



**HAL**  
open science

# Localisation de source en milieu réverbérant par Retournement Temporel

Guillemette Ribay

► **To cite this version:**

Guillemette Ribay. Localisation de source en milieu réverbérant par Retournement Temporel. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2006. Français. NNT: . tel-00122345

**HAL Id: tel-00122345**

**<https://theses.hal.science/tel-00122345>**

Submitted on 29 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse de Doctorat de l'Université  
Paris VII Denis Diderot**

Spécialité :  
**Acoustique Physique**

présentée par

**Guillemette RIBAY**

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'Université Paris VII

Titre de la thèse :

**Localisation de source en milieu réverbérant  
par Retournement Temporel**

*Soutenue le mercredi 13 décembre 2006 devant le jury composé de :*

Pierre Alais	Président du jury
Frédéric Cohen-Tenoudji	Examineur
Julien de Rosny	Examineur
Marc Deschamps	Rapporteur
Mathias Fink	Directeur de thèse
Catherine Potel	Rapporteur



# Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier Mathias Fink, directeur du Laboratoire Ondes et Acoustique, de m'avoir accordé sa confiance en me permettant d'effectuer ma thèse au sein de son laboratoire sous sa direction.

Mes remerciements vont aussi à Catherine Potel, professeur à l'Université du Maine, et à Marc Deschamps, directeur de recherche au Laboratoire de Mécanique Physique de Bordeaux, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Merci à Pierre Alais, professeur émérite de l'Université Paris VI, et à Frédéric Cohen Tenoudji d'avoir bien voulu être examinateurs lors de la soutenance de ma thèse.

Je remercie également les chercheurs du LOA qui m'ont encadrée tout au long de cette thèse, à savoir Julien de Rosny et Stéphane Catheline, de même que Didier Cassereau pour la dernière année de thèse. Ils m'ont beaucoup apporté et j'ai énormément appris avec eux.

Merci à Ros Kiri Ing, initiateur du projet européen TAICHI qui a financé mon travail de thèse sur la localisation d'impacts à la surface de plaques réverbérantes. R.K.Ing a fondé une start-up baptisée Sensitive Object, dans laquelle il a développé cette technique de localisation par corrélation afin de pouvoir offrir des produits sur le marché, comme les écrans tactiles ou le clavier virtuel.

Un grand merci également à Dominique Clorennec, ingénieur de recherche au laboratoire, pour son aide précieuse lors des expériences de mesure par interféromètre laser.

Je souhaite également remercier Claire Prada pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues et pour son soutien.

Merci à tous les membres du LOA grâce auxquels l'ambiance de travail est si chaleureuse : Patricia, les Arnauds, Jean-François Aubry, Mickael Tanter, Nicolas Quieffin, les thésards...et merci à ceux que j'aurais éventuellement oubliés dans cette liste et qui m'ont aidée d'une façon ou d'une autre!



# Table des matières

Quelques notations et abréviations	9
Introduction générale	11
<b>1 Rappels sur le retournement temporel en milieu réverbérant</b>	<b>13</b>
<b>2 Localisation de sources de bruit continues dans une chambre réverbérante par Retournement Temporel</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Simulations numériques . . . . .	20
2.3 Théorie . . . . .	24
2.3.1 Lien entre RT impulsionnel et RT de bruit . . . . .	24
2.3.2 Résultats théoriques sur le RT impulsionnel . . . . .	25
2.3.3 Application des résultats théoriques à notre salle réverbérante et au RT de sources aléatoires continues . . . . .	28
2.3.3.1 Densité modale et temps de réverbération de la salle utilisée en expérience . . . . .	28
2.3.3.2 Rapport signal sur bruit théorique dans le cas du RT de sources aléatoires continues . . . . .	29
2.4 Expériences . . . . .	30
2.4.1 Rapport signal sur bruit . . . . .	31
2.4.1.1 Effet de corrélation entre les éléments du Miroir à Retournement Temporel . . . . .	31
2.4.1.2 Influence de l'étendue de la source . . . . .	32
2.4.2 Résolution . . . . .	36
2.4.3 Robustesse de la technique : sensibilité à un changement de température .	39
2.4.4 Effet d'une variation du temps de réverbération de la pièce . . . . .	41

2.5	Conclusion . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Localisation d'impacts à la surface de plaques et étude du mode de Lamb <math>A_0</math> à basse fréquence</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Principe de la méthode de localisation et facteur de contraste . . . . .	48
3.2.1	Présentation de la technique et lien avec le Retournement Temporel . . . . .	48
3.2.2	Facteur de contraste . . . . .	52
3.3	Etude de la nature des ondes entrant en jeu : prédominance du mode de flexion $A_0$	62
3.3.1	Utilisation d'un code de simulation numérique à deux dimensions . . . . .	63
3.3.2	Validation expérimentale : les difficultés de mesure des courbes de dispersion en milieu réverbérant . . . . .	67
3.3.3	Résolution et nombre de points tactiles . . . . .	69
3.3.4	Retournement Temporel et filtre inverse . . . . .	75
3.4	Interaction du mode $A_0$ avec les bords de la plaque . . . . .	78
3.4.1	Déphasage de $\frac{\pi}{2}$ et ondes évanescentes : observation numérique . . . . .	79
3.4.2	Preuve théorique du déphasage de $\pi/2$ . . . . .	82
3.4.3	Validation expérimentale du déphasage et de la présence des ondes évanescentes . . . . .	86
3.4.4	Influence des bords de la plaque sur la résolution spatiale de la tache focale	93
3.5	Conclusion . . . . .	96
	Annexe 1 : Calcul de l'énergie de chacun des modes . . . . .	97
	Annexe 2 : Calcul de la densité modale d'une plaque rectangulaire en flexion . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Simulation numérique de la propagation du mode de plaque <math>A_0</math></b>	<b>101</b>
4.1	Introduction . . . . .	101
4.2	Simulation dans l'approximation basse fréquence . . . . .	102
4.2.1	Condition de stabilité : méthode de Fourier . . . . .	103
4.2.2	Conditions aux limites . . . . .	104
4.2.3	Comparaison avec le code élastique à deux dimensions . . . . .	106
4.2.4	Validation du code de simulation par l'expérience et par la méthode de Ritz	108
4.2.4.1	Expérience dans une barre . . . . .	108
4.2.4.2	Validité du code $A_0$ dans le cas d'une plaque encastree . . . . .	109
4.3	Prise en compte de l'atténuation . . . . .	110
4.4	Code amélioré valable aux hautes fréquences . . . . .	115

4.4.1	Schéma numérique et stabilité . . . . .	115
4.4.2	Validation du code de simulation corrigé . . . . .	116
4.5	Conclusion . . . . .	117
Annexe 1 : Introduction de l'atténuation du matériau dans l'équation de propagation du mode $A_0$ . . . . .		119
Annexe 2 : Equation de propagation du mode $A_0$ corrigée (approche de Mindlin) . . .		121
<b>5</b>	<b>Influence de la température sur la localisation d'impacts sur une plaque mince</b>	<b>125</b>
5.1	Position du problème . . . . .	125
5.2	Théorie . . . . .	126
5.2.1	Dépendance des paramètres du milieu avec la température . . . . .	126
5.2.2	Effet d'une variation de température sur les réponses impulsionnelles dans une plaque . . . . .	130
5.2.3	Fréquences propres d'une plaque en flexion et influence de la température	132
5.3	Simulations . . . . .	134
5.4	Expériences par interferomètre laser sur divers matériaux . . . . .	140
5.5	Conclusion . . . . .	147
<b>Conclusion générale</b>		<b>149</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>151</b>





# Quelques notations et abréviations

- RT : Retournement Temporel
- MRT : Miroir à Retournement Temporel : couples de récepteurs/émetteurs qui enregistrent le champ (de pression ou de déplacement suivant le contexte) en fonction du temps lors de la première étape du Retournement Temporel, et réémettent ce champ dans l'ordre inverse lors de la seconde étape du Retournement Temporel.
- Fonction de Green notée indifféremment  $G(A, B, t)$  ou  $h_{AB}(t)$  : réponse du milieu enregistrée au point B lorsqu'au point A est émise une impulsion de Dirac ; cette dernière sera notée  $\delta(t)$ .
- SNR : Rapport Signal sur Bruit, défini soit comme le quotient de l'énergie de la partie 'signal' sur celle du 'bruit' (chapitre 1), soit comme le quotient de l'amplitude du signal sur l'amplitude (au sens de la valeur efficace) du bruit (chapitres suivants).
- Les vecteurs sont notés en caractère gras.
- $F$  : transformée de Fourier de la fonction  $f$ .
- $\bar{f}$  : moyenne temporelle de la fonction  $f$ .
- $\langle f \rangle$  : moyenne statistique de la variable aléatoire  $f$ .
- $\langle f, g \rangle$  : inter-corrélation de  $f$  et  $g$ .
- $N$  : nombre d'éléments du miroir à retournement temporel.
- $D$  : densité modale : nombre de fréquences propres par unité de fréquence d'une cavité.
- $h$  : épaisseur totale d'une plaque.
- $fh$  : produit de la fréquence de l'onde se propageant dans une plaque par l'épaisseur de cette plaque.



# Introduction générale

Depuis une quinzaine d'années, les propriétés du Retournement Temporel (RT) des ondes générées par des sources impulsionnelles ont été étudiées dans de nombreux milieux [1]. Son principal intérêt réside dans la possibilité de focaliser des ondes dans des milieux qui ne se prêtent pas à la focalisation classique par lois de retard. Ainsi, il a par exemple prouvé son efficacité pour focaliser des ultrasons dans des milieux ouverts multidiffuseurs, ou des milieux clos réverbérants. C'est dans ce type de milieu qu'ont été effectuées les expériences présentées dans cette thèse, et ce dans deux configurations bien distinctes : d'une part, nous cherchons à focaliser spatialement une source acoustique aléatoire de longue durée par RT en chambre réverbérante, et d'autre part nous nous intéressons à la localisation d'impacts donnés à la surface de plaques réverbérantes afin de rendre ces dernières 'interactives'.

Dans le premier chapitre, nous présenterons brièvement les principes fondamentaux sur lesquels repose le concept de Retournement Temporel. Nous rappellerons les principaux résultats des travaux déjà réalisés sur l'application du RT en milieu réverbérant. En particulier, nous verrons que l'avantage d'un tel milieu consiste à pouvoir, dans le cas extrême, focaliser une onde à l'aide d'un unique transducteur.

Le second chapitre traite de l'utilisation du RT pour focaliser spatialement du bruit en chambre réverbérante dans le domaine audible. En effet, jusqu'à présent, seule l'émission de signaux très brefs a été considérée. Dans un premier temps, à l'aide d'une simulation numérique des ondes acoustiques dans un milieu à deux dimensions, nous observerons que le RT permet une focalisation spatiale du bruit. La suite du chapitre a pour but de quantifier la qualité de cette focalisation, et de mieux en comprendre les limites. Nous établirons ainsi un lien théorique entre RT impulsionnel et RT d'un signal complexe, prouvant alors que le rapport signal sur bruit dépend seulement du nombre de transducteurs utilisés. Des expériences menées dans une chambre réverbérante avec pour émission un signal proche d'un bruit rose gaussien de bande passante allant de 300 Hz à 2 kHz seront présentées. Nous verrons dans quelle mesure deux sources de bruit proches peuvent être distinguées. Enfin, nous chercherons à quantifier la sensibilité de la

technique à des fluctuations de température, et au caractère absorbant de la salle.

Le troisième chapitre aborde le problème de la localisation d'impacts à la surface de plaques réverbérantes. L'objectif de cette étude est de rendre tactiles un grand nombre d'objets de la vie courante, plus précisément tous ceux qui sont assimilables à des plaques. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un projet européen baptisé TAICHI (Tangible Acoustic Interface for Computer Human Interaction), impliquant six autres laboratoires européens. Comme nous l'avons vu, le RT permet de focaliser activement une impulsion dans un milieu clos réverbérant. R.K. Ing, S. Catheline et N. Quieffin ont alors eu l'idée d'exploiter ce principe de façon passive pour localiser une source impulsionnelle à la surface d'une plaque. Cette technique consiste dans un premier temps à créer une bibliothèque des réponses impulsionnelles de la plaque. Dans un second temps, la position d'un impact est obtenue en cherchant par une technique de corrélation la réponse de la bibliothèque qui ressemble le plus à la réponse à cet impact. La compréhension des capacités de cette technique, notamment en terme de résolution, nécessite une étude approfondie de la génération et propagation des ondes dans la plaque. Dans ce manuscrit, nous verrons que le mode excité par un impact donné à la surface d'une plaque est essentiellement le mode de Lamb  $A_0$ . L'interaction de cette onde avec les bords libres de la plaque est également étudiée en détail ; nous verrons quelle est son influence sur la localisation par corrélation.

Etant donné l'importance du rôle joué par le mode de Lamb  $A_0$  dans ces expériences, nous avons développé un code de simulation de la propagation de ce mode dans des plaques par différences finies, qui fait l'objet du chapitre 4. Il repose sur l'équation de propagation de ce mode dans l'approximation basse fréquence, où les variations du champ avec la profondeur sont négligées : ainsi, la propagation dans une plaque est réduite à un calcul dans un milieu à deux dimensions, avec de ce fait un gain de temps et de mémoire vive conséquent. Afin de valider ce code, des résultats de simulation seront comparés à des résultats expérimentaux.

Enfin, dans le chapitre 5, nous abordons l'influence d'une variation de température de la plaque entre la constitution de la bibliothèque des signatures acoustiques et son utilisation. Lors d'une expérience de RT, une telle rupture d'invariance du milieu peut dégrader sensiblement la focalisation. Or, dans la vie courante, la température des objets peut varier, parfois considérablement (comme pour les vitrines de magasins, exposées aux températures extérieures). Nous verrons donc comment évoluent théoriquement les signatures acoustiques d'un impact sur une plaque en flexion avec la température, dans l'approximation basse fréquence. Pour vérifier ces résultats, des simulations reposant sur le code présenté au chapitre 4 seront réalisées. Enfin, des expériences menées sur des plaques de différents matériaux seront présentées.

# Chapitre 1

## Rappels sur le retournement temporel en milieu réverbérant

Le principe du Retournement Temporel repose sur l'invariance de l'équation de propagation des ondes par renversement du temps. Il a été démontré pour des ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques. Par soucis de simplicité, nous allons uniquement rappeler la démonstration pour des ondes acoustiques. Une telle onde est décrite par son potentiel scalaire  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{r}$  étant le vecteur position dans le milieu, et  $t$  le temps.

L'équation de propagation de cette onde dans un milieu non dissipatif et inhomogène est alors la suivante :

$$\rho_0(\mathbf{r}) \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r})} \operatorname{grad}(\Phi(\mathbf{r}, t)) \right) - \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$c_0$  étant la distribution spatiale de vitesse de propagation du son, et  $\rho_0$  la distribution spatiale de masse volumique.

Comme cette équation ne fait intervenir qu'une dérivée temporelle d'ordre 2, elle est invariante sous l'action de l'opérateur d'inversion du temps qui transforme  $t$  en  $-t$ . Ainsi, si la fonction  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  est solution de cette équation,  $\Phi(\mathbf{r}, -t)$  sera également solution. Pour réaliser une opération de Retournement Temporel, il nous faut générer  $\Phi(\mathbf{r}, -t)$ . Une première solution est d'imposer les conditions initiales du champ, c'est-à-dire imposer à un instant donné  $t_0$  le champ et sa dérivée temporelle en tout point de l'espace.

Or cette solution est évidemment trop contraignante pour être applicable expérimentalement. M.Fink et D. Cassereau [2] ont alors eu l'idée d'exploiter le théorème de Helmholtz-Kirchhoff : le champ acoustique dans tout un volume peut être exprimé à partir uniquement de la connaissance

du champ et de sa dérivée en tout point d'une surface fermée qui entoure ce volume :

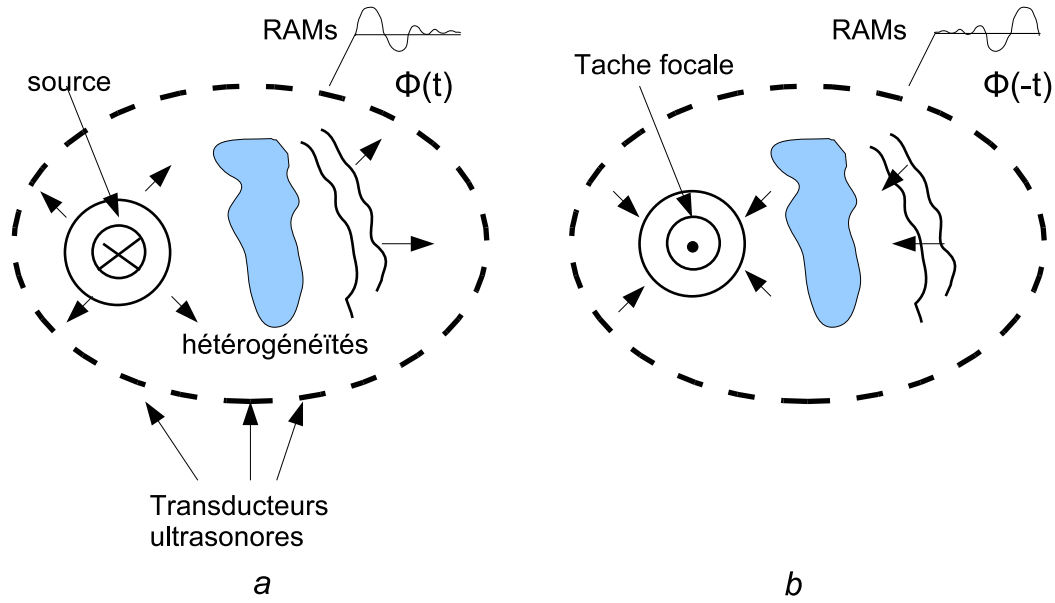
$$\Phi(\mathbf{r}, -t) = \int \int \left( G(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}, -t) \otimes \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_S, -t)}{\partial n_S} - \frac{\partial G(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}, -t)}{\partial n_S} \otimes \Phi(\mathbf{r}_S, -t) \right) dS. \quad (1.2)$$

$G(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}, -t)$  est la fonction de Green du milieu entre les points  $\mathbf{r}_S$  et  $\mathbf{r}$ , définie comme la solution de l'équation de propagation (1.1) dont le membre de droite n'est pas nul et vaut  $-\delta(t)\delta(|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|)$ ,  $\delta$  étant la distribution de Dirac ;  $n_S$  est la normale à la surface orientée vers l'extérieur ; enfin  $\otimes$  représente l'opérateur de convolution temporelle.

Le premier terme de droite de l'équation (1.2) correspond à l'émission par une source monopolaire placée sur la surface de la dérivée par rapport à la normale du champ retourné temporellement,  $\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_S, -t)}{\partial n_S}$ . Le second terme, quant à lui, signifie qu'une source dipolaire placée en  $S$  émet le retourné temporel du champ lui-même,  $\Phi(\mathbf{r}_S, -t)$ . Ainsi, en imposant simplement la valeur du champ et de sa dérivée normale sur la surface fermée, nous avons pu reconstituer  $\Phi(\mathbf{r}, -t)$  dans tout le volume.

En pratique, sous certaines conditions, il est possible de se passer d'utiliser à la fois des transducteurs monopolaires et dipolaires. J. de Rosny [3] et D.Cassereau [2] ont montré que, si on enregistre et réémet seulement le champ sur la surface (Retournement Temporel monopolaire), alors le champ obtenu après Retournement Temporel exact (c'est-à-dire comme décrit au paragraphe ci-dessus) est proportionnel à la dérivée par rapport au temps du champ obtenu après RT monopolaire. Ce résultat a été étendu par J. de Rosny au cas du Retournement Temporel dans un milieu fermé à condition que ce dernier soit fortement réverbérant. C'est pourquoi, dans toute cette thèse, nous n'utiliserons que du RT monopolaire.

Une expérience de Retournement Temporel suit alors le schéma suivant (cf figure 1.1). Dans une première étape, une source émet une impulsion brève. L'onde acoustique créée se propage dans un milieu pouvant contenir de nombreux réflecteurs ou diffuseurs : le front d'onde est alors déformé et s'étale dans le temps. Pendant ce temps, un ensemble de transducteurs formant le Miroir à Retournement Temporel (MRT) enregistrent le champ de pression en fonction du temps. Chaque signal est échantillonné et stocké dans une mémoire. Dans la seconde étape, l'ensemble des signaux enregistrés est retourné temporellement puis ré-émis dans le milieu par les transducteurs du MRT.



**FIG. 1.1 :** Schéma de principe du Retournement Temporel : émission d'une source impulsionnelle et enregistrement des signaux sur toute une surface entourant la source lors de la première étape (a) ; refocalisation après réémission des signaux retournés temporellement lors de la seconde étape (b). La tache focale est alors de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

Grâce à la réversibilité du milieu, et au théorème de Helmholtz-Kirchhoff (équation (1.2)), l'onde se rétropropage pour finir par converger vers le point source initial depuis toutes les directions. La source de la première étape étant absente lors de la seconde étape, une onde divergente se crée à partir du point source à la suite de l'onde convergente. Ce résultat peut s'exprimer à l'aide du formalisme des fonctions de Green. Dans un milieu quelconque, si les réponses impulsionnelles  $G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, t)$  entre tous les couples de points A et B sont connues, alors D. Cassereau a montré [2] que le champ après Retournement Temporel d'une source initiale placée en  $\mathbf{r}_0$  s'écrit :

$$\Phi_{RT}(\mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t) \otimes f(-t) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \otimes f(-t), \quad (1.3)$$

$f(t)$  étant le signal source, et  $\mathbf{r}$  la position où le champ est mesuré après RT. Le premier terme correspond à l'onde convergente, et le second à l'onde divergente.

Ainsi, dans un milieu ouvert homogène et isotrope où la vitesse de propagation est  $c$ , le champ étant décrit par son potentiel  $\Phi$ , les fonctions de Green monochromatiques du problème peuvent être calculées [3, 4]. Elles sont cette fois solution de l'équation simplifiée (le milieu est



ici homogène) :

$$\Delta G + \frac{\omega^2}{c^2}G = -\delta(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

la source étant placée en  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ . Ces fonctions de Green sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{i}{4}H_0^1(k|\mathbf{r}|) \quad \text{en 2D} \\ G(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{(4\pi|\mathbf{r}|)} \quad \text{en 3D,} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$H_0^1$  étant la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0.

Alors, à l'aide de l'expression (1.3), les champ retournés temporellement obtenus respectivement dans un milieu à deux dimensions et à trois dimensions, lorsque le signal source  $f(t)$  est quasiment monochromatique, sont :

$$\begin{aligned} \Phi_{RT}(\mathbf{r}, t) &= J_0(k|\mathbf{r}|)e^{i\omega t}, \\ \Phi_{RT}(\mathbf{r}, t) &= \frac{ik}{2\pi} \text{sinc}(k|\mathbf{r}|)e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$k$  étant le nombre d'onde,  $J_0$  la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, et *sinc* désignant la fonction sinus cardinal. La tache focale obtenue est alors dans les deux cas de l'ordre de la demi-longueur d'onde : c'est la plus petite taille que l'on puisse obtenir, en raison de l'interférence de l'onde convergente avec l'onde divergente associée.

Cependant, il est encore beaucoup trop contraignant de devoir placer des transducteurs toutes les demi-longueurs d'onde (afin de respecter le critère d'échantillonnage de Shannon) sur une surface fermée entourant le volume dans lequel on souhaite focaliser. En pratique, nous disposons d'un nombre limité de transducteurs/microphones ; ainsi, la tache focale obtenue par Retournement Temporel est plus large et est limitée, dans des milieux homogènes ou faiblement hétérogènes, par l'ouverture du Miroir à Retournement Temporel. Conformément aux lois de la diffraction, si la dimension  $D$  du réseau d'éléments du MRT est petite devant la distance  $F$  entre le MRT et le point source initial, la taille de la tache focale est multipliée par un facteur  $F/D$ .

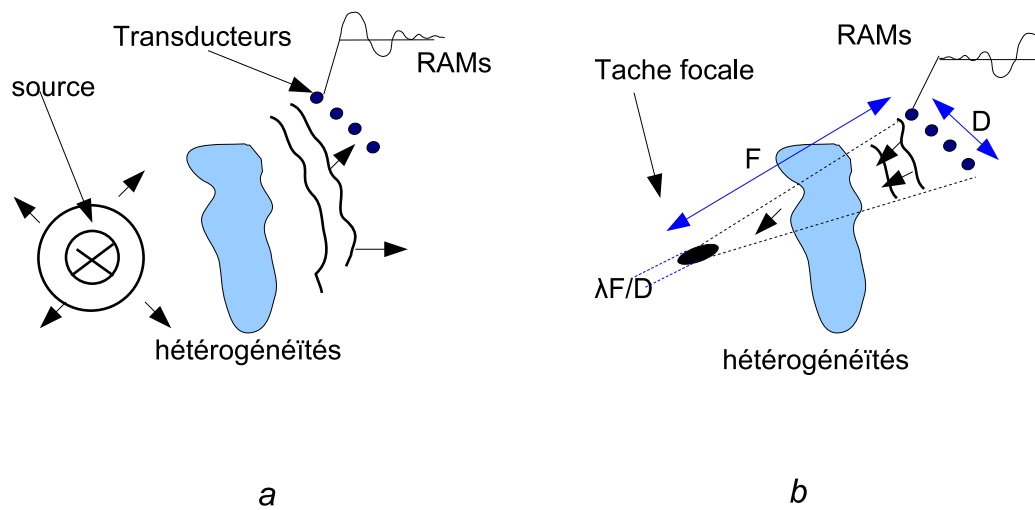
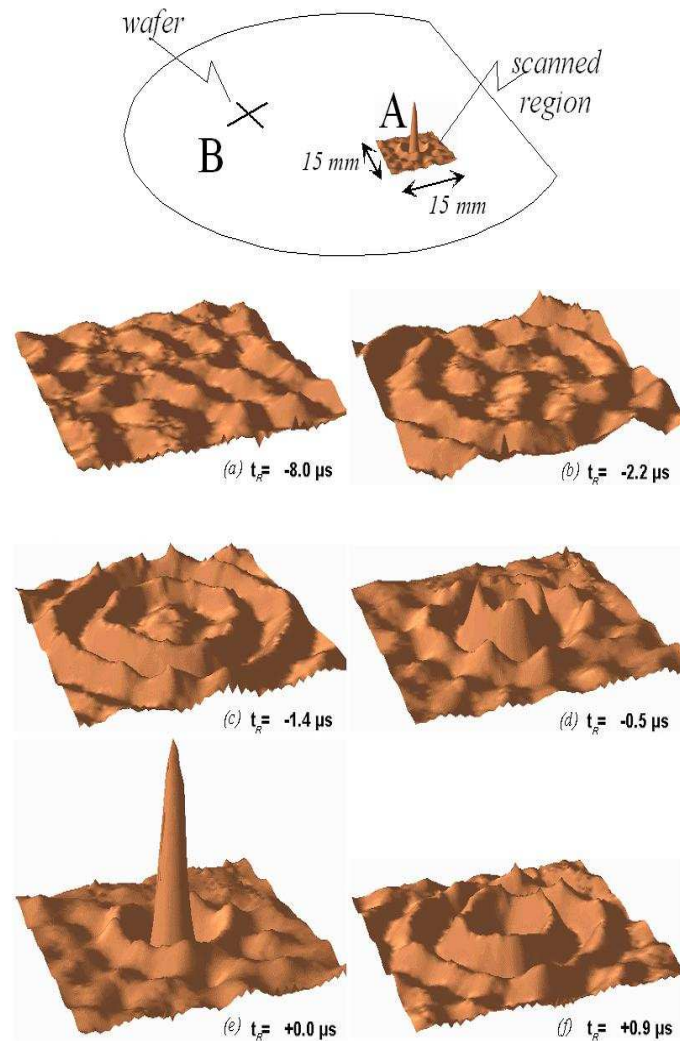


FIG. 1.2 : Schéma de principe de la première (a) et de la seconde (b) étape du Retournement Temporel d'une source impulsionnelle dans un milieu ouvert et lorsque le MRT a une ouverture finie. La tache focale est alors élargie.

Pour augmenter l'ouverture apparente du MRT, il est possible d'exploiter la présence de diffuseurs intenses [5], ou bien de parois réfléchissantes [6] dans le milieu.

La solution extrême consiste alors à se placer dans une cavité réverbérante fermée, comme un disque de silicium [7], ou une chambre réverbérante [8]. Alors, même avec un unique élément dans le MRT, il a été montré que l'on obtient une tache focale aussi fine que dans le cas idéal, c'est-à-dire de l'ordre de la demi-longueur d'onde : on parle alors d'hyper-résolution. La figure 1.3 représente le résultat de l'expérience menée par C.Draegger [7] dans un disque de silicium de 0.525 mm d'épaisseur et 20 cm de diamètre. Lors de la première étape du RT, une source ponctuelle avait émis une période et demie d'une sinusoïde à 1 MHz au point A, et les déplacements transverses étaient enregistrés au point B. Lors de la seconde étape, quelques millisecondes du signal retourné temporellement sont ré-émises par le point B ; les déplacements transverses sont alors mesurés autour du point A par interféromètre laser. A l'instant  $t = 0$ , grâce au caractère réverbérant et chaotique de la cavité, l'onde refocalise de façon spectaculaire au point A.



**FIG. 1.3** : Résultat de l'expérience de C. Draegger dans un disque de silicium réverbérant : déplacements transverses mesurés par interféromètre laser dans un carré de 1.5 cm autour du point source initial, à différents instants de la seconde étape du RT. Le MRT ne contient qu'un seul élément (le point B).

Dans cette thèse, nous poursuivons l'étude de ce phénomène, afin de localiser d'une part des sources de bruit continues (et non plus impulsionnelles) dans le domaine audible dans une chambre réverbérante, et d'autre part des impacts (donc des sources impulsionnelles) à la surface de plaques réverbérantes, à l'aide d'un minimum d'éléments dans le MRT.

## Chapitre 2

# Localisation de sources de bruit continues dans une chambre réverbérante par Retournement Temporel

### 2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, jusqu'à présent, le RT a été étudié en chambre réverbérante [8], mais seule l'émission de signaux très brefs a été considérée, et aucune attention n'a été accordée à l'émission de signaux plus complexes. Dans ce chapitre, les propriétés du RT de sources aléatoires continues (d'une durée de plusieurs secondes) sont étudiées. Le RT de telles sources est d'un grand intérêt, car il fait le lien avec de nombreuses problématiques, comme par exemple les communications par RT [9]. En effet, un signal à transmettre peut être modélisé par un signal aléatoire, et donc appliquer le RT à du bruit peut être considéré comme une tentative d'envoi d'un message à un récepteur. Par ailleurs, le RT de bruit est également lié aux techniques de corrélation de fonctions de Green [10, 11, 12, 13], qui consistent à reconstituer les fonctions de Green à partir de corrélations du bruit ambiant. Derode *et al.* ont montré que ces techniques peuvent être réinterprétées dans le cadre du RT [14].

Dans ce chapitre, le Retournement Temporel de bruit est étudié numériquement, théoriquement et expérimentalement dans une chambre réverbérante, dans le domaine audible. Tout d'abord, un code de simulation aux différences finies est utilisé pour simuler la propagation des ondes acoustiques dans une chambre réverbérante à deux dimensions. On montre que l'onde

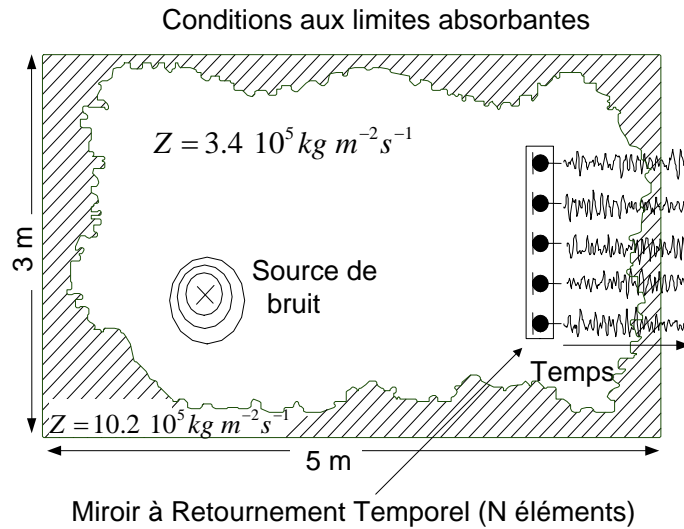
retournée temporellement refocalise au point source initial. Dans une seconde partie, un modèle théorique rend compte de ce résultat. Ce modèle consiste principalement à montrer le lien entre RT d'une source impulsionnelle et RT d'une source aléatoire continue. A partir de là, on montre que la propriété d'hyper-résolution est encore valable [5, 15]. Cependant, avec une source aléatoire, le rapport signal sur bruit dépend seulement du nombre de transducteurs et non plus de la bande passante du signal source. Ce résultat important est l'une des principales différences entre RT impulsionnel et RT de source continue aléatoire. Dans une troisième partie, nous présenterons les données expérimentales obtenues dans une chambre réverbérante pour un bruit de bande passante incluse dans la gamme [500 3000]Hz. La capacité du RT à séparer deux sources de bruit proches est étudiée. Par ailleurs, des expériences permettent de quantifier la sensibilité de la technique à des fluctuations de température. Enfin, nous montrons que ces résultats, dans une certaine mesure, dépendent peu du caractère absorbant de la salle.

## 2.2 Simulations numériques

Un code de simulation par différences finies [16], nommé Acel, développé par M.Tanter, est utilisé pour simuler la propagation des ondes acoustiques dans une chambre réverbérante à deux dimensions, de 5 m de long et 3 m de large. Ce code repose sur la résolution par différences finies de l'équation de propagation des ondes acoustiques dans un milieu fluide. Le milieu est séparé en deux zones : la première, au centre, est l'air, et la seconde (en traits hachurés sur la figure 2.1) tient lieu de murs. L'impédance des murs est choisie égale à environ trois fois l'impédance de l'air, afin que les ondes simulées se réfléchissent suffisamment à l'interface air/mur ; les conditions aux limites du milieu simulé sont totalement absorbantes. Plus précisément, lorsque l'onde créée dans l'air rencontre les murs, la majeure partie est réfléchie, et une faible proportion pénètre dans les murs ; cette dernière se propage donc à l'intérieur du mur, et lorsque elle atteint l'extrémité du milieu simulé (c.à.d. le cadre sur la figure 2.1), elle est absorbée.

Cette relativement faible rupture d'impédance permet d'obtenir environ quinze réflexions de l'onde avant qu'elle ne soit complètement transmise à l'extérieur. En raison de deux principales limites du code de calcul, à savoir la stabilité numérique et le temps de calcul, le nombre de réflexions ne peut être beaucoup plus élevé. Or, nous souhaitons obtenir un champ diffus, condition nécessaire à une bonne refocalisation par Retournement Temporel : nous voulons que la densité d'énergie moyenne soit la même en tout point, et l'intensité acoustique moyenne la même dans toutes les directions. C'est pourquoi, dans notre simulation, les murs sont choisis avec un profil rugueux (figure 2.1) de façon à atteindre ce régime diffus plus rapidement. Le pas d'échantillonnage spatial est choisi de l'ordre du dixième de la longueur d'onde la plus petite présente dans le

signal émis par la source ; le pas d'échantillonnage temporel est alors calculé automatiquement par Acel pour assurer la stabilité du code.



**FIG. 2.1 :** Configuration de la simulation dans une cavité à deux dimensions. L'impédance de l'air est de  $3.4 \cdot 10^5 \text{ kg.m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ , et l'impédance des murs est de  $10.2 \cdot 10^5 \text{ kg.m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La première étape commence par l'émission d'un bruit pseudo-aléatoire gaussien de bande passante comprise entre 1400 Hz et 1900 Hz ( $\lambda$  variant alors de 17.9 cm à 24.3 cm) en un point donné (figure 2.1). Pendant ce temps, l'amplitude du champ est enregistrée en  $N$  points de maillage, qui forment le Miroir à Retournement Temporel. L'enregistrement dure plus de dix fois le temps de réverbération de la cavité, de façon à ce que le régime transitoire dû au début de l'émission du bruit soit négligeable. Dans la deuxième étape, les signaux enregistrés sont retournés temporellement et ré-émis aux  $N$  noeuds du maillage par le Miroir à Retournement Temporel ; pendant ce temps, l'amplitude de la pression est enregistrée sur une ligne verticale de 60 cm de long centrée sur le point source initial.

Évidemment, contrairement au RT impulsif, on n'observe aucune focalisation temporelle : après Retournement Temporel, la pression est toujours un bruit aléatoire. Néanmoins, la focalisation spatiale a encore lieu, comme montré sur la figure 2.3 : l'intégrale par rapport au temps du carré du champ de pression, notée  $I(x)$ ,  $x$  étant l'abscisse du point d'enregistrement, présente un maximum de focalisation au point source initial.

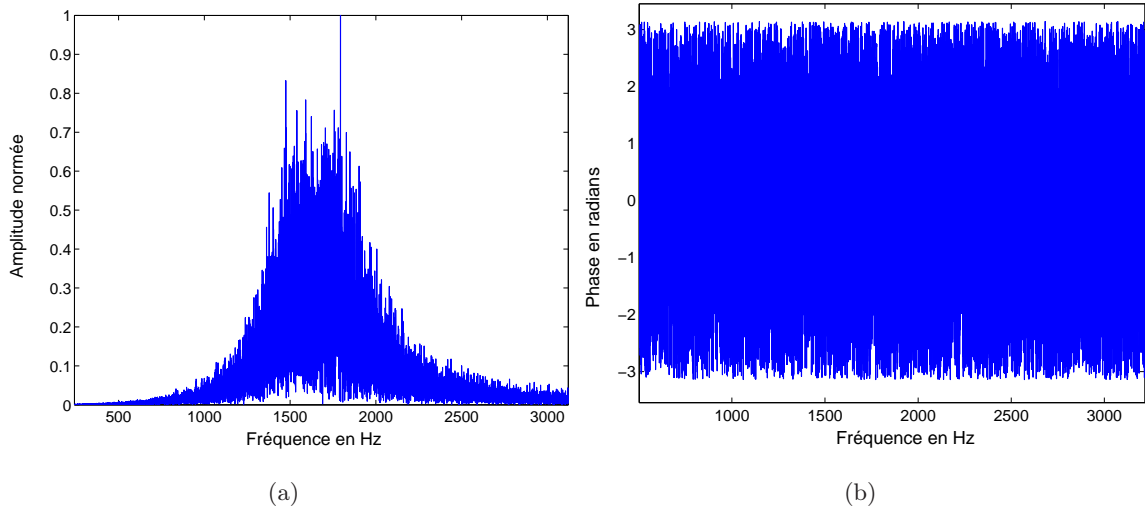


FIG. 2.2 : Spectres d'amplitude et de phase typiques d'un signal source aléatoire, de bande passante [1400 1900]Hz utilisé en simulation.

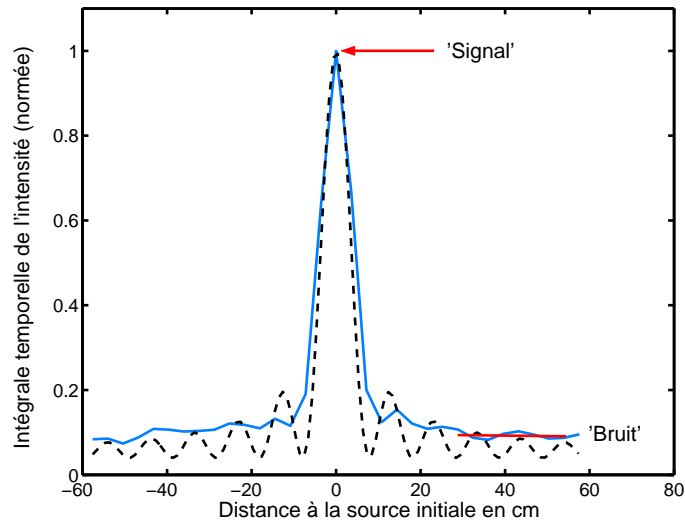
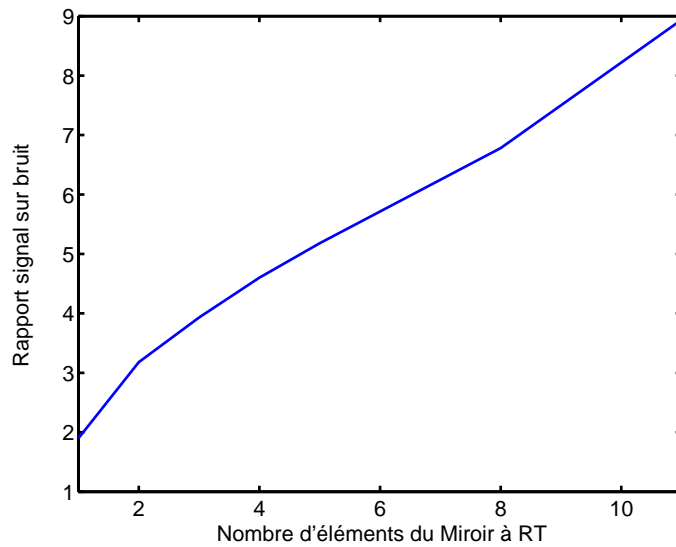


FIG. 2.3 : En continu : intensité moyenne normée  $I(x)$  en fonction de l'abscisse  $x$  ( $N = 24$ ) obtenue en simulation; en pointillés : même quantité obtenue avec la théorie 2D (équation (2.10)). Le rapport signal sur bruit est alors le quotient de l'amplitude du pic de focalisation (flèche) par le niveau de bruit moyen loin de ce pic (segment).

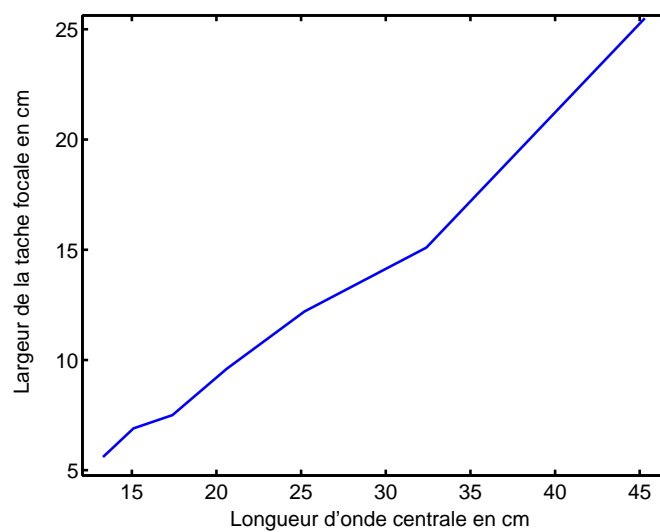
On peut alors définir un rapport signal sur bruit, noté SNR, comme le rapport entre l'intégrale par rapport au temps du carré de la pression mesurée au point source initial (ce sera la partie "signal") et la moyenne spatiale de cette même quantité  $I$ , calculée dans une zone éloignée du point source initial (ce sera la partie de "bruit"). Le SNR est tracé en fonction du nombre  $N$  d'éléments

du Miroir à Retournement Temporel (figure 2.4). On constate que le SNR est approximativement égal à  $N$ .

La figure 2.5 représente la largeur de la tache focale en fonction de la fréquence centrale; il s'agit de la largeur à mi-hauteur de la fonction  $I(x)$ . La limite de résolution est atteinte : la largeur de la tache focale est de l'ordre de la demi-longueur d'onde.



**FIG. 2.4 :** SNR en fonction du nombre  $N$  d'éléments du Miroir à Retournement Temporel. La fréquence centrale du bruit varie de 1400 Hz à 1900 Hz.



**FIG. 2.5 :** Simulation : largeur de la tache focale en fonction de la longueur d'onde centrale de la source de bruit ( $N = 24$ ). La largeur de la bande passante du bruit est ici égale à 500 Hz.



## 2.3 Théorie

Afin de rendre compte de ces résultats préliminaires, nous allons dans un premier temps montrer le lien théorique qui existe entre le Retournement Temporel impulsionnel et le Retournement Temporel d'un bruit de même bande passante. Grâce à ce lien, les propriétés du RT impulsionnel obtenues dans des travaux précédents pourront être étendues au cas de sources de bruit aléatoire.

### 2.3.1 Lien entre RT impulsionnel et RT de bruit

Lors de la première étape du RT, un signal  $e(t)$  est émis par une source située au point  $S$ . Le champ résultant est enregistré sur un Miroir à Retournement Temporel constitué de  $N$  transducteurs. Sur le  $i^{eme}$  élément du MRT, le champ enregistré s'écrit  $G(S, \mathbf{r}_i; t) \otimes e(t)$ ,  $\mathbf{r}_i$  étant la position du  $i^{eme}$  élément du MRT, et  $G(S, \mathbf{r}_i; t)$  étant la fonction de Green entre le point  $S$  et  $\mathbf{r}_i$ , et  $\otimes$  est l'opérateur de convolution. Lors de la seconde étape, chaque signal est retourné temporellement et ré-émis. Par linéarité et grâce à la réciprocité spatiale, le champ  $P(M; t)$  enregistré alors au point  $M$  est :

$$P(M; t) = K(S, M; t) \otimes e(-t), \quad (2.1)$$

avec

$$K(S, M; t) = \sum_{i=1}^N G(S, \mathbf{r}_i; -t) \otimes G(M, \mathbf{r}_i; t). \quad (2.2)$$

Remarquons que, pour respecter la causalité, en notant  $T$  la durée du signal enregistré sur le MRT, nous devrions écrire :

$$P(M; t) = \sum_{i=1}^N G(S, \mathbf{r}_i; T - t) \otimes G(M, \mathbf{r}_i; t) \otimes e(T - t). \quad (2.3)$$

Pour simplifier les expressions, par la suite,  $T$  sera pris égal à 0 ; ainsi, l'origine des temps dans la seconde étape du RT sera l'instant de refocalisation. Cette convention sera adoptée dans toute la suite de cette thèse.

Supposons maintenant que  $e(t)$  soit un signal aléatoire de moyenne nulle. Dans nos expériences, nous enregistrons l'intensité moyenne, c'est-à-dire  $\overline{I(M)} = \int P(M; t)^2 dt$ . Elle peut s'écrire également à l'aide de l'opérateur de convolution :  $\overline{I(M)} = P(M; t) \otimes P(M; -t)|_{t=0}$ . En utilisant l'équation (2.1), on obtient alors :

$$\overline{I(M)} = K(S, M; t) \otimes K(S, M; -t) \otimes e(t) \otimes e(-t)|_{t=0}. \quad (2.4)$$

Or, on peut montrer que  $e(t)$  étant un signal aléatoire gaussien, il est “auto-moyennant”, c’est-à-dire que  $\langle e(t) \otimes e(-t) \rangle = e(t) \otimes e(-t)$ ,  $\langle \cdot \rangle$  désignant ici la moyenne statistique sur les différentes réalisations du signal  $e(t)$ . On introduit alors la fonction  $\gamma(t)$  définie par sa transformée de Fourier,  $\Gamma$  telle que :  $\Gamma(\omega) = \sqrt{\langle |E(\omega)|^2 \rangle}$ , où  $E$  est la transformée de Fourier de  $e$ . Alors  $\gamma(t) \otimes \gamma(-t) = \langle e(t) \otimes e(-t) \rangle$ . Le spectre de phase de  $\gamma$  étant identiquement nul, toutes les contributions à chaque fréquence du spectre arrivent en phase au même instant  $t = 0$  :  $\gamma(t)$  est une impulsion. De plus, la moyenne statistique du spectre de puissance de  $e$  n’est rien d’autre que son enveloppe, c’est-à-dire une gaussienne de largeur  $W$ . Ainsi, cette impulsion a une durée égale à  $\tau_0 = 1/W$ . L’équation (2.4) devient :

$$\overline{I(M)} = K(S, M; t) \otimes K(S, M; -t) \otimes \gamma(t) \otimes \gamma(-t)|_{t=0}. \quad (2.5)$$

Par commutativité du produit de convolution, nous en déduisons :

$$\overline{I(M)} = (K(S, M; t) \otimes \gamma(t)) \otimes (K(S, M; -t) \otimes \gamma(-t))|_{t=0}. \quad (2.6)$$

On reconnaît alors :

$$\overline{I(M)} = \int [K(S, M; t) \otimes \gamma(t)]^2 dt. \quad (2.7)$$

On peut déduire de (2.7) que la moyenne temporelle de l’énergie après RT d’une source de bruit gaussien (membre gauche de l’équation (2.7)) peut être interprétée simplement comme l’intégrale par rapport au temps de l’intensité après RT d’une source impulsionnelle  $\gamma(t)$  (membre de droite de l’équation (2.7)).

### 2.3.2 Résultats théoriques sur le RT impulsionnel

Le champ créé par RT d’une source impulsionnelle est constitué de deux contributions : une partie du champ qui refocalise exactement au point source initial, et une autre partie dite “de bruit” qui ne refocalise pas. Cette dernière partie est un bruit déterministe, car en réalisant deux fois la même expérience de RT, les contributions de bruit sont identiques. Néanmoins, ce champ ne possède pas une structure cohérente, et cette contribution est répartie uniformément dans toute la cavité, hormis près des bords. La figure 2.6 schématise la dépendance temporelle du champ mesuré après RT au point source initial. Le pic bref et de forte amplitude correspond à la contribution qui a “parfaitement” refocalisé, et la partie de plus faible intensité mais de longue durée correspond au “bruit”.

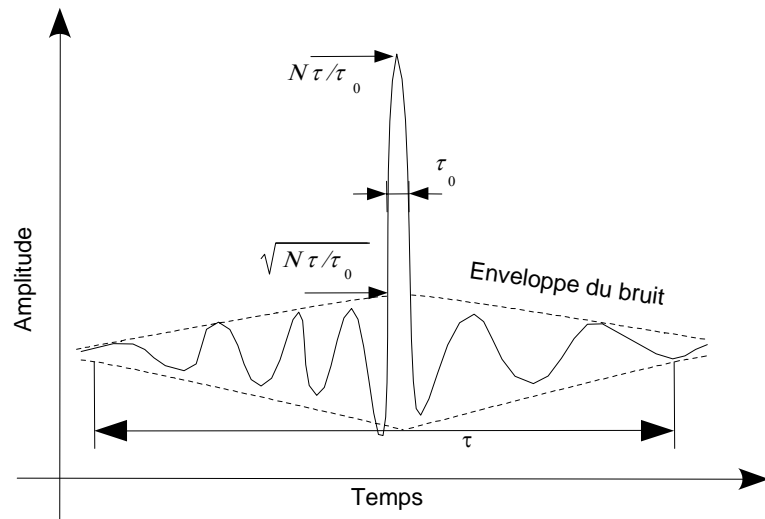


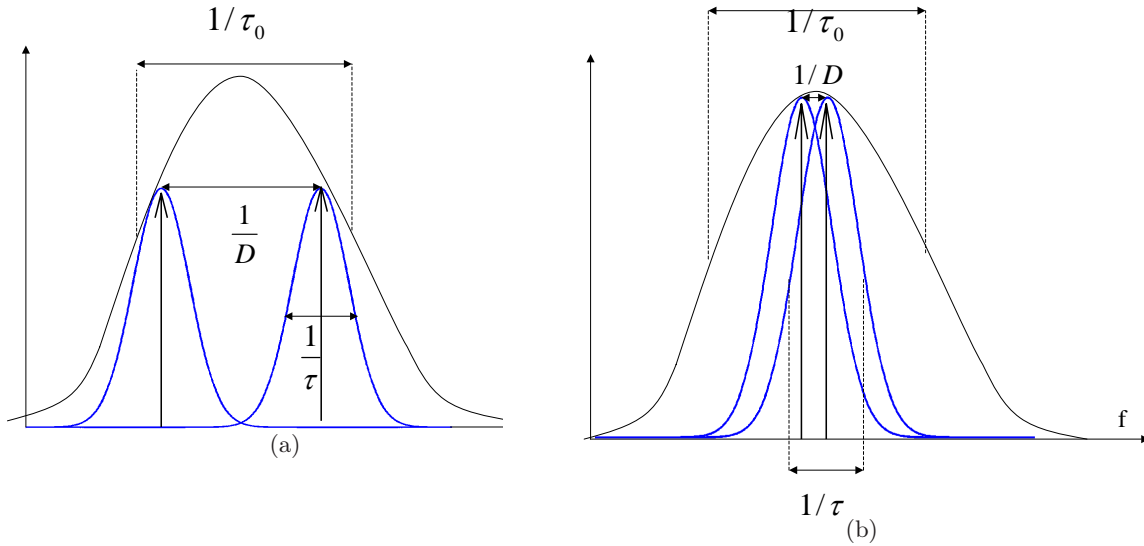
FIG. 2.6 : Représentation schématique de la dépendance temporelle du champ après RT (le Miroir à Retournement Temporel contenant  $N$  éléments). La source initiale avait émis une impulsion de durée  $\tau_0$  dans une cavité de temps de réverbération égal à  $\tau$ .

