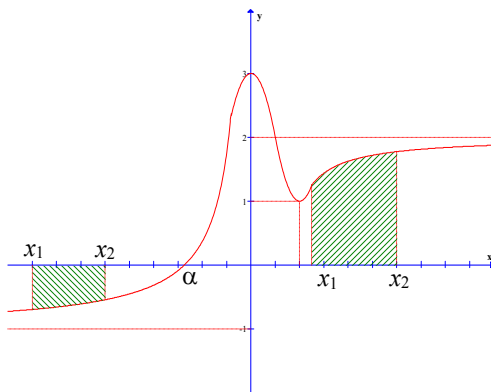
$$\Rightarrow \forall x \leq -M, F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt \geq -\frac{1}{2}x - C$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$$

- Dresser le tableau de variations de  $F$ :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	-		+
$F(x)$	$+\infty$	$F(\alpha)$	$+\infty$

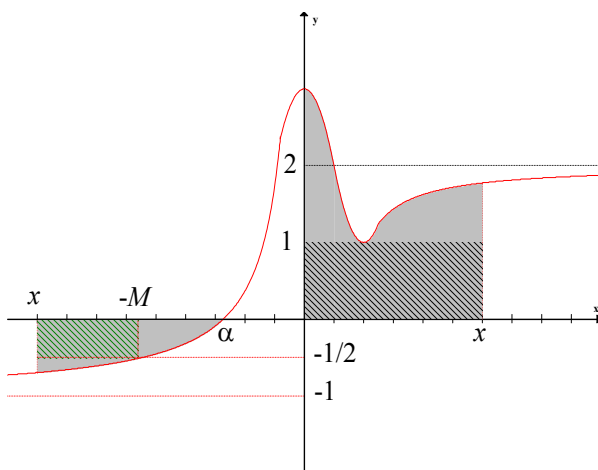
**Solution 2.** Intersection des courbes. Étude du signe de  $F(x_1) - F(x_2)$ . (G-A)



- Dédurre du tableau de variations de  $f$  que la courbe représentative de  $f$  coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse  $\alpha \in ]-\infty, 0[$ .
- Prendre deux réels  $x_1, x_2$  tels que  $x_1 < x_2$ , former la différence  $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ . Pour tout  $x_1, x_2$

de  $]\alpha, +\infty[$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$  est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = x_1, x = x_2$ . Il en résulte que  $F(x_2) - F(x_1) > 0$  donc  $F$  est strictement croissante sur  $]\alpha, \infty[$ .

- Pour tout  $x_1, x_2$  de  $]-\infty, \alpha[$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$  est égale à l'opposé de l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = x_1, x = x_2$ . Il en résulte que  $F(x_2) - F(x_1) < 0$  donc  $F$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, \alpha[$ .



- Calculer la limite de  $F$  en  $+\infty$  : Pour  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , les axes des coordonnées et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Cette aire est supérieure à l'aire du rectangle délimité par les axes des coordonnées, la droite d'équation  $y = 1$  et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Or cette dernière aire, ayant pour valeur  $x$ , tend vers l'infini (positif) quand  $x$  tend vers l'infini positif. Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

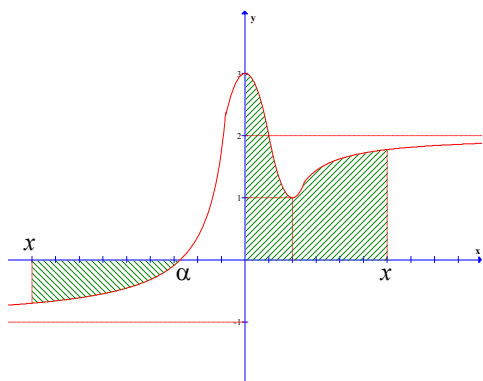
- Calculer la limite de  $F$  en  $-\infty$  : Pour  $x < \alpha < 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt = -\int_x^\alpha f(t)dt - \int_\alpha^0 f(t)dt$ . Or  $-\int_x^\alpha f(t)dt$  est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = \alpha$  et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Quand la valeur absolue de  $x$  est assez grande, cette aire est supérieure à l'aire du rectangle délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation  $y = -1/2$  et les droites perpendiculaires à l'axe des abscisses en points d'abscisses  $x$  et  $-M$  où  $f(-M) = -1/2$ . Or l'aire de ce rectangle ayant pour valeur  $-\frac{x+M}{2}$ , tend vers l'infini (positif) quand  $x$  tend vers l'infini négatif. Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\int_x^\alpha f(t)dt = +\infty$ , et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$ .

- Dresser le tableau de variations de  $F$ : analogue à la solution 1.



**Solution 3. Intersection des courbes. Interprétation de l'intégrale en terme d'aire (G)**

- La démonstration de l'existence et l'unicité de la valeur  $\alpha$  annulant  $f$  est analogue à celle de la solution 2.



- Pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , les axes des coordonnées et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Quand  $x$  parcourt du point d'origine vers l'infini positif ( $x$  augmente), cette aire augmente. Il en résulte que  $F$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $x$  de  $]\alpha, 0[$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt$  est l'opposé de l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de  $f$ , et la droite

perpendiculaire à l'axe des abscisse en point d'abscisse  $x$ . Quand  $x$  parcourt du point d'origine vers le point d'abscisse  $\alpha$  ( $x$  diminue), cette aire augmente et par conséquent, son opposé diminue. Il en résulte que  $F$  est croissante sur  $]\alpha, 0[$ .

- Pour tout  $x < \alpha$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt = -\int_x^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^0 f(t)dt$ . L'intégrale  $\int_\alpha^0 f(t)dt$

est une constante. L'intégrale  $-\int_x^\alpha f(t)dt$  est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = \alpha$  et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Quand  $x$  parcourt du point d'abscisse  $\alpha$  vers l'infini négatif ( $x$  diminue), cette aire augmente. Il en résulte que  $F$  est décroissante sur  $]-\infty, \alpha[$ .

- Le calcul des limites de  $F$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  et la construction du tableau de variations de  $F$  sont analogues à ceux de la solution 2.

Mobilisant le cadre analytique, la solution 1 :

- démontre l'existence et l'unicité de la valeur  $\alpha$  annulant la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$  au moyen du théorème des valeurs intermédiaires,
- étudie le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $\mathbf{R}$  au moyen de deux théorèmes : l'un énonce que l'intégrale dépendant de la borne supérieure est une primitive de  $f$ , l'autre établit le lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée.

Utilisant l'inégalité  $f(x) \geq 1$  pour tout  $x > 0$ , on obtient dans la solution 1 l'inégalité  $F(x) \geq x$  pour tout  $x > 0$  et on en déduit la limite de  $F$  en  $+\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

L'inégalité  $f(x) \geq -1$  pour tout  $x < 0$  ne permet pas de calculer la limite de  $F$  en  $-\infty$ . C'est la raison pour laquelle on doit établir, dans la solution 1, l'inégalité  $f(x) \leq -1/2$  (par exemple) pour tout  $x \leq -M$ , pour en déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -1$ .

Dans la solution 2, on mobilise de façon mixte les deux cadres analytique et géométrique :

- L'étude de l'existence de la valeur  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]-\infty, 0[$  et annulant  $f$  est convertie en l'étude de l'intersection entre la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$ . La continuité et la monotonie de  $f$  sur l'intervalle en question deviennent implicites.
- L'étude du signe de  $F(x_2) - F(x_1)$  qui remplace la dérivation d'une intégrale dépendant de la borne supérieure est effectuée par l'interprétation de  $F(x)$  en terme d'aire.
- L'interprétation en termes d'aire permet aussi de calculer les limites de  $F$  en l'infini en comparant les aires concernées.



$$1 \leq f(x) \leq 2 \text{ pour tout } x \text{ de } [1, 2] \Rightarrow 1 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$$

Il en résulte que :  $1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 4$ . Pour  $a = 1$  et pour tout entier  $b \geq 4$ , on a :

$$a \leq \int_0^2 f(x) dx \leq b$$

Les variables didactiques et les valeurs choisies dans cet exercice sont les suivantes :

- Le mode de représentation de fonction (dans l'exercice : tableau de variations).
- Les extrema de  $f$  sur  $[0, 2]$  permettent ou non de répondre *directement* à la consigne.

Dans l'exercice :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $[0, 2]$  n'implique pas  $\int_0^2 f(x) dx \geq 1$ .

- La consigne est posée de façon « fermée » ou « ouverte » (dans l'exercice : « fermée » car la consigne exige que le minorant de  $\int_0^2 f(x) dx$  soit un *entier strictement positif*).

La solution optimale est la solution géométrique car elle n'a pas besoin de subdiviser l'intervalle  $[0, 2]$  en au moins deux sous-intervalles. Même si nous remplaçons la consigne « fermée » par une consigne « ouverte » comme par exemple :

L'inégalité  $\int_0^2 f(x) dx \geq 1$  est-elle vraie ou fausse ?

la solution géométrique reste efficace, alors que la solution analytique « classique » (sans subdiviser l'intervalle  $[0, 2]$ ) ne peut pas fournir la réponse correcte.

La solution géométrique est-elle acceptée dans chacune de deux institutions ? Sinon, pour quelles raisons ? Y a-t-il une différence significative du statut de la solution géométrique dans chacune de deux institutions ? Si oui, pourquoi ?

### I.6. Exercices faciles et difficiles du type « calculer $\int_a^b f(x) dx$ » (Partie 3)

Nous proposons à l'enseignant de donner deux exemples particuliers du type d'exercices « calculer  $\int_a^b f(x) dx$  », l'un qu'il considère comme facile, l'autre comme difficile.

Différents points de vue peuvent influencer le *jugement subjectif* de l'enseignant sur la facilité ou la difficulté du calcul des intégrales : les propriétés de l'intégrale à mobiliser, les techniques d'intégration à effectuer, la fréquence d'apparition de chacun des types d'intégrales dans la partie exercice, les effets de son enseignement sur l'apprentissage de l'élève (facilité de son apprentissage et de son acquisition par l'élève).

L'enseignant, pour proposer à ses élèves une intégrale, s'appuie sur le programme, consulte les manuels (en particulier les parties concernant les propriétés de l'intégrale et les techniques d'intégration) ou encore se réfère à ses connaissances mathématiques sur le sujet. Il apprête son enseignement en se référant à un texte du savoir, en tenant compte des contraintes temporelles, d'organisation, d'interaction avec les élèves, et en s'appuyant sur ses connaissances didactiques.

À quel système de contraintes l'enseignant est-il soumis lorsqu'il choisit une intégrale ? Y a-t-il une différence significative entre le choix d'un enseignant et celui d'un autre ? Si oui, quelles en sont les principales causes ? Quelles en sont les conséquences ?

## II. Analyse *a posteriori* du questionnaire pour enseignant

Le questionnaire a été envoyé à des enseignants des deux pays en avril 2005. Nous avons recueilli les réponses de 14 enseignants français et 68 enseignants vietnamiens.

### II.1. Liens entre aire, primitive et intégrale (Partie 1)

#### II.1.1. Liens entre aire et intégrale

La lecture des réponses des enseignants nous mène à ajouter dans les liens possibles entre aire et intégrale les deux liens suivants :

- L'intégrale d'une fonction continue positive est une aire sous la courbe.
- L'aire est un nombre strictement positif, l'intégrale est un réel.

Nous exposons dans le tableau 27 les liens entre aire et intégrale que les enseignants de chacun de deux pays cherchent à mettre en place.

Liens entre aire et intégrale	France	Vietnam
1. Le calcul de l'aire sous la courbe mène à la définition de l'intégrale.	3	9
2. L'intégrale d'une fonction continue positive est une aire sous la courbe.	9	13
3. L'intégrale sert à calculer l'aire sous la courbe.	1	24
4. L'aire sous la courbe sert à interpréter géométriquement l'intégrale.		
5. L'aire est un nombre strictement positif, l'intégrale est un réel		1
6. Sans réponse		9
1 et 2		3
1 et 3		8
1 et 4	1	
2 et 3		1
Total	14	68

**Tableau 27.** Liens apprêtés entre aire et intégrale en France et au Vietnam (Première analyse)

À première vue, nous constatons que le lien prédominant entre aire et intégrale est le lien 2 en France et le lien 3 au Vietnam. Or, ce premier constat est d'emblée incohérent avec l'analyse institutionnelle : *seul* un enseignant français cherche à mettre en place l'interprétation géométrique de l'intégrale (1 et 4, tableau 27), 13 enseignants vietnamiens considèrent l'intégrale (d'une fonction continue positive) comme l'aire sous la courbe. Nous devons donc effectuer un retour sur les programmes et manuels concernés pour « décrypter » le lien 2 : *l'intégrale d'une fonction continue positive est une aire sous la courbe*.

En France, dans la période 1980 – 2002, l'intégrale est définie par la formule de Newton – Leibniz. Le nouveau programme de terminale S mis en œuvre depuis 2002 prescrit une double approche :

« Pour une fonction continue positive sur  $[a, b]$ , introduction de la notation  $\int_a^b f(x)dx$  comme *aire sous la courbe*. »

« On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. »

et le statut de l'interprétation en terme d'aire de l'intégrale :

« On interprètera ces propriétés [linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles, inégalité de la moyenne] en terme d'aire ou en terme de valeur moyenne pour les rendre conformes à l'intuition. »

Cette injonction du programme établit une correspondance entre aire et intégrale : l'intégrale (d'une fonction continue positive) est une aire (sous la courbe) et vice-versa. Conformément au programme, le manuel M6 présente, dans la partie cours, l'interprétation en terme d'aire des propriétés de l'intégrale, et l'application de l'intégrale au calcul d'aire. Dans la partie exercices, il propose l'interprétation géométrique de l'intégrale et le calcul d'aire par intégration. Ainsi, *le lien 2 en France peut se traduire institutionnellement en deux liens 3 et 4.*

Par ailleurs, dans leurs réponses, tous les enseignants vietnamiens ayant indiqué le lien 2 ont précisé qu'ils voulaient aborder la propriété proprement dite *signification géométrique de l'intégrale*, énoncée dans la partie cours du manuel dès la définition de l'intégrale par la formule de Newton – Leibniz.

Si la fonction  $f(x)$  [sic] est continue et positive sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors *l'intégrale*  $\int_a^b f(x)dx$  est l'aire<sup>22</sup> du trapèze curviligne délimité par la courbe représentative de la fonction  $y = f(x)$ , l'axe Ox et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

Dans la partie exercices du manuel, cet énoncé sert d'élément technologique, *uniquement* au calcul d'aire par intégration. Il ne sert pas à l'interprétation géométrique de l'intégrale car celle-ci est absente de la partie cours comme de la partie exercices. Nous pouvons en déduire que *le lien 2 au Vietnam peut se traduire institutionnellement en le lien 3.*

Après le retour institutionnel, nous présentons dans le tableau 28 les liens entre aire et intégrale en séparant les choix multiples des enseignants.

Liens entre aire et intégrale	France	Vietnam
1. Le calcul de l'aire sous la courbe mène à la définition de l'intégrale.	3	9
2. L'intégrale d'une fonction positive est une aire sous la courbe.		
3. L'intégrale sert à calculer l'aire sous la courbe.	1	37
4. L'aire sous la courbe sert à interpréter géométriquement l'intégrale.		
5. L'aire est un nombre strictement positif, l'intégrale est un réel		1
6. Sans réponse		9
1 et 2		
1 et 3		11
1 et 4	1	
2 et 3		
3 et 4	9	
3 et 5		1
Total	14	68

**Tableau 28.** Liens apprêtés entre aire et intégrale en France et au Vietnam (Deuxième analyse)

Nous présentons finalement dans le tableau 29 les liens entre aire et intégrale en additionnant les choix multiples.

<sup>22</sup> Souligné par nous.

Liens entre aire et intégrale	France (14)	Vietnam (68)
1. Le calcul de l'aire sous la courbe mène à la définition de l'intégrale.	4 (0,29)	20 (0,29)
2. L'intégrale d'une fonction positive est une aire sous la courbe.		
3. L'intégrale sert à calculer l'aire sous la courbe.	10 (0,71)	49 (0,72)
4. L'aire sous la courbe sert à interpréter géométriquement l'intégrale.	10 (0,71)	
5. L'aire est un nombre strictement positif, l'intégrale est un réel		2 (0,03)
6. Sans réponse		9 (0,69)

**Tableau 29.** Liens apprêtés entre aire et intégrale en France et au Vietnam (Deuxième analyse)

Ainsi, les liens prédominants entre aire et intégrale sont les liens 3 et 4 dans l'institution française et le lien 3 dans l'institution vietnamienne. Les deux institutions se rencontrent par le lien 3 : *l'intégrale sert à calculer l'aire*. Elles diffèrent par le lien 4 : *l'aire est un outil pour l'interprétation géométrique de l'intégrale dans l'institution française, mais elle ne l'est pas dans l'institution vietnamienne*. En revanche, 20 des 68 enseignants vietnamiens insistent sur le rôle de l'aire, ou plus précisément du calcul d'aire, dans l'introduction de la définition de l'intégrale. Ceci confirme de nouveau que si l'intervention de l'aire dans l'intégration est présente en France dans le logos et dans la praxis, elle n'est présente que dans le logos au Vietnam. En particulier, deux enseignants vietnamiens distinguent l'aire de l'intégrale par leur signe : *la première est un nombre strictement positif, la seconde est un réel de signe quelconque*. Il y a une intention de séparer les deux objets *aire*, *intégrale* par leur nature numérique en abandonnant leur ressemblance épistémologique.

### II.1.2. Liens entre intégrale et primitive

Après avoir lu les réponses des enseignants, nous complétons les liens possibles entre intégrale et primitive par le lien suivant :

« Les primitives de  $f$  sont aussi une intégrale, mais « indéfinie ». La différence entre intégrale et primitive est que l'intégrale a deux bornes et une valeur numérique unique, tandis que les primitives d'une fonction (l'intégrale indéfinie) n'ont aucune borne et diffèrent d'une constante additive. » (Un enseignant vietnamien)

Nous exposons dans les tableaux 30 et 31 les liens entre aire et intégrale que les enseignants de deux pays cherchent à mettre en place.

Liens entre intégrale et primitive	France	Vietnam
7. Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz.	7 (0,50)	40 (0,58)
8. L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné.	4 (0,29)	4 (0,05)
9. Les primitives de $f$ sont aussi une intégrale, mais « indéfinie ». La différence entre intégrale et primitive est que l'intégrale a deux bornes et une valeur numérique unique, tandis que les primitives d'une fonction (l'intégrale indéfinie) n'ont aucune borne et diffèrent d'une constante additive.		10 (0,15)
10. Sans réponse	1	11
7 et 8	2	1
7 et 9		2
Total	14	68

**Tableau 30.** Liens apprêtés entre intégrale et primitive en France et au Vietnam (Séparation des choix multiples)

Liens entre intégrale et primitive	France (14)	Vietnam (68)
7. Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz.	9 (0,64)	43 (0,63)
8. L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné.	6 (0,43)	5 (0,07)
9. Les primitives de $f$ sont aussi une intégrale, mais « indéfinie ». La différence entre intégrale et primitive est que l'intégrale a deux bornes et une valeur numérique unique, tandis que les primitives d'une fonction (l'intégrale indéfinie) n'ont aucune borne et diffèrent d'une constante additive.		12 (0,17)
10. Sans réponse	1	11

**Tableau 31.** Liens apprêtés entre intégrale et primitive en France et au Vietnam  
(Addition des choix multiples)

Le lien prédominant entre intégrale et primitive en France est identique à celui au Vietnam : la primitive sert à calculer l'intégrale. Ceci était prévisible car ce lien directeur fonde le calcul d'intégrale dans les deux institutions.

Cependant l'intégrale dépendant de la borne supérieure occupe une place plus importante en France (6/14) qu'au Vietnam (5/68). En France, elle est présente dans le logos comme dans la praxis pour générer de nouvelles fonctions et calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné. Au Vietnam, elle est présente dans le logos pour indiquer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné, mais non pour générer de nouvelles fonctions. Elle est absente de la praxis. Nous en déduisons que l'intégrale dépendant de la borne supérieure est présente dans les pratiques institutionnelles effectives en France, et absente de celles au Vietnam.

En revanche, le lien 9 (12/68) est une particularité de l'institution vietnamienne en raison de la présence de l'ostensif  $\int$  dans le calcul de primitive. Dans leurs réponses, les 12 enseignants vietnamiens concernés ont identifié les primitives (d'une fonction  $f$ ) à l'intégrale indéfinie  $\int f(x)dx$  grâce à l'ostensif  $\int$ . Nous pouvons schématiser leurs réponses comme suit :

Primitives = Intégrale indéfinie  $\neq$  Intégrale (définie)

$$\int f(x)dx = F(x) + C \neq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Ainsi, l'ostensif  $\int$  fait vivre la notion d'*intégrale indéfinie* au détriment de celle de *primitive*. Il amalgame le calcul de primitive et celui d'intégrale. L'intégrale indéfinie (les primitives) devient une intégrale sans bornes et l'intégrale devient une intégrale indéfinie avec bornes.

### II.1.3. Liens entre aire et primitive

Nous ajoutons dans les liens possibles entre aire et primitive les liens suivants :

- L'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.
- L'aire est un nombre strictement positif, la primitive est une fonction.

Nous présentons dans le tableau 32 les liens entre aire et primitive apprêtés par les enseignants de deux pays.

Liens entre aire et primitive	En France	Au Vietnam
11. L'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction en question.	1	7
12. L'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.	10	38
13. L'aire est un nombre strictement positif, la primitive est une fonction.		1
14. On n'expose aucun lien entre aire et primitive dans l'enseignement		3
15. Sans réponse	3	19
Total	14	68

**Tableau 32.** Liens apprêtés entre aire et primitive dans deux institutions

Ainsi, la plupart des enseignants de deux pays ne cherchent pas à mettre en place un lien direct entre aire et primitive. Dans les deux institutions, l'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.

## II.2. Propriétés de l'intégrale jugées la plus facile ou la plus difficile (Partie 1)

### II.2.1. Propriétés de l'intégrale jugées « la plus facile »

Un enseignant vietnamien n'ayant pas répondu à cette question, le total des réponses recueillies est 67. Nous présentons dans le tableau 33 le jugement des enseignants français et vietnamiens sur la propriété de l'intégrale la plus facile.

Propriétés	Nombre de choix		Raisons du choix (plusieurs possibles)						
			Facilité pour enseignement		Facilité pour apprentissage		Sans explication		
	F	V	F	V	F	V	F	V	
Intégrale et aire									
Valeur moyenne									
Relation de Chasles	7/14	65/67	3/7	46/65	4/7	26/65	1/7	8/65	
Linéarité	3/14		1/3		2/3		1/3		
Ordre et intégration	3/14	2/67	2/2	1/2			1/1	1/2	
Inégalité de la moyenne									
$\int_a^x f(t)dt$ et primitive									
Formule de Newton – Leibniz	1/14				1/1				
Changement de variable									
Intégration par parties									
Intégrale et volume									

**Tableau 33.** Propriété de l'intégrale la plus facile en France et au Vietnam

Le jugement des enseignants français et celui des enseignants vietnamiens sont identiques : la relation de Chasles est la propriété de l'intégrale la plus facile. Pour ce jugement, les enseignants français s'appuient sur la facilité de son enseignement (3/7) et la facilité de l'apprentissage (4/7), tandis que les enseignants vietnamiens se fondent majoritairement sur la première (46/65).

Bien que la facilité pour l'enseignement soit le point de vue commun servant au jugement des enseignants des deux institutions, les explications ne sont pas les mêmes. Pour les enseignants français, la relation de Chasles est la propriété de l'intégrale la plus facile car « les élèves connaissent déjà la relation de Chasles avec les vecteurs. Pour une fonction positive, l'interprétation graphique est simple ». Pour les enseignants vietnamiens, « la



propriété est déduite facilement de la définition de l'intégrale [formule de Newton – Leibniz] ». Cette dissimilitude provient des liens entre aire et intégrale que les enseignants de chacune de deux institutions cherchent à mettre en place.

### II.2.2. Propriétés de l'intégrale jugées « la plus difficile »

12 enseignants français et 67 enseignants vietnamiens ont répondu à cette question. Un enseignant français a énoncé une propriété hors de la liste des propriétés candidates à être jugées. C'est un lien entre *intégrale* et *primitive* regardé sous le point de vue du calcul :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = F(b) - F(a) \text{ si } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a, b] \text{ et } \mathcal{D} = \{M(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Nous l'ajoutons dans le tableau 34 qui présente le jugement des enseignants de deux institutions sur la propriété de l'intégrale la plus difficile.

Propriétés	Nombre de choix		Raisons du choix (plusieurs possibles)						
			Difficile pour enseignement		Difficile pour apprentissage		Sans explication		
	F	V	F	V	F	V	F	V	
Intégrale et aire									
Valeur moyenne									
Relation de Chasles		2/67				2/2			
Linéarité	1/12		1/1						
Ordre et intégration	4/12	16/67		3/16	4/4	13/16			1/16
Inégalité de la moyenne	3/12		3/3		1/3				
$\int_a^x f(t)dt$ et primitive	1/11	48/67	1/1	42/48	1/1	8/67			6/67
Formule de Newton – Leibniz									
Changement de variable									
Intégration par parties	2/12				2/2				
Intégrale et volume									
Aire et primitive	1/12		1/1		1/1				
Toutes les propriétés sont faciles		1/67							1/1

**Tableau 34.** Propriété de l'intégrale la plus difficile en France et au Vietnam

Le jugement de difficulté des enseignants français se répartit sur 3 propriétés : la relation ordre et intégration, l'inégalité de la moyenne et l'intégration par parties.

Pour la relation ordre et intégration, la difficulté, selon les quatre enseignants français, se trouve dans les conditions d'usage de cette propriété :

« Il faut penser à l'ordre des bornes. »

« Rien de comparable avec les dérivées et les élèves ont beaucoup de mal avec la manipulation des inégalités. »

« éventuellement la comparaison  $f \leq g$  sur  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$  à cause de  $a \leq b$  implicite et pas toujours vérifié...  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ ... »

« Les élèves peuvent utiliser la réciproque de cette propriété et se tromper. »

Ainsi, la difficulté porte sur trois aspects : la formation de l'inégalité  $f \leq g$  sur un intervalle donné, la vérification de l'ordre des bornes si celles-ci ne sont pas données numériquement, et la possibilité de confusion avec la proposition réciproque.

Pour l'inégalité de la moyenne, la difficulté relève de son enseignement car « la formulation est plus compliquée ainsi que l'interprétation géométrique » et « elle comporte deux niveaux de démonstration ».

Au Vietnam, l'intégrale dépendant de la borne supérieure (absente de la praxis) est très majoritairement la propriété de l'intégrale la plus difficile (48/67), alors qu'elle ne l'est que pour un seul enseignant en France.

### II.3. Techniques d'intégration enseignées et ordre de leur difficulté (Partie 1)

Nous présentons dans les tableaux 35 et 36 les techniques d'intégration que les enseignants cherchent à mettre en place. Ces techniques sont classées selon l'ordre de difficulté (de la plus facile à la plus difficile).

N° d'ordre	Techniques d'intégration (facile → difficile)
1	Calcul d'une intégrale au moyen d'un calcul d'aire
2	Linéarité et lecture directe du tableau des primitives usuelles
3	Primitivation de $\frac{u'}{u}$ , $u^2 e^u$ , $u^2 u^n$
4	Intégration par parties
5	Calcul à l'aide d'une autre intégrale (intégrales associées) ou des autres propriétés (parité, périodicité...)

Tableau 35. Techniques d'intégration apprêtées en France

N° d'ordre	Techniques d'intégration (facile → difficile)
1	Linéarité et lecture directe du tableau des primitives usuelles
2	Linéarisation
3	Intégration par parties pour $P(x)e^{\alpha x + \beta}$ , $P(x)\cos(\alpha x + \beta)$ , $P(x)\sin(\alpha x + \beta)$ , $P(x)\ln(\alpha x + \beta)$
4	Changement de variable du type $x = \varphi(t)$ pour $\sqrt{k^2 - x^2}$ , $\sqrt{k^2 + x^2}$ , $\sqrt{x^2 - k^2}$ ( $k > 0$ )
5	Intégration des fonctions rationnelles
6	Changement de variable du type $u = \psi(x)$
7	Relation avec d'autres propriétés (parité, périodicité...)
8	Relation de récurrence
9	Combinaison de méthodes

Tableau 36. Techniques d'intégration apprêtées au Vietnam

Les techniques d'intégration apprêtées par les enseignants français sont bien compatibles avec les techniques d'intégration à enseigner que nous avons présentées dans l'analyse *a priori*.

Nous rappelons que l'intégration des fonctions rationnelles n'est pas posée de façon systématique et générale dans le programme en vigueur au Vietnam. Conformément au programme, le manuel unique ne présente que le calcul des intégrales suivantes :

$$\int \frac{b(2\alpha x + \beta)dx}{a\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \int \frac{b dx}{a(\alpha x + \beta)^2}, \int \frac{b dx}{a x^2 + \alpha^2}, \int \frac{b(Ax + B)dx}{a(x - \alpha)(x - \beta)}.$$

Le manuel ne propose aucun exercice d'intégration nécessitant les techniques 7, 8, 9. Par contre, dans les techniques d'intégration apprêtées par les enseignants vietnamiens (tableau 36) figurent quatre techniques hors des techniques possibles à enseigner (5, 7, 8, 9).

Nous considérons avec Ravel (2003) que les enseignants vietnamiens conservent une relative liberté dans leurs apprêtages du savoir sous les contraintes du savoir à enseigner, du baccalauréat, et aussi du concours d'entrée universitaire.

« Précisons que l'enseignant n'est pas entièrement libre de ses choix d'apprêtage didactique du savoir. Son activité s'effectue en effet dans le cadre d'un système complexe de contraintes. Il conserve cependant un espace de liberté au sein de ce système et, de par ses choix, investit de façon particulière les marges de manœuvre dont il dispose. » (Ravel, 2003)

#### II.4. Exercice 1, *non routinier* dans les deux institutions : solutions attendues (Partie 2)

Nous avons exposé dans le questionnaire un exercice portant sur l'étude du sens de variation d'une fonction définie par une intégrale dépendant de la borne supérieure. Nous avons demandé à l'enseignant :

- de préciser s'il proposerait un tel exercice à ses élèves de terminale,
- d'explicitier les modifications qu'il apporterait éventuellement à l'exercice,
- de rédiger la solution à cet exercice qu'il attendait d'un bon élève de terminale,
- d'estimer le pourcentage d'élèves de ses classes capables de résoudre cet exercice.

##### II.4.1. Introduction de l'exercice dans EMS

Nous présentons dans le tableau 37 le vote des enseignants français et vietnamiens pour l'introduction d'un tel exercice dans leurs pratiques d'enseignement.

Introduction de l'exercice	Oui	Non	Sans réponse	Total
En France	11	3	0	14
Au Vietnam	4	62	2	68

**Tableau 37.** Introduction de ce type d'exercices en France et au Vietnam

Ainsi, 11 des 14 enseignants français acceptent l'exercice. Par contre, 62 des 68 enseignants vietnamiens le refusent. Pourquoi cet exercice peut-il vivre en France, mais pas au Vietnam ? Nous allons tenter de répondre à cette question dans la suite de l'analyse.

En ce qui concerne les modifications à apporter éventuellement à l'exercice, seuls 9 enseignants vietnamiens en ont proposées. Nous présentons dans le tableau 38 les modifications proposées par les enseignants de deux pays.

Modifications	Nombre de choix	
	F	V
On fournit une valeur pour laquelle $f(x)$ s'annule sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ ou On propose une question intermédiaire : <i>Démontrer que l'équation <math>f(x) = 0</math> admet une solution unique <math>\alpha</math> strictement négative.</i>	10/14	4/9
Aucune modification	4/14	
On remplace le tableau de variations de la fonction $f$ par une expression algébrique concrète.		2/9
On remplace -1 par $-\infty$ , 2 par $+\infty$ pour que le tableau de variations soit semblable à celui d'une fonction du troisième degré.		1/9
On remplace la consigne par celle-ci : Étudier le sens de variation de la fonction $F$ sur $]0, +\infty[$ .		1/9
On ne propose pas l'étude du sens de variation de la fonction $F$ . On remplace la consigne par celle-ci : - Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de la fonction $f$ . - Déterminer les valeurs la plus grande et la plus petite de la fonction $f$ .		1/9

**Tableau 38.** Modifications proposées par les enseignants français et vietnamiens

10 des 14 enseignants français proposent de fournir la valeur annulant la fonction  $f$  ou de l'introduire sous forme d'une question intermédiaire. Cette proposition vise à abaisser le niveau de difficulté mais ne change pas la nature de l'exercice. En particulier, 4 des 14 enseignants français maintiennent le texte de l'exercice. Ceci montre que les enseignants français acceptent la définition de la fonction  $f$  par un tableau de variations et celle de la fonction  $F$  par l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

En revanche, 3 des 9 enseignants vietnamiens ont l'intention de remplacer (ou modifier) le tableau de variations pour pouvoir obtenir une fonction  $f$  plus « habituelle » (pour l'institution). 2 des 9 enseignants vietnamiens veulent changer de consigne pour éviter (ou affaiblir) l'intervention de l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

Nous pouvons maintenant répondre en partie à la question proposée : les enseignants vietnamiens refusent l'exercice à cause du mode de définition de la fonction par un tableau de variations et du statut de l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

#### II.4.2. Solution attendue à l'exercice

10 enseignants français et 23 enseignants vietnamiens ont rédigé la solution qu'ils attendent.

Les solutions rédigées par les enseignants français, mobilisant le cadre analytique, sont identiques à la solution 1 de l'analyse *a priori* sans la partie grisée : conformément au contrat didactique, aucun enseignant français ne fait figurer les limites de  $F$  en l'infini dans le tableau de variations.

Les 23 enseignants vietnamiens ont, eux aussi, explicité la solution analytique (solution 1), mais seuls 4 des 23 enseignants vietnamiens étudient les limites de  $F$  en l'infini dans le tableau de variations. De plus, aucun de ces 4 enseignants ne justifie les résultats obtenus. On peut faire l'hypothèse que ce non respect du contrat de l'étude des fonctions et cette absence de justification proviennent de la complexité du calcul de limite pour une fonction définie comme intégrale dépendant de la borne supérieure, car hors du rapport institutionnel à l'intégrale.

Aucun enseignant des deux institutions ne mobilise le cadre géométrique (solution 3), ou le cadre mixte (solution 2) pour étudier le sens de variation de la fonction  $F$ .

Nous présentons ci-dessous le texte de deux solutions représentatives des deux institutions.

**Solution attendue** (proposée par un enseignant français)

$f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .

$F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbf{R}$  donc  $F$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et  $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = f(x)$ .

Les variations de  $F$  dépendent du signe de  $F'$  donc de  $f$ .

$f$  est continue sur  $\mathbf{R}$  donc sur  $]-\infty, 0[$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  et  $f(0) = 3$  et  $0 \in ]-1, 3[$ . D'après le

théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique  $\alpha \in ]-\infty, 0[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty, \alpha[$  donc  $\forall x < \alpha, f(x) < f(\alpha)$ , c'est-à-dire  $f(x) < 0$ .  $f$  est strictement croissante sur  $]\alpha, 0]$  donc  $\forall x \in ]\alpha, 0], f(\alpha) < f(x) \leq f(0)$ , c'est-à-dire  $f(x) > 0$ . Le tableau de variations de  $f$  indique  $f(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

On en déduit le tableau de signe de  $f$  puis les variations de  $F$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $f$	-	0	+
Variations de $F$			

**Solution attendue** (proposée par un enseignant vietnamien)

$$\forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \exists x_0 < 0, f(x_0) < 0$$

Sur  $[x_0, 0]$ ,  $f$  dérivable donc continue,  $f$  croissante,  $f(x_0), f(0) < 0$ . Donc :

$$\exists ! \alpha \in ]x_0, 0[ \subset ]-\infty, 0[, f(\alpha) = 0$$

On a le tableau de variations de  $F$  suivant :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	-	0	+	+
$F(x)$				

Nous avons présenté dans l'analyse *a priori* trois solutions possibles à l'exercice. La solution analytique est la seule solution attendue dans les deux institutions pour l'exercice 1. Comment les enseignants évaluent-ils une solution géométrique ? Nous tenterons de répondre à cette question dans l'étude de la notation des enseignants d'une solution géométrique.

**II.4.3. Estimation de pourcentage de réussite. Prédiction de difficultés**

Nous présentons dans le tableau 39 l'estimation des enseignants des deux pays sur le pourcentage de réussite de leurs élèves.

Pourcentage de réussite	Fréquence	
	France (13)	Vietnam (34)
0 % – 10 %	4	29
10 % – 20 %	2	4
20 % – 39 %	1	1
30 % – 40 %		
40 % – 50 %	1	
50 % – 60 %	2	
60 % – 70 %	1	
70 % – 80 %	1	
80 % – 90 %	1	
90 % – 100 %		
Moyenne	35 %	6,8 %

**Tableau 39.** Estimation de pourcentage de réussite à l'exercice

Ainsi, selon l'estimation des enseignants, le pourcentage de réussite des élèves français est plus élevé que celui des élèves vietnamiens (33 % contre 6,8 %).

D'une part, la faiblesse relative de réussite prévue pour les élèves français montre que ce type d'exercices reste perçu comme problématique. D'autre part, cela confirme que cet exercice est hors du rapport institutionnel au Vietnam.

Nous présentons dans le tableau 40 les difficultés de l'exercice, prévues par les enseignants des deux pays.

Difficultés prévues	Nombre de prévisions (Plusieurs choix sont possibles)	
	France (11)	Vietnam (26)
La fonction $f$ est définie par un tableau de variations, non par une expression algébrique.	1	10
La résolution exige un décryptage approfondi du tableau de variations.		16
La fonction $F$ est définie par une intégrale dépendant de la borne supérieure.	2	10
Il est difficile de lier la variation de $F$ au signe de $f$ , à travers la formule $F'(x) = f(x)$	8	16
Il est difficile de démontrer l'existence unique de la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$ .	4	8
Confusion entre sens de variation et signe d'une fonction	2	
Identification du sens de variation de $F$ à celui de $f$		1

**Tableau 40.** Difficultés prévues pour l'exercice

La difficulté majeure pour les élèves français, selon leurs enseignants (8/11), est la liaison entre la variation de  $F$  et le signe de  $f$ . C'est aussi une difficulté majeure pour les élèves vietnamiens. Mais s'ajoute à cette difficulté commune aux deux institutions, une difficulté spécifique à l'institution vietnamienne : la lecture du tableau de variation (16/26).

Nous pouvons maintenant confirmer la raison pour laquelle les enseignants vietnamiens refusent cet exercice :

- la définition d'une fonction par un tableau de variations est hors du rapport institutionnel au Vietnam,
- l'intégrale dépendant de la borne supérieure est absente de la praxis au Vietnam.

## II.5. Exercice 2, solution géométrique à noter et commenter (Partie 2)

### II.5.1. Notation de la solution proposée

Les enseignants français participant à l'enquête ont tous noté la solution proposée. Par contre, 18 des 68 enseignants vietnamiens ont refusé de noter la solution sous le prétexte que celle-ci était *hors du programme* alors que cette solution est cohérente avec les éléments technologiques du programme en vigueur. Que signifie vraiment ce refus de notation ?

Nous présentons dans le tableau 41 les notes attribuées à la solution.

Note (sur 5)	Fréquence	
	France (14)	Vietnam (50)
1	0	9
2	0	2
3	2	6
4	4	20
5	8	13
Moyenne	4,43	3,52
Écart-type	0,73	1,39

**Tableau 41.** Notation effectuée par des enseignants français et vietnamiens

La note moyenne donnée par les enseignants français (4,43) est plus élevée que celle donnée par les enseignants vietnamiennes (3,52). De plus, la dispersion autour de la moyenne est presque deux fois plus faible pour les enseignants français (0,73) que pour les enseignants vietnamiens (1,39) : 8 des 14 enseignants français ont donné 5 points à la solution, tandis que seuls 13 des 50 enseignants vietnamiens lui ont donné cette note.

La solution est donc bien plus appréciée en France qu'au Vietnam. Pourquoi cette notation très différente ?

### II.5.2. Commentaires des enseignants

2 des 14 enseignants français et 13 des 68 enseignants vietnamiens n'ont pas commenté la solution proposée.

Pour les autres, les commentaires tournent autour des aspects suivants :

#### a. Rigueur mathématique de la solution

2 des 12 enseignants français reprochent à la solution proposée un manque de généralité mathématique. Selon eux, « la courbe proposée n'est qu'un exemple », « nous n'avons que des observations », il faut « justifier l'encadrement dans tous les cas ». Évidemment, la solution « analytique » est une réponse à l'exigence de justification de *l'encadrement dans tous les cas*. Ainsi, ils acceptent le graphique, mais ils jugent que celui-ci est moins général que l'encadrement effectué par un processus algébrique.

Par contre, les 10 autres enseignants restants n'émettent aucune critique et 2 d'entre eux écrivent même une appréciation positive de la solution :

- « L'idée de faire un dessin me semble correspondre à l'esprit du programme. »
- « Cet élève a très bien compris le lien entre l'aire et l'intégrale. La résolution utilisant une représentation graphique me paraît très bonne. »

De l'autre côté, 39 des 55 enseignants vietnamiens critiquent fortement la rigueur mathématique de la solution proposée. Nous citons ci-dessous deux commentaires exemplaires :

- « Le passage du graphique à l'encadrement n'est pas rigoureux, quoique le résultat ne soit pas erroné. »
- « La solution n'est pas probante car le graphique présenté n'est qu'une illustration, non étudié rigoureusement. »

Ainsi, le graphique, bien qu'il soit tracé à partir d'un tableau de variations, est refusé dans l'institution vietnamienne à cause de la non-généralité et de la non-rigueur.

Les 16 enseignants vietnamiens qui ne critiquent pas la rigueur mathématique de la solution « géométrique » l'acceptent parce que « son résultat est conforme à celui obtenu par l'encadrement numérique ». Ceci montre que la solution « géométrique » dans l'institution vietnamienne, n'est pas considérée comme une solution rigoureuse. Même si elle est acceptée, elle n'occupe qu'une place secondaire, inférieure à celle de la solution « analytique », considérée comme la solution de référence.

En particulier, 2 enseignants vietnamiens apprécient l'*originalité* et l'*initiative* de la solution, mais ne donnent que 2 points à cette solution.

Le fait que les enseignants français ne rédigent qu'une solution analytique dans la partie précédente (II.4.2) et qu'ils apprécient la solution « géométrique » dans cette partie montre que la solution « géométrique » est acceptée dans l'institution française en raison de l'esprit du programme mais qu'elle n'est pas privilégiée à cause de la prédominance de la solution « analytique ».

### **b. Condition pour l'interprétation en terme d'aire d'une intégrale**

Dans leurs commentaires, des enseignants français se questionnent sur les conditions d'interprétation en termes d'aire d'une intégrale car

- « Le graphique ne vient pas naturellement à l'idée des élèves si on ne le suggère pas. »
- « Ils ne penseraient pas à passer au graphique. »

Ils proposent donc de remplacer le tableau de variations de  $f$  dans le texte de l'exercice par la courbe représentative de  $f$  :

- « L'encadrement par les aires semblerait plus évident si on donnait un graphique à la place du tableau. »
- « Tout élève qui trace la courbe de  $f$  pourrait arriver à cette solution. »

Ainsi, selon ces enseignants, acteurs principaux du processus de transposition didactique interne, la présence du graphique sous une forme ou une autre favorisera l'interprétation en terme d'aire.



Aucun enseignant vietnamien n'aborde cette question.

### c. Contrainte pour l'interprétation en terme d'aire d'une intégrale

23 des 53 enseignants vietnamiens n'acceptent pas le signe « = » dans les inégalités :

$$1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 4 \quad (1)$$

D'après eux, les inégalités supra sont mathématiquement incorrectes. Ils proposent l'écriture :

$$1 < \int_0^2 f(x) dx < 4 \quad (2)$$

Sinon, il faut préciser quelles conditions permettent de vérifier le signe « = » dans (1). Cette exigence est-elle raisonnable ?

Logiquement, (1) est correcte car (2) implique (1).

Institutionnellement, on n'attend pas d'indications des conditions pour vérifier l'égalité dans une inégalité de l'intégrale. En effet, le manuel en vigueur propose quatre encadrements de l'intégrale :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, & \frac{2}{9} &\leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7}, \\ \frac{\pi}{4} &\leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{3-2\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{2}, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \end{aligned}$$

Dans les solutions proposées, les auteurs n'indiquent aucune condition pour vérifier le signe « = ». Mathématiquement, le signe « ≤ » dans toutes les inégalités supra est correct mais formel parce qu'on ne peut pas l'atteindre.

Ainsi, les enseignants vietnamiens imposent à la solution « graphique » une contrainte que la solution « analytique » ne subit jamais.

## II.6. Exercices d'intégration facile et difficile du type « calculer $\int_a^b f(x) dx$ » (Partie 3)

### II.6.1. Exercice facile du type « Calculer $\int_a^b f(x) dx$ »

Nous présentons dans le tableau 42 les exercices d'intégration jugés faciles en France et au Vietnam.

Intégrales	Nombre de choix	Raison du choix
$\int_a^b \sum_{i=1}^n k_i f_i(x) dx$ , $f_i$ étant figurée dans le tableau des primitives usuelles. <i>Exemple</i> : $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx$	F : 8/13	Linéarité, calcul de primitive immédiat.
	V : 31/48	Linéarité, calcul de primitive immédiat.
$\int_a^b f(x) dx$ , $f$ peut se ramener à $\sum_{i=1}^n k_i f_i$ grâce à une transformation simple <i>Exemple</i> : $\int_1^4 \frac{x^2 - 2x + 3}{x} dx$	F : 0/12	
	V : 6/48	Transformation simple et calcul de primitive immédiat.
$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx$ , $f$ étant figurée dans le tableau des primitives usuelles. <i>Exemple</i> : $\int_0^1 3xe^{x^2+3} dx$	F : 2/12	Primitivation facile.
	V : 9/48	$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_a^b f(u) du = F(x) \Big _a^b$
$\int_{-1}^1 (t+2)e^{-t} dt$ , $\int_0^\pi x \sin x dx$	F : 2/12	L'intégration par parties est évidente.
$\int_0^\pi x \cos x dx$ , $\int_0^1 xe^x dx$	V : 2/48	Elles sont deux exemples du cours.
$\int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} dx$	F : 1/12	Lecture inverse de formule de dérivée : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$
	V : 0/12	

**Tableau 42.** Intégrales jugées faciles en France et au Vietnam

8 des 13 enseignants français et 31 des 48 enseignants vietnamiens écrivent les intégrales du type  $\int_a^b \sum_{i=1}^n k_i f_i(x) dx$  où les primitives de  $f_i$  sont connues comme intégrales faciles. Le jugement des enseignants français est alors identique à celui des enseignants vietnamiens. Pour calculer ces intégrales, on n'a qu'à mobiliser la linéarité de l'intégrale et la formule de Newton – Leibniz.

### II.6.2. Exercice difficile du type « Calculer $\int_a^b f(x) dx$ »

Nous présentons dans le tableau 43 les intégrales jugées difficiles dans chacune de deux institutions.

Intégrale	Nombre de choix	Raison du choix
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx, \int_1^e \frac{e^x}{1+e^x} dx, \int_1^e \frac{dx}{e^x \ln x}</math></li> <li>• <math>\int_1^e \ln x</math></li> </ul>	F : 5/13	Forme $u'u$ ou intégration par parties n'est pas évidente
	V : 0/44	
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x$	F : 3/13	Difficultés pour linéariser $\cos^3 x$ .
	V : 0/12	
$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$	F : 1/13	Double intégration par parties Nombreuses erreurs de signe dans les calculs
	V : 0/44	
$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$ . Démontrer que $I + J = 3\pi/4$ et $I = J$ . Calculer I, J.	F : 1/13	La résolution peut de plus nécessiter plusieurs niveaux de démonstration.
	V : 0/44	
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$	F : 1/13	Introduction d'un paramètre. Intégration par parties indirecte : $I_n = 1 - nJ_n, J_n = e^{-n\pi/2} + nI_n$ . Résolution d'un système linéaire à deux inconnues.
	V : 0/44	
$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$	F : 1/13	Sans expliquer
	V : 0/44	
Étant donnée la fonction $f$ définie sur $[-1, \pi/2]$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \cos x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \end{cases}$ Calculer l'aire de la surface plane délimitée par la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses.	F : 1/13	Il faut « mélanger » deux techniques de calcul pour répondre.
	V : 0/44	
Intégrale des fonctions rationnelles	F : 0/13	
	V : 14/44	La décomposition d'une fraction en éléments simples n'est pas au programme. Les techniques de décomposition sont à la charge de l'élève.
Intégrale des fonctions irrationnelles	F : 0/13	
	V : 8/44	Difficile à choisir le changement de variable pertinent
$\int_a^b R(\sin x, \cos x) dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx$	F : 0/13	
	V : 10/44	Formules trigonométriques à retenir.
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx) dx, \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, \int_1^e \cos(\ln x) dx$	F : 0/13	
	V : 10/44	Le calcul nécessite plusieurs reprises.
Intégrale des fonctions contenant la valeur absolue	F : 0/13	
	V : 2/44	Il faut éliminer la valeur absolue.

Tableau 43. Intégrales jugées difficiles en France et au Vietnam

Dans l'institution française, 5 des 12 enseignants jugent la difficulté d'une intégrale par l'apparence « trompeuse » de l'expression algébrique de la fonction intégrante, non par les techniques d'intégration requises.

Pour trois intégrales  $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$ ,  $\int_1^e \frac{e^x}{1+e^x} dx$ ,  $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$ , « la présentation en *quotient* empêche de nombreux élèves de percevoir les formes  $u'u$  ». Pour l'intégrale  $\int_1^e \ln x$ , « penser à une intégration par parties quand il y a *une seule fonction apparente* n'est pas évident ». Ces intégrales ne sont pas considérées comme les intégrales difficiles dans l'institution vietnamienne car les techniques d'intégration nécessaires sont l'objet d'un apprêtage par les enseignants (voir tableau 36).

Par ailleurs, 14 des 44 enseignants vietnamiens jugent que l'intégrale d'une fonction rationnelle quelconque est une intégrale difficile car la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples est *totale*ment à la charge de l'élève.

Soit à calculer  $I = \int_1^2 \frac{1-x^2}{1+x^4} dx$ . L'enseignant attend que l'élève écrive :

$$\frac{1-x^2}{1+x^4} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2 - 2x^2} = \frac{1-x^2}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax+B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

et calcule la valeur numérique de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (en résolvant un système d'équations) pour obtenir :

$$\frac{1-x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right)$$

En France, la forme générale :

$$\frac{1-x^2}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

est à la charge de l'institution. L'élève n'a qu'à calculer  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . C'est pourquoi, l'intégrale de fonctions rationnelles n'est pas jugée difficile dans l'institution française.

### III. Conclusion

Les liens entre aire, primitive et intégrale que les enseignants de chacune de deux institutions cherchent à mettre en place sont cohérents avec les liens dans le savoir à enseigner (chapitres A1, A2) :

En France :

- L'aire (sous la courbe) sert à interpréter géométriquement l'intégrale. L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe).
- La primitive sert à calculer l'intégrale (définie). L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) sert à calculer la primitive (s'annulant en un point donné).
- L'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.

Au Vietnam :

- L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe) mais l'aire ne sert pas à interpréter géométriquement l'intégrale.
- La primitive sert à calculer l'intégrale (définie), mais l'intégrale (définie) ne sert pas à calculer la primitive.

- L'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.

En particulier, l'ostensif  $\int$  permet de considérer le calcul de primitive comme celui d'une intégrale. L'intégrale indéfinie (les primitives) devient institutionnellement une intégrale sans bornes et vice-versa l'intégrale devient une intégrale indéfinie avec bornes. *Ceci incite-t-il les élèves vietnamiens à assimiler les notions de primitive et d'intégrale à une seule notion ?* Nous tenterons de répondre à cette question dans la partie C, à travers un questionnaire pour élève.

Dans l'apprêtage du savoir, les techniques d'intégration que les enseignants français cherchent à mettre en place sont conformes aux programmes. Par contre, les enseignants vietnamiens, sous les contraintes du savoir à enseigner, du baccalauréat et notamment du concours d'entrée universitaire, tout en conservant leurs relatives libertés, tentent d'introduire des techniques d'intégration hors du programme comme l'intégration de fonctions rationnelles et irrationnelles, etc.

La solution « géométrique » (mobilisant l'interprétation en terme d'aire de l'intégrale) est acceptée mais pas toujours privilégiée dans l'institution française. La bonne vie de cette solution nécessite la présence d'un graphique dans le texte de l'exercice. Par contre, la solution « géométrique » est refusée dans l'institution vietnamienne, même si elle est optimale. L'institution lui impose des contraintes dont la solution « analytique » est dispensée.

Quelle est la nature épistémologique des deux rapports institutionnels différents à l'objet de savoir « intégrale » ? Quel est l'écart entre le savoir de référence et le savoir à enseigner dans EMS en France et au Vietnam ? Quels liens entre aire, primitive et intégrale s'établissent dans l'émergence historique de la notion d'*intégrale* ?

Nous chercherons des éléments de réponses à ces questions dans le chapitre prochain.

## Chapitre B3.

### Une enquête épistémologique sur l'objet « intégrale » pour un retour sur l'analyse institutionnelle

Les analyses effectuées dans les chapitres précédents ont mis en évidence le rapport institutionnel à l'objet de savoir *intégrale* dans l'enseignement des mathématiques au Vietnam et en France. Nous en rappelons ici les aspects principaux :

1. *Méthodes d'intégration*. Outre l'intégration par parties, méthode commune aux deux institutions, chacune de ces dernières présente une méthode d'intégration différente : l'une expose le changement de variable, et l'autre la primitivation.

Les techniques d'intégration apprêtées en France sont identiques à celles à enseigner. Par contre, sous les contraintes du savoir à enseigner, du baccalauréat et du concours d'entrée universitaire, les enseignants vietnamiens tentent de mettre en place des techniques d'intégration hors du programme.

2. *Différentiation et ostensif  $dx$* . Au Vietnam, la notion de *différentielle* et l'ostensif  $dx$  permettent d'effectuer le changement de variable comme substitution littérale formelle sans se référer aux formules de changement de variable présentes dans le cours. De plus, le manuel de la période 2000 – 2006 manipule l'ostensif  $dx$  pour effectuer le changement de variable implicite sans avoir besoin de nouvelle variable. En France, la notion de *différentielle* et le changement de variable sont hors des programmes. Ce dernier est remplacé par la primitivation.

3. *Calcul approché*. Dans les programmes de la période 1980 – 2002 en France, l'approximation d'intégrale est effectuée par *calcul numérique*. Elle est aussi présente dans la partie *exercices* des manuels de la période 2002 – 2006 par *encadrement numérique* d'intégrale. C'est la seule trace de l'approximation d'intégrale dans les épreuves du baccalauréat français des trois périodes. Le calcul approché d'intégrale est toujours absent au Vietnam.

4. *Les liens établis entre aire, primitive, intégrale* dans la partie *exercices* sont quasiment inchangés dans chacune de deux institutions pendant les trois périodes.

Ces liens influence fortement le statut de l'interprétation géométrique de l'intégrale dans chacune de deux institutions. En France, l'interprétation géométrique de l'intégrale est institutionnalisée, y compris dans les solutions attendues dans des tâches de calcul d'intégrale et dans l'encadrement numérique des intégrales. Au Vietnam, elle est institutionnellement marginalisée.

En France, dans les deux dernières périodes, l'institution a l'intention de séparer le calcul de primitive du calcul d'intégrale. Le calcul d'une primitive *quelconque* d'une fonction est effectué sans l'ostensif  $\int$ . En revanche, l'intégrale dépendant de la borne supérieure sert à calculer la primitive *s'annulant en un point donné* d'une fonction et à générer de nouvelles fonctions comme les fonctions exponentielle et logarithmique. Au Vietnam, dans la dernière période, primitive et intégrale sont indifférenciées *dans la praxis* en raison de la présence de l'ostensif commun  $\int$ . Étant présente dans le logos mais absente de la praxis, l'intégrale dépendant de la borne supérieure ne sert ni à générer de nouvelles fonctions, ni à calculer la primitive s'annulant en un point donné.

Le lien direct entre aire et primitive n'est établi dans aucune des deux institutions.

5. *Baccalauréat en France et au Vietnam. Concours d'entrée universitaire au Vietnam.* Les types de tâches présents dans le baccalauréat des deux institutions concernent un même genre de tâches « Calculer ». Trois objets fondamentaux sont concernés par ces calculs : primitive, intégrale, aire. Dans les épreuves du baccalauréat français, ces calculs sont susceptibles de servir à une étude de suites, d'équations différentielles ou de probabilité. Ils ne le sont jamais dans les épreuves du baccalauréat vietnamien.

Il y a un écart significatif entre les techniques d'intégration exigées au concours d'entrée universitaire au Vietnam et celles dans le manuel. Cet écart exige un véritable déplacement du topos de l'élève de l'EMS vers celui du candidat du concours auquel participent les cours supplémentaires préparant au concours.

Ceci nous mène à formuler de nouvelles questions, de nature épistémologique, qui nous permettent d'interroger l'écart entre un savoir de référence et le savoir à enseigner dans EMS en France et au Vietnam :

1. Comment et pourquoi apparaît dans l'histoire des mathématiques chacune des deux méthodes d'intégration « concurrentes » : changement de variable et primitivation ? Quelles organisations mathématiques sont attachées à l'une ou à l'autre ? Comment ces organisations sont-elles présentes dans le savoir à enseigner ?

2. Quels sont les significations et les valences instrumentale et sémiotique du  $dx$  dans la notation  $\int_a^b f(x)dx$  que dans les ouvrages universitaires de référence ? Comment sont-elles transposées dans les manuels des EMS en France et au Vietnam ?

3. Quels liens entre aire, primitive et intégrale s'établissent dans l'émergence historique de la notion d'*intégrale* ? Comment ces liens sont-ils transformés par leur vie institutionnelle dans EMS en France et au Vietnam ?

4. Quel modèle pour une organisation mathématique de référence de la notion d'*intégrale* (de Riemann) ? Quel écart entre ce modèle et les organisations mathématiques à enseigner dans EMS en France et au Vietnam ?

Pour chercher des éléments de réponses à ces questions, nous allons effectuer une enquête épistémologique sur l'objet *intégrale* en nous référant aux ouvrages suivants :

#### *Ouvrages sur l'histoire des mathématiques*

1. Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J. (1986), *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil, Paris
2. Hairer E. et Wanner G. (2000), *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer
3. Laroche F. (2003), *Promenades mathématiques*, Ellipses, Paris
4. Pier J.-P. (1996), *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris

#### *Ouvrages mathématiques*

1. Bourbaki N. (1949), *Éléments de mathématiques*, Livre IV, Éditions Hermann et Compagnie, Paris.
2. Fikhtengolts G. M. (1968), *Éléments d'analyse mathématique*, Tome I, Éditions Hayka, Moscou, traduction en vietnamien (1977), Universités et lycées professionnels, Hanoi.

3. Rudin W. (1976), *Principes d'analyse mathématique*, McGraw-Hill, traduction en français (1995), Édiscience internationale, Paris.
4. Lang S. (1964), *A first cours in calculus*, Addison-Wesley, réédition (2000), Springer.

## I. Changement de variable et primitivation

Le calcul intégral dont l'origine se trouve dès l'Antiquité dans le calcul des grandeurs chez les Grecs est le fruit du travail de plusieurs générations de mathématiciens.

Nous étudierons d'abord les travaux d'Isaac Newton (1642 – 1727) et de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), considérés par les historiens comme les fondateurs du calcul infinitésimal, avant même la formalisation des notions de *fonction* et de *limite*.

S'il est juste de considérer Newton comme le premier créateur du calcul infinitésimal en tant que corps de doctrine unissant les principes élémentaires des calculs différentiel et intégral, il est également juste de voir en Leibniz un autre créateur, postérieur, mais indépendant. (Taton, cité par Pier, 1996, p. 39)

Tant qu'il ne s'agit que du XVII<sup>e</sup> siècle, il faut bien constater que la voie n'est ouverte à l'analyse moderne que lorsque Newton et Leibniz, tournant le dos au passé, acceptent de chercher provisoirement la justification des nouvelles méthodes, non dans des démonstrations rigoureuses, mais dans la fécondité et la cohérence des résultats. (Bourbaki, cité par Pier, *ibid.*)

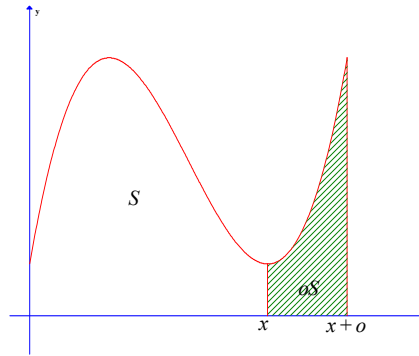
### I.1. Newton, lien entre le taux de variation instantanée de l'aire en $x$ et l'ordonnée de la courbe en $x$

En 1669, en calculant l'aire sous la courbe d'équation  $y = ax^{m/n}$ , Newton invente un procédé général qui lui permet non seulement d'obtenir l'aire cherchée, mais encore de calculer l'aire sous la courbe par l'opération inverse du calcul du taux de variation instantanée de l'aire (*ibid.*, p. 26).

Cette opération élémentaire, au lieu d'être appliquée uniquement à la résolution de questions particulières, devient la base du processus intellectuel qui est engagé dans les questions de quadrature, ou de rectification de courbes, et qui est le processus de l'intégration. Le calcul infinitésimal est constitué. (Brunschvicg, cité par Pier, *ibid.*)

Newton appelle *moments* les quantités infiniment petites qui sont équivalentes aux accroissements infinitésimaux. Il se propose de calculer l'aire  $S$  de la surface plane délimitée par une courbe, les axes des coordonnées et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point  $x$ . Il considère le moment d'aire  $oS$  (accroissement  $\Delta S$  de l'aire) lorsque  $x$  croît d'une quantité infinitésimale notée  $o$  (accroissement  $\Delta x$  de  $x$ ). Il calcule le taux de variation instantanée de l'aire  $\frac{oS}{o}$  au point d'abscisse  $x$ , et constate qu'il est égal à l'ordonnée  $y$  du point d'abscisse  $x$  de la courbe. En termes modernes, ce résultat s'énonce  $S'(x) = f(x)$ .





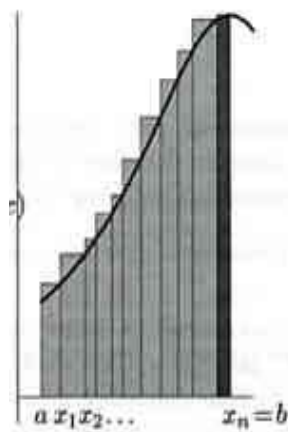
Ainsi, si l'aire donnée s'exprime par  $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$ , son taux de changement sera  $y = ax^{\frac{m}{n}}$ .

Inversement, Newton détermine l'aire sous la courbe dont l'équation  $y = f(x)$  est donnée en inversant les opérations de dérivation, c'est-à-dire en calculant l'intégrale indéfinie de  $f$ . (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 191)

Ainsi, le travail supra de Newton établit un lien entre la quadrature et le taux de variation instantanée de l'aire, *germe de la primitivation*. Il s'appuie sur ce lien pour quarrer les courbes « polynômes » dont il peut inverser facilement le processus de calcul de taux de variation instantanée. Pour les courbes « non polynômes », il utilise le développement en série infinie et quarré terme à terme en déployant une remarquable intuition de convergence. Il place toujours le taux de variation instantanée de l'aire au centre de sa démarche.

## I.2. Leibniz, introduction de $\int y dx$ comme sommation des aires de rectangles infinitésimaux de dimension $(y, dx)$

Si Newton effectue la quadrature par calcul inverse du taux de variation instantanée et attribue une importance première à ce dernier, Leibniz, sans connaître le travail de Newton, considère l'aire sous la courbe comme somme des aires de rectangles infinitésimaux. Hairer et Wanner (2000, p.108) illustrent le concept de l'aire chez Leibniz par la figure ci-dessous.



