Réalisation de métriques sur les surfaces compactes

Francois Fillastre

▶ **To cite this version:**

Francois Fillastre. Réalisation de métriques sur les surfaces compactes. Mathématiques [math]. Université de Neuchâtel; Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006. Français. NNT : . tel-00122383v2

HAL Id: tel-00122383

https://theses.hal.science/tel-00122383v2

Submitted on 12 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÉALISATION DE MÉTRIQUES SUR LES SURFACES COMPACTES

THÈSE

réalisée en cotutelle entre l'université de Neuchâtel et l'université de Paul Sabatier (Toulouse)
pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Discipline : Mathématiques

Présentée par

François FILLASTRE

Le 11 décembre 2006 à Neuchâtel

Devant le jury composé de

BAVARD Christophe	Rapporteur
BENAÏM Michel	Examinateur
BOILEAU Michel	Examinateur
COLBOIS Bruno	Directeur de thèse et Président du jury
SCHLENKER Jean-Marc	Directeur de thèse
TROYANOV Marc	Rapporteur

Université de Neuchâtel unine

FACULTE DES SCIENCES
Secrétariat-Décanat de la faculté
Rue Emile-Argand 11
CP 158
CH-2009 Neuchâtel

IMPRIMATUR POUR LA THESE

Réalisation de métriques sur les surfaces compactes

de M. François FILLASTRE

REALISEE EN COTUTELLE AVEC

L'UNIVERSITE DE TOULOUSE (F)

et

L' UNIVERSITE DE NEUCHATEL (CH)

FACULTE DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport des membres du jury

MM. B. Colbois (co-directeur de thèse),
J.-M. Schlenker (co-directeur de thèse, Toulouse)
M. Benaïm, M. Boileau (Toulouse),
C. Bavard (Bordeaux)
et M. Troyanov (EPF Lausanne)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 9 janvier 2007

Le doyen:
J.-P. Derendinger

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
FACULTE DES SCIENCES
Secrétariat-décanat de la faculté
Rue Emile-Argand 11 - CP 158
CH-2009 Neuchâtel

Téléphone : +41 32 718 21 00 Fax : +41 32 718 21 03 E-mail : secretariat.sciences@unine.ch www.unine.ch/sciences

Remerciements

Mes premiers remerciements vont évidemment à mes deux directeurs de thèse, Bruno Colbois et Jean-Marc Schlenker, qui m'ont tous les deux permis de faire cette thèse, dans tous les sens du terme. Ils ont aussi fait preuve d'une patience incroyable pour que j'arrive à écrire correctement des mathématiques correctes : les pages qui suivent doivent montrer que leurs efforts n'ont pas été vains.

Je suis particulièrement heureux que Christophe Bavard et Marc Troyanov aient accepté de rapporter cette thèse, d'autant plus que certains de leurs travaux ont été une source d'inspiration pour les miens, que cela apparaisse ici ou ailleurs.

Je remercie Michel Benaïm et Michel Boileau d'avoir bien voulu faire partie du jury, en particulier ce dernier pour le trajet effectué.

La cotutelle est une expérience enrichissante et qui n'est pas administrativement insurmontable grâce à l'efficacité du service des relations internationales de l'Université Paul Sabatier.

Je tiens à remercier aussi les secrétaires des deux laboratoires et de l'école doctorale qui nous permettent de travailler dans des conditions optimales —et d'obtenir nos diplômes à temps, ainsi que les personnels administratifs et techniques des deux universités (réseaux informatiques, bibliothèques, entretien, etc.).

Je remercie aussi les chercheurs du C.N.R.S. concernés pour l'aide technique qu'ils offrent (Mathrice, Subversion, HAL, TEL etc.).

Et enfin tous mes collègues avec qui j'ai pu travailler (ou pas) en bonne intelligence.

Introduction

Un théorème bien connu d'A.D. Alexandrov dit que toute métrique sur la sphère, plate excepté en un nombre fini de points pour lesquels elle admet des singularités coniques de courbure positive, se réalise comme la métrique induite sur un polyèdre convexe[1] compact de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et ce polyèdre est unique, aux isométries globales près [Ale42].

Ce théorème peut servir par exemple à exprimer de façon simple la relation entre certains orbifolds hyperboliques réels [BG92] et certains orbifolds hyperboliques complexes [Thu98], voir [Fila].

Le but de ce travail est de généraliser le théorème d'Alexandrov à des surfaces de genre supérieur (en fait de genre > 1). Avant d'énoncer les résultats nous rappelons quelques définitions et le contexte habituel du problème. Ceux-là peuvent aussi se situer, selon les cas, dans des contextes plus généraux, qui seront indiqués tout au long du texte, voir en particulier les pages 92 et 107. On peut consulter [Sab92, Sch98a, Sch00, Sch03, Zeg05] pour des survols plus larges.

Présentation des résultats

Métriques sur les polyèdres compacts convexes

On note M_K^+ l'espace riemannien de dimension 3 simplement connexe (complet) de courbure constante K. Le $+$ indique que dans ces espaces les cônes (polyédraux) convexes sont de courbure positive, c'est-à-dire que l'angle autour du sommet est compris -strictement- entre 0 et 2π (section 1.4.1).

Soit P un polyèdre convexe compact de M_K^+.

La métrique induite sur P est isométrique à une métrique de courbure K sur la sphère $\mathbb{S}^2$, sauf en n points (correspondants aux sommets). La métrique au voisinage de ces n points est isométrique à la métrique induite sur le voisinage du sommet d'un cône convexe de M_K^+.

Une telle métrique est dite une *métrique (plate) à singularités coniques de courbure positive*. La question qui vient naturellement est : étant donné une telle métrique g sur la sphère, existe-t-il un polyèdre convexe (forcément dans M_K^+) tel que la métrique induite sur le polyèdre soit isométrique à g ? Si c'est le cas, on dit que le polyèdre *réalise* la métrique g. Si le polyèdre est unique modulo les isométries globales, on dit que la réalisation est *unique*. On a alors ces fameux résultats des années 1940/1950 (dans tout le texte, $K \in \{-1, 0, 1\}$) :

Théorème (Alexandrov)**.** *Une métrique de courbure K à singularités coniques de courbure positive sur la sphère se réalise comme un unique polyèdre convexe compact de M_K^+ (modulo les isométries globales).*

L'hypothèse de convexité est essentielle pour deux raisons : d'abord parce que sans elle on perd évidemment l'unicité, et ensuite, comme on le verra, les preuves reposent fortement dessus.

Courbures singulières négatives

Les métriques à singularités coniques de courbure positive étaient aussi parfois appelées *métriques polyédrales convexes*, car, comme on vient de le voir, la positivité de la courbure singulière est donnée

[1] Dans cette introduction, selon la confusion habituelle, le terme *polyèdre convexe* désigne soit une intersection de demi-espaces, soit le bord de cette intersection. Le contexte permet toujours de savoir facilement si l'on parle de l'un ou de l'autre.

par la convexité dans les espaces riemanniens. Mais cette appelation est rendue caduque par l'étude des polyèdres convexes dans les espaces lorentziens (c'est-à-dire des variétés munies d'une forme bilinéaire non-degénérée de signature $(1, n-1)$ sur leur tangent, voir section 3.1).

En effet, il est aussi possible de réaliser des métriques riemanniennes comme des métriques induites sur des hypersurfaces (polyédrales ou régulières) d'espaces lorentziens. L'exemple le plus connu est certainement la réalisation du plan hyperbolique comme une quadrique dans l'espace de Minkowski de dimension 3. Quand la métrique induite sur une hypersurface d'un espace lorentzien est riemannienne, on dit que l'hypersurface est de *type espace*.

Il y a trois espaces modèles lorentziens de dimension 3 : l'espace de Minkowski (de courbure 0), l'espace de Sitter (de courbure 1) et l'espace anti-de Sitter (de courbure -1). On les note M^-_K. Le K est la courbure sectionnelle, et le $-$ se rapporte au fait que, dans ces espaces, la courbure au sommet d'un cône (polyédral) convexe est négative (section 3.9).

On peut donc chercher à réaliser des métriques à singularités coniques à courbure *négative*. Le premier résultat en ce sens est

Théorème (Rivin–Hodgson, [Riv86, RH93])**.** *Une métrique à courbure* 1 *sur la sphère à singularités coniques de courbure négative (et dont la longueur des géodésiques contractiles est* $> 2\pi$*) se réalise comme un unique polyèdre convexe homéomorphe à la sphère dans l'espace de Sitter.*

On ne peut pas parler directement de polyèdres compacts car le deuxième groupe fondamental de l'espace de Sitter n'est pas trivial (voir page 36). La condition sur la longueur des géodésiques contractiles est typique de l'espace de Sitter, voir la section 5.3. Une métrique avec une telle condition sera dite *large* dans cette introduction.

De plus, d'après les formules de Gauss–Bonnet (voir la section 5.2), il n'existe pas d'autre métrique de courbure constante à singularités coniques de courbure de signe constant sur la sphère.

Genre supérieur

On se demande maintenant comment généraliser les résultats ci-dessus aux surfaces (compactes) de genre supérieur. Il faut d'abord bien définir la notion de réalisation. En effet, on imagine mal comment trouver un plongement convexe d'un tore dans un espace à courbure constante. En fait on va chercher un plongement isométrique (convexe) du revêtement universel de la surface.

On appelle un *polyèdre invariant* un couple (P, F), où P est un polyèdre de M^ϵ_K, $\epsilon \in \{-, +\}$, et F est un groupe discret d'isométries de M^ϵ_K tel que $F(P) = P$, et F agit librement sur P.

On dit que (P, F) *réalise une métrique* g (à singularités coniques) sur une surface S si la métrique induite sur P/F est isométrique à g. On retrouve bien la définition que l'on avait donnée dans le cas de la sphère, le groupe F est alors le groupe trivial. (Ces définitions sont aussi valables pour des surfaces lisses).

Maintenant nous supposons que le genre des surfaces est > 1 (le cas du tore sera évoqué plus loin).

Un groupe d'isométries (qui préservent l'orientation) de l'espace hyperbolique est dit *fuchsien* si il laisse globalement invariant un plan totalement géodésique, sur lequel il agit de façon cocompacte (sans points fixes). Une surface (ou un polyèdre) invariante sous l'action d'un groupe fuchsien est dite une *surface fuchsienne*. Le quotient d'une surface fuchsienne par le groupe fuchsien est alors homéomorphe à une surface compacte de genre > 1. Remarquons qu'un polyèdre fuchsien a un nombre infini de sommets, mais il n'y a qu'un nombre fini de sommets dans chaque domaine fondamental pour l'action du groupe fuchsien.

On étend de façon naturelle la définition aux espaces lorentziens : un groupe fuchsien est un groupe qui laisse invariant une surface hyperbolique ombilique contenue dans le cône-futur d'un point donné (voir la section 3.4 pour l'existence de telles surfaces) sur laquelle il agit de manière cocompacte — et on demande que les surfaces ou polyèdres fuchsiens soient bien sûr de type espace. De telles surfaces ont déjà été étudiées [Gro86, Lab92, LS00], voir plus bas pour certains résultats.

Énoncé des résultats

Comme on vient de le voir, le candidat idéal pour réaliser une métrique à singularités coniques sur une surface de genre > 1 est un polyèdre fuchsien convexe. On démontre d'abord le cas hyperbolique, ce qui occupe tout le chapitre 6 :

Théorème (6.1)**.** *Une métrique hyperbolique à singularités coniques de courbure positive sur une surface compacte de genre > 1 est réalisée par un unique polyèdre fuchsien convexe de l'espace hyperbolique (à isométries globales près).*

Ce chapitre correspond essentiellement à la prépublication [Filb].

Puis on démontre les cas lorentziens, ce qui occupe tout le chapitre 7 :

Théorème (7.1)**.** *i) Une métrique plate à singularités coniques de courbure négative sur une surface compacte de genre > 1 est réalisée par un unique polyèdre fuchsien convexe de l'espace de Minkowski.*
ii) Une métrique sphérique large à singularités coniques de courbure négative sur une surface compacte de genre > 1 est réalisée par un unique polyèdre fuchsien convexe de l'espace de Sitter.
iii) Une métrique hyperbolique à singularités coniques de courbure négative sur une surface compacte de genre > 1 est réalisée par un unique polyèdre fuchsien convexe de l'espace anti-de Sitter.

On trouve la partie *ii)* de ce théorème dans [Scha].

Toujours d'après les formules de Gauss–Bonnet, il n'existe pas d'autre métrique de courbure constante à singularités coniques de courbure de signe constant sur les surfaces compactes de genre > 1.

La partie *ii)* de ce théorème peut être énoncée d'une manière totalement hyperbolique (théorème 7.4 page 107), en utilisant une dualité naturelle entre l'espace hyperbolique et l'espace de Sitter (voir section 3.8.1).

La partie *ii)* de ce théorème peut aussi servir à montrer une généralisation du théorème d'Andreev [And70, RHD06] au genre supérieur, de la même façon que le théorème d'Andreev peut être déduit du théorème de Rivin–Hodgson [Hod92].

Méthode employée

Méthode d'Alexandrov

La méthode employée ici est dite *méthode d'Alexandrov*, qui a déjà été utilisée pour montrer de nombreux résultats, y compris la plupart de ceux cités dans cette introduction.

Montrer un théorème de réalisation revient à montrer que l'application "métrique induite", qui va naturellement d'un espace de polyèdres à un espace de métriques, est une bijection. L'idée d'Alexandrov est de munir chacun de ces espaces d'une topologie adéquate, puis, avec des arguments topologiques, de montrer que l'application "métrique induite" est un homéomorphisme. Dans la plupart des cas les choses suivantes sont montrées :

1) l'espace des polyèdres et celui des métriques considérées sont des variétés de même dimension ;
2) l'application "métrique induite" est un homéomorphisme local, ce qui est équivalent à un énoncé de rigidité infinitésimale des polyèdres, voir plus bas ;
3) cette application est propre ;
4) l'espace des polyèdres est connexe et celui des métriques est connexe et simplement connexe.

Ces quatre faits impliquent que l'application "métrique induite" est un homéomorphisme.

Il y a quelques légères entorses à ce programme dans certains cas, par exemple on ne montre pas (ou : on ne sait pas montrer) la connexité et la simple connexité de l'espace des métriques sphériques larges à singularités coniques à courbure singulière négative.

Applications de Pogorelov

D'une manière générale, le point délicat est de montrer la rigidité infinitésimale (voir section 2.1 pour les définitions) des polyèdres, ce qui donnera l'injectivité locale de l'application "métrique induite".

L'étude de la rigidité infinitésimale est considérablement simplifiée par l'existence des *applications de Pogorelov infinitésimales* (section 4.2), qui permettent de ramener des problèmes de déformation (infinitésimale) de surfaces dans les espaces à courbures constantes à des problèmes dans des espaces plats (notamment l'espace euclidien), pour lesquels les résultats sont plus faciles à obtenir.

Il y a plusieurs façons de se servir de ces applications dans notre cas (voir page 97 et page 109). Au final on obtient une sorte de "va et vient" entre les différents résultats de rigidité infinitésimale, et je ne pense pas qu'on puisse dégager un "chemin" qui soit meilleur qu'un autre dans la façon d'enchaîner les preuves.

Il existe aussi des applications de Pogorelov globales (section 4.1) qui donnent des résultats de rigidité globale. Ce type de résultat est beaucoup plus puissant, de notre point de vue, que les résultats obtenus en utilisant des applications de Pogorelov infinitésimales, puisqu'ils montrent l'injectivité de l'application "métrique induite" — notamment, cela permet de se passer de prouver la simple connexité des ensembles de métriques. Ces applications globales semblent avoir été sous-utilisées jusqu'à présent. Il est vrai qu'elles sont moins maniables que leurs analogues infinitésimales. On verra plus bas des applications potentielles.

Pour aller plus loin

Métriques à singularités coniques sur le tore - Vers un résultat général

On sait que la métrique induite sur une horosphère de l'espace hyperbolique est euclidienne. Il en est de même pour l'espace de Sitter, dans lequel on peut définir des horosphères de manière "duale" au cas hyperbolique. Un groupe d'isométries agissant de manière cocompacte sur une horosphère (sans point fixe) sera dit *parabolique*. Une *surface parabolique* est une surface (ou un polyèdre) invariante sous l'action d'un groupe parabolique. Il vient que le quotient d'une surface parabolique par le groupe parabolique est une surface homéomorphe au tore.

Il est raisonnable de penser que

Énoncé 1. *Une métrique hyperbolique sur le tore à singularités coniques de courbure positive est réalisée par un unique polyèdre parabolique convexe de l'espace hyperbolique.*

Énoncé 2. *Une métrique sphérique large sur le tore à singularités coniques de courbure négative est réalisée par un unique polyèdre parabolique convexe de l'espace de Sitter.*

Et les formules de Gauss–Bonnet indiquent qu'il n'y a pas d'autres métriques de ce type sur le tore.

Si ces énoncés sur le tore sont montrés, alors on aura le résultat général suivant, pour $K \in \{-1, 0, 1\}$:

Énoncé général 1. *Toute métrique de courbure K à singularités coniques à courbure de signe $\epsilon \in \{-, +\}$ (large si $K = 1, \epsilon = -$) sur une surface compacte peut être réalisée par un unique polyèdre convexe de M^{ϵ}_{K}, invariant sous l'action de la représentation du groupe fondamental de la surface dans un groupe d'isométries de dimension* 3.

Les images des représentations sont triviales pour le genre 0, paraboliques pour le genre 1 et fuchsiennes pour le genre > 1.

On résume ces différents énoncés dans le tableau suivant.

FIG. 1 – Réalisations de métriques à singularités coniques sur les surfaces compactes par des polyèdres convexes (les métriques sont supposées larges pour $(K, \epsilon) = (1, -)$).

Métrique			Polyèdre		Référence
g	K	ϵ	Type	espace ambiant	
0	0	+	compact	Euclidien	Alexandrov
0	1	+	compact	Sphère	Alexandrov
0	−1	+	compact	Hyperbolique	Alexandrov
0	1	−	"compact"	de Sitter	[RH93]
1	−1	+	parabolique	Hyperbolique	non prouvé
1	1	−	parabolique	de Sitter	non prouvé
> 1	−1	+	fuchsien	Hyperbolique	Théorème 6.1 page 92, [Filb]
> 1	0	−	fuchsien	Minkowski	Théorème 7.1 page 106
> 1	−1	−	fuchsien	Anti-de Sitter	Théorème 7.1 page 106
> 1	1	−	fuchsien	de Sitter	[Scha] ; Théorème 7.1 page 106

Un cas étendu : métriques hyperboliques complètes

Un *polyèdre généralisé* de l'espace hyperbolique est, dans le modèle de la boule de Klein, un polyèdre dont les sommets sont dans la boule ou en-dehors de la boule (éventuellement sur la sphère) de telle sorte que toutes les arêtes rencontrent l'intérieur de la boule. La métrique induite sur (la partie hyperbolique) de tels polyèdres est une métrique hyperbolique à singularités coniques (pour les sommets dans la boule), à cusps (pour les sommets sur la sphère) et à bouts hyperboliques d'aire infinie (pour les faces ayant leurs sommets en-dehors de la boule).

La première généralisation dans ce sens est

Théorème (Rivin, [Riv96])**.** *Une métrique hyperbolique à n cusps sur la sphère est réalisée par un unique polyèdre (forcément convexe) de l'espace hyperbolique ayant ses n sommets sur le bord à l'infini.*

Les métriques sur les polyèdres ayant (un nombre fini de) sommets à l'extérieur de la boule (ils sont dits *hyperidéaux*) ont été étudiés, notamment dans [BB02], mais sous le point de vue de leur caractérisation par leurs angles dièdres, et non pas par leur métrique induite. A ma connaissance il n'existe pas d'énoncé sur la détermination par la métrique induite des polyèdres généralisés convexes de l'espace hyperbolique ayant un nombre fini de sommets rédigé en tant que tel. Mais on retrouve ce résultat comme cas particulier des théorèmes de [Sch98b].

On peut espérer obtenir le résultat général suivant :

Énoncé général 2. *Une métrique hyperbolique complète (i.e. avec des singularités coniques de courbure positive, des cusps et des bouts hyperboliques d'aire infinie) sur une surface est réalisée par un unique polyèdre généralisé convexe de l'espace hyperbolique, invariant sous l'action de la représentation du groupe fondamental de la surface dans un groupe d'isométries de dimension* 3*.*

Les images des représentations sont triviales pour le genre 0, paraboliques pour le genre 1 et fuchsiennes pour le genre > 1.

Certaines parties de l'énoncé 2 ont déjà été montrées pour le genre > 1, par des techniques différentes de celles employées ici, voir l'annexe A.

On montre aussi dans cette annexe la partie de cet énoncé qui concerne les métriques hyperboliques surfaces de genre > 1 ayant des singularités coniques et des cusps. En particulier on obtient un énoncé de réalisation pour les métriques hyperboliques n'ayant que des cusps.

On présente aussi (théorème A.8 page 129) un énoncé "dual" de l'énoncé hyperbolique à cône et à cusps dans l'espace de Sitter (genre > 1), qui avait déjà été demontré dans [Scha, Rou04].

De plus, en utilisant le *i)* du théorème 7.1 et une application de Pogorelov globale, on obtient la partie "unicité" de l'énoncé général 2, pour le genre > 1.

Métriques lisses

Dans un espace riemannien, la courbure extrinsèque d'une surface (lisse) strictement convexe est strictement positive. Donc, d'après la formule de Gauss, une surface strictement convexe dans M_K^+ est à courbure sectionnelle $> K$. Si de plus la surface est compacte dans M_K^+, la réciproque est donnée par :

Théorème (Alexandrov)**.** *Une métrique à courbure $> K$ sur la sphère se réalise de façon unique comme une surface compacte strictement convexe de M_K^+.*

Dans un espace lorentzien M_K^-, la courbure de Gauss d'une surface (lisse de type espace) strictement convexe est toujours strictement positive, mais la formule de Gauss lorentzienne indique que sa courbure sectionnelle est $< K$. Le premier résultat qui généralise le théorème d'Alexandrov aux espaces lorentziens est (il peut se voir comme l'analogue lisse du théorème de Rivin–Hodgson)

Théorème (Schlenker, [Sch96])**.** *Une métrique large à courbure < 1 sur la sphère se réalise de façon unique comme une surface (fermée de type espace) strictement convexe de l'espace de Sitter.*

Et, à cause des forumles de Gauss–Bonnet, il n'y a pas d'autres métriques sur la sphère du type de celles décrites dans les deux théorèmes au-dessus.

Les surfaces fuchsiennes ont aussi été étudiées, ce qui donne un analogue lisse du théorème 7.1 :

Théorème (Labourie–Schlenker, [LS00])**.** *i) Une métrique à courbure < 0 sur une surface compacte de genre > 1 se réalise de façon unique comme une surface fuchsienne strictement convexe de l'espace de Minkowski.*
ii) Une métrique large à courbure < 1 sur une surface compacte de genre > 1 se réalise de façon unique comme une surface fuchsienne strictement convexe de l'espace de Sitter.
iii) Une métrique à courbure < -1 sur une surface compacte de genre > 1 se réalise de façon unique comme une surface fuchsienne strictement convexe de l'espace anti-de Sitter.

Le cas hyperbolique (*i.e.* l'analogue lisse du théorème 6.1) n'a encore jamais été rédigé à ma connaissance, mais il est démontré dans [Sch06] comme cas particulier d'un résultat beaucoup plus général sur les variétés hyperboliques à bords convexes (voir page 92).

Le principe général des preuves des énoncés lisses est analogue au cas polyédral (en particulier on cherche à montrer la rigidité infinitésimale des surfaces). Une différence est que les espaces qui interviennent (par exemple les espaces de métriques) sont de dimension infinie, ce qui complique un peu les arguments topologiques.

Remarquons que les preuves de rigidités (infinitésimales) qui sont données ici sont valables aussi pour les surfaces lisses.

Comme dans le cas polyédral, il est raisonnable de penser que

Énoncé 3. *Une métrique à courbure > -1 sur le tore se réalise de façon unique comme une surface parabolique strictement convexe de l'espace hyperbolique.*

Énoncé 4. *Une métrique large à courbure < 1 sur le tore se réalise de façon unique comme une surface parabolique strictement convexe de l'espace de Sitter.*

Les horosphères fournissent des exemples de réalisation pour les métriques plates. Si on utilise des applications de Pogorelov globales pour montrer la rigidité dans le cas du tore, le fait d'obtenir immédiatement l'injectivité de l'application "métrique induite" peut peut-être éviter certains des problèmes de topologie évoqués au-dessus.

Si ces deux résultats sur le tore étaient démontrés, on obtiendrait le résultat général suivant, pour $K \in \{-1, 0, 1\}$:

Énoncé général 3. *Toute métrique de courbure k telle que $\epsilon k > \epsilon K$, $\epsilon \in \{-, +\}$, (large si $K = 1, \epsilon = -$) sur une surface compacte peut être réalisée par une unique surface strictement convexe de M_K^ϵ, invariante sous l'action de la représentation du groupe fondamental de la surface dans un groupe d'isométries de dimension* 3*.*

Les images des représentations sont triviales pour le genre 0, paraboliques pour le genre 1 et fuchsiennes pour le genre > 1.

On résume ces différents énoncés dans le tableau suivant.

FIG. 2 – Réalisations de métriques lisses sur les surfaces compactes par des hypersurfaces strictement convexes (les métriques sont supposées larges pour $(K, \epsilon) = (1, -)$). Dans le tableau, pour plus de visibilité, pour les valeurs de ϵ, on remplace $+$ par $>$ et $-$ par $<$.

Métrique			Hypersurface		Référence
g	ϵ	K	Type	espace ambiant	
0	> 0		compacte	Euclidien	Alexandrov
0	> 1		compacte	Sphère	Alexandrov
0	> -1		compacte	Hyperbolique	Alexandrov
0	< 1		"compacte"	de Sitter	[Sch96]
1	> -1		parabolique	Hyperbolique	non prouvé
1	< 1		parabolique	de Sitter	non prouvé
> 1	> -1		fuchsienne	Hyperbolique	conséquence de [Sch06]
> 1	< 0		fuchsienne	Minkowski	[LS00]
> 1	< -1		fuchsienne	Anti-de Sitter	[LS00]
> 1	< 1		fuchsien	de Sitter	[LS00]

Métriques lorentziennes sur les surfaces

Quand on a introduit les polyèdres généralisés, on a regardé la métrique induite uniquement sur la partie hyperbolique du polyèdre. Or il se trouve que, dans le modèle de Klein, l'extérieur de la boule est un modèle de l'espace de Sitter. On peut ainsi regarder la métrique induite sur des polyèdres de $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique hyperbolique-de Sitter (voir section 3.7). Ces métriques sont assez délicates à définir, ne serait-ce que parce qu'elles peuvent être en partie riemanniennes et en partie lorentziennes. On peut alors chercher des théorèmes de réalisation pour de telles métriques. C'est ce qui a été fait dans [Sch98b] pour les polyèdres homéomorphes à la sphère.

Pour le genre supérieur (> 1), il est possible d'étendre la définition de polyèdre fuchsien généralisé en enlevant la condition qui dit que les arêtes doivent rencontrer la boule. Pour ces polyèdres, le théorème qui donne l'unicité dans l'énoncé général 2 (à savoir le théorème A.1 page 125) donne aussi l'unicité de la métrique induite pour de tels polyèdres.

On pourrait aussi chercher à étudier une généralisation de la définition de polyèdre fuchsien dans l'espace de Minkowski à des polyèdres qui ne sont pas forcément de type espace — comme cela a été fait pour les polyèdres ayant un nombre fini de sommets dans [Sch01], mais on a aucun résultat de rigidité *a priori* pour ce type de cas.

Méthode variationnelle

Il existe une méthode différente de celle d'Alexandrov pour montrer des résultats de réalisation de métriques.

L'idée est de partir d'une triangulation géodésique d'une métrique à singularités coniques (les sommets de la triangulation sont exactement les points singuliers) et de construire un prisme à partir de chacun de ces triangles dans un espace M^ϵ_K adéquat. Si ces prismes sont recollés deux à deux le long des faces correspondantes, il sera obtenu une "coiffe convexe généralisée", ayant une singularité autour de chacune des arêtes de recollement. Si les courbures de ces singularités sont nulles, alors la métrique est réalisable (car la coiffe convexe généralisée peut alors se plonger dans M^ϵ_K).

Il suffit donc d'étudier la valeur de ces courbures singulières en fonction de la variation de la "hauteur" des prismes. Cette méthode vient des travaux de Volkov (voir les annexes de [Ale05]), qui a été considérablement améliorée dans [BI, Izm] par l'introduction d'une fonctionnelle, dont les dérivées partielles sont les courbures singulières.

Or il semble que dans le cas des métriques sur le tore, cette fonctionnelle est concave et l'ensemble des hauteurs convexe, ce qui amènerait directement à l'existence et l'unicité de la métrique.

Table des matières

I Rappels et outils de base **15**

1 Géométrie des surfaces **16**
1.1 Géométrie riemannienne . . . 16
1.2 Espaces convexes . . . 18
1.2.1 Surfaces lisses . . . 18
1.2.2 Polyèdres . . . 19
1.3 Géométrie de la sphère . . . 20
1.3.1 Métrique canonique de la sphère . . . 20
1.3.2 Un modèle projectif de la sphère de dimension 3 . . . 21
1.3.3 Dualité polaire en dimension 2 . . . 22
1.3.4 Dualité polaire en dimension 3 . . . 23
1.4 Polygones sphériques et polyèdres . . . 24
1.4.1 Cônes convexes . . . 24
1.4.2 Métrique duale d'un polyèdre . . . 24

2 Déformations **25**
2.1 Dans $\mathbb{R}^3$ . . . 25
2.1.1 Déformations isométriques . . . 25
2.1.2 Analogue infinitésimal de la déformation isométrique . . . 26
2.1.3 Le champ de rotation . . . 27
2.1.4 Déformations de polyèdres . . . 28
2.1.5 Rigidité infinitésimale des coiffes convexes polyédrales qui peuvent avoir un nombre infini de sommets s'accumulant sur le bord . . . 29
2.2 Généralisation . . . 32

3 Géométries hyperbolique et lorentzienne **34**
3.1 Généralités . . . 34
3.2 Pseudo-sphères de l'espace de Minkowski . . . 35
3.3 Isométries, géodésiques, courbures . . . 36
3.4 Surfaces ombiliques . . . 38
3.4.1 Métrique dans les cônes futurs . . . 38
3.4.2 Fonctions coordonnées . . . 41
3.4.3 Métriques sur l'extérieur des cônes futurs . . . 42
3.5 Modèles projectifs . . . 43
3.5.1 Applications projectives de Klein . . . 43
3.5.1.1 Hyperbolique-euclidien . . . 43
3.5.1.2 De Sitter-euclidien . . . 44
3.5.2 Applications projectives de Minkowski . . . 45
3.5.2.1 De Sitter-Minkowski . . . 45
3.5.2.2 Hyperbolique-Minkowski . . . 46
3.5.2.3 Anti-de Sitter-Minkowski centrale . . . 47
3.5.2.4 Anti-de Sitter-Minkowski duale . . . 48

3.6 Ensembles convexes . . . 49
3.7 La distance hyperbolique-de Sitter . . . 49
3.8 Dualités . . . 52
3.8.1 La dualité hyperbolique-de Sitter . . . 52
3.8.1.1 Pour les polygones . . . 53
3.8.1.2 Pour les polyèdres . . . 54
3.8.1.3 Pour les surfaces lisses . . . 55
3.8.2 L'autodualité de l'espace anti-de Sitter . . . 56
3.9 Cônes convexes . . . 57

4 Les applications de Pogorelov **58**
4.1 Applications de Pogorelov globales . . . 58
4.1.1 Sphère-Euclidien . . . 58
4.1.1.1 Distances . . . 59
4.1.1.2 Géodésiques . . . 59
4.1.1.3 Convexité . . . 60
4.1.1.4 Cas des polyèdres . . . 63
4.1.2 De l'espace Hyperbolique-de Sitter dans un espace plat . . . 64
4.1.2.1 Dans l'espace euclidien . . . 64
4.1.2.2 Dans l'espace de Minkowski . . . 67
4.2 Applications de Pogorelov infinitésimales . . . 68
4.2.1 Dans l'espace euclidien . . . 68
4.2.1.1 Hyperbolique-Euclidien . . . 68
4.2.1.2 De Sitter-Euclidien . . . 71
4.2.1.3 Sphère-Euclidien . . . 72
4.2.2 Dans l'espace de Minkowski . . . 73
4.2.2.1 Hyperbolique-Minkoswki . . . 73
4.2.2.2 De Sitter-Minkowski . . . 74
4.2.2.3 Anti-de Sitter-Minkowski . . . 75
4.2.3 Euclidien-Minkowski . . . 75
4.2.4 Les théorèmes de Darboux–Sauer et Volkov . . . 76
4.2.5 Cas polyédraux . . . 77

5 Ensembles de métriques **78**
5.1 Métriques lisses . . . 78
5.1.1 Rappels sur l'espace de Teichmüller . . . 78
5.1.2 Espace des métriques. . . . 80
5.2 Métriques à singularités coniques . . . 83
5.2.1 Définition . . . 83
5.2.2 Existence . . . 84
5.3 Particularités de l'espace de Sitter . . . 85
5.3.1 Longueurs des géodésiques . . . 85
5.3.2 Polyèdres idéaux . . . 86
5.4 Triangulations . . . 87
5.4.1 Définition et existence . . . 87
5.4.2 Déscription locale des ensembles de métriques à singularités coniques . . . 89

II Realisation of metrics **91**

6 Metrics with posititive singular curvatures in genus > 1 **92**
6.1 Definitions and statements . . . 92
6.1.1 Fuchsian polyhedra . . . 94
6.2 Set of Fuchsian polyhedra . . . 101

7 Metrics with negative singular curvature in genus > 1 **106**
7.1 Fuchsian polyhedra in Lorentzian space-forms 106
7.1.1 Definitions and statements 106
7.1.2 Fuchsian infinitesimal rigidity 108
7.1.3 Set of Fuchsian polyhedra 116
7.2 Properness 119

A Complete hyperbolic metrics **125**
A.1 Definitions and rigidity 125
A.2 Realisation of finite area hyperbolic metrics 126
A.3 A dual statement 127
A.4 Proposition for a general statement 129

Index **130**

Bibliographie **133**

Première partie

Rappels et outils de base

Chapitre 1

Géométrie des surfaces

1.1 Géométrie riemannienne

Quelques définitions classiques de géométrie riemannienne sont d'abord rappelées [dC76, dC92, GHL90]. Pour la troisième forme fondamentale, on renvoie à [Spi79b].

Soit S une surface plongée dans une variété riemannienne M de dimension 3.

Connexion. La *connexion* (de Levi–Cività) de M est une connexion (a,b) sans torsion (c) compatible avec la métrique (d) :

a $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$,
b $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X.f)Y$,
c $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
d $X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y)$,

où $[,]$ est le crochet de Lie de M.

Première et deuxième formes fondamentales. La *première forme fondamentale* de la surface S, notée I, est la métrique induite sur S par celle de M. L'*application de Gauss* est l'application qui à un point s de S fait correspondre le point $N(s) \in \mathbb{S}^2$, où N est la normale unitaire à la surface. L'*opérateur de forme* (ou opérateur de Weingarten) noté B est l'application

$$B : T_xS \to T_xS : X \mapsto -\nabla_X N. \tag{1.1}$$

La *deuxième forme fondamentale* de S est définie comme

$$\mathrm{II}(X, Y) := \mathrm{I}(BX, Y). \tag{1.2}$$

Lemme 1.1. *On a que* $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{I}(\nabla_X Y, N)$ *et l'opérateur* B *est symétrique, i.e.* $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{I}(BY, X)$.

Démonstration. D'abord $\mathrm{I}(\nabla_X Y, N) = X.\mathrm{I}(Y, N) - \mathrm{I}(Y, \nabla_X N) = \mathrm{I}(-\nabla_X N, Y) = \mathrm{II}(X, Y)$. Ensuite, pour X, Y une base de T_xS : $\mathrm{I}(X, BY) = \mathrm{I}(N, \nabla_X Y) = \mathrm{I}(N, \nabla_Y X - [X, Y]) = \mathrm{I}(N, \nabla_Y X)$. □

Lemme 1.2. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, la deuxième forme fondamentale décrit le comportement infinitésimal de la surface par rapport à son plan tangent.*

Démonstration. Soit (h, U) un paramétrage de la surface au voisinage d'un point p, avec $h(q) = p$. Supposons que $h(0, 0) = p$ et notons $q = (0, 0)$. Alors le développement

$$h(u, v) - h(0, 0) = \frac{\partial}{\partial u}h(q)u + \frac{\partial}{\partial u}h(q)v \tag{1.3}$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}h(q)u^2 + 2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}h(q)uv + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}h(q)v^2) + O(u^2 + v^2)^{3/2} \tag{1.4}$$

donne

$$\langle h(u,v) - h(0,0), N(p)\rangle = \mathrm{II}(X,X) + O(u^2+v^2)^{3/2}, \tag{1.5}$$

où X est le vecteur tangent en p de coordonnées (u,v). □

Courbures moyennes et principales. Les *courbures principales* de S sont les valeurs propres de B. La *courbure moyenne* H est la moitié de la trace de B et la *courbure de Gauss* K_G est le déterminant de B, soit le produit des courbures principales.

Si K_M est la courbure sectionnelle de M et K_S celle de S, alors la *Formule de Gauss* est :

$$K_S = K_M + K_G. \tag{1.6}$$

Troisième forme fondamentale. La *troisième forme fondamentale* de S est définie comme

$$\mathrm{III}(X,Y) := \mathrm{I}(BX, BY). \tag{1.7}$$

Comme B est symétrique, cette valeur est aussi égale à $\mathrm{I}(B^2X, Y) := \mathrm{I}(BBX, Y)$. On pourrait ainsi définir la quatrième forme fondamentale comme $\mathrm{I}(B^3X, Y)$, et ainsi de suite. Il est malheureusement impossible de définir la $n$ième forme fondamentale puisque il n'y a aucune moyen de représenter le $n$ième nombre en chiffre romain [Spi79c] ! Plus sérieusement, toutes ces formes sont reliées entre elles :

Lemme 1.3. *Si H est la courbure moyenne et K la courbure de Gauss, alors*

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0. \tag{1.8}$$

Démonstration. Par le théorème de Cayley-Hamilton, l'application linéaire $-\nabla N$ annule son polynôme caractéristique, qui est exactement $\lambda^2 - 2H\lambda + K$. □

Si l'opérateur de forme n'est pas dégénéré, la troisième forme fondamentale est une métrique sur la surface, contrairement à la seconde forme fondamentale qui n'est une métrique que si la surface est strictement convexe (voir plus loin). Elle caractérise :

Lemme 1.4. *Dans $\mathbb{R}^3$, la troisième forme fondamentale décrit la rotation du plan tangent de la surface.*

Démonstration. La rotation du plan tangent est aussi décrite par la rotation du champ normal à la surface. Cette rotation est donnée, le long du chemin $c(t)$, par le vecteur $N(c(0)) - N(c(t))$. La variation de ce vecteur est donnée par le vecteur $\nabla_{c'(t)}N(c(t))$, et si on intègre la valeur de ce vecteur pour I on trouve exactement la longueur de $c(t)$ pour la métrique III. □

On verra plus loin des cas où III correspond à la métrique induite sur le "dual" d'une surface donnée.

Surfaces ombiliques.

Définition 1.5. *Si en un point d'une surface les courbures principales sont égales, ce point est dit* point ombilique*.*

Un surface dont les points sont ombiliques et dont la valeur de la courbure principale est la même en chaque point est une surface ombilique*.*

En un point ombilique la deuxième forme fondamentale est égale à la première forme fondamentale à multiplication par un réel près, qui est la valeur de la courbure principale en ce point, soit $\mathrm{II} = \lambda \mathrm{I}$. Et par le lemme 1.3, on obtient :

$$\mathrm{III} = \lambda^2 \mathrm{I}. \tag{1.9}$$

1.2 Espaces convexes

1.2.1 Surfaces lisses

Les notations $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ et $\mathbb{S}^n$ désignent respectivement l'espace euclidien, l'espace hyperbolique et la sphère de dimension n. La notation générique pour ces trois ensembles est $\mathbb{X}^n$.

Définition 1.6. *Un* sous-espace *de $\mathbb{X}^n$ est une copie de $\mathbb{X}^i$, pour $0 \leq i \leq k$ plongée de telle manière que l'image soit totalement géodésique. L'espace $\mathbb{X}^{n-1}$ sépare $\mathbb{X}^n$ en deux composantes connexes et chacune est un* demi-espace *de $\mathbb{X}^n$. Il est dit fermé si on le considère avec son bord, ouvert sinon. L'espace $\mathbb{X}^{n-1}$ est appelé un* plan *de $\mathbb{X}^n$.*

Par exemple un sous-espace de dimension 0 de $\mathbb{S}$ est une paire de points antipodaux.

Définition 1.7. *Un sous-ensemble A (connexe) de $\mathbb{X}^n$ est un* ensemble convexe *si pour tout couple de points (p,q) de A, la géodésique reliant p à q est entièrement contenue dans A.*

Une hypersurface de $\mathbb{X}^n$ est une hypersurface convexe *si elle est (connexe et) contenue dans le bord d'un ensemble convexe de $\mathbb{X}^n$.*

Une hypersurface M de $\mathbb{X}^n$ est dite localement convexe *en un point p de M si il existe un voisinage V de p dans M qui est entièrement contenu dans un des demi-espaces fermés de $\mathbb{X}^n$ délimités par un hyperplan totalement géodésique qui a pour tangent le plan tangent à M en p. On dit alors que M reste d'un côté de son plan tangent en p.*

L'hypersurface M est localement strictement convexe *en p si de plus p est le seul point commun entre le voisinage V et le plan tangent à M en p.*

Elle est strictement convexe *si elle est convexe et partout localement strictement convexe.*

Dans la cas de la sphère, la géodésique qui relie deux points est la plus courte —on considère qu'un ensemble convexe de la sphère ne contient pas de points antipodaux.

Proposition 1.8 ([Spi79a, Prop. 10])**.** *Si une surface compacte de $\mathbb{R}^3$ est toujours du même côté de son plan tangent, alors elle est convexe.*

Propriété 1.9 (Hadamard)**.** *i) Une surface M de $\mathbb{R}^3$ est localement strictement convexe en p si et seulement si la courbure de Gauss en p $K_G(p)$ est strictement positive (les courbures principales sont de même signe et non nulles).*

ii) Si $K_G(p)$ est strictement négative (les courbures principales sont de signe opposé et non nulles), alors M n'est pas localement convexe en p.

Autrement dit, si M est localement convexe en p, alors sa courbure de Gauss en p est positive ou nulle.

Démonstration. i) Soit q un point d'un voisinage de p sur M. Le signe de $\langle N_p, \overline{pq}\rangle$, où $\overline{pq}$ désigne le segment de $\mathbb{R}^3$ joignant p à q, donne l'appartenance de q à l'un ou l'autre des demi-espaces délimités par T_pM. Pour que la surface soit strictement convexe en p, il faut donc que ce signe soit constant sans annulation.

L'équation (1.5) indique que le signe de $\langle N_p, \overline{pq}\rangle$ ne dépend que du signe de II pour les vecteurs de norme égale à 1 (il suffit de sortir la norme du vecteur). Et ce signe est constant : en effet si la courbure de Gauss est strictement positive, les courbures principales, qui sont le maximum et le minimum des valeurs de II sur le cercle, sont de même signe.

La réciproque est alors immédiate.

ii) Inversement, si la courbure est strictement négative, les courbures principales sont de signe opposé, et donc le signe de l'angle entre le segment et la normale varie, c'est-à-dire que la surface n'est pas localement convexe en ce point.

□

Le fait que $K_G(p) \geq 0$ n'implique pas la convexité de M en p, par exemple on peut trouver des de surfaces non-convexes en un point mais qui contiennent un morceau de droite passant par ce point.

Remarque 1.10. *A changement d'orientation près, une surface localement strictement convexe est une surface dont la seconde forme fondamentale est définie positive. Dans ce cas, elle définit une métrique sur la surface.*

1.2.2 Polyèdres

Définition 1.11. *Un* polyèdre convexe *(au sens standard) de $\mathbb{X}^n$ est une intersection finie non vide de demi-espaces fermés.*

Définition 1.12. *Un* polyèdre convexe *(au sens standard) de $\mathbb{X}^n$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points points de $\mathbb{X}^n$, c'est-à-dire la plus petite partie convexe de la variété de départ contenant les points en question.*

Ces deux définitions sont équivalentes si on suppose, dans la première, que le polyèdre est compact, c'est-à-dire puisque la dimension est finie, borné.

Si le polyèdre est non vide et compact le terme *polytope* désigne l'intérieur du polyèdre. Un *polyèdre* est une union (connexe) de polytopes.

La *dimension* d'un polyèdre est la dimension du plus petit sous-espace affine le contenant, soit par exemple $\mathbb{X}^k$. L'*angle dièdre* entre deux faces (de codimension 1) d'un polyèdre est l'angle entre les deux normales extérieures des faces.

Un *polyèdre ouvert* est l'intérieur d'un polyèdre fermé de dimension k au sens de la topologie de $\mathbb{X}^k$. Un polyèdre de dimension 2 est un *polygone*. Une intersection finie de polyèdres convexes est toujours un polyèdre convexe. La *combinatoire* d'un polyèdre est sa décompostion cellulaire selon ses k-faces. Deux polyèdres convexes fermés sont *combinatoirement équivalents* s'ils induisent deux cellulations de la sphère isotopes (via l'homéomorphisme naturel entre le polyèdre et la sphère).

En fait le terme "polyèdre" désigne habituellement trois choses : l'intérieur de l'intersection des demi-espaces, la fermeture de l'intersection des demi-espaces ou le bord de l'intersection des demi-espaces. Nous ferons parfois la confusion, mais en général, le mot polyèdre désignera la fermeture (ou l'intérieur), et le bord sera appelé une *surface polyédrale*.

Nous utiliserons une définition un peu plus générale, puisque certains polyèdres auront un nombre infini de sommets et de faces, mais ressemblerons localement à des polyèdres tels que définis au-dessus.

Définition 1.13. *Soit p un sommet d'un polyèdre P. On regarde le polygone donné par l'intersection de P avec une petite sphère centrée en p, de telle sorte que p soit le seul sommet de P contenu dans la boule délimitée par la sphère.*

Le link *(ou* sphère normale*) de P en p est l'image de ce polygone par une homothétie qui envoie la petite sphère sur la sphère unité.*

Définition 1.14. *Un* polyèdre convexe *de $\mathbb{X}^n$ est une intersection (éventuellement infinie) non vide de demi-espaces fermés, telle que le link de chaque sommet soit un polyèdre sphérique au sens standard, et telle que chaque face soit un polyèdre de $\mathbb{X}^{n-1}$ au sens standard.*

Un polyèdre *est une union connexe de polyèdres convexes.*

Formule de Gauss–Bonnet.

Théorème 1.15 ([Spi79b, chap. 6 cor. 7])**.** *Soit S une surface riemannienne orientée, de courbure sectionnelle K et d'élément de volume dA. Soit P un polygone convexe de S (les arêtes de P sont des morceaux de géodésiques de S) et $\theta_1, \ldots, \theta_n$ les angles intérieurs de P. Alors*

$$\int_P K dA = \sum_{i=1}^{n} \theta_i + (2-n)\pi. \tag{1.10}$$

Corollaire 1.16. *Soit P un polygone de $\mathbb{X}^2$ comme au-dessus, alors, en notant $Aire(P)$ l'aire de P :*

$$\mathbb{X}^2 = \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = (n-2)\pi; \tag{1.11}$$

$$\mathbb{X}^2 = \mathbb{S}^2 : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = Aire(P) + (n-2)\pi; \tag{1.12}$$

$$\mathbb{X}^2 = \mathbb{H}^2 : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = (n-2)\pi - Aire(P). \tag{1.13}$$

1.3 Géométrie de la sphère

1.3.1 Métrique canonique de la sphère

On rappelle brièvement comment on trouve les principales propriétés de la métrique induite sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ (qui sont les mêmes pour la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$). Des propriétés analogues seront alors immédiates pour les espaces lorentziens que nous considérerons dans la suite, car ils seront décrits comme des pseudo-sphères d'un espace ambiant.

On note de la même manière un point x de la sphère et le vecteur unitaire de l'espace euclidien qui le définit.

Remarquons d'abord que comme par définition $\|x\|^2 = 1$, alors l'espace tangent à la sphère en x est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur x (il suffit de prendre un chemin $c(t)$ sur la sphère et de dériver l'expression $\langle c(t), c(t)\rangle = 1$).

Comme $\mathbb{S}^2$ est munie de la métrique induite, ses isométries sont simplement les isométries de l'espace euclidien qui préservent la sphère, soit les isométries qui préservent le produit scalaire : il s'agit du groupe orthogonal $O(3)$, et son action est évidemment transitive. Un étude simple montre que le groupe des isométries préservant l'orientation provient des isométries euclidiennes fixant les droites vectorielles, soit $SO(3)$ [Sco83]. Le groupe des isométries fixant la droite passant par 0 et un point $x \in \mathbb{S}^2$ est isomorphe à $SO(2)$, ainsi $\mathbb{S}^2$ est l'espace homogène $SO(3)/SO(2)$ [GHL90, 1.100 ;2.33]. En particulier $\mathbb{S}^2$ est de courbure constante puisque le groupe des isométries agit aussi transitivement sur les repères orthonormés de l'espace tangent.

Comme un vecteur tangent v à la sphère en x est orthogonal à x (vu comme vecteur de l'espace ambiant), l'intersection de la sphère avec un plan vectoriel engendré par x et v s'écrit

$$c : s \mapsto (\sin s)v + (\cos s)x \tag{1.14}$$

pour $s \in [0, 2\pi[$, et cette courbe est paramétrée par la longueur d'arc. C'est une géodésique puisqu'il s'agit d'un ensemble de points fixes pour une isométrie, en l'occurrence la réflexion par rapport au plan engendré par x et v.

De plus toutes les géodésiques s'écrivent de cette façon pour la même raison.

L'application qui à x associe le vecteur normal unitaire N en x est l'identité, donc si e_1, e_2 est une base orthonormée du plan tangent au point $(0, 0, 1)$ alors $\nabla_{e_i} N = e_i$ et ainsi la courbure de Gauss de la sphère est égale à 1, et donc la courbure sectionnelle aussi par la formule de Gauss.

La distance entre deux points x et y est la longueur de la plus petite géodésique entre x et y, c'est donc l'angle entre les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$. Il existe ainsi une relation entre le produit scalaire de l'espace euclidien et la distance sur la sphère :

$$\cos d(x, y) = \langle x, y\rangle. \tag{1.15}$$

L'angle entre deux segments géodésiques de la sphère est évidement π moins l'angle dièdre entre les deux plans qui définissent les segments.

Lemme 1.17. *Si $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ désigne la métrique induite sur la sphère unité, I_t et II_t la première et deuxième forme fondamentale induite sur la sphère de rayon t, alors*

$$\mathrm{I}_t = t^2 \mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}, \tag{1.16}$$

$$\mathrm{II}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}. \tag{1.17}$$

Démonstration. La première équation est évidente puisque la longueur d'une courbe se trouve multipliée par t. La deuxième équation vient du fait que la sphère de rayon t est ombilique, donc $\mathrm{II}_t = \frac{1}{t}\mathrm{I}_t$. □

1.3.2 Un modèle projectif de la sphère de dimension 3

On va définir une application projective de $\mathbb{S}^3_+$ (la partie supérieure de la sphère) dans l'espace euclidien, ce qui ne change rien à l'étude des surfaces convexes, puisque par définition elle n'ont pas de points antipodaux.

Dans tout le texte, les expressions *espace projectif* et *application projective* désignent un espace plat complet et une application qui envoie les géodésiques sur les droites de cet espace plat.

L'application projective est donnée par la projection standard sur le plan $\{x_4 = 1\}$ dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{c} \varphi_S : \mathbb{S}^3_+ \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto x/x_4 \end{array} \tag{1.18}$$

(l'hyperplan affine $\mathbb{R}^3 \times \{1\}$ est identifié avec l'espace euclidien).

Le point de coordonnées $(0, 0, 0, 1)$ est noté x_N (le pôle nord). Il est envoyé sur lui-même, et correspond à l'origine de l'espace projectif.

On peut aussi utiliser l'application projective qui identifie $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ avec l'espace euclidien :

$$x \mapsto \frac{x - \langle x, x_N\rangle x_N}{\langle x, x_N\rangle} = \frac{x}{x_4} - x_N \tag{1.19}$$

dont l'inverse s'écrit, en identifiant $y \in \mathbb{R}^3$ et $(y, 0) \in \mathbb{R}^4$:

$$y \mapsto \frac{y + x_N}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}. \tag{1.20}$$

Ensembles convexes de $\mathbb{S}^3$. L'application projective envoie les géodésiques sur les géodésiques. Ainsi, on peut définir (de manière équivalente à la définition déjà donnée), un ensemble convexe de $\mathbb{S}^3$ comme l'image réciproque par l'application projective d'un ensemble convexe de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.18. *Le* cône d'une surface S *de* $\mathbb{S}^3$*, noté* $C(S)$*, est la surface de* $\mathbb{R}^4$ *obtenue en reliant chaque point de* S *à l'origine.*

Lemme 1.19. *Une surface* S *de* $\mathbb{S}^3$ *est une surface localement (strictement) convexe si et seulement si* $C(S)$ *est une hypersurface localement (strictement) convexe de* $\mathbb{R}^4$*.*

Démonstration. Cela vient du fait que les géodésiques de $\mathbb{S}^3$ sont données par les hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^4$. □

Lemme 1.20. *Une surface de* $\mathbb{S}^3$ *est strictement localement convexe si et seulement si sa courbure de Gauss est strictement positive.*

Démonstration. Soit S une surface localement strictement convexe de $\mathbb{S}^3$. La normale de S est notée N, I^S est sa première forme fondamentale et II^S sa seconde forme fondamentale. La première forme fondamentale est notée $\mathrm{I}^{C(S)}$ et $\mathrm{II}^{C(S)}$ est la seconde forme fondamentale du cône de S. On remarque que N (comme vecteur de $\mathbb{R}^4$) est aussi la normale de $C(S)$ aux points de S.

En notant $\nabla^{\mathbb{S}^3}$ la connexion de $\mathbb{S}^3$, pour un vecteur tangent X de S, $\mathrm{II}^S(X, X)$ s'écrit $\mathrm{I}^S(\nabla^{\mathbb{S}^3}_X X, N)$. Si ∇ est la connexion de $\mathbb{R}^4$, alors pour deux vecteurs tangents de $\mathbb{S}^3$ U et V, $\nabla_U V - \nabla^{\mathbb{S}^3}_U V$ est un vecteur normal à $\mathbb{S}^3$ —en prenant des extensions de U et V à $\mathbb{R}^4$ (voir par exemple [GHL90, 2.56]).

Donc on obtient $\mathrm{II}^S(X, X) = \mathrm{I}^S(\nabla_X X, N)$, et cette quantité est égale à $\mathrm{I}^{C(S)}(\nabla_X X, N) = \mathrm{II}^{C(S)}(X, X)$, puisque pour S et $C(S)$ le produit scalaire est celui de $\mathbb{R}^4$.

La solution est alors donnée par la proposition 1.9 (avec des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ au lieu de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ce qui ne change absolument rien). □

Sphères de $\mathbb{S}^3$. On appelle *sphère de rayon θ* de $\mathbb{S}^3$ l'ensemble des points à distance θ de x_N. Par la définition même de l'application tangente, un point à distance θ de x_N est envoyé sur un point à distance $\tan(\theta)$ de l'origine, donc

Lemme 1.21. *Une sphère de rayon θ dans $\mathbb{S}^3$ est envoyée sur une sphère de rayon $\tan(\theta)$ par l'application projective.*

Lemme 1.22. *On note g_θ la métrique induite sur une sphère à distance θ de x_N. Alors*

$$g_\theta = \sin^2(\theta)\mathrm{can}_{S^2}, \tag{1.21}$$

où $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ la métrique canonique de la sphère ronde.

Démonstration. Une sphère à distance θ de x_N est donnée par l'intersection de la sphère avec l'hyperplan affine d'équation $\{x_4 = \cos(\theta)\}$. Alors dans l'hyperplan l'équation de la surface est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta), \tag{1.22}$$

il s'agit d'une sphère de rayon $\sin(\theta)$, donc sa métrique induite est $\sin^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. □

Proposition 1.23. *Les surfaces intersections de $\mathbb{S}^3$ avec des hyperplans affines sont des surfaces ombiliques.*

Démonstration. Les hyperplans affines sont définis par un vecteur normal constant. Comme il existe un sous-groupe des isométrie $\mathbb{R}^4$ qui fixe $\mathbb{S}^3$ et un vecteur (car $O(4)$ fixe la sphère et agit transitivement sur les repères orthonormés), alors il existe des isométries de $\mathbb{S}^3$ qui fixent globalement la surface donnée par l'hyperplan affine. Comme les isométries agissent transitivement sur les repères orthonormés, et que la surface est laissée invariante par des isométries, alors les restrictions de ces isométries à la surface sont des isométries de la surface, qui envoient les directions principales sur les directions principales, et en tout points, ainsi les courbures principales sont égales en tout point, la surface est ombilique. □

Ce qui permet de montrer

Lemme 1.24. *On fixe un réel t et on note $\theta = \tan^{-1}(t)$, I_θ et II_θ les premières et secondes formes fondamentales de la sphère de rayon θ dans $\mathbb{S}^3$, et $\overline{\mathrm{I}}_t$ et $\overline{\mathrm{II}}_t$ les premières et secondes formes fondamentales de la sphère de rayon t dans $\mathbb{R}^3$. Alors on a*

$$\mathrm{I}_\theta = \cos^2(\theta)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\theta = \cos^2(\theta)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{1.23}$$

Démonstration. Si on note $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ la métrique canonique de la sphère ronde, le lemme précédent donne $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2} = \tan^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ et $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2} = \tan(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. Le paramétrage de la sphère donne que $\mathrm{I}_\theta = \sin^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. Donc la courbure sectionnelle de la sphère est $1/\sin^2(\theta)$, sa courbure de Gauss est $(\tan^2(\theta))^{-1}$, et comme il s'agit d'une surface ombilique alors $\mathrm{II}_\theta = (\tan(\theta))^{-1}\mathrm{I}_\theta = \sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. □

1.3.3 Dualité polaire en dimension 2

Pour ces questions de dualité, on renvoie à [Ber77, 18.6,18.7] ou à [Thu97, 2.4].

Soit P un polygone convexe de la sphère $\mathbb{S}^2$, de sommets $(x_1, \ldots, x_n)$. On note e_i le segment géodésique reliant x_i et x_{i+1}. On note P^* le polygone *dual (polaire)* de P construit de la manière suivante : chaque arête e_i est définie comme l'intersection de la sphère avec un 2-plan vectoriel E_i de l'espace euclidien. Le dual de e_i, noté e_i^* est défini comme étant l'intersection de la sphère avec le vecteur normal (en 0) à E_i. On prend la normale telle que e_i^* soit dans le même demi-espace que P, c'est-à-dire que pour tout k différent de i et $i+1$, on a $\langle e_i^*, x_k\rangle > 0$.

Ainsi les e_i^* sont définis par le système suivant

$$\langle e_i^*, x_i\rangle = \langle e_i^*, x_{i+1}\rangle = 0, \langle e_i^*, x_k\rangle > 0, \forall i, k \notin \{i, i+1\} \tag{1.24}$$

(on adopte une notation cyclique, par exemple $x_{n+1} := x_1$ etc.) ; on remarque qu'il est impossible que $\langle e_i^*, x_k\rangle = 0$ si $k \notin \{i, i+1\}$, car cela signifierai que x_i, x_{i+1} et x_k sont dans le même plan, ce qui contredit le fait qu'il s'agisse de sommets de P. On peut aussi décrire e_i^* comme étant le point à distance constante $\pi/2$ de e_i (le centre du grand cercle contenant e_i).

On définit alors P^* comme le bord de l'enveloppe convexe des e_i^*. Par symétrie des équations, on déduit immédiatement que $(P^*)^* = P$, et ainsi l'arête x_i^* entre e_i^* et e_{i+1}^* peut être définie comme duale du sommet x_i (x_i^* est une partie du grand cercle à distance $\pi/2$ de x_i).

Ceci indique aussi que P^* est un polygone convexe dont les sommets sont exactement les e_i^* (i.e. aucun e_i^* n'est contenu dans l'enveloppe convexe des autres sommets) : sinon le dual du dual aurait une arête de moins que le polygone de départ.