Calculons alors l'amplitude et la durée caractéristiques du pic et du bruit à l'aide d'un modèle de champ diffus [5, 17]. En supposant que la source est ponctuelle, et émet une impulsion brève telle que sa bande passante soit étroite devant sa fréquence centrale, une approche phénoménologique permet d'évaluer le rapport entre l'amplitude du champ à l'instant de refocalisation et au point source initial, et le niveau moyen du champ en dehors de ce pic de focalisation : nous appellerons ce quotient le rapport signal sur bruit impulsif (attention, dans le cas d'une source continue aléatoire, le SNR est défini différemment). Dans cette approche, on notera  $\tau$  le temps de réverbération de la cavité. La durée de l'impulsion  $\tau_0$  étant évidemment inférieure à  $\tau$ , le spectre de la réponse de la pièce à l'impulsion a une largeur de  $1/\tau_0$ .

$D$  étant le nombre de modes propres de la cavité par unité de fréquence dans ce spectre, la "distance" dans le spectre entre deux modes est  $\frac{1}{D}$ . Or, on peut considérer que les fréquences propres du spectre constituent les "grains d'information" qui vont servir lors de la focalisation. Mais deux fréquences propres de la cavité ne pourront être considérées comme deux grains d'information que si elles sont décorréées, c'est-à-dire si les modes propres correspondants sont résolus. En ne considérant pour l'instant qu'un seul élément dans le Miroir à Retournement Temporel, on distingue les deux cas suivants :

- Premier cas : si  $D \ll \tau$ , alors tous les modes propres de la cavité sont résolus (ils ne se recouvrent pas) et donc le nombre de fréquences propres décorréées (c'est-à-dire de "grains d'information") est égal au nombre de modes par unité de fréquence (c'est-à-dire densité modale  $D$ ) multiplié par la largeur du spectre, donc  $\frac{D}{\tau_0}$ .

- Second cas : si  $\tau \ll D$ , alors les modes ne sont pas résolus ; le nombre de “grains d’information” distincts dans le spectre est alors  $\frac{\tau}{\tau_0}$ .



**FIG. 2.7 :** Allure du spectre d’amplitude d’une réponse impulsionnelle dans une cavité telle que ses modes propres sont résolus (a) ou non (b), en fonctions de la densité modale et du temps de réverbération de la cavité. Les flèches schématisent les fréquences propres du spectres : chacune d’entre elles est excitée avec une largeur  $1/\tau$ .

Dire qu’il y a refocalisation en  $S$  (source initiale) et à l’instant de refocalisation noté  $t_0$ , c’est dire que tous les grains d’information arrivent en phase en  $S$  à  $t_0$  ; ainsi, lorsque  $D \ll \tau$  (resp.  $\tau \ll D$ ), la pression se décompose en une somme de  $\frac{D}{\tau_0}$  (resp.  $\frac{\tau}{\tau_0}$ ) signaux corrélés : la moyenne statistique de la pression au carré est donc proportionnelle à  $(\frac{D}{\tau_0})^2$  (resp.  $(\frac{\tau}{\tau_0})^2$ ).

Inversement, dire que au point  $M$  loin de  $S$  pour tout  $t$  (ou en  $S$  mais à  $t$  différent de  $t_0$ ) il n’y a pas refocalisation, c’est dire que tous les grains d’information arrivent avec un déphasage aléatoire ; or ils sont au nombre de  $\frac{D}{\tau_0}$  (resp.  $\frac{\tau}{\tau_0}$ ), donc  $\langle P_M(t_0)^2 \rangle$  est proportionnel à  $\frac{D}{\tau_0}$  (resp.  $\frac{\tau}{\tau_0}$ ). Cette approche est confirmée par le calcul exact mené par J. de Rosny dans sa thèse [3].

Considérons maintenant un Miroir à Retournement Temporel de  $N$  éléments. Alors, par linéarité, le champ de pression est la somme des contributions de chaque élément. En supposant que chacun de ces éléments enregistre des “grains d’information” distincts, la moyenne statistique du carré du champ de pression est proportionnelle à  $N^2$  au point de refocalisation, et à  $N$  loin de ce point (même raisonnement que ci-dessus). Ainsi, l’amplitude du champ est proportionnelle à  $N$  au point de refocalisation, et à  $\sqrt{N}$  loin de ce point.

Ces valeurs sont résumées dans le tableau 2.1.

	impulsion reconstituée	partie de 'bruit' déterministe (loin du pic de refocalisation)
Amplitude	$N\tau/\tau_0$ ( $ND/\tau_0$ )	$\sqrt{N\tau/\tau_0}$ ( $\sqrt{ND/\tau_0}$ )
Durée	$\tau_0$	$\tau$

**TAB. 2.1 :** Amplitude et durée respectivement de l'impulsion reconstituée après Retournement Temporel et du bruit déterministe créé par RT impulsif, dans le cas où  $\tau \ll D$  (les valeurs entre parenthèses correspondant au cas  $D \ll \tau$ ).

### 2.3.3 Application des résultats théoriques à notre salle réverbérante et au RT de sources aléatoires continues

#### 2.3.3.1 Densité modale et temps de réverbération de la salle utilisée en expérience

Pourquoi peut-on considérer que les  $N$  transducteurs sont sensibles à des "grains d'information" différents? Ce sera exact si les  $N$  éléments sont sensibles à des modes différents de la cavité. Or, la position dans l'espace des noeuds et ventres de vibration d'un mode propre de la cavité dépend de la fréquence dudit mode. Une condition nécessaire (bien que non suffisante) est que le nombre de modes propres de la cavité soit plus grand que  $N$ . Combien y a-t-il de modes propres excités dans le spectre? Le nombre de modes d'une salle rectangulaire dont les pulsations sont comprises entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (en Hz) est ([18, 19]) :

$$N_{modes} = \frac{V}{6\pi^2 c^3} \cdot (\omega_2^3 - \omega_1^3) + \frac{S}{8\pi c^2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) + \frac{L}{4\pi c} (\omega_2 - \omega_1), \quad (2.8)$$

où  $V$  est le volume de la pièce,  $S$  la surface de ses parois, et  $L$  la somme des arêtes. Dans nos expériences, nous avons utilisé une salle rectangulaire d'un volume  $V$  de 45 m<sup>3</sup>, d'une surface  $S$  de 78 m<sup>2</sup> et dont la somme des arêtes vaut environ 44 m. Il y a alors 24000 modes entre 1500 et 2000 Hz; en plaçant les éléments du Miroir à Retournement Temporel (qui sont au maximum au nombre de 47) aléatoirement dans la pièce, il est très probable qu'ils soient sensibles à des modes différents.

Par ailleurs, la chambre réverbérante dans laquelle nous avons mené les expériences a un temps de réverbération  $\tau$  (temps nécessaire à l'intensité sonore émise pour baisser de 60 dB après extinction de la source) d'environ 3 secondes aux fréquences qui nous concernent (500-3000 Hz). Ainsi, dans le signal réverbéré, chaque mode propre excité est multiplié par un terme de la forme  $e^{-t/\tau}$ ; ce mode apparaît dans le spectre sous la forme d'une lorentzienne centrée

sur la fréquence propre et de largeur  $1/\tau$ . Nous considérerons que les modes propres de la cavité seront résolus si la distance entre deux fréquences propres théoriques est supérieure à un tiers de la largeur de cette lorentzienne. Or la distance entre deux fréquences propres n'est rien d'autre que l'inverse de la densité modale  $D$ , qui peut se calculer à l'aide de l'équation (2.8) :  $D$  est la dérivée par rapport à la fréquence du nombre de modes  $N_{modes}$ .  $D$  est alors une fonction croissante de la fréquence : à partir d'une certaine fréquence  $F_S$ , connue en acoustique des salles sous le nom de fréquence de Schroeder, la condition  $1/D > 1/3\tau$  n'est plus vérifiée, et les modes propres ne sont plus résolus. Dans l'équation (2.8), les second et troisième termes du membre de droite peuvent être négligés devant le premier. Ainsi, après simplification, nous en déduisons que  $F_S$  est égale à :

$$F_S = 4.32c\sqrt{\frac{\tau}{V}} \quad (2.9)$$

avec  $c$  la vitesse de propagation du son dans l'air [18]. Or notre salle a un volume de  $45 \text{ m}^3$  ; sa fréquence de Schroeder est donc de 447 Hz. Ainsi, en travaillant entre 500 Hz et 3000 Hz, nous serons toujours dans le cas des modes non résolus ( $\tau \ll D$ ).

### 2.3.3.2 Rapport signal sur bruit théorique dans le cas du RT de sources aléatoires continues

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.1, l'intensité moyenne du champ obtenu après RT d'une source aléatoire s'interprète comme l'intensité moyenne du champ obtenu après RT d'une impulsion dont le spectre de puissance est identique à l'enveloppe du spectre de puissance du signal aléatoire. Nous allons alors exploiter ce résultat afin de calculer le rapport signal sur bruit dans le cas du RT de source aléatoire tel qu'il a été défini dans la partie 2.2, à savoir comme le rapport des énergies respectives (c'est-à-dire l'intégrale par rapport au temps du carré du champ) du pic de refocalisation et du bruit déterministe. Nous évaluerons alors l'énergie de chaque contribution de façon approximative comme le produit de sa durée caractéristique par le carré de son amplitude caractéristique. Ainsi, l'énergie du pic de refocalisation de l'impulsion équivalente est donnée par  $N^2\tau^2/\tau_0$ , tandis que l'énergie de la partie de 'bruit déterministe' est égale à  $N\tau^2/\tau_0$ . C'est pourquoi le rapport signal sur bruit pour le RT d'une source aléatoire au point source initial vaut  $I_{pic}/I_{bruit} = N$ .

Concernant la dépendance spatiale du pic, comme nous l'avons vu en introduction, sous l'hypothèse de champ diffus, comme l'onde focalise de toutes les directions, la tache focale est donnée par une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro  $J_0(kr)$  en deux dimensions, et par une fonction sinus cardinal en trois dimensions  $\text{sinc}(kr)$  [20], avec  $k$  le nombre d'onde

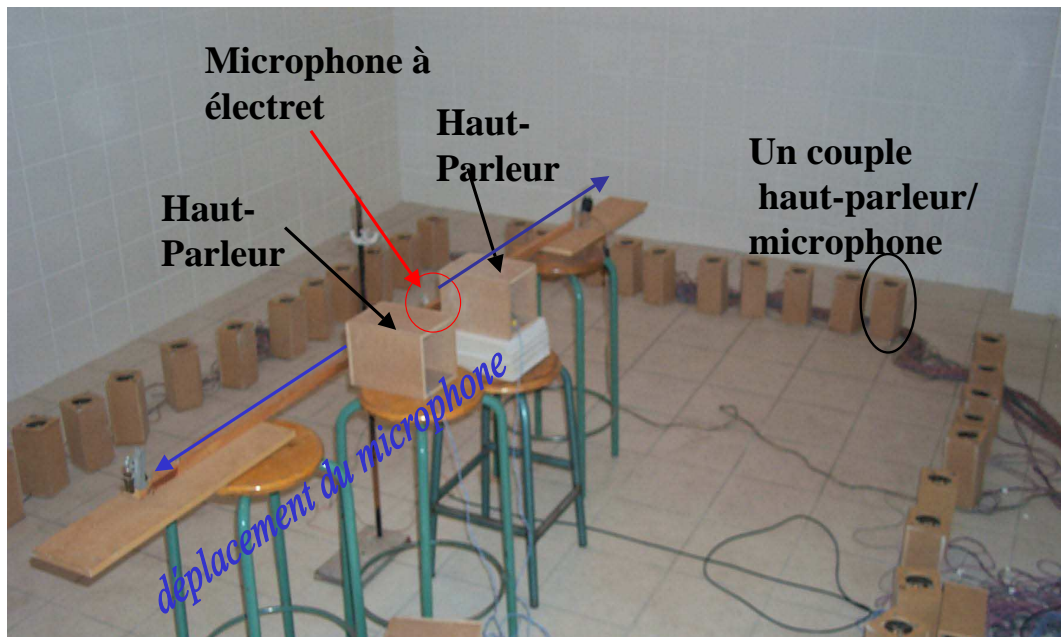
et  $r$  la distance à la position de la source initiale. L'excitation initiale est là encore supposée à bande étroite, c'est-à-dire que la fréquence centrale est grande devant la bande passante. Ainsi les intensités moyennes normées en 2D et 3D sont respectivement :

$$\overline{I(M)}/I_{noise} \approx 1 + N J_0^2(k \|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_S\|) \quad (2.10)$$

$$\overline{I(M)}/I_{noise} \approx 1 + N \text{sinc}^2(k \|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_S\|) \quad (2.11)$$

Nous allons alors définir la résolution comme la largeur à mi-hauteur de la tache focale en énergie (et non pas en amplitude, comme c'est l'usage dans l'étude du RT impulsionnel). D'après les expressions ci-dessus, dans le cas d'un milieu à deux dimensions, elle vaut théoriquement environ  $0.36\lambda$ , et en trois dimensions  $0.44\lambda$  : donc dans les deux cas, la résolution est de l'ordre de la demi-longueur d'onde. L'équation (2.10) est en accord avec les résultats numériques (voir les figures 2.3, 2.4 et 2.5), ce qui confirme notre approche théorique.

## 2.4 Expériences

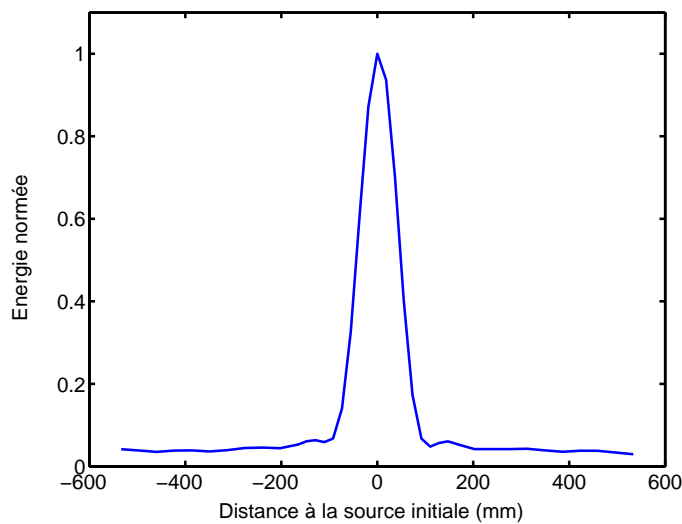


**FIG. 2.8 :** *Dispositif expérimental dans la chambre réverbérante.*

Des expériences ont été réalisées dans une chambre réverbérante (les murs et le sol étant carrelés) de  $5 \times 3 \times 3 \text{ m}^3$ , dont le temps de réverbération  $T_{60}$  est de 3 secondes. Une baie électronique constituée de  $N$  voies en réception et autant en émission, couplée à  $N$  couples émetteur-récepteur, constitue le Miroir à Retournement Temporel. Un couple est composé d'un

haut-parleur devant lequel est fixé un petit microphone à électret. La fréquence d'échantillonnage est de 20 kHz. Le champ après RT est enregistré par un microphone fixé sur un banc moteur à un axe ; la source est un haut-parleur placé au centre du banc moteur. Dans les différentes expériences présentées dans ce chapitre, ce haut-parleur émet un bruit gaussien de bande passante pouvant aller de 500 à 3000 Hz, d'une durée supérieure à 6 secondes. Une photographie du dispositif expérimental est présentée figure 2.8.

L'émission (et les signaux retournés temporellement) doivent être plus longs que le temps de réverbération de la pièce de façon à atteindre un régime stationnaire. Une première expérience est réalisée avec un bruit gaussien de bande passante [1500 2000]Hz, le nombre d'éléments du Miroir à Retournement Temporel étant égal à 32. L'intensité acoustique normée est représentée figure 2.9 : on observe bien une focalisation de l'énergie au point source initial, avec un très bon contraste.



**FIG. 2.9 :** *Expérience en chambre réverbérante : intensité moyenne après RT de bruit ( $N = 32$ ).*

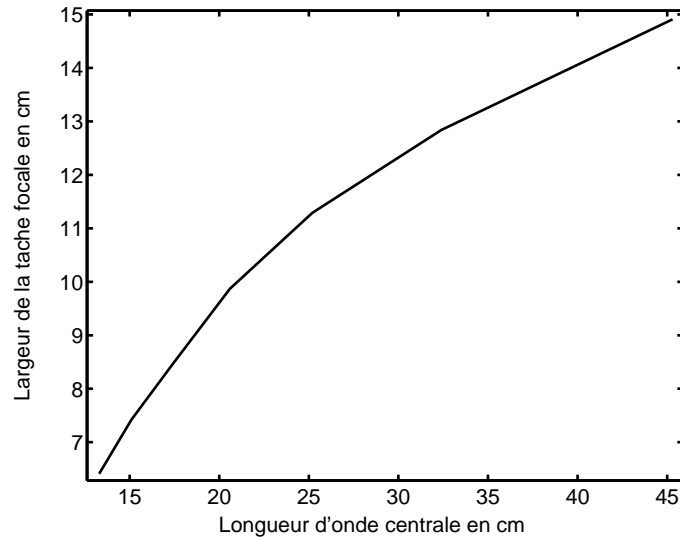
De plus, comme le montre la figure 2.10, la limite de résolution est atteinte : la largeur à mi-hauteur du pic de focalisation en énergie est environ égale à la demi-longueur d'onde centrale du bruit émis. Ceci est en accord avec la théorie et avec les résultats de la simulation.

## 2.4.1 Rapport signal sur bruit

### 2.4.1.1 Effet de corrélation entre les éléments du Miroir à Retournement Temporel

Lorsqu'un bruit gaussien de bande passante comprise entre 1500 Hz et 2000 Hz est émis, le rapport signal sur bruit varie linéairement avec le nombre d'éléments du MRT (figure 2.11). Cependant, la pente est légèrement plus petite que 1, valeur prévue par la théorie.





**FIG. 2.10 :** *Expérience en chambre réverbérante : largeur de la tache focale en fonction de la longueur d'onde centrale du bruit ( $N = 47$  et la bande passante du bruit a une largeur constante égale à 500 Hz).*

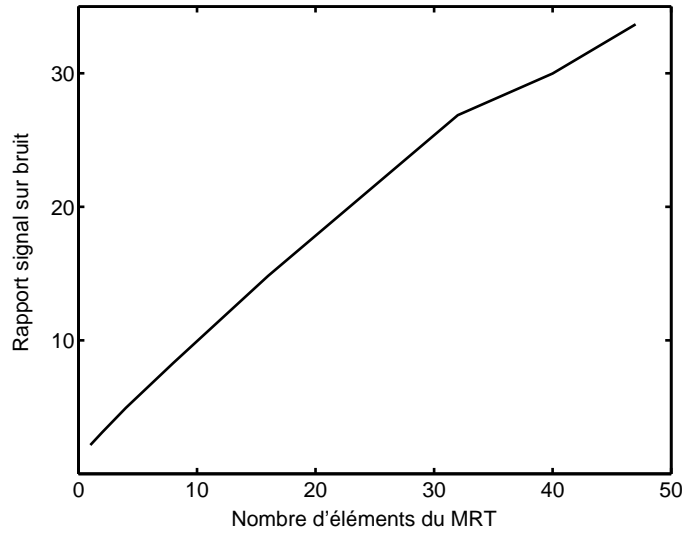
En fait, si deux éléments du Miroir à Retournement Temporel sont séparés de moins d'une demi-longueur d'onde, ils contribuent au SNR comme s'ils ne formaient qu'un seul élément, car dans ce cas, ils enregistrent et ré-émettent des signaux quasiment identiques. Plus généralement, un groupe de couples émetteur/récepteur dans une même demi-longueur d'onde n'agissent que comme un seul élément. Par conséquent, sachant qu'il y a  $N$  éléments équidistants séparés deux à deux d'une distance  $d$ , le nombre effectif  $N_{eff}$  qui remplace  $N$  dans les expressions de l'intensité moyenne (voir les équations (2.10) et (2.11)) est donné par :

$$N_{eff} \approx \begin{cases} 2Nd/\lambda & \text{si } \lambda/2 > d \\ N & \text{si } \lambda/2 < d. \end{cases} \quad (2.12)$$

#### 2.4.1.2 Influence de l'étendue de la source

En outre, la source utilisée dans la première étape du RT est un haut-parleur commun, et à cause des fréquences de travail et de la taille du diaphragme, elle ne peut pas être considérée comme ponctuelle. Il faut donc en tenir compte dans le calcul du SNR. Évaluons alors l'intensité du champ acoustique.

Considérons une source impulsionnelle quasi-monochromatique au point  $\mathbf{r}_s$  de pulsation centrale  $\omega$ . Après RT, on peut supposer que le champ se décompose en une partie qui refocalise sur la source de la forme  $E(\omega) \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|)$ , et en une partie qui ne refocalise pas, et qu'on assimilera à du bruit ayant les propriétés de champ diffus. Ce dernier sera noté  $Bruit(\mathbf{r}_s)$  (il ne dépend en



**FIG. 2.11 :** Résultat expérimental : rapport signal sur bruit en fonction du nombre d'éléments du Miroir à Retournement Temporel (le bruit émis a pour bande passante [1500 2000]Hz).

effet pas du point de mesure, mais néanmoins de la position de la source) ; et son autocorrélation sera notée  $\langle B^2 \rangle$ . Le champ au point  $\mathbf{r}$  est donc la somme de ces deux contributions.

Lorsque la source est étendue, par exemple si elle est plane et occupe une surface  $S_0$ , il suffit de sommer les contributions de chaque source infinitésimale placée en  $\mathbf{r}_s$  et d'aire  $dS$ . Nous nous intéressons à l'intégrale par rapport au temps du carré du champ en  $\mathbf{r}$ , c'est-à-dire au produit de la durée du signal (notée  $\Delta t$ ) par la moyenne temporelle du carré du champ. En supposant les signaux ergodiques, cette moyenne temporelle peut être remplacée par une moyenne statistique. Ainsi, l'énergie mesurée en  $\mathbf{r}$  vaut :

$$I(\mathbf{r})/\Delta t = \left\langle \left| \int_{\mathbf{r}_s \in S_0} w(\mathbf{r}_s) E(\omega) \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|) dS + \int_{\mathbf{r}_s \in S_0} w(\mathbf{r}_s) \text{Bruit}(\mathbf{r}_s) dS \right|^2 \right\rangle \quad (2.13)$$

où  $w$  est le coefficient d'intensité de la source par unité de surface. On suppose ensuite que la partie bruit est décorrélée de la partie cohérente, d'où :

$$I(\mathbf{r})/\Delta t = \left\langle \left| \int_{\mathbf{r}_s \in S_0} w(\mathbf{r}_s) E(\omega) \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|) dS \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| \int_{\mathbf{r}_s \in S_0} w(\mathbf{r}_s) \text{Bruit}(\mathbf{r}_s) dS \right|^2 \right\rangle \quad (2.14)$$

Le second terme du membre de droite est égal à :

$$\left\langle \int_{\mathbf{r}'_s \in S_0} \int_{\mathbf{r}_s \in S_0} w(\mathbf{r}_s) w^*(\mathbf{r}'_s) \text{Bruit}(\mathbf{r}'_s) \text{Bruit}^*(\mathbf{r}_s) dS dS' \right\rangle. \quad (2.15)$$

Par linéarité de l'intégrale, ceci est égal à la double intégrale de la moyenne statistique du produit des bruits ; on reconnaît alors l'autocorrélation d'un bruit sous l'hypothèse de champ diffus [21], c'est-à-dire un sinuscardinal en 3D. Le terme (2.15) devient alors :

$$\langle B^2 \rangle \int_{\mathbf{r}'_S \in S_0} \int_{\mathbf{r}_S \in S_0} w(\mathbf{r}_S) w^*(\mathbf{r}'_S) \text{sinc}(k \|\mathbf{r}'_S - \mathbf{r}_S\|) dS dS'. \quad (2.16)$$

D'autre part, le premier terme est déterministe, et est donc égal à sa moyenne statistique. Ainsi, le rapport signal sur bruit est le quotient du maximum d'énergie  $I(\mathbf{r})$ , c'est-à-dire  $I(\mathbf{0})$  pour une source  $S$  centrée en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , sur l'énergie loin de la source, c'est-à-dire uniquement le terme (2.16). On obtient alors :

$$SNR = 1 + \frac{E^2}{\langle B^2 \rangle} \frac{\left| \int_{\mathbf{r}_S \in S_0} w(\mathbf{r}_S) \text{sinc}(k \|\mathbf{r}_S\|) dS \right|^2}{\int_{\mathbf{r}_S \in S_0} \int_{\mathbf{r}'_S \in S_0} w(\mathbf{r}_S) w^*(\mathbf{r}'_S) \text{sinc}(k \|\mathbf{r}'_S - \mathbf{r}_S\|) dS dS'}; \quad (2.17)$$

or  $\frac{E^2}{\langle B^2 \rangle}$  n'est rien d'autre que le rapport signal sur bruit dans le cas d'une source ponctuelle. Il vaut donc  $N_{eff}$  ; d'où :

$$SNR = 1 + N_{eff} \frac{\left| \int_{\mathbf{r}_S \in S_0} w(\mathbf{r}_S) \text{sinc}(k \|\mathbf{r}_S\|) dS \right|^2}{\int_{\mathbf{r}_S \in S_0} \int_{\mathbf{r}'_S \in S_0} w(\mathbf{r}_S) w^*(\mathbf{r}'_S) \text{sinc}(k \|\mathbf{r}'_S - \mathbf{r}_S\|) dS dS'}. \quad (2.18)$$

Cet effet est en accord avec l'expérience : pour un nombre donné de couples émetteur/récepteur ( $N = 27$ ), en choisissant pour fonction  $w$  une gaussienne à deux dimensions de largeur  $a$  égale à 10.6 cm, et en prenant une distance entre éléments du MRT  $d$  de 12 cm, l'évolution du SNR en fonction de la fréquence centrale prédite par le modèle théorique (figure 2.12) est la même que celle observée expérimentalement (figure 2.13).

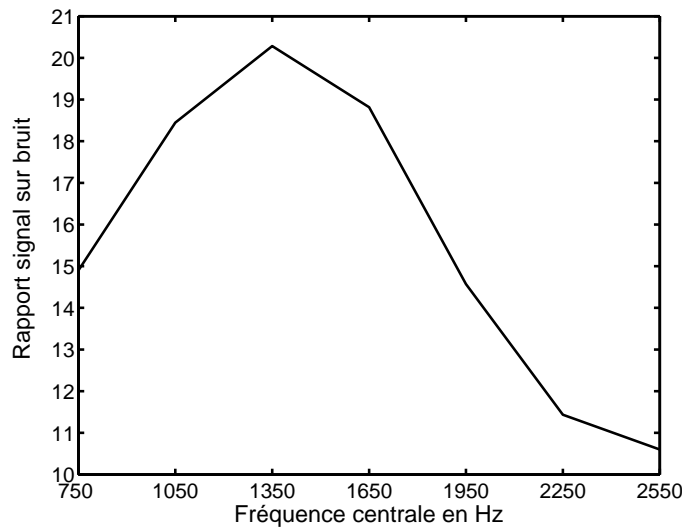


FIG. 2.12 : SNR mesuré expérimentalement en fonction de la fréquence centrale du bruit émis. Le nombre d'éléments du Miroir à Retournement Temporel est fixe ( $N = 27$ ) et la bande passante du bruit a une largeur constante égale à 500 Hz.

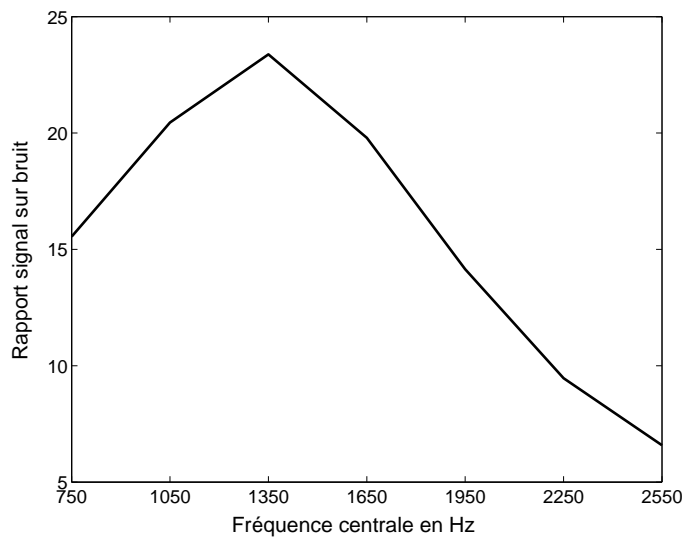


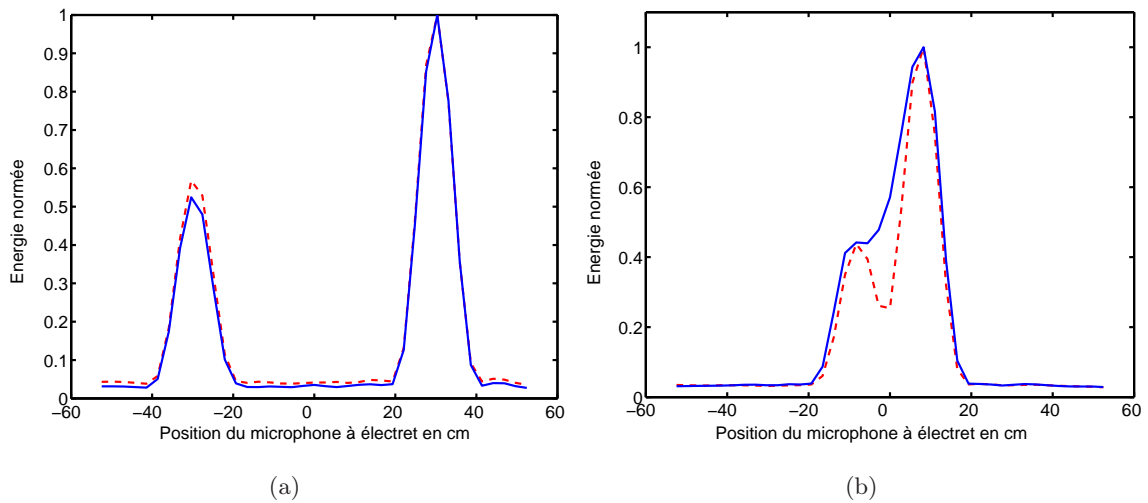
FIG. 2.13 : SNR théorique en fonction de la fréquence centrale du bruit émis (la largeur de la bande passante est négligée devant la fréquence centrale). Le nombre d'éléments du MRT est fixe ( $N = 27$ ).

Néanmoins, le niveau du SNR théorique est un peu plus grand que le SNR expérimental, car certains paramètres qui influencent le SNR n'ont pas été pris en compte : ainsi, la directivité des haut-parleurs du MRT a été prise en compte partiellement via sa géométrie, mais en supposant qu'elle est plane, ce qui n'est pas le cas dans la réalité ; de plus, l'effet du backing des hauts-

parleurs a été négligé. Cependant, tant que le nombre d'éléments du MRT est assez grand, même avec une source non ponctuelle, le RT est capable de construire l'image de la source initiale avec un très bon SNR.

### 2.4.2 Résolution

Étant donné que le RT construit naturellement l'image acoustique de la source initiale (figure 2.9), il peut être utilisé comme une technique holographique originale de reconstruction de l'image d'un ensemble de sources de bruit aléatoire. On peut donc se demander quelles sont les capacités de cette technique en terme de résolution, c'est-à-dire dans quelle mesure elle sera capable de séparer deux sources aléatoires proches. Pour évaluer les capacités de résolution, on a considéré deux sources, distantes de 15 cm ou de 60 cm, émettant soit le même bruit, soit deux bruits différents (constituant ainsi deux sources corrélées ou non). La focalisation mesurée a été tracée sur la figure 2.14. Comme on pouvait s'y attendre, la résolution est meilleure lorsque les bruits émis sont décorrélés.



**FIG. 2.14 :** Énergie normée mesurée expérimentalement après RT du champ créé par deux sources aléatoires décorrélées (pointillés) ou non (ligne continue), distantes de 60 cm (a) ou de 15 cm (b). Le bruit émis a pour bande passante [1500 2000]Hz.

Le calcul suivant permet de rendre compte de cet effet. Supposons, toujours sous l'hypothèse de champ diffus, que deux sources ponctuelles d'amplitudes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont placées en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Il suffit alors de reprendre le calcul fait à la section précédente : l'intégrale ne contient plus que deux éléments :

$$I(\mathbf{r})/\Delta t = \left\langle \left| \alpha_1 E \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|) + \alpha_2 E \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|) + \alpha_1 \text{Bruit}(\mathbf{r}_1) + \alpha_2 \text{Bruit}(\mathbf{r}_2) \right|^2 \right\rangle \quad (2.19)$$

Chaque bruit est alors décorrélé de chacune des parties cohérentes, donc la moyenne statistique du produit des deux est nulle. En notant  $A_i = \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|)$ , il reste alors :

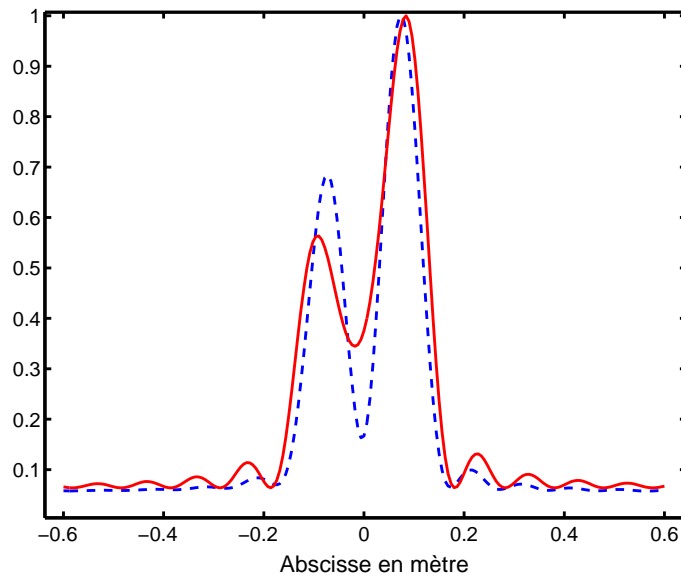
$$I(\mathbf{r})/\Delta t = \langle \alpha_1 \alpha_2^* E E^* \rangle A_1 A_2 + \langle |\alpha_1 E|^2 \rangle A_1^2 + \langle |\alpha_2 E|^2 \rangle A_2^2 + \langle |\alpha_1 \text{Bruit}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle + \langle |\alpha_2 \text{Bruit}(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle + \langle 2\alpha_1 \alpha_2^* \text{Bruit}(\mathbf{r}_1) \text{Bruit}(\mathbf{r}_2)^* \rangle. \quad (2.20)$$

Le premier terme est égal à zéro lorsque les deux sources sont décorrélées, et peut être calculé sinon. De même, les bruits dus à chacune des sources sont corrélés entre eux seulement si les sources étaient corrélées entre elles, donc le dernier terme est nul si les sources sont décorrélées, et peut être évalué sinon car on reconnaît l'intercorrélacion de deux champs diffus [21].

De façon analogue à la section précédente, sachant que  $N_{eff} = \frac{E^2}{\langle \text{Bruit}^2 \rangle}$ , on en déduit l'expression du rapport entre l'intensité moyenne au point  $\mathbf{r}$  et l'intensité moyenne du bruit (loin de  $\mathbf{r} = 0$  où se trouvait la source initiale), respectivement dans le cas de sources décorrélées et de sources corrélées :

$$\frac{I(\mathbf{r})}{I_{bruit}} \approx \begin{cases} 1 + N_{eff} \frac{\alpha_1^2 \text{sinc}^2(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|) + \alpha_2^2 \text{sinc}^2(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} & \text{sources décorrélées} \\ 1 + N_{eff} \frac{(\alpha_1 \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|) + \alpha_2 \text{sinc}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|))^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \text{sinc}(k \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|)} & \text{sources corrélées.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Notons que le spectre de la source aléatoire étant compris entre 1500 et 2000 Hz,  $\lambda/2$  reste inférieur à  $d$  (qui vaut environ 0.12 m), donc dans cette partie,  $N_{eff} = N$ .



**FIG. 2.15 :** Prédiction théorique de l'énergie normée après RT du champ créé par deux sources aléatoires distantes de 15 cm lorsqu'elles sont décorrélées (pointillés) ou non (ligne continue), de fréquence centrale 1750 Hz.

La théorie (figure 2.15) décrit correctement les résultats expérimentaux (figure 2.14), mais la courbe théorique présente des lobes secondaires, contrairement à la courbe expérimentale. Cette différence est simplement due à la largeur de la bande passante, que nous avons jusqu'à présent négligée. Pour en tenir compte, il suffit de considérer que le champ obtenu après Retournement Temporel d'une source large bande est la somme des contributions à chaque fréquence (hypothèse de l'acoustique linéaire).

Nous voulons calculer l'intégrale par rapport au temps du carré du champ. Comme précédemment, nous considérons alors que ce champ s'écrit sous la forme d'une somme des contributions de chacune des sources (indicées 1 et 2) :

$$s(t) = e_1(t) + bruit_1(t) + e_2(t) + bruit_2(t). \quad (2.22)$$

D'après le théorème de Parseval, l'intensité est égale à :

$$I = \int s(t)^2 dt = \int |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.23)$$

(Les fonctions dont le nom commence par une majuscule désignent la transformée de Fourier de la fonction temporelle de même nom en minuscule.) Grâce au caractère auto-moyennant du champ, nous pouvons en déduire :

$$\frac{I(\mathbf{r})}{I_{bruit}} = \frac{\int |E_1(\mathbf{r}, \omega) + E_2(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\omega}{\int \langle |Bruit_1(\mathbf{r}, \omega) + Bruit_2(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle d\omega}. \quad (2.24)$$

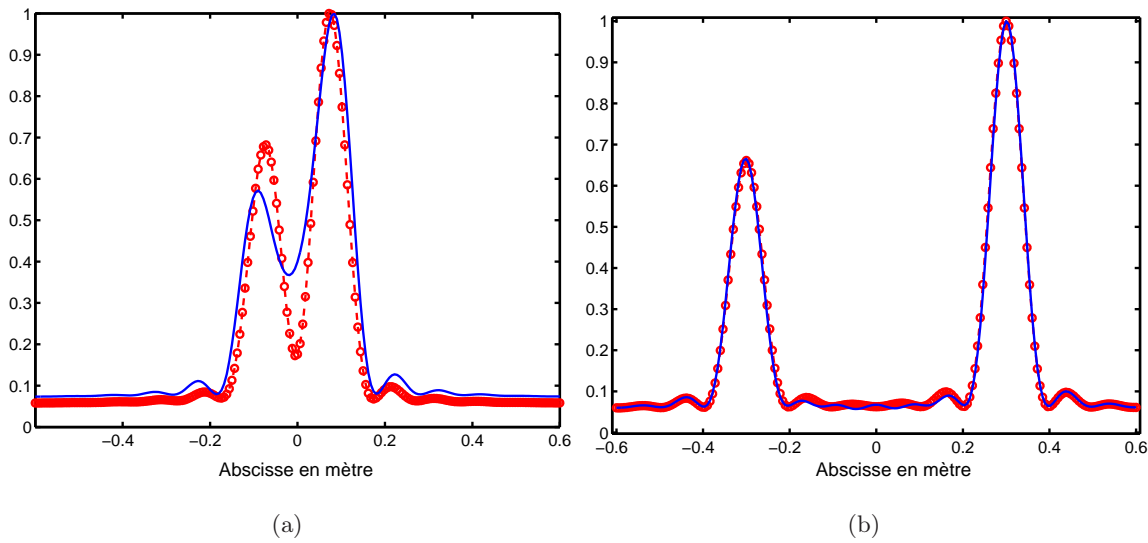
Comme pour l'expérience, nous considérerons que les deux sources corrélées sont telles que leur transformées de Fourier sont simplement proportionnelles entre elles. Dans ce cas, la partie qui refocalise peut se mettre sous la forme :  $E_1(\mathbf{r}, \omega) = \alpha_1 E(\omega) \text{sinc}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$  (même chose pour la seconde source). Lorsqu'elles sont décorréelées, en revanche, nous considérerons qu'elles ont même spectre de puissance mais leurs phases sont décorréelées. Enfin, nous supposons que, après RT, le champ au point source initial a le même contenu spectral que le signal source émis lors de la première étape, à un coefficient de proportionnalité près : ainsi,  $E^2(\omega)$  sera proportionnel au spectre de puissance du signal aléatoire émis par la source.

Par ailleurs, la partie de bruit s'écrit :  $Bruit_1(\mathbf{r}, \omega) = \alpha_1 B_1(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $B_1$  étant un champ diffus normé obtenu après émission par la source 1. Or, de même que ci-dessus, le rapport  $\frac{E(\omega)^2}{\langle B_1(\mathbf{r}, \omega)^2 \rangle}$  (même chose pour la source 2) est égal à  $N$ . Grâce à ces relations, après simplifications, l'expres-

sion finale du rapport  $\frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{bruit}}}$  en tenant compte de la bande passante est alors la suivante :

$$\frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{bruit}}} \approx \begin{cases} 1 + N \frac{\int \alpha_1^2 E^2(\omega) \text{sinc}^2(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \alpha_2^2 E^2(\omega) \text{sinc}^2(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) d\omega}{\int (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) E^2(\omega) d\omega} & \text{sources décorrelées,} \\ 1 + N \frac{\int (\alpha_1 \text{sinc}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \alpha_2 \text{sinc}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|))^2 E^2(\omega) d\omega}{\int (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \text{sinc}(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)) E^2(\omega) d\omega} & \text{sources corrélées.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Nous pouvons calculer la tache focale en prenant en compte le spectre du signal émis. La figure 2.16 représente la tache focale en énergie obtenue avec ce modèle pour des sources émettant des bruits corrélés (ligne continue) ou non (cercles), ayant même spectre d'amplitude gaussien, de bande passante [1500 2000]Hz ; les lobes secondaires sont effectivement lissés, mais la largeur caractéristique des taches focales est inchangée, et la résolution est la même que lorsque les sources étaient monofréquentielles, comme observé expérimentalement.



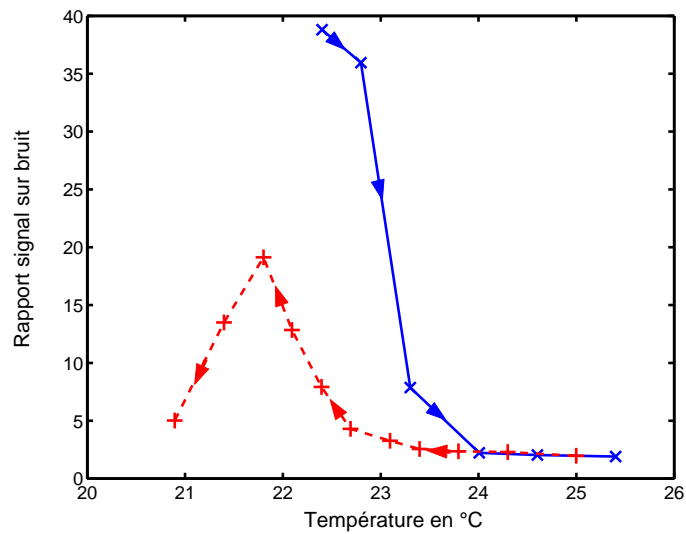
**FIG. 2.16 :** Prédiction théorique de  $\frac{I(x)}{I_{\text{bruit}}}$  en fonction de  $x$ , après RT du champ créé par deux sources aléatoires distantes de 15 cm (a) ou 60 cm (b) lorsqu'elles sont décorrelées (cercles) ou non (ligne continue), en tenant compte de la largeur de la bande passante.

### 2.4.3 Robustesse de la technique : sensibilité à un changement de température

Des fluctuations des propriétés acoustiques du milieu entre les deux étapes du RT peuvent dégrader la focalisation par RT car elles brisent la réciprocité. Nous avons étudié ici l'influence



d'une variation de température de la pièce lors du processus de Retournement Temporel. Dans cette expérience, le RT est réalisé à l'aide d'un miroir de 47 éléments. La fréquence centrale et la bande passante du bruit émis sont respectivement égales à 1750 Hz et 500 Hz. L'ensemble des  $N$  signaux enregistrés lors de la première étape du RT est retourné temporellement et ré-émis pour différentes températures de la pièce. La figure 2.17 montre l'évolution du SNR en fonction de la température. Au départ, la température de l'air dans la chambre est de 22.15 °C. La pièce est ensuite chauffée jusqu'à 25.4°C, puis refroidie jusqu'à 20.9°C.



**FIG. 2.17 :** SNR en fonction de la température de la cavité lors de la deuxième étape du RT. Les croix ( $\times$ ) correspondent à la phase de chauffage, et les signes plus ( $+$ ) à la phase de refroidissement.

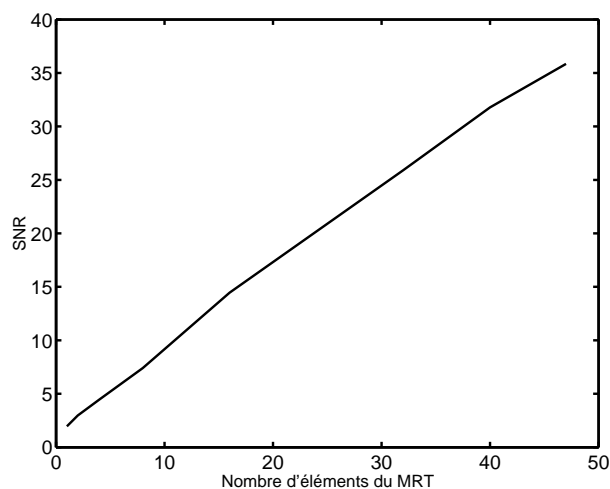
La dégradation du SNR est bien sûr due à la diminution du pic de focalisation de l'intensité moyenne. Pour une variation de 1.5°C, les propriétés acoustiques de la pièce ont suffisamment changé pour que la focalisation disparaisse. Par ailleurs, on observe un autre phénomène : quand la pièce est refroidie, lorsque la température atteint sa valeur initiale, le SNR n'atteint pas le maximum initial. Ceci s'explique très probablement par l'inhomogénéité de la température dans la chambre. En effet, au début de la phase de chauffage, lorsque  $T$  vaut 22.15°C, les radiateurs et les murs de la pièce sont froids ; pendant l'étape de refroidissement, quand le thermomètre atteint à nouveau 22.15°C, les radiateurs et les murs se refroidissent plus lentement que l'air, ils sont plus chauds qu'auparavant. Par conséquent, la réciprocity du milieu n'est pas parfaitement restaurée, et l'amplitude du pic n'est que partiellement reconstituée.

On pourrait se demander si une dégradation due à la température ne pourrait pas être compensée par une dilatation ou une compression des signaux avant leur réémission. Certains

travaux (e.g. [22]), qui traitent de la dépendance vis-à-vis de la température des corrélations de champ ultrasonore dans une cavité réverbérante, appliquent avec succès une compensation de la température par une dilatation des signaux. Ceci fonctionnerait en fait dans le cas général d'une impulsion brève retournée temporellement, mais ne peut être utilisé dans notre cas, car nous travaillons avec une source continue. Le bruit émis dure plusieurs secondes, et donc la pression à un temps donné résulte de la somme des contributions émises à des temps différents. Il n'y a alors plus de lien entre l'instant d'enregistrement et la distance parcourue par l'onde.

#### 2.4.4 Effet d'une variation du temps de réverbération de la pièce

D'après le calcul du SNR fait précédemment, on voit que tant que l'hypothèse de champ diffus reste valable, une variation du temps de réverbération (toujours dans le cas où les modes de la pièce ne sont pas séparés) n'entraîne pas de changement du SNR, et comme on peut toujours considérer que les ondes focalisent au point source de toutes les directions, la forme de la tache focale ne change pas non plus. Afin de vérifier cet effet, nous avons posé des plaques de liège d'une surface totale de  $10\text{ m}^2$  sur le sol de la salle carrelée, pour la rendre moins réverbérante. Le temps de réverbération mesuré alors (avec pour source un chirp linéaire de bande passante [1000 1500]Hz) était de 1.38 s. Comme on peut le voir sur la figure 2.18, dans les mêmes conditions que pour la figure 2.11, le SNR a le même niveau et est toujours proportionnel au nombre d'éléments du Miroir à Retournement Temporel. De plus, comme montré figure 2.19, la tache focale a la même largeur à mi-hauteur (environ 10 cm pour une longueur d'onde centrale de 19.4 cm) et les capacités de résolution sont inchangées.



**FIG. 2.18 :** *Expérience : SNR de la refocalisation en énergie après RT, en fonction du nombre d'éléments du MRT ; le sol est couvert de  $10\text{m}^2$  de liège.*

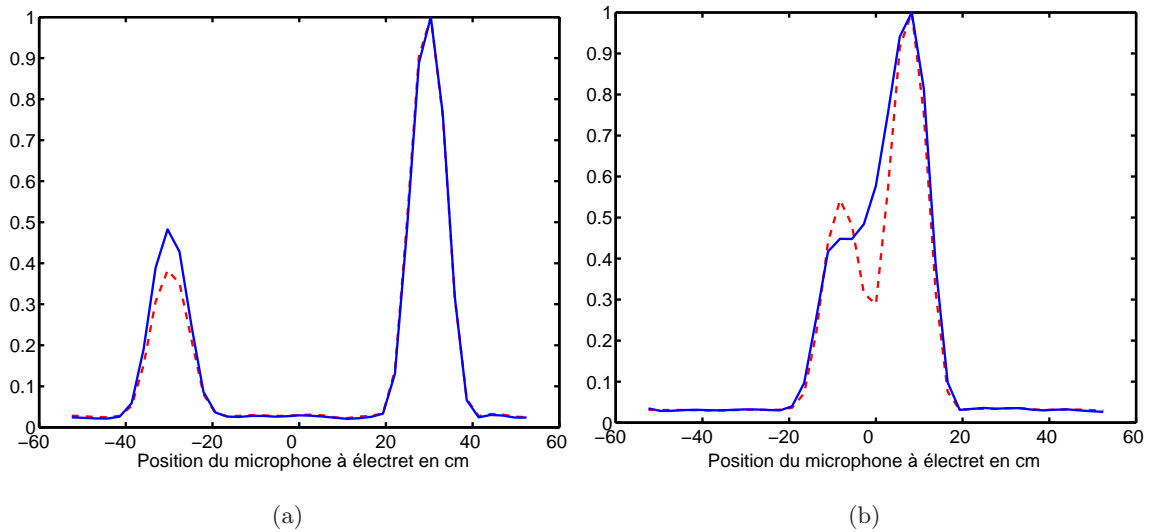


FIG. 2.19 : Expérience : énergie mesurée après RT de deux sources corrélées (courbe continue bleue) ou non (courbe pointillée rouge), distantes de 60 cm (a) ou de 15 cm (b) ; le sol est couvert de 10m<sup>2</sup> de liège. Le bruit émis a pour bande passante [1500 2000]Hz.