Nous présentons dans le tableau 44 l'évolution des notations leibniziennes concernant la quadrature.

Date	Notation utilisée
Avant octobre 1675	$\ell$ : différence des deux valeurs voisines d'une quantité infinitésimale
	$omn.\ell$ : somme des $\ell$
29 octobre 1675	$\int \ell$ : somme des $\ell$ l'ostensif $\int$ remplace la notation $omn.$
11 novembre 1675	$dx$ : quantité infinitésimale de $x$ $dy$ : quantité infinitésimale de $y$ $dy/dx$ : rapport entre $dy$ et $dx$
21 novembre 1675	$\int ydx$ : aire sous la courbe, somme des aires de rectangles infinitésimaux de dimension $(y, dx)$ $ydx$ remplace $\ell$

**Tableau 44.** Notations leibniziennes autour de la quadrature

Dans sa notation  $\int ydx$ , Leibniz ne place pas les bornes de l'intégrale. Ces dernières sont explicitées par des mots.

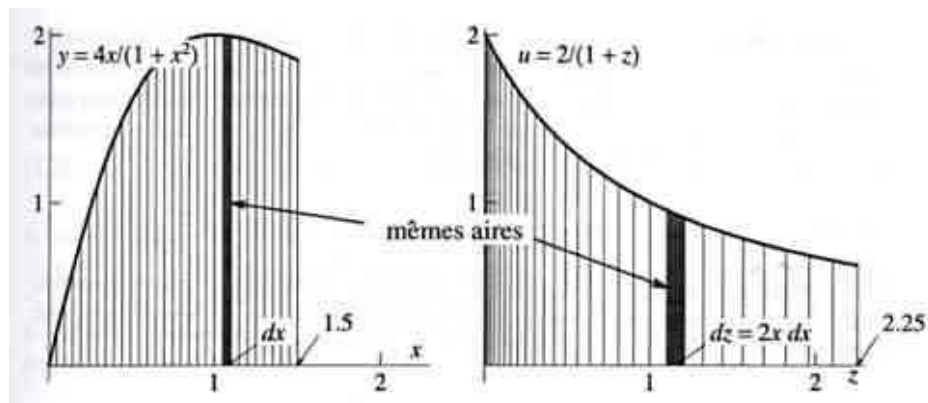
Leonhard Euler (1707 – 1783) utilise le premier la notation  $\int f(x)dx \begin{matrix} x=a \\ x=b \end{matrix}$ . La notation

actuelle  $\int_a^b f(x)dx$  est due à Joseph Fourier (1768 – 1830).

Leibniz obtient en 1673 le théorème de la *transmutation* qui lui permet d'effectuer la quadrature sous une courbe via celle sous une courbe auxiliaire (Pier, 1996, p. 34).

Ci-dessous, se trouve l'exemple donné par Hairer et Wanner pour illustrer le lien entre le changement d'ordonnée  $z = x^2$  (courbe auxiliaire) et la transmutation de figures pour une quadrature particulière.

[...]  $z = x^2$  transformant la fonction  $\frac{4x}{1+x^2}$  en  $\frac{2}{1+z}$ . Les points  $x$  et  $x + \Delta x$  sont transformés en  $z = x^2$  et  $z + \Delta z = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$ . Lorsque  $\Delta x$  tend vers 0, les rectangles en noir ont les mêmes aires et par conséquent, les deux intégrales  $\int_0^{1,5} \frac{4x}{1+x^2} dx$ ,  $\int_0^{2,25} \frac{2}{1+z} dz$  ont la même valeur.



Dans l'exemple, on voit bien que  $dx = \Delta x$  :  $ydx$  représente l'aire d'un rectangle curviligne infinitésimal en effectuant le produit des deux dimensions d'un rectangle curviligne, ce qui permet de justifier (de façon erronée) la transmutation.

Leibniz préconise de plus en plus systématiquement la notation  $\int ydx$ . La variable d'intégration peut être choisie arbitrairement, mais dès 1686 Leibniz prescrit l'usage de  $dx$  pour garder l'équipollence de figures dans la transmutation.

J'avertis qu'on prenne garde de ne pas omettre  $dx$ ... faute fréquemment commise, et qui empêche d'aller de l'avant, du fait qu'on ôte par là à ces indivisibles, comme ici  $dx$ , leur généralité... de laquelle naissent d'innombrables transfigurations et équipollences de figures. (Leibniz, cité par Bourbaki, 1949, p. 166)

L'évolution des notations, notamment de  $\ell$  à  $ydx$  et de  $omn.$  à  $\int$  permet à Leibniz de mieux quarrer les courbes à travers les manipulations sur les côtés des rectangles infinitésimaux constitutifs. Pour lui, l'ostensif  $dx$  est d'abord un facteur multiplicatif désignant un côté du rectangle infinitésimal par lequel on doit multiplier l'ordonnée  $y$ , autre côté du rectangle, pour obtenir l'aire du rectangle infinitésimal en question. De plus, dans la transmutation, l'ostensif  $dx$  indique l'équipollence de figures, analogue à l'*indicateur variable d'intégration* de nos jours. Ainsi, la transmutation chez Leibniz, forme primitive du changement de variable, est attaché fortement aux ostensifs  $\int$  et  $dx$  reflétant les concepts infinitésimaux avant l'émergence des notions rigoureuses de *fonction* et de *limite*.

### ***fonction et de limite***

Pour regarder la primitivation et le changement de variable après l'émergence des notions de *fonction* et de *limite*, deux notions primordiales de l'analyse mathématique, nous nous référons aux quatre ouvrages universitaires annoncés au début du chapitre.

#### **I.3.1. Changement de variable**

Comme on pouvait le prévoir, aucun des quatre ouvrages de référence n'aborde la transmutation de figures.

À part l'ouvrage de Rudin exposant le changement de variable dans le cadre plus général de l'intégrale de Riemann-Stieltjes, les trois autres références présentent le changement de variable de façon analogue, en le déduisant de la dérivation des fonctions composées.

Nous choisissons d'examiner le théorème du changement de variable tel qu'énoncé par Lang<sup>23</sup>.

Soient  $g$  une fonction à dérivée continue sur un intervalle  $[a, b]$ ,  $f$  une fonction continue sur un intervalle contenant les valeurs de  $g$ , alors

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dg}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du . \text{ (p. 338)}$$

Au lieu de :

Soient  $g$  une fonction à dérivée continue sur un intervalle  $[a, b]$ ,  $f$  une fonction continue sur un intervalle contenant les valeurs de  $g$ , alors

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Dans la citation supra, l'unique formule de changement de variable peut être lue comme deux formules. En effet, la lecture de gauche à droite exprime le changement de variable  $u = g(x)$  (*la variable auxiliaire est une fonction de la variable initiale*). La lecture dans le sens inverse, qui est de ce fait moins explicite, exprime le changement de variable  $x = g(t)$  (*la variable initiale est une fonction de la variable auxiliaire*).

$$u = g(x) : \int_a^b f(g(x)) \frac{dg}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$x = g(t) : \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) \frac{dg}{dt} dt$$

Lang propose dans la partie *exercices* des intégrales nécessitant l'un ou l'autre changement de variable  $u = g(x)$  et  $x = g(t)$ . C'est à travers ces exercices que les deux types de changement de variable sont mis en œuvre et que le caractère « pratique » de la notation conventionnelle  $dx$  est mis en relief.

Ainsi, les notions rigoureuses de *fonction* et de *limite* permettent de présenter le changement de variable détaché de la transmutation de figures, en le reliant aux conditions de continuité et de dérivation des fonctions.

Le théorème du changement de variable autorise des manipulations algébriques sans avoir besoin de revenir sur le processus de dérivation des fonctions composées : en effet l'égalité présente dans le théorème accorde une valence instrumentale aux ostensifs  $\int$  et  $dx$ . Lang rend particulièrement visible cette valence instrumentale par la forme qu'il donne à l'égalité du théorème de changement de variable.

Pour le préparer, auparavant dans le chapitre sur la dérivée, Lang introduit pour  $g'(x)$  la notation  $\frac{dg}{dx}$  en précisant : la notation  $\frac{dg}{dx}$  « doit être lue comme un tout » dans un premier temps, et sera *conventionnellement considérée comme une fraction plus tard*. Bien sûr il

<sup>23</sup> Toutes les citations de Serge Lang sont traduites de l'anglais par nous.

démontre le théorème par les propriétés des fonctions composées, mais de façon « pratique » son égalité sous-entend l'usage d'une règle algébrique dite « à chaîne »<sup>24</sup> :

$$u = g(x) : \int_a^b f(g(x)) \frac{dg}{dx} dx = \int_a^b f(u) \frac{du}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du ; \text{ avec } \frac{du}{dx} dx = du$$

Nous reviendrons plus loin sur l'usage de cette règle algébrique dans le calcul intégral.

La signification conventionnelle et clairement « pratique » de la notation  $dx$  est donc en rupture avec celle de Leibniz.

### I.3.2. Absence de la primitivation dans les références choisies

Aucun des quatre ouvrages de référence ne présente la primitivation comme méthode d'intégration : seul le théorème de changement de variable est présent.

Nous supposons deux raisons à cette absence : premièrement, la primitivation, en l'absence des ostensifs  $\int$  et  $dx$ , ne permet pas des manipulations algébriques ; deuxièmement, elle ne permet pas le calcul des intégrales nécessitant le changement de variable  $x = \varphi(t)$  comme par exemple  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

## I.4. Retour sur les manuels au Vietnam et en France : domaine de fonctionnement des deux méthodes

### I.4.1. Changement de variable dans EMS au Vietnam

Le manuel de la troisième et dernière période (2000 – 2006) au Vietnam expose explicitement deux formules de changement de variable, nommées de type 1 et de type 2.

*Changement de variable de type 1. Théorème.* Si

1.  $x = u(t)$  est une fonction à dérivée continue sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ ,
2. la fonction composée  $f(u(t))$  est déterminée sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ ,
3.  $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$ ,

alors on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[u(t)]u'(t) dt$$

*Changement de variable de type 2.* Pour calculer l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ , on prend souvent une

variable auxiliaire  $t = v(x)$  comme nouvelle variable.

On transforme  $f(x)$  en  $g(v(x))v'(x)$ . En posant  $t = v(x)$ , donc  $dt = v'(x)dx$ , on a

$$f(x)dx = g(v(x))v'(x)dx = g(t)dt.$$

Si  $G(t)$  est une primitive de  $g(t)$ , selon la propriété (4) de la primitive,  $G(v(x))$  est une primitive de  $g(v(x))v'(x)$ . On a donc

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(v(x))v'(x) dx = G(v(x)) \Big|_a^b$$

<sup>24</sup> La règle à chaîne (**Chain rule**) est le terme pris par Lang pour désigner la règle de dérivation d'une fonction composée  $df(u(x))/dx = df/du \cdot du/dx$ .

Ainsi, la partie cours du manuel énonce explicitement deux formules de changement de variable  $x = u(t)$  et  $t = v(x)$ . Cependant, comme nous l'avons dit dans le chapitre A1, la pratique du calcul s'appuie sur la différentiation des fonctions (introduite auparavant) outillée par l'ostensif  $dx$ , et non sur ces formules.

#### I.4.2. Primitivation dans EMS en France

Les notions de *dérivée* et d'*intégrale* étant bien définies, la quadrature ne dominant plus la façon de poser le problème, la primitivation actuelle dans EMS en France n'est pas identique à celle de Newton, mais son idée centrale reste inchangée : pour calculer les primitives d'une fonction  $f$ , on remonte à un processus de dérivation bien choisi afin de pouvoir reconnaître  $f$  comme fonction dérivée d'une autre fonction  $F$ , les primitives à calculer sont alors  $F + C$  ( $C \in \mathbf{R}$ ). Comme nous l'avons souligné dans le chapitre A2 concernant l'étude des manuels des trois périodes en France (de M2 à M6), la primitivation permet d'effectuer le calcul de primitive en l'absence des ostensifs  $\int$  et  $dx$ . Introduisant la primitivation au détriment du changement de variable, l'institution prétend placer la dérivation au centre de la démarche et établir une distinction claire entre calcul de primitive et intégration.

Nous présentons ci-dessous un exercice résolu dans le manuel M2 ne mobilisant aucun de deux ostensifs  $\int$  et  $dx$ . Des exercices analogues se trouvent aussi dans les manuels M3, M4, M5, M6.

*Exercice.* Déterminer les fonctions primitives de la fonction  $f: f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

*Solution.* La fonction  $g$ , définie par  $g(x) = \sqrt{u(x)}$ , a pour fonction dérivée  $g'$ , telle que  $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ .

La fonction  $g$ , définie par  $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ , a pour fonction dérivée  $g'$ , telle que  $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Donc :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow F(x) = \sqrt{1+x^2} + C.$$

L'exercice supra montre que le changement de variable  $u = \psi(x)$  peut se ramener à la primitivation sous réserve de reconnaître que la fonction  $f$  en question peut s'écrire comme  $(g \circ \psi)\psi'$  et de connaître une primitive  $G$  de  $g$ .

Mais la primitivation ne permet pas de calculer les primitives de fonctions nécessitant le changement de variable  $x = \varphi(t)$ , comme la fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ .

Pour une telle fonction, Newton développe la fonction en série infinie et « intègre » terme à terme, le problème de la convergence n'étant pas posée et restant donc implicite.

Le calcul intégral d'une telle fonction est-elle présente dans EMS en France ? Si oui et en l'absence du développement en série infinie et du changement de variable, comment peut-on accomplir ce calcul ?

Les manuels M3, M4, M5, M6 et les annales du baccalauréat en France proposent de mobiliser le cadre géométrique pour calculer ce type d'intégrales. Nous en présentons ci-dessous trois exemples dans lesquels l'ostensif  $\int$  est présent dans la consigne mais n'intervient pas dans le calcul car les intégrales proposées sont calculées à travers les interprétations géométriques correspondantes.

- **Exercice 27** (*manuel M5, page 188*). Après avoir donné la nature de la courbe  $C$  représentant la fonction  $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , interpréter géométriquement  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ , puis calculer cette intégrale.

**Solution** (*du manuel M5*).  $C$  est le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon 1 situé dans le demi-plan d'équation  $y \geq 0$ . Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi.$$

- **Exercice 95** (*manuel M6, page 341*). L'objet de l'exercice est de démontrer la formule :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{2}$$

due au mathématicien anglais Wallis (1616 – 1703). [...]

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

b) Conclure.

**Solution** (*attendue*).  $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$  est l'aire sous le demi-cercle de centre  $(1/2, 0)$  et de rayon  $1/2$  situé dans le demi-plan d'équation  $y \geq 0$ . Donc :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}.$$

- **Sujet 3.** (*Annales 2000, Corrigés Bac, Mathématiques Série S, Vuibert, pp. 37-38*). Les résultats obtenus dans les questions précédentes :

$$E = \{M(x, y) \mid \sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2} + 1, 1/x \leq y \leq -x + 2\sqrt{2}\}$$

$$\text{Aire de } E = 2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2} - 1) \text{ (u.a.)}$$

$s$  est la similitude directe de centre l'origine  $O$  du repère, de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\pi/4$ .

$$F = \{M(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, \sqrt{4+x^2} \leq y \leq 2\sqrt{2}\}$$

**Question 3c.**

On admet que  $F$  est l'image de  $E$  par  $s$ .

En déduire la valeur de l'intégrale:

$$I = \int_{-2}^2 (2\sqrt{2} - \sqrt{4+x^2}) dx.$$

**Solution** (*présentée par Annales 2000*).

$I$  représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface  $F$  ; on admet que  $F$  est l'image de  $E$  par la similitude  $s$  de rapport  $\sqrt{2}$  ; par suite, on obtient:

$$I = \text{aire de } F = (\sqrt{2})^2 \cdot \text{aire de } E = 4\sqrt{2} + 4\ln(\sqrt{2} - 1) \text{ (u.a.)}$$

Ainsi, nous trouvons dans les trois exercices supra une niche de l'interprétation géométrique de l'intégrale : permettre de calculer des intégrales à changement de variables  $x = \varphi(t)$  sans avoir besoin de changement de variable.

### I.5. Conclusion

Nous présentons les concepts de quadrature chez Newton et Leibniz, la primitivation et le changement de variable à enseigner respectivement en France et au Vietnam dans les tableaux 45 et 46.

	Newton	Leibniz
Aire sous la courbe	L'aire variable sous la courbe en $(x, y)$ a pour taux de variation instantanée $y$ .	L'aire sous la courbe est la somme des aires de rectangles infinitésimaux
Notations	$o$ : moment de $x$ $oS$ : moment d'aire $\frac{oS}{o}$ : taux de variation instantanée de l'aire	$dx$ : quantité infinitésimale de $x$ $ydx$ : aire de rectangle infinitésimal $\int ydx$ : somme de tous les $ydx$
Calcul d'aire	Le calcul d'aire est l'opération inverse du calcul de taux de variation instantanée $\frac{oS}{o} \Rightarrow S$	Le calcul d'aire est la sommation de rectangles curvilignes infinitésimaux $S = \int ydx$
Méthode de calcul	Lecture inverse du calcul de taux de variation instantanée pour les polynômes Développement en série infinie et quadrature terme à terme pour les non polynômes	Transmutation de figures

Tableau 45. Les concepts de quadrature chez Newton et Leibniz

Interprétation géométrique d'intégrale (en France)	Primitivation (en France)	Changement de variable (au Vietnam)
Les ostensifs $\int$ et $dx$ présents dans la consigne n'interviennent pas dans la solution	Absence des ostensifs $\int$ et $dx$	Nécessite les ostensifs $\int$ et $dx$
<ul style="list-style-type: none"> <li>Le lien entre intégrale et aire, les formules élémentaires enseignées deviennent des éléments technologiques</li> <li>Calcul d'intégrale <math>\Leftrightarrow</math> Calcul d'aire</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La dérivation devient un élément technologique</li> <li>Primitivation <math>\Leftrightarrow</math> Lecture inverse de la dérivation d'une fonction composée</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La différentiation devient un élément technologique</li> <li>Changement de variable <math>\Leftrightarrow</math> Substitution littérale formelle</li> </ul>
Si $f$ continue, positive et $a \leq b$ , alors $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'aire du domaine $\{M(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$	Si $F$ est une primitive de $f$ alors les primitives de $(f \circ u)u'$ sont $F \circ u + C$	Changement de variable $u = \psi(x)$ Changement de variable $x = \varphi(t)$

Tableau 46. Interprétation géométrique d'intégrale et primitivation (en France) en comparaison avec changement de variable (au Vietnam)

L'absence des notions de *fonction* et de *limite* empêche Newton et Leibniz de fonder leurs pratiques sur une base solide. Une signification erronée de  $dx$  chez Leibniz nous mène à interroger les significations et les valences de  $dx$  dans le savoir savant et dans le savoir à enseigner au Vietnam en France.



## II. Notion de différentielle et notation $dx$

### II.1. Notion de *différentielle* et notation $dx$ dans les références choisies

#### II.1.1. Notion de différentielle et notation $dx$ dans *Éléments de mathématiques de Bourbaki*

Le livre IV des *Éléments de mathématiques*, comme le précise le sous-titre, est consacré à la théorie élémentaire des fonctions d'une variable réelle et comprend trois chapitres : Dérivées ; Primitives et Intégrales ; Fonctions élémentaires. *Les notions de différentielle et d'intégrale indéfinie n'y sont pas présentes*. Aucune notation spécifique n'est réservée à la notion de primitive. L'intégrale (c'est-à-dire l'intégrale définie) d'une fonction réglée est définie par la formule de Newton-Leibniz dès l'établissement d'un lien entre une somme de Riemann et une primitive d'une même fonction réglée.

PROPOSITION 5. Soit  $f$  une fonction réglée dans un intervalle  $I$ ,  $g$  une primitive de  $f$  dans  $I$ ,  $[x_0, x]$  un intervalle compact contenu dans  $I$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre  $\rho > 0$  tel que, pour toute subdivision de  $[x_0, x]$  en intervalles de longueur  $\leq \rho$ , on ait

$$\left\| g(x) - g(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right\| \leq \varepsilon$$

pour toute somme de Riemann relative à cette subdivision. (p. 64) [...]

Pour une telle fonction  $f$ , à valeurs dans  $E$ , une primitive  $g$  de  $f$  et deux points quelconques  $x_0, x$  de  $I$ , l'élément  $g(x) - g(x_0)$  de  $E$  (qui évidemment est le même, quelle que soit la primitive  $g$  de  $f$  que l'on considère) est appelé *intégrale de la fonction  $f$  de  $x_0$  à  $x$*  (ou dans l'intervalle compact

$[x_0, x]$ ) et noté par  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  ou  $\int_{x_0}^x f$ . Ce nom et cette notation ont leur origine dans la

proposition 5, qui montre qu'une intégrale peut être approchée arbitrairement par une somme de Riemann [...] (p. 65)

Aucun lien entre  $dt$  et la notion de *différentielle* n'est présenté dans ce livre. *Le  $dt$  dans la notation  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  est considéré comme une trace de  $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$  dans les sommes de Riemann.*

À ce propos, Guénard écrit dans son *Vade-mecum du poseur de sujets de mathématiques* (2005) :

Les spécialistes distinguent maintenant les théories comportant une notion de différentielle, de celles qui n'en comportent pas. Par exemple, les théories de Riemann et de Riemann-Cauchy (les intégrales « généralisées » usuelles) ne font pas appel aux différentielles, tandis que la théorie de Riemann-Stieltjes repose sur cette notion. Dans une théorie ne faisant pas appel aux différentielles, on n'utilise pas la notation  $dx$ , qui devient réservée aux théories où cette notation a été définie proprement. En pratique, la théorie de l'intégrale qui est enseignée dans le secondaire est une théorie de Newton (calcul des intégrales par primitivation), ce qui se justifie pleinement depuis quelques années grâce à la théorie de Henstock (dans la théorie de Henstock, les dérivées sont toutes intégrables, ce qui n'est le cas ni dans la théorie de Riemann, ni dans celle de Riemann-Cauchy, ni dans celle de Lebesgue). (Op. cité p. 6)

Deux notations différentes sont présentes dans Bourbaki pour noter l'intégrale de Riemann, l'une avec  $dt$  et l'autre sans ; cependant, la notation  $\int_{x_0}^x f$  n'est utilisée que dans l'énoncé

des théorèmes, jamais dans les exercices où  $\int_a^b f(x)dx$  est systématiquement présente. Une hypothèse en découle : la notation  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  joue un rôle indispensable dans le traitement et le calcul d'intégrales particulières. Lequel ?

Guénard, en cohérence avec son propos précédant, poursuit :

Pour être conforme à l'usage contemporain, on peut donc remplacer la notation  $\int_a^b f(x)dx$  par la notation plus simple  $\int_a^b f$ . Lorsqu'on veut préciser la forme de la fonction sous l'intégrande [sic], il suffit d'utiliser la notation standard des fonctions. Par exemple,  $\int_a^b (x \mapsto xe^x)$ . (Op. cité pp. 6-7)

Pour Guénard, si l'ostensif  $\int$  est indispensable, la notation différentielle  $dx$  est au contraire à prescrire car non conforme à l'usage contemporain, c'est-à-dire contradictoire avec le fait que les théories de Riemann et de Riemann-Cauchy sont sans différentielle.

Or dans la notation proposée sans  $dx$  comme  $\int_a^b (x \mapsto e^x)$ , Guénard accorde à la notation  $x \mapsto$  la valence d'indicateur de variable d'intégration. Ceci confirme que la présence d'un indicateur de variable d'intégration dans la notation de l'intégrale de Riemann, sous une forme ou une autre, est inévitable sur le plan pratique.

### II.1.2. Notion de différentielle et notation $dx$ dans *Éléments d'analyse mathématique de Fikhtengolz*

Dans *Éléments d'analyse mathématique*, Fikhtengolz (1968) définit la différentielle d'une fonction comme fonction linéaire. Il convient explicitement d'identifier la différentielle d'une fonction à son image, et de noter  $dx$  la différentielle de la fonction identique. Cette convention lui permet d'établir l'égalité  $dy = y'_x dx$ .

Fikhtengolz introduit l'intégrale définie comme limite commune de sommes de Riemann et la note  $\int_a^b f(x)dx$ . Pour expliquer la raison d'être de cette notation et de la présence de  $dx$ , il se réfère à l'usage de  $\int ydx$  chez Leibniz.

Pour désigner la somme du type  $\sum y\Delta x$  (plus précisément la valeur de la limite de cette somme), Leibniz propose la notation  $\int ydx$ , où  $ydx$  correspond au terme représentatif de la somme et  $\int$  est un S stylisé, première lettre du mot latin *Summa*. Comme l'aire que traduit cette limite est aussi une primitive de la fonction  $f(x)$  (sic), cette notation est reprise pour désigner une primitive. Plus tard avec l'introduction de la notation de la fonction, on écrira  $\int f(x)dx$  pour parler de l'aire variable et  $\int_a^b f(x)dx$  dans le cas de l'aire d'une surface fixe ABCD, correspondant à une variation de  $x$  de  $a$  à  $b$ . (Op. cité, p. 270)

Fikhtengolz donne des exemples de l'intégration de certains types de fonctions, la plupart pour une intégrale indéfinie. Dans ces exemples, dont quelques extraits figurent ci-dessous,

il utilise de façon mélangée sans explication les écritures  $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$  et  $\int f(\varphi(x)) d\varphi(x)$  où le  $d\varphi(x)$  n'est pas un élément différentiel mais *permet d'effectuer un changement de variable implicite, en économisant une nouvelle variable*.

1. On a à calculer  $\int e^{x^2} x dx$ . En posant  $t = x^2$ , on a  $dt = 2x dx$ . Donc :

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \text{ (p. 242)}$$

2.  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C. \text{ (p. 243)}$

3.  $\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C \text{ (p. 243)}$

### II.1.3. Notion de différentielle dans *Principes d'analyse mathématique* de Rudin

Dans *Principes d'analyse mathématique*, Rudin (1976) définit l'intégrale comme valeur commune des intégrales de Riemann supérieure et inférieure, et la note  $\int_a^b f dx$  ou  $\int_a^b f(x) dx$ .

La présence de  $dx$  dans ces deux notations n'est pas justifiée. La notion de différentielle est introduite *après* celle d'intégrale. Il en découle que le  $dx$  dans les notations  $\int_a^b f dx$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  n'est pas considéré comme élément différentiel.

### II.1.4. Notion de différentielle dans *A first cours in calculus* de Lang

Lang (1964) n'introduit pas dans *A first cours in calculus* la notion de *différentielle*. Il appelle *fonction différentiable* toute fonction dérivable.

Définition. La fonction  $f$  est différentiable si elle a un nombre dérivé en tout point auquel elle est définie. (Op. cité, p.64)

Avant le calcul intégral, il introduit deux notations pour la notion de dérivée :  $f'(x)$  et  $df/dx$ , qui « doit être lue comme un tout » dans un premier temps, et qui sera conventionnellement considérée comme une fraction plus tard.

Ainsi, les deux expressions  $f'(x)$  et  $df/dx$  signifient la même chose. Nous soulignons cependant dans l'expression  $df/dx$  que nous ne multiplions pas  $f$  ou  $x$  par  $d$  ou ne divisons pas  $df$  par  $dx$ . L'expression doit être lue *comme un tout*. Nous découvrirons plus tard que l'expression, dans certaines circonstances, se comporte *comme si* nous effectuons une division, et c'est pour cette raison que nous adoptons cette manière d'écrire classiquement la dérivée. (ibid., p. 63)

Il introduit la notion d'*intégrale indéfinie* comme suit :

Une intégrale indéfinie de  $f$  est une fonction  $F$  telle que  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle. (ibid., p. 287) [...]

Il est usuel de noter  $\int f$  ou  $\int f(x) dx$  une intégrale indéfinie d'une fonction  $f$ .

Dans la deuxième notation,  $dx$  est sans signification en lui-même. C'est seulement l'expression  $\int f(x) dx$  qui est significative. Quand nous étudierons la méthode de substitution dans un prochain chapitre, nous aurons plus clairement confirmation du *caractère pratique*<sup>25</sup> de notre notation. (ibid., p. 288)

<sup>25</sup> Souligné par nous.

Voici un des exemples que prend Lang pour illustrer le « caractère pratique » de la notation  $dx$  :

Exemple 1. Trouver  $\int (x^2 + 1)^3 (2x) dx$ .

Poser  $u = x^2 + 1$ . Ainsi,  $du/dx = 2x$  et notre intégrale est de la forme

$$\int f(u) \frac{du}{dx} dx,$$

la fonction  $f$  se détermine par  $f(u) = u^3$ . Nous abrégeons  $(du/dx)dx$  par  $du$ , comme si nous pouvions annuler<sup>26</sup>  $dx$ . Alors nous pouvons écrire l'intégrale comme

$$\int f(u) du = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{(x^2 + 1)^4}{4}.$$

Nous pouvons vérifier ceci en différentiant l'expression du côté droit, en utilisant la règle à chaîne. Nous obtenons le résultat désiré. (ibid., pp. 335-336)

À propos de la notation de l'intégrale indéfinie, Lang propose d'abord la notation sans  $dx$ . Le changement de variable pour l'intégrale définie est effectué de façon analogue à celui pour l'intégrale indéfinie.

L'intégrale définie de  $f$  entre  $a$  et  $b$   $\int_a^b f$  est le nombre unique qui est supérieur ou égal à chaque somme inférieure, et inférieur ou égal à chaque somme supérieure.

Nous prendrons également la notation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ou } \int_a^b f(t) dt$$

Les lettres utilisées sont sans importances, mais ce doit être la même lettre dans les deux occurrences, c'est-à-dire dans  $f(x)dx$  ou  $f(t)dt$ , ou  $f(u)du$ , etc. (ibid., p. 305)

Exemple 5. Supposez que nous considérons l'intégrale

$$\int_0^1 (x^3 + x)^9 (3x^2 + 1) dx,$$

avec  $u = x^3 + x$ . Quand  $x = 0$ ,  $u = 0$ , et quand  $x = 1$ ,  $u = 2$ . Ainsi, notre intégrale définie est égale à

$$\int_0^1 u^9 du = \frac{u^{10}}{10} \Big|_0^2 = \frac{2^{10}}{10}. \text{ (ibid., p. 338)}$$

Ainsi, Lang ne présente pas  $dx$  (dans  $\int f(x) dx$  et  $\int_a^b f(x) dx$ ) comme élément différentiel. Il n'a donc pas besoin dans son cours de la présentation préalable de la notion de *différentielle*. Il introduit la notation  $df/dx$  comme une convention qui permet des manipulations algébriques sur  $dx$ . Dans les deux exemples supra,  $dx$  a les valences de facteur multiplicatif (conventionnel) et d'indicateur de variable d'intégration.

---

<sup>26</sup> Ainsi, par convention, le  $dx$  a la valence de facteur multiplicatif qui permet d'écrire opératoirement l'égalité  $\int f(\varphi(x)) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du$  où  $\varphi(x) = u$ .

## II.2. Notion de *différentielle* et notation $dx$ dans EMS au Vietnam et en France

### II.2.1. Notion de *différentielle* et notation $dx$ dans EMS au Vietnam

#### a. $dx$ dans la notion de *différentielle*

La notion de différentielle est introduite en classe 12 dans le chapitre *Dérivée*, placé avant le chapitre *Primitive et intégrale*. Voici la définition de la notion de différentielle présentée dans le manuel :

##### Définition

Soit  $y = f(x)$  une fonction déterminée sur l'intervalle  $(a ; b)$  et dérivable en  $x \in (a ; b)$ . Soit  $\Delta x$  un incrément de  $x$  de manière que  $x + \Delta x \in (a ; b)$ .

On appelle *différentielle de la fonction  $y = f(x)$  en  $x$  relative à l'incrément  $\Delta x$*  le produit  $f'(x)\Delta x$  et on la note  $dy$  ou  $df(x)$ .

$$\boxed{dy = y' \Delta x} \text{ ou } \boxed{df(x) = f'(x) \Delta x}$$

Appliquant cette définition à la fonction  $y = x$ , on a :

$$dx = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

On a donc :

$$\boxed{dy = y' dx} \text{ ou } \boxed{df(x) = f'(x) dx}$$

Dans la définition supra, ce que le manuel appelle *différentielle de la fonction  $y = f(x)$  en  $x$  relative à  $\Delta x$*  est mathématiquement l'image de  $\Delta x$  par la fonction différentielle de  $f$  au point  $x$ . Aussi identifie-t-il implicitement dans l'établissement de l'égalité  $dx = (x)' \Delta x$  l'image de  $\Delta x$  par la fonction différentielle de la fonction identique à cette fonction elle-même. En ce sens, on devrait utiliser la notation  $d(x)$  plutôt que  $dx$  et considérer  $dx$  comme *différentielle (sous-entendu pour  $\Delta x$ ) de la fonction identique au point  $x$*  car le manuel prend effectivement la notation  $d(x^3 - 2x^2 + 1)$  pour désigner la différentielle de la fonction  $x \mapsto (x^3 - 2x^2 + 1)$ .

Or l'intention de l'institution n'est pas d'introduire la notion de *différentielle* comme application linéaire mais de préparer la suite de l'enseignement. Après une courte démonstration de l'égalité  $dx = \Delta x$ , le manuel ne parle plus de  $dx$  et laisse un « grand mystère » sur la notation  $dx$ .

Qu'en est-il pour  $\Delta x$  ?

Regardons ce qui est écrit dans la partie concernant  $\Delta x$  dans la section *Différentielle* du manuel :

Selon la définition de la dérivée, on a  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

D'où pour  $|\Delta x|$  assez petit  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$

ou  $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$  (2)

C'est la formule d'approximation la plus simple.

*Exemple.* Calculer une valeur approchée de  $\sqrt{4,01}$ .

*Solution.* Poser  $f(x) = \sqrt{x}$ , on a  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Appliquant la formule d'approximation (2), on a  $f(4 + 0,01) \approx f(4) + f'(4) \cdot 0,01$  soit  $\sqrt{4,01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,01 = 2,0025$ .

Ainsi, l'ostensif  $\Delta x$  est présenté dans cet extrait comme une quantité variable, indépendante de  $x$  et pas forcément infiniment petite que l'on peut manipuler algébriquement. Il sert au calcul approché à travers la formule d'approximation (2) et permet la lecture d'un nombre comme image d'une fonction et l'interprétation du décimal comme  $x$  (entier) +  $\Delta x$ .

Au contraire, il est difficile de déterminer les valences de  $dx$  au travers des exemples et des exercices concernés dans la section *Différentielle* du manuel. Examinons trois exemples sur la notion de différentielle dans la partie cours :

$$\begin{aligned} \text{Exemples. } d(x^3 - 2x^2 + 1) &= (3x^2 - 4x)dx \\ d(e^{2x}) &= 2e^{2x}dx \\ d(\sin^2 x) &= \sin 2x dx \end{aligned}$$

Les exercices sont du même type « Calculer la différentielle d'une fonction » :

Chercher la différentielle de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{\sqrt{x}}{a+b} ; \text{ b) } y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x}) ; \text{ c) } y = \operatorname{tg}^2 x ; \text{ d) } y = 2^{-\frac{1}{\cos x}} ; \text{ e) } y = \operatorname{Intg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) ; \\ \text{g) } y &= \frac{\cos x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Le passage de  $\Delta x$  à  $dx$  semble réglé par l'égalité  $dx = \Delta x$  formellement établie.

Cependant, le statut de  $dx$  change institutionnellement au travers des exercices. Quoique  $dx$  apparaisse dans les exemples et les exercices supra comme un facteur multiplicatif, au moins selon la définition du manuel, aucune manipulation algébrique sur  $dx$  n'est effectuée. On sait simplement que  $dx$  est le facteur par lequel on doit multiplier la dérivée quand on calcule la différentielle d'une fonction. Mais on ne sait pas, par exemple, si  $dx$  est une quantité variable ou non, comme l'est  $\Delta x$ . Ce non-dit peut laisser place à des questions diverses de l'ordre du contrat.

Doit-on toujours écrire  $dx$  après l'expression de la dérivée dans un calcul différentiel ? Pourquoi ?

A-t-on le droit d'écrire  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$  à partir de  $df(x) = f'(x)dx$  ?

Dans l'exemple du manuel  $d(x^3 - 2x^2 + 1) = (3x^2 - 4x)dx$ , peut-on substituer  $x$  à une valeur numérique, par exemple 0, pour écrire  $d(1) = 0d0$  ?

### **b. $dx$ dans la notation $\int f(x)dx$**

La notion de *primitive* et la notation  $\int f(x)dx$  sont introduites au début du chapitre *Primitive et Intégrale*.

**Définition**

La fonction  $F(x)$  est appelée *primitive* de la fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $(a ; b)$  si pour tout  $x \in (a ; b)$ , on a

$$F'(x) = f(x)$$

Si on remplace l'intervalle  $(a ; b)$  par l'intervalle  $[a ; b]$ , on doit y ajouter  $F'(a) = f(a)$  et  $F'(b) = f(b)$ . [...]

On note  $\int f(x)dx$  la classe des primitives de la fonction  $f(x)$  (se dit *intégrale indéfinie* de  $f(x)$ ) ou *classe des primitives* de  $f(x)$ ). On a par définition

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

où  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  et  $C$  une constante arbitraire.

On a

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$$

Le signe  $\int$  s'appelle *signe intégral*, l'expression  $f(x)dx$  s'appelle *expression sous le signe intégral*. Cette dernière est la différentielle de toutes primitives de  $f(x)$ . En effet, si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ , alors  $F'(x) = f(x)$ . Donc  $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ .

Dans la section *Primitives*, le manuel propose 16 exercices. Les 8 premiers demandent de « chercher les primitives des fonctions » en donnant uniquement leurs expressions algébriques, sans utiliser la notation  $\int f(x)dx$  dans la consigne. Au contraire, les 8 derniers demandent de « calculer  $\int f(x)dx$  » où 8 expressions algébriques différentes de  $f$  sont données dans la consigne. Au baccalauréat, la recherche de *toutes* les primitives d'une fonction est toujours donnée avec  $\int$ . Examinons 2 exercices représentatifs :

- 1) Chercher les primitives de la fonction  $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$ .
- 2) Calculer  $\int \operatorname{tg} x dx$ .

Pour chaque exercice, nous présentons 2 solutions possibles parmi d'autres.

**Exercice 1. Solution 1.** (*Solution attendue par l'institution*)

$$\int f(x)dx = \int \left( x^3 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$$

**Solution 2.** Les primitives de la fonction sont :  $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$ .

**Exercice 2. Solution 1.** (*Solution attendue par l'institution*)

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C.$$

**Solution 2.** On a  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = - \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -(\ln|\cos x|)'$ .

Les primitives de  $f(x) = \operatorname{tg} x$  sont  $F(x) = -\ln|\cos x| + C$ .

Nous formulons ci-dessous 3 règles du contrat didactique sur le calcul de primitive ayant des liens étroits avec le calcul intégral :

**R1.** *Usage de la notation  $\int f(x)dx$*

Pour chercher les primitives d'une fonction donnée  $f$ , on doit utiliser la notation  $\int f(x)dx$ .

**R2. Usage du tableau des primitives**

Pour calculer  $\int f(x)dx$ , on vérifie si une primitive  $F$  de  $f$  est donnée ou non dans le tableau des primitives (on ne doit pas vérifier dans un autre lieu, sous une autre forme). Si oui, on a  $\int f(x)dx = F(x) + C$ . Sinon, on calcule  $\int f(x)dx$  selon la règle R3, même si une primitive de  $f$  est donnée dans la consigne sous une forme ou une autre.

**R3. Lien entre intégrale indéfinie et intégrale**

La présence de l'ostensif  $\int$  autorise l'usage de toutes les méthodes d'intégration enseignées pour l'intégrale au calcul de primitive.

Lors d'une expérimentation, nous avons proposé l'exercice suivant à 4 classes 12 de 3 lycées au Vietnam (145 élèves) :

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions déterminées sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x \cos x$  et  $F(x) = x \sin x + \cos x$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ .

- 1) Démontrer que  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ .
- 2) Chercher une primitive de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

Les résultats de cette expérimentation confirment le fonctionnement des 3 règles :

- Tous les élèves utilisent la notation  $\int x \cos x dx$  pour la recherche d'une primitive quelconque de  $f$  (**R1**).
- Aucun élève n'utilise le résultat énoncé dans la question 1 pour trouver une primitive de  $f$  (**R2**).
- Pour calculer  $\int x \cos x dx$ , 143 élèves (soit 99 %) utilisent la méthode « intégration par parties », qui est enseignée uniquement pour l'intégrale [= intégrale définie] (**R3**).

**c.  $dx$  dans la notation  $\int_a^b f(x)dx$**

Lors de l'introduction de la notation  $\int_a^b f(x)dx$ , les auteurs du manuel en vigueur écrivent :

Soient  $f(x)$  une fonction continue sur un intervalle  $K$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments quelconques de  $K$ ,  $F(x)$  une primitive de  $f(x)$  sur  $K$ . La différence  $F(b) - F(a)$  s'appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x)$  et notée par  $\int_a^b f(x)dx$ . On utilise aussi la notation  $F(x)\Big|_a^b$  pour désigner la différence  $F(b) - F(a)$ .

On a donc par définition :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)} \quad (1)$$

Le signe  $\int$  est le signe intégral, l'expression  $f(x)dx$  est l'expression sous le signe intégral,  $f(x)$  est la fonction sous le signe intégral,  $f(x)dx$  est la différentielle de toutes primitives de  $f(x)$ ,  $a$  et  $b$  les bornes de l'intégrale,  $a$  est la borne inférieure,  $b$  est la borne supérieure,  $x$  s'appelle variable d'intégration. La formule (1) s'appelle formule de Newton-Leibniz.

Exemple.

$$1) \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$



$$2) \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

*Attention.* L'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  ne dépend que de  $f$ ,  $a$  et  $b$  mais pas de la notation de la variable d'intégration.

On peut donc écrire

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \dots$$

Dans cet extrait,  $f(x)dx$  est considéré comme *différentielle de toutes les primitives de  $f(x)$* . Ceci sous entend implicitement que  $f(x)dx = dF(x)$  pour toute primitive  $F$  de  $f$ .

L'intervention de  $F$ ,  $a$  et  $b$  dans le membre droit de la formule (1) permet à l'élève de comprendre la présence de  $f$ ,  $a$  et  $b$  dans la notation  $\int_a^b f(x)dx$ , mais la raison d'être de  $dx$  dans la même notation lui est étrangère pour le moment. Cette absence de raison d'être peut laisser place à des significations diverses.

Les valences instrumentales et sémiotiques de l'ostensif  $dx$  se forment à travers leurs usages dans le calcul intégral et délimitent des significations pour l'élève :

- **Valence sémiotique de « facteur multiplicatif »** :  $dx$  apparaît dans la notation  $\int_a^b f(x)dx$  comme facteur multiplicatif. Ce statut algébrique peut autoriser des manipulations pertinentes (à apprendre en dehors de tout contrôle par un savoir mathématique) ou non pertinentes.

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \int_1^e \frac{dx}{x} \quad \text{Manipulation algébrique pertinente}$$

$$\int_0^1 e^{x^3} x^2 dx = \int_0^1 e^{x^3} dx^3 \quad \text{Exemple de manipulation algébrique non pertinente}$$

Dans certaines intégrales « simples » où la formule de Newton-Leibniz est directement appliquée, il semble que le « facteur »  $dx$  ne participe pas vraiment au calcul. Pratiquement, il devient un « facteur inutile ».

$$\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1)dx = [x^3 + x^2 + x]_0^1$$

On écrit  $x^3$  pour primitive de  $3x^2$ . On met le signe +. Puis on écrit  $x^2$  pour primitive de  $2x$ . On met aussi le signe +. Ensuite on écrit  $x$  pour primitive de 1. On finit en écrivant les deux valeurs de bornes d'intégration. On ne voit pas où intervient  $dx$  dans cette pratique !

- **Valences sémiotique et instrumentale d'« indicateur de variable d'intégration »** : La

présence de  $dx$ ,  $dt$ ,  $d(\sin x)$  dans chacune des intégrales  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $\int_a^b f(t)dt$ ,

$\int_a^b f(\sin x)d(\sin x)$  indique la variable qu'on doit écrire pour la fonction primitive.

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b, \int_a^b t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_a^b, \int_a^b \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} \Big|_a^b$$

La dernière égalité ci-dessus apporte une nouvelle signification : une fonction peut être utilisée pour désigner une variable d'intégration.

Si on a à écrire la variable d'intégration dans la notation  $\int_a^x f(t)dt$ , on peut remplacer la

lettre  $t$  par n'importe quelle lettre, sauf  $a$ ,  $x$ ,  $f$  et  $d$ . Voilà l'intention de l'institution. En réalité, seul  $x$  est institutionnellement privilégié pour désigner la variable indépendante.

*Lors d'une observation naturaliste d'une classe 12 au Vietnam* (séance de révision), un

enseignant suggère fortement à ses élèves de remplacer  $\int_a^b f(t)dt$  par  $\int_a^b f(x)dx$  dans l'étape

d'application de la formule de Newton - Leibniz. Ceci peut produire des manipulations pertinentes et non pertinentes.

$$\int_0^x 3t^2 dt = \int_0^x 3u^2 du$$

Manipulation pertinente

$$\int_a^x 3t^2 dt = \int_a^x 3x^2 dx$$

Manipulation non pertinente

*Dans une expérimentation auprès de 236 élèves de classe 12 au Vietnam*, nous avons

proposé l'étude de la variation d'une fonction  $F$  déterminée par  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , le tableau

de variation de  $f$  étant donné préalablement.

L'une des clauses du contrat didactique sur les problèmes proposables par l'enseignant est que « L'élève n'a pas à contrôler la légitimité du problème [que l'enseignant propose] »<sup>27</sup>.

Malgré cet interdit, 23 élèves s'autorisent à écrire : « On trouve que cette intégrale est bizarre ! On propose de remplacer  $t$  par  $x$  pour obtenir une intégrale normale ». C'est la seule raison qu'ils trouvent à leur échec à résoudre le problème.

- **Valence instrumentale d'« élément différentiel »** : elle apparaît comme nécessaire aux méthodes de calcul enseignées « intégration par parties » et « changement de variable », mais de manière différente :  $dx$  permet d'écrire la différentielle d'une fonction.

<sup>27</sup> Chevallard 1988, à propos du problème « L'âge du capitaine ».

Dans la méthode d'intégration par parties :

Pour calculer l'intégrale  $\int_a^b x^2 \cos x dx$ , on pose :  $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

On introduit deux fonctions auxiliaires notées  $u$  et  $v$  (et non  $u(x)$  et  $v(x)$  comme en France). On écrit la différentielle de la première fonction  $du$ , et  $dx$  apparaissant comme élément différentiel.

La seconde apparaît d'emblée comme une différentielle :  $dv = \cos x dx$ . Dans la recherche d'une primitive  $v$  de  $\cos x$ , on ne doit pas utiliser l'ostensif  $\int \cos x dx$  : nous notons ici le non respect de la règle **R1** du contrat propre au calcul d'une primitive.

Dans l'observation naturaliste d'une classe 12 (Vietnam), nous avons pu observer que pour éviter la règle **R1** pour le calcul de  $v$ , les enseignants posent à leurs élèves la question : « Quelle est une primitive de  $\cos x$  ? » Ceci autorise les élèves à abandonner implicitement  $dx$ . La valence d'élément différentiel de  $dx$  pour la deuxième fonction  $v$  est institutionnellement marginalisée, et remplacée par celle de « facteur inutile ».

Dans la méthode de changement de variable :

Considérons les deux intégrales  $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$  et  $J = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$  proposées dans la partie exercices du manuel. La première est calculée par un changement de variable « de type 1 »  $x = \varphi(t)$  ; la seconde par un changement de variable « de type 2 »  $t = \psi(x)$  mais selon trois techniques différentes.

- Exercice 1 : Calculer  $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$  ( $a > 0$ ).

- Solution (présentée dans *Guide pour résoudre les exercices d'Analyse de Douzième*, publié par maison d'édition *Université nationale de Ho Chi Minh ville*, 2004)

On pose  $x = a \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt = a(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$

On change les bornes d'intégration

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow t = \pi/4 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{a(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt}{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{4a}$$

Dans la solution supra, on pose  $x = a \operatorname{tg} t$  (et non  $x(t) = a \operatorname{tg} t$ ). On calcule  $dx = a(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$  et par là  $dx$  apparaît comme *différentielle d'une fonction*, non comme *élément différentiel*. En revanche, dans cette étape,  $dt$  a la valence d'*élément différentiel*. Cette valence devient aussitôt celle d'*indicateur de variable d'intégration* dans l'étape suivante avec

l'établissement de l'égalité  $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} t \Big|_0^{\pi/4}$ . Donc  $dx [= a(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt]$  se substitue à  $dt$ . Cette

substitution qui nécessite aussi un changement des bornes d'intégration est véritablement la conséquence d'un changement de variable, non l'effet de l'indépendance de l'intégrale vis-à-vis de la notation de la variable d'intégration. Nous pouvons dégager le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
 dx &= (atgt)' dt \\
 x = atgt \rightarrow dx : \text{différentielle} &\rightarrow \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{a} = t/a \Big|_0^{\pi/4} \\
 dt : \text{élément différentiel} &dt : \text{indicateur de variable d'intégration}
 \end{aligned}$$

• Exercice 2 : Calculer  $J = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$ .

Nous étudierons 3 solutions possibles de cet exercice.

- Solution 1 Changement de variable  $t = \sqrt{1 + \ln x}$   
(Solution présentée dans *Guide pour résoudre les exercices d'Analyse de Douzième*, publié par maison d'édition *Université nationale de Ho Chi Minh ville*, 2004)

On pose  $t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}$

On change de bornes d'intégration

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1 + \ln 1} = 1 \\ x = e \Rightarrow t = \sqrt{1 + \ln e} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Donc  $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{2t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

- Solution 2 Changement de variable  $t = 1 + \ln x$   
(Dans l'écriture du résultat final de calcul, nous respectons une autre règle du contrat didactique qu'on doit écrire  $a^{m/n}$  sous forme  $\sqrt[n]{a^m}$ )

On pose  $t = 1 + \ln x$ . On en déduit  $dt = \frac{dx}{x}$

On change de bornes d'intégration  $\begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

On a  $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int_1^2 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

- Solution 3 Changement de variable (implicite)

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int_1^e (1 + \ln x)^{\frac{1}{2}} d(1 + \ln x) = \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^e = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} \Big|_1^e = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Dans la solution institutionnelle (1), on pose  $t = \sqrt{1 + \ln x}$ . Bien qu'on prenne la notation  $t$  au lieu de  $t(x)$ ,  $t$  apparaît institutionnellement comme fonction auxiliaire. On ne calcule pas sa différentielle par rapport à  $x$  telle qu'elle est :  $dt = \frac{1}{2x\sqrt{1 + \ln x}} dx$ . On procède

autrement. En élevant au carré, on obtient l'égalité  $t^2 = 1 + \ln x$ . L'ostensif  $t$  dans cette manipulation devient un objet purement algébrique. Comment fait-on pour obtenir l'égalité  $2t dt = \frac{dx}{x}$  à partir de  $t^2 = 1 + \ln x$ ? Selon le programme, on devrait l'effectuer en

mobilisant la dérivation d'une fonction composée :  $t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow d(t^2) = d(1 + \ln x) \Rightarrow$

$2tt' dx = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2tdt = \frac{dx}{x}$ . Dans la pratique, ignorant le rôle de fonction de  $t$  et en considérant  $t$  comme variable indépendante, on calcule séparément la différentielle de chacun des deux membres de l'égalité  $t^2 = 1 + \ln x$  respectivement par rapport à  $t$  et à  $x$  :  $2tdt = \frac{dx}{x}$ . Ainsi  $t$  et  $x$  sont pratiquement considérés comme deux variables indépendantes l'une de l'autre dont  $dt$  et  $dx$  sont respectivement deux éléments différentiels. Nous avons le schéma suivant :

$$t = \sqrt{1 + \ln x} \rightarrow t^2 = 1 + \ln x \rightarrow 2tdt = dx/x \rightarrow 2 \int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2t^3/3 \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$t$  : fonction       $t$  : objet algébrique       $dt, dx$  : éléments différentiels       $dt$  : indicateur de variable d'intégration

Dans la solution 2, on pose  $t = 1 + \ln x$  et on calcule  $dt = dx/x$ .  $dx$  apparaît donc comme élément différentiel. Après substitution d'écriture,  $dt$  est présent dans l'intégrale  $\int_1^2 t^{\frac{1}{2}} dt$  comme indicateur de variable d'intégration, qui autorise à écrire  $\int_1^2 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2t^{3/2}}{3} \Big|_1^2$ . Nous avons le schéma suivant :

$$t = 1 + \ln x \rightarrow dt = dx/x \rightarrow \int_1^2 t^{1/2} dt = 2t^{3/2}/3 \Big|_1^2$$

$dx$  : élément différentiel       $dt$  : différentielle       $dt$  : indicateur de variable d'intégration

Dans la solution 3, on reconnaît  $\frac{dx}{x}$  comme  $d(1 + \ln x)$  et par là,  $dx$  apparaît comme élément différentiel. Dans l'écriture  $\int_1^e (1 + \ln x)^{\frac{1}{2}} d(1 + \ln x)$ ,  $d(1 + \ln x)$  a la valence d'indicateur de variable d'intégration qui autorise à écrire  $\int_1^e (1 + \ln x)^{\frac{1}{2}} d(1 + \ln x) = \frac{2(1 + \ln x)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ . On peut donc envisager des chaînes de substitution :

$$dx/x = d(1 + \ln x) \rightarrow \int_1^e (1 + \ln x)^{1/2} d(1 + \ln x) = 2(1 + \ln x)^{3/2}/3 \Big|_0^{\pi/2}$$

$dx$  : élément différentiel       $d(1 + \ln x)$  : différentielle       $d(1 + \ln x)$  : indicateur de variable d'intégration

Les valences instrumentales et sémiotiques de l'ostensif  $dx$  (et de ses analogues  $dt$ ,  $du$ ,  $dv$ ) sont différentes dans les techniques institutionnellement mises en jeu. Cela peut former et aussi délimiter des significations différentes pour l'élève.

L'instrumentalité d'un ostensif dépend ainsi du nombre de techniques dans lesquelles il peut intervenir et elle sera d'autant plus grande que ces techniques se montreront robustes et fiables dans l'accomplissement des tâches concernées. (Bosch et Chevallard, RDM, 1999, p. 108)

Mais c'est son engagement dans un ensemble de techniques institutionnellement déterminées, en vue d'accomplir des tâches déterminées, qui en fera un instrument concrètement défini, et cela sans que son instrumentalité cesse d'être ouverte à d'autres usages possibles. (Ibid, p. 107)

De plus, on utilise l'écriture  $\int_a^b f(\varphi(x))d(\varphi(x))$  dans la pratique de calcul comme un changement de variable implicite, bien que cette écriture ne soit pas mathématiquement conforme à la notation  $\int_a^b f(x)dx$  car le  $d(\varphi(x))$  n'est pas un élément différentiel mais l'indication d'une nouvelle variable d'intégration.

Nous résumons ici l'enchaînement du manuel autour de la notion de *différentielle* au service de l'intégration :

1. Introduction de la notion de *différentielle* :  $df = f'(x)\Delta x$  ;  $\Delta x = dx$  ;  $df = f'(x)dx$
2. Introduction de la notion d'*intégrale indéfinie* de  $f$ . Présentation de  $f(x)dx$  comme différentielle de toutes les primitives de  $f$  :

$$\text{Si } F'(x) = f(x) \text{ alors } f(x)dx = F'(x)dx = dF \text{ et } \int f(x)dx = F(x) + C$$

3. Introduction de la notion d'*intégrale* de  $f$  :  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Considération de  $dx$  comme élément différentiel, sans aucun lien avec l'aire. Intervention de  $dx$  dans les méthodes *intégration par parties* et *changement de variable*.

Nous pouvons donc dégager deux niches de la notion de *différentielle* :

**Niche N1.** La notation  $dx$  a une valence sémiotique dans l'énoncé des formules d'intégration par parties et de changement de variable. En pratique, elle indique la variable d'intégration et a une valence opératoire (douteuse du point de vue de la stricte rigueur mathématique) au moment du changement de variable « implicite » en économisant une nouvelle variable et en dispensant d'un changement de valeurs des bornes d'intégration.

**Niche N2.** La notion de différentielle produit un élément technologique de l'organisation mathématique du calcul intégral  $\{T, \tau, \theta, \Theta\}$ , où  $T$  est le type de tâches « calculer une intégrale »,  $\tau, \theta, \Theta$  sont respectivement les techniques, technologies et théorie du calcul intégral à enseigner. Cet élément technologique permet d'effectuer les méthodes d'intégration enseignées « intégration par partie » et « changement de variable » comme substitution littérale formelle. En particulier il permet (par abus de langage) de traiter  $d(\varphi(x))$  comme élément différentiel dans le calcul de  $\int_a^b f(\varphi(x))d(\varphi(x))$ .

### II.2.2. Notion de *différentielle* et notation $dx$ dans EMS en France

La notion de *différentielle* est hors des programmes des trois périodes en France.

Le  $dx$  dans tous les manuels est considéré par convention comme indicateur de variable d'intégration, notamment dans l'intégrale dépendant de la borne supérieure. Il n'est jamais considéré comme élément différentiel. Aucune manipulation algébrique n'est effectuée sur le  $dx$  dans les deux méthodes d'intégration enseignées : primitivation et intégration par parties.

### II.3. Conclusion

Nous avons étudié la notion de *différentielle* ainsi que les relations entre la notation  $dx$  comme élément différentiel et la notation  $dx$  dans  $\int_a^b f(x)dx$  dans les ouvrages de référence choisis et dans EMS au Vietnam et en France.

Il existe donc dans les références étudiées plusieurs notations de l'intégrale de Riemann :  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $\int_a^b f dx$ ,  $\int_a^b f$ . L'origine de  $dx$  dans les deux premières notations se rattache à  $\Delta x$  dans les sommes de Riemann ou à  $dx$  dans la notation  $dy/dx$ . Comme Guénard l'affirme, la théorie de l'intégrale de Riemann-Cauchy ne comporte pas la notion de *différentielle*.

Le  $dx$  dans  $\int_a^b f(x)dx$  ne désigne donc pas un élément différentiel mais indique par convention la variable d'intégration. Cette indication est indispensable lorsque l'expression algébrique de  $f$  contient plusieurs lettres ou lorsqu'on effectue le changement de variable. Chez Lang, la convention sur la notation  $df/dx$  permettant de manipuler aisément cette dernière comme fraction exprime nettement les valences de facteur multiplicatif et d'indicateur de variable d'intégration de l'ostensif  $dx$ .

Aussi peut-on par convention et *pour des raisons instrumentales* considérer abusivement l'ostensif  $d\varphi(x)$  dans la notation  $\int_a^b f(\varphi(x))d\varphi(x)$  comme élément différentiel. L'usage d'une écriture telle que  $\int_0^1 (x^2 + 1)^2 d(x^2 + 1)$  est autorisé au Vietnam pour effectuer un changement de variable implicite sans introduire une nouvelle variable, ni changer de valeurs des bornes d'intégration.

## III. Calcul approché d'intégrale

### III.1. Calcul approché d'intégrale dans le savoir savant

Les méthodes d'intégration mises en œuvre par Newton et Leibniz, perfectionnées par les mathématiciens postérieurs, notamment par Augustin-Louis Cauchy<sup>28</sup> (1789 – 1857), permettent de calculer  $\int_a^b f(x)dx$  en connaissant une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Or la découverte des intégrales elliptiques par Andrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Niels Henrik Abel (1802 – 1829), Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851) et Karl Theodor Weierstrass (1815 – 1897) rend impossible la formule ci-dessus car il existe des fonctions dont les primitives ne peuvent pas être exprimées par la composition d'un nombre fini de

<sup>28</sup> Cauchy démontre le premier le théorème fondamental du calcul infinitésimal : Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[x_0, X]$ , si  $x$  est un élément de  $[x_0, X]$ , et si  $F$  est la fonction déterminée sur  $[x_0, X]$  par  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$  pour tout  $x$  de  $[x_0, X]$ , alors  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $[x_0, X]$ . La démonstration rigoureuse exige la notion de *continuité uniforme* que Cauchy ne possède pas. Mais une fonction continue sur  $[a, b]$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

fonctions élémentaires. D'autres intégrales analogues sont découvertes comme les intégrales de Fresnel  $\int_0^x \sin t^2 dt$ ,  $\int_0^x \cos t^2 dt$  ou l'intégrale  $\int \frac{e^x dx}{x}$ .

On s'assurera aisément par notre méthode que l'intégrale  $\int \frac{e^x dx}{x}$ , dont les Géomètres se sont beaucoup occupés, est impossible sous forme finie... (Liouville, cité par Hairer et Wanner, 2000, p. 126)

Les mathématiciens sont donc confrontés à de nouvelles fonctions qui doivent être calculées par de nouvelles méthodes. Dans *L'analyse au fil de l'histoire*, Hairer et Wanner exposent les trois méthodes suivantes : développement en série, calcul numérique, et développement asymptotique.

### III.1.1. Développement en série

Regardons ci-dessous un exemple du calcul des intégrales de Fresnel par développement en série présenté dans *L'analyse au fil de l'histoire* par Hairer et Wanner :

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \int_0^x \left( t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \dots \right) dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots$$

$$\int_0^x \cos t^2 dt = \int_0^x \left( 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \dots \right) dt = x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots$$

Le choix de la valeur 0 pour la borne inférieure de chacune de deux intégrales permet de simplifier le résultat final du calcul, la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$  ayant pour valeur numérique 0 en  $x = 0$ . Cette méthode basée sur le développement de la fonction à intégrer en série entière et sur l'intégration terme à terme de la série dans le domaine de convergence, donne une primitive de la fonction à intégrer sous forme de série entière. L'infinité de termes de cette primitive rend impossible l'usage de la formule de Newton – Leibniz pour calculer exactement l'intégrale de la fonction en question sur un intervalle donné. En revanche, on peut calculer une valeur approchée des intégrales de Fresnel pour une valeur de  $x$  donnée en conservant un certain nombre des premiers termes de la primitive et en négligeant le reste, selon la précision souhaitée. Quand on veut augmenter la précision du calcul, on doit augmenter le nombre de termes retenus. Nous présenterons dans le tableau 47 quelques valeurs approchées des intégrales de Fresnel pour  $x = 1$ .

Nombre de termes retenus	1	2	3	4	5
Valeur approchée de $\int_0^1 \sin t^2 dt$	0,3333	0,3095	0,3179	0,3165	0,3165
Valeur approchée de $\int_0^1 \cos t^2 dt$	1	0,9	0,9046	0,9045	0,9045

**Tableau 47.** Calcul approché des intégrales de Fresnel pour  $x = 1$



### III.1.2. Méthodes numériques

Pour calculer numériquement l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ , on fixe un naturel strictement positif  $N$ ,

on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $N$  sous-intervalles de longueur  $h = \frac{b-a}{N}$  et d'extrémités

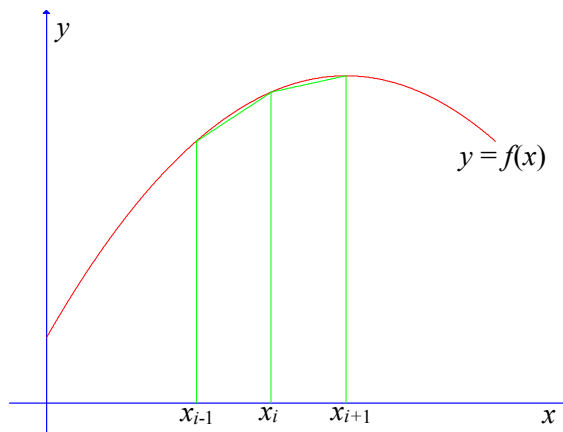
$x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_i = a + ih, \dots, x_N = b$ , et on approche sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  la fonction  $f$  par des polynômes plus faciles à intégrer. En fonction du degré des polynômes, on a des méthodes numériques différentes :

**a.** Méthodes des rectangles, méthode du point milieu : Les polynômes ont pour degré 0.

**b.** Méthodes des trapèzes, méthode des tangentes : Les polynômes ont pour degré 1.

La méthode des trapèzes consiste à approcher sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  la fonction  $f$  par la fonction affine passant par deux points  $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . L'intégration se ramène aux calculs d'aires algébriques des trapèzes d'où vient le nom de la méthode. Une somme de Riemann d'une fonction  $f$  relativement à une subdivision de  $[a,$

$b]$  est également une valeur approchée de  $\int_a^b f(x)dx$  par la méthode des rectangles.

