

Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec des conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d'écoulements diphasiques

Isabelle Ramière

DEN/DTN/SMTM/LMTR - CEA Cadarache
LATP - CMI Marseille - UMR 6632 CNRS

Directeur de thèse : Philippe Angot, Encadrant CEA : Michel Belliard

Soutenance de thèse, 26 septembre 2006

- Introduction sur les méthodes de domaine fictif,
- Présentation de deux méthodes originales de type domaine fictif,
 - ◆ Modélisation et traitement des conditions aux limites immergées,
 - ◆ Implémentation,
 - ◆ Résultats numériques,
- Analyse théorique en maillage non adapté à la frontière,
- Application industrielle 3D,
- Conclusion et perspectives.



Introduction

- Approche de domaine fictif
- But et étapes de la thèse
- Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

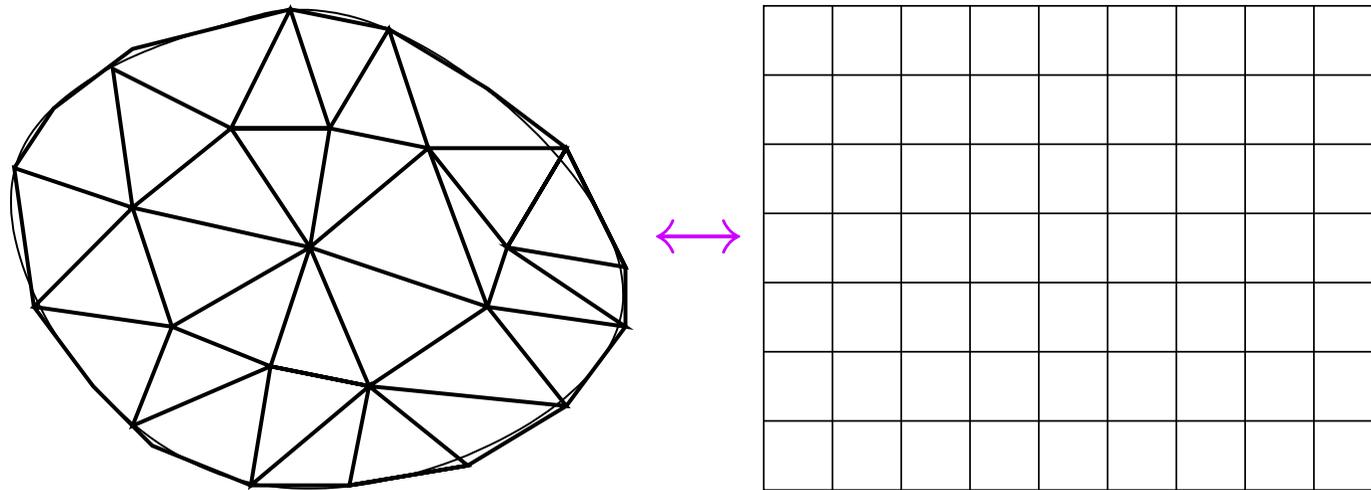
INTRODUCTION

Approche de domaine fictif



■ *Motivations*

domaine de calcul \leftrightarrow maillage utilisé ??



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Approche de domaine fictif



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

● Intérêt industriel

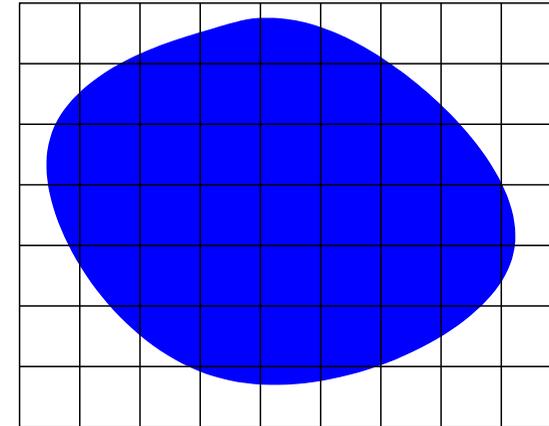
Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Idée fondatrice* ([Saul'ev 1963])
 - ◆ domaine originel **immergé** dans un domaine plus grand et plus simple : **domaine fictif**
 - ◆ **domaine de calcul** = domaine fictif



Approche de domaine fictif



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

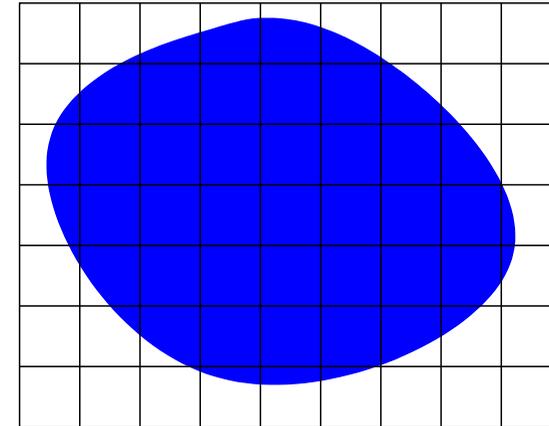
Analyse

Application industrielle

Conclusion

■ *Idée fondatrice* ([Saul'ev 1963])

- ◆ domaine originel **immergé** dans un domaine plus grand et plus simple : **domaine fictif**
- ◆ **domaine de calcul** = domaine fictif



■ *Bibliographie*

- ◆ **approche interface «fine»** :
 - méthode de pénalisation [Saul'ev 1963, Kopčenov 1968, Angot *et al.* 1999],
 - multiplicateurs de Lagrange [Glowinski 1992-1999],
 - méthode d'interface immergée (I.I.M) [Leveque et Li 1994, Li 2003],
 - domaine tronqué (C.G.E.M.) [Johansen et Colella 1998, McCorquodale *et al.* 2001].
- ◆ **approche interface «diffuse»** :
 - frontière en "anneau" [Rukhovets 1967],
 - méthode de frontière immergée (I.B.M) [Peskin 1972-2002],
 - Fat Boundary Method [Maury 2001].

But et étapes de la thèse



Introduction

● Approche de domaine fictif

● **But et étapes de la thèse**

● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Méthode de domaine fictif avec un bon rapport précision/coût :*
 - ◆ traiter **toutes les C.L. immergées générales** (Dirichlet, Robin, Neumann), éventuellement **mixtes**,
 - ◆ frontières mobiles et/ou déformables,
 - ◆ un **unique maillage cartésien**, pas d'inconnues locales supplémentaires, pas de modification locale du schéma numérique \Rightarrow méthode du **premier ordre**,
 - ◆ raffinement de maillage.

But et étapes de la thèse



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Méthode de domaine fictif avec un bon rapport précision/coût :*
 - ◆ traiter toutes les C.L. immergées générales (Dirichlet, Robin, Neumann), éventuellement mixtes,
 - ◆ frontières mobiles et/ou déformables,
 - ◆ un unique maillage cartésien, pas d'inconnues locales supplémentaires, pas de modification locale du schéma numérique \Rightarrow méthode du premier ordre,
 - ◆ raffinement de maillage.
- *2 types d'approximation de la frontière immergée :*
 - ◆ Interface diffuse,
 - ◆ Interface «fine».

But et étapes de la thèse



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Méthode de domaine fictif avec un bon rapport précision/coût :*
 - ◆ traiter **toutes les C.L. immergées générales** (Dirichlet, Robin, Neumann), éventuellement **mixtes**,
 - ◆ frontières mobiles et/ou déformables,
 - ◆ un **unique maillage cartésien**, pas d'inconnues locales supplémentaires, pas de modification locale du schéma numérique \Rightarrow méthode du **premier ordre**,
 - ◆ raffinement de maillage.
- *2 types d'approximation de la frontière immergée :*
 - ◆ Interface diffuse,
 - ◆ Interface «fine».
- *Plusieurs étapes :*
 - ◆ Problèmes de diffusion,
 - ◆ Problèmes de convection-diffusion,
 - ◆ Application industrielle 3D.