On peut cependant se demander dans quelles conditions l'hypothèse de champ diffus reste valable. En effet, dans le cas extrême inverse, dans un pièce quasi-anéchoïque, on n'enregistrerait que le front direct sur le MRT, et donc après Retournement Temporel il serait impossible de reconstituer la fonction de Green de la source sphérique. Notons que Sylvain Yon, dans sa thèse [23], avait observé le Retournement Temporel de sources impulsionnelles dans une pièce de dimensions semblables dans deux cas : tout d'abord lorsqu'elle était vide, et alors  $T_{60}$  valait 1.5 s, et lorsqu'elle était encombrée, avec  $T_{60}$  de l'ordre de 0.6 s. Alors il observait une dégradation de la focalisation spatiale dans le deuxième cas.

Calculons alors l'énergie due au champ direct d'une part, et comparons-la à l'énergie de la partie diffuse du champ. Soit une source stationnaire de puissance  $P_S$  et de directivité  $Q(\theta, \phi)$ . En un point d'observation situé à une distance  $r$  de la source, si  $r$  est suffisamment grand, l'onde directe reçue peut être considérée comme une onde plane. Ainsi la densité d'énergie acoustique due à l'onde directe vaut :

$$w_{\text{onde directe}} = \frac{P_S Q(\theta, \phi)}{4\pi r^2 c}. \quad (2.26)$$

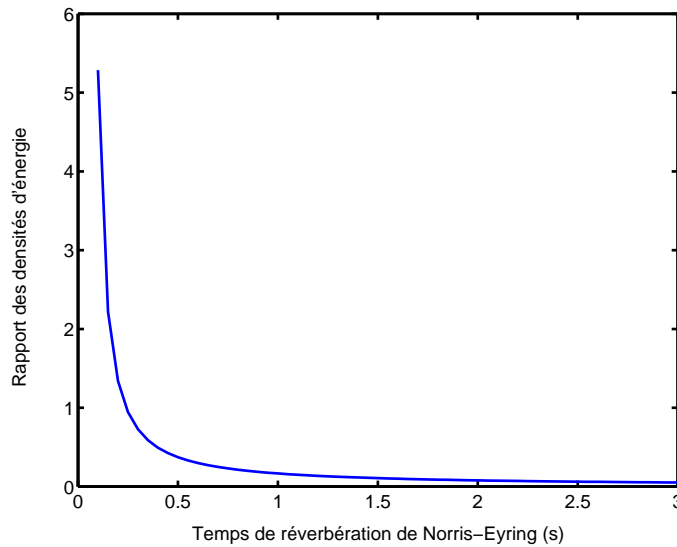
D'autre part, en supposant que les parois de la cavité ont le même coefficient d'absorption  $\alpha$ , la densité d'énergie acoustique d'un champ diffus auquel on a retranché l'onde directe est donnée par [18]

$$w_{\text{partie diffuse}} = \frac{4P_S(1 - \alpha)}{c\alpha S} \quad (2.27)$$

où  $S$  la surface totale de la cavité. Ainsi, l'hypothèse de champ diffus sera valable si  $\frac{w_{\text{onde directe}}}{w_{\text{partie diffuse}}}$  est négligeable devant 1. La distance entre la source et le MRT est de l'ordre de 1.5 m ; et dans le cas d'une source omnidirectionnelle, la directivité  $Q$  vaut 1. La surface totale de la pièce est de 78 m<sup>2</sup>, et son volume 45 m<sup>3</sup>. Quel est maintenant le lien entre l'absorption et le temps de réverbération ? Comme on cherche à étudier le cas limite où l'absorption est relativement grande, la théorie de Sabine n'est plus valable ; on utilise alors la formule d'Eyring (qui suppose cependant que les parois ont le même coefficient d'absorption  $\alpha$ , contrairement à notre expérience avec plaques de liège au sol) :

$$T_{Eyring} = -\frac{24V \log(10)}{cS \log(1 - \alpha)} \tag{2.28}$$

La courbe 2.20 montre le rapport  $\frac{w_{\text{onde directe}}}{w_{\text{partie diffuse}}}$  en fonction du temps de réverbération, lorsque la source est à 1.5m du point d'observation.



**FIG. 2.20 :** *Modèle théorique : densité d'énergie acoustique due à l'onde directe divisée par la densité d'énergie due à la partie diffuse du champ, en fonction du temps de réverbération de la pièce. On suppose que les parois ont toutes le même coefficient d'absorption.*

Ainsi, pour des temps de réverbération supérieurs à 1 s, l'énergie de l'onde directe reçue est négligeable devant celle de la partie diffuse, et donc on peut considérer que la focalisation après Retournement Temporel suit bien la loi utilisée section 2.3.2. En revanche, pour des pièces très peu réverbérantes, l'onde directe n'est plus négligeable, et après RT la fonction de Green en champ libre d'une source sphérique n'est plus reconstituée. Ainsi, les capacités de focalisation par RT seraient dégradées dans de telles pièces.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le Retournement Temporel d'une source aléatoire de bruit rose gaussien dans une chambre réverbérante a été étudié. A l'aide d'une simulation numérique d'une cavité réverbérante à deux dimensions, nous avons pu observer une refocalisation spatiale de la pression après RT. Un rapport signal sur bruit (SNR) de la focalisation en énergie a alors été défini. Le lien entre le RT de source aléatoire et le RT impulsionnel a été démontré théoriquement, et nous avons pu en déduire que le SNR lors du RT d'une source aléatoire ponctuelle de bande passante étroite ne dépend que du nombre d'éléments du Miroir à Retournement Temporel. Des expériences ont ensuite confirmé ce résultat, et ont montré que la position des éléments du MRT est déterminante : pour maximiser le SNR, il faut les placer deux à deux distants d'au moins la plus grande longueur d'onde émise.

Par ailleurs, les capacités de cette focalisation en terme de résolution ont été étudiées ; il a notamment été montré que la largeur de la bande passante du signal émis n'a pas d'influence sur la largeur caractéristique de la tache focale, mais seulement sur les éventuels lobes secondaires. De plus, des expériences ont permis d'observer la sensibilité du RT à une rupture du caractère réversible du milieu (changement de température entre la première et la seconde étape du RT).

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'influence du caractère réverbérant de la salle sur la qualité de la refocalisation : à partir d'une valeur limite du temps de réverbération calculée théoriquement, les propriétés du RT de source aléatoire ne dépendent plus de ce temps de réverbération, conformément aux expériences menées en chambre semi-réverbérante.

Un intérêt potentiel de la méthode est, comme l'holographie, de reconstruire l'image de sources de bruit, comme par exemple le bruit d'avion ou de voiture. En effet, pour étudier les bruits d'un moteur d'avion, des essais sont habituellement faits en banc d'essai moteur, qui peut être assimilé à une chambre assez réverbérante. Le but final consisterait à reconstituer le champ qui serait produit par le moteur s'il était en vol, et donc en champ libre, afin qu'il satisfasse aux exigences des normes. Or, si les essais en champ moteur coûtent cher, les essais en champ libre sont encore plus onéreux, d'où le besoin de la part des constructeurs de techniques en banc d'essai. Les méthodes de localisation existantes, comme l'holographie, nécessitent le calcul des fonctions de Green de la pièce ; elle doit donc être utilisée en chambre anéchoïque ou très faiblement réverbérante, ce qui n'est pas le cas des bancs d'essai. Au contraire, le RT permet d'utiliser des chambres fortement réverbérantes. L'étude faite dans ce chapitre montre donc la faisabilité du RT pour localiser des sources de bruit dans un tel milieu. De plus, la réverbération permet d'atteindre une bonne résolution (de l'ordre de la demi-longueur d'onde) à l'aide de seulement

quelques transducteurs. Cependant, le RT est relativement lourd à mettre en place car il faut mesurer la pression à de nombreux endroits autour de la source ; une étude complémentaire serait nécessaire pour confirmer l'intérêt du RT pour cette application.

Néanmoins, un autre intérêt potentiel de cette étude est son application aux communications par RT en milieu complexe, puisque transmettre un message équivaut à transmettre un bruit (succession de 0 et 1) de longue durée.



## Chapitre 3

# Localisation d'impacts à la surface de plaques et étude du mode de Lamb $A_0$ à basse fréquence

### 3.1 Introduction

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, le RT a été largement appliqué dans de nombreuses configurations, dans des fluides (dans le domaine médical et en acoustique sous-marine aux fréquences ultrasonores, ou en chambre réverbérante en acoustique audible) et des solides (blocs de titane pour le contrôle non destructif ou disque de silicium, également aux fréquences ultrasonores). Dans ce chapitre, nous présentons une application originale du RT impulsif, aux fréquences audibles et dans des plaques minces. Notre objectif consiste en effet à localiser des impacts (choc avec un doigt, un ongle...) à la surface de telles plaques, par une méthode acoustique. Quelles sont les méthodes de localisation existantes ? Ces techniques, commercialisées sous la forme d'écrans ou panneaux tactiles, sont les suivantes [24] :

- les écrans à dalle résistive : un panneau de verre est enduit d'une couche résistive, polarisée à 5V ; une feuille de polyester est tendue au-dessus, un isolant étant placé entre les deux. Cette feuille est, en l'absence d'utilisation, à la masse ; lorsque l'on touche l'écran, elle entre en contact avec la couche résistive, il y a contact électrique. D'autre part, quatre barres encadrent ces couches ; un voltage est alors appliqué successivement aux barres verticales puis horizontales, et la tension entre le point de contact et chacune des barres est mesurée. Ces tensions sont proportionnelles sur chaque axe à la position du contact sur l'écran et les coordonnées du toucher sont transmises au système.



- les écrans capacitifs : une couche qui accumule les charges est placée sur la plaque de verre du moniteur. Lorsque l'utilisateur touche la plaque avec son doigt, certaines de ces charges lui sont transférées. Le circuit électrique étant modifié, la position de l'impact peut en être déduite.
- les écrans à dalle infrarouge : ici, un cadre est placé contre l'écran. Ce cadre émet des rayons infrarouges en permanence, et lorsqu'un doigt s'approche de la surface, il provoque une ombre. Les récepteurs privés de lumière infrarouge détectent le point d'impact et transmettent les coordonnées au contrôleur.
- les écrans à ondes de surface : il s'agit également d'une technologie active, car des ondes de surface (à 5 MHz) sont émises par des transducteurs piézo-électriques (et captées après avoir parcouru la plaque dans la largeur ou la longueur). Lorsqu'on touche l'écran, le doigt absorbe l'onde ultrasonore, et le champ mesuré est perturbé. A partir de la mesure de cette perturbation, les coordonnées de l'impact sont calculées.
- les panneaux tactiles acoustiques : c'est une technique de localisation acoustique passive [25] qui consiste à calculer les différences de temps de vol de l'onde créée par un choc à la surface d'une plaque lorsqu'elle atteint quatre capteurs de vibration collés sur la plaque.

Ainsi, deux de ces technologies sont actives (des ondes infrarouges ou ultrasonores sont émises en permanence), et quant aux deux autres, elles nécessitent de faire subir à l'écran un traitement de surface (ajout d'une couche résistive ou capacitive).

La dernière est la seule technique de localisation acoustique passive existante. Or dès que le milieu est trop réverbérant, cette technique ne fonctionne plus, notamment à cause du caractère dispersif des ondes. Notre objectif est donc de proposer une méthode capable de localiser les impacts dans un objet de la vie courante (table, tableau, mur etc), dont on ne sait rien a priori, et de le rendre tactile sans traitement de la surface, avec un minimum de capteurs et un simple ordinateur.

## **3.2 Principe de la méthode de localisation et facteur de contraste**

### **3.2.1 Présentation de la technique et lien avec le Retournement Temporel**

Soit une source émettant une impulsion  $S(t)$  en un point  $A$ . Si  $G(A, B, t)$  est la fonction de Green entre les points  $A$  et  $B$  de la plaque (c'est-à-dire la réponse au point  $B$  à une impulsion de Dirac émise au point  $A$ ), alors sous l'hypothèse de linéarité, le champ mesuré en  $B$  est simplement le produit de convolution de ces deux fonctions :

$$W_B(t) = S(t) \otimes G(A, B, t). \quad (3.1)$$

Nous rappelons que cette écriture issue de l'analyse des système linéaires repose sur les hypothèses de linéarité (nous ne travaillerons que sous l'hypothèse de l'acoustique linéaire) et d'invariance dans le temps du milieu.

Lors d'une expérience de RT impulsif, le champ mesuré en  $B$  est enregistré, puis ré-émis dans l'ordre inverse. Ainsi, en un point d'observation  $P$ , le champ mesuré après RT sera :

$$W_P^{RT}(t) = S(-t) \otimes G(A, B, -t) \otimes G(B, P, t). \quad (3.2)$$

Rappelons que, dans cette expression, nous avons choisi pour origine des temps l'instant de refocalisation afin de simplifier les notations.

Or, mathématiquement,  $G(A, B, -t) \otimes G(B, P, t)$  n'est rien d'autre que l'intercorrélation entre  $G(A, B, t)$  et  $G(B, P, t)$ . De plus, la théorie du RT nous permet d'affirmer que le champ mesuré sera maximum pour un point  $P$  qui coïncide avec le point source initial  $A$ , car l'onde revit sa vie passée et vient focaliser en  $A$ . Ainsi, l'intercorrélation sera maximale si  $P = A$ .

C'est ainsi que R. K. Ing, N. Quieffin et S. Catheline ont eu l'intuition qu'il était possible de localiser une impulsion à la surface d'une plaque à condition d'avoir, dans une phase d'apprentissage, mis en mémoire toutes les fonctions de Green (ou réponses impulsives) entre les points que l'on souhaite rendre tactiles et les capteurs [26]. Ainsi, une expérience de localisation par RT consiste à élaborer dans un premier temps une bibliothèque des réponses impulsives ; dans un second temps, lorsqu'un utilisateur tape en un point (de position inconnue), tous les coefficients de corrélation entre cette nouvelle réponse impulsive et celles enregistrées sont calculés. L'analogie du point  $A$  d'une expérience de RT active est le point en lequel tape l'utilisateur ; et les points  $P$  sont les différents points à partir desquels la banque de réponses impulsives a été constituée. Ainsi le coefficient de corrélation maximum permet de déduire la position de l'impact ; cette technique peut donc être qualifiée de 'Retournement Temporel dans l'ordinateur'.

Notons par ailleurs que, lors d'une expérience de RT actif, l'onde revit sa vie passée, et vient donc refocaliser spatialement et temporellement au point source ; ainsi, si l'origine des temps est connue, il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients de corrélation exacts (c'est-à-dire rechercher le maximum de la fonction d'intercorrélation). Une fonction d'autocorrélation présentant son maximum en  $t = 0$  (équivalent de l'instant d'émission d'une impulsion dans la première phase du RT actif), il suffit donc de comparer les valeurs en 0 des fonctions d'intercorrélation. Le coefficient de corrélation entre la réponse  $s(t)$  et la référence  $ref(t)$  est donc calculé de la façon

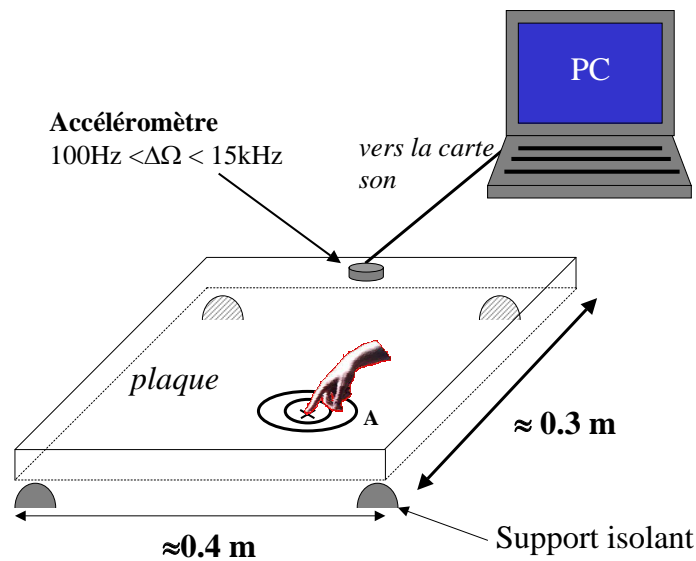
suivante :

$$c = \frac{\int s(\tau)ref(\tau)d\tau}{\sqrt{\int s(t)^2dt \int ref(t)^2dt}} \quad \text{si l'origine des temps est parfaitement connue}$$

$$c = \frac{\max(|\int s(\tau)ref(t+\tau)d\tau|)}{\sqrt{\int s(t)^2dt \int ref(t)^2dt}} \quad \text{si l'origine des temps n'est pas connue assez précisément,}$$

les signaux  $s(t)$  et  $ref(t)$  ayant été préalablement normés par la racine carrée de leur énergie respective.

En pratique, le dispositif expérimental, schématisé figure 3.1, est le suivant : un simple capteur de vibrations (accéléromètre Murata), qui n'est rien d'autre qu'une pastille piézoélectrique, collé à la surface de la plaque, enregistre la composante transverse de l'onde ; les signaux sont échantillonnés à 44.1 kHz par la carte son de l'ordinateur. La plaque est placée dans des conditions telles que les vibrations créées par l'impact se propagent pendant au moins 30 ms avant de disparaître (par rayonnement dans l'air, couplage de structure ou atténuation dans la plaque).



**FIG. 3.1** : Schéma du dispositif expérimental pour la localisation d'impacts à la surface de plaques.

La figure 3.2 représente la réponse typique à un impact sur une plaque de 30 cm de large, 40 cm de long et 3 mm d'épaisseur. En raison de la réverbération et de la dispersion du milieu, il est quasiment impossible d'isoler le front d'onde direct de la partie réverbérée : c'est la raison pour laquelle les techniques classiques de localisation par mesure des temps de vol ne peuvent aboutir dans des plaques réverbérantes de ces dimensions-là.

Appliquons alors notre algorithme : après enregistrement des réponses impulsionnelles comme décrit ci-dessus, un impact ayant été donné à la surface d'une plaque de verre, tous les coefficients

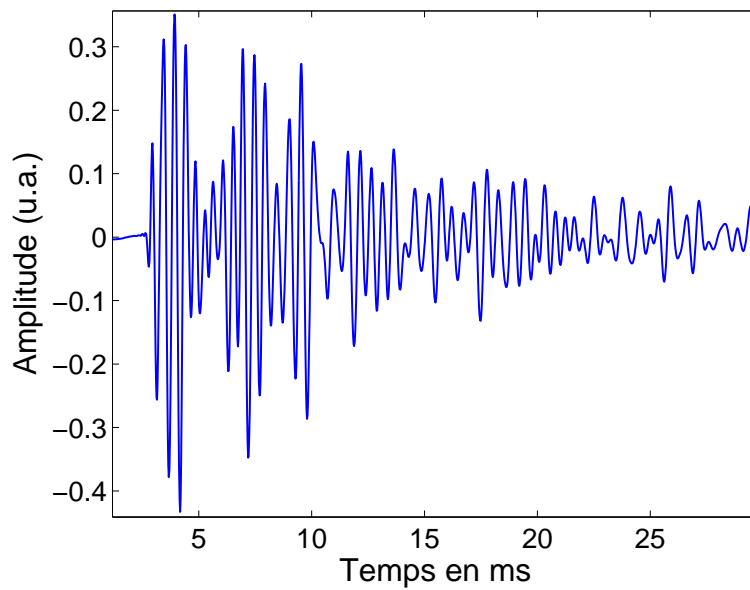


FIG. 3.2 : Réponse typique à un impact dans une plaque réverbérante (ici en verre, de 3 mm d'épaisseur), mesurée par une pastille piézoélectrique Murata.

de corrélation entre la nouvelle signature acoustique et celles de la bibliothèque sont calculés, et représentés en niveau de gris sur la figure 3.3, en fonction des coordonnées des points d'impacts ayant servi à constituer cette bibliothèque. La position de l'impact correspond à un maximum de corrélation : elle a donc bien été identifiée.

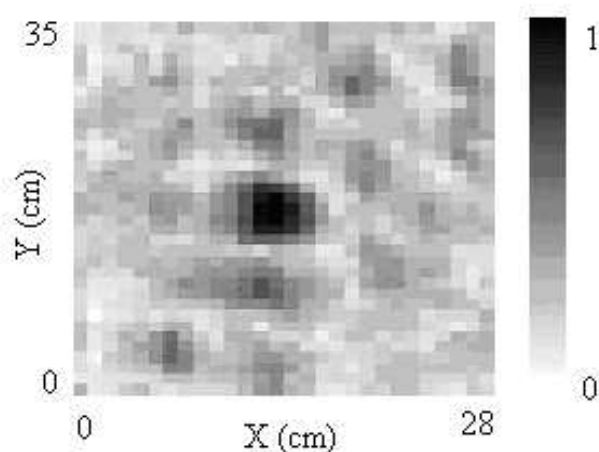
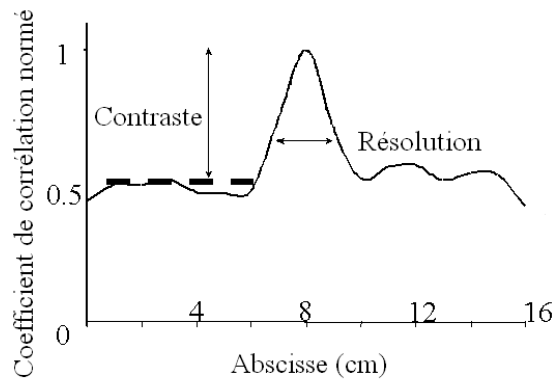


FIG. 3.3 : Carte des coefficients de corrélation : l'impact a clairement été localisé

La figure 3.4 représente l'évolution du niveau de corrélation le long d'un axe (c'est donc

une coupe de la figure précédente). D'après l'ensemble des travaux sur l'application du RT pour focaliser dans divers milieux (voir l'introduction de cette thèse), la largeur de la tache focale est déterminée par la longueur d'onde ; nous verrons dans la partie suivante plus en détail quelles ondes entrent en jeu ainsi que le lien formel entre cette largeur et la longueur d'onde.

Par ailleurs, nous pouvons définir un rapport signal sur bruit, ou facteur de contraste, comme le rapport entre l'amplitude du pic de focalisation et le niveau moyen de corrélation loin de ce pic. Le niveau de ce 'bruit' joue un rôle important dans notre application, car s'il est trop élevé, il y a un risque de croire avoir localisé l'impact en un point qui ne serait pas le bon. Ce rapport signal sur bruit mesure ainsi la qualité de la compression spatiale.



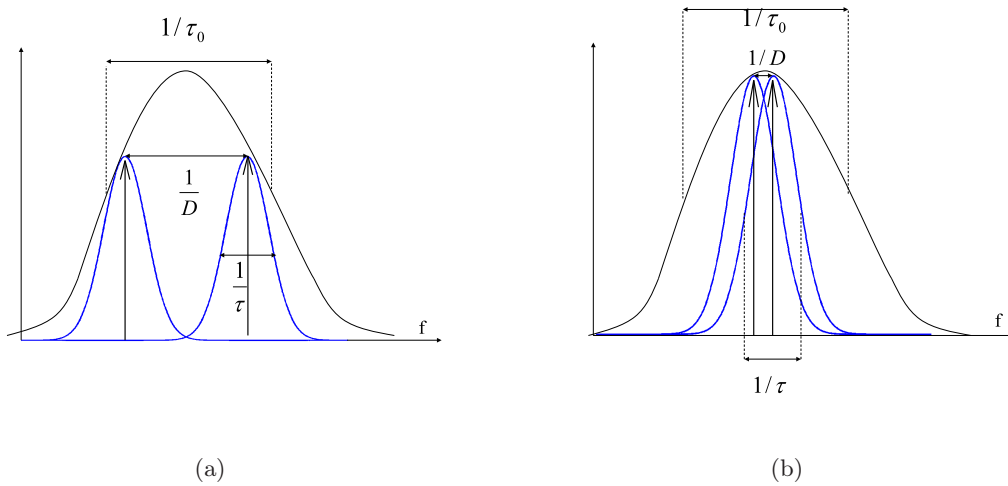
**FIG. 3.4 :** Coefficient de corrélation entre la réponse mesurée à l'abscisse  $x$  et la réponse mesurée à l'abscisse  $x=8$  cm, en fonction de  $x$ , en n'utilisant qu'un seul capteur. Définition de la résolution et du contraste.

### 3.2.2 Facteur de contraste

Comment évolue alors ce rapport en fonction du nombre de capteurs, et de quoi dépend-il ? L'approche phénoménologique présentée au chapitre précédent reposait sur un certain nombre d'hypothèses : le signal d'émission était considéré à bande étroite, c'est-à-dire que la fréquence centrale était grande devant la bande passante ; la durée caractéristique du signal réverbéré  $\tau$ , qui peut s'interpréter aussi comme le temps de réverbération de la cavité, était considérée comme indépendante de la fréquence. Comme nous le verrons plus loin, cette première hypothèse n'est malheureusement pas vérifiée dans le cas de plaques excitées par un impact ; et la durée caractéristique du signal dépend assez fortement de la fréquence, car les hautes fréquences sont bien plus rapidement atténuées que les basses fréquences. Cependant, nous nous contenterons de cette approche, car elle permet de fournir des renseignements pertinents. En notant  $\tau_0$  la

durée d'une impulsion d'émission, rappelons les résultats fondamentaux présentés au chapitre précédent :

- Dans le cas où les modes propres de la cavité ne sont pas séparés, sous l'hypothèse que les  $N$  capteurs enregistrent des informations décorrélées, l'amplitude au point de focalisation vaut  $N\frac{\tau}{\tau_0}$ , et l'amplitude loin de la source initiale (bruit déterministe) vaut  $\sqrt{N\frac{\tau}{\tau_0}}$ . Le SNR tel que nous l'avons défini ci-dessus est donc proportionnel à  $\sqrt{N\frac{\tau}{\tau_0}}$ .
- Lorsqu'au contraire les modes sont séparés, le SNR est alors égal à  $\sqrt{N\frac{D}{\tau_0}}$ ,  $D$  étant la densité modale (nombre de modes propres de la cavité par unité de fréquence). La figure 3.5 représente l'allure du spectre dans chacun de ces deux cas.



**FIG. 3.5 :** Allure du spectre d'amplitude d'une réponse impulsionnelle dans une plaque telle que ses modes propres de flexion sont séparés (a) ou se recouvrent (b), en fonction de la densité modale  $D$  et du temps de réverbération de la cavité.

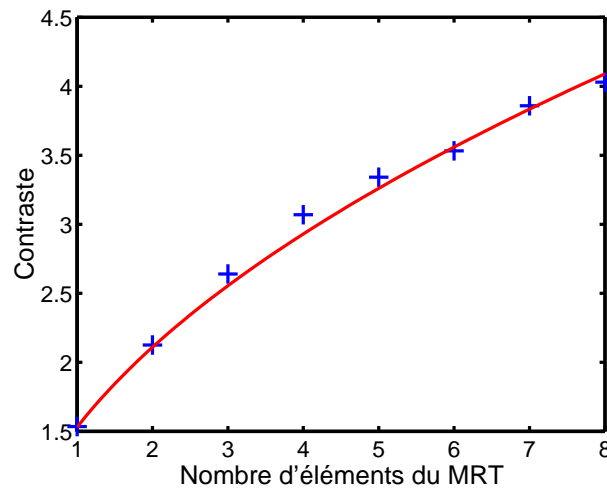
Première conséquence de ces expressions théoriques du SNR : dans les deux cas, plus l'impulsion sera brève, c'est-à-dire plus la bande passante excitée sera large, et plus le contraste sera élevé. Si, dans la bande passante qui nous intéresse, l'atténuation variait de façon négligeable avec la fréquence, alors toutes les fréquences excitées par la source participeraient au contraste. Mais cette hypothèse n'est pas vérifiée dans la réalité (même pour les plaques métalliques), encore moins pour les plaques en verre ou Plexiglas ; les hautes fréquences sont plus atténuées que les basses fréquences, et la bande passante disponible s'en trouve réduite. Nous verrons dans la partie suivante comment résoudre ce problème.

Dans le premier cas, le contraste dépend du temps de réverbération de la cavité. Plus celle-ci est réverbérante, et meilleur sera le contraste. Or le caractère réverbérant d'une plaque diminue

avec :

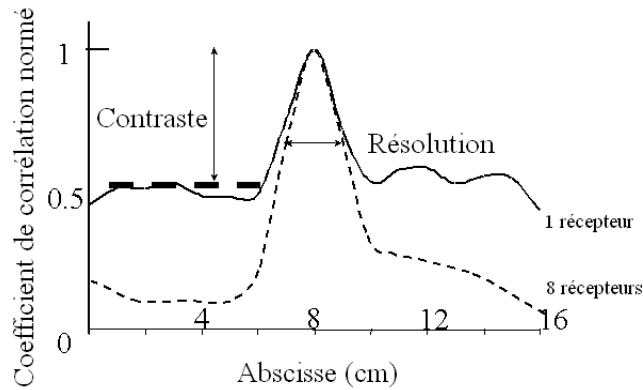
- l'atténuation du milieu (négligeable dans une plaque d'acier, mais très importante dans du Plexiglas)
- les pertes par couplage avec le support (d'où l'intérêt de plaques aux conditions aux limites quasiment libres)
- le rayonnement dans l'air, inévitable.

Ainsi, le choix du matériau sera déterminant pour l'efficacité de cette technique de localisation. Dans le second cas en revanche, nous aurons intérêt à choisir une cavité dont le nombre de modes par unité de fréquence est élevé. Enfin, si on souhaite améliorer encore le contraste, on peut augmenter le nombre de capteurs, et moyenner les fonctions d'intercorrélation. Cette dépendance du contraste en  $N$  a été vérifiée expérimentalement (figure 3.6) : les valeurs expérimentales coïncident bien avec la courbe théorique d'équation  $y = a\sqrt{N} + b$ ,  $a$  et  $b$  étant obtenus par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés. Par ailleurs, comme le montre la courbe expérimentale de la figure 3.7, la largeur de la tache focale ne dépend pas de  $N$  ; en effet, elle ne dépend que de la longueur d'onde centrale de la source. Cette expérience est donc en accord avec la théorie du RT.



**FIG. 3.6 :** Evolution du contraste avec le nombre de capteurs utilisés : expérience dans une plaque de verre (croix) de 3 mm par 30 cm et par 40 cm, et courbe théorique approchée (ligne continue).

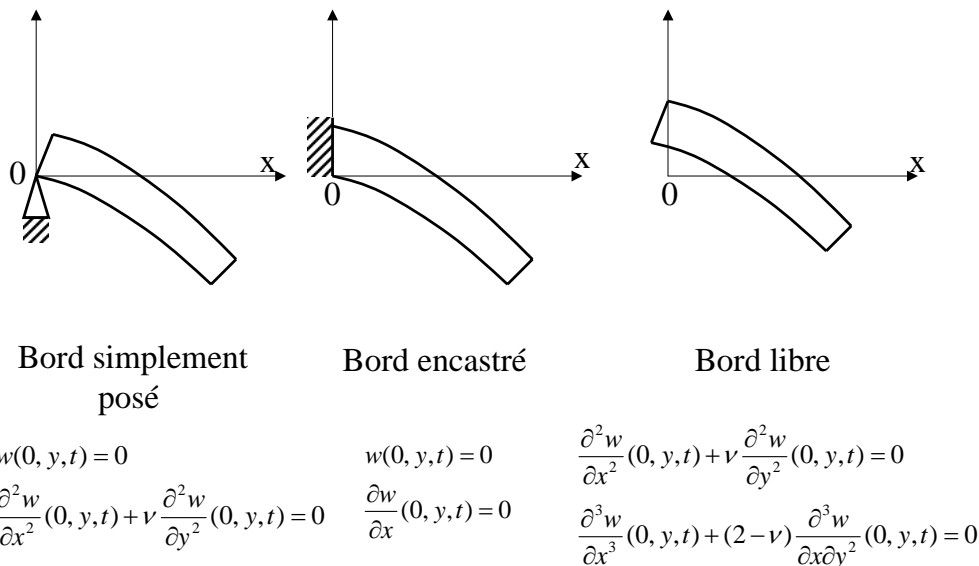
Pour savoir quelle sera l'expression du contraste, nous avons besoin de déterminer si les modes propres de la cavité sont séparés ou non. Or, comme nous allons le montrer dans la partie suivante, l'onde guidée (par l'épaisseur) privilégiée par une excitation impulsionnelle à la surface d'une plaque est le mode de flexion  $A_0$ . Combien de fréquences propres possède alors la cavité ?



**FIG. 3.7 :** Coefficient de corrélation entre la réponse mesurée à l'abscisse  $x$  et la réponse mesurée à l'abscisse  $x=8$  cm, en fonction de  $x$ , en n'utilisant qu'un seul capteur (courbe continue) ou huit capteurs (pointillés). La résolution ne change pas lorsque le nombre de capteurs augmente.

Pour y répondre, nous allons donc anticiper sur les résultats du paragraphe 3.3, et exploiter un modèle de plaque en flexion[27] (équivalent au mode  $A_0$  dans l'approximation faible produit  $fh$ ). Plus de détails sur ce modèle seront présentés au paragraphe 3.4.2 ainsi qu'au chapitre 4.

Le nombre de fréquences propres de la cavité dépend des conditions aux limites de la plaque. Rappelons les principales conditions aux limites : comme illustré figure 3.8, on distingue les bords encastrés, simplement posés, ou bien libres.



**FIG. 3.8 :** Principales conditions aux limites auxquelles les bords d'une plaque peuvent être soumis, et leur expression en fonction du déplacement transverse  $w(x, y, t)$  lorsqu'une onde  $A_0$  est incidente sur un bord d'équation  $x = 0$ .



Or les conditions aux limites réelles de la plaque ne rentrent jamais exactement dans l'une de ces catégories ; celles qui permettent une meilleure réverbération sont les conditions aux limites libres, que nous nous efforcerons d'approcher expérimentalement ; mais il n'existe pas d'expression analytique des fréquences propres d'une plaque dans ce cas-là [28]. Cependant, une méthode a été développée pour obtenir une valeur approchée : la méthode de Ritz (présentée par Ritz lui-même pour la première fois en 1909). De nombreuses autres techniques lui ont fait suite, mais celle-ci est la plus utilisée. C'est une méthode semi-numérique. Elle consiste à décrire le champ comme une somme de fonctions élémentaires qui vérifient chacune les conditions aux limites désirées, puis à calculer l'énergie de la plaque, et en minimisant cette énergie par rapport aux paramètres introduits, on en déduit les valeurs des fréquences propres physiquement acceptables.

En choisissant pour fonctions élémentaires des combinaisons des solutions de l'équation de la barre en flexion (ce qui implique donc l'hypothèse de faible produit fréquence-épaisseur), comme fait par Leissa [29], nous pouvons introduire des paramètres sans dimension, notés  $p_i, i \in \mathbb{N}$ , reliés aux fréquences propres  $f_i$  par l'expression :

$$(2\pi f_i)^2 = p_i \frac{V_P^2 h^2}{12} \frac{1}{a^4}, \quad (3.3)$$

$a$  étant la largeur de la plaque,  $h$  son épaisseur, et  $V_P$  la vitesse de plaque (si  $V_L$  et  $V_T$  sont les vitesses longitudinale et transverse,  $V_P = 2V_T \sqrt{1 - \frac{V_T^2}{V_L^2}}$ ). Tout l'intérêt de ce paramètre réside dans le fait qu'il ne dépend que (pour démonstration, voir [29]) de l'indice  $i$  du mode, du rapport  $a/b$  ( $b$  étant la longueur de la plaque) et dans le cas des conditions aux limites libres, du coefficient de Poisson  $\nu$ . Nous pouvons donc en conclure qualitativement que pour un même facteur de forme  $a/b$ , plus la plaque sera fine et large, et plus les modes propres seront rapprochés, et la densité modale élevée. L'une des hypothèses étant cependant un faible produit  $fh$ , cette expression ne sera plus valable pour une plaque donnée dans une gamme de fréquence trop élevée.

Un calcul exact peut en revanche être fait pour les conditions 'simplement posées', (le déplacement transverse est nul sur les bords de la plaque, mais la section droite est autorisée à pivoter). Si on note  $a$  et  $b$  la longueur et la largeur de la plaque,  $h$  son épaisseur, et  $V_P$  la vitesse de plaque, alors les fréquences propres valent [29] :

$$f_{m,n} = \frac{V_P h}{4\pi\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (3.4)$$

$m$  et  $n$  étant deux entiers pouvant prendre toutes les valeurs de 1 à l'infini. Alors le nombre de modes dont la fréquence est inférieure à  $f$  vaut environ (voir en annexe la méthode de calcul) :

$$N_{modes} = \frac{ab\pi^2\sqrt{3}}{V_P h} \cdot f. \quad (3.5)$$

La densité modale à la fréquence  $f$  est simplement la dérivée de  $N_{modes}$  par rapport à  $f$  :

$$n_0 = \frac{ab\pi^2\sqrt{3}}{V_P h}. \quad (3.6)$$

Remarquons qu'elle ne dépend alors pas de la fréquence ; et que plus la plaque sera fine et plus sa longueur et sa largeur seront importantes, plus la densité modale sera élevée ; ceci est en accord avec l'expression (3.3).

Dans le cas plus général de conditions aux limites quelconques, Mitchell et Hazell [30] ont montré que les fréquences propres peuvent être approximativement données par l'expression :

$$f_{m,n} = \frac{V_P h}{4\pi\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{(m + \Delta_m)^2}{a^2} + \frac{(n + \Delta_n)^2}{b^2} \right), \quad (3.7)$$

où  $\Delta_m$  et  $\Delta_n$  sont des coefficients correctifs déterminés expérimentalement. Dans le cas d'une plaque encadrée, Mitchell montre qu'ils valent :

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \frac{1}{\left(\frac{na}{mb}\right)^2 + 2} + \frac{0.017}{m} \\ \Delta_n &= \frac{1}{\left(\frac{ma}{nb}\right)^2 + 2} + \frac{0.017}{n}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ainsi, ces coefficients correctifs sont au maximum égaux à  $0.5 + 0.017$ , et donc nous pouvons considérer avec une assez bonne approximation que les fréquences propres d'une plaque encadrée sont toujours données par l'expression (3.4). Remarquons que, de toute façon, lorsque  $m$  ou  $n$  tend vers l'infini, l'expression (3.7) tend vers celle de la plaque simplement posée (3.4).

Or, dans le cas d'une barre, il existe une expression analytique approchée des fréquences propres pour toutes les combinaisons de conditions aux limites en fonction d'un seul entier  $m$  ; lorsque  $m$  est grand (typiquement supérieur à 10), ces expressions tendent toutes vers le cas de la barre avec conditions aux limites simplement posée (voir la table 7 de [29]). Nous pouvons donc raisonnablement supposer que l'expression (3.4) constitue une bonne approximation pour des valeurs de  $fh$  assez grandes quelles que soient les conditions aux limites de la plaque.

La figure 3.9 montre l'évolution de cette densité pour une plaque d'aluminium en fonction du rapport  $\frac{ab}{h}$  de la plaque.

Dans le cas d'une plaque de 0.5 mm d'épaisseur, 30 cm de large et 30 cm de long, cette densité vaut 0.6 modes par unité de fréquence, donc la distance caractéristique entre deux fréquences propres dans le spectre est de 1.7 Hz environ. Une mesure a été faite dans une plaque de Duraluminium à ces dimensions ; comme on peut le voir figure 3.10(a), le temps de réverbération

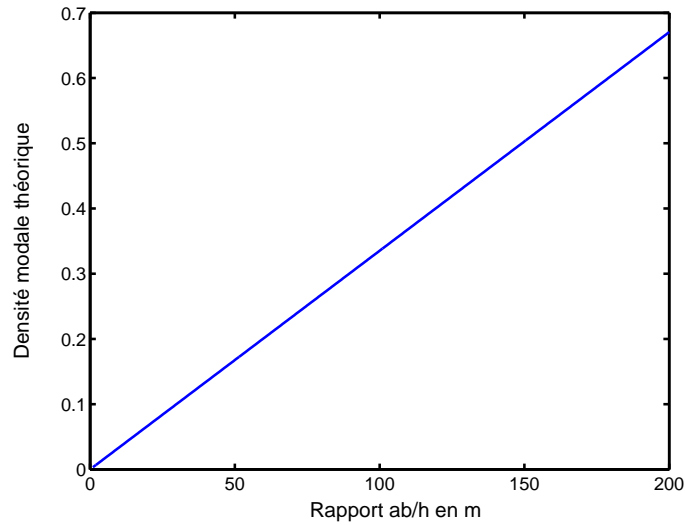


FIG. 3.9 : Densité modale théorique d'une plaque d'aluminium en fonction du rapport  $\frac{ab}{h}$ ,  $a$  étant la largeur,  $b$  la longueur et  $h$  l'épaisseur de la plaque.

est ici de l'ordre de 90 ms, donc la largeur caractéristique d'un mode propre est d'environ 11 Hz. Ainsi, on peut considérer que les modes ne sont pas séparés. Ceci est confirmé par la figure 3.10(b). D'après la théorie, le rapport signal sur bruit est alors proportionnel à  $\sqrt{N \frac{\tau}{\tau_0}}$ .

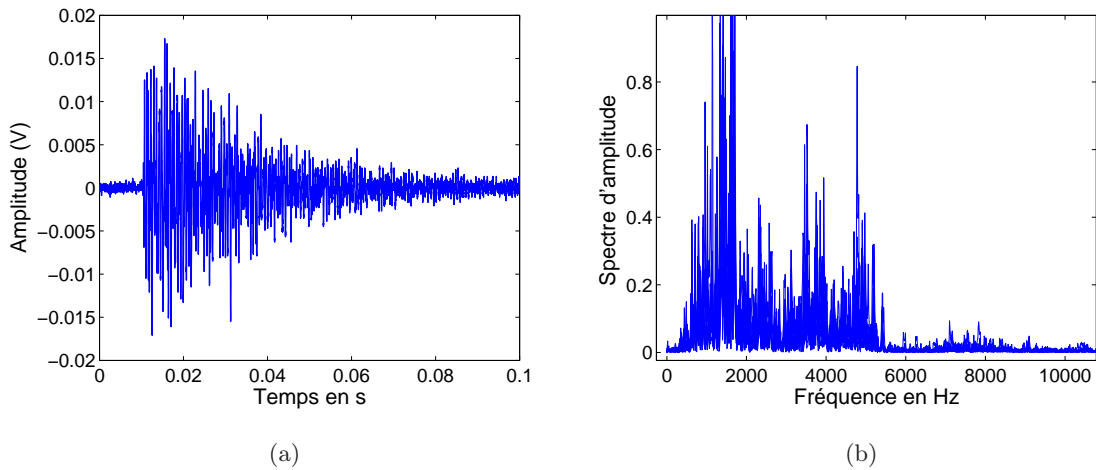


FIG. 3.10 : Réponse impulsionnelle (a) et son spectre d'amplitude (b) dans une plaque de Duraluminium (30 cm par 30 cm par 0.5 mm) à un impact donné par une bille. La réponse a été mesurée par un accéléromètre de la marque PCB choisi en raison de sa réponse en fréquence plate dans une bande passante allant de quelques Hz à 10 kHz. La plaque est fixée de façon à assurer des conditions aux limites libres (et une réverbération maximale).

Vérifions alors expérimentalement que lorsque la durée caractéristique des signaux diminue, le contraste diminue. Nous avons donc dans un premier temps réalisé un B-scan sur la plaque précédente ; le schéma du montage expérimental est représenté figure 3.11

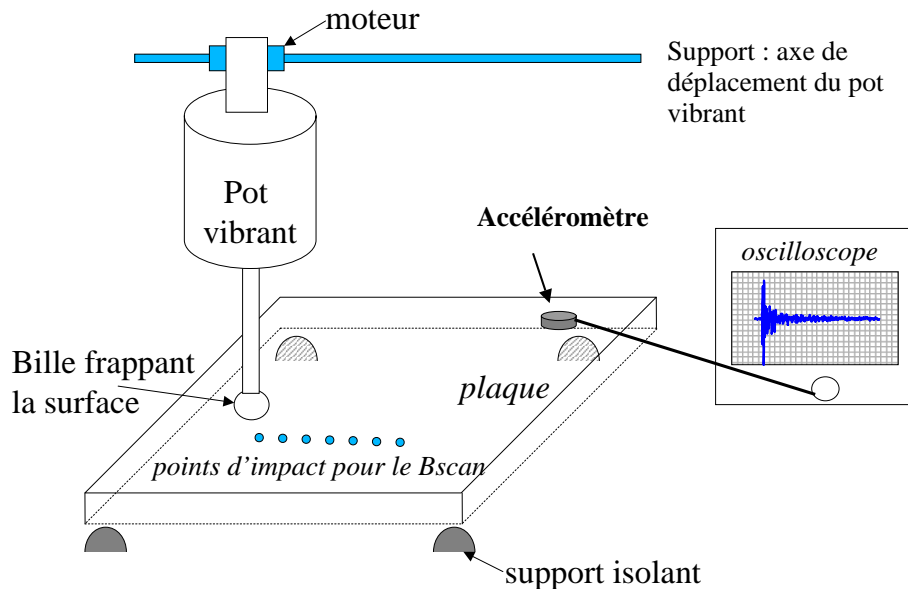


FIG. 3.11 : Dispositif expérimental : réalisation d'un B-scan sur une plaque, la source (un pot vibrant) se déplaçant le long d'un axe à l'aide d'un moteur.

Les coefficients de corrélation ont alors été calculés en ne conservant qu'une bande passante étroite (entre 8 kHz et 10 kHz), car sinon l'hypothèse selon laquelle la fréquence centrale est grande devant la bande passante ne serait pas vérifiée, et l'hypothèse d'indépendance de l'atténuation avec la fréquence ne serait pas non plus valable. Pour simuler une variation du temps de réverbération, les signaux ont été multipliés avant le calcul de corrélation par une exponentielle décroissante ( $t \mapsto e^{-t/\tau}$ ), le paramètre  $\tau$  prenant des valeurs décroissantes. La figure 3.12 montre alors les taches focales obtenues à partir des signaux bruts (croix), ou en prenant  $\tau$  égal à 50 ms (tirets), 10 ms (pointillés) ou 2 ms (courbe continue). Comme on peut le voir, le contraste se dégrade bien lorsque la durée caractéristique du signal diminue.

Par ailleurs, afin de vérifier la dépendance du rapport signal sur bruit vis-à-vis de la largeur de la bande passante excitée, nous avons calculé les coefficients de corrélation à partir des données de l'expérience précédente, en faisant varier la largeur de la bande passante disponible autour de 9 kHz. Plus précisément, les coefficients sont calculés dans le domaine fréquentiel en appliquant aux signaux un simple filtre rectangulaire, égal à 1 dans la bande passante voulue, et nul en dehors. La courbe continue présentée figure 3.13 a été obtenue avec une bande passante de [7 11] kHz, la courbe en tirets avec [8 10] kHz, et la courbe en pointillés avec [8.9 9.1] kHz. Le contraste

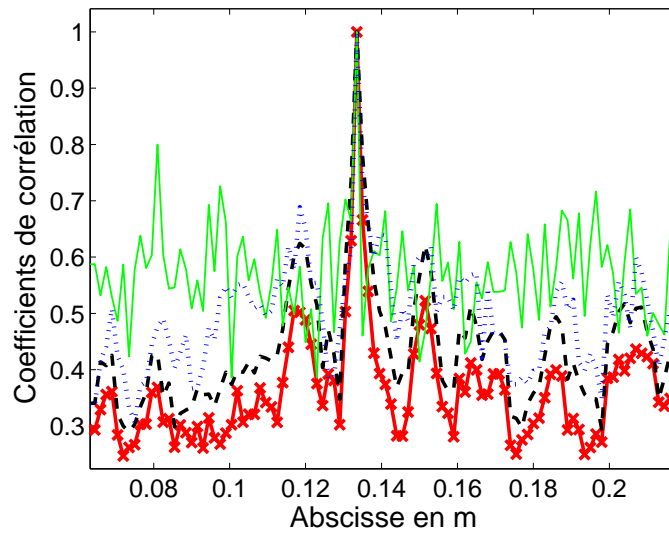


FIG. 3.12 : Taches focales obtenues sur plaque de Duraluminium de 30 cm de côté et 0.5 mm d'épaisseur. Les coefficients de corrélation sont calculés dans la bande [8000 10000] Hz, à partir des signaux bruts (×), ou en multipliant les signaux par une exponentielle décroissante  $e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = 50$  ms (- -), 10 ms (..), 2 ms (-). Plus les signaux sont brefs, plus le contraste est faible.

croît avec la largeur de la bande passante. Ainsi, de façon équivalente, le contraste diminue avec la durée du signal source  $\tau_0$ .

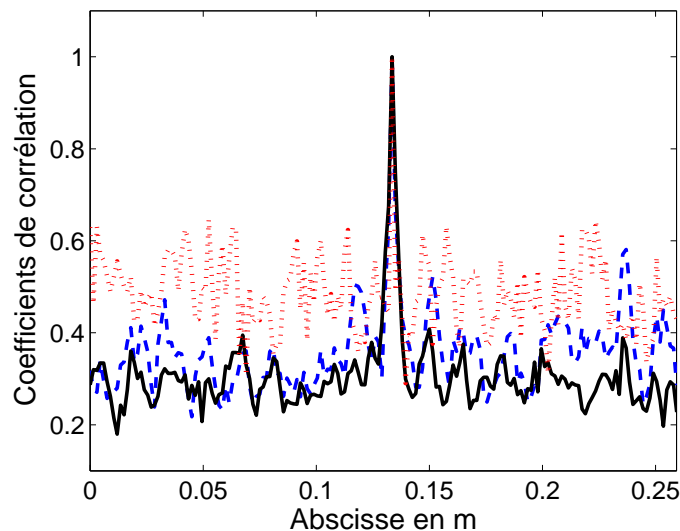
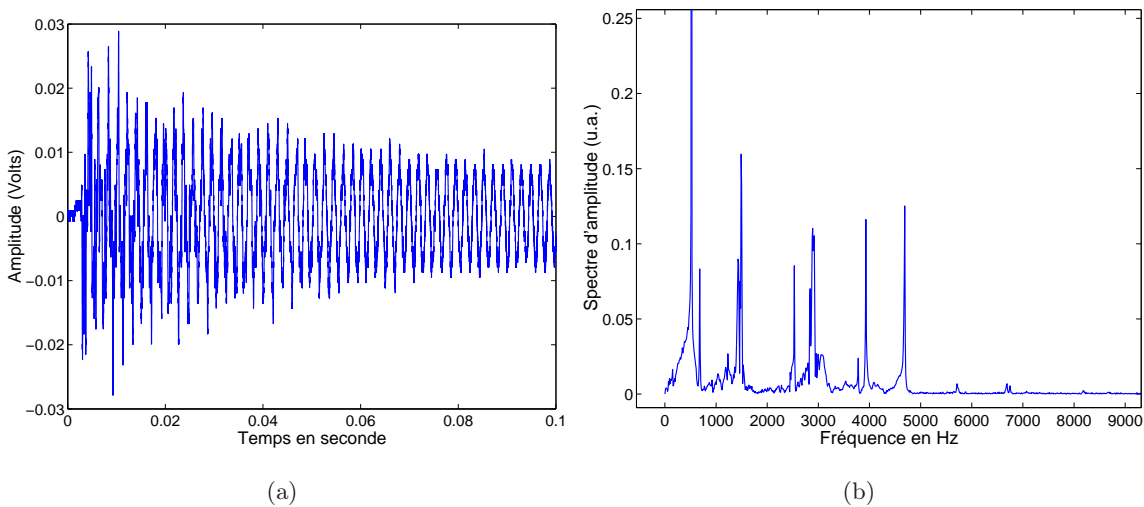


FIG. 3.13 : Taches focales obtenues sur plaque de Duraluminium de 30 cm de côté et 0.5 mm d'épaisseur. Les coefficients de corrélation sont calculés avec pour bande passante [7 11] kHz (-), [8 10] kHz (- -), et [8.9 9.1] kHz (..). Plus elle est large, et meilleur est le contraste.