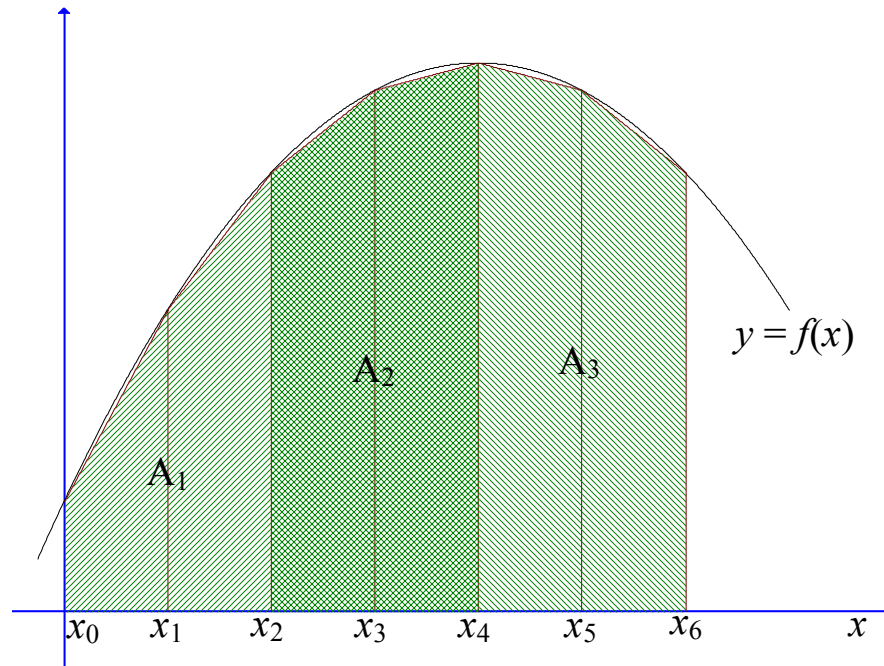


On a :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right)$$

L'erreur de calcul est d'autant plus faible que le pas  $h$  est petit.

**c.** Méthode de Simpson : Les polynômes qui approchent la fonction à intégrer ont pour degré 2. La méthode consiste à approcher sur chaque double intervalle  $[x_i, x_{i+2}]$  la fonction en question par le polynôme d'interpolation de degré 2 passant par 3 points  $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$ . La méthode nécessite que le nombre de sous-intervalles  $N$  soit pair. Elle est exacte pour l'intégration des polynômes jusqu'au degré 3 inclus.



On a la formule de Simpson suivante pour  $N$  pair :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_N))$$

**d. Méthode de Newton-Cotes d'ordre  $d$  :** La méthode, du nom de Newton et de Roger Cotes (1682 – 1716), est une généralisation des méthodes des trapèzes et de Simpson pour le calcul numérique d'une intégrale.

On approche la fonction par des polynômes d'interpolation de degré  $d$  qui coïncident avec  $f$  aux  $d + 1$  points équidistants  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}$ .

Pour  $d = 1$  et  $d = 2$ , nous retrouvons les méthodes des trapèzes et de Simpson.

Pour  $d = 4$  et  $d = 8$ , nous avons les méthodes de Boole-Villarceau et de Weddle-Hardy.

Pour obtenir un résultat plus précis, on préfère augmenter le nombre de sous-intervalle  $N$  plutôt que l'ordre  $d$  de la méthode. Toutefois, la non-stabilité et la non-convergence des formules de Newton-Cotes contraignent à n'utiliser que les ordres 1 ou 2.

Le tableau 48 ci-dessous résume la méthode de Newton-Cotes d'ordre 1, 2, 3 et 4.

Ordre	Méthode	Formule
1	Méthode des trapèzes	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$
2	Méthode de Simpson	$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$
3		$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$
4	Méthode de Boole-Villarceau	$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4))$

**Tableau 48.** Méthode de Newton-Cotes d'ordre 1, 2, 3 et 4

Nous présenterons dans le tableau 49 le calcul numérique de l'intégrale elliptique  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 0,96 \cos^2 x} dx$  par la méthode des trapèzes avec six subdivisions différentes de l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

N	$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 0,96 \cos^2 x} dx$
12	4,1
24	4,201
48	4,202 008 0
96	4,202 008 907 92
192	4,202 008 907 937 800 188 91
384	4,202 008 907 937 800 188 939 832 917 694 747 782 4

**Tableau 49.** Calcul approché d'une intégrale elliptique par méthode des trapèzes

### III.1.3. Développement asymptotique

Alors que le développement en série et les méthodes numériques sont utiles pour des valeurs petites et moyennes de  $x$ , la méthode du développement asymptotique, terme dû à Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), est bien adaptée pour des grandes valeurs de  $x$ .

Cette méthode est également utilisée par Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) en 1812 pour  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  et par Cauchy en 1842 pour les intégrales de Fresnel.

Nous présenterons ci-dessous le calcul des intégrales de Fresnel par développement asymptotique.

On a dans l'analyse complexe :

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On en déduit :

$$\int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_x^\infty \cos t^2 dt$$

En intégrant par parties, on a :

$$-\int_x^\infty \cos t^2 dt = -\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t} 2t \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \sin x^2 - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin t^2 dt$$

De façon analogue, on a :

$$-\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin t^2 dt = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{x^3} \cos x^2 + \frac{1.3}{2^2} \int_x^\infty \frac{1}{t^4} \cos t^2 dt$$

En continuant ainsi on obtient :

$$\int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \sin x^2 - \frac{1}{2^2} \frac{1}{x^3} \cos x^2 - \frac{1.3}{2^3} \frac{1}{x^5} \sin x^2 + \frac{1.3.5}{2^4} \frac{1}{x^7} \cos x^2 + \frac{1.3.5.7}{2^5} \frac{1}{x^9} \sin x^2 - \dots$$

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} \cos x^2 - \frac{1}{2^2} \frac{1}{x^3} \sin x^2 + \frac{1.3}{2^3} \frac{1}{x^5} \cos x^2 + \frac{1.3.5}{2^4} \frac{1}{x^7} \sin x^2 - \frac{1.3.5.7}{2^5} \frac{1}{x^9} \cos x^2 - \dots$$

L'intégrale, aussi donnée sous forme d'intégrale dépendant de la borne supérieure, est écrite sous la forme d'une infinité d'intégrations successives. Ce processus de calcul donne une série infinie comme primitive de la fonction à intégrer. Le calcul d'une valeur approchée de l'intégrale se ramène au calcul d'une valeur approchée d'une série de fonctions en un point donné.

### III.1.4. Conclusion sur la place du calcul approché d'intégrale dans le savoir savant

Les méthodes de calcul approché d'intégrale peuvent se caractériser par la présence ou l'absence du calcul de primitive. Le développement en série et le développement asymptotique appartiennent à la première catégorie et les méthodes numériques à la seconde.

Le développement en série et le développement asymptotique donnent une primitive de la fonction à intégrer, exprimée par une série infinie. On peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en traitant des premiers termes de la série. Pour augmenter la précision du calcul, on doit augmenter le nombre de termes traités.

Les méthodes numériques ne donnent aucune primitive de la fonction à intégrer. Elles approchent cette dernière par une fonction plus simple à intégrer sur chaque sous-intervalle. Pour augmenter la précision du calcul, on doit augmenter le nombre de sous-intervalles.

### III.2. Calcul approché d'intégrale dans les traités de référence

Bourbaki (1949) et Rudin (1976) n'abordent pas le calcul approché d'intégrale.

Fikhtengolz (1968) expose dans son ouvrage deux méthodes numériques : méthode des trapèzes et méthode de Simpson. Il présente superficiellement l'idée des méthodes non numériques.

Cet exemple  $\left[ \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0,5 \sin^2 x} dx \approx 1,351 \right]$  est intéressant parce que les primitives de la

fonction à intégrer ne peuvent pas être exprimées sous forme finie : on ne peut pas les utiliser pour calculer exactement l'intégrale définie.

Pour une telle intégrale, si on peut exprimer une de ses primitives sous forme d'intégrale dépendant de la borne supérieure, on peut calculer une valeur approchée de l'intégrale comme une valeur approchée de la primitive en un point donné.

Lang (1964) n'aborde aucune des méthodes numériques que nous avons présentées. Il se place dans une problématique analytique en approchant la fonction à intégrer par la série de Taylor avec reste pour le calcul approché des intégrales. Cela lui permet de mettre en avant la majoration de l'erreur.

Je pense personnellement que les calculs qui surgissent naturellement de la formule de Taylor (calcul de valeurs de fonctions élémentaires, calcul de  $e$ ,  $\pi$ ,  $\log 2$ , calcul d'intégrale définie à quelques décimales, traditionnellement négligés dans le cours d'analyse) sont importants.

Nous extrayons ci-dessous de l'ouvrage de Lang un calcul approché d'intégrale par série de Taylor avec reste.

Calculer à deux décimales l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ .

Nous avons

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x) \text{ et } |R_5(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}.$$

Par conséquent

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{R_5(x)}{x} \text{ et } \left| \frac{R_5(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|^4}{5!}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \left. x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \right|_0^1 + E \text{ où } E = \int_0^1 \frac{R_5(x)}{x} dx.$$

Le terme d'erreur  $E$  satisfait à

$$|E| \leq \int_0^1 \frac{|R_5(x)|}{x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx = \left. \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right|_0^1 = \frac{1}{600}.$$

En outre

$$\left. x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \frac{17}{18} + E \text{ où } |E| \leq \frac{1}{600}.$$

Ainsi, la série de Taylor avec reste donne une « primitive approchée » de la fonction à intégrer pour calculer une valeur numérique approchée de l'intégrale et en même temps une évaluation de l'erreur de calcul.

### III.3. Calcul approché d'intégrale dans EMS en France et au Vietnam

#### III.3.1. En France

Absent dans les programmes des années 1970, le calcul approché d'intégrale est officiellement introduit dans les programmes de la période 1980 – 2002. Quoique la méthode proposée par les programmes soit celle des rectangles, les manuels de l'époque présentent d'autres méthodes numériques comme méthode du point milieu, la méthode des

trapèzes, la méthode des tangentes. Toutes les méthodes mises en œuvre sont les cas particuliers de la méthode de Newton-Cotes limitée à ordre 1.

Le programme de 2002 – 2006 n’aborde pas le calcul approché d’intégrale. Cependant les manuels de la période mobilisent dans la partie exercices l’encadrement numérique d’intégrale pour en déduire une valeur approchée de l’intégrale.

### III.3.2. Au Vietnam

Le calcul approché d’intégrale est complètement absent durant les trois périodes d’enseignement considérées. L’encadrement numérique d’une intégrale existe rarement dans la partie exercices, mais ne sert jamais au calcul approché.

## IV. Liens entre aire, primitive et intégrale

Nous présenterons dans le tableau 50 les liens entre aire, primitive et intégrale dans les références choisies et dans EMS en France et au Vietnam.

Dans les références	En France	Au Vietnam
<i>Aire - Primitive</i>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• L’aire variable sous la courbe représentative d’une fonction est une primitive de cette fonction.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dans le cours des manuels de 1980 – 2002 : L’aire variable sous la courbe représentative d’une fonction est une primitive de cette fonction.</li> <li>• La démonstration du lien ci-dessus devient un exercice dans la batterie d’exercices du baccalauréat 2005.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dans le cours des manuels de deux dernières période (1990 – 2000, 2000 – 2006) : L’aire variable sous la courbe représentative d’une fonction est une primitive de cette fonction.</li> <li>• Ce lien n’est pas établi dans l’exercice.</li> </ul>
<i>Primitive - Intégrale</i>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La primitive permet de calculer l’intégrale à travers la formule de Newton-Leibniz.</li> <li>• L’intégrale dépendant de la borne supérieure permet de calculer la primitive prenant une valeur donnée en un point donné.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La primitive sert au calcul d’intégrale.</li> <li>• L’intégrale dépendant de la borne supérieure sert au calcul de primitive.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La primitive sert au calcul d’intégrale.</li> <li>• L’intégrale dépendant de la borne supérieure ne sert pas au calcul de primitive.</li> </ul>
<i>Intégrale - Aire</i>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• L’aire sous la courbe est la limite commune de sommes de Riemann.</li> <li>• L’intégrale est une théorisation de la quadrature. Elle permet de calculer l’aire au moyen de l’intégration.</li> <li>• La transmutation de figures est la forme primitive du changement de variable.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Le lien entre aire et limite commune de sommes est présent dans les programmes de 1970 – 1980 et de 2002 – 2006.</li> <li>• L’intégrale sert au calcul d’aire.</li> <li>• Le calcul d’aire peut servir au calcul d’intégrale.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Le lien entre aire et limite commune de sommes est présent dans les programmes de 1975 – 1990.</li> <li>• L’intégrale sert au calcul d’aire.</li> <li>• Le calcul d’aire ne sert pas au calcul d’intégrale.</li> </ul>

Tableau 50. Liens entre aire, primitive et intégrale

## V. Organisation mathématique de référence et organisation mathématique à enseigner

Nous allons tenter dans cette partie de décrire un modèle des praxéologies de référence de la notion d'intégrale (de Riemann) pour mettre en évidence l'écart avec les organisations mathématiques à enseigner dans les deux institutions EMS en France et au Vietnam.

### V.1. Un modèle d'une organisation mathématique de référence

L'objet de savoir *intégrale* est structuré par une OM régionale (secteur) composée de trois OM locales (thèmes).

#### OM1. Intégrabilité

C'est une OM locale composée de deux types de tâches.

T1. Étudier l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$

T2. Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale (incluant, en particulier, la démonstration de la linéarité, la relation de Chasles, et la positivité).

Pour démontrer l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b]$ , on peut utiliser une des techniques suivantes :

1. On démontre que les sommes de Riemann de  $f$  sur  $[a, b]$  ont une limite commune indépendante des subdivisions de  $[a, b]$  et des choix de  $\xi_i$  dans chaque sous-intervalle.
2. On démontre que pour toute subdivision de  $[a, b]$ ,  $\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0$  où  $S$  et  $s$  sont les sommes de Darboux supérieure et inférieure et où  $d$  est le supremum des longueurs des sous-intervalles.
3. On démontre que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .
4. On démontre que  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et qu'elle n'est discontinue qu'en un nombre fini de points de  $[a, b]$ .
5. On démontre que  $f$  est bornée et monotone sur  $[a, b]$ .

Pour démontrer la non-intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b]$ , on peut utiliser une des techniques suivantes :

1. On montre l'existence
  - d'une somme de Riemann de  $f$  sur  $[a, b]$  qui n'a pas de limite (finie),
  - d'une somme de Riemann de  $f$  sur  $[a, b]$  dont la limite dépend de la subdivision de  $[a, b]$  effectuée ou du choix de  $\xi_i$  dans chaque sous-intervalle.
  - de deux sommes de Riemann de  $f$  sur  $[a, b]$  dont les limites sont différentes.
2. On montre l'existence d'une subdivision de  $[a, b]$  avec laquelle  $\lim_{d \rightarrow 0} (S - s)$  est non nulle où  $S$  et  $s$  sont les sommes de Darboux supérieure et inférieure et où  $d$  est le supremum des longueurs des sous-intervalles.
3. On démontre que  $f$  n'est pas bornée sur  $[a, b]$ .

Le type de tâches T2 est accompli par la mobilisation des sommes de Riemann ou de Darboux relatives à une subdivision générale de l'intervalle.

Les techniques précitées sont justifiées par les éléments technologiques suivants :

- La définition de l'intégrale.
- Le lien entre la convergence d'une suite et celle de ses sous-suites : une suite converge vers  $\ell$  si et seulement si toutes ses sous-suites convergent vers  $\ell$ .
- Les conditions d'intégrabilité :

1. Pour que l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  existe, il faut et il suffit que  $\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0$  où  $S$  et  $s$  sont les sommes de Darboux supérieure et inférieure de  $f$  sur  $[a, b]$  et où  $d$  est le supremum des longueurs des sous-intervalles.
2. Une fonction intégrable sur  $[a, b]$  est bornée sur  $[a, b]$ .
3. Une fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
4. Une fonction bornée, discontinue en un nombre fini de points sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
5. Une fonction monotone sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

### OM2. Antidérivation (Calcul de primitive)

C'est une OM locale composée de deux types de tâches.

T3. Calculer  $\int f(x)dx$

T4. Démontrer une égalité entre deux intégrales indéfinies

Nous notons que les deux types de tâches T3, T4 sont étroitement attachés à l'ostensif  $\int$  par ses valences instrumentale et sémiotique permettant d'effectuer, en cas nécessaire, le changement de variable et l'intégration par parties comme pour l'intégrale définie.

Nous conviendrons alors, selon un usage universel, de noter l'une quelconque, non précisée, des primitives de  $f$ , sous la forme :

$$(1) \quad \int f(x)dx \text{ (« intégrale indéfinie » de } f \text{).}$$

Dans l'écriture (1), la lettre  $x$  est muette, et peut s'interpréter comme le nom choisi pour la *variable* dans la représentation de cette primitive. Ainsi, (1) représente la fonction  $x \mapsto \int f(x)dx$ , primitive *non précisée* de  $f$ . Cela peut sembler peu satisfaisant sur le plan strictement logique, mais cette notation (1) est trop habituelle et a suffisamment fait la preuve de son efficacité pour qu'il soit question de s'en écarter. Le théorème fondamental du calcul intégral suffirait à la justifier car, dans l'écriture  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ , peu importe la primitive choisie  $F$  de  $f$ .

**Avec la notation (1), si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$ , la formule d'intégration par parties  $\int fg' dx = fg - \int f' g dx$  garde tout son sens, de même que la formule de changement de variable  $\int f(x)dx \ll = \gg \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ , où  $\varphi$  de classe  $C^1$  prend ses valeurs dans  $I$ .** (Arnaudiès et Fraysse, 1989, souligné par nous)

Pour accomplir les deux types de tâches, on peut utiliser les techniques suivantes : linéarisation, changement de variable, intégration par parties, développement en série entière et intégration terme à terme dans le domaine de convergence.

Ces techniques sont justifiées par les éléments technologiques suivants : définition de la notion de primitive, définition de la notion de dérivée, règles de dérivation, tableau des primitives usuelles, linéarité, formule de changement de variable, formule d'intégration par parties, formule de développement d'une fonction en série, domaine de convergence de suites entières, lien entre convergence uniforme et intégration terme à terme.

### OM3. Calcul d'aire ou d'autres grandeurs

C'est une OM locale composée de quatre types de tâches.

T5. Calculer  $\int_a^b f(x)dx$

T6. Démontrer une égalité ou inégalité entre des intégrales définies



T7. Calculer approximativement  $\int_a^b f(x)dx$

T8. Calculer une grandeur autre que l'aire (longueur, volume, centre de gravité, moment d'inertie, travail d'une force, etc.)

Pour accomplir ces quatre types de tâches, on peut utiliser les techniques de OM2 et des techniques spécifiques comme : calcul de limite d'une somme de Riemann, méthodes numériques, développement de Taylor avec reste, développement en série infinie, développement asymptotique.

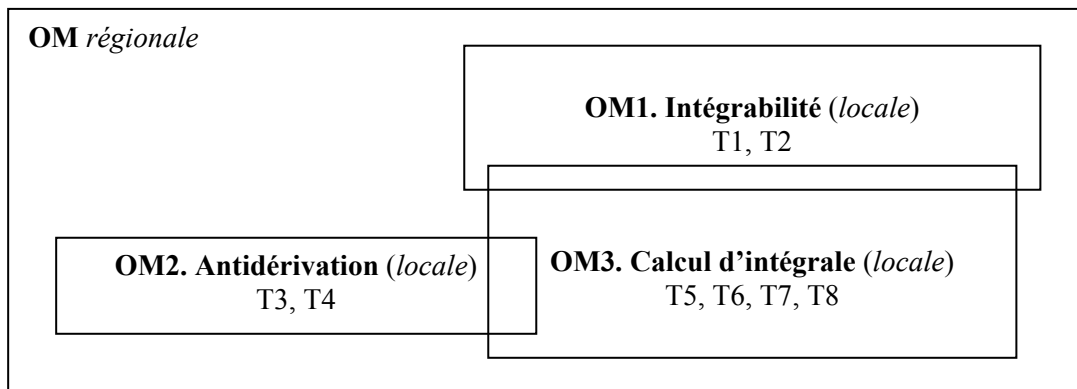
Ces techniques sont justifiées par des éléments technologiques communs à ceux de OM2, complétés par les éléments technologiques suivants : définition de l'intégrale, conditions d'intégrabilité, relation de Chasles, positivité, ordre et intégration, formule de Newton – Leibniz, formule de Taylor avec reste, développement asymptotique, formule de calcul de grandeurs concernées.

Nous schématisons ci-dessous l'organisation mathématique de référence du secteur *intégrale*.

La démonstration de certains éléments technologiques de OM3 (linéarité, relation de Chasles, positivité) est un type de tâche T2 de OM1. Nous pouvons dire que le logos de OM3 est partiellement contenu dans OM1.

OM2 et OM3 ont des éléments technologiques communs comme la linéarité, le changement de variable, l'intégration par parties. Cependant, dans OM2, ces éléments technologiques sont justifiés par la définition de la primitive et les règles de dérivation, tandis que dans OM3, ceux-ci sont justifiés par la définition de l'intégrale, la formule de Newton – Leibniz et les règles de dérivation.

Les trois OM forment une OM régionale constitutive de la théorie des fonctions d'une variable réelle.



## V.2. Organisation mathématique à enseigner

### V.2.1. Au Vietnam

#### a. Période 1975 - 1990

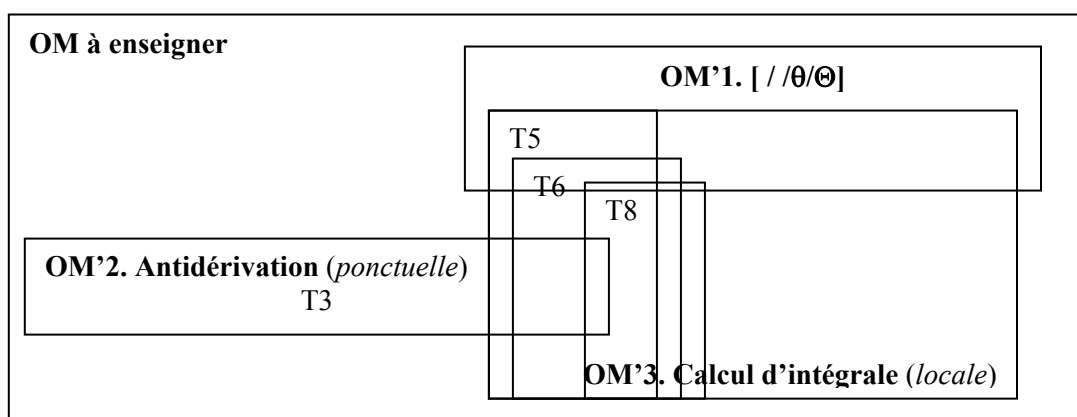
Dans le schéma ci-dessous, nous désignons par  $OM'1 = [ / \theta / \Theta ]$  la trace de OM1 dans le manuel. Les espaces blancs indiquent l'absence du bloc pratique de cette OM dans le manuel.

De même, nous désignons respectivement par  $OM'2$  et  $OM'3$  les traces de OM2 et de OM3.

Dans OM'2, seul le type de tâches T3 est présent, l'élément technologique « développement en série entière » étant absent.

Dans OM'3, le type de tâches T7 et les éléments technologiques concernés comme le développement en série de Taylor avec reste, le développement en série entière, et le développement asymptotique, sont absents. Le type de tâches T8 se réduit au calcul d'aire et de volume. Une technique du type de tâches T5, calcul d'une intégrale par calcul de limite d'une somme de Riemann est justifiée également par la technologie de OM'1 : quand une fonction est intégrable, toutes ses sommes de Riemann ont une limite commune. Ainsi, la technologie de OM'1 justifie une technique mobilisée dans une autre OM.

Dans le bloc pratique de OM'2 et de OM'3, la différentiation permet d'effectuer le changement de variable comme une substitution littérale formelle sans avoir besoin de la formule de changement de variable.



**b. Période 1990 – 2000**

La définition de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle fermé, borné par la formule de Newton – Leibniz permet d'éviter le problème d'intégrabilité, en se limitant à l'intégration des fonctions continues sur un intervalle fermé, borné. OM1 n'a aucune trace dans le manuel.

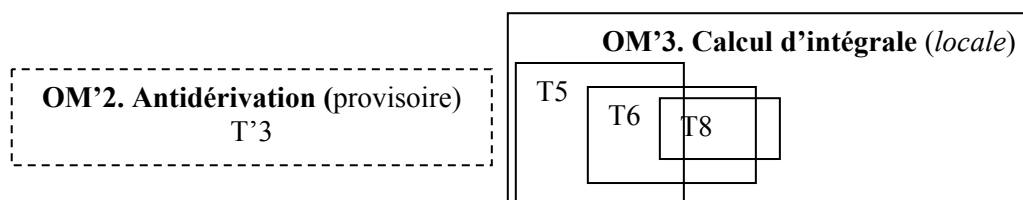
L'absence de l'ostensif  $\int$  et des méthodes de calcul qu'il outille restreint OM'2 et la détache de OM'3. Le type de tâches T3 est réduit au calcul de primitives de fonctions très simples et est amené à s'effacer. C'est pourquoi désignons par T'3 ce type provisoire de tâches.

En l'absence de la notion de différentielle, le manuel propose deux conventions

$$u'(x)dx = du$$

$$v'(x)dx = dx$$

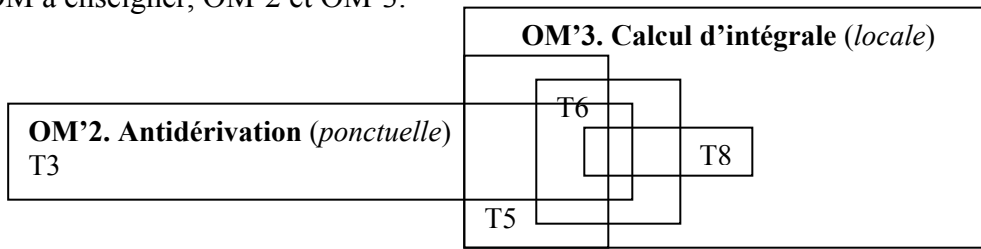
qui permettent dans le bloc pratique de l'OM'3, d'effectuer le changement de variable comme dans la période précédente. Le calcul de volume (T8) se réduit en calcul de volume de corps de révolution.



**c. Période 2000 – 2006**

OM1 continue à être totalement absente du manuel.

Quant à OM'2, trace de OM2, la réapparition de l'ostensif  $\int$  et l'introduction de l'élément technologique ET'0 (changement de variable implicite) font revivre le type de tâches T3. ET'0, intervenant aussi dans T5 de OM'3, devient un élément technologique commun aux deux OM à enseigner, OM'2 et OM'3.

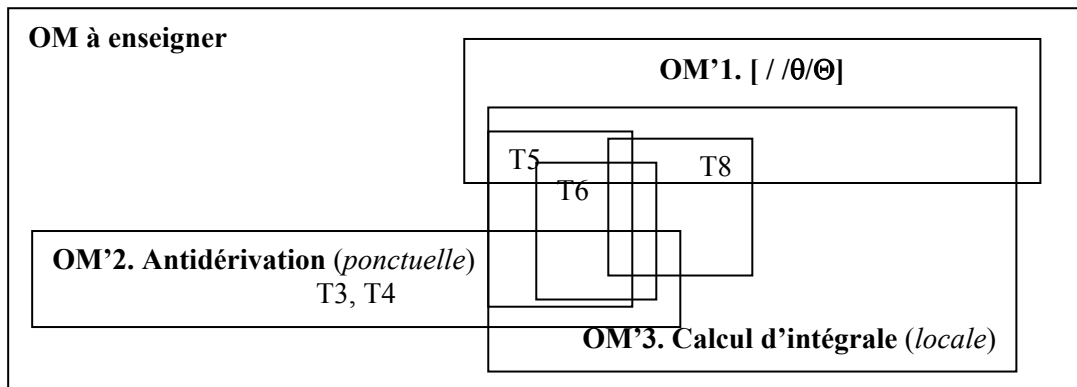


**V.2.2. En France**

**a. Période 1970 - 1980**

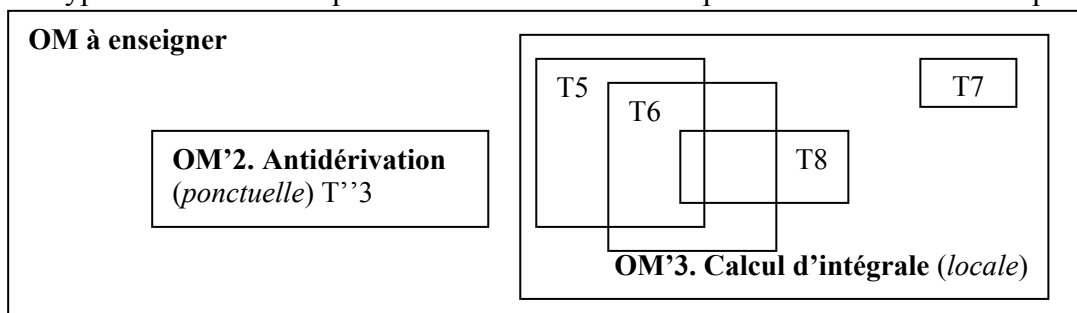
Comme au Vietnam, période 1975 – 1990, la trace OM'1 de OM1 existe sous la forme  $[ / \theta / \Theta ]$ . Le bloc pratique de OM1 est aussi absent des deux manuels étudiés (M1, M2). Cependant, la technologie de cette OM justifie les techniques mobilisées pour T5, T6, T8 dans OM'3.

Dans OM'2, les types de tâches T3, T4 sont présents corrélativement avec l'ostensif  $\int$  (M1) ou  $\int_a^x f(t)dt + C$  (M2). Outre l'intégration par parties commune aux deux manuels, les techniques proposées s'appuient sur ET0 (M1) ou se restreignent à la primitivation (M2).



**b. Période 1980 – 2002**

La définition de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle fermé, borné par la formule de Newton – Leibniz se limitant préalablement à l'intégration des fonctions continues sur un intervalle fermé, borné, le problème de l'intégrabilité n'est pas posé. OM1 n'a aucune trace dans le manuel. L'ostensif  $\int$  est absent de OM'2. Nous désignons par T''3 le type de tâches résolu par primitivation. Cette technique de calcul sépare OM'2 de OM'3. Seul le type de tâches T7 est présent dans OM'3 et résolu par des méthodes numériques.

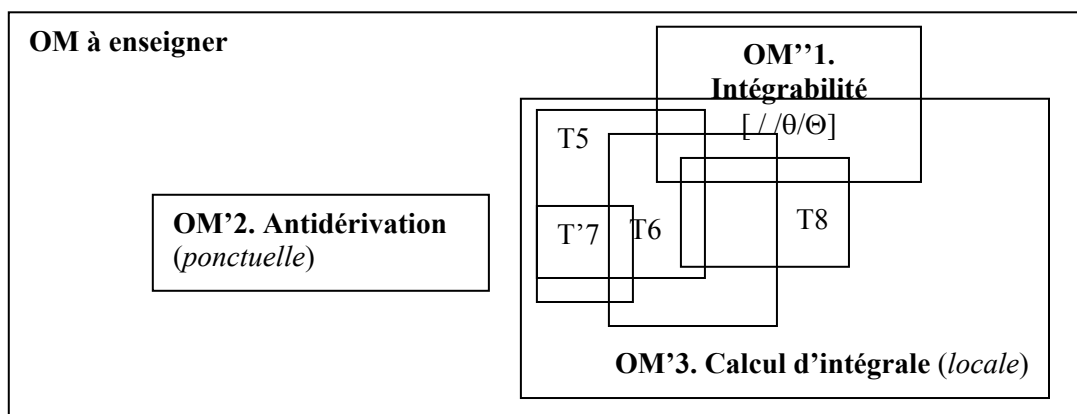


**c. Période 2002 – 2006**

Le manuel étudié définit l'intégrale d'une fonction continue, monotone et positive sur un intervalle fermé, borné comme limite commune de suites adjacentes. Il étend la définition aux fonctions continues sur un intervalle fermé, borné en admettant la convergence des suites concernées. La linéarité, la relation de Chasles sont admises. OM1 est présente mais de façon ténue. Nous désignons par OM''1 la trace de OM1 dans le manuel.

OM'2, trace de OM2, est identique à celle de la période précédente.

Le calcul approché d'intégrale est présent et résolu par encadrement numérique en l'absence de toutes autres méthodes dans le cours. N'étant proposé qu'après des tâches de type T5 ou T6, il est attaché fortement à ces deux dernières et il devient un type de tâches dépendant. Nous désignons par T'7 ce type de tâches.



**V.3. Conclusion**

La description des OM de référence et à enseigner dans EMS en France et au Vietnam permet de mettre en évidence les écarts entre elles, dans chacune des deux institutions d'enseignement.

Les traces de OM1 sont soit infimes et sans bloc pratique soit absentes dans les deux institutions concernées.

Au Vietnam, le logos de OM1 est partiellement présent dans la première période (1975 – 1990) et absent dans les dernières périodes (1990 – 2000, 2000 – 2006), la formule de Newton – Leibniz permettant cet effacement. En l'absence du bloc pratique, la technologie de OM1 dans la première période ne justifie que les techniques mobilisées dans OM3.

En France, le statut de OM1 dans la période 1970 – 1980 est identique à la première période (1975 – 1990) au Vietnam. OM1 disparaît dans la deuxième période (1980 – 2002) en même temps que la formule de Newton – Leibniz joue le rôle d'élément technologique pour l'existence et le calcul d'intégrale. Dans la troisième et dernière période (2002 – 2006), OM1 réapparaît mais sa trace est infime.

Nous pouvons dire que les deux institutions privilégient le calcul : calcul de primitive et calcul de grandeurs (calcul d'intégrale et calcul d'aire en particulier).

L'absence du développement en série (y compris du développement de Taylor avec reste et du développement asymptotique) réduit les possibilités des techniques de calcul approché à deux ou trois méthodes numériques (principalement méthode des rectangles et méthode des trapèzes).

Au Vietnam, à l'exception de la deuxième période où le calcul de primitive est transitoire et donc quasiment absent, le type de tâche T3 (calculer  $\int f(x)dx$ ) est étroitement attaché aux ostensifs  $\int$  et  $dx$  qui permettent de mobiliser les méthodes d'intégration comme le changement de variable (explicite ou implicite) et l'intégration par parties.

En France, dans les deux dernières périodes, en l'absence de l'ostensif  $\int$ , la primitivation, introduite comme méthode propre au calcul de primitive, sépare ce calcul du calcul d'intégrale.

Le type de tâches T7 (calcul approché d'intégrale) est toujours absent dans EMS au Vietnam mais présent en France dans deux dernières périodes.

Dans la période 1980 – 2002, on propose des méthodes numériques pour le résoudre. Cela sépare T7 des autres types de tâches de OM3.

Dans la dernière période 2002 – 2006, l'encadrement numérique rapproche T'7, trace de T7, de T5 et T6.

L'écart entre un savoir de référence et le savoir à enseigner dans EMS en France et au Vietnam nous mène à nous questionner sur les éléments spécifiques du savoir à enseigner dans chacune de deux institutions. Nous tenterons d'y répondre dans le chapitre prochain pour pouvoir formuler les questions sur l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam.

## **Chapitre B4.**

### **Conclusion de l'analyse institutionnelle comparative entre la France et le Vietnam sur l'objet de savoir « intégrale »**

Nous avons commencé l'étude du savoir à enseigner « intégrale » par une première analyse institutionnelle comparative entre deux institutions d'enseignement : la classe de terminale en France et la classe 12 au Vietnam (chapitres A1, A2, A3). Nous avons poursuivi le travail par l'étude du baccalauréat en France et au Vietnam, et du concours d'entrée universitaire au Vietnam pour déterminer des indices sur les pratiques institutionnelles effectives et stables des enseignants des deux institutions (chapitre B1). Pour étudier le savoir apprêté par les enseignants, nous avons effectué une enquête auprès des enseignants français et vietnamiens (chapitre B2). Nous avons effectué enfin une enquête épistémologique sur l'objet « intégrale » pour revenir sur l'analyse institutionnelle et déterminer l'écart entre un savoir de référence et le savoir à enseigner dans EMS en France et au Vietnam (chapitre B3).

Nous présenterons dans ce chapitre les principaux résultats de la comparaison institutionnelle sur l'objet de savoir « intégrale ». Nous nous centrerons ensuite sur trois éléments spécifiques du savoir à enseigner dans l'institution vietnamienne : les ostensifs  $\int$  et  $dx$ , et le contrat institutionnel sur le calcul d'aire. Nous formulerons enfin les questions sur l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam.

## **I. Comparaison institutionnelle sur l'objet de savoir « intégrale »**

### **I.1. Ressemblance entre les deux institutions**

#### **I.1.1. Évolution de la notion d'intégrale**

Durant les trois périodes observées, la définition de l'intégrale *évolue* dans chacune des deux institutions.

En France, dans la première période (1970 – 1980), l'intégrale est définie par la limite commune de sommes de Riemann ou par les fonctions en escalier. Le logos de l'intégrabilité est partiellement présent. L'étude de l'existence d'une intégrale est présente au baccalauréat et se restreint à la vérification de la continuité de la fonction à intégrer sur l'intervalle d'intégration.

Dans la deuxième période (1980 – 2002), l'intégrale est définie par la formule de Newton – Leibniz, qui permet d'éviter l'étude de l'intégrabilité.

Dans la troisième et dernière période (2002 – 2006), l'intervention *parallèle* de l'aire sous la courbe et des suites adjacentes dans la définition de l'intégrale apporte une double approche : l'intégrale (d'une fonction continue positive) est à la fois l'aire sous une courbe et la limite commune de deux suites adjacentes. L'intégrabilité réapparaît mais sa trace est infime dans le logos et absente de la praxis.

Au Vietnam, dans la première période (1975 – 1990), l'intégrale est définie par la limite commune de sommes de Riemann. Le statut de l'intégrabilité dans cette période est identique à la période correspondante en France. L'étude de l'intégrabilité est absente du manuel et du baccalauréat. Au concours d'entrée universitaire, elle n'apparaît pas comme

une fin en soi, mais elle peut être attendue pour justifier l'existence par exemple d'une limite de suite représentant une somme de Riemann.

Dans les deux dernières périodes (1990 – 2000, 2000 – 2006), après avoir étudié le problème général de calcul d'aire sous la courbe, les manuels mènent à la définition de l'intégrale par la formule de Newton – Leibniz. L'intégrabilité disparaît dans ces deux périodes en même temps que la formule de Newton – Leibniz joue le rôle d'élément technologique pour l'existence et le calcul d'intégrale.

Les évolutions supra montrent que les deux institutions ont l'intention *d'éviter l'étude de l'intégrabilité et de maintenir, sous une forme ou un autre, un lien épistémologique entre aire et intégrale* que nous aborderons particulièrement dans la suite.

*Nous pouvons dire que les deux institutions privilégient le calcul : calcul de primitive et calcul de grandeurs (calcul d'intégrale et calcul d'aire en particulier).*

### **I.1.2. Intégration par parties**

Dans les trois périodes observées, l'intégration par parties est la méthode d'intégration *commune* aux deux institutions, bien que les formules enseignées dans chacune des deux institutions ne soient pas tout à fait les mêmes :

$$\text{- En France : } \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\text{- Au Vietnam : } \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

### **I.1.3. Applications du calcul intégral**

Dans les deux institutions, les applications du calcul intégral au calcul de grandeurs sont stables durant les deux dernières périodes : le calcul d'aire et le calcul de volume sont toujours présents. De plus, le calcul d'aire est privilégié en France comme au Vietnam par son existence dans deux habitats : de façon implicite dans l'introduction de la notion d'intégrale et le calcul d'intégrale, et de façon explicite dans les applications de l'intégrale.

### **I.1.4. Liens entre aire, primitive et intégrale**

Dans chacune des deux institutions, les liens entre aire, primitive et intégrale restent inchangés durant les trois périodes observées. Ils deviennent des invariants institutionnalisés du savoir à enseigner que les enseignants de deux pays doivent respecter dans l'appropriation du savoir.

## **I.2. Dissemblance entre les deux institutions**

### **I.2.1. Calcul de primitive**

Dans les deux dernières périodes, le calcul de primitive en France est proposé sans l'ostensif  $\int$ . Il est donc séparé du calcul d'intégrale. L'intention de considérer une primitive comme une fonction est de plus marquée par la donnée constante de l'intervalle de définition associé. Dans la dernière période, cette intention se voit renforcée par l'introduction de l'étude de la fonction « intégrale dépendant de la borne supérieure » comme primitive s'annulant en un point.

Par contre, le calcul de primitive au Vietnam est proposé avec l'ostensif  $\int$  dans les première et dernière périodes. Par là, il est lié étroitement au calcul d'intégrale. Les enseignants vietnamiens identifient les primitives (d'une fonction) à l'intégrale indéfinie (de cette fonction). De plus, l'intervalle de définition de primitive reste implicite et il n'est jamais demandé aux élèves dans le calcul de primitive. On peut se demander alors si la nature du résultat du calcul d'une primitive est bien une fonction pour les élèves.

### I.2.2. Primitivation et changement de variable

Outre l'intégration par parties commune aux deux institutions, l'autre méthode d'intégration à enseigner est la primitivation en France et le changement de variable au Vietnam.

Le manuel en vigueur au Vietnam présente deux types de changement de variable :  $x = \varphi(t)$  et  $u = \psi(x)$ . Dans la praxis, la différentiation devient un élément technologique qui permet d'effectuer le changement de variable comme une substitution littérale formelle sans se référer aux formules présentées dans le manuel. En particulier, le manuel de la dernière période propose une manipulation sur l'ostensif  $dx$  qui permet d'effectuer un changement de variable *implicite* en économisant une nouvelle variable.

En France, la primitivation qui s'appuie sur l'élément technologique :

Si  $F$  est une primitive de  $f$  alors les primitives de  $(f \circ u)u'$  sont  $F \circ u + C$

peut se ramener au changement de variable du type  $u = \psi(x)$ . Certaines intégrales, nécessitant le changement de variable du type  $x = \varphi(t)$ , peuvent être calculées dans l'institution française au moyen des formules élémentaires de calcul d'aire.

### I.2.3. Calcul approché et encadrement d'intégrale

Dans les programmes de la période 1980 – 2002 en France, l'approximation d'intégrale est effectuée par un *calcul numérique*. Cette technique est cependant absente du baccalauréat et remplacée par un *encadrement numérique*. Ce dernier est aussi présent dans la partie *exercices* des manuels de la période 2002 – 2006.

Le calcul approché d'intégrale est toujours absent au Vietnam. L'encadrement numérique est présent dans la partie *exercices* des manuels des deux dernières périodes au Vietnam. Mais il ne sert pas au calcul approché.

### I.2.4. Calcul d'aire

Dans la dernière période, le calcul d'aire dans l'institution vietnamienne peut être proposé sous deux formes : dans un problème d'étude de fonctions, ou hors de l'étude de fonctions. La première forme nécessite le respect de règles implicites d'un contrat institutionnel pour déterminer la surface dont on doit calculer l'aire. La deuxième ne le nécessite pas. Dans les deux cas, le domaine dont on doit calculer l'aire est toujours introduit par des mots.

En France, dans la dernière période, le calcul d'aire est toujours proposé dans un problème d'étude de fonctions. Le domaine dont on doit calculer l'aire peut être défini par des mots ou par un système d'inéquations. Dans les deux cas, les abscisses minimale et maximale du domaine qui deviendront les deux bornes d'intégration sont préalablement données pour éviter toute ambiguïté dans la localisation du domaine.

### I.2.5. Liens entre aire, primitive et intégrale

Dans la praxis de l'institution française, les liens entre aire, primitive et intégrale peuvent être schématisés comme suit :



Primitive  $\Leftrightarrow$  Intégrale  $\Leftrightarrow$  Aire

Cela signifie que :

- La primitive sert à calculer l'intégrale et l'intégrale (dépendant de la borne supérieure) sert à calculer la primitive (s'annulant en un point donné).
- L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe) et l'aire (sous la courbe) sert à calculer l'intégrale.
- Le lien *direct* entre primitive et aire n'est pas établi.

Dans la praxis de l'institution vietnamienne, les liens entre aire, primitive et intégrale sont *monodirectionnels* :

Primitive  $\rightarrow$  Intégrale  $\rightarrow$  Aire

- La primitive sert à calculer l'intégrale, mais l'intégrale (dépendant de la borne supérieure) ne sert pas à calculer la primitive (s'annulant en un point donné).
- L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe), mais l'aire (sous la courbe) ne sert pas à calculer l'intégrale.
- Le lien *direct* entre primitive et aire n'est pas établi.

Ces liens influencent fortement le statut de l'interprétation géométrique de l'intégrale. Cette dernière est présente dans l'institution française mais absente de l'institution vietnamienne. Par conséquent, la solution géométrique à un problème d'intégrale est acceptée en France mais refusée au Vietnam.

### **I.2.6. Intervention du calcul intégral dans d'autres domaines**

En France, dans la partie exercices des manuels comme dans le baccalauréat, le calcul intégral est un outil pour étudier les suites, les équations différentielles ou les probabilités.

Au Vietnam, le calcul intégral est proposé comme une fin en soi. Il ne sert pas à étudier les suites, ni les équations différentielles, ni les probabilités.

## **II. Trois éléments spécifiques du savoir à enseigner dans l'institution vietnamienne**

À partir de la comparaison institutionnelle supra, nous nous centrerons dans cette partie sur trois éléments spécifiques du savoir à enseigner dans l'institution vietnamienne :

- les ostensifs  $\int$  et  $dx$ ,
- le contrat institutionnel sur le calcul d'aire.

### **II.1. Ostensif $\int$**

La notation  $\int f(x)dx$  est introduite dans les première et dernière périodes pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction  $f$ . Par abus de langage, elle est aussi utilisée pour désigner une primitive quelconque de  $f$ . Le calcul de primitive est donc étroitement attaché à l'ostensif  $\int$  par ses valences instrumentale et sémiotique qui permettent d'effectuer et de contrôler, si nécessaire, le changement de variable et l'intégration par parties comme pour l'intégrale définie.

Avec la notation (1)  $[\int f(x)dx]$ , si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , la formule d'intégration par parties  $\int fg' dx = fg - \int f' g dx$  garde tout son sens, de même que la formule de changement de

variable  $\int f(x)dx \ll = \gg \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ , où  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  prend ses valeurs dans  $I$ . (Arnaudès et Fraysse, 1989)

## II.2. Ostensif $dx$

Comme nous l'avons dit dans l'enquête épistémologique, Leibniz considère l'aire sous la courbe comme somme des aires de rectangles infinitésimaux. Il la note  $\int ydx$  où le  $dx$  désigne un côté d'un rectangle infinitésimal par lequel on doit multiplier l'ordonnée  $y$ , autre côté du rectangle, pour obtenir l'aire du rectangle infinitésimal et  $\int$  désigne la somme de ces rectangles. Leibniz explicite les bornes de l'intégrale par des mots. Il s'appuie sur le théorème de la *transmutation* formulé par lui-même pour effectuer la quadrature sous une courbe via celle sous une courbe auxiliaire, forme primitive du changement de variable de nos jours.

Chez Leibniz, l'ostensif  $dx$  est à la fois un facteur multiplicatif et un indicateur d'équipollence de figures, analogue à l'*indicateur de variable d'intégration* de nos jours. La transmutation chez Leibniz est donc attaché fortement aux ostensifs  $\int$  et  $dx$  reflétant les concepts infinitésimaux avant l'émergence des notions rigoureuses de *fonction* et de *limite*.

Comme le disent Bourbaki (1949), Lang (1964), Rudin (1976), et Guénard (2005), le  $dx$  dans  $\int_a^b f(x)dx$  ne désigne pas un élément différentiel mais indique *par convention* la variable d'intégration. Cette indication est indispensable lorsque l'expression algébrique de  $f$  contient plusieurs lettres ou lorsqu'on effectue un changement de variable. Cependant Lang (1964), met particulièrement en évidence la valence instrumentale de  $dx$  comme facteur multiplicatif (règle à chaîne) dans les méthodes d'intégration, notamment dans le changement de variable interprété comme composition de fonctions.

Comme nous l'avons dégagé dans les analyses institutionnelles du savoir à enseigner au Vietnam et dans l'enquête épistémologique, les valences instrumentales et sémiotiques de l'ostensif  $dx$  se forment à travers leurs usages dans l'intégration : valence sémiotique de « facteur multiplicatif », valences sémiotique et instrumentale d'« indicateur de variable d'intégration », valence instrumentale d'« élément différentiel ». Or les valences instrumentales et sémiotiques de l'ostensif  $dx$  sont différentes dans les techniques institutionnellement mises en jeu. Cela peut former et aussi délimiter des significations différentes pour l'élève.

## II.3. Contrat institutionnel sur le calcul d'aire

Dans la dernière période (2000 – 2006), l'apparition du calcul d'aire hors de l'étude préalable des fonctions serait une tentative de l'institution pour simplifier la production de la solution attendue dans le calcul d'aire. Cependant, le calcul d'aire attaché à une étude de fonctions, qui nécessite le respect du contrat institutionnel, existe aussi dans le baccalauréat et le concours d'entrée universitaire. Deux modes d'écriture de l'intégrale requise restent concurrents : l'un recourant à une lecture graphique de la surface après une étude « classique » de la fonction à intégrer, l'autre évitant cette lecture graphique. Nous en déduisons que ces deux modes doivent être présents dans les pratiques institutionnelles effectives et stables des enseignants vietnamiens.

### **III. Questions sur l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam**

Les éléments spécifiques de l'institution vietnamienne par rapport à ceux de l'institution française nous conduisent à formuler dans cette partie des questions sur l'effet des contraintes et conditions sur l'OM effectivement enseignée au Vietnam. Nous nous centrerons sur les calculs (calcul de primitive, calcul d'intégrale, calcul d'aire) et les liens entre eux.

**III.1.** Dans le savoir à enseigner comme dans le savoir apprêté par les enseignants vietnamiens, le calcul de primitive est explicitement proposé avec l'ostensif  $\int$  : calculer  $\int f(x)dx$ . L'ostensif  $\int$  ramène le calcul de primitive au calcul d'une intégrale.

- Quelle est la nature pour les élèves des résultats de ces calculs ?
- Les élèves vietnamiens assimilent-ils les notions de primitive et d'intégrale à une seule notion ? Quelles en sont les causes ? Quelles en sont les conséquences ?

Dans l'intégration par parties, les élèves doivent calculer  $v$  à partir de  $dv$ . Ceci est mathématiquement un calcul de primitive, implicitement proposé sans l'ostensif  $\int$ .

- Comment les élèves vietnamiens reconnaissent-ils ce calcul ? Quelles sont les interventions des enseignants dans leurs pratiques d'enseignement pour aider leurs élèves ? Quelles sont les stratégies observées chez les élèves vietnamiens, confrontés à ce calcul ?

**III.2.** Comme nous l'avons dégagé, les valences instrumentale et sémiotique de l'ostensif  $dx$  varient selon les techniques d'intégration. Ceci peut produire chez les élèves des manipulations pertinentes et non pertinentes.

- Quelles sont les techniques d'intégration effectivement enseignées ?
- Quelles sont les erreurs observées chez les élèves vietnamiens dans la manipulation de l'ostensif  $dx$  ?
- Quel est le rôle de l'intégrale dépendant de la borne supérieure dans l'enseignement effectif ? Intervient-elle dans le calcul de primitive ?

**III.3.** Il existe actuellement dans le savoir à enseigner deux formes de calcul d'aire : calcul d'aire attaché à une étude de fonctions et calcul d'aire hors de l'étude de fonctions.

- Dans l'enseignement effectif, quelle est la proportion de chacune de ces deux formes ?
- Quelles sont les erreurs observées chez les élèves vietnamiens dans la lecture graphique pour un calcul d'aire attaché à une étude de fonctions ?
- Les élèves vietnamiens, confrontés à un exercice sur les intégrales, pensent-ils à une solution géométrique quand une solution analytique devient coûteuse ?

Nous tenterons de répondre à ces questions dans la partie C : étude du savoir effectivement enseigné au Vietnam.

**Partie C.**  
**Étude du savoir effectivement enseigné au Vietnam**



## Chapitre C1.

### **Analyse du questionnaire pour les élèves vietnamiens : rupture du contrat institutionnel par rapport au calcul d'intégrale et au calcul d'aire**

Ce chapitre concerne une enquête auprès d'élèves vietnamiens de classe 12 pour mieux comprendre le savoir effectivement enseigné au Vietnam. À travers un questionnaire pour les élèves, l'enjeu de l'enquête est de mettre en évidence des résultats de l'enseignement effectif de la notion d'intégrale, en le confrontant à ceux de l'enquête auprès des enseignants vietnamiens. Nous résumons ci-dessous cette enquête en ne conservant que les résultats concernant le questionnaire pour les élèves.

- *Liens entre aire, primitive et intégrale apprêtés par les enseignants vietnamiens*

- \* L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe).
- \* La primitive sert à calculer l'intégrale.
- \* L'aire (sous la courbe) et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.

- *Solution attendue à l'exercice 1 : étude du sens de variation d'une fonction définie par une intégrale dépendant de la borne supérieure dont l'intégrande est définie par un tableau de variations*

- \* Les enseignants refusent de proposer un tel exercice à leurs élèves.
- \* Ils proposent de donner numériquement dans le tableau de variations la valeur pour laquelle s'annule  $f(x)$  ou de remplacer le tableau de variations par une expression algébrique explicite.
- \* Ils attendent de leurs élèves la solution analytique à l'exercice.
- \* Ils estiment qu'environ 6,8 % de leurs élèves soient capables de résoudre l'exercice.
- \* Les difficultés de l'exercice, selon eux, se trouvent dans le décryptage du tableau de variations et dans la mise en lien entre la variation de  $F$  et le signe de  $f$ .

- *Notation d'une solution géométrique à l'exercice 2 : encadrement numérique d'une intégrale*

- \* La note moyenne donnée à l'exercice est 3,52 (sur 5).
- \* Les enseignants critiquent la non-généralité et la non-rigueur de la solution. Ils lui imposent une contrainte dont la solution analytique est dispensée.

Nous tenterons de répondre dans ce chapitre aux questions suivantes :

- Les liens entre aire, primitive et intégrale effectivement établis chez les élèves vietnamiens sont-ils proches de ceux apprêtés par l'enseignant ? Sinon, quelles sont les principales causes des différences éventuellement constatées ? Quelles en sont les conséquences ?
- Les élèves vietnamiens assimilent-ils les notions de primitive et d'intégrale à une seule notion ? Quelles en sont les conséquences ?
- Les élèves vietnamiens, confrontés à un exercice sur les intégrales, pensent-ils à une solution géométrique quand une solution analytique devient coûteuse ?

#### **I. Analyse *a priori* du questionnaire pour les élèves vietnamiens**

Le questionnaire comporte deux exercices non routiniers et une question : l'intégralité du questionnaire se trouve dans les annexes.

- Le premier exercice, absent du questionnaire pour les enseignants, demande de calculer une *primitive* d'une fonction donnée sur un intervalle donné. L'enjeu principal de cet

exercice n'est pas d'évaluer les techniques mobilisées par les élèves, mais de vérifier si les élèves assimilent ou non les notions de primitive et d'intégrale à une seule notion.

- Le second exercice demande d'étudier le sens de variation d'une fonction définie par une intégrale dépendant de la borne supérieure et de vérifier un encadrement numérique de l'intégrale. Cet exercice est présent dans le questionnaire pour les enseignants au travers des exercices 1 et 2 (partie 2, questionnaire pour les enseignants). Il nous servira à déterminer le statut de la solution géométrique en relation avec l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

- La question finale porte sur les liens entre aire, primitive et intégrale pour confronter les réponses des élèves avec ce que les enseignants cherchent à mettre en place (partie 1, questionnaire pour les enseignants).

### I.1. Exercice 1 : calcul de primitive

Il s'agit de :

« Calculer une primitive sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $f$  définie par :  
 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)\ln x$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  ».

Dans le manuel vietnamien en vigueur, sauf les huit premiers exercices qui proposent de « calculer les primitives » d'une fonction, tous les autres exercices d'intégration sont formulés sous l'une de deux formes :

« calculer  $\int f(x)dx$  », « calculer  $\int_a^b f(x)dx$  ».

N'étant jamais abordé explicitement dans les exercices, le domaine de définition de la primitive est implicite. De plus, l'intégration par parties est enseignée uniquement pour l'intégrale, pas pour l'intégrale indéfinie.

Nous présentons ci-dessous les stratégies observables pour l'exercice :

#### Stratégie S1. Intégration par parties

Cette stratégie doit mobiliser l'ostensif  $\int$  afin de pouvoir effectuer ensuite l'intégration par parties pour « récupérer » une méthode de calcul d'intégrale : le calcul de primitive devient alors un calcul d'intégrale indéfinie, considérée comme intégrale sans bornes.

L'intégration par parties peut s'effectuer en une seule fois ou en trois fois.

#### Stratégie S1a. Une intégration par parties

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est de la forme :

$$I = \int f(x)dx = \int (x^2 + 2x + 3)\ln x dx$$

$$\text{En posant } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2 + 2x + 3)dx \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$I = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \int \left( \frac{x^2}{3} + x + 3 \right) dx$$

$$= \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \left( \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x \right) + C$$

Une primitive quelconque de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est donc :

$$I = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \left( \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x \right) + C$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

**Stratégie S1b.** *Trois intégrations par parties*

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est de la forme :

$$I = \int f(x)dx = \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx = \int x^2 \ln x dx + \int 2x \ln x dx + \int 3 \ln x dx = I_1 + I_2 + I_3$$

On calcule  $I_1$  :

$$\text{En posant } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C_1 \text{ où } C_1 \text{ est une constante arbitraire.} \end{aligned}$$

On calcule  $I_2$  :

$$\text{En posant } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2x dx \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x^2 \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} I_2 &= x^2 \ln x - \int x dx \\ &= x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C_2 \text{ où } C_2 \text{ est une constante arbitraire.} \end{aligned}$$

On calcule  $I_3$  :

$$\text{En posant } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = 3 dx \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = 3x \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} I_3 &= 3x \ln x - \int 3 dx \\ &= 3x \ln x - 3x + C_3 \text{ où } C_3 \text{ est une constante arbitraire.} \end{aligned}$$

Une primitive quelconque de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est donc :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \left( \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x \right) + C$$

où  $C = C_1 + C_2 + C_3$ .

**Stratégie S2.** *Déduction d'une dérivation*

L'idée de la stratégie est de déduire de la dérivation d'une fonction préalablement choisie une primitive de  $x \mapsto x^n \ln x$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). Le calcul peut s'effectuer avec ou sans l'ostensif  $\int$ .

**Stratégie S2a.** *Avec l'ostensif  $\int$*

On se propose de calculer une primitive de  $x \mapsto x^n \ln x$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). On a :



$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right)' &= x^n \ln x + \frac{x^n}{n+1} \text{ pour tout } x > 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right)' - \frac{x^n}{n+1} &= x^n \ln x \text{ pour tout } x > 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)' &= x^n \ln x \text{ pour tout } x > 0 \\ \Rightarrow \int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \text{ où } C \text{ est une constante arbitraire.} \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est de la forme :

$$\begin{aligned} I &= \int f(x) dx = \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx = \int x^2 \ln x dx + \int 2x \ln x dx + \int 3 \ln x dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + 3x \ln x - 3x + C = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x\right) + C \end{aligned}$$

**Stratégie S2b. Sans ostensif]**

On calcule une primitive de  $x \mapsto x^n \ln x$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) comme dans la stratégie S2a.

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est donc :

$$\begin{aligned} x \mapsto F(x) &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + 3x \ln x - 3x + C \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x\right) + C \end{aligned}$$

**Stratégie S3. Intégrale dépendant de la borne supérieure**

L'idée de cette stratégie est d'utiliser l'intégrale dépendant de la borne supérieure de  $f$  pour calculer une primitive de  $f$ .

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est de la forme :

$$I = \int_a^x (t^2 + 2t + 3) \ln t dt$$

où  $a$  est une constante arbitraire strictement positive.

En posant  $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = (t^2 + 2t + 3) dt \end{cases}$ , on a :  $\begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t \end{cases}$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{t^3}{3} + t^2 + 3t\right) \ln t \Big|_a^x - \int_a^x \left(\frac{t^2}{3} + t + 3\right) dt \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right) \ln x - \left(\frac{a^3}{3} + a^2 + 3a\right) \ln a - \left(\frac{t^3}{9} + \frac{t^2}{2} + 3t\right) \Big|_a^x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right) \ln x - \left(\frac{a^3}{3} + a^2 + 3a\right) \ln a - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x\right) + \left(\frac{a^3}{9} + \frac{a^2}{2} + 3a\right) \end{aligned}$$

Une primitive quelconque de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est donc :

$$I = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \left( \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x \right) + C$$

$$\text{où } C = \left( \frac{a^3}{9} + \frac{a^2}{2} + 3a \right) - \left( \frac{a^3}{3} + a^2 + 3a \right) \ln a.$$

Parmi les cinq stratégies supra :

- les stratégies S2a, S2b sont optimales du point de vue de la cohérence avec les éléments technologiques du programme vietnamien en vigueur.
- la stratégie S1a est optimale du point de vue du calcul instrumenté par l'ostensif  $\int$ .

## I.2. Exercice 2 : Étude de sens de variation d'une fonction et d'un encadrement numérique de l'intégrale

Voici le texte de l'exercice :

On donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f(x)$			$3$			$2$

$-1 \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} 3 \xrightarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} 2$

On définit la fonction  $F$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- a) Étudier le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $\mathbf{R}$ .
- b) La relation  $F(2) \geq 3$  est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Cet exercice est construit à partir des deux exercices proposés séparément dans le questionnaire pour les enseignants (chapitre B2). Cependant, nous y avons apporté deux modifications en les réunissant :

- Nous avons donné la valeur numérique annulant la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty, 0]$  dans le tableau de variations : c'est  $-1$ . Ceci correspond à une proposition de plusieurs enseignants vietnamiens sur les modifications à apporter éventuellement à l'exercice. De plus, il abaisse le niveau de difficulté en simplifiant les solutions possibles, mais ne change pas la nature de l'exercice.
- Nous avons posé une question ouverte : « *La relation  $F(2) \geq 3$  est-elle vraie ?* » au lieu d'une question fermée : « *Démontrer que  $F(2) \geq 3$*  ». Cette question, qui n'impose pas de démonstration institutionnellement conçue comme solution analytique et comme rigoureuse, ouvre la possibilité, parmi d'autres, d'une solution géométrique.

Dans l'exercice, les variables didactiques et les valeurs choisies sont les suivantes :

- V1 : Mode de représentation de fonction (dans l'exercice : tableau de variation, intégrale dépendant de la borne supérieure).
- V2 : Les valeurs marquant les changement de signes de  $f(x)$  sont données ou non (dans l'exercice : oui et il y en a exactement une).
- V3 : Les extrema de  $f$  sur  $[0, 2]$  permettent ou non de vérifier directement la question posée. Dans l'exercice : non

$$f(t) \geq 1 \text{ pour tout } t \text{ de } [0, 2] \text{ n'implique pas } F(2) = \int_0^2 f(t) dt \geq 3.$$

- V4 : La question est posée de façon fermée ou ouverte (dans l'exercice : ouverte).