Intérêt industriel



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

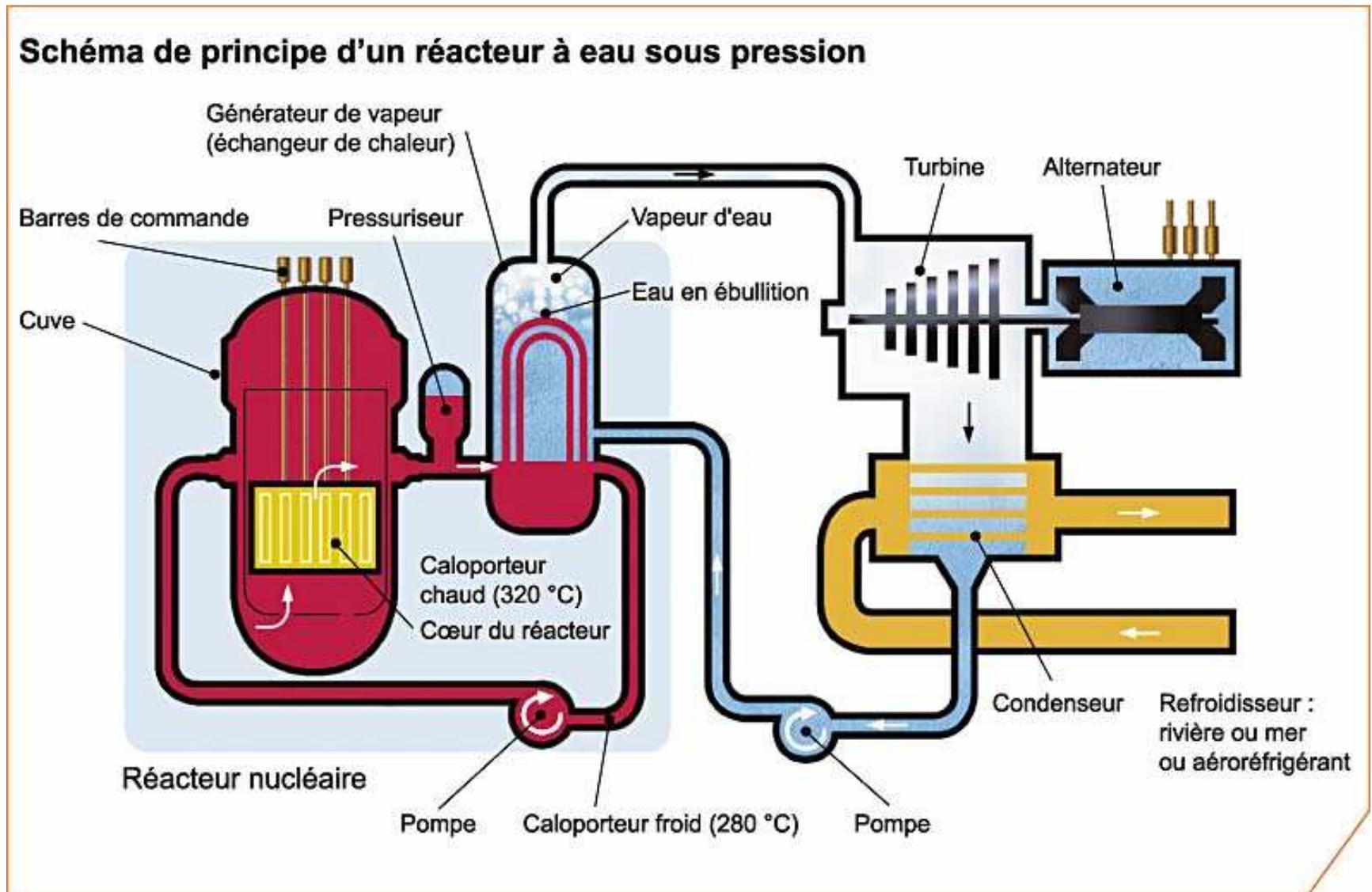
● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion



Intérêt industriel



Introduction

● Approche de domaine fictif

● But et étapes de la thèse

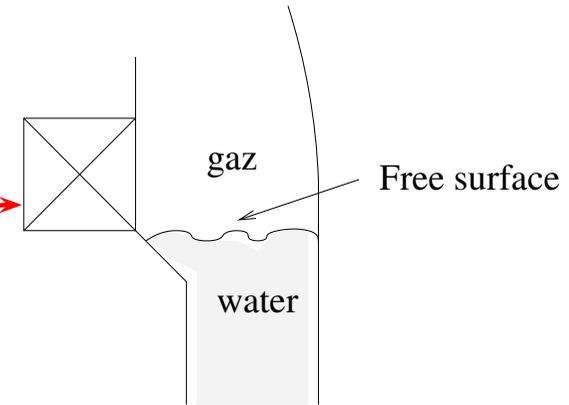
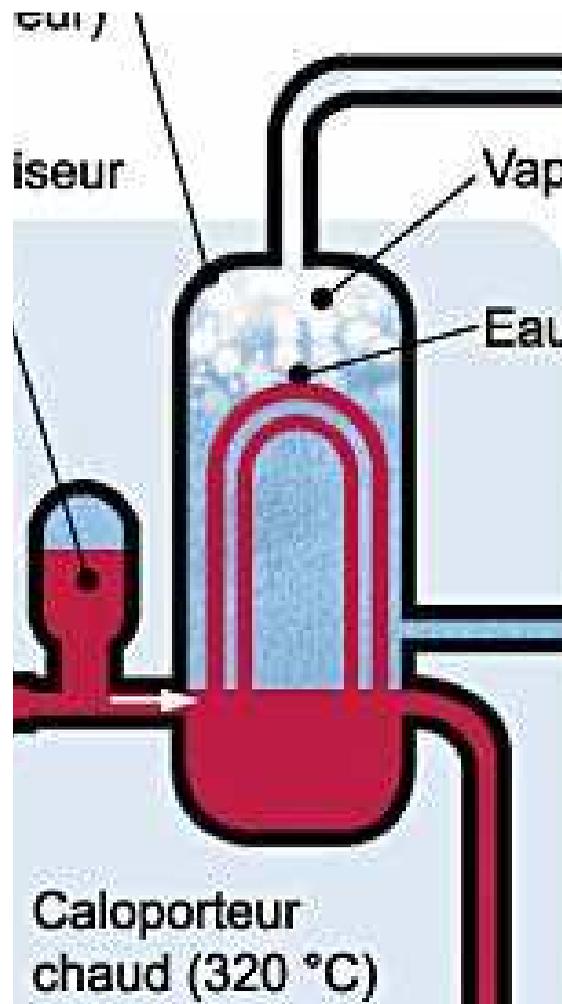
● Intérêt industriel

Méthodes de domaine fictif

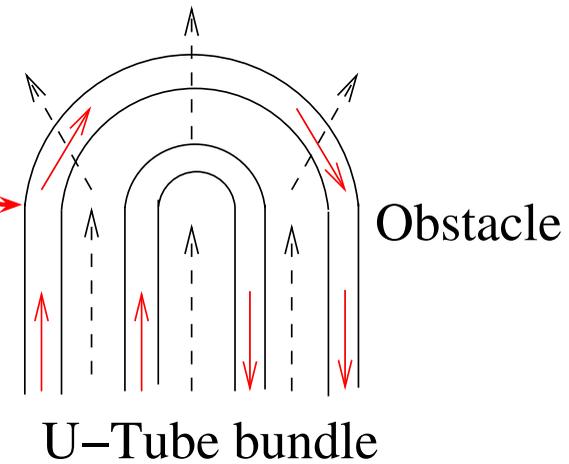
Analyse

Application industrielle

Conclusion



Free medium





Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

MISE EN PLACE ET VALIDATION DE DEUX METHODES ORIGINALES DE DOMAINE FICTIF

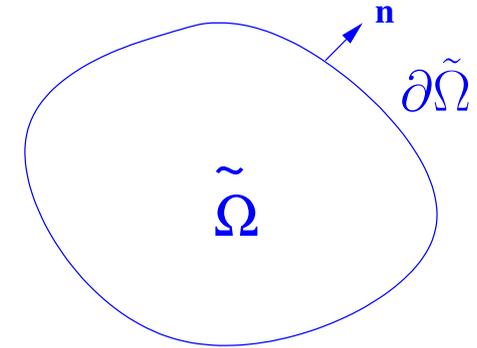
Présentation du problème modèle



■ Problème original ($\tilde{\mathcal{P}}$) sur $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$:

Pour $\tilde{\mathbf{a}} \in (L^\infty(\tilde{\Omega}))^{d \times d}$, $\tilde{\mathbf{v}} \in (L^\infty(\tilde{\Omega}))^d$, $\tilde{b} \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ et $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$, trouver $\tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega})$ tel que

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \nabla \tilde{u}) + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}} \tilde{u}) + \tilde{b} \tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \text{Conditions aux Limites (C.L.)} & \text{sur } \partial \tilde{\Omega} \end{cases}$$



avec C.L.

- Dirichlet : $\tilde{u} = u_D$, $u_D \in H^{1/2}(\partial \tilde{\Omega})$
- Robin (ou Neumann) : $-(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \nabla \tilde{u}) \cdot \mathbf{n} = \alpha_R \tilde{u} + g_R$,
 $0 \leq \alpha_R \in L^\infty(\partial \tilde{\Omega})$, et $g_R \in L^2(\partial \tilde{\Omega})$.

Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

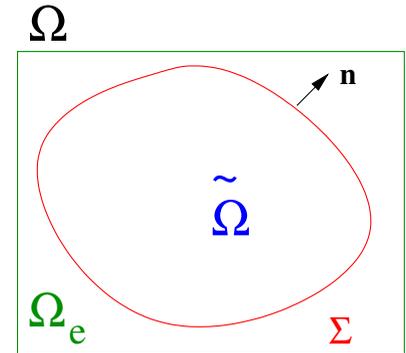
Présentation du problème modèle



- **Problème original** ($\tilde{\mathcal{P}}$) sur $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$:

Pour $\tilde{\mathbf{a}} \in (L^\infty(\tilde{\Omega}))^{d \times d}$, $\tilde{\mathbf{v}} \in (L^\infty(\tilde{\Omega}))^d$, $\tilde{b} \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ et $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$, trouver $\tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega})$ tel que

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \nabla \tilde{u}) + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}} \tilde{u}) + \tilde{b} \tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \text{Conditions aux Limites (C.L.)} & \text{sur } \partial \tilde{\Omega} \end{cases}$$



avec C.L.

$$\begin{cases} \bullet \text{ Dirichlet : } \tilde{u} = u_D, u_D \in H^{1/2}(\partial \tilde{\Omega}) \\ \bullet \text{ Robin (ou Neumann) : } -(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \nabla \tilde{u}) \cdot \mathbf{n} = \alpha_R \tilde{u} + g_R, \\ \quad 0 \leq \alpha_R \in L^\infty(\partial \tilde{\Omega}), \text{ et } g_R \in L^2(\partial \tilde{\Omega}). \end{cases}$$

- Approche **domaine fictif** : $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Sigma \cup \Omega_e$

- ◆ Problème fictif (\mathcal{P}) résolu sur Ω ?
- ◆ Conditions de transmissions appropriées sur Σ , coefficients sur le domaine extérieur Ω_e et C.L. sur $\partial \Omega$?

Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Domaine fictif avec interface diffuse - [CMAME 06]



Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle

- Interface diffuse

- Interface fine

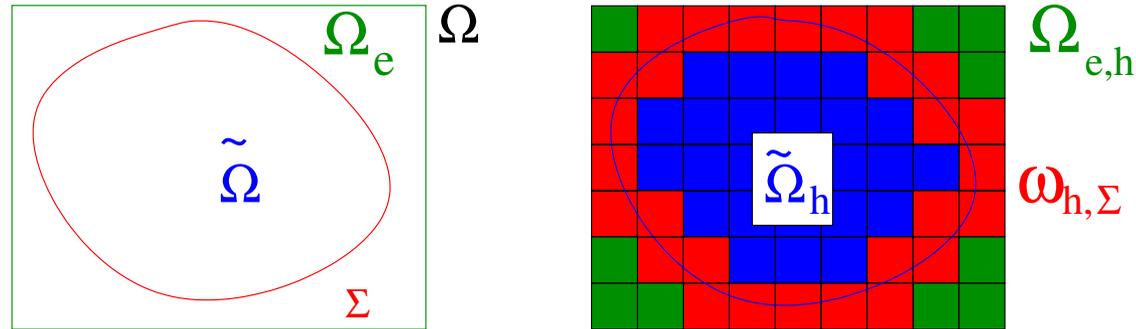
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- Approximation diffuse $\omega_{h,\Sigma}$ de la frontière immergée Σ :



- Problème fictif (\mathcal{P}) résolu sur Ω :

Trouver $u_\eta^h \in H^1(\Omega)$ tel que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot \nabla u_\eta^h) + \operatorname{div}(\mathbf{v} u_\eta^h) + b u_\eta^h = f & \text{dans } \Omega \\ \text{C.L. de } (\tilde{\mathcal{P}}) & \text{sur } \tilde{\Gamma} = \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega} \\ \text{C.L. appropriées pour } u_\eta^h & \text{sur } \Gamma_e = \partial\Omega \setminus \partial\tilde{\Omega} \end{cases}$$

avec $\mathbf{a} \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$, $\mathbf{v} \in (L^\infty(\Omega))^d$, $b \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, tels que

$$\mathbf{a}|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{\mathbf{a}}|_{\tilde{\Omega}_h}, \quad \mathbf{v}|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{\mathbf{v}}|_{\tilde{\Omega}_h}, \quad b|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{b}|_{\tilde{\Omega}_h}, \quad f|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{f}|_{\tilde{\Omega}_h}$$

Traitement des C.L. immergées



- *C.L. de Dirichlet* : $\tilde{u}|_{\Sigma} = u_D$

Pénalisation L^2 ou H^1 [Angot *et al* 1999] de $\omega_{h,\Sigma}$ ou de $\Omega_{e,h}$:

$0 < \eta \ll 1$ coefficient de pénalisation

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{1}{\eta}, f = \frac{1}{\eta} u_D \Rightarrow \text{Pénalisation } L^2 \\ + \\ \mathbf{a} = \frac{1}{\eta} \mathbf{Id} \Rightarrow \text{Pénalisation } H^1 \end{array} \right.$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Traitement des C.L. immergées



- Introduction

- Méthodes de domaine fictif
 - Présentation du problème modèle
 - **Interface diffuse**
 - Interface fine
 - Résultats numériques avec raffinement

- Analyse

- Application industrielle

- Conclusion

- *C.L. de Dirichlet* : $\tilde{u}|_{\Sigma} = u_D$

Pénalisation L^2 ou H^1 [Angot *et al* 1999] de $\omega_{h,\Sigma}$ ou de $\Omega_{e,h}$:

$0 < \eta \ll 1$ coefficient de pénalisation

$$\begin{cases} b = \frac{1}{\eta}, f = \frac{1}{\eta} u_D \Rightarrow \text{Pénalisation } L^2 \\ + \\ \mathbf{a} = \frac{1}{\eta} \mathbf{Id} \Rightarrow \text{Pénalisation } H^1 \end{cases}$$

- *C.L. de Robin* : $-(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \nabla \tilde{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} = \alpha_R \tilde{u}|_{\Sigma} + g_R$

Problème de transmission entre $\tilde{\Omega}$ et Ω_e :

$$\psi = \mathbf{a}, \mathbf{v}, \dots \quad \psi = \begin{cases} \tilde{\psi} & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \psi_e & \text{dans } \Omega_e \end{cases} \quad [[\psi]]_{\Sigma} = \psi^+ - \psi^-$$

$$-div(\mathbf{a} \cdot \nabla u) + div(\mathbf{v} u) + bu = f - [[(\mathbf{a} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n}]]_{\Sigma} \delta_{\Sigma} + [[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]]_{\Sigma} u \delta_{\Sigma}$$

$$-(\mathbf{a} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma}^- = \alpha_R u|_{\Sigma} + g_R \quad \text{et} \quad -(\mathbf{a} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma}^+ \simeq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{a}|_{\Omega_e} = \eta \mathbf{Id}$$

Coefficient caractéristique ϵ_h pour approcher δ_{Σ} par une suite régularisante sur $\omega_{h,\Sigma}$.

Principe du calcul de ϵ_h



Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

$$\int_{\Sigma} \{ \alpha_R u_{\eta} + g_R + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) u_{\eta} \} ds = \int_{\omega_{h,\Sigma}} \frac{\alpha_R u_{\eta}^h + g_R + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u_{\eta}^h}{\epsilon_h} dx$$

■ Approximation globale de ϵ_h :

$$\int_{\Sigma} ds = \int_{\omega_{h,\Sigma}} \frac{1}{\epsilon_h} dx$$

★ ϵ_h constant dans $\omega_{h,\Sigma}$:

$$\epsilon_h = \frac{\text{mes}(\omega_{h,\Sigma})}{\text{mes}(\Sigma)}$$

★ ϵ_h pondéré par τ :

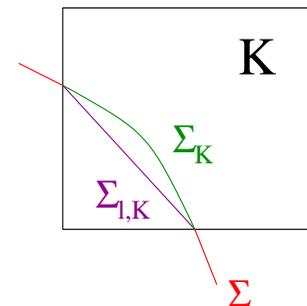
$$\tau_K = \frac{\text{volume de } \tilde{\Omega} \text{ inclus dans } K}{\text{volume de l'élément } K}$$

$$\epsilon_K = \frac{\sum_{K \subset \omega_{h,\Sigma}} [\tau_K \cdot \text{mes}(K)]}{\tau_K \cdot \text{mes}(\Sigma)}$$

■ Approximation locale de ϵ_h :

$$\int_{\Sigma_K} ds = \int_K \frac{1}{\epsilon_K} dx$$

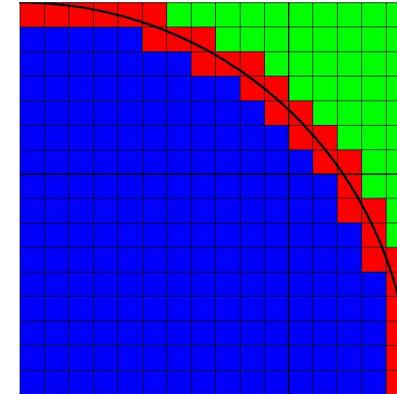
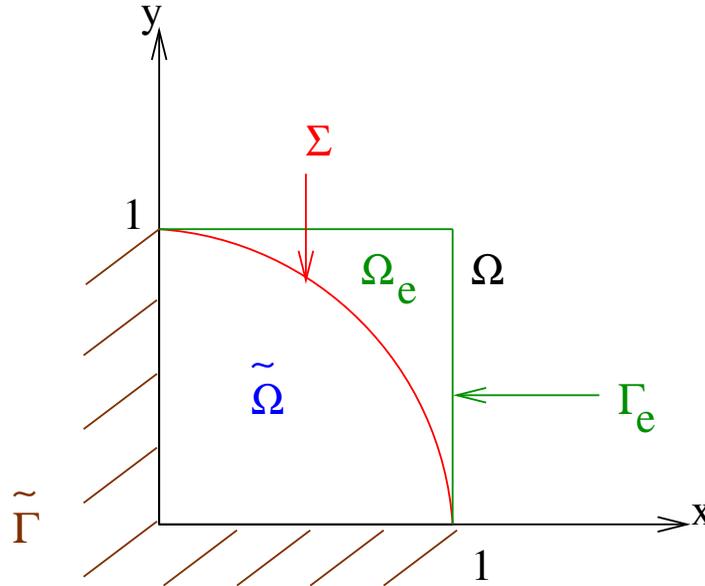
$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\Sigma_{l,K})}$$



Applications numériques



- *Domaine d'étude* : un quart de disque.