Ce ne serait en revanche plus le cas dans de petites plaques épaisses très réverbérantes. En effet, nous avons mesuré la réponse à un impact donné par une bille à la surface d'une plaque d'acier inoxydable (matériau dans lequel la vitesse de plaque est quasiment la même que dans le Duraluminium) de 3.5 mm d'épaisseur, 9 cm de large et 20 cm de long, ainsi que son spectre d'amplitude. La réponse a été mesurée par un accéléromètre (de la marque PCB) dont la réponse en fréquence est plate de quelques Hz à environ 10 kHz. La plaque est fixée de façon à assurer des conditions aux limites libres (et une réverbération maximale). Comme on peut le voir figure 3.14, quelques modes propres sont complètement résolus. L'expression théorique (3.6) donne alors une densité de 0.017 modes par Hz ; la distance moyenne entre deux modes est donc de 60 Hz alors que la largeur d'un mode est de l'ordre de 10 Hz. Dans ce cas, nous pouvons approximativement considérer que le rapport signal sur bruit est proportionnel à  $\sqrt{N \frac{D}{70}}$ . Le SNR ne dépend alors pas du temps de réverbération de la plaque ; mais notons que pour se trouver dans cette configuration, il faut que les modes soient séparés, situation que l'on ne peut rencontrer que dans de petites plaques épaisses et où le temps de réverbération est élevé (ici il est de l'ordre de 0.1 s, tandis que dans du verre il est en général d'environ 0.03 s).



**FIG. 3.14 :** Réponse impulsionnelle (a) et son spectre d'amplitude (b) dans une petite plaque d'acier inoxydable (9 cm par 20 cm par 3.5 mm) à un impact donné par une bille. La réponse a été mesurée par un accéléromètre PCB dont la réponse en fréquence est plate de quelques Hz à 10 kHz. A cause des dimensions de la plaque, certains modes commencent à être bien séparés.

### 3.3 Etude de la nature des ondes entrant en jeu : prédominance du mode de flexion $A_0$

Pour bien comprendre les qualités de cette technique de localisation, notamment en terme de résolution, il est nécessaire de savoir précisément quelles sont les ondes qui entrent en jeu. Les objets auxquels nous nous intéressons ont la forme de plaques; les ondes générées sont bien sûr des ondes de Lamb (dites aussi 'ondes de plaque'), c'est-à-dire des ondes guidées par l'épaisseur, lorsque les deux faces de la plaque peuvent être considérées libres de contrainte. Il existe une infinité d'ondes de Lamb, appelées 'modes'; l'une de leurs caractéristiques étant d'être très fortement dispersives. La figure 3.15 représente les courbes de dispersion de ces modes (plus précisément le produit fréquence par épaisseur en fonction du quotient de l'épaisseur par la longueur d'onde). Or, comme on peut le voir sur cette figure, seuls deux de ces modes existent à toutes les fréquences : ce sont le premier mode antisymétrique noté  $A_0$  et le premier mode symétrique noté  $S_0$ . Les autres présentent des fréquences de coupure.

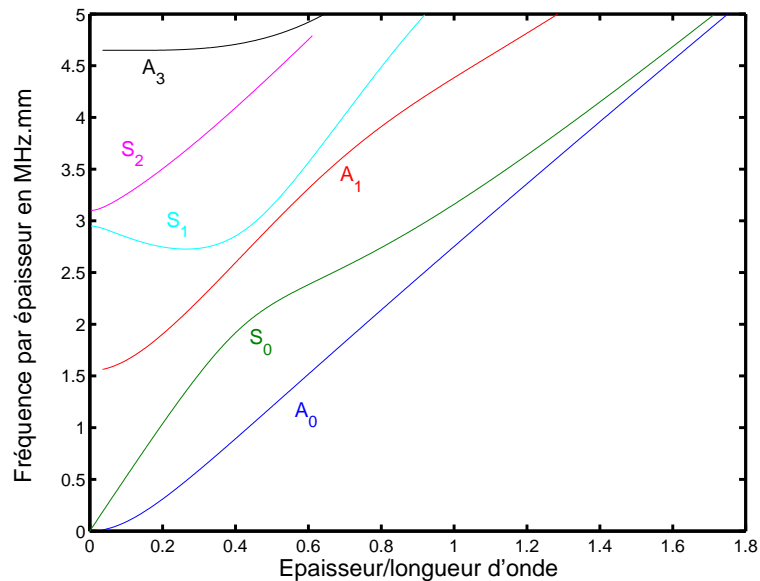
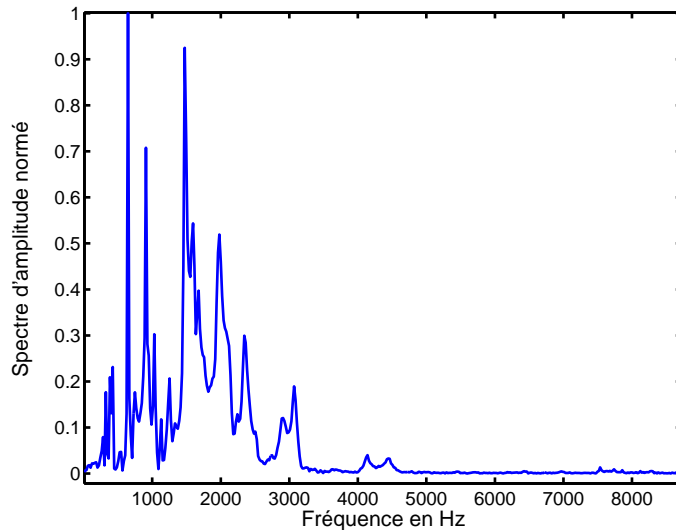


FIG. 3.15 : Courbes de dispersion théoriques des ondes de Lamb (produit fréquence par épaisseur en fonction de l'épaisseur sur la longueur d'onde).

Quelles sont donc les fréquences principalement excitées par un impact ? La figure 3.16 montre le spectre d'amplitude d'une réponse typique d'une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur (et 30 par 40 cm de côté) à un impact métallique. Ces mesures ont été faites à l'aide d'un interféromètre laser développé par D.Royer [31]; en effet, de simples accéléromètres ont une bande passante relativement étroite, et rarement plate en fréquence. Cette expérience a été répétée sur des

plaques d'épaisseur allant de 0.5 mm à 2 cm ; dans tous les cas, nous avons observé qu'au-delà de 20 kHz, le signal contient si peu d'énergie qu'on peut le négliger (quand il n'est pas noyé dans le bruit).



**FIG. 3.16 :** *Spectre d'amplitude normé de la réponse d'une plaque de verre (5 mm par 30 cm par 40 cm) à un impact donné par une bille (commandée par un pot vibrant). La vitesse particulière transverse est mesurée en un point de la surface de la plaque, au moyen d'un interféromètre laser couplé à une démodulation basse fréquence. La plaque est maintenue de façon à assurer des conditions aux limites libres (et donc une réverbération maximale).*

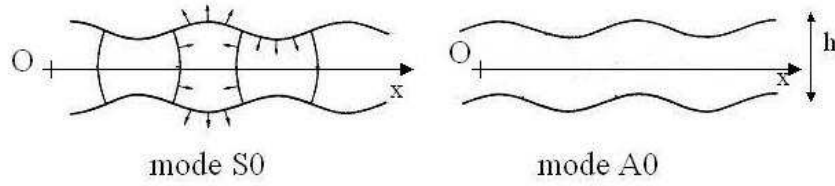
Ainsi, seuls les modes sans fréquence de coupure interviennent dans nos expériences tactiles : ce sont le premier mode antisymétrique de Lamb, noté  $A_0$ , qui est un mode de flexion à basse fréquence (c'est-à-dire que la composante longitudinale du déplacement est négligeable devant la composante transverse), et le premier mode symétrique de Lamb, noté  $S_0$ , qui est un mode d'extension (cf figure 3.17).

Or, pour une plaque donnée et à une fréquence donnée, la longueur d'onde du mode  $A_0$  est très différente de celle du mode  $S_0$  ; la résolution dépendant directement de la longueur d'onde, il est crucial de savoir quantitativement comment ces modes sont excités. Intuitivement, un impact à la surface d'une plaque étant une source antisymétrique, on s'attend à ce que le mode antisymétrique soit privilégié ; il reste maintenant à le vérifier.

### 3.3.1 Utilisation d'un code de simulation numérique à deux dimensions

Dans un premier temps, pour étudier cette question, nous avons utilisé un code de simulation de la propagation des ondes élastiques dans un solide à deux dimensions. Ce code a été écrit





**FIG. 3.17** : Schéma de la déformation d'une plaque d'épaisseur  $h$  lors du passage de l'onde  $S_0$  et  $A_0$ . On remarquera les propriétés de symétrie/antisymétrie des déplacements par rapport à l'axe ( $Ox$ ).

par Stefan Catheline en langage C interfacé avec Matlab ; j'ai donc pu faire des modifications du code source en fonction de mes besoins. Il repose sur la discrétisation et résolution par différences finies de l'équation de propagation des ondes élastiques dans un milieu localement isotrope [32] :

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (3.9)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé définis localement, et  $u_j$  la composante du vecteur déplacement suivant l'axe  $j$ . Nous nous contentons d'un code à deux dimensions, car bien que la simulation en trois dimensions soit possible, elle demande un volume de mémoire vive de l'ordre de plusieurs Giga-octets, et plusieurs jours de calcul sont nécessaires pour obtenir des signaux d'une dizaine de millisecondes dans une petite plaque. Le milieu simulé est alors une 'tranche' d'une plaque, comme illustré sur la figure 3.18.

La présence de chacun des modes peut être détectée à partir des courbes de dispersion. La détermination expérimentale de ces courbes dans une plaque réverbérante est difficile (nous y reviendrons), ce qui justifie l'intérêt d'une simulation en 2D. Pour reproduire l'équivalent du choc d'un doigt à la surface de la plaque, une source de "pression" est simulée : c'est-à-dire que la source est isotrope, comme illustré figure 3.19.

On enregistre ensuite les déplacements transverses et longitudinaux le long d'une ligne à la surface de cette tranche de plaque (cf figure 3.18). Une simple transformée de Fourier à deux dimensions de ces signaux donne accès au nombre d'onde en fonction de la fréquence. La figure 3.20(b) représente les courbes de dispersion obtenues ainsi à partir des déplacements transverses et la figure figure 3.20(a) représente celles calculées à partir des déplacements longitudinaux, dans une tranche de plaque d'aluminium de 3 mm d'épaisseur. Si la première figure ne fait apparaître que le mode  $A_0$ , la seconde montre bien la présence des deux modes : tous les deux sont donc

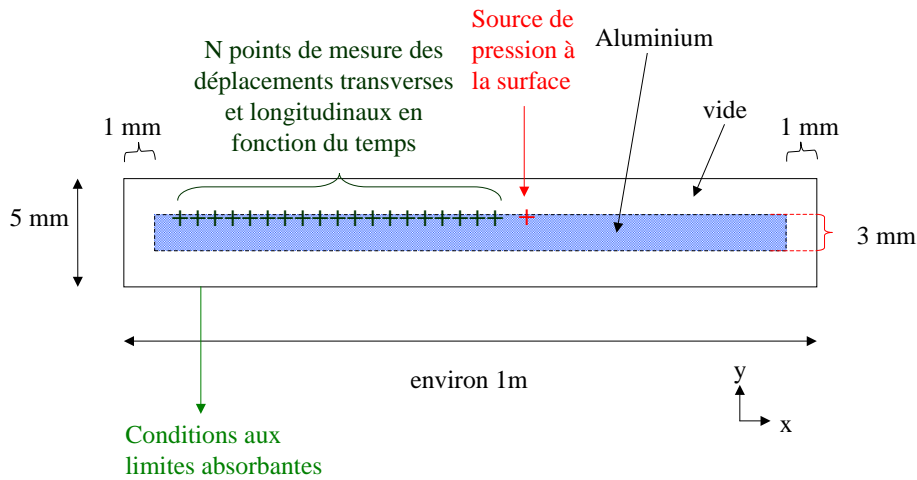


FIG. 3.18 : Schéma du milieu simulé avec le code élastique à deux dimensions. Une tranche d'une plaque d'aluminium de 3 mm d'épaisseur est placée dans du vide (pour obtenir des modes guidés).

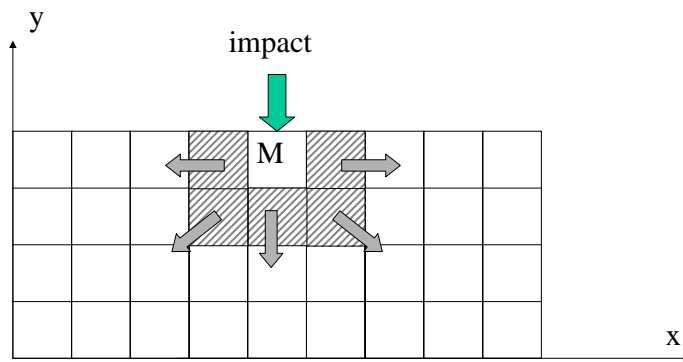


FIG. 3.19 : Sens des déplacements (schématisés par les flèches) imposés aux noeuds du maillage hachuré lorsque le point M est un point source.

bien excités par une telle source.

Avant de pouvoir conclure, il est donc nécessaire de mesurer l'énergie de chacun des modes en fonction de la fréquence. Nous avons donc calculé (voir Annexe 1, à la fin de ce chapitre) le flux du vecteur de Poynting à travers une section de cette plaque, en exploitant les propriétés de symétrie (resp. antisymétrie) de la composante longitudinale et d'antisymétrie (resp. symétrie) de la composante transverse du mode  $A_0$  (resp.  $S_0$ ) par rapport à l'axe ( $Ox$ ) défini figure 3.17. Ce calcul, bien que laborieux, ne comporte pas de difficulté majeure. Il repose néanmoins sur la connaissance du champ de déplacement dans l'épaisseur de la plaque. La mesure expérimentale d'un tel champ étant une véritable gageure, nous ferons appel une nouvelle fois à la simulation numérique bidimensionnelle des ondes élastiques.

La figure 3.21 montre l'évolution du rapport de l'énergie du mode  $A_0$  sur celle du mode  $S_0$

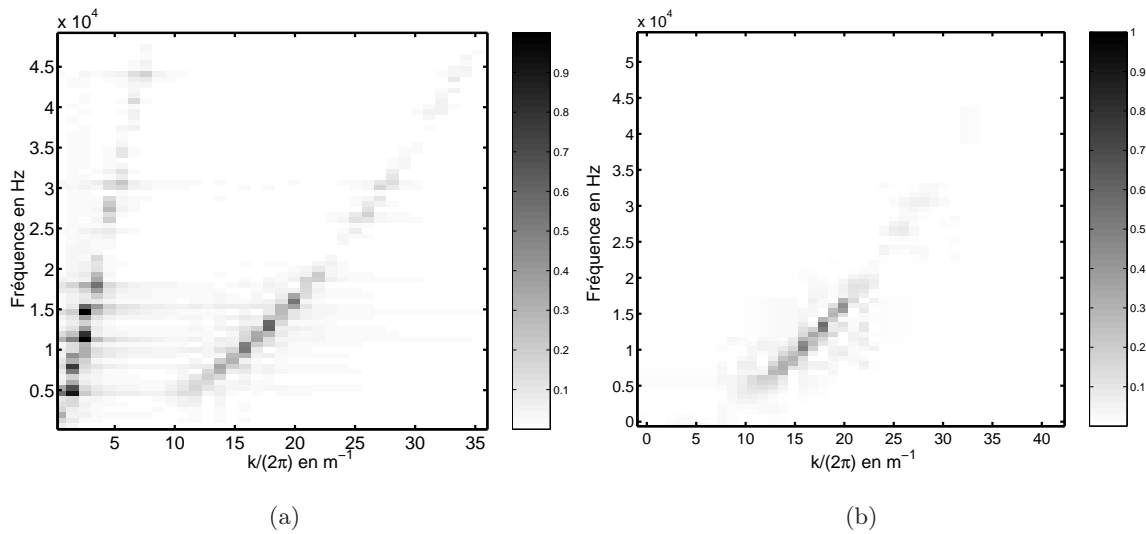


FIG. 3.20 : Transformée de Fourier à deux dimensions normée des déplacements longitudinaux (a) et transverses (b) : simulation dans une plaque de 3 mm d'épaisseur.

en fonction du produit fréquence de la source par épaisseur de la plaque  $fh$ . Comme on peut le voir, ce rapport décroît avec  $fh$ , mais reste supérieur à 10 jusqu'à 0.9 MHz.mm. En conclusion, pour les faibles produits  $fh$  qui nous concernent, dans des expériences tactiles, le mode  $A_0$  est bien prédominant sur le mode  $S_0$ . L'énergie de l'impact d'un doigt se propage donc sous la forme d'une onde de flexion  $A_0$ .

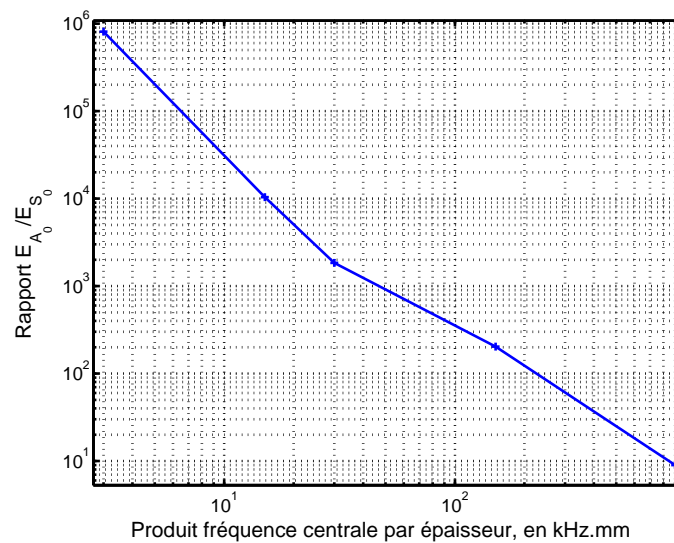


FIG. 3.21 : Rapport de l'énergie du mode  $A_0$  sur celle du mode  $S_0$  en fonction du produit de la fréquence centrale de la source par l'épaisseur de la plaque : simulation avec le code élastique 2D.

### 3.3.2 Validation expérimentale : les difficultés de mesure des courbes de dispersion en milieu réverbérant

Nous pouvons tenter de déterminer expérimentalement les courbes de dispersion, pour vérifier que seule celle du mode  $A_0$  est présente lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la composante transverse ; mais nous sommes alors confrontés au problème de la réverbération sur les bords. En effet, la transformée de Fourier à deux dimensions d'un B-scan (lorsqu'une source ponctuelle impulsionnelle est placée sur l'axe du B-scan) nous donne l'amplitude contenue dans le signal à une pulsation  $\omega$  donnée et pour un vecteur d'onde donné. En l'absence de réflexions, seul le vecteur d'onde dans la direction de l'axe du B-scan intervient ; mais à cause des réflexions, toutes les projections sur cet axe des vecteurs d'onde ayant toutes les directions possibles contribuent à l'amplitude mesurée. La figure 3.22 schématise le résultat d'une telle transformée bidimensionnelle dans un milieu où les modes  $A_0$  et  $S_0$  sont tous deux excités : les points de coordonnées  $(k, f)$  d'amplitude non nulle en raison de la présence du mode  $A_0$  masquent ceux dus au mode  $S_0$ . Ainsi, l'observation de la Transformée de Fourier bidimensionnelle ne permettrait pas d'affirmer si les deux modes sont présents ou non.

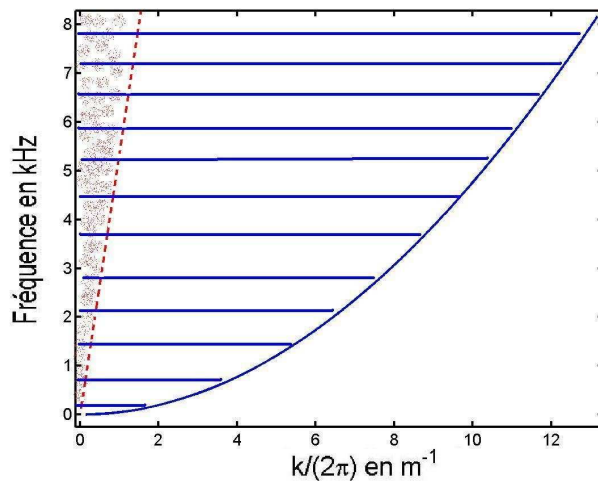
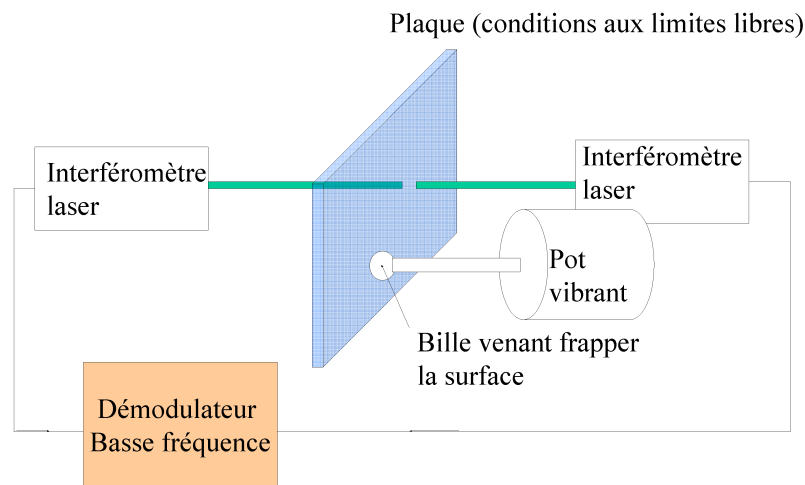


FIG. 3.22 : Résultat d'une transformée de Fourier 2D en milieu réverbérant : au lieu de ne faire apparaître que les courbes de dispersion des modes  $A_0$  (ligne continue) et  $S_0$  (pointillés), pour tous les couples  $(f, k/(2\pi))$  des zones hachurées (pour le mode  $A_0$ ) et en nuage de points (pour  $S_0$ ), l'amplitude de la transformée de Fourier à deux dimensions sera non nulle.

Une technique 'destructive' de mesure de ces modes serait de découper une barre dans la plaque, ce qui supprime les problèmes de réflexions ; cependant, deux problèmes apparaissent : d'une part, en réalité, ce milieu n'est pas équivalent au cas d'une onde plane se propageant dans

un milieu infini dans une direction, à cause de l'effet de Poisson (voir chapitre 4, paragraphe 4.2.4.1), et d'autre part, même ainsi, les longueurs d'onde du mode  $S_0$  sont du même ordre de grandeur que les dimensions de la plaque ; or la résolution de la Transformée de Fourier bidimensionnelle est égale à l'inverse de la longueur du B-scan, nous empêchant de clairement conclure sur la présence ou non du mode  $S_0$ .

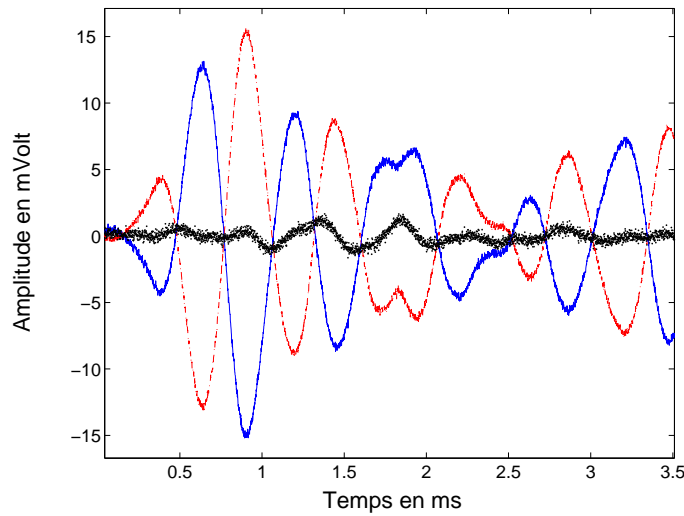
Cependant, nous pouvons exploiter les propriétés de symétrie des modes  $A_0$  et  $S_0$  : en effet, la composante transverse du mode  $A_0$  est antisymétrique par rapport à l'axe ( $Ox$ ) tel qu'il est défini figure 3.17, et la composante transverse du mode  $S_0$  est symétrique. Ainsi, nous avons procédé à l'expérience suivante (voir schéma du dispositif figure 3.23) : nous avons mesuré le déplacement (plus précisément la composante transverse du vecteur vitesse donnée en sortie du vibromètre couplé à l'interféromètre laser) de chaque côté d'une plaque excitée par un impact (donné par un pot vibrant) ; la plaque était fixée de façon à ce que ses bords soient libres de contrainte.



**FIG. 3.23 :** Schéma de l'expérience de mesure par interféromètre laser des composantes de vitesse transverses de chaque côté d'une plaque.

La figure 3.24 montre les deux signaux obtenus sur une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur, ainsi que la somme de ces deux signaux : cette dernière est quasiment égale à 0, prouvant que les déplacements mesurés sont opposés l'un de l'autre. Quantitativement, le coefficient de corrélation entre ces signaux est de 0.98. Ainsi, en n'utilisant que la composante transverse pour la localisation d'impact à la surface de plaques, nous sommes certains de n'exciter que le mode  $A_0$ .

Nous sommes alors en mesure d'étudier en détail quelle est la résolution de nos expériences tactiles.



**FIG. 3.24 :** Composante transverse mesurée des deux côtés d'une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur ; la somme des deux signaux (en pointillés) est quasiment nulle : seul le mode  $A_0$  est présent.

### 3.3.3 Résolution et nombre de points tactiles

Comme expliqué dans l'introduction de cette thèse, la résolution d'une focalisation par RT a été étudiée dans des milieux où les fonctions d'onde (champ de pression pour un milieu fluide, potentiels scalaire et vectoriel pour un milieu solide) obéissent à l'équation des ondes. Dans ce cas, les fonctions de Green du problème sont connues, et on en déduit que la résolution est de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

Au cours des pages précédentes, nous avons montré que le mode de Lamb  $A_0$  était bien prédominant dans nos expériences. De plus, comme le produit fréquence épaisseur qui nous intéresse est relativement faible (au maximum 0.2MHz.mm), nous pouvons dans une première approximation considérer qu'un modèle de plaque en flexion est suffisant pour décrire les ondes excitées. Or, dans ce modèle, les fonctions de Green ne sont pas des fonctions analytiques tabulées, ce qui nous empêcherait d'obtenir une expression théorique de la résolution.

C'est pourquoi nous avons choisi une approche différente pour rendre compte théoriquement de la résolution. Cette approche exploite uniquement le fait que l'onde concernée est une onde de Lamb, décrite par une fonction de deux variables d'espace uniquement. Considérons un point source  $A$ , un élément  $B$  du MRT, et un point de refocalisation  $A'$ . Après émission d'une source impulsionnelle quasiment monochromatique en  $A$  (de façon à pouvoir considérer que, dans la bande passante de l'impulsion, l'onde n'est pas dispersive mais se propage à la vitesse  $c$  constante), le champ enregistré en  $B$  est retourné temporellement, puis ré-émis. Au point  $A'$ , nous mesurons

alors :  $\langle G(B, A, t), G(B, A', t) \rangle$ ,  $\langle \rangle$  désignant l'opérateur d'inter-corrélation. Or la cavité étant réverbérante, et en supposant que  $B$  se trouve suffisamment loin de  $A$  et  $A'$ , nous pouvons considérer que ces deux champs ont les propriétés d'un champ diffus : ainsi, le champ mesuré en  $A'$  peut être interprété comme l'intercorrélacion de deux champs diffus. Cette fonction s'obtient par un calcul classique en acoustique des salles [33], dont nous rappelons ici les grandes lignes. Un champ diffus  $\Psi$  est considéré comme la somme d'une infinité d'ondes planes  $p_n(t)$  décorréliées entre elles et de directions de propagation aléatoires :

$$\Psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N p_n(t). \quad (3.10)$$

Le facteur de normalisation  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  est justifié par la conservation de l'énergie. Chaque onde plane peut donc s'écrire  $p_n(\mathbf{r}, t) = \cos(\omega(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c} \cos\theta_n))$ ,  $\theta_n$  étant l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et l'un des axes du plan. Ainsi, la fonction d'intercorrélacion notée  $H$  est :

$$H(A, A', t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle p_n(r_A, t), p_m(r_{A'}, t) \rangle. \quad (3.11)$$

Or les ondes planes provenant de directions différentes arrivent décorréliées, d'où :

$$H(A, A', t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle p_n(r_A, t), p_n(r_{A'}, t) \rangle. \quad (3.12)$$

Choisissons alors l'origine du repère en  $A$ , et notons  $r = |r_{A'}|$  ; nous reconnaissons alors la fonction d'autocorrélacion de la fonction  $t \mapsto \cos(\omega t)$ , qui n'est autre qu'elle-même, prise en  $-\frac{r}{c} \cos\theta_n$  :

$$H(A, A', t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \cos(-\omega \frac{r}{c} \cos\theta_n). \quad (3.13)$$

Il reste alors à sommer sur toutes les directions du plan, ce qui donne :

$$H(A, A', t) = J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right). \quad (3.14)$$

Remarquons que ce raisonnement fait uniquement intervenir le fait que les ondes concernées sont à deux dimensions, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de deux variables d'espace. Ce résultat reste donc valable pour toute onde de ce type, comme par exemple les ondes de surface.

En conclusion, la résolution d'une focalisation utilisant des ondes de Lamb est également de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

Que vaut alors la longueur d'onde du mode  $A_0$  en fonction de la fréquence et des paramètres élastiques du milieu ? Dans l'approximation basse fréquence, c'est-à-dire si le produit fréquence par épaisseur de la plaque est faible, ce mode suit la loi de dispersion suivante [34] :

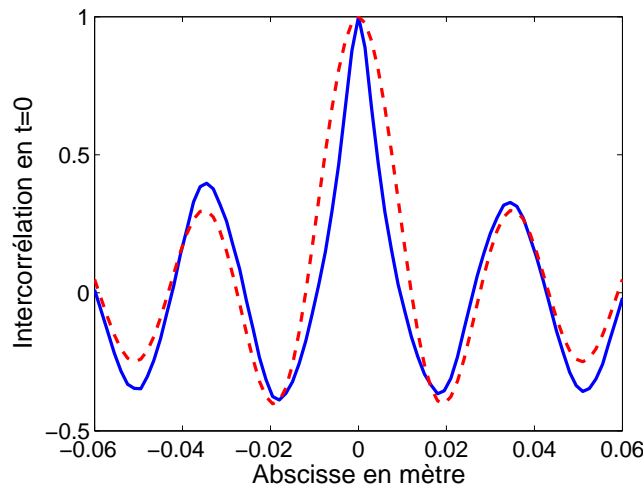
$$\omega = \frac{V_P}{\sqrt{12}} h k^2, \quad (3.15)$$

où  $h$  désigne l'épaisseur totale de la plaque,  $k$  le nombre d'onde, et  $V_P$  la vitesse de plaque (définie dans la partie 3.2.2). Ainsi, la longueur d'onde vaut :

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{V_P h}{\omega \sqrt{12}}}. \quad (3.16)$$

Afin de valider expérimentalement l'expression théorique (3.14), nous avons réalisé une mesure sur une plaque de Duraluminium de 0.5 mm d'épaisseur. Nous avons choisi ce matériau car les vitesses des ondes de volume  $y$  sont connues et varient peu d'un échantillon à l'autre. A l'aide du même dispositif expérimental que celui de la figure 3.11, un B-scan a été effectué, en déplaçant le pot vibrant (à savoir la source) suivant une ligne de 12 cm de long, par pas de 1.5 mm. Les fonctions d'intercorrélation entre d'une part la réponse impulsionnelle due à un impact au point central de la ligne, et d'autre part chacune des réponses impulsionnelles du B-scan, ont été évaluées à l'instant  $t = 0$ . Nous obtenons ainsi un diagramme de focalisation. Afin d'augmenter le rapport signal sur bruit, l'expérience a été répétée pour une quarantaine de lignes de 12 cm chacune en divers endroits de la plaque, et les diagrammes de focalisation ont ainsi été moyennés.

La figure 3.25 représente ce diagramme de focalisation moyen, obtenu en n'exploitant que les fréquences des réponses impulsionnelles comprises entre 4700 et 5300 Hz, ainsi que le diagramme théorique prévu par l'équation (3.14), en prenant pour vitesse de phase la vitesse prévue par l'approximation basse fréquence, et pour une fréquence de 5 kHz.

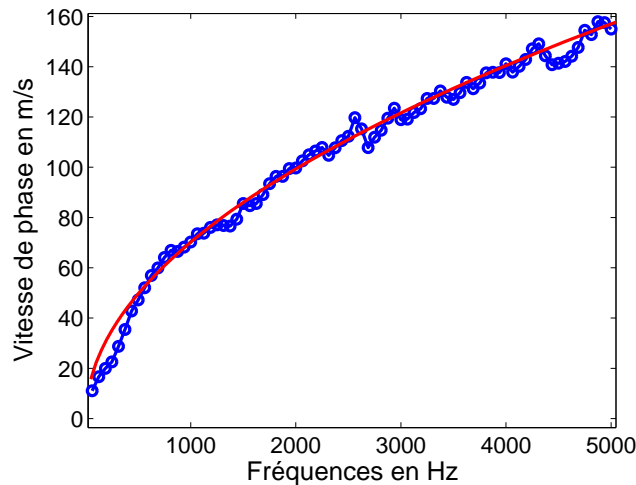


**FIG. 3.25 :** Coefficients de corrélation obtenus expérimentalement sur une plaque de Duraluminium de 0.5 mm d'épaisseur, en ne conservant que les fréquences comprises entre 4.7 et 5.3 kHz (-); et tache focale d'après le modèle théorique (3.14), la fréquence étant prise égale à 5 kHz (-).



Les deux courbes sont en bon accord. Le pic central expérimental est plus fin que le pic théorique : en effet, les fonctions d'intercorrélation sont calculées entre la réponse centrale et l'ensemble de toutes les réponses du B-scan. Ainsi, au point central, la réponse centrale est corrélée avec elle-même, et donc le bruit contenu dans le signal est autocorrélé, ce qui rehausse le niveau de corrélation en  $x = 0$  artificiellement par rapport au niveau de corrélation en tous les points  $x$  non nuls.

Pour vérifier la concordance entre modèle théorique et expérience à toutes les fréquences, nous avons procédé de la manière suivante : pour chaque courbe d'intercorrélation expérimentale calculée dans une bande passante étroite (de largeur 250 Hz et fréquence centrale  $f$ ), nous avons recherché la vitesse de phase  $c$  telle que la courbe d'équation  $J_0(2\pi f|x|/c)$  soit la plus proche de la courbe expérimentale au sens des moindres carrés. La courbe de dispersion ainsi estimée est représentée figure 3.26 par des cercles, et est en très bon accord avec la courbe de dispersion théorique du Duraluminium.

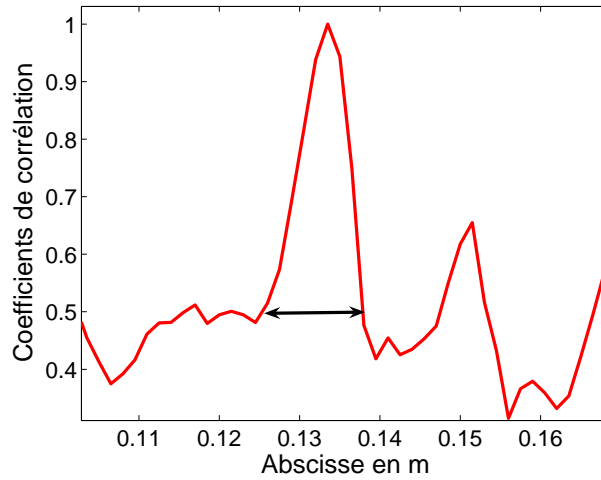


**FIG. 3.26** : Courbe de dispersion théorique dans le Duraluminium (—) et expérimentale (○).

Cependant, en pratique, dans une expérience de localisation d'impact, bien évidemment aucune moyenne ne peut être faite. De plus, ne connaissant pas l'origine des temps avec une bonne précision, comme expliqué au début de ce chapitre, nous calculons plutôt le maximum de la valeur absolue de la fonction d'intercorrélation : c'est donc ce que nous présenterons dans toute la suite.

La figure 3.27 montre donc ces coefficients pour un seul B-scan effectué sur la même plaque que précédemment, en ne conservant que les fréquences comprises entre 4.7 et 5.3 kHz.

La résolution (largeur à mi-hauteur) est alors de 1.3 cm (à 1.5 mm près, distance entre deux



**FIG. 3.27 :** Coefficients de corrélation obtenus expérimentalement sur une plaque de Duraluminium de 0.5 mm d'épaisseur, en ne conservant que les fréquences comprises entre 4.7 et 5.3 kHz. La largeur à mi-hauteur est bien de l'ordre de la demi-longueur d'onde centrale.

points de mesure du B-scan), tandis que la longueur d'onde théorique vaut 3 cm ( $h = 0.5$  mm,  $V_P = 5100$  m/s,  $\omega = 2\pi \times 5000$  rad/s) : la résolution est bien de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

Une première conséquence évidente de l'équation (3.16) est la suivante : plus la fréquence sera élevée, et plus la longueur d'onde sera petite. Ainsi, on gagnera en résolution en calculant le coefficient de corrélation uniquement sur la partie du signal à haute fréquence. La figure 3.28 confirme cette observation : lorsque les basses fréquences sont filtrées (toujours à l'aide d'un filtre fréquentiel rectangulaire, ici nul pour les fréquences inférieures à 6 kHz), la largeur à mi-hauteur de la tache focale diminue.

Deuxièmement, plus la plaque sera fine, et meilleure sera la résolution. Ceci a été confirmé expérimentalement, comme le montre la figure 3.29, sur des plaques de Duraluminium d'épaisseurs variées. Les coefficients de corrélation sont ici calculés sans filtre particulier.

Ainsi, le nombre de points que l'on peut rendre tactiles sur une plaque d'une surface  $S$  est égal à  $\frac{4S}{\lambda_0^2}$ ,  $\lambda_0$  étant la longueur d'onde centrale du signal, donc en fonction de la fréquence :

$$N_{points\ tactiles} = \frac{1}{16\pi^2} S \frac{\omega\sqrt{12}}{V_P h}. \quad (3.17)$$

En conclusion, nous avons vu au début de ce chapitre que nous avons intérêt à calculer les coefficients de corrélation en exploitant la bande passante la plus large possible ; mais en raison de l'atténuation, les basses fréquences moins atténuées auront un poids plus important que les hautes fréquences, et la bande passante disponible s'en trouve réduite. De même, la résolution

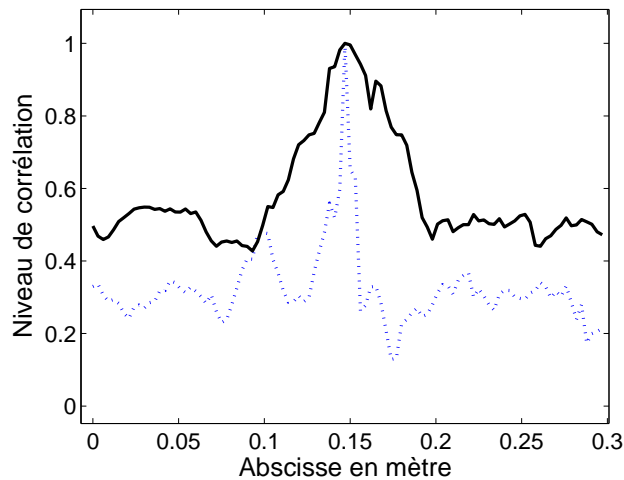


FIG. 3.28 : Coefficients de corrélation obtenus expérimentalement sur une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur, soit à partir du signal brut (-), soit en ne gardant que les fréquences supérieures à 6 kHz (..). Dans cette expérience, les signaux sont mesurés par interféromètre laser.

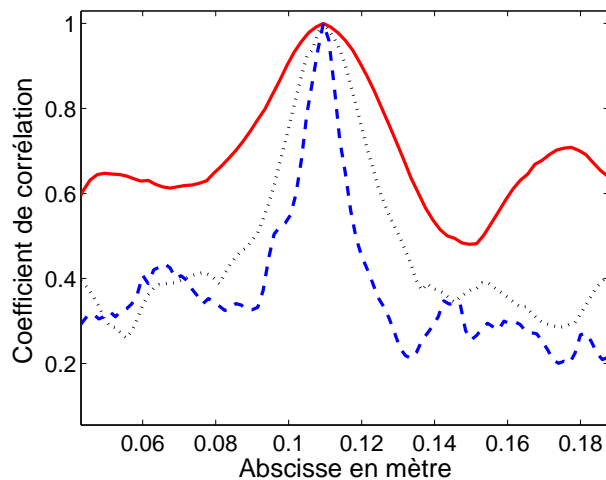


FIG. 3.29 : Taches focales mesurées par calcul du coefficient de corrélation, lors d'impacts (par pot vibrant) sur des plaques de Duraluminium de 5 mm (-), 2 mm (..) et 0,5 mm (- -) d'épaisseur. Les signaux sont captés à l'aide d'un accéléromètre. Comme prévu par la théorie, plus l'épaisseur est faible, et meilleure est la résolution.

dépend de la fréquence moyenne disponible dans le spectre, et donc l'atténuation plus forte des hautes fréquences détériore la résolution.

C'est pourquoi nous avons étudié comment améliorer notre technique de localisation par l'utilisation d'un filtre inverse.

### 3.3.4 Retournement Temporel et filtre inverse

Comme étudié par N. Quieffin [35], le Retournement Temporel est une technique robuste, à condition que le milieu soit invariant par Retournement Temporel, c'est-à-dire non dissipatif et sans écoulements. Pour un milieu dissipatif, une technique de filtre inverse spatio-temporel a été développée au laboratoire depuis quelques années avec succès, notamment afin de focaliser les ultrasons à travers la paroi crânienne, fortement atténuante [36]. Dans le cas d'une focalisation active, il s'agit de se fixer un objectif : le champ  $O(t)$  que l'on souhaite créer au point  $B$ . Alors, connaissant la réponse du milieu  $h_{AB}(t)$  au point  $B$  lorsqu'une impulsion est émise en  $A$ , un transducteur placé en  $A$  devra émettre le champ :

$$E_A(t) = FFT^{-1} \left( O(\omega) \cdot \frac{1}{H_{AB}(\omega)} \right), \quad (3.18)$$

où  $FFT^{-1}$  désigne l'opérateur de transformée de Fourier inverse rapide. Ainsi, une atténuation de l'onde par passage dans le milieu à une pulsation  $\omega$  se traduit par une amplitude de  $H_{AB}(\omega)$  inférieure à 1 ; elle est compensée par le filtre inverse. En revanche, l'effet de ce dernier sur la phase est le même que le Retournement Temporel : après RT, le spectre de la pression dans le milieu en un point  $C$  est en effet  $H_{AC}(\omega) \cdot H_{AB}^*(\omega)$ , (\* désigne la conjugaison complexe) tandis qu'elle vaut  $H_{AC}(\omega) \cdot H_{AB}^{-1}(\omega)$  après filtre inverse.

Dans le cas de la localisation d'impacts, nous avons choisi une approche simplifiée du filtre inverse : pour chaque fréquence, dans le domaine fréquentiel, le signal de référence est divisé par son module, et de même pour la nouvelle réponse acquise lors de l'utilisation. Ainsi, seule l'information de phase est conservée, et le niveau de corrélation est obtenu de la façon suivante :

$$\text{Niveau de corrélation} = \max \left( FFT^{-1} \left( e^{i\phi_{H_{AC}(\omega)}} \cdot e^{-i\phi_{H_{AB}(\omega)}} \right) \right). \quad (3.19)$$

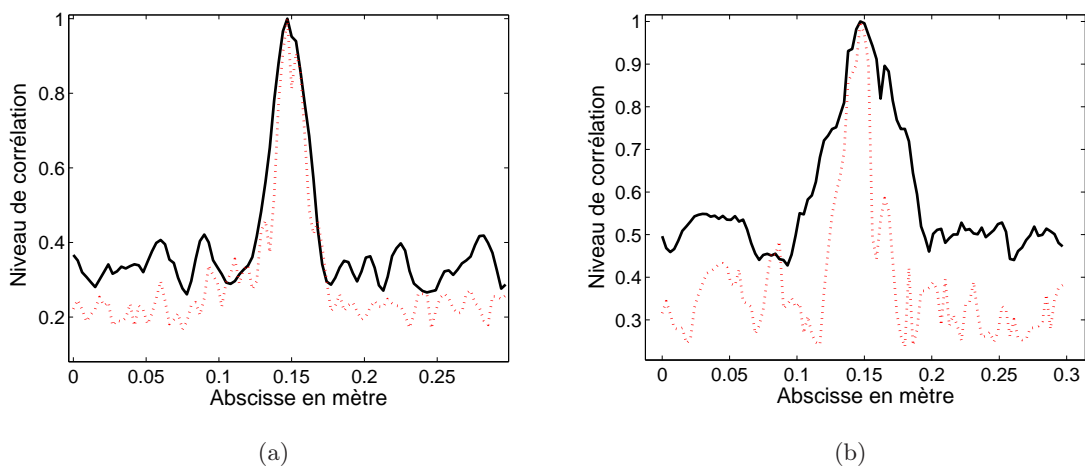
Ce filtre sera appelé simplement **filtre de phase**.

Cependant, dans la réalité, les signaux sont toujours bruités (bruit électronique, ou bien sensibilité à des bruits extérieurs). Ce bruit est cependant d'amplitude bien plus faible que la partie utile du signal. Ce bruit est à caractère aléatoire, donc sa phase varie d'une mesure à l'autre. Ainsi, pour être exploitable, le niveau de corrélation doit être calculé uniquement sur la partie utile. C'est pourquoi nous définissons un seuil  $n$  de la façon suivante : si l'amplitude du spectre à une fréquence donnée est inférieure de  $n$  dB à la valeur maximale du spectre d'amplitude, alors cette fréquence ne sera pas prise en compte dans le calcul du niveau de corrélation.

Toutes les fréquences contenant de l'information (c'est-à-dire celles dont l'amplitude en dB est supérieure au seuil) participent avec le même poids au calcul du degré de corrélation entre

les signaux ; cela nous permet donc de corriger les effets d'atténuation, et également de profiter de la bande passante des accéléromètres bon marché Murata, sans être gêné par le fait que leur réponse en fréquence ne soit pas du tout plate (au contraire, elle présente de très forts pics de résonance, notamment à 2.4 kHz).

La figure 3.30 montre l'apport de ce filtre par rapport à une simple corrélation. Les signaux ont été enregistrés avec un interféromètre laser (couplé à une démodulation basse fréquence) ; ainsi la bande passante de l'appareil de mesure est plate. Le niveau de corrélation est calculé en ne gardant que les fréquences pour lesquelles l'amplitude de la transformée de Fourier est supérieure à -35 dB. Nous constatons bien que le filtre de phase apporte un avantage assez faible dans un matériau très réverbérant et peu atténuant (cas de l'acier inoxydable), mais le gain est très net dans le verre, milieu fortement atténuant, aussi bien en terme de contraste que de résolution.

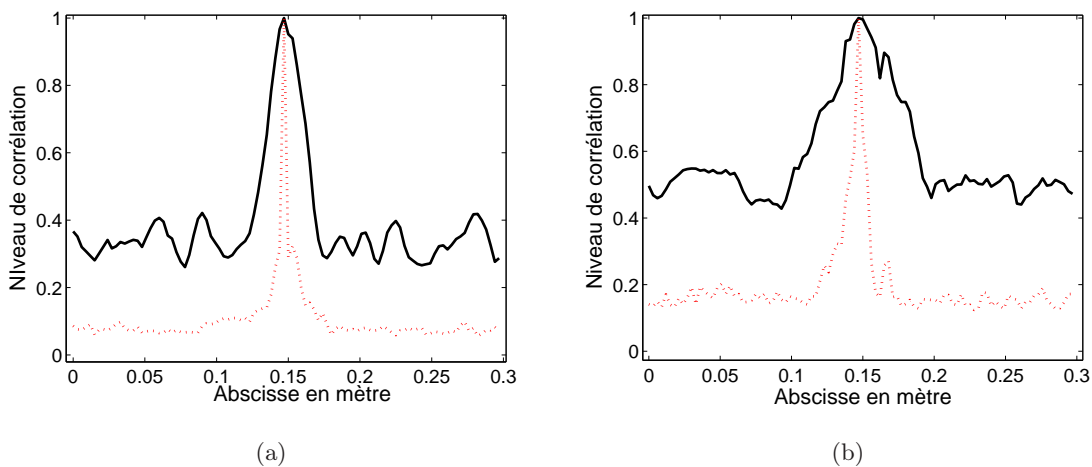


**FIG. 3.30 :** Tache focale obtenue expérimentalement dans une plaque d'acier inoxydable de 1 mm d'épaisseur (a) et dans une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur (b), par un simple calcul de coefficient de corrélation (—) ou par filtre de phase (..). L'apport du filtre de phase pour un milieu atténuant est très net, aussi bien sur le contraste que sur la résolution.

A quoi est due cette amélioration ? La résolution est imposée par la fréquence moyenne (qui correspond, qualitativement, à la moyenne des fréquences présentes dans le spectre du signal après RT, pondérées chacune par leur amplitude dans le spectre) ; or l'atténuation étant croissante avec la fréquence, sans filtre de phase, les hautes fréquences ont un faible poids, contrairement aux basses fréquences. Avec filtre de phase, l'équilibre est rétabli entre hautes et basses fréquences, et la fréquence moyenne est alors plus élevée, ce qui correspond à une longueur d'onde moyenne

plus faible, et une meilleure résolution. Quant à l'amélioration du contraste, comme nous l'avons vu dans la partie précédente, elle s'explique par le fait que plus de modes participent à la refocalisation, et la bande passante disponible est élargie ; or le contraste est proportionnel à la bande passante, et s'en trouve ainsi rehaussé.