Pour les stratégies possibles, nous faisons intervenir (comme dans le questionnaire pour les enseignants) deux cadres : l'analytique (A) et le géométrique (G). Nous tenons compte aussi d'une règle du contrat didactique sur l'étude des fonctions de l'institution vietnamienne que nous avons mentionnée dans le chapitre A3 : *dans l'étude du sens de variation d'une fonction, il faut dresser son tableau de variations. Si son domaine de définition est  $\mathbf{R}$ , il faut y faire figurer ses limites en l'infini.*

**Exercice 2a**

Nous présentons ci-dessous les stratégies observables pour l'exercice 2a :

**Stratégie S1. Étude du signe de  $F' = f$  (A)**

L'idée de cette stratégie est de calculer la dérivée de la fonction  $F$  et d'étudier le signe de cette dérivée à l'aide de la lecture du tableau de variations de  $f$ .

On a :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R} \Rightarrow F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}.$$

Les variations de  $F$  dépendent donc du signe de  $f$ .

Du tableau de variations de  $f$ , on déduit :

$$f(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ de } ]-1; +\infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ pour tout } x \text{ de } ]-\infty; -1[$$

Il en résulte que  $F$  est strictement croissante sur  $] -1; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $] -\infty; -1[$ . Pour dresser le tableau de variations de  $F$ , on doit calculer les limites de  $F$  en l'infini.

• Limite de  $F$  en  $+\infty$  :

$$\forall x > 0, f(x) \geq 1 \Rightarrow \forall x > 0, F(x) = \int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x 1 \cdot dx = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

• Limite de  $F$  en  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \exists M > 0, \forall x \leq -M, f(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, \int_x^{-M} f(t)dt \leq \int_x^{-M} -\frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}(x + M)$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, \int_x^0 f(t)dt + \int_{-M}^0 f(t)dt \leq \frac{1}{2}(x + M) + \int_{-M}^0 f(t)dt = \frac{1}{2}x + C \text{ où } C = \frac{1}{2}M + \int_{-M}^0 f(t)dt$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, \int_x^0 f(t)dt \leq \frac{1}{2}x + C$$

$$\Rightarrow \forall x \leq -M, F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt \geq -\frac{1}{2}x - C$$

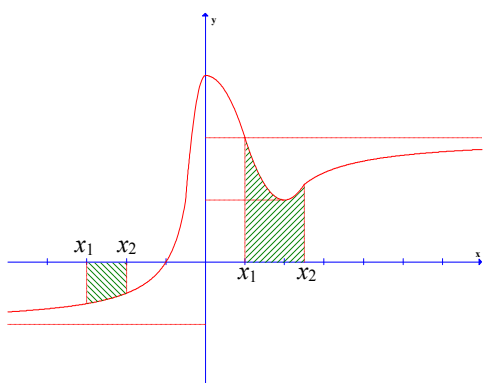
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$$

• Tableau de variations de  $F$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$
$F(x)$	$+\infty$	$F(-1)$	$+\infty$

**Stratégie S2. Étude du signe de  $F(x_1) - F(x_2)$  (A - G)**

L'idée de cette stratégie est d'étudier le signe de  $F(x_1) - F(x_2)$  pour en déduire le sens de variation de  $F$ .



- En prenant deux réels  $x_1, x_2$  tels que  $x_1 < x_2$ , on a  $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ . Pour tout  $x_1, x_2$  de  $] -1, +\infty[$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$  est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = x_1, x = x_2$ . Il en résulte que  $F(x_2) - F(x_1) > 0$  donc  $F$  est strictement croissante sur  $] -1, \infty[$ .

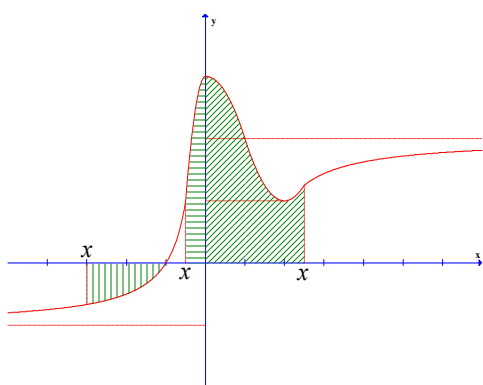
- Pour tout  $x_1, x_2$  de  $] -\infty, -1[$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$  est égale à

l'opposé de l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = x_1, x = x_2$ . Il en résulte que  $F(x_2) - F(x_1) < 0$  donc  $F$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, -1[$ .

- Le calcul des limites de  $F$  en l'infini et la construction du tableau de variations de  $F$  sont analogues à la stratégie S1.

**Stratégie S3. Interprétation  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  comme l'aire variable sous la courbe (G)**

L'idée de cette stratégie est d'interpréter  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  comme l'aire variable sous la courbe, et d'étudier la variation de cette aire par rapport à  $x$ .



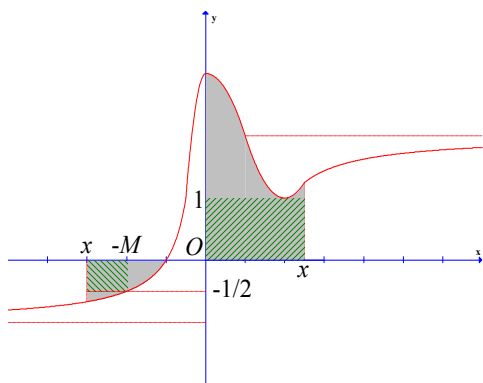
- Pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , les axes des coordonnées et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Quand  $x$  parcourt du point d'origine vers l'infini positif ( $x$  augmente), cette aire augmente. Il en résulte que  $F$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $x$  de  $] -1, 0[$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt$  est l'opposé de l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de  $f$ , et la droite

perpendiculaire à l'axe des abscisse en point d'abscisse  $x$ . Quand  $x$  parcourt du point d'origine vers le point d'abscisse  $-1$  ( $x$  diminue), cette aire augmente et par conséquent, son opposé diminue. Il en résulte que  $F$  est croissante sur  $] -1, 0[$ .

- Pour tout  $x < -1$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt = -\int_x^{-1} f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt = -\int_x^{-1} f(t)dt +$   
*constante*. L'intégrale  $-\int_x^{-1} f(t)dt$  est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe

représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = -1$  et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Quand  $x$  parcourt du point d'abscisse  $-1$  vers l'infini négatif ( $x$  diminue), cette aire augmente. Il en résulte que  $F$  est décroissante sur  $] -\infty, -1[$ .



• Limite de  $F$  en  $+\infty$  : Pour  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , les axes des coordonnées et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Cette aire est supérieure à l'aire du rectangle délimité par les axes des coordonnées, la droite d'équation  $y = 1$  et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Or cette dernière aire, ayant pour valeur  $x$ , tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

• Limite de  $F$  en  $-\infty$  : Pour  $x < -1$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt = -\int_x^{-1} f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt = -\int_x^{-1} f(t)dt + \text{constante}$ . L'intégrale  $-\int_x^{-1} f(t)dt$  est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = -1$  et la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses en point d'abscisse  $x$ . Quand la valeur absolue de  $x$  est assez grande, cette aire est supérieure à l'aire du rectangle délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation  $y = -1/2$  et les droites perpendiculaires à l'axe des abscisses en points d'abscisses  $x$  et  $-M$  où  $f(-M) = -1/2$ . Or l'aire de ce rectangle ayant pour valeur  $-\frac{x+M}{2}$ , tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\int_x^{-1} f(t)dt = +\infty$ , et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$ .

La stratégie S3 est optimale car elle dispense de dériver  $F$ , et d'étudier le signe de  $F(x_1) - F(x_2)$ . Par ailleurs, le calcul des limites de  $F$  en l'infini dans S3 est plus économique que celui dans S1 et S2.

### Exercice 2b

Nous présentons ci-dessous les stratégies observables pour l'exercice 2b :

#### S1. Subdivision d'intervalle

D'après la définition de la fonction  $F$ , on a :

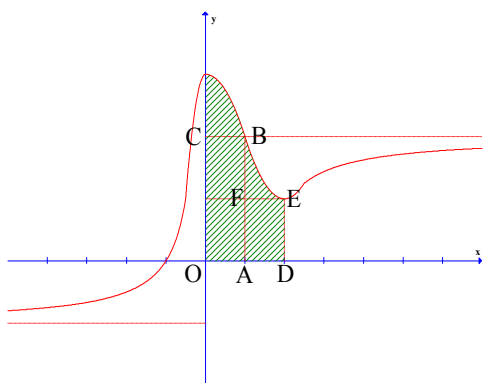
$$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt$$

D'après le tableau de variations de la fonction  $f$ , on a :

$$f(t) \geq 2 \text{ pour tout } t \text{ de } [0, 1] \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt \geq 2$$

$$f(t) \geq 1 \text{ pour tout } t \text{ de } [1, 2] \Rightarrow \int_1^2 f(t)dt \geq 1$$

Donc  $F(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt \geq 2 + 1 = 3$ . La relation  $F(2) \geq 3$  est vraie.



**S2. Aire sous la courbe (Stratégie optimale)**

$F$  étant continue positive sur  $[0, 2]$ ,  $F(2) = \int_0^2 f(t)dt$  est

égale à l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$ . Du graphique, on a :

$$F(2) = \text{aire}(\mathcal{D}) \geq \text{aire}(\text{OABC}) + \text{aire}(\text{ADEF}) = 2 + 1 = 3$$

La relation  $F(2) \geq 3$  est donc vraie.

Rappelons que les enseignants vietnamiens proposent pour unique solution de référence la stratégie S1. Qu'en est-il pour leurs élèves ?

**S3. Négation (Stratégie erronée)**

Du tableau de variations, on a :

$$f(t) \geq 1 \text{ pour tout } t \text{ de } [0, 2]$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t)dt \geq 2$$

$$\Rightarrow F(2) \geq 2$$

Donc la relation  $F(2) \geq 3$  est fausse.

**I.3. Question : Liens entre aire, primitive et intégrale**

Nous présentons dans le tableau 49 les liens entre aire, primitive et intégrale que les élèves sont susceptibles d'avoir construits, en nous appuyant sur l'analyse institutionnelle (chapitres A1, A2, A3) et sur l'enquête auprès des enseignants (chapitre B2).

Nous indiquons en grisé dans le tableau les liens apprêtés de façon privilégiée par les enseignants vietnamiens (chapitre B2).

Liens entre aire et intégrale
1. Le calcul de l'aire sous la courbe mène à la définition de l'intégrale.
2. L'intégrale sert à calculer l'aire sous la courbe.
4. L'aire sous la courbe sert à interpréter géométriquement l'intégrale.
5. L'aire est un nombre strictement positif, l'intégrale est un réel
Liens entre intégrale et primitive
6. Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz.
7. L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné.
8. Les primitives de $f$ sont aussi une intégrale, mais « indéfinie ». La différence entre intégrale et primitive est que l'intégrale a deux bornes et une valeur numérique unique, tandis que les primitives d'une fonction (l'intégrale indéfinie) n'ont aucune borne et diffèrent d'une constante additive.
Liens entre aire et primitive
9. L'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction en question.
10. L'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.
11. L'aire est un nombre strictement positif, la primitive est une fonction.
12. On n'expose aucun lien entre aire et primitive dans l'enseignement

**Tableau 49.** Liens entre aire, primitive et intégrale possibles

## II. Analyse *a posteriori* du questionnaire pour les élèves vietnamiens

6 classes 12 de trois lycées différents de la ville de Phan Thiet (Vietnam) ont été concernées par l'enquête. Nous notons respectivement A1, A2 (lycée A)<sup>29</sup>, B1, B2 (lycée B), C1, C2 (lycée C) les six classes dont nous présentons dans le tableau 50 les effectifs.

	Classe 1	Classe 2	Total
Lycée A	A1 : 33	A2 : 33	66
Lycée B	B1 : 45	B2 : 36	81
Lycée C	C1 : 46	C2 : 43	89
Total			236

**Tableau 50.** Effectifs des classes 12 participant à l'enquête

Le lycée A n'accueille que de bons élèves : c'est un lycée public dit « d'élite », ouvert par concours à la fin de la classe 9 (équivalent de la 3<sup>e</sup>). La classe A1 est spécialisée en mathématiques et la classe A2 en physique. Le lycée B est un lycée « ordinaire » public : B1 et B2 sont non spécialisées. Le lycée C n'accueille que des élèves moyens ou faibles (lycée semi-public) : C1 et C2 sont non spécialisées.

<sup>29</sup> Soulignons que les enseignants de ces classes A1 et A2 ont refusé de répondre au questionnaire « enseignants » pour la raison que les exercices 1 et 2 sont hors du programme.

Parmi les six classes, la classe A1 reflète le plus clairement le respect des enjeux institutionnels vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques et en particulier de la notion d'*intégrale*.

La convergence des réponses des élèves des six classes, si elle existe, donnera les invariants de l'enseignement effectif.

Les élèves ont travaillé sur le questionnaire pendant 45 minutes sous notre propre surveillance. Au moment du travail, tous les élèves avaient achevé le programme d'étude et la révision pour le baccalauréat.

## II.1. Exercice 1 : Calcul de primitive

La lecture des solutions d'élèves nous a conduit à ajouter aux stratégies observables les trois stratégies suivantes :

### Stratégie S4. Intégration d'un produit (Stratégie erronée)

Cette stratégie mobilise les deux théorèmes en acte suivants :

- $\int u(x)v(x)dx = \int u(x)dx \times v(x) + u(x) \times \int v(x)dx$
- Une primitive de  $\ln x$  est  $1/x$ .

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  est de la forme :

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int (x^2 + 2x + 3)\ln x dx = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x + (x^2 + 2x + 3) \frac{1}{x} + C = \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x + x + 2 + \frac{3}{x} + C \end{aligned}$$

### Stratégie S5. Primitive – Dérivée (Stratégie erronée)

On considère une primitive de la fonction  $f$  comme la fonction  $F$  déterminée par  $F' = f$ . Autrement dit, il calcule *la dérivée* de  $f$  au lieu d'*une primitive* de  $f$ .

Une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  est :

$$F(x) = f'(x) = (2x + 2)\ln x + (x^2 + 2x + 3) \frac{1}{x} = (2x + 2)\ln x + x + 2 + \frac{3}{x}$$

### Stratégie S6. Intégrale définie (Stratégie erronée)

La stratégie s'appuie sur l'idée qu'une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  est  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ .

L'élève effectue une intégration par parties pour calculer  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  mais il ne peut pas l'achever parce que le signe  $+\infty$  l'empêche d'appliquer la formule de Newton – Leibniz.

Nous présentons dans le tableau 51 les stratégies observées pour l'exercice.



	Stratégies observées	Classes						Total
		A1	A2	B1	B2	C1	C2	
Intégration par parties (présence de $\int$ )	<b>S1a</b> <i>une fois</i>	25	29	34	7	6	1	<b>102</b>
	<b>S1b</b> <i>trois fois</i>	6	3	3	1	1	2	<b>16</b>
Dédution d'une dérivation	<b>S2a</b> <i>présence de <math>\int</math></i>	2	1	0				<b>3</b>
	<b>S2b</b>	0	0	0				<b>0</b>
Intégrale dépendant de la borne supérieure	<b>S3</b>	0	0	0				<b>0</b>
Stratégies erronées	<b>S4</b> <i>produit</i>			1		3	1	<b>5</b>
	<b>S5</b> <i>dérivation</i>			4	4		4	<b>12</b>
	<b>S6</b> <i>Intégrale définie</i>				10	7	4	<b>21</b>
	<b>Sans réponse</b>	0	0	3	14	29	31	<b>77</b>
	<b>Total</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>45</b>	<b>36</b>	<b>46</b>	<b>43</b>	<b>236</b>

Tableau 51. Stratégies observées pour l'exercice 1

159 élèves (67 %) ont donné une solution à cet exercice. Ils ont *tous* mobilisé l'ostensif  $\int$  en indiquant :

« Une primitive de  $f$  est  $\int f(x)dx$ . »

118 des 159 élèves ayant répondu (74 %) dont la plupart sont des classes A1, A2, B1 mobilisent l'intégration par parties pour calculer une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ . Par l'usage de l'ostensif  $\int$ , ils assimilent donc le calcul d'une primitive au calcul d'une intégrale indéfinie, assimilé lui-même au calcul d'une intégrale.

Seuls 3 élèves mobilisent la stratégie S2a, bien sûr avec l'ostensif  $\int$ .

Le point de vue du calcul instrumenté par l'ostensif  $\int$  est donc *prépondérant*.

77 élèves (33 %) dont la plupart sont des classes B2, C1, C2 ne donnent aucune réponse. Ils écrivent dans leurs commentaires pourquoi ils n'arrivent pas à résoudre le problème :

« On ne comprend pas pourquoi « une primitive sur  $]0, +\infty[$  ». Si c'était une intégrale, il faudrait la donner sous la forme  $\int_a^b f(x)dx$ . »

Ainsi, le fait que le domaine de définition de la primitive soit donné explicitement dans le texte de l'exercice est une rupture de contrat. Ces 77 élèves ne savent calculer que les intégrales indéfinie ou définie  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $\int_a^b f(x)dx$  données telles quelles. Ceci explique

pourquoi 21 élèves mobilisent la stratégie S6 : une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ .

## II.2. Exercice 2 : Étude de sens de variation d'une fonction et d'un encadrement numérique de l'intégrale

### II.2.1. Exercice 2a

La lecture des solutions d'élèves nous a conduit à ajouter aux stratégies observables les trois stratégies suivantes :

**S4. Identifier les variations de  $F$  et  $f$  (Stratégie erronée).**

On a  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ . Le sens de variation de  $F$  est aussi celui de  $f$ . Du tableau de variations, on déduit que  $F$  est strictement croissante sur les intervalles  $]-\infty, 0[$ ,  $]2, +\infty[$ , et que  $F$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0, 2[$ .

**S5. Formule de Newton – Leibniz (Stratégie erronée)**

On a  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = [G(x) - G(0)]$  où  $G$  est une primitive quelconque de  $f$ .

Il en résulte que :

$$F'(x) = G'(x) - G'(0) = f(x) - f(0) = f(x) - 3. \text{ Le sens de variation de } F \text{ dépend du signe de } f(x) - 3.$$

Ici l'erreur (subtile) se trouve dans la dérivation de  $G(0)$ . Correctement, nous avons  $[G(0)]' (\text{constante})' = 0$ . Mais ici on pose  $[G(0)]' = G'(0) = f(0) = 3$ .

**S6. Recherche d'une expression algébrique explicite de  $F$  (Stratégie erronée)**

Il s'agit d'une tentative de choisir une fonction du troisième degré particulière à la place de  $F$  pour en étudier le sens de variation.

Nous présentons dans le tableau 52 les stratégies observées pour l'exercice 2a.

	Stratégies observées	Classes						Total
		A1	A2	B1	B2	C1	C2	
Analytique	<b>S1</b>	21	6	1				<b>28</b>
Analytique-géométrique	<b>S2</b>							
Géométrique	<b>S3</b>	1						<b>1</b>
Stratégies erronées	<b>S4</b> $F = f$	3	3		7	1	1	<b>15</b>
	<b>S5</b> Newton - Leibniz	2	1					<b>3</b>
	<b>S6</b> $f(x) = P_3(x)$	3	12	7	1			<b>23</b>
	<b>Sans réponse</b>	3	11	37	28	45	42	<b>166</b>
	<b>Total</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>45</b>	<b>36</b>	<b>46</b>	<b>43</b>	<b>236</b>

**Tableau 52.** Stratégies observées pour l'exercice 2a

Le pourcentage d'élèves ayant résolu correctement l'exercice est 12 %. Le pourcentage prévu par les enseignants vietnamiens pour un exercice analogue était 7 %, donc assez proche étant donné que pour l'exercice qui leur était proposé, la valeur annulant  $f$  n'était pas donnée.

166 des 236 élèves (70 %) ne résolvent pas l'exercice. Ceci montre son caractère problématique dû à la définition d'une fonction par un tableau de variations et de la présence de l'intégrale dépendant de la borne supérieure.

La stratégie S1 est la plus mobilisée (28 élèves dont 21 de A1). Seul un élève mobilise la stratégie optimale S3.

Aucun élève ne calcule les limites de  $F$  en l'infini. Nous pouvons faire l'hypothèse que ce non respect du contrat provient de la complexité du calcul de limite pour une fonction définie comme intégrale dépendant de la borne supérieure. En particulier, 3 élèves mobilisant la stratégie S5 ne considèrent pas l'intégrale dépendant de la borne supérieure

comme une primitive. Ils utilisent la formule de Newton – Leibniz. Ceci confirme l'absence de l'intégrale dépendant de la borne supérieure de la praxis.

Les commentaires des 166 élèves n'ayant pas résolu l'exercice confortent l'idée que l'absence de l'expression algébrique explicite de la fonction  $f$  et la définition de  $f$  par un tableau de variations sont des ruptures de contrat importantes, difficiles à gérer pour les élèves.

- « Normalement, on donne une fonction et on demande de dresser son tableau de variations. Ici, c'est l'inverse. Je ne peux pas étudier une fonction à partir de son tableau de variations ».
- « La courbe représentative de la fonction a deux asymptotes horizontales, ce que je ne vois jamais ».
- « Je n'arrive pas à trouver une fonction dont le tableau de variation est comme ça ! »
- « Cet exercice est étrange. Je ne peux pas le résoudre. »

La présence de l'intégrale dépendant de la borne supérieure est aussi une rupture de contrat.

- « En haut [dans l'exercice 1 du questionnaire], la consigne donne  $f(x)$ . Ici, elle donne  $f(t)dt$ . C'est bizarre ! »

**II.2.2. Exercice 2b**

Après avoir lu les solutions d'élèves, nous ajoutons les quatre stratégies suivantes aux stratégies observables pour l'exercice 2b.

Les stratégies S4 et S5 sont toutes deux liées à une lecture (erronée) du tableau de variation que nous redonnons ci-dessous.

$x$	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		-1	0	3	2	1
		↗	↘	↗	↘	↗
		0	2	1	2	3

**S4.  $F = f$  (Stratégie erronée)**

En cohérence avec la stratégie S4 pour l'exercice 2a, on s'appuie sur un résultat (incorrect) :  $F = f$  pour vérifier la relation en question.

Du tableau de variation, on a  $F(2) = 1$ . La relation  $F(2) \geq 3$  est donc fausse.

**S5.  $F = f^{-1}$  (Stratégie erronée)**

L'intégration étant l'opération inverse de la dérivation,  $F$  est la fonction réciproque de  $f$ . La fonction  $f$  n'étant pas une bijection, donc  $f^{-1}(2)$  n'étant pas univoque, nous observons ici deux réponses opposées en fonction de la lecture du tableau de variations :

- $F(2) = 1 \Rightarrow$  La relation  $F(2) \geq 3$  est fausse.
- $F(2) = +\infty \Rightarrow$  La relation  $F(2) \geq 3$  est vraie.

**S6.  $f = P_3$  (Stratégie erronée)**

En cohérence avec la stratégie S5 pour l'exercice 2a, on utilise la fonction du troisième degré choisie pour calculer  $F(2)$ .

**S7. Variable muette (Stratégie erronée)**

L'intégrale ne dépend pas de la notation de variable. On a :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(x)dx \Rightarrow F(2) = \int_0^2 f(2)dt = \int_0^2 1dt = 2.$$

Donc la relation  $F(2) \geq 3$  est fausse.

Nous présentons dans le tableau 53 les stratégies observées pour l'exercice 2b.

	Stratégies observées	Classes						Total
		A1	A2	B1	B2	C1	C2	
Subdivision (A)	<b>S1</b>	2						<b>2</b>
Aire sous la courbe (G)	<b>S2</b>							
Stratégies erronées	<b>S3</b> <i>Négation</i>							
	<b>S4</b> $F(2) = f(2)$		3				4	<b>7</b>
	<b>S5</b> $F(2) = f^{-1}(2)$			2	3			<b>5</b>
	<b>S6</b> $f(x) = P_3(x)$	4	5	1	1			<b>11</b>
	<b>S7</b> <i>Variable muette</i>	5						<b>5</b>
	<b>Sans réponse</b>	22	25	42	32	46	39	<b>206</b>
	<b>Total</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>45</b>	<b>36</b>	<b>46</b>	<b>43</b>	<b>236</b>

**Tableau 53.** *Stratégies observées pour l'exercice 2b*

206 élèves (87 %) ne résolvent pas l'exercice. Seuls 2 élèves mobilisent la stratégie S1 pour obtenir la réponse correcte. Aucun élève n'aborde la stratégie optimale S2. Les stratégies erronées proviennent de la lecture du tableau de variations (S4, S5, S6) ou de l'intégrale dépendant de la borne supérieure (S7). La stratégie la plus mobilisée mais erronée (S6) concerne la mise en place d'une expression algébrique considérée comme celle de  $F$  pour vérifier la relation  $F(2) \geq 3$ . Ceci montre encore une fois que la définition d'une fonction par un tableau de variations est problématique pour les élèves vietnamiens.

**II.3. Question : Liens entre aire, primitive et intégrale**

Nous présentons dans les tableaux 54, 55, 56 les liens entre aire, primitive et intégrale exprimés par les élèves (un élève peut exprimer plusieurs liens).

Liens entre aire et intégrale	Nombre de choix (plusieurs choix par personne sont autorisés)						
	A1	A2	B1	B2	C1	C2	Total
1. Le calcul de l'aire sous la courbe mène à la définition de l'intégrale.		1					<b>1</b>
2. L'intégrale sert à calculer l'aire sous la courbe.	28	33	33	24	16	6	<b>140</b>
4. L'aire sous la courbe sert à interpréter géométriquement l'intégrale.							
5. L'aire est un nombre strictement positif, l'intégrale est un réel			1		2		<b>3</b>
Sans réponse	5		11	12	28	37	<b>93</b>
<b>Effectifs des classes (<math>\leq</math> total des choix)</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>45</b>	<b>36</b>	<b>46</b>	<b>43</b>	<b>236</b>

Tableau 54. Liens entre aire et intégrale caractérisés par les élèves

Liens entre intégrale et primitive	Nombre de choix (plusieurs choix par élève sont autorisés)						
	A1	A2	B1	B2	C1	C2	Total
6. Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz.	8	10	17	15	5	6	<b>61</b>
7. L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné.							
8. Les primitives de $f$ sont aussi une intégrale, mais « indéfinie ». La différence entre intégrale et primitive est que l'intégrale a deux bornes et une valeur numérique unique, tandis que les primitives d'une fonction (l'intégrale indéfinie) n'ont aucune borne et diffèrent d'une constante additive.	15	23	13	6	11		<b>68</b>
Sans réponse	10	1	18	15	30	37	<b>111</b>
<b>Effectifs des classes (<math>\leq</math> total des choix)</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>45</b>	<b>36</b>	<b>46</b>	<b>43</b>	<b>236</b>

Tableau 55. Liens entre intégrale et primitive caractérisés par les élèves

Liens entre aire et primitive	Nombre de choix (plusieurs choix par élève sont autorisés)						
	A1	A2	B1	B2	C1	C2	Total
9. L'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction en question.							
10. L'aire et la primitive sont liées indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.	13	18	16	11	5	3	<b>66</b>
11. L'aire est un nombre strictement positif, la primitive est une fonction.					2		<b>2</b>
12. On n'expose aucun lien entre aire et primitive dans l'enseignement	6	5	2	5			<b>18</b>
Sans réponse	14	10	27	20	39	40	<b>150</b>
<b>Effectifs des classes (<math>\leq</math> total des choix)</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>45</b>	<b>36</b>	<b>46</b>	<b>43</b>	<b>236</b>

Tableau 56. Liens entre aire et primitive caractérisés par les élèves

Le lien prédominant entre aire et intégrale est le lien 2 : l'intégrale sert à calculer l'aire sous la courbe (140 élèves sur 143 ayant répondu, soit 98 %). Aucun élève ne mentionne le

lien 4 : l'aire sous la courbe sert à interpréter géométriquement l'intégrale. Ceci est cohérent avec l'enquête auprès des enseignants vietnamiens.

Quant au lien entre primitive et intégrale, il semble que s'établisse une concurrence entre le lien appréhendé par les enseignants (formule de Newton – Leibniz) et le lien 8 concernant le couple « intégrale – intégrale indéfinie ». Pour les 68 élèves proposant le lien 8, à travers le calcul instrumenté par  $\int$ , la primitive est une intégrale indéfinie considérée comme intégrale sans bornes et vice-versa l'intégrale devient l'intégrale indéfinie avec bornes. Ce lien permet d'expliquer pourquoi 64 % des élèves utilisent l'intégration par parties pour calculer une primitive de  $f$  dans l'exercice 1.

En conformité avec le lien appréhendé par les enseignants, le lien entre aire et primitive se tisse indirectement par l'intermédiaire de l'intégrale.

### III. Conclusion

À travers le calcul instrumenté par l'ostensif  $\int$  semble se mettre en place un rapport unificateur au calcul de primitive et d'intégrale. Ce rapport peut conduire à considérer primitive et intégrale comme, respectivement, intégrale sans bornes ou avec bornes.

Ce rapport permet aux élèves d'utiliser l'intégration par parties pour calculer les primitives. Il fait émerger un lien concurrent au lien appréhendé par les enseignants par la formule Newton – Leibniz entre primitive et intégrale : la relation « sans bornes – avec bornes ».

Le résultat du calcul de primitive est-il une fonction ? On peut en douter, d'autant plus qu'un certain nombre d'élèves ne comprennent pas que l'on puisse parler d'intervalle associé à une primitive.

Le géométrique est hors du rapport institutionnel à l'intégrale en accord avec le savoir appréhendé par l'enseignant : cela renforce encore la prédominance d'un analytique fortement algébrisé dans le calcul par l'usage de l'ostensif  $\int$ .

« L'OM telle qu'elle se propose pour être enseignée ne coïncide généralement pas avec celles qui sont effectivement construites dans la classe, qui ne peuvent pas être séparées des processus effectifs de création que l'on trouve à son origine. » (Bosch, Espinoza, Gascon 2002)<sup>30</sup>

« Pendant que l'OM à enseigner doit être reconstruite à partir des éléments qui figurent dans les textes et les documents curriculaires, l'OM effectivement enseignée apparaît dans le travail mathématique des élèves et dans la pratique que le professeur réalise avec eux dans la classe. » (Ibid.)

Nous sommes donc conduits à des questions sur l'enseignement effectif de l'intégrale au Vietnam : pour cela nous reviendrons de nouveau, dans le chapitre suivant, sur les types de tâches, concernant l'intégration, proposés aux épreuves du baccalauréat : elles sont pour nous révélatrices du contrat institutionnel à l'intégrale pour la classe 12 au Vietnam.

Puis nous analyserons les copies corrigées de candidats concernant l'une de ces épreuves (baccalauréat 2005). Nous considérerons les solutions majoritaires des élèves, leurs erreurs ainsi que la prise en compte de ces solutions et de ces erreurs par les correcteurs comme

---

<sup>30</sup> Traduit en français par Annie Bessot.

autant d'indices de l'enseignement effectif et donc du rapport institutionnel à la notion d'intégrale au Vietnam.

## Chapitre C2.

### Analyse des copies du baccalauréat vietnamien 2005

Dans ce chapitre, nous conduirons une analyse des copies d'une épreuve du baccalauréat vietnamien de la période 2000 – 2006, en considérant les procédures de résolutions, les erreurs attachées aux réponses et la prise en compte des erreurs par le correcteur. En effet, nous considérons ces procédures et ces erreurs comme des observables de l'enseignement effectif. Notre analyse vise donc à mettre en évidence les effets des contraintes et des conditions de l'enseignement en classe 12 au Vietnam sur l'OM effectivement enseignée. Pour ce faire, nous avons choisi la session 2005 pour une double raison : elle est la session la plus récente au moment de notre travail, et son sujet représente bien l'institutionnalisation de l'intégrale par la présence de deux types de tâches de calcul emblématiques : calcul d'intégrale (séparé de l'aire), calcul d'aire.

Auparavant, examinons les 6 sujets de mathématiques du baccalauréat de la période 2000 – 2006 : nous notons une présence constante de l'intégrale comme l'atteste le tableau 57.

Type d'exercices concernant l'intégrale		Nombre d'apparitions	Sessions concernées
Calcul d'une primitive vérifiant une condition		1	2003
Calcul d'une intégrale séparé de l'aire		3	2001, 2005, 2006
Calcul d'aire	attaché à l'étude de fonctions	3	2001, 2002, 2005
	hors de l'étude de fonctions	3	2002, 2003, 2006
Calcul de volume		1	2004

**Tableau 57.** Intégrale dans les 6 sujets du baccalauréat  
(Sessions 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006)

En ce qui concerne l'intégrale, les 6 sujets observés ne proposent que des calculs : calcul de primitive (1 exercice), calcul d'intégrale séparé ou attaché à des grandeurs (10 exercices). Dans le calcul d'intégrale (implicitement attachée à des grandeurs), le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions et le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions occupent la place la plus importante (6 exercices sur 11). Ceci montre que le calcul d'aire est institutionnellement privilégié dans les épreuves des baccalauréats 2000 – 2006.

Au travers de l'étude du baccalauréat de la session 2005, nous examinerons tout particulièrement le calcul de primitive *dans* le calcul d'intégrale (intégration par parties) et le calcul d'aire attaché à l'étude des fonctions.

Quelles sont les procédures observées dans les calculs ? Quelles sont les erreurs ? Quelle signification ont-elles ? Comment sont-elles prises en compte par le correcteur ?

Nous chercherons plus particulièrement des éléments de réponses aux questions suivantes portant sur les méthodes enseignées du calcul d'intégrale :

*Dans une intégration par parties*, en l'absence de l'ostensif  $\int$ , les élèves vietnamiens reconnaissent-ils un calcul de primitive dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$  ?

*Dans le changement de variable*, quelles sont les erreurs observées chez les élèves vietnamiens dans les manipulations de l'ostensif  $dx$  ? Quelle interprétation peut-on en faire ?



## I. Analyse *a priori*

Comme le tableau 57 l'a montré, le sujet de mathématiques du baccalauréat 2005 propose deux exercices sur l'intégrale : un calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, un calcul d'intégrale séparé de l'aire. Nous les analyserons successivement dans cette partie.

### I.1. Exercice 1 : calcul d'aire

Le calcul d'aire est proposé dans un problème d'étude de fonctions dont le texte in extenso est le suivant :

**Problème 1** (3,5 points)

Étant donnée la fonction  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  ayant pour graphique (C).

1. Étudier la fonction et dessiner son graphique. (2 points)
2. Calculer l'aire de la surface plane délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et le graphique (C). (0,75 point)
3. Écrire l'équation de la tangente au graphique (C) en sachant que cette tangente passe par le point A(-1; 3). (0,75 point)

C'est un problème routinier dans lequel le domaine dont on doit calculer l'aire est délimité par le graphique préalablement étudié et les axes des coordonnées. Nous rappelons ici les trois règles du contrat institutionnel sur le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions dans l'institution vietnamienne, telles que nous les avons dégagées au chapitre A1.

#### Règle RI1. Représentation graphique des fonctions

*On doit tracer la représentation graphique des fonctions dont les courbes délimitent la surface intervenant dans le calcul d'aire. La vérification graphique de l'inégalité  $\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x)$  est autorisée.*

#### Règle RI2. Détermination algébrique de bornes d'intégration dans le calcul d'aire

*Dans le cas où les bornes d'intégration ne sont pas numériquement données, on doit les calculer algébriquement comme abscisses des points d'intersection (repérés sur le graphique).*

#### Règle RI3. Connaissances graphiques permettant de déterminer une unique surface plane

- *La surface plane dont on demande de calculer l'aire est le plus grand domaine borné (pas forcément connexe) dont le contour est fermé, et composé seulement des courbes qui le délimitent.*
- *Aucun morceau de ces courbes ne doit être enfermé dans la surface.*
- *Chaque point d'intersection des courbes impose un changement de bornes donc d'intégrale.*

Les variables didactiques et les valeurs choisies dans cet exercice sont les suivantes :

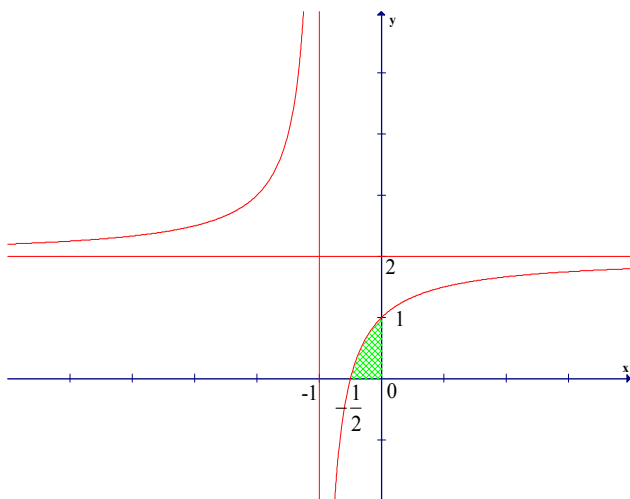
- **V1** : type de fonctions étudiées dans l'exercice précédent du problème : ici, fonction homographe simple.
- **V2** : le domaine dont on doit calculer l'aire est connexe ou non. Dans l'exercice, le domaine est connexe. Par conséquent, le calcul de son aire nécessite *une seule* intégrale.
- **V3** : les abscisses des points d'intersection des courbes délimitant le domaine sont données ou non et leurs natures numériques. Dans l'exercice, elles ne sont pas données, mais susceptibles d'être calculées dans la question 1., quand on trace le graphique.

L'abscisse du point d'intersection entre (C) et l'axe Ox est un nombre rationnel négatif, à savoir  $-1/2$ .

Nous présentons ci-dessous les stratégies observables pour cet exercice en tenant compte du fonctionnement des règles du contrat institutionnel supra. Pour cela, nous joignons le graphique (C) obtenu dans la question précédente.

### Stratégie S1. Attendue

Sur la base du graphique ci-contre (dans la mesure où l'élève l'a obtenu correctement), la règle RI3 permet de déterminer la « bonne » surface. Soulignons toutefois que l'appui sur le graphique est indispensable. Ceci conduit à dire que l'aire cherchée se calcule par



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1/2}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx \\ &= \int_{-1/2}^0 \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left( 2x - \ln|x+1| \right) \Big|_{-1/2}^0 \\ &= (0 - \ln 1) - \left( -1 - \ln \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \ln 2 \text{ (unité d'aire)} \end{aligned}$$

### Stratégie S2. Combinatoire sur les nombres

Sur le graphique, sont écrits des nombres : au mieux cinq nombres  $-1$ ,  $-1/2$ ,  $0$ ,  $1$  et  $2$ . On prend pour bornes de l'intégrale n'importe quel couple de nombres parmi les nombres écrits. L'aire cherchée peut être par exemple :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{-1/2} \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \int_{-1}^2 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \\ &\int_{-1/2}^1 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \int_{-1/2}^2 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \int_0^1 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \int_0^2 \frac{2x+1}{x+1} dx \text{ ou } S = \\ &\int_1^2 \frac{2x+1}{x+1} dx \end{aligned}$$

Cette stratégie peut donner la réponse correcte, à condition d'avoir écrit sur le graphique :  $-1/2$ . Un observable de cette stratégie est l'écriture (erronée) d'une intégrale avec des bornes sans  $0$  ou sans  $-1/2$ .

### Stratégie S3. Combinatoire sur les équations

A la fin de la question 1, sont présentes les équations suivantes :  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ ,  $y = 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$  et  $x = 0$ . La fonction intégrante peut être une combinaison de ces équations, comme par exemple :

$$\int_a^b \left( 2 - \frac{2x+1}{x+1} \right) dx, \text{ a et b étant des nombres écrits sur le graphique.}$$

Cette stratégie, elle aussi, peut donner la réponse correcte.

N'étant pas forcément indépendantes, les stratégies **S2**, **S3** sont susceptibles d'être combinées dans l'écriture de l'intégrale.

## I.2. Exercice 2 : calcul d'intégrale séparé de l'aire

Voici le texte de l'exercice :

$$\text{Calculer l'intégrale } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx . \text{ (0,75 point)}$$

Nous présentons ci-dessous les stratégies observables pour cet exercice, en tenant compte de l'analyse institutionnelle.

### Stratégie S1. (Correcte) *Linéarisation avant l'intégration par parties*

Dans cette stratégie, on linéarise l'intégrale  $I$  en deux intégrales  $I_1$  et  $I_2$ , on calcule *séparément* ces deux dernières, puis on les somme.

- On linéarise l'intégrale  $I$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

- On calcule l'intégrale  $I_1$  par intégration par parties.

En posant  $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$ , on a  $\begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$ . Donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

L'intégrale  $I_2$  peut se calculer par de différentes stratégies que nous explicitons ci-dessous.

### Stratégie S1a. (Correcte) *Changement de variable implicite*

$$\begin{aligned} \bullet I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Stratégie S1b.** (Correcte) *Changement de variable explicite*

- En posant  $t = \sin x$ , on a  $dt = \cos x dx$  et  $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$ . Donc :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Stratégie S1c.** (Correcte) *Transformation trigonométrique*

- $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 2x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a finalement pour les 3 stratégies :

- $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$ .

*En linéarisant en premier lieu*, la stratégie **S1** évite d'avoir à combiner deux méthodes dans un même calcul intégral. Chacune des deux intégrales obtenues par linéarisation  $I_1$  et  $I_2$  est calculable par une seule méthode, conformément aux 42 exercices proposés dans

l'unique manuel en vigueur. De plus, les deux intégrales  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$  et

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$  obtenues, sont très « familières ». En effet, on peut considérer qu'au

Vietnam, le manuel en vigueur est un indicateur fiable des exercices proposés par l'enseignant dans sa classe. Or la première intégrale est calculée par intégration par parties

dans un exemple du manuel et une intégrale analogue à la seconde, à savoir  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$ , est proposée dans la partie exercices du manuel et calculée par changement de variable. La stratégie **S1** est donc la stratégie attendue.

**Stratégie S2.** (Correcte) *Intégration par parties avant la linéarisation*

Contrairement à la stratégie **S1** qui linéarise la fonction intégrante avant l'intégration par parties, cette stratégie le fait après.

- En posant  $\begin{cases} u = x + \sin^2 x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$ , on a  $\begin{cases} du = (1 + 2 \sin x \cos x) dx \\ v = \sin x \end{cases}$ . Donc :

$$\begin{aligned} I &= (x + \sin^2 x) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x \cos x) \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos x dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I_3 \\ &= \frac{\pi}{2} - I_3 \text{ où } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos x dx. \end{aligned}$$

L'intégrale  $I_3$ , qui est égale à  $2I_2$  (stratégie **S1**), peut se calculer par l'une des stratégies analogues à **S1a**, **S1b**, **S1c** que nous notons respectivement **S2a**, **S2b**, **S2c**. Nous n'énoncerons pas ces dernières en raison de l'analogie entre **S1i** et **S2i**,  $i \in \{a, b, c\}$ .

Finalement, en mobilisant une des stratégies **S2i**,  $i \in \{a, b, c\}$ , on a :

- $I_3 = \frac{2}{3}$
- $I = \frac{\pi}{2} - I_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

*En linéarisant en second lieu*, la stratégie **S2** oblige à articuler l'intégration par parties à d'autres méthodes dans un même calcul intégral. Ceci est en rupture avec ce qui est proposé dans les exercices de calcul d'intégrale du manuel en vigueur. C'est cependant la solution proposée par le ministère, en opposition avec la norme institutionnelle.

Nous avons présenté les deux solutions S1 et S2 à deux enseignants de mathématiques, Phan Doan Thai et Nguyen Ngoc Phuc. Le premier est à la fois responsable de l'enseignement secondaire du rectorat de Binh Thuan et président de la commission de correction du Baccalauréat, le second est chef de l'équipe de mathématiques du lycée semi-public Phan Chu Trinh. Ils sont donc de bons sujets de l'EMS au Vietnam.

Phan Doan Thai déclare : « Celui qui a rédigé cette solution [S2, solution du ministère] ne connaît pas bien la réalité de l'enseignement secondaire. En classe 12, on ne résout pas ainsi. Par ailleurs, cette solution n'est pas utilisable dans le cas général. »

Nguyen Ngoc Phuc rajoute : « Nous suggérons souvent aux élèves de transformer un produit en une somme pour intégrer. La stratégie **S1** (**a** ou **b**) est donc la plus pertinente. »

**Stratégie S3.** (Erronée) *Intégration d'un produit*

Dans cette stratégie, en plus des théorèmes mathématiques, on s'appuie sur les deux règles d'action suivantes :

$$\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

On calcule l'intégrale proposée comme suit :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left. \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left. \frac{\sin^3 x}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left. \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cette stratégie, qui s'appuie sur une règle d'action erronée, conduit bien sûr à un résultat faux.

On peut aussi prévoir des erreurs résultant de manipulation de l'ostensif  $dx$ , en particulier dans le changement de variable implicite : **S1a**, **S2a**. Nous présentons ci-après une stratégie erronée dans laquelle l'usage non pertinent du changement de variable implicite évite l'intégration par parties.

**Stratégie S4.** (Erronée) *Manipulations de l'ostensif  $dx$  sans intégration par parties*

Par exemple :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (x + \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (x + \sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left. \frac{\sin^3 x}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} = \left. \frac{\sin^2 x}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left. \frac{\sin^3 x}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{3} \quad \text{ou} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

## II. Analyse a posteriori

Nous avons effectué notre étude dans l'académie de Binh Thuan : cette académie est représentative des régions du Vietnam tant sur le plan éducatif que sur le plan économique. De même, nous avons choisi dans cette académie le lycée Duc Linh, lycée public ordinaire, pour recueillir 138 copies d'élèves notées du baccalauréat 2005.

### II.1. Exercice 1 : calcul d'aire

#### II.1.1. Stratégies observées

Nous présentons dans le tableau 58 les stratégies observées pour cet exercice :

Stratégies observées	Nombre de copies	Pourcentage
<b>S1.</b> <i>Attendue</i>	92	67 %
<b>S2.</b> <i>Combinaison sur les nombres</i>	25	18 %
<b>S3.</b> <i>Combinaison sur les équations</i>	2	1,5 %
<b>S2 + S3</b> (non comptabilisé plus haut)	6	4 %
<i>Autres</i>	2	1,5 %
<i>Sans réponse</i>	11	8 %
Total	138	100 %

Tableau 58. Stratégies observées pour l'exercice 1

Une grande majorité d'élèves (92 %) ont répondu à cet exercice. Ceci confirme le caractère routinier du calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions dans l'institution vietnamienne.

Les deux cas « autres » correspondent à deux stratégies « inattendues »

#### Stratégie S4. (Correcte mais non attendue) *Valeur absolue*

L'aire à calculer est égale à :

$$\begin{aligned}
 S &= \left| \int_0^{-1/2} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right) dx \right| \\
 &= \left| \int_0^{-1/2} \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \right| \\
 &= \left| [2x - \ln|x+1|]_0^{-1/2} \right| \\
 &= |\ln 2 - 1| \text{ (unité d'aire)}
 \end{aligned}$$

L'intégrale attendue étant  $\int_{-1/2}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx$ , l'intégrale écrite  $\left| \int_0^{-1/2} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right) dx \right|$  est mathématiquement correcte mais non attendue car si les deux sont bien égales, la seconde plus complexe à cause de la présence du signe de valeur absolue, inverse l'ordre « habituel » des bornes d'intégration.

Nous reviendrons sur cette stratégie dans l'étude de la prise en compte des erreurs par des correcteurs.

#### Stratégie S5. (Erronée) *Volume*

Cette stratégie semble faire référence à la formule de calcul d'un volume de révolution. En effet, l'élève écrit que l'aire à calculer est égale à :

$$S = \pi \int_{-1/2}^0 \left( \frac{2x+1}{x+1} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_{-1/2}^0 \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1/2}^0 \left(4 - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\
 &= \pi \left[4x - 4 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_{-1/2}^0 \\
 &= \pi[-1 - (-2 + 4 \ln 2 - 2)] \\
 &= (3 - 4 \ln 2)\pi \text{ (unités d'aire)}
 \end{aligned}$$

Ces deux stratégies (S4 et S5) sont tout à fait anecdotiques.

Nous appelons *groupe 1* les élèves de la stratégie S1 et *groupe 2* les élèves des stratégies S2, S3 et « autres ».

Près du quart des élèves ont mobilisé les procédures « combinaison » erronées (S2, S3) pour écrire l'intégrale servant au calcul d'aire. Ce pourcentage étant relativement important, nous sommes en droit de nous demander si l'écriture de l'intégrale attendue est vraiment le résultat de procédures mathématiquement correctes, ou du hasard dans un choix combinatoire limité.

Dans le tableau 59 nous affinons notre analyse :

Nombre de copies étudiées :	Écriture de l'intégrale	Application de la formule de Newton – Leibniz		Notes observées
		Calcul de primitive	Calcul de valeurs numériques	
<b>138</b>	Groupe 1 : <b>92 (67%)</b> <i>attendue</i>	Exact :	Exact : <b>50 (68%)</b>	0,75
		<b>73 (79%)</b>	Erroné, inachevé : <b>23 (32%)</b>	0,5
		Erroné, inachevé :	Exact : <b>2 (11%)</b>	0,25
		<b>19 (21 %)</b>	Erroné, inachevé : <b>17 (89%)</b>	0,25
	Groupe 2 : <b>35 (25%)</b> <i>non attendue</i>	Exact :	Exact : <b>8 (29%)</b>	0
		<b>28 (80%)</b>	Erroné, inachevé : <b>20 (71%)</b>	0
		Erroné, inachevé :	Exact : <b>0 (0%)</b>	0
		<b>7 (20%)</b>	Erroné, inachevé : <b>7 (100%)</b>	0
Sans réponse : <b>11 (8%)</b>			0	

**Tableau 59.** Résultats de calcul par étape

Le pourcentage des élèves du groupe 2 ayant effectué de façon exacte le calcul de primitive est presque le même que celui du groupe 1 (80% contre 79%). Sur le plan du calcul de primitive, les compétences du groupe 1 et celles du groupe 2 seraient donc les mêmes. 8 élèves du groupe 2 ont abouti à un résultat numérique exact relativement à l'intégrale écrite. Cependant, la note 0 a été donnée à tous les élèves du groupe 2, malgré l'exactitude, au moins, du calcul de primitive, alors que 19 élèves du groupe 1, qui n'ont écrit correctement que l'intégrale, ont bénéficié de 0,25 point sur 0,75 point associé à l'exercice.

Ainsi, selon le barème de correction, l'écriture attendue de l'intégrale est institutionnellement l'étape prédominante. Or, le fait que l'on n'écrive pas l'intégrale attendue ne signifie pas que l'on ne sait pas la calculer. Le calcul d'aire dans cet exercice



ne se limite pas seulement au calcul correct d'une intégrale, mais bien aussi à la mise en place correcte, avec l'appui du graphique, de la bonne intégrale.

## II.1.2. Types d'erreurs observées et prise en compte des erreurs par les correcteurs

### a. Écriture de l'intégrale

Le calcul de l'aire du domaine en question nécessite, avant tout, l'écriture de l'intégrale. Ici, on n'a à écrire qu'une seule intégrale :

$$\int_{-1/2}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx$$

Pour ce faire, on doit :

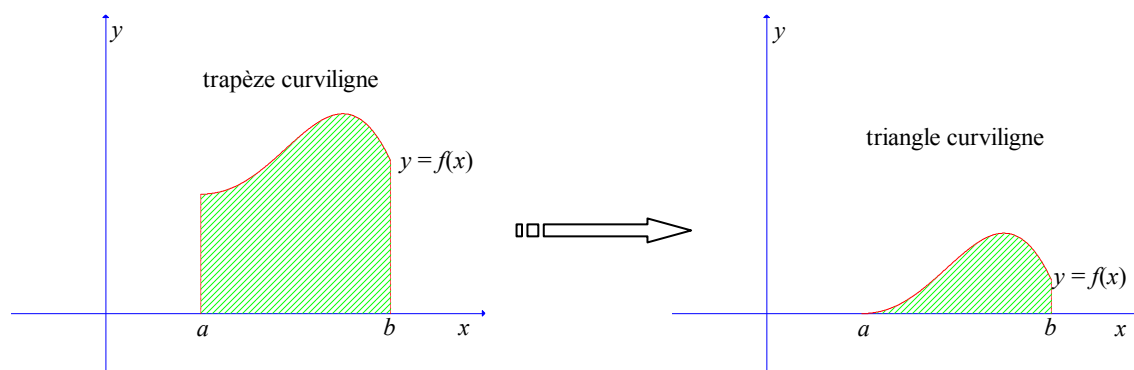
- déterminer *sur le graphique* la surface dont on doit calculer l'aire (règle RI3), le hachurage de surface n'est pas exigé ;
- déterminer les bornes de l'intégrale : abscisses *minimale* et *maximale* de la surface déterminée ; si ces abscisses ne sont pas données, on doit les calculer algébriquement (RI2) ;
- vérifier graphiquement la positivité de la fonction intégrante sur l'intervalle déterminé (RI1).

À l'exception d'un élève ayant écrit une intégrale non attendue mais mathématiquement correcte (stratégie S4), 34 des 138 élèves (25%) ont écrit des intégrales non attendues et mathématiquement incorrectes. En particulier, 31 de ces 34 élèves ont mobilisé (de façon incorrecte) la procédure de *combinaison sur les nombres* (S2, S2 + S3).

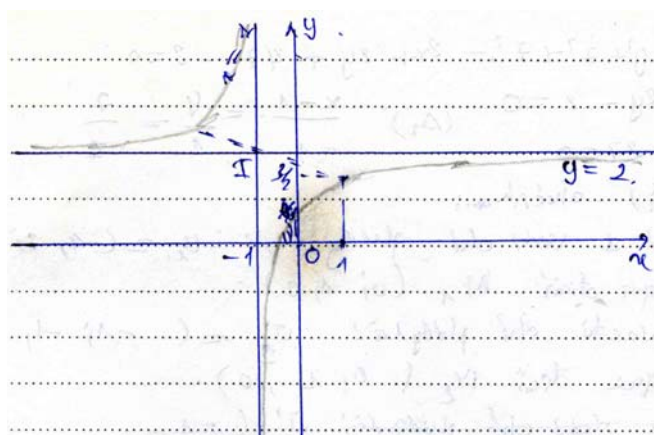
En tenant compte du contrat institutionnel sur le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, nous pouvons mettre en avant les points suivants :

- Les 34 élèves ont tous tracé le graphique dans leur copie. Ils l'ont pris en considération pour écrire l'intégrale servant au calcul d'aire et pour vérifier implicitement la positivité de la fonction intégrante sur l'intervalle d'intégration. Aucun élève n'a vérifié algébriquement cette positivité.
- Le hachurage de la surface n'a pas été effectué dans toutes les copies. Cependant, dans les copies où la surface a été hachurée, la détermination de la surface est conforme à la règle RI3 du contrat institutionnel.
- L'abscisse -1/2 du point d'intersection entre la courbe (C) et l'axe des abscisses a été *algébriquement* calculée dans les copies.

Dans le calcul de l'aire d'un *trapèze curviligne* proposé dans la praxis, les bornes de l'intégrale ne sont pas forcément les abscisses des points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses (Voir les figures ci-dessous). Dans le calcul en question, le trapèze curviligne devenant un *triangle curviligne*, le nombre -1/2 *doit* jouer un *double rôle* : il est d'emblée l'*abscisse du point d'intersection* entre la courbe (C) et l'axe Ox, puis la *borne inférieure* de l'intégrale à écrire. Sur le graphique, c'est le rôle d'abscisse du point d'intersection qui prédomine.



Examinons maintenant la solution extraite d'une copie<sup>31</sup> :



L'abscisse du point d'intersection entre (C) et l'axe des abscisses est la solution de l'équation :

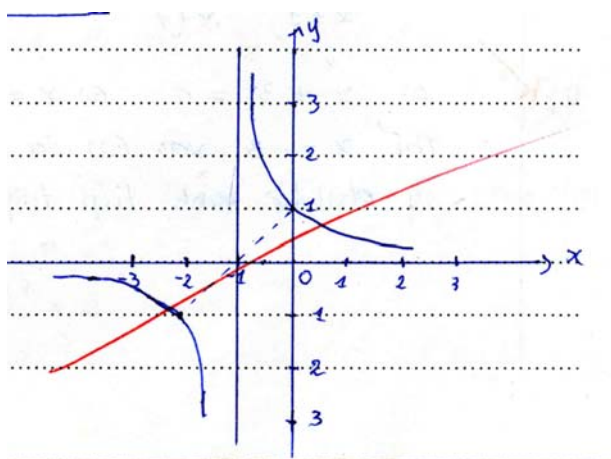
$$\frac{2x+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (car } x = 1 \text{ n'est pas solution de l'équation)}$$

L'aire :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| dx \\ &= \int_{-1}^0 \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= (2x - \ln|x+1|) \Big|_{-1}^0 \end{aligned}$$

Ici, l'élève a bien hachuré la surface et a *algébriquement* calculé l'abscisse du point d'intersection entre la courbe (C) l'axe Ox, mais n'a pas écrit le nombre -1/2 sur le graphique. En outre, il a écrit -1 et non -1/2 comme borne inférieure de l'intégrale. Ceci montre que le nombre -1/2 calculé est considéré comme l'abscisse du point d'intersection, et non comme la borne inférieure de l'intégrale.

Les correcteurs ont attribué la note 0 à cette solution, malgré la détermination de la surface, le calcul algébrique de l'abscisse du point d'intersection et le calcul de primitive après l'écriture de l'intégrale.



Regardons une autre solution :

On a l'équation donnant l'abscisse du point d'intersection entre la courbe (C) et la droite d'équation  $y = 0$  :

$$\frac{2x+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1/2}^0 \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| dx = \left| \int_{-1/2}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx \right| \\ &= \left| \int_{-1/2}^0 \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \right| = \left| 2x - \ln|x+1| \right|_{-1/2}^0 \end{aligned}$$

<sup>31</sup> Les extraits de copies sont traduits en français par nous.

$$= \left| 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \ln\left|-\frac{1}{2} + 1\right| + \ln 1 \right| = -1 - \ln \frac{1}{2}$$

Dans cette solution, l'élève a tracé un graphique mathématiquement incorrect, mais a écrit l'intégrale attendue. Sur le graphique tracé, l'intégrale écrite correspond à l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1/2$ ,  $x = 0$ . Cette intégrale n'est pas donc l'aire demandée. Cependant, les correcteurs ont donné à cette solution 0,5 point sur 0,75, en retirant 0,25 pour l'erreur de calcul. Ainsi, dans le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions dans le baccalauréat, l'institution privilégie l'écriture de l'intégrale, et néglige la compatibilité du graphique tracé et de l'intégrale écrite.

De plus, les correcteurs ont attribué la note 0 à la solution mathématiquement correcte mobilisant la stratégie **S4a** suivante :

L'aire de la surface plane délimitée par l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées est :

$$S = \left| \int_0^{-1/2} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^{-1/2} \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \right|$$

(l'axe des ordonnées :  $x = 0$ , l'axe des abscisses  $y = 0 \Rightarrow x = -1/2$ )

$$= \left| [2x - \ln|x+1|]_0^{-1/2} \right| = |\ln 2 - 1| \text{ (unité d'aire)}$$

\* *diện tích hình thang' cấp' ban đầu' từ' hoành' và' trục' Oy.*  
 $S = \left| \int_0^{-1/2} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^{-1/2} \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \right|$   
 ( trục Oy :  $x = 0$ ; trục hoành  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$  )  
 $= \left| 2x - \ln|x+1| \right|_0^{-1/2} = \left| \ln 2 - 1 \right| \text{ (đơn vị diện tích)}$

Ainsi, on n'a pas le droit d'utiliser le signe de valeur absolue pour inverser les bornes de l'intégrale. L'écriture de l'intégrale institutionnellement acceptée est  $\int_{-1/2}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx$  ou

$$\int_{-1/2}^0 \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| dx.$$

### b. Décomposition en éléments simples

26 des 138 élèves (19 élèves du groupe 1 et 7 du groupe 2) n'ont pas décomposé correctement la fonction intégrante en éléments simples :

$$\frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}. \text{ Décomposition correcte}$$

L'erreur majoritairement observée est la suivante :

$$\frac{2x+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Rappelons que l'intégration des fonctions rationnelles n'est pas enseignée de façon systématique et générale dans le programme en vigueur au Vietnam. Le manuel unique ne présente que le calcul des intégrales suivantes :

$$\int_a^b \frac{(2\alpha x + \beta)dx}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \int_a^b \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2}, \int_a^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \int_a^b \frac{(Ax + B)dx}{(x - \alpha)(x - \beta)}.$$

Dans le questionnaire pour les enseignants (chapitre B2), 14 des 44 enseignants vietnamiens jugent que l'intégrale d'une fonction rationnelle quelconque est une intégrale difficile car la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples est *totale*ment à la charge de l'élève.

### c. Calcul de valeurs numériques

67 des 138 élèves (49 %) ont effectué des calculs de valeurs numériques erronés en raison de la présence de la fonction logarithmique et de la valeur  $-1/2$ .

Dans les programmes en vigueur, la fonction logarithmique est introduite en classe 11. Pour  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  et  $x > 0$ , le nombre  $\log_a x$  est défini comme la solution unique de l'équation exponentielle d'inconnue  $y$  :  $a^y = x$ . À partir de cela, on définit la notion de fonction logarithmique  $x \mapsto \log_a x$  ( $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Cette fonction est alors construite algébriquement à l'aide de la notion de fonction exponentielle sans avoir besoin de la notion de fonction réciproque actuellement absente des programmes. La fonction logarithmique intervient comme une *fonction* élémentaire fondamentale<sup>32</sup> dans la résolution des équations et des inéquations exponentielles et logarithmiques, dans la dérivation et l'intégration, mais le *calcul numérique* des fonctions logarithmiques est presque absent des programmes et des manuels de classes 11, 12. C'est pourquoi,  $\ln(1/2)$ , pour la plupart des élèves vietnamiens, n'a pas le *statut de nombre*. Ceci explique les erreurs de ces 67 élèves.

Parmi 50 élèves ayant obtenu la note maximale (0,75), 27 élèves ont écrit  $1 - \ln 2$ , résultat attendu, mais presque autant d'élèves (23 élèves) répondent  $1 + \ln(1/2)$ , attestant de la difficulté d'écrire  $\ln(1/2) = -\ln 2$ . Ceci montre que le calcul numérique, intervenant toujours dans le calcul intégral, est très peu travaillé dans l'institution.

## II.2. Exercice 2 : calcul d'intégrale séparé de l'aire

### II.2.1. Stratégies observées

L'étude des copies d'élèves nous conduit à ajouter aux stratégies observables les stratégies suivantes :

**Stratégie S1d.** (Erronée) *Changement de variable explicite*  $t = \sin^2 x$

Après avoir linéarisé l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/2} (x + \sin^2 x) \cos x dx$  en deux intégrales  $I_1 =$

$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$  et avoir calculé  $I_1$  par intégration par parties, on cherche

à calculer  $I_2$  par changement de variable explicite :

$$\text{En posant } t = \sin^2 x, \text{ on a } dt = 2 \sin x \cos x dx. \text{ Il en résulte que } dx = \frac{dt}{2 \sin x \cos x}, \cos x dx = \frac{dt}{2 \sin x}$$

$$= \frac{dt}{2\sqrt{t}} \text{ car } \sin x \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [0, \pi/2], \text{ donc } \sin x = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{t}.$$

<sup>32</sup> Voir dans le chapitre A1 la définition de la notion de fonctions élémentaires fondamentales au Vietnam.