On note $l(e_i)$ la longueur de l'arête e_i : il s'agit de l'angle dans l'espace euclidien entre les vecteurs x_i et x_{i+1}.

On note $\theta(x_i)$ l'angle intérieur du polygone P en x_i. Il s'agit de π moins l'angle dièdre entre les 2-plans définissant e_{i-1} et e_i. Et comme l'angle dièdre entre e_{i-1} et e_i donne la longueur de x_i^* :

$$l(x_i^*) + \theta(x_i) = \pi, \tag{1.25}$$

et par involution

$$l(e_i) + \theta(e_i^*) = \pi. \tag{1.26}$$

En particulier, par la formule de Gauss–Bonnet on déduit immédiatement

Lemme 1.25. *La somme des longueurs des arêtes d'un polygone convexe de $\mathbb{S}^2$ est inférieure à 2π.*

1.3.4 Dualité polaire en dimension 3

En généralisant le cas de la dimension 2, on peut définir le dual d'un polyèdre convexe de la sphère de dimension 3 $\mathbb{S}^3$ de la façon suivante. Soit P un polyèdre convexe dont on note les faces f_i. Celles-ci sont les intersections de la sphère avec des hyperplans vectoriels, et leur normale fournit un point de la sphère noté f_i^*. On demande de plus que f_i^* soit dans le même demi-espace que P, ce qui donne le système d'equations suivant, en notant x_i, y_i et z_i trois sommets concourants de f_i et s_i d'autres sommets de P

$$\langle f_i^*, x_i\rangle = \langle f_i^*, y_i\rangle = \langle f_i^*, z_i\rangle = 0, \langle f_i^*, s_i\rangle > 0. \tag{1.27}$$

On note P^* le polyèdre convexe obtenu en prenant le bord de l'enveloppe convexe des f_i^*. Par symétrie la dualité est involutive, et ainsi aucun des f_i^* n'est dans l'enveloppe convexe des autres (sinon il manquerait un sommet à P).

Le dual d'un sommet est alors un face, et si on définit le dual d'une arête comme le 2-plan complémentaire du 2-plan qui définit l'arête, on a

Lemme 1.26. *Le dual d'une arête est une arête du dual.*

Plus précisement, si on note e une arête de sommets x et y entre deux faces f et g, alors e^* est une arête de sommets f^* et g^* entre les faces x^* et y^*.

Démonstration. Il suffit de lire les équations

$$\langle f^*, x\rangle = \langle f^*, y\rangle = 0, \tag{1.28}$$
$$\langle g^*, x\rangle = \langle g^*, y\rangle = 0, \tag{1.29}$$
$$\langle e^*, x\rangle = \langle e^*, y\rangle = 0; \tag{1.30}$$

qui nous disent que f^* et g^* sont dans le 2-plan e^*, lui-même contenu dans les 3-plans x^* et y^*. □

Lemme 1.27. *Soit α l'angle en un sommet x d'un polyèdre P sur une face f entre deux arêtes e_1 et e_2.*

Alors l'angle au sommet f^* du polyèdre P^* sur la face x^* entre les arêtes e_1^* et e_2^* est $(\pi - \alpha)$.

Démonstration. L'angle $(\pi - \alpha)$ est l'angle dièdre entre les 2-plans e_1 et e_2, donc l'angle dièdre entre les 2-plans e_1^* et e_2^* est $(\pi - (\pi - \alpha))$. □

Lemme 1.28. *La longueur de l'arête entre deux sommets x_1 et x_2 est égal à π moins l'angle dièdre entre les faces x_1^* et x_2^*.*

Démonstration. L'angle entre les vecteurs x_1 et x_2 est par définition l'angle dièdre entre les hyperplans x_1^* et x_2^*, qui est π moins l'angle dièdre entre les faces x_1^* et x_2^* du polyèdre sphérique. □

1.4 Polygones sphériques et polyèdres

1.4.1 Cônes convexes

La notation M_K^+ ($K \in \{-1, 0, 1\}$) désigne l'espace riemannien simplement connexe complet de dimension 3 de courbure K.

Définition 1.29. *Un* cône convexe *(polyédral) de sommet x est un polyèdre convexe de M_K^+ ayant au moins trois arêtes et pour seul sommet x. En particulier il est stable par toutes les homothéties de centre x et de rapport $\lambda > 0$.*

Un cône convexe fermé *(ou* tronqué*) est le bord de l'intersection d'un cône convexe avec un demi-espace défini par un plan totalement géodésique qui est tel que la projection sur ce plan de la partie du cône qui est du même côté que le sommet est strictement contenue à l'intérieur du polygone (convexe) formé par l'intersection du plan avec le cône.*

*L'*angle *du cône convexe est la somme des angles entre les arêtes sur les faces du cône convexe.*

Proposition 1.30. *L'angle d'un cône convexe de M_K^+ est (strictement) inférieur à 2π (et strictement positif).*

Démonstration. Un polygone sphérique convexe est l'intersection de $\mathbb{S}^2$ avec un cône convexe de $\mathbb{R}^3$ de sommet l'origine. La longueur d'une arête est égale à l'angle en l'origine de la face du cône convexe qui définit l'arête en question. Le résultat pour $\mathbb{R}^3$ vient alors du lemme 1.25.

Dans le modèle de la boule de Poincaré de l'espace hyperbolique, qui est connu pour être conforme, si on ferme le cône on voit immédiatement que l'angle entre deux segments eulidiens est plus grand que l'angle entre les deux géodésiques hyperboliques reliant le même triplet de points, d'où le résultat.

Soit un cône de $\mathbb{S}^3$ ayant n faces à son sommet x, que l'on ferme. D'après le lemme 1.27, l'angle du cône est égal à $n\pi$ moins la somme des angles intérieurs du polygone x^*. Celle-ci étant strictement supérieure à $(n-2)\pi$ par la formule de Gauss–Bonnet, on obtient alors le résultat.

□

La *courbure singulière* au sommet du cône est 2π moins l'angle. Ainsi dans M_K^+, la courbure au sommet d'un cône convexe est strictement positive.

1.4.2 Métrique duale d'un polyèdre

Soit P une surface polyédrale convexe de M_K^+ et p un sommet de P.

On note $l(p)$ le link de P en p. C'est un polygone sphérique convexe, et on note $l(p)^*$ son dual. Si p' est un sommet de P adjacent à p, alors en particulier p et p' sont les sommets de deux faces délimitées par l'arête entre p et p'. Et l'angle dièdre de ces deux faces donne la longueur d'une arête de $l(p)^*$ et d'une arête de $l(p')^*$.

On peut donc recoller le long des arêtes se correspondant de cette façon les links de tous les sommets de P. Il s'agit d'un recollement de polygones sphériques, il est donc munit d'une métrique sphérique en dehors des sommets, et les voisinages des sommets sont isométriques à des voisinages de sommets de cônes de M_1^+.

Une telle métrique est appellée la *métrique duale de P* ou encore la *troisième forme fondamentale de P*.

Nous étudierons plus en détail la métrique duale des surfaces polyédrales de l'espace hyperbolique.

Chapitre 2

Déformations

2.1 Dans $\mathbb{R}^3$

Pour cette partie —volontairement élémentaire comme la partie précédente, on renvoie à [Spi79c, Bus58, Sab92].

2.1.1 Déformations isométriques

Soit M une surface munie d'une métrique δ et f un plongement de M dans $\mathbb{R}^3$. Si f est une isométrie, $f(M) = C$ est appelée une *réalisation* de M. On note $\langle , \rangle$ la métrique induite de $f(M)$.

Définition 2.1. *Soit C' une autre réalisation de (M, δ). Elles sont dites* congruentes *s'il existe une isométrie euclidienne $I : C \to C'$.*

Définition 2.2. *Le plongement f est* déformable discrètement *(warpable) s'il existe un plongement $g : M \to \mathbb{R}^3$ tel que $f^*\langle , \rangle = g^*\langle , \rangle$ et g n'est pas de la forme $A \circ f$, avec A une isométrie euclidienne.*

Une surface n'ayant aucun plongement déformable discrétement est dite uniquement déterminée par sa métrique.

Définition 2.3. *Une* déformation *d'un plongement $f : M \to \mathbb{R}^3$ est une application lisse $\alpha : [0, 1] \times M \to \mathbb{R}^3$ telle que :*

(a) *Chaque application $\alpha_t : M \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto \alpha(t, p)$ est un plongement ;*

(b) *α_t dépend différentiablement de t ;*

(c) *$\alpha_0 = f$.*

Une déformation isométrique *(bending) du plongement f est une déformation de f telle que $\alpha_t^*\langle , \rangle = \alpha_0^*\langle , \rangle$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Une déformation isométrique est triviale *si chaque α_t est de la forme $A_t \circ f$ où A_t est une isométrie euclidienne.*

Le plongement f est un plongement flexible *(ou déformable) (bendable) s'il existe une déformation isométrique de f qui ne soit pas triviale. Sinon la surface est dite* (globalement) rigide.

Comme nous nous intéresserons principalement à la métrique induite sur les surfaces, on utilisera le terme *globalement rigide* dans un sens plus fort que la définition au-dessus, c'est-à-dire que cette expression sera équivalente à la définition de "uniquement déterminée par sa métrique".

Définition 2.4. *On définit le* champ de vecteurs variationnel *d'une déformation α, noté Z, comme étant le champ de vecteurs le long de f tel que $Z(p)$ soit le vecteur tangent en zéro de l'application $t \mapsto \alpha(t, p)$, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(p)|_{t=0} = Z(p) \tag{2.1}$$

("le long de f" signifie que l'on considère la restriction d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à $f(M)$) ; $Z(p)$ est parfois noté $\dot{f}(p)$.

Le champ de vecteurs variationnel d'une déformation isométrique est appelé une variation isométrique.

2.1.2 Analogue infinitésimal de la déformation isométrique

Un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini le long de f est une *déformation infinitésimale* de $f(M)$. En particulier, le champ de vecteurs variationnel d'une déformation α_t est une déformation infinitésimale (tous les champs de vecteurs sont supposés lisses). On peut toujours trouver un tel α_t en posant $\alpha_t(p) = f(p) + tZ(p)$, mais il n'est pas unique (en particulier α_t n'est pas forcément la courbe intégrale de Z).

Définition 2.5. *Un champ de vecteurs Z le long de f est une* déformation isométrique infinitésimale *(ou infiniment petite ou inextentionnelle ou flexion pure (linéarisée)) (infinitesimal bending) s'il satisfait l'une de deux relations équivalentes suivantes :*

$$\langle dZ(df(X)), df(X)\rangle = 0 \ \forall X \in T_mM; \tag{2.2}$$
$$\langle dZ(df(Y)), df(X)\rangle + \langle dZ(df(X)), df(Y)\rangle = 0 \ \forall X, Y \in T_mM, \tag{2.3}$$

ce que l'on note, par un abus d'écriture classique

$$\langle dZ(X), df(X)\rangle = 0. \tag{2.4}$$

Définition 2.6. *Une déformation* préserve la métrique au premier ordre *(ou : la métrique est inchangée au sens linéarisé) si*

$$\alpha_t^*\langle , \rangle = f^*\langle , \rangle + o(t). \tag{2.5}$$

Lemme 2.7. *Le champ de vecteurs variationnel d'une déformation qui préserve la métrique au premier ordre est une déformation isométrique infinitésimale.*

Réciproquement, si le champ de vecteurs variationnel d'une déformation est une déformation isométrique infinitésimale, alors la déformation préserve la métrique au premier ordre.

Démonstration. Si Z est le champ de vecteurs variationnel d'une déformation α, alors :

$$\alpha_t(p) = f(p) + tZ(p) + o(t). \tag{2.6}$$

On a alors les équivalences suivantes, si X et Y sont des vecteurs tangents à la surface au point p : "α_t préserve la métrique au premier ordre" est équivalent à

$$\Leftrightarrow \quad \langle d\alpha_t(X), d\alpha_t(Y)\rangle = \langle df(X), df(Y)\rangle + o(t) \tag{2.7}$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle df(X) + tdZ(X) + o(t), df(Y) + tdZ(Y) + o(t)\rangle = \langle df(X), df(Y)\rangle + o(t) \tag{2.8}$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle df(X), df(Y)\rangle + t\langle df(X), dZ(Y)\rangle + t\langle df(Y), dZ(X)\rangle + t^2\langle dZ(X), dZ(Y)\rangle + o(t) \tag{2.9}$$
$$= \langle df(X), df(Y)\rangle + o(t) \tag{2.10}$$
$$\Leftrightarrow \quad t\langle df(X), dZ(Y)\rangle + t\langle df(Y), dZ(X)\rangle = 0 \tag{2.11}$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle df(X), dZ(Y)\rangle + \langle df(Y), dZ(X)\rangle = 0 \tag{2.12}$$

ce qui est équivalent à "le champ de vecteurs variationnel de α est une déformation isométrique infinitésimale". □

Cas triviaux. On peut toujours trouver une déformation isométrique infinitésimale en considérant une déformation isométrique triviale α qui s'écrit :

$$\alpha(t, p) = B(t)f(p) + v(t), \tag{2.13}$$

avec $B(t) \in O(3)$, $B(0) = I, v(t) \in \mathbb{R}^3$, $v(0) = 0$. Alors

$$Z = B'(0)f(p) + v'(o), \tag{2.14}$$

avec $B'(t) \in \mathfrak{o}(3)$, l'algèbre de Lie de $O(3)$.

Définition 2.8. *Un champ de vecteurs V de $\mathbb{R}^3$ est un* champ de Killing *(ou déplacement rigide infinitésimal) si c'est en chaque point le champ variationnel d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$, ou, de manière équivalente, si c'est la restriction à la surface d'un élément de l'algèbre de Lie du groupe des isométries de l'espace, c'est-à-dire s'il est de la forme*

$$Z(p) = Bf(p) + v \tag{2.15}$$
$$\Leftrightarrow \quad Z(p) = a \wedge f(p) + v, \tag{2.16}$$

où a est un vecteur fixé.

Définition 2.9. *On dit que la déformation isométrique infinitésimale Z est* triviale *si c'est la restriction à la surface d'un champ de Killing de l'espace.*

Le plongement est infinitésimalement rigide *(ou : à flexion pure inhibée) si toutes ses déformations isométriques infinitésimales sont triviales, sinon il est dit* infinitésimalement flexible.

On peut trouver le terme rigide utilisé à la place d'infinitésimalement rigide, confusion que l'on ne fera pas ici.

Exemple 2.10. *On considère un plan dans $\mathbb{R}^3$, par exemple le plan $(x, y, 0)$. Soit $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ une déformation isométrique infinitésimale. On suppose d'abord qu'elle est horizontale. D'après les équations données par la définition, on a $\frac{d}{dx}Z_1 = \frac{d}{dy}Z_2 = \frac{d}{dy}Z_1 + \frac{d}{dx}Z_2 = 0$, c'est-à-dire que Z est trivial. Donc les seules déformations isométriques infinitésimales non triviales sont celles normales au plan. Elles modifient visiblement la longueur, mais pas au premier ordre. Le plan est rigide mais pas infinitésimalement rigide.*

2.1.3 Le champ de rotation

Propriété 2.11. *Pour tout point p de M, si Z est une déformation isométrique infinitésimale, il existe un unique vecteur $Y(p)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :*

$$dZ(X) = df(X) \wedge Y(p),\ \forall X \in T_pM. \tag{2.17}$$

Démonstration. Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs linéairement indépendants de M. On a $\langle dZ(X_i), df(X_i)\rangle = 0$ donc il existe un Y_i avec $dZ(X_i) = df(X_i) \wedge Y_i$. On a aussi $\langle dZ(X_1), df(X_2)\rangle + \langle dZ(X_2), df(X_1)\rangle = 0$, ce qui nous donne

$$\langle df(X_1) \wedge Y_1, df(X_2)\rangle + \langle df(X_2) \wedge Y_2, df(X_1)\rangle = 0 \tag{2.18}$$
$$\Leftrightarrow \langle Y_2 - Y_1, df(X_1) \wedge df(X_2)\rangle = 0. \tag{2.19}$$

Donc $Y_2 - Y_1 \in df(T_pM)$, d'où $Y_2 - Y_1 = adf(X_1) + bdf(X_2)$. On pose $Y(p) = Y_2 - adf(X_1) = Y_1 + bdf(X_2)$ et alors $dZ(X_i) = df(X_i) \wedge Y_i = df(X_i) \wedge Y(p)$. □

Définition 2.12. *Le champ de vecteurs Y est appelé le* champ de rotation *de la déformation isométrique infinitésimale Z.*

Lemme 2.13. *Une déformation isométrique infinitésimale est triviale si et seulement si son champ de rotation est constant.*

Démonstration. Le sens de gauche à droite vient de la définition de trivial.

Considérons que Y est constant, égal à Y_0 : $dZ(X) = df(X) \wedge Y_0$, $\forall X \in T_pM$. Soit c une courbe tracée sur M, avec $c(0) = p_0$:

$$\frac{dZ(c(t))}{dt} = dZ(c'(t)) = df(c'(t)) \wedge Y_0 = \frac{df(c(t))}{dt} \wedge Y_0. \tag{2.20}$$

On intègre le long de c :

$$Z(c(t)) - Z(p_0) = [f(c(t)) - f(p_0)] \wedge Y_0 \tag{2.21}$$
$$Z(c(t)) = f(c(t)) \wedge Y_0 + \omega_0, \tag{2.22}$$

et ω_0 est une constante qui de dépend pas de c, donc Z est trivial. □

Ce dernier résultat permet de montrer le lemme suivant :

Lemme 2.14. *Si le champ de vecteurs variationnel d'une déformation isométrique est trivial en chaque t, alors elle est triviale.*

Démonstration. Par définition on a $Z_t(p) = \frac{d}{dt}\alpha(t,p)$, et comme Z_t est trivial en chaque t, on a d'après le lemme précédent : $Z_t(p) = \alpha(t,p) \wedge Y_t + \omega_t$. On calcule alors :

$$\frac{d}{dt}\left\|\alpha(t,p_1) - \alpha(t,p_2)\right\|^2 = 2\langle \alpha(t,p_1) - \alpha(t,p_2), Z_t(p_1) - Z_t(p_2)\rangle \tag{2.23}$$

$$= 2\langle \alpha(t,p_1) - \alpha(t,p_2), [\alpha(t,p_1) - \alpha(t,p_2)] \wedge Y_t\rangle = 0, \tag{2.24}$$

donc $\left\|\alpha(t,p_1) - \alpha(t,p_2)\right\|^2$ est une quantité constante par rapport à t : chaque α_t diffère donc de α_0 par une isométrie euclidienne, la déformation α_t est triviale. □

Lemme 2.15. *Soit S une surface qui s'écrit comme un graphe $F(x,y) = (x,y,f(x,y))^t$ au-dessus du plan horizontal. Une déformation isométrique infinitésimale de S dont la composante verticale est nulle est triviale.*

Démonstration. Le champ Z est de la forme $(Z_1(x,y), Z_2(x,y), 0)$. On utilise le champ de rotation Y de Z. Comme $dZ = dF \wedge Y$:

$$\begin{pmatrix}(Z_1)'_x\\(Z_2)'_x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\f'_x\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-f'_xY_2\\Y_3 - f'_xY_1\\Y_2\end{pmatrix} \tag{2.25}$$

on en déduit que $Y_2 = 0$. De même, de :

$$\begin{pmatrix}(Z_1)'_y\\(Z_2)'_y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\f'_y\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}Y_1\\0\\Y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Y_3\\-Y_1f'_y\\Y_1\end{pmatrix} \tag{2.26}$$

on déduit que $Y_1 = 0$.

En voyant chaque coordonnée d'un champ de vecteurs comme une 0-forme, on a

$$[dZ = df \wedge Y] \Rightarrow [ddZ = d(df \wedge Y) = 0] \Rightarrow [df(X_1) \wedge dY(X_2) - df(X_2)) \wedge dY(X_1) = 0], \tag{2.27}$$

et en prenant les vecteurs (X_1, X_2) adéquats, on obtient :

$$F'_x \wedge Y'_y - F'_y \wedge Y'_x = \begin{pmatrix}0\\1\\f'_y\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\(Y_3)'_x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\f'_x\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\(Y_3)'_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(Y_3)'_x\\-(Y_3)'_y\\0\end{pmatrix} = 0. \tag{2.28}$$

Donc Y est constant et par le lemme 2.13 Z est trivial. □

2.1.4 Déformations de polyèdres

L'histoire des déformations des polyèdres de $\mathbb{R}^3$ (théorème de Cauchy–Legendre, polyèdre flexible de Connelly, conjecture du soufflet etc.) a souvent été exposée, voir par exemple [Con93, Ghy02, Sch04a].

Une surface polyédrale convexe est définie par ses sommets, on peut donc définir les déformations etc. uniquement à partir des sommets.

Définition 2.16. *Une* déformation infinitésimale (polyédrale) *est la donnée d'un vecteur de l'espace pour chaque sommet de la surface polyédrale.*

Définition 2.17. *Une* déformation isométrique infinitésimale (polyédrale) *d'une surface polyédrale est la donnée de :*

- *une triangulation de la surface polyédrale donnée par une triangulaion des faces, telle qu'aucun nouveau sommet n'apparaisse (les arêtes de la triangulation ne se coupent pas),*
- *la restriction d'un champ de Killing à chaque face de la triangulation, de telle sorte que deux champs se correspondent sur les arêtes communes.*

Les arêtes de la triangulation qui n'étaient pas des arêtes de la surface polyédrale sont appelées arêtes additionnelles*.*

Cette définition est un cas particulier d'une "déformation isométrique infinitésimale" telle qu'on l'avait définie dans le cas lisse : si la longueur d'un courbe est préservée au premier ordre sur chaque face qui contient un morceau de la courbe, la longueur totale de la courbe est conservée au premier ordre. Ici on demande en plus que la restriction de la déformation à chaque face soit triviale, puisqu'on voudra déformer des surfaces polyédrales "parmi" les surfaces polyédrales, ce qui implique que les faces ne soient pas "déformées".

Et une déformation isométrique infinitésimale est *triviale* si c'est la restriction à la surface polyédrale d'un champ de Killing global.

Lemme 2.18. *Une déformation isométrique infinitésimale Z est une déformation infinitésimale telle que pour les sommets v et v' d'une même face, on ait*

$$\langle v - v', Z(v) - Z(v')\rangle = 0. \tag{2.29}$$

Démonstration. Par ce qui précède, Z est le champ variationnel d'une déformation qui préserve la métrique au premier ordre, et qu'il suffit de définir aux sommets $\alpha_t := v + tZ(v) + o(t)$. Il suffit alors d'écrire que les distances extrinsèques sont préservées au premier ordre, c'est-à-dire :

$$\| \alpha_t(v) - \alpha_t(v') \|^2 = \| v - v' \|^2 \text{ au premier ordre} \tag{2.30}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \| \alpha_t(v) - \alpha_t(v') \|^2 |_{t=0} = \| v - v' \|^2 \tag{2.31}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \| v + tZ(v) - v' - tZ(v') \|^2 |_{t=0} = \| v - v' \|^2 \tag{2.32}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle v - v', Z(v) - Z(v')\rangle = 0. \tag{2.33}$$

□

2.1.5 Rigidité infinitésimale des coiffes convexes polyédrales qui peuvent avoir un nombre infini de sommets s'accumulant sur le bord

Une *coiffe convexe polyédrale* est une surface polyédrale convexe C, avec un bord ∂C, dans l'espace euclidien, homéomorphe au disque (fermé), telle que ∂C est dans un plan, et telle que la projection orthogonale sur le plan est une bijection entre C et le domaine du plan qui est à l'intérieur de ∂C (modulo une isométrie globale, on suppose que ∂C est dans le plan horizontal).

On montre dans cette partie :

Proposition 2.19. *Si la composante verticale d'une déformation isométrique infinitésimale d'une coiffe convexe polyédrale s'annule au bord, alors la déformation est triviale.*

On remarque que notre définition permet des coiffes convexes polyédrales ayant une infinité de sommets qui s'accumulent sur le bord, ainsi que des déformations infinitésimales qui peuvent diverger au bord.

La preuve n'est pas très éloignée des résultats standards analogues [Pog73].

Comme C est convexe, le link d'un sommet est un polygone convexe sphérique (dont certains angles intérieurs sont peut-être égaux à π, à cause des arêtes additionnelles de C).

On note u la composante verticale d'une déformation isométrique infinitésimale de C. La définition de déformation isométrique infinitésimale implique qu'il s'agit d'un champ de vecteurs continu sur l'intérieur de C. En particulier, u est continue sur l'intérieur de la coiffe convexe.

Modulo une isométrie euclidienne, on considère qu'en un sommet p, $u(p) = 0$. Donc, si la valeur de u est positive (resp. négative) pour un point qui est sur une arête concourante à p, cela signifie que la

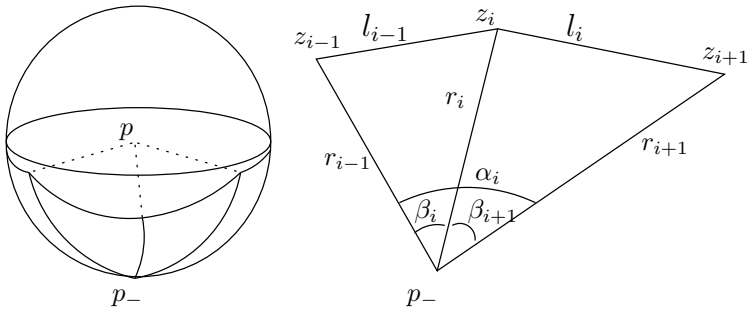


FIG. 2.1 – Quelques notations pour le link en p.

composante verticale de la déformation en ce point est plus grande (resp. plus petite) qu'en p. Cela ne dépend pas du choix du point sur l'arête. En particulier, c'est le cas pour le point qui est envoyé par une homothétie sur un sommet du link.

Dans ce cas, on dit que le sommet du link *monte* (resp. *descend*).

Proposition 2.20. *Le link ne peut pas monter ou descendre, i.e. tous les sommets du link ne peuvent pas monter ou descendre en même temps.*

On construit un cône convexe polyédral sphérique à partir du link en joignant tous les sommets du link au pôle sud - que l'on note p_- - de la sphère qui contient le link. On note $(z_1, \dots, z_n)$ les sommets du link, β_i les angles en p_- entre les segments (sphériques) $p_- z_i$ et $p_- z_{i+1}$, α_i l'angle en p_- entre les segments (sphériques) $p_- z_i$ et $p_- z_{i+2}$ et r_i la longueur du segment (sphérique) entre p_- et z_i (voir la figure 2.1).

Sans perte de généralité, on considère que tous les sommets du link montent. Par définition, la déformation isométrique infinitésimale est isométrique sur les faces de la coiffe convexe polyédrale, ce qui implique que les longueurs $(l_1, \dots, l_n)$ des arêtes du link ne changent pas pendant la déformation : chaque β_i est une fonction de r_{i-1} and r_i.

On rappelle la fameuse "loi des cosinus sphérique". Soit a, b, c les longueurs des arêtes d'un triangle sphérique, et α l'angle au sommet qui est du côté opposé à l'arête de longueur a. Alors

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Lemme 2.21 (Corollaire du lemme de Cauchy, [Ber77, 18.7.16],[Sab04])**.** *Si un quadrilatère (convexe) de la sphère est déformé de telle sorte que les longueurs des arêtes restent constantes pendant la déformation et telle que deux angles opposés augmentent, alors les deux autres angles décroissent (un angle peut être égal à π).*

Lemme 2.22. *Si r_{i-1} et r_{i+1} sont fixés, alors*

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial r_i}(r_{i-1}, r_i) + \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial r_i}(r_i, r_{i+1}) < 0.$$

Démonstration. On appelle θ l'angle en z_{i-1} du triangle (p_-, z_i, z_{i-1}). La "loi des cosinus sphérique" appliquée à ce triangle dit que

$$\cos r_i = \cos l_{i-1} \cos r_{i-1} + \sin l_{i-1} \sin r_{i-1} \cos \theta.$$

Comme l_{i-1} et r_{i-1} sont supposés être fixés, et comme les sinus sont positifs, on déduit de cette formule que θ est une fonction strictement croissante de r_i.

De la même façon, l'angle en z_{i+1} du triangle (p_-, z_{i+1}, z_i) est une fonction strictement croissante de r_i.

Dans ce cas, le corollaire du lemme de Cauchy dit que les angles en p_- et z_i du quadrilatère $(p_-, z_{i+1}, z_i, z_{i-1})$ décroissent. Le premier de ces angles avait été appelé α_i, et c'est la somme de β_i et β_{i+1}. Cela montre que cette somme décroit (strictement) si r_i (et seulement r_i) augmente, ce qui est équivalent à l'énoncé du lemme. □

Preuve de la proposition 2.20. On considère $(\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n)$, où $\dot{r}_i$ est $\frac{d}{dt} r_i(t)|_{t=0}$, c'est-à-dire une défomation (définie sur chaque sommet) du link telle que les sommets montent, i.e. $\dot{r}_i > 0 \ \forall i$. Comme la somme des angles β_j fait le tour de p on a

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 2\pi$$

et ceci reste vrai pendant la déformation :

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{\beta}_j = 0. \tag{2.34}$$

Mais d'un autre côté

$$\dot{\beta}_j = \frac{\partial \beta_j}{\partial r_{j-1}} \dot{r}_{j-1} + \frac{\partial \beta_j}{\partial r_j} \dot{r}_j,$$

et on obtient une contradiction avec le lemme 2.22, en remplaçant dans l'équation (2.34) (en prenant une notation cyclique $\beta_{n+1} = \beta_1$) :

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial r_{j-1}} \dot{r}_{j-1} + \frac{\partial \beta_j}{\partial r_j} \dot{r}_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \beta_k}{\partial r_{k-1}} \dot{r}_{k-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \beta_i}{\partial r_i} \dot{r}_i \\ &\overset{i=k-1}{=} \quad \sum_{i=-1}^{n-1} \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial r_i} \dot{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \beta_i}{\partial r_i} \dot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial \beta_i}{\partial r_i} + \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial r_i}}_{<0} \right) \underbrace{\dot{r}_i}_{>0}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.23. *La fonction u n'atteind pas d'extrémum local dans l'intérieur de la coiffe convexe.*

Démonstration. Supposons qu'un extrémum local est atteind en un sommet p (comme la déformation est isométrique, un extrémum local ne peut pas être atteint en un point qui est sur une face ou sur une arête). Cela signifie que les valeurs de u aux points qui sont sur les arêtes qui partent de p sont toutes plus grandes (ou plus petites) que $u(p)$. Cela implique que le link en p monte (ou descend), ce qui est impossible d'après la proposition précédente. □

Si on fait l'hypothèse que u s'annule au bord, ce corollaire implique que u s'annule pour tous les sommets de la coiffe convexe, et ceci montre la trivialité de la défomation isométrique infinitésimale associée à u. En effet, si la composante verticale d'une déformation isométrique infinitésimale de l'espace euclidien s'annule, alors la déformation est triviale (lemme 2.15 page 28). La proposition 2.19 est alors prouvée.

Remarque 2.24. *Ce dernier argument fait appel à la notion de champ variationnel, qui est défini à l'aide de la différentielle du plongement, chose que l'on ne peut pas faire avec un plongement polyédral, à cause des arêtes et des sommets. Il suffit de remarquer que l'intérieur d'une face est lisse, et donc une déformation isométrique infinitésimale polyédrale peut être vue comme un ensemble de déformations isométriques infinitésimales restreintes chacune à l'intérieur d'une face. En effet, si on connait la déformation sur l'intérieur d'une face, on la connait forcément sur les arêtes et le bord. Ainsi le champ rotationnel est bien defini sur chaque face.*

2.2 Généralisation

Les définitions précédentes ont été données pour $\mathbb{R}^3$, mais elles se généralisent sans problème pour une hypersurface plongée dans une variété riemannienne de dimension quelconque $f : S \to (M, g)$. On note h la métrique induite sur $f(S)$. On se restreindra au cas où M est un espace à courbure constante.

Définition 2.25. *Un champ de vecteurs Z le long de $f(S)$ est une* déformation isométrique infinitésimale *s'il satisfait la relation :*

$$h(\nabla_X Z, Y) + h(\nabla_Y Z, X) = 0, \ \forall X, Y \in T_m S \tag{2.35}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Cività associée à la métrique h.

On constate que la restriction de cette définition au cas de $\mathbb{R}^3$ euclidien correspond bien à la définition qu'on avait donné page 26, puisqu'alors la connexion est la dérivée directionnelle. Les définitions des sous-sections 2.1.1 et 2.1.2 (jusqu'aux cas triviaux) se généralisent sans problème.

La preuve de la proposition suivante est exactement la même que dans le cas de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.26. *Un champ de vecteur Z est une déformation isométrique infinitésimale si et seulement si Z est le champ variationnel d'une déformation de f qui préserve la métrique au premier ordre.*

Champs de Killing. Soit Z un champ de vecteurs sur une variété riemannienne (M, g).

Définition 2.27. *La* dérivée de Lie *de la métrique g suivant le champ de vecteurs Z est :*

$$\begin{aligned} (L_Z g)(X, Y) &:= g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) && (2.36)\\ &= Z.g(X, Y) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X). && (2.37) \end{aligned}$$

Cette définition provient d'une définition plus générale de la dérivée de Lie, voir par exemple [GHL90, 1F4] ; $L_Z g$ est une forme bilinéaire et on dit que l'on *déforme g suivant Z*.

Définition 2.28 (A)**.** *Un* champ de Killing *sur (M,g) est un champ de vecteur Z tel que $L_Z g = 0$.*

Un autre définition possible est de considérer un groupe G agissant par multiplication à gauche sur la variété M. On note cette action, pour un point m de M fixé $R_p : G \to M : p \mapsto pm$.

La différentielle en le neutre de cette application est une application linéaire qui à chaque vecteur Z de l'algèbre de Lie de G fait correspondre un vecteur tangent de M en m, que l'on note $\overline{Z}(m)$:

$$\begin{aligned} (dR_p)_{p=e} \ : \ & T_e G \to T_m M \\ & Z \mapsto \overline{Z}(m). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Si on a un chemin p_t d'éléments de G dont le vecteur tangent en l'origine est Z, alors $\overline{Z}(m) = \frac{d}{dt}(p_t m)|_{t=0}$. Pour un autre point m', on a $\overline{Z}(m') = \frac{d}{dt}(p_t m')|_{t=0}$. On appelle $\overline{Z}$ le *champ de vecteurs fondamental (gauche)* associé à Z.

Définition 2.29 (B)**.** *Dans le cas où G est un groupe agissant par isométries sur la variété riemannienne M, le champ fondamental est appellé* champ de Killing.

Proposition 2.30. *Les définitions A et B sont équivalentes à : un champ de vecteur Z sur une variété riemannienne est un champ de Killing si et seulement si le groupe local à 1-paramètre engendré par Z est constitué d'isométries locales.*

Démonstration. L'équivalence est évidente pour la définition B, il faut prendre $\theta_t = p_t$, où θ_t est le groupe à un paramètre associé à Z.

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^3$, $L_Z g = 0$ est équivalent à dire que le flot de Z préserve la métrique au premier ordre, ce qui s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\theta_t^* g_{\theta_t(x)})|_{t=0} = 0. \tag{2.39}$$

Donc $\theta_t^* g$ est constante près de 0, et comme $\theta_0^* = g$, alors $\theta_t^* g = g$ près de 0. Cette égalité est vraie en tout point de la variété, par exemple en $y = \theta_t(x)$:

$$\frac{d}{dt}(\theta_t^* g_{\theta_t(x)})|_{t=t_1} = 0, \tag{2.40}$$

ainsi $\theta_{t_1}^* g = g$, d'où $\theta_t^* g = g$ pout tout t : les θ_t sont des isométries locales. Ce calcul est une généralisation de celui effectué au lemme 2.14, page 28.

La réciproque est immédiate. □

Propriété 2.31. – *Tout champ de Killing Z sur M est un champ de Jacobi le long de n'importe quelle géodésique de M.*
– *Le crochet de Lie de deux champs de Killing est aussi un champ de Killing.*

Démonstration. – Comme Z est un champ de Killing, il engendre un groupe local à 1-paramètre d'isométries, qui envoient les géodésiques sur les géodésiques, il engendre donc une variation de géodésiques, c'est un champ de Jacobi.
– $L_{[Z,Z']} = L_Z \circ L_{Z'} - L_{Z'} \circ L_Z = 0$ [GHL90, 1.112].

□

Un champ de Killing est donc une "approximation d'une isométrie au premier ordre", c'est pour cela qu'on l'appelle aussi parfois *isométrie infinitésimale*. Les champs de Killing sont en particulier des déformations isométriques infinitésimales de toute la variété (la proposition 2.30 montre qu'une telle déformation définie sur toute la variété est forcément triviale) mais pour éviter les confusions, ils ne seront jamais appelés comme ça.

Soit f un plongement d'une hypersurface S dans une variété riemannienne (M, g). On note h la métrique induite sur $f(S)$ et Z un champ de vecteurs sur S. On a vu que :

$$Z \text{ est une déf. infinitésimale isom. de } (f(S), h) \Leftrightarrow (L_Z h)(X, Y) = 0, \forall\, X, Y \in T_s S,$$
$$Z \text{ est un champ de Killing de } (M, g) \Leftrightarrow (L_Z g)(X, Y) = 0 \,\forall\, X, Y \in T_m M.$$

Si la déformation infinitésimale isométrique Z de $f(S)$ est la restriction à $f(S)$ d'un champ de Killing de M, alors on dit qu'elle est *triviale*. Cette terminologie, restreinte au cas où $M = \mathbb{R}^3$, est équivalente à celle que l'on avait donné.

Chapitre 3

Géométries hyperbolique et lorentzienne

3.1 Généralités

Pour l'essentiel de ce chapitre, on renvoie à [O'N83, GHL90, BEE96, Rat94].

Définitions Une métrique riemannienne sur une variété est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique définie positive (i.e. un produit scalaire) sur le tangent de la variété en chaque point. On généralise cette notion :

Définition 3.1. *Une métrique* pseudo-riemannienne *(pseudo-riemannian ou semi-riemannian) sur une variété est la donnée en chaque point d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace tangent. Si la signature de la forme est* $(n-1,1)$ *($(+,-)$), la métrique sera dite* lorentzienne.

Une métrique riemannienne est une métrique pseudo-riemannienne de signature $(n,0)$.

Les principaux outils de la géométrie riemannienne existent de manière analogue en géométrie pseudo-riemannienne. En effet, la plupart des définitions ne font pas intervenir la signature de la métrique, en particulier celle de la connexion de Levi–Cività, voir [Bes87]. On en déduit les définitions de courbure sectionnelle, géodésiques, champs de Jacobi, application exponentielle, deuxième forme fondamentale et courbure de Gauss pour les hypersurfaces etc.

Par contre les propriétés ne sont plus forcément les mêmes, par exemple une géodésique n'est pas forcément minimisante pour la distance, elle peut même être maximisante (d'ailleurs les métriques lorentziennes n'induisent pas de "distance" au sens habituel). Néanmoins, localement la donnée d'un point et d'un vecteur tangent donne une unique géodésique (il s'agit d'un résultat d'équation différentielle qui ne fait pas intervenir la signature).

La partie sur les champs de Killing est la même en lorentzien ou en riemannien.

La notation $\mathbb{R}_p^{q+p}$ désigne l'espace $\mathbb{R}^{q+p}$ muni d'une forme quadratique

$$q_{q,p}(x) := x_1^2 + \ldots + x_q^2 - x_{q+1}^2 - \ldots - x_{q+p}^2 \tag{3.1}$$

de signature (q,p), qui provient de la forme bilinéaire

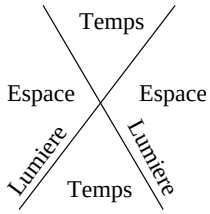
$$\langle y, z\rangle_{q,p} := \sum_{j=1}^{q} y_j z_j - \sum_{i=q+1}^{p} y_i z_i. \tag{3.2}$$

L'espace $\mathbb{R}_p^{q+p}$ est parfois aussi noté $\mathbb{R}^{q,p}$. Pour cette métrique, la connexion de Levi–Cività est la connexion canonique de $\mathbb{R}^n$, et la courbure sectionnelle est nulle (comme dans le cas riemannien, les symboles de Christoffel sont tous nuls).

L'espace $\mathbb{R}_1^n$ est *l'espace de Minkowski* de dimension n.

Par définition, l'espace tangent d'une variété lorentzienne est isométrique à l'espace de Minkowski.

Définition 3.2. *Soit u un vecteur et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{q,p}$ de dimension a moins 2.*
- *u est de* type espace *si $q(u)>0$.*
- *u est de* type temps *si $q(u)<0$.*
- *u est de* type lumière *si $q(u)=0$.*
- *F est de* type espace *si $q|_F$ est définie positive.*
- *F est de* type temps *si $q|_F$ est indéfinie et non-dégénérée.*
- *F est de* type lumière *si $q|_F$ est dégénérée.*



Ces définitons sont évidemment aussi valables pour des vecteurs d'un espaces tangent, et on peut les étendre à des objets qui ne sont pas vectoriels. Par exemple dans le cas type espace :

Définition 3.3.
- *Une sous-variété $N \subset M$ est de type espace si T_xN est de type espace $\forall x \in N$;*
- *Une courbe $c(t)$ est de type espace si $c'(t)$ est de type espace.*

Formule de Gauss lorentzienne. On note M une variété lorentzienne, K_M sa courbure sectionnelle, N une hypersurface de courbure de Gauss K_G et de courbure sectionnelle K_S, le tout en un point x. Si la normale en x est de type temps, alors [O'N83, 4.20]

$$K_S = K_M - K_G, \tag{3.3}$$

et si la normale en x est de type espace, alors

$$K_S = K_M + K_G. \tag{3.4}$$

3.2 Pseudo-sphères de l'espace de Minkowski

On note

$$S_p^n := \{x \in \mathbb{R}_p^{n+1} \setminus \{0\},\ q(x) = 1\}, \tag{3.5}$$
$$H_p^n := \{x \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+1} \setminus \{0\},\ q(x) = -1\}, \tag{3.6}$$

qui sont des quadriques de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ce sont des pseudo-sphères de dimension n de rayon respectivement 1 et i. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_p^n,\ q(x) = 0\}$ est l'*espace isotrope* (ou *cône de lumière*) de $\mathbb{R}_p^n$.

La plupart des propriétés de base de ces hypersurfaces se déduisent de la même façon que celles de la sphère dans l'espace euclidien (dont on redonne en fait les propriétés ici puisqu'il s'agit de S_0^n).

On identifie toujours un point x de H_p^n ou S_p^n avec le vecteur correspondant dans l'espace ambiant. L'espace tangent en x est donc l'orthogonal $x^\perp$. Comme S_p^n est formé de vecteurs de type espace, alors la métrique induite sur son espace tangent est de signature $(n-p, p)$ (on perd une direction positive) et comme H_p^n est formé de vecteurs de type temps, alors la métrique induite sur son espace tangent est de signature $(n-p, p)$ (on perd une direction négative). Ainsi dans la notation S_p^n et H_p^n l'indice p désigne le nombre de directions négatives de la métrique induite.

3.3 Isométries, géodésiques, courbures

Isométries de $\mathbb{R}^n_p$. Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n_p$ est $O(n-p,p) \ltimes \mathbb{R}^n$, où $O(n-p,p)$ est le groupe des éléments de $GL(n,\mathbb{R})$ qui préservent la forme quadratique de signature $(n-p,p)$, soit le groupe semi-orthogonal : $\{A | q_{n-p,p} A = q_{n-p,p}\} = \{A | AJ^tA = J, J = \mathrm{diag}(+1,\dots,+1,-1,\dots,-1)\}$ (il suffit d'écrire $q_{n-p,p}(x,y) = q_{n,0}(Jx,y)$). En particulier, toute matrice semi-orthogonale est de déterminant égal à $+1$ ou -1.

Isométries des pseudo-sphères. Les isométries des pseudo-sphères de l'espace de Minkowski sont les restrictions des isométries de l'espace ambiant qui fixent les pseudo-sphères, donc celles qui préservent la forme bilinéaire : ce sont les $O(n+1-p,p)$ pour les quadriques S^n_p, et les $O(n+1-p,p+1)$ pour les H^n_p. Son action sur les quadriques est transitive pour les points mais aussi pour les repères orthonormés de l'espace tangent (puisque les points de la quadrique sont des vecteurs de l'espace ambiant, orthogonaux aux espaces tangents). Ce sont donc des espaces homogènes de courbure constante.

Le groupe d'isotropie d'un point d'une quadrique est un sous-groupe de $O(q,p)$ qui préserve le vecteur correspondant au point. Ainsi il est isométrique à $O(q,p-1)$ si le vecteur en question est de type temps, et à $O(q-1,p)$ si il est de type espace. Pour les quadriques de type S^n_p et H^n_p, ces groupes d'isotropie sont respectivement $O(n-p,p)$ et $O(n+1-p,p)$.

Géodésiques. Les groupes d'isométries contiennent les réflexions par rapport aux plans vectoriels. Par définition, les pseudo-sphères sont invariantes par les réflexions données par les plans vectoriels définis en prenant n coordonnées nulles (cela inverse juste le signe de ces coordonnées). Et il est facile de voir qu'il existe toujours un hyperplan de ce type tel que l'intersection avec la sphère soit non-vide. Il s'agit donc d'une géodésique, et il en est alors de même pour les intersections de S^n_p et H^n_p avec n'importe quel plans vectoriels (quand elles sont non-vides), et ce sont les seules (pour n'importe quel vecteur tangent v prendre le plan passant pas v et 0). Les sous-variétés totalement géodésiques sont donc les intersections des pseudo-sphères avec des hyperplans vectoriels.

Courbures. Comme la normale unitaire en chaque point est le point lui-même (comme vecteur de l'espace ambiant) et que la connexion de l'espace de Minkowski est la même que celle de l'espace euclidien, alors S^n_p et H^n_p sont de courbure de Gauss égale à 1. D'après la formule de Gauss (équations 3.3 et 3.4), S^n_p est de courbure sectionnelle 1 et H^n_p est de courbure sectionnelle -1.

Lemme 3.4. *L'espace S^n_p est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ et l'espace H^n_p est difféomorphe à $\mathbb{S}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.*

Démonstration. L'image de l'application de $\mathbb{S}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n+1-p} \times \mathbb{R}^p_p = \mathbb{R}^{n+1}_p$

$$\phi_S(x,y) \mapsto ((1+\|y\|^2)^{1/2}x, y) \tag{3.7}$$

(la norme est la norme euclidienne) est S^n_p, et cette application est un difféomorphisme avec

$$\phi_S^{-1}(x,y) \mapsto ((1+\|y\|^2)^{-1/2}x, y). \tag{3.8}$$

Même chose pour H^n_p en prenant la même application, mais cette fois-ci à valeur dans $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^{p+1}_{p+1} = \mathbb{R}^{n+1}_{p+1}$.

□

Espaces modèles. On appelle l'espace lorentzien simplement connexe S^3_1 *l'espace de Sitter* et on le note dS^3. Il est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ et s'écrit comme espace homogéne sous la forme $O(3,1)/O(2,1)$. Par contre son deuxième groupe fondamental n'est pas trivial, ce qui signifie entre autre qu'une sphère plongée dans l'espace de Sitter ne borde pas forcément un ensemble compact.

On utilisera aussi la surface lorentzienne S^2_1 nommée *plan de Sitter* et notée dS^2. Il est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ et s'écrit comme espace homogéne sous la forme $O(2,1)/O(1,1)$.

On appelle l'espace lorentzien H_1^3 *l'espace anti-de Sitter*, et on le note AdS^3. Il est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ (il n'est donc pas simplement connexe) et s'écrit comme espace homogéne sous la forme $O(2,2)/O(2,1)$.

On reconnaît une composante connexe de H_0^n comme *l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^n$. Dans la suite on utilisera souvent la terminologie plan hyperbolique pour $\mathbb{H}^2$ et espace hyperbolique pour $\mathbb{H}^3$.

On notera M_K^- pour désigner celui de ces trois espace lorentzien qui est de courbure K. On rappelle que l'on note M_K^+ l'espace riemannien simplement connexe de courbure K.

Orientation et orientation temps. Un élément de $O(n-1,1)$ s'écrit comme une matrice $\begin{pmatrix} a_e & b \\ c & a_t \end{pmatrix}$ où a_t est une matrice 1×1 (la partie temps) et a_e est une matrice $(n-1) \times (n-1)$ (la partie espace). Le groupe $O(n-1,1)$ est un groupe de Lie non-compact et a quatre composantes connexes ($O(n)$ est compact et a 2 composantes connexes) que l'on décrit de la façon suivante : on dit qu'un élément de $O(n-1,1)$ préserve (resp. renverse) l'orientation temps si $\det a_t > 0$ (resp. < 0) et qu'il préserve (resp renverse) l'orientation espace si $\det a_s > 0$ (resp. < 0). On note $O^{++}(n-1,1)$ (resp. $O^{+-}(n-1,1)$, $O^{-+}(n-1,1)$, $O^{--}(n-1,1)$) l'ensemble des éléments qui préservent l'orientation temps et espace (resp. préservent l'orientation temps et renversent l'orientation espace, etc.).

La terminologie vient du fait que, dans un espace lorentzien, une isométrie peut préserver l'orientation (ce qui est indiqué, pour l'espace de Minkowski, par le signe du déterminant de la matrice associée), mais ceci ne dit rien quand au fait de savoir si l'isométrie préserve ou renverse la direction temps.

On note $SO(n-1,1)$ (groupe spécial orthogonal) le sous-groupe des éléments de $O(n-1,1)$ de déterminant égal à 1, i.e. $SO(n-1,1) = O^{++} \cup O^{--}$; il est composé de la composante connexe de l'identité et de celle de $\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)$. C'est le groupe des isométries préservant l'orientation de l'espace de Minkowski.

Groupe de Lorentz. On note $O^+(n-1,1)$ le sous-groupe des éléments de $O(n-1,1)$ ayant leur première coordonnée (a_t) positive, i.e. $O^+(n-1,1) = O^{++}(n-1,1) \cup O^{+-}(n-1,1)$ et $SO^+(n-1,1) = O^+(n-1,1) \cap SO(n-1,1) = O^{++}(n-1,1)$ (appelé *groupe de Lorentz* pour $n=3$). On note parfois PG pour une notation du type G^+. Cette notation signifie que l'on quotiente le groupe G par son centre.

Le groupe $O^+(n-1,1)$ préserve la nappe supérieure de l'hyperboloïde hyperbolique (changer l'orientation temps revient à changer de nappe). C'est le groupe d'isométrie de l'espace hyperbolique, et le stabilisateur d'un point est isomorphe à $SO(n)$. Le groupe $SO^+(n-1,1)$ est le sous-groupe du groupe des isométries constitué de celles qui fixent l'orientation.

Il y a une autre façon de voir le groupe des isométries de l'espace hyperbolique, si on regarde le modèle du demi-espace (ou de la boule de Poincaré). Elles sont alors constituées de l'extension au demi-espace des transformations de Möbius de l'hyperplan à l'infini (ou, de l'extension à la boule des transformations de Möbius de la sphère). On peut donc montrer que le groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$ est isomorphe à $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n-1})$, le groupe de Möbius généralisé, qui est le groupe des inversions par rapport à des hyperplans et des sphères dans $\hat{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup \infty$. Le groupe des isométries préservant l'orientation est $M(\hat{\mathbb{R}}^{n-1})$, le groupe de Möbius (le sous- groupe du groupe de Möbius généralisé formé des transformations qui préservent l'orientation).

On note $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | \det A = 1\}$ le groupe linéaire spécial complexe, que l'on voit comme le groupe des automorphismes complexes : $\{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}, ad-cd=1, z \in \mathbb{C}\}$ et $SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ le groupe linéaire spécial réel que l'on voit comme le automorphismes réels : $\{x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}, ad-cd=1, z \in \mathbb{R}\}$. On peut alors montrer que $PSL(2,\mathbb{C}) := SL(2,\mathbb{C})/\pm Id$ est isomorphe à $M(\hat{\mathbb{R}}^2)$ et $PSL(2,\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/\pm Id$ est isomorphe à $M(\hat{\mathbb{R}})$, qui sont respectivement $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$. Leurs algèbres de Lie sont respectivement $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | TrA = 0\}$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | TrA = 0\}$.

Ainsi le groupe de Lorentz $SO^+(2,1)$ est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{R})$.

Distance et longueurs. La *distance* (lorentzienne) entre deux points d'un espace M_K^- est la "longueur" de la géodésique reliant ces deux points.

Comme le carré de la norme d'un vecteur peut-être négative, les "longueurs" peuvent être imaginaires pures.

Mais dans la suite, pour la distance entre deux points sur une géodésique de type temps, nous appellerons *distance* et *longueur* le module de la distance décrite au-dessus (ou bien, de façon équivalente, le paramètre de la géodésique entre les deux points, si elle est paramétrée à vitesse unitaire).

3.4 Surfaces ombiliques

Proposition 3.5. *Les hypersurfaces intersections de S_p^n ou H_p^n avec des hyperplans affines sont des hypersurfaces ombiliques.*

Démonstration. Les hyperplans affines sont définis par un vecteur normal constant. Comme il existe un sous-groupe des isométries de l'espace de Minkowski ambiant qui fixe la pseudo-sphère et un vecteur (car $O(q,p)$ fixe les pseudo-sphères et agit transitivement sur les repères orthonormés), alors il existe des isométries de S_p^n (resp. H_p^n) qui fixent globalement l'hypersurface donnée par l'hyperplan affine. Comme les isométries agissent transitivement sur les repères orthonormés, et que l'hypersurface est laissée invariante par des isométries, alors la restriction de ces isométries à l'hypersurface sont des isométries de l'hypersurface, qui envoient les directions principales sur les directions principales, et ceci en tout point, ainsi les courbures principales sont égales en tout point, l'hypersurface est ombilique. □

Corollaire 3.6. *Soit P un plan totalement géodésique de $\mathbb{H}^3$ ou de M_K^-, et x_0 n'appartenant pas à P. Il existe une unique surface ombilique contenant x_0 à distance constante de P.*

De même, si x est un point de $\mathbb{H}^3$ ou de M_K^-, et x_0 différent de x, alors il existe une unique surface ombilique contenant x_0 à distance constante de x.

Démonstration. La surface ombilique est donnée par le plan affine parallèle au plan vectoriel qui définit P et qui contient le point x_0 dans le premier cas. Dans le second, elle est donnée par le plan affine orthogonal à la droite reliant l'origine au point x_0 pour $K \in \{-1, 1\}$. Dans le cas de l'espace de Minkowski il s'agit de l'unique hyperboloïde passant par x_0. L'hypothèse au sujet de la distance constante garanti l'unicité. □

3.4.1 Métrique dans les cônes futurs

Dans ce paragraphe, on sous-entend que les surfaces ombiliques sont de type espace.

Définition 3.7. *Le* cône temps *d'un point x est l'ensemble des géodésiques de type temps partant de x. Le* cône futur *d'un point x est le choix d'une composante connexe du cône temps (pour l'espace de Minkowski et les pseudo-sphères, le choix est conventionnel).*

Pour chaque espace lorentzien, on fixe un point c_K, où K est la courbure, qui est :
- $c_0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}_1^3$
- $c_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}_1^4$
- $c_{-1} = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}_2^4$.

Pour l'espace hyperbolique, on fixe le point $c_h = (0,0,0,1)$.

On note $\mathcal{T}_K$ le cône futur du point c_K dans M_K^-, pour $K = 0, 1$, et on note $\mathcal{T}_{-1}$ l'intersection du cône futur du point c_{-1} dans AdS^3 avec $\{x_4 \geq 0\}$.

Pour l'espace hyperbolique, on note $\mathcal{T}_c$ l'intersection de l'hyperboloïde avec $\{x_1 \geq 0\}$.

On note $P_{\mathbb{H}^2}$ l'intersection de l'espace hyperbolique avec l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$.

Lemme 3.8. *On note g_c la restriction de la métrique de l'espace hyperbolique à $\mathcal{T}_c$. Alors :*

$$g_c = \cosh^2(t)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} + dt^2, \tag{3.9}$$

où t est la distance à $P_{\mathbb{H}^2}$ (le long des géodésiques orthogonales à $P_{\mathbb{H}^2}$).

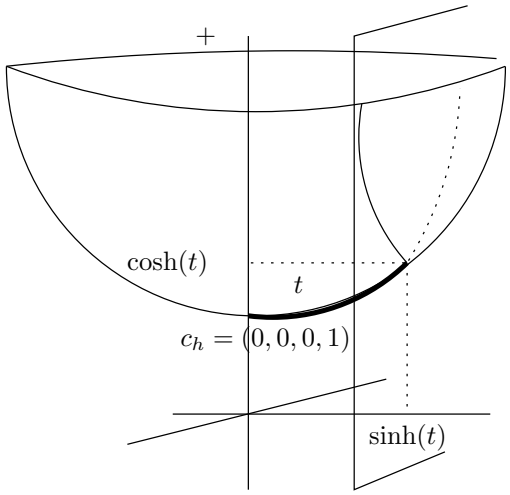


FIG. 3.1 – Surface ombilique dans l'espace hyperbolique (une dimension de moins sur les dessins).

Démonstration. On considère la surface totalement géodésique donnée par l'intersection de l'hyperboloïde avec l'hyperplan vectoriel $\{x_1 = 0\}$ et la surface ombilique est donnée par l'intersection avec $\{x_1 = r\}$.

Alors dans l'hyperplan $\{x_1 = r\}$ l'équation de la surface intersection est

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -(1 + r^2), \tag{3.10}$$

il s'agit d'une hyperboloïde de rayon $\sqrt{1+r^2}$, donc sa métrique induite est $(1+r^2)\text{can}_{\mathbb{H}^2}$, et le paramétrage de l'hyperboloïde indique que $r = \sinh(t)$, d'où le résultat. □

Corollaire 3.9. *La projection sur une surface totalement géodésique est contractante dans l'espace hyperbolique.*

Il s'agit de la projection qui se fait le long des géodésiques orthogonales à $P_{\mathbb{H}^2}$.

On note dS^3_+ l'intersection de dS^3 avec $\{x_4 \geq 0\}$ et Ω_1 l'intersection de dS^3 avec $\{x_1 \geq 0\}$ et avec $\{x_4 \geq 0\}$.

Lemme 3.10. *On note g_1 la restriction de la métrique de l'espace de Sitter à $\mathcal{T}_1$. Alors $\mathcal{T}_1$ est contenu dans Ω_1 et*

$$g_1 = \sinh^2(t)\text{can}_{\mathbb{H}^2} - dt^2, \tag{3.11}$$

où t est la distance à c_1.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de regarder pour quelles valeurs de c l'intersection de l'hyperboloïde avec $\{x_1 = c\}$ donne une surface de type espace. En effet, comme ces surfaces sont à distance constante du point, les géodésiques les reliant au point sont orthogonales aux surfaces, et si elles sont de type espace les géodésiques sont de type temps. On obtient $x_1 > 1$, et comme l'intersection de l'hyperboloïde avec $\{x_4 = 0\}$ est de type espace, le cône futur de x_1 est contenu dans $\{x_4 \geq 0\}$.

La surface ombilique est définie par l'intersection de l'hyperboloïde avec l'hyperplan $\{x_1 = r\}$, $r > 1$.

Alors dans l'hyperplan l'équation de la surface est

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1 - r^2 = -(r^2 - 1), \tag{3.12}$$

il s'agit d'une hyperboloïde de rayon $\sqrt{r^2-1}$, donc sa métrique induite est $(r^2-1)\text{can}_{\mathbb{H}^2}$. Le paramétrage de l'hyperboloïde de Sitter indique que $r = \cosh(t)$, d'où le résultat. □

Corollaire 3.11. *Il existe une unique surface ombilique dans le cône futur de c_1 telle que sa métrique induite soit hyperbolique (i.e. sa courbure sectionnelle est égale à -1).*

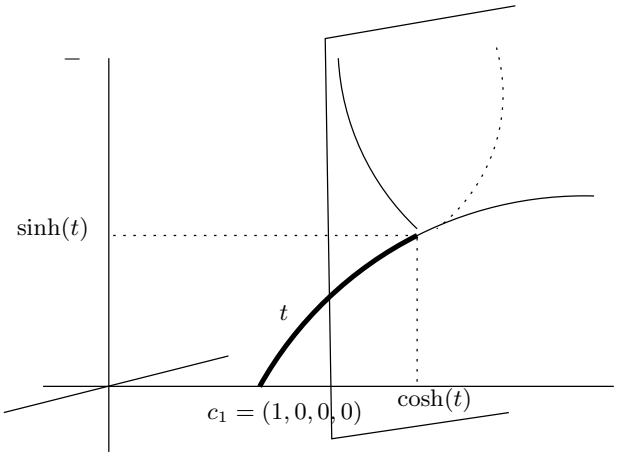


FIG. 3.2 – Surface ombilique dans l'espace de Sitter.