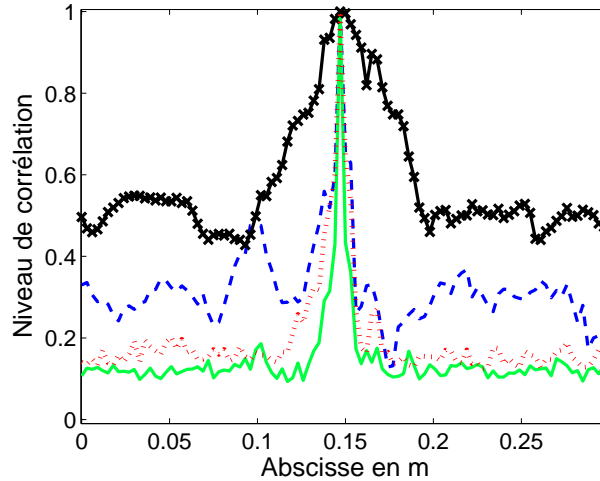
Si les conditions de mesure sont telles que le niveau de bruit est très faible, alors nous pouvons calculer le niveau de corrélation en gardant les fréquences telles que l'amplitude est supérieure à -50 dB : plus de hautes fréquences sont alors utilisées (pour un critère de -35 dB, 99% des fréquences utiles étaient inférieures à 10 kHz, tandis qu'avec un critère de -50 dB, le spectre utile va jusqu'à 50 kHz). Comme on peut le voir figure 3.31, contraste et résolution sont alors améliorés dans les deux matériaux, car le filtre de phase utilise des fréquences plus élevées que dans l'expérience illustrée sur la figure 3.30, fréquences qui sont cette fois atténuées aussi bien dans le verre que dans l'acier inoxydable. Le rapport signal sur bruit de mesure est donc un facteur déterminant pour la qualité de la localisation.



**FIG. 3.31 :** Tache focale obtenue expérimentalement dans une plaque d'acier inoxydable de 1 mm d'épaisseur (a) et dans une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur (b), par un simple calcul de coefficient de corrélation (—) ou par filtre de phase (..) avec pour seuil -50 dB. L'apport du filtre de phase est très net dans les deux matériaux.

Enfin, pour obtenir une résolution maximale, nous pouvons à la fois couper les basses fréquences et calculer les coefficients de corrélation par filtre de phase : comme le montre la figure 3.32, où les niveaux de corrélation obtenus par filtre de phase l'ont été en utilisant le même nombre de fréquences utiles (donc la même bande passante) de l'ordre de 1000, le contraste est

sensiblement le même, mais la résolution est encore améliorée.



**FIG. 3.32 :** Coefficients de corrélation obtenus expérimentalement sur une plaque de verre de 5 mm d'épaisseur, soit à partir du signal brut (×), soit en ne gardant que les fréquences supérieures à 6 kHz (- -), soit à l'aide d'un filtre de phase (-.), et enfin en combinant filtre de phase et en ne gardant également que les fréquences supérieures à 6 kHz (-). Les signaux sont mesurés par interféromètre laser.

Enfin, travailler uniquement sur la phase permet de réduire le volume de stockage nécessaire à la bibliothèque de réponses impulsionnelles, notamment pour des applications faisant intervenir un très grand nombre de références (par exemple les écrans tactiles).

### 3.4 Interaction du mode $A_0$ avec les bords de la plaque

Jusqu'à présent, nous avons étudié les performances de la localisation par RT, expérimentalement et théoriquement, en négligeant l'influence des bords de la plaque. Or le champ près d'un bord ne peut être décrit simplement par le mode  $A_0$ ; en effet, ce dernier interagit avec l'extrémité de la plaque, et dans le cas de conditions aux limites libres, une résonance de bord est observée. Supposons qu'une onde plane  $A_0$  soit incidente perpendiculairement sur un bord libre, et ce pour un produit  $fh$  quelconque (le modèle des plaques en flexion n'étant alors pas valable). Si la source ne contient que des fréquences en-dessous des fréquences de coupures de tous les modes dits 'à fréquence de coupure', et lorsque le milieu est parfaitement symétrique, la théorie des ondes élastiques en trois dimensions permet de montrer que la seule présence de  $A_0$  incident et  $A_0$  réfléchi ne suffit pas à vérifier les conditions aux limites libres (à savoir annulation des contraintes). En effet, aucune combinaison de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ne permet

à la fois d'avoir une contrainte tangentielle nulle et une contrainte normale nulle [37].

Ainsi des ondes non propagatives naissent à l'interface et assurent les conditions aux limites. Ces modes correspondent aux solutions de l'équation de Rayleigh-Lamb dont le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est complexe (on parlera de mode complexe) ou même imaginaire pur (on parlera de mode imaginaire pur). Des études ont été réalisées sur l'énergie convertie en modes évanescents [38, 39], mais toujours pour des gammes de produit fréquence par épaisseur de 1 MHz.mm minimum ; or on peut se demander si le comportement dans notre gamme est différent, notamment parce que l'on se trouve dans la zone la plus dispersive du mode  $A_0$  ; de plus, aucune loi d'évolution (théorique ou expérimentale) de la forme des ondes évanescentes lorsque la fréquence varie n'a été publiée jusqu'à présent.

Nous avons donc poursuivi cette recherche aux produits fréquence par épaisseur qui nous concernent, tout d'abord numériquement ; nous avons pu ainsi confirmer l'observation faite par Diligent et al [39] du déphasage de  $\pi/2$  du mode  $A_0$  lors de sa réflexion sur un bord libre, et montrer que ce dernier est prévu par la théorie des plaques en flexion. Tout ceci a été ensuite observé expérimentalement. Enfin, nous verrons quelle est l'influence de cette onde évanescente sur la forme des taches focales obtenues par RT.

### 3.4.1 Déphasage de $\frac{\pi}{2}$ et ondes évanescentes : observation numérique

Afin de calculer la partie évanescente du champ en fonction de la distance au bord, il faut connaître l'onde  $A_0$  incidente ainsi que réfléchie en tout point de la plaque, afin de les soustraire au champ total et en déduire la contribution des modes évanescents. Nous avons donc utilisé le même code de simulation numérique qu'au paragraphe 3.3.1, dans deux simulations : la première où l'onde  $A_0$  arrive sur le bord et est réfléchie (cf figure 3.33), et la seconde dans une plaque deux fois plus longue, pour mesurer le mode propagatif ayant parcouru la même distance que lors de la première simulation, mais sans avoir subi de réflexion (cf figure 3.34) ; ce sera la simulation 'de référence'. Cette dernière est indispensable, car nous nous intéressons à des produits fréquence-épaisseur tels que les phénomènes de dispersion deviennent très importants (à 1 MHz.mm en revanche, le mode  $A_0$  était très peu dispersif), et la source ne peut pas être purement monochromatique (elle ne sera constituée que d'une dizaine de périodes).

Ainsi, les signaux enregistrés aux points 1 à  $N$  inclus de la simulation de référence donneront la valeur de l'onde incidente non perturbée par les ondes évanescentes aux points de même numéro de la simulation totale. Les signaux enregistrés aux points  $N$  à  $2N - 1$  inclus de la simulation de référence donneront la valeur de l'onde réfléchie  $A_0$  pure aux points respectivement numéros  $N$  à 1 de la simulation totale. Ceci permet, sans erreur, de prédire l'onde incidente en tout point.



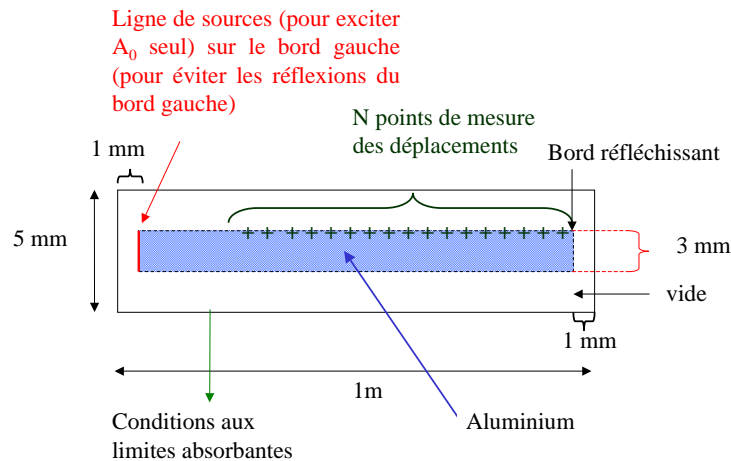


FIG. 3.33 : Schéma de la simulation 'totale' : pendant la réflexion du mode  $A_0$  sur un bord libre, les déplacements sont enregistrés à la surface de la plaque.

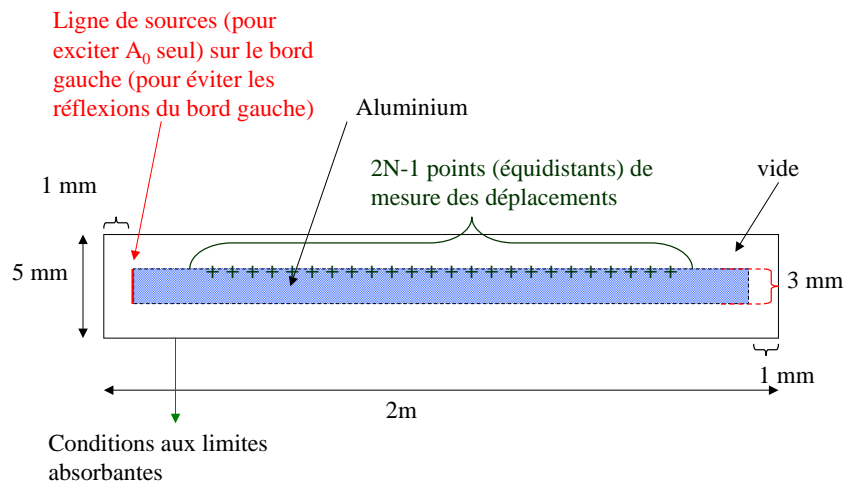
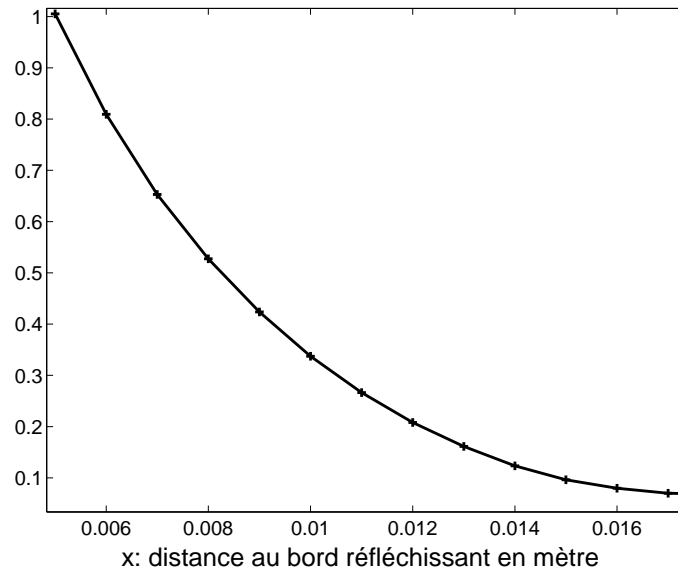


FIG. 3.34 : Schéma de la simulation 'de référence' : l'onde  $A_0$  parcourt la même distance que dans la précédente simulation, mais sans subir de réflexion, le milieu étant deux fois plus grand. Cette simulation permet de déduire la forme de la partie propagative de l'onde lors d'une réflexion.

En revanche, pour évaluer la partie propagative réfléchi, il faut tenir compte du fait que l'onde  $A_0$  subit un décalage de phase à la réflexion ; nous choisissons donc le décalage à appliquer de façon à ce que, loin du bord réfléchissant, le signal réfléchi reconstruit à partir de la simulation de référence coïncide le mieux possible avec le signal réfléchi de la simulation totale (car très loin du bord, les ondes évanescentes sont négligeables). Ainsi, en comparant les signaux des deux simulations, nous pouvons déduire d'une part l'évolution de l'onde évanescente avec la distance au bord, et également le déphasage de la partie propagative.

Comme montré sur la figure 3.35, pour une fréquence de 50 kHz et une plaque d'aluminium de 3 mm d'épaisseur, c'est-à-dire pour une longueur d'onde théorique de 3.3 cm, l'amplitude

de la composante de l'onde évanescente est divisée par 10 à une distance de 1.5 cm du bord, c'est-à-dire à environ une demi-longueur d'onde du bord.



**FIG. 3.35 :** Résultat de simulation : amplitude de l'onde évanescente contenue dans la composante transverse du déplacement, divisée par l'amplitude de la partie propagative incidente, en fonction de la distance au bord libre réfléchissant, pour une plaque de 3 mm d'épaisseur et une source à 50 kHz.

Cette méthode ne permet pas de mesurer la composante évanescente pour des fréquences plus basses, car plus la fréquence sera basse, plus la longueur d'onde sera grande et plus le milieu à simuler doit être grand ; de plus, pour atteindre un régime quasi-harmonique, il est nécessaire d'émettre au moins une dizaine de périodes, donc la durée de propagation à simuler augmente quand la fréquence baisse ; nous atteignons alors les limites de l'ordinateur (mémoire vive 1Go).

En revanche, nous avons pu mesurer le déphasage pour une source à 20 kHz, en utilisant l'idée suivante : lorsqu'une onde quasi-harmonique subit un déphasage à la réflexion, l'onde pouvant être décrite par la fonction :  $e^{i(\omega t - kx - \phi)}$ ,  $\phi$  étant le déphasage introduit, si on observe le champ (noté  $g(x)$ ) à un instant  $t$  donné, et en fonction de  $x$ , on pourra mesurer ce déphasage par comparaison avec l'onde  $f(x)$  observée au même instant  $t$  et qui aura parcouru la même distance sans subir de réflexion. La figure 3.36 illustre le principe de la mesure et les dimensions du milieu simulé dans le cas d'une source à 20 kHz (émettant une dizaine de périodes). Les origines  $O_1$  et  $O_2$  sont choisies de façon à ce que le front d'onde issu de la source arrive en  $O_1$  sans avoir subi de réflexion au même moment où il arrive en  $O_2$  après réflexion sur le bord de droite. Le déphasage sera alors la différence de phase des transformées de Fourier des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  à 20 kHz.

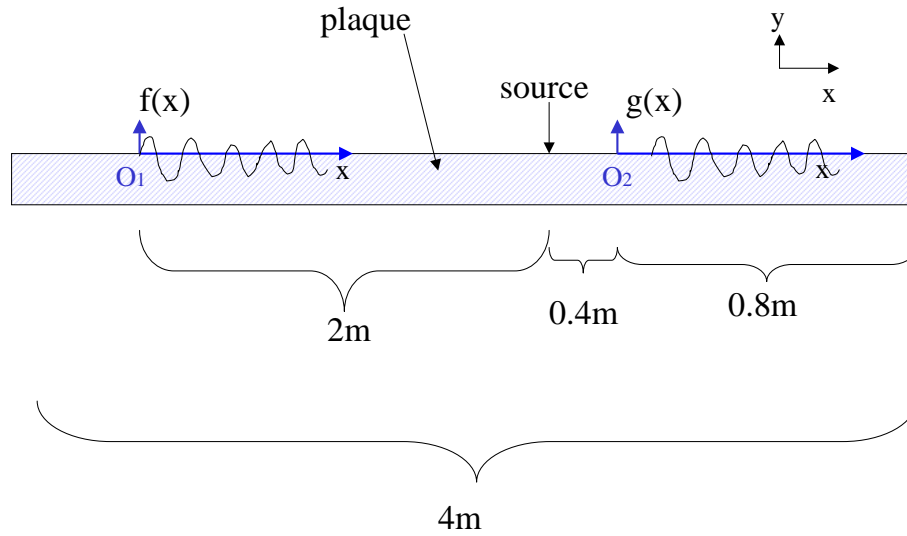


FIG. 3.36 : Schéma de la simulation utilisée pour mesurer le déphasage de la composante transverse du mode  $A_0$  lors de la réflexion sur un bord libre.

Le tableau suivant montre les déphasages obtenus de la composante transverse du déplacement en fonction de la fréquence de la source. Notons que la précision de ces mesures est limitée par le pas d'échantillonnage spatial (il est de 1 mm suivant l'axe  $(Ox)$  et de 0.2 mm suivant l'axe  $(Oy)$ ).

Produit Fréquence.épaisseur	Déphasage de la composante transverse
1 MHz.mm	-115°
0.15 MHz.mm	-106°
0.06 MHz.mm	-98°

TAB. 3.1 : Résultat de simulation : déphasage de la composante transverse du déplacement lors de la réflexion sur le bord libre d'une plaque, pour différentes valeurs du produit fréquence par épaisseur ( $fh$ ). Ce déphasage tend vers  $\pi/2$  lorsque  $fh$  tend vers 0.

Ces résultats tendent donc à montrer que le déphasage de la composante transverse du mode  $A_0$  tend vers  $\pi/2$  lorsque le produit fréquence-épaisseur tend vers 0.

### 3.4.2 Preuve théorique du déphasage de $\pi/2$

Ces simulations ont permis de quantifier la distance à laquelle l'onde évanescente est négligeable, mais pour des raisons de temps de calcul et volume de mémoire vive, elles ne permettent pas d'étudier plus précisément l'évolution de ce phénomène pour des fréquences plus basses. Or,

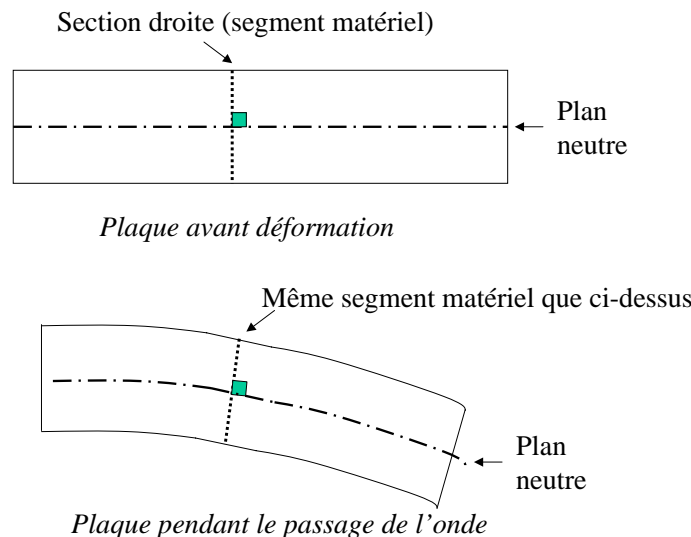
dans cette partie, nous allons montrer comment la théorie des plaques en flexion (avec conditions aux limites libres) permet de prédire la forme de l'onde évanescence ainsi que le déphasage de  $\pi/2$ .

Dans un premier temps, nous rappelons que la théorie des ondes de Lamb et la théorie des plaques en flexion coïncident bien lorsque  $fh$  tend vers 0. En effet, d'après cette dernière [29], la composante transverse  $w$  de déplacement d'une plaque en flexion obéit à l'équation suivante :

$$\Delta^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{3.20}$$

où  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  étant le module de Young,  $h$  l'épaisseur de la plaque,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $\rho$  la masse volumique de la plaque. Les hypothèses nécessaires pour établir cette équation sont les suivantes :

- $w$  ne dépend pas de la coordonnée d'épaisseur ;
- lorsque la plaque est au repos, son plan de symétrie sera tel que, au cours du passage de l'onde, il ne subira pas de déformation (c'est un plan neutre). Tous les segments matériels orthogonaux à ce plan en l'absence de l'onde sont alors supposés rester orthogonaux au plan neutre pendant le passage de l'onde (voir figure 3.37) ; on dit que les déformations transverses sont négligées.



**FIG. 3.37 :** Hypothèse sur laquelle repose la théorie des plaques en flexion : les segments droits restent orthogonaux au plan neutre au cours du mouvement.

La théorie complète des ondes de Lamb, quant à elle, donne accès à l'expression exacte des courbes de dispersion des différents modes de plaque ; ce sont en effet les couples  $(w, k)$  réels

vérifiant l'équation suivante, appelée équation de Rayleigh-Lamb [34, 40] :

$$\frac{\omega^4}{V_T^4} = 4k^2 q^2 \left( 1 - \frac{p \tan(ph + \alpha)}{q \tan(qh + \alpha)} \right), \quad (3.21)$$

où  $p$  et  $q$  sont les complexes vérifiant :

$$p^2 = \frac{\omega^2}{V_L^2} - k^2 \quad (3.22)$$

et

$$q^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2} - k^2, \quad (3.23)$$

et  $\alpha$  vaut 0 pour les ondes de Lamb symétriques, et  $\pi/2$  pour les modes antisymétriques. Dans l'approximation où  $kh$  est négligeable devant 1, et pour une onde antisymétrique, cette équation de dispersion se simplifie en [34] :

$$\omega^2 = \frac{V_P^2}{12} k^4 h^2, \quad (3.24)$$

et le déplacement transverse ne dépend plus de l'épaisseur. Or, dans le domaine de Fourier en temps et en espace, l'équation (3.24) peut être considérée comme une égalité entre opérateurs : une multiplication par  $i\omega$  correspond à une dérivation par rapport au temps, et une multiplication par  $ik$  est une dérivation par rapport aux coordonnées spatiales. De plus, dans une plaque isotrope, on montre aisément que le carré de la vitesse de plaque est égal à  $\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$  ; on constate ainsi que l'équation (3.24) est exactement la même que l'équation (3.20).

Or, les mêmes hypothèses de la théorie des plaques en flexion permettent de donner une expression simple pour les conditions aux limites [27] : pour un bord libre d'équation  $x = 0$  et une onde plane incidente perpendiculairement sur ce bord, l'annulation des contraintes se traduit par :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0. \quad (3.25)$$

Considérons alors une plaque infinie dans la direction  $y$ , définie pour  $x > 0$ , possédant un bord libre en  $x = 0$ . Si une onde plane  $A_0$  harmonique arrive perpendiculairement sur ce bord, alors le déplacement transverse  $w$  ne dépend plus que de  $x$  et de  $t$ . Les solutions bien connues de l'équation de propagation (3.20) sont alors des combinaisons linéaires des fonctions  $e^{i(\omega t + kx)}$ ,  $e^{i(\omega t - kx)}$ ,  $e^{i(\omega t + ikx)}$  et  $e^{i(\omega t - ikx)}$ . Le premier terme correspond à l'onde incidente se propageant dans le sens des  $x$  décroissants ; le deuxième terme est l'onde réfléchi, qui se propage dans le sens des  $x$  croissants ; le troisième correspond à une onde évanescence (elle ne se propage pas) créée en  $x = 0$ , dont l'amplitude décroît exponentiellement avec  $x$  ; enfin le dernier terme serait

une onde évanescente créée sur l'autre bord libre de la plaque, mais nous avons supposé que ce bord est situé à l'infini, donc ce dernier terme sera négligeable. Si on considère qu'une onde d'amplitude réelle  $A$  est incidente sur le bord, alors le champ

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \left( A e^{ikx} + B e^{-ikx} + C e^{-kx} \right) \quad (3.26)$$

est solution de l'équation, avec  $B$  et  $C$  des constantes arbitraires (a priori complexes). Or, en appliquant la condition de bord libre, ces coefficients sont solutions des équations suivantes :

$$-A - B + C = 0 \quad (3.27)$$

$$-iA + iB - C = 0. \quad (3.28)$$

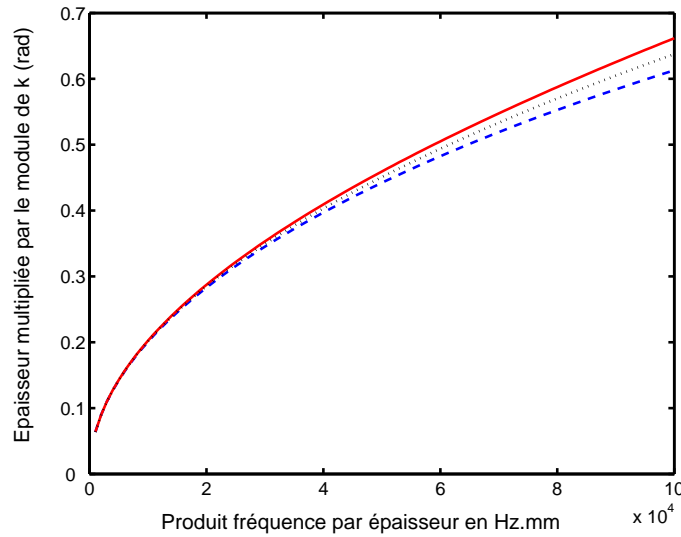
Ainsi, si l'onde incidente a pour amplitude  $A$ , le partie propagative réfléchie aura pour amplitude  $B = -iA$ , c'est-à-dire  $B = A e^{-i\pi/2}$  : l'onde est déphasée de  $\pi/2$ . Nous retrouvons donc bien le déphasage observé en simulation dans la partie précédente.

Par ailleurs, nous pouvons calculer l'amplitude de l'onde évanescente : elle vaut  $C = A(1-i) = A\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ . Ainsi, l'onde évanescente a pour expression :

$$w_{eva}(x, t) = A\sqrt{2}e^{i(\omega t - \pi/4)}e^{-kx}. \quad (3.29)$$

Son amplitude est alors divisée par 10 lorsque  $e^{-kx} = 0.1$  ; c'est-à-dire lorsque  $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2.3$ . Nous pouvons en conclure que l'onde évanescente est négligeable à partir d'une distance du bord de l'ordre de la demi-longueur d'onde : ce résultat est en accord avec la simulation numérique précédente.

Quel est maintenant le lien entre cette onde évanescente obtenue dans l'approximation basse fréquence (nous l'appellerons 'onde évanescente approchée') et les ondes évanescentes prévues par la théorie complète des ondes de Lamb ? Lorsque l'on cherche des couples  $(\omega, k)$ ,  $k$  ayant une partie imaginaire non nulle, solutions de l'équation de Rayleigh-Lamb, on obtient les courbes de dispersion de ces modes non-propagatifs [39]. Ils sont appelés 'modes complexes' lorsque  $k$  n'est pas purement imaginaire, et 'modes imaginaires' lorsque  $k$  est purement imaginaire. Or, en cherchant des solutions où  $k$  est imaginaire pur, et tel que le mode soit antisymétrique et existe à toutes les fréquences, nous obtenons un mode imaginaire qui coïncide avec celui de l'approximation basse fréquence. En effet, comme illustré figure 3.38, la courbe représentant le module de  $k$  en fonction de la fréquence pour le mode imaginaire tend vers la courbe de dispersion du mode évanescent approché. Plus précisément, lorsque le produit  $fh$  tend vers 0, la courbe de dispersion du mode  $A_0$  se confond avec celle du mode imaginaire, pour donner celle des modes propagatif et évanescent approchés.



**FIG. 3.38** : Module du nombre d'onde multiplié par l'épaisseur, en fonction du produit fréquence.épaisseur  $fh$  en Hz.mm pour une plaque d'aluminium (vitesse longitudinale : 6420 m/s, vitesse transverse : 3040 m/s, masse volumique : 2700 kg/m<sup>3</sup>). Ligne continue : mode  $A_0$  propagatif obtenu par résolution de l'équation de Rayleigh-Lamb, tirets : mode évanescent imaginaire pur, obtenu par résolution de la même équation ; pointillés : les deux mêmes modes prédits par la théorie des plaques en flexion.

Quant aux modes complexes, comme étudié dans [39], leur atténuation est extrêmement grande ; pour une plaque de 1 mm d'épaisseur, elle reste supérieure à 60 dB/mm (quelle que soit la fréquence), tandis que l'atténuation du mode imaginaire atteint seulement 5 dB/mm pour  $fh$  égal à 0.1 MHz.mm (et est inférieure pour des fréquences plus basses) : c'est pourquoi ces modes complexes peuvent être négligés aux produits fréquence par épaisseur qui nous concernent. En conclusion, la théorie des plaques en flexion permet de prédire la plupart des phénomènes induits par la théorie des ondes de Lamb lorsque  $fh$  tend vers 0.

### 3.4.3 Validation expérimentale du déphasage et de la présence des ondes évanescentes

Les méthodes classiques de mesure d'un déphasage consistent à envoyer un train d'onde quasi-harmonique sur un bord, mesurer le signal réfléchi et comparer sa phase avec celle du même train d'onde qui aurait parcouru la même distance sans subir de réflexion : c'est ce procédé que nous avons exploité en simulation. En raison de la dispersion, les hautes fréquences du signal se propagent plus vite que les basses fréquences. Ainsi, pour éviter que les hautes fréquences réfléchies n'interfèrent avec les basses fréquences incidentes, nous avons eu besoin de simuler la propagation

dans une plaque de 4 m de long, ce qui est difficilement praticable expérimentalement...

Nous avons donc utilisé une méthode différente : nous avons travaillé en régime harmonique continu, pour au contraire observer les interférences entre ondes incidente et réfléchie. En effet, des noeuds et des ventres de vibration vont alors apparaître. A l'aide de la théorie des plaques en flexion, nous pouvons calculer l'expression du déplacement transverse total dans ce régime harmonique continu. Sa représentation complexe s'écrit en effet :

$$w(x, t) = Ae^{i(\omega t + kx)} + Ae^{-i\pi/2}e^{i(\omega t - kx)} + A\sqrt{2}e^{-i\pi/4}e^{i\omega t}e^{-kx}, \quad (3.30)$$

où  $A$  est une constante réelle (la même que pour l'équation 3.26). La partie réelle de ce déplacement est donc :

$$A \left( \cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx - \pi/2) + \sqrt{2}e^{-kx} \cos(\omega t - \pi/4) \right). \quad (3.31)$$

Ceci peut se mettre sous la forme :

$$A \left( 2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cos(kx + \pi/4) + \sqrt{2}e^{-kx} \cos(\omega t - \pi/4) \right). \quad (3.32)$$

Notons que l'amplitude de la vibration en  $x = 0$  est alors égale à  $2\sqrt{2}A$  : c'est la résonance de bord.

Un noeud de vibration apparaîtra alors à l'abscisse  $x$  si l'équation (3.31) est nulle pour tout instant  $t$ . Ainsi, les positions des noeuds sont les solutions de l'équation suivante :

$$2\cos(kx + \pi/4) = -\sqrt{2}e^{-kx}. \quad (3.33)$$

Notons que, lorsque l'onde évanescente est négligeable, c'est-à-dire à plus d'une demi-longueur d'onde du bord, les noeuds se trouvent aux abscisses :

$$x_{noeud} = \frac{\lambda}{8} + n\frac{\lambda}{2}, \quad (3.34)$$

$n$  étant un entier. Seule la position du premier noeud est influencée nettement par l'onde évanescente : en résolvant numériquement l'équation (3.33), nous obtenons  $kx = 1.038$ , c'est-à-dire :  $x = 0.1652\lambda$  (tandis qu'en l'absence d'onde évanescente, ce noeud aurait eu pour position  $x = 0.125\lambda$ ). Ainsi, la position des noeuds de vibration dépend du déphasage de l'onde à la réflexion et de la présence d'onde évanescente.

Plus généralement, supposons que nous ne connaissions pas le déphasage (que nous noterons  $\Delta\phi$ ). Pour  $x$  plus grand que la demi-longueur d'onde, les noeuds ont pour position :

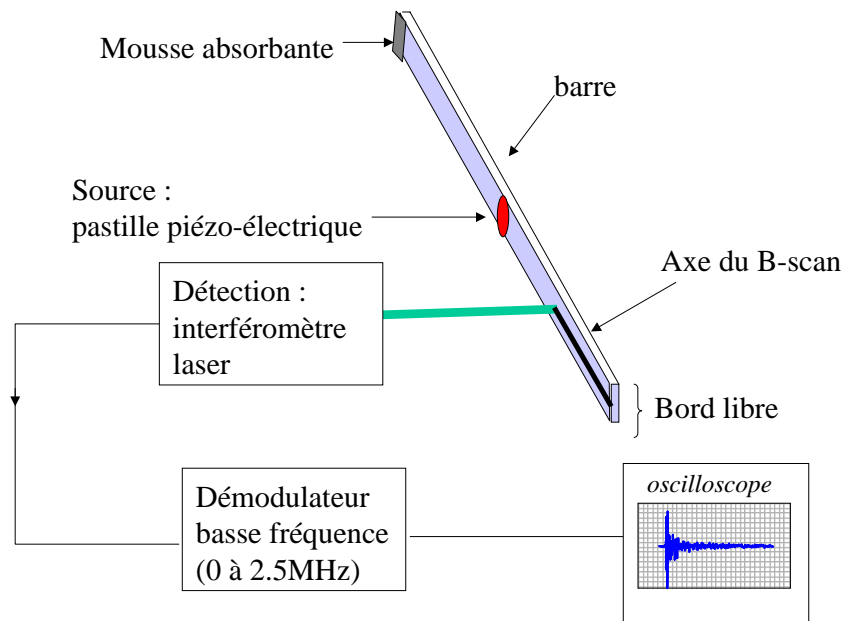
$$x_{noeud} = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\pi - \Delta\phi}{2\pi} \right) + \frac{(n-1)\lambda}{2}. \quad (3.35)$$



Ainsi, en mesurant la position d'un noeud loin du bord (pour  $n$  supérieur à 2), nous pouvons en déduire la valeur du déphasage :

$$\Delta\phi = \pi - 2\pi \left( x_{n^{\text{ième}}\text{noeud}} \frac{2}{\lambda} - (n - 1) \right). \quad (3.36)$$

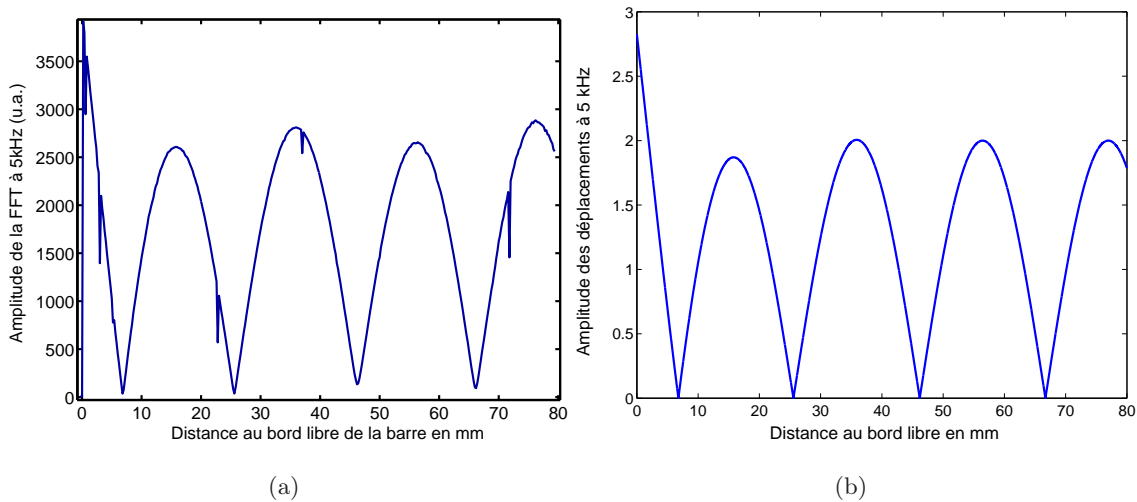
Afin de valider l'expression théorique (3.32) et afin de mesurer le déphasage de l'onde à la réflexion, dans un premier temps, nous avons fait une mesure dans une barre, car elle est équivalente (à l'effet de Poisson près, cf chapitre 4) au cas où une onde plane est incidente perpendiculairement sur le bord d'une plaque infinie suivant son autre dimension. Comme illustré figure 3.39, un transducteur piézo-électrique, collé à la surface (la barre est en acier inoxydable et mesure 1 mm d'épaisseur et 1 m de long), émet une source harmonique en continu à 5 kHz. Il est placé à environ 14 cm du bord droit de la barre ; du matériau absorbant est placé à l'extrémité gauche de façon à ce que l'onde réfléchie sur cette extrémité soit négligeable dans notre mesure. Ainsi, la barre est assimilable à un milieu semi-infini. La composante transverse du déplacement est mesurée suivant une ligne de points, à l'aide du même dispositif interférométrique que précédemment [31], couplé à une démodulation analogique basse fréquence.



**FIG. 3.39 :** Schéma de dispositif de mesure du déphasage de  $\pi/2$  dans une barre.

La figure 3.40(a) montre l'amplitude à 5 kHz de la transformée de Fourier de chacun des déplacements mesurés, en fonction de l'abscisse du point de mesure. L'origine des abscisses est prise sur le bord libre de la barre.

Le laser de détection est relié à un moteur pas à pas, dont la précision du positionnement est de  $5\mu m$  ; en revanche, l'origine des abscisses a été réglée dans cette expérience avec une précision



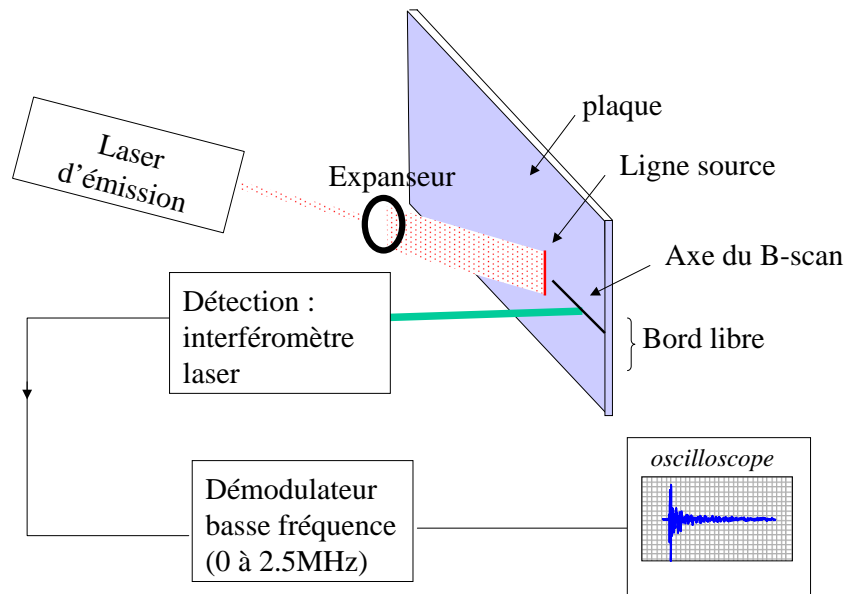
**FIG. 3.40 :** Amplitude à 5 kHz de la Transformée de Fourier Rapide des déplacements transverses mesurés à l'abscisse  $x$ , en fonction de  $x$ , dans une barre d'acier inoxydable, obtenue expérimentalement (a), ou d'après le modèle théorique (3.32) (b). L'expérience concorde bien avec le modèle.

de 0.2 mm. Ainsi, le premier noeud se trouve à  $6.8 \pm 0.2$  mm. La demi-longueur d'onde peut être évaluée comme la distance entre les deux noeuds mesurés le plus loin du bord, à savoir 20.2 mm. Ainsi, la position théorique du premier noeud est 6.68 mm, ce qui est en très bon accord avec la valeur expérimentale.

Avant de comparer cette expérience au modèle théorique, il est important de préciser que, dans le cas d'une barre en flexion, en raison de l'effet de Poisson, l'onde de flexion suit la même équation de propagation (3.20) à condition de remplacer  $V_P$  par  $V_P \times \sqrt{1 - \nu^2}$ . L'expérience est alors en bon accord avec le modèle théorique (3.32), comme l'atteste la figure 3.40(b), obtenue avec pour vitesses  $V_L = 3000$  m/s,  $V_T = 5100$  m/s, et  $\nu = 0.29$ . De plus, l'amplitude du champ en zéro est égale à environ 3800 (unité arbitraire), tandis que l'amplitude d'un ventre de vibration est de l'ordre de 2650. Or, d'après l'expression théorique (3.32), la vibration du bord a pour amplitude  $2\sqrt{2}A$  et l'amplitude d'un ventre est de  $2A$ . Le rapport théorique entre les deux est donc de  $\sqrt{2}$  (soit 1.41), tandis que le rapport mesuré est de 1.43 : l'expérience est donc en bon accord avec la théorie.

Nous avons ensuite effectué des expériences sur une plaque. Pour cela, il fallait créer une ligne source parallèle au bord libre souhaité, de façon à obtenir une onde plane près du bord. Nous avons alors utilisé comme source un laser pulsé (énergie 4 mJ pour une impulsion d'une durée de 20 ns), dont le faisceau est diffracté par un système de lentilles (voir schéma du montage figure

3.41) : la source est alors une ligne de 13 mm de long. Pour des raisons pratiques, il n'était pas possible de créer une source plus grande ; pour pouvoir considérer l'onde comme plane, il fallait donc se placer à moins de 13 mm de la source. Ainsi, nous devons travailler à des longueurs d'onde de l'ordre du centimètre : c'est pourquoi une plaque de Duraluminium de 0.5 mm d'épaisseur (et 30 cm de côté) a été utilisée.



**FIG. 3.41 :** Dispositif expérimental pour la mesure du déphasage de  $\pi/2$  lors de la réflexion du mode  $A_0$  sur un bord libre à basse fréquence.

La source laser permet d'obtenir une impulsion ; à cause du caractère dispersif du mode  $A_0$ , nous n'observerons donc pas de noeuds de vibration sur les signaux temporels, mais ils seront observables sur leurs transformées de Fourier. Nous avons dû enfin nous focaliser sur un domaine fréquentiel dans lequel la longueur d'onde est inférieure à 13 mm, de façon à observer plusieurs noeuds de vibration entre la source et le bord. La composante transverse du déplacement est mesurée à l'aide du même interféromètre que précédemment. La figure 3.42 montre l'amplitude (en code de couleur) de la Transformée de Fourier de chaque signal en fonction de l'abscisse  $x$  et de la fréquence ; les noeuds de vibration sont clairement mis en évidence.

Comme on peut le voir sur la figure 3.43, le modèle théorique reposant sur l'équation (3.32) coïncide très bien avec l'expérience (figure 3.42), excepté quant à la valeur de l'amplitude de la résonance de bord. En effet, l'étendue du faisceau laser de détection n'est plus négligeable devant la demi-longueur d'onde, et le faisceau est donc diffracté par le bord de la plaque avant d'avoir pu mesurer cette résonance de bord.

Afin de mesurer la position des noeuds, nous avons choisi une fréquence (ici environ 200

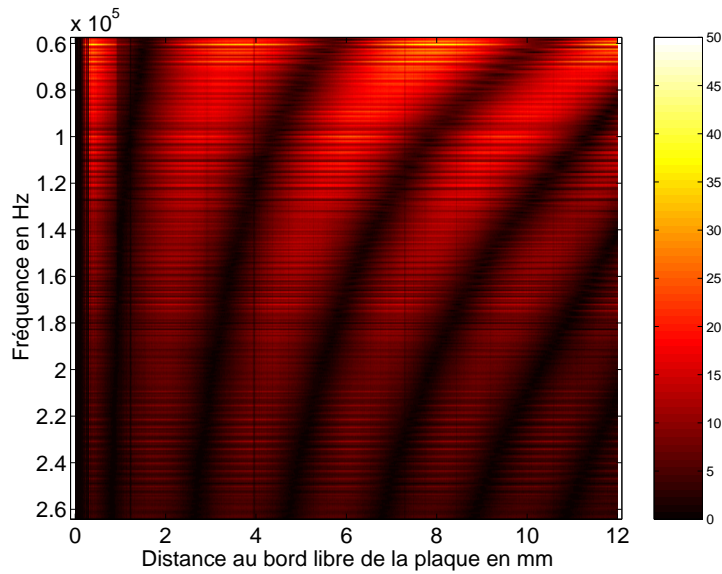


FIG. 3.42 : Amplitude (en code de couleur, unité arbitraire) de la Transformée de Fourier Rapide de la composante transverse de la vitesse, mesurée à l'abscisse  $x$ , en fonction de  $x$ , et de la fréquence  $f$ . Les noeuds de vibration apparaissent là aussi nettement.

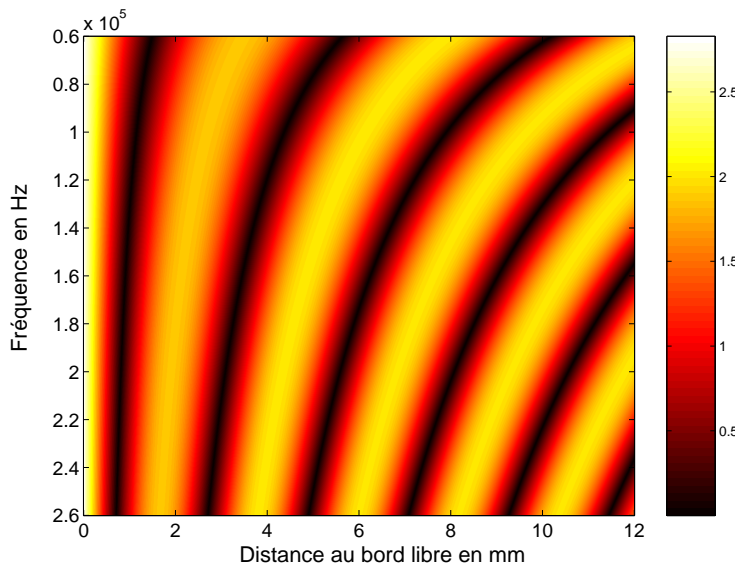
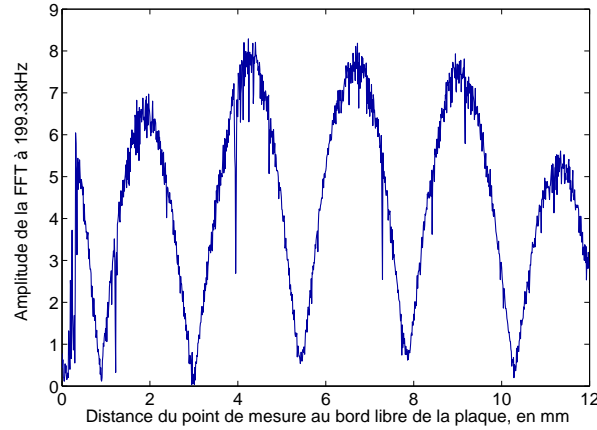


FIG. 3.43 : Amplitude (en code de couleur) des déplacements transverses prévus par la théorie à l'abscisse  $x$ , en fonction de  $x$ , et de la fréquence  $f$ . Le calcul a été fait pour une plaque de Duraluminium (mêmes paramètres que dans l'expérience illustrée figure 3.42 :  $V_L = 6320$  m/s,  $V_T = 3130$  m/s, épaisseur 0.5 mm).

kHz) et tracé l'amplitude de la Transformée de Fourier discrète des signaux à cette fréquence en

fonction de  $x$  (figure 3.44). Le produit  $fh$  est alors de l'ordre de 0.1 MHz.mm.



**FIG. 3.44 :** *Expérience sur une plaque de Duraluminium de 0.5 mm d'épaisseur : amplitude de la Transformée de Fourier Rapide à 199.3 kHz en fonction de la distance au bord libre où le signal a été mesuré.*

Notons que dans cette expérience, nous avons pu régler l'origine des abscisses avec une meilleure précision ; en effet, ce réglage consiste à positionner le faisceau laser exactement sur le bord de la plaque ; or le faisceau est diffracté, et la principale limitation est donc due à l'étendue du faisceau. Nous avons donc fait passer ce faisceau au préalable par un atténuateur, ce qui diminue son étendue ; le bord de la plaque se trouve alors à l'abscisse  $x = 0 \pm 0.03$  mm. La précision des déplacements du laser de détection est inchangée.

Les noeuds se trouvent aux abscisses 0.9, 2.99, 5.44, 7.87 et 10.3 mm. La longueur d'onde est donc égale à  $4.86 \text{ mm} \pm 10 \mu\text{m}$  ; la position théorique du premier noeud est alors de 0.8 mm. La différence entre valeur théorique et expérimentale peut s'expliquer par le fait que, à ce produit  $fh$ , comme vu sur la figure 3.38, le module du nombre d'onde du mode imaginaire pur ne peut plus être considéré comme exactement identique à celui du nombre d'onde du mode  $A_0$ , et donc l'amplitude de l'onde évanescente en  $x = 0$  n'est plus égale à  $\sqrt{2}$  (comme montré dans [39], l'amplitude de la résonance de bord augmente avec  $fh$ ).

Cependant, ceci ne nous empêche pas de mesurer le déphasage du mode  $A_0$ , car nous exploitons la position des noeuds d'ordre plus élevé, lorsque les ondes évanescentes sont négligeables. En mesurant l'abscisse du cinquième noeud, nous obtenons un déphasage égal à :

$$\Delta\phi = \pi - 2\pi \left( 10.3 \frac{2}{4.86} - (5 - 1) \right) = 1.64 \text{ rad} \pm 0.165 \text{ rad} \quad (3.37)$$

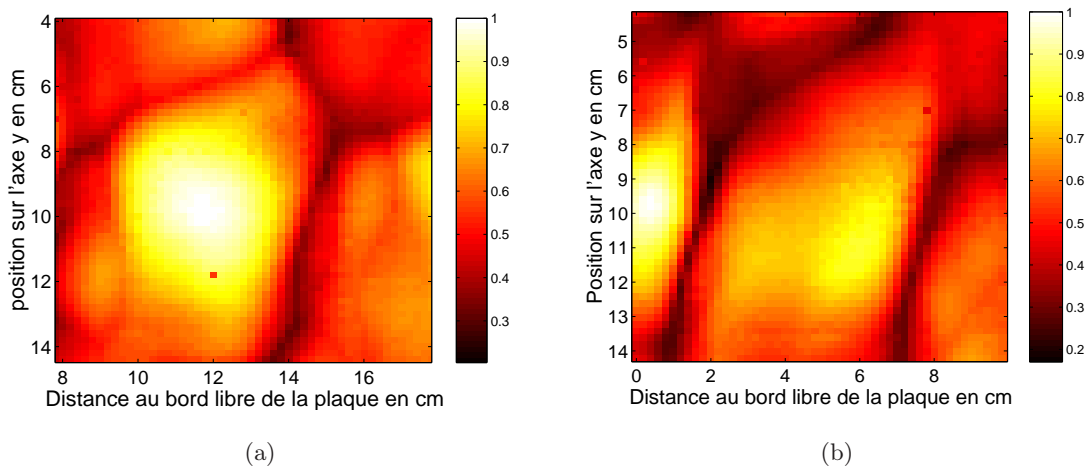
(l'incertitude se décompose en 0.11 rad, dû à l'erreur sur la mesure de la longueur d'onde, et en 0.055 rad, issu de l'erreur sur la position du bord libre).

Nous pouvons donc conclure que le déphasage de l'onde  $A_0$  vaut  $94^\circ (\pm 9.2^\circ)$ .

### 3.4.4 Influence des bords de la plaque sur la résolution spatiale de la tache focale

Près des bords, l'intuition comme la théorie [21] suggèrent que le champ moyen perd son caractère isotrope. Quelle conséquence cela a-t-il sur la localisation par RT ? Afin d'étudier cet effet, nous avons réalisé une mesure dans une plaque de verre de 3 mm d'épaisseur. Le déplacement transverse était enregistré par un accéléromètre, relié à la carte son de l'ordinateur. Celle-ci échantillonne les signaux d'une durée de 46 ms à 44.1 kHz. L'impact est, là encore, donné par un pot vibrant asservi en position suivant les trois dimensions de l'espace. Il frappe la surface de la plaque en une grille de points espacés de 2 mm.

La figure 3.45(a) montre la carte des coefficients de corrélation (en code de couleur) lorsque l'impact a été donné à 12 cm du bord libre de la plaque ; et la figure 3.45(b) représente la carte obtenue pour un impact donné à 0.6 cm de ce même bord. Comme on peut le voir, lorsque l'impact est donné près du bord libre, la tache focale perd son caractère isotrope et sa symétrie circulaire : elle est affinée dans la direction perpendiculaire au bord, et décrit plutôt une ellipse.