On change de bornes d'intégration :  $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

Donc :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^1 t \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2} dt \\ &= \frac{t^{3/2}}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Deux erreurs mathématiques subtiles sont commises dans cette stratégie :

- La fonction  $x \mapsto \arcsin \sqrt{x}$ , fonction réciproque de  $x \mapsto \sin^2 x$ , n'est pas continûment dérivable sur  $[0, 1]$  ;
- Le programme en vigueur n'aborde la dérivabilité de la fonction  $t \mapsto t^{3/2}/3$  que sur l'intervalle *ouvert*  $]0, +\infty[$ . Donc cette dernière n'est pas une primitive de  $t \mapsto \sqrt{t}/2$  sur l'intervalle *fermé*  $[0, 1]$ .

**Stratégie S5.** (correcte) *Deux intégrations par parties successives*

On calcule  $I = \int_0^{\pi/2} (x + \sin^2 x) \cos x dx$  par deux intégrations par parties successives.

- En effectuant une intégration par parties comme dans une des stratégies **S2i**,  $i \in \{a, b, c\}$ , on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} + 1 - \int_0^{\pi/2} \sin x (1 + 2 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 - \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 x \cos x dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} - I_3 \text{ où } I_3 = \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 x \cos x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - I_3 \end{aligned}$$

- On calcule  $I_3 = \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 x \cos x dx$  par une autre intégration par partie. En posant

$$\begin{cases} u = 2 \sin^2 x \\ dv = \cos x dx \end{cases}, \text{ on a } \begin{cases} du = 4 \sin x \cos x \\ v = \sin x \end{cases}. \text{ Donc :}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 2 \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 x \cos x dx \\ &= 2 - 2I_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{2}{3}$$

• Finalement :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} - I_3 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nous présentons dans le tableau 60 les stratégies observées pour cet exercice :

Stratégies observées		Nombre de copies	Pourcentage
<b>S1.</b> <i>Linéarisation avant intégration par parties</i> (Attendue)	<b>a.</b> <i>Changement de variable implicite</i>	35	25 %
	<b>b.</b> <i>Changement de variable explicite</i>	32	23 %
	<b>c.</b> <i>Transformation trigonométrique</i>	21	15 %
	<b>d.</b> $t = \sin^2 x$	1	1 %
<b>S2.</b> <i>Intégration par parties avant linéarisation</i> (Ministère)	<b>a.</b> <i>Changement de variable implicite</i>	2	1,5 %
	<b>b.</b> <i>Changement de variable explicite</i>		
	<b>c.</b> <i>Transformation trigonométrique</i>	4	3 %
<b>S3.</b> <i>Intégration d'un produit</i>		1	1 %
<b>S4.</b> <i>Manipulations de l'ostensif dx</i>		7	5 %
<b>S5.</b> <i>Deux intégrations par parties</i>		2	1,5 %
Sans réponse		33	24 %
Total		138	100 %

**Tableau 60.** *Stratégies observées pour l'exercice 1*

Les élèves n'ayant pas répondu à cet exercice sont trois fois plus nombreux que ceux de l'exercice 1 (33 contre 11), bien que la fonction intégrante soit « familière ».

Les 42 intégrales proposées dans le manuel en vigueur ne nécessitent qu'une des deux méthodes d'intégration, soit le changement de variable, soit l'intégration par parties. *Aucune intégrale ne nécessite de combiner les deux méthodes.* L'intégrale en question est donc en rupture de contrat par rapport à cette règle implicite du calcul d'intégrale : cela explique la difficulté de l'exercice.

Cette difficulté est perçue par des professeurs à l'université, comme, par exemple, l'apprécie l'un d'eux :

Généralement, l'exercice posé est très pertinent : n'étant ni difficile, ni facile, il oblige les candidats à utiliser le changement de variable et l'intégration par parties. Le problème est de base, mais il est certain que les candidats qui le résolvent complètement sont de bons élèves. (Nguyen Cam, professeur à l'université de Pédagogie de Ho Chi Minh ville, 2005)

Comme nous l'avions prévu, la stratégie **S1**, permettant de ramener l'intégrale initiale à deux intégrales familières est largement majoritaire : 89 réponses sur 105, soit plus de 84 %. Et parmi **S1**, les stratégies **S1a**, **S1b** sont prédominantes (64 % des réponses) : elles utilisent séparément (pour calculer les deux intégrales familières) les deux méthodes enseignées : intégration par parties et changement de variable.

### II.2.2. Types d'erreurs observées et prise en compte des erreurs par les correcteurs

Nous comparons les notes attribuées aux deux exercices dans le tableau 62 pour les élèves *ayant donné une réponse*. Rappelons que seulement 10 élèves n'ont pas donné de réponse à l'exercice 1, alors que 33 sont dans ce cas pour l'exercice 2.

Note attribuée	Exercice 1		Exercice 2	
	Nombre	Pourcentage	Nombre	Pourcentage
0 point	36	28,1 %	12	10 %
0,25 point	19	14,8 %	24	26 %
0,5 point	23	18,0 %	35	33 %
0,75 point	50	39,1 %	34	31 %
Total	128	100 %	107	100 %

**Tableau 62.** Répartition de notes pour les deux exercices

Les points composant la note semble plus également répartis pour l'exercice 2 que pour l'exercice 1, indice que les correcteurs prennent plus en compte les étapes du calcul dans l'exercice 2 que dans l'exercice 1.

Quelles sont les étapes prises en compte par les correcteurs pour attribuer leur note à l'exercice 2 ?

Examinons dans le tableau 63 le barème de notation proposé par les correcteurs (barème 1). Rappelons que le ministère propose une solution **S2** non attendue car combinant deux méthodes d'intégration : il lui associe un barème (barème 2). Il autorise toute autre solution correcte.

Barème 1		Barème2	
Solution 1 (attendue)	Note	Solution 2 (du ministère)	Note
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx +$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx =$ $I_1 + I_2$ $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$ $I_1 = x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} -$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ $= \frac{\pi}{2} + \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{\pi}{2} - 1$ $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x)$ $= \frac{\sin^3 x}{3} \Big _0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{1}{3}$ $I = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3}$ $= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$	<p><b>0,25</b></p> <p><b>0,25</b></p> <p><b>0,25</b></p>	$\begin{cases} u = x + \sin^2 x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} du = (1 + 2 \sin x \cos x) dx \\ v = \sin x \end{cases}$ $I = (x + \sin^2 x) \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} -$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x \cos x) \sin x dx$ $= \frac{\pi}{2} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx -$ $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ $= \frac{\pi}{2} + 1 + \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} -$ $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x)$ $= \frac{\pi}{2} - \frac{2 \sin^3 x}{3} \Big _0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$	<p><b>0,25</b></p> <p><b>0,25</b></p> <p><b>0,25</b></p>
Total	<b>0,75</b>	Total	<b>0,75</b>

Tableau 63. Barèmes de notation de l'exercice 2

Les stratégies **S1a** et **S2a** sont concernées par les deux barèmes de notation. La notation des stratégies **S1i** et **S2i**,  $i \in \{b, c\}$  est effectuée de façon analogue.

Selon le barème 1, on donne 0,25 point à chacune des trois étapes successives de la solution 1 suivantes : linéarisation ; intégration par parties ; changement de variable et calcul numérique. Ce barème, proposé par les correcteurs qui enseignent les mathématiques dans les classes 12 en 2004 - 2005, atteste de la prise en compte de la séparation des deux méthodes d'intégration dans un calcul d'intégrale dans l'enseignement effectif.



Selon le barème 2, 0,25 point est attribué à chacune des trois étapes successives de la solution 2 :

- choix et calcul de  $du$  et  $v$ ,
- écriture contextualisée de la formule d'intégration par parties,
- changement de variable et calcul numérique.

*La première étape de la solution 1 est plus routinière que celle de la solution 2, bien que les deux soient associées à une même note 0,25. La solution 1 permet donc d'obtenir plus facilement des points que la solution 2.*

### a. Calcul de primitive sans l'ostensif $\int$

Il existe dans l'institution trois formes de calcul de primitive :

- calculer  $\int f(x)dx$
- calculer  $v$  à partir de  $dv$  dans l'intégration par parties
- reconnaître  $\psi$  comme la dérivée d'une fonction  $u$  pour écrire  $\psi(x)dx$  sous la forme  $d(u)$  dans le changement de variable *implicite*

La première forme de calcul, attachée à l'ostensif  $\int$ , est susceptible d'être calculée au moyen du tableau des primitives usuelles et de l'élément technologique ET'0 (chapitre A1)

$$\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C \quad (\text{Changement de variable } \textit{implicite} \ u = u(x))$$

mais aussi de l'intégration par parties, comme nous l'avons montré dans le chapitre C1.

La primitivation n'étant pas enseignée, les deux dernières formes, détachées du l'ostensif  $\int$ , ne sont calculées qu'au moyen du tableau des primitives usuelles à *condition de les reconnaître comme calculs de primitives*.

Comme l'attestent les enquêtes auprès des enseignants (chapitre B2) et des élèves (chapitre C1), les élèves vietnamiens assimilent les notions de primitive et d'intégrale à la seule notion d'intégrale. Le calcul de primitive est donc institutionnellement attaché à l'ostensif  $\int$ . L'absence de cet ostensif dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$  est une rupture de contrat par rapport au calcul de primitive qui peut provoquer des interprétations erronées du calcul à faire.

En effet, pour l'intégrale en question, 11 élèves (sur 89 ayant mobilisé la stratégie **S1**) ont effectué le calcul suivant dans l'intégration par parties :

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\sin x \end{cases}$$

*L'erreur ne porte que sur le calcul de  $v$ . L'origine de cette erreur semble avoir deux raisons :*

- Les élèves ne reconnaissent pas la nature mathématique du calcul à cause de l'absence de l'ostensif  $\int$ .
- Le calcul de  $v$  est donc incertain : les onze élèves optent pour le calcul de la dérivée de  $\cos x$ .

Une erreur analogue est aussi observée parmi les 6 élèves ayant mobilisé la stratégie **S2** : 4 élèves ont effectué le calcul suivant :

$$\begin{cases} u = x + \sin^2 x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (1 + 2 \sin x \cos x) dx \\ v = -\sin x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = \cos x \\ dv = (x + \sin^2 x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = 1 + \sin 2x \end{cases}$$

Ex 2 : 1)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$

sol :  $u = x + \sin^2 x$   $\Rightarrow$   $du = (1 + 2 \sin x \cos x) dx$   
 $du = \cos x dx$   $\Rightarrow$   $v = -\sin x$

Ex 2 :  
 1) Tech. phén  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$

sol :  $\int u = \cos x$   $\Rightarrow$   $\int v(u) = -\sin x dx$   
 $d(v) = (x + \sin^2 x) dx$   $\Rightarrow$   $v = 1 + \sin^2 x$

Dans ce cas aussi, les erreurs ne se trouvent que dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$ . Ici, tout se passe comme si l'on calculait la dérivée de  $v$ .

Rappelons que dans tout calcul de  $v$  à partir de  $dv = \varphi(x)dx$ , l'ostensif  $dx$  a les valences d'indicateur de variable d'intégration et d'élément différentiel. Dans la pratique, la lettre  $x$  étant toujours prise dans l'intégration par parties pour désigner la variable de la fonction intégrante, seule l'expression algébrique  $\varphi(x)$  doit être regardée pour calculer  $v$  : l'ostensif  $dx$  perd alors ses valences, et est considéré institutionnellement comme un facteur algébrique inutile.

Passons maintenant au changement de variable implicite (**S1a**, **S2a**, **S4**) dans lequel on doit transformer  $\cos x dx$  en  $d(\sin x)$ . Pour ce faire, on doit reconnaître  $\cos x$  comme  $(\sin x)'$ . Cette reconnaissance est mathématiquement un calcul de primitive. Dans ce calcul, aucune erreur n'est observée parmi les 37 élèves des stratégies **S1a**, **S2a**, alors que 3 des 7 élèves de la stratégie **S4** ont commis l'erreur suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) d(\cos x)$$

Dans l'égalité  $\cos x dx = d(\cos x)$ , l'ostensif  $dx$  n'est pas considéré comme un élément différentiel et  $\cos x$  remplace tout simplement  $x$ . Le blocage des 3 élèves semblent attester qu'ils attribuent bien à  $d(\cos x)$  la valence d'indicateur de variable d'intégration : ce changement de variable ne leur permet donc pas de trouver une primitive.

Ainsi, en l'absence de l'ostensif  $\int$ , le calcul de primitive devient incertain pour les élèves :

- dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$ , certains élèves optent pour le calcul de dérivée au lieu d'un calcul de primitive.
- dans le changement de variable implicite, l'ostensif  $dx$  garde toujours sa valence d'indicateur de variable d'intégration mais peut perdre (dans les erreurs observées) sa valence d'élément différentiel que, pourtant, l'institution vietnamienne a voulu mettre en place.

## b. Manipulations algébriques sur $dx$ dans le changement de variable implicite

44 élèves (sur 102 ayant donné une réponse, soit 42 %) ont recours à un changement de variable implicite : **S1a** : 35 élèves, **S2a** : 2 élève ; **S4** : 7 élèves.

3 des 35 élèves de la stratégie **S1a** ont calculé l'intégrale proposée comme suit :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\
 &= I_1 + I_2 \\
 \text{En posant } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases}, \text{ on a } \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}. \text{ Donc :} \\
 I_1 &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
 &= \frac{\pi}{2} - 1 \\
 I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx \\
 &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 1 + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Nous supposons que ces trois élèves utilisent la règle d'action suivante pour l'erreur signalée en « grisé » :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{\cos^4 x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Tout se passe comme si ces élèves opéraient le changement erroné de variable dont la manipulation intermédiaire est cachée :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d(\cos x) = \frac{\cos^4 x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Au passage caché de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$  à  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d(\cos x)$ ,  $dx$  et  $d(\cos x)$  perdent la valence d'*élément différentiel*. Dans la première intégrale,  $dx$  est considéré comme facteur algébrique inutile, dans la seconde,  $d(\cos x)$  comme indicateur de variable d'intégration.

Dans le tableau 64, nous examinons une solution, représentative de 7 copies d'élèves ayant mobilisé la stratégie **S4**, en essayant de dégager les significations des manipulations observées en termes de valences instrumentale et sémiotique.

Solution d'élèves	Manipulations observées
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x)$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \left( \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big _0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{\pi^2 + 2\pi}{8}$	Oubli de $\cos x dx$ : devient alors un facteur algébrique inutile, ce qui va permettre de l'identifier à $dx$
	Apparition de $dx$ , comme remplaçant de $\cos x dx$
	Obtention de $x^2/2 \rightarrow dx$ : indicateur de variable d'intégration
	obtention de $x/2 - \sin 2x/4 \rightarrow dx$ : indicateur de variable d'intégration

**Tableau 64.** Valences instrumentale et sémiotique observées dans une solution S4

Nous observons l'intention de manipuler  $dx$  même chez les élèves n'ayant pas donné la réponse à l'exercice. En effet, 5 de ces 33 élèves avaient effectué des manipulations algébriques sur  $dx$  analogues à celles que nous venons de présenter, puis n'aboutissant pas, ont barré ce qu'ils avaient écrit.

Dans les deux solutions erronées étudiées, l'ostensif  $dx$  permet aux élèves d'effectuer des manipulations algébriques pour ramener le calcul à faire au calcul des primitives usuelles. Les trois valences possibles de  $dx$  - facteur algébrique, indicateur de variable d'intégration et élément différentiel, ne sont pas coordonnées mais choisies en fonction de la finalité du calcul.

**c. Calcul de valeurs numériques**

47 % des élèves ayant répondu ont commis des erreurs dans le calcul numérique, certainement en raison de la présence des fonctions trigonométriques. Nous présentons dans le tableau 65 la répartition des notes de ces 48 copies.

Stratégies	Nombre de copies ayant des erreurs sur le calcul numérique	Note
<b>S1a</b>	5	0,25
	11	0,5
<b>S1b</b>	5	0,25
	12	0,5
<b>S1c</b>	10	0,25
	2	0,5
<b>S2a</b>	1	0,5
<b>S2c</b>	1	0,5
<b>S5</b>	1	0,5
<b>Total</b>	48	

**Tableau 65.** Erreurs sur le calcul numérique

Dans le barème de correction du ministère (tableau 63), on donne en premier lieu 0,5 point (sur 0,75) au calcul de  $du$ ,  $v$  et à l'écriture contextualisée de l'intégration par parties. Seul

0,25 point (sur 0,75) est associé aux trois calculs numériques et au changement de variable. Cela confirme la place triviale du calcul numérique dans le calcul intégral dans l'institution vietnamienne.

### III. Conclusion

Dans le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, l'écriture de l'intégrale est privilégiée, la compatibilité du graphique tracé et de l'intégrale écrite n'étant pas prise en compte. Or l'écriture de l'intégrale peut être correcte, sans qu'une signification mathématique lui soit nécessairement associée : en effet, cette écriture peut être obtenue par une stratégie combinatoire sur les nombres ou les équations présents, un indice d'une telle stratégie étant le pourcentage élevé (23 %) d'erreurs ayant leur origine dans une telle procédure. Le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions ne coïncide donc pas avec le calcul d'intégrale.

Dans le calcul d'intégrale séparé de l'aire, le calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$  existe dans l'institution sous deux formes : calcul de  $v$  à partir de  $dv$  dans l'intégration par parties, transformation  $\varphi(x)dx$  en  $d(u(x))$  dans le changement de variable implicite. En l'absence de l'ostensif  $\int$ , le calcul de primitive devient incertain. Il est confondu par certains élèves avec la dérivation dans la première forme de calcul (calcul de  $v$  à partir de  $dv$ ).

Les procédures observées dans les copies montrent une prédominance de  $dx$  comme indicateur de variable : se met alors en place dans les manipulations algébriques du calcul d'intégrale *une valence de facteur inutile*, un indice de cette valence étant la disparition fréquente de  $dx$  dans les écritures. La valence de  $dx$  comme élément différentiel apparaît comme fragile là où elle est indispensable, c'est-à-dire dans le changement de variable, alors même que l'institution vietnamienne lui consacre une place dans l'enseignement contrairement à la France. La majorité des erreurs dans la partie « non numérique » du calcul dans l'exercice 2 provient de ce jeu incomplet avec les trois valences de  $dx$  - facteur algébrique, indicateur de variable d'intégration et élément différentiel.

Le barème de correction proposé par les correcteurs atteste de la séparation effective, dans les tâches de calcul d'intégrale, des deux méthodes d'intégration enseignées. La combinaison du changement de variable et de l'intégration par parties, proposée dans la solution du ministère, est une solution non attendue institutionnellement, comme le montre non seulement les solutions des élèves (stratégie **S1** largement majoritaire) mais aussi les avis des enseignants. Cependant elle semble refléter l'intention de la noosphère que ce type de solution, et donc de tâches, soit présent dans le futur de l'institution.

Le calcul numérique, calcul inévitable dans les calculs d'aire et d'intégrale, est peu présent dans les programmes et dans les manuels. Certaines valeurs numériques de fonctions transcendentes n'ont pas de statut numérique, et sont considérées comme expressions irréductibles. La présence dans les copies du baccalauréat :

- d'erreurs en nombre relativement élevé dans le calcul numérique
- d'un nombre de points réduit accordé par le barème à ce calcul

atteste du fait que ce calcul numérique est peu travaillé dans l'enseignement effectif.

Comment se mettent en place, se renforcent les conditions et les contraintes des trois types de calcul - primitive, intégrale et aire, et celles de leurs liens dans le fonctionnement interne de la classe ? Quelles explications et justifications (éléments technologiques) apporte l'enseignant sur les manipulations intervenant dans les calculs instrumentés par les ostensifs et sur les résultats obtenus dans ces calculs ?

En particulier, dans le cours ordinaire de la classe 12 :

Comment les élèves vietnamiens reconnaissent-ils un calcul de primitive sans l'usage de l'ostensif  $\int$ , comme dans l'intégration par parties (calcul de  $v$  à partir de  $dv$ ) ? Quelles sont les stratégies observées chez les élèves vietnamiens, confrontés à un tel calcul ? Quelles sont les interventions des enseignants dans leurs pratiques d'enseignement pour aider leurs élèves ?

Quelles sont les techniques d'intégration effectivement enseignées ? Quelles sont les erreurs observées chez les élèves vietnamiens dans la manipulation de l'ostensif  $dx$  ?

Entre deux genres de calcul d'aire, lequel est le plus proposé dans l'enseignement effectif ? Quelles sont les erreurs observées chez les élèves vietnamiens dans la lecture graphique pour un calcul d'aire attaché à une étude de fonctions ?

Nous tenterons de répondre à ces questions dans le chapitre prochain en effectuant des observations naturalistes du moment de révision du calcul d'intégrale et du calcul d'aire pour le baccalauréat vietnamien.



## Chapitre C3.

### Observations de classes ordinaires au moment des révisions du calcul d'intégrale et du calcul d'aire

Dans le chapitre B4, dernier chapitre de la partie B, nous avons dégagé trois éléments spécifiques du savoir à enseigner dans l'institution vietnamienne, résultat d'une analyse comparative avec l'institution française : un contrat institutionnel sous-jacent au calcul d'aire et l'introduction des ostensifs  $\int$  et  $dx$ , associé pour le premier au calcul de primitive, pour le second à la notion de différentielle. Nous considérons ces trois éléments comme des conditions et des contraintes qui pèsent sur l'enseignement effectif de la notion d'intégrale dans la classe 12 au Vietnam.

L'existence de ces trois éléments spécifiques nous a conduit à questionner leur prise en compte dans l'OM effectivement enseignée au Vietnam en nous centrant sur le genre de tâches prépondérant dans l'OM à enseigner : le calcul (calcul de primitive, calcul d'intégrale, calcul d'aire).

Dans les chapitres B1 et B2, nous avons analysé les résultats à un questionnaire que nous avons construit et les copies du baccalauréat vietnamien 2005, pour tenter de mettre en évidence le savoir « appris » par les élèves vietnamiens.

Comme préalable au présent chapitre, nous résumons ci-dessous les principaux résultats des deux chapitres C1 et C2 :

- *Rapport unificateur au calcul de primitive et d'intégrale.* L'introduction de l'ostensif  $\int$  dans les calculs concernés fait émerger un rapport unificateur au calcul de primitive et d'intégrale. Ce rapport conduit à considérer primitive et intégrale comme, respectivement, intégrale sans bornes ou avec bornes. Cette considération, à son tour, fait émerger un lien concurrent au lien apprêté par les enseignants par la formule Newton – Leibniz entre primitive et intégrale (chapitre B2) : la relation « sans bornes – avec bornes ». Par conséquent, elle permet aux élèves d'utiliser l'intégration par parties (enseignée uniquement pour l'intégrale [définie]) pour calculer les primitives.

- *Statut de la solution géométrique.* En accord avec le savoir apprêté par l'enseignant (chapitre B2), l'analytique fortement algébrisé par l'usage de l'ostensif  $\int$  est institutionnellement prédominant dans le calcul d'intégrale effectué par l'élève. Le géométrique est donc hors du rapport institutionnel à l'intégrale.

- *Calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$ .* Ce calcul est présent dans la transformation de  $\varphi(x)dx$  en  $d(u)$  (changement de variable implicite) et dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$  (intégration par parties). En l'absence de l'ostensif  $\int$ , il devient incertain. En particulier, il est confondu par certains élèves avec la dérivation dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$ .

- *Statut de l'ostensif  $dx$ .* La majorité des erreurs d'élèves dans la partie « non numérique » du calcul d'intégrale provient de la coordination incomplète des trois valences instrumentale et sémiotique de  $dx$  : facteur algébrique (dont facteur algébrique inutile en particulier), indicateur de variable d'intégration et élément différentiel. La valence d'indicateur de variable d'intégration est prédominante dans les copies étudiées. La valence de facteur algébrique inutile est également présente au travers de la disparition fréquente de  $dx$  dans les écritures. La valence d'élément différentiel, valence



à laquelle l'institution vietnamienne accorde une place importante dans l'intention d'introduire le changement de variable apparaît fragile dans les procédures d'élèves.

- *Calcul numérique.* Le nombre élevé d'erreurs observées dans les copies du baccalauréat relativement au calcul numérique, et la non prise en compte, par les correcteurs dans la notation, de ce calcul attestent de la place triviale du calcul numérique dans l'enseignement effectif.

- *Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions.* Dans ce calcul, la compatibilité du graphique tracé et de l'intégrale écrite étant hors du champ de la correction, l'écriture de l'intégrale est privilégiée. Le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions ne coïncide donc pas avec le calcul d'intégrale car le premier ne se limite pas seulement au calcul correct d'une intégrale, mais bien aussi à la mise en place correcte de la bonne intégrale.

Nous sommes donc conduits à des questions sur l'enseignement effectif de l'intégrale au Vietnam :

- Comment se mettent en place et se renforcent les conditions et les contraintes qui pèsent sur les trois types de calcul - primitive, intégrale et aire, et celles de leurs liens dans le fonctionnement interne de la classe ? Quelles explications et justifications (éléments technologiques) apporte l'enseignant sur les manipulations intervenant dans les calculs instrumentés par les ostensifs et sur les résultats obtenus dans ces calculs ?

En particulier :

- Quelles sont les interventions en classe de l'enseignant pour aider ses élèves confrontés à un calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$  ?

- Quelles indications apporte l'enseignant à ses élèves confrontés à une intégrale pour choisir la méthode d'intégration pertinente ? Quelles indications leur apporte-t-il pour déterminer les « éléments de départ » dans chacune des deux méthodes d'intégration (l'expression algébrique de la nouvelle variable dans le changement de variable, l'expression algébrique de  $u$  et  $dv$  dans l'intégration par parties) ?

- Entre deux types de calculs d'aire (calcul attaché à l'étude de fonctions, calcul hors de l'étude de fonctions), existe-t-il un type privilégié dans l'enseignement effectif ? L'enseignant apporte-t-il explicitement des éléments technologiques pour aider ses élèves à écrire l'intégrale servant au calcul d'aire du premier type ? Si oui, lesquels ?

Nous tenterons de répondre à ces questions dans le présent chapitre, en considérant les séances de révision du calcul d'intégrale et du calcul d'aire pour le baccalauréat vietnamien comme observatoire privilégié de l'enseignement effectif.

Pour ce faire, en nous référant à l'analyse institutionnelle en général et aux sujets du baccalauréat en particulier, nous tenterons dans une première partie de prévoir les types de tâches susceptibles d'être proposés, les techniques et les éléments technologiques associés.

Dans l'analyse d'observations de classe ordinaires<sup>33</sup>, nous analyserons les séances de classe observées en confrontant les observés avec les observables, caractérisés dans la première partie, pour déterminer le(s) type(s) de tâches absent(s), la (les) technique(s) privilégiée(s), et les éléments technologiques concernés.

## I. Repérage des types de tâches, techniques et technologies associées, susceptibles d'être proposés dans un moment de révision pour le baccalauréat.

À propos de l'intégrale, comme nous l'avons présenté dans le tableau 57 du chapitre C2, les épreuves du baccalauréat ne proposent que des calculs : calcul de primitive, calcul d'intégrale (séparé ou attaché à des grandeurs). Dans le calcul d'intégrale attaché à des grandeurs, le calcul d'aire occupe une place importante. Nous privilégierons donc dans cette analyse le calcul de primitive, le calcul d'intégrale séparé des grandeurs, et le calcul d'aire.

### I.1. Calcul de primitive

Rappelons les principaux résultats dégagés dans les analyses précédentes.

Étant toujours attaché à l'ostensif  $\int$  quand il est *explicitement* proposé, le calcul de primitive est effectué dans l'institution vietnamienne au moyen de la linéarité, du tableau des primitives usuelles et du changement de variable implicite :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C \quad (u = \varphi(x)).$$

La présence de l'ostensif  $\int$  permet à l'élève de mobiliser l'intégration par parties (enseignée uniquement pour l'intégrale [définie]), pour calculer les primitives. La primitive est donc considérée comme une intégrale sans bornes. L'intervalle de définition d'une primitive reste implicite et il n'est jamais demandé à l'élève dans le calcul. L'intégrale dépendant de la borne supérieure n'est jamais mise en jeu pour calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné.

Pendant la période actuelle (2000 – 2006), dans le savoir à enseigner et aussi dans le savoir apprêté par l'enseignant vietnamien, malgré la réapparition de l'ostensif  $\int$ , la primitive ne sert qu'à calculer l'intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz. Les équations différentielles, habitat potentiel du calcul de primitive, sont hors du programme. L'institution privilégie donc le calcul d'intégrale au détriment du calcul de primitive. Ce dernier est rarement proposé de façon *explicite* dans le baccalauréat. Par conséquent, il devient une technique au service du calcul d'intégrale plutôt qu'un type de tâches explicite. Regardons l'unique calcul de primitive (parmi les 11 exercices sur les intégrales proposés dans les sujets du baccalauréat de la période).

Calculer la primitive  $F(x)$  de la fonction  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$  en sachant que  $F(1) = \frac{1}{3}$ .

*Solution attendue.*  $F(x)$  est de la forme :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{(x+1)^3 - 2}{(x+1)^2} dx = \int \left( x+1 - \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C \text{ où } C \text{ est une constante à déterminer.} \end{aligned}$$

<sup>33</sup> Il s'agit d'observation de l'enseignement tel qu'il se pratique, sans intervention dans la classe, ni dans la phase de préparation de cours de l'enseignant.

Puisque  $F(1) = \frac{1}{3}$ , on a  $\frac{1}{2} + 1 + 1 + C = \frac{1}{3}$ . Soit  $C = -\frac{13}{6}$ . Donc  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$ .

Le choix de  $F(1) = 1/3$  (et non de  $F(1) = 0$ ) bloque mathématiquement l'usage de l'intégrale dépendant de la borne supérieure (qui n'est efficace que pour la primitive *s'annulant* en un point donné). L'enjeu de l'exercice n'est pas donc l'usage de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, mais de mobiliser la valence instrumentale de l'ostensif  $\int$  pour donner les primitives sous la forme standard  $F(x) + C$ , puis déterminer la constante  $C$  par la résolution d'une équation algébrique. L'intervalle de définition de  $f$  et celui de  $F$  sont implicites. La solution attendue montre que l'étude suivante n'est pas exigée et ne fait donc pas partie des pratiques institutionnelles :

La fonction  $f$  est continue, sauf en  $x = -1$ . Les primitives de  $f$  ne peuvent donc être définies que sur  $]-\infty, -1[$  ou sur  $]-1, +\infty[$ . Puisque 1 appartient à  $]-1, +\infty[$ , nous avons

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6} \text{ sur } ]-1, +\infty[.$$

En ce qui concerne le calcul de primitive avec l'ostensif  $\int$ , nous sommes conduits à poser les questions suivantes :

Le type de tâche T1 « calculer  $\int f(x)dx$  » *comme tel* est absent des sujets du baccalauréat. L'est-il au moment des révisions ? *Si non*, quels types de fonctions intégrantes sont privilégiés ? Quelles techniques associées sont mises en jeu ?

Le type de tâche T'1 « calculer la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné », variante du type de tâche T1, *absent du manuel*, est présent dans les sujets du baccalauréat. L'est-il aussi dans les révisions ? Si oui, quels types de fonctions intégrantes sont privilégiés ? Quelles techniques associées sont mises en jeu ?

Examinons maintenant le calcul de primitive *sans l'ostensif*  $\int$ , présent dans la transformation de  $\varphi(x)dx$  en  $d(u)$  (changement de variable implicite) et dans le calcul de  $v$  à partir de  $dv$  (intégration par parties). Rappelons que l'absence de cet ostensif dans ces deux calculs est une rupture de contrat par rapport au calcul de primitive. L'accomplissement des deux calculs nécessite, avant tout, de reconnaître leur nature commune (cachée dans le contexte en raison de l'absence de l'ostensif  $\int$ ) de calcul de primitive. Les élèves reconnaissent-ils ce calcul ? Quelles indications apporte l'enseignant en classe pour qu'ils le reconnaissent ?

## I.2. Calcul d'intégrale séparé des grandeurs

### I.2.1. Types d'intégrales à calculer

En nous référant au savoir apprêté par l'enseignant (chapitre B2) et aux épreuves du baccalauréat de la période, nous définissons ci-dessous des blocs qui associent des types de fonctions intégrantes susceptibles d'être proposés dans les révisions pour le baccalauréat à l'une des méthodes d'intégration institutionnalisées.

On peut faire l'hypothèse que *les relations représentées par ces blocs peuvent servir d'éléments technologiques pour le choix pertinent d'une méthode dans un calcul d'intégrale.*

**Bloc 1.** *Changement de variable de type  $I^{34}$   $x = \varphi(t)$  : fonctions rationnelles et irrationnelles<sup>35</sup>*

$$\bullet \int_a^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$$

*Solution attendue* : On effectue un changement de variable en posant  $x = \alpha \operatorname{tg} t$ .

$$\bullet \int_0^b \sqrt{a^2 - x^2} dx, \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (0 < b < a)$$

*Solution attendue* : On effectue un changement de variable en posant  $x = a \operatorname{sint}$ .

Dans le savoir à enseigner, l'intégration de fonctions rationnelles et irrationnelles se restreint institutionnellement aux intégrales supra. Cette restriction évite à avoir à enseigner d'autres méthodes d'intégration comme :

- la décomposition d'une fonction rationnelle *générale* en éléments simples (qui est hors programme).

On peut enseigner à titre d'exemples « la décomposition d'une fraction en éléments simples » dans les cas  $\int_a^b \frac{cx+d}{ex+f} dx$ ,  $\int_a^b \frac{cx^2+dx+e}{fx+g} dx$ ,  $\int_a^b \frac{cx+d}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$ , comme suit : pour les deux premières intégrales, on effectue une division polynomiale pour ramener les fonctions intégrantes aux formes  $Q(x) + \frac{A}{Bx+C}$  où  $Q(x)$  est un polynôme du premier degré ou une constante ; pour la dernière intégrale, on calcule deux nombres  $A$  et  $B$  de manière que  $\frac{cx+d}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ .

- la rationalisation d'une fonction irrationnelle par des transformations trigonométriques (ou algébriques) mathématiquement complexes.

Rappelons que ces méthodes hors de l'OM à enseigner peuvent toutefois intervenir dans les épreuves du concours d'entrée à l'Université. On peut donc prévoir qu'elles apparaissent ponctuellement dans l'enseignement effectif comme nous l'avons signalé pour la décomposition d'une fraction en éléments simples.

**Bloc 2.** *Intégration par parties pour certaines fonctions transcendantes présentes dans EMS*

$$\bullet \int_a^b e^x \cos x dx, \int_a^b e^x \sin x dx$$

*Solution attendue* : Ce sont deux intégrales associées dont le calcul de l'une mène à celui de l'autre. Pour les calculer, on effectue deux intégrations par parties successives en

<sup>34</sup> Selon le manuel unique

<sup>35</sup> Bien sûr, toutes les fonctions intégrantes abordées dans les blocs 1, 2, et 3 doivent faire partie du bestiaire des fonctions usuelles dans EMS.

choisissant l'un de quatre choix suivants :  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$ ,  $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ ,  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ ,

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

- $\int_a^b P(x) \ln x dx$  ( $P(x)$  : polynôme de  $x$ ),  $\int_a^b x^k \ln x dx$ ,  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$

Signalons que le premier type d'intégrales n'est pas la forme générale du second car l'exposant  $k$  peut être ici un nombre entier négatif.

*Solution attendue* : On effectue une intégration par parties en posant respectivement

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x) dx \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^k dx \end{cases}$$

- $\int_a^b P(x) \cos(\alpha x + \beta) dx$ ,  $\int_a^b P(x) \sin(\alpha x + \beta) dx$ ,  $\int_a^b P(x) e^{\alpha x + \beta} dx$ ,  $P(x)$  : polynôme de  $x$

*Solution attendue* : On effectue  $n$  intégrations par parties où  $n$  est le degré du polynôme  $P(x)$

en posant respectivement  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(\alpha x + \beta) dx \end{cases}$  ou  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(\alpha x + \beta) dx \end{cases}$  ou  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x + \beta} dx \end{cases}$

- $\int_a^b (\ln x)^n dx$ ,  $n \in \mathbf{N}$

*Solution attendue* : On effectue  $n$  intégration par parties en posant  $\begin{cases} u = (\ln x)^n \\ dv = dx \end{cases}$

### Bloc 3 Changement de variable de type <sup>36</sup> $u = \psi(x)$

- $\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x) dx$ , une primitive  $F$  de  $f$  est connue

*Solution attendue* : Soit on effectue un changement de variable *implicite* en transformant  $f(\psi(x))\psi'(x) dx$  en  $f(u) du$ , soit on effectue un changement de variable *explicite* en posant  $u = \varphi(x)$ .

Le changement de variable dans le bloc 3 n'est institutionnellement associé à aucun type de fonctions particulières, ce qui rend difficile les prises de décision et son enseignement.

Comment l'enseignement effectif prend-il en compte les relations mises en évidence par ces blocs ? Quelles indications l'enseignant apporte-t-il à ses élèves confrontés à une intégrale pour choisir la méthode d'intégration pertinente ? Quelles indications leur apporte-t-il pour déterminer la nouvelle variable ou les expression algébriques de  $u$  et  $dv$  ?

Rappelons que dans le savoir à enseigner, les intégrales à calculer ne nécessitent que l'une des deux méthodes d'intégration enseignées : changement de variable et intégration par parties. Aucune intégrale n'impose la combinaison des deux méthodes

<sup>36</sup> Selon le manuel unique : ces distinctions sont reprises dans les classes observées.

d'intégration dans un même calcul d'intégrale. Dans l'enseignement effectif, l'enseignant propose-t-il à ses élèves des intégrales nécessitant la combinaison des deux méthodes d'intégration ?

### I.2.2. Calcul numérique dans l'intégration

Le calcul numérique dans l'intégration commence au moment de l'application de la formule de Newton – Leibniz par l'écriture conventionnelle  $F(x)|_a^b$ , et finit au moment de l'obtention de valeur numérique  $F(b) - F(a)$ . Dans ce calcul que nous considérons ici comme type de tâches, interviennent les variables didactiques suivantes :

- les fonctions usuelles présentes dans l'expression algébrique de  $F$ ,
- les opérations présentes dans l'expression algébrique de  $F$ ,
- la nature et les valeurs numériques de  $a$  et  $b$ .

Voici les valeurs choisies de ces variables didactiques dans les exercices de l'intégration du manuel :

- Les fonctions puissances, exponentielles ou logarithmiques intervenant dans le calcul numérique se restreignent à celles à exposant rationnel ou à base naturelle.
- Pour les opérations, aucune restriction n'est observée. Toutes les opérations sont susceptibles d'intervenir dans le calcul numérique.
- Si l'expression algébrique de  $F$  contient une fonction trigonométrique  $F_i$ , les valeurs numériques de  $a$  et  $b$  sont choisies de manière que  $F_i(a)$  et  $F_i(b)$  soient deux valeurs remarquables enseignées. Dans le cas où l'expression algébrique de  $F$  ne contient aucune fonction transcendante, les valeurs numériques de  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels.

La présentation du calcul numérique dans le manuel n'est pas uniforme. Parfois, le manuel ne présente que le résultat final en négligeant le processus de calcul, comme par exemple :

$$\frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \text{ (p. 131)}$$

Parfois, il présente un calcul complet :

$$\frac{1}{2} \frac{(2x+1)^4}{4} \Big|_0^8 = \frac{1}{8} (81 - 1) = 10 \text{ (p. 135)}$$

Pourtant, le premier de ces calculs est un peu plus « complexe » que le second en raison de la présence d'une fonction trigonométrique. Ainsi, le niveau de complexité d'un calcul numérique n'est pas corrélé au détail de l'exposé du processus de calcul dans la solution attendue. Ceci ne peut être expliqué que par la place triviale du calcul numérique dans le savoir à enseigner.

Dans l'enseignement effectif de l'intégration :

Quelle place l'enseignant accorde-t-il au calcul numérique ? Quelles valeurs l'enseignant choisit-il pour les variables didactiques du calcul numérique ? Quelles sont les interventions de l'enseignant pour aider ses élèves dans le calcul numérique ?

### I.3. Calcul d'aire: deux types de calculs et trois techniques associées

Comme nous l'avons dit dans l'analyse institutionnelle (chapitre A1), deux types de calcul d'aire sont présents dans l'institution vietnamienne :

- type 1 : calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions,
- type 2 : calcul d'aire hors de l'étude de fonctions.

Le type 1, absent de l'unique manuel en vigueur, est néanmoins présent dans les épreuves du baccalauréat (voir tableau 57, chapitre C2). Le type 2 auquel appartiennent tous les exercices de calcul d'aire du manuel, est aussi très présent dans les épreuves du baccalauréat.

Comme nous l'avons étudié dans le chapitre C2, la résolution d'un exercice du type 1 nécessite avant tout l'écriture de l'intégrale servant au calcul d'aire. Cette écriture doit s'appuyer sur la lecture du graphique en accord avec certaines règles du contrat institutionnel sur le calcul d'aire. Cependant, la compatibilité du graphique tracé et de l'intégrale écrite n'est pas prise en compte par les correcteurs du baccalauréat.

Quant au type 2, l'institution propose deux méthodes.

**Méthode « graphique ».** Quand les courbes des fonctions concernées sont « habituelles », on les trace sur un même système de repère orthogonal sans effectuer les études préalables. L'exercice se ramène donc à celui du type 1.

**Méthode « déplacement de la valeur absolue ».** Sinon, la solution s'appuie sur la formule suivante permettant d'éviter la construction et la lecture d'un graphique :

Soient  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , et  $C_1$ ,  $C_2$  leurs courbes représentatives. L'aire de la surface plane délimitée par les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$  et les courbes  $C_1$ ,  $C_2$  est donnée par la formule :

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

On mobilise la propriété suivante pour « déplacer » le signe de valeur absolue à l'intérieur de l'intégrale vers à l'extérieur :

Si l'équation<sup>37</sup>  $f_1(x) - f_2(x) = 0$  n'a aucune solution sur  $[\alpha, \beta]$ , alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$$

« Cette propriété très commode *ne nécessite ni le graphique, ni l'étude de signe* de  $f_1(x) - f_2(x)$  sur chacun des intervalles concernés<sup>38</sup>. » (Guide pour l'enseignant, rédigé par les auteurs du manuel). L'exemple ci-dessous du manuel soutient l'idée des auteurs :

Calculer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes d'équations :

$$y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2.$$

*Solution.* Posant  $f_1(x) = x^3$ ,  $f_2(x) = 0$ , on a

<sup>37</sup> On suppose préalablement que les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont continues sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ .

<sup>38</sup> Souligné par nous.

$$f_1(x) - f_2(x) = x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1, 2].$$

L'aire à calculer est :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |x^3| dx \\ &= \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^2 |x^3| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 x^3 dx \right| + \left| \int_0^2 x^3 dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \right| \\ &= \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| \frac{16}{4} \right| = 4 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La solution 2 proposé dans le manuel ne recourt à aucun graphique. Elle permet donc d'éviter les règles RI1, RI2, RI3 du contrat institutionnel. Cette solution et les éléments technologiques qui la justifient marquent, pour la première fois depuis 1975, l'intention de la noosphère de faire évoluer le type de tâches T3 « Calculer l'aire sous la courbe ». En réalité, une variante de cette solution, non proposée dans le manuel, est fortement présente dans les solutions du *Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12*, publié en 2004 par la Maison d'édition Université Nationale de Ho Chi Minh – Ville.

Calculer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes suivantes :

$$y = x^2 = 1, x + y = 3.$$

*Solution.*

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 & (P) \\ y = -x + 3 & (d) \end{cases}$$

L'équation donnant les abscisses des points d'intersection de (P) et (d) :

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant la formule (3), on a :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |(x^2 + 1) - (-x + 3)| dx \\ &= \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx \end{aligned}$$

On étudie le signe de  $x^2 + x - 2$  sur l'intervalle  $[-2 ; 1]$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$
	$+$	$0$	$-$	$+$

$x^2 + x - 2 \leq 0$  sur l'intervalle  $[-2 ; 1]$ . Donc :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 -(x^2 + x - 2) dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 \\
 &= \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \\
 &= \frac{9}{2} \text{ (unités d'aire)}
 \end{aligned}$$

Dans la solution supra, on ne trace pas les courbes. On utilise la formule  $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ . On étudie le signe de  $f_1(x) - f_2(x)$  sur  $[a, b]$ . Cette étude de signe permet d'éliminer le signe de valeur absolue pour obtenir une intégrale « habituelle ».

Nous résumons les deux types de calcul d'aire et les solutions associées dans le tableau 66 suivant :

Types de calcul d'aire	Statut	
	Dans le manuel	Au baccalauréat
attaché à l'étude de fonctions	<i>absent</i> du manuel	<i>présent</i> au baccalauréat <b>Solution attendue.</b> * Écriture contextualisée de l'intégrale (en appui sur le graphique et les règles du contrat institutionnel) * Calcul de l'intégrale écrite
hors de l'étude de fonctions	<i>présent</i> dans le manuel - <b>Méthode « graphique »</b> ( <i>proposée dans le manuel</i> ) Construction du graphique pour ramener au calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions. - <b>Méthodes sans graphique</b> • « <b>déplacement de la valeur absolue</b> » ( <i>proposée dans le manuel</i> ) * Écriture contextualisée de l'intégrale $\int_a^b  f_1(x) - f_2(x)  dx$ * « <i>Déplacement</i> » du signe de valeur absolue sans recourir à l'étude de signe • « <b>élimination de la valeur absolue</b> » ( <i>proposée dans le Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12</i> ) * Écriture contextualisée de l'intégrale $\int_a^b f_1(x) - f_2(x) dx$ * <i>Élimination</i> du signe de valeur absolue au moyen de l'étude algébrique de signe	* <i>présent</i> au baccalauréat

**Tableau 66.** Deux types de calcul d'aire dans le manuel et au baccalauréat

Entre les deux types de calcul d'aire, y a-t-il un type privilégié dans l'enseignement effectif? Quelles indications apporte l'enseignant pour aider ses élèves à écrire l'intégrale servant au calcul d'aire du premier type? Pourquoi la méthode « déplacement de la valeur absolue » n'est-elle pas mobilisée dans le *Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12*? Est-elle conforme aux pratiques institutionnelles et stables de l'EMS?

## II. L'observation de deux classes ordinaires au moment des révisions du thème de l'intégration

Pour pouvoir caractériser le savoir effectivement enseigné, nous avons effectué au moment des révisions de l'intégrale pour le baccalauréat une observation dans deux

classes « ordinaires » C1 et C2 : nous notons respectivement par P1 et P2 les enseignants de ces classes.

Enseignant les mathématiques depuis plusieurs années en classe 12, P1 et P2 sont des professeurs expérimentés d'un même lycée. Nous avons assisté à 4 séances de 45 minutes pour chacun d'eux.

Dans les observations, nous avons :

- enregistré sur cassettes audio l'intégralité des 8 séances ;
- relevé l'ensemble des traces écrites au tableau ;
- pris des notes ainsi sur le déroulement des séances ;
- recueilli l'ensemble des documents distribués aux élèves ;
- conduit un entretien à la fin de l'observation avec chacun des deux enseignants.

À l'issue de ces observations, nous avons reconstruit les protocoles des observations à partir des cassettes enregistrées, des notes d'observation et des documents distribués en classe. Ces protocoles sont présentés dans les annexes.

Signalons que dans l'enseignement secondaire au Vietnam, pour chaque niveau de classe et chaque discipline, un manuel unique, élaboré par une commission ministérielle à partir du programme concerné, est utilisé dans tout le pays. Un document associé appelé *Répartition du programme* fixe de façon détaillée et impérative la progression de l'enseignement : nombre de séances attribuées à chaque section, à chaque chapitre, à chaque révision ; moment de révisions, de contrôles écrits notés et d'examens semestriels. Cependant, le Ministère de l'Éducation Nationale n'impose pas le temps de révision pour le baccalauréat. C'est l'équipe disciplinaire de chaque lycée qui décide de ce temps de révision, en fonction de l'état de l'établissement.

Nous présentons dans le tableau 67 le temps destiné aux révisions, mis en jeu dans le lycée où enseignent P1 et P2.

Thèmes		Nombre de séances
Analyse	Étude de fonctions	4
	Intégrale	4
	Algèbre combinatoire	2
Géométrie analytique	sur le plan	5
	dans l'espace	5
Problème de synthèse		5
Total		25

**Tableau 67.** Temps imparti officiellement aux révisions

L'organisation des séances de révision de chacun des deux enseignants est cependant différente. L'enseignant P1 envoie ses élèves au tableau pour résoudre des exercices, il ne donne aucun exercice à la maison, alors que l'enseignant P2 résout lui-même la plupart des exercices proposés, puis il propose des exercices analogues à chercher à la maison.

Pour pouvoir obtenir une vue globale sur le déroulement des 8 séances, nous présentons dans le tableau 68 les calculs proposés et la répartition du temps de révision selon ces calculs et selon la classe observée.

Séances	Répartition du temps ( <i>en minute</i> )	
	C1	C2
1	Calcul d'aire hors de l'étude de fonctions : <b>22</b>	Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions : <b>8</b>
	Calcul de volume : <b>8</b>	Calcul d'intégrale : <b>37</b>
	Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions : <b>15</b>	
2	Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions : <b>45</b>	Calcul d'intégrale : <b>45</b>
3	Calcul d'intégrale : <b>45</b>	Calcul d'intégrale : <b>45</b>
4	Calcul d'intégrale : <b>45</b>	Calcul d'intégrale : <b>45</b>
Total	Calcul d'intégrale : <b>90</b>	Calcul d'intégrale : <b>172</b>
	Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions : <b>60</b>	Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions : <b>8</b>
	Calcul d'aire hors de l'étude de fonctions : <b>22</b>	Calcul d'aire hors de l'étude de fonctions : <b>0</b>
	Calcul de volume : <b>8</b>	Calcul de volume : <b>0</b>

**Tableau 68.** Répartition du temps de révision selon le genre de calcul et selon la classe

L'enseignant P1 consacre la moitié du temps de révision au calcul d'intégrale, le temps qui reste est réservé au calcul d'aire et de volume. Dans ces deux derniers calculs, il privilégie le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions. L'enseignant P2 consacre le maximum du temps de révision au calcul d'intégrale. Le peu de temps qui reste est réservé au calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions. Il n'aborde pas dans les séances de révision le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions ainsi que le calcul de volume.

Malgré la différence de temps accordé à chacun des genres de calculs dans chacune des deux classes observées, nous voyons nettement deux calculs privilégiés dans les séances de révision : calcul d'intégrale et calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions. Rappelons que ce dernier est absent du manuel. Pourquoi est-il privilégié dans les révisions ? Sur ce sujet, les explications des deux enseignants sont identiques :

« *L'étude de fonctions est un problème toujours proposé dans les sujets du bac de toutes périodes*<sup>39</sup>. Une des questions souvent posées dans ce problème est le calcul d'aire [attaché à l'étude fonctions] que nous insérons toujours dans les exercices de synthèse et dans les sujets des examens semestriels de notre lycée pour préparer les élèves au bac. » (P1)

« Oui, c'est vrai que le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions est absent du manuel. Je ne comprends pas pourquoi... les auteurs du manuel ne l'ont pas abordé dans leur œuvre. Mais dans les cours 'ordinaires'<sup>40</sup>, nous le proposons aux élèves. Ça, c'est pour préparer graduellement les élèves au bac parce que... *le problème d'étude de fonctions est toujours présent dans les sujets du bac*<sup>41</sup>. Quant au calcul d'aire hors de l'étude de fonctions, nous l'abordons aussi dans les cours 'ordinaires', mais nous ne choisissons que des exercices faciles. » (P2)

Il y a donc ici un écart entre ce qui est à enseigner et ce qui est effectivement enseigné :

- Dans le savoir à enseigner, le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions est présent, et le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions absent.
- Dans le savoir effectivement enseigné, le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions est privilégié, malgré son absence du manuel. Cette modification peut être expliquée par

<sup>39</sup> Souligné par nous.

<sup>40</sup> Il veut dire les cours autres que les révisions pour le baccalauréat.

<sup>41</sup> Souligné par nous.

la présence permanente dans les sujets du baccalauréat de l'étude de fonctions, habitat potentiel du calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions.

Ceci est cohérent avec les résultats que nous avons énoncés dans les chapitres A2 et A3 :

- Sous les contraintes du savoir à enseigner et les examens finaux (dont fait partie le baccalauréat), un enseignant est en partie responsable de la transposition interne du savoir par le fait qu'il apprête le savoir pour l'enseigner effectivement. Dans l'apprêtage du savoir à enseigner et dans l'enseignement effectif, l'enseignant garde une liberté relative dans l'espace des contraintes institutionnelles. (Ravel 2003)
- Le baccalauréat a le pouvoir de faire évoluer et de stabiliser le rapport institutionnel à un objet de savoir à condition qu'il soit attaché à des pratiques effectives et stabilisées de l'institution d'enseignement, ici la classe 12. (Jullien, Matheron et Schneider 2003)

## II.1. Calcul de primitive

Le type de tâches T1 (calculer  $\int f(x)dx$ ) et sa variante T'1 (calculer la primitive prenant une valeur donnée en un point donné) sont tous deux absents des 8 séances de révision observées. T1 étant absent des épreuves du baccalauréat de la période, son absence dans les révisions est compréhensible. Mais pourquoi T'1 disparaît-il des révisions, alors qu'il est présent dans les épreuves du baccalauréat ?

Dans l'entretien post-observations, l'enseignant P1 explique :

« Ce type d'exercices est absent du manuel. Il est apparu une seule fois dans les épreuves du baccalauréat. C'était en... 2003, si je ne me trompe pas. On ne le voit pas ailleurs. Dans les années récentes, on ne voit constamment au baccalauréat que le calcul d'intégrale et le calcul d'aire, parfois le calcul de volume. J'ai privilégié donc ces trois types d'exercices dans les révisions. »

Comme son collègue, l'enseignant P2 nous dit :

« C'était aussi une question de temps. Dans la limite du temps consacré aux révisions, j'ai dû bien sûr dans mon enseignement choisir les connaissances nécessaires au baccalauréat. Personnellement, je pense que le calcul d'intégrale se compose d'un calcul de primitive et d'un calcul numérique. Quand on enseigne un calcul d'intégrale, on enseigne aussi le calcul de primitive correspondant. Quant à ce type d'exercices [T'1], l'essentiel est de donner les primitives [sous la forme  $F(x) + C$ ]. La recherche de la constante  $C$  est très facile parce qu'elle est simplement la résolution d'une équation du premier degré. On peut négliger ce type d'exercices pour se concentrer sur le calcul d'intégrale. »

Nous pouvons dégager quatre éléments pris en compte par les deux enseignants dans la justification de leur choix :

- types de tâches présents dans le manuel : T'1 est absent du manuel,
- types de tâches présents dans le baccalauréat : T'1 est apparu une seule fois dans les sujets du baccalauréat,
- temps d'enseignement : le temps destiné aux révisions est limité.

- lien entre primitive et intégrale : le calcul d'intégrale est considéré comme un calcul de primitive avec bornes. *Le calcul de primitive est identifié à la phase non numérique du calcul d'intégrale : il est donc conçu comme une sous-tâche du calcul d'intégrale.*

En France, en l'absence de l'ostensif  $\int$ , le calcul de primitive est séparé du calcul d'intégrale. Les équations différentielles, présentes dans le programme et aussi dans les épreuves du baccalauréat, sont un habitat du type de tâche T'1. Contrairement à la France, T'1 n'est pas un type de tâches routinier dans l'institution vietnamienne, malgré sa présence au baccalauréat. Ceci confirme encore une fois le résultat que nous venons de rappeler plus haut : le baccalauréat a le pouvoir de faire évoluer et de stabiliser le rapport institutionnel à condition qu'il soit attaché à des pratiques effectives et stabilisées de l'institution d'enseignement.

Dans l'apprêtage du savoir, les enseignants vietnamiens ont l'intention d'établir un lien monodirectionnel entre primitive et intégrale à travers la formule de Newton – Leibniz : la primitive sert à calculer l'intégrale. Dans l'enquête auprès des élèves vietnamiens, nous avons vu l'émergence d'un autre lien, concurrent du lien apprêté par les enseignants : la relation « sans bornes – avec bornes ». Cette relation est alors renforcée dans l'enseignement effectif : le calcul de primitive, instrumenté par l'ostensif  $\int$ , est enseigné pour préparer le calcul d'intégrale. Celui-ci est considéré comme un amalgame du calcul de primitive et du calcul numérique. Il en résulte une disparition des types de tâche T1, T'1 dans les révisions.

Examinons maintenant le calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$  dans l'intégration par parties. Ci-après l'extrait d'une chronique dans la classe C2.

*P2 écrit au tableau.*

$$\text{Calculer } I = \int_1^e \frac{4 \ln x dx}{x^2}$$

**P2.** Cette intégrale appartient à un type d'intégrales que vous avez appris. On doit utiliser quelle méthode ?

**EE.** Intégration par parties.

**P2.** Exact ! Et on pose  $u$  et  $dv$  comment ?

**E.** Monsieur, on pose  $u$  égale à  $\ln x$  et  $dv$  égale à  $\frac{dx}{x^2}$ .

*P2 écrit au tableau, juste au-dessous de la consigne.*

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases}$$

**P2.** Et le coefficient 4 ? Il est où ? Non, on pose  $u$  égale à  $4 \ln x$ . C'est bon ?

*Il rajoute 4 avant  $\ln x$ .*

$$\begin{cases} u = 4 \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases}$$

**EE.** Oui, monsieur.

**P2.** Maintenant, on calcule  $du$  et  $v$ , qui sait les calculer ?

**EE.** (Silence)

*P2 écrit au tableau, à la droite des expressions de  $u$  et  $dv$ .*

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{4dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

**P2.** C'est clair ?

**EE.** (*Silence*)

**P2.** Attention, s'il vous plaît ! De  $u$  à  $du$ , on calcule la dérivée. De  $dv$  à  $v$ , on calcule une primitive.

L'enseignant P2, une fois  $u$  et  $dv$  choisis, énonce la règle du calcul de  $v$  à partir de  $dv$  et de  $du$  à partir de  $u$  : « De  $u$  à  $du$ , on calcule la dérivée. De  $dv$  à  $v$ , on calcule une primitive ». Cette règle de calcul attribue à la différentielle  $du$  ou  $dv$  une valence sémiotique de marqueurs du calcul à faire, de  $dv$  à  $v$  calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$ , de  $u$  à  $du$  calcul de dérivée : P2 ne cherche à aucun moment à justifier cette règle par la notion de différentielle précédemment enseignée.

Cette règle n'est énoncée qu'une seule fois dans la classe C2 alors que l'enseignant P1, quant à lui, ne l'énonce jamais dans sa classe. Mais nous faisons l'hypothèse que c'est bien cette règle, la plupart du temps implicite, que l'on cherche à enseigner au travers des exercices d'intégration par parties. Cette règle de simple association peut être source d'erreurs, en permettant une confusion entre dérivation et intégration, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent.

## II.2. Calcul d'intégrale séparé des grandeurs

### II.2.1. Types d'intégrales à calculer

Nous présentons dans le tableau 69 toutes les intégrales proposées par les deux enseignants dans leurs séances de révision, en confrontant ces intégrales avec les types d'intégrales précédemment prévus dans les blocs 1, 2, 3 dans la partie précédente.

Blocs	Dans la classe C1	Dans la classe C2
Dans le bloc 1	$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ , $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ , $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ , $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
Hors du bloc 1 (décomposition en éléments simples)	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$	$\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^2+2x+1} dx$ , $\int_{-1}^2 \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 dx$
Bloc 2	$\int_0^1 2x \ln(x+1) dx$ , $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(x^2+1) dx}{x^2}$ , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos dx$ , $\int_0^1 x e^{3x} dx$ , $\int_0^1 \frac{x dx}{e^{2x}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ , $\int_1^3 4x \ln x dx$ , $\int_1^e \frac{4 \ln x dx}{x^2}$
Bloc 3	$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+3 \sin x}$ , $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \sin x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$ , $\int_1^e \frac{4 \ln x dx}{x}$ , $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \operatorname{tg} x dx$ , $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$ , $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x}$ , $\int_0^1 2x \sqrt{1-x^2} dx$ , $\int_0^1 2x \sqrt{1-x} dx$ , $\int_0^1 2x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ , $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+2x^3} dx$
Hors des 3 blocs prévus (combinaison des méthodes)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$ , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x) \cos x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3x dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 6x \sin 2x - 6) dx$ , $\int_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{x^2+1}} x dx$ , $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x dx}{\cos^2 x}$ , $\int_1^2 x(e^x - \ln x) dx$ , $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Tableau 69. Intégrales proposées dans les séances de révision

• P1 et P2 proposent tous deux des intégrales de fonctions rationnelles nécessitant la décomposition d'une fraction en éléments simples : on peut supposer qu'ils le font pour tenir compte des contraintes du concours d'entrée à l'Université, que certains de leurs élèves vont présenter.

• P1 et P2 associent bien des fonctions intégrantes aux deux méthodes enseignées : on peut donc penser que les associations des blocs 1 et 2 servent d'éléments technologiques pour le choix de l'une ou de l'autre de ces méthodes.

• Examinons cela de plus près, en nous centrant sur le changement de variable des blocs 1 et 3.

Pour le changement de variable  $u = \psi(x)$  (bloc 3), P1 se centre sur des fonctions trigonométriques, alors que P2 s'intéresse de plus à des fonctions irrationnelles, caractéristique du bloc 1.

Examinons un extrait de protocole dans le cas « incertain » du bloc 3 : quelles indications apporte P1 à ses élèves pour décider qu'il faut poser une nouvelle variable  $u = \psi(x)$  ?

**Classe C1.**

*L'enseignant écrit au tableau.*

**Exercice 1.** Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin x dx$$

**P1.** Vous voyez, sous ces formes là, il est difficile de déterminer la méthode d'intégration à prendre. Je tente de transformer  $\cos 2x$ . On a trois formules.

*Il écrit dans un coin du tableau.*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

**P1.** Je choisis la dernière. (*Il montre du doigt*) Je vais expliquer pourquoi après. (*Il écrit au tableau, juste à côté de l'intégrale I*).

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) \cos x dx$$

**P1.** Qu'est-ce qu'on va faire pour la suite ?

*Un élève va au tableau et écrit.*

$$\text{On pose } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{On change les bornes d'intégration : } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

Donc :

$$I = \int_0^1 (1 - 2t^2) dt = \left( t - \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

**P1.** *On voit que  $\cos x$  est la dérivée de  $\sin x$ . Donc on pose  $t = \sin x$ .<sup>42</sup> C'est pourquoi, j'ai choisi la formule  $\cos 2x$  égale à  $1 - 2\sin^2 x$ . Je considère  $\cos x$  comme une « queue » qui indique la dérivée de la nouvelle variable.<sup>43</sup> Alors, pour l'intégrale J, quelle est la « queue », d'après vous ?*

**EE.**  $\sin x$ .

**P1.** Exact ! Quelle est la nouvelle variable ?

**E.**  $\sin x$ , Monsieur !

<sup>42</sup> Souligné par nous.

<sup>43</sup> Souligné par nous.



E.  $\cos x$ , Monsieur !

**P1.** Attention ! La queue et la nouvelle variable peuvent différer d'un coefficient multiplicatif. Donc, si on pose  $t$  égale à  $\cos x$ , on a  $dt = -\sin x dx$ . On va transformer  $\cos 2x$  de manière la nouvelle expression ne contienne que  $\cos x$ . Vous pouvez calculer  $J$  dès maintenant ?

P1 énonce à ses élèves une règle explicite pour « découvrir » la nouvelle variable à poser  $u = \psi(x)$  : la « queue » [...] indique la dérivée de la nouvelle variable. Cette « queue » se trouve (ou se cache) à la fin de l'expression algébrique de la fonction intégrante<sup>44</sup>. Dans le cas où la « queue » est cachée, il faut effectuer des transformations simples algébriques ou trigonométriques pour la faire apparaître.