Démonstration. L'équation (3.12) donne immédiatement que la surface hyperbolique est donnée par l'intersection de l'espace de Sitter avec l'hyperplan $\{x_1 = \sqrt{2}\}$. □

Lemme 3.12. *On note g_0 la restriction de la métrique de l'espace de Minkowski sur $\mathcal{T}_0$. Alors :*

$$g_0 = t^2 \mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} - dt^2, \tag{3.13}$$

où t est la distance à c_0.

Démonstration. L'équation de la surface à distance t de c_0 est

$$\|x\|^2 = -t^2, \tag{3.14}$$

donc sa métrique induite est $t^2 \mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. □

On note AdS^3_+ l'intersection de AdS^3 avec $\{x_3 \geq 0\}$ et Ω_{-1} l'intersection de AdS^3 avec $\{x_4 \geq 0\}$ et avec $\{x_3 \geq 0\}$.

Lemme 3.13. *On note g_{-1} la restriction de la métrique de l'espace anti-de Sitter sur $\mathcal{T}_{-1}$. Alors $\mathcal{T}_{-1}$ est contenu dans Ω_{-1} et*

$$g_{-1} = \sin^2(t) \mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} - dt^2, \tag{3.15}$$

où t est la distance à c_{-1}.

Démonstration. Comme dans le cas de Sitter, on regarde l'intersection de l'hyperboloïde avec des hyperplans définis par $\{x_4 = c\}$, où c est une constante. On vérifie facilement que l'intersection est une surface de type espace si et seulement si $x_4 \leq 1$ ($\mathcal{T}_{-1}$ a été défini comme étant dans le demi-espace $\{x_4 \geq 0\}$), et comme l'intersection de l'hyperboloïde avec $x_3 = 0$ est de type espace, le cône futur de c_{-1} est dans $\{x_3 \geq 0\}$.

Dans l'hyperplan $\{x_4 = r\}$ l'équation de la surface donnée par l'intersection avec l'hyperboloïde est

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 + r^2 = -(1 - r^2), \tag{3.16}$$

il s'agit d'une hyperboloïde de rayon $\sqrt{1 - r^2}$, donc sa métrique induite est $\sqrt{1 - r^2}\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. Le paramétrage de cette partie de l'espace anti-de Sitter indique que $r = \cos(t)$, d'où le résultat. □

Corollaire 3.14. *Il existe une unique surface ombilique dans le cône futur de c_{-1} telle que sa métrique induite soit hyperbolique.*

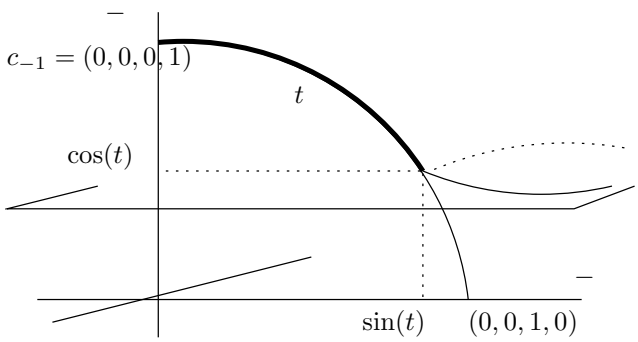


FIG. 3.3 – Surface ombilique dans l'espace anti-de Sitter.

Démonstration. Même chose que dans le cas de Sitter. □

Lemme 3.15. *Le sous-groupe des isométries qui préservent l'orientation et l'orientation temps de M_K^- qui fixent un point est isomorphe à $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Si il fixe l'orientation temps, alors il fixe la branche d'hyperboloïde trouvée dans les preuves des lemmes ci-dessus, donc il agit sur le plan hyperbolique. □

Cet isomorphisme sera détaillé plus loin.

3.4.2 Fonctions coordonnées

On note t la distance au point c_K.

Lemme 3.16. *(Minkoswki) On note $u := \frac{1}{2}t^2$. Alors, en reprennant les notations du lemme 3.12 :*

$$g_0 = u\text{can}_{\mathbb{H}^2} - \frac{du^2}{u}, \tag{3.17}$$

de plus,

$$\text{Hess}(u) = -g_0. \tag{3.18}$$

(Hyperbolique) On note $u := \sinh(t)$. Alors, en reprennant les notations du lemme 3.8 :

$$g_c = (1 + u^2)\text{can}_{\mathbb{H}^2} + \frac{du^2}{1 + u^2}, \tag{3.19}$$

de plus,

$$\text{Hess}(u) = -ug_1. \tag{3.20}$$

(De Sitter) On note $u := \cosh(t)$. Alors, en reprennant les notations du lemme 3.10 :

$$g_1 = (u^2 - 1)\text{can}_{\mathbb{H}^2} - \frac{du^2}{u^2 - 1}, \tag{3.21}$$

de plus,

$$\text{Hess}(u) = -ug_1. \tag{3.22}$$

(Anti-de Sitter) On note $u := \cos(t)$. Alors, en reprennant les notations du lemme 3.13 :

$$g_{-1} = (1 - u^2)\text{can}_{\mathbb{H}^2} - \frac{du^2}{(1 - u^2)^2}, \tag{3.23}$$

de plus,

$$\text{Hess}(u) = ug_{-1}. \tag{3.24}$$

Démonstration. Les expressions des métriques sont évidentes. L'expression du hessien dans l'espace de Minkowski est directe puisque u est juste moins la norme au carré. Pour les autres hessiens, les formules viennent d'un calcul général sur les restrictions à des pseudo-sphères de formes linéaires (ce que sont les fonctions u, puisqu'elles correspondent à une coordonnée des points dans les espaces ambiants), voir [GHL90, Ex. 2.65,b)]. □

3.4.3 Métriques sur l'extérieur des cônes futurs

Dans ce paragraphe, on sous-entend que les surfaces ombiliques sont de type temps.

Lemme 3.17. *La restriction de la métrique de l'espace de Minkowski à l'extérieur du cône temps de c_0 s'écrit*

$$t^2 \mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} + dt^2, \tag{3.25}$$

où t est la distance à c_0 et $\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$ la métrique canonique de l'espace de Sitter de dimension 2.

Démonstration. L'équation de la surface à distance t de c_0 est

$$\|x\|^2 = t^2, \tag{3.26}$$

donc sa métrique induite est $t^2 \mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. □

Lemme 3.18. *La restriction de la métrique de l'espace de Sitter à l'intersection de $\{x_1 \geq 0\}$ et de l'extérieur du cône temps de c_1 s'écrit*

$$\sin^2(t) \mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} + dt^2, \tag{3.27}$$

où t est la distance à c_1 et $\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$ la métrique canonique de l'espace de Sitter de dimension 2.

Démonstration. Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 3.10, l'intersection de l'extérieur du cône temps et de la partie $\{x_1 \geq 0\}$ est l'intersection de l'espace de Sitter avec $\{0 \leq x_1 < 1\}$. L'équation de la surface intersection de l'espace de Sitter avec l'hyperplan $\{x_1 = r, 0 \leq r < 1\}$ s'écrit

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1 - r^2, \tag{3.28}$$

il s'agit d'une hyperboloïde de rayon $\sqrt{1-r^2} > 0$, donc sa métrique induite est $(1-r^2)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. Le paramétrage de l'hyperboloïde de Sitter indique que $r = \cos(t)$, d'où le résultat. □

Lemme 3.19. *La restriction de la métrique de l'espace anti-de Sitter à l'intersection de l'extérieur du cône temps de c_{-1} et de Ω_{-1} s'écrit*

$$\sinh^2(t) \mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} + dt^2, \tag{3.29}$$

où t est la distance à c_{-1} et $\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$ la métrique canonique de l'espace de Sitter de dimension 2.

Démonstration. Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 3.13, l'intersection de l'extérieur du cône temps et de la partie $\{x_4 \geq 0\}$ est l'intersection de l'espace anti-de Sitter avec $\{x_4 > 1\}$. L'équation de la surface intersection de l'espace de Sitter avec l'hyperplan $\{x_4 = r, r > 1\}$ s'écrit

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 + r^2, \tag{3.30}$$

il s'agit d'une hyperboloïde de rayon $\sqrt{-1+r^2} > 0$, donc sa métrique induite est $(-1+r^2)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. Le paramétrage de l'hyperboloïde anti-de Sitter indique que $r = \cosh(t)$, d'où le résultat. □

3.5 Modèles projectifs

3.5.1 Applications projectives de Klein

3.5.1.1 Hyperbolique-euclidien

La notation $\mathbb{I}^3$ désigne la composante supérieure de la quadrique qui représente l'espace hyperbolique dans l'espace de Minkowski.

Si B^3 est la boule unité de l'espace euclidien, on a le difféomorphisme classique

$$\begin{array}{c} \varphi_{H-E} : \mathbb{I}^3 \to B^3 \\ x \mapsto x/x_4, \end{array} \tag{3.31}$$

où x_4 est la coordonnée négative de $x := (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

On voit cette application comme une application projective de l'espace hyperbolique dans l'espace euclidien (l'hyperplan $\{x_4 = 1\}$ correspond au plan tangent de l'espace hyperbolique en c_h, il est donc naturellement munit d'une structure euclidienne).

L'application projective envoie c_h sur 0 et le cône de lumière de c_h sur la sphère unité. Ce modèle est appelé le *modèle projectif de Klein*, et dans ce modèle, la sphère unité est le *bord à l'infini* de l'espace hyperbolique.

Lemme 3.20. *Si x est à distance μ de c_h dans $\mathbb{I}^3$, alors $\varphi_{H-E}(x)$ est à distance $\tanh(\mu)$ de $\varphi_{H-E}(c_h) = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. Les coordonnées de x sont (x_1, x_2, x_3, x_4) et on sait que $x_4 = \cosh(\mu)$, donc

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 + \cosh(\mu)^2 = \sinh^2(\mu), \tag{3.32}$$

$$\left\| \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{x_4} \|(x_1, x_2, x_3)\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{\sinh(\mu)}{\cosh(\mu)} = \tanh(\mu). \tag{3.33}$$

□

Ce lemme peut se formuler aussi (une *sphère* de rayon μ dans $\mathbb{I}^3$ est l'ensemble des points à distance μ du centre c_h) :

Lemme 3.21. *Une sphère de rayon μ dans $\mathbb{I}^3$ est envoyée sur une sphère de rayon $\tanh(\mu)$ par l'application projective.*

La preuve peut aussi être donnée par le théorème de Thalès, voir la figure 4.2 page 69.

Lemme 3.22. *On fixe un réel t et on note $\mu = \tanh^{-1}(t)$, I_μ et II_μ les premières et secondes formes fondamentales de la sphère de rayon μ dans $\mathbb{I}^3$, et $\overline{\mathrm{I}}_t$ et $\overline{\mathrm{II}}_t$ les premières et secondes formes fondamentales de la sphère de rayon t dans $\mathbb{R}^3$. Alors on a*

$$\mathrm{I}_\mu = \cosh^2(\mu)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\mu = \cosh^2(\mu)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.34}$$

Démonstration. Si on note $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ la métrique canonique de la sphère unité, le lemme précédent donne $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2} = \tanh^2(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ et $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2} = \tanh(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. Le paramétrage de l'hyperboloïde donne que $\mathrm{I}_\mu = \sinh^2(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. Donc la courbure sectionnelle de la sphère est $1/\sinh^2(\mu)$, sa courbure de Gauss est $\coth^2(\mu)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique alors $\mathrm{II}_\mu = \coth^2(\mu)\mathrm{I}_\mu = \sinh(\mu)\cosh(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. □

Lemme 3.23. *L'image par l'application projective φ_{H-E} d'une surface ombilique à distance μ d'une surface totalement géodésique est une demi-ellipsoïde tangente à la boule le long de l'équateur, de rayons $(1, 1, r)$, où $r = \tanh(\mu) < 1$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que l'équation du plan ombilique soit $E = \{x \in \mathbb{I}^3, x_3 = \epsilon\}$, où $\epsilon = \sinh(\mu)$ est une constante strictement positive. En remplaçant dans l'équation de l'hyperboloïde, on obtient

$$x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + \epsilon^2 + 1, \tag{3.35}$$

et en divisant par x_4^2 et en réordonnant les termes,

$$\frac{1}{\epsilon^2+1}(1 - \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2) = \frac{1}{x_4^2}, \tag{3.36}$$

où $\overline{x}_i = \dfrac{x_i}{x_4}$ est une composante de l'image de x par la projection φ_H.

On applique φ_H à l'hyperboloïde :

$$1 = \frac{1}{x_4^2} + \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2, \tag{3.37}$$

et l'image de E est donnée par :

$$1 = \frac{1}{\epsilon^2+1}(1 - \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2) + \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2. \tag{3.38}$$

En réordonnant les termes :

$$\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \frac{\overline{x}_3^2}{r^2} = 1, \tag{3.39}$$

avec $r = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2+1}} = \tanh(\mu)$. Il s'agit bien de l'équation d'une ellipsoïde, de rayons $(1, 1, r)$, donc tangente à la boule à l'équateur. De plus l'image de E n'est qu'une demi-ellipsoïde, puisque $\overline{x}_3 = \dfrac{x_3}{x_4}$ est de signe constant (x_3 est constant et $x_4 > 0$). □

3.5.1.2 De Sitter-euclidien

L'application projective précédente peut aussi être appliquée à l'espace de Sitter. On note $\mathcal{C}$ la sphère de rayon 1 intersection de l'espace de Sitter avec l'hyperplan défini par $x_4 = 0$ et le point c_1 est toujours $(1, 0, 0, 0)$. On a la même projection que dans le cas hyperbolique :

$$\begin{array}{c} \varphi_{\mathrm{dS}-E} : \mathrm{dS}^3_+ \to \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^3} \\ x \mapsto x/x_4. \end{array} \tag{3.40}$$

Les points sur $\mathcal{C}$, en particulier c_1, sont envoyés à l'infini par la projection.

On définit le *bord à l'infini de l'espace de Sitter* comme étant la sphère unité de l'espace euclidien dans ce modèle (aussi appelé modèle de Klein de l'espace de Sitter).

Dans ce contexte, on appelle une *sphère de l'espace de Sitter* une surface à distance constante de $\mathcal{C}$, où la distance est donnée par les géodésiques de type temps orthogonales à $\mathcal{C}$ (i.e. les intersections de dS^3_+ avec des hyperplans de la forme $\{x_4 = cst\}$).

Lemme 3.24. *Une sphère à distance ν de $\mathcal{C}$ dans dS^3_+ est envoyée sur une sphère de rayon $\coth(\nu)$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. Soit un point x sur une telle sphère dans dS^3_+. On sait que $x_4 = \sinh(\nu)$, donc

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 + \sinh(\nu)^2 = \cosh^2(\nu) \tag{3.41}$$

$$\left\| \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{x_4} \left\| (x_1, x_2, x_3) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{\cosh(\nu)}{\sinh(\nu)} = \coth(\nu). \tag{3.42}$$

□

Lemme 3.25. *Pour chaque $t > 1$, soit $\overline{S}_t$ la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon t. Soit $\nu := \coth^{-1}(t)$, et posons $S_\nu := \varphi_{\mathrm{dS}-E}^{-1}(\overline{S}_t)$. Soient I_ν, II_ν, $\overline{\mathrm{I}}_t$, $\overline{\mathrm{II}}_t$ les métriques induites et deuxièmes formes fondamentales sur S_ν et $\overline{S}_t$. Alors*

$$\mathrm{I}_\nu = \sinh^2(\nu)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\nu = \sinh^2(\nu)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.43}$$

Démonstration. Si on note $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ la métrique canonique de la sphère ronde, le lemme précédent donne $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2} = \coth^2(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ et $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2} = \coth(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. Le paramétrage de l'espace de de Sitter donne que $\mathrm{I}_\nu = \cosh^2(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. En particulier, la courbure sectionnelle de la sphère est $1/\cosh^2(\nu)$, donc sa courbure de Gauss est $\tanh^2(\nu)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique, on a $\mathrm{II}_\nu = \tanh(\nu)\mathrm{I}_\nu = \cosh(\nu)\sinh(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$. □

Lemme 3.26. *L'image par l'application projective $\varphi_{\mathrm{dS}-E}$ d'une surface ombilique à distance ν de c_1 est un demi-ellipsoïde tangent à la boule le long de l'équateur, de rayons $(1, 1, r)$, où $r = \coth(\nu) > 1$.*

Démonstration. Le calcul est exactement le même que pour le cas hyperbolique (avec $\epsilon = \cosh(\nu) > 1$). □

3.5.2 Applications projectives de Minkowski

3.5.2.1 De Sitter-Minkowski

Dans la section précédente, on a projeté l'espace de Sitter sur l'hyperplan $\{x_4 = 1\}$ où x_4 est la direction négative. On peut aussi projeter (par exemple) sur l'hyperplan $\{x_1 = 1\}$, où x_1 est une direction positive. A ce moment là, la direction négative est projetée sur un vecteur non-nul : on peut voir cette application comme une application projective de l'espace de Sitter sur l'espace de Minkowski de dimension 3 :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{dS}-M} : \Omega_1 &\to \mathbb{R}^3_1 \\ x &\mapsto x/x_1, \end{aligned} \tag{3.44}$$

où Ω_1 est l'intersection de dS^3 avec $\{x_1 \geq 0\}$ et avec $\{x_4 \geq 0\}$ (en fait il suffit de se restreindre à l'intersection avec $\{x_1 \geq 0\}$ pour atteindre tout l'espace de Minkowski, mais les deux parties se correspondent par une isométrie globale, et les surfaces que nous considérerons seront contenues dans Ω_1).

Cet hyperplan peut aussi être vu comme l'hyperplan tangent à l'espace de Sitter en $c_1 := (1, 0, 0, 0)$, il est donc naturellement un espace $\mathbb{R}^3_1$.

Le point c_1 est envoyé sur l'origine de l'espace de Minkowski. On voit facilement que les géodésiques de types temps (resp. espace, lumière) sont envoyées sur des géodésiques de types temps (resp. espace, lumière), ainsi les surfaces de type espace sont envoyées sur des surfaces de type espace.

Dans ce modèle, appelé le modèle projectif de Minkowsi de l'espace de Sitter, le *bord à l'infini* est l'hyperboloïde définie par $a^2 + b^2 - c^2 = -1$, et dS^3_+ est envoyé entre la nappe supérieure de cette hyperboloïde et le cône de lumière.

Ici une *sphère de l'espace de Sitter* est une surface de Ω_1 à distance constante de c_1 et une *sphère de l'espace de Minkowski* est une surface à distance constante de l'origine. Il y a des sphères de type espace et des sphères de type temps, qui sont envoyées par l'application projective sur respectivement des sphères de type espace et des sphères de type temps (nous n'incluons pas le cône de lumière de c_1 dans la définition de sphère).

Lemme 3.27. *Une sphère de type espace et de rayon ν dans Ω_1 est envoyée par l'application projective sur une sphère (de type espace) de rayon $\tanh(\nu)$ dans $\mathbb{R}^3_1$.*

Démonstration. Soit x un point sur la sphère dans l'espace de Sitter. Quitte à changer de coordonnées, on peu considérer que la géodésique entre c_1 et x est donnée par le plan vectoriel engendré par les coordonnées x_1 et x_4. Ainsi $x_1 = \cosh(\nu)$, et alors

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1 - \cosh(\nu)^2 = -\sinh^2(\nu), \tag{3.45}$$

$$\left\| \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1} \right) \right\|^2_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{1}{x_1} \|(x_4, x_2, x_3)\|^2_{\mathbb{R}^3_1} = -\frac{\sinh^2(\nu)}{\cosh^2(\nu)} = -\tanh^2(\nu). \tag{3.46}$$

□

Lemme 3.28. *Une sphère de type temps et de rayon θ dans Ω_1 est envoyée par l'application projective sur une sphère (de type temps) de rayon* $\tan(\theta)$ *dans* $\mathbb{R}^3_1$.

Démonstration. Soit x un point sur la sphère dans l'espace de Sitter. Quitte à changer de coordonnées, on peu considérer que la géodésique entre c_1 et x est donnée par le plan vectoriel engendré par les coordonnées x_1 et x_2. Ainsi $x_1 = \cos(\theta)$, et alors

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = -\sin^2(\theta), \tag{3.47}$$

$$\left\| \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1} \right) \right\|^2_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{1}{x_1} \|(x_4, x_2, x_3)\|^2_{\mathbb{R}^3_1} = -\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = -\tan^2(\theta). \tag{3.48}$$

□

Lemme 3.29. *Pour chaque $t > 1$, soit $\overline{S}_t$ la sphère de type espace de $\mathbb{R}^3_1$ de rayon t. Soit $\nu := \tanh^{-1}(t)$, et posons $S_\nu := \varphi^{-1}_{\mathrm{dS}-M}(\overline{S}_t)$. Soient I_ν, II_ν, $\overline{\mathrm{I}}_t$, $\overline{\mathrm{II}}_t$ les métriques induites et deuxièmes formes fondamentales sur S_ν et $\overline{S}_t$. Alors*

$$\mathrm{I}_\nu = \cosh^2(\nu)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\nu = \cosh^2(\nu)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.49}$$

Démonstration. On note $\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$ la métrique hyperbolique. On sait que $\mathrm{I}_\nu = \sinh^2(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$ (lemme 3.10 page 39) et que $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} = \tanh^2(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. La courbure sectionnelle de la surface S_ν est $-1/\sinh^2(\nu)$, donc sa courbure de Gauss est $\coth^2(\nu)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique, on a $\mathrm{II}_\nu = \coth(\nu)\mathrm{I}_\nu = \cosh(\nu)\sinh(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. De la même façon, $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} = \tanh(\nu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. □

Lemme 3.30. *Pour chaque $t \leq 1$, soit $\overline{S}_t$ la sphère de type temps de $\mathbb{R}^3_1$ de rayon t. Soit $\theta := \tan^{-1}(t)$, et posons $S_\theta := \varphi^{-1}_{\mathrm{dS}-M}(\overline{S}_t)$. Soient I_θ, II_θ, $\overline{\mathrm{I}}_t$, $\overline{\mathrm{II}}_t$ les métriques induites et deuxièmes formes fondamentales sur S_θ et $\overline{S}_t$. Alors*

$$\mathrm{I}_\theta = \cos^2(\theta)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\theta = \cos^2(\theta)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.50}$$

Démonstration. On sait que $\mathrm{I}_\theta = \sin^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$ (lemme 3.18) et que $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} = \tan^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. La courbure sectionnelle de la surface S_θ est $1/\sin^2(\theta)$, donc sa courbure de Gauss est $\cot^2(\theta)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique, on a $\mathrm{II}_\theta = \cot(\theta)\mathrm{I}_\theta = \cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. De la même façon, $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} = \tan(\theta)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. □

3.5.2.2 Hyperbolique-Minkowski

L'application projective définie au-dessus donne un difféomorphisme entre (l'intersection avec le demi-espace $\{x_1 \geq 0\}$ de) l'hyperboloïde et une partie de l'espace de Minkowski :

$$\begin{array}{c} \varphi_{H-M} : \mathbb{I}^3 \to \mathbb{R}^3_1 \\ x \mapsto x/x_1. \end{array} \tag{3.51}$$

L'image est l'intérieur de la nappe supérieure de l'hyperboloïde définie par $a^2 + b^2 - c^2 = -1$, hyperboloïde qui correspond au bord à l'infini dans ce modèle.

Lemme 3.31. *Une sphère de rayon μ dans $\mathbb{I}^3$ est envoyée par la projection sur une sphère de rayon* $\coth(\mu)$ *dans* $\mathbb{R}^3_1$.

Démonstration. Soit x un point sur la sphère dans l'espace hyperbolique. Comme $x_1 = \sinh(\mu)$, alors

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1 - \sinh(\mu)^2 = -\cosh^2(\mu), \tag{3.52}$$

$$\left\| \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1} \right) \right\|^2_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{1}{x_1} \|(x_2, x_3, x_4)\|^2_{\mathbb{R}^3_1} = -\frac{\cosh^2(\mu)}{\sinh^2(\mu)} = -\coth^2(\mu). \tag{3.53}$$

□

Lemme 3.32. *Pour chaque $t > 1$, soit $\overline{S}_t$ la sphère de $\mathbb{R}^3_1$ de rayon t. Soit $\mu := coth^{-1}(t)$, et posons $S_\nu := \varphi^{-1}_{H-M}(\overline{S}_t)$. Soient I_ν, II_ν, $\overline{\mathrm{I}}_t$, $\overline{\mathrm{II}}_t$ les métriques induites et deuxièmes formes fondamentales sur S_ν et $\overline{S}_t$. Alors*

$$\mathrm{I}_\mu = \sinh^2(\mu)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\mu = \sinh^2(\mu)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.54}$$

Démonstration. On note $\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$ la métrique hyperbolique. On sait que $\mathrm{I}_\mu = \cosh^2(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$ (lemme 3.1 page 39) et que $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} = \coth^2(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. La courbure sectionnelle de la surface S_μ est $-1/\cosh^2(\mu)$, donc sa courbure de Gauss est $\tanh^2(\mu)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique, on a $\mathrm{II}_\mu = \tanh(\mu)\mathrm{I}_\mu = \sinh(\mu)\cosh(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. De la même façon, $\mathrm{II}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} = \coth(\mu)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. □

3.5.2.3 Anti-de Sitter-Minkowski centrale

On envoie la partie Ω_{-1} de l'espace anti-de Sitter AdS^3 sur l'espace de Minkowski via la projection sur l'hyperplan $\{x_4 = 1\}$ (les coordonnées négatives sont x_3 et x_4) :

$$\begin{array}{c} \varphi^c_{\mathrm{AdS}-M} : \mathrm{AdS}^3 \to \mathbb{R}^3_1 \\ x \mapsto x/x_4. \end{array} \tag{3.55}$$

Cet hyperplan peut aussi être vu comme l'hyperplan tangent à l'espace anti-de Sitter en $c_{-1} := (0,0,0,1)$, il est donc naturellement un espace $\mathbb{R}^3_1$. Cette application projective envoie c_{-1} sur l'origine, et elle envoie le cône de lumière de $\mathbb{R}^4_2$ sur l'hyperboloïde à une nappe et l'espace anti-de Sitter à l'intérieur de celle-ci et le cône futur de c_{-1} est envoyé sur le cône futur de l'origine .

On appelle une *sphère* de type espace (resp. de type temps) de l'espace anti-de Sitter une surface de type espace (resp. de type temps) dans Ω_{-1} à distance constante de c_{-1} et une sphère de type espace (resp. de type temps) de l'espace de Minkowski est toujours une surface à distance constante de l'origine.

Lemme 3.33. *Une sphère de type espace de rayon θ dans AdS^3 est envoyée par l'application projective sur une sphère de rayon $\tan(\theta)$ dans $\mathbb{R}^3_1$.*

Démonstration. Prenons un point x sur une sphère à distance θ de c_{-1}. Alors $x_4 = \cos(\theta)$, ainsi

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 + \cos(\theta)^2 = \sin^2(\theta), \tag{3.56}$$

$$\left\| \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right) \right\|_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{1}{x_4} \left\| (x_1, x_2, x_3) \right\|_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta). \tag{3.57}$$

□

Lemme 3.34. *Une sphère de type temps de rayon ν dans AdS^3 est envoyée par l'application projective sur une sphère de rayon $\tanh(\nu)$ dans $\mathbb{R}^3_1$.*

Démonstration. Prenons un point x sur une sphère à distance ν de c_{-1}. Alors $x_4 = \cosh(\theta)$, ainsi

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 + \cosh(\nu)^2 = \sinh^2(\nu), \tag{3.58}$$

$$\left\| \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right) \right\|_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{1}{x_4} \left\| (x_1, x_2, x_3) \right\|_{\mathbb{R}^3_1} = \frac{\sinh(\nu)}{\cosh(\nu)} = \tanh(\nu). \tag{3.59}$$

□

Lemme 3.35. *Pour chaque $t > 0$, soit $\overline{S}_t$ la sphère de type espace $\mathbb{R}^3_1$ de rayon t. Soit $\theta := \tan^{-1}(t)$, et posons $S_\theta := \varphi^{-1}_{\mathrm{AdS}-M}(\overline{S}_t)$. Soient I_θ, II_θ, $\overline{\mathrm{I}}_t$, $\overline{\mathrm{II}}_t$ les métriques induites et deuxièmes formes fondamentales sur S_θ et $\overline{S}_t$. Alors*

$$\mathrm{I}_\theta = \cos^2(\theta)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\theta = \cos^2(\theta)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.60}$$

Démonstration. On a vu que $\mathrm{I}_\theta = \sin^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$ (lemme 3.13 page 40) et que $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} = \tan^2(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. On a toujours $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2} = \tan(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$, et comme la courbure sectionnelle de S_θ est $-1/\sin^2(\theta)$, sa courbure de Gauss est $\cot^2(\theta)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique, on a $\mathrm{II}_\theta = \cot(\theta)\mathrm{I}_\theta = \cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{can}_{\mathbb{H}^2}$. □

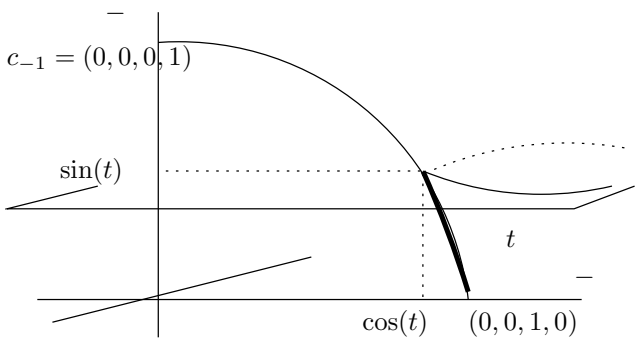


FIG. 3.4 –

Lemme 3.36. *Pour chaque $0 < t < 1$, soit $\overline{S}_t$ la sphère de type temps de $\mathbb{R}^3_1$ de rayon t. Soit $\nu := \tanh^{-1}(t)$, et posons $S_\nu := \varphi^{-1}_{\mathrm{AdS}-M}(\overline{S}_t)$. Soient I_ν, II_ν, $\overline{\mathrm{I}}_t$, $\overline{\mathrm{II}}_t$ les métriques induites et deuxièmes formes fondamentales sur S_ν et $\overline{S}_t$. Alors*

$$\mathrm{I}_\nu = \cosh^2(\nu)\overline{\mathrm{I}}_t,\ \mathrm{II}_\nu = \cosh^2(\nu)\overline{\mathrm{II}}_t. \tag{3.61}$$

Démonstration. On a vu que $\mathrm{I}_\nu = \sinh^2(\nu)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$ (lemme 3.19) et que $\overline{\mathrm{I}}_t = t^2\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} = \tanh^2(\nu)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. On a toujours $\overline{\mathrm{II}}_t = t\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2} = \tanh(\nu)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$, et comme la courbure sectionnelle de S_ν est $1/\sinh^2(\nu)$, sa courbure de Gauss est $\coth^2(\nu)$, et comme il s'agit d'une surface ombilique, on a $\overline{\mathrm{II}}_\nu = \coth(\nu)\mathrm{I}_\nu = \cosh(\nu)\sinh(\nu)\mathrm{can}_{\mathrm{dS}^2}$. □

3.5.2.4 Anti-de Sitter-Minkowski duale

On envoie la partie Ω_{-1} de l'espace anti-de Sitter AdS^3 sur l'espace de Minkowski via la projection sur l'hyperplan $\{x_3 = 1\}$ (les coordonnées négatives sont toujours x_3 et x_4) :

$$\begin{array}{c}\varphi^d_{\mathrm{AdS}-M} : \mathrm{AdS}^3 \to \mathbb{R}^3_1 \\ x \mapsto x/x_3.\end{array} \tag{3.62}$$

Cette application projective envoie c_{-1} à l'infini, le cône de lumière sur l'hyperboloïde à une nappe et l'espace anti-de Sitter à l'intérieur de celle-ci. L'unique surface ombilique hyperbolique contenue dans le cône futur de c_{-1} est envoyée sur le disque unité horizontal.

On note c^d_{-1} le point $(0,0,1,0)$, qui est envoyé sur l'origine de l'espace de Minkowski. L'hyperplan sur lequel on projette peut être vu comme l'hyperplan tangent à l'espace anti-de Sitter en c^d_{-1}, il est donc naturellement un espace $\mathbb{R}^3_1$.

Dans ce paragraphe, une *sphère* de l'espace anti-de Sitter est une surface dans Ω_{-1} à distance constante de c^d_{-1}, et une sphère de l'espace de Minkowski est toujours une surface (de type espace) à distance constante de l'origine.

On remarque que les coordonnées d'un point à distance t de c^d_{-1} sont les mêmes que les coordonnées d'un point à distance t de c_{-1} (comparer les figures 3.3 et 3.4).

Et comme x_3 et x_4 jouent des rôles symétriques dans la définition de l'espace anti-de Sitter, on a exactement les mêmes propriétés pour les sphères que dans le paragraphe précédent.

On aura aussi besoin de décrire l'image des surfaces ombiliques (i.e. les surfaces de type espace à distance constante de c_{-1}) dans ce modèle :

Lemme 3.37. *Avec l'application projective $x \mapsto x/x_3$, une surface ombilique à distance t de c_{-1} est envoyée sur une demi-ellipsoïde de rayons $(1, 1, \mathrm{cotan}(t))$.*

Le calcul est analogue à celui du cas hyperbolique.

3.6 Ensembles convexes

Produit vectoriel Minkowski. On note $\langle , \rangle_m$ la forme bilinéaire de signature $(3,1)$. On rappelle que J est la matrice de $\langle , \rangle_m$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.63}$$

c'est-à-dire que $\langle x, y\rangle_m = \langle Jx, y\rangle = \langle x, Jy\rangle$, où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire usuel.

On définit le *produit vectoriel Minkowski* adapté à $\langle , \rangle_m$ de la façon suivante :

$$(a \wedge b \wedge c)_m := J(a \wedge b \wedge c), \tag{3.64}$$

(le produit vectoriel de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est un vecteur de $\mathbb{R}^4$ dont le ïi¿$\frac{1}{2}$e coefficient est $(-1)^{i+1}$ fois le déterminant de la matrice (a, b, c) moins sa $i$ème ligne).

On remarque que l'on a

$$Ja \wedge Jb \wedge Jc = -J(a \wedge b \wedge c), \tag{3.65}$$

et cette propriété permet de déduire du cas euclidien l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle (a \wedge b \wedge c)_m, (a' \wedge b' \wedge c')_m \rangle_m &= -\langle (Ja \wedge Jb \wedge Jc), (a' \wedge b' \wedge c') \rangle \\ &= -\det \begin{pmatrix} \langle a, a'\rangle_m & \langle a, b'\rangle_m & \langle a, c'\rangle_m \\ \langle b, a'\rangle_m & \langle b, b'\rangle_m & \langle b, c'\rangle_m \\ \langle c, a'\rangle_m & \langle c, b'\rangle_m & \langle c, c'\rangle_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Convexité. Les définitions d'ensembles et de polyèdres convexes pour les espaces modèles lorentizens sont exactement les mêmes que pour les espaces riemanniens.

Dans l'espace de Minkowski, comme les géodésiques sont les mêmes que l'espace euclidien sous-jacent, une surface est convexe dans $\mathbb{R}^3_1$ si et seulement si elle est convexe dans $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, un ensemble dans l'espace de Sitter ou anti-de Sitter (ou hyperbolique) est convexe si et seulement si son image par l'application projective est convexe dans $\mathbb{R}^3_1$ (ou dans $\mathbb{R}^3$ pour l'espace de Sitter et l'espace hyperbolique).

Lemme 3.38. *Un surface de M_K^- ou de l'espace hyperbolique est localement strictement convexe si et seulement si sa courbure de Gauss est strictement positive.*

Démonstration. On regarde d'abord le cas de l'espace de Minkowski. On note N_m la normale de la surface pour la métrique de Minkowski, et N la normale de la surface pour la métrique euclidienne. D'après ce qui précéde, pour n'importe quel segment s, $\langle s, N_m\rangle_m = \langle s, N\rangle$. Donc si le signe de $\langle s, N_m\rangle_m$ est constant (pour des segments s adéquats), alors la surface est localement strictement convexe. On peut alors reprendre la preuve de la proposition 1.9 en utilisant la métrique de Minkowski à la place de la métrique euclidienne.

Pour les pseudo-sphère, la preuve est alors exactement la même que pour la sphère (lemme 1.20). □

3.7 La distance hyperbolique-de Sitter

Une étude complète de cette distance a été faite dans [Sch98b]. Bien sûr tous les résultats de cette partie sont vrais en toute dimension.

Distance dans l'espace hyperbolique. On note $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire sur l'espace de Minkowski de dimension 4 dans lequel on considère les pseudo-sphères qui donnent l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ et l'espace de Sitter dS^3.

Proposition 3.39 ([Thu97, 2.4.5])**.** *Soient deux points x et y normés de l'espace de Minkowski (i.e. la norme vaut* 1 *ou i). Alors*

1) soit $(x,y) \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ *et alors* $\langle x,y\rangle = -\cosh d_{\mathbb{H}^3}(x,y)$ *;*
2) soit $(x,y) \in \mathbb{H}^3 \times \mathrm{dS}^3$ *et alors* $\langle x,y\rangle = \pm\sinh d_{\mathbb{H}^3}(x,y^\perp)$ *(l'indétermination est levée par le choix d'une signature pour la distance) ;*
3) soit $(x,y) \in \mathrm{dS}^3 \times \mathrm{dS}^3$ *et alors*
a) soit le plan engendré par x *et* y *est de type espace, et les géodésiques de* $\mathbb{H}^3$ *données par* $x^\perp$ *et* $y^\perp$ *sont sécantes et* $\langle x,y\rangle = -\cos\angle(x^\perp,y^\perp)$ *;*
b) soit le plan engendré par x *et* y *est de type lumière, et les géodésiques de* $\mathbb{H}^3$ *données par* $x^\perp$ *et* $y^\perp$ *sont ultraparalléles et* $\langle x,y\rangle = 1$ *;*
c) soit le plan engendré par x *et* y *est de type temps, et les géodésiques de* $\mathbb{H}^3$ *données par* $x^\perp$ *et* $y^\perp$ *sont parallèles et* $\langle x,y\rangle = \cosh d_{\mathbb{H}^3}(x^\perp,y^\perp)$.

Distance dans l'espace de Sitter. Comme par définition la métrique induite sur un plan de type espace est riemannienne, et que l'espace de Sitter est l'ensemble des points de norme 1 on a immédiatement

Lemme 3.40. *Si* $(x,y) \in \mathrm{dS}^3 \times \mathrm{dS}^3$ *engendrent un plan de type espace, alors* $\langle x,y\rangle = \cos d_{\mathrm{dS}^3}(x,y)$.

En mettant ce résultat en paralléle avec le cas 3.*a* de la proposition précédente, on voit déjà apparaitre une dualité entre les distances d'un espace et les angles de l'autre.

Lemme 3.41. *Si* $(x,y) \in \mathrm{dS}^3 \times \mathrm{dS}^3$ *engendrent un plan de type temps, alors* $\langle x,y\rangle = \cosh d_{\mathrm{dS}^3}(x,y)$.
Si $(x,y) \in \mathrm{dS}^3 \times \mathrm{dS}^3$ *engendrent un plan de type lumière, alors* $d_{\mathrm{dS}^3}(x,y) = 0$.

Démonstration. Comme on le fait habituellement pour le cas hyperbolique, on peut voir que la géodésique reliant x et y est donnée par $x\cosh t + v\sinh t$ (avec v un vecteur tangent). La distance entre x et y est donnée par un t fixé et ainsi

$$\langle x,y\rangle = \langle x, x\cosh t + v\sinh t\rangle = \cosh t = \cosh d_{\mathrm{dS}^3}(x,y). \tag{3.67}$$

Dans le cas lumière, la proposition précédente indique que $\langle x,y\rangle = 1$, et la distance est donnée comme cas limite des deux autres. □

Rappel sur la distance de Hilbert de la boule. On note B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^3$, et on note x et y deux points de B. On note $\Delta(x,y)$ la droite reliant x et y, et qui coupe la sphère unité en deux points a et b. On les choisit de telle manière que, si on prend un point $p \in \Delta(x,y)$ qui n'est ni dans $[a,b]$ ni dans $[x,y]$ alors soit a et x sont plus près de p que b et y respectivement, soit le contraire.

On note $\mathrm{br}(x,y;a,b)$ le *birapport* (*cross-ratio*) des quatre points, à savoir :

$$\mathrm{br}(x,y;a,b) = \frac{ax}{ay}\frac{yb}{xb}. \tag{3.68}$$

On appelle *distance de Hilbert* l'application

$$d_H(x,y) = -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(x,y;a,b)). \tag{3.69}$$

Et on a le résultat standard :

Lemme 3.42. *La distance de Hilbert correspond à la distance induite par la métrique hyperbolique du modèle projectif de Klein.*

Démonstration. Comme le birapport est projectivement invariant et que les transformations projectives laissant la sphère invariante agissent transitivement sur les droites, il suffit de montrer que les deux distances pour deux points sur une droite passant par 0 sont égales.

Si x et y sont à distance η et ν ($\eta < \nu$) de l'origine dans $\mathbb{R}^3$, alors ils sont à distance $\tanh^{-1}(\eta)$ et $\tanh^{-1}(\nu)$ de l'origine pour la distance hyperbolique (lemme 3.20 page 43), donc la distance hyperbolique

entre x et y est $\tanh^{-1}(\nu) - \tanh^{-1}(\eta)$, et il reste simplement à calculer :

$$\begin{aligned} d_H(x,y) &= -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(\eta,\nu;-1,1)) && (3.70)\\ &= -\frac{1}{2}\log(\frac{\eta+1}{\nu+1}.\frac{\nu-1}{\eta-1}) && (3.71)\\ &= -\frac{1}{2}\log(\frac{\eta-1}{\eta+1}) + \frac{1}{2}\log(\frac{\nu-1}{\nu+1}) && (3.72)\\ &= \tanh^{-1}(\nu) - \tanh^{-1}(\eta). && (3.73) \end{aligned}$$

□

Extension de la définition. On veut pouvoir étendre la distance d_H pour des couples de points qui sont hors de la boule. Le problème est que l'intersection de la droite Δ avec la boule peut être vide. On considère alors la droite complexe $\overline{\Delta}(x,y)$ de $\mathbb{C}^3$ dont l'intersection avec $\mathbb{R}^3$ est $\Delta(x,y)$. Il est facile de vérifier qu'il existe une unique quadrique $\overline{S}$ de $\mathbb{C}^3$ telle que son intersection avec l'espace euclidien réel soit la sphère unité, et que $\overline{\Delta}(x,y)$ rencontre toujours $\overline{S}$ en deux points, qui sont confondus si et seulement si $\Delta(x,y)$ est tangente à la sphère unité. On ordonne les points d'intersection a et b de la façon suivante : soit ils sont réels et on les ordonne comme indiqué au-dessus, soit ils sont complexes conjugués, et alors $i(a-b)$ est parallèle à $\Delta(x,y)$, et on choisit a et b de manière à ce que $i(a-b)$ soit orienté comme $y-x$.

On peut alors définir la distance de Hilbert (ou *distance hyperbolique-de Sitter*) sur tout $\mathbb{R}^3$ privé de la sphère :

$$d_{\mathrm{HS}}(x,y) = -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(x,y;a,b)). \tag{3.74}$$

Dans cette formule (qui correspond exactement à la distance de Hilbert usuelle quand on la restreind à la boule) le logarithme est complexe, donc cette "distance" est un nombre complexe défini modulo $i\pi$ si x et y sont en-dehors de la boule. Et, de façon analogue au cas hyperbolique, on a :

Lemme 3.43. *i) Si $\Delta(x,y)$ rencontre la sphère en deux points non confondus qui ne séparent pas x et y, alors la géodésique reliant x à y est de type temps (si x et y sont séparés, il n'y a pas de géodésique qui les relie) ;*

ii) si $\Delta(x,y)$ est tangent à la sphère, alors la géodésique reliant x à y est de type lumière ;

iii) si $\Delta(x,y)$ ne rencontre pas la sphère, alors la géodésique reliant x à y est de type espace.

Dans tous les cas la restriction de d_{HS} à $\mathbb{R}^3 \setminus B$ donne la distance entre les points correspondants dans l'espace de Sitter, à multiplication par $-i$ près.

Démonstration. Dans chaque cas la géodésique est bien sûr l'intersection de $\mathbb{R}^3 \setminus B$ et de $\Delta(x,y)$, et la description dans l'énoncé du lemme des différents types de géodésiques est juste une propriété de la projection. Il reste à vérifier que dans chaque cas la distance est bien la même que celle de l'espace de Sitter.

Soit c la géodésique (paramétrée par la longueur d'arc) de l'espace de Sitter entre x et y. Modulo une isométrie, on considère qu'elle passe par le point $(1,0,0,0)$ et on la paramètre de telle façon que $c(0) = (1,0,0,0)$. On note $c(\eta) = x$ et $c(\nu) = y$ $(\eta < \nu)$.

i) Le plan qui rencontre l'espace de Sitter a une direction positive et une direction négative. On considère qu'il s'agit du plan formé par les coordonnées (x_1, x_4) $((+,-))$. La géodésique dans l'espace de Sitter est projetée sur la droite d'équation $\{x_4 = 1\}$ dans le plan de projection, et on cherche les points d'intersection avec la quadrique $\{-x_4^2 + x_1^2 = 0\}$ (le cône de lumière qui se projette sur la sphère), soient les points d'abscisse vérifiant $-1 + x_1^2 = 0$: a et b valent respectivement 1 et -1.

D'après le lemme 3.24 page 44, x est envoyé par la projection sur un point à distance $\coth(\eta)$ de

l'origine et y sur un point à distance $\coth(\nu)$ de l'origine. On calcule

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{HS}}(x,y) &= -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(\coth(\eta),\coth(\nu);1,-1)) && (3.75)\\ &= -\frac{1}{2}\log(\frac{\coth(\eta)-1}{\coth(\nu)-1}.\frac{\coth(\nu)+1}{\coth(\eta)+1}) && (3.76)\\ &= -\frac{1}{2}\log(\frac{\coth(\eta)+1}{\coth(\eta)-1})+\frac{1}{2}\log(\frac{\coth(\nu)+1}{\coth(\nu)-1}) && (3.77)\\ &= \nu-\eta && (3.78)\end{aligned}$$

qui est bien $-i$ fois la distance entre x et y pour la métrique de Sitter.

ii) Dans le cas où la droite est tangente à la sphère, a et b sont confondus et donc la distance est nulle.

iii) Le plan qui rencontre l'espace de Sitter a deux directions positives, on considère qu'il s'agit du plan formé par les deux premières coordonnées x_1 et x_2.

Comme le birapport est un invariant projectif, on va utiliser la projection sur la première coordonnée. La géodésique dans l'espace de Sitter est projetée sur la droite d'équation $\{x_1 = 1\}$ dans le plan de projection, et on cherche les points d'intersection avec la quadrique $\{x_1^2+x_2^2=0\}$ (le cône de lumière qui se projette sur la sphère), soient les points d'abscisse vérifiant $1+x_2^2=0$: a et b valent respectivement i et $-i$. D'après le lemme 3.28, x est envoyé sur un point à distance $\tan(\eta)$ de l'origine, et y sur un point à distance $\tan(\nu)$ de l'origine.

Il ne reste qu'à calculer

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{HS}}(x,y) &= -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(\tan(\eta),\tan(\nu);i,-i)) && (3.79)\\ &= -\frac{1}{2}\log(\frac{\tan(\eta)-i}{\nu-i}.\frac{\tan(\nu)+i}{\tan(\eta)+i}) && (3.80)\\ &= -\frac{1}{2}\log(\frac{\tan(\eta)+i}{\tan(\eta)-i})+\frac{1}{2}\log(\frac{\tan(\nu)+i}{\tan(\nu)-i}) && (3.81)\\ &= \coth^{-1}(i\tan(\nu))-\coth^{-1}(i\tan(\eta)) && (3.82)\\ &= -i(\nu-\eta) && (3.83)\end{aligned}$$

qui est bien $-i$ fois la distance entre x et y pour la métrique de Sitter. □

De plus cette "distance" indique la distance entre un point à l'intérieur de la boule et un point à l'extérieur : dans ce cas on vérifie facilement que le birapport est un réel négatif, donc d_{HS} est de la forme $i\frac{\pi}{2}+r$ où r est un réel. On peut aussi continuer à parler de géodésique entre deux tels points en considérant les géodésiques de $\mathbb{R}^3$.

L'espace "métrique" $(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2, d_{\mathrm{HS}})$ est appelé l'*espace hyperbolique-de Sitter*, noté HS.

3.8 Dualités

3.8.1 La dualité hyperbolique-de Sitter

Il s'agit essentiellement de la même chose que la dualité de la sphère dans elle-même (sous-section 1.3.3 page 22), puisque l'espace de Sitter et l'espace hyperbolique sont des pseudo-sphères (de rayon respectivement 1 et i) dans l'espace de Minkowski. Ainsi, dans le sens où on l'entend, le plan (resp. l'espace) de Sitter est exactement le dual du plan (resp. de l'espace) hyperbolique, et vice versa ; c'est pourquoi l'espace de Sitter est parfois appelé *espace co-hyperbolique*.

On fera toujours la confusion qui consiste à noter de la même façon un point d'une hyperboloïde et le vecteur de l'espace ambiant qui le défini, un segment d'une hyperboloïde et le 2-plan de l'espace ambiant qui le défini etc.

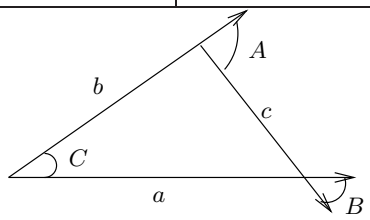
3.8.1.1 Pour les polygones

Soit P un polygone convexe de $\mathbb{H}^2$. Un arête e est définie par l'intersection de l'espace hyperbolique avec un 2-plan de type temps. Sa normale est un vecteur de type espace qui rencontre dS^2 en un point noté e^* (la normale est choisie de façon à ce que e^* soit dans la partie supérieure de dS^2, donnée par $x_4 > 0$). On définit ainsi le polygone P^* du plan de Sitter dual de P, à l'aide du même système d'équations linéaires que dans le cas de la sphère de $\mathbb{R}^3$. Ainsi la dualité est involutive et le dual d'un polygone convexe est un polygone convexe. Et exactement les mêmes arguments indiquent que la longueur de l'arête x^* est π moins l'angle en x (si x est un point du plan hyperbolique, son plan normal est un plan de type espace. Ainsi la longueur de x^* est un réel positif).

Ce résultat permet d'obtenir, à partir des formules de trigonométrie hyperbolique, un formulaire de trigonométrie de Sitter, mais il n'est valable que pour les droites de type espace. En fait ces formules sont vraies que les arêtes soient de type temps ou de type espace, voir [Sch04b, 6.3] pour une preuve.

Remarquons qu'on trouve dans [HOS00] une méthode pour avoir simultanément tous les formulaires de trigonométrie pour les 9 surfaces de Kaley–Klein (surfaces de courbures constantes munies de métriques de signatures constantes, éventuellement dégénérées, comprenant en particulier la sphère, les espaces euclidien, de Minkowski, hyperbolique, de Sitter et anti-de Sitter — ce qu'ils appellent anti-de Sitter correspond à notre espace de Sitter et vice-versa).

Hyperbolique	De Sitter
$\cosh a = \cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c \cos A$	$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cosh A$
$\cosh b = \cosh a \cosh c - \sinh a \sinh c \cos B$	$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cosh B$
$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C$	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cosh C$
$\dfrac{\sinh a}{\sin A} = \dfrac{\sinh b}{\sin B} = \dfrac{\sinh c}{\sin C}$	$\dfrac{\sin a}{\sinh A} = \dfrac{\sin b}{\sinh B} = \dfrac{\sin c}{\sinh C}$
$\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cosh a$	$\cosh A = \cosh B \cosh C + \sinh B \sinh C \cos a$
$\cos B = \cos A \cos C + \sin A \sin C \cosh b$	$\cosh B = \cosh A \cosh C - \sinh A \sinh C \cos b$
$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cosh c$	$\cosh C = \cosh A \cosh B - \sinh A \sinh B \cos c$



La dualité et la formule de Gauss–Bonnet pour les polygones hyperboliques donnent :

Lemme 3.44. *La somme des longueurs des arêtes d'un polygone convexe de type espace de* dS^2 *est strictement supérieure à* 2π.

Dualité projective classique.

Lemme 3.45. *La dualité définie au-dessus correspond dans le modèle projectif de Klein à la dualité projective classique.*

Démonstration. Il faut vérifier que, dans le modèle projectif de Klein, le birapport entre n'importe quel point de l'image d'un plan totalement géodésique et l'image du dual du plan est -1 (dualité projective classique).

Comme les isométries de l'espace hyperboliques et de l'espace de Sitter sont données par des applications linéaires de l'espace de Minkowski ambiant, elles correspondent à des applications projectives dans l'espace projectif, et ne changent pas le birapport. Donc on peut se restreindre au cas du plan totalement géodésique de l'espace hyperbolique donné par l'intersection avec l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$. Son dual est le point de coordonnées $(1, 0, 0, 0)$. Il est envoyé à l'infini dans le modèle projectif de Klein, et n'importe

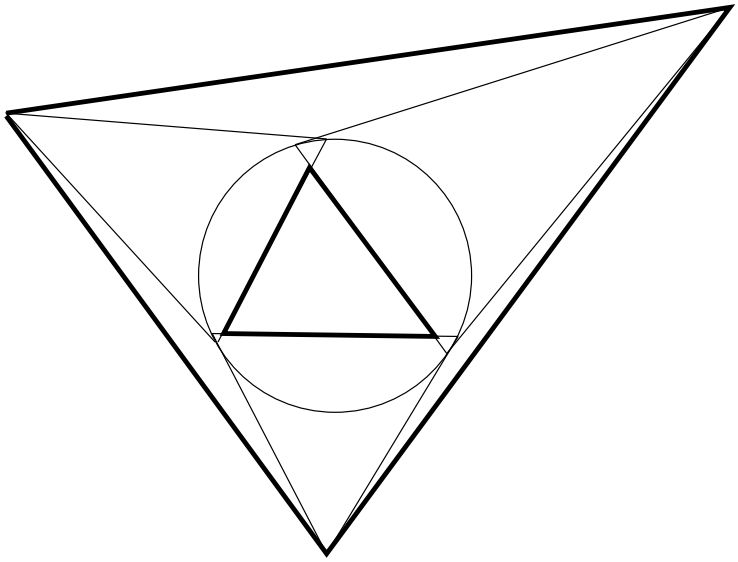


FIG. 3.5 – Triangle hyperbolique et son dual.

quel point x de l'image du plan est équidistant des points sur le cercle qui sont aussi sur la géodésique reliant x et ∞. Donc il existe un nombre c non nul tel que le birapport soit égal à

$$\frac{c}{\infty}\frac{-\infty}{c} = -1. \tag{3.84}$$

□

En particulier, si on regarde la distance hyperbolique-de Sitter, la dualité s'exprime simplement en disant que le dual d'un point de HS^2 est l'ensemble des points à distance $i\frac{\pi}{2}$ de ce point (i.e. le birapport est égal à -1).

Exprimée comme la dualité projective classique, c'est-à-dire comme la dualité par rapport à une conique de la géométrie projective, la dualité hyperbolique-de Sitter peut se définir de la façon suivante (dans le modèle projectif de Klein) :

- Le dual d'un segment géodésique du disque D est l'unique point de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ tel que les droites partant de ce point et passant par le bord du segment soient tangentes à D.
- Le dual d'un point de D est la droite de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ formée des points définis comme les duaux de tous les segments de D passant par ce point.

3.8.1.2 Pour les polyèdres

On définit toujours la dualité de manière analogue au cas de $\mathbb{S}^3$. Les justifications sont exactement les mêmes. Soit P un polyèdre (convexe) hyperbolique. Une face f est définie comme l'intersection de $\mathbb{I}^3$ avec un 2-plan de type temps. On définit son dual f^* comme le point de l'espace de Sitter donné par le vecteur de type espace orthogonal à f. On le prend de manière à ce qu'il soit contenu dans la partie supérieure de l'espace de Sitter donnée par $x_4 > 0$. Le dual P^* est le bord de l'enveloppe convexe des f^*, la dualité est involutive et aucun f^* n'est contenu dans l'enveloppe convexe des autres.

De plus, la métrique induite sur P^* est riemannienne, puisque chaque face de P^* est l'intersection de l'espace de Sitter avec un hyperplan vectoriel de type espace. Ainsi sur chaque face les angles entre les arêtes sont bien définis et on a toujours :

Lemme 3.46. *Soit α l'angle en un sommet x d'un polyèdre P sur une face f entre deux arêtes e_1 et e_2. Alors l'angle au sommet f^* du polyèdre P^* sur la face x^* entre les arêtes e_1^* et e_2^* est $(\pi - \alpha)$.*

Comme pour le cas de la dimension 2, cette dualité est équivalente à la dualité projective classique, qui donne (dans le modèle projectif de Klein) :

- Le dual d'un 2-plan totalement géodésique de la boule B^3 est l'unique point de $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$ tel que les droites de partant de ce point et passant par le bord du plan soient tangentes à la sphère.
- Le dual d'un point de B^3 est le 2-plan de $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$ formé des points définis comme les duaux de tous les 2-plans de B^3 passant par ce point.
- Le dual d'un segment de B^3 est la droite de $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$ formée des points définis comme les duaux de tous les 2-plans de B^3 contenant cette droite.

Lemme 3.47. *Dans le modèle projectif de Klein, les géodésiques qui partent de x et qui rencontrent x^* sont orthogonales à x^*.*

Démonstration. Ces géodésiques sont données par les intersections des pseudo-sphères avec des plans vectoriels dans l'espace de Minkowski. Ces plans contiennent le vecteur qui définit le point x, ils sont donc orthogonaux à l'hyperplan affine qui définit x^*. □

Nous avons défini la métrique duale d'une surface polyédrale de l'espace hyperbolique dans la sous-section 1.4.2 page 24. Il se trouve que :

Lemme 3.48. *La métrique duale d'une surface polyédrale convexe P de l'espace hyperbolique est isométrique à la métrique induite sur son dual.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour un sommet p de P, la face p^* de P^* est isométrique à $l(p)^*$, le dual du link de P en p. Et cela est évident avec la description de la métrique sur p^* faite ci-dessus et de celle sur $l(p)^*$ (sous-section 1.4.2) : les longueurs des arêtes et les valeurs des angles de ces deux polygones se calculent de la même façon à partir des angles dièdres et des angles sur les faces de P. □

3.8.1.3 Pour les surfaces lisses

On définit le dual d'une surface (lisse) Σ de l'espace hyperbolique comme l'ensemble Σ^* des points de l'espace de Sitter qui sont les duaux des plans orientés tangents à Σ (et vice-versa). Plus précisement, soit une surface S et ϕ une immersion à valeurs dans $\mathbb{H}^3$. On définit le dual de ϕ^* de ϕ de la façon suivante : $\phi^*(s)$ est le dual du plan tangent de $\phi(S)$ en $\phi(s)$.

Proposition 3.49 ([Sch98b, 3.3])**.** *1) La dualité définie ci-dessus est bien involutive, c'est-à-dire $(\phi^*)^* = \phi$.*
2) Si l'opérateur de forme associé à ϕ est non-dégénéré, alors ϕ^* est une immersion.
3) La métrique induite sur $\phi^*(S)$ correspond à la troisième forme fondamentale de $\phi(S)$, et vice-versa. En particulier, si l'opérateur de forme associé à ϕ est non-dégénéré alors $\phi^*(S)$ est de type espace.
4) Le dual d'une surface localement strictement convexe est une surface localement strictement convexe.
5) Le dual d'une surface convexe est une surface convexe.