- *Schéma numérique*

- ◆ méthode d'éléments finis Q_1 ,
- ◆ terme de stabilisation SUPG (si convection),
- ◆ algorithmes $\left\{ \begin{array}{l} \text{GC avec préconditionnement diagonal (diffusion),} \\ \text{GCS préconditionné ILLU (convection-diffusion).} \end{array} \right.$

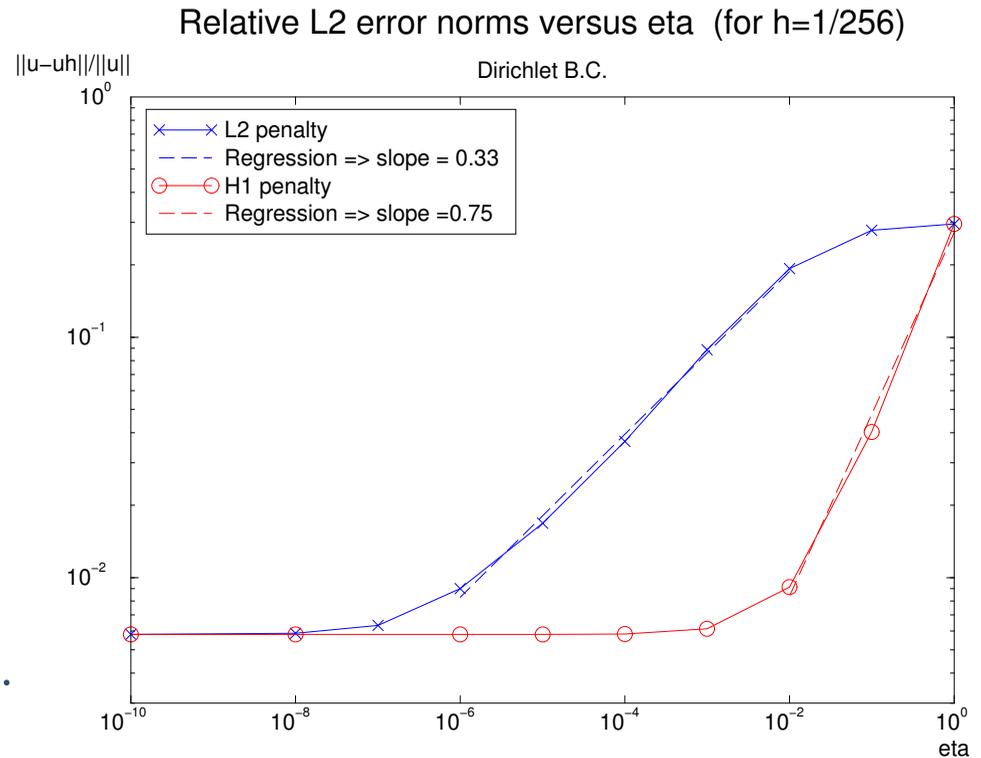
Problème de diffusion

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 4 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = u_D = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Solution analytique :

$$\tilde{u} = 1 - r^2 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\Rightarrow \mathcal{O}(\eta^{\frac{1}{3}})$ pour la pénalisation L^2 ,
 $\Rightarrow \mathcal{O}(\eta^{\frac{3}{4}})$ pour la pénalisation H^1 .



Problèmes tests



Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

■ *Problème de Dirichlet :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{u} + \operatorname{div}\left(\frac{r}{2} \mathbf{e}_r \tilde{u}\right) = 4 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = \mathbf{u}_D = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Solution analytique : $\tilde{u} = 4 \left(1 - \exp\left(\frac{r^2 - 1}{4}\right)\right)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

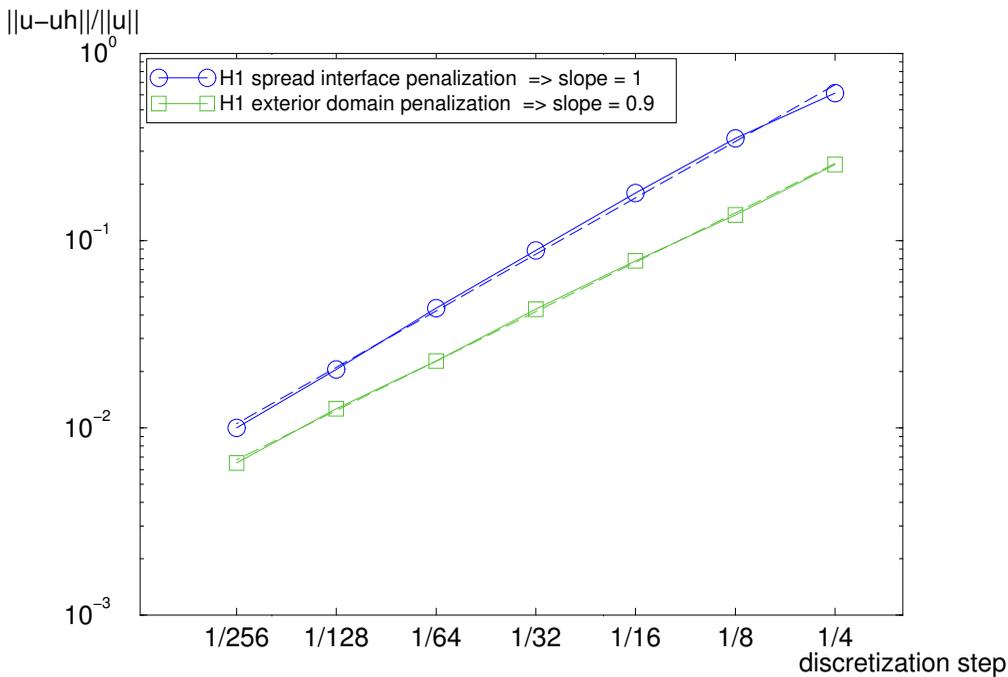
■ *Problème de Robin :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{u} + \operatorname{div}(2r^3 \mathbf{e}_r \tilde{u}) = 16r^2 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \tilde{u} + \mathbf{3} \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Solution analytique : $\tilde{u} = 2 - \frac{5}{3} \exp\left(\frac{r^4 - 1}{2}\right)$.

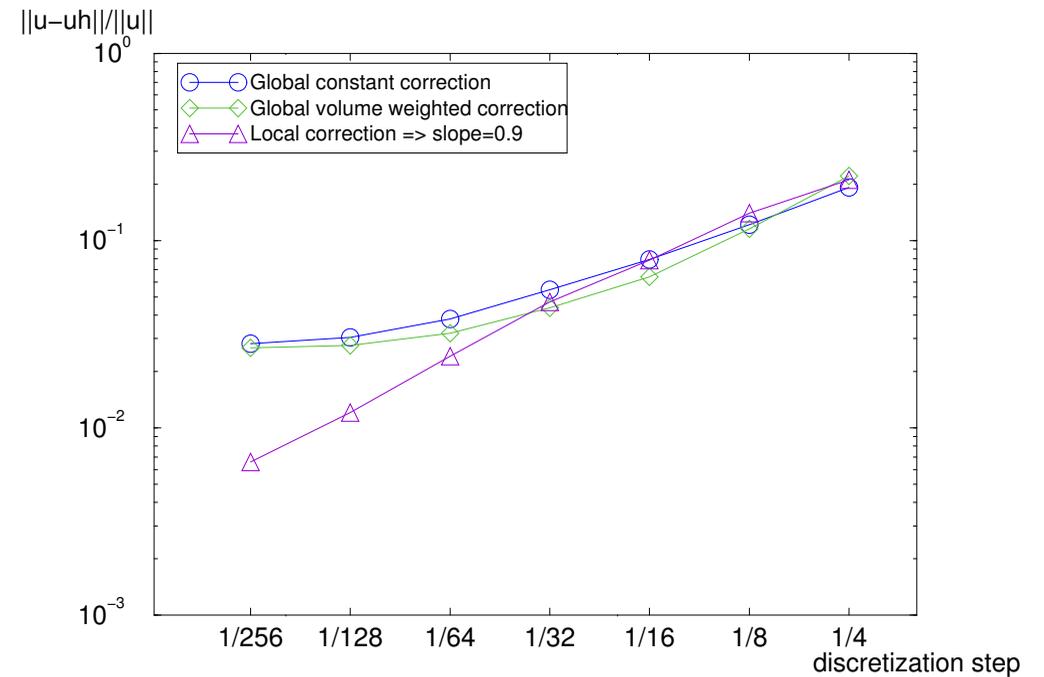
Convergence en maillage - $\eta = 10^{-12}$

Relative L2 error norms – Dirichlet B.C.