Pour le bloc 3, les exercices proposés par les deux enseignants P1 et P2 offrent en général des conditions favorables au respect de la règle énoncée par P1 : « la 'queue' indique la dérivée de la nouvelle variable », et ainsi réduisent l'incertitude pour l'élève. C'est ce qu'atteste l'ensemble des exercices proposés par P1, par exemple :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+3\sin x}, \int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx, \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}^2 x \sin x dx$$

Mais les intégrales de fonctions trigonométriques proposées par les deux enseignants dans le bloc 3 nécessitent des transformations trigonométriques des fonctions intégrantes *pour rendre visible la nouvelle variable*, comme nous le montrons sur les intégrales proposées aussi bien par P1 que par P2.

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \text{tg} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ \bullet \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}^2 x \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \sin x dx \\ \bullet \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \text{tg}^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \bullet \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{aligned}$$

Ici, les égalités remarquables mobilisées varient d'une intégrale à l'autre.

•  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  dans la première intégrale, mais  $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$  dans la quatrième intégrale et non  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{1 - \cos^2 x}$ .

<sup>44</sup> Ce qui est donc à l'origine du terme inventé par P1..

- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  dans la première intégrale, mais  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$  dans la deuxième intégrale  
et non  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ .

Cette diversité introduit une nouvelle incertitude concernant le choix de la bonne transformation.

Revenons à P2 : il n'énonce pas la règle de la « queue » permettant de déterminer la nouvelle variable, mais il choisit des exercices respectant pour les fonctions intégrantes trigonométriques cette règle et la fait donc fonctionner systématiquement sur ces exercices.

Contrairement à P1, il propose des intégrales de fonctions irrationnelles associées « habituellement » au bloc 1 dans EMS au Vietnam. Il va décider, par principe d'économie, d'introduire dans ce cas, une nouvelle variable  $t = \psi(x)$ , relevant du bloc 3.

Par exemple, pour  $\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$ ,  $\int_0^1 2x^3\sqrt{1-x^2} dx$ , en posant  $t = \sqrt{1-x^2}$  (sans justification) : il ne respecte ainsi :

- ni la règle habituelle du bloc 1, où l'on doit poser  $x = \sin t$ , (ce qu'il fait pour l'intégrale précédente  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ );

- ni la règle « la 'queue' est la dérivée de la nouvelle variable ».

Il fait fonctionner implicitement une nouvelle règle « la racine est la nouvelle variable ». Par contre, dans un document distribué à ses élèves, P1 écrit : « si la fonction intégrante contient une racine, on pose  $t$  égal à cette racine. »

On peut penser alors que les relations du bloc 1 deviennent incertaines et entraînent corrélativement chez les élèves une confusion dès que la fonction intégrante est irrationnelle.

- Comme le montre le tableau 69, les deux enseignants proposent des intégrales hors des trois blocs prévus, car nécessitant une combinaison des deux méthodes d'intégration enseignées, changement de variable et intégration par parties. Examinons maintenant le rôle attribué par l'enseignement effectif à la linéarisation dans ce cas.

Considérons un extrait de protocole d'une séance de classe C2.

*L'enseignant écrit au tableau.*

$$I = \int_1^2 x(e^x - \ln x) dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = (e^x - \ln x) dx & \Rightarrow v = \end{cases}$$

**P2.** On ne peut pas calculer  $v$  dans ce cas là ! On devra poser  $u$  et  $dv$  autrement.

Il écrit de nouveau.

$$\text{On pose } \begin{cases} u = e^x - \ln x \Rightarrow du = \left( e^x - \frac{1}{x} \right) dx \\ v = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} (e^x - \ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \left( e^x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= 2(e^2 - \ln 2) - \frac{1}{2} e - \int_1^2 \frac{x^2}{2} e^x dx - \int_1^2 \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

**P2.** On doit effectuer de plus deux intégrations par parties successives pour achever le calcul. Ça fait trois intégrations par parties successives au total. C'est trop long ! Si on linéarise l'intégrale au début, on aura deux intégrales qu'on peut calculer par deux intégrations<sup>45</sup> par parties séparées.

Il écrit au tableau.

$$I = \int_1^2 x(e^x - \ln x) dx = \int_1^2 (xe^x - x \ln x) dx = \int_1^2 xe^x dx - \int_1^2 x \ln x dx$$

Il semble donc que, dans ce cas, la *linéarisation « en premier lieu »* soit explicitement et avant tout un outil pour économiser le nombre de calculs d'intégrale. Elle permet aussi, de façon plus cachée aux élèves, de ramener dès le départ le calcul initial au calcul d'intégrales associées aux blocs 1, 2 ou 3.

Un résultat de cette pratique d'enseignement est que dans les copies du baccalauréat 2005 (chapitre C2), la stratégie S1 (linéarisation en premier lieu) est largement prédominante, chez les élèves et prévu par les enseignants (contrairement à la solution ministérielle : linéarisation en second lieu).

### II.2.2. Calcul numérique

Le choix des valeurs des variables didactiques du calcul numérique par chacun des deux enseignants est identique à celui du manuel. En particulier, dans les séances observées, la valeur numérique des bornes d'intégration est choisie de manière que le calcul numérique soit aussi simple que possible.

Dans un cas extrême, cette volonté de simplifier le calcul peut avoir un effet révélateur d'un manque institutionnel.

L'enseignant P2 a proposé à ses élèves, comme exercices à la maison, de calculer les intégrales  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ,  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ ,  $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ , en leur suggérant respectivement les changements de variable explicite  $x = 2\sin t$ ,  $x = \sqrt{3} \sin t$ ,  $x = a \sin t$  (du bloc 1).

L'enseignant a visiblement choisi des bornes qui simplifient les calculs. En fait, il a repris des exercices existants en changeant les valeurs des bornes dans cette optique. Or, avec son choix, les trois fonctions ne sont plus bornées sur les intervalles ainsi proposés et donc plus Riemann-intégrables sur l'intervalle d'intégration. La consigne montre que l'intention de P2 n'est pas de faire vérifier la discontinuité de la fonction intégrante sur l'intervalle  $[0, a]$ , mais comme il le déclare dans l'entretien, de faciliter les calculs. Pour

<sup>45</sup> C'est nous qui soulignons.

construire ces exercices, il a adapté une intégrale présente dans le manuel,  $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  sans porter attention à la discontinuité de la fonction intégrante sur  $[0, a]$  (comme il le déclare lui-même).

Ceci confirme que :

- Le contrôle de la continuité de la fonction intégrante sur l'intervalle d'intégration est hors du rapport institutionnel au calcul d'intégrale.

Dans le cadre de l'expérimentation de notre mémoire de Master 2, nous avons proposé à 145 élèves vietnamiens de calculer l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ . A part 7 élèves n'ayant pas répondu, 138 élèves calculent cette intégrale sans contrôler la continuité (ou la discontinuité) de la fonction intégrante sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

- Dans le calcul de l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ , l'intervalle  $[a, b]$  perd le statut d'intervalle d'intégration comme partie de l'ensemble de définition de  $f$ . Les nombres  $a$  et  $b$  sont seulement deux valeurs numériques qui doivent être substituées à  $x$  dans l'expression  $F(x)$  pour donner la valeur numérique de l'intégrale.

Ces valeurs sont pour l'enseignant une variable de commande pour simplifier le calcul numérique, *phase finale et mineure du calcul d'intégrale*.

Cela est particulièrement clair dans les entretiens, quand les deux enseignants justifient leurs choix des valeurs numériques des bornes d'intégration.

« Aujourd'hui, les élèves sont faibles en calcul numérique. Cet état est sans doute largement répandu dans tout le pays. Pour des raisons pédagogiques, il vaut mieux choisir de 'jolies bornes' pour faciliter le calcul numérique. Dans les sujets du baccalauréat, les bornes d'intégration sont données ainsi. Ce n'est pas la peine de donner une intégrale avec deux 'bornes terribles' pour décourager l'élève. » (P1)

« L'enjeu, à mon avis, est l'obtention de la primitive, à l'aide de la formule de Newton – Leibniz, du tableau des primitives usuelles et des méthodes d'intégration enseignées. C'est vraiment une nouvelle connaissance enseignée en classe 12, alors que le calcul numérique ne l'est pas, il est à la charge des programmes des classes 10 et 11. En classe, je rappelle les valeurs remarquables [des fonctions usuelles] nécessaires au contexte du calcul, mais je n'ai pas le temps suffisant pour rappeler systématiquement les fonctions élémentaires fondamentales enseignées dans les classes précédentes. » (P2)

Dans l'enseignement effectif, l'institution considère donc le calcul d'intégrale comme un amalgame d'une phase non numérique prépondérante (ou calcul de primitive) et d'une phase numérique mineure.

### II.3. Calcul d'aire

Comme l'a montré le tableau 68, le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, bien qu'il soit absent du manuel, est privilégié dans les séances de révision en raison de sa présence dans les épreuves du baccalauréat : dans la classe C1, 60 minutes lui sont réservées contre 22 minutes au calcul d'aire hors de l'étude de fonctions ; dans la classe

C2, il est abordé pendant 8 minutes tandis que le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions est absent. Nous nous centrerons donc sur la classe C1.

### II.3.1. Calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions

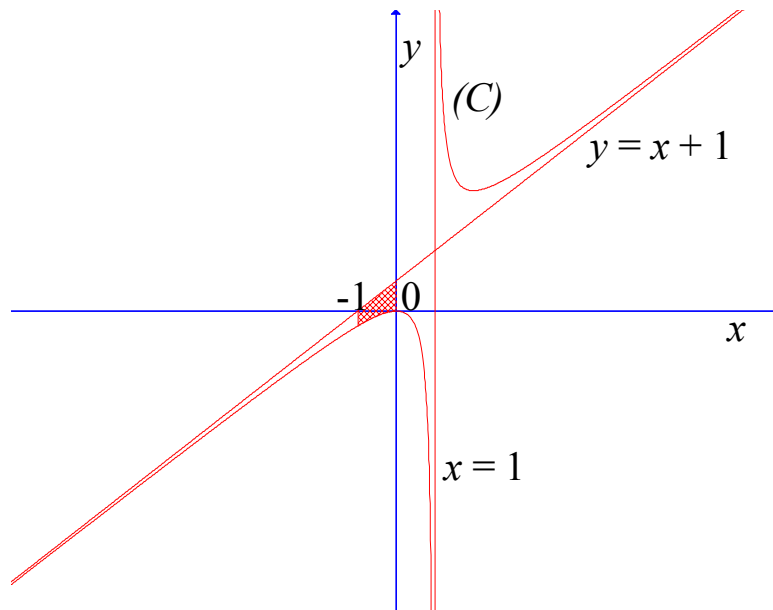
Tout d'abord, remarquons que dans le document distribué à ses élèves et dans les exercices de calcul d'aire proposés, P1 n'aborde que les surfaces planes connexes<sup>46</sup>. Il n'offre donc pas d'occasion d'un travail sur la subdivision de l'intervalle d'intégration.

Regardons un extrait de protocole dans la classe C1 concernant ce calcul :

*L'enseignant écrit au tableau l'énoncé de l'exercice.*

3. Étant donnée la fonction  $y = \frac{x^2}{x-1}$  ayant pour courbe représentative (C).
- Étudier la fonction.
  - Calculer l'aire de la surface plane (H) délimitée par (C), son asymptote oblique, et les droites d'équations  $x = -1$ ,  $x = 0$ .
  - Calculer l'aire de la surface plane (S) délimitée par (C), son asymptote oblique, et les droites d'équations  $x = 2$ ,  $x = \lambda$  ( $\lambda > 2$ ) et déterminer  $\lambda$  pour que cette aire soit égale à 3.

*L'enseignant envoie Kim au tableau. Après avoir résolu la question a, elle obtient le graphique ci-dessous. Elle continue à calculer l'aire de la surface plane (H).*



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^0 \left[ \left( x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) - (x + 1) \right] dx \\
 &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 \\
 &= \ln|-1| - \ln|-2| \\
 &= \ln 1 - \ln 2 \\
 &= -\ln 2 \text{ (unité d'aire)}
 \end{aligned}$$

<sup>46</sup> P2 aussi.

**P1.** (à la classe) Est-ce vrai ?

**EE.** (en chuchotant) C'est faux !

**E.** C'est faux, monsieur ! Le résultat est ici un nombre négatif, alors que l'aire doit être un nombre positif.

**P1.** Oui, c'est faux.

*En l'entendant, Kim efface le signe « - » devant  $\ln 2$  et ajoute ce signe avant les deux intégrales écrites. Mais elle ne le fait pas pour les résultats intermédiaires. L'enseignant observe Kim.*

**P1.** (à Kim) Pourquoi tu as modifié comme ça ?

**Kim.** (en souriant) Parce que... la surface plane est délimitée par (C) (elle montre du doigt l'expression  $x + 1 + \frac{1}{x-1}$ ), l'asymptote oblique (elle montre du doigt l'expression  $x - 1$ ), et

les droites d'équations  $x = -1$  (elle montre la borne inférieure de l'intégrale),  $x = 0$  (elle montre la borne supérieure de l'intégrale).

**P1.** (à Kim) Mais pourquoi tu as ajouté le signe « moins » avant les intégrales ?

**Kim.** Euh... euh... parce que... parce que...  $f(-1)$  est négative. (Elle montre du doigt le graphique)

**P1.** Tu ne voulais pas dire que c'est parce que tu as obtenu une aire négative que tu a ajouté le signe « moins » avant l'intégrale ?

**Kim.** Si, monsieur. Mais c'était à cause de  $f(-1)$ .

**P1.** (il éclate de rire) Non, ce n'est pas la vraie cause ! À ta place, s'il te plaît ! (à toute la classe) Regardez bien le graphique ! Ici, sur l'intervalle  $[0, 1]$ , l'asymptote oblique est au-dessus de la courbe (C)<sup>47</sup>. (Il efface la première intégrale écrite par Kim, en ne gardant que

$\int_{-1}^0$ ). On écrit d'abord l'équation de l'asymptote oblique. Ensuite, on met le signe

« moins ». L'équation de la courbe (C) doit s'écrire après parce que (C) est au dessous de l'asymptote oblique.<sup>48</sup> C'est clair ?

**EE.** Oui, monsieur !

*L'enseignant corrige la solution de Kim jusqu'au bout.*

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \left[ (x+1) - \left( x+1 + \frac{1}{x-1} \right) \right] dx \\ &= - \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx \\ &= - \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 \\ &= -\ln|-1| + \ln|-2| \\ &= \ln 2 \text{ (unité d'aire)} \end{aligned}$$

Nous pouvons dégager de la solution de Kim une règle d'action pour écrire l'intégrale servant le calcul de l'aire de la surface plane délimitée par les courbes (C) et ( $\Gamma$ ) d'équations  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$ , et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ .

\* On écrit d'abord  $\int_a^b$  si  $a < b$ .

\* Dans la consigne, la courbe (C) étant donnée avant la courbe ( $\Gamma$ ), on met  $f(x)$  devant  $g(x)$  dans l'expression algébrique de la fonction intégrante  $f(x) - g(x)$ . On n'a pas besoin de regarder la position relative entre (C) et ( $\Gamma$ ) dans le graphique.

<sup>47</sup> C'est nous qui soulignons.

<sup>48</sup> C'est nous qui soulignons.

Sachant qu'une aire est un nombre positif, le résultat numérique  $-\ln 2$  joue le rôle d'élément du milieu pour la validation du calcul d'aire dans la classe, y compris pour Kim. Il ne fait aucun doute pour les élèves que ce n'est pas le calcul numérique (rendu simple par le choix des bornes) qui est en cause, mais la phase précédente.

\* Si l'aire obtenue est négative, on inverse le signe de l'intégrale écrite et celui de l'aire calculée en ajoutant le signe « moins » avant celles-ci. Sinon, on garde le résultat obtenu.

Signalons que cette règle d'action peut donner une écriture de l'intégrale mathématiquement correcte à condition que le signe de la fonction intégrante soit constant sur l'intervalle  $[a, b]$ . Cependant l'intégrale ainsi écrite, même si elle est mathématiquement correcte, n'est pas conforme au contrat de l'écriture de l'intégrale qui doit reposer sur une lecture du graphique.

Les explications de l'enseignant en classe nous permettent de dégager les étapes institutionnalisées, considérées comme technique pour écrire l'intégrale attendue :

On a à écrire l'intégrale servant à calculer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  d'équations  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ , et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ . Le graphique est préalablement donné.

\* On écrit  $\int_a^b$  si  $a < b$ .

\* On regarde le graphique pour savoir quelle courbe,  $(C_1)$  ou  $(C_2)$ , est au-dessus de l'autre sur l'intervalle  $[a, b]$ . Supposons que ce soit  $(C_1)$  d'équation  $y = f(x)$ .

\* L'intégrale à écrire est alors  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ .

Nous trouvons dans un document que l'enseignant a distribué aux élèves les éléments technologiques suivants qui justifient la technique supra :

Si la surface plane  $(S)$  est délimitée par les courbes d'équations  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ , alors son aire est :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Signalons que pour calculer l'intégrale, on doit éliminer le signe de valeur absolue dans l'expression  $|f(x) - g(x)|$  par une des deux méthodes :

**Méthode 1.** On étudie le signe de l'expression  $|f(x) - g(x)|$  pour éliminer le signe de valeur absolue.

**Méthode 2.** On s'appuie sur le graphique :

**Cas 1.** Sur l'intervalle  $[a, b]$ , le graphe de la fonction  $f$  est au-dessus de celui de la fonction  $g$ , on a  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ . On en déduit que :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

**Cas 2.** Sur l'intervalle  $[a, b]$ , le graphe de la fonction  $g$  est au-dessus de celui de la fonction  $f$ , on a  $g(x) \geq f(x)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ . On en déduit que :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Nous notons que dans la pratique effective, l'enseignant marginalise les deux écritures suivantes, faisant intervenir la valeur absolue ou le signe  $-$  (comme dans la solution de Kim) :

$$S = \left| \int_b^a (f(x) - g(x)) dx \right| \text{ ou } \left| \int_b^a (g(x) - f(x)) dx \right|$$

$$S = - \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ ou } S = - \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

L'écriture de l'intégrale attendue doit respecter les règles suivantes du contrat didactique :

\* Pour écrire les bornes de l'intégrale, on doit écrire la valeur la plus petite comme borne inférieure de l'intégrale. On n'a pas le droit d'utiliser le signe de valeur absolue pour inverser cet ordre.

\* Entre deux termes de la fonction intégrante  $f - g$ , on doit écrire le terme « le plus grand » (l'équation de la courbe qui se situe au-dessus de l'autre) en premier lieu (sous-entendu : pour que l'aire soit un nombre positif).

### II.3.1. Calcul d'aire hors de l'étude de fonctions

Seul l'enseignant P1 propose ce calcul au moment des révisions. Comme l'a montré le document distribué à ses élèves, P1 ne mobilise que la méthode non graphique « *par élimination de la valeur absolue* » (voir tableau 66), absente du manuel.

Examinons l'extrait de protocole suivant dans la classe C1, lors du moment de calcul d'aire hors de l'étude de fonctions :

*L'enseignant écrit au tableau l'énoncé d'un exercice.*

2. Calculer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes suivantes :

a.  $y = x^2 - 2x + 3$  et  $y = 5 - x$ .

b.  $y = x^2 - 2x + 2$  et  $y = -x^2 - x + 3$ .

*L'enseignant envoie un élève au tableau pour résoudre la question a de l'exercice. Cet élève écrit au tableau.*

L'équation donnant les abscisses des points d'intersection :

$$x^2 - 2x + 3 = 5 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

*L'élève sort une calculatrice de sa poche. Il l'utilise pour résoudre l'équation récemment écrite. Trois minutes se passent. Il n'arrive pas à trouver les deux solutions de l'équation du deuxième degré.*

**P1.** Tu peux la résoudre sans calculatrice ?

**E.** Non, monsieur ! J'ai oublié la formule !

**P1.** Mon Dieu ! Comment tu passeras ton bac si tu as oublié ainsi ? C'est la forme particulière  $a - b + c = 0$ . Tu t'en souviens ?

**E.** Non, monsieur !

**P1.** Bon, à ta place, s'il te plaît ! Tu devras relire les formules à la maison ! D'accord ? Il faut savoir résoudre cette équation sans avoir besoin d'aucune calculatrice.

*L'enseignant écrit au tableau, juste au-dessous de l'équation.*

$$x^2 - 2x + 3 = 5 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

**P1.** Phi ! Au tableau et continue, s'il te plaît !

*Phi va au tableau et écrit.*

$$S = \int_{-1}^2 |(x^2 - 2x + 3) - (5 - x)| dx$$

$$= \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right|_{-1}^2 \\
&= \left| \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

L'enseignant écrit au tableau, à côté de la solution de Phi.

On établit le tableau de signe de  $x^2 - x - 2$ .

$x$	-1	2
$x^2 - x - 2$	+	-
	0	0
	+	+

On déduit du tableau de signe :

$$\begin{aligned}
S &= - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \\
&= - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

En ce qui concerne l'extrait de protocole supra, nous pouvons remarquer :

- Pour calculer l'intégrale, l'élève mobilise la méthode sans graphique « *par déplacement de la valeur absolue* » du manuel (voir le tableau 66). Cette méthode s'appuie sur la propriété :

Si l'équation  $f_1(x) - f_2(x) = 0$  n'a aucune solution sur  $[\alpha, \beta]$  et si la fonction  $f_1 - f_2$  est continue (ce qui est toujours implicite à ce niveau), alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$$

Cependant, l'enseignant cherche à enseigner l'autre solution, se fondant sur la méthode « *par élimination de la valeur absolue* », absente du manuel (voir le tableau 66). Dans l'entretien, répondant à notre question, il explique :

**K.** (*observateur*) Un élève a mobilisé la méthode du manuel pour calculer l'aire. Et tu as proposé une autre méthode. Quel est l'enjeu de cette proposition ?

**P1.** Oui, c'est vrai que la méthode du manuel est concise, parce qu'elle permet d'éviter la lecture du graphique et l'étude de signe de la fonction intégrante. Mais elle peut provoquer une confusion. Il est probable que l'élève pense que

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

pour le cas général<sup>49</sup>. C'est pourquoi, je privilégie la méthode de l'étude de signe. De plus, l'étude du signe d'une expression pour ôter le signe de valeur absolue est une chose familière quand on apprend à résoudre les équations contenant une valeur absolue en classe 11.

Nous pouvons en déduire que la méthode « *par déplacement de la valeur absolue* » proposée dans le manuel n'est pas conforme aux pratiques institutionnelles et stables

<sup>49</sup> L'égalité n'est correcte que pour une fonction  $f$  continue à signe constant sur  $[a, b]$ .

des enseignants. Pour P1, la méthode « *par élimination de la valeur absolue* » permet de revenir sur des connaissances anciennes et évite le contrôle de la continuité de  $f$  sur l'intervalle d'intégration.

Dans sa propre solution, l'enseignant n'a pas présenté de façon détaillée le calcul numérique. Ceci confirme encore une fois la place triviale du calcul numérique dans l'enseignement effectif du calcul d'intégrale. De ce fait, il peut fournir, comme nous l'avons mis en évidence dans le paragraphe II.3.1., un milieu pour la validation de l'écriture de l'intégrale : le résultat doit être un nombre positif et simple (faisant intervenir des entiers petits).

### III. Conclusion

#### III.1. Calcul de primitive avec ou sans l'ostensif $\int$

Dans les 8 séances de classe observées, le type de tâches T1 « calculer  $\int f(x)dx$  » n'apparaît pas explicitement comme type de tâches, mais comme sous-tâche du calcul d'intégrale. *Le calcul de primitive est considéré comme la phase non numérique du calcul d'intégrale.* C'est ce qui peut expliquer l'existence de la conception unificatrice des notions de primitive et d'intégrale comme intégrale « sans borne – avec bornes » dans EMS (chapitres B2 et C1).

De même le type de tâches T'1 « calculer la primitive prenant une valeur donnée en un point donné » apparaît elle-même comme une sous tâche du « calcul de primitive », se ramenant à la recherche de la constante. Ainsi en se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré, elle ne peut pas être un enjeu pour l'enseignement à ce niveau. Elle est donc absente des révisions, malgré sa présence au baccalauréat.

Le calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$ , présent dans le changement de variable *implicite* et dans l'intégration par parties, est en rupture de contrat par rapport au calcul de primitive enseigné, instrumenté par l'ostensif  $\int$ . Cette absence (de la transformation de  $\psi(x)dx$  en  $du$  et du calcul de  $v$  à partir de  $dv$ ), dont l'enseignant vietnamien doit tenir compte dans ses pratiques institutionnelles et stables, intensifie l'écart entre la notion de *différentielle* à enseigner et celle effectivement enseignée. La notion de différentielle, réintroduite et simplifiée en classe 12 dans la période 2000 – 2006, a pour but, selon le *Guide pour l'enseignant* rédigé par les auteurs de l'unique manuel en vigueur, de servir au changement de variable (implicite ou explicite) et à l'intégration par parties. Or, la règle « De  $u$  à  $du$ , on calcule la dérivée. De  $dv$  à  $v$ , on calcule une primitive », enseignée de façon explicite ou implicite, reflète un non fonctionnement de la notion de différentielle dans les calculs de  $du$  et  $v$  respectivement à partir de  $u$  et  $dv$ . Perdant la signification mathématique que les décideurs des programmes et les auteurs du manuel veulent leur accorder,  $du$  et  $dv$  sont considérés contextuellement comme de simples signes pour déclencher les deux calculs précités. Cette règle formelle, sans justification mathématique, peut provoquer une confusion du calcul de  $v$  à partir de  $dv$  avec la dérivation.

#### III.2. Calcul d'intégrale séparé des grandeurs

Parmi les genres de calculs du thème de l'intégrale, le calcul d'intégrale séparé des grandeurs est prépondérant dans l'enseignement effectif, comme l'attestent nos observations dans les classes C1 et C2, mais aussi le contenu des épreuves du baccalauréat.

L'association d'un type de fonctions intégrantes à une seule des méthodes d'intégration présentes (intégration par parties et changement de variable du type 1) est enseignée explicitement : elle sert d'élément technologique pour le choix pertinent d'une de ces méthodes. En tant que telle, elle permet à l'enseignant de justifier ses décisions et aux élèves, s'ils l'apprennent, de prendre des décisions.

Ainsi les blocs 1 et 2 associent dans EMS la présence dans l'expression intégrante de fonctions rationnelles et irrationnelles au changement de variable de type 1 et celle des fonctions transcendentes à l'intégration par parties.

Le type d'intégrales  $\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)dx$  (changement de variable de type 2) ne permet pas une telle association : il existe dans l'institution un éventail trop large de fonctions intégrantes pour que soit établie une typologie simple de fonctions intégrantes associées à ce type de changement de variable. Pour justifier ses choix, l'enseignant fait fonctionner des règles de « découverte » de la nouvelle variable, comme celle énoncée par P1 : *la « queue » indique la dérivée de la nouvelle variable*. Pour assurer institutionnellement l'apprentissage de cette règle (énoncée ou non), il n'est proposé (par P1 ou P2, mais aussi dans le manuel) que des intégrales « en règle », c'est-à-dire des intégrales dont la dérivée de la nouvelle variable se trouve (ou se cache) à la fin de l'expression algébrique de la fonction intégrante. Ce type de règle fonctionne comme un élément technologique qui justifie le choix de la nouvelle variable aussi bien pour l'enseignant que pour l'élève. Cependant, il reste à effectuer des transformations algébrique ou trigonométrique dont la finalité est de rendre visible la nouvelle variable dans ce qui n'est pas la « queue ».

Sous les contraintes du concours d'entrée à l'université, apparaissent dans l'enseignement effectif certaines intégrales hors de l'OM à enseigner, comme par exemple des intégrales nécessitant la décomposition d'une fraction en éléments simples ou la combinaison des deux méthodes d'intégration. Dans ce dernier cas, la linéarisation prioritaire de la fonction intégrante évite cette combinaison en ramenant le calcul donné à un calcul « habituel » mais la justification officielle est d'être un moyen pour économiser le nombre de calculs d'intégrale (enseignant P2 et entretien avec des responsables du baccalauréat, chapitre C2).

L'institution considère le calcul d'intégrale comme un amalgame d'une phase non numérique (ou calcul de primitive), considérée comme prépondérante et d'une phase numérique, considérée comme triviale et donc mineure. Il en résulte que :

- Les nombres  $a$  et  $b$ , considérés seulement comme deux valeurs numériques intervenant dans le calcul de  $F(b) - F(a)$ , sont choisis de manière que ce calcul soit aussi simple que possible.
- Par conséquent, l'intervalle d'intégration n'a pas le statut de partie de l'ensemble de définition de la fonction intégrante. La continuité de la fonction intégrante sur l'intervalle d'intégration n'est jamais vérifiée.
- Le résultat numérique du calcul doit être lui-même un nombre simple (faisant intervenir des entiers petits). Il peut alors servir de milieu pour la validation de la phase non numérique. Comme le disent les enseignants : « le résultat doit être joli. »

### III.3. Calcul d'aire

Parmi les deux types de calculs d'aire, le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, malgré son absence du manuel, est privilégié dans l'enseignement effectif, en raison de

la présence permanente d'un problème d'étude de fonctions, son habitat potentiel, dans les sujets du baccalauréat.

Dans le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, le fait que la surface plane dont on doit calculer l'aire soit toujours donnée par des mots, non par un système d'inéquations comme en France, différencie le calcul d'intégrale et le calcul d'aire car ce dernier nécessite, en plus du calcul d'intégrale, l'écriture de la bonne intégrale. C'est pour obtenir cette écriture (qui s'appuie sur la lecture du graphique en respectant les règles du contrat institutionnel sur le calcul d'aire) que l'enseignant met en œuvre des étapes institutionnalisées dont le domaine de validité ne contient que les surfaces planes connexes.

Le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions, unique évolution du calcul d'aire de 1975 jusqu'à 2006 dans l'institution, bien qu'il apparaisse dans le manuel et dans les épreuves du baccalauréat, est peu présent dans l'enseignement effectif. La méthode « déplacement de la valeur absolue » proposée dans le manuel est remplacée dans l'enseignement effectif par la méthode « élimination de la valeur absolue », qui repose sur des connaissances anciennes et permet d'éviter le contrôle de la continuité de la fonction intégrante sur l'intervalle d'intégration.

L'observation des moments de révision du calcul d'aire confirme le rôle de milieu pour la validation du résultat numérique. Dans la classe C1, la connaissance partagée que « le résultat numérique doit être un nombre positif » fait que le résultat négatif obtenu provoque un retour réflexif sur l'écriture de l'intégrale.



## Conclusion

### I.1 Sur la comparaison France – Vietnam : absence de la raison d'être de la notion de l'intégrale

Les comparaisons diachronique et synchronique entre deux institutions de l'Enseignement des Mathématiques du Secondaire (EMS), la classe de terminale en France et la classe 12 au Vietnam, ainsi que l'enquête épistémologique du chapitre B3, nous ont amené à décrire un modèle d'Organisation Mathématique ou OM de référence ainsi que des OM à enseigner à propos du thème de l'intégration dans les deux institutions considérées. Ces descriptions ont permis de caractériser la nature des écarts dans la vie de ce thème.

Dans les deux institutions, la raison d'être de l'intégrale est absente. Les traces de la problématique de l'intégrabilité (dans l'OM de référence : OM1 intégrabilité) forment une organisation mathématique incomplète : la praxis est absente (pas d'exercices sur l'intégrabilité) et le logos sert à établir hors du topos de l'élève les propriétés de l'intégrale à enseigner :

- pour le calcul de primitive (dans l'OM de référence : OM2 antidérivation)
- pour le calcul d'intégrale (dans l'OM de référence : OM3 calcul d'aire ou d'autres grandeurs).

Bosch, Espinoza et Gascon (2002) nomme un tel phénomène à propos de la notion de limite de fonctions « le bicéphalisme du curriculum » :

« le bicéphalisme du curriculum autour de la limite des fonctions,  $[T/t / ] \cup [ / \theta / \Theta]$ , le professeur ne dispose pas d'éléments technologiques un minimum 'cohérents' et 'sûrs' qui formeraient une partie des moyens mathématiques des élèves et qui permettraient de répondre à l'accumulation des demandes que l'activité génère. » (Op. cité)<sup>50</sup>.

Au Vietnam, à partir de 1990, la définition de l'intégrale d'une fonction continue (sur un intervalle fermé, borné) donnée par la formule de Newton-Leibniz (fondée sur l'existence préalable de la notion de primitive) sert d'unique élément technologique à l'existence et au calcul d'intégrale. La problématique de l'intégrabilité disparaît en même temps que la responsabilité pour l'élève de vérifier la continuité de la fonction intégrante sur son intervalle d'intégration dans le calcul d'intégrale (chapitre C3). Cette disparition peut avoir un effet extrême qui est de retirer à l'enseignant lui-même la responsabilité de proposer des intégrales de fonctions continues sur l'intervalle d'intégration comme nous l'avons montré dans le chapitre C3.

En France, le problème de l'intégrabilité de 1980 à 2002 se trouve dans le même état que celui que nous venons de décrire pour le Vietnam. À partir de 2002, avec la définition de l'intégrale par limite commune de suites adjacentes, la problématique de l'intégrabilité, bien qu'infime, réapparaît alors que sa praxis continue à être absente. On retrouve le phénomène « de bicéphalisme du curriculum ».

Le « calcul approché d'intégrale », qui dans l'OM de référence fonctionne selon une procédure soit de « découpage, encadrement », soit de « développement en série », n'apparaît jamais dans l'EMS au Vietnam. Ce calcul apparaît en France à partir de 1980 avec des techniques réduites par rapport aux techniques de référence : seule la

---

<sup>50</sup> Traduit en français par Annie Bessot.

procédure « découpage, encadrement » existe avec des découpages de l'intervalle d'intégration en nombre réduit (de 1 à 2 pour la période actuelle<sup>51</sup>). L'absence du développement en série limite, évidemment, les possibilités des techniques de calcul approché. La procédure « découpage, encadrement » sépare le calcul approché du calcul d'intégrale, mais potentiellement pourrait contribuer à la mise en place du problème de l'intégrabilité.

Ce qui est dominant dans l'organisation mathématique à enseigner, que ce soit en France ou au Vietnam, c'est le calcul (calcul de primitive et calcul d'intégrale). Pour le Vietnam, de plus, ce calcul se restreint au calcul exact.

## **I.2. L'ostensif $\int$ , élément unificateur des notions de primitive et d'intégrale au Vietnam, élément séparateur des notions de primitive et d'intégrale en France**

La notation  $\int f(x)dx$  est présente de façon permanente au Vietnam depuis 1970, à l'exception d'une courte période (1990-2000), pour désigner *l'ensemble des primitives* de la fonction  $f$ , mais aussi, par abus de langage, pour désigner *une primitive quelconque* de  $f$ . Le calcul de primitive est donc étroitement attaché à l'ostensif  $\int$ , ses valences instrumentale et sémiotique permettant d'effectuer et de contrôler, si nécessaire, le changement de variable et l'intégration par parties *comme pour l'intégrale définie*.

Dans l'enseignement effectif au Vietnam, l'ostensif  $\int$  permet d'instrumenter le calcul de primitive comme il le fait pour l'intégrale. Assimilant les notions de primitive et d'intégrale à une seule notion, les élèves vietnamiens sont donc autorisés officiellement à mobiliser l'intégration par parties (enseignée uniquement pour l'intégrale) pour calculer les primitives. Ces pratiques institutionnelles conduisent à considérer l'intégrale indéfinie (les primitives) comme une intégrale sans bornes et vice-versa l'intégrale comme une intégrale indéfinie avec bornes. Les calculs de primitive et d'intégrale sont amalgamés, et par conséquent, la primitive n'acquiert pas dans l'enseignement effectif un caractère fonctionnel.

En France, on assiste au cours à une séparation progressive des notions de primitives et d'intégrale : dans la première période de notre analyse diachronique (1970 – 1980),

existent deux notations pour la notion de primitive :  $\int f(x)dx$  ou  $\int_a^x f(t)dt + C$ . Ces

deux notations permettent aux auteurs (à l'image du Vietnam), de présenter l'intégration par parties comme une méthode de calcul d'une intégrale indéfinie (première notation) ou de primitives (deuxième notation). À partir de 1980, l'ostensif  $\int$  disparaît de la notion de primitive enseignée et en même temps, l'intégration par parties disparaît comme technique du calcul de primitive : la « primitivation » devient l'unique méthode officielle. On peut penser que cette séparation entre primitive et intégrale, opérée en

---

<sup>51</sup> Sont présentes dans la praxis de l'EMS en France deux méthodes de calcul approché d'intégrale : *calcul numérique* et *encadrement numérique*. Ces deux méthodes fonctionnent selon la procédure « découpage, encadrement ». Le calcul numérique, enseigné de 1980 à 2002 à travers quatre méthodes (méthode des rectangles, méthode des trapèzes, méthode des tangentes, et méthode du point milieu), est effectué dans les manuel avec un nombre de découpage de 5 à 10. L'encadrement numérique d'une intégrale  $m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M$ , proposé principalement à partir de 2002, est un cas particulier de la procédure « découpage, encadrement » avec le nombre de découpage égal à 1.

particulier par la présence (intégrale) ou l'absence (primitive) de l'ostensif  $\int$ , a son origine dans une réflexion épistémologique de la noosphère sur ces deux notions. Par exemple, Legrand (1986) déclare à propos de l'introduction du concept d'intégrale en France au niveau de la première année d'université :

« En un mot ces étudiants n'ont, sauf exceptions, *jamais 'fait d'intégration' et paradoxalement croient la connaître*, car pour eux il y a identité entre intégrale et recherche de primitive ! » (Op. cité)

Cependant l'ostensif  $\int$  n'est pas complètement absent en France en ce qui concerne la notion de primitive, la noosphère tentant d'introduire comme type de tâches au niveau de la Terminale l'étude de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, comme le reflètent des sujets récents du baccalauréat<sup>52</sup>. De plus, dans la batterie d'exercices éditée en France par les inspecteurs généraux de l'éducation nationale en 2004, la présence de l'ostensif  $\int$  dans le calcul de primitive via l'intégrale dépendant de la borne supérieure a deux niches principales :

- de « récupérer » les valences instrumentale et sémiotique associées à cet ostensif, et la méthode d'intégration par parties enseignée pour l'intégrale,
- de rétablir les liens épistémologiques entre aire, primitive et intégrale en interprétant l'intégrale dépendant de la borne supérieure comme aire sous la courbe et comme primitive.

Ainsi, dans l'institution française, les calculs de primitive et d'intégrale ne sont pas amalgamés, mais on peut se demander si une primitive est vraiment une fonction dans l'enseignement effectif.

### **I.3. L'ostensif $dx$ et ses trois valences instrumentale et sémiotique**

Dans la notation leibnizienne,  $dx$  est à la fois un facteur multiplicatif et un indicateur d'équipollence de figures, analogue à l'*indicateur de variable d'intégration* de nos jours.

Comme le disent Bourbaki (1949), Lang (1964), Rudin (1976), et Guénard (2005), le  $dx$  dans  $\int_a^b f(x)dx$  ne désigne pas un élément différentiel mais indique *par convention* la

variable d'intégration. Cette indication est indispensable lorsque l'expression algébrique de  $f$  contient plusieurs lettres ou lorsqu'on effectue un changement de variable.

Cependant Lang (1964), met particulièrement en évidence la valence instrumentale de  $dx$  comme facteur multiplicatif (« règle à chaîne ») dans les méthodes d'intégration, notamment dans le changement de variable interprété comme composition de fonctions.

La notion de différentielle, réintroduite en classe 12 au Vietnam dans la période 2000 – 2006, est définie non comme une application linéaire mais comme le produit  $f'(x)\Delta x$  transformé formellement en  $f'(x)dx$ . L'intention noosphérienne est que cette notion outille les calculs de primitive et d'intégrale.

Dans le savoir à enseigner au Vietnam,  $dx$  a trois valences instrumentale et sémiotique : valence sémiotique de « facteur multiplicatif », valence sémiotique et instrumentale d'« indicateur de variable d'intégration », valence instrumentale d'« élément différentiel ». Se formant à travers leurs usages dans l'intégration, ces valences sont différentes dans les techniques institutionnellement mises en jeu. Cela peut former et aussi délimiter des significations différentes pour l'élève.

<sup>52</sup> Comme par exemple, les sujet nationaux de 1999 et septembre 2005.



Les procédures observées dans les copies du Baccalauréat 2005 au Vietnam montrent une prédominance de  $dx$  comme indicateur de variable : se met alors en place dans les manipulations algébriques du calcul d'intégrale *une valence de facteur inutile*. Un indice de cette valence est la disparition fréquente de  $dx$  dans les écritures des élèves (et parfois des enseignants). La valence de  $dx$  comme élément différentiel apparaît comme fragile là où elle est indispensable, c'est-à-dire dans le changement de variable, alors même que l'institution vietnamienne lui consacre une place dans l'enseignement contrairement à la France. La majorité des erreurs dans la partie « non numérique » du calcul d'intégrale, observées dans les copies de Baccalauréat, provient de ce jeu incomplet entre les trois valences de  $dx$  - facteur algébrique, indicateur de variable d'intégration et élément différentiel. La tentative d'imputer la valence instrumentale d'élément différentiel à  $dx$  est un échec dans l'enseignement effectif.

En France, contrairement au Vietnam, la notion de *différentielle* n'est jamais introduite et donc aucun rôle ne lui est attribué dans l'intégration : l'ostensif  $dx$  n'a que la valence sémiotique d'indicateur de variable d'intégration. La méthode de changement de variable qui donne une valence instrumentale à l'ostensif  $dx$  n'est corrélativement jamais enseignée.

#### **I.4. Le calcul de primitive sans l'ostensif $\int$ , une rupture de contrat au Vietnam**

Le calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$  est présent dans le changement de variable de type 2 et dans l'intégration par parties. Ce calcul est de ce fait en rupture de contrat par rapport au calcul de primitive enseigné officiellement comme instrumenté par l'ostensif  $\int$ . Dans l'institution vietnamienne, le calcul de primitive sans l'ostensif  $\int$  est interprété pour le changement de variable comme la transformation ou la reconnaissance de  $\psi'(x)dx$  comme  $du$  et pour l'intégration par parties comme le calcul de  $v$  à partir de  $dv$ .

L'absence de l'ostensif  $\int$  dans le calcul de primitive contenu dans le calcul d'intégrale, rompt la relation entre l'ostensif  $\int$  et l'ostensif  $dx$  et oblige à recourir à la notion de différentielle. Pour la noosphère vietnamienne (*Guide pour l'enseignant* rédigé par les auteurs de l'unique manuel en vigueur), l'introduction d'un enseignement sur la notion de différentielle doit servir à justifier les manipulations des  $dx$  propres à l'intégration par parties et au changement de variable (implicite ou explicite). Dans ce dernier cas, elle permet d'éviter la référence à la composition des fonctions. Or comme nous l'avons montré, la notion de différentielle n'intervient dans le manuel que de manière formelle et jamais dans l'enseignement effectif comme élément technologique du calcul de primitive contenu dans le calcul d'intégrale (chapitre C3).

Dans l'intégration par parties, nous avons mis en évidence dans les chroniques des observations naturalistes l'enseignement explicite ou implicite de la règle « De  $u$  à  $du$ , on calcule la dérivée. De  $dv$  à  $v$ , on calcule une primitive » : elle révèle l'indisponibilité de la notion de différentielle comme élément technologique dans les calculs de  $du$  et  $v$  respectivement à partir de  $u$  et  $dv$ . Perdant la signification mathématique que les décideurs des programmes et les auteurs du manuel veulent leur accorder,  $du$  et  $dv$  sont considérés contextuellement comme de simples signes pour déclencher les deux calculs précités. Cette règle formelle, sans justification mathématique, peut provoquer une confusion du calcul de  $v$  à partir de  $dv$  avec la dérivation.

Pour le changement de variable de type 2, l'enseignant fait fonctionner des règles de « découverte » de la nouvelle variable comme, par exemple, celle mise en évidence dans les observations naturalistes : la « queue » indique la dérivée de la nouvelle variable » : dans le calcul de  $\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)dx$ , la queue  $\psi'(x)dx$  doit être transformée ou reconnue comme  $du$ . Pour assurer institutionnellement l'apprentissage de cette règle (énoncée ou non), il n'est proposé, dans le manuel comme dans l'enseignement effectif, que des intégrales « en règle », c'est-à-dire des intégrales dont la dérivée de la nouvelle variable se trouve (ou se cache) à la fin de l'expression algébrique de la fonction intégrante. Ce type de règle fonctionne comme un élément technologique qui justifie le choix de la nouvelle variable aussi bien pour l'enseignant que pour l'élève.

### **I.5. La différenciation entre calcul d'aire et calcul intégrale**

Au Vietnam, se mettent en place deux types de calculs d'aire que nous avons appelés : le calcul d'aire « attaché à l'étude des fonctions » et le calcul d'aire « hors de l'étude de fonctions ».

Le calcul d'aire « attaché à l'étude des fonctions », malgré son absence du manuel, est privilégié dans l'enseignement effectif, en raison de la présence permanente d'un problème d'étude de fonctions, son habitat potentiel, dans les sujets du baccalauréat. Dans ce calcul, le fait que la surface plane dont on doit calculer l'aire soit toujours donnée par des mots, et non par un système d'inéquations comme en France, différencie le calcul d'intégrale et le calcul d'aire : ce dernier nécessite, en plus du calcul d'intégrale, l'écriture de la bonne intégrale. L'aire donnée par des mots n'assure pas l'unicité de la surface comme nous l'avons montré théoriquement et comme l'attestent les réponses d'élèves de classe 11 et classe 12 au Vietnam (chapitre A1). Pour obtenir l'unicité de cette surface, l'enseignant doit communiquer contractuellement des règles de lecture du graphique que l'élève apprend comme nous l'avons mis en évidence dans les réponses d'élèves de classe 12 (chapitres A1, C3).

Mais la détermination d'une surface unique résultant de cet apprentissage caché n'assure pas l'écriture de l'intégrale correspondant au calcul de l'aire de cette surface. En effet, nous avons montré (chapitre C2) que les élèves doivent respecter certaines règles, en général implicites, concernant l'ordre des bornes d'intégration et la fonction intégrante. Or les erreurs observées dans des copies du baccalauréat prouvent que les élèves peuvent, pour cette écriture, utiliser une procédure combinatoire sur les équations ou sur les nombres présents dans le graphique, sans tenir compte de leur signification, ni du lien entre le graphique tracé et l'intégrale écrite. Paradoxalement, l'écriture de l'intégrale correcte peut résulter de cette procédure et n'est donc pas un observable d'une maîtrise de la relation surface et aire.

Le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions, unique évolution du calcul d'aire de 1975 jusqu'à 2006 dans l'institution, bien qu'il apparaisse dans le manuel et dans les épreuves du baccalauréat, est peu présent dans l'enseignement effectif. La méthode « déplacement de la valeur absolue » proposée dans le manuel est remplacée dans l'enseignement effectif par la méthode « élimination de la valeur absolue », qui repose sur des connaissances anciennes et permet d'éviter le contrôle de la continuité de la fonction intégrante sur l'intervalle d'intégration.

Comme l'observation des moments de révision le montre, le résultat numérique d'un calcul d'intégrale ou d'un calcul d'aire peut jouer le rôle de milieu pour la validation : « le résultat numérique doit être un nombre simple et positif (pour le calcul d'aire) ».

### **I.6. Le statut problématique de l'intervalle d'intégration au Vietnam**

La place péjorée de la phase numérique dans le calcul d'intégrale renforce le statut problématique de l'intervalle d'intégration dans l'institution vietnamienne :

- L'intervalle d'intégration ne prend pas le statut de partie de l'ensemble de définition de la fonction intégrante. Comme nous l'avons déjà dit, l'élève n'a jamais la responsabilité de vérifier la continuité de la fonction intégrante sur l'intervalle d'intégration. Les deux bornes de l'intervalle d'intégration  $a$  et  $b$  se réduisent alors à deux valeurs numériques intervenant dans le calcul de  $F(b) - F(a)$ . L'enseignant a la responsabilité de choisir les valeurs numériques de  $a$  et  $b$  pour que le calcul de  $F(a) - F(b)$  soit aussi simple que possible.

- La combinaison du découpage et de l'encadrement est absente dans l'institution vietnamienne actuelle. Rappelons que tous les exercices concernant l'encadrement d'une intégrale et proposés dans le manuel unique ne nécessitent aucun découpage de l'intervalle d'intégration. Ceci explique l'échec des élèves vietnamiens (99 %) dans la résolution d'un exercice de l'estimation d'une intégrale (chapitre C1) nécessitant la procédure « découpage, encadrement ».

## **II. Limites de notre recherche et perspectives**

Sous les contraintes très particulières du travail en cotutelle qui exige une alternance entre la France et le Vietnam, notre étude reste très modeste.

Nous donnons ci-après les principales limites et les perspectives associées.

1. Notre étude se clôt sur l'analyse de l'enseignement effectif de la notion d'intégrale *au Vietnam* au travers d'observations naturalistes de *moments de révision* pour le baccalauréat dans des classes 12 (chapitre C3). Cela marque deux des limites de notre étude et en même temps ouvre deux pistes de travail :

- Comment, en France, l'enseignant répond-il aux nécessités technologiques de l'enseignement effectif du thème de l'intégration dans les classes de Terminale, sous des conditions et des contraintes différentes ?

- Comment, au Vietnam et en France, l'enseignant conduit-il l'étude du thème de l'intégration de son introduction au moment de révision ? Quel apprêtage et quel processus d'étude sont mis en place pour reconstruire l'Organisation Mathématique à enseigner ?

2. Pour approfondir tant du point de vue épistémologique que didactique notre travail sur les contraintes et conditions institutionnelles de l'enseignement du thème de l'intégration dans EMS, il nous semble nécessaire de concevoir et d'évaluer une ingénierie didactique fondée sur la recherche d'une situation fondamentale de l'intégration.

Notre référence est le travail de Legrand (1993) qui a mis en place en première année d'Université à Grenoble un enseignement de l'intégration basée sur le débat scientifique (Legrand 1993).

Il résume les idées directrices de la problématique de l'intégrale de Riemann dans ce qu'il appelle « la procédure intégrale » : découpage, encadrement, sommation, passage à la limite.

Une situation constitutive du concept « intégrale » est pour lui lié à un problème « héréditaire »<sup>53</sup> :

« On considère un *problème*  $P$  donnant lieu à un résultat numérique  $R$  correspondant à ce qui se passe sur un certain domaine  $\Omega$  :  $R = R(\Omega)$ , ( $\Omega$  partie simple de la droite du plan ou de l'espace : intervalle, rectangle, cube, etc., pour laquelle la notion de mesure ne pose aucun problème). On suppose que ce *problème est héréditaire*, i.e. qu'il donne automatiquement lieu à un *résultat partiel*  $R_i = R(\Omega_i)$  quand on restreint le problème global à un sous-domaine simple  $\Omega_i$  de  $\Omega$  ». (Grenier, Legrand & Richard 1986)

Mais on peut se demander si les contraintes et les conditions institutionnelles de l'enseignement de l'intégration au Vietnam peuvent permettre de faire vivre des éléments d'un tel projet. En effet, comme nous l'avons montré, le calcul approché d'intégrale qui pourrait initier une procédure « découpage, encadrement » est absent du savoir à enseigner et les notions de primitive et intégrale sont amalgamées.

Pham Huy Dien, Nguyen Quang Minh et Nguyen Van Sinh (2005) conviennent que l'enseignement de la notion d'intégrale au lycée vietnamien est « superficiel, incomplet » et « ne reflète pas fidèlement l'esprit et la nature du calcul intégral ».

---

<sup>53</sup> Legrand propose et analyse la situation du barreau comme exemple d'une telle situation (Grenier, Legrand & Richard 1986, Legrand 1993).



## Résumé de la thèse en vietnamien

Khái niệm tích phân Riemann có tầm quan trọng rất lớn trong toán học. Từ thời cổ đại, khái niệm này đã được thể hiện ngầm ẩn trong lời giải nhiều bài toán tính diện tích và thể tích riêng lẻ. Nhưng chỉ đến khi Cauchy (1823) và Riemann (1854) công bố các nghiên cứu của mình, khái niệm này mới trở thành một tri thức toán học thật sự. Việc phát biểu chính xác định nghĩa của khái niệm tích phân đòi hỏi phải định nghĩa chính xác các khái niệm hàm số và giới hạn. Điều này giải thích tại sao việc giảng dạy khái niệm tích phân Riemann được thực hiện rất trễ tại Pháp và Việt Nam: ở cuối bậc trung học phổ thông và sau đó còn tiếp tục ở bậc đại học. Nhiều công trình nghiên cứu về giảng dạy Giải tích của các tác giả như Artigue (1998), Bloch (2000), Legrand M. (1993), Schneider (2001) đã nêu lên những khó khăn gắn liền với ngành toán học này mà khái niệm tích phân là một trong những yếu tố trung tâm.

“Lý thuyết tích phân đóng vai trò cực kỳ quan trọng trong toán học. Đó là một lý thuyết phong phú và phức tạp.” (Revuz 1996, Bách khoa toàn thư phổ thông, quyển 12, trang 406)<sup>54</sup>

Theo Bloch (2000), “tích phân Riemann, nguyên hàm, hàm số hữu tỷ và nguyên hàm của chúng, hàm số lôgarit và hàm số mũ, các hàm số thông dụng [...]” là một trong những “đối tượng thể chế ưu việt” của Giải tích trong những năm đầu ở bậc đại học:

“Theo phân loại của Bosch, Nin được Chauvat sử dụng lại (Chauvat 1997), đó là những đối tượng có tính hợp thức tri thức luận cao, điều đó khiến chúng hiện diện trong các nội dung giảng dạy dưới một dạng ít sai lệch từ gần 30 năm nay.” (Tài liệu đã dẫn, trang 24)<sup>55</sup>

Trong chương trình toán trung học phổ thông ở Pháp, khái niệm tích phân trở nên quan trọng từ thập niên 1970.

“Thông qua những tiến triển của chương trình sau chiến tranh [thế giới thứ hai], ranh giới của Giải tích được giảng dạy trong trường trung học tương đối ổn định. Phép tính đạo hàm luôn luôn là trung tâm của Giải tích, phép tính tích phân ban đầu còn ở ngoài lề nhưng từ những năm 1970 đã trở thành một vấn đề trung tâm.” (Reisz 1997, trang 214)<sup>56</sup>

Trong chương trình toán trung học ở Việt Nam sau năm 1975, ta có thể nhận ra tầm quan trọng của khái niệm tích phân thông qua thời lượng dành cho giảng dạy khái niệm này (21 % số tiết Giải tích, thời kỳ 2000 – 2006) và thông qua sự hiện diện thường xuyên của nó trong đề thi tốt nghiệp trung học phổ thông và đề thi tuyển vào đại học.

Ngoài những khó khăn chung gắn liền với việc giảng dạy bộ môn Giải tích như Artigue (1998), Bloch (2000), Legrand M. (1993), Schneider (2001) đã nêu, việc giảng dạy khái niệm tích phân ở trường trung học phổ thông còn chứa đựng những khó khăn đặc thù nào khác? Những khó khăn này có giống nhau giữa hai nước Việt Nam và Pháp hay

---

<sup>54</sup> “La théorie de l’intégration joue en mathématique un rôle extrêmement important. C’est une théorie riche et complexe.” (Revuz 1996, Encyclopædia universalis, corpus 12, p. 406)

<sup>55</sup> “Selon la classification de Bosch et Nin reprise par Chauvat (Chauvat 1997), il s’agit d’objets qui ont une forte légitimité épistémologique, ce qui fait qu’ils sont présents dans les contenus de l’enseignement sous une forme peu altérée depuis à peu près 30 ans.” (Bloch 2000)

<sup>56</sup> “Les frontières de l’analyse enseignée au lycée, sans être immuables, sont relativement stables à travers les évolutions des programmes d’après guerre. La dérivation a toujours été au cœur de l’analyse, l’intégration a d’abord été plus marginale, mais est devenue à partir des années 70 une autre question centrale.” (Reisz 1997, p. 214)

không? So sánh việc giảng dạy tích phân trong trường trung học giữa Pháp và Việt Nam sẽ cho phép trả lời những câu hỏi này và rút ra những bài học về sự tương đồng và khác biệt gắn liền với những lựa chọn giảng dạy trong hai hệ thống giáo dục khác nhau. Hơn nữa, việc phân tích các lựa chọn này sẽ góp phần cải thiện hiện trạng giảng dạy khái niệm tích phân ở mỗi nước. Đó là lý do khiến chúng tôi chọn đề tài “Khái niệm tích phân trong giảng dạy Toán học ở trường trung học phổ thông: một nghiên cứu đối chiếu giữa Pháp và Việt Nam”.

Nghiên cứu của chúng tôi xuất phát từ những câu hỏi ban đầu sau đây:

Những đặc thù của khái niệm tích phân trong toán học và trong dạy học là gì? Đặc biệt, các ký hiệu  $\int$  và  $dx$  có vai trò và ý nghĩa gì?

Khi giảng dạy và học tập khái niệm tích phân, giáo viên và học sinh gặp những khó khăn nào? Những khó khăn này là hệ quả của các lựa chọn giảng dạy hay của chính khái niệm tích phân?

Với mỗi câu hỏi đã đặt, chúng tôi sẽ cố gắng lựa chọn một công cụ lý thuyết phù hợp để trả lời. Phần lớn các công cụ lý thuyết này đều xuất phát từ lý thuyết nhân chủng học *didactique* của Chevallard (1985, 1989, 1992, 1998).

## I. Các công cụ lý thuyết và đặt lại vấn đề dưới ánh sáng của các công cụ lý thuyết

### I.1. Quan hệ thể chế đối với một tri thức: một ràng buộc của quan hệ cá nhân

Lý thuyết nhân chủng học *didactique* dựa vào ba thuật ngữ ban đầu là *đối tượng*, *cá thể*, *thể chế*.

Mỗi quan hệ cá nhân  $R(X, O)$  của một cá thể  $X$  với một đối tượng tri thức  $O$  chỉ có thể thiết lập khi  $X$  thâm nhập vào một thể chế  $I$  mà trong đó  $O$  tồn tại. Thông qua việc thiết lập mối quan hệ này mà *cá nhân*, bộ đôi gồm cá thể  $X$  và hệ thống các quan hệ cá nhân  $R(X, O)$  của  $X$  với  $O$ , trở thành một *chủ thể* của  $I$ . Khi một cá nhân thâm nhập vào một thể chế *didactique*, mối quan hệ của cá nhân với một đối tượng tri thức  $O$  nào đó được thiết lập (nếu quan hệ này chưa hề tồn tại trước đó) hoặc được thay đổi (nếu nó đã tồn tại) dưới những ràng buộc của *mối quan hệ thể chế* đối với đối tượng tri thức này.

“Theo thời gian, hệ thống các quan hệ cá nhân của  $X$  tiến triển: một số đối tượng chưa từng tồn tại đối với  $X$  bắt đầu tồn tại; một số đối tượng khác ngừng tồn tại. Cuối cùng, đối với một số cá nhân khác, mối quan hệ cá nhân của  $X$  thay đổi. Trong sự tiến triển này, cái bất biến là cá thể; cái thay đổi là cá nhân;” (Chevallard 1992)<sup>57</sup>

“Trong *didactique*, vấn đề trung tâm là vấn đề nghiên cứu mối quan hệ thể chế, các điều kiện và những hiệu ứng của nó. Việc nghiên cứu mối quan hệ cá nhân cũng là một vấn đề của *didactique*, cơ bản về mặt thực hành nhưng thứ yếu về mặt tri thức luận.” (Chevallard 1989b, trang 93)<sup>58</sup>

<sup>57</sup> “Au cours du temps, le système des rapports personnels de  $X$  évolue : des objets qui n’existent pas pour lui se mettent à exister ; d’autres cessent d’exister ; pour d’autres enfin le rapport personnel de  $X$  change. Dans cette évolution, l’invariant est l’individu ; ce qui change est la personne.” (Chevallard 1992)

<sup>58</sup> “Le problème central en didactique est donc celui de l’étude du rapport institutionnel, de ses conditions et de ses effets. L’étude du rapport personnel est un problème pratiquement fondamental, mais épistémologiquement second, de la didactique.” (Chevallard 1989b, p. 93)

Như vậy, theo quan điểm nhân chủng học *didactique*, đề tài của chúng tôi sẽ tập trung nghiên cứu mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức *tích phân* và sẽ xem mối quan hệ này là nền tảng để giải thích các ràng buộc và các điều kiện đối với mỗi quan hệ cá nhân của giáo viên và học sinh trong hai thể chế khác nhau: lớp *Terminale* ở Pháp và lớp 12 ở Việt Nam.

Dưới ánh sáng của lý thuyết nhân chủng học *didactique*, chúng tôi có thể phát biểu lại một số câu hỏi ban đầu bằng thuật ngữ quan hệ thể chế như sau:

Mối quan hệ thể chế đối với đối tượng tri thức *tích phân* trong mỗi thể chế là gì? Những đặc thù và tương đồng của chúng? Chúng ràng buộc và tạo điều kiện cho mỗi quan hệ cá nhân của giáo viên và học sinh như thế nào?

## I.2. Tổ chức toán học

Để phân tích mối quan hệ thể chế với các đối tượng tri thức, Chevallard (1998) đưa vào khái niệm *praxéologie mathématique* nhằm mô tả một *tổ chức toán học*. Một *praxéologie* là một bộ bốn phần tử  $[T/\tau/\theta/\Theta]$ , trong đó:

- T là một *kiểu nhiệm vụ*, gồm ít nhất một *nhiệm vụ t* hiện diện trong một thể chế cho trước,
- $\tau$  là một *kỹ thuật* cho phép hoàn thành nhiệm vụ t,
- $\theta$  là một *công nghệ* lý giải cho kỹ thuật  $\tau$ ,
- $\Theta$  là một *lý thuyết* lý giải cho công nghệ  $\theta$ .

Bằng thuật ngữ *praxéologie mathématique*, chúng tôi phát biểu lại một số câu hỏi ban đầu như sau:

Liên quan đến đối tượng tri thức *tích phân* trong mỗi thể chế, các kiểu nhiệm vụ nào được đặt ra? Các kỹ thuật liên quan nào được giảng dạy và trong số đó, các kỹ thuật nào được ưu tiên? Các phát biểu nào mang tính công nghệ cho phép lý giải những kỹ thuật đó? Các yếu tố lý thuyết nào gắn liền với những phát biểu mang tính công nghệ này? Theo thời gian, các kiểu nhiệm vụ, kỹ thuật và công nghệ đã tiến hoá như thế nào? Tại sao?

## I.3. Chuyển đổi didactique

Dưới đây, chúng tôi trình bày vắn tắt khái niệm *chuyển đổi didactique*, một khái niệm phổ biến trong ngành *didactique* và giữ vai trò trung tâm trong luận án.

“Mọi tri thức S đều gắn với *ít nhất* một thể chế I mà trong đó tri thức được vận dụng vào một lĩnh vực thực tiễn D nào đó. Điều chủ yếu là một tri thức không tồn tại một cách riêng lẻ bên lề xã hội: mọi tri thức đều xuất hiện vào một thời điểm nhất định, trong một xã hội nhất định như đã ăn sâu vào một hoặc nhiều thể chế.” (Chevallard 1989)<sup>59</sup>

Để có thể tồn tại trong một thể chế, mọi tri thức đều phải chịu một số điều kiện ràng buộc nhất định mà chúng tôi cho rằng không đồng nhất giữa các thể chế khác nhau. Chevallard chấp nhận tiên đề về sự tồn tại của các *thể chế chuyển đổi* cho phép một tri thức chuyển từ thể chế này sang thể chế khác: thể chế chuyển đổi là một thể chế vô hình mà Chevallard gọi là *noosphère* (1985).