Démonstration. 1) On utilise l'application

$$\begin{aligned} D : S \times S &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto (d_{\mathrm{HS}}(\phi(x), \phi^*(y)))^2. \end{aligned} \tag{3.85}$$

On considère le chemin $(x_1(t), x_2(t))$ sur $S \times S$, où $x_1(0) = x$ et $x_1'(0) = v$ et $x_2(t)$ est le chemin constant égal à x. Alors la différentielle de D au point (x, x) appliquée au vecteur $(v, 0)$ est simplement la dérivée en 0 de l'application $\|\phi^*(x(t)) - \phi^*(x)\|^2$. Comme par définition $\phi^*(x)$ est orthogonal à v, alors cette différentielle est nulle, et donc "$\phi^*(x)$ est dual à l'hyperplan tangent à $\phi(S)$ en $\phi(x)$" est équivalent à

$$\forall v \in T_x S, (T_{(x,x)} D)(v, 0) = 0. \tag{3.86}$$

La définition de la dualité donne que, pour tout x de S, $D(x, x) = (i\pi/2)^2$, ce qui implique

$$\forall v \in T_x S, (T_{(x,x)} D)(v, v) = 0, \tag{3.87}$$

et ces deux équations donnent

$$\forall v \in T_xS, (T_{(x,x)}D)(0,v) = 0, \tag{3.88}$$

ce qui signifie que "$\phi(x)$ est dual à l'hyperplan tangent à $\phi^*(S)$ en $\phi^*(x)$".

2) A un point s de S on associe $\Phi(s) = (x, N(x))$, où $x = \phi(s)$ et $N(x)$ est la normale unitaire en x. L'application Φ est à valeur dans $U\mathbb{H}^3$, le fibré unitaire tangent de $\mathbb{H}^3$. On définit une application ψ telle que la composition de ψ avec Φ corresponde à ϕ^* :

$$\begin{array}{c} \psi : U\mathbb{H}^3 \to U\mathrm{dS}^3 \\ (x,v) \mapsto (P^*, u) \end{array} \tag{3.89}$$

où P^* est le dual de l'hyperplan orthogonal à v en x et u est le vecteur unitaire orthogonal au plan dual de x. Quand $v = N$, P^* est bien $\phi^*(x)$.
On étudie la différentielle de ψ

$$\begin{array}{c} d\psi : T_{(x,v)}U\mathbb{H}^3 \to T_{(P^*,u)}U\mathrm{dS}^3 \\ (\dot{x}, \dot{v}) \mapsto (\dot{P}^*, \dot{u}) \end{array} \tag{3.90}$$

où $\dot{x} = \frac{\partial}{\partial t}x_t|_{t=0}$, avec $x_0 = x$, et $\dot{v} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}x_t} v_t|_{t=0}$, avec $v_0 = v$. Dans le cas où $v = N$, cette dernière quantité correspond à $-B(\dot{x})$, B étant l'opérateur de forme de ϕ.
Ainsi, si B est non-dégénéré, si p_1 est la projection sur le premier facteur, $\phi^* = p_1 \circ \psi \circ \Phi$ est une immersion.

3) Avec ce qui a été dit au-dessus, il ne reste qu'à voir que

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^{\mathrm{dS}^3}(\dot{P}^*, \dot{P}^*) &= \mathrm{I}^{U\mathrm{dS}^3}((\dot{P}^*, 0), (\dot{P}^*, 0)) && (3.91)\\ &= \mathrm{I}^{U\mathbb{H}^3}((0,\dot{v}), (0,\dot{v})) && (3.92)\\ &= \mathrm{I}^{\mathbb{H}^3}(\dot{v}, \dot{v}) && (3.93)\\ &= \mathrm{I}^{\mathbb{H}^3}(B(\dot{x}), B(\dot{x})) = \mathrm{III}^{\mathbb{H}^3}(\dot{x}, \dot{x}), && (3.94) \end{aligned}$$

et vice-versa.

4) On note B^* l'opérateur de forme de ϕ^*.

$$\begin{aligned} \mathrm{II}^{\mathrm{dS}^3}(\dot{P}^*, \dot{P}^*) &= \mathrm{I}^{\mathrm{dS}^3}(B^*(\dot{P}^*), \dot{P}^*) && (3.95)\\ &= \mathrm{I}^{\mathrm{dS}^3}(\dot{u}, \dot{P}^*) && (3.96)\\ &= \mathrm{I}^{U\mathrm{dS}^3}((0,\dot{u}), (\dot{P}^*, 0)) && (3.97)\\ &= \mathrm{I}^{U\mathbb{H}^3}((\dot{x},0), (0,\dot{v})) && (3.98)\\ &= \mathrm{I}^{\mathbb{H}^3}(\dot{x}, \dot{v}) && (3.99)\\ &= \mathrm{I}^{\mathbb{H}^3}(\dot{x}, B(\dot{x})) = \mathrm{II}^{\mathbb{H}^3}(\dot{x}, \dot{x}), && (3.100) \end{aligned}$$

et l'un est strictement positif si et seulement si l'autre l'est.

5) Si la surface est convexe, on peut définir son dual comme (le bord de) l'intersection des plans duaux des points de la surface, et le caractère involutif de la dualité donne le résultat.

□

3.8.2 L'autodualité de l'espace anti-de Sitter

Un point de l'espace anti-de Sitter correspond à un vecteur v de $\mathbb{R}^4_2$ de norme au carré égale à -1, il correspond à une direction négative. Ainsi la métrique induite sur l'hyperplan orthogonal à v est de signature $(1,2)$ $((-,+))$, et l'intersection de cet hyperplan avec l'espace anti-de Sitter est un plan totalement géodésique de type espace. On l'appelle le dual de v.

On peut ainsi définir le dual d'une surface lisse strictement convexe ou d'une surface polyédrale convexe de AdS^3, de la même façon que pour la sphère $\mathbb{S}^3$ ou que pour le cas hyperblique-de Sitter. Les différentes propriétés se montrent de la même façon.

3.9 Cônes convexes

On donne un résultat analogue au cas riemannien (proposition 1.30 page 24). La différence est que l'angle d'un cône (riemannien) est supérieur à 2π dans les espaces lorentziens.

Définition 3.50. *Un* cône convexe *(polyédral) de sommet x est un polyèdre convexe de type espace de M^-_K ayant au moins trois arêtes et pour seul sommet x. En particulier il est stable par toutes les homothéties de centre x et de rapport $\lambda > 0$.*

*L'*angle *du cône convexe est la somme des angles entre les arêtes sur les faces du cône convexe.*

Proposition 3.51. *L'angle d'un cône convexe de M^-_K est (strictement) supérieur à 2π.*

Démonstration. On définit un cône fermé comme dans le cas riemannien, et l'argument est le même dans le cas de Sitter que dans le cas de $\mathbb{S}^3$: le dual d'un cône fermé est un cône fermé dans l'espace hyperbolique, et l'angle du cône est $n\pi$ moins la somme des angles intérieurs du polygone hyperbolique dual du sommet du cône. La formule de Gauss–Bonnet donne immédiatement le résultat.

Dans le cas de Minkowski, il suffit de considérer l'intersection du cône avec l'espace de Sitter, ce qui donne un polygone convexe (dont les arêtes sont de type espace) dont les longueurs des arêtes sont exactement les angles entre les arêtes du cône, et d'utiliser le lemme 3.44 (ou alors on peut on utiliser une "dualité" entre $\mathbb{R}^3_1$ et $\mathbb{H}^2$ comme dans [Isk00, 6.1], ce qui est une autre façon de formuler la dualité entre les plans de Sitter et hyperbolique).

Dans l'espace anti-de Sitter, on considère le dual d'un cône convexe fermé. Le polygone dual du sommet du cône est dans un sous-espace totalement géodésique de type espace isométrique au plan hyperbolique, il est donc isométrique à un polygone hyperbolique, et le théorème de Gauss–Bonnet couplé avec l'auto-dualité de l'espace anti-de Sitter donne la solution.

□

Chapitre 4

Les applications de Pogorelov

Les applications de Pogorelov (globales) permettent de ramener des problèmes de déformations dans des espaces (riemanniens ou lorentziens) à courbure constante à des problèmes de déformations dans des espaces plats. Dans le cas riemannien, Pogorelov s'en sert pour ramener des problèmes de déformations dans la sphère de dimension 3 ou dans l'espace hyperbolique à des problèmes de déformations dans l'espace euclidien (dans [Pog56], voir [Spi79c, p. 343]). Voir [Pog73, V, 3],[Pog56] pour le cas de la sphère.

F. Labourie et J.-M. Schlenker ont remarqué que ces applications s'adaptent quasi-directement aux cas lorentziens, ce qui sert à ramener des problèmes de déformations dans l'espace hyperbolique, de Sitter ou anti-de Sitter à des problèmes de déformations dans l'espace de Minkowski de dimension 3, ou de ramener des problèmes de déformations dans l'espace de Sitter à des problèmes de déformations dans l'espace euclidien.

Il existe un analogue infinitésimal de l'application de Pogorelov, qui provient au départ de la dérivation de l'applications de Pogorelov (globale) au voisinage de la diagonale (la restriction de l'application de Pogorelov globale à la diagonale correspond à l'application projective usuelle), voir [Pog73, V, 5] pour le cas sphère-euclidien et [LS00, Rou04] pour les cas lorentziens.

On a préféré une approche plus directe mise à jour dans [Sch06], qui rend l'étude des applications de Pogorelov infinitésimales indépendante de celle des applications de Pogorelov globales — quand à celles-ci, elles s'adaptent directement de celles découvertes par Pogorelov.

Il ne fait aucun doute que ces constructions et leurs propriétés se généralisent de façon directe aux espaces à courbures constantes de dimensions supérieures et de signatures diffèrentes (voir par exemple [Sch98b]). Nous n'aurons pas besoin de l'application de Pogorelov globale anti-de Sitter-Minkowski.

4.1 Applications de Pogorelov globales

4.1.1 Sphère-Euclidien

L'application de Pogorelov globale de la sphère dans l'espace euclidien est l'application de $\mathbb{S}^3_+ \times \mathbb{S}^3_+ \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ à valeur dans $(\mathbb{R}^3 \times \{0\}) \times (\mathbb{R}^3 \times \{0\})$ définie par

$$\Phi_{S-E}(x, x') = 2\left(\frac{x - \langle x, x_N\rangle x_N}{\langle x + x', x_N\rangle}, \frac{x' - \langle x', x_N\rangle x_N}{\langle x + x', x_N\rangle}\right) \tag{4.1}$$

où $\mathbb{S}^3_+$ est la demi-sphère supérieure et $x_N = (0, 0, 0, 1)$ est le pôle nord. C'est un difféomorphisme d'inverse

$$\mathrm{S}(y, y') = (p(y, y')(y + x_N(1 - \|y\|^2 + \|y'\|^2)), p'(y, y')(y' + x_N(1 - \|y'\|^2 + \|y\|^2))) \tag{4.2}$$

où p et p' sont tels que la norme de chaque composante soit égale à 1.

4.1.1.1 Distances

Lemme 4.1 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov)**.** *Soient S et S' deux surfaces (éventuellement polyédrales) dans $\mathbb{S}^3_+$. La métrique induite est la même sur S et S' si et seulement si la métrique induite est la même sur $\Phi_{S-E}(S,S')_1$ et $\Phi_{S-E}(S,S')_2$.*

De plus, si il existe une isométrie globale qui envoie S sur S', alors il existe une isométrie globale qui envoie $\Phi_{S-E}(S,S')_1$ sur $\Phi_{S-E}(S,S')_2$.

Démonstration. On veut montrer, en suivant [Sch98c, LS00], que si X et X' sont deux vecteurs tangents de $\mathbb{S}^3_+$, alors

$$[(\|X\|_{\mathbb{S}^3} = \|X'\|_{\mathbb{S}^3}) \Leftrightarrow (\left\|d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_1\right\|_{\mathbb{R}^3} = \left\|d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_2\right\|_{\mathbb{R}^3})] \tag{4.3}$$

$$\Leftrightarrow [(\|X\|_{\mathbb{R}^4} = \|X'\|_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow (\left\|d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_1\right\|_{\mathbb{R}^4} = \left\|d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_2\right\|_{\mathbb{R}^4})]. \tag{4.4}$$

Pour avoir la première partie du lemme, il suffit de considérer des vecteurs tangents aux surfaces, et pour la seconde il suffit de considérer la distance extrinsèque entre deux points d'une surface.

On calcule directement que

$$\frac{1}{2}\langle x+x', x_N\rangle^2 d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_1 = (X - \langle X, x_N\rangle x_N)\langle x+x', x_N\rangle - \langle X+X', x_N\rangle(x - \langle x, x_N\rangle x_N), \tag{4.5}$$

dont la norme est

$$\frac{1}{4}\langle x+x', x_N\rangle^4 \left\|d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_1\right\|^2 \tag{4.6}$$

$$= \langle x+x', x_N\rangle^2(\|X\|^2 - \langle X, x_N\rangle^2) + \langle X+X', x_N\rangle^2(\|x\|^2 - \langle x, x_N\rangle^2) \tag{4.7}$$

$$-2\langle x+x', x_N\rangle\langle X+X', x_N\rangle(\langle X, x\rangle - \langle X, x_N\rangle\langle x, x_N\rangle). \tag{4.8}$$

Comme on est sur la sphère unité de $\mathbb{R}^4$ on a $\|x\| = 1$ et $\langle x, X\rangle = 0$:

$$\frac{1}{4}\langle x+x', x_N\rangle^4 \left\|d_{(x,x')}\Phi_{S-E}(X,X')_1\right\|^2 \tag{4.9}$$

$$= \langle x+x', x_N\rangle^2(\|X\|^2 - \langle X, x_N\rangle^2) + \langle X+X', x_N\rangle^2(1 - \langle x, x_N\rangle^2) \tag{4.10}$$

$$+2\langle x+x', x_N\rangle\langle X+X', x_N\rangle\langle X, x_N\rangle\langle x, x_N\rangle \tag{4.11}$$

$$= \langle x+x', x_N\rangle^2\|X\|^2 + \langle X+X', x_N\rangle^2 - (\langle x+x', x_N\rangle\langle X, x_N\rangle - \langle X+X', x_N\rangle\langle x, x_N\rangle)^2 \tag{4.12}$$

$$= \langle x+x', x_N\rangle^2\|X\|^2 + \langle X+X', x_N\rangle^2 - (\langle x', x_N\rangle\langle X, x_N\rangle - \langle x, x_N\rangle\langle X', x_N\rangle)^2. \tag{4.13}$$

Cette dernière quantité est symétrique par rapport à l'échange de (x, X) et de (x', X') si et seulement si $\|X\| = \|X'\|$. □

4.1.1.2 Géodésiques

Lemme 4.2. *L'application de Pogorelov envoie un couple de géodésiques (isométriques) de $\mathbb{S}^3$ sur un couple de géodésiques (isométriques) de $\mathbb{R}^3$ et un couple de plans géodésiques (isométriques) de $\mathbb{S}^3$ sur un couple de plans géodésiques (isométriques) de $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. On va montrer le lemme pour les plans, pour les géodésiques il suffit de les considérer comme des intersections de plans.

Soit (P, P') un couple d'hyperplans géodésiques de $\mathbb{R}^4$ qui définissent le couple de plans géodésiques de la sphère. On écrit P comme l'ensemble des vecteurs x (de $\mathbb{R}^4$) tels que

$$\langle A, x\rangle = 0, \tag{4.14}$$

où A est un vecteur fixé.

Avec la réciproque (4.2) de l'application de Pogorelov, l'équation au-dessus indique que les points de $\Phi_{S-E}(P,P')_1$ vérifient l'équation

$$\langle A, y + x_N(1 - \|y\|^2 + \|y'\|^2)\rangle = 0 \tag{4.15}$$

où $(y, y') \in \Phi_{S-E}(P, P')$. Mais deux plans géodésiques sont congruents, et, par la propriété fondamentale de l'application de Pogorelov, $\Phi_{S-E}(P, P')_1$ et $\Phi_{S-E}(P, P')_2$ sont congruents. En particulier, il existe une isométrie E de $\mathbb{R}^3$ telle que $y' = Ey$. L'isométrie peut se décomposer en une rotation et une translation : $y' = Ry + T$, et on calcule

$$\|y'\|^2 = \langle Ry + T, Ry + T\rangle = \|y\|^2 + 2\langle Ry, T\rangle + \|T\|^2 \tag{4.16}$$

et l'équation (4.15) donne alors

$$\langle A, y + x_N(2\langle Ry, T\rangle + \|T\|^2)\rangle = 0, \tag{4.17}$$

$$\Leftrightarrow \langle A, y + 2x_N\langle Ry, T\rangle\rangle + \langle A, x_N \|T\|^2\rangle = 0, \tag{4.18}$$

ce qui est bien l'équation d'un plan affine de $(\mathbb{R}^3 \times \{0\})$. □

On remarque que ce lemme montre, avec le fait qu'un couple d'espaces tangents est envoyé sur un couple d'espaces tangents (on vérifie facilement que la distance entre chaque surface et le plan correspondant est toujours de même ordre [Pog73]), qu'un couple de surfaces régulières (i.e. dont l'ensemble des vecteurs tangents est un plan) est envoyé sur un couple de surfaces régulières.

Une surface de $\mathbb{S}^3$ est dite *centrée en* x_N si chaque demi-géodésique partant de x_N intersecte en au plus un point la surface. Une surface de $\mathbb{R}^3$ est dite *centrée en* 0 si chaque demi-géodésique partant de 0 intersecte en au plus un point la surface.

Lemme 4.3. *L'application de Pogorelov envoie un couple de surfaces centrées en x_N sur un couple de surfaces centrées en* 0*.*

Démonstration. Un couple de géodésiques partant de x_N est donné par (dans $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$)

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(x_N + \lambda u, x_N + \lambda u') \tag{4.19}$$

avec u et u' deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^4$ orthogonaux à x_N. On vérifie facilement que ce couple est envoyé sur

$$\lambda(u, u') \tag{4.20}$$

qui est bien un couple de géodésiques de $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ partant de l'origine (car par orthogonalité avec x_N, u et u' sont dans $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$). Le reste du lemme est donné par le fait que l'application de Pogorelov est une bijection. □

4.1.1.3 Convexité

On montre alors :

Proposition 4.4. *Un couple de surfaces (S_1, S_2) localement strictement convexes isométriques de $\mathbb{S}^3$ centrées en x_N est envoyé sur un couple de surfaces localement strictement convexes de $\mathbb{R}^3$ centrées en* 0*.*

En particulier dans le cas des surfaces compactes, un couple de surfaces isométriques strictement convexes est envoyé sur un couple de surfaces strictement convexes.

On sait déjà que les images de ces deux surfaces sont isométriques et centrées en 0. On oriente les surfaces en prenant la normale qui est toujours du même côté de la surface par rapport à x_N (ou à 0). On va montrer que la deuxième forme fondamentale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ est strictement du même signe en chaque point, ce qui montre la stricte convexité locale. La preuve est exactement celle donnée par Pogorelov. On a d'abord besoin d'un petit rappel sur les courbes dans $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Soit g une géodésique tracée sur une surface dans $\mathbb{S}^3$ (supposée paramétrée par la longueur d'arc). Le plan tangent de $\mathbb{R}^4$ en un point $g(t)$ est engendré par les vecteurs $(g(t), g'(t), N(g(t)), N(g(t)) \wedge g'(t))$, où

N est la normale unitaire de la surface dans $\mathbb{S}^3$. Comme g est une géodésique dans $\mathbb{S}^3$, $g''(t)$ appartient au plan tangent engendré par $g(t)$ et $N(g(t))$, donc il existe λ et $k(t)$ tels que

$$g''(t) - \lambda g(t) = k(t)N(g(t)). \tag{4.21}$$

Mais $\lambda = -1$, en effet

$$(\langle g(t), g(t)\rangle = 1) \Rightarrow (\langle g'(t), g(t)\rangle = 0) \Rightarrow (\langle g''(t), g(t)\rangle + \langle g'(t), g'(t)\rangle = 0), \tag{4.22}$$

et $\langle g'(t), g'(t)\rangle = 1$ puisque g est une géodésique. Donc une géodésique de $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ peut s'écrire, pour t suffisament petit, si $g(0) = p$ et $g'(0) = \tau$

$$g(t) = r(t)(p + t\tau + t^2(kN + p) + O(t^3)), \tag{4.23}$$

où $r(t)$ est tel que la norme de $g(t)$ soit égale à 1.

On aura aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 4.5. *Soient P_1 et P_2 deux plans tangents, en respectivement a_0 et b_0, de deux surfaces isométriques de $\mathbb{S}^3_+$ centrées en x_N. On suppose que l'isométrie envoie P_1 sur P_2 et a_0 sur b_0.*

On note $Q = \Phi_{S-E}(P_1, P_2)_1$ le plan image et $d_0 = \Phi_{S-E}(a_0, b_0)_1 \in Q$. On note aussi a_3 et b_3 les normales unitaires de P_1 et P_2 en a_0 et b_0, prise chacune du même côté par rapport à x_N.

On note a_1 et a_2 deux vecteurs tangents unitaires orthogonaux de P_1 en a_0, on note b_1 et b_2 ceux de P_2 en b_0 leur correspondant pour l'isométrie et d_1, d_2 ceux de Q correspondants par l'application de Pogorelov. On note d_3 la normale à Q en d_0.

Alors les valeurs suivantes

$$A = \langle d_3, a_3 - \langle x_N, a_3\rangle d_0\rangle \tag{4.24}$$

$$B = -\langle x_N, b_3\rangle\langle d_0, d_3\rangle \tag{4.25}$$

sont strictement positives.

Démonstration. On remarque d'abord que les plans P_1 et P_2 sont centrés en x_N, i.e. aucun vecteur de P_i ne définit une géodésique joignant a_0 ou b_0 et x_N.

Les définitions du lemme donnent

$$a_3 = a_0 \wedge a_1 \wedge a_2, b_3 = b_0 \wedge b_1 \wedge b_2, d_3 = x_N \wedge d_1 \wedge d_2, \tag{4.26}$$

car les d_i sont des éléments de $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$. Les vecteurs d_1 et d_2 sont les images des vecteurs tangents de P_1 et P_2 par la différentielle de

$$\frac{x_1 - \langle x_1, x_N\rangle x_N}{\langle x_1 + x_2, x_N\rangle}, \tag{4.27}$$

avec x_1 (resp. x_2) un point sur une géodésique partant de a_0 (resp. b_0) et définie par un vecteur de P_i. En posant

$$\lambda_0 = \langle a_0 + b_0, x_N\rangle, \lambda_1 = \langle a_1 + b_1, x_N\rangle, \lambda_2 = \langle a_2 + b_2, x_N\rangle \tag{4.28}$$

(remarquons que $\lambda_0 > 0$) on calcule facilement que

$$d_1 = \frac{1}{\lambda_0^2}(a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1) + x_N[\ldots], \tag{4.29}$$

$$d_2 = \frac{1}{\lambda_0^2}(a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2) + x_N[\ldots]. \tag{4.30}$$

Et comme $d_3 = x_N \wedge d_1 \wedge d_2$, on calcule que

$$d_3 = \frac{1}{\lambda_0^3}(\lambda_0(x_N \wedge a_1 \wedge a_2) - \lambda_1(x_N \wedge a_0 \wedge a_2) - \lambda_2(x_N \wedge a_1 \wedge a_0)). \tag{4.31}$$

Par définition,

$$d_0 = \frac{a_0}{\lambda_0} + x_N[\ldots] \tag{4.32}$$

et par (4.31) on obtient

$$\langle d_0, d_3\rangle = -\frac{1}{\lambda_0^3}\det(x_N, a_0, a_1, a_2). \tag{4.33}$$

D'un autre côté, $\langle x_N, b_3\rangle = \det(x_N, b_0, b_1, b_2)$, donc

$$B = -\langle x_N, b_3\rangle\langle d_0, d_3\rangle = \frac{1}{\lambda_0^3}\det(x_N, a_0, a_1, a_2)\det(x_N, b_0, b_1, b_2) > 0, \tag{4.34}$$

puisque les plans P_1 et P_2 sont orientés de la même façon par rapport à x_N, $\det(x_N, a_0, a_1, a_2)$ et $\det(x_N, b_0, b_1, b_2)$ sont de même signe. Et ces deux déterminants ne s'annulent pas, car a_0, a_1, a_2 (resp. b_0, b_1, b_2) sont orthogonaux, et x_N n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs. En effet, P_1 est centré en x_N, donc, pour tout μ, le vecteur $(x_N - \mu a_o)$ pris en a_o n'appartient pas au plan engendré par a_1 et a_2 (idem pour les b_i).

On va maintenant calculer $\langle d_3, a_3\rangle$. En remplaçant ces deux termes par (4.31) et (4.26) on obtient

$$\langle d_3, a_3\rangle = \frac{1}{\lambda_0^3}(\lambda_0\langle x_N\wedge a_1\wedge a_2, a_0\wedge a_1\wedge a_2\rangle - \lambda_1\langle x_N\wedge a_0\wedge a_2, a_0\wedge a_1\wedge a_2\rangle - \lambda_2\langle x_N\wedge a_1\wedge a_0, a_0\wedge a_1\wedge a_2\rangle) \tag{4.35}$$

et en utilisant le fait que le produit scalaire des produits vectoriels est un déterminant de produits scalaires, et que les a_i sont orthonormés, on a

$$\langle d_3, a_3\rangle = \frac{1}{\lambda_0^3}(\lambda_0\langle x_N, a_0\rangle + \lambda_1\langle x_N, a_1\rangle + \lambda_2\langle x_N, a_2\rangle), \tag{4.36}$$

et en mettant les valeurs des λ_i :

$$\begin{aligned}\langle d_3, a_3\rangle &= \frac{1}{\lambda_0^3}(\langle x_N, a_0\rangle^2 + \langle x_N, a_1\rangle^2 + \langle x_N, a_2\rangle^2 \\ &+ \langle x_N, a_0\rangle\langle x_N, b_0\rangle + \langle x_N, a_1\rangle\langle x_N, b_1\rangle + \langle x_N, a_2\rangle\langle x_N, b_2\rangle).\end{aligned} \tag{4.37}$$

De l'inégalité $(\langle x_N, a_i\rangle - \langle x_N, b_i\rangle)^2 \geq 0$ qui donne

$$\frac{1}{2}(\langle x_N, a_i\rangle^2 + \langle x_N, b_i\rangle^2) \geq -\langle x_N, a_i\rangle\langle x_N, b_i\rangle \tag{4.38}$$

on tire

$$\langle d_3, a_3\rangle \geq \frac{1}{2\lambda_0^3}(\langle x_N, a_0\rangle^2 + \langle x_N, a_1\rangle^2 + \langle x_N, a_2\rangle^2 - \langle x_N, b_0\rangle^2 - \langle x_N, b_1\rangle^2 - \langle x_N, b_2\rangle^2). \tag{4.39}$$

Et comme les a_i (resp. b_i) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$:

$$\langle x_N, a_0\rangle^2 + \langle x_N, a_1\rangle^2 + \langle x_N, a_2\rangle^2 + \langle x_N, a_3\rangle^2 = \langle x_N, b_0\rangle^2 + \langle x_N, b_1\rangle^2 + \langle x_N, b_2\rangle^2 + \langle x_N, b_3\rangle^2 \tag{4.40}$$

on a finalement

$$\langle d_3, a_3\rangle \geq \frac{1}{2\lambda_0^3}(\langle x_N, b_3\rangle^2 - \langle x_N, a_3\rangle^2) \tag{4.41}$$

$$= \frac{1}{2\lambda_0^3}(\det(x_N, b_0, b_1, b_2)^2 - \det(x_N, a_0, a_1, a_2)^2). \tag{4.42}$$

Comme $A = \langle d_3, a_3\rangle - \langle x_N, a_3\rangle\langle d_0, d_3\rangle$ et que, par (4.26) et (4.33)

$$-\langle x_N, a_3\rangle\langle d_0, d_3\rangle = \frac{1}{\lambda_0^3}\det(x_N, a_0, a_1, a_2)^2 \tag{4.43}$$

alors

$$A \geq \frac{1}{2\lambda_0^3}(\det(x_N, b_0, b_1, b_2)^2 + \det(x_N, a_0, a_1, a_2)^2) > 0. \tag{4.44}$$

□

Preuve de la proposition 4.4. On considère deux géodésiques g_1 et g_2 sur S_1 et S_2 qui se correspondent par l'isométrie entre S_1 et S_2 :

$$g_1(t) = r_1(t)(p_1 + t\tau_1 + t^2(k_1N_1 + p_1) + O(t^3)) \tag{4.45}$$
$$g_2(t) = r_2(t)(p_2 + t\tau_2 + t^2(k_2N_2 + p_2) + O(t^3)), \tag{4.46}$$

où $r_i(t)$ est tel que la norme de $g_i(t)$ soit égale à 1, et $r_1(0) = r_2(0) = 1$. La géodésique correspondante $\gamma(t)$ sur $Q := \Phi(S_1, S_2)_1$ sécrit

$$\frac{p_1 + t\tau_1 + t^2(k_1N_1 + p_1) + O(t^3) - x_N\langle x_N, p_1 + t\tau_1 + t^2(k_1N_1 + p_1) + O(t^3)\rangle}{\langle x_N, p_1 + \frac{r_2(t)}{r_1(t)}p_2 + t(\tau_1 + \frac{r_2(t)}{r_1(t)}\tau_2) + t^2(k_1N_1 + k_2\frac{r_2(t)}{r_1(t)}N_2 + p_1 + p_2) + O(t^3)\rangle}. \tag{4.47}$$

On veut connaitre une approximation de $\gamma(t) - \gamma(0)$. Cette expression n'a pas de terme de degré 0, et on calcule son terme de degré 1 en dérivant une fois l'expression au-dessus en $t = 0$, et on calcule son terme de degré 2 en dérivant deux fois l'expression au-dessus en $t = 0$. Ce calcul donne, avec $\gamma(0) = q$:

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \frac{1}{\langle x_N, p_1 + p_2\rangle}[t(-q\langle x_N, \tau_1 + \tau_2\rangle) + \tau_1 - x_N\langle x_N, \tau_1\rangle) \tag{4.48}$$
$$-2\langle x_N, \tau_1 + \tau_2\rangle t^2(-q\langle x_N, \tau_1 + \tau_2\rangle) + \tau_1 - x_N\langle x_N, \tau_1\rangle) \tag{4.49}$$
$$+t^2(-q\langle x_N, k_1N_1 + k_2N_2\rangle + k_1N_1 - \langle x_N, k_1N_1\rangle x_N)] + O(t^3). \tag{4.50}$$

On note n la normale de Q en $\gamma(0)$. Comme le coefficient de t dans l'expression au-dessus est la valeur de $\gamma(0)'$, il est orthogonal à n, et on remarque qu'il en est de même pour la deuxième ligne de l'expression ci-dessus. Donc

$$\langle n, \gamma(t) - \gamma(0)\rangle = \frac{t^2k_1}{\langle x_N, p_1 + p_2\rangle}\langle -q\langle x_N, N_1\rangle + N_1, n\rangle \tag{4.51}$$
$$- \frac{t^2k_2}{\langle x_N, p_1 + p_2\rangle}\langle x_N, N_2\rangle\langle q, n\rangle + O(t^3). \tag{4.52}$$

Il suffit de montrer que les coefficients de t^2 sont non-nuls et de même signe (quelque soit le point q) pour montrer la stricte convexité locale. Les coefficients $\frac{k_1}{\langle x_N, p_1 + p_2\rangle}$ et $\frac{k_2}{\langle x_N, p_1 + p_2\rangle}$ sont non-nuls et de même signe (car les k_i sont la courbure de géodésiques sur deux surfaces isométriques et strictement convexes : ils sont non-nuls et de même signe), il ne reste qu'à le vérifier pour $\langle -q\langle x_N, N_1\rangle + N_1, n\rangle$ et $\langle x_N, N_2\rangle\langle q, n\rangle$, ce qui est donné par le lemme 4.5. □

4.1.1.4 Cas des polyèdres

On dit qu'une surface localement (strictement) convexe de $\mathbb{S}^3$ centrée en x_N est *vue de l'intérieur* (sous-entendu par rapport à x_N) si x_N est du côté convexe de x_N. Elle est dite *vue de l'extérieur* si x_N est du côté concave de x_N. On a les mêmes définitions pour une surface localement (strictement) convexe de $\mathbb{R}^3$ par rapport à l'origine.

Lemme 4.6. *Un couple de surface vues de l'intérieur (resp. de l'extérieur) est envoyé sur un couple de surfaces vues de l'intérieur (resp. de l'extérieur).*

Démonstration. En reprenant les mêmes notations que dans le lemme 4.5, on a

$$d_0 = \frac{1}{\lambda_0}(a_0 - \langle a_0, x_N\rangle x_N), \tag{4.53}$$
$$d_3 = \frac{1}{\lambda_0}(x_N \wedge \lambda_0 a_1 - a_0\lambda_1 \wedge a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2), \tag{4.54}$$

ce qui permet de calculer

$$\langle d_0, d_3\rangle = \frac{1}{\lambda_0^3}\det(x_N, a_0, a_1, a_2) = -\frac{1}{\lambda_0^3}\langle a_3, x_N\rangle. \tag{4.55}$$

Or si la surface de $\mathbb{S}^3$ est vue de l'intérieur, cela signifie que

$$\langle a_0 - x_N, a_3 \rangle > 0 \tag{4.56}$$

et comme $a_3 \in T_{a_0}\mathbb{S}^3$ est orthogonal à a_0, on a

$$\langle x_N, a_3 \rangle < 0 \tag{4.57}$$

et dans ce cas $\langle d_0, d_3 \rangle > 0$, ce qui signifie que la surface de $\mathbb{R}^3$ est vue de l'intérieur.

L'argument est exactement le même pour une surface vue de l'extérieur. □

On veut déduire de ce résultat et de la proposition 4.4 qu'un couple de surfaces polyédrales isométriques vues de l'intérieur est envoyé sur un couple de surfaces polyédrales isométriques vues de l'intérieur.

En particulier, dans le cas où les surfaces sont fermées :

Proposition 4.7. *L'application de Pogorelov envoie un couple de polyèdres compacts convexes isométriques (centrés en x_N) sur un couple de polyèdres compacts convexes (isométriques et centrés en 0).*

En fait ce résultat est vrai pour n'importe quel couple de "surfaces généralisées" fermées isométriques convexes, [Pog56, Pog73].

Comme un couple de plans géodésiques est envoyé sur un couple de plans géodésiques, un couple de polyèdres est envoyé sur un couple de polyèdres. On suppose que les polyèdres sont vus de l'intérieur, la preuve est la même pour des polyèdres vus de l'extérieur.

Comme la combinatoire des polyèdres n'est pas forcément la même, il faut étudier les différents cas de couples de points (p_1, p_2) se correspondant par l'isométrie entre les deux polyèdres.

1) Si p_1 et p_2 sont tous les deux à l'intérieur d'une face, alors comme on l'a déjà signalé, ils sont envoyé sur un couple de points sur une face.
2) Si p_1 et p_2 sont chacun sur l'intérieur d'une arête. Alors
   a) Soit l'isométrie envoie une arête sur l'autre, et alors l'image du couple d'angles dièdres (i.e. une intersection de deux plans) est un couple de deux plans qui s'intersectent, soit un couple d'angles dièdres ;
   b) Soit les deux arêtes ne se correspondent pas par l'isométrie. Alors on trace sur chaque angle dièdre l'image par l'isométrie de l'arête de l'autre angle dièdre. Chaque membre du couple image est alors formé de quatre plans qui s'intersectent en un point (qui est une composante de l'image de (p_1, p_2)) : ce sont des cônes polyédraux à quatre faces.
3) Si p_1 est sur une arête et p_2 à l'intérieur d'une face, alors en traçant sur la face l'image de l'arête par l'isométrie, on en déduit que comme en $2), a)$ que l'image par l'application de Pogorelov est un couple d'angles dièdres.
4) Si p_1 et p_2 sont des sommets alors comme en $2), b)$ l'image est un couple de cônes polyédraux.

Pour chacun de ces cas, on peut approcher les angles dièdres et les cônes par des suites surfaces lisses strictement convexes isométriques vues de l'intérieur. Par la proposition 4.4 et le lemme 4.6 les images de ces suites sont convexes et vues de l'intérieur. Il en est donc de même de leurs limites, qui sont les images du couple de polyèdre de départ. Il s'agit donc bien de polyèdres convexes.

On remarque que dans le cas d'un couple de polyèdres ayant chacun un nombre infini de sommets, les éléments du couple image par l'application de Pogorelov sont toujours des polyèdres (i.e. sont localement finis).

4.1.2 De l'espace Hyperbolique-de Sitter dans un espace plat

4.1.2.1 Dans l'espace euclidien

Hyperbolique. On définit l'application de Pogorelov Hyperbolique-Euclidien, notée Φ_{H-E}, qui envoie $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, en voyant l'espace hyperbolique comme une pseudo-sphère de l'espace de Minkowski de dimension 4 :

$$(x, x') \mapsto 2\left(\frac{-x - \langle x, c_h \rangle_m c_h}{\langle x + x', c_h \rangle_m}, \frac{-x' - \langle x', c_h \rangle_m c_h}{\langle x + x', c_h \rangle_m}\right), \tag{4.58}$$

avec $c_h := (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4_1$, et où $\langle , \rangle_m$ est la forme bilinéaire de signature $(3,1)$ (on peut remarquer qu'en utilisant le produit scalaire usuel, noté $\langle , \rangle$, cette formule est exactement celle utilisée pour la sphère).

On rappelle que J est la matrice de $\langle , \rangle_m$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.59}$$

c'est-à-dire que $\langle x, y\rangle_m = \langle Jx, y\rangle = \langle x, Jy\rangle$, et on remarque que $Jc_h = -c_h$.

Cette application a les mêmes propriétés que l'application de Pogorelov qui envoie la sphère dans l'espace euclidien. Pour les lemmes 4.1 et 4.2, les preuves sont exactement les mêmes.

Pour la preuve de la proposition 4.4, elle est quasiment la même, aux différences de signe près. D'abord on remarque que l'écriture du développement d'une géodésique sur une surface de $\mathbb{H}^3$ est le même que pour $\mathbb{S}^3$. Et en reprenant les mêmes notations, on trouve que

$$\begin{aligned} \gamma(t) - \gamma(0) = \quad & \frac{1}{\langle c_h, p_1 + p_2\rangle_m}[t(-q\langle c_h, \tau_1 + \tau_2\rangle_m) - \tau_1 - c_h\langle c_h, \tau_1\rangle_m) && (4.60)\\ & -2\langle c_h, \tau_1 + \tau_2\rangle_m t^2(q\langle c_h, \tau_1 + \tau_2\rangle_m) + \tau_1 - c_h\langle c_h, \tau_1\rangle_m) && (4.61)\\ & +t^2(-q\langle c_h, k_1N_1 + k_2N_2\rangle_m - k_1N_1 - \langle c_h, k_1N_1\rangle_m)c_h] + O(t^3). && (4.62) \end{aligned}$$

D'où, avec les mêmes considérations :

$$\begin{aligned} \langle n, \gamma(t) - \gamma(0)\rangle \quad &= \quad \frac{t^2k_1}{\langle c_h, p_1 + p_2\rangle_m}\langle -q\langle c_h, N_1\rangle_m - N_1, n\rangle && (4.63)\\ &- \quad \frac{t^2k_2}{\langle c_h, p_1 + p_2\rangle_m}\langle c_h, N_2\rangle_m\langle q, n\rangle + O(t^3). && (4.64) \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que $\langle -q\langle c_h, N_1\rangle_m - N_1, n\rangle$ et $-\langle c_h, N_2\rangle_m\langle q, n\rangle$ ont même signe.

On peut alors montrer l'analogue du lemme 4.5. La preuve ne repose que sur de légères adaptations du cas de la sphère :

Lemme 4.8. *Soient P_1 et P_2 deux plans tangents, en respectivement a_0 et b_0, de deux surfaces isométriques de $\mathbb{H}^3$ centrées en c_h. On suppose que l'isométrie envoie P_1 sur P_2 et a_0 sur b_0.*

On note $Q = \Phi_{H-E}(P_1, P_2)_1$ le plan image et $d_0 = \Phi_{H-E}(a_0, b_0)_1 \in Q$. On note aussi a_3 et b_3 les normales de P_1 et P_2 en a_0 et b_0, définies chacune du même côté par rapport à c_h.

On note a_1 et a_2 deux vecteurs tangents unitaires orthogonaux de P_1 en a_0, on note b_1 et b_2 ceux de P_2 en b_0 leur correspondant pour l'isométrie et d_1, d_2 ceux de Q correspondants par l'application de Pogorelov. On note d_3 la normale à Q en d_0.

Alors les expressions

$$A = \langle d_3, -a_3 - \langle c_h, a_3\rangle_m d_0\rangle = \langle d_3, -a_3 + \langle c_h, a_3\rangle d_0\rangle, \tag{4.65}$$

$$B = -\langle c_h, b_3\rangle_m\langle d_0, d_3\rangle = \langle c_h, b_3\rangle\langle d_0, d_3\rangle \tag{4.66}$$

sont strictement négatives.

Démonstration. On remarque que les expressions de A et B sont au signe près les mêmes que dans le cas de la sphère, qui étaient strictement positives. Pour montrer ce lemme, il suffit de reprendre la preuve dans le cas de la sphère en prenant en compte les différences de signe : les λ_i et les d_i, $i = 0, 1, 2$, sont de signe opposé à ceux du cas de la sphère. La vérification est laissée au lecteur. □

De Sitter. L'application de Pogorelov de Sitter-Euclidien $\Phi_{\mathrm{dS}-E}$ qui envoie $\mathrm{dS}^3_+ \times \mathrm{dS}^3_+$ (dS^3_+ est la partie de l'espace de Sitter définie par $x_4 > 0$) sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, s'écrit

$$(x, x') \mapsto 2\left(\frac{-x - \langle x, c_h\rangle c_h}{\langle x + x', c_h\rangle}, \frac{-x' - \langle x', c_h\rangle c_h}{\langle x + x', c_h\rangle}\right), \tag{4.67}$$

avec $c_h := (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4_1$.

Les propriétés et les démonstrations sont exactement les mêmes que dans le cas hyperbolique. Il faut juste préciser ce que signifie *centré en* c_h, puisque le point c_h n'appartient pas à l'espace de Sitter. Une surface de l'espace de Sitter est dite centrée en c_h si elle a au plus un point d'intersection avec chaque géodésique définie par l'intersection de l'espace de Sitter avec le plan vectoriel passant par c_h. On vérifie (exactement comme dans le cas hyperbolique) qu'un couple de telles géodésiques est envoyé sur un couple de géodésiques (qui se prolongent en des géodésiques) passant par l'origine.

Dans les deux cas (hyperbolique et de Sitter), de la même façon que pour la sphère, un couple de polyèdres convexes est envoyé sur un couple de polyèdres convexes.

Extension à l'espace hyperbolique-de Sitter Les applications de Pogorelov hyperbolique-euclidien et de Sitter-euclidien sont injectives sur leur image, leur réciproque est de la même forme que pour la sphère (4.2). Comme cette application s'écrit de la même façon pour les deux espaces, et qu'elle est bien définie, les images des applications de Pogorelov hyperbolique-euclidien et de Sitter-euclidien ne s'intersectent pas.

On rappelle que l'espace hyperbolique-de Sitter HS est $\mathbb{R}^3$ moins la sphère unité, muni de la distance hyperbolique-de Sitter (section 3.7 page 49). Un *polyèdre de type* HS est un polyèdre dans cet espace. Dans l'espace de Minkowski de dimension 4, un polyèdre de type HS correspond à une intersection d'hyperplans vectoriels.

On note HS$\overline{\times}$HS l'espace constitué des couples de la forme (x,y) où x et y appartiennent tous les deux à l'espace hyperbolique ou à l'espace de Sitter. L'application de Pogorelov hyperbolique-de Sitter–euclidien $\Phi_{\mathrm{HS}-E}$ va de HS$\overline{\times}$HS dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et a la même forme que (4.58). On montre d'abord que

Lemme 4.9. *Pour la topologie donnée par la distance euclidienne de* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$*, si un couple de points* $(\overline{x}, \overline{x'})$ *à l'intérieur de la boule unité ouverte est proche d'un couple point* $(\overline{y}, \overline{y'})$ *à l'extérieur de la boule unité fermée, alors les images de ces couples par la composition de* $\pi^{-1} \times \pi^{-1}$ *avec l'application de Pogorelov sont proches, où* π *est la projection de l'espace hyperbolique et de l'espace de Sitter sur* $\mathbb{R}^3$ *qui définit le modèle de Klein.*

Démonstration. On note $(X, X') \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}^4_1 \times \mathbb{R}^4_1$ et $(Y, Y') \in \mathrm{dS}^3 \times \mathrm{dS}^3 \subset \mathbb{R}^4_1 \times \mathbb{R}^4_1$ les images réciproques de respectivement $(\overline{x}, \overline{x'})$ et $(\overline{y}, \overline{y'})$ par rapport à $\pi \times \pi$. Si $\overline{x}$ et $\overline{y}$ (resp. $\overline{x'}$ et $\overline{y'}$) sont proches pour la topologie de $\mathbb{R}^3$, i.e. dans une même boule ouverte de rayon ϵ, alors il est clair que X et Y (resp. X' et Y') sont dans un même cône de $\mathbb{R}^4$, dont l'angle dépend de ϵ.

De plus si $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) est à distance ϵ' (resp. ϵ'') de la sphère unité, c'est-à-dire $\|\overline{x}\|^2 = 1 - \epsilon'^2$ (resp. $\|\overline{y}\|^2 = 1 + \epsilon''^2$), alors on calcule facilement que

$$X_4 = \frac{1}{\epsilon'},\ Y_4 = \frac{1}{\epsilon''}, \tag{4.68}$$

c'est-à-dire que si $\overline{x}$ est proche de $\overline{y}$, alors ϵ' est proche de ϵ'' et donc X est proche de Y, toujours pour la topologie euclidienne (idem pour $\overline{x'}$, $\overline{y'}$, X' et Y').

Alors il est clair que les images de (X, X') et (Y, Y') par l'application de Pogorelov, données par

$$\Phi_{\mathrm{HS}-E}(X, X')_1 = 2\frac{X - X_4 c_h}{X_4 + X'_4},\ \Phi_{\mathrm{HS}-E}(Y, Y')_1 = 2\frac{Y - Y_4 c_h}{Y_4 + Y'_4} \tag{4.69}$$

sont proches. □

Proposition 4.10. *Les couples de polyèdres de type* HS *convexes sont envoyés par l'application de Pogorelov* HS $- E$ *sur des couples de polyèdres convexes de l'espace euclidien.*

Démonstration. Un polyèdre convexe de type HS est défini par des intersections d'hyperplans de l'espace de Minkowski de dimension 4. Les couples de tels hyperplans sont envoyés sur des couples d'hyperplans affines de $\mathbb{R}^3$ (la preuve est exactement la même que dans le cas de la sphère). Le lemme précédent indique que l'image d'un couple de polyèdres de type HS est bien définie par continuité aux endroits où les polyèdres rencontrent la sphère unité.

La propriété fondamentale de l'application de Pogorelov se montre exactement comme dans les cas précédents, et pour la convexité il suffit d'appliquer la propriété de convexité successivement à la partie hyperbolique et à la partie de Sitter du polyèdre. □

4.1.2.2 Dans l'espace de Minkowski

On définit l'application de Pogorelov Hyperbolique-Minkowski, noté Φ_{H-M}, qui envoie le produit de l'intersection de l'espace hyperbolique (comme quadrique de l'espace de Minkowski de dimension 4) avec le demi-espace $\{x_1 > 0\}$ sur $\mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1$:

$$(x, x') \mapsto 2\left(\frac{x - \langle x, c_1\rangle_m c_1}{\langle x + x', c_1\rangle_m}, \frac{x' - \langle x', c_1\rangle_m c_1}{\langle x + x', c_1\rangle_m}\right), \tag{4.70}$$

avec $c_1 := (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4_1$.

L'application de Pogorelov de Sitter-Minkowski, notée $\Phi_{\mathrm{dS}-M}$, qui envoie le produit de l'intersection de l'espace de Sitter avec le demi-espace $\{x_1 > 0\}$ sur $\mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1$, s'écrit de la même façon.

On vérifie exactement comme dans les cas précédents que la propriété fondamentale est préservée, que les géodésiques sont envoyées sur des géodésiques, qu'une surface centrée en c_1 est envoyée sur une surface centrée en 0 (être centrée en c_1 pour une surface de l'espace hyperbolique est la définition analogue à être centré en c_h pour une surface de l'espace de Sitter).

Mais comme $Jc_1 = c_1$, cette application s'écrit aussi

$$(x, x') \mapsto 2\left(\frac{x - \langle x, c_1\rangle c_1}{\langle x + x', c_1\rangle}, \frac{x' - \langle x', c_1\rangle c_1}{\langle x + x', c_1\rangle}\right), \tag{4.71}$$

et donc pour montrer qu'elle envoie un couple de surfaces isométriques convexes centrées en c_1 sur un couple de surfaces isométriques convexes centrées en 0, la preuve est exactement la même que dans le cas de la sphère. De la même façon un couple de polyèdres convexes est envoyé sur un couple de polyèdres convexes.

De plus, en prenant des vecteurs de type temps dans la preuve du lemme 4.3, on a immédiatement :

Lemme 4.11. *L'application de Pogorelov de Sitter-Minkowski envoie le produit du cône temps de c_1 par lui-même sur le produit du cône temps de l'origine par lui-même.*

Cette application a aussi une propriété de commutation avec les isométries. On note ϕ l'application projective de $\mathbb{H}^3$ dans $\mathbb{R}^3_1$ ou l'application projective de dS^3 dans $\mathbb{R}^3_1$. Un isométrie qui fixe c_1 dans l'espace de Sitter est une isométrie de $\mathbb{R}^4_1$ qui fixe le vecteur c_1 et les pseudo-sphères, c'est donc une isométrie de l'espace hyperbolique qui fixe une surface totalement géodésique (l'intersection de l'espace hyperbolique avec l'hyperplan orthogonal à c_1).

Lemme 4.12. *L'application de Pogorelov (de l'espace hyperbolique ou de Sitter) commute aux isométries préservant c_1, c'est-à-dire que, si f est une telle isométrie, alors*

$$\Phi \circ (f \times f) = [(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) \times (\phi \circ f \circ \phi^{-1})] \circ \Phi_{S-E}, \tag{4.72}$$

et $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une isométrie qui fixe l'origine de l'espace de Minkowski.

Démonstration. Il est immédiat que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une isométrie qui fixe l'origine. Quand à l'équation, elle se montre directement avec un calcul explicite [LS00, Rou04]. □

Et on définit une extension à l'espace hyperbolique-de Sitter de ces deux applications de Pogorelov exactement comme dans le cas euclidien, et de la même façon on obtient

Proposition 4.13. *Les couples de polyèdres de type* HS *convexes sont envoyés par l'application de Pogorelov* $\mathrm{HS} - M$ *sur des couples de polyèdres convexes de l'espace de Minkowski.*

Et la propriété de commutation aux isométries décrite dans le lemme précédent est évidemment préservée.

4.2 Applications de Pogorelov infinitésimales

4.2.1 Dans l'espace euclidien

4.2.1.1 Hyperbolique-Euclidien

Définition 4.14. *Pour un point x de l'hyperboloïde hyperbolique $\mathbb{I}^3 \subset \mathbb{R}^4_1$, il existe une unique géodésique reliant c_h et x. La dérivée de cette géodésique au point x fournit un vecteur de $T_x\mathbb{I}^3$ qu'on appelle la* direction radiale. *On appelle* latéral *un vecteur orthogonal à la direction radiale.*

Tout vecteur se décompose en une composante radiale et une composante latérale. La direction radiale est la projection de la direction négative de $\mathbb{R}^3_1$ sur l'hyperboloïde. La direction latérale est donc tangente à une sphère horizontale tracée sur l'hyperboloïde.

L'application projective φ_{H-E} qui envoie l'espace hyperbolique à l'intérieur de la boule unité a la propriété d'envoyer les géodésiques de $\mathbb{I}^3$ sur les segments euclidiens, donc en particulier une direction radiale de $\mathbb{I}^3$ correspond par $d\varphi_{H-E}$ à une direction radiale de la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

On peut alors définir un application de Pogorelov infinitésimale :

Définition 4.15. *On définit l'*application de Pogorelov infinitésimale *(Hyperbolique-Euclidien)* $\Phi'_{H-E} : T\mathbb{I}^3 \to TB^3$ *comme étant l'application qui à* $(x, Z) \in T\mathbb{I}^3$ *fait correspondre* $(\varphi_{H-E}(x), u)$*, où :*

u_l, la composante latérale de u, est l'image par $d\varphi_{H-E}$ de Z_l, la composante latérale de Z ;

u_r, la composante radiale de u a la même direction (via la projection) et la même norme que Z_r, la composante radiale de Z.

Nous ferons l'abus de notation qui consiste à laisser deviner en quel point on évalue le champ de vecteurs.

On note $\|.\|_{\mathbb{H}^3}$ la norme hyperbolique et $\|.\|_{\mathbb{R}^3}$ la norme euclidienne.

Lemme 4.16. *Si L est un vecteur latéral de l'espace hyperbolique, alors*

$$\|d\varphi_{H-E}(L)\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{\|L\|_{\mathbb{H}^3}}{\cosh(\mu)}, \tag{4.73}$$

et si R est un vecteur radial, alors

$$\|d\varphi_{H-E}(R)\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{\|R\|_{\mathbb{H}^3}}{\cosh^2(\mu)}, \tag{4.74}$$

où $\mu = d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x)$.

Démonstration. Pour un vecteur latéral v_l, défini en un point x d'ordonnée $x_4 = \cosh(\mu)$, où μ est la distance hyperbolique de c_h à x, le théorème de Thalès nous donne le résultat (voir figure 4.1). On peut aussi la calculer directement en considérant sans perte de généralité que Z_l est de la forme $(0, \|Z_l\|, 0, 0)$.

Pour le cas radial, il suffit de dériver l'image par φ_{H-E} d'une géodésique paramétrée par $(\sinh(\mu), 0, 0, \cosh(\mu))$, ce qui revient à dériver $\tanh(\mu)$ (Lemme 3.20 page 43). □

Ainsi on peut écrire l'application de Pogorelov sous les formes suivantes, si R est le vecteur radial unitaire de B^3 :

$$\Phi'_{H-E}(Z) = d\varphi_{H-E}(Z_l) + \cosh^2(\mu) d\varphi_{H-E}(Z_r) = d\varphi_{H-E}(Z_l) + \|Z_r\|_{\mathbb{H}^3} R. \tag{4.75}$$

Lemme 4.17. *On a les égalités*

$$\|Z_r\|_{\mathbb{H}^3} = \|u_r\|_{\mathbb{R}^3}, \tag{4.76}$$

$$\|Z_l\|_{\mathbb{H}^3} = \cosh(\mu) \|u_l\|_{\mathbb{R}^3}, \tag{4.77}$$

où $\mu = d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x)$.

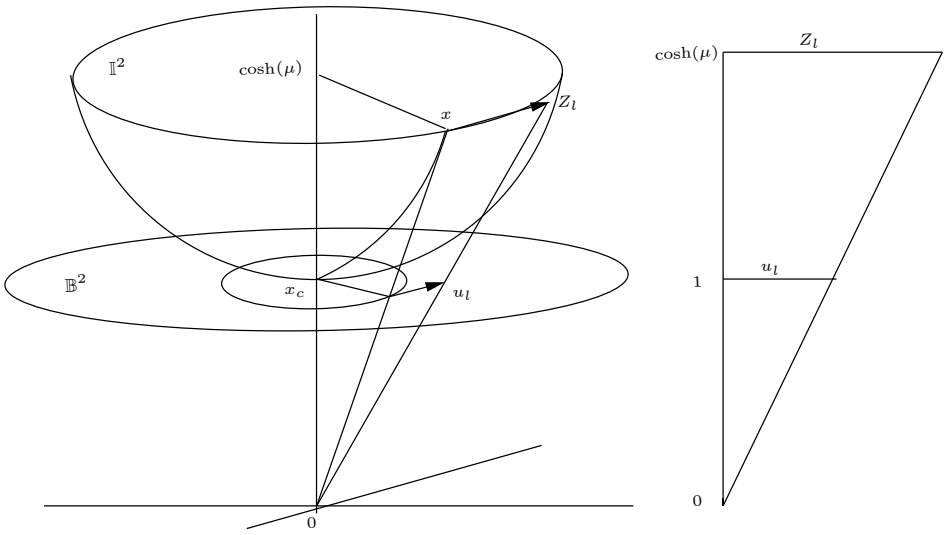


FIG. 4.1 – $\|Z_l\| = \cosh(\mu)\,\|u_l\|$ (les dessins ont une dimension de moins que le texte).

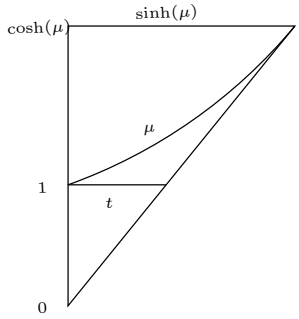


FIG. 4.2 –

Démonstration. La première égalité vient de la définition, la seconde du lemme précédent. □

Proposition 4.18 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale)**.** *Soit S une surface lisse de $\mathbb{H}^3$, et Z un champ de vecteurs de $\mathbb{H}^3$ défini sur S. Alors Z est une déformation isométrique infinitésimale de S si et seulement si $\Phi'_{H-E}(Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\varphi_{H-E}(S)$.*

Un champ de vecteurs Z de $\mathbb{H}^3$ est un champ de Killing de $\mathbb{H}^3$ si et seulement si $\Phi'_{HE}(Z)$ est un champ de Killing de $\mathbb{R}^3$.

On remarquera que la preuve de la proposition est toujours valable quelque soit la courbure (constante) de l'espace ambiant ou la signature de la métrique à condition d'avoir un résultat analogue au lemme 3.22, c'est-à-dire que le rapport entre les deux premières formes fondamentales soit le même que celui entre les deux deuxièmes formes fondamentales.

Démonstration [Sch06]. Pour avoir la seconde partie du résultat, il suffit de remplacer S par $\mathbb{H}^3$.

On note h la métrique de $\mathbb{H}^3$ et $\langle , \rangle$ celle de $\mathbb{R}^3$, ∇ la connexion associée à h, X et Y deux vecteurs tangents à S, et $x = d\varphi_{H-E}(X)$ et $y = d\varphi_{H-E}(Y)$ deux vecteurs tangents à $\varphi_{H-E}(S)$. Il faut montrer

que :

$$\begin{aligned}&(L_Z h)(X,Y) = h(\nabla_X Z, Y) + h(\nabla_Y Z, X) = 0 \\ &\Leftrightarrow (L_u\langle,\rangle)(x,y) = \langle du(x), y\rangle + \langle du(y), x\rangle = 0.\end{aligned} \tag{4.78}$$

Par bilinéarité de la dérivée de Lie, il suffit de le montrer quand X et Y sont non nuls, et chacun radial ou latéral.

X et Y sont tous les deux radiaux. On décompose

$$(L_Z h)(X,Y) = (L_{fR+Z_l} h)(X,Y) = (L_{fR} h)(X,Y) + (L_{Z_l})(X,Y). \tag{4.79}$$

Comme X est radial, c'est le vecteur tangent d'une géodésique paramétrée à vitesse constante : $\nabla_X X = 0$, ce qui implique $h(\nabla_X Z_l, X) = X.h(Z_l, X) - h(\nabla_X X, Z_l) = 0$, c'est-à-dire que $\nabla_X Z_l$ est latéral. De la même façon on a que $\nabla_Y Z_l$ est latéral, et on en déduit que $(L_{Z_l} h)(X,Y) = 0$.

Calculons maintenant $L_{fR}h(X,Y)$. Le vecteur X (resp. Y) est radial, il s'écrit aR, et donc $\nabla_X R = 0$ (resp. $\nabla_Y R = 0$), d'où

$$\begin{aligned}(L_{fR}h)(X,Y) &= h(\nabla_X fR, Y) + h(\nabla_Y fR, X) && (4.80)\\ &= fh(\nabla_X R, Y) + fh(\nabla_Y R, X) + df(X)h(R,Y) && (4.81)\\ &\quad + df(X)h(R,X) && (4.82)\\ &= df(X)h(R,Y) + df(X)h(R,X). && (4.83)\end{aligned}$$

Ces calculs se font de la même manière dans le cas de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs X et x ont même direction et même norme par définition, donc $df(X) = df(x)$. L'équation (4.78) est vraie dans ce cas.