(a) Problème Dirichlet

Relative L2 error norms – Robin B.C.



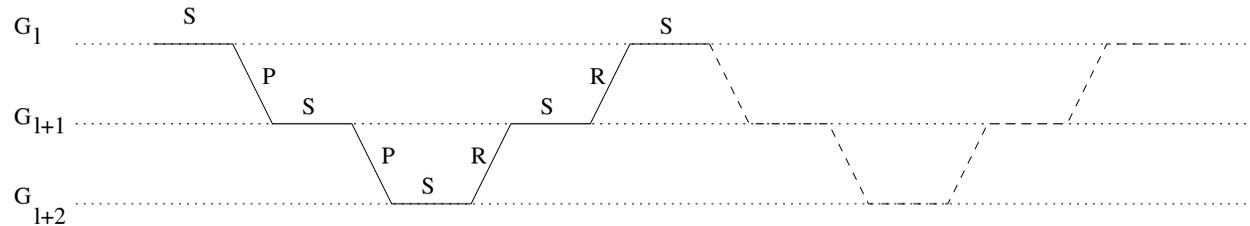
(b) Problème Robin

\Rightarrow Méthodes en $\mathcal{O}(h)$.

Raffinement local multi-niveaux



■ Procédure multi-grille



S : Solveur
P : Prolongement, détermination des C.L. sur la grille fine
R : Restriction locale de la solution ou du résidu sur la grille grossière

■ Algorithme *L.D.C.* [Hackbush 1984]

◆ descente :

interpolation des conditions aux limites (opérateur de prolongement),
résolution du problème sur la sous-grille.

◆ remontée :

restriction de la solution fine sur les noeuds intérieurs (opérateur de restriction),
calcul du résidu à partir de la solution restreinte,
résolution de la solution corrigée en ajoutant le résidu au second membre.

Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Raffinement local multi-niveaux



Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

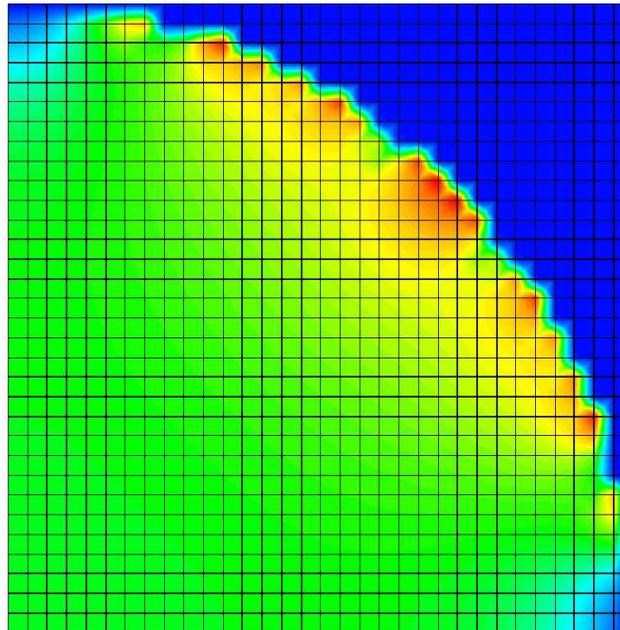
Analyse

Application industrielle

Conclusion

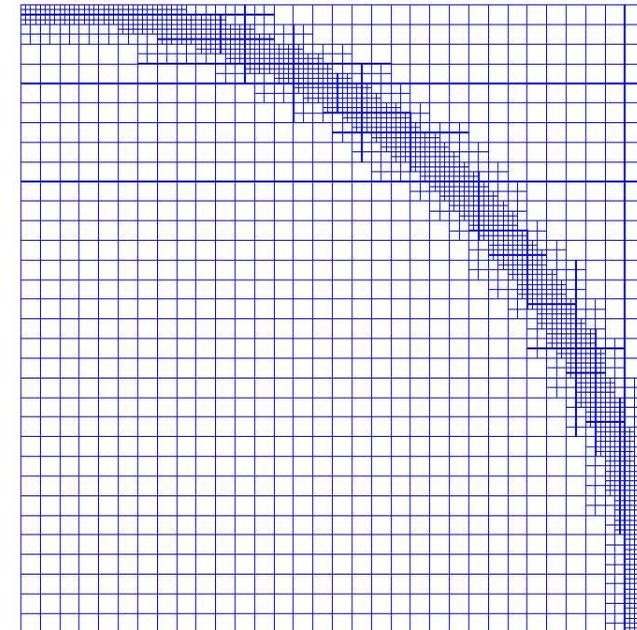
■ Localisation de l'erreur

Dirichlet - Pénalisation H1 ext

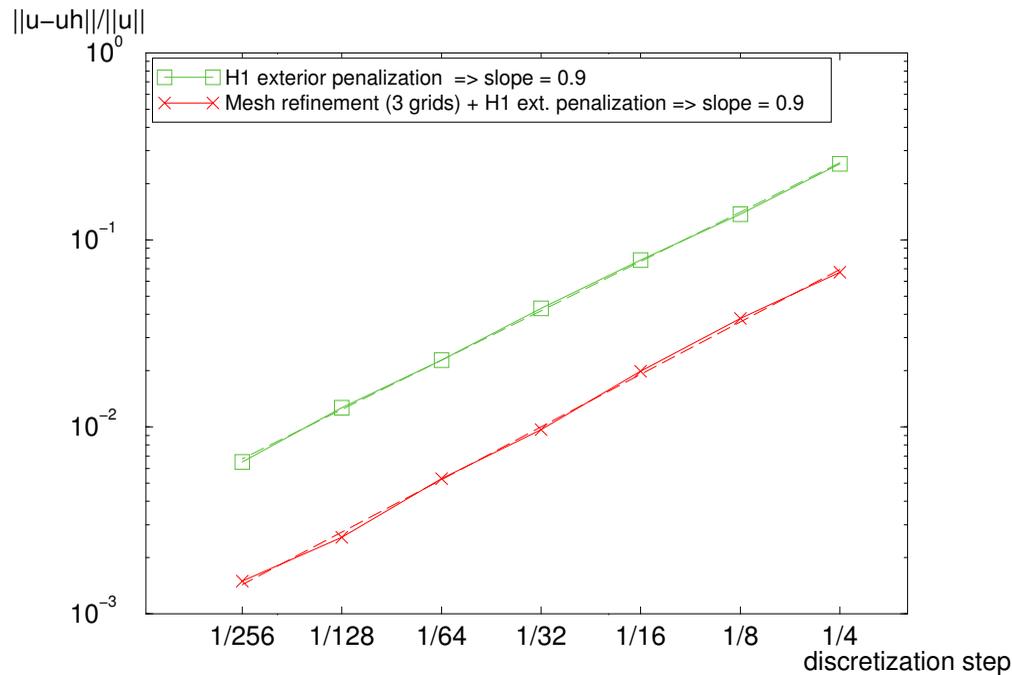


■ Sous-grilles emboîtées

$$h_{l+1} = \frac{h_l}{2}$$

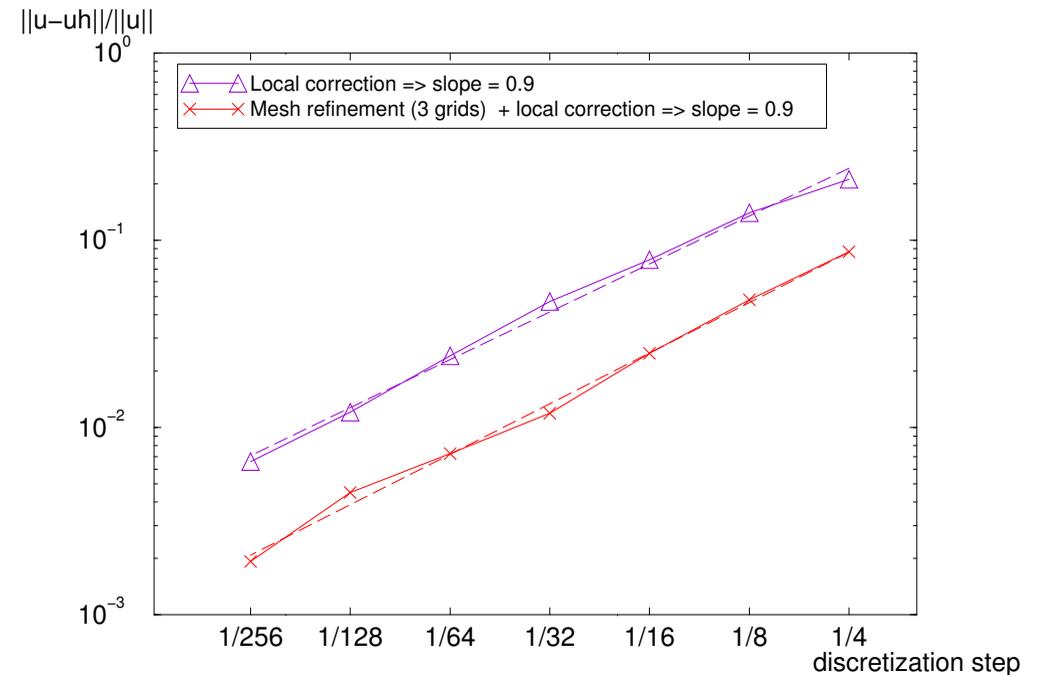


Relative L2 error norms – F.D.M. + A.M.R. – Dirichlet B.C.