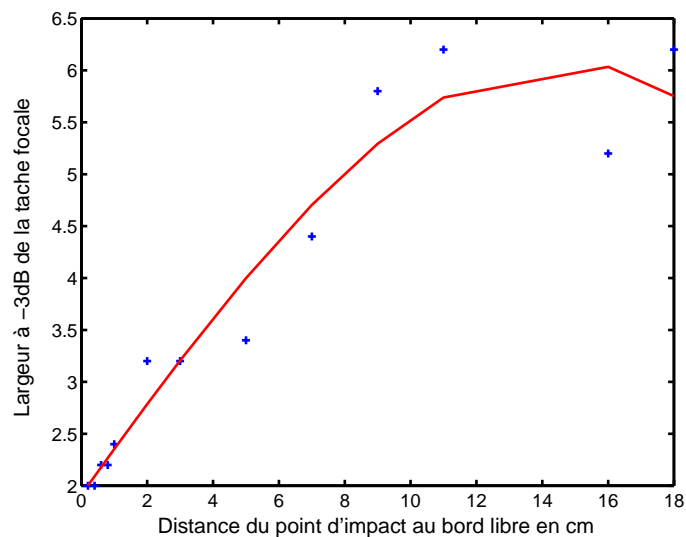


**FIG. 3.45 :** Carte de corrélation (coefficients de corrélation sans filtre) lorsque l'impact a eu lieu à 12 cm du bord de la plaque (a) et à 0.6 cm du bord (b). La présence du bord libre affine la tache focale suivant l'axe horizontal.

Il est important de noter que les coefficients de corrélation ont ici été calculés à partir des signaux bruts, sans filtrer les basses fréquences ; c'est la raison pour laquelle la tache focale est

si large. En appliquant un filtre passe-haut comme nous l'avons fait dans la partie précédente, elle diminue fortement, et l'effet du bord sur la forme de la tache focale est plus difficilement mesurable (la précision des déplacements du pot vibrant suivant les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  devrait être améliorée).

Afin de connaître plus précisément l'évolution de la largeur de la tache focale suivant l'axe horizontal, nous avons répété le calcul de la carte de corrélation avec des impacts donnés à des distances croissantes du bord. La largeur de la tache est définie comme la largeur à -3 dB. La figure 3.46 représente ces valeurs en fonction de la distance de l'impact au bord libre. La dimension latérale de la tache focale varie alors de 2 cm à 6 cm lorsque la distance de l'impact au bord croît.



**FIG. 3.46 :** *Expérience sur une plaque de verre de 3 mm d'épaisseur : largeur de la tache focale à -3 dB en fonction de la distance de l'impact au bord libre de la plaque (+); régression linéaire des données (-).*

A plus de 12 cm du bord, la dimension latérale reste à peu près constante (elle varie entre 5 et 6 cm). Les irrégularités de la tache focale loin du bord viennent des limites de l'hypothèse de champ diffus dans la plaque. En effet, la tache focale, même loin des bords, n'est pas parfaitement sphérique en tout point, car la plaque n'est pas une cavité idéalement ergodique : sa géométrie régulière empêche le champ d'être parfaitement diffus.

Par ailleurs, la diminution transverse des taches focales observées dans le cas de conditions aux limites libres ne doit pas être prise pour une généralité. On peut par exemple montrer que, dans le cas de conditions aux limites bloquées, au contraire, la tache focale s'élargit près des bords. En effet, cette rupture d'isotropie rend compte de la présence à la fois d'ondes propagatives réfléchies

et d'ondes évanescentes. La part de chaque contribution n'a pas encore été établie et doit donner lieu à des études approfondies.



### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une technique de localisation d'impact à la surface de plaques par corrélation. Le lien formel avec une expérience de Retournement Temporel a été montré, et a permis d'expliquer théoriquement l'évolution du facteur de contraste en fonction de la bande passante du signal source, la densité modale de la plaque, le temps de réverbération des signaux dans la cavité, et le nombre de capteurs.

Avant de s'intéresser à la capacité de résolution de cette technique, nous avons étudié de façon quantitative le type d'onde excité par une telle source. Grâce à un code de simulation numérique à deux dimensions de la propagation des ondes dans un solide élastique, ainsi que au moyen d'expériences à l'aide d'un interféromètre laser, nous pouvons conclure que le premier mode antisymétrique de Lamb est excité de façon largement prédominante. En conséquence, et toujours grâce au formalisme du Retournement Temporel, la résolution théorique est de l'ordre de la demi-longueur d'onde du mode  $A_0$  : des expériences le confirment. Afin d'améliorer la résolution, il suffit alors de calculer les coefficients de corrélation en filtrant les basses fréquences de nos réponses impulsionnelles. De plus, pour profiter pleinement de la bande passante et gagner en contraste, une technique inspirée de la focalisation par filtre inverse a été développée.

Enfin, l'interaction du mode  $A_0$  avec les bords d'une plaque a été étudiée, dans un premier temps à l'aide d'un code de simulation numérique. Puis nous montrons que la théorie des plaques en flexion prédit la présence des ondes évanescentes lors de la réflexion du mode  $A_0$  sur un bord libre, ainsi que son déphasage de  $\pi/2$ . Ces phénomènes sont mesurés expérimentalement pour de faibles produits fréquence par épaisseur. En conclusion, l'influence de cette résonance de bord sur la technique de localisation est mise en lumière.

## Annexe 1 : Calcul de l'énergie de chacun des modes

Afin de calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une tranche de la plaque, il nous faut enregistrer les déplacements longitudinaux et transverses le long de la tranche, pour chaque pas d'échantillonnage spatial, et ce en deux tranches séparées d'un pas d'échantillonnage. Cela permet de calculer les dérivées des déplacements longitudinaux et transverses aussi bien par rapport à  $x$  que par rapport à  $y$ , et également par rapport au temps.

En effet, rappelons que le vecteur de Poynting pour un solide élastique s'écrit :

$$P_j(M, t) = -T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t}(M), \quad (3.38)$$

c'est-à-dire :

$$P_j(M, t) = -c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t}(M). \quad (3.39)$$

Or on calcule le flux du vecteur de Poynting à travers une surface de profondeur 1 m (suivant  $z$ ; tout étant invariant suivant  $z$  avec une simulation 2D) et de hauteur 3 mm, de vecteur normal unitaire  $\mathbf{x}$ . Alors :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = -c_{i2kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t}(M)$$

De plus, tout étant invariant suivant  $z$ ,  $u_z$  est nul et toutes les dérivées par rapport à  $z$  sont nulles. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = & -\frac{\partial u_x}{\partial t} \left( c_{1211} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{1212} \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_{1221} \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_{1222} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ & -\frac{\partial u_y}{\partial t} \left( c_{2211} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{2212} \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_{2221} \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_{2222} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Or par symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations,  $c_{ijkl}$  peut s'écrire sous forme d'un tenseur  $c_{uv}$  tel que le couple  $(i, j)$  correspond à  $u$  et  $(k, l)$  à  $v$ , avec notamment les relations : à (1,1) correspond l'indice  $u = 1$ ; à (2,2) correspond 2; à (1,2)=(2,1) correspond 6. Or pour un solide isotrope,  $c_{66} = \mu$ ,  $c_{21} = \lambda$ ,  $c_{22} = \lambda + 2\mu$ , et  $c_{26} = c_{61} = c_{62} = 0$ . On obtient donc :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = -\frac{\partial u_x}{\partial t} \left( \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial u_y}{\partial t} \left( \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (3.41)$$

Pour obtenir l'énergie ayant traversé la surface pendant 1 ms (durée de la simulation), il reste à intégrer par rapport à  $y$  (et par rapport à  $z$ , mais cela ne change pas l'expression), puis par rapport à  $t$ .

## Annexe 2 : Calcul de la densité modale d'une plaque rectangulaire en flexion

Une fois l'expression des fréquences propres de la plaque en flexion connue :

$$f = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{V_P h} \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), (m, n) \in (\mathbb{N}^{+*})^2, \quad (3.42)$$

il est possible de calculer le nombre de modes inférieurs à une fréquence de référence  $f_0$ , à condition d'écrire l'équation (3.42) sous la forme :

$$\sqrt{\frac{f V_P h}{\pi}} \sqrt{3} = \sqrt{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \quad (3.43)$$

En effet, le nombre de couples  $(m, n)$  différents vérifiant :

$$\sqrt{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} < \sqrt{\frac{f_0 V_P h}{\pi}} \sqrt{3} \quad (3.44)$$

est simplement le nombre de points du plan de coordonnées  $\left( \frac{m}{a}, \frac{n}{b} \right)$  situés à l'intérieur du quart de cercle de rayon  $r = \sqrt{\frac{f_0 V_P h}{\pi}} \sqrt{3}$ .

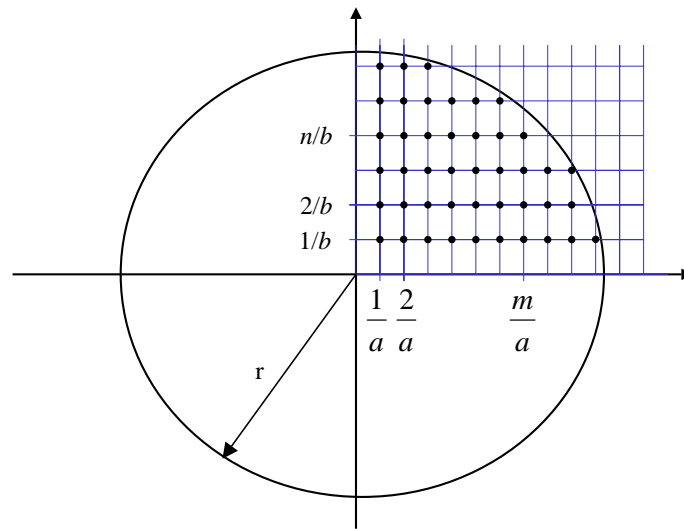


FIG. 3.47 : Méthode de calcul approché de la densité modale du spectre d'une plaque dont les bords sont simplement posés. Chaque couple  $(m, n)$  est associé au rectangle dont le coin supérieur droit a pour coordonnées  $\left( \frac{m}{a}, \frac{n}{b} \right)$ .

On associe alors à chaque point  $\left( \frac{m}{a}, \frac{n}{b} \right)$  le rectangle de surface  $\frac{1}{ab}$  dont ce point est le sommet supérieur droit. Ainsi, le nombre de couples  $(m, n)$  vérifiant l'inéquation sera égal au

nombre de rectangles strictement à l'intérieur du quart de cercle . Celui-ci est approché par le quotient de l'aire du quart de cercle par l'aire du rectangle. Le nombre de couples  $(m, n)$  vérifiant l'inéquation (3.44) est alors égal à :

$$N = \frac{ab\pi r^2}{4}. \quad (3.45)$$

Il suffit ensuite de remplacer  $r$  par sa valeur pour obtenir l'équation (3.5).



## Chapitre 4

# Simulation numérique de la propagation du mode de plaque $A_0$

### 4.1 Introduction

Afin d'étudier aisément l'influence de différents paramètres sur les caractéristiques de la technique de localisation d'impact par RT, il était intéressant de disposer d'un outil de simulation numérique de la propagation des ondes dans une plaque. Or la simulation utilisée au chapitre précédent, fondée sur la discrétisation des équations de toutes les ondes élastiques dans un solide, est inutilisable dans le cas d'un solide en trois dimensions comme la plaque, à cause de la quantité de mémoire vive et du temps de calcul nécessaires. Or, comme nous l'avons justifié au chapitre précédent, d'une part le mode  $A_0$  est le mode prédominant dans les expériences tactiles, et d'autre part, pour des produits fréquence-épaisseur ( $fh$ ) faibles (nous verrons dans quelle mesure plus tard), sa propagation peut être décrite avec une bonne approximation par l'équation des plaques en flexion suivante :

$$\frac{V_P^2 h^2}{12} \Delta^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S(x, y, t), \quad (4.1)$$

où  $S$  est le terme source,  $V_P$  la vitesse de plaque et  $h$  l'épaisseur de la plaque. Or dans cette approximation, bien que la plaque soit un solide en trois dimensions, il ne reste plus qu'une seule composante de déplacement non négligeable, et cette composante ne dépend que de deux variables (et plus de la coordonnée d'épaisseur). Ainsi, résoudre l'équation (4.1) demandera des ressources de calcul du même ordre de grandeur que pour résoudre l'équation de propagation des ondes acoustiques à deux dimensions, mais de plusieurs ordres de grandeur de moins que pour la propagation tridimensionnelle d'ondes élastiques.

Dans un premier temps, nous avons donc développé ce code à l'aide d'une technique par

différences finies, à la fois pour le cas simple d'une barre et pour le cas d'une plaque. En comparant les résultats simulés à des expériences, nous avons observé les limites de l'approximation basse fréquence, et tenté, dans une seconde partie, de corriger ces effets en modifiant l'équation de propagation.

Cependant, ce type de simulation est malgré tout assez gourmand en temps de calcul, et on peut se demander si nous ne pouvions pas utiliser une technique de rayons. Or au cours de cette thèse, une collaboration entre le LOA et plusieurs autres laboratoires du projet européen TAICHI (Tangible Acoustic Interface for Computer Human Interaction) a eu lieu. En particulier, un laboratoire italien de l'université de Milan (Polimi) a développé une simulation des premiers fronts d'onde se propageant dans une plaque en supposant que leur propagation pouvait être décrite par des rayons. Pour calculer le champ en un point donné, il suffit de chercher quels sont les rayons issus de la source qui passent par ce point après une ou plusieurs réflexions sur les bords. Nous avons alors comparé les performances de nos deux approches, et constaté que, si cette technique est suffisante pour décrire les trajets directs dans de grandes plaques de matériau atténuant, elle n'est plus valable dans le cas de plaques très réverbérantes [41]. La raison en est simple : les longueurs d'onde vont de quelques millimètres jusqu'à la dizaine de centimètre, et les plaques ont des dimensions de l'ordre de la dizaine de centimètre. Ainsi, deux hypothèses nécessaires à l'approche en rayons sont mises en défaut : tout d'abord, il est impossible de se contenter de la fonction de Green en champ lointain (et la fonction de Green en champ proche pour cette équation de propagation n'est pas une fonction analytique tabulée [27]) ; et d'autre part, la diffraction par les bords de la plaque ne peut plus être négligée devant la réflexion spéculaire.

## 4.2 Simulation dans l'approximation basse fréquence

Pour des raisons de facilité d'implémentation, nous avons choisi d'utiliser une méthode de résolution de l'équation (4.1) par différences finies. Le schéma numérique est un schéma explicite (le champ à un instant donné pourra être calculé uniquement à partir du champ aux instants précédents), centré en temps et en espace. Nous noterons  $\Delta t$  le pas d'échantillonnage temporel,  $\Delta x$  le pas d'échantillonnage spatial suivant l'axe des abscisses,  $\Delta y$  suivant l'axe des ordonnées, et  $w_{i,j}^n$  le déplacement transverse au point d'abscisse  $x_i = i.\Delta x$ , d'ordonnée  $y_j = j.\Delta y$ , à l'instant  $t_n = n.\Delta t$ . Posons  $A = \frac{V_P^2 h^2}{12}$ . Alors l'équation discrétisée est la suivante :

$$A(\Delta^2 w)^{n-1} + \frac{w_{i,j}^n - 2w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^{n-2}}{(\Delta t)^2} = S(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t), \quad (4.2)$$

où  $(\Delta^2 w)^{n-1}$  désigne l'opérateur double laplacien appliqué à  $w$ , pris à l'instant  $n - 1$ . Le simple laplacien discrétisé de façon centrée, est défini par :

$$(\Delta w)^n = \frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}. \quad (4.3)$$

#### 4.2.1 Condition de stabilité : méthode de Fourier

Etudions maintenant la stabilité de ce schéma numérique à l'aide de la méthode de Fourier [42], appelée également méthode de Von Neumann [43]. Nous supposons alors d'une part que la plaque est infinie, et d'autre part que le domaine ne contient pas de source. Cette méthode est valable dans le cas très général d'une équation linéaire aux dérivées partielles, faisant intervenir des dérivées par rapport à  $x$ ,  $y$ , et  $t$ . En se plaçant dans le domaine de Fourier,  $w(x, y, t) = e^{\alpha t} e^{ik_x x} e^{ik_y y}$  est solution de l'équation non discrétisée. Le coefficient  $\alpha$ , a priori complexe à partie réelle non nulle, permet de prendre en compte un effet éventuel d'atténuation au cours du temps. En passant du domaine continu au domaine discret en temps et en espace, la solution devient :

$$w(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) = \xi^n e^{ik_x \Delta x} e^{ik_y \Delta y}, \quad (4.4)$$

où  $\xi = e^{\alpha \Delta t}$ . A priori, rien ne permet d'affirmer que ce terme est effectivement solution de l'équation discrétisée. Il est donc nécessaire de remplacer  $w(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$  dans l'équation discrétisée, et de chercher à quelle condition  $w$  est solution. Or dans le domaine de Fourier, l'équation continue (4.1) a pour solution un produit d'exponentielles complexes, sans atténuation. Cela impose donc que la solution discrète dans le domaine de Fourier doit aussi rester de module égal à 1, donc  $|\xi| = 1$ .

Pour simplifier les calculs, nous prendrons le même pas d'échantillonnage spatial en  $x$  et en  $y$ , noté  $\Delta$  (ce pas étant imposé par la longueur d'onde, nous n'aurons en pratique pas besoin de choisir des pas différents dans chaque direction). En remplaçant  $w(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$  dans l'équation (4.2) sans terme source, nous obtenons, après simplification, la condition suivante :

$$\xi^2 \Delta t^2 \left( -\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{2A}{\Delta^4} (4(\cos(k_x \Delta) - 1)(\cos(k_y \Delta) - 1) + 2(\cos(k_x \Delta) - 1)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots 2(\cos(k_y \Delta) - 1)^2) \right) + \xi^3 + \xi = 0. \quad (4.5)$$

Or  $\xi$  ne peut être nul, donc la condition précédente devient :

$$\xi(-2 + C) + \xi^2 + 1 = 0, \quad (4.6)$$



avec :

$$C = \frac{2A(\Delta t)^2}{\Delta^4} (4(\cos(k_x\Delta) - 1)(\cos(k_y\Delta) - 1) + 2(\cos(k_x\Delta) - 1)^2 + 2(\cos(k_y\Delta) - 1)^2). \quad (4.7)$$

Ainsi, les solutions sont de façon évidente :

$$\xi = \frac{\pm\sqrt{(C-2)^2 - 4} - (C-2)}{2}, \quad (4.8)$$

et seront de module égal à 1 si  $(C-2)^2 < 4$ . Les solutions de l'équation discrétisée ne divergeront donc pas à la condition :

$$0 < C < 4. \quad (4.9)$$

Notons alors  $u = \cos(k_x\Delta) - 1$  et  $v = \cos(k_y\Delta) - 1$ . Alors  $u$  et  $v$  sont compris entre -2 et 0, et  $C$  s'écrit :

$$C = 2A\frac{(\Delta t)^2}{\Delta^4}(4uv + 2u^2 + 2v^2) = 4A\frac{(\Delta t)^2}{\Delta^4}((u+v)^2). \quad (4.10)$$

Ainsi,  $C$  est toujours positif; par ailleurs,  $(u+v)^2$  est au maximum égal à 16; comme  $C$  doit rester inférieur à 4, nous en déduisons la condition de stabilité suivante :

$$4A\frac{\Delta t^2}{\Delta^4}.16 < 4. \quad (4.11)$$

Or en pratique, le pas d'échantillonnage spatial est imposé par la plus petite longueur d'onde que l'on souhaite simuler, donc pour un pas  $\Delta$  donné, pour assurer la stabilité du code, nous devons choisir un pas  $\Delta t$  tel que :

$$\Delta t < \frac{\Delta^2}{4\sqrt{A}}. \quad (4.12)$$

Comme précisé au début de ce paragraphe, cette condition n'est valable que pour une plaque infinie; c'est donc une condition nécessaire, mais pas suffisante, car elle ne prend pas en compte les conditions aux limites.

## 4.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites choisies sont des conditions bloquées, dont nous obtenons l'expression à l'aide de la théorie des plaques en flexion : l'annulation des efforts et des moments sur les bords permet d'obtenir une condition sur le déplacement  $w$  au niveau d'un bord encasté d'équation  $x = 0$  :

$$\forall t, w(0, y, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, y, t) = 0. \quad (4.13)$$

Des conditions aux limites libres seraient plus proches des conditions dans lesquelles se trouvent les plaques utilisées pour les expériences tactiles, mais en raison du phénomène de résonance de bord, les déplacements sur les bords sont de forte amplitude, ce qui conduit à une instabilité du code de simulation dans le cas d'une plaque. Cependant, dans le cas d'une barre, cette divergence n'a pas lieu, et nous avons pu implémenter les deux types de conditions aux limites. L'expression de la condition pour un bord libre d'équation  $x = 0$  est :

$$\begin{aligned} \forall t, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ \forall t, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Afin de garder un schéma centré (qui assure la stabilité) dans l'implémentation de la condition d'encastrement, nous avons défini des 'points fictifs'. En effet, le schéma numérique sera le suivant : supposons que l'on connaisse le champ en tous les points et à tous les pas temporels inférieurs ou égaux à  $n - 1$ . Pour calculer le champ à l'instant suivant, il suffit d'isoler l'unique terme de l'équation (4.2) :

$$w_{i,j}^n = 2w_{i,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-2} + (\Delta t)^2 (S(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) - A(\Delta^2 w)^{n-1}), \quad (4.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} (\Delta^2 w)^{n-1} = & \frac{w_{i+2,j}^{n-1} - 4w_{i+1,j}^{n-1} + 6w_{i,j}^{n-1} - 4w_{i-1,j}^{n-1} + w_{i-2,j}^{n-1}}{(\Delta x)^4} + \frac{w_{i,j+2}^{n-1} - 4w_{i,j+1}^{n-1} + 6w_{i,j}^{n-1} - 4w_{i,j-1}^{n-1} + w_{i,j-2}^{n-1}}{(\Delta y)^4} + \\ & \frac{w_{i+1,j+1}^{n-1} + w_{i-1,j+1}^{n-1} - 2w_{i,j+1}^{n-1} + w_{i+1,j-1}^{n-1} + w_{i-1,j-1}^{n-1} - 2w_{i,j-1}^{n-1} - 2(w_{i+1,j}^{n-1} + w_{i-1,j}^{n-1} - 2w_{i,j}^{n-1})}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

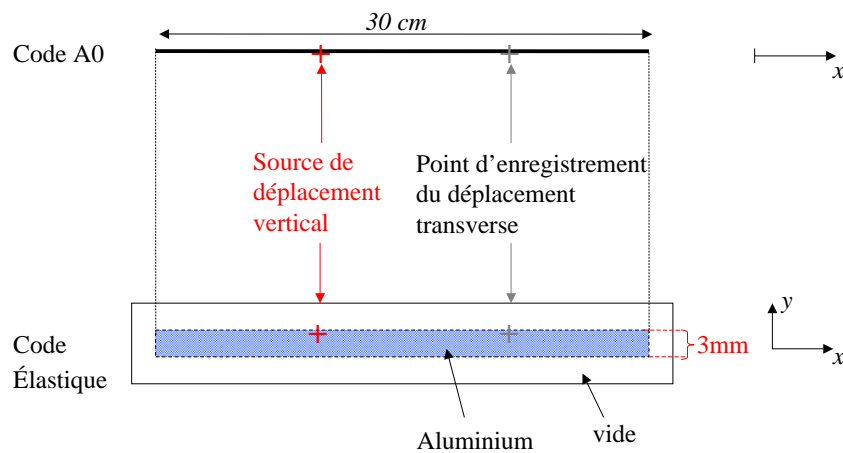
Considérons maintenant le cas d'une plaque rectangulaire définie pour les pas d'échantillonnages spatiaux en  $x$  allant de 0 à  $N_{bx} - 1$ , et en  $y$  de 0 à  $N_{by} - 1$ . Nous allons expliquer comment traiter le cas du bord encastré situé à l'abscisse  $x = 0$  (le même raisonnement s'applique pour les autres bords). Le champ en  $x = 0$  est nul à tout instant (d'après la première partie de la condition aux limites d'encastrement). Lors du calcul du champ au pas temporel  $n$  et à l'abscisse  $x = \Delta$ , il faudrait connaître le champ  $w_{i-2,j}$ , c'est-à-dire  $w_{-1,j}^{n-1}$  : il s'agit d'un point en dehors de la plaque, que l'on appellera 'point fictif'. La valeur du champ en ce point est, quant à elle, déterminée par la seconde condition aux limites (dérivée simple par rapport à la normale au bord égale à zéro), discrétisée par un schéma centré :

$$\frac{w_{1,j}^{n-1} - w_{-1,j}^{n-1}}{\Delta x} = 0; \quad (4.17)$$

en effet,  $w_{1,j}^{n-1}$  est connu, donc  $w_{-1,j}^{n-1}$  peut être évalué, ce qui permet ensuite de calculer le champ en tout point de la plaque au temps  $n$ .

### 4.2.3 Comparaison avec le code élastique à deux dimensions

Pour valider cette simulation, dans un premier temps, nous pouvons comparer sa version à une dimension (avec donc une seule variable d'espace  $x$ ) avec le code élastique présenté au chapitre précédent. La différence de dimension entre les deux simulations tient au fait que la simulation du mode  $A_0$  incorpore l'épaisseur (la seconde dimension) dans le calcul de son équation de propagation (voir équation 1). La même source peut alors être utilisée dans les deux simulations : elle est constituée de deux périodes de sinusoïde de fréquence centrale égale à 10 kHz. La figure 4.1 illustre les milieux simulés : une tranche de plaque d'aluminium de 30 cm de long et 3 mm d'épaisseur. Le champ de déplacement transverse est enregistré à une distance de 10 cm de la source. Un extrait des réponses impulsionnelles calculées par la simulation  $A_0$  et par la simulation élastique est représenté figure 4.2 en trait plein et en tirets respectivement : il y a un très bon accord entre ces deux simulations, mais qui diminue avec la durée de propagation. En effet, pour des signaux longs de 30 ms (temps de réverbération courant en pratique), le coefficient de corrélation entre les signaux calculés dans chacun des cas diminue fortement, pour atteindre 0.16, alors qu'il était de 0.9 pour 2 ms de signal.



**FIG. 4.1 :** Schéma de la simulation de la propagation dans une barre, en utilisant le code élastique (en bas) ou le code  $A_0$  (en haut), afin de comparer le champ calculé.

Afin de comprendre l'origine de cette déviation, observons le spectre de ces réponses impulsionnelles, représenté figure 4.3 sur une plage fréquentielle allant de 0 à 10 kHz. On observe le même nombre de pics correspondant aux modes de la plaque. Néanmoins, les modes propres obtenus avec le code  $A_0$  se décalent d'autant plus de ceux du code élastique que la fréquence augmente. Ce phénomène met en lumière les limites du code fondé sur l'équation de propagation du mode  $A_0$ . Cette équation repose en effet sur l'approximation faible produit  $fh$  : ainsi, plus  $fh$  sera faible et plus le code  $A_0$  sera proche du code élastique. Comme le montre la figure 4.3,

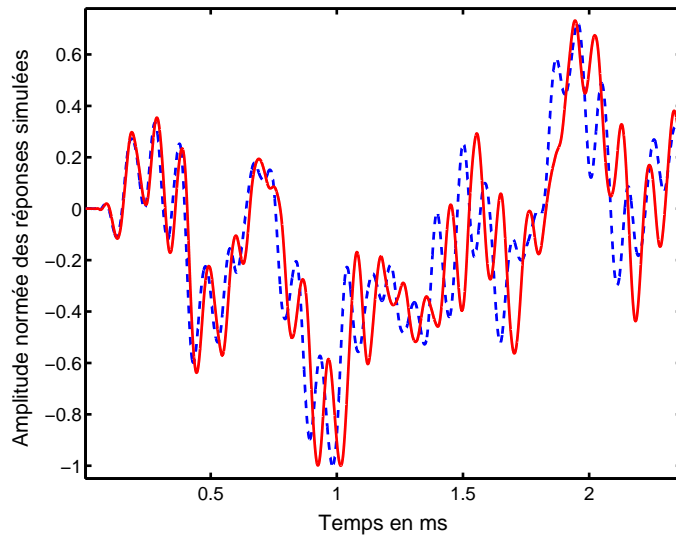


FIG. 4.2 : Réponses impulsionnelles obtenues à l'aide du code de simulation élastique (-) et du code du mode  $A_0$  (- -), dans une barre d'aluminium de 30 cm de long et 3 mm d'épaisseur. Les deux réponses se décorrèlent au cours de la propagation.

lorsque  $fh$  dépasse 0.03 MHz.mm, l'erreur sur la fréquence du mode propre dépasse 10%.

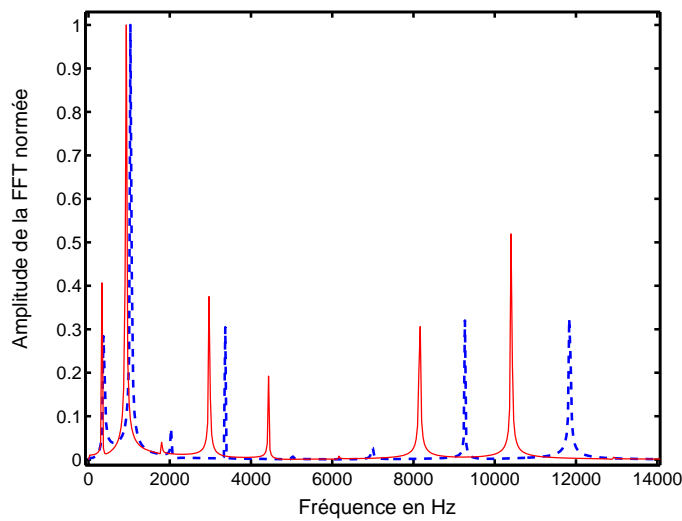


FIG. 4.3 : Module de la Transformée de Fourier des réponses impulsionnelles calculées par le code élastique (-) et le code  $A_0$  (- -), dans une tranche d'aluminium de 3mm d'épaisseur et 30 cm de long soumise à des conditions de bord libre.

## 4.2.4 Validation du code de simulation par l'expérience et par la méthode de Ritz

### 4.2.4.1 Expérience dans une barre

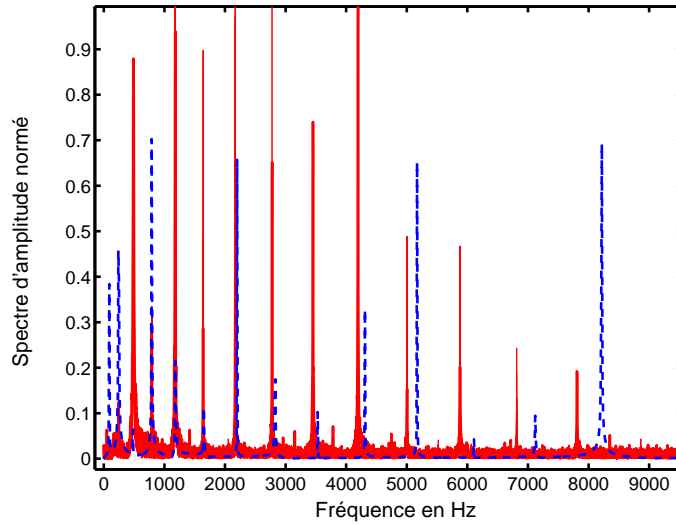
Dans un premier temps, nous avons validé le code dans le cas d'une barre. L'équation de propagation de l'onde de flexion dans une barre diffère cependant de celle dans une plaque par l'introduction d'un coefficient qui prend en compte l'effet de Poisson (lorsque la barre est soumise à un effort, la surface de la section droite ne reste pas constante). L'équation de propagation dans l'approximation faible  $fh$  est alors :

$$(1 - \nu^2) \frac{V_P^2 h^2}{12} \Delta^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S(x, y, t), \quad (4.18)$$

$\nu$  étant le coefficient de Poisson.

Une expérience a été faite dans une barre d'acier inoxydable de 75.2 cm de long, 9.9 mm d'épaisseur et 2 cm de large. La source est un choc donné par un pot vibrant, et la composante transverse de la vitesse est mesurée par interféromètre laser. La barre est posée sur la tranche sur de la mousse, de façon à se rapprocher au mieux des conditions aux limites libres. Une mesure par la technique de pulse-écho des vitesses de volume dans la barre a été faite : la vitesse longitudinale est de 5725 m/s et la vitesse transverse de 3109 m/s, à quelques pourcents d'erreur près. Le coefficient de Poisson vaut donc  $\nu = \frac{V_L^2 - 2V_T^2}{2(V_L^2 - V_T^2)} = 0.291$ .

La forme exacte de la source étant inconnue, il serait inutile de comparer directement le champ mesuré au champ calculé ; en revanche, nous pouvons comparer les amplitudes du spectre pour vérifier dans un premier temps la présence des mêmes modes. La figure 4.4 représente le spectre d'amplitude de la réponse impulsionnelle expérimentale (trait continu), et de la réponse simulée (tirets). Cette dernière a été obtenue en utilisant comme valeurs de vitesses de volume  $V_L = 5600$  m/s et  $V_T = 3055$  m/s : cette baisse de l'ordre de 2% a été choisie de façon à ce que le premier mode propre calculé coïncide avec le premier mode propre expérimental. Comme nous pouvons le voir, les modes se recouvrent aux basses fréquences, mais se décalent au fur et à mesure que le produit  $fh$  croît. Cela recoupe les observations du paragraphe précédent et en confirme les conclusions.



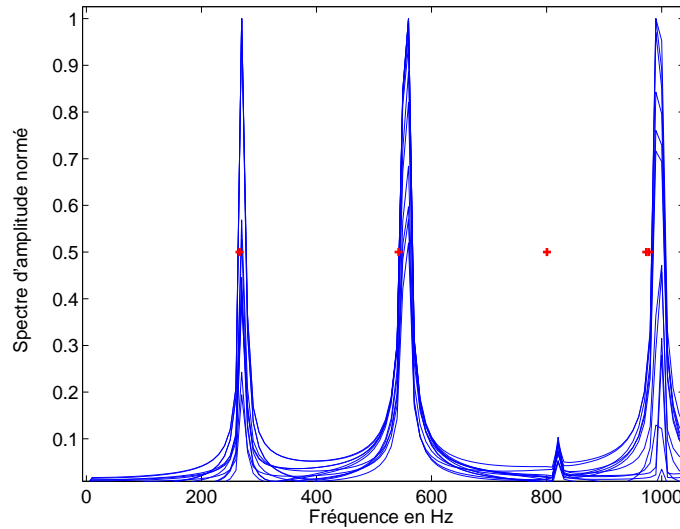
**FIG. 4.4 :** Spectre d'amplitude normé des réponses à une impulsion mesurées dans une barre en acier inoxydable de 9.9 mm d'épaisseur par interféromètre laser (-) et obtenue en simulation (- -). Les fréquences propres simulées sont exactes seulement aux faibles fréquences.

#### 4.2.4.2 Validité du code $A_0$ dans le cas d'une plaque encadrée

Après avoir étudié les limites de validité du code  $A_0$  pour une barre, nous nous sommes intéressés à sa validation dans le cas d'une plaque. Comme expliqué au paragraphe 4.2.2, les conditions aux limites implémentées étant des conditions d'encastrement, nous avons étudié dans quelle mesure les fréquences propres obtenues numériquement sont bien celles d'une plaque réellement encadrée. Comme expliqué au chapitre précédent, les modes propres d'une plaque soumise sur ses quatre bords à des conditions aux limites libres ou bloquées ne peuvent être calculés explicitement. En revanche, des méthodes numériques ont été largement développées pour résoudre ce problème, et reposent sur la méthode de Rayleigh-Ritz. Nous pouvons donc dans un premier temps comparer les modes propres théoriques obtenus par cette méthode à ceux fournis par le code de simulation.

La figure 4.5 montre les quatre premiers modes propres d'une plaque carrée (5 mm d'épaisseur et 40 cm de côté) encadrée prévus par la méthode de Rayleigh-Ritz [29] (néanmoins dans l'approximation basse fréquence, ce qui ne permet pas de savoir dans quelle mesure notre simulation est proche de l'expérience), ainsi que le spectre de quelques réponses impulsionnelles simulées avec notre code dans la même plaque : il y a un bon accord entre les deux.

Par ailleurs, nous avons réalisé des expériences avec une plaque dont les bords sont bloqués. Or une simple excitation par un choc (donné par le pot vibrant) ne permettait pas de transmettre assez d'énergie dans la plaque : le signal n'était pas suffisamment long pour que les modes propres



**FIG. 4.5 :** *Spectre d'amplitude des réponses impulsionnelles calculées dans une plaque d'aluminium de 5 mm d'épaisseur et 40 cm de côté (-), et valeurs des fréquences propres prévues par la méthode de Rayleigh-Ritz (+).*

soient bien résolus ; en effet, dans la pratique, il y a beaucoup de perte d'énergie par les bords encastres de la plaque. C'est pourquoi nous avons exploité une expérience publiée par Hazell [44] : dans celle-ci, pour mesurer les fréquences propres de vibration, la plaque encastree est excitée par un haut-parleur en continu à une fréquence donnée, pendant que la surface de la plaque est imagée par holographie acoustique. La mesure est répétée en faisant varier la fréquence d'excitation. Lorsque des ondes stationnaires sont visibles par holographie, cela signifie que la fréquence d'excitation est une des fréquences propres de la plaque encastree.

La figure 4.6 représente en trait continu le spectre d'amplitude simulé dans une plaque identique à celle utilisée par Hazell : une plaque carrée d'aluminium de 1.83 mm d'épaisseur et 30.5 cm de côté. Les fréquences propres mesurées par Hazell sont représentées par des croix. Nous observons le même nombre de fréquences propres dans les deux cas, à l'exception d'une fréquence propre observée en simulation à 1468 Hz et que n'avait pas observée Hazell. Les fréquences propres simulées se décalent peu à peu des fréquences expérimentales lorsque la fréquence croît. Cela nous permet de conclure de la même façon que dans le cas de la barre : aux faibles  $fh$ , le code de simulation  $A_0$  coïncide bien avec l'expérience.

### 4.3 Prise en compte de l'atténuation

Jusqu'à présent, nous avons développé un code de simulation numérique permettant de simuler la propagation dans des plaques dans lesquelles aucun effet d'atténuation n'a lieu : ni perte

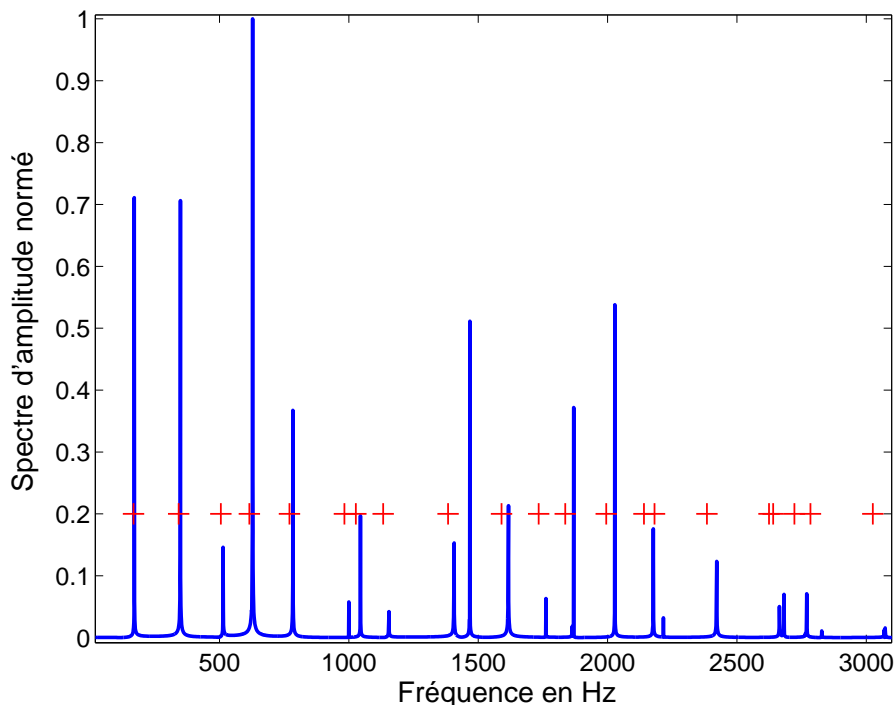


FIG. 4.6 : Spectre d'amplitude des réponses impulsionnelles calculées dans une plaque d'aluminium de 1.83 mm d'épaisseur et 30.5 cm de côté (-), et valeurs des fréquences propres mesurées expérimentalement dans la même plaque par Hazell (+).

dans l'air, ni viscosité du matériau, etc. Or en pratique, la réponse d'une plaque à un impact a une durée caractéristique de l'ordre de quelques dizaines de millisecondes. Nous avons donc voulu modifier le code pour prendre en compte qualitativement ce phénomène. Pour cela, nous nous sommes inspirés de la façon dont l'effet de viscosité est introduit par la théorie de Landau [45] : elle équivaut à utiliser un modèle de Voigt. Les calculs détaillés permettant de passer de la théorie visco-élastique 3D à la théorie des plaques en flexion sont présentés dans l'annexe 1 (à la fin de ce chapitre). Nous obtenons l'équation suivante :

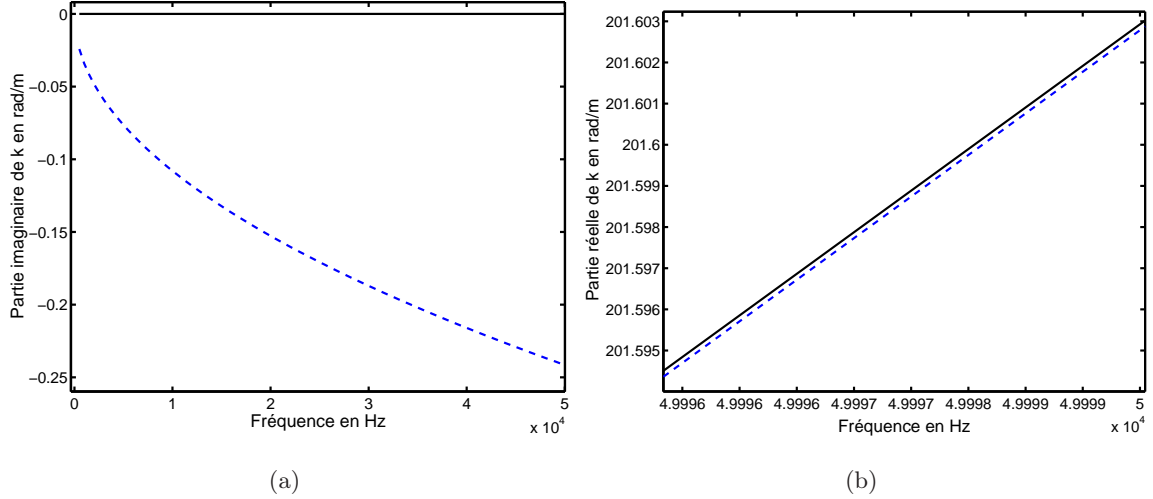
$$\frac{V_P^2 h^2}{12} \Delta^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\mu_v}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) = \frac{1}{\rho} S(x, y, t), \quad (4.19)$$

$\mu_v$  étant le coefficient de Lamé visqueux.

La figure 4.7(a) représente la partie imaginaire du nombre d'onde obtenu en résolvant numériquement l'équation de dispersion donnée par l'équation (4.19), en fonction de la fréquence, lorsqu'il y a de la viscosité ( $\mu_v = 100$ , en tirets) ou non ( $\mu_v = 0$ , courbe continue). La figure 4.7(b) représente quant à elle la partie réelle du nombre d'onde dans les mêmes conditions. Comme nous pouvons le voir, ce modèle n'a quasiment aucun effet sur la vitesse de phase, mais entraîne bien



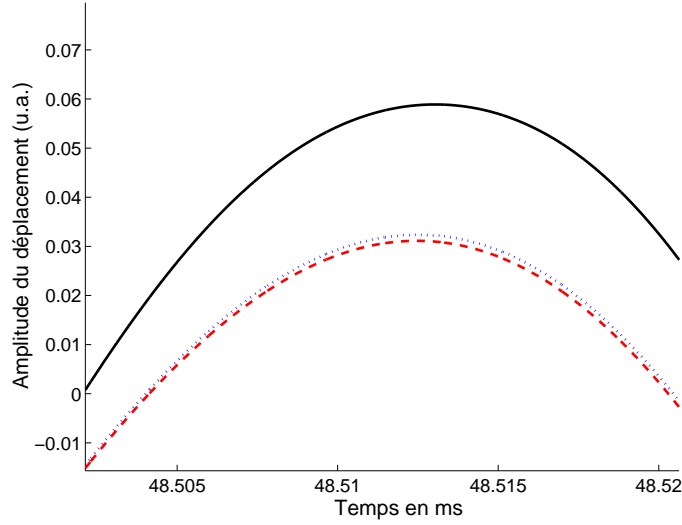
une perte d'amplitude de l'onde croissante avec la fréquence.



**FIG. 4.7 :** Courbes de dispersion obtenues à partir de l'équation (4.19), lorsque  $\mu_v$  est nul (—), et lorsque  $\mu_v = 100$  Pa.s (---) : (a), partie imaginaire de  $k$  en fonction de la fréquence ; (b), partie réelle de  $k$  en zoom pour distinguer le très faible effet de ce modèle d'atténuation sur la vitesse de phase.

Bien que le modèle de Voigt introduise deux coefficients de viscosité ( $\mu_v$  et  $\lambda_v$ , analogues de  $\lambda$  et  $\mu$ ), l'équation de propagation du mode  $A_0$  visqueuse ne fait plus intervenir que  $\mu_v$ . Il est intéressant de vérifier la cohérence de ce modèle avec la théorie visco-élastique complète. Pour cela, nous avons donc implémenté le modèle de Voigt dans le code élastique à deux dimensions déjà mentionné précédemment. La figure 4.8 représente alors la composante transverse du champ simulé par ce code dans une tranche de plaque d'acier inoxydable de 30 cm de long et 5 mm d'épaisseur, dans le cas où les coefficients de Lamé visqueux sont tous les deux nuls (courbe continue), dans le cas où seul  $\mu_v$  est non nul et est pris égal à 100 Pa.s (pointillés) ; et dans le cas où les deux coefficients de Lamé visqueux valent 100 Pa.s. La source est une source de pression constituée de quelques périodes de sinusoïde de fréquence centrale égale à 10 kHz. Comme on peut le constater, il n'y a quasiment pas d'atténuation supplémentaire de l'onde lorsque les deux coefficients sont non nuls par rapport au cas où seul  $\mu_v$  est non nul. Nous pouvons en conclure que, avec ce modèle de viscosité, l'atténuation de la composante transverse de l'onde  $A_0$  à basse fréquence dépend principalement de  $\mu_v$  : ce résultat est cohérent avec l'équation simplifiée (4.19).

Cette façon d'introduire un effet d'atténuation permet au schéma numérique de ne pas trop perdre en stabilité. En effet, le terme supplémentaire sera discrétisé de la manière suivante (avec



**FIG. 4.8 :** Amplitude des signaux simulés avec un code élastique dans une tranche d'une plaque d'acier inoxydable de 30 cm de long et 5 mm d'épaisseur, en fonction du temps, sans viscosité (-), avec  $\mu_v = 100$  Pa.s et  $\lambda_v = 0$  Pa.s (..) ou lorsque  $\mu_v$  et  $\lambda_v$  sont fixés à 100 Pa.s (- -).

les mêmes notations que dans les équations 2 et 3) :

$$A(\Delta^2 w)^{n-1} + \frac{w_{i,j}^n - 2w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^{n-2}}{(\Delta t)^2} - \frac{\mu_v}{\Delta t} ((\Delta^2 w)^{n-1} - (\Delta^2 w)^{n-2}) = S(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t). \quad (4.20)$$

Ainsi, en appliquant la méthode de Fourier pour étudier la stabilité de ce schéma, nous obtenons l'équation suivante de la variable  $\xi$  (même principe qu'au paragraphe 2.1) :

$$\xi \left( -2 + C + \mu_v \sqrt{\frac{C}{A}} \right) + \xi^2 + 1 - \mu_v \sqrt{\frac{C}{A}} = 0, \quad (4.21)$$

avec, comme précédemment :

$$C = \frac{2A(\Delta t)^2}{\Delta^4} (4(\cos(k_x \Delta) - 1)(\cos(k_y \Delta) - 1) + 2(\cos(k_x \Delta) - 1)^2 + 2(\cos(k_y \Delta) - 1)^2).$$

Les solutions sont donc :

$$\xi = \frac{\pm \sqrt{(-2 + C + \mu_v \sqrt{C/A})^2 - 4(1 - \mu_v \sqrt{C/A})} - (-2 + C + \mu_v \sqrt{C/A})}{2}. \quad (4.22)$$

On montre que  $\xi$  sera bien de module inférieur à 1 (comme souhaité) si le terme sous la racine carrée est négatif. On en déduit alors la condition de stabilité suivante, après simplifications :

$$\Delta t < \frac{\Delta^2}{4\sqrt{A}} - \frac{\mu_v \Delta^2}{8A}. \quad (4.23)$$

Comment évolue alors l'atténuation de l'onde simulée avec la fréquence? Pour le savoir, calculons alors le module de  $\xi$  :

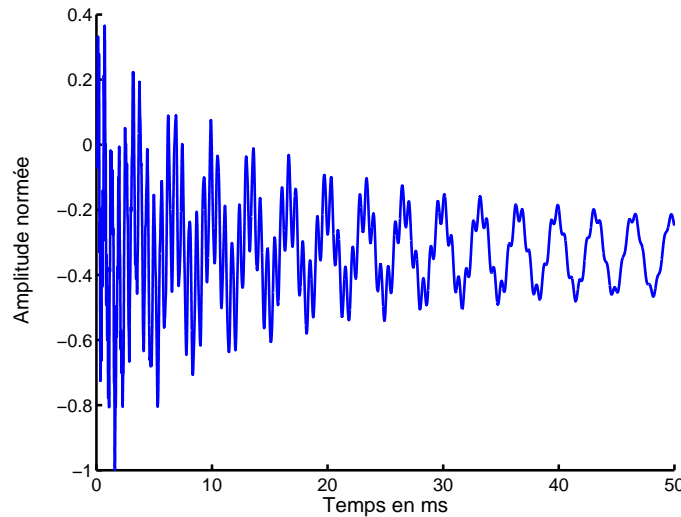
$$\xi^2 = 1 - \mu_v \frac{C}{A} = 1 - \mu_v \frac{\Delta t}{\Delta^2} 4(\cos(k_x \Delta) + \cos(k_y \Delta) - 2)^2. \quad (4.24)$$

Or le pas spatial est choisi égal à un dixième de la plus petite longueur d'onde, donc au maximum  $k_x\Delta$  et  $k_y\Delta$  sont égaux à  $\frac{2\pi}{10}$ . Ainsi, en remplaçant les cosinus par leur développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro, nous obtenons :

$$\xi^2 \approx 1 - \mu_v \frac{\Delta t}{\Delta^2} 4 \left(1 - k_x^2 \Delta^2 / 2 + 1 - k_y^2 \Delta^2 / 2 - 2\right)^2 = 1 - \mu_v \Delta t k^2. \quad (4.25)$$

Nous pouvons donc en conclure que le déplacement transverse simulé, à l'instant  $t_n = n\Delta t$ , est multiplié par un facteur  $(1 - \mu_v \Delta t k^2)^{n/2}$ .

La figure 4.9 représente le signal obtenu avec ce code de simulation avec viscosité, en prenant  $\mu_v$  égal à 1000 Pa.s pour mieux observer cet effet. L'amplitude diminue bien au cours du temps, d'autant plus rapidement que la fréquence est grande (le signal contient beaucoup moins de hautes fréquences après 50 ms de simulation).