X et Y sont tous les deux latéraux. On peut considérer que les vecteurs X et Y sont tangents à un sphère dans $\mathbb{H}^3$, à distance μ du centre c_h. Selon le lemme 3.22 :

$$\begin{aligned}(L_{Z_l} h)(X,Y) &= (L_{Z_l} \mathrm{I}_\mu)(X,Y) && (4.84)\\ &= \cosh^2(\mu)(L_{u_l}\overline{\mathrm{I}}_t)(x,y) \\ &= \cosh^2(\mu)(L_{u_l}\langle,\rangle)(x,y).\end{aligned}$$

Voyons maintenant ce qu'il en est de la composante radiale de Z :

$$\begin{aligned}(L_{fR}h)(X,Y) &= h(\nabla_X fR, Y) + h(\nabla_Y fR, X) && (4.85)\\ &= fh(\nabla_X R, Y) + fh(\nabla_Y R, X) + df(X)h(R,Y) && (4.86)\\ &\quad + df(X)h(R,X) && (4.87)\\ &= fh(\nabla_X R, Y) + fh(\nabla_Y R, X) && (4.88)\\ &= -2f\mathrm{II}_\mu(X,Y). && (4.89)\end{aligned}$$

Comme le même calcul peut-être fait dans $\mathbb{R}^3$, le lemme 3.22 indique que

$$(L_{fR}h)(X,Y) = \cosh^2(\mu)(L_{fr}\langle,\rangle)(x,y). \tag{4.90}$$

Les équations (4.84) et (4.90) donnent le résultat :

$$(L_Z h)(X,Y) = \cosh^2(\mu)(L_u\langle,\rangle)(x,y). \tag{4.91}$$

X est latéral et Y est radial. On choisit une extension de X (*resp.* Y) qui reste tangente (*resp.* orthogonale) à la sphère $\{\mu = \text{constante}\}$. On calcule :

$$\begin{aligned}(L_{Z_l}h)(X,Y) &= h(\nabla_X Z_l, Y) + h(\nabla_Y Z_l, X) && (4.92)\\ &= h(-[Z_l,X] + \nabla_{Z_l}X, Y) + h(-[Z_l,Y] + \nabla_{Z_l}Y, X) && (4.93)\\ &= Z_l.h(X,Y) - h([Z_l,X],Y) - h([Z_l,Y],X) && (4.94)\\ &= -h(X,[Z_l,Y]), && (4.95)\end{aligned}$$

car $[Z_l, X]$ est tangent à la sphère de rayon μ. Comme le crochet de Lie ne dépend pas de la métrique, le lemme 3.22 indique que

$$\begin{aligned}(L_{Z_l}h)(X,Y) &= -h(X,[Z_l,Y]) && (4.96)\\ &= -\cosh^2(\mu)\langle x,[u_l,y]\rangle && (4.97)\\ &= \cosh^2(\mu)(L_u\langle,\rangle)(x,y). && (4.98)\end{aligned}$$

puisque les calculs sont les mêmes dans $\mathbb{R}^3$. Comme X est latéral et Y radial,

$$\begin{aligned}(L_{fR}h)(X,Y) &= h(\nabla_X fR, Y) + h(\nabla_Y fR, X) && (4.99)\\ &= fh(\nabla_X R, Y) + fh(\nabla_Y R, X) + df(X)h(R,X) + df(X)h(R,Y) && (4.100)\\ &= df(X)\cosh^2(\mu)\langle r,y\rangle - 2f\mathrm{II}(X,Y) && (4.101)\\ &= \cosh^2(\mu)(L_{fr}\langle,\rangle)(x,y), && (4.102)\end{aligned}$$

car les calculs sont toujours les mêmes dans $\mathbb{R}^3$, ce qui permet de conclure :

$$(L_Z h)(X,Y) = \cosh^2(\mu)(L_u\langle,\rangle)(x,y). \quad (4.103)$$

□

4.2.1.2 De Sitter-Euclidien

Définition 4.19. *Pour un point x de dS^3_+ (l'intersection de l'espace de Sitter avec le demi-espace supérieur) on considère la géodésique l_x de type temps entre x et $\mathcal{C}$ donnée par l'intersection de dS^3_+ avec le plan vectoriel passant par x et orthogonal à l'hyperplan $\{x_4 = 0\}$. La dérivée de cette géodésique au point x fournit un vecteur de $T_x\mathrm{dS}^3$ qui est la* direction radiale*. On appelle* latéral *un vecteur orthogonal à la direction radiale.*

La direction radiale est la projection de la direction négative de $\mathbb{R}^4_1$ sur dS^3_+, donc la direction latérale est tangente à une sphère horizontale (i.e. contenue dans un hyperplan orthogonal à la direction négative) tracée sur dS^3_+.

L'application projective $\varphi_{\mathrm{dS}-E}$ qui envoie (la partie supérieure) l'espace de Sitter sur l'extérieur de la boule unité a la propriété d'envoyer les géodésiques de dS^3_+ sur les segments euclidiens, donc en particulier la direction radiale de dS^3_+ correspond par $d\varphi_{\mathrm{dS}-E}$ à une direction radiale de $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.20. *On définit l'*application de Pogorelov infinitésimale *(de Sitter-euclidien)* $\Phi'_{\mathrm{dS}-E} : T\mathrm{dS}^3_+ \to T\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}^3$ *comme étant l'application qui à $(x,Z) \in \mathrm{dS}^3_+$ fait correspondre $(\varphi_{\mathrm{dS}-E}(x), u)$, où :*

u_l, la composante latérale de u, est l'image par $d\varphi_{\mathrm{dS}-E}$ de Z_l, la composante latérale de Z,

u_r, la composante radiale de u a la même direction et la même norme que Z_r, la composante radiale de Z.

Lemme 4.21. *On a les égalités*

$$\|Z_r\|_{\mathrm{dS}^3} = \|u_r\|_{\mathbb{R}^3}\,; \quad (4.104)$$
$$\|Z_l\|_{\mathrm{dS}^3} = \sinh(\nu)\,\|u_l\|_{\mathbb{R}^3}\,, \quad (4.105)$$

où ν est la valeur absolue de la longueur de la géodésique l_x qui relie le point à $\mathcal{C}$ (i.e. la sphère intersection de l'espace de Sitter avec l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$).

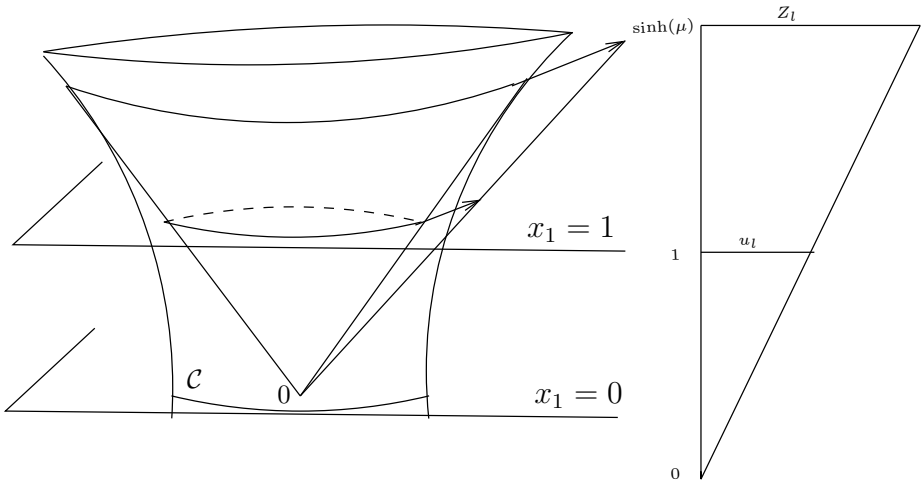


FIG. 4.3 – $\|Z_l\| = \sinh(\mu)\,\|u_l\|$.

Démonstration. La première égalité vient de la définition.

Pour un vecteur latéral Z_l, défini en un point x d'ordonnée $x_4 = \sinh(\nu)$, le théorème de Thalès nous donne le résultat (voir figure 4.4). □

Proposition 4.22 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale)**.** *Soit S une surface lisse de dS^3_+, et Z un champ de vecteurs de dS^3_+ défini sur S. Alors Z est une déformation isométrique infinitésimale de S si et seulement si $\Phi'_{\mathrm{dS}-E}(Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\varphi_{\mathrm{dS}E}(S)$.*

Un champ de vecteurs Z de dS^3_+ est un champ de Killing de dS^3_+ si et seulement si $\Phi'_{\mathrm{dS}-E}(Z)$ est un champ de Killing de $\mathbb{R}^3$.

En particulier, un champ de Killing sur dS^3_+ peut-être prolongé sur tout l'espace de Sitter : une surface infinitésimalement rigide dans dS^3_+ l'est aussi dans l'espace de Sitter. Cette remarque est aussi valable pour les autres cas.

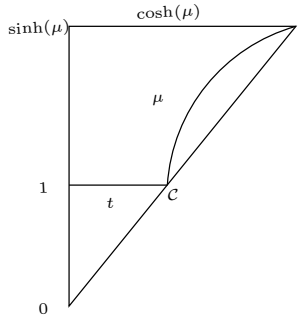


FIG. 4.4 –

La preuve de la proposition est la même que dans le cas hyperbolique, il suffit juste d'utiliser le lemme 3.25 à la place du lemme 3.22. Elle est aussi donnée dans [Sch05].

4.2.1.3 Sphère-Euclidien

Comme on l'a vu page 21, on a une application projective φ_{S-E} de la demi-sphère supérieure $\mathbb{S}^3_+$ dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.23. *Pour un point x de l'espace $\mathbb{S}^3_+$ on considère l'unique géodésique entre x et $x_N = (0,0,0,1)$. La dérivée de cette géodésique au point x fournit un vecteur de $T_x\mathbb{S}^3_+$ qui est la* direction radiale*. On appelle* latéral *un vecteur orthogonal à la direction radiale.*

Au point x_N, tous les vecteurs tangents sont la direction radiale.

Définition 4.24. *On définit l'*application de Pogorelov infinitésimale *(sphère-Euclidien)* $\Phi'_{S-E} : T\mathbb{S}^3_+ \to T\mathbb{R}^3$ *comme étant l'application qui à $(x,Z) \in T\mathbb{S}^3_+$ fait correspondre $(\varphi_{S-E}(x), u)$, où :*

u_l, la composante latérale de u, est l'image par $d\varphi_S$ de Z_l, la composante latérale de Z ;

u_r, la composante radiale de u a la même direction et la même norme que Z_r, la composante radiale de Z.

Proposition 4.25 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale)**.** *Soit S une surface lisse de $\mathbb{S}^3_+$, et Z un champ de vecteurs de $\mathbb{S}^3_+$ défini sur S. Alors Z est une déformation isométrique infinitésimale de S si et seulement si $\Phi'_{S-E}(Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\varphi_{S-E}(S)$.*
En particulier, Z est un champ de Killing de $\mathbb{S}^3_+$ si et seulement si $\Phi'_{S-E}(Z)$ est un champ de Killing de $\mathbb{R}^3$.

La preuve pour montrer la propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale est toujours la même que dans le cas hyperbolique, il suffit juste d'utiliser le lemme 1.24 à la place du lemme 3.22.

4.2.2 Dans l'espace de Minkowski

4.2.2.1 Hyperbolique-Minkoswki

On rappelle que φ_{H-M} est l'application projective de de l'espace hyperbolique dans l'espace de Minkowski.

Les définitions de directions radiale et latérales sont les mêmes que dans le cas où l'on projette dans l'espace euclidien.

Définition 4.26. *On définit l'*application de Pogorelov infinitésimale *(Hyperbolique-Minkowski)* $\Phi'_{H-M} : T\mathrm{dS}^3 \to T\mathbb{R}^3_1$ *comme étant l'application qui à $(x,Z) \in T\mathrm{dS}^3$ fait correspondre $(\varphi_{\mathrm{dS}-M}(x), u)$, où :*

u_l, la composante latérale de u, est l'image par $d\varphi_{H-M}$ de Z_l, la composante latérale de Z ;

u_r, la composante radiale de u a la même direction et la même norme que Z_r, la composante radiale de Z.

Lemme 4.27. *On a les égalités*

$$\|Z_r\|_{\mathbb{H}^3} = \|u_r\|_{\mathbb{R}^3_1}\,; \tag{4.106}$$

$$\|Z_l\|_{\mathbb{H}^3} = \sinh(\mu)\,\|u_l\|_{\mathbb{R}^3_1}\,. \tag{4.107}$$

où μ est la longueur de la géodésique γ_x qui relie c_h et x.

Démonstration. La première égalité vient de la définition.

Soit un vecteur latéral v_l, défini en un point x qui est sur une géodésique donnée par un plan vectoriel orthogonal à $\{x_4 = 0\}$ et $\{x_1 = 0\}$. L'ordonnée de x est alors $x_4 = \cosh(\mu)$, le théorème de Thalès nous donne le résultat (voir figure 4.5). □

Proposition 4.28 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale)**.** *Soit S une surface lisse de $\mathbb{I}^3$, et Z un champ de vecteurs de $\mathbb{I}^3$ défini sur S. Alors Z est une déformation isométrique infinitésimale de S si et seulement si $\Phi'_{H-M}(Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\varphi_{H-M}(S)$.*

Un champ de vecteurs Z de $\mathbb{I}^3$ est un champ de Killing de $\mathbb{I}^3$ si et seulement si $\Phi'_{H-M}(Z)$ est un champ de Killing de $\mathbb{R}^3_1$.

La preuve de la propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale est toujours la même que dans le cas hyperbolique, il suffit juste d'utiliser le lemme 3.32, à la place du lemme 3.22.

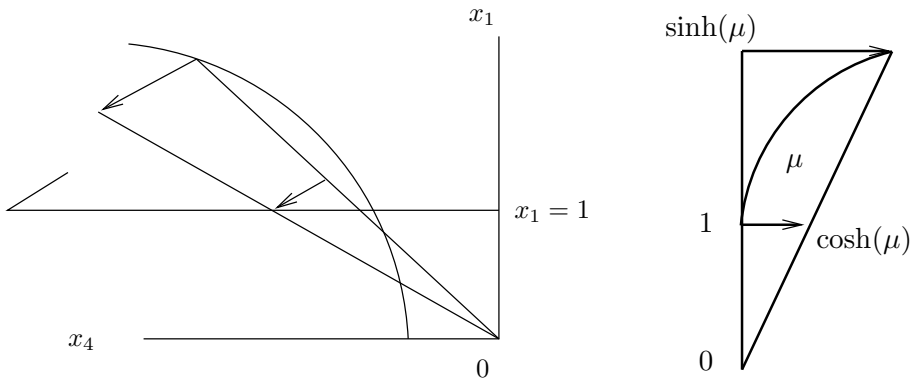


FIG. 4.5 – $\|Z_l\| = \sinh(\nu)\,\|u_l\|$.

4.2.2.2 De Sitter-Minkowski

On rappelle que $\varphi_{\mathrm{dS}-M}$ est l'application projective de de Sitter dans l'espace de Minkowski.

La partie de l'espace de Sitter donnée par $\{x_1 > 1\}$ a pour image par l'application projective l'intérieur du cône de lumière de l'espace de Minkowski, celle donnée par $\{x_1 = 1\}$ est envoyée sur le cône de lumière et le reste est envoyé à l'extérieur du cône de lumière.

Définition 4.29. *Pour un point x de l'espace de Sitter qui n'est pas sur le cône de lumière, on considère la géodésique λ_x entre x et c_1 donnée par l'intersection de l'espace de Sitter avec le plan vectoriel passant par x et c_1. La dérivée de cette géodésique au point x fournit un vecteur de $T_x\mathrm{dS}^3$ qui est la* direction radiale*. On appelle* latéral *un vecteur orthogonal à la direction radiale.*

Définition 4.30. *On définit l'*application de Pogorelov infinitésimale *(de Sitter-Minkowski) $\Phi'_{\mathrm{dS}-M} : T\mathrm{dS}^3 \to T\mathbb{R}^3_1$ comme étant l'application qui à $(x, Z) \in T\mathrm{dS}^3$ fait correspondre $(\varphi_{\mathrm{dS}-M}(x), u)$, où, si x n'est pas sur le cône de lumière de c_1 :*

u_l, la composante latérale de u, est l'image par $d\varphi_{\mathrm{dS}-M}$ de Z_l, la composante latérale de Z ;

u_r, la composante radiale de u a la même direction et la même norme que Z_r, la composante radiale de Z.

Pour les points sur le cône de lumière, on prolonge par continuité l'image du champ de vecteurs.

Lemme 4.31. *On a les égalités*

$$\|Z_r\|_{\mathrm{dS}^3} = \|u_r\|_{\mathbb{R}^3_1}\,; \tag{4.108}$$

$$\|Z_l\|_{\mathrm{dS}^3} = \cosh(\nu)\,\|u_l\|_{\mathbb{R}^3_1}\,. \tag{4.109}$$

où ν est la longueur de la géodésique de type temps γ_x qui relie c_1 et x.

Démonstration. La première égalité vient de la définition.

Soit un vecteur latéral v_l, défini en un point x qui est sur une géodésique donnée par un plan vectoriel orthogonal à $\{x_4 = 0\}$ et $\{x_1 = 0\}$. L'ordonnée de x est alors $x_4 = \sinh(\nu)$, le théorème de Thalès nous donne le résultat (voir figure 4.6). □

Proposition 4.32 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale)**.** *Soit S une surface lisse de dS^3, et Z un champ de vecteurs de dS^3 défini sur S. Alors Z est une déformation isométrique infinitésimale de S si et seulement si $\Phi'_{\mathrm{dS}-M}(Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\varphi_{\mathrm{dS}-M}(S)$.*

Un champ de vecteurs Z de dS^3 est un champ de Killing de dS^3 si et seulement si $\Phi'_{\mathrm{dS}-M}(Z)$ est un champ de Killing de $\mathbb{R}^3_1$.

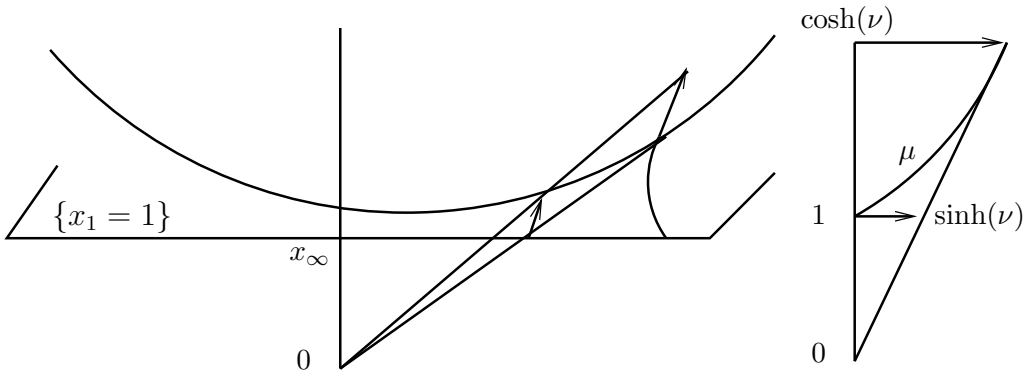


FIG. 4.6 – $\|Z_l\| = \cosh(\nu)\,\|u_l\|$.

La preuve de la propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale est toujours la même que dans le cas hyperbolique, il suffit juste d'utiliser, à la place du lemme 3.22, le lemme 3.29 pour les points qui sont dans le cône temps, et le lemme 3.30 pour les points qui sont en-dehors du cône temps.

4.2.2.3 Anti-de Sitter-Minkowski

On rappelle que Ω_{-1} est l'intersection de l'espace anti-de Sitter avec les ensembles définis par $x_4 \geq 0$ et $x_1 \geq 0$.

On rappelle qu'on avait noté $\varphi_{\mathrm{AdS}-M}$ l'application projective de l'espace anti-de Sitter dans l'espace de Minkowski qui envoie c_{-1} sur l'origine.

Définition 4.33. *Pour un point x de l'espace Ω_{-1} qui n'est pas sur le cône de lumière de c_{-1} on considère la géodésique γ_x entre x et c_{-1} donnée par l'intersection de l'espace anti-de Sitter avec le plan vectoriel passant par x et c_{-1}. La dérivée de cette géodésique au point x fournit un vecteur de $T_x\mathrm{AdS}^3$ qui est la* direction radiale*. On appelle* latéral *un vecteur orthogonal à la direction radiale.*

Définition 4.34. *On définit l'*application de Pogorelov infinitésimale *(anti-de Sitter-Minkowski) $\Phi'_{\mathrm{AdS}-M} : T\mathrm{AdS}^3 \to T\mathbb{R}^3_1$ comme étant l'application qui à $(x, Z) \in T\mathrm{AdS}^3$ fait correspondre $(\varphi_{\mathrm{AdS}}(x), u)$, où, si x n'est pas sur le cône de lumière de c_{-1} :*

u_l, la composante latérale de u, est l'image par $d\varphi_{\mathrm{AdS}-M}$ de Z_l, la composante latérale de Z ;

u_r, la composante radiale de u a la même direction et la même norme que Z_r, la composante radiale de Z.

Pour les points sur le cône de lumière, on prolonge par continuité l'image du champ de vecteurs.

Proposition 4.35 (Propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale)**.** *Soit S une surface lisse de AdS^3, et Z un champ de vecteurs de AdS^3 défini sur S. Alors Z est une déformation isométrique infinitésimale de S si et seulement si $\Phi'_{\mathrm{AdS}-M}(Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\varphi_{\mathrm{AdS}-M}(S)$.*
En particulier, Z est un champ de Killing de AdS^3 si et seulement si $\Phi'_{\mathrm{AdS}-M}(Z)$ est un champ de Killing de $\mathbb{R}^3_1$.

La preuve de la propriété fondamentale de l'application de Pogorelov infinitésimale est toujours la même que dans le cas hyperbolique, il suffit juste d'utiliser, à la place du lemme 3.22, le lemme 3.35 pour les points qui sont dans le cône temps, et le lemme 3.36 pour les points qui sont en-dehors du cône temps.

4.2.3 Euclidien-Minkowski

Il y a un moyen très simple, découvert dans [GPS82], pour passer des problèmes de déformation infinitésimales dans l'espace euclidiens à ceux de l'espace de Minkowski (voir aussi [Sch01, Lemma 3.3]) :

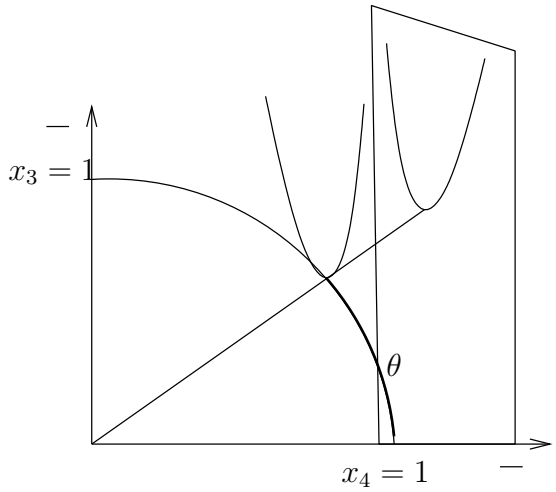


FIG. 4.7 –

Lemme 4.36. *Le champ de vecteurs V de coordonnées (X, Y, Z) est une déformation isométrique infinitésimale dans l'espace euclidien si et seulement si le champ de vecteurs $\overline{V}$ de coordonnées $(X, Y, -Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale dans l'espace de Minkowski.*

Démonstration. C'est immédiat :

$$\langle df(X), dV(X)\rangle = \langle df(X), JdV(X)\rangle_m = \langle df(X), d\overline{V}(X)\rangle_m. \tag{4.110}$$

□

On appelle l'application $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, -Z)$ *l'application de Pogorelov infinitésimale euclidienne-Minkowski*. Avec les résultats correspondants dans le cas euclidien, on obtient immédiatement :

Lemme 4.37. *Une déformation infinitésimale d'une coiffe convexe dans l'espace de Minkowski dont le bord est dans le plan horizontal est triviale si sa composante verticale s'annule au bord.*

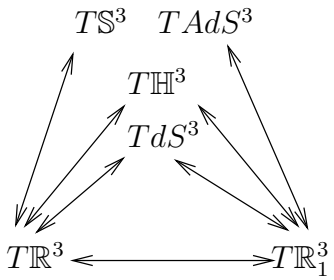


FIG. 4.8 – Les sept applications de Pogorelov infinitésimales.

4.2.4 Les théorèmes de Darboux–Sauer et Volkov

Un résultat bien connu et analogue aux propriétés des applications de Pogorelov infinitésimales dit que la rigidité infinitésimale est une propriété projective :

Théorème 4.38 (Darboux–Sauer, [Dar93, Sau35], see [Sab92]). *Soit S une surface de l'espace euclidien et Z une déformation isométrique infinitésimale de S. Pour toute transformation projective P, la surface $P(S)$ admet une déformation isométrique infinitésimale "$P(Z)$" décrite explicitement en fonction de Z, et "$P(Z)$" est triviale si et seulement si Z l'est.*

Ce théorème ainsi que propriétés des applications de Pogorelov infinitésimales sont contenus dans un résultat plus général de Volkov (qui m'a été communiqué par I. Izmestiev)

Théorème 4.39 ([Vol74]). *Soit S une surface dans un espace (riemannien) M à courbure constante et Z une déformation isométrique infinitésimale de S. Pour toute application F de M dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie les géodésiques sur les géodésiques, la surface $F(S)$ admet une déformation isométrique infinitésimale "$F(Z)$" décrite explicitement en fonction de Z et de F, et "$F(Z)$" est triviale si et seulement si Z l'est.*

Cet énoncé ne concerne que les applications à valeurs dans l'espace euclidien, mais il serait étonnant que la preuve (basée sur les champs de Killing) ne s'adapte pas sans trop d'efforts à des applications à valeurs dans des espaces lorentziens plats.

La question est de savoir si il existe une généralisation de ce type pour les applications de Pogorelov globales.

4.2.5 Cas polyédraux

Comme pour passer d'un espace à l'autre on n'utilise que des applications projectives, une surface polyédrale est toujours envoyée sur une surface polyédrale.

Une déformation infinitésimale isométrique Z d'une surface polyédrale est définie comme étant triviale sur chaque face, et l'application de Pogorelov infinitésimale envoie les champs de Killing sur des champs de Killing, donc l'image de Z est bien une déformation infinitésimale isométrique de l'image de la surface polyédrale.

La propriété fondamentale de cette application dans le cas lisse indique de la même façon pour le cas polyédral que si la déformation est triviale dans un cas, elle est triviale dans l'autre.

Il y a aussi une façon plus directe pour définir et étudier les applications de Pogorelov infinitésimales polyédrales [SW].

La question est de savoir si il existe aussi une approche plus directe dans le cas des applications de Pogorelov globales polyédrales.

Chapitre 5

Ensembles de métriques

5.1 Métriques lisses

5.1.1 Rappels sur l'espace de Teichmüller

On rappelle quelques résultats sur l'espace de Teichmüller qui seront utiles à divers endroits dans la suite.

Définition 5.1. *Soit S une surface et g_1 et g_2 deux métriques riemanniennes sur S. On dit que g_1 et g_2 sont* conformes *s'il existe $u : S \to \mathbb{R}$ telle que $g_2 = e^{2u} g_1$.*

Une structure conforme *sur S est une classe d'équivalences de métriques modulo la relation d'équivalence "est conforme à".*

Si on note ∇^1 et ∇^2 les connexions compatibles avec respectivement g_1 et g_2, un calcul montre que ([GHL90, 2.55,c)], [Bes87, p. 58])

$$\nabla^2_X Y = \nabla^1_X Y + du(X)Y + du(Y)X - g_1(X,Y)\nabla u \tag{5.1}$$

où ∇u est le gradient de u pour la métrique g_1. Ainsi, en calculant simplement en suivant la définition (ou [Tay96, app. C, prop. 3.6]), on peut exprimer la courbure K^2 de g_2 en fonction de la courbure K^1 de g_1 :

$$K^2 = e^{-2u}(K^1 - \Delta u) \tag{5.2}$$

où Δu est le laplacien de u pour la métrique g_1 (on trouve dans [Bes87, p. 58] une formule pour les variétés de dimension n).

On peut introduire l'espace de Teichmüller de plusieurs façons différentes [Nag88, Bus92, IT92, Tro92]. Nous nous contenterons de la définition suivante : on note S une surface compacte de genre g. L'espace de Teichmüller de S, noté T_g, est l'ensemble des structures conformes (ou complexes, ce qui est équivalent en dimension 2) sur S, modulo les isotopies de S, c'est-à-dire les homéomorphismes isotopes à l'identité. Plus précisement, l'espace de Teichmüller de S est défini comme l'ensemble des couples (F, f), où F est une surface compacte de genre g et f est un homéomorphisme de S vers f, avec la relation d'équivalence suivante : (F_1, f_1) et (F_2, f_2) sont en relation si il existe un homéomorphisme h entre F_1 et F_2 tel que $f_2^{-1} \circ h \circ f_1$ soit homotope à l'identité.

Théorème 5.2. *L'espace de Teichmüller T_g est en bijection analytique avec un point pour $g = 0$, le demi-plan supérieur pour $g = 1$ et une boule ouverte de dimension $(6g - 6)$ pour $g > 1$.*

Par le théorème d'uniformisation, on sait qu'il existe une unique métrique hyperbolique dans une classe conforme de S, pour $g > 1$.

Corollaire 5.3. *L'ensemble des métriques hyperboliques sur une surface de genre > 1 est connexe et simplement connexe.*

Démonstration. L'ensemble des métriques hyperboliques sur S est par définition un fibré sur l'espace de Teichmüller de S, dont les fibres sont l'ensemble des isotopies de S. Cet ensemble est connexe (c'est par définition la composante connexe de l'ensemble des homéomorphismes de S) et simplement connexe (il est en fait contractile [Gra73]). □

Coordonnées de Fenchel–Nielsen de l'espace de Teichmüller. Une surface hyperbolique compacte peut-être décrite comme un recollement de pantalons hyperboliques. Le choix des longueurs des géodésiques le long desquelles on recolle les pantalons, et le choix de l'angle de la torsion quand on les recolle (le paramètre de twist) donnent $(6g-6)$ nombres réels qui décrivent l'espace de Teichmüller : ce sont les *coordonnées de Fenchel–Nielsen*, voir [Bus92]. On note $l(x)$ la longueur de la courbe x. Il est possible de calculer les paramètres de twists en fonction de la longueur de certaines géodésiques :

Proposition 5.4 ([Bus92, 3.3.12])**.** *Soit γ la géodésique le long de laquelle sont recollés deux pantalons. On note δ la géodésique librement homotope aux courbes fermées simples orthogonales à γ. On effectue un twist de paramètre α autour de γ, et on note δ^α la géodésique image de δ par le twist. Alors il existe des fonctions u et $v>0$ à valeurs réelles dépendant analytiquement de $l(\gamma)$ telles que*

$$\cosh\frac{1}{2}l(\delta^\alpha) = u + v\cosh(\alpha l(\gamma)). \tag{5.3}$$

Convergence dans l'espace de Teichmüller. On fixe une surface compacte S de genre >1. On note $(S_k, g_k)_k$ une suite de (classes d'équivalences de) métriques hyperboliques dans l'espace de Teichmüller — chaque S_k est une surface compacte de genre >1. On note f_k l'homéomorphisme entre S et S_k, et $l_k(\gamma)$ est la longueur de la géodésique correspondant à l'élément $(f_k)_*(\gamma)$ du groupe fondamental de S_k ($\gamma \in \pi_1(S)$) pour la métrique g_k.

Lemme 5.5. *Si $l_k(\gamma)$ est uniformément bornée pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$, alors $(g_k)_k$ converge (quitte à extraire une sous-suite).*

Démonstration. L'hypothèse du lemme indique que les coordonnées de Fenchel–Nielsen sont bornées : la suite de métriques est contenue dans un compact de l'espace de Teichmüller. En effet, les longueurs des géodésiques le long desquelles on découpe la surface pour obtenir des pantalons sont bornées de façon évidente. Les paramètres de twists sont aussi bornés, sinon d'après (5.3) il existerait une géodésique de longueur arbitrairement grande. □

Lemme 5.6. *Si il existe une constante $c>0$ telle que, pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$, $l_k(\gamma) \geq \frac{1}{c}l_0(\gamma)$, alors $(g_k)_k$ converge (quitte à extraire une sous-suite).*

Démonstration. On va encore montrer que dans ce cas $(g_k)_k$ est contenue dans un compact de l'espace de Teichmüller en utilisant les coordonnées de Fenchel–Nielsen.

D'abord, les longueurs des géodésiques le long desquelles on coupe pour obtenir des pantalons sont bornées supérieurement : si elles ne l'étaient pas, à cause de la formule de Gauss–Bonnet, il devrait exister une autre géodésique dont la longueur devrait décroitre (sinon l'aire de la surface deviendrait arbitrairement grande), ce qui est impossible puisque les longueurs sont bornées inférieurement.

Il reste à prouver que les paramètres de twist sont bornés supérieurement. Prenons une géodésique γ le long de laquelle un twist est fait. On suppose maintenant que le paramètre de twist α_k autour de γ devient arbitrairement grand (quitte à prendre un k suffisament grand, on peut supposer que la longueur de γ ne varie pas). On considère la géodésique fermée simple orthogonale à γ pour la métrique g_k, qui correspond à un élément δ de $\pi_1(S)$. Si on refait les twist à l'envers pour revenir de la métrique g_k à la métrique g_0 (ce qui revient à faire un twist de paramètre $-\alpha_k$), alors par (5.3), $l_0(\delta)$ est arbitrairement plus grand que $l_k(\delta)$. □

Coordonnées Z-V-C de l'espace de Teichmüller. Pour plus de détails sur les coordonnées de Z-V-C (Z-V-C pour Zieschang–Vogt–Coldewey, [ZVC80]) on renvoie à [Bus92, 6.7].

Définition 5.7. *Soit $g \geq 2$. Un polygone (géodésiquement convexe) de l'espace hyperbolique d'arêtes (ordonnées dans le sens direct) $b_1, b_2, \overline{b}_1, \overline{b}_2, b_3, b_4, \ldots, \overline{b}_{2g}$ et d'angles intérieurs $\theta_1, \overline{\theta}_1, \ldots, \theta_{2g}, \overline{\theta}_{2g}$ est dit* canonique (normal) *si, en notant $l(c)$ la longueur de la géodésique c,*

i) $l(b_k) = l(\overline{b}_k)$, $\forall k$;

ii) $\theta_1 + \ldots + \overline{\theta}_{2g} = 2\pi$;

iii) $\theta_1 + \theta_2 = \overline{\theta}_1 + \theta_2 = \pi$.

Deux polygones P et P' d'arêtes $b_1, \ldots, \overline{b}_{2g}$ et $b'_1, \ldots, \overline{b}'_{2g}$ sont dits équivalent *si il existe une isométrie de P à P' telle que b_1 soit envoyée sur b'_1 et b_2 sur b'_2.*

Si on identifie les arêtes b_i avec les arêtes $\overline{b}_i$, on obtient une surface hyperbolique compacte de genre g. Cette surface peut aussi s'écrire $\mathbb{H}^2/F$, où F est un sous-groupe de $PSL(2,\mathbb{R}) = Isom^+(\mathbb{H}^2)$ engendré par les translations le long des b_i (la distance de la translation est la longueur de b_i). L'intérieur du polygone est un domaine fondamental pour l'action de F. Ceci amène à une description de l'espace de Teichmüller T_g :

Proposition 5.8 ([Bus92, 6.7.7])**.** *Soit $\mathcal{P}_g$ l'ensemble des classes d'équivalence des polygones canoniques. Un élément de $\mathcal{P}_g$ est décrit par les $(6g-6)$ réels (les coordonnées de Z-V-C) :*

$$(b_3, \ldots, b_{2g}, \theta_3, \overline{\theta}_3, \ldots, \theta_{2g}, \overline{\theta}_{2g}). \tag{5.4}$$

Muni de cette topologie, $\mathcal{P}_g$ est en bijection analytique avec T_g.

5.1.2 Espace des métriques.

On note $\mathfrak{M}(M)$ l'ensemble des métriques (riemanniennes lisses) sur une variété M de dimension n. C'est naturellement un sous-ensemble de l'espace des sections lisses du fibré vectoriel des formes bilinéaires sur le tangent de M.

Dans la suite M sera une surface compacte, et on munit $\mathfrak{M}(M)$ de la topologie C^k (forte ou faible, ce qui revient au même si la surface est compacte). Grossièrement parlant, deux métriques sur une variété M sont proches si leurs coefficients et ceux de leurs dérivées jusqu'à l'ordre k sont proches dans n'importe quelle carte sur M, voir par exemple [Hir94].

L'ensemble $\mathfrak{M}(M)$ est en fait un cône convexe ouvert :

Lemme 5.9. *L'ensemble $\mathfrak{M}(M)$ est contractile.*

Démonstration. Pour deux métriques riemanniennes f_0 et f_1, chaque élément du chemin $f_t := tf_0 + (1-t)f_1$ continu est une métrique riemannienne, d'où la connexité.

On fixe un élément f_0 dans $\mathfrak{M}$. L'application $\phi : \mathfrak{M} \times [0,1] \to \mathfrak{M}$ définie par $\phi(h,t) = (1-t)h + th_0$ est continue, ainsi l'application identité $\phi(h,0) = h$ est homotope à une application constante $\phi(h,1) = h_0$: $\mathfrak{M}$ est contractile. □

Ensembles de métriques à courbures bornées. On note, pour $K \in \{-1, 0, 1\}$:

– $Met_K^+(g)$ l'ensemble des métriques de courbure $> K$ sur une surface compacte S de genre g ;

– $Met_K^-(g)$ l'ensemble des métriques de courbure $< K$ sur une surface compacte S de genre g ;

et on munit ces ensembles de la topologie donnée par celle de $\mathfrak{M}(S)$.

La formule de Gauss–Bonnet donne

$$\int\int_S K dA = 2\pi\chi(S), \tag{5.5}$$

où $\chi(S)$ est la caractéristique d'Euler de S, à savoir $\chi(S) = (2-2g)$. Il vient que seuls les espaces $Met_K^\varepsilon(g)$, $\varepsilon \in \{-,+\}$ suivants sont non-vides (lire (g, ϵ, K)) :

$$(0,+,-1), (0,+,0), (0,+,1), (0,-,1), \tag{5.6}$$

$$(1,+,-1), (1,-,1), \tag{5.7}$$

$$(>1,+,-1), (>1,-,-1), (>1,-,0), (>1,-,1). \tag{5.8}$$

Lemme 5.10 ([RH93, Sch96, LS00, Sch06]). *Pour (g, ϵ, K) dans la liste au-dessus, $Met_K^{\varepsilon}(g)$ est un ensemble connexe et simplement connexe.*

Démonstration. Dans toute la preuve, u est une fonction C^∞ de la surface à valeur dans $\mathbb{R}$.

•$Met_0^+(0)$.

Comme il n'y a qu'une seule classe conforme pour la sphère, si on note $\text{can}_{\mathbb{S}^2}$ la métrique canonique de la sphère, alors toutes les autres métriques sur la sphère s'écrivent $g = e^{2u}\text{can}_{\mathbb{S}^2}$. D'après l'équation (5.2), la courbure K de g est :

$$K = e^{-2u}(1 - \Delta u) \tag{5.9}$$

et $\Delta u < 1$ comme $K > 0$. Ainsi on a un chemin continu de métriques $g_t = e^{-2tu}\text{can}_{\mathbb{S}^2}$, $t \in [0, 1]$ dont la courbure est

$$e^{-2tu}(1 - t\Delta u) > 0, \tag{5.10}$$

donc toutes les métriques à coubure > 0 peuvent être jointes à la métrique canonique dans $Met_0^+(0)$.

On va maintenant montrer que $Met_0^+(0)$ est simplement connexe. On considère un chemin fermé dans $Met_0^+(0)$: $h : \mathbb{S}^1 \to Met_0^+(0)$. Comme l'ensemble des métriques sur la sphère est simplement connexe, il existe une application continue f du disque D^2 dans l'ensemble des métriques sur la sphère telle que $f|_{\mathbb{S}^1} = h$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que la courbure de n'importe quelle métrique de $f(D^2)$ est plus grande que $-c$. Cela implique que, pour une métrique $e^{2u(y)}\text{can}_{\mathbb{S}^2}$ de $f(D^2)$, avec $y \in D^2$, comme $e^{2u(y)}$ est aussi borné pout tout y, il existe C tel que

$$\Delta u < ce^{2u(y)} + 1 < C. \tag{5.11}$$

Ainsi la métrique $e^{2\frac{u(y)}{C}}\text{can}_{\mathbb{S}^2}$ est à courbure strictement positive.

De plus, il existe un d_0 tel que pour tout y à distance au plus d_0 du bord, la courbure de $f(y)$ est strictement positive.

On définit une nouvelle application continue

$$\overline{f}_t := \begin{cases} e^{2(1+(\frac{1}{C}-1)d(\mathbb{S}^1,y)/d_0)u(y)}\text{can}_{\mathbb{S}^2}, & d(\mathbb{S}^1, y) \le d_0, \\ e^{2\frac{u(y)}{C}}\text{can}_{\mathbb{S}^2}, & d(\mathbb{S}^1, y) \ge d_0 \end{cases} \tag{5.12}$$

qui va du disque dans $Met_0^+(0)$ et qui est telle que $\overline{f}|_{\mathbb{S}^1} = h$.

•$Met_1^+(0)$.

Soient h_0 et h_1 deux métriques de $Met_1^+(0)$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe un chemin continu $h_t := e^{2u(t)}\text{can}_{\mathbb{S}^2}$ de métriques dans $Met_0^+(0)$.

Comme le chemin est continu, que ses extrémités sont à courbure strictement supérieure à 1 et que la surface est compacte, il existe une constante $t_0 > 0$ telle que pour $t \in [0, t_0] \cup [1 - t_0, 1]$, h_t est de courbure strictement supérieure à 1. Il existe aussi une constante $C > 0$ telle que toute métrique h_t est à courbure $> C$. Ainsi on définit un nouveau chemin continu

$$\overline{h}_t := \begin{cases} (1 + (C-1)t/t_0)h_t, & t \in [0, t_0], \\ Ch_t, & t \in [t_0, 1 - t_0], \\ (1 + (C-1)(1-t)/(1-t_0))h_t, & t \in [1 - t_0, 1] \end{cases} \tag{5.13}$$

dont on vérifie facilement que chaque élément est à courbure > 1, ce qui montre que $Met_1^+(0)$ est connexe.

On va montrer maintenant que $Met_1^+(0)$ est simplement connexe. Soit $h : \mathbb{S}^1 \to Met_1^+(0)$ un chemin continu fermé dans $Met_1^+(0)$. Comme l'espace des métriques à courbures positives sur la surface est simplement connexe, il existe une application $f : D^2 \to Met_0^+(0)$ continue telle que $f_{|\mathbb{S}^1} = h$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout y dans le disque, $f(y)$ est de courbure $K > C$, et il existe une constante d_0 telle que pour chaque y dans le disque à distance au plus d_0 du cercle, $f(y)$ est de courbure strictement supérieure à 1. On définit une nouvelle application continue

$$\overline{f}_t := \begin{cases} (1 + (C-1)d(\mathbb{S}^1, y)/\epsilon)^2 f(y), & d(\mathbb{S}^1, y) \le d_0, \\ C^2 f(y), & d(\mathbb{S}^1, y) \ge d_0 \end{cases} \tag{5.14}$$

du disque dans $Met_1^+(0)$ et telle que $\overline{f}|_{\mathbb{S}^1} = h$, ce qui montre que $Met_1^+(0)$ est simplement connexe.

•$Met_0^-(>1)$.

Soit g une métrique sur une surface compacte de genre > 1. D'après le théorème de d'uniformisation, g est conforme à une unique métrique hyperbolique g_0 : $g = e^{2u}g_0$. D'après l'équation (5.2), la courbure K de g est :

$$K = -e^{-2u}(1 + \Delta u) \tag{5.15}$$

et $\Delta u > -1$ comme $K < 0$. Ainsi on a un chemin continu de métriques $g_t = e^{2tu}g_0$, $t \in [0, 1]$ dont la courbure est

$$-e^{-2tu}(1 + t\Delta u) < 0, \tag{5.16}$$

donc on peut joindre toute métrique à courbure < 0 à une métrique hyperbolique, et l'ensemble des métriques hyperboliques est connexe (corollaire 5.3).

On va maintenant montrer que $Met_0^-(>1)$ est simplement connexe. On considère un chemin fermé dans $Met_0^-(>1) : h : \mathbb{S}^1 \to Met_0^-(>1)$. Comme l'ensemble des métriques sur la surface S est simplement connexe, il existe une application continue f du disque D^2 dans l'ensemble des métriques sur S telle que $f|_{\mathbb{S}^1} = h$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que la courbure de n'importe quelle métrique de $f(D^2)$ soit plus petite que c. Cela implique que pour une métrique $f(y) = e^{2u(y)}g_0$, $y \in D^2$, où g_0 est une métrique hyperbolique, comme $e^{2u(y)}$ est aussi minoré sur $f(D^2)$, il existe une constante positive C telle que

$$\Delta u > -ce^{2u(y)} - 1 > -C. \tag{5.17}$$

Ainsi la métrique $e^{\frac{2u(y)}{C}}g_0$ est à courbure strictement négative.

De plus, il existe un d_0 tel que pour tout y à distance au plus d_0 du bord, la courbure de $f(y)$ est strictement positive.

On définit une nouvelle application continue

$$\overline{f}_t := \begin{cases} e^{2(1+(\frac{1}{C}-1)d(\mathbb{S}^1,y)/d_0)u(y)}f(y), & d(\mathbb{S}^1, y) \leq d_0, \\ e^{\frac{2u(y)}{C}}f(y), & d(\mathbb{S}^1, y) \geq d_0 \end{cases} \tag{5.18}$$

qui va du disque dans $Met_0^-(>1)$, et qui est telle que $\overline{f}|_{\mathbb{S}^1} = h$.

•$Met_{-1}^+(g)$.

Soient h_0 et h_1 deux métriques du $Met_{-1}^+(g)$. On sait qu'il existe un chemin continu h_t de métriques sur S reliant h_0 à h_1. Comme le chemin est continu et que ses extrémités sont à courbure strictement supérieure à -1, et que la surface est compacte, il existe une constante $C > 0$ telle que la courbure de h_t est strictement supérieure à $-C$, et une constante $t_0 > 0$ telle que pour $t \in [0, t_0] \cup [1 - t_0, 1]$, h_t est de courbure strictement supérieure à -1. Ainsi on définit un nouveau chemin continu

$$\overline{h}_t := \begin{cases} (1 + (C - 1)t/t_0)h_t, & t \in [0, t_0], \\ Ch_t, & t \in [t_0, 1 - t_0], \\ (1 + (C - 1)(1 - t)/(1 - t_0))h_t, & t \in [1 - t_0, 1] \end{cases} \tag{5.19}$$

dont on vérifie facilement que chaque élément est à courbure > -1, ce qui montre que $Met_{-1}^+(g)$ est connexe.

On va montrer maintenant que $Met_{-1}^+(g)$ est simplement connexe. Soit $c : \mathbb{S}^1 \to Met_{-1}^+(g)$ un chemin continu fermé dans $Met_{-1}^+(g)$. Comme l'espace des métriques sur la surface est simplement connexe, il existe une application $f : D^2 \to \mathfrak{M}(S)$ continue telle que $f_{\mathbb{S}^1} = h$. Alors il existe une constant $C > 0$ telle que pour tout y dans le disque, $f(y)$ est de courbure $K > -C$, et il existe une constante d_0 telle que pour chaque y dans le disque à distance au plus d_0 du cercle, $f(y)$ est de courbure strictement supérieure à -1. On définit une nouvelle application continue

$$\overline{f}_t := \begin{cases} (1 + (C - 1)d(\mathbb{S}^1, y)/\epsilon)f(y), & d(\mathbb{S}^1, y) \leq d_0, \\ Cf(y), & d(\mathbb{S}^1, y) \geq d_0 \end{cases} \tag{5.20}$$

qui va du disque dans $Met_{-1}^+(g)$, et qui est telle que $\overline{f}|_{\mathbb{S}^1} = h$.

•$Met_1^-(g)$.

Soient h_0 et h_1 deux métriques de $Met_1^-(g)$. On sait qu'il existe un chemin continu h_t de métriques reliant h_0 à h_1. Comme le chemin est continu et que ses extrémités sont à courbure strictement inférieure à 1, et que le surface est compacte, il existe une constante $C > 0$ telle que la courbure de h_t est strictement inférieure à C, et il existe une constante $t_0 > 0$ telle que pour $t \in [0, t_0] \cup [1 - t_0, 1]$, h_t est de courbure strictement inférieure à 1. Cela nous permet de définir un chemin continu reliant h_0 et h_1 dans $Met_1^-(g)$ exactement de la même façon que pour $Met_{-1}^+(g)$.

De même pour la simple connexité.

•$Met_{-1}^-(> 1)$.

Il suffit de faire l'analogue du cas $Met_1^+(0)$, en utilisant la connexité et la simple connexité de $Met_0^-(> 1)$. □

On aura besoin d'utiliser le sous-ensemble de $Met_1^-(g)$ constitué des métriques telles que leurs géodésiques fermées contractiles sont de longueur $> 2\pi$. On note $Met_1^{-,>2\pi}(g)$ cet ensemble.

Lemme 5.11. *L'ensemble $Met_1^{-,>2\pi}(g)$ est une variété connexe et simplement connexe.*

De plus, l'ensemble des métriques de courbure ≤ 1 telles que leurs géodésiques fermées contractiles sont de longueur $> 2\pi$ est aussi connexe et simplement connexe.

Démonstration. Il suffit de faire exactement la même chose que pour $Met_1^-(g)$, en utilisant une constante C telle que non seulement la courbure soit $< C$, mais la longueur des géodésiques fermées contractiles soit $> 4\pi/C$ [Sch06].

Pour la seconde partie du lemme, il suffit de reprendre la même preuve en remplaçant $<$ par $\leq$. □

L'ensemble $Met_1^-(g) \setminus Met_1^{-,>2\pi}(g)$ n'est pas vide : il suffit de prendre deux sphères de rayon < 1 et de les relier par un long tube fin de rayon entre -1 et 0. Alors la géodésique fermée simple (contractile) qui fait le tour du tube est de longueur $< 2\pi$.

5.2 Métriques à singularités coniques

Espace de Teichmüller d'une surface à points marqués. On s'intéressera surtout à l'espace de Teichmüller de S avec n point marqués, noté $T_g(n)$. Si on note $x_1, \ldots, x_n$ les points marqués, $T_g(n)$ est l'ensemble des structures conformes sur $S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ modulo les isotopies - ou, de façon équivalente, l'ensemble des structures conformes sur S modulo les isotopies qui fixent les points marqués, c'est-à-dire que si $(h_t)_t$ est une isotopie de la surface, alors pour tout t, h_t fixe les points marqués.

On a :

Théorème 5.12 ([Nag88, p. 150]). *Pour $2g - 2 + n > 0$, $T_g(n)$ est en bijection analytique avec la boule ouverte de $\mathbb{R}^{6g-6+2n}$.*

5.2.1 Définition

On rappelle que M_K^+ est l'espace modèle riemannien de dimension 3 de courbure K et que M_K^- est l'espace lorentzien modèle de dimension 3 de courbure K, et que la courbure singulière d'un cône convexe est positive dans M_K^+ et négative dans M_K^- (proposition 1.30 page 24 et proposition 3.51 page 57). On introduit $\varepsilon \in \{-, +\}$.

Une *métrique de courbure K à singularités coniques de courbure singulière de signe ε* sur une surface compacte S est la donnée de

– n points $(x_1, \ldots, x_n)$ de S

– d'une métrique de courbure K sur $S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$

telle que le voisinage de chaque x_i soit isométrique au voisinage du sommet d'un cône convexe dans M_K^ε. (Dans le cas $\varepsilon = +$, ces métriques sont parfois appelées *métriques polyédrales (convexes)*).

Les points x_i sont les *points singuliers*, l'angle α_i autour du sommet x_i est appelé le *cône-angle* en x_i et le nombre $(2\pi - \alpha_i)$ est la *courbure (singulière)* en x_i, notée k_i. On dit que la métrique a une *singularité conique* en x_i.

Comme sur un cône le voisinage d'un point autre que le sommet est isométrique à un ouvert de M_K^ε, alors le nombre de points singuliers d'une métrique à singularités coniques est discret, et comme la surface est supposée compacte, il est fini.

5.2.2 Existence

Les conditions du type Gauss–Bonnet pour l'existence de telles métriques sont données par les théorèmes de Picard–Mc Owen–Troyanov.

On note $Cone_K^\varepsilon(g;n)$ l'ensemble des métriques de courbure K à n singularités coniques de courbure singulière de signe ε sur une surface compacte de genre g, modulo les isotopies de la surfaces qui fixent les points marqués.

Métriques plates.

Théorème 5.13 (Troyanov, [Tro91]). *Soit S une surface de Riemann compacte. Soient $(x_1,\dots,x_n)$ des points de S et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ des nombres positifs. Si*

$$2\pi\chi(S)+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-2\pi)=0 \tag{5.21}$$

alors il existe une métrique conforme plate sur S avec des singularités coniques d'angles α_i aux x_i. Elle est unique modulo homothéties.

Nous utilisons cet énoncé avec la fonction constante égale à 0 :

• Pour le genre $g=0$, on a $\chi(S)=2$, et la formule (5.21) donne $\sum_{i=1}^n\alpha_i=2(n-2)\pi$. Comme la sphère a une unique structure conforme, $Cone_0^+(0;n)$ est en bijection avec le produit de l'ensemble des configurations de points sur la sphère et de $]0,2\pi[^{n-1}\times\mathbb{R}_+$ (le coefficient réel paramétre le choix de l'homothétie). Quand à $Cone_0^-(0;n)$, il est vide.

• Pour le genre $g=1$, on a $\chi(S)=0$, la formule (5.21) donne $\sum_{i=1}^n k_i=0$, qui n'a pas de solution si le signe des k_i est constant : $Cone_0^+(1;n)$ et $Cone_0^-(1;n)$ sont vides.

• Pour le genre $g>1$, on a $\chi(S)=(2-2g)$ et la formule (5.21) donne $\sum_{i=1}^n k_i=2\pi\chi(S)<0$, qui n'a de solution que si les courbures sont négatives : $Cone_0^-(>1;n)$ est en bijection avec $T_g(n)\times]2\pi,\infty[^{n-1}\times\mathbb{R}_+$ et $Cone_0^+(>1;n)$ est vide.

Métriques hyperboliques.

Théorème 5.14 (Picard–Mc Owen–Troyanov, [McO88][Tro91, Theorem A]). *Soit S une surface de Riemann compacte. Soient $(x_1,\dots,x_n)$ des points de S et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ des nombres positifs. Supposons que*

$$2\pi\chi(S)+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-2\pi)<0. \tag{5.22}$$

Alors chaque fonction lisse négative sur S est la courbure d'une unique métrique conforme sur S ayant en x_i une singularité conique d'angle α_i.

Nous utilisons cet énoncé avec la fonction constante égale à -1 :

• Pour le genre $g=0$, $\chi(S)=2$, et la formule (5.22) donne $\sum_{i=1}^n(k_i)>4\pi$: $Cone_{-1}^-(0;n)$ est vide et $Cone_{-1}^+(0;n)$ est en bijection avec le produit de l'ensemble des configurations de points sur la sphère avec $]0,2\pi[^n$.

• Pour le genre $g=1$, $\chi(S)=0$, la formule (5.22) donne $\sum_{i=1}^n k_i>0$: $Cone_{-1}^-(1;n)$ est vide et $Cone_{-1}^+(1;n)$ est en bijection avec le produit de $T_1(n)$ avec $]0,2\pi[^n$.

• Pour le genre $g>1$, on a $\chi(S)=(2-2g)$ et la formule (5.22) donne $\sum_{i=1}^n k_i>4\pi(1-g)$: $Cone_{-1}^+(>1;n)$ est en bijection avec $T_g(n)\times]0,2\pi[^n$ et $Cone_{-1}^-(>1;n)$ est en bijection avec $T_g(n)\times A_n$, où $A_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^n|\sum_{i=1}^n x_i>4\pi(1-g)\}$ est un ouvert contractile de $\mathbb{R}^n$.

On en déduit, en munissant les espaces de la topologie qui fait des bijections décrites au-dessus des difféomorphismes :

Proposition 5.15. *Les espaces $Cone^{\varepsilon}_{K}(g;n)$ sont des variétés contractiles de dimension $(6g-6+3n)$ pour les triplets (g,K,ε) suivants :*

$$(0,0,+),(0,-1,+),(1,-1,+),(>1,0,-),(>1,-1,+),(>1,-1,-). \tag{5.23}$$

Les choses ne sont malheureusement pas aussi simples dans le cas des métriques sphériques.

Métriques sphériques.

Théorème 5.16 ([Tro91, Theorem C])**.** *Soit S une surface de Riemann compacte. Soient $(x_1,\dots,x_n)$ des points de S et $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ des nombres positifs. Si*

$$0 < 2\pi\chi(S) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 2\pi) < \min(4\pi, 2\alpha_i), \tag{5.24}$$

alors toute fonction lisse sur S, positive en certains points, est la courbure d'une métrique conforme ayant en x_i une singularité conique d'angle α_i.

Le problème est qu'il n'y a pas de résultat d'unicité de la métrique. En effet, prenons deux copies de la sphère standard et coupons-les le long d'une géodésique de longueur $t \in]0,\pi[$, et recollons-les le long des bords des disques obtenus. Pour chaque t les métriques sphériques obtenues ne sont pas isométriques, mais ce sont toutes des métriques avec deux singularités coniques au même endroit et de même angle 4π.

En fait, il y a unicité dans le cas de courbure positive [LT92](dans cet article, les auteurs donnent une preuve analytique du théorème d'Alexandrov dans le cas sphérique). Toujours dans le cas de la sphère, des conditions nécessaires et suffisantes sont connues si la métrique admet trois singularités coniques dont le signe de la courbure est quelconque [Ere04] — voir [UY00] pour un résultat partiel.

Considèrons l'énoncé du théorème dans la cas où la fonction est constante égale à 1. Pour n'importe quelle surface de genre g, $\chi(S) = (2-2g)$ et on obtient comme condition de Gauss–Bonnet $0 < 4\pi(1-g) - \sum_{i=1}^{n} k_i < \min(4\pi, 2\alpha_i)$.

Si les courbures singulières sont négatives, les α_i sont plus grands que 2π et $\min(4\pi, 2\alpha_i) = 4\pi$. Ainsi la condition de Gauss–Bonnet devient

$$4\pi(g-1) < \sum |k_i| < 4\pi g, \tag{5.25}$$

et l'ensemble des solutions est non vide : les ensembles $Cone^{-}_{1}(g;n)$ sont en surjection sur le produit $T_g(n) \times B_n$, où $B_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^n | (g-1) < \sum x_i < g\}$ est un morceau d'un simplexe.

Si les courbures sont positives, on remarque que $Cone^{+}_{1}(g;n)$ est vide si $g > 1$.

5.3 Particularités de l'espace de Sitter

5.3.1 Longueurs des géodésiques

Une *géodésique* (polyédrale) est une courbe sur une surface polyédrale correspondant à une géodésique pour la métrique induite — en particulier sa restriction à chaque face de la surface polyédrale est un segment de géodésique de l'espace ambiant.

Proposition 5.17 ([RH93, 3.6],[Sch96])**.** *Soit S une surface (strictement) convexe de type espace de l'espace de Sitter (lisse ou polyédrale). Alors toutes les géodésiques fermées sur S sont de longueur strictement supérieure à 2π.*

L'énoncé de Rivin et Hodgson (pour le cas polyédral) concerne les polyèdres compacts, mais la preuve ne fait pas intervenir cette condition.

Avec le résultat sur les cônes convexes dans les espaces lorentziens (proposition 3.51 page 57), on voit que la métrique induite sur une surface polyédrale convexe de l'espace de Sitter a des singularités coniques de courbure singulière négative et la longueur de ses géodésiques fermées est strictement plus grande que 2π. De telles métriques sont parfois dites *larges*.

Avec le lemme 3.48 page 55, cela peut se formuler comme :

Proposition 5.18. *La métrique duale d'une surface polyédrale convexe de l'espace hyperbolique de dimension* 3 *est large.*

Ce résultat a été généralisé en toute dimension par R. Charney et M. Davis [CD95, CD96].

La proposition 5.17 se traduit en un énoncé sur les géodésiques contractiles pour les quotients de surfaces de l'espace de Sitter, puisque une géodésique γ sur une surface Σ est contractile si et seulement si elle se relève en une géodésique fermée de $\tilde{\Sigma}$ de même longueur.