(a) Problème Dirichlet

Relative L2 error norms – F.D.M. + A.M.R. – Robin B.C.



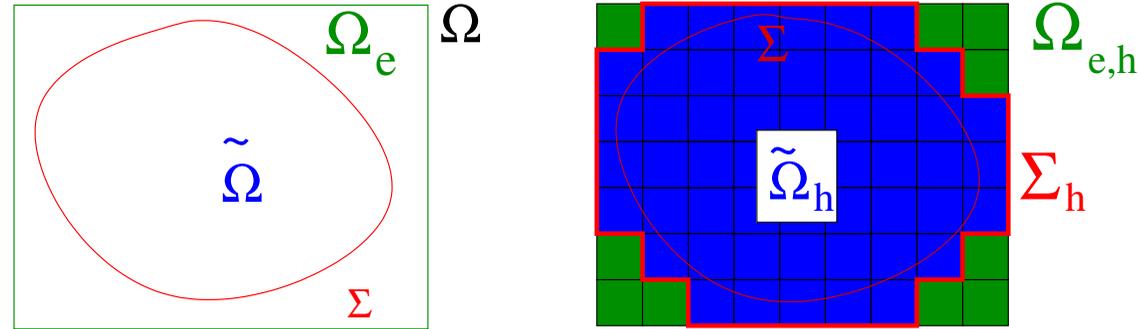
(b) Problème Robin

⇒ Méthodes en $\mathcal{O}(h_f)$ où h_f : pas de maillage de grille locale de raffinement la plus fine.

Domaine fictif avec interface fine - [R., Angot, Belliard 06]



- Interface approchée fine Σ_h de la frontière immergée Σ :



- Modèle avec saut de flux et de solution [Angot 2003, 2005].

$$\Sigma_h^i = \Sigma_h \setminus \partial\Omega, \text{ moyenne : } \bar{\psi}|_{\Sigma_h^i} = (\psi^+ + \psi^-)/2, \text{ saut : } [[\psi]]_{\Sigma_h^i} = (\psi^+ - \psi^-)$$

Trouver $u_\eta^h \in H^1(\tilde{\Omega}_h \cup \Omega_{e,h})$ tel que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot \nabla u_\eta^h) + \operatorname{div}(\mathbf{v} u_\eta^h) + b u_\eta^h = f & \text{dans } \Omega \\ \text{C.L. de } (\tilde{\mathcal{P}}) & \text{sur } \tilde{\Gamma} = \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega} \\ \text{C.L. appropriées pour } u_\eta^h & \text{sur } \Gamma_e = \partial\Omega \setminus \partial\tilde{\Omega} \\ \overline{[(\mathbf{a} \cdot \nabla u_\eta^h) \cdot \mathbf{n}]}_{\Sigma_h^i} = \alpha \bar{u}_\eta^h|_{\Sigma_h^i} - q & \text{sur } \Sigma_h^i \\ (\mathbf{a} \cdot \nabla u_\eta^h) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_h^i} = \beta [[u_\eta^h]]_{\Sigma_h^i} - g & \text{sur } \Sigma_h^i \end{cases}$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Traitement des C.L. immergées



- *C.L. de Dirichlet* : $\tilde{u}|_{\Sigma} = u_D$
 - ◆ Pénalisation volumique L^2 ou H^1 sur $\Omega_{e,h}$
et pas de saut de solution sur Σ_h^i : $[[u_{\eta}^h]]_{\Sigma_h^i} = 0$ ($\beta = \frac{1}{\eta}$).
 - ◆ Pénalisation surfacique sur Σ_h^i sans contrôle extérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{1}{\eta} \Rightarrow [[u_{\eta}^h]]_{\Sigma_h^i} = 0 \\ + \\ \alpha = \frac{1}{\eta} \text{ et } q = \frac{1}{\eta} u_D \Rightarrow u_{\eta}^h|_{\Sigma_h^i} \simeq u_D \text{ sur } \Sigma_h^i. \end{array} \right.$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Traitement des C.L. immergées



- **C.L. de Dirichlet** : $\tilde{u}|_{\Sigma} = u_D$
 - ◆ Pénalisation volumique L^2 ou H^1 sur $\Omega_{e,h}$
 - et pas de saut de solution sur Σ_h^i : $[[u_{\eta}^h]]_{\Sigma_h^i} = 0$ ($\beta = \frac{1}{\eta}$).
 - ◆ Pénalisation surfacique sur Σ_h^i sans contrôle extérieur :

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{\eta} \Rightarrow [[u_{\eta}^h]]_{\Sigma_h^i} = 0 \\ + \\ \alpha = \frac{1}{\eta} \text{ et } q = \frac{1}{\eta} u_D \Rightarrow u_{\eta}^h|_{\Sigma_h^i} \simeq u_D \text{ sur } \Sigma_h^i. \end{cases}$$

- **C.L. de Robin** : $-(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \nabla \tilde{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} = \alpha_R \tilde{u}|_{\Sigma} + g_R$

On veut $-(\mathbf{a} \cdot \nabla u_{\eta}^h) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_h^-} = \frac{\alpha_R}{\epsilon_h} u_{\eta}^h|_{\Sigma_h^-} + \frac{g_R}{\epsilon_h}$ avec ϵ_h param. caract.

Variante sans contrôle extérieur (élimination de $-(\mathbf{a} \cdot \nabla u_{\eta}^h) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_h^+}$ et de $u_{\eta}^h|_{\Sigma_h^+}$ dans éq. de transmissions):

$$-(\mathbf{a} \cdot \nabla u_{\eta}^h) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_h^-} = \frac{\alpha}{2} u_{\eta}^h|_{\Sigma_h^-} + g - \frac{q}{2} \quad \text{avec } \beta = \frac{\alpha}{4}$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- **Interface fine**
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Principe du calcul de ϵ_h



Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

$$\int_{\Sigma} \{ \alpha_R \tilde{u} + g_R + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \tilde{u} \} ds = \int_{\Sigma_h} \frac{\alpha_R u_{\eta}^{h-} + g_R + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^- u_{\eta}^{h-}}{\epsilon_h} ds$$

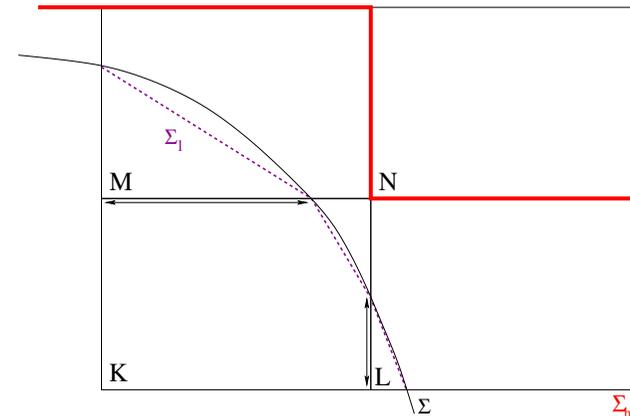
■ Correction globale :

$$\int_{\Sigma} ds = \int_{\Sigma_h} \frac{1}{\epsilon_h} ds,$$
$$\epsilon_h = \frac{\text{mes}(\Sigma_h)}{\text{mes}(\Sigma)}.$$

■ Correction locale :

$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\Sigma_{l,K})}.$$

⇒ mesure totale de Σ non prise en compte.