**FIG. 4.9 :** Amplitude normée du déplacement simulé à l'aide du schéma numérique décrit précédemment, prenant en compte la viscosité. Le milieu simulé est une tranche d'une plaque d'acier inoxydable de 5 mm d'épaisseur et 30 cm de long. Le coefficient de viscosité est pris égal à 1000 Pa.s afin d'obtenir un effet visuel d'atténuation.

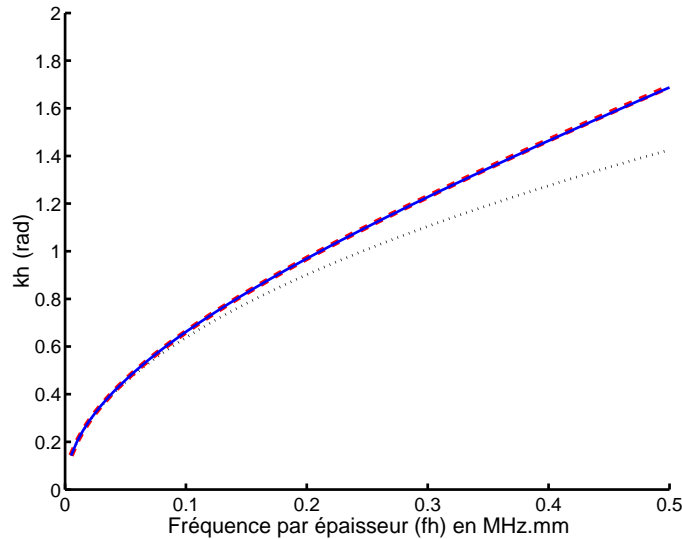
En conclusion, bien que les approximations faites pour obtenir cette équation modifiée (voir calculs en annexe) soient assez fortes, elles nous permettent d'obtenir l'effet qualitatif d'atténuation souhaité, croissant avec la fréquence. Notons cependant que si ce type de modèle permet de rendre compte de l'atténuation dans des matériaux comme des panneaux de fibres de bois dans lequel l'atténuation intrinsèque joue un rôle important, il exclue la perte d'énergie due au couplage avec l'air ou le support. Ce dernier est le phénomène prépondérant expliquant l'extinction du signal dans des matériaux comme les métaux.

## 4.4 Code amélioré valable aux hautes fréquences

Afin de corriger la déviation du code de simulation  $A_0$  lorsque le produit  $fh$  croît, nous avons utilisé l'approche de K.F.Graff [27], elle-même inspirée de Mindlin [46]. Nous avons pu en déduire (voir détails en annexe) une équation de propagation modifiée pour le mode  $A_0$  :

$$\frac{V_P^2 h^2}{12} \Delta(\Delta(w)) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( \frac{h^2}{12} + \frac{V_P^2 h^2}{12V_R^2} \right) \Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{h^2}{12V_R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = S(x, y, t), \quad (4.26)$$

où  $w$  est la composante transverse du déplacement,  $V_R$  la vitesse de l'onde de Rayleigh,  $V_P$  la vitesse de plaque,  $h$  l'épaisseur de la plaque. Ainsi, la courbe de dispersion déduite de cette équation (figure 4.10) est quasiment identique à la courbe de dispersion exacte (c'est-à-dire prévue par l'équation de Rayleigh-Lamb).



**FIG. 4.10 :** Courbes de dispersion du mode de Lamb  $A_0$  exacte (—), d'après l'approximation basse fréquence (..), et d'après l'équation améliorée de propagation du mode  $A_0$  (- -). Cette dernière est quasiment confondue avec la courbe exacte.

### 4.4.1 Schéma numérique et stabilité

De même que précédemment, nous avons résolu cette nouvelle équation par une méthode de différences finies. Le schéma choisi est également un schéma centré en temps et en espace, et les conditions aux limites sont les mêmes (comme le montre Graff dans [27], les approximations ayant conduit à l'équation (4.26) ne changent pas les expressions des conditions aux limites).

En appliquant la méthode de stabilité de Fourier, nous obtenons alors une équation du quatrième degré en  $\xi$  (voir paragraphe 4.2.1). Dans le cas de l'équation à une dimension (une seule

variable d'espace), cette équation est :

$$\xi^4 + 1 + (\xi + \xi^3) \left( -4 - Bu \frac{2\Delta t^2}{C\Delta^2} + \frac{\Delta t^2}{C} \right) + \xi^2 \left( 6 + 4Bu \frac{\Delta t^2}{C\Delta^2} - 2\frac{\Delta t^2}{C} + \frac{4A\Delta t^4 u^2}{C\Delta^4} \right) = 0 \quad (4.27)$$

avec  $\Delta$  le pas d'échantillonnage spatial,  $\Delta t$  le pas d'échantillonnage temporel,  $u = \cos(k\Delta) - 1$ ,  $A = \frac{V_P^2 h^2}{12}$ ,  $B = \frac{h^2}{12} + \frac{V_P^2 h^2}{12V_R^2}$ , et  $C = \frac{h^2}{12V_R^2}$ . Dans le cas d'une plaque (deux variables d'espace), en supposant que le pas spatial  $\Delta$  est le même suivant  $x$  et  $y$ , nous obtenons la même expression, avec cette fois  $u = \cos(k_x \Delta) + \cos(k_y \Delta) - 2$ .

Les solutions peuvent encore être calculées analytiquement, mais leur expression est tellement complexe qu'il est impossible, en imposant au module de  $\xi$  de prendre la valeur 1, d'en déduire une condition sur  $\Delta t$  en fonction des différents paramètres. En revanche, une fois le pas d'échantillonnage spatial et le matériau choisis, nous pouvons rechercher quel pas temporel  $\Delta t$  conduit à des valeurs de  $\xi$  de module égal à 1. Malheureusement, nous avons constaté qu'il existe des valeurs de pas spatial pour lesquelles aucun pas temporel ne conduit à un schéma stable ! Une étude plus approfondie serait nécessaire pour remédier au problème (en discrétisant les dérivées sur plus de points pour gagner en précision, par exemple).

#### 4.4.2 Validation du code de simulation corrigé

Pour valider ce code dans le cas d'une barre, nous avons utilisé l'équation de propagation du mode de flexion dans une barre de section rectangulaire, en prenant en compte les mêmes effets de cisaillement transverse et d'inertie de rotation que dans le cas de la plaque. Ce résultat est dû à Timoshenko [47], et conduit à une équation très proche de l'équation (4.26) :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{I}{S} \left( \frac{E}{kG} + 1 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho I}{kGS} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4.28)$$

avec  $E$  le module de Young,  $\rho$  la masse volumique,  $S$  l'aire de la section de la barre au repos,  $G$  le module de rigidité,  $k$  un coefficient de correction égal à  $\frac{\pi^2}{12}$  pour une barre de section rectangulaire, et  $I$  le moment quadratique de la section droite par rapport à un axe perpendiculaire à celle-ci et passant par le centre de gravité :  $I = \int \int y^2 dS$ .

S est donc égal au produit de l'épaisseur  $h$  par la largeur de la barre, que nous noterons  $l$ . De plus, le calcul de  $I$  donne  $I = \frac{lh^3}{12}$ . Quant à  $G$ , il est relié à  $E$  par l'intermédiaire du coefficient de Poisson :  $\frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)}$ . Enfin on montre aisément que  $E = (1 - \nu^2)\rho V_P^2$ .

L'équation de propagation (4.28) se met alors sous la forme :

$$\frac{h^2(1 - \nu^2)V_P^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{h^2}{12} \left( \frac{2(1 + \nu)}{k} + 1 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{h^2 2(1 + \nu)}{12k(1 - \nu^2)V_P^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4.29)$$

Nous pouvons alors en déduire que l'équation de l'onde de flexion dans une barre est équivalente à l'équation de l'onde de flexion dans une plaque à une dimension, à condition de remplacer  $V_P^2$  par  $(1 - \nu^2)V_P^2$ , et  $V_R^2$  par  $\frac{V_P^2(1 - \nu^2)k}{2(1 + \nu)}$ ,  $k$  valant  $\pi^2/12$ .

Comme présenté sur la figure 4.11, les fréquences propres d'une barre (même expérience que figure 4.4) calculées avec ce code amélioré (toujours avec les mêmes vitesses longitudinale et transverse :  $V_L = 5600$  m/s et  $V_T = 3055$  m/s) coïncident bien mieux avec les fréquences propres expérimentales : l'écart entre fréquence propre expérimentale et fréquence propre simulée est inférieur à 0.5% sur toute la plage de fréquence ; il n'y a plus de dégradation lorsque la fréquence croît.

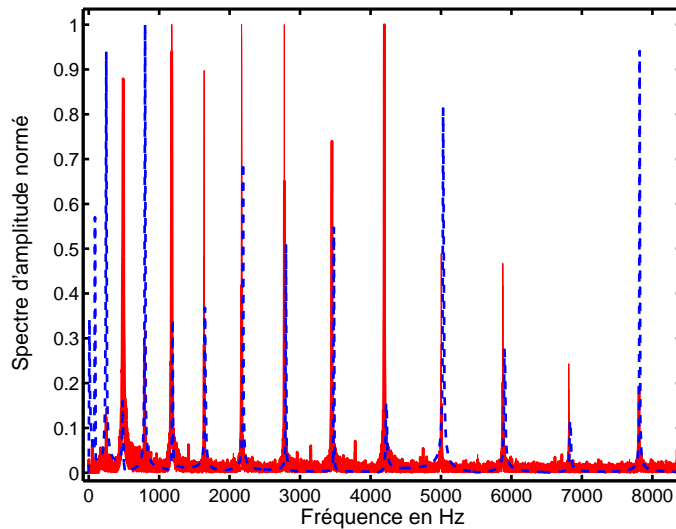


FIG. 4.11 : Spectre d'amplitude des réponses impulsionnelles dans une barre d'acier inoxydable (75.2 cm de long, 2 cm de large et 9.9 mm d'épaisseur) expérimentales (—) et simulée à l'aide du code  $A_0$  amélioré (- -). Les fréquences propres sont les mêmes sur toute la largeur du spectre.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un code de simulation numérique reposant sur la discrétisation par différences finies de l'équation de propagation des plaques en flexion. Dans un premier temps, l'équation de propagation valable pour des faibles produits fréquence par épaisseur  $fh$  a été utilisée. Le code a été implémenté à une dimension (cas d'une tranche de plaque) et à deux dimensions (cas d'une plaque). Dans ce dernier cas, seules les conditions aux limites bloquées ont été considérées pour des raisons de stabilité du processus numérique. Pour remédier à ce problème, il faudrait utiliser un tout autre schéma numérique, bien plus complexe à mettre en oeuvre, comme l'a fait C. Lambourg [48]. Cependant, pour un usage qualitatif, les

conditions bloquées sont suffisantes. Afin de valider ce code, nous avons comparé la version à une dimension avec le code élastique à deux dimensions utilisé au chapitre 2, et avons réalisé des expériences. Nous avons pu mesurer l'effet de l'hypothèse sur laquelle repose l'équation de propagation : cette simulation n'est correcte que pour de faibles valeurs de  $fh$ .

Par ailleurs, nous avons introduit un effet d'atténuation qualitatif en rajoutant un terme à cette équation de propagation, inspiré du modèle de Voigt de la viscosité. L'onde simulée dans ce cas est alors atténuée d'autant plus rapidement au cours du temps que la fréquence est élevée.

Enfin, pour corriger le code de simulation aux hautes fréquences, nous avons complété l'équation de propagation à partir de la théorie de Mindlin. Des expériences sur une barre a confirmé l'intérêt de ce terme correctif. Cependant, les problèmes de stabilité de cette version du code de simulation restent à résoudre et constituent pour le moment un frein à son utilisation.

## Annexe 1 : Introduction de l'atténuation du matériau dans l'équation de propagation du mode $A_0$

Afin de prendre en compte l'atténuation du matériau, nous avons choisi d'utiliser le modèle de Kelvin-Voigt [49]. Dans ce modèle, le tenseur élastique  $c_{ijkl}$  devient complexe, et dans le cas d'un régime harmonique à la pulsation  $\omega$ , s'écrit sous la forme :

$$c_{ijkl} = c'_{ijkl} + i\omega\eta_{ijkl}. \quad (4.30)$$

Or une multiplication par  $i\omega$  est équivalente à une dérivée par rapport au temps dans le régime temporel. Dans la suite, nous noterons  $S_{ij}$  le tenseur des déformations. Ainsi, cela signifie que si, en l'absence de dissipation, le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par la relation :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}S_{kl}, \quad (4.31)$$

alors dans le cas visqueux, cette relation devient :

$$\sigma_{ij} = c'_{ijkl}S_{kl} + \eta_{ijkl}\frac{\partial S_{kl}}{\partial t}; \quad (4.32)$$

le second terme étant le tenseur des contraintes visqueuses, noté  $\sigma'$ .

Pour déterminer l'équation de propagation, nous allons alors utiliser une approche inspirée de Landau-Lifschitz [45]. En l'absence de dissipation, l'équation de propagation à laquelle le déplacement transverse (ici noté  $u_z$  au lieu de  $w$  pour plus de clareté) obéit est la relation suivante :

$$\frac{\rho V_p^2 h^2}{12} \Delta^2(u_z) + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (4.33)$$

où  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  est la somme des forces extérieures par unité de volume subies par la plaque.

Il suffit alors de rajouter dans le terme des forces extérieures appliquées à la plaque le terme de dissipation. Landau montre que cette force dissipative peut se mettre sous la forme [45] :

$$f_i = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \quad (4.34)$$

$i$  étant l'indice de la coordonnée d'espace correspondante ( $i$  va donc de 1 à 3), et  $x_i$  la coordonnée suivant l'axe d'indice  $i$ . Or dans le cas isotrope, le tenseur  $\sigma'$  peut se mettre sous la forme :

$$\sigma'_{ik} = 2\mu_v \left( \frac{\partial S_{ik}}{\partial t} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial S_{ll}}{\partial t} \right) + (\lambda_v + \frac{2}{3}\mu_v) \delta_{ik} \frac{\partial S_{ll}}{\partial t}, \quad (4.35)$$

où  $\lambda_v$  et  $\mu_v$  sont les coefficients de Lamé visqueux, analogues des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker.



La composante qui nous intéresse est la projection de la force visqueuse suivant l'axe  $z$ , que nous noterons  $f_z$  :

$$f_z = \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z}. \quad (4.36)$$

Ainsi, en remplaçant les déformations  $S$  par leur définition en fonction des déplacements  $u$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$f_z = \mu_v \left( \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial z \partial t} \right) + \mu_v \left( \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial z \partial t} \right) + 2\mu_v \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^2 \partial t} + \lambda_v \left( \frac{\partial^3 u_x}{\partial z \partial x \partial t} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (4.37)$$

Nous avons alors pris en compte les approximations faites dans la théorie des plaques minces en flexion, à savoir : les déplacements suivant  $x$  et  $y$  (ainsi que leurs dérivées) sont négligés devant le déplacement suivant  $z$ ; et  $u_z$  est considéré comme indépendant de  $z$ , donc  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  sera nul.

Après quelques calculs, nous obtenons alors :

$$f_z = \mu_v \frac{\partial \Delta u_z}{\partial t}. \quad (4.38)$$

L'équation de propagation prenant en compte la viscosité du matériau est donc :

$$\rho \frac{V_F^2 h^2}{12} \Delta^2 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu_v \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) = S(x, y, t), \quad (4.39)$$

le terme source  $S$  étant homogène à une force extérieure par unité de volume.

## Annexe 2 : Equation de propagation du mode $A_0$ corrigée (approche de Mindlin)

Considérons un élément infinitésimal d'une plaque, de hauteur  $h$ , et de dimensions  $dx$  et  $dy$ . Chaque face parallèle à  $Oz$  est soumise à un moment fléchissant  $M_u$ , un moment de torsion  $M_{uv}$  et à un effort tranchant  $Q_u$ ,  $u$  et  $v$  étant l'une des coordonnées  $x$  ou  $y$  (voir figure 4.12).

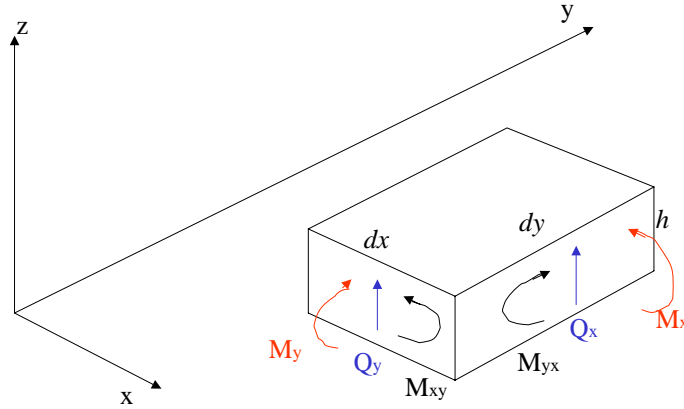


FIG. 4.12 : Élément de plaque soumis aux efforts et moments généralisés.

Ces contraintes sont définies à partir du tenseur des contraintes par :

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, M_{yx}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}) z dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nous voulons maintenant trouver la relation entre ces contraintes généralisées et les déformations généralisées de la plaque. Ces dernières sont définies de façon analogue par l'intégrale sur l'épaisseur de la plaque des composantes du tenseur de déformation  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{xy}) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}) z dz \\ (\Gamma_{xz}, \Gamma_{yz}) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}) dz \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le milieu étant isotrope, nous allons pour cela utiliser la loi de Hooke avec les coefficients de Lamé :  $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ . Or la contribution  $\tau_{zz}$  n'intervient pas dans la définition des contraintes généralisées, donc nous le négligerons ; quant à  $\epsilon_{zz}$ , il sera alors exprimé en fonction de  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{yy}$ , l'intégrale de  $\tau_{zz}$  sur l'épaisseur ayant été négligée. Ainsi, après quelques calculs, et après avoir remplacé  $\lambda$  et  $\mu$  par leur expression en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient

de Poisson  $\nu$ , nous obtenons la relation suivante entre les moments généralisés et les déformations généralisées :

$$\begin{aligned} M_x &= D (\Gamma_x + \nu \Gamma_y) \\ M_y &= D (\Gamma_y + \nu \Gamma_x) \\ M_{xy} &= (1 - \nu) D \Gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

où  $D$  est une constante classique égale à :  $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ . En revanche, concernant les efforts tranchants, afin de corriger certaines approximations qui entraîneraient un effort  $Q_x$  inexact, un coefficient correcteur  $\kappa$  est introduit, de façon à définir un coefficient de Lamé modifié  $\mu' = \kappa^2 \mu$ . En effet, l'effort tranchant exact  $Q_x^e$  serait défini à partir de la déformation exacte  $\epsilon_{xz}^e$  par :

$$Q_x^e = 2\mu \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xz}^e dz, \quad (4.43)$$

tandis que notre effort tranchant sera :

$$Q_x = 2\mu' \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xz} dz, \quad (4.44)$$

et  $\kappa$  devra être choisi de sorte que  $Q_x = Q_x^e$ . Cette correction sera appelée 'correction transverse' car il s'agit de corriger le coefficient de Lamé transverse. Ainsi, nous obtenons les relations suivantes des efforts tranchants généralisés en fonction des déformations généralisées :

$$Q_x = \mu' h \Gamma_{xz}, Q_y = \mu' h \Gamma_{yz}. \quad (4.45)$$

Il reste maintenant à relier ces déformations généralisées aux déplacements de la plaque. Comme précédemment, nous utilisons la relation entre le tenseur des déformations et les déplacements :

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (4.46)$$

avec les notations classiques. Il s'agit alors d'intégrer ces déformations sur l'épaisseur de la plaque de façon à faire apparaître les déformations généralisées. Il est alors nécessaire de faire des hypothèses sur les déplacements eux-mêmes.

La première hypothèse consiste à considérer que le déplacement transverse  $w$  est constant dans l'épaisseur de la plaque : il ne dépend donc que de  $x$ ,  $y$  et  $t$ .

La théorie classique des plaques en flexion consiste à considérer que les déplacements  $u$  et  $v$  (respectivement suivant  $x$  et  $y$ ) vérifient :  $u(x, y, z, t) = -z \partial w / \partial x$  et  $v(x, y, z, t) = -z \partial w / \partial y$ , c'est-à-dire que l'on suppose que les sections droites restent orthogonales à la fibre neutre.

Ici, nous allons supposer uniquement que :

$$u(x, y, z, t) = z\Psi_x(x, y, t), \quad v(x, y, z, t) = z\Psi_y(x, y, t), \quad (4.47)$$

où  $\Psi_x$  et  $\Psi_y$  sont deux fonctions arbitraires ; cela autorise donc une rotation des sections droites par rapport à la fibre neutre. Notons que cette forme de  $u$  et  $v$  suppose que nous négligeons les vibrations longitudinales dans la plaque (or seul le mode  $A_0$  nous intéresse, donc cette hypothèse est nécessaire). En réinjectant cette forme des déplacements dans l'équation (4.46) après intégration sur l'épaisseur, nous obtenons :

$$\Gamma_x = \frac{\partial\Psi_x}{\partial x}, \quad \Gamma_y = \frac{\partial\Psi_y}{\partial y}, \quad \Gamma_{xy} = \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_x}{\partial y}, \quad \Gamma_{xz} = \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Gamma_{yz} = \Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.48)$$

En combinant les équations (4.43), (4.45), et (4.48), nous obtenons les équations reliant les contraintes généralisées aux déplacements.

Enfin en utilisant les équations du mouvement dans le cas exact de la théorie des solides élastiques en trois dimensions, écrites en contraintes, et en les intégrant sur l'épaisseur de la plaque, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$q$  étant la source extérieure appliquée à la plaque.

En substituant dans ces équations les relations entre contraintes généralisées et déplacements, nous en déduisons les équations du mouvement suivantes, en notant  $\Phi = \frac{\partial\Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial y}$  :

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \left\{ (1 - \nu)\Delta(\Psi_x) + (1 + \nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\} - \mu' h \left( \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}, \\ \frac{D}{2} \left\{ (1 - \nu)\Delta(\Psi_y) + (1 + \nu)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\} - \mu' h \left( \Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2}, \\ \mu' h (\Delta w + \Phi) + q &= \rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

La résolution de ces équations dans le cas de problèmes statiques par éléments finis a fait l'objet de nombreuses recherches [50], mais nous n'avons trouvé aucune référence sur l'utilisation et la validation expérimentale de ces techniques dans le cas d'un problème transitoire (source impulsionnelle puis onde qui se réverbère longtemps dans le milieu). Pour simplicité d'implémentation et gain de temps, nous avons choisi également une résolution par différences finies, non

pas de l'ensemble de ces trois équations, mais de l'équation sur le déplacement transverse  $w$ , qui est obtenue en différentiant la première équation par rapport à  $x$  et la seconde par rapport à  $y$ , en les ajoutant et en réinjectant ceci dans la troisième équation :

$$D\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( -\frac{\rho h^3}{12} - \frac{\rho}{\mu'} \right) \Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 h^3}{12\mu'} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \left( 1 - \frac{D\Delta}{\mu' h} + \frac{\rho h^2}{12\mu'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) q. \quad (4.51)$$

Pour déterminer  $\kappa$ , il suffit de calculer l'équation de dispersion imposée par cette équation, et de choisir  $\kappa$  de sorte que lorsque la fréquence tend vers l'infini, la vitesse de phase tende vers la vitesse de Rayleigh  $V_R$ , valeur limite de la vitesse de phase du mode  $A_0$ . Nous en déduisons alors que  $\kappa = V_R/V_S$ ,  $V_S$  étant la vitesse transverse du milieu. Enfin, en remplaçant  $E$ ,  $\nu$  et  $\mu$  par leurs expressions en fonction des vitesses longitudinale, transverse et de plaque, nous obtenons l'équation de propagation introduite dans ce chapitre.

## Chapitre 5

# Influence de la température sur la localisation d'impacts sur une plaque mince

### 5.1 Position du problème

Comme nous l'avons expliqué dans les précédents chapitres, la localisation d'impact par Retournement Temporel (et filtre de phase) nécessite une phase d'apprentissage des réponses impulsionnelles de la plaque. Or, dans le cas d'une expérience classique de Retournement Temporel, nous savons que la refocalisation est dégradée si le milieu n'est plus invariant par Retournement Temporel, ce qui a lieu, par exemple, lorsque la température a varié entre les deux étapes du RT.

En effet, une dégradation de la focalisation par RT a été montrée dans des milieux multidif-fuseurs [51], et également en chambre réverbérante, dans le cas d'une source impulsionnelle [8] ou d'une source continue (voir chapitre 1), et ce dès quelques degrés d'écart de température. Par ailleurs, Weaver [52] a étudié l'évolution des réponses impulsionnelles dans une cavité solide à trois dimensions aux fréquences ultrasonores, et montré que les signaux subissent à la fois une dilatation et une distorsion. Ainsi, dans nos expériences tactiles, si la température du milieu a changé entre la phase d'apprentissage et la phase d'utilisation de nos objets tactiles, un impact risque de ne plus pouvoir être localisé ; la question est d'autant plus pertinente que les variations de température des objets de la vie courante atteignent aisément 20°C.

Dans ce chapitre, nous avons donc étudié quelle est l'influence d'une variation de température sur les réponses impulsionnelles dans une plaque, et dans quelle mesure nous pouvons la compenser. Dans une première partie, nous verrons que dans l'approximation basse fréquence

un changement de température se traduit par une dilatation ou une contraction des réponses impulsionnelles, ce qui est confirmé par des simulations reposant sur le code présenté au chapitre précédent. Enfin, des expériences sur de nombreux matériaux montrent que, pour certains d'entre eux, l'influence de la température est négligeable (cas du verre). Dans les autres cas, l'effet de la température a pu être compensé avec succès par une simple contraction ou dilatation des réponses impulsionnelles.

## 5.2 Théorie

### 5.2.1 Dépendance des paramètres du milieu avec la température

Les matériaux que nous avons choisi d'étudier sont les suivants : le verre, le Plexiglas, l'aluminium et l'acier inoxydable. Lorsque leur température change, les vitesses longitudinale et transverse ainsi que la masse volumique changent. Comment quantifier cette influence pour utiliser les bons ordres de grandeur en simulation et interpréter les expériences ?

Dans une première approximation, nous pouvons considérer que le coefficient de dilatation thermique d'un solide [53] est constant (du moins pour les faibles variations de température qui nous intéressent, à savoir quelques dizaines de °C environ). Ce coefficient correspond à une dilatation dans une dimension ; le coefficient volumique de dilatation thermique est alors environ égal à 3 fois le coefficient linéaire.

Ainsi par exemple, pour l'aluminium pur (voir tableau tableau D173 de [53]), le coefficient de dilatation linéaire vaut, à 25°C :  $25 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ . Cela signifie que la longueur à T°C est égale à la longueur à  $T_0 = 25^\circ C$  multipliée par  $(1 + 25 \cdot 10^{-6} \cdot (T - T_0))$ . Ainsi, en notant  $V_T$  le volume de notre échantillon d'aluminium à T°C et  $V_{T_0}$  le volume à 25°C, nous avons :  $V_T = V_{T_0}(1 + 75 \cdot 10^{-6}(T - T_0))$ . Dans le cas général, en notant  $\alpha$  le coefficient de dilatation linéaire à 25°C, l'inverse de la masse volumique (cette quantité nous servira par la suite) se met sous la forme :

$$\frac{1}{\rho_T} \approx \frac{1}{\rho_{T_0}}(1 + 3\alpha(T - T_0)), \quad (5.1)$$

les températures étant exprimées en degré Celsius,  $\rho$  étant la masse volumique.

Dans le cas d'un verre de vitre courant (il s'agit de verre sodocalcique), le coefficient de dilatation linéaire est de l'ordre de  $9 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  [54] (dans d'autres types de verre, ce coefficient peut être inférieur et descendre jusqu'à  $3 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ ).

Quant au Plexiglas (ou poly(méthyl-méthacrylate)) [54], son coefficient varie entre  $5 \cdot 10^{-5} K^{-1}$  et  $9 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ .

Enfin dans l'acier inoxydable (type 304), d'après [55], ce coefficient vaut  $1.73 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

Qu'en est-il de la variation des vitesses longitudinale et transverse avec la température ?

Comme présenté par exemple dans [56] ou encore dans l'article [57], pour un solide isotrope, les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  dépendent linéairement de la température  $T$  (ils sont fonctions décroissantes de  $T$ ) sauf aux alentours de  $0K$  (ce qui ne sera jamais notre cas !). Considérons par exemple la vitesse transverse (le même raisonnement s'appliquant à la vitesse longitudinale) ; elle est égale à  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . Dans la plage de température qui nous intéresse, à savoir quelques dizaines de degré de variation autour de  $25^\circ C$ , il existe donc deux constantes  $c$  et  $d$  positives telles que  $\mu = c - d.T$ ,  $T$  étant, là aussi, la température exprimée en  $^\circ C$ . En prenant en compte la variation de masse volumique présentée précédemment, nous obtenons :

$$\frac{\mu}{\rho} \approx (c - d.T)(1 + 3\alpha(T - T_0)). \quad (5.2)$$

Si la variation de  $\mu$  due à la température est négligeable devant  $\mu$  (dans le cas de l'aluminium, ceci est confirmé par [58]), et si  $3\alpha(T - T_0)$  est négligeable devant 1 (les valeurs données au début de cette partie le prouvent), alors la vitesse transverse s'obtient à l'aide d'un simple développement limité au premier ordre de  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  : nous pouvons alors considérer avec une bonne approximation que la vitesse dépend linéairement de la température.

Des mesures directes de la dérivée par rapport à la température des vitesses longitudinale et transverse ont été faites dans l'aluminium, notamment par K.Salama [59]. Ainsi, la variation de la vitesse longitudinale est, suivant le type d'aluminium, de l'ordre de  $-0.847$  à  $-1.111 \text{ m.s}^{-1}.K^{-1}$  ; et la vitesse transverse varie de  $-0.737$  à  $-0.749 \text{ m.s}^{-1}.K^{-1}$ , pour un changement de température autour de  $25^\circ C$ .

Ainsi, pour tenir compte d'une variation de température de  $1^\circ C$  dans l'aluminium, il suffit de baisser la vitesse longitudinale d'environ  $0.9 \text{ m/s}$  et la vitesse transverse de  $0.74 \text{ m/s}$ .

De telles mesures ont été publiées également pour le verre, mais seulement pour des verres peu courants (par exemple les verres au plomb et phosphate [60]).

Quant au Plexiglas, ce matériau étant très atténuant, et l'atténuation croissant avec la fréquence, les vitesses des ondes de volume dépendent de la fréquence. Or, nous n'avons trouvé dans la littérature que des mesures faites à des fréquences proches de  $1 \text{ MHz}$  [61]. C'est pourquoi le matériau choisi pour les simulations numériques présentées au paragraphe 5.3 sera celui pour lequel nous disposons des données les plus nombreuses, à savoir l'aluminium.

Néanmoins, souhaitant réaliser par la suite des expériences dans le verre, le Plexiglas et l'acier inoxydable, nous avons besoin de connaître l'évolution des vitesses avec la température.



Or la mesure des vitesses des ondes de volume à basse fréquence est difficile à mettre en oeuvre (les longueurs d'onde sont très grandes). Cependant, comme on l'a vu au chapitre précédent, la propagation du mode  $A_0$  à basse fréquence ne fait plus intervenir que la vitesse de plaque. Nous avons alors mesuré la variation de cette vitesse avec la température dans le verre, le Plexiglas et l'acier inoxydable. En effet, la vitesse de phase du mode  $S_0$  tend vers la vitesse de plaque lorsque le produit  $fh$  tend vers 0. De plus, le mode  $S_0$  à basse fréquence est quasiment longitudinal. Ainsi, en plaçant une source sur la tranche d'une plaque, ce mode sera généré préférentiellement. Le dispositif expérimental (figure 5.1) est donc le suivant : un transducteur piézo-électrique est collé sur la tranche d'une plaque.

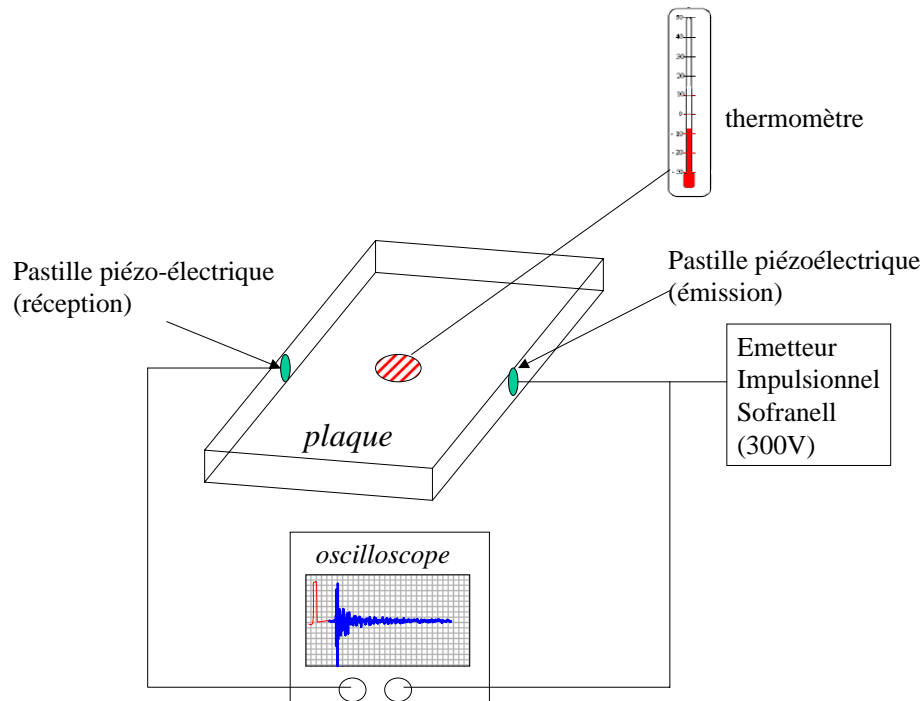


FIG. 5.1 : Schéma du dispositif de mesure de la vitesse de plaque lorsque la température varie.

Il est excité par un générateur impulsionnel de marque Sofranell : le signal de commande est une impulsion de bande passante comprise entre quelques kHz et 100 kHz, et son amplitude est de 300 V. Un second transducteur piézo-électrique est collé en regard du premier sur l'autre tranche de la plaque ; il est sensible à la composante longitudinale de l'onde. L'oscilloscope est synchronisé sur le signal de commande : ainsi, le signal excitateur et le signal mesuré sont enregistrés simultanément, afin d'en déduire le temps de parcours du mode  $S_0$  entre les deux pastilles piézoélectriques. Enfin, notons que pour améliorer le rapport signal sur bruit, une moyenne est faite sur une centaine de réalisations.

La plaque est placée dans un four (qui laisse seulement sortir les câbles vers les appareils

de mesure). Une sonde de température est placée à la surface de la plaque. L'expérience est alors répétée pour différentes températures de la plaque. Nous avons ainsi obtenu la valeur de la vitesse de plaque dans une plaque de Plexiglas (14 cm de large et 5 mm d'épaisseur), une plaque de verre (faisant 10 cm de large à température ambiante, et 6 mm d'épaisseur), et une plaque d'acier inoxydable (10 cm de large à température ambiante et 2 mm d'épaisseur). La figure 5.2 montre les signaux enregistrés par le second transducteur pour une même excitation à 25.5°C (en gris) et 68.6°C (en noir), dans le Plexiglas, avec une même origine des temps. Le cas du Plexiglas était le plus délicat, car en raison de la forte atténuation, le rapport signal sur bruit était le plus faible.

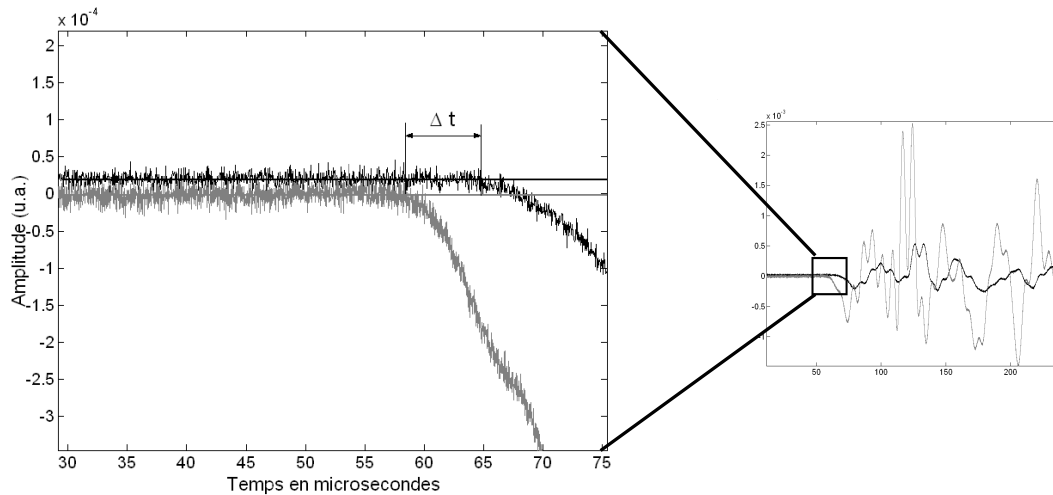


FIG. 5.2 : Zoom sur le début des déplacements enregistrés par le transducteur piézoélectrique dans la plaque de Plexiglas, lorsque celle-ci est à 25.5°C (en gris) et à 68.6°C (en noir), afin d'en déduire la vitesse de plaque dans chacun des cas.

La variation de la largeur de la plaque avec la température a été prise en compte à l'aide des valeurs des coefficients de dilatation linéaire mentionnés précédemment. Le tableau 5.1 résume les résultats de ces expériences dans les trois matériaux.

Comme nous pouvons le voir, le verre semble être un candidat idéal car dans ce matériau, non seulement la dilatation thermique, mais également la variation de la vitesse de plaque y sont les plus faibles. Par conséquent, dans une expérience d'interactivité par RT, nous pouvons supposer que cette stabilité relative rendra la méthode robuste vis-à-vis des variations de température.

Il nous reste maintenant à comprendre quel est le lien entre la variation de ces paramètres du milieu avec la température et l'évolution des réponses impulsionnelles elles-mêmes.

Matériaux	Plexiglas	Verre	Acier inoxydable
Largeur de la plaque (cm)	14	10	10
$T_0$ en °C	25.5	25.3	24.4
$T_1$ en °C	68.6	75.3	85.2
Temps de vol à $T_0$ en $\mu s$	58.9	18.8	19.8
Temps de vol à $T_1$ en $\mu s$	65.4	18.86	20.05
$V_P$ à $T_0$ en m/s	2380	5319	5050
$V_P$ à $T_1$ en m/s	2150	5304	4993
Variation relative de $V_P$ en $\%K^{-1}$	0.22	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$

**TAB. 5.1** : Résultats des expériences de mesure de la vitesse de plaque en fonction de la température dans différents matériaux.

### 5.2.2 Effet d'une variation de température sur les réponses impulsionnelles dans une plaque

L'approche suivante permet de montrer théoriquement qu'une variation de température entraîne une simple dilatation ou compression des réponses impulsionnelles dans les plaques. Cependant, elle nécessite de négliger l'effet de la dilatation suivant la longueur et la largeur de la plaque ; au paragraphe suivant, une autre approche, fondée sur l'effet de la température sur les fréquences propres de la plaque, mais valable seulement dans le cas où la réverbération est suffisamment grande pour que les modes soient séparés, permet de voir à quelle condition cette hypothèse est justifiée, ce qui est le cas pour des plaques d'aluminium.

Etant donné que l'onde excitée de façon prédominante est le mode de flexion  $A_0$ , nous savons que, sous l'hypothèse de faible produit fréquence-épaisseur, le déplacement transverse obéit à l'équation de propagation :

$$\Delta^2 w + \frac{12}{V_P^2 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x, y, t). \quad (5.3)$$

La source étant un bref impact à la surface de la plaque, nous pouvons la représenter avec une bonne approximation par une distribution de Dirac. Comme d'habitude,  $V_P$  désigne la vitesse de plaque et  $h$  l'épaisseur totale. Considérons maintenant une plaque avec des conditions aux limites libres (les autres conditions aux limites ne changeraient pas le raisonnement), car ce sont les conditions les plus proches des plaques utilisées en expérience. Supposons que le bord d'équation  $x = x_0$  soit libre, alors le déplacement transverse  $w$  est tel que, à tout instant  $t$  :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x_0) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_0) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}(x_0) = 0, \quad (5.4)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Le cas d'un bord libre en  $y = y_0$  conduit aux mêmes équations en inversant les rôles de  $x$  et  $y$ .

Soit maintenant une variation de température de  $T_0$  à  $T_1$  ; la vitesse de plaque varie alors de  $V_{P_0}$  à  $V_{P_1}$ , et l'épaisseur de  $h_0$  à  $h_1$ . Le déplacement  $w_0$  lorsque la température vaut  $T_0$  obéit à l'équation :

$$\Delta^2 w_0 + \frac{12}{V_{P_0}^2 h_0^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \delta(x, y, t). \quad (5.5)$$

tandis que le déplacement  $w_1$  lorsque la plaque est à une température de  $T_1$  obéit à l'équation :

$$\Delta^2 w_1 + \frac{12}{V_{P_1}^2 h_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \delta(x, y, t). \quad (5.6)$$

Considérons alors la fonction  $w_2$  définie par :

$$w_2(x, y, t) = a.w_0(x, y, at), \quad (5.7)$$

où  $a$  est défini de la façon suivante :

$$a = \frac{V_{P_1} h_1}{V_{P_0} h_0}. \quad (5.8)$$

Nous pouvons alors en déduire que :

$$\Delta^2 w_2(t) + \frac{12}{V_{P_1}^2 h_1^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}(t) = a \left( \Delta^2 w_0(at) + \frac{12}{V_{P_0}^2 h_0^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}(at) \right). \quad (5.9)$$

Or  $w_0$  est solution de l'équation (5.5), donc le membre de droite de l'équation (5.9) est égal à  $a.\delta(x, y, at)$ . De plus, par propriété de la distribution de Dirac,  $a$  étant positif :

$$a\delta(x, y, at) = \delta(x, y, t).$$

Le membre de gauche de l'équation (5.9) est donc égal à  $\delta(x, y, t)$  :  $w_2$  est donc solution de l'équation (5.6).

Par ailleurs, si  $w_0$  suit les conditions aux limites (équation (5.4)), alors  $w_2$  également, à condition que la dépendance de  $\nu$  vis-à-vis de la température puisse être négligée. Enfin, comme annoncé en introduction, nous négligeons la dilatation suivant la longueur et l'épaisseur de la plaque. Ces deux approximations peuvent être justifiées dans le cas de l'aluminium, car de nombreuses études ont été menées dans la littérature sur ce matériau. Ainsi, dans l'aluminium, une augmentation de température de 25°C entraîne une dilatation dans chaque dimension de 0.06% [53], et d'autre part,  $\nu$  varie alors de 0.3555 à 0.3564, c'est-à-dire de 0.25% [29].

Ainsi,  $w_2(x, y, t)$  est solution du même problème que  $w_1$  : les deux fonctions sont solutions de la même équation de propagation, pour une même source, dans un même milieu, avec les mêmes conditions aux limites : elles sont donc égales.

En conclusion, lorsque la température change, la réponse impulsionnelle dans une plaque est simplement dilatée (resp. comprimée) si  $a$  est inférieur (resp. supérieur) à 1 ; de plus, son amplitude est multipliée par ce même coefficient de dilatation. Notons que, lorsque nous comparons les signaux de la bibliothèque à une réponse impulsionnelle inconnue, le calcul du niveau de corrélation se fait sur les signaux normés par leur énergie. Ainsi, un changement d'amplitude globale n'a aucune importance. En revanche, le phénomène de dilatation dans le domaine temporel entraîne, comme nous allons le voir, une chute du niveau de corrélation, qui pourra être compensée en appliquant la transformation inverse (dilatation temporelle par le coefficient  $1/a$ ).

### 5.2.3 Fréquences propres d'une plaque en flexion et influence de la température

Dans l'approche précédente, la dilatation de la plaque suivant la longueur et la largeur avaient été négligées. Or, si les dimensions d'une cavité changent, les fréquences propres de la cavité sont également modifiées. Si le milieu est très réverbérant, la réponse à un impact dépend de ces modes propres. C'est pourquoi, dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressés à la variation des fréquences propres d'une plaque en flexion avec la température.

Dans un premier temps, étudions le cas d'une barre en flexion. Il s'agit d'un cas assez simple, car quelles que soient les conditions aux limites (libres, encastrées, simplement posées..), les fréquences propres de vibration peuvent être calculées quasiment analytiquement.

Comme démontré par exemple dans [62], dans le cas d'une barre soumise à des bords libres, les nombres d'onde guidés par la longueur  $L$  de la barre, notés  $k$ , sont les solutions de l'équation :

$$\cos(kL)\cosh(kL) = 1, \quad (5.10)$$

$\cosh$  désignant la fonction cosinus hyperbolique. Or les solutions de cette équation de la variable  $kL$  sont des valeurs numériques, constantes, c'est-à-dire indépendantes de tout paramètre du problème, en nombre discret, que nous noterons  $x_i$ , pour  $i$  décrivant l'ensemble des entiers naturels. Ainsi, les longueurs d'onde stationnaires vérifient l'équation :

$$\lambda_i = \frac{2\pi L}{x_i}. \quad (5.11)$$

Les fréquences propres correspondantes  $f_i$  sont alors :

$$f_i = V_{phase}(i) \frac{x_i}{2\pi L}, \quad (5.12)$$

où  $V_{phase}(i)$  vaut, sous l'hypothèse de faible fréquence-épaisseur,  $V_P \frac{h}{\lambda_i}$ , avec  $h$  l'épaisseur,  $V_P$  la vitesse de plaque égale à  $V_S \sqrt{1 - \frac{V_S^2}{V_L^2}}$ ,  $V_S$  étant la vitesse transverse et  $V_L$  la vitesse longitudinale.

Les fréquences propres valent donc :

$$f_i = V_P \frac{hx_i^2}{(2\pi L)^2}. \quad (5.13)$$

Lorsque la température passe de  $T_0$  à  $T_1$ , si  $c_e$  est le coefficient d'expansion linéaire du matériau, chaque fréquence propre de la barre sera alors multipliée par la même quantité :

$$f_i(T_1) = f_i(T_0) \cdot \frac{V_{P1}}{V_{P0}} \left( \frac{1}{1 + c_e(T_1 - T_0)} \right). \quad (5.14)$$

En supposant maintenant que l'onde créée par un choc donné à la surface de la plaque se réverbère suffisamment longtemps pour que les modes dans le spectre soient séparés, nous pouvons considérer que la réponse impulsionnelle est une combinaison linéaire de modes propres. Ainsi, son spectre est dilaté (avec pour coefficient de dilatation le coefficient multiplicateur de l'équation (5.14)).

Dans le cas d'une plaque rectangulaire, si ses bords sont simplement posés (c'est-à-dire champ nul et dérivée seconde normale du champ nulle sur le bord), l'équation de propagation de l'onde de flexion sans terme source peut être résolue par séparation des variables, et il est possible d'en déduire une expression littérale des fréquences propres [29]. En revanche, dès que les bords sont libres ou encastés (ou toute combinaison), la méthode de séparation des variables ne permet pas d'aboutir, et donc on ne peut pas exprimer ces modes par une expression aussi simple que dans le cas d'une barre. Comme nous l'avons déjà mentionné aux chapitres 2 et 3, la méthode de Ritz permet cependant de calculer semi-numériquement les valeurs de ces fréquences propres.

Sous l'hypothèse de faible produit fréquence-épaisseur, il existe alors des paramètres sans dimension, notés  $p_i, i \in \mathbb{N}$ , reliés aux fréquences propres  $f_i$  par l'expression :

$$(2\pi f_i)^2 = p_i \frac{V_P^2 h^2}{12} \frac{1}{l^4}, \quad (5.15)$$

$l$  étant la largeur de la plaque. Leissa [29] a montré que  $p_i$  ne dépend que de l'indice  $i$  du mode, du rapport  $l/L$  ( $L$  étant la longueur de la plaque) et dans le cas des conditions aux limites libres, du coefficient de Poisson  $\nu$ .

Or, dans le cas d'une variation de température, la longueur et la largeur de la plaque sont chacune multipliées par le même coefficient, donc le rapport  $l/L$  ne change pas. Quant à la dépendance de  $p_i$  vis-à-vis du coefficient de Poisson, elle a été étudiée à plusieurs reprises [63, 64]. Il est notamment montré que lorsque  $\nu$  varie, la variation relative de  $p_i$  dépend de l'indice du mode. Quantitativement, lorsque  $\nu$  change de 0.343 à 0.360, la plus grande variation de  $p_i$  (pour tous les rapports  $l/L$  et les indices  $i$ ) est une multiplication par 0.976 [63]. Or, dans le cas de

l'aluminium, nous avons vu que pour une augmentation de température de 25°C,  $\nu$  passe de 0.3555 à 0.3564. En considérant que  $p_i$  varie linéairement avec  $\nu$ , cela correspond à une variation de  $p_i$  de 0.13%. Or, par ailleurs,  $\frac{V_P^2 h^2}{12l^4}$  varie de 1.07%. Ainsi, l'influence de  $\nu$  sur la valeur des fréquences propres peut être négligée devant celle de la variation de la vitesse de plaque et la dilatation.

En conclusion, lorsque la température passe de  $T_0$  à  $T_1$ , les fréquences propres sont multipliées par  $a = \frac{V_{P_1}}{V_{P_0}} \cdot \frac{1}{1 + c_e(T_1 - T_0)}$ . Si  $w_{T_0}(t)$  est la réponse impulsionnelle à la température  $T_0$  et  $w_{T_1}(t)$  la réponse impulsionnelle à la température  $T_1$ , en notant  $W$  la transformée de Fourier de  $w$ , nous pouvons alors écrire que :

$$W_{T_1}(a\omega) = W_{T_0}(\omega). \quad (5.16)$$

Ainsi, par propriété de la transformée de Fourier, les réponses impulsionnelles sont telles que :

$$w_{T_1}(t) = aw_{T_0}(at). \quad (5.17)$$

Finalement, si  $a$  est supérieur (resp. inférieur) à 1, le spectre est dilaté (resp. comprimé), tandis que la réponse impulsionnelle est comprimée (resp. dilatée) lors du changement de température.

Remarquons que, toujours dans le cas de l'aluminium, pour une variation de température de 25°C,  $\frac{V_P h}{\sqrt{12}}$  varie de 0.48% tandis que  $\frac{1}{l^2}$  varie de 0.12%. C'est pourquoi nous pouvons considérer, dans une première approximation, que l'effet de la dilatation de volume sur la réponse impulsionnelle est négligeable devant l'effet de la variation du produit de la vitesse de plaque par l'épaisseur, comme nous l'avons supposé dans la première partie de ce chapitre. Sous cette hypothèse, nous retrouvons le même coefficient de dilatation avec cette approche modale qu'au paragraphe précédent reposant sur une approche temporelle.

### 5.3 Simulations

Dans un premier temps, pour valider les conclusions théoriques précédentes, nous avons utilisé le code de simulation numérique (dans l'approximation faible produit  $fh$ ) présenté au chapitre précédent.