On devra donc considérer le sous-ensemble de $Cone_1^-(g;n)$ constitué des métriques dont la longueur des géodésiques contractiles est strictement supérieure à 2π. On note $Cone_1^{-,>2\pi}(g;n)$ cet ensemble et on le munit de la topologie induite par celle de l'ensemble des métriques sur $S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

L'ensemble $Cone_1^-(g;n) \setminus Cone_1^{-,>2\pi}(g;n)$ n'est pas vide. En effet, on peut reprendre l'exemple lisse des deux sphères reliées par un long tube fin, qui avait une géodésique fermée simple (contractile) de longueur $< 2\pi$.

On prend un nombre suffisant de points sur cette surface et on la triangule avec des triangles géodésiques dont les points choisis sont les sommets. Si les triangles sont suffisament petits (c'est-à-dire si le nombre de sommets est suffisant), alors on remplace les triangles par des triangles sphériques ayant les mêmes longueurs d'arêtes. Les angles de ces triangles sont plus grands que ceux des triangles d'origine, donc la somme des angles autour de chaque sommet est $> 2\pi$, et la métrique à singularité conique ainsi obtenue est "proche" de la métrique de départ, en particulier il y a toujours des géodésiques contractibles de longueur $< 2\pi$ (voir par exemple [RH93, Lemma 9.15]).

5.3.2 Polyèdres idéaux

On retrouve un résultat standard [RH93, Riv96, Scha].

Métrique duale d'un polyèdre idéal. Dans le modèle projectif de Klein de l'espace hyperbolique, un *sommet idéal* d'une surface polyédrale de l'espace hyperbolique est un sommet qui est sur la sphère à l'infini.

Le link d'un tel sommet est le polygone euclidien intersection de la surface polyédrale et de l'horosphère centrée au sommet. Comme toutes les horosphères sont isométriques, le link ne dépend pas du choix de celle-ci. On vérifie que

Lemme 5.19. *Considèrons une suite de cônes convexes de l'espace hyperbolique qui converge vers un cône convexe de sommet idéal. Alors la suite des links de chaque sommet de chaque cône tend vers le link du sommet idéal.*

Démonstration. Le link de chaque sommet est donné par l'intersection de la surface polyédrale avec une petite sphère centrée en ce sommet. Il suffit de vérifier que ces sphères tendent vers l'horosphère quand leur centre tend vers le bord à l'infini. On peut le voir par exemple dans l'espace de Minkowski de dimension 4. Une sphère centrée en un point x est l'intersection de l'espace hyperbolique avec un hyperplan affine de type espace orthogonal au vecteur x (car les géodésiques partant de x sont données par les plans vectoriels de type temps contenant le vecteur x, qui sont tous orthogonaux à ces plans affines de type espace).

Un point sur le bord à l'infini correspond à un vecteur du cône de lumière et les horosphères centrées en ce point sont les hyperplans affines de type lumière parallèles à l'hyperplan vectoriel de type lumière contenant le vecteur du cône de lumière.

Pour chaque point, on peut choisir comme sphère centrée en ce point l'hyperplan passant par le point de coordonnée $(0,0,0,t)$ pour un t fixé. Si les vecteurs qui définissent les centres tendent vers un vecteur du cône de lumière, les hyperplans de type espace tendent vers un hyperplan de type lumière. □

Le dual d'un polygone euclidien est défini de la même façon que pour les autres espaces : c'est l'ensemble des vecteurs normaux unitaires du polygone. Le dual d'un polygone convexe euclidien est donc le cercle unité (marqué de n points où n est le nombre d'arêtes du polygone euclidien). On peut donc définir la métrique duale d'une surface polyédrale ayant des sommets idéaux : en effet, le cercle fournit un hémisphère qu'il est possible de recoller avec les links des autres sommets, puisque la distance entre deux points marqués sur le cercle est donnée par un angle dièdre entre deux faces de la surface polyédrales ayant pour sommet le sommet idéal.

On a donc que, pour toute suite $(P_n)_n$ de surfaces polyédrales convexes convergeant vers une surface polyédrale convexe P ayant des sommets idéaux, les métriques duales des P_n convergent vers la métrique duale de P.

Dual d'un polyèdre idéal. On se place toujours dans le modèle projectif de Klein. Le dual d'un sommet idéal est un plan tangent à la sphère en ce point, soit un plan de type lumière de l'espace de Sitter (puisqu'un vecteur de type lumière est orthogonal à lui-même).

La proposition 5.18, le lemme 3.48 page 55 (i.e. la métrique du dual d'un polyèdre hyperbolique est la métrique sur le dual) et le lemme précédent impliquent que

Lemme 5.20. *Soit $(P_n)_n$ une suite de surfaces polyédrales convexes de type espace de l'espace de Sitter convergeant vers une surface polyédrale P convexe de type espace sauf en n faces de type lumière.*

Alors la suite des métriques induites sur les $(P_n)_n$ tend vers une métrique sphérique à singularités coniques de courbure singulière négative dont la longueur des géodésiques contractiles est $> 2\pi$, sauf pour n géodésiques contractiles de longueur 2π bordant un hémisphère ne contenant pas de points singuliers.

Démonstration [Scha]. On note Q le polygone qui correspond à une face de type lumière de P. On sait déjà que la restriction à Q de la métrique induite limite h est isométrique à un hémisphère. Il reste à montrer que le bord ∂Q de Q est une géodésique pour h.

On va montrer que ∂Q est concave des deux côtés pour h. Du côté de Q, comme la métrique induite limite est celle d'un hémisphère, son bord est une géodésique et donc en particulier concave.

Pour l'autre côté, la métrique induite sur n'importe quel P_n a des singularités coniques de courbure singulière négative sur la courbe polyédrale qui converge vers ∂Q. En particulier, l'angle autour des limites de ces points pour h est au moins 2π. Comme la restriction de h à Q est isométrique à un hémisphère, du côté de Q l'angle entre deux segments concourants en un même sommet est π, ce qui signifie que de l'autre côté cet angle est au moins égal à π, et que donc ce côté est concave pour h. □

Comme la métrique induite sur le dual d'une surface polyédrale de l'espace hyperbolique ayant un sommet idéal a une face munie d'une métrique dégénérée, dans le cas idéal la métrique duale d'une surface polyédrale dans l'espace hyperbolique n'est pas la métrique induite sur le dual.

5.4 Triangulations

5.4.1 Définition et existence

Définition 5.21. *Une* cellulation *d'une surface compacte S est une décomposition de S par des images par des plongements de polygones convexes de $\mathbb{R}^2$, avec des identifications possibles d'arêtes ou de sommets, qui vérifie :*

- *les intérieurs des faces (resp. des arêtes) sont disjoints.*
- *l'intersection de deux faces est une union disjointe d'arêtes et de sommets.*

Une triangulation généralisée *est une cellulation par des triangles.*

Dans toute la suite on dira simplement *triangulation* pour signifier triangulation généralisée.

Deux triangulations sont *équivalentes* si il existe une isotopie qui fixe les sommets qui permet de passer de l'une à l'autre. On appelle *combinatoire* d'une triangulation un telle classe d'équivalence de la triangulation.

Caractéristique d'Euler. On veut connaitre le nombre d'arêtes a pour une triangulation avec n sommets d'une surface compacte de genre g. La définition de la caractéristique d'Euler $\chi(g) = (2-2g)$ nous indique que

$$f - a + n = 2 - 2g \tag{5.26}$$

où f est le nombre de faces. Comme les faces sont supposées être des triangles, on a $f = 2/3a$ et ainsi

$$a = 6g - 6 + 3n. \tag{5.27}$$

En particulier pour la sphère $g = 0$ donc $a = 3n - 6$ et ainsi le nombre de sommets est au moins égal à trois. Pour les autres surfaces, il peut n'y avoir qu'un ou deux sommets.

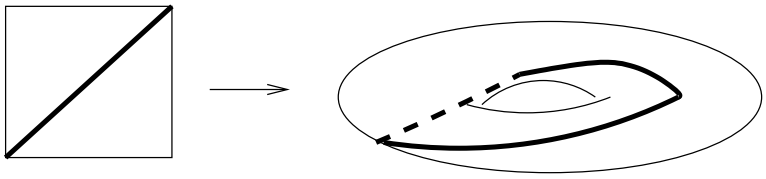


FIG. 5.1 – Triangulation (géneéralisée) d'un tore avec un seul sommet.

Existence de la triangulation.

Lemme 5.22. *Soient s_1 et s_2 deux segments du plan qui se rencontrent en un point. Alors une des extrémités a d'un des deux segment (par exemple s_1) est contenue dans tous les disques ayant sur leur bord les extrémités de s_2.*

Démonstration. On note x le point d'intersection des deux segments et (dans l'ordre cyclique) e_1, e_2, e_3, e_4 les extrémités des segments, de telle façon que $d(x, e_1)$ soit le minimum des longueurs $d(x, e_i)$. On note y le point d'intersection entre le segment qui relie e_2 à e_4 et la médiatrice à ce segment. Sans perte de généralité, on suppose que x est dans le segment reliant e_2 et y. Les centres de tous les disques ayant e_2 et e_4 sur leur bord sont contenus sur cette droite, et le plus petit des rayons de tout ces disque est $d(y, e_2)$.

Un disque A est inclu dans un disque B quand la somme de la distance entre les centres de A et B et du rayon de A est inférieure au rayon de B. On a $d(y, e_2) = d(x, y) + d(x, e_2)$ et $d(x, e_2) \geq d(x, e_1)$ donc $d(x, y) + d(x, e_1) \leq d(y, e_2)$, ce qui veut dire que le disque de centre x de rayon $d(x, e_1)$ est contenu dans le disque de centre y de rayon $d(y, e_2)$. □

Lemme 5.23. *Soit S une surface compacte et $(x_1, \ldots, x_n)$ n points sur S, avec $n \geq 3$ si S est de genre 0 et $n \geq 1$ sinon. Alors il existe une triangulation de S telle que les x_i soient exactement les sommets de la triangulation.*

Démonstration. En fonction de son genre, la surface S admet une métrique sphérique, plate ou hyperbolique. On va montrer le cas où la surface admet une métrique hyperbolique, la preuve est similaire pour les autres cas.

Il existe donc une projection Π du plan hyperbolique sur S. Il suffit de montrer qu'il existe une triangulation du plan hyperbolique dont les sommets sont exactement les points de l'ensemble $\Pi^{-1}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ (on les nomme des points marqués).

La méthode classique de la sphère vide de Delaunay permet de trianguler le plan (hyperbolique) : on considère les disques ne contenant aucun point marqué dans leur intérieur mais ayant au moins trois points marqués sur leur bord, appelés *voisinages de Voronoi*. Soient $p_1, \ldots, p_n$ les points marqués sur le bord d'un voisinage de Voronoi, et on note $D(p_1, \ldots, p_n)$ celui-ci. On prend l'enveloppe convexe des p_i (qui est contenue dans le disque), et on triangule l'intérieur du polygone convexe ainsi obtenu. Si f est une isométrie hyperbolique donnée par la représentation du groupe fondamental de S dans le groupe des isométries hyperboliques, alors $D(f(p_1), \ldots, f(p_n)) = f(D(p_1, \ldots, p_n))$, et on demande que la triangulation dans $f(D)$ soit l'image par f de la triangulation dans D.

Les arêtes ainsi obtenues dans le plan hyperbolique ne s'intersectent pas, car si deux arêtes s'intersectent, cela signifie que le sommet de l'une d'entre elle est contenue dans le voisinage de Voronoi bordé par les sommets de l'autre, ce qui est impossible par définition des voisinages de Voronoi et par le lemme précédent.

La triangulation de S sera donnée par l'image par Π de cette triangulation. Il faut juste vérifier que si l'image par Π de deux arêtes se coupent, alors elles sont confondues. On note e_1, e_2 les extremités d'une arête, e_3, e_4 celles de l'autre arête et on note x le point d'intersection. Alors un relevé de x, noté x^1, appartient à une région de Voronoi delimitée par des relevés de e_1 et e_2, et un autre relevé de x, noté x^2, appartient à une région de Voronoi delimitée par des relevés de e_1 et e_2. Mais si on note f l'isométrie donnée par le groupe fondamental de S qui envoie x^2 sur x^1, alors l'image par f de la région de Voronoi autour de x^2 est une région de Voronoi autour de x^1. Par l'argument précédent, les deux régions de Voronoi autour de x^1 sont confondues, et la seule possibilité pour que les deux arêtent s'intersectent en x^2 est qu'elles soient confondues.

Et bien sûr un triangle du plan hyperbolique est l'image d'un triangle euclidien par un homéomorphisme. □

Avec des arguments similaires à ceux du lemme précédent, il est possible de montrer

Proposition 5.24 ([Thu98, ILTC01, Riv])**.** *Une métrique à courbure constante à singularités coniques de courbure singulière de signe constant sur une surface compacte admet une triangulation géodésique dont les sommets sont exactement les points singuliers.*

Ce qui permet de voir une métrique à singularités coniques comme un recollement de triangles géodésiques. Mais dans la suite nous n'aurons pas besoin de ce résultat, puisque nous pourrons nous restreindre aux triangulations de métriques induites sur des surfaces polyédrales convexes, la triangulation de la métrique est alors simplement donnée par une triangulation des faces de la surface polyédrale.

Remarque : atlas sur l'ensemble des metriques. L'existence de triangulations dont les sommets sont les points singuliers donne un paramétrage local des ensembles de métriques à singularités coniques.

Mais il doit être possible de montrer que ces triangulations peuvent donner un atlas de variété de l'ensemble des métriques. Localement l'ensemble des métriques est décrit par un déplacement des sommets de la triangulation tel que la combinatoire de la triangulation ne change pas (ce qui correspond à la description d'un ouvert). Les changements de cartes sont alors donnés par des *flips* (i.e. le passage d'une diagonale à l'autre dans un quadrilatère). Il faut alors montrer que toute les métriques peuvent être atteintes par des petits déplacements de sommets et des flips, et que les changement des cartes sont des homéomorphismes (au minimum).

Il existe d'autres moyens de paramétrer par des longueurs de courbes par exemples certaines métriques hyperboliques à singularités coniques [CP03].

5.4.2 Déscription locale des ensembles de métriques à singularités coniques

Définitions des ensembles de métriques. Soit S une surface compacte. On va vérifier que les longueurs des arêtes d'une triangulation d'une métrique sur S décrivent localement une topologie sur l'ensemble des métriques (adéquates) sur S, qui est en fait la topologie dont on avait muni les ensembles de métriques dans les cas plats et hyperboliques.

On note

- $\mathcal{M}(n)$ l'ensemble des métriques riemanniennes sur S moins n points. Il est munit de la topologie C^k introduite auparavant, pour un k quelconque > 2.
- $\widetilde{Cone^{\varepsilon}_K}(g;n) \subset \mathcal{M}(n)$ l'ensemble des métriques de courbure K sur S à n singularités coniques de courbure singulière de signe constant, que l'on voit comme des métriques riemanniennes après avoir enlevé les points singuliers (donc $Cone^{\varepsilon}_K(g;n)$ est le quotient de $\widetilde{Cone^{\varepsilon}_K}(g;n)(n)$ par les isotopies de S moins n points marqués) ;

– $\widetilde{M}^T$ — où T est une triangulation géodésique d'un élément de $\widetilde{Cone}^{\varepsilon}_K(g;n)$ — l'ensemble des métriques de $\widetilde{Cone}^{\varepsilon}_K(g;n)$ qui admettent une triangulation géodésique homotope à T ;
– Conf(n) l'ensemble des structures conformes sur S avec n points marqués.

On note $\widetilde{Ed}_T$ l'application de $\widetilde{M}^T$ dans $\mathbb{R}^{6g-6+3n}$ qui associe à chaque élément de $\widetilde{M}^T$ le carré des longueurs des arêtes de la triangulation. Le (carré de) la distance entre deux points marqués de S est une application continue de $\mathcal{M}(n)$ dans $\mathbb{R}$.

Autour d'un point de $\widetilde{M}^T$, $\widetilde{Ed}_T$ a ses valeurs dans un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{6g-6+3n}$: si on modifie un petit peu la longueur des $(6g-6+3n)$ arêtes, la métrique que l'on obtient sera toujours dans $\widetilde{M}^T$, parce que les conditions qui définissent un triangle totalement géodésique et celles sur les valeurs des angles autour de chaque sommet sont des conditions ouvertes.

Métriques plates et hyperboliques. Maintenant on munit $\widetilde{Cone}^{\varepsilon}_K(g;n)$, $K \in \{-1,0\}$, de la topologie donnée par le théorème adéquat de de Picard–Mc Owen–Troyanov.

Soit i_T l'inclusion canonique de $\widetilde{M}^T$ (munit de la topologie de induite par celle de $\mathcal{M}(n)$) dans $\widetilde{Cone}^{\varepsilon}_K(g;n)$.

La composition de i_T avec la projection sur Conf(n) est l'application qui associe à chaque métrique sa structure conforme, et c'est une application continue comme par définition Conf(n) est le quotient de $\mathcal{M}(n)$ par l'ensemble des fonctions à valeurs réelles sur S moins ses points marqués.

Dans le cas hyperbolique, la composition de i_T avec la projection sur $]0,2\pi[^n$ est évidemment continue, et dans le cas plat la composition de i_T avec la projection sur $]0,2\pi[^{n-1}\times\mathbb{R}$ est aussi continue.

Alors i_T est continue et injective : c'est un homéomorphisme local et donc $\widetilde{Ed}_T$ est une application continue sur $\widetilde{M}^T \subset \widetilde{Cone}^{\varepsilon}_K(g;n)$. De plus, modulo les isotopies de la surface, l'application $\widetilde{Ed}_T$ devient une application injective Ed_T entre $M^T \subset Cone^{\varepsilon}_K(g;n)$ (le quotient de $\widetilde{M}^T$ par les isotopies) et $\mathbb{R}^{6g-6+3n}$. Et comme elle prend ses valeurs dans un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{6g-6+3n}$ et comme la dimension de $Cone^{\varepsilon}_K(g;n)$ est $(6g-6+3n)$, Ed_T est un homéomorphisme local entre $Cone^{\varepsilon}_K(g;n)$ et $\mathbb{R}^{6g-6+3n}$.

Métriques sphériques. On munit $Cone_1^{-,>2\pi}(g;n)$ de la topologie induite par la topologie de $\mathcal{M}(n)$.

Lemme 5.25. *L'ensemble $Cone_1^{-,>2\pi}(g;n)$ est localement une variété de dimension $(6g-6+3n)$.*

Démonstration. Avec les mêmes arguments que pour les cas précédents, on obtient que $Cone_1^{-}(g;n)$ est localement une variété de $(6g-6+3n)$ en déformant les arêtes d'une triangulation.

De plus, la condition sur les longueurs des géodésiques contractiles est une condition ouverte [RH93, Theorem 6.3,Lemma 9.9]. □

Part II

Realisation of metrics

Chapter 6

Metrics with posititive singular curvatures in genus > 1

6.1 Definitions and statements

An *invariant polyhedral surface* is a pair (P, F), where P is a polyhedral surface in M^+_K and F a discrete group of isometries of M^+_K such that $F(P) = P$ and F acts freely on P. The group F is called the *acting group*.

If there exists an invariant polyhedral surface (P, F) in M^+_K such that the induced metric on P/F is isometric to a metric h of curvature K with conical singularities on a surface S, we say that P *realises* the metric h (obviously the singular points of h correspond to the vertices of P, and F is isomorphic to the fundamental group of S). In this case we say that h is *realised by a unique invariant polyhedral surface* (P, F) if P is unique up to isometries of M^+_K.

Let P be the boundary of a convex compact polyhedron in M^+_K. The induced metric on P is isometric to a metric of constant curvature K with conical singularities of positive singular curvature on the sphere.

A famous theorem of A.D. Alexandrov asserts that each such metric on the sphere is realised by the boundary of a unique convex compact polyhedron of M^+_K [Ale05, Bus58, Pog73] - in this case the acting group F is the trivial one.

In this paper we prove

Theorem 6.1. *A hyperbolic metric with conical singularities of positive singular curvature on a compact surface S of genus > 1 is realised by a unique convex Fuchsian polyhedron in hyperbolic space (up to global isometries).*

A *Fuchsian polyhedron* is a polyhedral surface invariant under the action of a Fuchsian group of hyperbolic space $\mathbb{H}^3$. A *Fuchsian group of hyperbolic space* is a discrete group of orientation-preserving isometries leaving globally invariant a totally geodesic surface, on which it acts cocompactly and without fixed points. The idea to use them comes from Gromov [Gro86]. Analog statement can be found in [Scha], see further.

The general outline of the proof of Theorem 6.1 is very classical and has been used in several other cases, starting from A.D. Alexandrov's works. Roughly speaking, the idea is to endow with suitable topology both the space of convex Fuchsian polyhedra with n vertices and the space of corresponding metrics, and to show that the map from one to the other given by the induced metric is a homeomorphism.

The difficult step is to show the local injectivity of the map "induced metric". This is equivalent to a statement on infinitesimal rigidity of convex Fuchsian polyhedra. The section 6.1.1 is devoted to this result.

Example of convex Fuchsian polyhedra. Consider the set of points at constant (hyperbolic) distance of a totally geodesic surface $P_{\mathbb{H}^2}$ and denote by M the subset of points which are on one side of $P_{\mathbb{H}^2}$.

Obviously M is globally invariant under the action of any Fuchsian group F leaving $P_{\mathbb{H}^2}$ invariant. Moreover, M has the properties of being strictly convex and umbilic (an *umbilic surface* is a surface such that its principal curvatures are the same for all points. There are other kinds of umbilic surfaces in the hyperbolic space, but in all this text, the expression "umbilic surface" means a complete surface at constant distance of $P_{\mathbb{H}^2}$ and contained in one of the half-spaces bounded by $P_{\mathbb{H}^2}$).

Take n points $(x_1, \dots, x_n)$ on M, and let F act on these points. We denote by E the boundary of the convex hull of the points fx_i, for all $f \in F$ and $i = 1 \dots n$. By construction, the convex polyhedral surface E is globally invariant under the action F: it is a convex Fuchsian polyhedron.

Global rigidity of convex Fuchsian polyhedron. A polyhedral surface is called *globally rigid* if any polyhedral surface that is isometric to it is in fact congruent. A direct consequence of the uniqueness of the convex Fuchsian polyhedron realising the induced metric is

Theorem 6.2. *Convex Fuchsian polyhedra in hyperbolic space are globally rigid among convex Fuchsian polyhedra.*

Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary. Take a convex Fuchsian polyhedron (P, F) and consider the Fuchsian polyhedron (P', F) obtained by the reflection on the invariant surface $P_{\mathbb{H}^2}$ of F. Then cut the hyperbolic space along P and P', and keep the component bounded by P and P'. The quotient of this manifold by F is a kind of hyperbolic manifold called *Fuchsian manifold* (with convex polyhedral boundary): these are compact hyperbolic manifolds with boundary with an isometric involution fixing a compact hyperbolic surface (the symmetry relative to $P_{\mathbb{H}^2}/F$), see Figure 6.1. In this case we obtain a Fuchsian manifold with convex polyhedral boundary, and all the Fuchsian manifolds with convex polyhedral boundary can be obtained in this way: the lifting to the universal cover of a component of the boundary of the Fuchsian manifold gives a convex Fuchsian polyhedron in the hyperbolic space. Then Theorem 6.1 says exactly that for a choice of the metric h on the boundary, there exists a unique metric on the manifold such that it is a Fuchsian manifold with convex polyhedral boundary and the induced metric on the boundary is isometric to h:

Theorem 6.3. *The metric on a Fuchsian manifold with convex polyhedral boundary is determined by the induced metric on its boundary.*

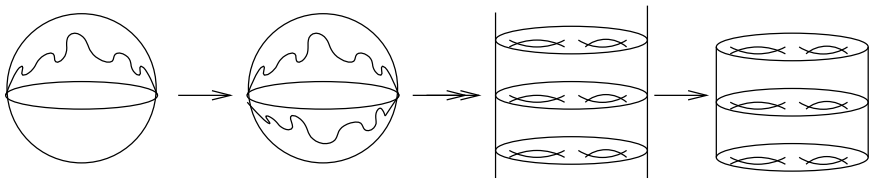


Figure 6.1: From a Fuchsian polyhedron to a Fuchsian manifold.

This is a part of

Conjecture 6.4. *Let h be a hyperbolic metric on a compact manifold M of dimension 3 such that ∂M is polyhedral and convex. Then the induced metric on ∂M is a hyperbolic metric with conical singularities with positive singular curvature. Each hyperbolic metric with conical singularities with positive singular curvature on ∂M is induced on ∂M for a unique choice of h.*

The statement of Conjecture 6.4 in the case where the boundary is smooth and strictly convex as been proved in [Sch06] (the existence part was found in [Lab92]). Remark that A.D. Alexandrov's theorem is a part of Conjecture 6.4 for the case of the hyperbolic ball.

The smooth analog of Conjecture 6.4 provides a smooth version of Theorem 6.1. The existence part of this smooth statement was done in [Gro86].

6.1.1 Fuchsian polyhedra

We want to show that convex Fuchsian polyhedra are infinitesimally rigid among Fuchsian polyhedra. As we will consider the Fuchsian polyhedra up to isometries of hyperbolic space, we consider that the invariant totally geodesic surface in the definition is always the same. We choose the horizontal plane in the Klein projective model, and we will denote it by $P_{\mathbb{H}^2}$. By $p_{\mathbb{H}^2}$ we mean the orthogonal projection in hyperbolic space onto the plane $P_{\mathbb{H}^2}$.

Global form of convex Fuchsian polyhedra. Let (P, F) be a convex Fuchsian polyhedron in the hyperbolic space.

Lemma 6.5. *The polyhedral surface P has a boundary at infinity which is the same as the one of $P_{\mathbb{H}^2}$.*

Proof. It is a general property of discrete subgroups of isometries of hyperbolic space that, for a point $x \in \mathbb{H}^3$, the set of accumulation points of $(fx)_{f\in F}$ doesn't depend on the choice of the point x. As F acts on P and on $P_{\mathbb{H}^2}$, we deduce from this that the boundary at infinity of P is included in the boundary at infinity of $P_{\mathbb{H}^2}$.

It remains to check that the fact that F acts cocompactly on $P_{\mathbb{H}^2}$ implies that all the points of the boundary at infinity of $P_{\mathbb{H}^2}$ are reached by its action, and this is left to the reader. □

Then, by convexity of P, P and $P_{\mathbb{H}^2}$ have no intersection point in hyperbolic space (if we glue them along their common infinite boundary, they bound a convex body - recall that in the Klein projective model, $P_{\mathbb{H}^2}$ is the intersection of a Euclidean plane with the unit ball) and, again by convexity of P, the orthogonal projection on $P_{\mathbb{H}^2}$ gives a homeomorphism between $P_{\mathbb{H}^2}$ and P. Note that this implies that for a convex Fuchsian polyhedron (P, F), the genus of the surface P/F is inevitably > 1.

By cocompactness of the action of F on $P_{\mathbb{H}^2}$, the distance between points of P and points of $P_{\mathbb{H}^2}$ (given by the orthogonal projection on $P_{\mathbb{H}^2}$) is bounded: P is between two umbilic surfaces, realising the extrema d_{min} and d_{max} of the distance between P and $P_{\mathbb{H}^2}$.

This leads to the fact that, if we see P in the Klein projective model, it is a convex polyhedral cap (with infinite number of vertices accumulating on the boundary), lying between two half-ellipsoids of radii $(1, 1, r_{min})$ and $(1, 1, r_{max})$, with $0 < r_{min} < r_{max} < 1$ (a direct computation shows that in this model, umbilic surfaces are half-ellipsoids of radius $(1, 1, r)$ where $r = \tanh(d) < 1$, with d the hyperbolic distance between the umbilic surface and $P_{\mathbb{H}^2}$, see Lemma 3.23 page 43).

Fuchsian polyhedral embeddings. We will need to introduce another way to describe Fuchsian polyhedra. In all the following, S is a compact surface of genus > 1.

Definition 6.6. *A* polyhedral embedding *of S in hyperbolic space is a cellulation of S together with a homeomorphism from S to a polyhedral surface of the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$, sending polygons of the cellulation to geodesic polygons of $\mathbb{H}^3$.*

A Fuchsian polyhedral embedding *of S in the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ is a couple (ϕ, ρ), where*

- *ϕ is a polyhedral embedding of the universal cover $\widetilde{S}$ of S in $\mathbb{H}^3$,*
- *ρ is a representation of the fundamental group Γ of S in the group of orientation-preserving isometries of $\mathbb{H}^3$,*

such that ϕ is equivariant *under the action of $\Gamma := \pi_1(S)$:*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in \widetilde{S},\ \phi(\gamma x) = \rho(\gamma)\phi(x),$$

and $\rho(\Gamma)$ leaves globally invariant a totally geodesic surface in $\mathbb{H}^3$, on which it acts cocompactly (without fixed points).

The number of vertices of the Fuchsian polyhedral embedding *is the number of vertices of the cellulation of S.*

The Fuchsian polyhedral embedding is convex *if its image is a convex polyhedral surface of the hyperbolic space.*

We consider the Fuchsian polyhedral embeddings up to homeomorphisms and up to global isometries: let (ϕ_1, ρ_1) and (ϕ_2, ρ_2) be two Fuchsian polyhedral embeddings of two surfaces S_1 and S_2. We say that (ϕ_1, ρ_1) and (ϕ_2, ρ_2) are equivalent if there exists a homeomorphism h between S_1 and S_2 and a hyperbolic isometry I such that, for a lift $\widetilde{h}$ of h to $\widetilde{S}_1$ we have

$$\phi_2 \circ \widetilde{h} = I \circ \phi_1.$$

As two lifts of h only differ by conjugation by elements of $\Gamma := \pi_1(S)$, using the equivariance property of the embedding, it is easy to check that the definition of the equivalence relation doesn't depend on the choice of the lift.

As we see the Fuchsian polyhedral embeddings up to global isometries, we consider that the invariant surface is always $P_{\mathbb{H}^2}$.

Definition 6.7. *The* genus of a Fuchsian group F of hyperbolic space *is the genus of the quotient of the invariant totally geodesic surface (for the action of F) by the restriction of F to it.*

The genus of a Fuchsian polyhedron *is the genus of the Fuchsian group of hyperbolic space acting on it.*

The number of vertices of a Fuchsian polyhedron (P, F) *is the number of vertices of P in a fundamental domain for the action of F.*

As S is a compact surface of genus $g > 1$, it can be endowed with hyperbolic metrics, and each of them provides a cocompact representation of Γ in the group of orientation-preserving isometries of the hyperbolic plane. The images of such representations are usually called *Fuchsian groups* (of $\mathbb{H}^2$), that explains the terminology used. Moreover, there is a bijection between the cocompact representations of Γ in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ and the Fuchsian groups of $\mathbb{H}^2$ of genus g.

Lemma 6.8. *There is a bijection between the cocompact representations of the fundamental group of S in $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ and the Fuchsian groups of $\mathbb{H}^3$ of genus g (which leave invariant $P_{\mathbb{H}^2}$).*

Proof. It suffices to prove that there is a bijection between the Fuchsian groups of $\mathbb{H}^2$ and the Fuchsian groups of $\mathbb{H}^3$ (with same genus).

The restriction of a Fuchsian group of $\mathbb{H}^3$ to $P_{\mathbb{H}^2}$ obviously gives a Fuchsian group of $\mathbb{H}^2$.

Reciprocally, a Fuchsian group F acting on $P_{\mathbb{H}^2}$ canonically gives a Fuchsian group of the hyperbolic space: for a point x in the hyperbolic space, an element $f \in F$ sends $p_{\mathbb{H}^2}(x)$ on a point $z \in P_{\mathbb{H}^2}$. The image y of x by the element of $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ extending f is the unique point of the hyperbolic space such that its projection on $P_{\mathbb{H}^2}$ is z (and is in the same half-space delimited by $P_{\mathbb{H}^2}$ than x). This application is effectively a hyperbolic isometry: the corresponding map of the ambiant Minkowski space sends an orthogonal unit basis of a plane (formeb by the vector $p_{\mathbb{H}^2}(x)$ and the unit tangent vector of the orthogonal geodesic at x) to an orthogonal unit basis of anther plane (formed by the vector z and the unit tangent vector of the orthogonal geodesic at z).

And there is no other such subgroup of $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ (because if there is, each elements of both groups sends a geodesic segment orthogonal to $P_{\mathbb{H}^2}$ to the same geodesic segment, then they are equal). □

Lemma 6.9. *There is a bijection between the convex Fuchsian polyhedra of genus g with n vertices and the convex Fuchsian polyhedral embeddings with n vertices of S.*

Proof. Obviously, the image of S by a convex Fuchsian polyhedral embedding is a convex Fuchsian polyhedron. Reciprocally, the canonical embedding in $\mathbb{H}^3$ of a convex Fuchsian polyhedron P invariant under the action of a group F gives a convex Fuchsian polyhedral embedding of the surface P/F in $\mathbb{H}^3$. We have seen that this surface is homeomorphic to $P_{\mathbb{H}^2}/F$, which is homeomorphic to S. □

Fuchsian deformations. Let (S, ϕ, ρ) a convex polyhedral Fuchsian embedding.

Let $(\phi_t)_t$ be a path of convex polyhedral embeddings of $\widetilde{S}$ in $\mathbb{H}^3$, such that:

- $\phi_0 = \phi$,

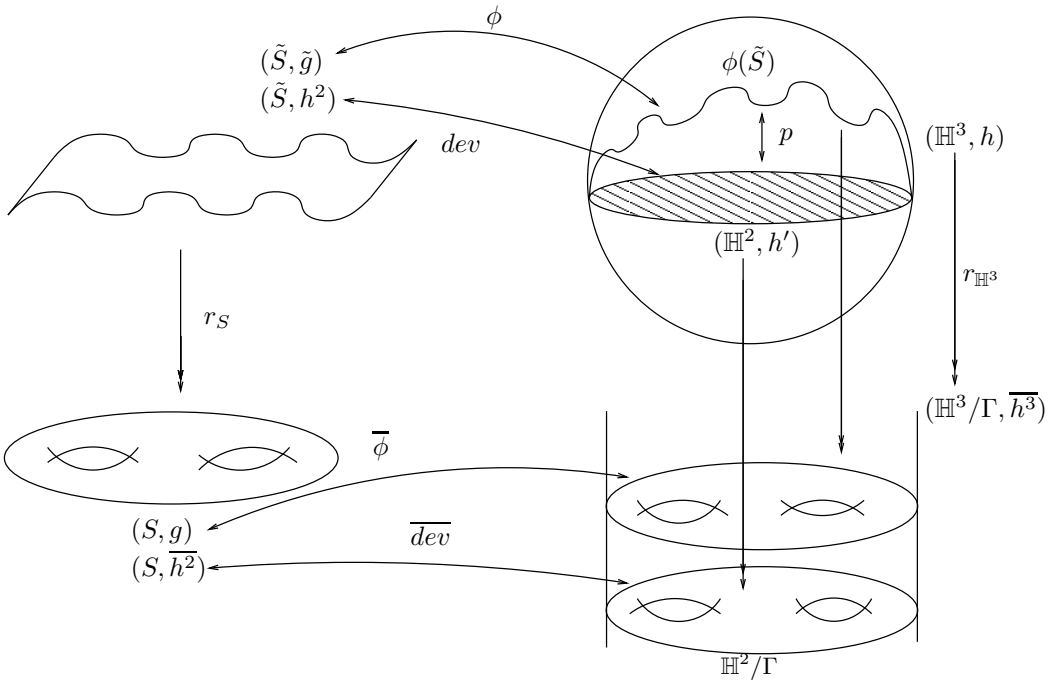


Figure 6.2:

- the induced metric is preserved at the first order at $t = 0$,
- there are representations ρ_t of $\Gamma = \pi_1(S)$ in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$

such that

$$\phi_t(\gamma x) = \rho_t(\gamma)\phi_t(x)$$

and each $\rho_t(\Gamma)$ leaves globally invariant a totally geodesic surface, on which it acts cocompactly without fixed points (up to global isometries, we consider that the surface is always $P_{\mathbb{H}^2}$).

We denote by

$$Z(\phi(x)) := \frac{d}{dt}\phi_t(x)_{|t=0} \in T_{\phi(x)}\mathbb{H}^3$$

and

$$\dot{\rho}(\gamma)(\phi(x)) = \frac{d}{dt}\rho_t(\gamma)(\phi(x))_{|t=0} \in T_{\rho(\gamma)\phi(x)}\mathbb{H}^3.$$

The vector field Z has a property of equivariance under $\rho(\Gamma)$:

$$Z(\rho(\gamma)\phi(x)) = \dot{\rho}(\gamma)(\phi(x)) + d\rho(\gamma).Z(\phi(x)). \tag{6.1}$$

This can be written

$$Z(\rho(\gamma)\phi(x)) = d\rho(\gamma).(d\rho(\gamma)^{-1}\dot{\rho}(\gamma)(\phi(x)) + Z(\phi(x))) \tag{6.2}$$

and $d\rho(\gamma)^{-1}\dot{\rho}(\gamma)$ is a Killing field of $\mathbb{H}^3$, because it is the derivative of a path in the group of isometries of $\mathbb{H}^3$ (we must multiply by $d\rho(\gamma)^{-1}$, because $\dot{\rho}(\gamma)$ is not a vector field). We denote this Killing field by $\vec{\rho}(\gamma)$. Equation (6.2) can be written, if $y = \phi(x)$,

$$Z(\rho(\gamma)y) = d\rho(\gamma).(\vec{\rho}(\gamma) + Z)(y). \tag{6.3}$$

A *Fuchsian deformation* is an infinitesimal isometric deformation Z on a Fuchsian polyhedron which satisfies Equation (6.3), where $\vec{\rho}(\gamma)$ is a *Fuchsian Killing field*, that is a Killing field of the hyperbolic

plane extended to the hyperbolic space along geodesics orthogonal to the plane. More precisely, for a point $x \in \mathbb{H}^3$, let d be the distance between x and $p_{\mathbb{H}^2}(x)$. We denote by p_d the orthogonal projection onto $P_{\mathbb{H}^2}$ of the umbilic surface which is at constant distance d from $P_{\mathbb{H}^2}$ (passing through x). Then the Killing field K at $p_{\mathbb{H}^2}(x)$ is extended as $dp_d^{-1}(K)$ at the point x.

A Fuchsian polyhedron is *Fuchsian infinitesimally rigid* if all its Fuchsian deformations are trivial (i.e. are restriction to the Fuchsian polyhedron of Killing fields of hyperbolic space).

We want to prove

Theorem 6.10. *Convex Fuchsian polyhedra are Fuchsian infinitesimally rigid.*

By the fundamental Property of the infinitesimal Pogorelov map, to prove Theorem 6.10 it suffices to prove that, for each Fuchsian deformation Z, the vertical component of the image of Z by the infinitesimal Pogorelov map vanishes at the boundary, because in this case Proposition 2.19 provides the result.

Remarks about the method employed. There is a non-direct way to prove the statement of Theorem 6.10, using another infinitesimal Pogorelov map. This way is pointed out in [Filc] (the next chapter).

Moreover, it may be possible that the method employed to prove Proposition 2.19 leads to a direct proof of Theorem 6.10 in hyperbolic space, without using the infinitesimal Pogorelov map.

It may be possible that the method used here can be extended to prove infinitesimal rigidity results for ideal and hyperideal Fuchsian polyhedra (that means that some vertices could be on the sphere or out of the ball for the Klein projective model), but it seems to be a more direct way (see the Appendix).

Note that the following proof is also true without any change for strictly convex smooth Fuchsian surfaces (using a smooth analog of Proposition 2.19).

Proof of Theorem 6.10. Recall that $p_{\mathbb{H}^2}$ is the orthogonal projection on the totally geodesic surface $P_{\mathbb{H}^2}$. At a point x of a convex Fuchsian polyhedron P, the derivative of the geodesic which realises this projection is called the *vertical direction* at x, and the directions orthogonal to this one are *horizontal directions*. So a Fuchsian deformation Z can be decomposed in a vertical component Z_v and in a horizontal component Z_h. We denote by $(Z_r)_h$ the horizontal component of the radial component of Z, etc. We have

$$Z_r = (Z_r)_h + (Z_r)_v = (Z_h)_r + (Z_v)_r.$$

The first one is obvious and the second one comes from the linearity of the orthogonal projection.

Proposition 6.11. *The vector field Z_v is* invariant *under the action of $\rho(\Gamma)$, i.e. $\forall x \in P$:*

$$Z_v(\rho(\gamma)x) = d\rho(\gamma).Z_v(x).$$

Proof. From Equation (6.3), it suffices to check that $\vec{\rho}(\gamma)$ has no vertical component, that is true by definition of a Fuchsian Killing field. □

And as $\rho(\Gamma)$ acts cocompactly on P

Corollary 6.12. *There exists a constant c_v such that, for all $x \in P$,*

$$\|Z_v(x)\| \leqslant c_v.$$

Moreover

Corollary 6.13. *The vector field Z_h is equivariant under the action of $\rho(\Gamma)$.*

Proof. Equation (6.1) says that

$$Z_v(\phi(\gamma x)) + Z_h(\phi(\gamma x)) = \dot{\rho}(\phi(x)) + d\rho(\gamma).Z_v(\phi(x)) + d\rho(\gamma).Z_h(\phi(x)),$$

and the preceding proposition gives the result. □

Recall that p_d is the orthogonal projection on $P_{\mathbb{H}^2}$ of the umbilic surface which is at constant distance d from $P_{\mathbb{H}^2}$ (passing through x). We call *radial-horizontal* the component of Z (at x) in the direction $dp_d^{-1}(r(p_{\mathbb{H}^2}(x)))$, where $r(p_{\mathbb{H}^2}(x))$ is the radial direction of $P_{\mathbb{H}^2}$ at the point $p_{\mathbb{H}^2}(x)$. This component is noted Z_{rh}, and it's a horizontal vector.

We denote by W the projection on $P_{\mathbb{H}^2}$ of the horizontal component of Z (it is equivariant under the action of $\rho(\Gamma)$). We denote by W_r its radial component. Then $dp_d^{-1}(W_r)$ is the radial-horizontal component of the horizontal component of Z.

The determining fact is:

Proposition 6.14. *Let H be a vector field of $\mathbb{H}^2$ equivariant under the action of $\rho(\Gamma)$. Then there exists a constant $c_{\dot{m}}$ such that*

$$\|H_r(x)\|_{\mathbb{H}^2} \leq c_{\dot{m}} d_{\mathbb{H}^2}(c_h, x).$$

The point c_h is always the origin in the Klein projective model.

Proof. We deform the hyperbolic metric m along H, that is $\dot{m} = L_H m$, where L is the Lie derivative:

$$\begin{aligned} \dot{m}(X,Y) = (L_H m)(X,Y) &= m(\nabla_X H, Y) + m(\nabla_Y H, X) \\ &= H.m(X,Y) + m([X,H],Y) + m(X,[Y,H]). \end{aligned}$$

Let $c : [0,\eta] \to \mathbb{H}^2$, $c(0) = c_h$, , $c(\eta) = x$, $\|c'\| = 1$ a geodesic (then $\eta = d_{\mathbb{H}^2}(c_h, x)$ and $c'(\eta)$ is the radial direction at the point x). Up to adding a Killing field, we can suppose that $H(c_h) = 0$. Then

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \dot{m}(c'(t), c'(t))dt &= 2\int_0^\eta m(\nabla_{c'(t)} H(c(t)), c'(t))dt \\ &= 2\int_0^\eta c'(t).m(H, c'(t))dt \\ &= 2m(H, c'(\eta)) \\ &= 2m(H_r + H_l, c'(\eta)) \\ &= 2m(H_r, c'(\eta)) \\ &= 2m(H_r, \pm\frac{H_r}{\|H_r\|_{\mathbb{H}^2}}), \end{aligned}$$

that leads to

$$\int_0^\eta \dot{m}(c'(t), c'(t))dt = \pm 2 \|H_r\|_{\mathbb{H}^2}. \tag{6.4}$$

As H is equivariant under the action of $\rho(\Gamma)$, the elements of $\rho(\Gamma)$ preserve the bilinear form $\dot{m}$, because, up to an isometry, $H(\rho(\gamma)x)$ is written as $H(x)$ plus a Killing field.

Formally, using Equation (6.3)

$$H(\rho(\gamma)x) = d\rho(\gamma).(\vec{\rho}(\gamma) + H)(x),$$

and we develop

$$\begin{aligned}
\dot{m}(d\rho(\gamma)X(x), d\rho(\gamma)Y(x)) &:= m(\nabla_{d\rho(\gamma)X(x)}H(\rho(\gamma)x), d\rho(\gamma)Y(x)) \\
&\quad +m(\nabla_{d\rho(\gamma)Y(x)}H(\rho(\gamma)x), d\rho(\gamma)X(x)) \\
&= m(\nabla_{d\rho(\gamma)X(x)}d\rho(\gamma)(\vec{\rho}(\gamma)(x)+H(x)), d\rho(\gamma)Y(x)) \\
&\quad +m(\nabla_{d\rho(\gamma)Y(x)}d\rho(\gamma)(\vec{\rho}(\gamma)(x)+H(x)), d\rho(\gamma)X(x)) \\
&= m(\nabla_{X(x)}(\vec{\rho}(\gamma)(x)+H(x)), Y(x)) \\
&\quad +m(\nabla_{Y(x)}(\vec{\rho}(\gamma)(x)+H(x)), X(x)) \\
&= m(\nabla_{X(x)}H(x), Y(x)) + m(\nabla_{Y(x)}H(x), X(x)) \\
&\quad +m(\nabla_{X(x)}\vec{\rho}(\gamma)(x), Y(x)) + m(\nabla_{Y(x)}\vec{\rho}(\gamma)(x), X(x)) \\
&= m(\nabla_{X(x)}H(x), Y(x)) + m(\nabla_{Y(x)}H(x), X(x)) \\
&\quad +L_{\vec{\rho}(\gamma)}m(X(x), Y(x)) \\
&= \dot{m}(X(x), Y(x))
\end{aligned}$$

($L_{\vec{\rho}(\gamma)}m(X,Y) = 0$ because $\vec{\rho}(\gamma)$ is a Killing field).

Then $\dot{m}$ is a bilinear form on $P_{\mathbb{H}^2}/\rho(\Gamma)$, which is compact, then $|\dot{m}|$ is bounded by a constant $c_{\dot{m}}$, and by Equation (6.4):

$$\|H_r(x)\|_{\mathbb{H}^2} \leq c_{\dot{m}}\eta = c_{\dot{m}}d_{\mathbb{H}^2}(c_h, x).$$

□

Corollary 6.15. *There exists a constant c_{rh} such that:*

$$\|(Z_h)_{rh}(x)\|_{\mathbb{H}^3} \leq c_{rh}d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x).$$

Proof. A simple computation in Minkowski space shows that the induced metric on the umbilic surface at constant distance d of $P_{\mathbb{H}^2}$ (passing through x) is $\cosh(d)h$ where h is the hyperbolic metric, then

$$\|(Z_h)_{rh}(x)\|_{\mathbb{H}^3} = \cosh(d)\,\|W_r(p_{\mathbb{H}^2}(x))\|_{\mathbb{H}^2}\,,$$

and as d is bounded for all $x \in P$, and with the preceding proposition, there exists a constant c_{rh} such that:

$$\|(Z_h)_{rh}(x)\|_{\mathbb{H}^3} \leq c_{rh}d_{\mathbb{H}^2}(c_h, p_{\mathbb{H}^2}(x)). \tag{6.5}$$

Classical hyperbolic trigonometry applied to the rectangular triangle with edge length $d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x)$ (the long edge), $d_{\mathbb{H}^3}(x, p_{\mathbb{H}^2}(x))$ and $d_{\mathbb{H}^2}(c_h, p_{\mathbb{H}^2}(x))$ gives:

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x)) = \cosh(d_{\mathbb{H}^3}(x, p_{\mathbb{H}^2}(x)))\cosh(d_{\mathbb{H}^2}(c_h, p_{\mathbb{H}^2}(x))),$$

and as the values of the hyperbolic cosine are greater than 1:

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x)) \geq \cosh(d_{\mathbb{H}^2}(c_h, p_{\mathbb{H}^2}(x))),$$

and the hyperbolic cosine is an increasing function for positive values, then:

$$d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x) \geq d_{\mathbb{H}^2}(c_h, p_{\mathbb{H}^2}(x)).$$

This together with Equation (6.5) gives the result. □

The *vertical plane* is the vector space of $T_x\mathbb{H}^3$ spanned by the orthogonal vectors Z_v and Z_{rh} (Z_{rh} is in the horizontal plane by definition, then it is orthogonal to the vertical direction).

We can see the vertical plane as the tangent plane (at x) to the totally geodesic surface passing through c_h and x and orthogonal to $P_{\mathbb{H}^2}$.

We denote by Z_{lv} the image of the projection on the vertical plane of the lateral component of Z.

The vector Z_r belongs to the vertical plane, because it can be decomposed in a horizontal component, which is in the radial-horizontal direction, and a vertical component.

The lateral component is orthogonal to the radial component, then the vector Z_{lv} is orthogonal to Z_r in the vertical plane.

In all the following, we denote by $\mu := d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x)$, and vector fields are evaluated at the point $x \in P$.

Lemma 6.16. *Let V be the projection of a component of Z on the vertical plane. Then there exists a constant c such that*

$$\|V\|_{\mathbb{H}^3} \leq c(1+\mu).$$

Proof. We denote by Π_V the projection on the vertical plane, considered as spanned by the orthogonal vectors Z_{rh} and Z_v. We can write $\Pi_V(Z) = Z_{rh} + Z_v$. As V is already in the vertical plane, and as we project a component of Z, we can write:

$$\begin{aligned}
\|V\|_{\mathbb{H}^3} = \|\Pi_V(V)\|_{\mathbb{H}^3} &\leqslant \|\Pi_V(Z)\|_{\mathbb{H}^3} \\
&\leqslant \|Z_{rh}\|_{\mathbb{H}^3} + \|Z_v\|_{\mathbb{H}^3} \\
&\leqslant \|(Z_h)_{rh}\|_{\mathbb{H}^3} + \|(Z_v)_{rh}\|_{\mathbb{H}^3} + \|Z_v\|_{\mathbb{H}^3} \\
&\leqslant \|(Z_h)_{rh}\|_{\mathbb{H}^3} + 2\|Z_v\|_{\mathbb{H}^3},
\end{aligned}$$

and as the overestimation of these two last norms are known (by Corollaries 6.12 and 6.15) we get

$$\|V\|_{\mathbb{H}^3} \leqslant c_{rh}\mu + 2c_v,$$

that is, if c is greater than c_{rh} and $2c_v$,

$$\|V\|_{\mathbb{H}^3} \leqslant c(1+\mu).$$

□

For convenience, we denote by u be the image of Z by the infinitesimal Pogorelov map.

The decompositions of tangent vectors defined above (vertical, horizontal,...) occur in Euclidean space. We want to show that the vertical component of u goes to 0 at the boundary. As u_v is in the vertical plane, if α is the angle between u_v and u_{lv}, we get

$$u_v = \cos(\alpha)u_{lv} + \sin(\alpha)u_r, \tag{6.6}$$

because, for the same reason as for Z, u_r and u_{lv} give an orthogonal basis of the vertical plane.

By Lemma 6.16 we get, as Z_r and Z_{lv} are in the vertical plane,

$$\begin{aligned}
\|Z_r\|_{\mathbb{H}^3} &\leqslant c(1+\mu), \\
\|Z_{lv}\|_{\mathbb{H}^3} &\leqslant c(1+\mu),
\end{aligned}$$

and as the infinitesimal Pogorelov map preserves the norm of the radial component and crushes by a coefficient $\cosh(\mu)$ the norm of the lateral direction (Lemma 4.17 page 68), these two inequalities rise to

$$\begin{aligned}
\|u_r\|_{\mathbb{R}^3} &\leqslant c(1+\mu), \\
\|u_{lv}\|_{\mathbb{R}^3} &\leqslant \cosh(\mu)^{-1}c(1+\mu).
\end{aligned}$$

Starting from (6.6) we get

$$\begin{aligned}
\|u_v\|_{\mathbb{R}^3} &\leqslant \|u_{lv}\|_{\mathbb{R}^3} + \sin(\alpha)\|u_r\|_{\mathbb{R}^3} \\
&\leqslant c\cosh(\mu)^{-1}(1+\mu) + c\sin(\alpha)(1+\mu) \\
&\leqslant c(1+\mu)(\cosh(\mu)^{-1} + \sin(\alpha)).
\end{aligned}$$

We call δ the Euclidean distance between a point x on P and $P_{\mathbb{H}^2}$ (in the Klein projective model), and we see easily that we have $\sin(\alpha) \underset{0}{\approx} \delta$ when we go near the boundary of the ball:

$$c(1+\mu)(\cosh(\mu)^{-1} + \sin(\alpha)) \underset{0}{\approx} c(1+\mu)(\cosh(\mu)^{-1} + \delta).$$

We denote by S_{max} the umbilic surface which realises the maximum of the distance between P and $P_{\mathbb{H}^2}$, x_{max} the intersection of S_{max} with the geodesic joining x and c_h, μ_{max} for $d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x_{max})$, δ_{max} the distance in $\mathbb{R}^3$ between x_{max} and $P_{\mathbb{H}^2}$. Guess analog definitions of $S_{min}, x_{min}, \mu_{min}, \delta_{min}$ for the surface realising the minimum of the distance between P and $P_{\mathbb{H}^2}$.

Lemma 6.17. *Near the boundary of the ball, we have the approximations*

$$\mu_{max} \underset{\delta_{max}\to 0}{\approx} -c_{max}\ln(\delta_{max}),$$
$$\mu_{min} \underset{\delta_{min}\to 0}{\approx} -c_{min}\ln(\delta_{min}),$$

where c_{max} and c_{min} are positive constants.

Proof. We prove the lemma in the case *max*, the proof for *min* is the same. It is easy to check that $\mu_{max} = d_{\mathbb{H}^3}(c_h, x_{max}) = \tanh^{-1}(\|x_{max}\|_{\mathbb{R}^3})$, that is

$$\mu_{max} = \ln\left(\frac{1+\|x_{max}\|_{\mathbb{R}^3}}{1-\|x_{max}\|_{\mathbb{R}^3}}\right) \underset{\|x_{max}\|_{\mathbb{R}^3}\to 1}{\approx} -\ln(1-\|x_{max}\|_{\mathbb{R}^3}).$$

As the image of S_{max} in the projective Klein model is an ellipsoid, δ_{max} satisfies the equation

$$(x_{max})_1^2 + (x_{max})_2^2 + \frac{\delta_{max}^2}{r^2} = 1,$$

where r is a positive constant strictly less than 1. Adding and removing a δ_{max}^2 and reordering we get:

$$1 - \|x_{max}\|_{\mathbb{R}^3} = \delta_{max}^2\frac{1-r^2}{r^2},$$

as $\delta_{max}^2 = (x_{max})_3^2$, and this gives the result. □

As obviously

$$\mu_{min} \le \mu \le \mu_{max} \text{ and } \delta_{min} \le \delta \le \delta_{max},$$

we get

$$\begin{aligned}\|u_v\|_{\mathbb{R}^3} &\le c(1+\mu)(\cosh(\mu)^{-1}+\delta)\\ &\le c(1+\mu_{max})(\cosh(\mu_{min})^{-1}+\delta),\end{aligned}$$

and when x goes near the boundary, $\cosh(f(x)) \underset{\infty}{\approx} \exp(f(x))$, where f is a function going to ∞ when x goes near the boundary. Then:

$$\begin{aligned}& c(1+\mu_{max})(\cosh(\mu_{min})^{-1}+\delta)\\ \underset{0}{\approx}\ & c(1-c_{max}\ln(\delta_{max}))(\cosh(-c_{min}\ln(\delta_{min}))^{-1}+\delta)\\ \underset{0}{\approx}\ & c'(1-\ln(\delta_{max}))(\delta_{min}+\delta).\end{aligned}$$

At the end, as

$$c'(1-\ln(\delta_{max}))(\delta_{min}+\delta) \le c'(1-\ln(\delta_{max}))(\delta_{max}+\delta_{max})$$

and as when δ goes to 0, δ_{max} goes to 0, then $\|u_v\|_{\mathbb{R}^3}$ goes to 0.

Theorem 6.10 is now proved.

6.2 Set of Fuchsian polyhedra

We denote by $\mathcal{P}(n)$ the set of convex Fuchsian polyhedral embeddings with n vertices of a compact surface S in $\mathbb{H}^3$, modulo isotopies of S fixing the vertices of the cellulation and modulo the isometries of $\mathbb{H}^3$.

More precisely, the equivalence relation is the following: let (ϕ_1,ρ_1) and (ϕ_2,ρ_2) be two convex Fuchsian polyhedral embeddings of S. We say that (ϕ_1,ρ_1) and (ϕ_2,ρ_2) are equivalent if there exists

- a homeomorphism h of S isotopic to the identity, such that if h_t is the isotopy (i.e. $t\in[0,1]$, $h_0 = h$ and $h_1 = id$), then h_t fixes the vertices of the cellulation for all t,
- a hyperbolic isometry I,

such that, for a lift $\widetilde{h}$ of h to $\widetilde{S}$ we have

$$\phi_2\circ\widetilde{h} = I\circ\phi_1.$$

Here again, the definition of the equivalence relation doesn't depend on the choice of the lift.

Surjection on the Teichmüller space with marked points. Recall that to each element of the Teichmüller space $T_g(n)$ is associated a canoncial hyperbolic polygon, see page 79 - actually we saw that to each element of T_g is associated a canonical polygon, but to get an element of $T_g(n)$ is suffices to consider n points in the interior of each canonical polygon.

The Teichmüller space of $F_{g,n}$ (i.e. of a compact surface of genus $g > 1$ with $n > 0$ marked points), denoted by $T_g(n)$, can be defined as the set of hyperbolic metrics on $F_{g,n}$ modulo isotopies of $F_{g,n}$, such that each isotopy h_t fixes the marked points for all t.

Let (ϕ_1, ρ_1) and (ϕ_2, ρ_2) be two equivalent convex Fuchsian polyhedral embeddings of S with n vertices. Recall that h is an isotopy of S and $\widetilde{h}$ its lift to $\widetilde{S}$. As h is homotopic to the identity, $\forall x \in \widetilde{S}, \forall \gamma \in \Gamma$, we get:

$$\begin{aligned} & \phi_2(\widetilde{h}(\gamma x)) = I(\phi_1 \gamma x) \\ \Leftrightarrow \quad & \phi_2((h)_*(\gamma)x) = I(\rho_1(\gamma)(\phi_1(x)) \\ \Leftrightarrow \quad & \phi_2(\gamma x) = I(\rho_1(\gamma)(\phi_1(x)) \\ \Leftrightarrow \quad & \rho_2(\gamma)(\phi_2(x)) = I(\rho_1(\gamma)(\phi_1(x)) \\ \Leftrightarrow \quad & \rho_2(\gamma)(I(\phi_1(x))) = I(\rho_1(\gamma)(\phi_1(x)). \end{aligned}$$

But if two orientation-preserving isometries of the hyperbolic space are equal on an open set of a totally geodesic surface (a face of the Fuchsian polyhedron), they are equal, then for all $\gamma \in \Gamma$, $\rho_2(\gamma) = I \circ \rho_1(\gamma) \circ I^{-1}$. As ρ_1 and ρ_2 are also representations of Γ in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (modulo conjugation by an element of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$), we deduce that ρ_1 and ρ_2 are the same element of $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Then in the hyperbolic plane $P_{\mathbb{H}^2}$, the canonical polygons associated to these two representations are equal, and, up to an isometry, the projection of the vertices of the Fuchsian polyhedra $\phi_1(\tilde{S})$ and $\phi_2(\tilde{S})$ on $P_{\mathbb{H}^2}$ gives the same n marked points in this canonical polygon: we have described a map $\mathcal{S}$ which to each element of $\mathcal{P}(n)$ associates an element of $T_g(n)$.

And as we have seen that from any Fuchsian group and any n points on the plane, we can build a convex Fuchsian polyhedron with n vertices (it is enough to take n points at same distance from the plane), $\mathcal{S}$ is surjective.

Manifold structure on $\mathcal{P}(n)$.

Lemma 6.18. *Let $[h] \in T_g(n)$. Then $\mathcal{S}^{-1}([h])$ is diffeomorphic to the open unit ball of $\mathbb{R}^n$.*

Proof. We will show that $\mathcal{S}^{-1}([h])$ is a contractible open subset of $(\mathbb{R}_+)^n$.