Principe du calcul de ϵ_h



Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

$$\int_{\Sigma} \{ \alpha_R \tilde{u} + g_R + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \tilde{u} \} ds = \int_{\Sigma_h} \frac{\alpha_R u_{\eta}^{h-} + g_R + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^- u_{\eta}^{h-}}{\epsilon_h} ds$$

■ Correction globale :

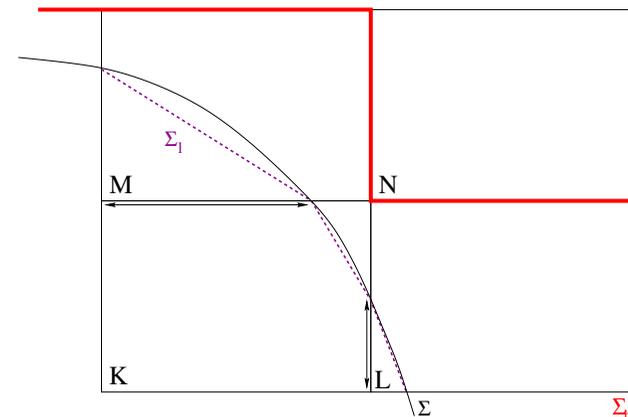
$$\int_{\Sigma} ds = \int_{\Sigma_h} \frac{1}{\epsilon_h} ds,$$

$$\epsilon_h = \frac{\text{mes}(\Sigma_h)}{\text{mes}(\Sigma)}.$$

■ Correction locale :

$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\hat{\Sigma}_{l,K})}.$$

avec $\hat{\Sigma}_{l,K}$ mesure locale corrigée.



Calcul du ϵ_h local



Introduction

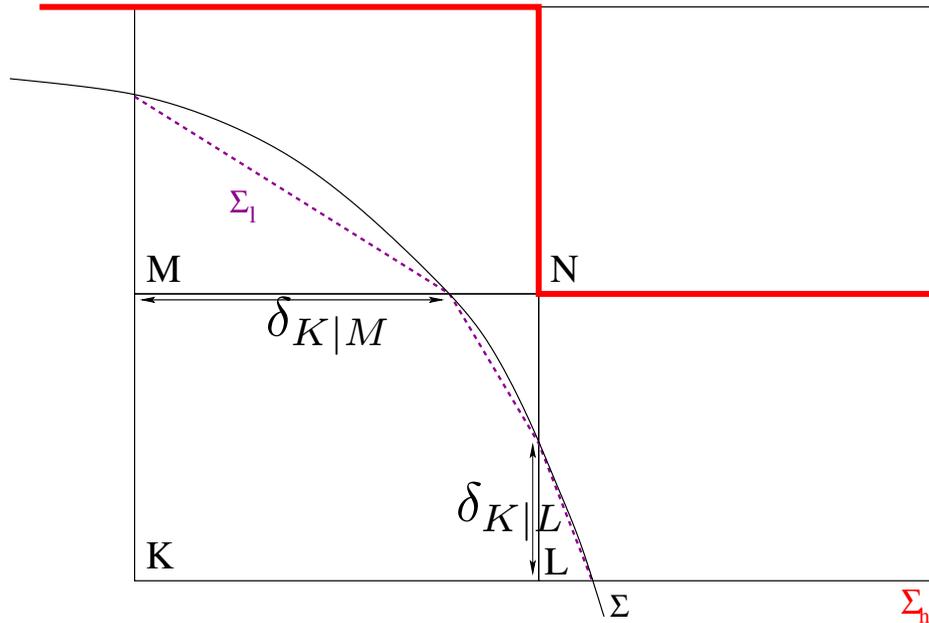
Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion



$\epsilon_h = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(h)$.
 \Rightarrow importance de prendre toute la mesure Σ en compte.

ϵ_h local proposé (et validé numériquement) : $\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\hat{\Sigma}_{l,K})}$

K est tel que $\Sigma_{h,K} = \emptyset$ alors que $\Sigma_{l,K} \neq \emptyset$.
 $\Rightarrow K \rightarrow M$ ou $K \rightarrow L$ (ou les deux).

Choix unique : $K \rightarrow M$ car $\delta_{K|M} > \delta_{K|L}$,
 $\hat{M} = M \cup K \Rightarrow \hat{\Sigma}_{l,M} = \Sigma_{l,\hat{M}} = \Sigma_{l,M} + \Sigma_{l,K}$.

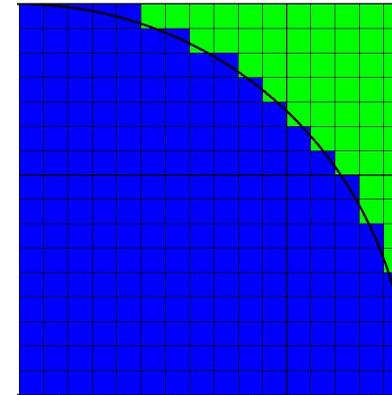
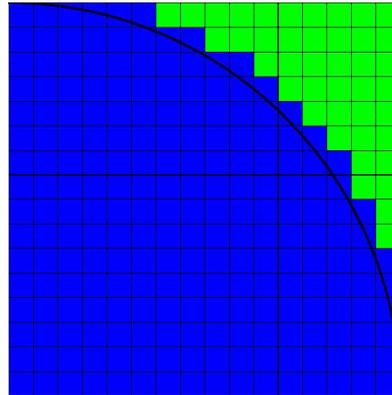
Applications numériques



■ Deux types d'interface fine approchée :

◆ interface extérieure,

◆ interface coupée.



■ Schéma numérique

- ◆ schéma aux volumes finis cell-centered avec saut de flux et solution [Angot 2003],
- ◆ schéma upstream pour le flux convectif,
- ◆ algorithme GC (diffusion) ou Bi-GCSTAB (convection-diffusion) préconditionné diagonal.

Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Problème de diffusion

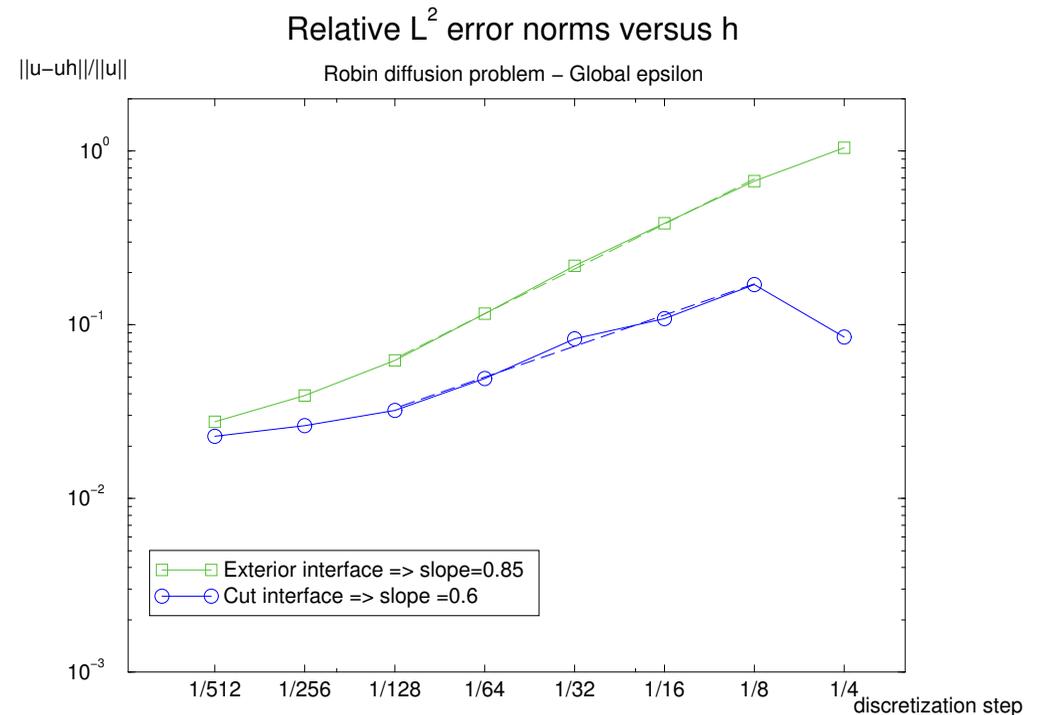
$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 16r^2 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = u + 3 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