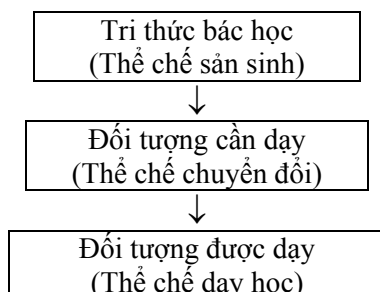
---

<sup>59</sup> “Tout savoir S est ainsi attaché à une institution I *au moins*, dans laquelle il est mis en jeu par rapport à un domaine de réalité D. Le point essentiel est alors qu’un savoir n’existe pas *in vacuo* dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.” (Chevallard 1989)



Khi *thể chế đích* là thể chế dạy học, sự chuyển đổi tri thức sẽ được gọi là chuyển đổi *didactique*. Đối với tri thức toán học, chúng tôi sẽ sử dụng thuật ngữ *tri thức bác học* để chỉ tri thức tham chiếu (*savoir de référence*) được huy động để hợp thức hoá một tri thức nào đó trong thể chế dạy học.

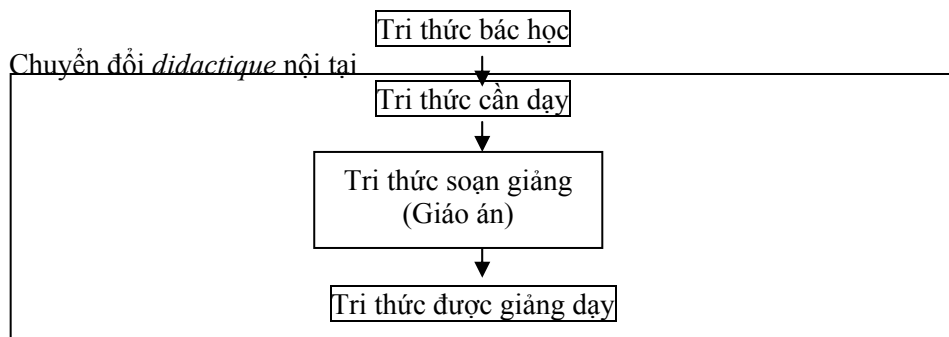
Sự chuyển đổi *didactique* có thể tóm tắt theo sơ đồ dưới đây:



Khi nghiên cứu về chuyển đổi *didactique*, Ravel (2003) đặc biệt quan tâm đến *apprêtage du savoir* (soạn giảng tri thức):

“Chúng tôi quan niệm *tri thức soạn giảng* của một giáo viên là tri thức do giáo viên này soạn ra từ những lựa chọn toán học và *didactique* của mình nhằm mục đích giảng dạy. Tri thức soạn giảng này nằm ở giao diện của hai “thế giới”: nó vừa đặc trưng cho hoạt động của giáo viên trước khi thực hiện tiết dạy, vừa là động lực của hoạt động dạy học trong tiết dạy.” (Tài liệu đã dẫn, trang 107)<sup>60</sup>

Như thế, chúng ta có sơ đồ chi tiết dưới đây:



Với quan điểm chuyển đổi *didactique*, chúng tôi quay về những câu hỏi ban đầu để bổ sung và phát biểu lại như sau:

Trong mỗi thể chế (trong số hai thể chế đã chọn), đâu là độ lệch giữa:

- tri thức bác học *tích phân Riemann* và tri thức cần dạy?
- tri thức cần dạy và tri thức soạn giảng?
- tri thức soạn giảng và tri thức được dạy?

Đặc biệt: So với tri thức bác học xung quanh đối tượng tri thức *tích phân*, những kiểu nhiệm vụ nào hiện diện hoặc vắng mặt trong mỗi thể chế? Tại sao? Những kỹ thuật liên quan nào bị biến đổi? Tại sao?

<sup>60</sup> “Nous entendons par savoir apprêté par un enseignant le savoir produit par celui-ci à la suite de choix mathématiques et didactiques faits dans une perspective d’enseignement du savoir à enseigner. Ce savoir apprêté se situe à l’interface de deux ‘mondes’: emblématique de l’activité de l’enseignant en amont des pratiques en classe, il est également le moteur de son activité en classe.”

#### I.4. Ostensif và non-ostensif

Việc mô hình hoá tri thức toán học thành các đối tượng và quan hệ tương tác giữa các đối tượng đặt ra vấn đề xác định bản chất của các đối tượng toán học và chức năng của chúng trong hoạt động toán học. Bosch và Chevallard (1999) phân biệt hai loại đối tượng: đối tượng *ostensif* và đối tượng *non ostensif*:

- Một đối tượng *ostensif*, gọi tắt là *ostensif* (từ tiếng La Tinh *ostendre*, có nghĩa là chỉ ra, nêu bật lên), là một đối tượng mà con người có thể cảm nhận được bằng các giác quan, là một dạng vật chất nào đó, là một thực tại có thể nhận thức được. (Tài liệu đã dẫn, trang 90)<sup>61</sup>

- Một đối tượng *non ostensif*, gọi tắt là *non-ostensif* (chẳng hạn như ý tưởng, trực giác, khái niệm), là một đối tượng mà sự tồn tại gắn liền với thể chế. Ta không thể nhìn thấy, nhận ra hay chỉ ra riêng bản thân đối tượng *non ostensif*. Ta chỉ có thể gọi lại hoặc viện dẫn một đối tượng *non ostensif* thông qua việc thao tác hợp lý một số đối tượng *ostensif* liên kết (một từ, một câu, một nét chữ, một bút tích, một cử chỉ hoặc cả một phát biểu dài). (Tài liệu đã dẫn)<sup>62</sup>

Trong thực hành, các đối tượng *ostensif* được phân biệt với các đối tượng *non ostensif* ở chỗ có thể thao tác được một cách cụ thể:

“Ký hiệu *log* và từ ‘logarithme’ là hai đối tượng *ostensif*. Ngược lại, *khái niệm* logarithme là một đối tượng *non ostensif* vì không thể thao tác nó theo nghĩa đã nói. Ta chỉ có thể làm cho nó hiện diện –giới thiệu nó– nhờ tác động đến một số đối tượng *ostensif* liên kết, chẳng hạn ký hiệu *log*. Trong đa số trường hợp, các đối tượng thể chế đều được xem như gắn với *tên gọi của nó*, một đối tượng *ostensif* được ưu tiên, cho phép liên tưởng một cách tối thiểu đến đối tượng *non ostensif* liên kết.” (Tài liệu đã dẫn, trang 91)<sup>63</sup>

Giữa *ostensif* và *non-ostensif* có mối quan hệ biện chứng như sau:

- Cả hai đối tượng đều gắn chặt với một thể chế cho trước:

“*ostensif* và *non-ostensif* luôn luôn là những đối tượng *thể chế* mà sự tồn tại của nó hiếm khi chỉ phụ thuộc vào hoạt động của một cá nhân.” (Tài liệu đã dẫn, trang 90)<sup>64</sup>

- Mọi hoạt động của nhân loại đều cần đến sự vận hành đồng thời các đối tượng *ostensif* và *non-ostensif*:

“[...] việc vận dụng một kỹ thuật được thể hiện qua việc thao tác các *ostensif* và thao tác này được điều tiết bởi các *non-ostensif*.” (Tài liệu đã dẫn, trang 92)<sup>65</sup>

---

<sup>61</sup> Un “*objet ostensif* –du latin *ostendre*, ‘montrer, présenter avec insistance’– pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible.”

<sup>62</sup> “Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces ‘objets’ qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement –au sens où on leur attribue une existence– sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu’être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours).”

<sup>63</sup> “La notation *log* et le mot ‘logarithme’ sont des objets ostensifs. En revanche, la *notion* de logarithme est un objet *non ostensif* qu’il n’est pas possible de manipuler au sens précédent. On peut seulement le ‘rendre présente’ –le *représenter*– par la manipulation d’un certain nombre d’objets ostensifs associés, telle la notation *log* par exemple. Dans la plupart des cas, les objets institutionnels se verront associés à un objet ostensif privilégié, leur *nom*, qui en permettra une évocation minimale.”

<sup>64</sup> “Ostensifs et non-ostensifs sont toujours des objets *institutionnels* dont l’existence ne dépend que très rarement de l’activité d’une seule personne.”

Giá trị (valence)<sup>66</sup> công cụ của một *ostensif* (hay năng lực công cụ của một *ostensif*) là sự vận hành của *ostensif* như một công cụ cho phép hoàn thành một nhiệm vụ nào đó.

“[...] một đối tượng *ostensif* được xem như một công cụ khả dĩ cho hoạt động của con người, nghĩa là như một thực thể mà khi phối hợp với các thực thể khác cho phép phù hợp hoá các kỹ thuật nhằm hoàn thành một nhiệm vụ hoặc điều hành một công việc nào đó. Từ đó, chúng ta có thể nhận ra nơi đối tượng *ostensif* cái gọi là giá trị công cụ, hoặc năng lực công cụ, giá trị tồn tại trong các ký hiệu được viết ra (trong toán học chẳng hạn) cũng như trong ngôn từ được phát âm hoặc trong cử chỉ được thể hiện.” (Tài liệu đã dẫn, trang 107)<sup>67</sup>

Giá trị tín hiệu của một *ostensif* (hay năng lực tín hiệu của một *ostensif*) là sự vận hành của *ostensif* như một tín hiệu. Giá trị tín hiệu có liên hệ chặt chẽ với giá trị công cụ. Một *ostensif* có thể mất đi giá trị công cụ khi mất đi năng lực tín hiệu.

Bằng thuật ngữ *ostensif*, chúng tôi đặt lại một số câu hỏi ban đầu như sau:  
Trong mỗi thể chế, những giá trị công cụ và tín hiệu nào của các *ostensif* ] và *dx* được đưa vào sử dụng? Các giá trị này tác động như thế nào đến quan hệ thể chế với khái niệm *tích phân* trong hai thể chế đang xét?

## II. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án, các phương pháp nghiên cứu được huy động nhằm phục vụ cho vấn đề trung tâm: nghiên cứu sự chuyển đổi *didactique* khái niệm tích phân Riemann ở lớp Terminale (Pháp) và lớp 12 (Việt Nam).

### II.1. Huy động nghiên cứu tri thức luận (enquête épistémologique) để mô hình hoá một tổ chức toán học

Để xác định độ lệch của đối tượng tri thức *tích phân* giữa tri thức bác học với tri thức cần dạy và giữa các tri thức cần dạy trong hai thể chế khác nhau, chúng tôi tiến hành như sau:

- Xuất phát từ các kiểu nhiệm vụ liên quan đến tích phân ở bậc đại học của hai nước, chúng tôi thực hiện một phân tích thể chế ban đầu và đặt ra các câu hỏi về tổ chức toán học cần dạy cũng như về thực hành giảng dạy của giáo viên mỗi nước.
- Sau đó, trên cơ sở của các câu hỏi vừa đặt, chúng tôi thực hiện một nghiên cứu tri thức luận để mô tả một tổ chức toán học tham chiếu và hai tổ chức toán học cần dạy trong hai thể chế đang xét. Trong quá trình hình thành các tổ chức toán học, chúng tôi tham khảo mô hình của Bosch, Espinoza và Gascon (2002) thiết lập cho khái niệm *giới hạn hàm số*.<sup>68</sup>

“[...] một tổ chức toán học tham chiếu hay một mô hình tổ chức toán học sẽ cho phép phân tích việc tái hiện khái niệm giới hạn hàm số được đề nghị trong chương trình chính thức và

<sup>65</sup> “[...] la mise en œuvre d’une technique se traduit par une *manipulation d’ostensifs réglée par des non-ostensifs*.”

<sup>66</sup> Theo Larousse Sélection 1968, từ *valence* có nguồn gốc từ tiếng La Tinh *valere* nghĩa là *valoir*. Chúng tôi tạm dùng từ *giá trị* để chỉ *valence* vì nghĩa của từ *giá trị* hoàn toàn phù hợp với từ nguyên của *valence* và ý định của Bosch và Chevallard trong tài liệu đã dẫn.

<sup>67</sup> “[...] un objet ostensif y est considéré d’abord comme un *instrument* possible de l’activité humaine, c’est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d’autres, de conformer des techniques permettant d’accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. De là que nous reconnaissons à l’objet ostensif ce que nous nommerons une valence *instrumentale*, ou *instrumentalité*, valence qui existe aussi bien dans les symboles écrits (en mathématiques, par exemple) que dans les mots que l’on prononce ou dans les gestes que l’on fait.”

<sup>68</sup> Chúng tôi sử dụng bản dịch từ tiếng Tây Ban Nha sang tiếng Pháp của Annie Bessot.

sách giáo khoa. Vì một trong những kiểu nhiệm vụ *didactique* lớn của giáo viên là tái hiện tổ chức toán học cần dạy, chúng tôi đề nghị bước đầu tiên là phân tích nội dung toán học chính thức của bậc trung học mà giảng viên sẽ tái hiện nơi sinh viên đại học. Việc phân tích này sẽ cho phép chúng ta làm rõ những ràng buộc thể chế đối với việc dạy toán vẫn được gán cho bản thân nội dung toán học và chắc chắn những ràng buộc này sẽ tác động đến việc học toán trong nhà trường.” (Tài liệu đã dẫn)<sup>69</sup>

## II.2. Phân tích quan hệ thể chế theo thể chế và theo thời gian. Tư liệu phân tích

Các tổ chức toán học trong nhà trường

“có thể bị đồng hóa rất nhiều đến nỗi trở thành hoàn toàn rõ ràng đối với các chủ thể của thể chế, những người đảm nhận và chuyển giao các tổ chức toán học đó thông qua thực tế dạy và học được thể chế hoá.” (Bosch 2001)<sup>70</sup>

Như vậy, vì đã thâm nhập vào thể chế dạy học, các chủ thể xem sự tồn tại của các tổ chức toán học trong nhà trường là hiển nhiên và không thắc mắc gì về những đặc điểm tri thức luận của các tổ chức toán học này cũng như những khác biệt của chúng so với các tổ chức toán học tham chiếu. Để làm rõ bản chất các tổ chức toán học cần dạy trong hai thể chế đã chọn, chúng tôi sẽ tiến hành phân tích đối chiếu mối quan hệ thể chế với khái niệm tích phân theo hai hướng: phân tích *theo thời gian* và phân tích *theo thể chế*.

Việc phân tích theo thể chế chỉ liên quan chủ yếu đến hai thể chế dạy học: lớp Terminale ở Pháp và lớp 12 ở Việt Nam. Tuy nhiên, khi phân tích kỳ thi tuyển vào đại học ở Việt Nam, chúng tôi cũng đề cập ít nhiều đến một thể chế thứ ba: năm thứ nhất đại học ở Việt Nam. Ba thể chế này được chọn vì các lý do sau đây:

- Khái niệm tích phân được giảng dạy ở lớp Terminale (Pháp) và lớp 12 (Việt Nam).
- Khác với ở Pháp, người tốt nghiệp tú tài ở Việt Nam không thể trực tiếp ghi danh học đại học mà còn phải tham dự kỳ thi tuyển sinh vào đại học. Kỳ thi này có ảnh hưởng không nhỏ đến thực tiễn dạy và học toán ở trường trung học Việt Nam. Đặc biệt, trước năm 2002, phần lớn những người soạn đề của kỳ thi này là giảng viên đại học nên các kiểu nhiệm vụ trong đề thi và lời giải mong đợi sẽ chịu ảnh hưởng ít nhiều từ thực tế giảng dạy ở đại học.

Dựa vào luận án của Lê Văn Tiến (2001), chúng tôi xem chương trình và sách giáo khoa là hai tư liệu chính để phân tích mối quan hệ thể chế.

“Tiến trình chuyển đổi *didactique* một đối tượng tri thức được đặc trưng bởi việc văn bản hoá tri thức đó mà bước đầu có thể tạm xem là việc xây dựng chương trình và sách giáo khoa. Chương trình nêu ra các đối tượng tri thức cần dạy, phân chia và tổ chức các đối tượng này theo bậc học và cấp lớp. Chương trình cũng xác định mục đích, yêu cầu đối với các đối tượng tri thức theo quan điểm của các noosphériens. Nó tạo thành bộ khung cho một

<sup>69</sup> “[...] une OM de référence, c’est-à-dire, un ‘modèle d’OM’ [...] permettra d’analyser les reconstructions possibles proposées dans les programmes officiels et dans les manuels sur les limites de fonctions. Étant donné que l’un des grands types de tâches didactiques du professeur est la reconstruction de l’OM objet d’étude, le premier pas que nous proposons consiste à analyser le contenu mathématique officiel dans l’enseignement secondaire et que le professeur tendra de faire vivre chez ses étudiants. Cette analyse nous permettra de mettre en évidence les contraintes institutionnelles qui sont imputables au contenu mathématique pour son enseignement et qui, certainement, affectent son étude dans la classe.”

<sup>70</sup> “[...] peuvent être fortement naturalisées, au point de devenir complètement transparentes pour les sujets de l’institution qui les assument et les transmettent à travers leurs pratiques institutionnalisées.”

văn bản tri thức giả định. Sách giáo khoa thể hiện tiến trình hình thành một văn bản chính thức gồm các tri thức cần dạy mà chương trình đã nêu.” (Tài liệu đã dẫn, trang 34)<sup>71</sup>

Vì hai thể chế đang xét đều là hai lớp cuối bậc trung học phổ thông nên chúng tôi cũng nghiên cứu thêm các kỳ thi cuối cấp như kỳ thi tú tài (ở Pháp và Việt Nam), kỳ thi tuyển sinh vào đại học (ở Việt Nam). Việc phân tích theo thể chế nhằm:

- nêu rõ đặc trưng của các sản phẩm giống nhau và khác nhau của tiến trình chuyển đổi *didactique* của cùng một đối tượng tri thức (tích phân Riemann) trong hai thể chế khác nhau.

- đặt ra những câu hỏi về sự tương đồng và khác biệt thể chế nhìn từ góc độ các *điều kiện* và các *ràng buộc*.

- khởi thảo một thư mục các tổ chức toán học hiện diện và xem xét khả năng phát triển của chúng.

Phân tích theo thời gian nhằm nêu rõ những tiến hoá của mỗi hệ thống theo thời gian và giúp ta hiểu rõ hơn hiện trạng cân bằng tạm thời của hệ thống.

### II.3. Huy động xoay vòng nhiều thực nghiệm đa dạng

Trong luận án, chúng tôi không đưa vào chỉ một thực nghiệm duy nhất. Trong suốt quá trình nghiên cứu, nhiều giả thuyết và nhiều câu hỏi được đưa ra và chúng tôi đã tiến hành các thực nghiệm tương ứng hoặc các phân tích cần thiết để có thể kiểm chứng các giả thuyết hoặc trả lời các câu hỏi đã đặt.

Để đi theo hướng nghiên cứu trên, chúng tôi dựa vào Castella và Jullien (1991):

“Một biến số quan trọng của mọi thực nghiệm là độ tốn kém [hay giá thành] của nó. Không hề vô ích khi nhắc lại rằng giá thành cao tự nó không bảo đảm cho chất lượng [của thực nghiệm], nghĩa là một thực nghiệm giá thành rất thấp có thể hoàn toàn đầy tính thuyết phục.” (Tài liệu đã dẫn, trang 176)<sup>72</sup>

Trên tinh thần đó, chúng tôi xây dựng hệ thống thực nghiệm sau đây để kiểm chứng các giả thuyết và trả lời các câu hỏi đã đặt ra:

- Bảng câu hỏi điều tra dành riêng cho học sinh, hoặc dành cho học sinh lẫn giáo viên

- Dự giờ

- Phòng vấn giáo viên và lãnh đạo Phòng Trung học phổ thông của Sở Giáo dục và Đào tạo

## III. Cấu trúc của luận án

Luận án được chia thành ba phần: A, B và C.

Phần A dành để phân tích, so sánh giữa lớp Terminale (Pháp) và lớp 12 (Việt Nam) về đối tượng tri thức tích phân, thông qua việc nghiên cứu chương trình và sách giáo khoa của hai thể chế trong ba thời kỳ khác nhau của lịch sử giảng dạy. Phân tích này cho

<sup>71</sup> “La transposition didactique d’un objet de savoir est caractérisée par la mise en texte du savoir, donc en première approximation, par la construction des programmes et des manuels. Les programmes désignent les objets de savoir à enseigner, découpent et organisent ces objets selon les cycles ou les niveaux scolaires. Ils définissent ainsi les attentes des responsables de l’enseignement (les noosphériens) à propos de ces objets de savoir. Ils constituent un cadre pour un hypothétique texte de savoir. Les manuels représentent une mise en texte officielle des savoirs à enseigner, désignés par les programmes.”

<sup>72</sup> “Une variable importante de toute expérimentation est son coût. Et il n’est sans doute pas inutile de rappeler qu’un coût élevé n’est pas à lui seul une garantie de qualité, c’est-à-dire qu’une expérimentation d’un coût très faible peut être tout à fait probante.” (op. cité, pp.174-176)

phép đi đến những giả thuyết và câu hỏi ban đầu về những tương đồng và khác biệt của quan hệ thể chế với khái niệm tích phân trong mỗi nước.

Nhằm nghiên cứu sâu hơn mối quan hệ thể chế, chúng tôi dành phần B để:

- khảo sát kỳ thi tú tài ở Pháp và Việt Nam, kỳ thi tuyển sinh đại học ở Việt Nam,
- khảo sát việc soạn giảng khái niệm tích phân Riemann của giáo viên Pháp và Việt Nam (thông qua bảng câu hỏi điều tra),
- thực hiện một nghiên cứu tri thức luận về đối tượng *tích phân*.

Phần này cho phép:

- mô tả một tổ chức toán học tham chiếu,
- chi tiết hoá việc so sánh các tổ chức toán học cần dạy liên quan đến chủ đề tích phân ở Pháp và Việt Nam.
- rút ra ba yếu tố đặc biệt của tri thức cần dạy trong thể chế Việt Nam,
- đặt ra những câu hỏi về kết quả của các ràng buộc và các điều kiện đối với tổ chức toán học được dạy ở Việt Nam.

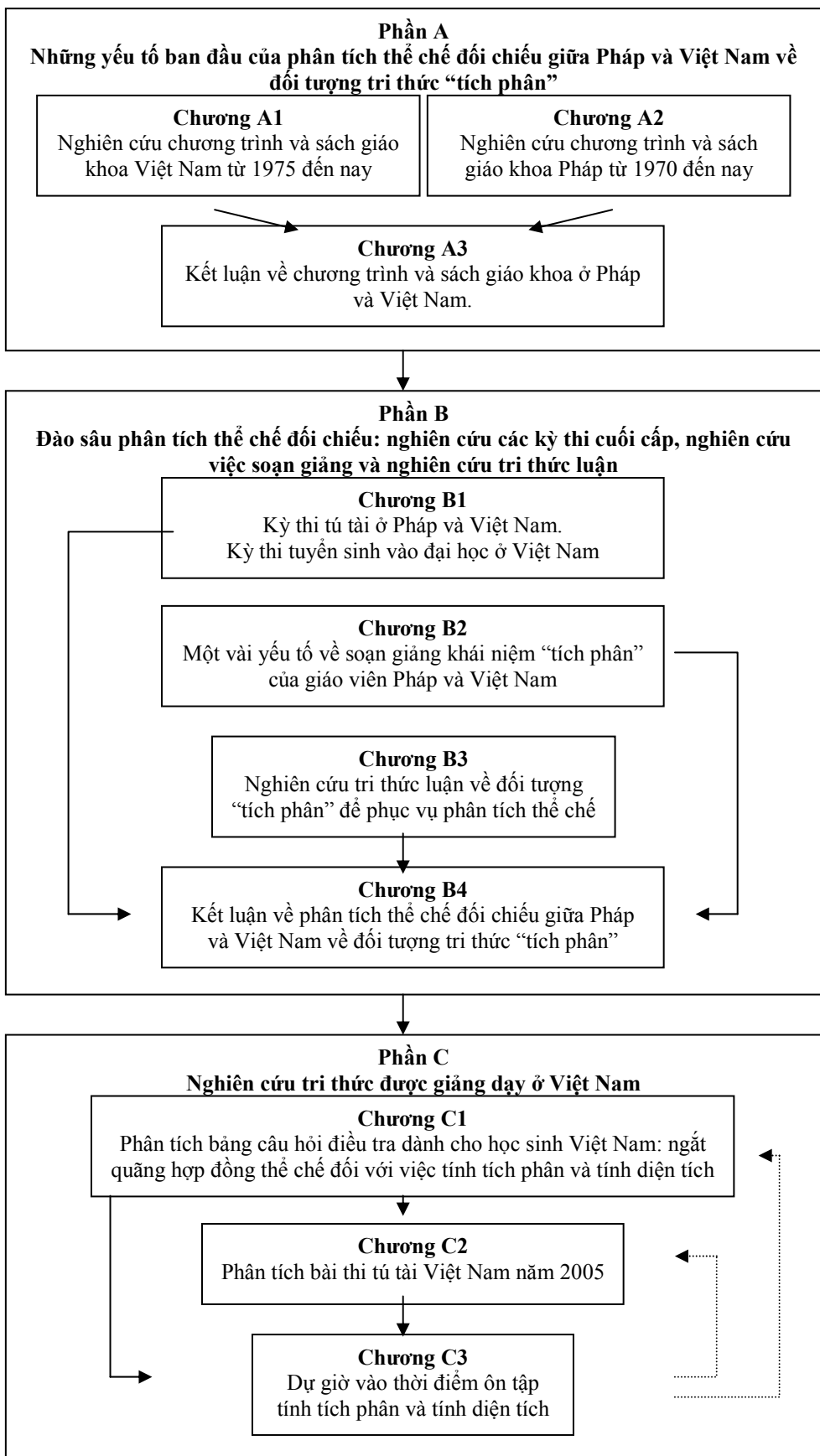
Trong phần C, chúng tôi nghiên cứu tri thức được dạy ở Việt Nam thông qua việc:

- phân tích những câu trả lời của học sinh trong bảng câu hỏi điều tra
- phân tích bài thi của học sinh Việt Nam trong kỳ thi tú tài 2005
- dự giờ vào thời điểm ôn tập tính tích phân và tính diện tích chuẩn bị cho kỳ thi tú tài Việt Nam năm 2005.

Mục tiêu chính của phần này là:

- kiểm chứng giả thuyết về vai trò của ostensif J trong phép tính nguyên hàm
- làm rõ một số đặc điểm tiêu biểu của tri thức được dạy ở Việt Nam
- xem xét các giải thích của giáo viên trong thực tế giảng dạy tích phân dưới góc độ “yếu tố công nghệ”

Cấu trúc của luận án được thể hiện qua sơ đồ sau đây:



## IV. Các kết quả chính của luận án

### IV.1. Về tri thức cần dạy trong hai thể chế Pháp và Việt Nam: vắng mặt lý do tồn tại (raison d'être) khái niệm tích phân

Kết quả phân tích (theo thời gian và theo thể chế) mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức *tích phân* trong hai thể chế dạy học (lớp Terminale ở Pháp và lớp 12 ở Việt Nam) cùng với kết quả nghiên cứu tri thức luận trong chương B3 cho phép chúng tôi mô tả một tổ chức toán học tham chiếu về tích phân và hai tổ chức toán học cần dạy của hai thể chế đang xét. Mô tả này giúp xác định bản chất độ lệch của đối tượng tích phân giữa các thể chế.

Trong cả hai thể chế đều vắng mặt lý do tồn tại của khái niệm tích phân: dấu vết của việc khảo sát sự khả tích (OM1 trong tổ chức toán học tham chiếu) tạo thành một tổ chức toán học không đầy đủ: không có bài tập về khảo sát sự khả tích, phần lý thuyết khả tích nằm ngoài topos của học sinh và chỉ phục vụ cho việc thiết lập các tính chất tích phân cần dạy (OM2 trong tổ chức toán học tham chiếu) hoặc tính tích phân (OM3 trong tổ chức toán học tham chiếu).

Trong một nghiên cứu về khái niệm giới hạn của hàm số, Bosch, Espinoza và Gascon (2002) gọi tình trạng không đầy đủ trên là *bicéphalisme du curriculum* (hiện tượng “có đầu, thiếu đuôi, có đuôi, thiếu đầu”: một tổ chức toán học chỉ có phần lý thuyết cùng tồn tại với một tổ chức toán học khác chỉ có phần thực hành).

“*hiện tượng bicéphalisme xung quanh giới hạn hàm số, [T/t / ] ∪ [ / /θ/Θ], giáo viên không có được, dù chỉ ở mức tối thiểu, các yếu tố công nghệ chặt chẽ, chắc chắn để tạo nên một phần các phương tiện toán học của học sinh và để đáp ứng các đòi hỏi nảy sinh từ hoạt động [dạy và học].*” (Tài liệu đã dẫn)<sup>73</sup>

Ở Việt Nam, từ năm 1990, tích phân của một hàm số liên tục trên một khoảng đóng, bị chặn được định nghĩa bằng công thức Newton-Leibniz<sup>74</sup>. Công thức này trở thành yếu tố công nghệ duy nhất về sự tồn tại của tích phân và về cách tính tích phân tổng quát. Việc khảo sát sự khả tích của một hàm số trên một khoảng đóng, bị chặn không được đặt ra. Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra tính liên tục của hàm số dưới dấu tích phân (chương C3). Ngay cả giáo viên, như chúng tôi đã chỉ ra trong chương C3, cũng có khi quên kiểm tra tính liên tục của hàm số dưới dấu tích phân và đã yêu cầu học sinh tính những tích phân không tồn tại bằng phương pháp đổi biến số.

Ở Pháp, việc khảo sát sự khả tích trong thời kỳ 1980 – 2002 cũng giống như ở Việt Nam sau năm 1990. Từ năm 2002, với định nghĩa tích phân bằng giới hạn chung của hai dãy số kề<sup>75</sup>, vấn đề khả tích xuất hiện trở lại trong lý thuyết dù rất mờ nhạt và tiếp tục vắng mặt trong thực hành. Ta gặp lại ở đây hiện tượng *bicéphalisme du curriculum*.

<sup>73</sup> “*le bicéphalisme du curriculum autour de la limite des fonctions, [T/t / ] ∪ [ / /θ/Θ], le professeur ne dispose pas d'éléments technologiques un minimum 'cohérents' et 'sûrs' qui formeraient une partie des moyens mathématiques des élèves et qui permettraient de répondre à l'accumulation des demandes que l'activité génère.*”

<sup>74</sup> Khái niệm nguyên hàm đã được định nghĩa trước đó.

<sup>75</sup> Chúng tôi dùng thuật ngữ *dãy số kề* trong *Từ điển toán học thông dụng* của các tác giả Ngô Thúc Lanh (chủ biên), Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí, NXB Giáo Dục, 2000 để dịch thuật ngữ *suites adjacentes* trong tiếng Pháp. Hai dãy số thực  $(u_n)$  và  $(v_n)$  gọi là hai dãy số kề nếu: 1)  $(u_n)$  tăng,  $(v_n)$  giảm, 2)  $u_n < v_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ , 3)  $(u_n - v_n)$  tiến đến 0.



Trong tổ chức toán học tham chiếu, phép tính gần đúng tích phân được giải quyết hoặc bằng cách khai triển hàm số thành chuỗi hàm (kể cả khai triển Taylor với số dư và khai triển tiệm cận) hoặc bằng tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa”. Không hề xuất hiện trong chương trình trung học Việt Nam ở cả ba thời kỳ, phép tính gần đúng tích phân có mặt trong chương trình trung học Pháp từ năm 1980 và được giải quyết bằng tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa” với số đoạn phân hoạch khá nhỏ<sup>76</sup>. Sự vắng mặt của phép khai triển hàm số thành chuỗi hàm đã hạn chế rất nhiều các kỹ thuật tính gần đúng tích phân. Tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa” đã tách phép tính gần đúng ra khỏi phép tính tích phân nhưng lại tạo ra tiềm năng cho vấn đề khảo sát sự khả tích.

Ta có thể kết luận rằng loại bài tập tích phân chủ yếu trong tổ chức toán học cần dạy ở Pháp lẫn Việt Nam là tính toán (tính nguyên hàm hoặc tính tích phân). Riêng ở Việt Nam, tính toán được giới hạn ở tính chính xác.

#### IV.2. *Ostensif* ∫, yếu tố hợp nhất hai khái niệm nguyên hàm và tích phân ở Việt Nam, yếu tố phân cách hai niệm nguyên hàm và tích phân ở Pháp

Trừ thời kỳ 1990 – 2000, ký hiệu  $\int f(x)dx$  được dùng thường xuyên ở Việt Nam từ 1970 để chỉ *tập hợp các nguyên hàm* của hàm số  $f$  và do lạm dụng ngôn ngữ cũng để chỉ *một nguyên hàm bất kỳ* của  $f$ . Phép tính nguyên hàm gắn bó chặt chẽ với *ostensif* ∫ mà các giá trị công cụ và tín hiệu cho phép thực hiện và kiểm tra (khi cần) phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần *như đối với tích phân xác định*.

Trong thực tế giảng dạy ở Việt Nam, *ostensif* ∫ cho phép trang bị công cụ cho phép tính nguyên hàm giống như cho tích phân. Đồng hóa hai khái niệm nguyên hàm và tích phân thành một, học sinh Việt Nam tự cho phép mình huy động phương pháp tích phân từng phần (chỉ được giảng dạy cho tích phân) để tính nguyên hàm. Điều này đưa đến việc xem tích phân bất định (nguyên hàm) là một tích phân không cận và ngược lại, tích phân xác định là một tích phân bất định có cận (chương C1). Phép tính nguyên hàm và phép tính tích phân bị trộn lẫn vào nhau và do đó, trong thực tế giảng dạy, nguyên hàm không còn giữ được bản chất hàm số.

Ngược lại, ở Pháp, các khái niệm nguyên hàm và tích phân ngày càng được rạch ròi. Trong thời kỳ 1970 – 1980, có hai ký hiệu để chỉ nguyên hàm của hàm số  $f$  là  $\int f(x)dx$  và  $\int_a^x f(t)dt + C$ . Hai ký hiệu này cho phép các tác giả sách giáo khoa trình bày phương pháp tích phân từng phần như một phương pháp tính tích phân bất định (ký hiệu thứ nhất) hoặc tính nguyên hàm (ký hiệu thứ hai). Từ năm 1980, *ostensif* ∫ và tích phân từng phần được tách khỏi khái niệm nguyên hàm. “Nguyên hàm hóa”<sup>77</sup> trở thành phương

<sup>76</sup> Ở Pháp, có hai phương pháp tính gần đúng tích phân được đưa ra trong phần bài tập là phép tính số và phép kẹp giữa. Hai phương pháp này đều tuân theo tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa”. Phép tính số được giảng dạy từ 1980 đến 2002 với 4 phương pháp (phương pháp hình chữ nhật, phương pháp hình thang, phương pháp tiếp tuyến, phương pháp trung điểm). Trong các sách giáo khoa, bốn phương pháp này được

thực hiện với số đoạn phân hoạch từ 5 đến 10. Phương pháp kẹp giữa tích phân  $m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M$  được

đưa vào chủ yếu từ năm 2002 chính là một trường hợp đặc biệt của tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa” với số đoạn phân hoạch là 1.

<sup>77</sup> Một ví dụ về *nguyên hàm hoá* trong *Mathématiques Terminale S*, Bréal, 2002, trang 38-39.

pháp chính thức duy nhất tính nguyên hàm. Sự tách rời này có thể là kết quả của những suy tư tri thức luận của trí quyền về hai khái niệm tích phân và nguyên hàm. Chẳng hạn, Legrand (1986) đã phát biểu về việc giảng dạy khái niệm tích phân ở năm đầu bậc đại học như sau:

“Nói ngắn gọn, những sinh viên này, trừ vài ngoại lệ, chưa bao giờ ‘lấy tích phân’ và ‘nghịch lý thay lại tin là biết làm điều đó’, vì đối với họ, có sự đồng nhất giữa tích phân và tìm nguyên hàm!” (Tài liệu đã dẫn)<sup>78</sup>

Tuy nhiên, *ostensif* ] không hoàn toàn biến mất khỏi khái niệm nguyên hàm ở Pháp. Trí quyền đã thử đưa vào lớp Terminale kiểu nhiệm vụ “khảo sát tích phân phụ thuộc cận trên” mà ta có thể tìm thấy trong các đề thi tú tài gần đây, chẳng hạn đề thi các năm 1999, 2005. Hơn nữa, trong bộ bài tập do Thanh tra Bộ Giáo dục quốc gia Pháp soạn thảo năm 2004, sự hiện diện của *ostensif* ] trong phép tính nguyên hàm thông qua tích phân phụ thuộc cận trên có hai mục đích chính:

- “lấy lại” các giá trị công cụ và tín hiệu của *ostensif* ] và phương pháp tích phân từng phần (vốn được dạy cho tích phân),
- thiết lập lại liên hệ tri thức luận giữa diện tích, nguyên hàm và tích phân bằng cách xem tích phân phụ thuộc cận trên như diện tích một hình phẳng và như một nguyên hàm.

Như vậy, trong thể chế Pháp, phép tính nguyên hàm và phép tính tích phân không bị trộn lẫn vào nhau nhưng ta có thể tự hỏi liệu một nguyên hàm có thực sự là một hàm số hay không trong thể chế Pháp ?

### IV.3. Ostensif $dx$ với ba giá trị công cụ và tín hiệu

Trong ký hiệu của Leibniz,  $dx$  vừa là một thừa số đại số vừa biểu thị sự tương đẳng giữa các hình phẳng trong phép cầu phương (tương tự với giá trị “biến số lấy tích phân” ngày nay).

Theo Bourbaki (1949), Guénard (2005), Lang (1964) và Rudin (1976),  $dx$  trong  $\int_a^b f(x)dx$  không phải là thừa số vi phân mà được quy ước dùng để chỉ biến số lấy tích phân. Quy ước này rất quan trọng khi biểu thức đại số của  $f$  có nhiều chữ hoặc khi thực hiện phép đổi biến số.

Tuy nhiên, Lang (1964) quy ước xem ký hiệu  $\frac{dy}{dx}$  như một phân số để có thể thực hiện một cách máy móc việc tính đạo hàm của hàm số hợp (“règle à chaîne”) và đổi biến số

$g$  là hàm số xác định trên  $[1; +\infty[$  bởi  $g(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}$ .  $g$  là một hàm hữu tỷ nên  $g$  liên tục trên  $[1; +\infty[$

( $x^2+2x \neq 0$ ) và có nguyên hàm trên khoảng này.  $g = \frac{1}{2} \frac{u'}{u^n}$  với  $u(x) = x^2+2x$ ,  $u'(x) = 2x+2$  và  $n = 2$ .

Theo định lý 18, các nguyên hàm của  $g$  trên  $]1, +\infty[$  là các hàm số  $G$  có dạng:  $G(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2+2x} \right) + k =$

$\frac{-1}{2(x^2+2x)}$  với  $k \in \mathbf{R}$ .

<sup>78</sup> “En un mot ces étudiants n’ont, sauf exceptions, jamais ‘fait d’intégration’ et paradoxalement croient la connaître, car pour eux il y a identité entre intégrale et recherche de primitive!”

trong tích phân. Quy ước này thể hiện rõ giá trị công cụ và tín hiệu của *ostensif dx*: “thừa số đại số” và “biến số lấy tích phân”.

Khái niệm vi phân được dạy trở lại ở lớp 12 Việt Nam thời kỳ 2000 – 2006 và không được định nghĩa như một ánh xạ tuyến tính mà như là tích  $f'(x)\Delta x$  và sau đó được biến đổi một cách hình thức thành  $f'(x)dx$ . Ý định của trí quyền là dùng khái niệm vi phân như một công cụ phục vụ cho việc tính nguyên hàm và tích phân.

Trong tri thức cần dạy ở Việt Nam,  $dx$  có ba giá trị công cụ và tín hiệu: giá trị tín hiệu “thừa số đại số”, giá trị tín hiệu và công cụ “biến số lấy tích phân”, giá trị công cụ “thừa số vi phân”. Được hình thành thông qua các thao tác trên  $dx$  khi tính tích phân, các giá trị công cụ và tín hiệu của  $dx$  thay đổi trong các kỹ thuật tính tích phân được thể chế hóa. Điều này có thể hình thành và cũng có thể hạn chế những ý nghĩa khác nhau của  $dx$  nơi học sinh.

Việc phân tích bài thi tú tài 2005 của học sinh Việt Nam cho thấy giá trị “biến số lấy tích phân” của  $dx$  luôn chiếm ưu thế. Sau đó là giá trị “thừa số đại số vô ích”. Một dấu hiệu của giá trị này là sự biến mất thường xuyên của  $dx$  trong cách viết của học sinh (và đôi khi của giáo viên). Giá trị “thừa số vi phân” có vẻ rất mong manh trong khi lẽ ra nó phải đóng vai trò thiết yếu như thể chế mong muốn. Đa số lỗi của học sinh trong giai đoạn “tính nguyên hàm” (phase non numérique) của bài toán tính tích phân xuất phát từ sự phối hợp không đầy đủ ba giá trị của  $dx$ . Ý định gán cho  $dx$  giá trị công cụ “thừa số vi phân” bị thất bại trong thực tế giảng dạy ở Việt Nam.

Trái với ở Việt Nam, khái niệm vi phân chưa bao giờ được đưa vào ở Pháp và vì vậy không đóng vai trò gì đặc biệt trong kỹ thuật tính tích phân: *ostensif dx* chỉ có giá trị tín hiệu “biến lấy tích phân”. Phương pháp đổi biến số, mà với nó *ostensif dx* có thêm giá trị công cụ, không được giảng dạy.

#### **IV.4. Phép tính nguyên hàm không có *ostensif* ], một ngắt quãng hợp đồng ở Việt Nam**

Ở Việt Nam, dù phép tính nguyên hàm được giảng dạy chính thức luôn gắn với *ostensif* ], vẫn tồn tại phép tính nguyên hàm không có *ostensif* ]:

- biến đổi  $\psi'(x)dx$  thành  $du$  hoặc nhận ra  $\psi'(x)dx$  là  $du$  (phép đổi biến số dạng 2)
- tính  $v$  từ  $dv$  (tích phân từng phần)

Phép tính này, một ngắt quãng hợp đồng đối với phép tính nguyên hàm được trang bị *ostensif* ], có hai đặc điểm:

- hai *ostensif* ] và  $dx$  không ở cạnh nhau
- tri thức cần dạy đòi hỏi phải dùng đến giá trị “thừa số vi phân” của *ostensif dx* để tính nguyên hàm.

Đối với trí quyền (noosphère) Việt Nam (Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán 12), khái niệm vi phân được đưa vào là để dùng như một yếu tố công nghệ cho phép lý giải các thao tác trên  $dx$  thực hiện trong đổi biến số (tường minh hay ngầm ẩn) hoặc tích phân từng phần. Tuy nhiên, trong thực tế giảng dạy, khái niệm vi phân không hoạt động như là yếu tố công nghệ của giai đoạn tính nguyên hàm (phase non numérique) trong phép tính tích phân (chương C3).

Chúng tôi đã làm rõ việc giảng dạy (tường minh hay ngầm ẩn) quy tắc “Từ  $u$  đến  $du$ , ta tính đạo hàm. Từ  $dv$  đến  $v$ , ta tính nguyên hàm” trong tích phân từng phần. Quy tắc này chứng tỏ khái niệm vi phân không hoạt động như một yếu tố công nghệ trong các phép tính  $du$  và  $v$  tương ứng từ  $u$  và  $dv$ . Mất đi ý nghĩa toán học mà những người soạn

chương trình và tác giả sách giáo khoa muốn gán cho nó,  $du$  và  $dv$  được xem trong ngữ cảnh như là những ký hiệu đơn giản để thúc đẩy hai phép tính kể trên. Quy tắc hình thức này, không được lý giải bằng toán học, có thể gây ra nhầm lẫn giữa phép tính  $v$  từ  $dv$  với việc lấy đạo hàm.

Đối với phép đổi biến số dạng 2, giáo viên đã đưa vào quy tắc “phát hiện” biến mới như cái đuôi chính là đạo hàm của biến mới: trong phép tính tích phân  $\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)dx$ ,

cái đuôi  $\psi'(x)dx$  phải được biến đổi hay nhìn nhận như là  $du$ . Để bảo đảm một cách thể chế việc học quy tắc này (được phát biểu hoặc không), sách giáo khoa và giáo viên chỉ đưa ra các tích phân “hợp quy tắc”, nghĩa là các tích phân mà đạo hàm của biến mới nằm (hoặc được giấu) ở cuối biểu thức đại số của hàm số dưới dấu tích phân. Dạng quy tắc này hoạt động như một yếu tố công nghệ lý giải cho sự chọn biến mới đối với giáo viên cũng như đối với học sinh.

#### IV.5. Sự phân hóa giữa phép tính diện tích và phép tính tích phân

Ở Việt Nam có hai kiểu bài toán tính diện tích mà chúng tôi tạm gọi là “tính diện tích trong khảo sát hàm” và “tính diện tích ngoài khảo sát hàm”.

Dù vắng mặt trong sách giáo khoa, bài toán “tính diện tích trong khảo sát hàm” lại được ưu tiên trong thực tế giảng dạy vì sự xuất hiện thường xuyên môi trường tiềm năng của nó trong các đề thi tú tài: bài toán khảo sát hàm. Trong bài toán tính diện tích này, việc hình phẳng cần tính diện tích được cho bằng lời chứ không phải bằng hệ bất phương trình như ở Pháp đã phân hoá phép tính tích phân và phép tính diện tích: phép tính thứ hai, ngoài việc tính tích phân ra, còn đòi hỏi phải viết được đúng tích phân. Hơn nữa, như chúng tôi đã chứng minh bằng lý thuyết và bằng thực nghiệm (chương A1), hình phẳng được cho bằng lời không bảo đảm tính duy nhất. Để đạt được hình phẳng duy nhất, học sinh phải tôn trọng những quy tắc của hợp đồng thể chế về việc đọc đồ thị (chương A1, C3).

Tuy nhiên, việc xác định đúng hình phẳng duy nhất theo yêu cầu của thể chế, kết quả của một quá trình học tập được che giấu, cũng chưa thể bảo đảm việc viết đúng tích phân tương ứng với diện tích cần tính. Thật vậy, như chúng tôi đã chỉ ra (chương C2), học sinh còn phải tôn trọng một số quy tắc ngầm ẩn khác liên quan đến thứ tự của hai cận tích phân hoặc hàm số dưới dấu tích phân. Các sai sót của học sinh trong bài thi tú tài cho thấy để viết được tích phân phục vụ tính diện tích, học sinh có thể lấy tổ hợp các phương trình hoặc các số có mặt trên đồ thị mà không cần quan tâm đến ý nghĩa của chúng cũng như liên hệ giữa đồ thị đã vẽ và tích phân vừa viết. Một cách nghịch lý, tiến trình này có thể cho ra một cách viết tích phân đúng. Do đó, ta không thể khẳng định trong các bài thi tú tài rằng một cách viết tích phân đúng luôn luôn là kết quả của việc hiểu đúng mối quan hệ giữa đồ thị-hình phẳng và tích phân-diện tích.

Dù có xuất hiện trong đề thi tú tài, bài toán “tính diện tích ngoài khảo sát hàm”, tiền hóa duy nhất của phép tính diện tích từ 1975 đến 2006 trong thể chế Việt Nam, vẫn ít có mặt trong thực tế giảng dạy. Phương pháp “di chuyển dấu giá trị tuyệt đối” do sách giáo khoa đề nghị trên thực tế được thay bằng phương pháp “khử dấu giá trị tuyệt đối”, dựa trên các kiến thức về xét dấu đã học ở lớp dưới và cho phép tránh việc kiểm tra tính liên tục của hàm số dưới dấu tích phân.

Như đã thấy trong phần dự giờ, kết quả tính tích phân hoặc tính diện tích có thể đóng vai trò môi trường kiểm chứng: “kết quả phải là một số đơn giản và dương (đối với tính diện tích)”.

#### IV.6. Vai trò suy biến của khoảng lấy tích phân ở Việt Nam

Vị trí thứ yếu của giai đoạn tính số trong phép tính tích phân ở Việt Nam làm suy biến thêm vai trò của khoảng lấy tích phân:

- Khoảng lấy tích phân không còn giữ vai trò là tập con của tập xác định của hàm số dưới dấu tích phân. Như chúng tôi đã nói, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra tính liên tục của hàm số dưới dấu tích phân. Hai cận tích phân  $a$  và  $b$  được xem là hai số sẽ tham gia vào phép tính  $F(b) - F(a)$ . Giáo viên có trách nhiệm lựa chọn các giá trị của  $a$  và  $b$  sao cho phép tính  $F(b) - F(a)$  trở nên đơn giản trong chừng mực có thể được.

- Không có sự kết hợp giữa phân hoạch đoạn lấy tích phân và kẹp giữa một tích phân trong thể chế Việt Nam hiện nay. Chúng tôi xin nhắc lại rằng tất cả các bài tập về kẹp giữa tích phân trong sách giáo khoa hiện hành đều không đòi hỏi phân nhỏ đoạn lấy tích phân. Điều này giải thích tại sao trong phiếu điều tra dành cho học sinh, 99 % học sinh Việt Nam tham gia đã thất bại khi phải ước lượng một tích phân đòi hỏi tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa”.

#### V. Giới hạn của luận án và hướng nghiên cứu mới mở ra từ luận án

Trong điều kiện phải phân bổ thời gian làm việc xen kẽ giữa Pháp và Việt Nam do yêu cầu của một luận án đồng bảo trợ (cotutelle), nghiên cứu của chúng tôi còn hết sức khiêm tốn.

Chúng tôi đã khép lại luận án bằng việc khảo sát về khái niệm tích phân được thực dạy ở Việt Nam thông qua các buổi dự giờ vào thời điểm ôn tập tính tích phân và tính diện tích chuẩn bị cho kỳ thi tú tài (chương C3). Điều này nói lên hai giới hạn của nghiên cứu, đồng thời cũng mở ra hai hướng mới:

- Ở Pháp, trong những điều kiện và những ràng buộc thể chế khác với ở Việt Nam, các nhu cầu về công nghệ cho việc giảng dạy thực tế khái niệm tích phân ở lớp Terminale được giáo viên đáp ứng như thế nào?

- Ở Pháp và Việt Nam, việc giảng dạy khái niệm tích phân từ lúc dẫn nhập đến khi ôn tập được giáo viên tiến hành như thế nào? Để tái hiện tổ chức toán học cần dạy, việc soạn giảng được giáo viên thực hiện ra sao?

Để nghiên cứu sâu hơn về những ràng buộc và những điều kiện thể chế của việc giảng dạy tích phân trong trường trung học theo quan điểm tri thức luận lẫn quan điểm *didactique*, chúng tôi cho rằng cần thiết kể và đánh giá một công nghệ *didactique* dựa trên việc đi tìm một tình huống cơ bản của phép lấy tích phân. Ý tưởng của chúng tôi nảy sinh từ các nghiên cứu của Legrand (1993), người đã dạy tích phân cho sinh viên năm thứ nhất đại học ở Grenoble bằng hình thức tranh luận khoa học. Legrand tóm tắt ý tưởng chủ đạo của cách tiếp cận tích phân Riemann bằng cái mà ông gọi là “tiến trình tích phân”: phân hoạch, kẹp giữa, lấy tổng, chuyển qua giới hạn.

Theo Legrand, tình huống tạo thành khái niệm tích phân Riemann gắn với bài toán có tính kế thừa (héréditaire):

“Ta xét một bài toán  $P$  có kết quả bằng số là  $R$ , tương ứng với một sự kiện diễn ra trên một miền  $\Omega$  nào đó:  $R = R(\Omega)$ , ( $\Omega$  là một tập hợp con đơn giản của đường thẳng, mặt phẳng hay

không gian như một khoảng, một hình chữ nhật, một khối lập phương, ... sao cho ta không phải bận tâm về khái niệm độ đo trên  $\Omega$ ). Ta giả sử rằng bài toán có tính kế thừa, nghĩa là nó tất yếu tạo ra một kết quả riêng  $R_i = R(\Omega_i)$  khi bài toán tổng quát được thu hẹp trên một miền con đơn giản  $\Omega_i$  của  $\Omega$ .” (Grenier, Legrand & Richard 1986)<sup>79</sup>

Như chúng tôi đã trình bày, phép tính gần đúng tích phân, yếu tố có thể thúc đẩy tiến trình “phân hoạch, kẹp giữa”, lại vắng mặt trong tri thức cần dạy ở Việt Nam. Hơn nữa, ở Việt Nam, các khái niệm nguyên hàm và tích phân bị trộn lẫn vào nhau. Phạm Huy Điền, Nguyễn Quang Minh và Nguyễn Văn Sinh (2005) thừa nhận rằng việc giảng dạy khái niệm tích phân ở trường trung học phổ thông Việt Nam hiện nay là “phiên diện, đối phó, mang nặng tính kỹ thuật và tiểu xảo, không phản ánh đúng bản chất của phép tính tích phân”.

Ta có thể tự hỏi những ràng buộc và những điều kiện thể chế ở Việt Nam cho phép hay không cho phép việc xây dựng một tình huống như trên trong giảng dạy tích phân ở trường trung học phổ thông.

---

<sup>79</sup> “On considère un *problème*  $P$  donnant lieu à un résultat numérique  $R$  correspondant à ce qui se passe sur un certain domaine  $\Omega$ :  $R = R(\Omega)$ , ( $\Omega$  partie simple de la droite du plan ou de l'espace: intervalle, rectangle, cube, etc., pour laquelle la notion de mesure ne pose aucun problème). On suppose que ce *problème est héréditaire*, i.e. qu'il donne automatiquement lieu à un *résultat partiel*  $R_i = R(\Omega_i)$  quand on restreint le problème global à un sous-domaine simple  $\Omega_i$  de  $\Omega$ ”. (Grenier, Legrand & Richard 1986)



## Références bibliographiques

### 1. Didactique des mathématiques ; réflexions sur l'enseignement des mathématiques

ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P., Mathematics Thinking and Learning at Post-secondary Level, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Edited by Frank K. Lester, Jr.

ASIALA M., COTTRILL J., DUBINSKY E., SCHWINGENDORF K.E. (1997), The development of students' graphical understanding of the derivative, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 16, N° 4, pp. 399-431(33), Elsevier Science.

BESSOT A., LE THI H. A. (1993 – 1994), Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée, *Petit x*, n° 36, 39 – 60.

BESSOT A. (1995), Contrat didactique – Outil central pour l'analyse des situations d'enseignement, *Actes du Colloque « Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants »*, Ho Chi Minh-Ville, Vietnam.

BLOCH I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 79 – 119, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BOSCH M., ESPINOZA L., GASCON J. (2002), El profesor como director de procesos de estudio : analisis de organizaciones didacticas espontaneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 79 – 136, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BOSCH M., GASCON J. (2002), Organiser l'étude. 2. Théories & Empiries, *Actes de la onzième école d'été de didactique des mathématiques*, 23 – 39, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, 309 – 336, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CASTELLA C., JULLIEN M. (1991), La différenciation institutionnelle : qu'est-ce que savoir ?, in Gras (coordonnée par), *Actes de la 6<sup>e</sup> école d'été de recherche en didactique des mathématiques*, 174 – 176, Institut Mathématique de Rennes et IRESTE de Nantes.

CHAUVAT G. (1997), *Étude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989a), Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD2-IMAG, n° 108, 211 – 235, IMAG, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989b), *Note de synthèse – Aspect d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Étude du cas de l'algèbre élémentaire*, Habilitation à diriger des recherches, 10/1/1989.



- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par un approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 83 – 121, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, in Arzac et al. (éds.), *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique, *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.
- CHEVALLARD Y. (2000), Évaluation, véridiction, objectivation, in Colomb et Marsenach (dir.), *L'évaluation en révolution*, INRP éditions.
- CZARNOCHA B, DUBINSKY E., LOCH S., PRABHU V., VIDAKOVIC D. (2001), Conceptions of Area : In Students and in History, *College Mathematics Journal*, Vol. 32, No. 2 (Mar., 2001), pp. 99-109, Mathematical Association of America.
- GRENIER D., LEGRAND M., RICHARD F. (1986), Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, *Les cahiers de didactique*, n° 22.
- Groupe A.H.A. (1999), *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse. Manuel pour l'élève*, De Boeck Wesmael.
- GUÉNARD F. (2005), *Vade-mecum du poseur de sujets de mathématiques*, Université de Paris-Sud (Orsay). Ce document est disponible en ligne <http://www.math.u-psud.fr/~guenard/General/Vade%20mecum%20du%20poseur%20de%20sujet.pdf>
- JULIEN M., MATHERON Y., SCNEIDER O. (2003), Quelques éléments de réflexion sur les mathématiques du Baccalauréat 2003 – série S, document interne.
- LEGRAND M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'Analyse, *Repère - IREM*, n° 10, 123 – 159.
- LE VAN T. (2001), *Étude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Vietnam*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- MASCHIETTO M. (2001), Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 21, n° 1-2, 123 – 156, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- MASCHIETTO M. (2002), *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- PHAM Huy Điền, NGUYEN Quang Minh, NGUYEN Văn Sinh (2005), Utilisation de l'ordinateur dans l'enseignement et l'évaluation de la qualité de l'apprentissage, *Colloque « Développement des outils informatiques pour l'enseignement, la recherche et l'application mathématiques »*, 1-2/04/2005, Thai Nguyen, Vietnam. Ce document est aussi disponible en ligne <http://www.math.ac.vn/cgi-bin/htgd05/index>.
- PRASLON F. (2000), *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S - DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- RAVEL L. (2003), *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne – Exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

*Rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques* dite Commission Kahane

REISZ D. (1997), La dérivation et l'intégration au lycée : deux aspects du paysage de l'analyse, in Legrand P. (coordonné par) *Profession enseignant – Les maths en collège et en lycée*, Hachette Éducation.

SCHNEIDER-GILOT M. (1988), *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*, Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain.

TRAN LUONG C. K. (2002), *Étude didactique sur les difficultés principales chez l'élève dans l'acquisition de la notion d'intégrale*, Mémoire de DEA, Université de Pédagogie de Ho Chi Minh-ville.

## **2. Histoire des mathématiques et de son enseignement en France et au Vietnam**

BELHOSTE B. (1995), *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789 – 1914*, INRP, Éditions Économica.

BELHOSTE B., GISPERT H., HULIN N. et al. (1996), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Vuibert, INRP.

DAHAN-DALMENDICO A. et PEIFFER J. (1986), *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Éditions du Seuil.

DUCROCQ A., WARUSFEL A. (2001), *Les mathématiques. Plaisir & Nécessité*, Vuibert.

ETCHECOPAR P., GARRIC N., VERDIER N. (2004), *Calcul différentiel et intégral*, Éditions Le Pommier.

HAIRER E., WANNER G. (2001), *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer.

LAROCHE F. (2003), *Promenades mathématiques. Histoires, fondements, applications*, Ellipses.

MICHEL A. (1992), *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Mathesis, CNRS et Vrin.

PIER J.-P. (1996), *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris.

## **3. Traités de mathématiques et manuels universitaires**

ARNAUDIÈS J. M., FRAYSSE H. (1988), *Cours de mathématiques-2, Analyse*, Bordas, nouveau tirage (1989), Dunod Université.

BOURBAKI N. (1949), *Éléments de mathématiques*, Livre IV, Éditions Hermann et Compagnie, Paris.

BRIANE M., PAGÈS G. (2000), *Théorie de l'intégration*, Vuibert.

FIKHTENGOLZ G. M. (1968), *Éléments d'analyse mathématique*, Tome I, Éditions Hayka, Moscou, traduction en vietnamien (1977), Universités et lycées professionnels, Hanoï.

LANG S. (1964), *A first course in calculus*, Addison-Wesley, réédition (2000), Springer.

RUDIN W. (1976), *Principes d'analyse mathématique*, McGraw-Hill, traduction en français (1995), Édiscience internationale, Paris.

WARUSFEL A., ATTALI P., COLLET M., GAUTIER C., NICOLAS S. (2002), *Analyse. Cours & Exercices*, Vuibert.

#### **4. Manuels scolaires ; documents d'accompagnement ; annales**

*Analyse 12*, Éditions l'Éducation, 1979, Vietnam.

*Annabac 92, Mathématiques CE, Sujets non corrigés*, Hatier.

*Annabac 93, Mathématiques CE, Sujets non corrigés*, Hatier.

*Annabac 99, Mathématiques S, Sujets corrigés*, Hatier.

*Annales 2000, Corrigés Bac, Mathématiques Série S*, Vuibert.

*Annales Vuibert corrigées, Mathématiques, Série C, E, 1975-1976, Fascicule 2*, Vuibert.

*Aide à la révision du baccalauréat*, Document interne, Ministère de l'Éducation nationale, 1981, Vietnam.

BAILLE A., BOURSIN J-L., PAIR C. (1971), *Mathématiques Terminale C, E, Tome 1*, Bordas.

*Batterie d'exercices pour la confection de sujets de baccalauréat S et ES*, Groupe des mathématiques de l'inspection générale de l'éducation nationale, 2003.

BONTEMPS G. et al. (1992), *Mathématiques. Analyse, Probabilités, Terminales C et E*, Bordas.

DOAN MINH Cường (2004), *Sujets corrigés des concours d'entrée universitaire. 1997 – 2004. Mathématiques, Tome II*, Éditions l'Université nationale de Hanoi, Vietnam.

LE MAU Thảo, NGUYEN VAN Lộc (2004), *Guide pour résoudre des exercices d'Analyse 12*, Éditions l'Université nationale de Ho Chi Minh-ville, Vietnam.

*Les Sujets Nathan 94, Maths C, E*, Nathan.

*Les Sujets Nathan 95, Maths S*, Nathan.

*Les Sujets Nathan 96, Maths S*, Nathan.

*Mathématiques, Terminales C et E, Analyse et Statistiques*, IREM de Strasbourg, Istra, 1983.

NASSIET F., PERRINAUD J-C., RIVOALLAN L. (1994), *Mathématiques Terminale S*, Didier.

NGO THUC Lanh et al. (2000), *Analyse 12*, Éditions l'Éducation, Vietnam.

NGO THUC Lanh, VAN NHU Cương (2000), *Guide pour l'enseignant. Mathématiques 12*, Éditions l'Éducation, Vietnam

NGUYEN PHU Hy. et al. (1999), *Enseigner l'intégrale dans le programme de Mathématiques de classe 12*, Éditions l'Éducation, Vietnam.

*Recueil d'exercices d'Analyse 12, Tome II*, Éditions l'Éducation, 1985, Vietnam.

*Recueil de 90 problèmes pour le concours d'entrée universitaire*, Document interne, École préparatoire aux universités, 1983, Vietnam.

THIÉNARD J-C. et al. (2002), *Mathématiques Terminale S*, Bréal.

THUIZAT A., GIRAULT G., ASPEELE E. (1973), *Mathématique Classes Terminales C, D, E, Tome II, Analyse*, Technique & Vulgarisation.

TRAN VAN Hào et al. (1997), *Analyse 12*, Éditions l'Éducation, Vietnam.

### **5. Autres ouvrages et articles**

REVUZ A. (1996), Intégration et mesure, *Encyclopædia universalis*, corpus 12, pp. 406-410, Éditeur à Paris.

Larousse Sélection, Trois volumes en couleurs, Sélection du Reader's Digest, Paris, 1968.