We fix an element of $T_g(n)$, that is the action of a cocompact Fuchsian group F on $P_{\mathbb{H}^2}$ and n points $(y_1, \ldots, y_n)$. We denote by $(x_1, \ldots, x_n)$ n points of the hyperbolic space such that their projection on the plane $P_{\mathbb{H}^2}$ is exactly $(y_1, \ldots, y_n)$. We look at the Klein projective model of the hyperbolic space, and the coordinates of the points are those of $\mathbb{R}^3$. The orthogonal projection, Euclidean or hyperbolic, of a point on the horizontal plane gives the same point.

We want the vertices of the polyhedron obtained as the boundary of the closure of the convex hull of the points fx_i, for any $f \in F$ and $i = 1 \ldots n$, to be exactly the set of points of the form fx_i, for any $f \in F$ and $i = 1 \ldots n$. This is the same as saying that no point of the form fx_i is in the interior of the convex hull of the others points of this form; that means, for all fx ($x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$), and for all $f_i x_i, f_j x_j, f_k x_k$ such that $p_{\mathbb{H}^2}(fx)$ is contained in the triangle formed by the points $p_{\mathbb{H}^2}(f_i x_i)$, $p_{\mathbb{H}^2}(f_j x_j)$ and $p_{\mathbb{H}^2}(f_k x_k)$, then the plane generated by $f_i x_i, f_j x_j, f_k x_k$ (strictly) separates fx from $P_{\mathbb{H}^2}$.

Actually, it suffices to verify this condition only for the points $(x_1, \ldots, x_n)$, because if the plane generated by

$$f_i x_i, f_j x_j, f_k x_k$$

separates fx from $P_{\mathbb{H}^2}$, then the plane generated by

$$f^{-1} f_i x_i, f^{-1} f_j x_j, f^{-1} f_k x_k$$

separates x from $P_{\mathbb{H}^2}$ (as F acts by isometries, it sends the convex polyhedron with vertices

$$f_i x_i, f_j x_j, f_k x_k, fx, p_{\mathbb{H}^2}(f_i x_i), p_{\mathbb{H}^2}(f_j x_j), p_{\mathbb{H}^2}(f_i x_i), p_{\mathbb{H}^2}(fx)$$

on the convex polyhedron of vertices

$$f^{-1} f_i x_i, f^{-1} f_j x_j, f^{-1} f_k x_k, x, p_{\mathbb{H}^2}(f^{-1} f_i x_i), p_{\mathbb{H}^2}(f^{-1} f_j x_j), p_{\mathbb{H}^2}(f^{-1} f_i x_i), p_{\mathbb{H}^2}(x)).$$

Then, if x is projected in the triangle $(p_{\mathbb{H}^2}(f_i x_i), p_{\mathbb{H}^2}(f_j x_j), p_{\mathbb{H}^2}(f_k x_k))$, we have a condition which can be written

$$\det(f_i x_i - f_j x_j, f_i x_i - f_k x_k, f_i x_i - x) > 0.$$

(we choose an orientation such that this det is > 0, but we could take the other orientation, it will change nothing, the important fact is that the condition is open).

For each equation, the set of solution is an open half-space delimited by an affine hyperplane: the possible set of heights for the vertices $(x_1, \dots, x_n)$ is given by the intersection (of an infinite number) of open half-spaces.

This is a contractible open set. We want the vertices to stay in the unit ball, then we must add for each vertex the condition that its height must be (strictly) greater than 0 and less than $(1 - a_i^2 - b_i^2)$, where a_i and b_i are the horizontal coordinates of each x_i (they are fixed by hypothesis): we intersect the contractible open set with other open half-spaces, and the intersection remains a contractible open set. This set is non-empty, as we built examples of convex Fuchsian polyhedra. □

An open set of $T_g(n)$ is parameterised by a (small) deformation of a canonical polygon in the hyperbolic plane and a displacement of the marked points inside this polygon. With a fixed height for the vertices, a small displacement of a convex Fuchsian polyhedron (corresponding to a path in $T_g(n)$), is always convex (the convexity is a property preserved by a little displacement of the vertices) and Fuchsian (by construction).

So we can endow $\mathcal{P}(n)$ with the topology which makes it a fiber space based on $T_g(n)$, with fibers homeomorphic to the open unit ball of $\mathbb{R}^n$:

Proposition 6.19. *The space $\mathcal{P}(n)$ is a contractible manifold of dimension $(6g - 6 + 3n)$.*

Because $T_g(n)$ is contractible manifold of dimension $(6g - 6 + 2n)$, see e.g. [Nag88].

Local description of the space of polyhedra. Take a subdivision of each face of a convex Fuchsian polyhedron P in triangles (such that the resulting triangulation has no more vertices than the polyhedron, and is invariant under the action of $\rho(\Gamma)$). For such a triangulation on P, we get a map Ed_P which sends each convex Fuchsian polyhedron in a neighbourhood of P in $\mathcal{P}(n)$ to the square of the length of the edges of the triangulation in a fundamental domain for the Fuchsian group action. As this triangulation of P provides a triangulation of the surface S, the map Ed_P has its values in $\mathbb{R}^{6g-g+3n}$.

The map Ed_P associates to each Fuchsian polyhedron a set of $(6g - g + 3n)$ real numbers among all the $d_{\mathbb{H}^3}(\gamma x_i, \mu x_j)^2$, where $\gamma, \mu \in \rho(\Gamma)$, $i, j = 1, \dots, n$ and $(x_1, \dots, x_n)$ are the vertices of the polyhedron. It is in particular a C^1 map (the description of the topology of $\mathcal{P}(n)$ says that for a neighbourhood of P in $\mathcal{P}(n)$ the vertices belong to open sets of the hyperbolic space).

By the local inverse theorem, Theorem 6.10 says exactly that Ed_P is a local homeomorphism.

Realisation of metrics. We denote by $\mathcal{I}(n)$ the map from $\mathcal{P}(n)$ to $\mathrm{Cone}(n)$, which associates to each convex Fuchsian polyhedral embedding in hyperbolic space its induced metric. This map is well defined, because the induced metric on the quotient of a convex Fuchsian polyhedron (by $\rho(\Gamma)$) is isometric to a hyperbolic metric with conical singularities with positive singular curvature on S.

Let P be a convex Fuchsian polyhedron, and m its induced metric. We consider a triangulation of m given by a subdivision of the faces of P in triangles. Obviously, the (square of) the lengths of the edges of the triangulation of P are the same that the (square of) the lengths of the edges of the triangulation of $m := \mathcal{I}(n)(P)$.

Recall Ed_T, the map which associates the square of the lengths of the edges of a triangulation of an element of Cone(n) (Subsection 5.4.2 page 89).

It means that locally (recall that the maps Ed_P and Ed_T are defined only locally around P and m):

$$Ed_T \circ \mathcal{I}(n) \circ Ed_P^{-1} = id.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) & \xrightarrow{\mathcal{I}(n)} & \text{Cone}(n) \\ {\scriptstyle Ed_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ed_T} \\ \mathbb{R}^{6g-6+3n} & = & \mathbb{R}^{6g-6+3n} \end{array}$$

From this we deduce immediately that $\mathcal{I}(n)$ is continuous and locally injective. Moreover, the map $\mathcal{I}(n)$ is proper: this will be proved in the next paragraph.

Then $\mathcal{I}(n)$ is a covering map. But as $\mathcal{P}(n)$ and Cone(n) are connected and simply connected, it is a homeomorphism.

Let Mod(n) be the quotient of the group of the homeomorphisms of S minus n points by its subgroup of isotopies.

Then the homeomorphism $\mathcal{I}(n)$ gives a bijection between $\mathcal{P}(n)/\text{Mod}(n)$ and $\text{Cone}(n)/\text{Mod}(n)$, and this is exactly the statement of Theorem 6.1.

Properness of $\mathcal{I}(n)$. We will use the following characterisation of a proper map: $\mathcal{I}(n)$ is proper if, for each sequence $(P_k)_k$ in $\mathcal{P}(n)$ such that the sequence $(m_k)_k$ converges in Cone(n) (with $m_k := \mathcal{I}(n)(P_k)$), then $(P_k)_k$ converges in $\mathcal{P}(n)$ (maybe up to the extraction of a sub-sequence).

Suppose that $(m_k)_k$ converges to $m_\infty \in \text{Cone}(n)$. As each m_k is a hyperbolic metric with n conical singularities with positive singular curvature on S, the convergence implies:

i) a uniform bound on the distance between every pair of singular points of the surface for all k;

ii) a uniform bound on the values of the angles at the singular points for all k, strictly between 0 and 2π;

iii) a uniform bound on the lengths of the closed geodesics for all k;

iv) a uniform bound on the areas of the metrics for all k.

From this we deduce the following assertions (all supposed for a k sufficiently big, and recall that we call the height of a vertex its distance from $P_{\mathbb{H}^2}$):

If the height of one vertex of the polyhedra goes to infinity, the heights of all the vertices go to infinity.

Suppose there exists a vertex which height doesn't go to infinity, incident to a vertex which height goes to infinity. Then the length of the geodesic between them goes to infinity, that is impossible by *i*).

The heights of all the vertices can't go to infinity.

By *iv*), on each P_k there is a subset R, homeomorphic to a closed disc, bounding a fundamental domain for the action of $\rho_k(\Gamma)$ and which area is fixed for all k. We consider the projection D_k of R on the umbilic surface realising the minimum d_k of the distance between P_k and $P_{\mathbb{H}^2}$. By orthogonality of the projection, the area of D_k is less than the area of R. The projection of D_k on $P_{\mathbb{H}^2}$ is a closed set $\overline{D}_k$ bounding a fundamental domain for the action of $\rho_k(\Gamma)$ on $P_{\mathbb{H}^2}$. The area of $\overline{D}_k$ is the area of D_k times $(\cosh^2)^{-1}(d_k)$, then it is less than the area of R, which is constant, times $(\cosh^2)^{-1}(d_k)$ (recall that the induced metric on an umbilic surface at distance d from $P_{\mathbb{H}^2}$ is $\cosh^2(d)\text{can}_{\mathbb{H}^2}$, where $\text{can}_{\mathbb{H}^2}$ is the hyperbolic metric induced on $P_{\mathbb{H}^2}$).

If the heights of all the vertices goes to infinity, it implies that d_k goes to infinity, then the area of $\overline{D}_k$ goes to zero, and so the area of the fundamental domain for the action of $\rho_k(\Gamma)$ in $P_{\mathbb{H}^2}$ goes to zero. This is impossible by the Gauss–Bonnet Theorem: the area of a fundamental domain on $P_{\mathbb{H}^2}$ for the action of a $\rho_k(\Gamma)$ is constant for all k (equal to minus the Euler characteristic of S).

The lengths of the edges of the canonical polygons associated to the P_k and the distances between the marked points inside it don't diverge.

The distance between two vertices of the canonical polygon associated to P_k in $P_{\mathbb{H}^2}$ is less than the distance on P_k between the points which are projected onto these vertices (because by orthogonality of the projection the distance in $P_{\mathbb{H}^2}$ is smaller than the distance between the points of P_k in $\mathbb{H}^3$, which is itself smaller than the induced distance on P_k), and this distance is bounded by i), so it converges (maybe after extracting a sub-sequence). The same argument shows that the distance between two marked points inside the canonical polygon converges.

The distance between two marked points inside a canonical polygon can't go to 0.

If it occurs, it implies that the two vertices s_k and s'_k of P_k go to two points on the geodesic joining s_k and $p_{\mathbb{H}^2}(s_k)$ (because we have seen that the heights of the vertices are bounded). These limit points are distinct, because the distance between two singular points is bounded. Then one is lower than the other, say s_k for example. As there is an infinite number of vertices on each polyhedron accumulating on the entire boundary at infinity of $P_{\mathbb{H}^2}$, there exists at least three vertices lower than s_k and such that their projection on $P_{\mathbb{H}^2}$ forms a triangle containing the projection of s_k: s_k is contained in the interior of the convex hull of these vertices. Then there exists a k' such that for each $k > k'$, s_k is in the convex hull of the others vertices: P_k would be not convex, that is false.

No length of the edges of the canonical polygon goes to 0.

It is as above: if it occurs, there are two vertices of the canonical polygon which collapse. The corresponding points on the polyhedra can't collapse, because the geodesic (on the polyhedron) between them corresponds to a closed geodesic for the induced metric on S and the lengths of closed geodesics are bounded by iii). Then these two points go to two points on the same horizontal geodesic, and again it is in contradiction with the convexity of the polyhedra.

These assertions prove that the sequence of canonical polygons associated to the P_k converges to a compact polygon of $P_{\mathbb{H}^2}$, with exactly $4g$ edges and n marked points. As the definition of a canonical polygon shows that the limit of a converging sequence of canonical polygons is a canonical polygon, then $\mathcal{S}(P_k)$ converges in $T_g(n)$. We denote by $[h]$ its limit.

For k sufficiently big, we can consider that all the $\mathcal{S}(P_k)$ are in a neighbourhood of $[h]$ sufficiently small to trivialise the fibration $\mathcal{P}(n)$. That means that we can write the P_k as couples $([h]_k, H_k)$, where H_k is the heights of the vertices of P_k, and we have already seen that these heights converge.

Then $(P_k)_k$ converges to a Fuchsian polyhedron. It remains to check that it is convex with n vertices: by convexity of the P_k, no vertex converges to a point inside the convex hull of the other vertices, and no one converges to a point on the boundary of the convex hull of the other vertices, because the angles at the singularities of m_∞ are all less than 2π by ii).

Chapter 7

Metrics with negative singular curvature in genus > 1

7.1 Fuchsian polyhedra in Lorentzian space-forms

7.1.1 Definitions and statements

The aim of this section is to prove the analog to the theorem proved in the preceding chapter for negative singular curvature:

Theorem 7.1. *Let S be a compact surface of genus > 1.*

1) A spherical metric with conical singularities of negative singular curvature on S such that the lengths of its closed contractible geodesics are strictly greater than 2π is realised by a unique convex Fuchsian polyhedron in the de Sitter space.

2) A flat metric with conical singularities of negative singular curvature on S is realised by a unique convex Fuchsian polyhedron in the Minkowski space.

3) A hyperbolic metric with conical singularities of negative singular curvature on S is realised by a unique convex Fuchsian polyhedron in the anti-de Sitter space.

We have already looked at the condition on the lengths of the closed contractible geodesics in the de Sitter case (see page 85).

A *Fuchsian group of M_K^-* is a group of orientation-preserving and time orientation-preserving isometries fixing a point c_K and acting cocompactly (without fixed points) on the umbilical hyperbolic surface O_K lying in the future cone of c_K (see Section 3.4 page 38 for the existence of such a surface). Note that such a group also leaves invariant and acts cocompactly on all the surfaces in the future cone of c_K which are at constant distance from c_K.

A *Fuchsian polyhedron* of M_K^- is a space-like polyhedral surface invariant under the action of a Fuchsian group of M_K^- and contained in the future cone of c_K.

The analog of Theorem 7.1 for smooth metrics is proved in [LS00]. The part *1)* of Theorem 7.1 was already done in [Scha, thm 4.22]. The other parts are new from what I know.

Actually the general outline of the proof is very classical, starting from Alexandrov's work, and it is very close to the one used for the hyperbolic case. Roughly speaking, the idea is to endow with suitable topology both the space of Fuchsian polyhedra of M_K^- and the space of corresponding metrics, and to show that the map from one to the other given by the induced metric is a homeomorphism.

The difficult steps are (always) to show local injectivity and properness of the maps "induced metric". The local injectivity is equivalent to statements about infinitesimal rigidity of convex Fuchsian polyhedra. The section 7.1.2 is devoted to these results. Actually, due to the so-called infinitesimal Pogorelov maps, it suffices to prove the infinitesimal rigidity in the de Sitter space (and this proof uses an infinitesimal Pogorelov map itself).

Examples of convex Fuchsian polyhedra. Consider a space-like surface M at constant distance of a point c_K of M_K^-. Obviously M is globally invariant under the action of isometries fixing c_K. Moreover, M has the properties of being strictly convex and umbilical.

Take n points $(x_1, \ldots, x_n)$ on M, and let a Fuchsian group F act on these points. We denote by E the boundary of the convex hull of the set of points fx_i, for all $f \in F$ and $i = 1 \ldots n$. By construction, the convex polyhedral surface E is globally invariant under the action F: it is a convex Fuchsian polyhedron.

Immediate corollaries of Theorem 7.1.

Global rigidity of Fuchsian polyhedron. A direct consequence of the uniqueness of the convex Fuchsian polyhedron realising the induced metric is

Theorem 7.2. *Convex Fuchsian polyhedra in Lorentzian space-forms are globally rigid among convex Fuchsian polyhedra.*

Dual statement of de Sitter case. The dual of a (space-like) convex polyhedral surface in hyperbolic space (resp. in de Sitter space) is a (space-like) convex polyhedral surface in de Sitter space (resp. in hyperbolic space) (see section 3.8.1 page 52), and

Lemma 7.3. *The dual of a convex Fuchsian polyhedron is a convex Fuchsian polyhedron.*

Proof. A Fuchsian polyhedron in the hyperbolic space is invariant under the action of a group F of isometries which leaves invariant a totally geodesic surface. In the Minkowski space of dimension 4, this totally geodesic surface is given by the intersection of the hyperbolic space with a time-like hyperplane V. The group F is given by isometries of Minkowski space leaving invariant this plane. These isometries also fix the unit space-like normal vector v to this hyperplane (which corresponds to a point of the de Sitter space), and they also fix the de Sitter space. Moreover these isometries act cocompactly on all the hyperplanes at constant distance from V, in particular the one who gives the umbilical hyperbolic surface. It follows that the restrictions of these isometries to the de Sitter space are Fuchsian isometries. The converse holds in the same manner.

We already know that the dual of a (space-like) convex polyhedral surface is a (space-like) convex polyhedral surface. From above, we know that the dual of an invariant (convex) polyhedral surface is an invariant (convex) polyhedral surface. □

Moreover, we saw that the dual metric of a polyhedral surface in hyperbolic space is isometric to the metric induced on its dual, see Lemma 3.48 page 55.

For these reasons, part one of Theorem 7.1 can be reformulated as a purely hyperbolic statement:

Theorem 7.4. *Let S be a compact surface of genus > 1 with a spherical metric h with conical singularities of negative singular curvature such that its closed contractible geodesics have lengths strictly greater than 2π.*

There exists a unique convex Fuchsian polyhedral embedding of S in the hyperbolic space such that its dual metric is isometric to h.

Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary. Take a convex Fuchsian polyhedron P and consider the Fuchsian polyhedron P' obtained by a symmetry relative to the plane $P_{\mathbb{H}^2}$. Next cut the hyperbolic space along P and P', and keep the component bounded by P and P'. The quotient of this manifold by $\rho(\Gamma)$ is a kind of hyperbolic manifold called *Fuchsian manifold* (with convex polyhedral boundary): they are compact hyperbolic manifolds with convex boundary with an isometric involution fixing an hyperbolic surface (the symmetry relative to $P_{\mathbb{H}^2}/\rho(\Gamma)$). All the Fuchsian manifolds can be obtained in this way: the lifting to the universal covers of the canonical embedding of a component of the boundary in the Fuchsian manifold gives a Fuchsian polyhedral embedding in the hyperbolic space.

Theorem 7.4 says exactly that for a choice of the dual metric g of the boundary, there exists a unique metric on the Fuchsian manifolds such that the dual metric of the induced metric of the boundary is isometric to g:

Theorem 7.5. *The metric on a Fuchsian manifold with convex polyhedral boundary is determined by the dual metric of its boundary.*

This is a part of

Conjecture 7.6. *Let g a hyperbolic metric on a compact manifold M of dimension 3 with boundary ∂M, such that the induced metric on ∂M is a convex polyhedral metric. Then the dual metric of the induced metric on ∂M is a spherical metric with conical singularities with negative singular curvature such that the lengths of its closed contractible geodesics are $> 2\pi$. Each such dual metric on ∂M is induced on ∂M for a unique choice of g.*

The statement of Conjecture 7.6 in the case where the boundary is smooth and strictly convex has been proved in [Sch06].

It is also possible to do analogous statements for "anti-de Sitter manifolds with convex boundary", related to so-called *maximal globally hyperbolic anti-de Sitter manifolds*, see [Sch03].

7.1.2 Fuchsian infinitesimal rigidity

Description of Fuchsian polyhedra. As a Fuchsian group acts cocompactly on a surface at constant distance from c_K, the distance from c_K to a Fuchsian polyhedron P is bounded, and P is contained between two surfaces realising the minimum and the maximum of this distance. We denote them by S_{min} and S_{max} (without specifying in which M_K^-). They are umbilical surfaces in the future cone of c_K. For example, if c_0 is the origin of the Minkowski space, a Fuchsian polyhedron is contained between the upper-branches of two hyperboloids.

As O_K is at constant distance from c_K, the time-like geodesics from c_K are orthogonal to O_K, then they define an orthogonal projection onto O_K that will be denoted by p_K.

Definitions. The definitions about Fuchsian embeddings in Lorentzian spaces and their correspondence with definitions of Fuchsian polyhedra are exactly the same as for the hyperbolic case, after replacing "totally geodesic surface" by "umbilical hyperbolic surface", see page 94.

We denote by ϕ_K a convex Fuchsian polyhedral embedding of a compact surface S of genus > 1 in M_K^-, and ρ_K its associated representation.

The definition of Fuchsian deformation in M_K^- is the same than in hyperbolic space, see page 95. It is a vector field on a convex Fuchsian polyhedron P invariant under the action of $\rho(\Gamma)$ and satisfying:

$$Z(\rho(\gamma)y) = d\rho(\gamma).(\vec{\rho}(\gamma) + Z)(y), \tag{7.1}$$

where $\vec{\rho}(\gamma)$ is a Fuchsian Killing field, that is a Killing field of the hyperbolic surface O_K extended to M_K^- along geodesics orthogonal to O_K. More precisely, for a point $x \in M_K^-$, let d be the distance between x and $p_K(x)$, where p_K is the orthogonal projection onto O_K. We denote by p_d the restriction of the projection p_K to the umbilical surface which is at constant distance d from O_K (passing through x - this surface is at constant distance from c_K). The Killing field $\vec{\rho}(\gamma)$ at x is extended as $d_{p_d(x)}p_d^{-1}(\vec{\rho}(\gamma))$.

A Fuchsian polyhedron is *Fuchsian infinitesimally rigid* if all its Fuchsian deformations are trivial (i.e. are restriction to the polyhedral surface of a Killing field of M_K^-).

We want to prove

Theorem 7.7. *i) Convex Fuchsian polyhedra in de Sitter space are Fuchsian infinitesimally rigid;*

ii) Convex Fuchsian polyhedra in Minkowski space are Fuchsian infinitesimally rigid;

iii) Convex Fuchsian polyhedra in anti-de Sitter space are Fuchsian infinitesimally rigid.

We will first prove the part *i)* in a way close to the one used in the hyperbolic case.

In the Klein projective model of the de Sitter space, an umbilical surface (in the future cone of c_1) is sent to a half-ellipsoid contained in the upper half-space, which boundary is the unit circle in the horizontal plane, Lemma 3.26 page 45. In this model, a convex Fuchsian polyhedron lies between two

such hyperboloids, and in particular its closure is the same as the closure of the half-ellipsoids. Such closure is called the *boundary at infinity* of the surface, and in this case it is the horizontal unit circle. Moreover

Lemma 7.8. *The maps p_K are homeomorphisms between each convex Fuchsian polyhedron and O_K.*

Proof. We will prove it in the de Sitter case, the others cases follow immediately using the projective maps, see Subsection 3.5.2 page 45.

First, the orthogonal projection of P onto the horizontal plane is injective, as the convex hull of P is the union of P and the closed unit disc of the horizontal plane. It follows that this horizontal projection is a homeomorphism.

Moreover, as O_1 is a polyhedral convex cap, its orthogonal projection onto the horizontal plane is a homeomorphisms. And it suffices to compose these projections to get p_1. □

It implies that in the Klein projective model, a convex Fuchsian polyhedron looks like a polyhedral convex cap (with infinite number of vertices accumulating on the boundary).

It remains to check that the vertical component of the image of Z by the infinitesimal Pogorelov map (see Subsubsection 4.2.1.2) vanishes at the boundary, and the conclusion will be given by Proposition 2.19 page 29.

After that, we use infinitesimal Pogorelov maps from de Sitter space to Minkowski space to have the part *ii*), and from anti-de Sitter space to Minkowski space to have the part *iii*) (the key point will be that these infinitesimal Pogorelov maps send Fuchsian deformations to Fuchsian deformations).

Remarks about the method employed. Theorem 7.7 is not new, because the case of the Minkowski space was done in [Sch04b, Thm 6.2] (see [Isk00, Thm B] for a partial result) — using a completely different method than the one used here, and the other cases can be easily deduced using the infinitesimal Pogorelov maps (as it has been used for the de Sitter case in [Scha, Rou04], and as we will do, starting from the de Sitter case instead of the Minkowski one).

They could also be treated as a direct consequence of the Fuchsian infinitesimal rigidity in the hyperbolic space proved in the preceding chapter, using the infinitesimal Pogorelov map from the hyperbolic space to the Minkowski space.

In a counter point of view, the Fuchsian infinitesimal rigidity in the hyperbolic space itself can be seen as a consequence of the Fuchsian infinitesimal rigidity in the Minkowski space.

It is not excluded that it is possible to have a direct proof for the infinitesimal rigidity, without using any infinitesimal Pogorelov map.

It may be possible to use the method presented here and in the hyperbolic case to give a more direct proof of the infinitesimal rigidity in the anti-de Sitter case, this is explained at the end of this section.

I don't know if there is a possible adaption of the method used here for the Minkowski case to get a more direct proof than the one in [Sch04b].

Also note that the present proof of Theorem 7.7 is also true without any change for strictly convex smooth Fuchsian surfaces, using a smooth analog of Proposition 2.19.

Proof of part *i*) of Theorem 7.7. Let P be a convex Fuchsian polyhedron of the de Sitter space.

The derivative at a point $x \in P$ of the geodesic from c_1 and orthogonal to O_1 is called the *vertical direction* at x, and the directions orthogonal to this one are *horizontal directions*. So Z can be decomposed into a vertical component Z_v and into a horizontal component Z_h. We denote by $(Z_r)_h$ the horizontal component of the radial component of Z, etc. We have

$$Z_r = (Z_r)_h + (Z_r)_v, Z_r = (Z_h)_r + (Z_v)_r.$$

The first one is obvious and the second one comes from the linearity of the projectors.

Exactly as in the hyperbolic case (see the begining of the proof of Theorem 6.10 page 97):

Lemme 7.9. *The vector field Z_v is* invariant *under the action of Γ, i.e. $\forall x \in P$:*

$$Z_v(\rho(\gamma)x) = d\rho(\gamma)Z_v(x).$$

There exists a constant c_v such that, for all $x \in \phi(\tilde{S})$,

$$\|Z_v(x)\| \leqslant c_v. \tag{7.2}$$

Moreover the vector field Z_h is equivariant under the action of Γ.

Recall that p_d is the restriction of the orthogonal projection onto O_1 to the umbilical surface which is at constant distance d from O_1.

In the Klein projective model, we denote by x_o the intersection of O_1 with the geodesic passing through the origin of the Klein projective model and c_1 (see Figure 7.1). The radial direction of O_1 at a point $y \in O_1$, denoted by $rad(y)$, is the tangent vector at y of the geodesic of O_1 joining x_o and y.

For a point x on a Fuchsian polyhedron, at distance d from O_1, we call *radial-horizontal* the component of Z (at x) in the direction $dp_d^{-1}(rad(p_1(x)))$. This component is denoted by Z_{rh}, and it is a horizontal vector.

We denote by W the projection onto O_1 of the horizontal component of Z (it is equivariant under the action of $\rho(\Gamma)$). We denote by W_r its radial component. Then $dp_d^{-1}(W_r) =: (Z_h)_{rh}$ is the radial-horizontal component of the horizontal component of Z.

Recall from the preceding Chapter

Proposition 7.10 (Proposition 6.14 page 98)**.** *Let H be a vector field of $\mathbb{H}^2$ equivariant under the action of a Fuchsian group. There exists a constant $c_{\dot{g}}$ such that*

$$\|H_r(x)\|_{\mathbb{H}^2} \leq c_{\dot{g}} d_{\mathbb{H}^2}(p, x),$$

where p is any fixed point of the hyperbolic plane.

We apply this result to the vector field W on O_1 with $p = x_o$. As the hyperbolic metric is the metric induced by the de Sitter one on O_1, we get $\|W_r\|_{\mathbb{H}^2} = \|W_r\|_{\mathrm{dS}^3}$, and from Lemma 3.10 page 39:

$$\|(Z_h)_{rh}(x)\|_{\mathrm{dS}^3} = \sinh(r)\, \|W_r(p_{\mathrm{dS}^2}(x))\|_{\mathrm{dS}^3}\,,$$

where r is the length of the geodesic joining x and c_1 in dS^3, and r is bounded. It follows that there exists a constant c_{rh} such that:

$$\|(Z_h)_{rh}(x)\|_{\mathrm{dS}^3} \leq c_{rh}\mu, \tag{7.3}$$

where $\mu = d_{\mathbb{H}^2}(x_o, p_1(x))$.

The *vertical plane* is the vector space of $T_x\mathrm{dS}^3$ spanned by the orthogonal vectors Z_v and Z_{rh} (Z_{rh} is in the horizontal plane by definition, then orthogonal to the vertical direction).

We can see the vertical plane as the tangent plane (at x) to the totally geodesic plane passing through c_1 and x (and orthogonal to O_1).

We denote by Z_{lv} the projection onto the vertical plane of the lateral component of Z.

The vector Z_r belongs to the vertical plane, because it can be decomposed in a horizontal component, which is in the radial-horizontal direction, and a vertical component.

The lateral component is orthogonal to the radial component, thus the vector Z_{lv} is orthogonal to Z_r in the vertical plane.

Lemme 7.11. *Let V be the projection of a component of Z onto the vertical plane. There exists a constant c such that*

$$\|V\|_{\mathrm{dS}^3} \leq c(1 + \mu).$$

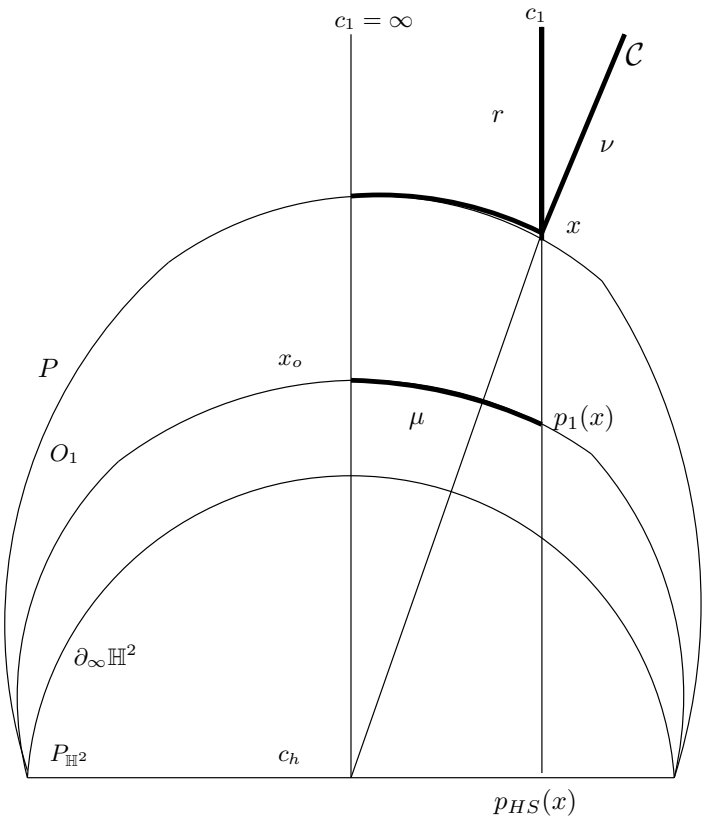


Figure 7.1: Notations in the Klein projective model of the de Sitter space

Proof. We denote by Π_V the projection onto the vertical plane, considered as spanned by the orthogonal vectors Z_{rh} and Z_v. We can write $\Pi_V(Z) = Z_{rh} + Z_v$. As V is already in the vertical plane, and as we project a component of Z, we can write:

$$\begin{aligned} \|V\|_{\mathrm{dS}^3} = \|\Pi_V(V)\|_{\mathrm{dS}^3} &\leqslant \|\Pi_V(Z)\|_{\mathrm{dS}^3} \\ &\leqslant \|Z_{rh}\|_{\mathrm{dS}^3} + \|Z_v\|_{\mathrm{dS}^3} \\ &\leqslant \|(Z_h)_{rh}\|_{\mathbb{H}^3} + \|(Z_v)_{rh}\|_{\mathrm{dS}^3} + \|Z_v\|_{\mathrm{dS}^3} \\ &\leqslant \|(Z_h)_{rh}\|_{\mathrm{dS}^3} + 2\,\|Z_v\|_{\mathrm{dS}^3}\,, \end{aligned}$$

and as the overestimation of these two last norms are known (by Formulas (7.2) and (7.3)) we get

$$\|V\|_{\mathrm{dS}^3} \leqslant c_{rh}\mu + 2c_v,$$

that is, if c is greater than c_{rh} and $2c_v$,

$$\|V\|_{\mathrm{dS}^3} \leqslant c(1+\mu).$$

□

We denote $u := \Phi'_{\mathrm{dS}-E}(Z)$, where $\Phi'_{\mathrm{dS}-E}$ is the de Sitter-Euclidean infinitesimal Pogorelov map (Subsubsection 4.2.1.2), and we denote by α the angle between u_v and u_{lv} (the definitions of the decompositions of u are the same as for Z, in particular, u_r and u_{lv} form an orthogonal basis of the vertical plane).

We denote by ν the distance between the point and $\mathcal{C}$ in the de Sitter space ($\mathcal{C}$ is the intersection of dS^3 with the hyperplane $\{x_1 = 0\}$ in the Minkowski space of dimension 4). From the properties of the

infinitesimal Pogorelov map (see Lemma 4.21 page 71) and Lemma 7.11 (Z_{lv} and Z_r lie on the vertical plane):

$$\begin{aligned} u_v &= \cos(\alpha)u_{lv} + \sin(\alpha)u_r, \\ \|u_v\|_{\mathbb{R}^3} &\leqslant \|u_{lv}\|_{\mathbb{R}^3} + \sin(\alpha)\,\|u_r\|_{\mathbb{R}^3} \\ &\leqslant \sinh(\nu)^{-1}\,\|Z_{lv}\|_{\mathrm{dS}^3} + \sin(\alpha)\,\|Z_r\|_{\mathrm{dS}^3} \\ &\leqslant \sinh(\nu)^{-1}c(1+\mu) + \sin(\alpha)c(1+\mu), \end{aligned}$$

and at the end we get

$$\|u_v\|_{\mathbb{R}^3} \leqslant c(1+\mu)(\sinh(\nu)^{-1} + \sin(\alpha)). \tag{7.4}$$

We denote by $P_{\mathbb{H}^2}$ the hyperbolic surface obtained by the intersection of the hyperbolic space and the hyperplane $\{x_1 = 0\}$ in the Minkowski space of dimension 4. It corresponds to the horizontal disc in the Klein projective model. The point $c_h \in P_{\mathbb{H}^2}$ has coordinates $(0,0,0,1)$ in Minkowski space, and corresponds to the origin in the Klein projective model. The orthogonal projection in the projective space gives an isometry between O_1 and $P_{\mathbb{H}^2}$. We denote by p_{HS} this projection.

Let δ' be a positive real number such that the half-ellipsoid $(1,1,\delta')$ is contained in the upper-part of the unit ball of the Euclidean space. We denote by $S_{\delta'}$ this surface seen in the hyperbolic space (Klein projective model), and obviously:

$$\mu := d_{O_1}(x_o, p_1(x)) = d_{P_{\mathbb{H}^2}}(c_h, p_{HS}(x)) \leq d_{\mathbb{H}^3}(c_h, y)$$

where y is a point of $S_{\delta'}$, preimage of $p_{HS}(x)$ by the orthogonal projection of $S_{\delta'}$ onto $P_{\mathbb{H}^2}$. Going on from (7.4):

$$\begin{aligned} \|u_v\|_{\mathbb{R}^3} &\leqslant c(1+\mu)(\sinh(\nu)^{-1} + \sin(\alpha)) \\ &\leqslant c(1 + d_{\mathbb{H}^3}(c_h, y))(\sinh(\nu)^{-1} + \sin(\alpha)). \end{aligned}$$

A straightforward adaptation of Lemma 6.17 page 101 gives:

$$d_{\mathbb{H}^3}(c_h, y) \underset{\delta' \to 0}{\approx} -c_{\delta'} \ln(\delta'), \tag{7.5}$$

where $c_{\delta'}$ is a positive constant.

We denote by δ the Euclidean distance between the point of the Fuchsian polyhedron P and $P_{\mathbb{H}^2}$. Obviously, $\delta \mapsto 0$ if and only if $\delta' \mapsto 0$. Near the infinite boundary, using an easy equivalence between the sine and δ, together with Formula (7.5):

$$c(1 + d_{\mathbb{H}^3}(c_h, y))(\sinh(\nu)^{-1} + \sin(\alpha)) \underset{\delta \to 0}{\approx} \overline{c}(1 - \ln(\delta'))(\sinh(\nu)^{-1} + \delta),$$

Remember that S_{min} is the umbilical surface realising the minimum of the distance between P and c_1. We denote by x_{min} the intersection of S_{min} with the geodesic joining x and $\mathcal{C}$, and we denote by ν_{min} the distance in dS^3 between x_{min} and $\mathcal{C}$ and δ_{min} the distance in $\mathbb{R}^3$ between x_{min} and $P_{\mathbb{H}^2}$ (guess the definition of δ_{max}). We have

$$\begin{aligned} &\nu_{min} \leq \nu \\ &\delta' \leq \delta_{max} \leq \delta \leq \delta_{min}. \end{aligned}$$

Lemme 7.12. *When x_{min} goes near the boundary, we have the approximation*

$$\nu_{min} \underset{\delta_{min} \to 0}{\approx} -c_{min} \ln(\delta_{min}),$$

where c_{min} is a positive constant.

Proof. First recall that a sphere at distance d of $\mathcal{C}$ in dS^3_+ is sent by the projective map to a sphere of radius $\coth(d)$ in $\mathbb{R}^3$ (Lemma 3.24 page 44). It follows that $\nu_{min} = \coth^{-1}(\|x_{min}\|_{\mathbb{R}^3})$, that means

$$\nu_{min} = \ln \frac{\|x_{min}\|_{\mathbb{R}^3} + 1}{\|x_{min}\|_{\mathbb{R}^3} - 1} \underset{\|x_{min}\|_{\mathbb{R}^3} \to 1}{\approx} -\ln(\|x_{min}\|_{\mathbb{R}^3} - 1).$$

As the image of S_{min} in $\mathbb{R}^3$ is a half-ellipsoid, δ_{min} verifies the equation

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\delta_{min}^2}{r^2} = 1,$$

where r is a positive constant, strictly greater than 1. Adding and removing a δ_{min}^2, and reordering the terms, we get

$$\|x_{min}\|_{\mathbb{R}^3} - 1 = \delta^2 \frac{r^2 - 1}{r^2},$$

because $\delta_{min}^2 = x_3^2$, and this gives the announced result. □

We have

$$\overline{c}(1 - \ln(\delta'))(\sinh^{-1}(\nu) + \delta) \leq \overline{c}(1 - \ln(\delta'))(\sinh^{-1}(\nu_{min}) + \delta)$$

and, using the equivalence between the exponential and the hyperbolic sine,

$$\overline{c}(1 - \ln(\delta'))(\sinh^{-1}(\nu_{min}) + \delta) \underset{\delta \to 0}{\approx} \overline{c}(1 - \ln(\delta'))(\delta_{min} + \delta),$$

and as

$$\overline{c}(1 - \ln(\delta'))(\delta_{min} + \delta) \leq \overline{c}(1 - \ln(\delta_{max}))(\delta_{min} + \delta_{min}),$$

and as this last term goes to 0 when δ (and then δ_{min} and δ_{max}) goes to 0, it follows that $\|u_v\|_{\mathbb{R}^3}$ goes to zero when the point goes near the infinite boundary.

It was that we had to check to prove part *i*) of Theorem 7.7.

Proof of part *ii*) and *iii*) of Theorem 7.7. Recall that we have defined projective maps from de Sitter and anti-de Sitter spaces to Minkowski space, which send respectively c_1 to c_0 and c_{-1} to c_0, see Section 3.5 page 43.

Lemma 7.13. *A convex polyhedral surface contained in the future-cone of c_0 in the Minkowski space and invariant under the action of a Fuchsian group is a convex Fuchsian polyhedron, i.e. it is space-like.*

Proof. Suppose that the polyhedral surface is not space-like. It has a time-like (or light-like) face. But such a face is contained in a plane which must intersect the space-like umbilical surfaces realising the minimum and the maximum of the distance from c_K (because as these hyperboloids are asymptotic to the light-cone of c_K, they must meet the light-cone of any point lying between them, see Figure 7.2). Moreover by convexity the polyhedral surface is contained in one of the half-space delimited by this time-like (or light-like) plane.

But this is impossible by the property of invariance of the polyhedral surface: As the Fuchsian group acts cocompactly on $\mathbb{H}^2$, there always exists a point in the orbit of this group such that the line from the origin of the Minkowski space passing through it is as close as we want (for the Euclidean topology) of any line of the light cone. As the vertices of the Fuchsian polyhedron are lying on such lines, it follows that any point of a time-like or light-like face would be sent by the action of the Fuchsian group to both sides of the face, that is a contradiction.

□

Lemme 7.14. *The projective maps from de Sitter and anti-de Sitter spaces to Minkowski space send convex Fuchsian polyhedra to convex Fuchsian polyhedra.*

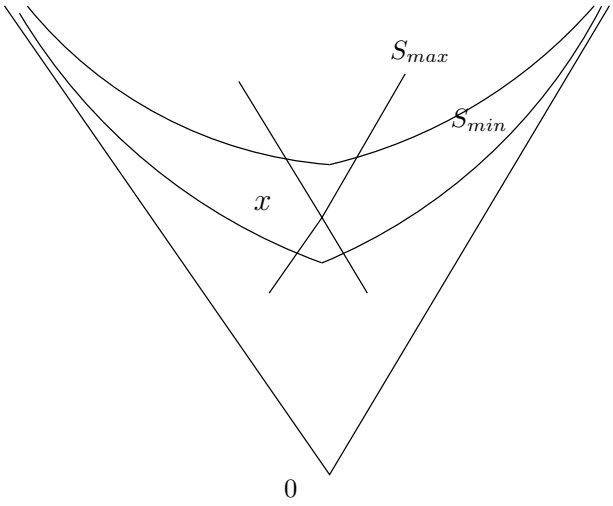


Figure 7.2:

Proof. We already know that these projective maps send convex polyhedral surfaces contained in the future-cone of c_1 (or c_{-1}) to convex polyhedral surfaces contained in the future-cone of c_0. We will see that they also act on the representations of Γ. This, together with Lemma 7.13, will prove the statement.

We denote by $Isom_{c_1}\mathrm{dS}^3$ the group of orientation-preserving and time orientation-preserving isometries of dS^3 which fix the point c_1. We claim that: The projective map $\varphi_{\mathrm{dS}-M} : \mathrm{dS}^3 \to \mathbb{R}^3_1$ induces an isomorphism $G : Isom_{c_1}(\mathrm{dS}^3) \to Isom_{c_0}(\mathbb{R}^3_1)$ which commutes with the projective map, that is, if $f \in Isom_{c_1}(\mathrm{dS}^3)$, then

$$\varphi_{\mathrm{dS}-M}(f(x)) = G(f)(\varphi_{\mathrm{dS}-M}(x)).$$

The projective map $\varphi_{A\mathrm{dS}-M} : A\mathrm{dS}^3 \to \mathbb{R}^3_1$ has the same property.

Now we prove the claim.

For the de Sitter–Minkowski case, by definition of the projective map, the Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$ is seen as the intersection of $\mathbb{R}^4_1$ with the hyperplane $\{x_1 = 1\}$. It allows us to extend the isometries of the Minkowski space of dimension 3: an isometry of $\mathbb{R}^3_1$ sending x to y can be prolonged to an isometry of $\mathbb{R}^4_1$ which sends the point (t, tx) to the point (t, ty). Furthermore, these isometries of $\mathbb{R}^4_1$ preserve the de Sitter space: there restrictions to the hyperboloid are isometries of the de Sitter space. It follows that the isometries of $\mathbb{R}^3_1$ which fix the origin correspond to isometries of de Sitter space which fix the point c_1.

It is the same thing in the anti-de Sitter case, isometries which send x to y are prolonged to isometries sending (tx, t) to (ty, t).

The properties of commutations are then obvious. And by construction, a cocompact group is sent to a cocompact group. □

To prove the rest of Theorem 7.7, it suffices to show that:

Lemme 7.15. *The de Sitter-Minkowski and anti-de Sitter-Minkowski infinitesimal Pogorelov maps send Fuchsian deformations to Fuchsian deformations.*

Proof. A Fuchsian deformation Z verifies

$$Z(\phi(\gamma x)) = d\rho(\gamma)(\vec{\rho}(\gamma) + Z)(\phi(x)),$$

and, on one hand the infinitesimal Pogorelov maps sends Killing fields to Killing fields, and on the other hand, considering the radial component or applying the projection onto the lateral component are linear operations. These arguments and Lemma 7.14 suffice to prove this lemma, but here are the details. We do them for the de Sitter case, it is word by word the same for the anti-de Sitter space.

We denote by R the radial direction of the de Sitter space, and r the radial direction of the Minkowski space of dimension 3, ϕ the Fuchsian embedding of the compact surface S in dS^3, ρ its associated representation and φ the projective map from dS^3 to $\mathbb{R}^3_1$.

The proof of Lemma 7.14 gives the existence of a morphism G between $Isom_{c_1}(\mathrm{dS}^3)$ and $Isom_{c_0}(\mathbb{R}^3_1)$ such that

$$\varphi(\rho(\gamma)\phi(x)) = G(\rho(\gamma))(\varphi(\phi(x))).$$

If Φ' is the infinitesimal Pogorelov map from de Sitter to Minkowski, then:

$$\begin{aligned}
\Phi'(Z)(\varphi\circ\phi(\gamma x)) &= d\varphi(Z_l)(\phi(\gamma x)) + \|Z_r(\phi(\gamma x))\|\, R(\varphi(\phi(\gamma x)))\\
&= d\varphi(d\rho(\gamma)(\vec{\rho}_l(\gamma)+Z_l))(\phi(x))\\
&\quad + \|d\rho(\gamma)(\vec{\rho}_r(\gamma)+Z_r)(\phi(x))\|\, R(\varphi(\rho(\gamma)\phi(x)))\\
&= d(G(\rho(\gamma)))d\varphi(\vec{\rho}_l(\gamma)+Z_l)(\varphi\circ\phi(x))\\
&\quad + \|(\vec{\rho}_r(\gamma)+Z_r)(\phi(x))\|\, R(\varphi(\rho(\gamma)\phi(x)))\\
&= d(G(\rho(\gamma)))d\varphi(\vec{\rho}_l(\gamma)+Z_l)(\varphi\circ\phi(x))\\
&\quad + \|(\|\vec{\rho}_r(\gamma)\|\, r + \|Z_r\|\, r)(\phi(x))\|\, R(G(\rho(\gamma))(\varphi\circ\phi(x)))\\
&= d(G(\rho(\gamma)))d\varphi(\vec{\rho}_l(\gamma)+Z_l)(\varphi\circ\phi(x))\\
&\quad + \|\vec{\rho}_r(\gamma)\|\, R(G(\rho(\gamma))(\varphi\circ\phi(x)))\\
&\quad + \|Z_r\|\, R(G(\rho(\gamma))(\varphi\circ\phi(x)))\\
&= d(G(\rho(\gamma)))d\varphi(\vec{\rho}_l(\gamma)+Z_l)(\varphi\circ\phi(x))\\
&\quad + d(G(\rho(\gamma)))(\|\vec{\rho}_r(\gamma)\|\, R(\varphi\circ\phi(x)) + \|Z_r\|\, R(\varphi\circ\phi(x)))\\
&= d(G(\rho(\gamma)))(d\varphi(\vec{\rho}_l(\gamma)) + \|\vec{\rho}_r(\gamma)\|\, R + d\varphi(Z_l) + \|Z_r\|\, R)(\varphi\circ\phi(x))\\
&= d(G(\rho(\gamma)))(\Phi'(\vec{\rho}(\gamma)) + \Phi'(Z))(\varphi\circ\phi(x)).
\end{aligned}$$

Note that we used the fact that the isometries fix the point from which the radial direction is defined to write:

$$R(G(\rho(\gamma))(\varphi\circ\phi(x))) = d(G(\rho(\gamma)))R(\varphi\circ\phi(x)). \tag{7.6}$$

This proves that a Fuchsian deformation in dS^3 or $A\mathrm{dS}^3$ is sent to a Fuchsian deformation of the Minkowski space.

Proving that a Fuchsian deformation of the Minkowski space is sent to a Fuchsian deformation of dS^3 or $A\mathrm{dS}^3$ is exactly the same, as the inverse of the Pogorelov map sends the lateral component to its image by the inverse of the projective map and it sends the radial component to a radial vector having the same norm. □

We must take care that the projective map from de Sitter space doesn't reach all the Fuchsian surfaces in the Minkowski space, because the projective map sends surfaces to the part of the Minkowski space bounded by the light-cone and the upper branch of the hyperboloid. But we can obtain all the Fuchsian surfaces inside the light cone by simple homotheties.

Another possible proof of part *ii*) **of Theorem 7.7.** For the anti-de Sitter space, there exists a projective model for which c_{-1} is sent to infinity, O_{-1} is sent to the horizontal disc, and umbilical surfaces at constant distance from c_{-1} are sent to half-ellipsoids with boundary the unit circle in the horizontal plane (Lemma 3.37 page 48). In this model, a convex Fuchsian polyhedron lies between two such hyperboloids. It can occur that one of these half-ellipsoids is contained in the lower-space and the other in the upper-space. But if the Fuchsian polyhedron is convex, it must stay in one of the two half-spaces delimited by the horizontal plane. Up to an isometry, we consider that it is the upper one (i.e. c_{-1} is in the concave side of the Fuchsian polyhedron). It follows that in this model, a convex Fuchsian polyhedron looks like a polyhedral convex cap (with infinite number of vertices accumulating on the boundary), see Figure 7.3.

Lemma 7.16. *A convex Fuchsian polyhedron in* $A\mathrm{dS}^3$ *lies between* c_{-1} *and* O_{-1}.

Proof. In the projective model described above, the Fuchsian polyhedron lies above the horizontal plane which contains O_{-1}, and below a half-ellipsoid, as c_{-1} is sent to infinity in this projective model and as the distance to c_{-1} can't be 0 (otherwise by convexity the induced metric on the polyhedral surface must be light-like, see the proof of Lemma 7.24 further). □

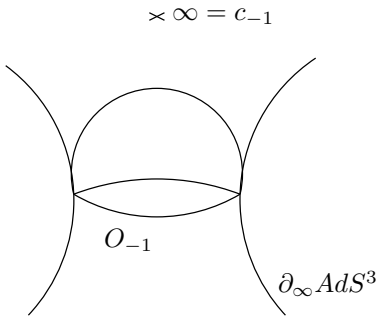


Figure 7.3: A projective model of the anti-de Sitter space.

It is possible to define an infinitesimal Pogorelov map from the projective map described above - actually, it is exactly as the infinitesimal Pogorelov that we have already computed, as x_3 and x_4 play symmetric roles (Subsubsection 4.2.2.3).

Moreover, the polyhedral convex caps in the Minkowski space have the same property of infinitesimal rigidity than in the Euclidean space (see Lemma 4.37 page 76).

It follows that it would be possible to prove the infinitesimal rigidity of convex Fuchsian polyhedra in the anti-de Sitter space by proving that the image of a Fuchsian deformation by this infinitesimal Pogorelov map has its vertical component going to 0 near the boundary.

7.1.3 Set of Fuchsian polyhedra

We denote by $\mathcal{P}_K(n)$ the set of convex Fuchsian polyhedral embeddings with n vertices of a compact surface S in M_K^-, modulo isotopies of S fixing the vertices of the cellulation and modulo the isometries of M_K^- - remember that we have defined the number of vertices of a Fuchsian polyhedron as the number of vertices in a fundamental domain.

Surjection on the Teichmüller space with marked points. Recall that to each element of the Teichmüller space T_g is associated a canonical hyperbolic polygon, see Z-V-C coordinates page 79.

The Teichmüller space of $F_{g,n}$ (i.e. of a compact surface of genus $g > 1$ with $n > 0$ marked points), denoted by $T_g(n)$, can be defined as the set of hyperbolic metrics on $F_{g,n}$ modulo isotopies h_t of $F_{g,n}$ such that h_t fixes the marked points for all t.

Let (ϕ_1, ρ_1) and (ϕ_2, ρ_2) be two equivalent convex Fuchsian polyhedral embeddings of $F_{g,n}$ (see page 101 for a recall of the definition of "equivalent"). It implies that ρ_1 and ρ_2 are the same element of $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, where Γ is the fundamental group of S.

In the hyperbolic surface O_K, the canonical polygons associated to these two representations are equal, and, up to an isometry, the projection of the vertices of the Fuchsian polyhedra on O_K gives the same n marked points inside this canonical polygon: we have described a map $\mathcal{S}_K$ which to each element of $\mathcal{P}_K(n)$ associates an element of $T_g(n)$.

And as we have seen that from any Fuchsian representation and any n points on the plane, we can build a convex Fuchsian polyhedron with n vertices (it is enough to take n points at the same distance from c_K): $\mathcal{S}_K$ is surjective.

To recall an element of $\mathcal{P}_K(n)$ from the data of its projection onto O_K, it remains to know the distance of the vertices from c_K. Such a distance is called the *height* of a vertex.

Manifold structure on $\mathcal{P}_K(n)$. In the Minkowski and anti-de Sitter spaces, if the vertices of a polyhedral surfaces are all in the future-cone of c_K, then the polyhedral surface is entirely contained in the future-cone of c_K. It is not true in the de Sitter space: for example in the Klein projective model, some faces can intersect the closed ball: they are time-like or light-like (in case of tangency), but the vertices stay in the future-cone of c_1.

Lemma 7.17. *Take $[h] \in T_g(n)$. For $K \in \{-1, 0\}$, $\mathcal{S}_K^{-1}([h])$ is diffeomorphic to the open unit ball of $\mathbb{R}^n$.*

Proof. We will prove that $\mathcal{S}_K^{-1}([h])$ is a contractible open subset of $(\mathbb{R}_+)^n$. We fix a fundamental domain for the action of $\rho_K(\Gamma)$ on O_K, with n marked points, which will be the projection of the vertices of the polyhedra along the geodesics from c_K (i.e. we fix $[h]$). We have to find the possible heights of the vertices for the resulting invariant polyhedral surface to be convex. Recall that we have built examples of convex Fuchsian polyhedra for any number of vertices: the spaces considered below are all non-empty.

In the anti-de Sitter space. We consider the projective model of the anti-de Sitter space, where c_{-1} is a point at infinity and O_{-1} is the unit disc in the horizontal plane. We consider the Euclidean coordinates of this model. We have seen that in this model, the convex Fuchsian polyhedra are polyhedral convex caps. It follows that we can apply exactly the same proof as in the hyperbolic case (Lemma 6.18, page 102) to obtain that the set of possible (Euclidean) distances from O_{-1} of the n vertices of a fundamental domain is a (non-empty) contractible open set.

If (a, b, z) are the Euclidean coordinates of a vertex, with z the Euclidean distance form O_{-1}, by Lemma 3.37 page 48, the anti-de Sitter distance from c_{-1} is $\cot^{-1}(\frac{z}{\sqrt{1-a^2-b^2}})$, where a and b are fixed by hypothesis. The set of heights is homeomorphic to the set of Euclidean distance from O_{-1}: it is a contractible set.

In the Minkowski space.

As we know that the projective maps preserve the convexity and the property of invariance, we can use the other projective model of the anti-de Sitter space, which sends c_{-1} to the origin. The proof for the anti-de Sitter space above says that the set of possible anti-de Sitter distances between c_{-1} and the vertices of the polyhedral surfaces for the polyhedral surface to be convex forms a contractible set. And this is always true in the Minkowski projective model, for which c_{-1} corresponds to the origin. If t is such an anti-de Sitter distance, by Lemma 3.33 page 47, the corresponding Minkowski distance is $\tan(t)$: the set of possible Minkowski heights is also a contractible set.

□

A (small) open set of $T_g(n)$ is parametrised by a (small) deformation of a canonical polygon in O_K and a displacement of the marked points inside this polygon. With a fixed height for the vertices, a small displacement of a convex Fuchsian polyhedron (corresponding to a path in $T_g(n)$), is always convex (the convexity is a property preserved by a little displacement of the vertices) and Fuchsian (by construction).

So we can endow $\mathcal{P}_K(n)$ with the topology which makes it a fiber space based on $T_g(n)$, with fibers homeomorphic to a connected open subset of $\mathbb{R}^n$, and as $T_g(n)$ is a contractible manifold of dimension $(6g - 6 + 2n)$:

Proposition 7.18. *For $K \in \{-1, 0\}$, the space $\mathcal{P}_K(n)$ is a contractible manifold of dimension $(6g - 6 + 3n)$.*

For $K = 1$, $\mathcal{P}_K(n)$ is locally a manifold of dimension $(6g - 6 + 3n)$.

Proof. It remains to prove it for the de Sitter case. Actually the description is the same than for the other topologies: $\mathcal{P}_K(n)$ can be parametrised by little transformations of the canonical polygon, a little displacement of the marked points inside it and a little variation of their heights. □

Local description of the sets of metrics. Take a subdivision of each faces of a convex Fuchsian polyhedron P in triangles (such that the resulting triangulation has no more vertices than the cellulation of the polyhedron, and is invariant under the action of $\rho_K(\Gamma)$). For the data of such a triangulation on P, we get a map $\overline{Ed}_K$ which sends each Fuchsian polyhedron in a neighbourhood of P in $\mathcal{P}_K(n)$ to the square of the length of the edges of the triangulation in a fundamental domain for the Fuchsian group

action. As this triangulation of P provides a triangulation of the surface S, the map $\overline{Ed}_K$ has its values in $\mathbb{R}^{6g-g+3n}$.

The map $\overline{Ed}_K$ associates to the n vertices $x_1, \dots, x_n$ a set of $(6g-g+3n)$ real numbers among all the $d_{M_K^-}(fx_i, gx_j)^2$, $i, j = 1, \dots, n$, $f, g \in \rho_K(\Gamma)$. It is in particular a C^1 map.

By the local inverse Theorem, Theorem 7.7 says exactly that the map $\overline{Ed}_K$ is a local homeomorphism around P.

Final step for the Minkowski and anti-de Sitter cases. We denote by $\mathcal{I}_K(n)$ the map "induced metric" between $\mathcal{P}_K(n)$ and $\mathrm{Cone}_K^-(g;n)$ (the space of cone metrics, see page 83).

In this paragraph we suppose that $K \in \{-1, 0\}$.

Let m be the induced metric on $P \in \mathcal{P}_K(n)$. We consider a triangulation of m given by a subdivision of the faces of P in triangles. Obviously, the (square of) the lengths of the edges of the triangulation of P are the same that the (square of) the lengths of the edges of the triangulation of $m := \mathcal{I}_K(n)(P)$. It means that locally, if Ed_T is the local homeomorphism which gives the (square of) the length of the edges of the triangulation of a metric (see page 89), then:

$$Ed_T \circ \mathcal{I}_K(n) \circ \overline{Ed}_K^{-1} = id. \tag{7.7}$$

From this we deduce immediately that $\mathcal{I}_K(n)$ is continuous and locally injective. In the next section we will show that it is proper: $\mathcal{I}_K(n)$ is a covering map on its image.

We know that $\mathcal{P}_K(n)$ and $\mathrm{Cone}_K^-(g;n)$ are connected and simply connected for $K \in \{-1, 0\}$ (Proposition 5.15 page 85 and Proposition 7.18). It follows that $\mathcal{I}_K(n)$ is a homeomorphism.

Let $\mathrm{Mod}(n)$ be the quotient of the group of the homeomorphisms of S minus n points by its subgroup of isotopies.

The homeomorphism $\mathcal{I}_K(n)$ gives a bijection between $\mathcal{P}_K(n)/\mathrm{Mod}(n)$ and $\mathrm{Cone}_K^-(g;n)/\mathrm{Mod}(n)$, and this is exactly the statement of parts *2)* and *3)* of Theorem 7.1.