Le milieu simulé est une plaque d'aluminium de 30 cm par 40 cm de côté, et 3 mm d'épaisseur ; la source est constituée d'une période de sinusoïde de fréquence centrale 50 kHz. Les déplacements sont enregistrés en 35 points répartis sur la surface de la plaque, pendant 50 ms de propagation. Par réciprocity spatiale, ceci est donc équivalent à simuler un impact en 35 points différents, et enregistrer les déplacements en un seul point (qui serait la position du capteur). Le pas d'échantillonnage spatial est de 2 mm (il est choisi inférieur au dixième de la plus petite longueur

d'onde simulée). Or, si nous souhaitons prendre en compte l'effet de la dilatation volumique, pour une variation de 70°C, la longueur passerait de 30 cm à 30.05 cm : la différence est donc négligeable devant le pas d'échantillonnage. C'est la raison pour laquelle nous ne pouvons pas (à moins d'échantillonner beaucoup plus finement, avec un temps de calcul correspondant prohibitif) prendre en compte la variation de volume dans nos simulations.

L'évolution de la température se traduit dans ces simulations uniquement par un changement des vitesses des ondes longitudinale et transverse, suivant l'expression obtenue dans la partie 5.2.1 : une variation de température de 1°C dans l'aluminium donne lieu à une baisse de la vitesse longitudinale de 0.9 m/s et la vitesse transverse de 0.74 m/s.

Dans un premier temps, nous avons observé la décorrélation des signaux avec la température, en fonction de la durée de ces signaux. Un point source et un point d'enregistrement des déplacements étant fixés, le signal source est le même à chaque simulation ; seules les vitesses des ondes de volume varient de l'une à l'autre. Ainsi, nous pouvons calculer le coefficient de corrélation entre la réponse à 25°C et la réponse simulée après une variation de température de  $\Delta T$ , en fonction de  $\Delta T$ , comme illustré sur la figure 5.3. La décorrélation des signaux longs de 50 ms est totale pour  $\Delta T = 10$  °C ; en revanche, plus les réponses sont brèves, et moins les coefficients de corrélation sont sensibles à la température.

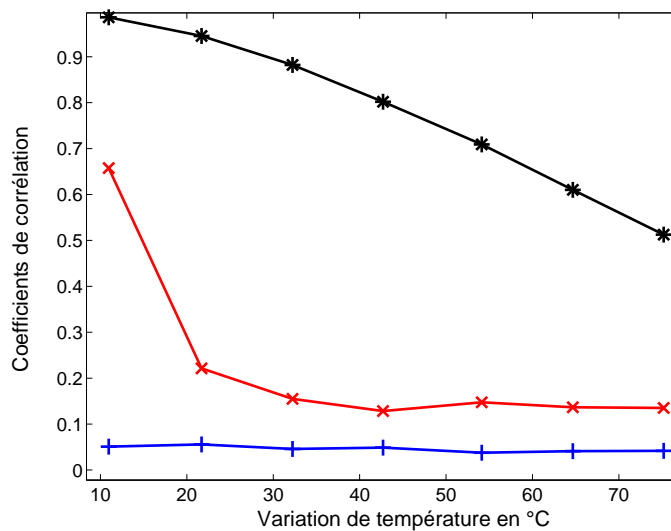


FIG. 5.3 : Résultat de simulation : coefficients de corrélation entre le déplacement à la température de référence et celui après une variation de température de  $\Delta T$ , en fonction de  $\Delta T$ . Les coefficients sont calculés soit avec le signal entier, à savoir 50 ms (+), soit à partir des 5 premières millisecondes (x), ou encore la première milliseconde (\*).

Nous avons alors appliqué une dilatation temporelle de ces réponses à l'aide du modèle



théorique précédent. Le coefficient de dilatation est égal au quotient des vitesses de plaque (car la dilatation volumique est négligée en simulation).

La figure 5.4 montre les déplacements simulés dans le cas où la température avait changé de  $75^{\circ}\text{C}$ , sans compensation (tirets) et après compensation de température (pointillés), ainsi que le signal de référence à température ambiante (ligne continue), en zoom sur la fin du signal. Comme on peut le voir, les signaux corrigés sont quasiment identiques aux signaux à la température de référence.

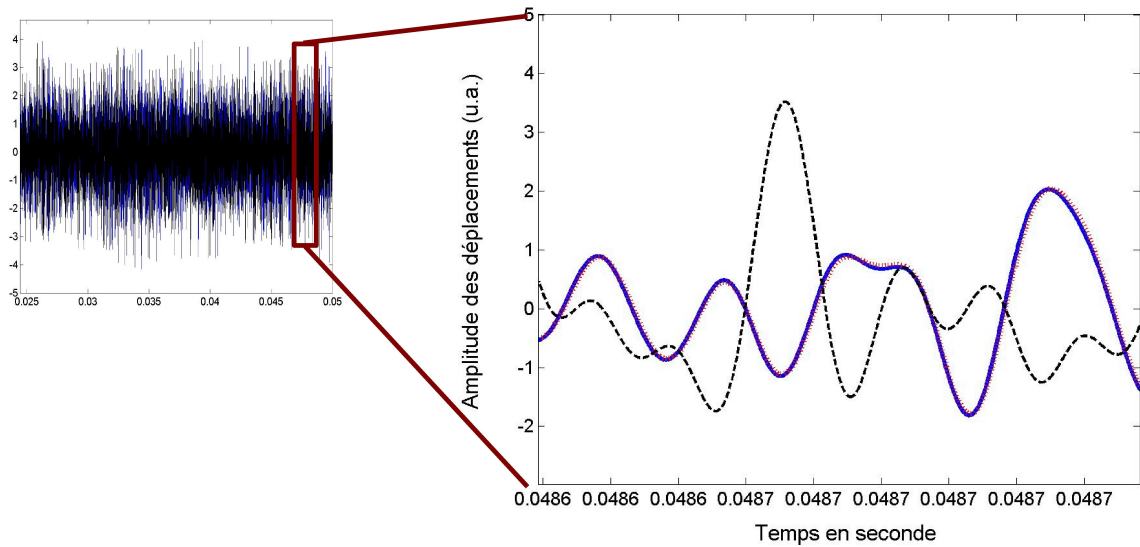
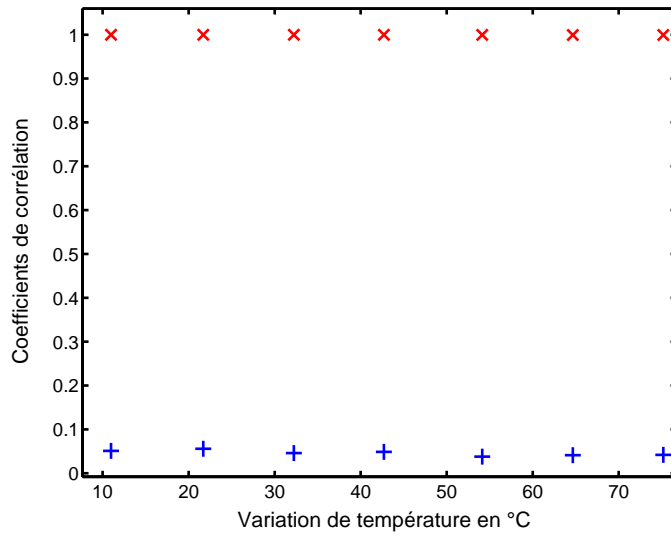


FIG. 5.4 : Zoom sur la fin des déplacements obtenus en simulation dans une plaque d'aluminium à la température de référence (-), et après variation de température (ici  $75^{\circ}\text{C}$  de moins) : signal brut (- -), et signal dilaté pour compenser cette variation (..). Cette dernière courbe coïncide presque parfaitement avec le signal de référence.

Ceci est confirmé par la figure 5.5, qui montre l'évolution du coefficient de corrélation pour une position d'impact fixée lorsque la température varie (c'est-à-dire lorsque la vitesse de plaque varie), avant et après dilatation, dans le cas extrême d'une propagation de 50 ms : les coefficients obtenus après cette compensation sont quasiment égaux à 1.

Ceci permet donc de valider le modèle théorique présenté dans la partie 2 pour une configuration où les modes sont séparés (la réverbération dure 50 ms sans atténuation). Pour s'assurer que l'approche théorique temporelle est également valable dans le cas où il y a très peu de réverbération, nous avons représenté figure 5.6 les coefficients de corrélation entre le déplacement simulé à la température de référence et celui après variation de température, en fonction de cette variation de température, calculés en ne gardant que la première milliseconde de signal, soit sans traitement (signes plus), soit avec compensation de la température (croix) par dilatation par le



**FIG. 5.5 :** Coefficients de corrélation entre le déplacement simulé à la température de référence et celui après variation de température, en fonction de cette variation de température. Les coefficients sont calculés avec tout le signal (50 ms), soit sans traitement (+) soit avec compensation de la température (x) par dilatation par le quotient des vitesses de plaques.

quotient des vitesses de plaques. En effet, le front direct n'est plus négligeable dans ce court signal. Comme nous pouvons le voir, le même coefficient de correction permet de corriger l'effet de température dans les deux cas : l'ensemble de ces résultats numériques corrobore donc les deux approches théoriques dans le cas où la dilatation volumique est négligée.

Enfin, la théorie prévoit que le coefficient de correction de température est égal au quotient des vitesses de plaque, c'est-à-dire qu'il est indépendant du point d'impact sur la plaque. Ce résultat constitue un enjeu important car s'il était exact, en pratique, pour utiliser une plaque rendue tactile lorsqu'elle change de température, il suffirait de mesurer l'évolution d'une seule réponse à un impact en un point connu, afin de calculer le coefficient de correction, ce dernier pouvant alors être appliqué à toutes les autres réponses.

Pour vérifier en simulation si ce résultat théorique est bien valable, nous avons donc calculé les coefficients de corrélation avant compensation de température (figure 5.7 (a)) et après compensation par le même coefficient (égal au quotient des vitesses de plaque) (figure 5.7 (b)) entre des réponses à des impacts en différents points de la plaque. Comme nous pouvons le voir, quel que soit le point d'impact sur la plaque, le même coefficient de dilatation appliqué aux réponses impulsionnelles permet d'obtenir un degré de corrélation supérieur à 0.99.

Cependant, la rapidité avec laquelle le degré de corrélation décroît lorsque la température

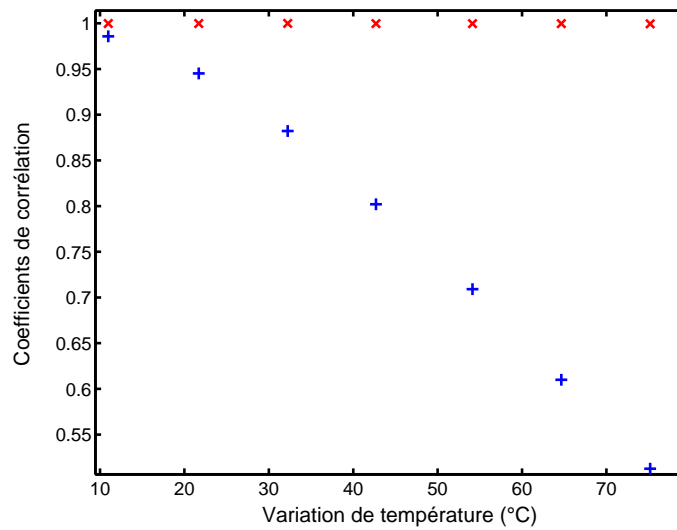


FIG. 5.6 : Coefficients de corrélation entre le déplacement simulé à la température de référence et celui après variation de température, en fonction de cette variation de température. Les coefficients sont calculés en ne gardant que la première milliseconde de signal, soit sans traitement (+), soit avec compensation de la température (x) par dilatation par le quotient des vitesses de plaques.

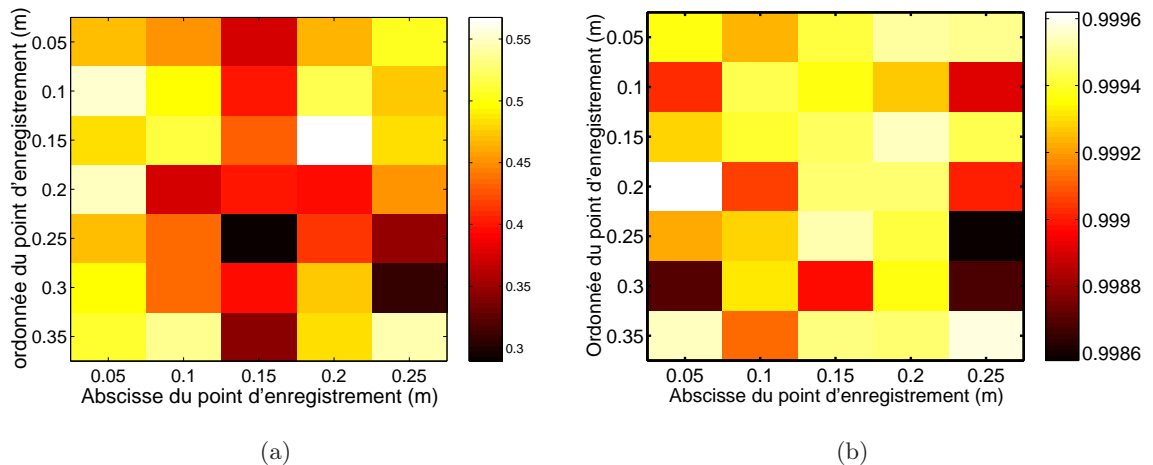
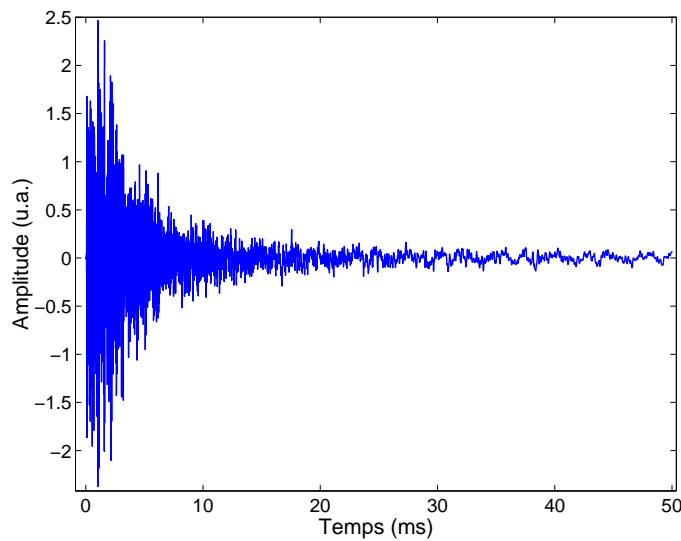


FIG. 5.7 : Coefficients de corrélation entre les réponses impulsionnelles simulées à la température de référence et les réponses après variation de température (ici 75°C), en fonction de la position du point d'impact sur la plaque ; avec 1 ms de signal sans traitement (figure (a)) et avec correction de l'effet de la température (figure (b)). Le même coefficient de dilatation (égal au quotient des vitesses de plaque) a été utilisé avec succès pour tous les points d'impact.

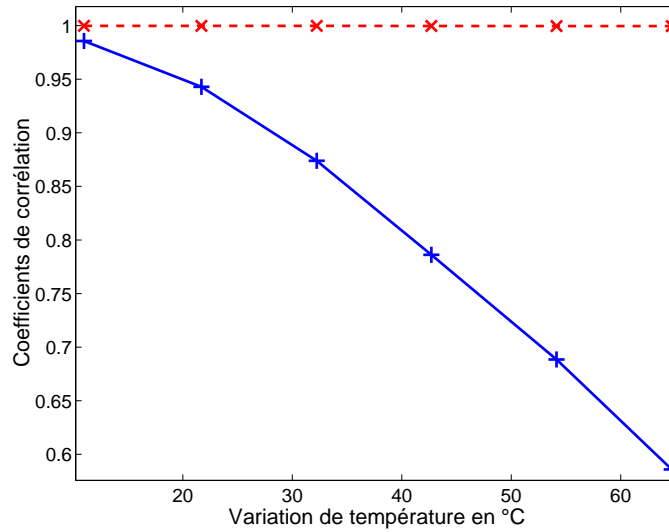
change ne peut être déduite de ces simulations. En effet, dans la réalité, les cavités ne sont pas purement réverbérantes : il y a atténuation de l'onde au cours de sa propagation, d'autant plus forte que la fréquence est élevée (voir chapitre 3). Comme nous l'avons vu ci-dessus, plus les signaux sont longs et plus la décorrélation est forte pour une même variation de température. De plus, comme nous l'avons vu dans la partie théorique, pour une variation de température donnée, les fréquences dans le spectre sont d'autant plus décalées qu'elles sont élevées. L'atténuation agissant comme un filtre passe bas, nous pouvons donc supposer que la décorrélation sera moins importante.

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons donc utilisé le code de simulation du mode  $A_0$  avec prise en compte de l'atténuation. La même simulation que celle présentée au début de cette partie 5.3 a été réalisée. Le coefficient de viscosité est choisi égal à 30 Pa.s : la figure 5.8 représente la réponse impulsionnelle simulée à la température de référence. La décroissance d'amplitude au cours du temps est alors du même ordre de grandeur que celle observée expérimentalement.



**FIG. 5.8 :** Réponse impulsionnelle simulée dans une plaque d'aluminium (30 cm par 40 cm par 3 mm) en fonction du temps, à l'aide du code de simulation prenant en compte un effet d'atténuation. Le coefficient visqueux (voir chapitre 3) est pris égal à 30 Pa.s.

La figure 5.9 montre les coefficients de corrélation des réponses impulsionnelles ainsi simulées, en fonction de la variation de température, pour une propagation de 50 ms, soit sans compensation de température, soit avec compensation.



**FIG. 5.9 :** Coefficients de corrélation entre le déplacement simulé à la température de référence et celui après une variation de  $\Delta T$ , en fonction de  $\Delta T$ , à l'aide du code de simulation avec atténuation. Les coefficients sont calculés à partir des signaux complets (50 ms de long), soit sans traitement (+), soit avec compensation de la température (x) par dilatation par le quotient des vitesses de plaques.

Comme prévu, les coefficients de corrélation avant compensation de température sont plus élevés que ceux illustrés par la figure 5.5 : tous les autres paramètres étant égaux par ailleurs, pour un changement de 10°C, le niveau de corrélation est supérieur à 0.95, contre 0.05 lorsque l'atténuation était négligée. Nous pouvons noter que bien que cet effet n'était pas pris en compte dans les modèles théoriques, le même algorithme de compensation (par dilatation par le quotient des vitesses de plaque) a pu être appliqué avec succès.

## 5.4 Expériences par interféromètre laser sur divers matériaux

Enfin nous avons réalisé des expériences de mesure de l'effet de la température sur des barres et des plaques de divers matériaux. Afin de s'affranchir de l'éventuelle dépendance des capteurs vis-à-vis de la température, nous avons choisi une mesure sans contact, par interféromètre laser. L'impact est, là encore, donné par un pot vibrant (voir dispositif expérimental figure 5.10) ; pour des raisons pratiques, la plaque (ou barre) est dans un premier temps chauffée dans un four, puis elle refroidit à l'air libre. Les mesures sont ensuite faites au cours de son refroidissement.

Une première expérience a été faite sur une barre (en acier inoxydable, de 1 cm par 2 cm et par 31.5 cm), afin d'étudier le cas où les fréquences propres sont parfaitement séparées dans le spectre des réponses impulsionnelles. La figure 5.11 montre l'évolution du spectre avec la

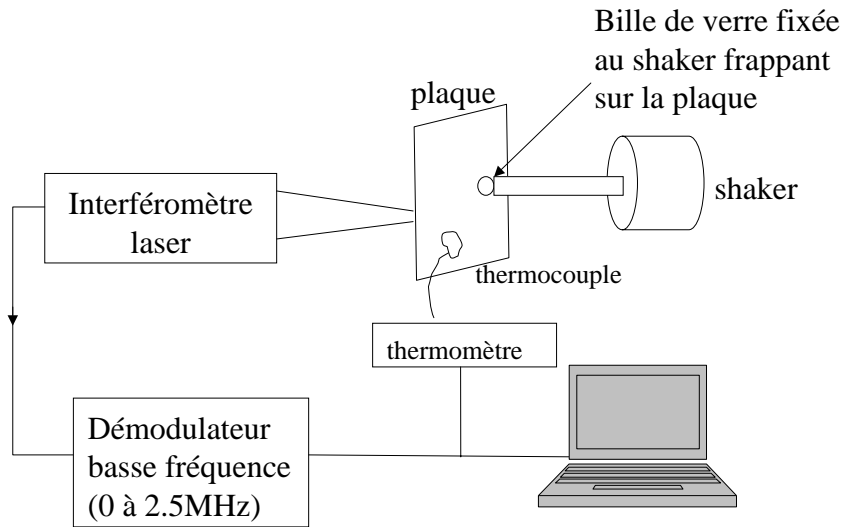


FIG. 5.10 : Dispositif expérimental de mesure des réponses impulsionnelles lors du refroidissement d'une plaque.

température. On distingue les modes propres aux fréquences 500, 1300, 2700, 4400, 6400 et 8900 Hz. Un zoom autour de 500 Hz et de 8900 Hz permet de voir un décalage de ces fréquences avec la température d'autant plus grand que la fréquence est élevée. Cela traduit un durcissement du métal au cours de son refroidissement. Ce phénomène est observé pour une grande majorité de solides.

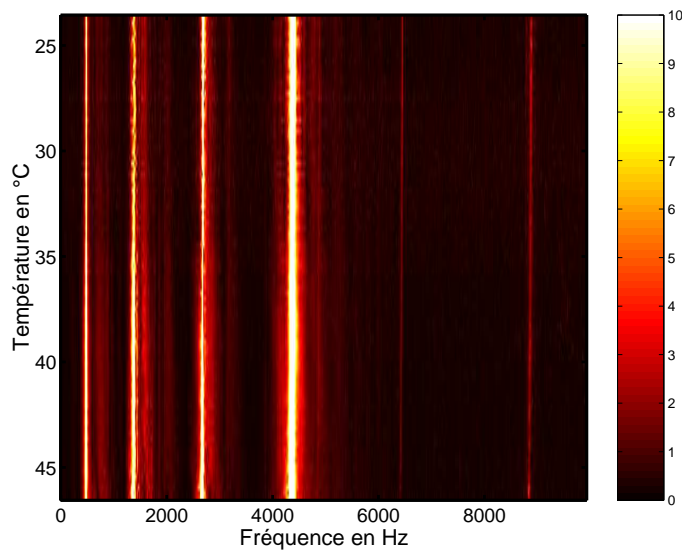
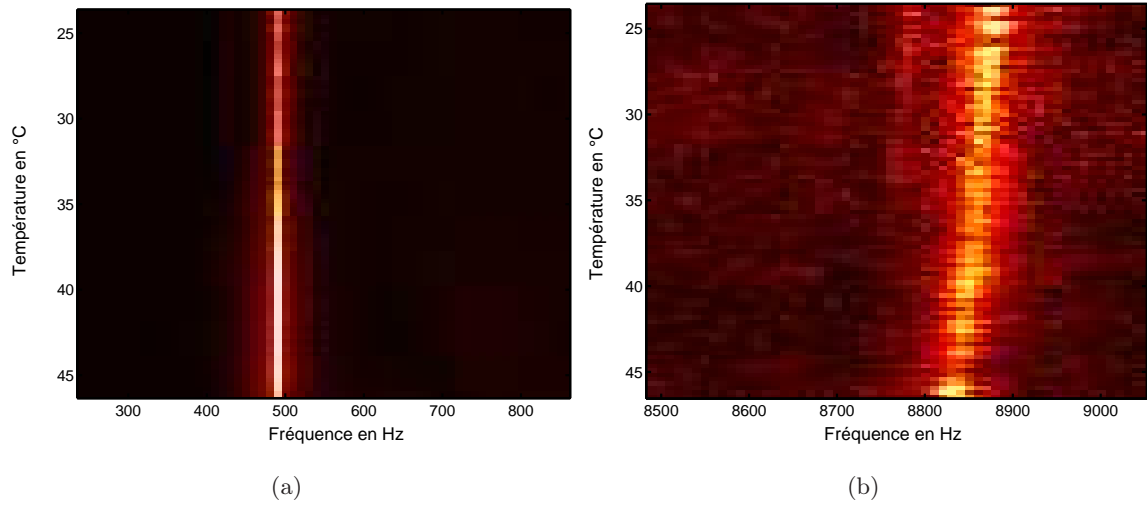


FIG. 5.11 : Amplitude de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles mesurées sur une barre d'acier inoxydable au cours de son refroidissement.

La figure 5.13 représente les coefficients de corrélation entre la réponse impulsionnelle à 44.1°C



**FIG. 5.12 :** Amplitude de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles mesurées sur une barre d'acier inoxydable au cours de son refroidissement. Zoom sur les harmoniques de 500 Hz (a) et de 8800 Hz (b). Le décalage des fréquences propres est d'autant plus grand que la fréquence est élevée.

et la réponse à la température  $T$ , en fonction de  $T$ , lorsque les signaux sont bruts (signe plus). Pour compenser l'effet de la température, nous appliquons à chaque réponse impulsionnelle une dilatation temporelle par un coefficient  $a$  proche de 1. Le niveau de corrélation entre la réponse dilatée et la réponse impulsionnelle mesurée à 44.1°C est alors calculé. Ceci est répété pour des valeurs différentes du coefficient de dilatation  $a$ . Le coefficient permettant d'obtenir le niveau de corrélation le plus élevé est alors retenu. Les niveaux de corrélation après dilatation par le meilleur coefficient sont également représentés figure 5.13 (croix). Ils sont tous supérieurs à 0.94 : l'effet de la température a bien été compensé.

Les coefficients de dilatation utilisés pour cette compensation suivent bien une évolution linéaire (de même que le quotient des vitesses de plaque) lorsque la température varie (figure 5.14). De plus, ces coefficients sont en bon accord avec la mesure de l'évolution de la vitesse de plaque en fonction de la température présentée dans la partie 5.2.1. En effet, d'après ces derniers, dans l'acier inoxydable, pour une variation de 60.8°C, le quotient des vitesses de plaque valait 0.9887 ; donc pour une variation de 20°C, ce quotient vaut 0.996 tandis que le coefficient de dilatation utilisé pour compenser la température (figure 5.14) est égal à 0.994. Ainsi, la variation relative de la vitesse de plaque que nous avons mesurée est de  $1 - 0.996 = 0.4\%$ , tandis que le coefficient correspondant utilisé ici est de  $1 - 0.994 = 0.6\%$  : ces deux quantités sont bien du même ordre de grandeur.

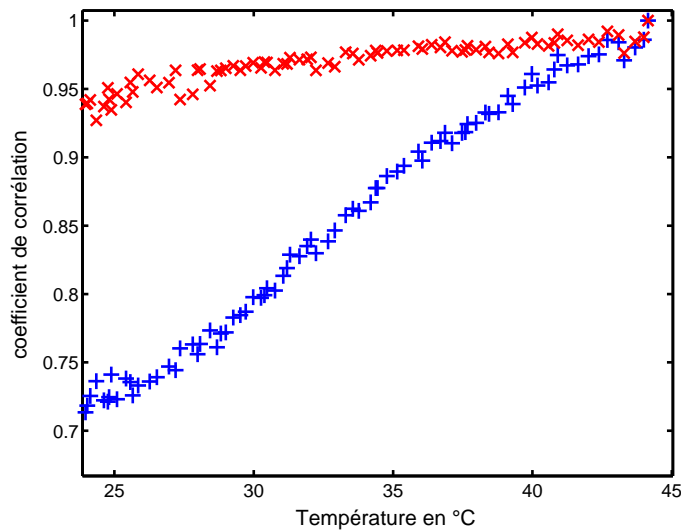


FIG. 5.13 : Expérience dans une barre d'acier inoxydable : coefficients de corrélation de la réponse impulsionnelle à 44.1°C avec la réponse à T°C, en fonction de T, avec les signaux bruts (+), ou après dilatation par le coefficient adéquat (x).

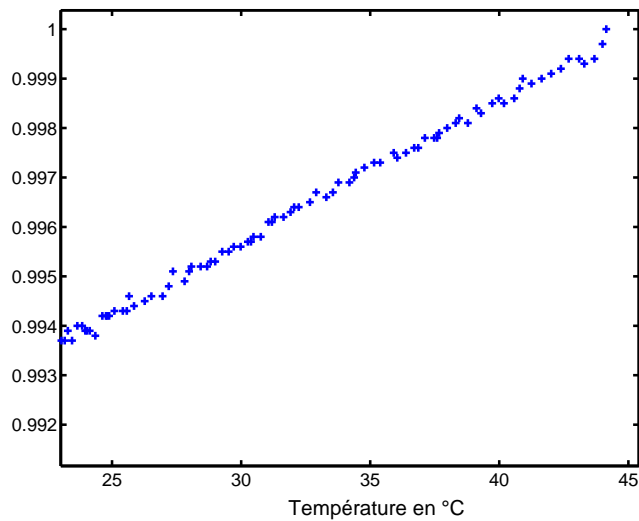


FIG. 5.14 : Coefficients de dilatation appliqués à la réponse impulsionnelle à T°C (dans l'expérience sur une barre d'acier inoxydable) afin de se rapprocher de la réponse de référence à 44.1°C.

Nous avons ensuite testé des plaques de différents matériaux. Tout d'abord, une plaque de Plexiglas de 1 cm d'épaisseur, et de 11 cm par 18 cm de côté a été utilisée. La figure 5.15 représente les coefficients de corrélation de la réponse mesurée à 42°C avec la réponse mesurée à la température T, en fonction de T, sans traitement (signes plus), ou après compensation de



température (croix). Le niveau de corrélation obtenu alors est très proche de 1 : l'effet de la température a été très bien compensé.

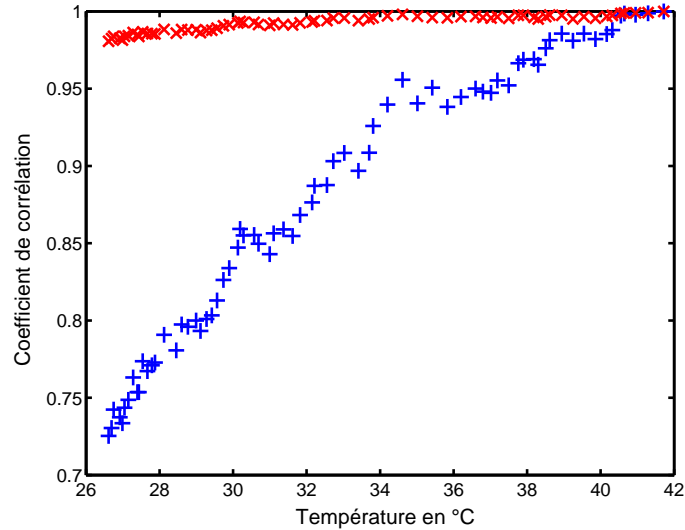


FIG. 5.15 : Expérience dans une plaque de Plexiglas : coefficient de corrélation de la réponse mesurée à 42°C avec la réponse mesurée à T°C, en fonction de T (+) ; même chose après dilatation appropriée des réponses à T°C (x).

La figure 5.16 montre les valeurs des coefficients de dilatation utilisés en fonction de la température : pour une variation de 16°C, le coefficient est de l'ordre de 0.935. Or la mesure de la vitesse de plaque en fonction de la température (voir paragraphe 5.2.1) donnait un quotient des vitesses de plaque égal à 0.9 (à 0.005 près à cause de l'incertitude de la mesure) pour 43°C de variation ; ainsi, pour un changement de température de 16°C, en supposant que les vitesses varient linéairement en fonction de la température, ce quotient vaut 0.96. La variation relative de la vitesse de plaque est donc de  $1 - 0.96 = 4\%$  alors que la valeur utilisée dans cette expérience est  $1 - 0.935 = 6.5\%$ . Nous pouvons donc considérer que le coefficient de compensation de température est bien, comme prévu par la théorie, de l'ordre de grandeur du quotient des vitesses de plaque.

Notons enfin que, comme dans l'expérience sur la barre d'acier (figure 5.12), lorsque la température croît, les signaux se dilatent dans le domaine temporel (et le spectre est contracté).

L'une des applications de la localisation par corrélation consiste à utiliser les vitres ou les glaces comme objets interactifs ; c'est pourquoi nous nous sommes intéressés à une plaque de verre de 0.8 cm par 7 cm et par 16 cm. La figure 5.17 montre comme précédemment les coefficients de corrélation entre la réponse impulsionnelle à 54°C et la réponse à la température T, lorsque T

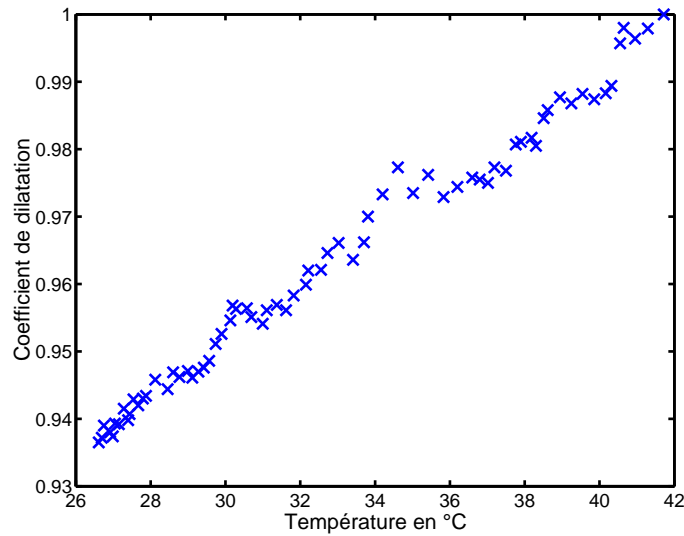


FIG. 5.16 : Coefficients de dilatation utilisés sur les signaux temporels pour compenser l'effet de la température dans l'expérience de la figure 5.15, en fonction de la température à laquelle le signal a été mesuré.

varie. Le niveau de corrélation reste très élevé : il est supérieur à 0.97 après 25°C de variation. Ceci est en bon accord avec les mesures de la partie 5.2.1 : le quotient des vitesses de plaque varie beaucoup moins dans le verre que dans les autres matériaux (il en est de même pour la dilatation volumique).

Ainsi, le verre est un milieu idéal : aucune compensation de température n'est nécessaire ! Remarquons que, comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3, sans l'atténuation de l'onde au cours du temps, la décorrélation serait beaucoup plus élevée et nous ne pourrions probablement pas, même dans le verre, faire l'économie d'une telle compensation.

Enfin, une dernière expérience dans une petite plaque d'acier inoxydable permet de voir les limites de cette technique de compensation de la température. Cette expérience a été menée dans une plaque d'acier inoxydable de 10 cm de large, 15 cm de long et 2 mm d'épaisseur. La figure 5.18 montre les coefficients de corrélation entre la réponse impulsionnelle à 42.2°C et la réponse à la température  $T$ , en fonction de  $T$ , calculés soit à partir des signaux bruts (signes plus), soit à partir des signaux ayant subi la compensation de température (croix). Comme nous pouvons le constater, compenser l'effet de la température par une contraction ne donne pas d'aussi bons résultats dans ce cas : après une variation de température de 14°C, le coefficient de corrélation initial est de 0.92 tandis qu'après compensation de l'effet de température, le coefficient de corrélation est de 0.94.

L'une des hypothèses que nous pouvons avancer pour expliquer ce résultat est la suivante :

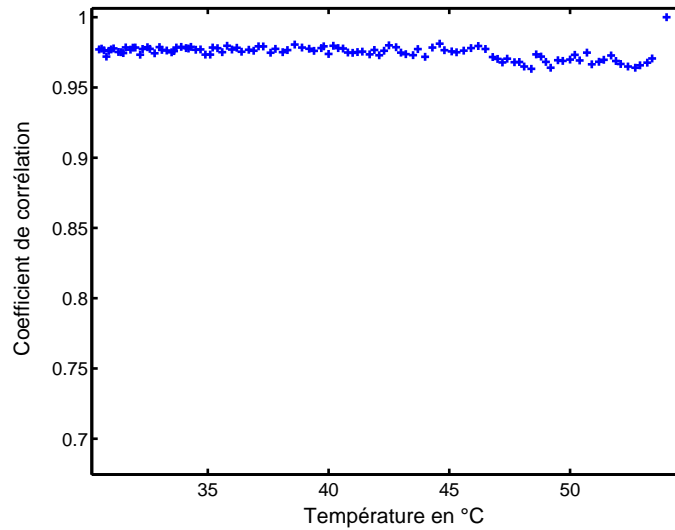


FIG. 5.17 : Expérience dans une plaque de verre : coefficients de corrélation entre la réponse à  $54^{\circ}\text{C}$  et la réponse à  $T^{\circ}\text{C}$ , en fonction de  $T$ . Le niveau de corrélation reste très élevé, même après une variation de température de  $25^{\circ}\text{C}$ .

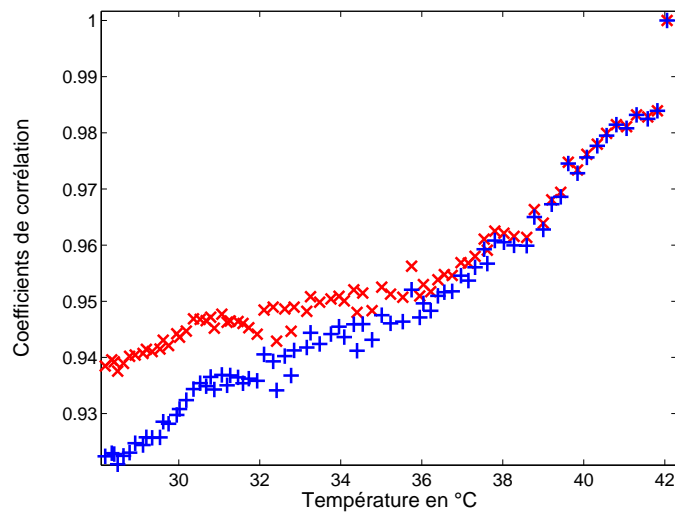


FIG. 5.18 : Coefficients de corrélation entre la réponse à  $42.2^{\circ}\text{C}$  et la réponse à  $T^{\circ}\text{C}$ , en fonction de  $T$  : expérience dans une plaque d'acier inoxydable, avec les signaux bruts (+), ou avec compensation de la température (x).

malgré une très forte réverbération (presque 100 ms), à cause des petites dimensions de la plaque, le spectre est quasiment continu : ainsi, le modèle théorique modal ne peut être appliqué pour décrire ce cas. Par ailleurs, si l'effet de la dilatation thermique n'est pas négligeable devant celui des variations de vitesse de plaque, le premier modèle théorique n'est pas non plus valable. Il se pourrait alors que les réponses impulsionnelles n'évoluent pas aussi simplement sous la forme d'une dilatation temporelle par un coefficient constant.

Cependant, un niveau de corrélation de l'ordre de 0.94 est suffisant pour continuer à localiser les impacts à l'aide de la même bibliothèque de signaux.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet d'une variation de température sur la technique de localisation d'impacts à la surface de plaques. Pour cela, par une recherche bibliographique complétée par des mesures expérimentales, nous nous sommes intéressés à la dépendance en température des paramètres caractéristiques du milieu (vitesses des ondes de volume, vitesse de plaque et masse volumique). Puis nous avons développé un modèle théorique permettant de rendre compte de la température lors de la propagation de l'onde  $A_0$  à basse fréquence, mais en négligeant la dilatation volumique de la plaque. Nous avons ainsi vu que les réponses impulsionnelles étaient simplement dilatées lorsque la température varie. Une seconde approche théorique a permis de montrer que les fréquences propres de vibration d'une plaque en flexion sont également contractées lors d'un changement de température, et ce même lorsque les variations de volume de la plaque ne sont pas négligeables. Lorsqu'il est possible de négliger la variation de volume, le coefficient de dilatation obtenu dans chacune de ces approches est bien le même.

Des simulations utilisant le code numérique développé au chapitre 3 ont ensuite été menées. Elles ont permis de valider ces résultats théoriques en négligeant la variation de volume avec la température. Nous avons pu également comprendre l'importance de l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation sur la valeur quantitative du coefficient de corrélation entre deux mêmes réponses impulsionnelles obtenues à deux températures différentes.

Enfin, des expériences par interféromètre laser ont été réalisées sur des barres et des plaques de divers matériaux. Nous avons pu en déduire que le matériau idéal est le verre, car pour des changements de température de l'ordre de ceux que subirait une plaque dans la vie courante, le degré de corrélation entre réponses impulsionnelles reste suffisamment élevé pour qu'aucune compensation ne soit nécessaire. Cependant, dans des milieux comme le Plexiglas, où les vitesses changent fortement avec la température, il est possible de compenser cet effet par une contraction des réponses impulsionnelles.

Ainsi, bien que la localisation par corrélation repose sur l'hypothèse fondamentale d'invariance du milieu entre l'étape d'apprentissage et l'étape d'utilisation, nous avons montré que dans les plaques sollicitées en flexion, des variations de température de l'ordre de 20°C n'empêchent pas cette technique de localiser les impacts avec succès.

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons poursuivi l'étude du Retournement Temporel en milieu réverbérant. Nous nous sommes en effet intéressés d'une part à la focalisation d'ondes acoustiques audibles de longue durée (plusieurs secondes) à caractère aléatoire dans une chambre réverbérante, et d'autre part nous avons étudié la localisation d'impacts à la surface de plaques minces réverbérantes par corrélation.

Concernant cette première application, nous avons observé à la fois en simulation et en expérience une focalisation spatiale des signaux. Le lien théorique entre Retournement Temporel impulsionnel et RT de signaux aléatoires gaussiens a été établi, et nous a permis d'affirmer que le contraste ne dépend que du nombre d'éléments du Miroir à Retournement Temporel, ce qui a été confirmé expérimentalement. Nous nous sommes également intéressés à la robustesse de la focalisation lorsque la réciprocité du milieu est brisée entre les deux étapes du RT : lorsque la température change de quelques degrés Celsius, le rapport signal sur bruit chute considérablement. Enfin, la qualité de la focalisation dépend très peu du temps de réverbération du milieu. Ces résultats pourraient être appliqués à l'imagerie de sources sonores dans un environnement réverbérant.

Nous avons ensuite abordé l'étude de la localisation d'impacts à la surface de plaques réverbérantes. La technique utilisée, reposant sur le principe de comparaison des signatures acoustiques par corrélation, peut être qualifiée de Retournement Temporel passif. L'analogie avec le RT, ainsi qu'une étude approfondie de la nature des ondes excitées par un impact à la surface de plaques, nous ont permis de comprendre les capacités de cette techniques en terme de résolution et contraste. L'interaction de l'onde majoritairement présente, à savoir l'onde de Lamb  $A_0$ , avec les bords de la plaque a également été étudiée.

Un code de simulation numérique de la propagation de ce mode par différences finies dans l'approximation faible produit fréquence par épaisseur a été développé. Il permet de simuler de façon qualitative la propagation dans une plaque avec un gain de temps et de mémoire vive considérable.

Enfin, l'influence des variations de température sur la technique de localisation par corrélation a été étudiée numériquement, théoriquement et expérimentalement. Nous avons montré qu'un changement de température entraîne une simple dilatation des réponses impulsionnelles, que l'on peut aisément compenser. Les matériaux tels que le verre ou les métaux sont cependant suffisamment stables pour qu'un changement d'une vingtaine de degrés Celsius n'entraîne pas de décorrélation sensible des réponses impulsionnelles. En revanche, dans le Plexiglas, une perte de corrélation de l'ordre de 30% a pu être compensée avec succès, comme prévu par la théorie. Grâce à ces travaux, nous avons donc montré que la localisation d'impacts par corrélation est possible en extérieur.

# Bibliographie

- [1] M. Fink. Time reversed acoustics. *Physics Today*, 50(3) :34–40, 1997.
- [2] D. Cassereau and M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields-part III : theory of the closed Time -Reversal cavity. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Control*, 39(5) :579–592, 1992.
- [3] J. De Rosny. *Milieux réverbérants et réversibilité*. thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 2000.
- [4] G.Barton. *Elements of Green's Functions and Propagation*. Oxford Science publications.
- [5] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Limits of time reversal focusing through multiple scattering : Long range correlation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107 :2987, 2000.
- [6] P. Roux, B. Roman, and M. Fink. Time-reversal in an ultrasonic waveguide. *Apl. Phys.Lett.*, 70(14) :1811–1813.
- [7] C. Draeger and M. Fink. One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2D-silicon cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :407–410, 1997.
- [8] S. Yon, M. Tanter, and M. Fink. Sound focusing in rooms : The time reversal approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3) :1533–1543, 2003.
- [9] G.F. Edelmann, T. Akal, W.S. Hodgkiss, S. Kim, W.A. Kuperman, and H.C. Song. An initial demonstration of underwater acoustic communication using time reversal. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 27 :602–609, 2002.
- [10] M. Campillo and A. Paul. Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299 :547–549, 2003.
- [11] R.L. Weaver and O.I. Lobkis. On the emergence of the greens function in the correlations of a diffuse field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :3011–3017, 2001.
- [12] O.I. Lobkis and R.L. Weaver. Ultrasonics without a source, thermal fluctuation correlations at MHz frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :134301, 2001.
- [13] B.A.Van Tiggelen. Green function retrieval and time-reversal in a disordered world. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :24, 2003.



- [14] A. Derode, E. Larose, M. Campillo, and M. Fink. How to estimate the green's function of a heterogeneous medium between two passive sensors ? Application to acoustic waves. *App. Phys. Lett.*, 83 :3054–3056, 2003.
- [15] P. Blomgren, G. Papanicolaou, and H. Zhao. Super-resolution in time-reversal acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :203–248, 2002.
- [16] Ce code a été développé au laboratoire Ondes et Acoustique par Mickael Tanter.
- [17] C. Draeger and M. Fink. One-channel time-reversal in chaotic cavities : Theoretical limits. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105 :611–617, 1999.
- [18] A. Chaigne. *Ondes acoustiques*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001. ISBN 2-7302-0840-2.
- [19] M.Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [20] M. Fink and J. De Rosny. Time-reversed acoustics in random media and in chaotic cavities. *Nonlinearity*, 15 :R1–R18, 2002.
- [21] C. Eckart. The theory of noise in continuous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25 :195, 1953.
- [22] R.L. Weaver and O.I. Lobkis. Temperature dependence of diffuse field phase. *Ultrasonics*, 38 :491–494, 2000.
- [23] S. Yon. *Contrôle du champ acoustique en milieu réverbérant et applications à la communication*. thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 2001.
- [24] Site internet de la société Elotouch : [www.elotouch.com.fr](http://www.elotouch.com.fr).
- [25] Site internet de la société Intelligent Vibrations : <http://www.i-vibrations.com>.
- [26] R.K. Ing, N. Queieffin, S. Catheline, and M. Fink. Tangible interactive interface using acoustic time reversal process. *Appl. Phys. Letters*, Novembre 2005.
- [27] K.F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Dover publications,INC,New York, 1991. page 235.
- [28] K.F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Dover publications,INC,New York, 1991. page 246 et suite.
- [29] A.W. Leissa. The free vibration of rectangular plates. *J. Sound Vib.*, 31(3) :257–293, 1973.
- [30] A.K. Mitchell and C.R. Hazell. A simple frequency formula for clamped rectangular plates. *J. Sound Vib.*, 118(2) :271–281, 1987.
- [31] D. Royer and E. Dieulesaint. Optical detection of sub-angstrom transient mechanical displacements. *Proceedings of the 1986 IEEE Ultrasonics Symposium*, page 527, 1986.

- [32] L.M. Brekhovskikh and O.A. Godin. *Acoustics of layered media*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. p.12.
- [33] B. Rafaely. Spatio-temporal correlation of a diffuse sound field. *J.Acoust.Soc.Am.*, 107(6) :3254–3258, Juin 2000.
- [34] D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides tome 1 Propagation libre et guidée*. Masson, 2000.
- [35] N. Quieffin. *Etude du rayonnement acoustique de structures solides : vers un système d'imagerie haute résolution*. thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 2004.
- [36] F. Vignon. *Focalisation d'ultrasons par retournement temporel et filtre inverse, application à l'échographie transcrânienne*. thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 2005.
- [37] P.J. Torvik. Reflection of wave trains in semi-infinite plates. *J.Acoust.Soc.Am.*, 41 :346–353, 1967.
- [38] M.J.S. Lowe and O. Diligent. Reflection of the fundamental lamb modes from the ends of plates. *Review of progress in QNDE*, Eds. D.O. Thomson et D.E. Chimenti, 20(A) :89–96, Plenum, New York, 2001.
- [39] O. Diligent, M.J.S. Lowe, E. Le Clézio, M. Castaings, and B. Hosten. Prediction and measurement of non propagating Lamb modes at the free end of a plate when the fundamental antisymmetric mode  $A_0$  is incident. *J.Acoust.Soc.Am.*, 113(6), Juin 2003.
- [40] IA. Viktorov. *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum, New York, 1967.
- [41] G. Ribay, D. Rovetta, S. Catheline, A. Sarti, and G. De Sanctis. Modelling wave propagation in thin plates for the localization of tactile interactions. *Proceedings of the International Congress on Sound and Vibration 13*, juillet 2006.
- [42] Ames. *Numerical methods for partial differential equations*. New York Academic Press, 1977. chapitre 2.
- [43] Press, Teukolsky, Vetterling, and Flannery. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, 1997. chapitre 19.
- [44] C.R. Hazell and A.K. Mitchell. Experimental eigenvalues and mode shapes for flat clamped plates. *Experimental Mechanics*, pages 209–216, 1986.
- [45] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique, tome 7 : Théorie de l'élasticité*. Editions MIR Moscou, 1988. en particulier pages 190 et suite.
- [46] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1) :31–38, 1951.

- [47] S. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41, series 6 :744–746, 1921.
- [48] C. Lambourg, A. Chaigne, and D. Matignon. Time-domain simulation of damped impacted plates.II. numerical model and results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109 (4) :1433–1447, avril 2001.
- [49] J.L. Rose. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press edition, 1999.
- [50] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method, tome 2 : solid mechanics*. Butterworth Heinemann, 2000.
- [51] A. Tourin, A. Derode, and M. Fink. Sensitivity to perturbations of a time-reversed acoustic wave in a multiple scattering medium. *Phys. Rev. Lett.*, 87(27) :274301, 2001.
- [52] O.I. Lobkis and R.L. Weaver. Coda-wave interferometry in finite solids : Recovery of p-to-s conversion rates in an elastodynamic billiard. *Phys. Rev. Lett.*, 90(25) :254302–1, 2003.
- [53] *Handbook of chemistry and physics*. CRC Press, 1977.
- [54] *Handbook of tables for applied engineering Science*. CRC, 1970.
- [55] *Handbook of chemistry and physics*. CRC Press, 2004-2005.
- [56] *Landolt-Börnstein : Numerical data and functional relationships in science and technology*. Springer-Verlag, 1966.
- [57] J.A. Garner and A.V. Granato. theory of the temperature dependence of second order elastic constants in cubic materials. *Physical Review B*, 1975.
- [58] J.F. Thomas Jr. Third-order elastic constants of aluminium. *Physical Review*, 175 :955–962, 1968.
- [59] K. Salama and C.K. Ling. The effect of stress on the temperature dependence of ultrasonic velocity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51, march 1980.
- [60] A. Paul, U.S. Ghosh, and C. Basu. Ultrasonic velocity and attenuation in pb-phosphate glass. *Journal of non-crystalline solids*, 221 :265–273, 1997.
- [61] B. Hartmann and J. Jarzynski. Immersion apparatus for ultrasonic measurements in polymers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(5) :1469–1477, 1974.
- [62] M. Soutif. *Vibrations Propagation Diffusion*. Dunod Université, 1970.
- [63] A.W. Leissa. *Vibration of plates*. Acoustical Society of America, 1993. chapitre 4.
- [64] M. Alfano and L. Pagnotta. Determining the elastic constants of isotropic materials by modal vibration testing of rectangular thin plates. *J. Sound Vib.*, pages 426–439, 2006.