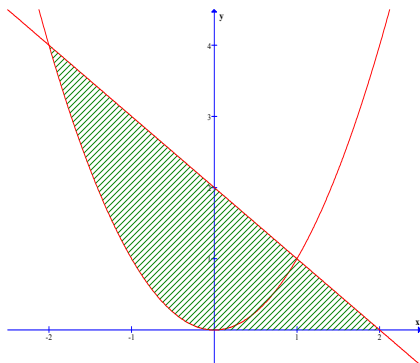
# **Annexes**



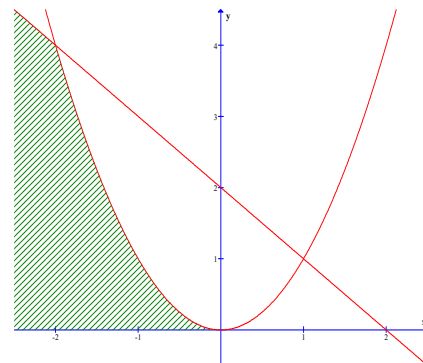
**Annexe 1. Enquête auprès des élèves vietnamiens sur le contrat institutionnel sur le calcul d'aire : *texte du questionnaire et données statistiques***

**1** Texte du questionnaire

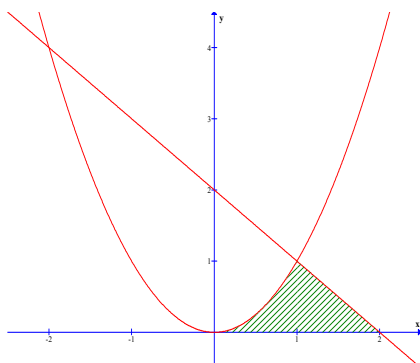
On considère une surface plane délimitée par la parabole d'équation  $y = x^2$ , la droite d'équation  $y = 2 - x$  et l'axe des abscisses.  
 Pour chacune des figures ci-dessous, dire si elle peut ou non être une représentation graphique correspondant à la description ci-dessus.



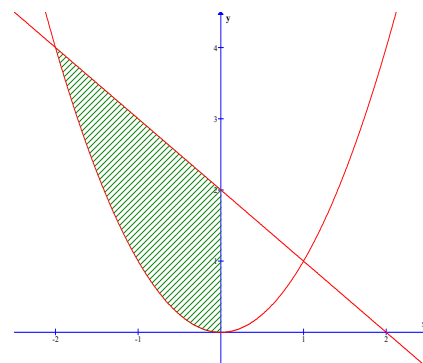
Oui   
 Non



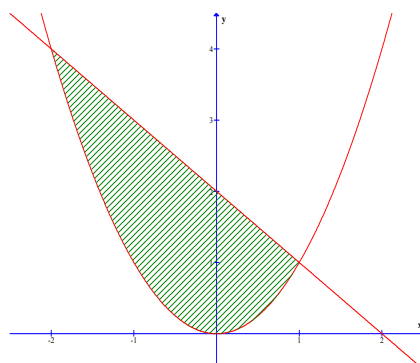
Oui   
 Non



Oui   
 Non



Oui   
 Non



Oui   
 Non



## 2 Données statistiques

Les réponses d'élèves recueillies sont présentées dans les cinq tableaux suivants (un élève peut choisir plusieurs figures) :

	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
<i>Classe 11 Mathématiques</i> Effectif <b>36</b>	10	11	27	1	16
<i>Classe 11 Informatique</i> Effectif <b>37</b>	9	12	18	8	21
<i>Classe 12 Mathématiques</i> Effectif <b>31</b>	1	0	30	0	0
<i>Classe 12 Informatique</i> Effectif <b>34</b>	5	7	30	1	1

*Résultats groupés selon les figures choisies*

<i>Classe 11 Mathématiques</i>	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
3 élèves			x		x
4 élèves	x		x		x
5 élèves		x	x		
1 élève	x				x
1 élève	x		x	x	x
1 élève		x	x		x
3 élèves	x	x	x		
1 élève	x	x			
1 élève		x			
10 élèves			x		
6 élèves					x
Total = 36	10	11	27	1	16

*Résultats groupés selon les choix de figures multiples dans la classe 11 Mathématiques*

<i>Classe 11 Informatique</i>	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
1 élève					
1 élève		x	x	x	
3 élèves		x	x		x
2 élèves			x		x
3 élèves	x	x	x		
1 élève	x	x	x		x
2 élèves			x	x	
1 élève		x		x	
2 élèves	x		x		x
1 élève	x		x		
1 élève				x	x
1 élève	x				x
1 élève	x		x	x	x
3 élèves		x			
2 élèves			x		
2 élèves				x	
10 élèves					x
Total = 37	9	12	18	8	21

*Résultats groupés selon les choix de figures multiples dans la classe 11 Informatique*

Annexe 1

<i>Classe 12 Mathématiques</i>	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
1 élève	x				
30 élèves			x		
<b>Total = 31</b>	<b>1</b>		<b>30</b>		

*Résultats groupés selon les choix de figures multiples dans la classe 12 Mathématiques*

<i>Classe 12 Informatique</i>	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
4 élèves					
2 élèves	x		x		
5 élèves		x	x		
1 élève	x		x	x	x
2 élèves	x	x	x		
20 élèves			x		
<b>34</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>30</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

*Résultats groupés selon les choix de figures multiples dans la classe 12 Informatique*





## Partie II

## Exercice 1

On donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$		$3$		$2$
	$-1$		$1$	

On définit la fonction  $F$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Étudier le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $\mathbf{R}$ .

a) Proposeriez-vous un tel exercice à vos élèves de terminale ? **oui / non** (*entourez votre réponse*)

Éventuellement **quelles modifications y apporteriez-vous** :

b) Rédigez la solution à cet exercice que vous attendez d'un bon élève de Terminale :

c) **Estimez le pourcentage d'élèves de vos classes en fin de Terminales capables de résoudre cet exercice en explicitant les difficultés que vous prévoyez :**

**Exercice 2**

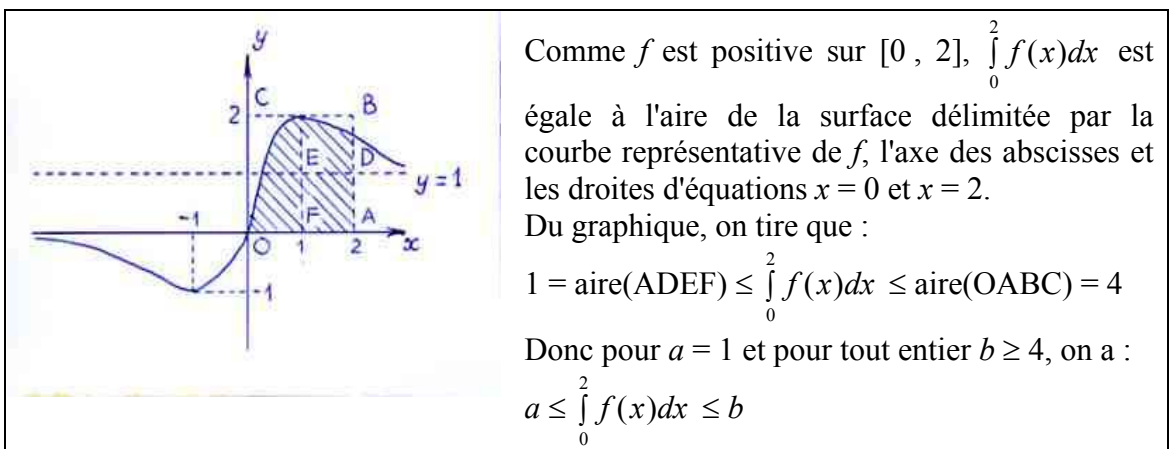
On donne le tableau de variations d'une fonction définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	0		0	2	1

$\swarrow$        $\nearrow$        $\searrow$   
 $-1$        $1$

Déterminer deux entiers strictement positifs  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq \int_0^2 f(x)dx \leq b$ .

Voici la solution d'un élève de Terminale :



Notez cette solution sur 5 (Veuillez cocher la case correspondante)

(Mauvais <-----> Excellent)

1    2    3    4    5

Commentaires :

A votre avis quel pourcentage de vos élèves pourraient fournir une solution de ce type ?

### Partie III

Donnez deux exemples concrets du type d'exercices  $\text{Calculer } \int_a^b f(x)dx$ , l'un que vous considérez comme facile, l'autre comme difficile. (*Vous pouvez bien sûr utiliser votre manuel*).

**- Exercice facile :**

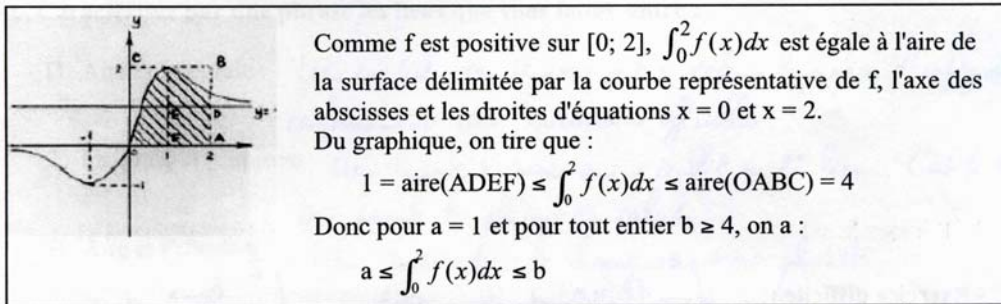
Pourquoi :

**- Exercice difficile :**

Pourquoi :

Merci de votre collaboration.

### Quelques réponses représentatives



Notez cette solution sur 5 (Veuillez cocher la case correspondante)

(Mauvais <-----> Excellent)

1  2  3  4  5

Commentaires :

*L'idée de faire un dessin me semble correspondre à l'esprit du programme. On aurait pu aussi utiliser l'inégalité de la moyenne, mais on trouve alors un moins bon encadrement, et  $a = 0$  (ce qui n'est pas autorisé dans la consigne)*

A votre avis quel pourcentage de vos élèves pourraient fournir une solution de ce type ?

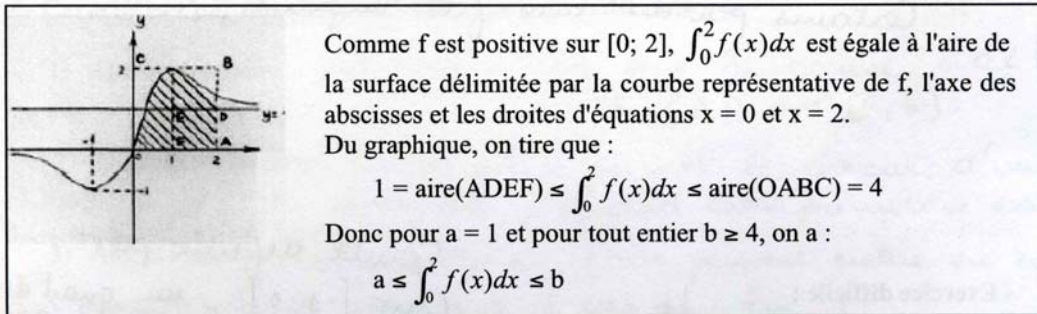
*Seulement 20% à mon avis : réticence à faire un dessin pour expliquer ; préférence de l'utilisation de l'inégalité de la moyenne, rédaction moins soignée. Mais 75% peuvent réussir l'exercice si on n'impose pas à  $a$  d'être strictement positif.*

*L'idée de faire un dessin me semble correspondre à l'esprit du programme. On aurait pu aussi utiliser l'inégalité de la moyenne, mais on trouve alors un moins bon encadrement, et  $a = 0$  (ce qui n'est pas autorisé dans la consigne)*

*Seulement 20 % à mon avis : réticence à faire un dessin pour expliquer ; préférence de l'utilisation de l'inégalité de la moyenne ; rédaction moins soignée.*

*Mais 75 % peuvent réussir l'exercice si on n'impose pas à  $a$  d'être strictement positif.*





Notez cette solution sur 5 (Veuillez cocher la case correspondante)

(Mauvais <-----> Excellent)

1  2  3  4  5

Commentaires :

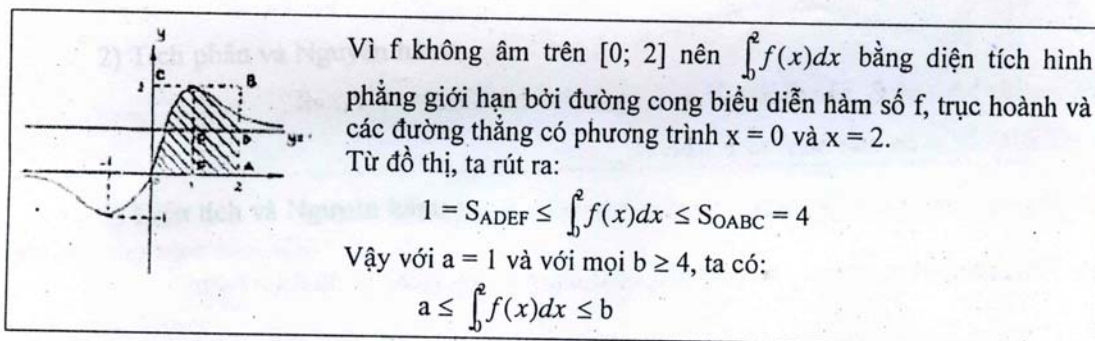
Le graphique ne vient pas naturellement à l'idée des élèves si on ne le suggère pas. Sinon, ils s'en sortent bien pour encadrer avec des aires.

A votre avis quel pourcentage de vos élèves pourraient fournir une solution de ce type ?

20%.

Le graphique ne vient pas naturellement à l'idée des élèves si on ne le suggère pas. Sinon, ils s'en sortent bien pour encadrer avec des aires.

20 %



Hãy cho điểm lời giải trên theo thang điểm 5 bằng cách đánh dấu vào ô tương ứng dưới đây

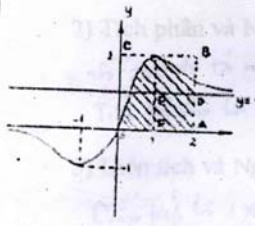
1  2  3  4  5

(Xấu <-----> Tốt)

Nhận xét, bình luận:

Ngươi đúng thì.

Commentaire traduit en français : Hors programme



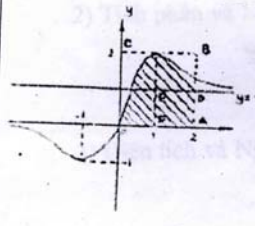
Vi  $f$  không âm trên  $[0; 2]$  nên  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong biểu diễn hàm số  $f$ , trục hoành và các đường thẳng có phương trình  $x = 0$  và  $x = 2$ .  
 Từ đồ thị, ta rút ra:  
 $I = S_{ADEF} \leq \int_0^2 f(x)dx \leq S_{OABC} = 4$   
 Vậy với  $a = 1$  và với mọi  $b \geq 4$ , ta có:  
 $a \leq \int_0^2 f(x)dx \leq b$

Hãy cho điểm lời giải trên theo thang điểm 5 bằng cách đánh dấu vào ô tương ứng dưới đây

1  3  4  5   
 (Xấu <-----> Tốt)

Nhận xét, bình luận: em đã biết liên hệ đường cong với diện tích hình phẳng nhưng phân biệt ra bất thức phân chia chưa chính xác. vì  $S_{ADEF} < \int_0^2 f(x)dx$

Commentaires traduits en français : L'élève a su mettre en place le lien entre intégrale et aire, mais l'inégalité écrite n'est pas correcte car  $S_{ADEF} < \int_0^2 f(x)dx$ .



Vi  $f$  không âm trên  $[0; 2]$  nên  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong biểu diễn hàm số  $f$ , trục hoành và các đường thẳng có phương trình  $x = 0$  và  $x = 2$ .  
 Từ đồ thị, ta rút ra:  
 $I = S_{ADEF} \leq \int_0^2 f(x)dx \leq S_{OABC} = 4$   
 Vậy với  $a = 1$  và với mọi  $b \geq 4$ , ta có:  
 $a \leq \int_0^2 f(x)dx \leq b$

Hãy cho điểm lời giải trên theo thang điểm 5 bằng cách đánh dấu vào ô tương ứng dưới đây

1  2  3  4  5   
 (Xấu <-----> Tốt)

Nhận xét, bình luận: Ở BẬC THPT KHÔNG THẬT CẶP BT LÀ NHƯ THỂ NÀY. HƠN NỮA, CÁCH GIẢI QUẢNG KHỔ NHÊN ĐƯỢC SỰ ĐỒNG THUAN VÌ ĐỒ THỊ MÀ HỌC SINH GIỚI THIỆU CHỈ LÀ MỘT HÌNH ẢNH TRỰC QUAN, KHÔNG ĐƯỢC KHẢO SÁT CHẶT CHẼ. HƠN NỮA KHÔNG NÓI ĐƯỢC DẤU ĐẲNG THỨC XÂY RA KHU NÀO. THANG ĐIỂM 5 GẦN ĐÂY KHÔNG ĐƯỢC NHẮC BẾN NỮA, KÍNH MONG BAN SOẠN THẢO LƯU Ý.

Commentaires traduits en français : Au secondaire, on ne voit pas un exercice si étrange. La solution n'est pas probante parce que le graphique présenté n'est qu'un aperçu particulier, non rigoureusement étudié. De plus, elle ne précise pas la condition pour atteindre l'égalité. L'échelle de notation de 1 à 5 n'est plus applicable.



### Annexe 3. Enquête auprès des élèves vietnamiens en rupture du contrat institutionnel par rapport au calcul de primitive et au calcul d'intégrale : *texte du questionnaire et quelques réponses représentatives*

#### 1 Texte du questionnaire

Lycée :

Classe :

#### Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 + 2x + 3).\ln x$ . Calculer une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

#### Exercice 2 :

On donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
f(x)		0	3	2	1	2

On définit la fonction  $F$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- Étudier le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $\mathbf{R}$ .
- La relation  $F(2) \geq 3$  est-elle vraie ? Justifier la réponse.

#### 3) Caractériser par une phrase les liens que vous faites entre :

- Aire et Intégrale :
- Intégrale et primitive :
- Aire et Primitive :

Merci de votre participation.

## 2 Quelques réponses représentatives

- Différentes réponses au calcul d'une primitive de  $f: x \mapsto (x^2 + 2x + 3).\ln x$  sur  $]0, +\infty[$  : mobilisation de l'intégration par parties (enseignée uniquement pour l'intégrale), confusion avec calcul de dérivée ou avec calcul d'intégrale.

**Bài 1 :**

Cho hàm số  $f$  xác định trên  $(0; +\infty)$  bởi  $f(x) = (x^2 + 2x + 3).\ln x$ . Tìm một nguyên hàm của  $f$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x & \Rightarrow du &= \frac{1}{x} dx \\
 dv &= (x^2 + 2x + 3) dx & \Rightarrow v &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \\
 \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx &= \ln x \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) - \int \left( \frac{1}{3}x^2 + x + 3 \right) dx \\
 &= \ln x \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) - \left( \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) + C \\
 \text{Vậy, nguyên hàm của } f(x) &\text{ là } F(x) = \ln x \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) - \left( \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) + C.
 \end{aligned}$$

**Exercice 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 + 2x + 3).\ln x$ . Calculer une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

$$u = \ln x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = (x^2 + 2x + 3) dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$$

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx &= \ln x \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) - \int \left( \frac{1}{3}x^2 + x + 3 \right) dx \\
 &= \ln x \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) - \left( \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc les primitives de } f(x) \text{ sont } F(x) = \ln x \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) - \left( \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) + C.$$

**Bài 1 :**

Cho hàm số  $f$  xác định trên  $(0; +\infty)$  bởi  $f(x) = (x^2 + 2x + 3).\ln x$ . Tìm một nguyên hàm của  $f$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x^2 + 2x + 3) \ln x \\
 f'(x) &= (x^2 + 2x + 3)' \ln x + (x^2 + 2x + 3) (\ln x)' \\
 &= (2x + 2) \ln x + (x^2 + 2x + 3) \cdot \frac{1}{x} \\
 &= (2x + 2) \ln x + \left( x^2 + 2x + \frac{3}{x} \right)
 \end{aligned}$$

**Exercice 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 + 2x + 3).\ln x$ . Calculer une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x^2 + 2x + 3) \ln x \\
 f'(x) &= (x^2 + 2x + 3)' \ln x + (x^2 + 2x + 3) (\ln x)' \\
 &= (2x + 2) \ln x + (x^2 + 2x + 3) \frac{1}{x} \\
 &= (2x + 2) \ln x + \left( x^2 + 2x + \frac{3}{x} \right)
 \end{aligned}$$

**Bài 1 :**

Cho hàm số  $f$  xác định trên  $(0; +\infty)$  bởi  $f(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot \ln x$ . Tìm một nguyên hàm của  $f$  trên  $(0; +\infty)$ .

Nguyên hàm của  $f(x)$  là:  $\int_0^{+\infty} (x^2 + 2x + 3) \cdot \ln x \cdot dx$

**Exercice 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot \ln x$ . Calculer une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

Les primitives de  $f(x)$  sont  $\int_0^{+\infty} (x^2 + 2x + 3) \ln x dx$

- Dans le questionnaire, la définition d'une fonction par son tableau de variations est une rupture de contrat. La ligne ci-dessous signifie : « En regardant le tableau de variations, je ne comprends rien. »

Nhìn bảng biến thiên em không hiểu gì cả

- Proposant de substituer la lettre  $t$  à celle  $x$  dans la notation de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, un des élèves explique : « L'intégrale ne dépend pas de variable, donc

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(x) dx . »$$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nào  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(x) dx$

- Un élève se distingue de ses amis par son bilan *en vers* sur l'exercice 2 proposé dans le questionnaire : « On ne peut pas calculer l'intégrale quand on ne sait pas ses deux bornes. Quand on ne sait pas la fonction, on ne peut pas trouver ses primitives. Quand on n'a aucun résultat, on ne peut pas étudier le sens de variation ! »

Làm sao tính được tích phân  
khi ta chưa biết hai đầu cần  
Làm sao tìm ra nguyên hàm  
khi ta chưa biết hàm số  
Khi chưa có kết quả  
Làm sao khảo sát sự biến thiên!



## Annexe 4. Baccalauréat vietnamien 2005 : sujet de mathématiques et barème de correction

### 1 Sujet

#### Exercice 1 (3,5 points)

Étant donnée la fonction  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  ayant pour courbe représentative (C).

1. Étudier la fonction et dessiner sa courbe représentative.
2. Calculer l'aire de la surface plane délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la courbe (C).
3. Écrire l'équation de la tangente à la courbe (C) en sachant que cette tangente passe par le point A(-1; 3).

#### Exercice 2 (1,5 points)

1. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$ .

2. Déterminer le paramètre  $m$  pour que la fonction  $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$  admette un maximum en  $x = 2$ .

#### Exercice 3 (2 points)

Dans un plan muni d'un système des coordonnées Oxy, étant donnée la parabole (P) d'équation  $y^2 = 8x$ .

1. Chercher les coordonnées du foyer et écrire l'équation de la droite directrice de (P).
2. Écrire l'équation de la tangente à (P) en point M appartenant à (P) ayant pour ordonnée 4.
3. Soit d la droite passe par le foyer de (P) et coupe (P) en deux points distingués A, B ayant pour abscisse respectivement  $x_1, x_2$ . Démontrer que  $AB = x_1 + x_2 + 4$ .

#### Exercice 4 (2 points)

Dans l'espace muni d'un système des coordonnées Oxyz, étant données la sphère (S) d'équation :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$  et deux droites  $(\Delta_1), (\Delta_2)$  d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}, \quad \frac{x-y}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

1. Démontrer que  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  sont non coplanaires.
2. Écrire l'équation du plan tangent à la sphère (S) en sachant que ce plan tangent est strictement parallèle à deux droites  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$ .

#### Exercice 5 (1 points)

Résoudre l'inéquation dont l'inconnue  $n$  appartient à l'ensemble des nombres naturels :

$$C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2} A_n^2$$

Fin

**Tout document est interdit**

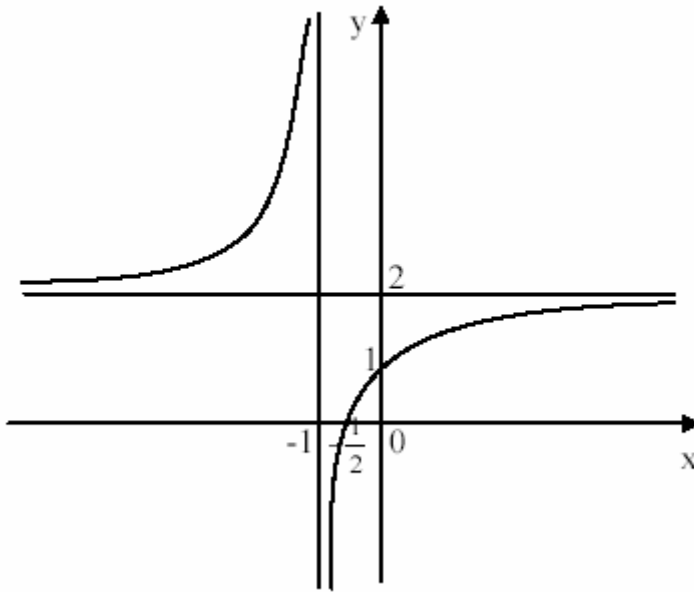
**Les surveillants n'ont pas le droit de donner aucune explication sur le sujet**



## 2 Extrait du barème ministériel de correction

- Graphique de la fonction :

La courbe coupe l'axe Ox au point  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  et l'axe Oy au point  $(0; 1)$ .



0,5

- Aire de la surface plane :

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(2 - \frac{1}{x+1}\right) dx \quad 0,25$$

$$= (2x - \ln(x+1)) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 \quad 0,25$$

$$= 1 - \ln 2 \text{ (u.a)} \quad 0,25$$

- Calcul d'intégrale :

$$\text{Poser } \begin{cases} u = x + \sin^2 x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (1 + 2 \sin x \cos x) dx \\ v = \sin x \end{cases} \quad 0,25$$

$$I = ((x + \sin^2 x) \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x \cos x) \sin x dx \quad 0,25$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

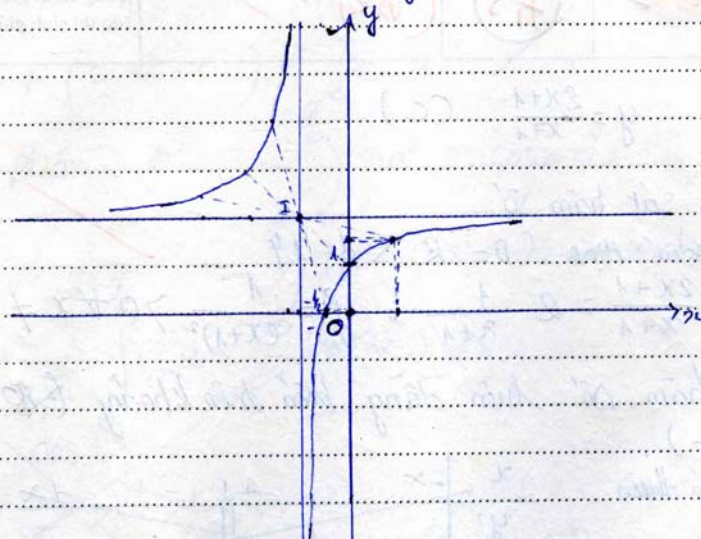
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \quad 0,25$$

## Annexe 5. Extraits de copies d'élèves vietnamiens au baccalauréat 2005

## 1 Calcul d'aire

- Une écriture d'intégrale mathématiquement correcte mais institutionnellement inattendue :

Đồ thị: Đồ thị đi qua các điểm  $(1; \frac{3}{2})$   
 Giao điểm của đồ thị với trục hoành  $(-\frac{1}{2}; 0)$   
 Giao điểm của đồ thị với trục tung  $(0; 1)$



x. Đồ thị nhận giao điểm của hai hàm cấp I  $(-1; 2)$  làm tâm đối xứng.  
 2. phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục tung ( $x=0$ )  
 $x=0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1$   
 Vậy giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm  $(0; 1)$ .  
 • phương trình giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành ( $y=0$ )  
 $\frac{2x+1}{x+1} = 0 \quad (x \neq -1)$   
 $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$   
 Vậy giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành tại điểm  $(-\frac{1}{2}; 0)$   
 \* để tính tích phân phải chia phân tử cho mẫu  
 $S = \int_0^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right) dx = \int_0^{-\frac{1}{2}} \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx$   
 ( trục tung:  $x=0$ ; trục hoành  $y=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$  )

2. L'équation qui donne l'ordonnée du point d'intersection de la courbe (C) et l'axe des ordonnées ( $x=0$ )

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C) et l'axe des ordonnées a pour coordonnées  $(0; 1)$

L'équation qui donne l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et l'axe des abscisses ( $y=0$ )

$$\frac{2x+1}{x+1} = 0 \quad (x \neq -1) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

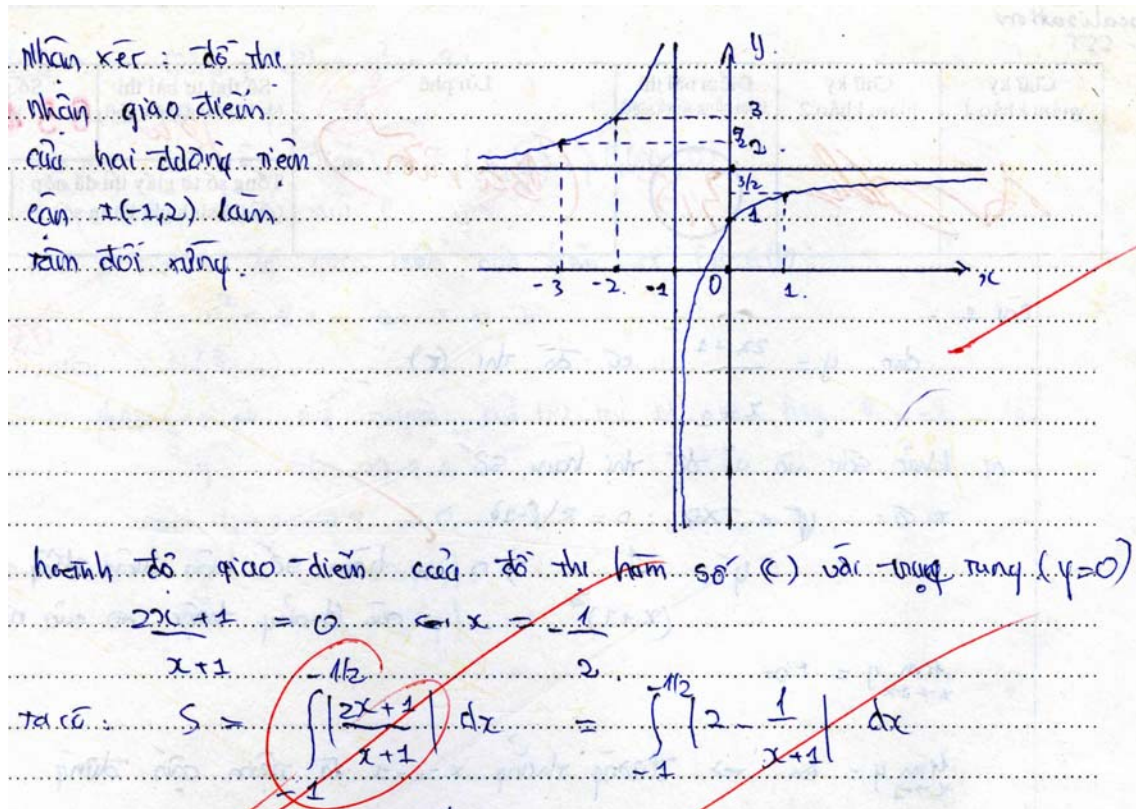
Donc le point d'intersection de la courbe (C) et l'axe des abscisses a pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

L'aire de la surface plane délimitée par l'axe des abscisses, celui des ordonnées aire est :

$$S = \left| \int_0^{-1/2} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^{-1/2} \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx \right|$$

(L'axe des abscisses :  $x = 0$  ; l'axe des ordonnées :  $y = 0 \Rightarrow x = -1/2$ )

- Une écriture d'intégrale mobilisant la stratégie erronée « combinatoire sur les nombres » :



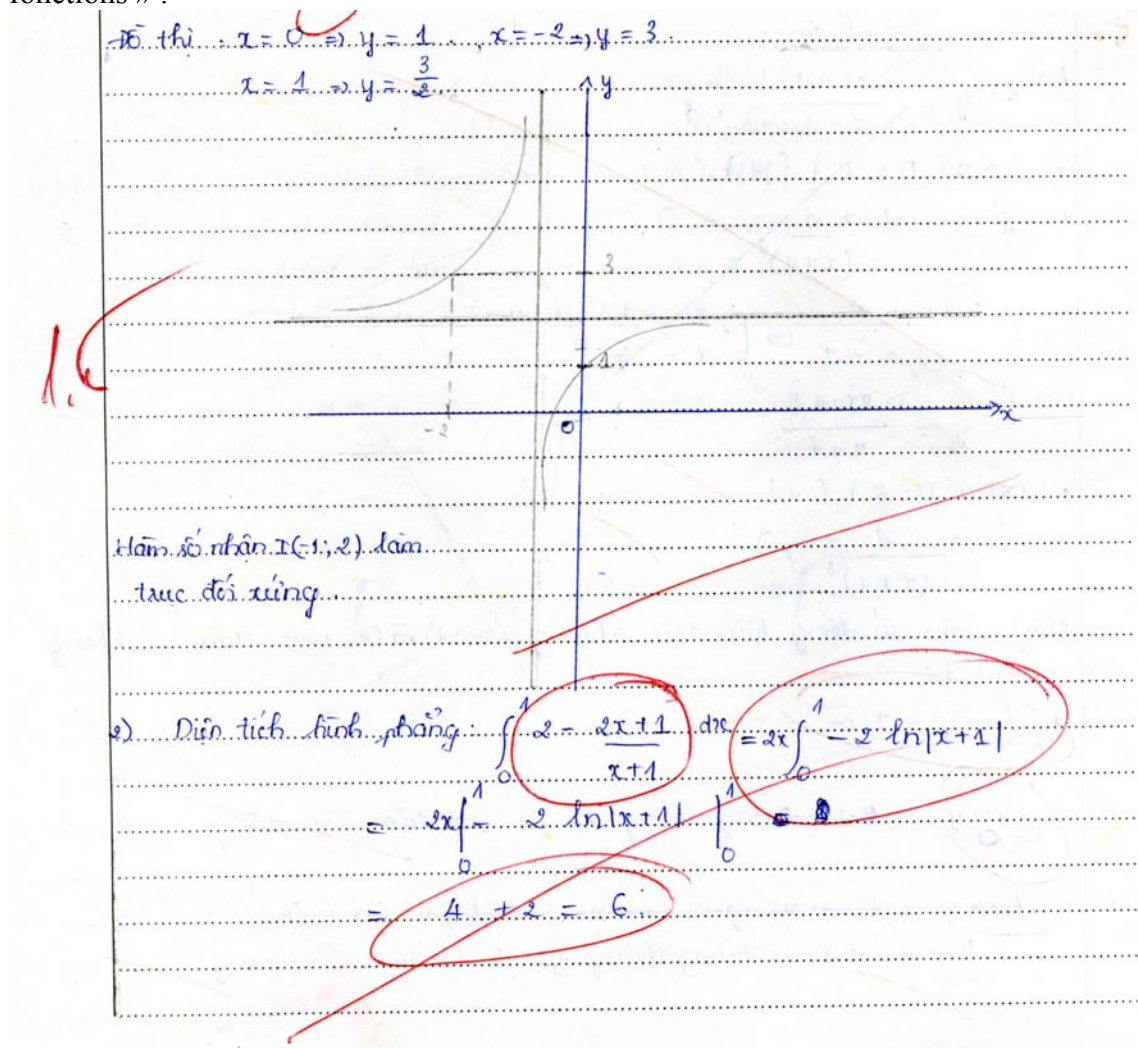
L'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des ordonnées ( $y = 0$ ) :

$$\frac{2x+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$$

On a :

$$S = \int_{-1}^{-1/2} \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| dx = \int_{-1}^{-1/2} \left| 2 - \frac{1}{x+1} \right| dx$$

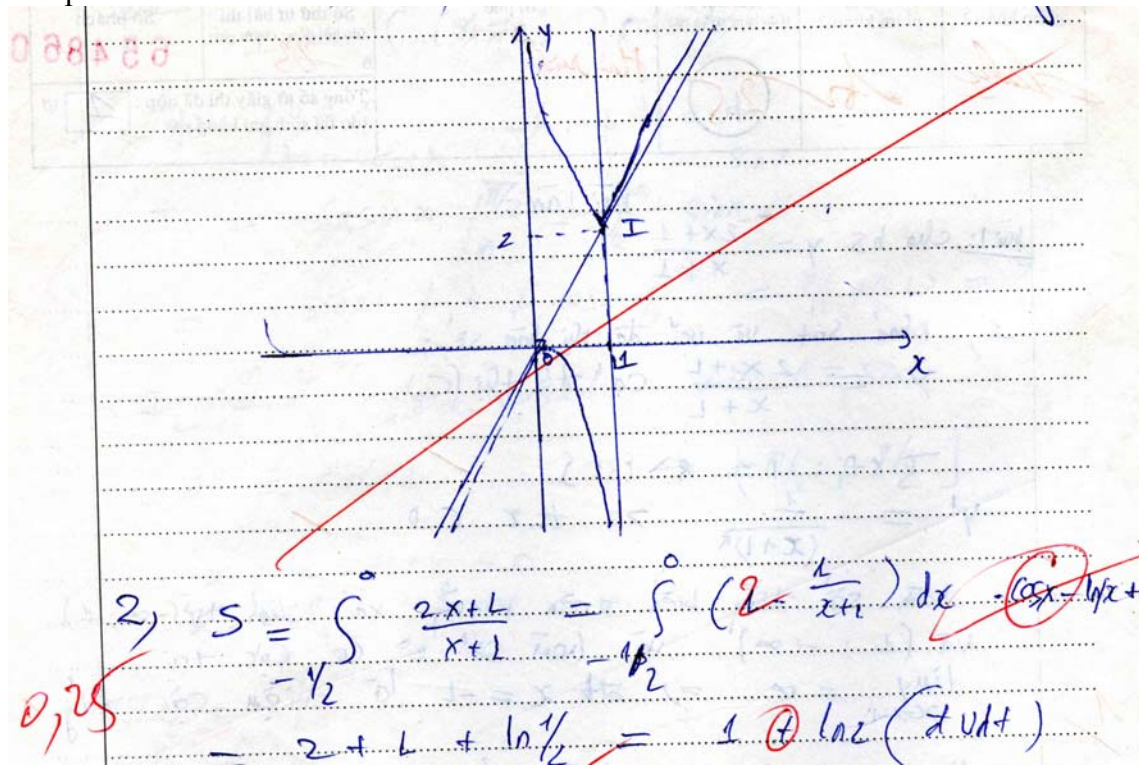
- Une écriture d'intégrale mobilisant la stratégie erronée « combinatoire sur les fonctions » :



2) L'aire de la surface plane :

$$\begin{aligned} \int_0^1 2 - \frac{2x+1}{x+1} dx &= 2x \Big|_0^1 - 2 \ln|x+1| \\ &= 2x \Big|_0^1 - 2 \ln|x+1| \Big|_0^1 \\ &= 4 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

- Une écriture d'intégrale non compatible avec le graphique mais institutionnellement acceptée :



## 2 Calcul d'intégrale

- Absence de  $dx$  des intégrales écrites : valence de *facteur algébrique inutile* de  $dx$

$I = \int_0^{\pi/2} (x + \sin^2 x) \cos x dx$

$= \int_0^{\pi/2} x \cos x + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 3x - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos x dx$

Exercice 2 :  $I = \int_0^{\pi/2} (x + \sin^2 x) \cos x dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 3x - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

- Calcul de primitive sans ostensif  $\int$  (calcul de  $v$  à partir de  $dv$ ) : confusion avec dérivation

Ex. 2:

1) Tech. phén  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x \, dx$

$\int u = \cos x$   
 $dv = (x + \sin^2 x) \, dx \Rightarrow \begin{cases} d(u) = -\sin x \, dx \\ v = 1 + \sin 2x \end{cases}$

$\text{Vég } I = \cos x (1 + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) \cdot \sin x \, dx$

Exercice 2:

1) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x \, dx$

On pose  $\begin{cases} u = \cos x \\ d(v) = (x + \sin^2 x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(u) = -\sin x \, dx \\ v = 1 + \sin 2x \end{cases}$

Donc  $I = \cos x (1 + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) \sin x \, dx$



## Annexe 6. Protocole d'une séance de révision du calcul d'intégrale dans la classe C1 de P1

1. *P1 écrit au tableau.*

Exercice 1 : Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin x dx$$

2. **P1.** Vous voyez, sous ces formes là, il est difficile de déterminer la méthode d'intégration à prendre. Je tente de transformer  $\cos 2x$ . On a trois formules.

3. *P1 écrit dans un coin du tableau.*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

4. **P1.** Je choisis la dernière. (*Il montre du doigt*) Je vais expliquer pourquoi après.

5. *P1 écrit au tableau, juste à côté de l'intégrale I.*

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) \cos x dx$$

6. **P1.** Qu'est-ce qu'on va faire pour la suite ?

7. *Un élève va au tableau et écrit.*

$$\text{On pose } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{On change les bornes d'intégration : } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

Donc :

$$I = \int_0^1 (1 - 2t^2) dt = \left( t - \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

8. **P1.** *On voit que  $\cos x$  est la dérivée de  $\sin x$ . Donc on pose  $t = \sin x$ .<sup>80</sup> C'est pourquoi, j'ai choisi la formule  $\cos 2x$  égale à  $1 - 2\sin^2 x$ . Je considère  $\cos x$  comme une « queue » qui indique la dérivée de la nouvelle variable.<sup>81</sup> Alors, pour l'intégrale J, quelle est la « queue », d'après vous ?*

9. **EE.**  $\sin x$ .

10. **P1.** Exact ! Quelle est la nouvelle variable ?

11. **E.**  $\sin x$ , Monsieur !

12. **E.**  $\cos x$ , Monsieur !

13. **P1.** Attention ! La queue et la nouvelle variable peuvent différer d'un coefficient multiplicatif. Donc, si on pose  $t$  égale à  $\cos x$ , on a  $dt = -\sin x dx$ . On va transformer  $\cos 2x$  de manière la nouvelle expression ne contienne que  $\cos x$ . Vous pouvez calculer J dès maintenant ?

14. **EE.** Oui, Monsieur !

16. **E.** Monsieur, on peut calculer I autrement en utilisant une formule trigonométrique !

17. **P1.** Oui. Vas-y, s'il te plaît !

18. *L'élève va au tableau et écrit.*

<sup>80</sup> Souligné par nous.

<sup>81</sup> Souligné par nous.



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos 3x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \right) - \left( \sin 0 + \frac{1}{3} \sin 0 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - (0 + 0) \right] \\
&= \frac{2}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

19. Oui, c'est une autre solution correcte. Mais, elle nécessite une formule de transformation de produit en somme, plus compliquée que la formule de l'angle double. Il vaut mieux suivre la première solution. On continue !

20. P1 écrit au tableau.

Exercice 2 : Calculer les intégrales :

$$\begin{aligned}
\text{a) } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + 3 \sin x} \\
\text{b) } J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x \sin x dx \\
\text{c) } K &= \int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1 + \ln x} dx}{x}
\end{aligned}$$

21. P1 demande à la fois à trois élèves d'aller au tableau pour résoudre trois exercices. Chacun de ces élèves écrit sa solution dans une partie du tableau noir qui lui est réservée.

a) On pose  $t = 1 + 3 \sin x$

$$\Rightarrow dt = 3 \cos x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} dt = \cos x dx$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^4 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^4 = \ln 4$$

$$\text{b) } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \sin x dx$$

On pose  $t = \cos x$

$$\Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow -dt = \sin x dx$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$$

$$= \left( -\frac{1}{t} - t \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= -1 - 1 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c) On pose  $t = \sqrt{1 + \ln x}$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + \ln x$$

$$\Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}$$

$$\begin{cases} x = e^3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$K = \int_1^2 t \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int_1^2 t^2 dt$$

$$= \frac{2t^3}{3} \Big|_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{14}{3}$$

22. P1 regarde attentivement les solutions et se met à les corriger (Nous mettons en trame forcée les corrections de P1).

a) On pose  $t = 1 + 3\sin x$

$$\Rightarrow dt = 3\cos x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} dt = \cos x dx$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \ln 4$$

$$b) J = \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \sin x dx$$

On pose  $t = \cos x$

$$\Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow -dt = \sin x dx$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

$$J = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$$

$$= \left( -\frac{1}{t} - t \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= -1 - 1 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c) On pose  $t = \sqrt{1 + \ln x}$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + \ln x$$

$$\Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}$$

$$\begin{cases} x = e^3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$K = \int_1^2 t \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int_1^2 t^2 dt$$

$$= \frac{2t^3}{3} \Big|_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{14}{3}$$

23. P1 continue son cours en écrivant au tableau.

Exercice 3 : Calculer les intégrales :

$$a) I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$b) J = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$c) K = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4}$$

$$d) H = \int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{x^2 + x + 3}$$

24. P1 demande à trois autres élèves d'aller au tableau pour résoudre trois premiers exercices. Ci-dessous les solutions des élèves et les corrections de P1.

25. On pose  $x = 2\sin t$

$$\Rightarrow x^2 = 4\sin^2 t \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow dx = 2\cos t dt$$

On change les bornes d'intégration :

$x$	2	0
$t$	$\frac{\pi}{2}$	0

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1 - \sin^2 t)} 2 \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \cos^2 t} 2 \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} dt \text{ (Barré par P1)} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t}{2} dt \text{ (Barré par P1)} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\
&= 2 \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

26. On pose  $x = 2 \operatorname{tg} t$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \operatorname{tg}^2 t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow dx = 2 \frac{1}{\cos^2 t} dt = 2(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$$

On change les bornes d'intégration :  $x = 2 \Rightarrow 2 \operatorname{tg} t = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$   
 $x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{tg} t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} t = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } J &= \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt}{4 \operatorname{tg}^2 t + 4} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt}{4(\operatorname{tg}^2 t + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

27. **P1.** Vous résoudrez les questions *c* et *d* à la maison !

## Annexe 7. Entretien avec P2, le 16 avril 2005

**K.** (*Observateur*) Dans tes séances de révision, tu as consacré la plupart de temps au calcul d'intégrale, un peu de temps au calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions, mais tu n'as rien abordé le calcul d'aire hors de l'étude de fonctions. Pourquoi cette répartition de temps ?

**P2.** Oui, c'est vrai que le calcul d'aire attaché à l'étude de fonctions est absent du manuel. Je ne comprends pas pourquoi... les auteurs du manuel ne l'ont pas abordé dans leur œuvre. Mais dans les cours « ordinaires », nous le proposons aux élèves. Ça, c'est pour préparer graduellement les élèves au bac parce que... *le problème d'étude de fonctions est toujours présent dans les sujets du bac*<sup>82</sup>. Quant au calcul d'aire hors de l'étude de fonctions, nous l'abordons aussi dans les cours « ordinaires », mais nous ne choisissons que des exercices faciles.

**K.** Et le calcul de la primitive prenant une valeur donnée en un point donné ? Tu ne l'as pas proposé non plus dans les révisions.

**P2.** C'était aussi une question de temps. Dans la limite du temps consacré aux révisions, j'ai dû bien sûr dans mon enseignement choisir les connaissances nécessaires au baccalauréat. Personnellement, je pense que le calcul d'intégrale se compose d'un calcul de primitive et d'un calcul numérique. Quand on enseigne un calcul d'intégrale, on enseigne aussi le calcul de primitive correspondant. Quant à ce type d'exercices [T'1], l'essentiel est de donner les primitives [sous la forme  $F(x) + C$ ]. La recherche de la constante  $C$  est très facile parce qu'elle est simplement la résolution d'une équation du premier degré. On peut négliger ce type d'exercices pour se concentrer sur le calcul d'intégrale.

**K.** Il semble que les calculs numériques dans les intégrales proposées soient simples.

**P2.** L'enjeu, à mon avis, est l'obtention de la primitive, à l'aide de la formule de Newton – Leibniz, du tableau des primitives usuelles et des méthodes d'intégration enseignées. C'est vraiment une nouvelle connaissance enseignée en classe 12, alors que le calcul numérique ne l'est pas, il est à la charge des programmes des classes 10 et 11. En classe, je rappelle les valeurs remarquables [des fonctions usuelles] nécessaires au contexte du calcul, mais je n'ai pas le temps suffisant pour rappeler systématiquement les fonctions élémentaires fondamentales enseignées dans les classes précédentes.

**K.** Dans une de tes séances, tu as proposé des intégrales de fonctions discontinues. Quel est le but de cette proposition ?

**P2.** (*Surpris*) C'est vrai ? Je n'ai jamais l'intention d'introduire ce type d'intégrales dans mes classes. C'était peut-être par inadvertance. Montre-moi ces intégrales-là ! (*Il prend la note de l'observateur. Une minute de silence passe.*)

**P2.** Oh ! Ces trois intégrales se sont inspirées d'un exercice du manuel. Regarde ! (*Il*

*feuillette son manuel et montre du doigt l'intégrale*  $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ). J'ai repris cette

intégrale en modifiant sa borne supérieure pour obtenir de différentes intégrales dont les calculs numériques deviennent aussi simples que possibles, mais je n'ai pas eu fait attention à la discontinuité des fonctions intégrantes.

**K.** Ça arrive à tout le monde ! Je te remercie de m'avoir accordé les observations de classe et cet entretien !

**P2.** De rien.

<sup>82</sup> Souligné par nous.



## Annexe 8. Évolution de la construction de l'ensemble des réels, des notions de fonction, de suite et de limite au service de l'introduction de la notion d'intégrale dans EMS en France et au Vietnam

Nous n'avons pas l'ambition d'aborder ici les conditions écologiques à la (bonne) vie de la notion d'*intégrale*. Nous présentons brièvement dans ce texte l'évolution de la construction de l'ensemble des réels, des notions de *fonction*, de *suite* et de *limite* au service de l'introduction de la notion d'intégrale dans EMS en France et au Vietnam.

### I. Survol de l'histoire des mathématiques

#### I.1. Ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$

L'ensemble des nombres réels  $\mathbf{R}$ , aussi appelé « droite réelle », ou antérieurement « continu numérique », est la base des bases de l'analyse mathématique.

Dès l'Antiquité, les Grecs découvrent l'incommensurabilité entre le côté  $C$  d'un carré et sa diagonale  $D$ , ce que nous appelons en termes modernes l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ . Cette découverte permet à Eudoxe et Euclide de construire la théorie des proportions. Un « nombre » comme  $D/C$  peut être conçu comme une proportion<sup>83</sup>.

Au XIX<sup>e</sup> siècle, Bolzano et Cauchy approfondissent l'étude du « continu numérique ». Mais il faut attendre Weierstrass, Dedekind, Mérey, Cantor pour la construction de  $\mathbf{R}$  à partir de  $\mathbf{Q}$  par des méthodes différentes, sans se fonder sur des propriétés admises des grandeurs géométriques. Borel et Baire vont plus loin avec leurs études extrêmement subtiles des sous-ensembles de  $\mathbf{R}$ .

De nos jours, la propriété fondamentale de  $\mathbf{R}$  (toute partie non vide et majorée de  $\mathbf{R}$  admet une borne supérieure) n'est présentée que dans l'enseignement supérieur.

#### I.2. Notion de fonction

La notion de *fonction* est une des deux notions centrales de l'Analyse, conjointement avec celle de *limite*.

Au Moyen-âge, cette notion est présente dans les travaux mathématiques de façon implicite, obscure et confuse.

Dans l'histoire des mathématiques, apparaissent trois aspects majeurs de la notion de *fonction* qui sont unifiés plus tard par sa définition précise.

- Dans l'aspect calculatoire (ou algébrique), une fonction générale est définie par son expression algébrique (y comprise la composition, le passage à la limite ou à une primitive ou la sommation de séries). Cette approche peut conduire à une définition restrictive de la notion car il existe des fonctions ne peuvent être algébriquement décrites.

- Dans l'aspect graphique (ou géométrique), une fonction est assimilée à sa courbe représentative dans un repère. L'intuition géométrique peut empêcher de considérer des fonctions radicalement irrégulières, comme les fonctions discontinues sur un ensemble dense ou les fonctions continues sur  $\mathbf{R}$  non dérivable en aucun point.

---

<sup>83</sup> En ce sens, la théorie des proportions est généralement équivalente aux constructions modernes de  $\mathbf{R}$  comme sur-corps complet de  $\mathbf{Q}$  dans lequel  $\mathbf{Q}$  soit dense.

- Dans l'aspect intuitif et causal, une fonction est considérée comme une quantité  $y$  dépendant d'une autre quantité  $x$  et on dit alors que  $y$  varie en fonction de  $x$ . Cependant, le concept abstrait et général de *correspondance* n'est pas encore dégagé à l'époque : les fonctions mises en jeu se réduisent soit à des tableaux numériques, soit à des formules algébriques attachées au problème étudié.

La définition élémentaire et générale de la notion de *fonction* que nous utilisons aujourd'hui apparaît dans le cadre de la théorie des ensembles.

### **I.3. Notion de limite**

La limite est une notion, qui est implicitement au centre de l'Analyse, mais formalisée très tard comme celles de *nombre réel* et de *continuité*.

Les paradoxes de Zénon d'Élée contiennent en germe le concept de limite. Le concept clé, sous jacent dans ses raisonnements, est celui d'*indivisible* qu'adaptent avec hardiesse les mathématiciens médiévaux, puis ceux de la Renaissance et de l'âge classique. Pascal, Newton et bien d'autres savent traduire le langage des « infiniment petit » par des termes très proches de notre concept actuel de la limite.

Gauss et surtout Cauchy commencent à rechercher la précision. Il faut attendre Weierstrass pour la définition de la limite en  $\varepsilon, \delta$ .

## **II. Dans EMS en France**

### **II.1. Construction de $\mathbf{R}$**

*Dans le programme 1971*, l'ensemble des réels est considéré comme un corps totalement ordonné archimédien. Sa construction, ses propriétés structurelles et topologiques sont présentées rigoureusement dans les manuels de terminale S. Cela permet de présenter des exemples et des contre-exemples sur l'intégrabilité des fonctions.

*Dans le programme 2002*, l'ensemble  $\mathbf{R}$  n'est pas construit de façon explicite et systématique. Le lien entre  $\mathbf{R}$  et la droite réelle est exploité pour admettre explicitement ou implicitement certaines propriétés des réels, nécessaires à la présentation des notions de fonction et de limite. En revanche, le principe de récurrence est soigneusement présenté avec les suites de récurrence. Ceci prépare à la définition de l'intégrale comme limite commune de suites adjacentes basée sur un concept intuitif de limite que nous présenterons plus tard.

### **II.2. Notion de fonction**

*Le programme 1971* prescrit les fonctions en escalier comme fonctions de référence (entre autres) : les fonctions en escalier sont considérées comme un cas particulier des fonctions définies par plusieurs expressions analytiques. Enrichissant le bestiaire des fonctions enseignées à l'époque, elles servent effectivement à l'étude de la continuité et de l'intégrabilité.

*Dans le programme 2002*, les fonctions définies par plusieurs expressions analytiques apparaissent peu souvent. Cependant, le fait qu'une fonction puisse être donnée par sa courbe représentative ou par son tableau de valeurs exprime un changement de conception sur l'enseignement des mathématiques, en permettant l'observation de

données graphiques ou numériques et la formulation de conjectures, notamment à l'aide de l'environnement informatique, par exemple, le tableur ou la calculatrice.

« Les représentations graphiques occupent désormais une nouvelle niche : *permettre une démarche expérimentale*. [...] »

Plus précisément, des résultats théoriques (propriétés d'un objet, relations entre des objets...) peuvent être conjecturés à partir d'observations graphiques.

De plus, l'étude graphique et l'étude numérique sont maintenant mises sur le même plan. Leur importance est égale. » (Le Van Tien 2000, p. 173)

L'interprétation géométrique de l'intégrale aux dépens de l'intégrabilité est plus favorisée qu'auparavant grâce à :

- l'intervention limitée des fonctions données par plusieurs expressions,
- la présence des fonctions données graphiquement ou par des tableaux de données.

### II.3. Notion de suite

La notion de *suite numérique* est abordée uniquement en terminale *dans le programme de 1971*, les suites étant considérées comme un cas particulier des fonctions. *Dans les programmes 2002*, la notion de suite apparaît en première et en terminale. En particulier, les suites de récurrence, les suites adjacentes sont plus présentes qu'en 1971, notamment la calculatrice est préconisée pour conjecturer des propriétés et la convergence (ou la divergence) des suites.

Du point de vue épistémologique, les concepts de suite et de fonction ont une égale importance, tant au point de vue de la culture scientifique que de l'approfondissement théorique et expérimental. En outre, le passage des problèmes discrets à des problèmes continus et inversement, des problèmes infinis à des problèmes finis, intervient constamment [...]. (Bulletin APMEP n°323, 1980, p. 294)

Ceci est une des raisons internes qui fait que la noosphère, à travers les programmes de la décennie 1980, veut rétablir une ressemblance, entre l'Analyse savante et l'Analyse à enseigner, en ce qui concerne la relation suite-fonction qui exprime la dialectique discret-continu. Dans les programmes en vigueur depuis 2002, cette relation est maintenue. En terminale :

« certains phénomènes peuvent être étudiés soit en temps discret -à l'aide d'une suite-, soit en temps continu -à l'aide d'une fonction ». (Programme de classe de terminale S, 2002)

### II.4. Ordre de présentation des notions de base de l'Analyse

*Dans le programme 1971*, les notions de base de l'Analyse se présentent dans l'ordre suivant : *fonction, continuité, limite, dérivée, intégrale*. Cet ordre est d'une part un indice de l'importance de la notion de continuité dans le programme, et exige d'autre part une définition de la continuité sans recours à la notion de limite. La définition de la limite (de fonction) devient secondaire par rapport à celle de continuité. Quelles conséquences ont ces choix dans l'étude de la continuité et par suite dans l'étude de l'intégrabilité ? Examinons un manuel<sup>84</sup>

- Une fonction  $f$  définie sur un intervalle de centre  $x_0$  est continue en  $x_0$  si et seulement si, quel que soit l'intervalle  $J$  de centre  $f(x_0)$ , il existe un intervalle  $I$  de centre  $x_0$  tel que  $f(I) \subset J$ .
- Une fonction  $f$  définie sur un intervalle de centre  $x_0$  est continue en  $x_0$  si et seulement si

<sup>84</sup> Mathématique Terminales C, D, E - Tome 2 - Fernand Nathan, 1971, pp. 7,8.



$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[) |f(x) - f(x_0)| < \alpha$$

- Une fonction  $f$  définie sur un intervalle de centre  $x_0$  est continue en  $x_0$  si et seulement si, quel que soit  $\alpha > 0$ , il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $x$  réel on ait :  $|x - x_0| < \beta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha$

Un lien peut alors être établi entre continuité et limite (en page 22) :

Il résulte de la définition d'une limite qu'une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle a une limite en  $x_0$  et si cette limite est  $f(x_0)$ .

Cette relation permet l'étude de la continuité au moyen du calcul de limite pour une fonction définie par une ou plusieurs expressions analytiques.

En 2002, « on se contentera donc d'une approche intuitive des limites finies en un point à travers la notion de dérivée<sup>85</sup> », l'ordre *fonction, continuité, limite, dérivée, intégrale* est démantelée pour une présentation en « désordre » : *fonction, limite réelle d'une fonction en zéro, dérivée, limite de fonctions, suites numériques*. Le concept de dérivée devient un élément organisateur du programme de première : la condition de dérivabilité écrase celle de continuité, comme dans le théorème des valeurs intermédiaires :

$f$  est une fonction dérivable et strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, alors l'équation  $f(x) = 0$  a une solution et une seule sur  $[a, b]$ .

Dans la partie exercices des manuels 1971, la notion de suites adjacentes n'intervient que dans l'étude de convergence des suites. En 2002, elle intervient de plus dans le calcul numérique de limite.

### III. Dans EMS au Vietnam

Dans les programmes concernés, l'ensemble des réels  $\mathbf{R}$  est introduit en classe 9 (troisième) et défini comme l'ensemble des rationnels et des irrationnels, où un irrationnel est défini comme une écriture décimale illimitée non périodique (EDINP).

#### III.1. Construction de $\mathbf{R}$

Dans le programme 1975, les propriétés de  $\mathbf{R}$  ne sont pas présentées simultanément, mais intégrées pas à pas à des moments jugés pertinents par les rédacteurs. Citons par exemple les justifications à propos du calcul de la limite d'une somme de Riemann dans le manuel unique de 1979 :

Il faut absolument calculer la limite  $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  en faisant tendre  $d = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$  vers 0. Il ne faut pas remplacer  $d \rightarrow 0$  par  $n \rightarrow \infty$  car à partir de  $n \rightarrow \infty$ , on ne peut pas toujours en déduire que  $d \rightarrow 0$ . En effet, si on subdivise comme suit :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = \frac{a+b}{2} < x_n = b$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$d = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_{n-1} = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

<sup>85</sup> Programme de classe de première S, 2002.

ainsi  $d$  ne peut pas tendre vers 0.

Dans le programme 1990, l'intervention de l'ensemble  $\mathbf{R}$  se traduit indirectement par le passage de la classe 7 (cinquième) à la classe 9 (troisième) dans l'étude de fonctions linéaires :

En classe 7 (cinquième), l'élève ne connaît que l'ensemble des rationnels  $\mathbf{Q}$ . On énonce le théorème de la courbe représentative de la fonction linéaire comme le suivant :  
La courbe représentative de la fonction  $y = ax$  comprend des points alignés.

En classe 9 (troisième), l'ensemble  $\mathbf{R}$  est introduit, le théorème est repris et modifié comme le suivant :  
La courbe représentative de la fonction  $y = ax$  est une droite passant par l'origine.

### III.2. Notion de fonction

Dans les programmes, les fonctions exponentielles et logarithmes sont construites avant de définir l'intégrale. Les programmes ne s'intéressent qu'aux fonctions données par des formules analytiques. Les fonctions données par leurs courbes représentatives ou par leurs tableaux de données n'ont pas de place officielle, et elles sont présentes que comme illustration.

### III.3. Notion de limite

En cohérence avec le mode d'existence des fonctions, la définition de la notion limite ne peuvent s'appuyer sur une approche graphique ou numérique, mais utilise le langage de la logique formelle. La limite d'une fonction est définie par la limite de suites et cette dernière est définie par le langage  $\varepsilon, n_0$ .

Le réel  $L$  est appelé limite de la fonction  $f(x)$  (ou la fonction  $f(x)$  a pour limite  $L$ ) lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si pour toute suite  $\{x_n\}$  convergeant vers  $x_0$  ( $x_n \neq x_0$ ), la suite  $\{f(x_n)\}$  converge vers  $L$  ; brièvement :  $x_n \rightarrow x_0$  de manière libre, on a toujours  $f(x_n) \rightarrow L$ . (*Analyse 11*, manuel unique 1979)

### III.4. Ordre de présentation des notions de base

L'ordre de présentation des notions de base de l'Analyse est le suivant : *fonction, suite, limite de suite, limite de fonction, continuité, dérivée, intégrale*. On peut dire que l'Analyse enseignée dans les deux périodes est une analyse algébrisée, qui s'intéresse peu à l'encadrement et à l'approximation.

Nous synthétisons dans le tableau suivant les conditions écologiques à la vie de l'intégrale dans EMS en France et au Vietnam.

	France		Vietnam	
	1971	2000	1975	1990
Construction de <b>R</b>	oui	non	R = {rationnels, irrationnels}	
Fonction	Algébrique	Algébrique/Graphique/ Tableaux de données	Algébrique	
Suites	Cas particulier des fonctions	Suite /fonction Discret/continu	Limite suite langage $\varepsilon, n_0$ Limite suite $\rightarrow$ limite fonction	
limite	Limite : voisinage	Approche intuitive		
Ordre	fonction, <b>continuité, limite,</b> dérivée, intégrale	fonction, limite en zéro, <b>dérivée</b> , limite de fonctions, continuité, suites, intégrale	fonction, suite, limite de suite, limite de fonction, continuité, dérivée, intégrale	

*Conditions écologiques à la vie de l'intégrale dans EMS en France et au Vietnam*

Les conditions écologiques actuelles à la vie de la notion d'intégrale s'avèrent donc fort différentes dans les deux institutions. Cela permet d'expliquer les attentes différenciées des deux institutions vis-à-vis de l'intégrale.