Final step for the de Sitter case. As already noted, the image of $\mathcal{I}_1(n)$ is contained in $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(g;n)$, $g > 1$ (the set of spherical metrics on a compact surface of genus g with n conical singularities of negative singular curvature such that the lengths of its contractible geodesics are $> 2\pi$, see Section 5.3 page 85). Recall that $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(g;n)$, endowed with the topology coming from the one of the space of Riemannian metrics, is a manifold of dimension $(6g-6+3n)$ near the image of any convex Fuchsian poyhedron (Lemma 5.25 page 90).

With the same considerations than above about triangulations of the polyhedral surfaces and triangulations of the metrics, it follows that $\mathcal{I}_1(n)$ is continuous and locally injective.

We want to show that $\mathcal{I}_1(n)$ is a homeomorphism between $\mathcal{P}_1(n)$ and $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(g;n)$. But we don't know anything about the connectedness of this space: the conclusion is less straightforward than in Minkowski or anti-de Sitter spaces. In [Riv86, RH93] there is a result on a kind of "connectedness" for $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(0;n)$, and J.-M. Schlenker has noted [Scha] that the genus doesn't intervene in the proof.

Proposition 7.19. *Each metric $m_1 \in Cone_1^{-,>2\pi}(g;n)$ can be joined to a metric $m_0 := \mathcal{I}_1(n)(P)$, for a $P \in \mathcal{P}_1(n)$, by a continuous path $(m_t)_t$, with $m_t \in Cone_1^{-,>2\pi}(g;N)$, $N \geq n$, $t \in]0,1[$, and such that m_t is realisable for t near 0.*

Sketch of the proof. For a suitable neighbourhood of the cone points of m_0 and m_1, it is possible to (continuously) smooth each cone point [RH93, 9.2] to obtain continuous paths $(\overline{m}_t)_t$, $t \in [0, t_1]$ and $(\overline{m}_{t'})_{t'}$, $t' \in [t_2, 1]$, where $\overline{m}_{t_1}$ and $\overline{m}_{t_2}$ are smooth metrics with curvature $K \leq 1$ and length of contractible geodesics $L > 2\pi$ (obviously, $\overline{m}_0 = m_0$ and $\overline{m}_1 = m_1$). We have seen that the space of such metrics is path-connected (Lemma 5.11 page 83). It comes that m_0 and m_1 can be joined by a continuous path of (smooth or with conical singularities) metrics such that $K \leq 1$ and $L > 2\pi$.

Now take a geodesic cellulation of m_0 such that the cone points are the vertices, and subdivide each cell with as many (geodesic) triangles as necessary to each triangles to have a diameter strictly less than a given constant δ. We denote by N the number of vertices resulting of such a triangulation T_0. The deformation $(\overline{m}_t)_t$ gives a continuous family T_t of geodesic triangulations, and T_1 is a geodesic

triangulation of m_1. Afterward we replace each triangle by a spherical triangle with the same edge length, and this gives us the announced path m_t between m_0 and m_1 (this new path can be taken very close to $(\overline{m}_t)_t$, such that its cone angles are $> 2\pi$ and the length of its closed geodesics is $> 2\pi$).

It remains to prove that for t sufficiently small, m_t is realisable. The triangulation of m_0 gives a triangulation of P, and each m_t, $t \in [0, \epsilon]$ is obtained by pushing outward each vertex (of the triangulation) contained inside a face of P. The way to push each vertex is given by the change of the length of the edges of the triangulation. This technique is also used in [Ale05]. □

Note that in our case we must consider the metrics up to isotopies, that changes nothing.

In the next section, we will show that $\mathcal{I}_1(n)$ is proper, and thus:

Corollary 7.20. *The map $\mathcal{I}_1(n)$ is surjective.*

Proof. With the same notations than above, we already know that m_t is realisable for $t \in [0, \epsilon[$. By properness of $\mathcal{I}_1(n)$, m_t is realisable for $t \in [0, \epsilon]$. By local injectivity and the fact that $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(g; n)$ is locally an open manifold, the invariance of domain Theorem gives that the map $\mathcal{I}_1(N)$ is open: m_t is realisable for $t \in [0, \epsilon'[$, with $\epsilon' > \epsilon$, and so on. At the end, m_t is realisable for $t \in [0, 1[$, and again by properness of $\mathcal{I}_1(N)$, m_1 is realisable. □

There is two ways to conclude that $\mathcal{I}_1(n)$ is a homeomorphism. The first is short but uses heavy tools:

Proposition 7.21. *The map $\mathcal{I}_1(n)$ is injective, i.e. convex Fuchsian polyhedra are rigid among convex Fuchsian polyhedra.*

Proof. As we have proved above the part *2)* of Theorem 7.1, it implies that convex Fuchsian polyhedra in the Minkowski space are globally rigid. To conclude it remains to invoke the global Pogorelov map from de Sitter space to Minkowski space, see Subsection 4.1.2.2. □

The second way, proposed in [Scha], is more direct. We know that $\mathcal{I}_1(N)$ is a covering on the entire $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(g; n)$. To conclude that $\mathcal{I}_1(N)$ is a homeomorphism, it remains to check that each fiber contains only one element. This is equivalent to prove that the covering of a loop is a loop, using a kind of "simple connectedness" of $\mathrm{Cone}_1^{-,>2\pi}(0; n)$, and this is given by a straightforward adaptation of Proposition 7.19:

Proposition 7.22. *For each $c : \mathbb{S}^1 \to Cone_1^{-,>2\pi}(g; n)$ there exists a disc $D \subset Cone_1^{-,>2\pi}(g; N)$, $N \geq n$, $t \in]0, 1[$, such that $\partial D = c(\mathbb{S}^1)$.*

Note that we know now that all the metrics involved in this lemma are realisable.

Sketch of the proof. The proof is step by step the same as for Proposition 7.19, using the fact that the space of smooth metrics with curvature ≤ 1 and length of contractible geodesics $> 2\pi$ is simply connected (Lemma 5.11 page 83). □

7.2 Properness

We will use the following characterisation of a proper map: $\mathcal{I}_K(n)$ is proper if, for each sequence $(P_k)_k$ in $\mathcal{P}_K(n)$ such that the sequence $(g_k)_k$ converges in $\mathrm{Cone}_K^-(g; n)$ (with $g_k := \mathcal{I}_K(n)(P_k)$) to $g_\infty \in \mathrm{Cone}_K^-(g; n)$, then $(P_k)_k$ converges in $\mathcal{P}_K(n)$ (may be up to the extraction of a sub-sequence).

Note that (this will be used in the appendix) the proof below actually proves a slightly more general property of properness: it proves that each sequence $(P_k)_k$ in $\mathcal{P}_K(n)$ such that the sequence $(g_k)_k = \mathcal{I}_K(n)(P_k)$ converges to $g_\infty \in \mathrm{Cone}_K(N)$, with $N \leq n$, then $(P_k)_k$ converges to an element of $\mathcal{P}_K(N)$. It means that some conical singularities may disappear, i.e. their cone angle may go to 2π.

We denote by d_k the restriction to P_k of the distance from c_K.

In the paragraphs below, γ_k is a geodesic on P_k given by an element of the fundamental group of S or by a geodesic between two vertices. We denote by π the orthogonal projection onto O_K, and by l_k the length of γ_k. By convergence of the sequence of induced metrics, l_k is bounded from above and below for

all k. We denote these bounds by $l_{min} \leq l_k \leq l_{max}$. Note that this argument will avoid the collapsing of two marked points.

We will suppose that the geodesics $\gamma_k(t)$ are parametrised by the arc-lenght, i.e. $g_k(\gamma_k'(t), \gamma_k'(t)) = 1$.

For each M_K^-, we call u_k the restriction of the coordinate function to P_k, that is

$$u_k := \begin{cases} \frac{1}{2}(d_k)^2, \ K = 0; \\ \cos(d_k), \ K = -1; \\ \cosh(d_k), \ K = 1. \end{cases} \tag{7.8}$$

Lemme 7.23. *For $K \in \{0, 1\}$, for each k, for each geodesic $\gamma(t)$ on P_k, $(u_k \circ \gamma)'$ has a positive jump at its singular points (which correspond to points where $\gamma(t)$ crosses an edge of P_k).*

Proof. Consider an edge e of P_k. We denote by $f_1$and f_2 its adjacent faces, and we look at a geodesic $\gamma(t)$ (for the induced metric) on $f_1 \cup f_2$. We denote by γ_i the part of γ which lies on f_i, and t_0 is such that $\gamma(t_0) \in e$. We denote by $\overline{\gamma}_1$ the prolongation of γ_1 on the plane containing the face f_1. Let d be the distance from c_K. The graph of $d \circ \overline{\gamma}_1$ is smooth, and, until t_0, the graph of $d \circ \gamma$ is also smooth.

As P_k is convex and c_K lies in the concave side of P_k, $d \circ \gamma_2$ is greater than $d \circ \overline{\gamma}$, and therefore the jump of $d \circ \gamma$ at t_0 is positive.

As the geodesic lies on P_k, we can write that the jump of $d_k \circ \gamma$ at t_0 is positive, and as the functions involved in (7.8) are increasing for $K \in \{0, 1\}$, this is true for u_k. □

Lemme 7.24. *For all k, the distance d_k is bounded from below.*

Proof. We see the de Sitter and anti-de Sitter spaces in the Minkowski projective model. For each M_K^- and for each Fuchsian polyhedron P_k, we take a vertex x_k which realises the minimum of the distance with c_K. Up to global isometries, we consider that x_k lies on the vertical geodesic from c_K, see Figure 7.4.

If the distance d_k is not bounded from below, x_k goes to c_K, and up to compose each P_k with a global isometry, we can suppose that it is along the geodesic mentioned above.

But the P_k are space-like and convex, that means that they must stay out of the time cone of each of their points, in particular out of the time cone of x_k. If x_k goes to c_K, the light cone of x_k becomes close to the light cone of c_K: $(P_k)_k$ would converge to a polyhedral surface having all its vertices on a light cone, the distance between the vertices would go to 0, and this is impossible as the sequence of the induced metrics converges.

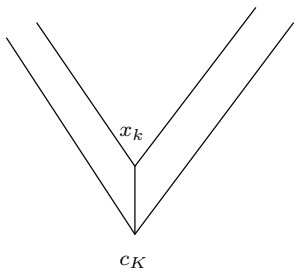


Figure 7.4: A light-cone converging to a light-cone.

□

Lemme 7.25. *If the projection of the P_k on a space-like umbilical surface N at constant distance from c_K is a dilating function, then the associated sequence of representations converges.*

Proof. The curvature of the induced metric on N is constant and strictly negative. For each k, $\rho_k(\Gamma)$ acts on N, and the quotient is isometric to a hyperbolic metric (up to a homothety) on the compact surface S. We denote by h_k this hyperbolic metric on S.

By hypothesis, the induced metrics g_k on P_k converge to g_∞. For n sufficiently large, there exists a constant c' such that $g_k \geq \frac{1}{c'} g_\infty$. As the surface is compact, there exists a constant c such that $\frac{1}{c'} g_\infty \geq \frac{1}{c} h_0$. And as the projection is dilating, we have, if $L_g(\gamma)$ is the length of the geodesic corresponding to $\gamma \in \pi_1(S)$ for the metric g:

$$L_{h_k}(\gamma) \geq L_{g_k}(\gamma) \geq \frac{1}{c} L_{h_0}(\gamma),$$

and Lemma 5.6 page 79 leads to the conclusion. □

Properness in the anti-de Sitter space. In the future-cone of c_{-1}, the anti-de Sitter metric can be written $\sin^2(t)\text{can}_{\mathbb{H}^2} - dt^2$, where t is the distance to c_{-1} (Lemma 3.13 page 40). As in the projective model for which c_{-1} is sent to infinity, all the P_k lie above O_{-1} (Lemma 7.16), this means that the projection onto O_{-1} is dilating and by Lemma 7.25, the sequence of representations associated to the P_k converges.

Moreover, in this model, all the P_k lie below the umbilical surface realising the minimum of the distance to c_{-1}: up to extract a subsequence, the vertices of the P_k converge.

The sequence $(P_k)_k$ converges to a Fuchsian polyhedron, and this one must be convex with n vertices as the P_k are convex and as sequence of the induced metrics converges.

Properness in the de Sitter space. Almost of this part was done in [Scha].

Lemma 7.26. *The sequence of the representations associated to $(P_k)_k$ converges (up to extract a subsequence).*

Proof. We will prove that the lengths of the images by the projection onto O_1 of the geodesics of P_k are uniformly bounded from above, and Lemma 5.5 page 79 will lead to the conclusion.

We denote by g_k the induced metric on P_k, which can be written, by Lemma 3.16 page 41:

$$g_k = (u_k^2 - 1)\text{can}_{\mathbb{H}^2} - \frac{du_k^2}{u_k^2 - 1},$$

and if we compute the length L_k of the image by the projection onto O_1 of a geodesic γ_k of P_k:

$$\begin{aligned}
L_k &= \int_0^{l_k} \sqrt{\text{can}_{\mathbb{H}^2}(d\pi(\gamma_k'(t)), d\pi(\gamma_k'(t)))}dt = \int_0^{l_k} \sqrt{\frac{g_k(\gamma_k'(t), \gamma_k'(t))}{u_k^2(t) - 1} + \frac{du_k^2(\gamma'(t))}{(u_k^2(t) - 1)^2}}dt \\
&= \int_0^{l_k} \sqrt{\frac{1}{u_k^2(t) - 1} + \frac{u_k'^2(t)}{(u_k^2(t) - 1)^2}}dt = \int_0^{l_k} \sqrt{\frac{1}{u_k^2(t) - 1} + (\text{cotanh}^{-1}(u_k(t))')^2}dt \\
&\leq \int_0^{l_{max}} \sqrt{\frac{1}{u_k^2(t) - 1} + (\text{cotanh}^{-1}(u_k(t))')^2}dt \\
&\leq \int_0^{l_{max}} \sqrt{\frac{1}{u_k^2(t) - 1}}dt + \int_0^{l_{max}} |(\text{cotanh}^{-1}(u_k(t)))'|dt \\
&\leq \frac{l_{max}}{\sqrt{u_0^2 - 1}} + \int_0^{l_{max}} |(\text{cotanh}^{-1}(u_k(t)))'|dt
\end{aligned}$$

(we have used the facts that $u_k > 1 = \cosh(0)$ and that u_k is bounded from below by $u_0 > \cosh(0) = 1$, Lemma 7.24).

It remains to check that the variation of $\text{cotanh}^{-1}(u_k)$ over $[0, l_{max}]$ is bounded from above by a constant which does not depend on k. For this, we can decompose $[0, l_{max}]$ into a finite number of subsets of the form $[x, y]$, where x is a local minimum (of u_k) and y a local maximum, which immediately follows x in the list of local extrema, and into a finite number of subsets of the form $[y, x]$, where y is a local maximum and x a local minimum, which immediately follows y in the list of local extrema.

First we consider a subset of the kind $[x, y]$, where x is a local minimum and y a local maximum, which immediately follows x in the list of local extrema. We want to study the variation

$$\int_x^y |(\text{cotanh}^{-1}(u_k(s)))'|ds = |\,\text{cotanh}^{-1}(u_k(x)) - \text{cotanh}^{-1}(u_k(y))|. \tag{7.9}$$

There exists a brutal overestimation which is:

$$|\,\text{cotanh}^{-1}(u_k(x)) - \text{cotanh}^{-1}(u_k(y))| \leq \text{cotanh}^{-1}(u_0),$$

but it is not satisfying: as the number of subsets in the decomposition of $[0, l_{max}]$ actually depends on k, the bound may become very large together with k. We will use the above bound only in the case $|y-x| \geq \pi/4$, and we will compute another bound in the other case (the term $\pi/4$ has no particular role, the important thing is that the other case verifies $|y-x| < \pi/2$).

As y is a local maximum, together with Lemma 7.23, we have $u_k'(y) = 0$. By Lemma 3.16 page 41, $u_k'' = -u_k$ on the regular points, and, again by Lemma 7.23, the derivative has a positive jump at the singular points. With these facts, it is easy to check that, for $s \in [x, y]$,

$$u_k(y) \geq u_k(s) \geq u_k(y)\cos(y_j - s),$$

and with this we compute

$$\begin{aligned}
|\,\text{cotanh}^{-1}(u_k(x)) - \text{cotanh}^{-1}(u_k(y))| &\leq \int_{u_k(x)}^{u_k(y)} \frac{dt}{t^2-1} \leq \frac{u_k(y) - u_k(x)}{u_k(x)^2 - 1} \\
&\leq \frac{u_k(x)}{u_k(x)^2-1}\left(\frac{1}{\cos(y-x)} - 1\right) \\
&\leq 4(y-x)^2 \frac{u_k(x)}{u_k(x)^2-1} \leq \frac{4(y-x)^2 u_0}{u_0^2 - 1}.
\end{aligned}$$

The bound is the same in the case where a local minimum immediately follows a local maximum, by the symmetry in Equation (7.9). At the end we have the wanted bound:

$$\int_0^{l_{max}} |(\text{cotanh}^{-1}(u_k(t)))'dt| \leq \frac{4l_{max}(\text{cotanh}^{-1}(u_0) - 1)}{\pi} + \frac{4u_0 l_{max}^2}{u_0^2 - 1}.$$

□

It remains to check that the height of no vertex of the P_k goes to infinity. If it is, by convexity the face containing such a vertex will become tangent to the sphere. If it occurs, the sequence of induced metrics will converge to a metric having a geodesic of length 2π (Lemma 5.20 page 87), that is impossible as the induced metrics are supposed to converge in $\text{Cone}_1^{-,>2\pi}(g; n)$.

Note that this argument avoids too some vertices to collapse at infinity.

Properness in the Minkowski space. By Lemma 3.16 page 41, the induced metric g_k on P_k can be written:

$$g_k = u_k \text{can}_{\mathbb{H}^2} - \frac{du_k^2}{u_k}.$$

If we compute the length L_k of the image by the projection π onto the hyperbolic plane of a geodesic γ_k of P_k, we get:

$$\begin{aligned}
L_k &= \int_0^{l_k} \sqrt{\text{can}_{\mathbb{H}^2}(d\pi(\gamma_k'(t)), d\pi(\gamma_k'(t)))}dt = \int_0^{l_k} \sqrt{\frac{g_k(\gamma_k'(t), \gamma_k'(t))}{u_k(t)} + \frac{du_k^2(\gamma_k'(t))}{u_k^2(t)}}dt \\
&= \int_0^{l_k} \sqrt{\frac{1}{u_k(t)} + \left(\frac{u_k'(t)}{u_k(t)}\right)^2}dt \leq \int_0^{l_{max}} \sqrt{\frac{1}{u_k(t)} + \left(\frac{u_k'(t)}{u_k(t)}\right)^2}dt \\
&\leq \int_0^{l_{max}} \frac{1}{\sqrt{u_k(t)}} + \left|\frac{u_k'(t)}{u_k(t)}\right| dt.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

We first want to check that, as in the de Sitter case, this length is bounded from above. A u_k is bounded from below by $u_0 > 0$ (Lemma 7.24), we get

$$L_k \leq \frac{l_{max}}{\sqrt{u_0}} + \int_0^{l_{max}} |\ln(u_k(t))'|dt,$$

and it remains to check that the variation of $\ln(u_k(t))$ over $[0, l_{max}]$ is bounded from above by a constant which does not depend on k.

We introduce the same decomposition of $[0, l_{max}]$ than for the de Sitter case: we decompose $[0, l_{max}]$ into a finite number of subsets of the form $[x, y]$, where x is a local minimum (of u_k) and y a local maximum, which immediately follows x in the list of local extrema, and into a finite number of subsets of the form $[y, x]$, where y is a local maximum and x a local minimum, which immediately follows y in the list of local extrema.

Without loss of generality, we suppose that $u_0 > 1$.

First we consider a subset of the kind $[y, x]$, where x is a local minimum and y a local maximum, which immediately follows x in the list of local extrema. We want to study the variation

$$\int_y^x |\ln(u_k(t)))'|dt = \ln(u_k(y)) - \ln(u_k(x)). \tag{7.11}$$

By Lemma 7.23, $u_k'(y) = 0$. Furthermore, $u_k'' = -1$ on the regular points (Lemma 3.16 page 41). Moreover, u_k' has a positive jump at certain points. From these facts, it is easy to check that, for $s \in (0, x - y)$:

$$u_k(y + s) \geq u_k(y) - \frac{s^2}{2},$$

in particular,

$$u_k(y) - u_k(x) \leq \frac{(x - y)^2}{2}.$$

From this we compute

$$\ln(u_k(y)) - \ln(u_k(x)) \leq \int_{u_k(x)}^{u_k(y)} \frac{dt}{t} \leq \frac{u_k(y) - u_k(x)}{u_k(x)} \leq \frac{(x - y)^2}{2u_0}. \tag{7.12}$$

The bound is the same in the case where a local maximum immediately follows a local minimum, by the symmetry in Equation (7.11). It implies that

$$\int_0^{l_{max}} |(\ln(u_k(t)))'|dt \leq \frac{(l_{max})^2}{2u_0}.$$

We have proved that the lengths of the image by the projections onto $\mathbb{H}^2$ of the geodesics of P_k are bounded from above, and Lemma 5.5 page 79 says that in this case the sequence of representations converges. It also means that the distance between two marked points inside a fundamental domain converges.

Moreover from (7.10) and (7.12) we can write:

$$L_k \leq \frac{l_{max}}{\sqrt{min_k}} + \frac{(l_{max})^2}{2min_k},$$

where min_k is, for each k, the minimum of the $u_k(x)$, where x is a local minimum for the restriction of u_k to γ_k (it may be not unique). If min_k becomes big, L_k will be close to 0. In particular, all the min_k (for all the γ_k for $\gamma \in \pi_1(S)$) can't be too much large, because if it is, the area of a fundamental domain on $\mathbb{H}^2$ for the action of the Fuchsian representations will be close to 0, that is impossible by the Gauss–Bonnet Formula.

This implies that the height of no vertex can go to infinity. Effectively, from the considerations above, for each k there exists a point x_k on each P_k such that the heights of the x_k remain bounded for all k.

For each k, consider the convex hull of x_k together with the orbits of x_k under the action of the Fuchsian group. As P_k is convex and as c_0 lies in the concave side of P_k, all the vertices of P_k lie outside this convex hull, and, as the sequence of representation converges, all the vertices (in a fundamental domain) of P_k lie inside a cone, which is bounded for all k.

The sequence of polyhedra converges to a Fuchsian polyhedron, and this one must be convex with n vertices as the sequence of induced metrics converges.

Appendix A

Complete hyperbolic metrics

As a direct consequence of the preceding results (especially the Minkowski case), we can deduce more general statements in hyperbolic space.

A.1 Definitions and rigidity

Consider the Klein projective model of the hyperbolic space. A polyhedral surface has usually its vertices inside the ball, and they are called *finite* (without precision, a vertex is a finite vertex). A vertex on the infinite boundary (i.e. on the sphere) is called *ideal* (or sometimes *infinite*), and a vertex outside the ball is called *hyperideal*. The hyperideal case covers the ideal case, and a vertex which is hyperideal but not ideal is called *strictly hyperideal*.

For a polyhedral surface, we say that it is (see Figure A.1)

1) *finite* if all its vertices are finite;

2) *ideal* if all its vertices are ideal;

3) *semi-ideal* if its vertices are finite or ideal;

4) *hyperideal* if all its vertices are hyperideal such that all its edges intersect the open ball;

5) *strictly hyperideal* if all its vertices are strictly hyperideal such that all its edges intersect the open ball;

6) *semi-generalised* if the vertices are finite or strictly hyperideal such that all its edges intersect the open ball;

7) *generalised* if the vertices are finite or hyperideal and such that all its edges intersect the open ball.

There exists an intrinsic characterisation of a strictly hyperideal vertex: it is the same as asking that there exists a totally geodesic plane in hyperbolic space which has an orthogonal intersection with all the edges coming from the vertex. This plane is the dual of the hyperideal vertex (which lies in the de Sitter space), see Lemma 3.47, page 55.

There exists studies of hyperideal convex polyhedra (with finite number of vertices), which aim is to characterise them by their dihedral angles [BB02]. This kind of characterisation is studied for Fuchsian hyperideal convex polyhedra in [Rou04] and [Schb].

Thanks to the global Pogorelov map and the global rigidity of convex Fuchsian polyhedra in the Minkowski space, we get:

Theorem A.1. *A convex generalised Fuchsian polyhedron of hyperbolic space is (globally) rigid among convex Fuchsian polyhedra.*

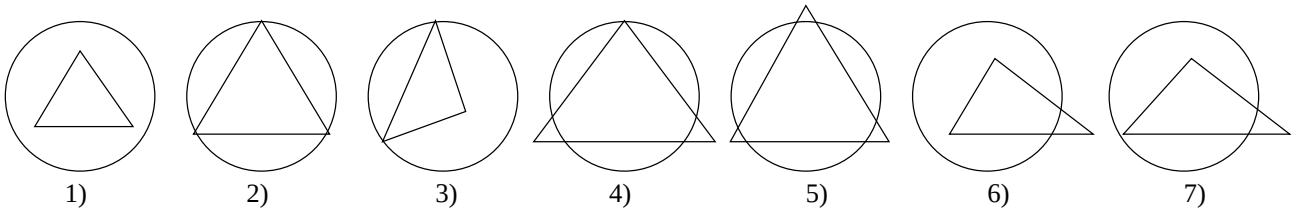


Figure A.1: Hyperbolic cases.

Proof. The part *2)* of Theorem 7.1 implies that convex Fuchsian polyhedra in Minkowski space are globally rigid among convex Fuchsian polyhedra. It follows that to prove Theorem A.1 we have only to check that the global Pogorelov map sends couples of isometric convex generalised Fuchsian polyhedra to couples of isometric convex generalised Fuchsian polyhedra.

As generalised polyhedral surfaces are particular cases of HS-polyhedra (see Proposition 4.13 page 67), a pair of convex isometric invariant polyhedral generalised surfaces are sent to a pair of convex isometric invariant polyhedral surfaces contained inside the future cone of the origin of the Minkowski space (the invariance is given by the property of commutation of the Pogorelov map with the isometries, see Lemma 4.12 page 67).

It remains to use Lemma 7.13 page 113 to get that the polyhedral surfaces in the Minkowski space are space-like too, and thus Fuchsian. □

Note that we used a particular case of this statement to prove the injectivity of $\mathcal{I}_1(n)$ (page 118).

A.2 Realisation of finite area hyperbolic metrics

Let $\overline{S}$ be a compact surface of genus > 1. We denote by S the surface $\overline{S}$ with n marked points. We denote by

- $\mathcal{P}_H(g;n,m)$ the set of semi-ideal convex Fuchsian polyhedral embeddings of S in the hyperbolic space with n finite vertices and m ideal vertices, modulo isotopies of S fixing the marked points and modulo isometries of $\mathbb{H}^3$;
- $\mathrm{Met}_H(g;n,m)$ the set of hyperbolic metrics on S with n conical singularities with positive singular curvature and m hyperbolic cusps, modulo isotopies of S fixing the marked points.

We denote by $\mathcal{I}_H(g;n,0)$ the map "induced metric" from $\mathcal{P}_H(g;n,0)$ to $\mathrm{Met}_H(g;n,0)$. In Chapter 6, we proved that $\mathcal{I}_H(g;n,0)$ (which was called $\mathcal{I}(n)$) is a homeomorphism, with the topology on $\mathrm{Met}_H(g;n,0)$ given by the product $T_g(n)\times]0,2\pi[^n$, where $T_g(n)$ is the Teichmüller space and $]0,2\pi[^n$ the values of the cone-angles (see page 84).

A hyperbolic cusp can be seen as a cone of cone-angle 0, and even more:

Theorem A.2 (Converting cones to cusps, [Jud98])**.** *A hyperbolic metric with cusps on a compact surface can be obtained as a (unique) conformal deformation of a hyperbolic metric with conical singularities (with positive singular curvature) on the surface, and this deformation is analytically parametrised by the values of the cone-angle.*

That means that, for each element m of $\mathrm{Met}_H(g;n,m)$ with the topology $T_g(n)\times]0,2\pi[^n\times\{0\}^m$, there exists a (conformal) sequence of elements of $\mathrm{Met}_H(g;n+m,0)$ (with the topology $T_g(n)\times]0,2\pi[^{n+m}$) converging to m.

We denote by $\mathcal{I}_H(g;n,m)$ the prolongation by continuity of $\mathcal{I}_H(g;n+m,0)$ to $\mathcal{P}_H(g;n,m)$. It is clear that $\mathcal{I}_H(g;n,m)$ has its values in $\mathrm{Met}_H(g;n,m)$.

Lemma A.3. *Let $(P_k)_k$ be a sequence of elements of $Met_H(g; n+m, 0)$ such that the sequence of the induced metrics converges to an element of $Met_H(g; n, m)$. Thus, up to extract a subsequence, $(P_k)_k$ converges to an element of $\mathcal{P}_H(g; n, m)$.*

Proof. We denote by ρ_k the Fuchsian representation associated to each P_k. Recall that the projection on the hyperbolic plane $P_{\mathbb{H}^2}$ leaved invariant by the action of the Fuchsian representations is contracting.

It implies that the fundamental domains for the action of ρ_k remain bounded, otherwise the area of the Fuchsian polyhedra must go to infinity, that is impossible as the sequence of induced metrics converges to a finite area metric. Thus, up to extract a subsequence, the sequence of representations converges.

Moreover, the minimum of the distance from $P_{\mathbb{H}^2}$ to P_k is bounded, otherwise, as the sequence of ρ_k converges, the area of the associated fondamental domains in $P_{\mathbb{H}^2}$ will go to 0, that is impossible by the Gauss–Bonnet Formula.

It follows that $(P_k)_k$ converges to a Fuchsian polyhedron, which must be convex, as all the P_k are convex, and the limit must have n finite vertices and m ideal vertices because of the limit of the induced metrics. □

Now we can easily prove:

Theorem A.4. *The map $\mathcal{I}_H(g; n, m)$ is a bijection between $\mathcal{P}_H(g; n, m)$ and $Met_H(g; n, m)$, with $g > 1$.*

Proof. Let h_∞ be an element of $\mathrm{Met}_H(g; n, m)$. Due to the theorem of Judge, there exists a sequence $(h_k)_k$ in $\mathrm{Met}_H(g; n+m, 0)$ converging to h_∞. For each h_k, we have proved that there exists a unique (finite) convex Fuchsian polyhedron P_k such that its induced metric is isometric to h_k, and by the preceding lemma, the sequence $(P_k)_k$ converges to a semi-ideal convex Fuchsian polyhedron such that its induced metric is isometric to h_∞.

This implies that $\mathcal{I}_H(g; n, m)$ is surjective, and Theorem A.1 says that it is injective. □

This theorem gives immediately, if $n = 0$:

Theorem A.5. *A hyperbolic metric of finite area (i.e. with n cusps) on a compact surface of genus > 1 is realised as a unique ideal Fuchsian polyhedron.*

(Note that an ideal polyhedral surface is always convex). This last statement has been found in [Scha], using a different method involving the Schläfli Formula and variation of volume of ideal simplicies.

A.3 A dual statement

The following definitions are dual of the hyperbolic ones: a face of a polyhedral surface in (the Klein projective model of) the de Sitter space is said to be (see Figure A.2):

1) *finite* if it doesn't intersect the ball (i.e. is space-like);
2) *ideal* if it is tangent to the ball (i.e. is light-like), and the point of tangency is not a vertex;
3) *hyperideal* if it intersects the ball (i.e. is time-like), with edges and vertices lying outside the closure of the ball.

A polyhedral surface in the de Sitter space is said:

1) *finite* if all the faces are finite;
2) *ideal* if all the faces are ideal;
3) *semi-ideal* if some faces are finite and others are ideal;
4) *hyperideal* if some faces are ideal and other hyperideal;
5) *strictly hyperideal* if the faces are hyperideal;

6) *semi-generalised* if the faces are finite or hyperideal;

7) *generalised* if the faces are finite, ideal or hyperideal.

Note that as the geodesics containing the edges never intersect the ball, all the edges are space-like.

Let P be a generalised convex Fuchsian polyhedron with n vertices, m ideal faces and p strictly hyperideal faces. The case $n = m = p = 0$ is not possible as the surface has genus > 1. Actually, for the quotient of a Fuchsian polyhedron by the Fuchsian group, if a the number of edges, f the number of faces and n the number of vertices, the Euler Formula gives $f - a + n = 2 - 2g$. Moreover, as we need at least three edges to define a face, we have $m + p \leq f \leq \frac{2}{3}a$. From this it comes the necessary condition:

$$n = 2 - 2g + a - f \geq 2 - 2g + \frac{3}{2}f - f \geq 2 - 2g + \frac{1}{2}(m + p).$$

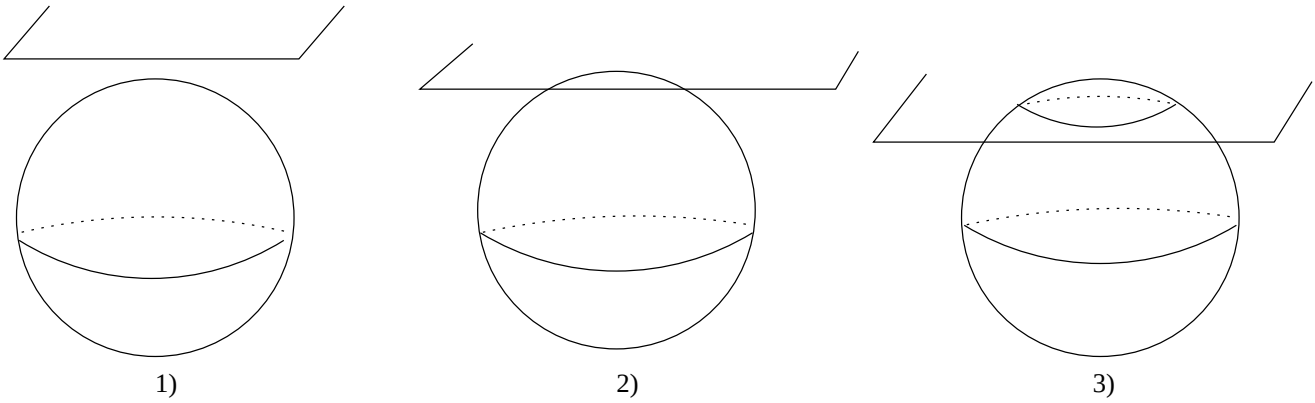


Figure A.2: Three kinds of faces in the de Sitter space.

As the induced metric on a hyperideal polyhedral surface in de Sitter space is not (everywhere) a Riemannian one, to study them would drive us too far form our problem concerning the realisation of Riemannian metrics. But it is possible to characterise some Riemannian metrics with semi-ideal polyhedral surfaces.

Let $\overline{S}$ be a compact surface of genus > 1. We denote by S the surface $\overline{S}$ with n marked points. We denote by

- $\mathcal{P}_{\mathrm{dS}}(g; n, m)$ the set of semi-ideal convex Fuchsian polyhedral embeddings of S in the de Sitter space with n vertices and m ideal faces, modulo isotopies of S fixing the marked points and modulo isometries of dS^3;
- $\mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g; n, m)$ the set of spherical metrics on S with n conical singularities with negative singular curvature such that the lengths of contractible geodesics is $> 2\pi$, except for m geodesics of lengths 2π bounding hemispheres containing no singular points, modulo isotopies of S fixing the marked points.

We denote by $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g; n, 0)$ the map "induced metric" from $\mathcal{P}_{\mathrm{dS}}(g; n, 0)$ to $\mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g; n, 0)$. In Chapter 7 we proved that $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g; n, 0)$ (which was called $\mathcal{I}_1(n)$) is a homeomorphism.

We denote by $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g; n, m)$ the prolongation by continuity of $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g; n, 0)$ to $\mathcal{P}_{\mathrm{dS}}(g; n, m)$. We saw (Lemma 5.20 page 87) that $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g; n, m)$ has its values in $\mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g; n, m)$.

The proof of the following theorem is exactly the same as the proof of Theorem A.1, because a generalised polyhedral surface in the de Sitter space is also a HS-polyhedron:

Theorem A.6. *A convex generalised Fuchsian polyhedron of the de Sitter space is (globally) rigid among convex Fuchsian polyhedra.*

In particular, $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$ is injective. Moreover

Lemma A.7. *Let $(P_k)_k$ be a sequence of elements of $Met_{\mathrm{dS}}(g;n,0)$ such that the sequence of the induced metrics converges to an element of $Met_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$. Thus, up to extract a subsequence, $(P_k)_k$ converges to an element of $\mathcal{P}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$.*

Proof. The proof of the properness of the map $\mathcal{I}_1(n)$ (page 121) says that $(P_k)_k$ converges to a convex Fuchsian polyhedron. Moreover we know that the only way for the limit of the induced metric to have contractible geodesics of lengths 2π is that the limit polyhedral surface has some light-like faces. □

From this, it is easy to obtain:

Theorem A.8 ([Scha, Rou04])**.** *The map $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$ is a bijection between $\mathcal{P}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$ and $Met_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$, with $g>1$.*

Proof. Take a metric $h_\infty \in \mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$ on a compact surface S. As remarked in [Scha], it is easy to find a sequence $(h_k)_k$, $h_k \in \mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g;n,0)$ converging to h_∞: If we decrease slightly the length of the geodesic between two singular points on a contractible geodesic of length 2π, the hemisphere bounded by this geodesic will become a convex spherical polygon and we obtain an open continuous path of $\mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g;n,0)$ with endpoint h_∞. On this path we take a sequence converging to h_∞.

By part *1)* of Theorem 7.1 page 106, for each k there exists a unique convex Fuchsian (finite) polyhedron P_k in dS^3 such that its induced metric is h_k.

Moreover, the preceding lemma says that $(P_k)_k$ converges to a semi-ideal convex Fuchsian polyhedron. It follows that $\mathcal{I}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$ is surjective, and we we already know by the preceding theorem that it is injective. □

The proof presented in [Rou04] is more direct than the one presented here, as M. Rousset has found a simple topological trick which allow to use only the infinitesimal Pogorelov map instead of the global one.

A.4 Proposition for a general statement

Let $\overline{S}$ be a compact surface of genus $g>1$. We denote by S the surface $\overline{S}$ with n marked points, m deleted points and p deleted discs. We define

- $\mathcal{P}_H(g;n,m,p)$ the set of generalised convex Fuchsian polyhedral embeddings of S in hyperbolic space with n finite vertices, m ideal vertices and p strictly hyperideal vertices, modulo isotopies of S fixing the marked points and modulo isometries of $\mathbb{H}^3$;
- $\mathrm{Met}_H(g;n,m,p)$ the set of hyperbolic metrics with n conical singularities with positive singular curvature, m hyperbolic cusps and p hyperbolic ends of infinite area on S, modulo isotopies of S fixing the marked points;
- $\mathcal{I}_H(g;n,m,p)$, the map "induced metric" from $\mathcal{P}_H(g;n,m,p)$ to $\mathrm{Met}_H(g;n,m,p)$.

We would like to prove:

General Statement (2)**.** *The map $\mathcal{I}_H(g;n,m,p)$ is a bijection between $\mathcal{P}_H(g;n,m,p)$ and $Met_H(g;n,m,p)$, with $g>1$, $n,m,p\geq 0$.*

Note that Theorem *A*.1 gives the unicity of the polyhedral surface: it remains only to prove the surjectivity of $\mathcal{I}_H(g;n,m,p)$.

We already know four cases:

- $(n,m,p)=(0,0,0)$: the convex Fuchsian polyhedron such that its quotient by the Fuchsian group is a smooth hyperbolic metric on a compact surface is a totally geodesic plane;
- $(n,m,p)=(n,0,0)$, it is Theorem 6.1 page 92;

- $(n, m, p) = (n, m, 0)$ and
- $(n, m, p) = (0, m, 0)$, are contained in Theorem A.4.

Using the following statement

Theorem A.9 (Hulin–Troyanov, [HT92, Theorem C])**.** *On each (open) Riemannian surface there exists a unique conformal hyperbolic metric with cusps and hyperbolic ends with infinite area.*

in the case with only hyperbolics ends with infinite area, it would be possible to prove the case $(0, 0, p)$. Actually the case $(0, m, p)$ has already be obtained by different techniques than the ones used here in [Schb].

We think that it would suffice to have a version of the theorem of Judge (Theorem A.2) for open riemannian surfaces (which is only for compact ones) to prove General Statement 2. Effectively, if such a statement would exist, we could deduce from the theorem of Hulin–Troyanov a result of existence and unicity about hyperbolic metrics with cone singularities and hyperbolic ends of infinite area.

Up to prove the properness of the corresponding map "induced metric" (the proof would be very close to the other cases), the case $(n, 0, p)$ of General Statement 2 would follow.

From this, to conclude the general case it would suffice to use again the "Judge theorem for open surfaces" in a way analog to the proof of Theorem A.4.

Hyperbolic metrics with geodesic boundary. Let P be a convex polyhedral surface of the hyperbolic space, with (strictly) hyperideal vertices. We denote by x such a hyperideal vertex. We denote by P^t the polyhedral surface obtained by cutting out of P the part of P contained in the same side of the dual plane x^* than x. The resulting polyhedral surface is called *truncated*.

We have already seen that x^* is orthogonal to all the faces of P having x has a vertex, it follows that boundary of P^t defined by x^* is smooth for the induced metric on P^t.

The metric induced on the quotient of P^t by the Fuchsian group is isometric to a hyperbolic metric (possibly with cone singularities, cusps and hyperbolic ends with infinite area) with geodesic boundaries on a surface of genus > 1.

Moreover, up to the results about properness, all the considerations in this appendix does not depend on the genus of the surface. Thus we ask:

Question A.10. *Is a complete hyperbolic metric on a surface realised by a unique convex (truncated generalised) polyhedron of the hyperbolic space, invariant under the action of the representation of the fundamental group of the surface on a group of isometries of dimension* 3*?*

The image of the representation would be trivial for genus 0, parabolic for genus 1 and Fuchsian for genus > 1.

Index

AdS^3, 37
$Cone_1^{-,>2\pi}(g;n)$, 86
$Cone_K^{\varepsilon}(g;n)$, 84
J, 49
M_K^+, 24
M_K^-, 37
$Met_K^+(g)$, 80
$Met_K^-(g)$, 80
$PSL(2,\mathbb{R})$, 37
$P_{\mathbb{H}^2}$, 38
T_g, 78
$T_g(n)$, 83
I, 16
II, 16
III, 17
Ω_1, 39
Ω_{-1}, 40
$\langle , \rangle_m$, 49
$\mathbb{I}^3$, 43
$\mathbb{S}^3_+$, 21
$\mathbb{X}^n$, 18
$\mathcal{C}$, 44
$\mathcal{I}_H(g;n,m,p)$, 129
$\mathcal{P}_H(g;n,m,p)$, 129
$\mathcal{P}_H(g;n,m)$, 126
$\mathcal{P}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$, 128
$\mathcal{T}_K$, 38
$\mathfrak{M}$, 80
AdS^3_+, 40
HS, 52
HS-polyhedron, 66
dS^2, 36
dS^3, 36
dS^+_3, 39
$\mathrm{Met}_H(g;n,m,p)$, 129
$\mathrm{Met}_H(g;n,m)$, 126
$\mathrm{Met}_{\mathrm{dS}}(g;n,m)$, 128
φ_{H-E}, 43
φ_{H-M}, 46
$\varphi^c_{\mathrm{AdS}-M}$, 47
$\varphi^d_{\mathrm{AdS}-M}$, 48
$\varphi_{\mathrm{dS}-E}$, 44
$\varphi_{\mathrm{dS}-M}$, 45
c_K, 38
c^d_{-1}, 48

Angle d'un cône convexe, 24, 57
Angle dièdre, 19
Application de Gauss, 16
Arêtes additionnelles, 29

Birapport, 50

Cône convexe, 24, 57
Cône d'une surface, 21
Cône de lumière, 35
Cône futur, 38
Cône temps, 38
Cône-angle, 83
Cellulation, 87
Centrée (surface), 60
Champ de Killing, 32
Champ de Killing (de $\mathbb{R}^3$), 27
Champ de rotation, 27
Champ variationnel, 25
Combinatoire, 19
Combinatoirement équivalents, 19
Conformes, 78
Congruente, 25
Connexion, 16
Convexe (ensemble), 18
Convexe (hypersurface), 18
Courbure (singulière), 83
Courbure de Gauss, 17
Courbure moyenne, 17
Courbure singulière, 24
Cross-ratio, 50

Déformation, 25
Déformation infinitésimale, 26
Déformation infinitésimale (polyédrale), 28
Déformation isométrique infinitésimale (polyédrale), 28
Déformation préservant la métrique au premier ordre, 26
Dérivée de Lie, 32
Déformable discrètement, 25
Déformation isométrique, 25
Déformation isométrique infinitésimale, 26

Demi-espace, 18
Deuxième forme fondamentale, 16
Dimension (d'un polyèdre), 19
Direction latérale, 68, 71, 74
Direction radiale, 68, 71, 74
Distance (lorentzienne), 38
Distance de Hilbert, 50
Distance hyperbolique-de Sitter, 51
Dual, 22, 53

Espace hyperbolique, 37
Espace anti-de Sitter, 37
Espace co-hyperbolique, 52
Espace de Minkowski, 34
Espace de Sitter, 36
Espace de Teichmüller, 78
Espace hyperbolique-de Sitter, 52
Espace isotrope, 35

Finite (vertex), 125
Flexion pure, 26
Formule de Gauss (riemannienne), 17
Fuchsian deformation, 96
Fuchsian group (Lorentzian), 106
Fuchsian Killing field, 96
Fuchsian polyhedron (hyperbolic), 92
Fuchsian polyhedron (Lorentzian), 106

Géodésique polyédrale, 85
Gauss–Bonnet, 19
Generalised polyhedral surface, 125
Genus (of a Fuchsian polyhedron), 95
Groupe de Lorentz, 37

Height (Lorentzian), 116
Hyperideal (vertex), 125

Ideal (vertex), 125
Infinitésimalement rigide, 27
Infinite (vertex), 125
Invariant polyhedral surface, 92
Isométrie infinitésimale, 33

Large, 86
Link, 19
Localement convexe, 18
Localement strictement convexe, 18

Métrique à singularités coniques, 83
Métrique duale d'une surface polyédrale, 24
Métrique lorentzienne, 34
Métrique polyédrale, 83
Métrique pseudo-riemannienne, 34

Number of vertices (of a Fuchsian polyhedron), 95

Opérateur de forme, 16
Opérateur de Weingarten, 16

Plan, 18
Plan de Sitter, 36
Plongement flexible, 25
Polyèdre, 19
Polyèdre convexe, 19
Polyèdre de type HS, 66
Polygone, 19
Polytope, 19
Première forme fondamentale, 16
Produit vectoriel Minkowski, 49

Réalisation, 25
Realise, 92

Semi-generalised polyhedral surface, 125
Singularité conique, 83
Sous-espace, 18
Structure conforme, 78
Surface ombilique, 17
Surface polyédrale, 19
Surface rigide (globalement), 25

Triangulation (généralisée), 87
Troisième forme fondamentale, 17
Troisième forme fondamentale d'une surface polyédrale, 24
Truncated, 130
Type espace, 35
Type lumière, 35
Type temps, 35

Uniquement déterminée par sa métrique, 25

Variation isométrique, 26
Voisinage de Voronoi, 88
Vu de l'extérieur, 63
Vu de l'intérieur, 63

Bibliography

[Ale42] Aleksander Alexandroff. Existence of a convex polyhedron and of a convex surface with a given metric. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 11(53):15–65, 1942.

[Ale05] Aleksander D. Alexandrov. *Convex polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky, With comments and bibliography by V. A. Zalgaller and appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov.

[And70] E. M. Andreev. Convex polyhedra of finite volume in Lobavcevski space. *Mat. Sb. (N.S.)*, 83 (125):256–260, 1970.

[BB02] Xiliang Bao and Francis Bonahon. Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3-space. *Bull. Soc. Math. France*, 130(3):457–491, 2002.

[BEE96] John K. Beem, Paul E. Ehrlich, and Kevin L. Easley. *Global Lorentzian geometry*, volume 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, second edition, 1996.

[Ber77] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 5*. CEDIC, Paris, 1977. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères. [The sphere itself, hyperbolic geometry, the space of spheres].

[Bes87] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BG92] Christophe Bavard and Étienne Ghys. Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. *Geom. Dedicata*, 43(2):207–224, 1992.

[BI] Alexander Bobenko and Ivan Izmestiev. Alexandrov's theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes. math.DG/0609447.

[Bus58] Herbert Busemann. *Convex surfaces*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 6. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[Bus92] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[CD95] Ruth Charney and Michael Davis. The polar dual of a convex polyhedral set in hyperbolic space. *Michigan Math. J.*, 42(3):479–510, 1995.

[CD96] Ruth Charney and Michael Davis. Correction: "The polar dual of a convex polyhedral set in hyperbolic space" [Michigan Math. J. **42** (1995), no. 3, 479–510; MR1357620 (96h:53052)]. *Michigan Math. J.*, 43(3):619, 1996.

[Con93] Robert Connelly. Rigidity. In *Handbook of convex geometry, Vol. A, B*, pages 223–271. North-Holland, Amsterdam, 1993.

[CP03] Charalambos Charitos and Ioannis Papadoperakis. On the geometry of hyperbolic surfaces with a conical singularity. *Ann. Global Anal. Geom.*, 23(4):323–357, 2003.

[Dar93] Gaston Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces. III, IV.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces. [Geodesic lines and geodesic curvature. Differential parameters. Deformation of surfaces], Déformation infiniment petite et représentation sphérique. [Infinitely small deformation and spherical representation], Reprint of the 1894 original (III) and the 1896 original (IV), Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences. [Course on Geometry of the Faculty of Science].

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[dC92] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[Ere04] Alexandre Eremenko. Metrics of positive curvature with conic singularities on the sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(11):3349–3355 (electronic), 2004.

[Fila] François Fillastre. From space of polygons to space of polyhedra following Bavard, Ghys, Thurston and others. Revision (in preparation) of the preprint "Des espaces de polygones aux espaces de polyèdres en suivant Bavard, Ghys et Thurston", 2004, math.MG/0308187.

[Filb] François Fillastre. Polyhedral realisation of hyperbolic metrics with conical singularities on compact surfaces. arXiv:math.DG/0605403 — To appear in the Annales de l'Institut Fourier.

[Filc] François Fillastre. Polyhedral realisation of metrics with conical singularities on compact surfaces in Lorentzian space-forms. In preparation.

[GHL90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.

[Ghy02] Étienne Ghys. Le théorème du soufflet. 2002. Brochure SMF SMAI "L'explosion des Mathématiques".

[GPS82] R. F. Galeeva, V. V. Pelipenko, and D. D. Sokolov. Infinitesimal bendings of surfaces in pseudo-Euclidean space. *Uspekhi Mat. Nauk*, 37(5(227)):175–176, 1982.

[Gra73] André Gramain. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:53–66, 1973.

[Gro86] Mikhael Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

[Hod92] Craig D. Hodgson. Deduction of Andreev's theorem from Rivin's characterization of convex hyperbolic polyhedra. In *Topology '90 (Columbus, OH, 1990)*, volume 1 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, pages 185–193. de Gruyter, Berlin, 1992.

[HOS00] Francisco J. Herranz, Ramón Ortega, and Mariano Santander. Trigonometry of spacetimes: a new self-dual approach to a curvature/signature (in)dependent trigonometry. *J. Phys. A*, 33(24):4525–4551, 2000.

[HT92] Dominique Hulin and Marc Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces. *Math. Ann.*, 293(2):277–315, 1992.

[ILTC01] Claude Indermitte, Thomas M. Liebling, Marc Troyanov, and Heinz Clémençon. Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and an application to biological growth. *Theoret. Comput. Sci.*, 263(1-2):263–274, 2001. Combinatorics and computer science (Palaiseau, 1997).

[Isk00] Igor Iskhakov. *On hyperbolic surface tessalations and equivariant spacelike convex polyhedral surfaces in Minkowski space*. PhD thesis, Ohio State University, 2000.

[IT92] Yoichi Imayoshi and Masahiko Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Tokyo, 1992. Translated and revised from the Japanese by the authors.

[Izm] Ivan Izmestiev. A variational proof of Alexandrov's convex cap theorem. In preparation.

[Jud98] Christopher M. Judge. Conformally converting cusps to cones. *Conform. Geom. Dyn.*, 2:107–113 (electronic), 1998.

[Lab92] François Labourie. Métriques prescrites sur le bord des variétés hyperboliques de dimension 3. *J. Differential Geom.*, 35(3):609–626, 1992.

[LS00] François Labourie and Jean-Marc Schlenker. Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante. *Math. Ann.*, 316(3):465–483, 2000.

[LT92] Feng Luo and Gang Tian. Liouville equation and spherical convex polytopes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4):1119–1129, 1992.

[McO88] Robert C. McOwen. Point singularities and conformal metrics on Riemann surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(1):222–224, 1988.

[Nag88] Subhashis Nag. *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. A Wiley-Interscience Publication.

[O'N83] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[Pog56] Alexei V. Pogorelov. Extensions of the theorem of Gauss on spherical representation to the case of surfaces of bounded extrinsic curvature. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)*, 111:945–947, 1956.

[Pog73] Alexei V. Pogorelov. *Extrinsic geometry of convex surfaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973. Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 35.

[Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[RH93] Igor Rivin and Craig D. Hodgson. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. *Invent. Math.*, 111(1):77–111, 1993.

[RHD06] Roland K. W. Roeder, John H. Hubbard, and William D. Dunbar. Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra, 2006. arXiv:math.GT/0601146 - To appear in the Annales de l'Institut Fourier.

[Riv] Igor Rivin. Extra-large metrics. arXiv:math.GT/0509320.

[Riv86] Igor Rivin. *On geometry of convex polyhedra in hyperbolic 3-space*. PhD thesis, Princeton University, June 1986.

[Riv96] Igor Rivin. A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. *Ann. of Math. (2)*, 143(1):51–70, 1996.

[Rou04] Mathias Rousset. Sur la rigidité de polyèdres hyperboliques en dimension 3: cas de volume fini, cas hyperidéal, cas fuchsien. *Bull. Soc. Math. France*, 132(2):233–261, 2004.

[Sab92] Idzhad Kh. Sabitov. Local theory of bendings of surfaces [MR1039820 (91c:53004)]. In *Geometry, III*, volume 48 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 179–256. Springer, Berlin, 1992.

[Sab04] Idzhad Kh. Sabitov. Around the proof of the Legendre-Cauchy lemma on convex polygons. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 45(4):892–919, 2004.

[Sau35] Robert Sauer. Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen. *Math. Ann.*, 111(1):71–82, 1935.

[Scha] Jean-Marc Schlenker. Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary. arXiv:math.GT/0111136.

[Schb] Jean-Marc Schlenker. Hyperideal polyhedra in hyperbolic manifolds. arXiv:math.GT/0212355.

[Sch96] Jean-Marc Schlenker. Surfaces convexes dans des espaces lorentziens à courbure constante. *Comm. Anal. Geom.*, 4(1-2):285–331, 1996.

[Sch98a] Jean-Marc Schlenker. Convex surfaces in Lorentzian space-forms. Avaible on http://www.picard.ups-tlse.fr/ schlenker/texts/expos.html, 1998.

[Sch98b] Jean-Marc Schlenker. Métriques sur les polyèdres hyperboliques convexes. *J. Differential Geom.*, 48(2):323–405, 1998.

[Sch98c] Jean-Marc Schlenker. Réalisations de surfaces hyperboliques complètes dans H^3. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3):837–860, 1998.

[Sch00] Jean-Marc Schlenker. Immersions isométriques de surfaces régulières et polyèdrales. Avaible on http://www.picard.ups-tlse.fr/ schlenker/texts/expos.html, 2000.

[Sch01] Jean-Marc Schlenker. Convex polyhedra in Lorentzian space-forms. *Asian J. Math.*, 5(2):327–363, 2001.

[Sch03] Jean-Marc Schlenker. Des immersions isométriques de surfaces aux variétés hyperboliques à bord convexe. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 21. Année 2002–2003*, volume 21 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 165–216. Univ. Grenoble I, Saint, 2003.

[Sch04a] Jean-Marc Schlenker. La conjecture des soufflets (d'après I. Sabitov). *Astérisque*, (294):vii, 77–95, 2004.

[Sch04b] Jean-Marc Schlenker. Small deformations of polygons and polyhedra. math.DG/0410058. To appear, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2004.

[Sch05] Jean-Marc Schlenker. A rigidity criterion for non-convex polyhedra. *Discrete Comput. Geom.*, 33(2):207–221, 2005.

[Sch06] Jean-Marc Schlenker. Hyperbolic manifolds with convex boundary. *Invent. Math.*, 163(1):109–169, 2006.

[Sco83] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.

[Spi79a] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Spi79b] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Spi79c] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. V*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[SW] Franco Saliola and Walter Whiteley. Some notes on the equivalence of first-order rigidity in various geometries. Communication personnelle de W. Whiteley.

[Tay96] Michael E. Taylor. *Partial differential equations. II*, volume 116 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Qualitative studies of linear equations.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

[Thu98] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

[Tro91] Marc Troyanov. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):793–821, 1991.

[Tro92] Anthony J. Tromba. *Teichmüller theory in Riemannian geometry*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. Lecture notes prepared by Jochen Denzler.

[UY00] Masaaki Umehara and Kotaro Yamada. Metrics of constant curvature 1 with three conical singularities on the 2-sphere. *Illinois J. Math.*, 44(1):72–94, 2000.

[Vol74] Ju. A. Volkov. A generalization of the Darboux-Sauer and Pogorelov theorems. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 45:63–67, 118, 1974. Problems in global geometry. Reprinted in Journal of Mathematical Sciences, Springer New York, Volume 10, Number 3 / September, 1978, pp 444–448. Available at www.springerlink.com/index/Q5XV1W82P3G41N82.pdf.

[Zeg05] Abdelghani Zeghib. Histoire des immersions isométriques. In *Géométrie au XX e siècle*. J. Kouneiher , D. Flament , P. Nabonnand , J. Szczeciniarz, Hermann, Paris, 2005.

[ZVC80] Heiner Zieschang, Elmar Vogt, and Hans-Dieter Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups*, volume 835 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980. Translated from the German by John Stillwell.

Réalisation de métriques sur les surfaces compactes

Résumé

Un *polyèdre fuchsien* de l'espace hyperbolique est une surface polyèdrale invariante sous l'action d'un groupe fuchsien d'isométries (c.a.d. un groupe d'isométries qui laissent globalement invariante une surface totalement géodésique et sur laquelle il agit de manière cocompacte). La métrique induite sur un polyèdre fuchsien convexe est isométrique à une métrique hyperbolique avec des singularités coniques de courbure singulière positive sur une surface compacte de genre > 1. On démontre que ces métriques sont en fait réalisées par un unique polyèdre fuchsien convexe (modulo les isométries globales). Ce résultat étend un théorème célèbre de A.D. Alexandrov.

On montre aussi que chaque métrique à courbure constante avec des courbures singulières *négatives* sur une surface compacte de genre > 1 peut-être réalisée par un unique polyèdre "fuchsien" convexe dans un espace modèle lorentzien.

Finalement on présente des extensions possibles de ces résultats, ce qui amène à des énoncés généraux sur la réalisation de métriques sur les surfaces.

Mots-clés : Alexandrov, convexe, fuchsien, polyèdres, réalisation, rigidité infinitésimale, singularités coniques, Pogorelov.

Realisation of metrics on compact surfaces

Abstract

A *Fuchsian polyhedron* in hyperbolic space is a polyhedral surface invariant under the action of a Fuchsian group of isometries (i.e. a group of isometries leaving globally invariant a totally geodesic surface, on which it acts cocompactly). The induced metric on a convex Fuchsian polyhedron is isometric to a hyperbolic metric with conical singularities of positive singular curvature on a compact surface of genus > 1. We prove that these metrics are actually realised by exactly one convex Fuchsian polyhedron (up to global isometries). This extends a famous theorem of A.D. Alexandrov.

We also prove that any constant curvature metric with conical singularities of *negative* singular curvature on a compact surface of genus > 1 can be realised by a unique convex "Fuchsian" polyhedron in a Lorentzian space-form.

Finally we present some possible expansion of these results, and this leads to general statements about realisation of metrics on surfaces.

Key-words: Alexandrov, conical singularities, convex, Fuchsian, infinitesimal rigidity, Pogorelov, polyhedra, realisation.