Solution analytique :

$$\tilde{u} = 2 - r^4 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Correction globale

$$\epsilon_h = \frac{\text{mes}(\Sigma_h)}{\text{mes}(\Sigma)}.$$



Problème de diffusion

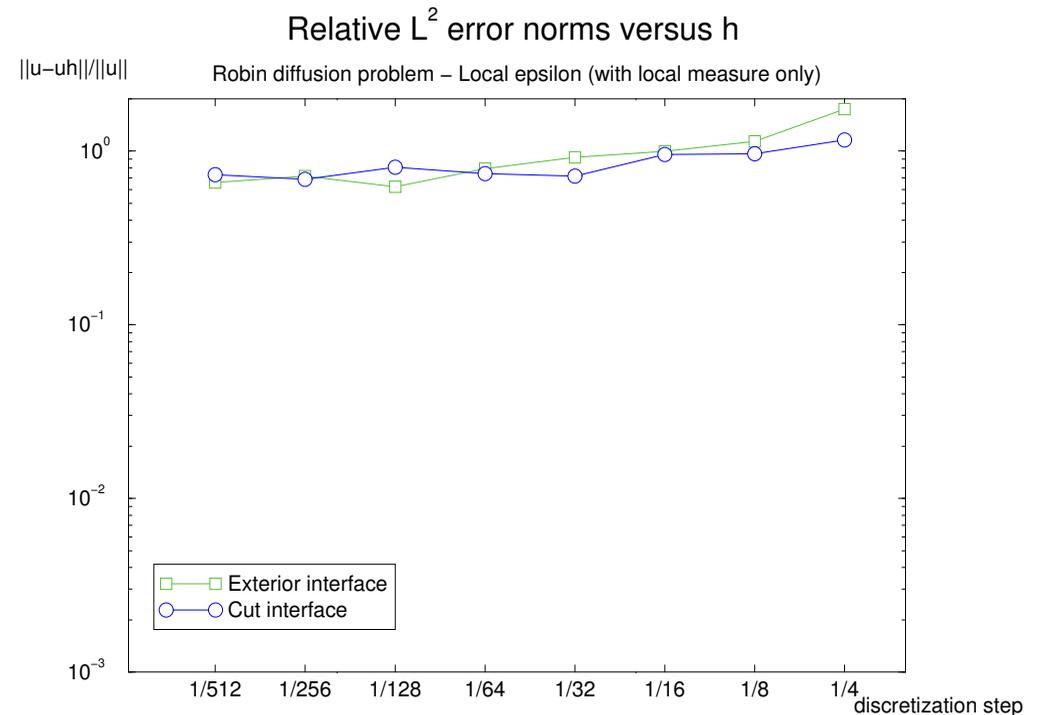
$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} &= 16r^2 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= u + 3 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

Solution analytique :

$$\tilde{u} = 2 - r^4 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Correction locale sans mesure corrigée

$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\Sigma_{l,K})}.$$



Problème de diffusion

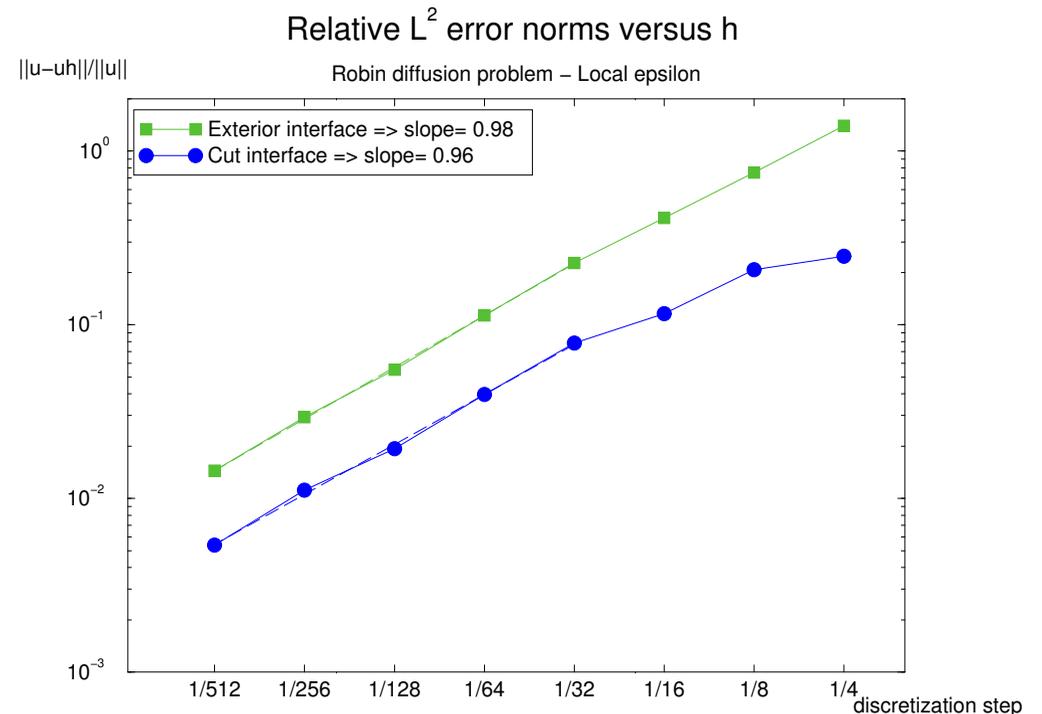
$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 16r^2 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = u + 3 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

Solution analytique :

$$\tilde{u} = 2 - r^4 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Correction locale AVEC mesure corrigée

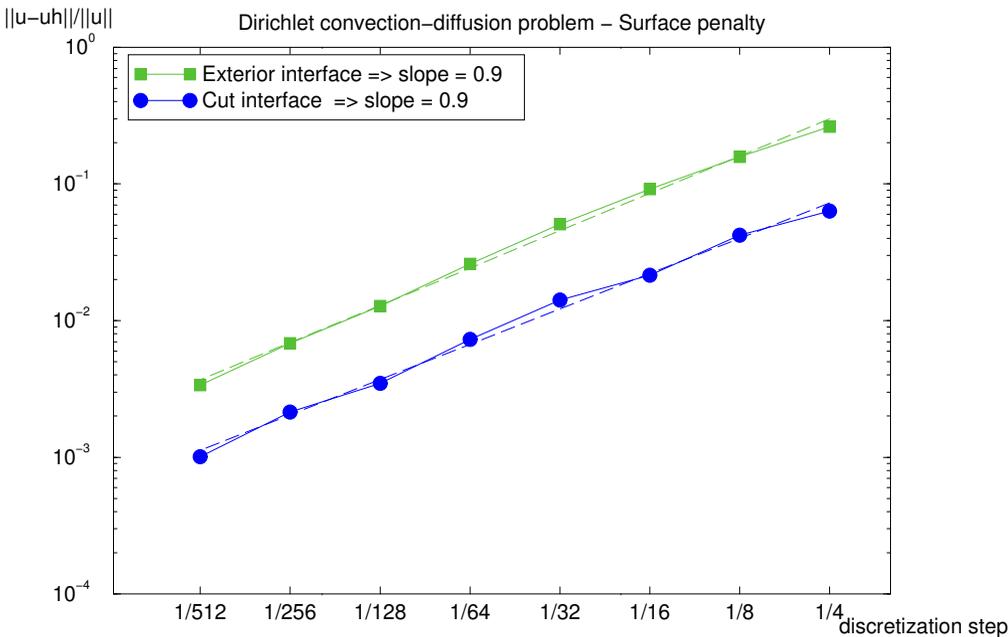
$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\hat{\Sigma}_{l,K})}.$$



Convergence en maillage - $\eta = 10^{-12}$

Relative L^2 error norms versus h

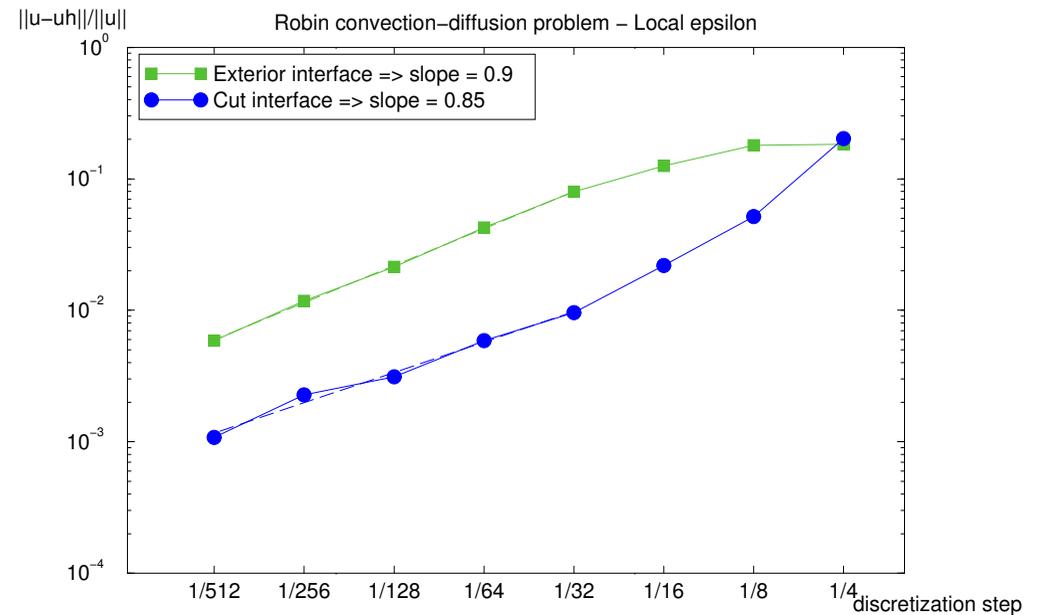
Dirichlet convection-diffusion problem – Surface penalty



(a) Problème Dirichlet

Relative L^2 error norms versus h

Robin convection-diffusion problem – Local epsilon



(b) Problème Robin

⇒ Méthodes en $\mathcal{O}(h)$.

Raffinement local multi-niveaux



- *Procédure multi-grille,*
- *Patches de raffinement rectangulaires,*

Introduction

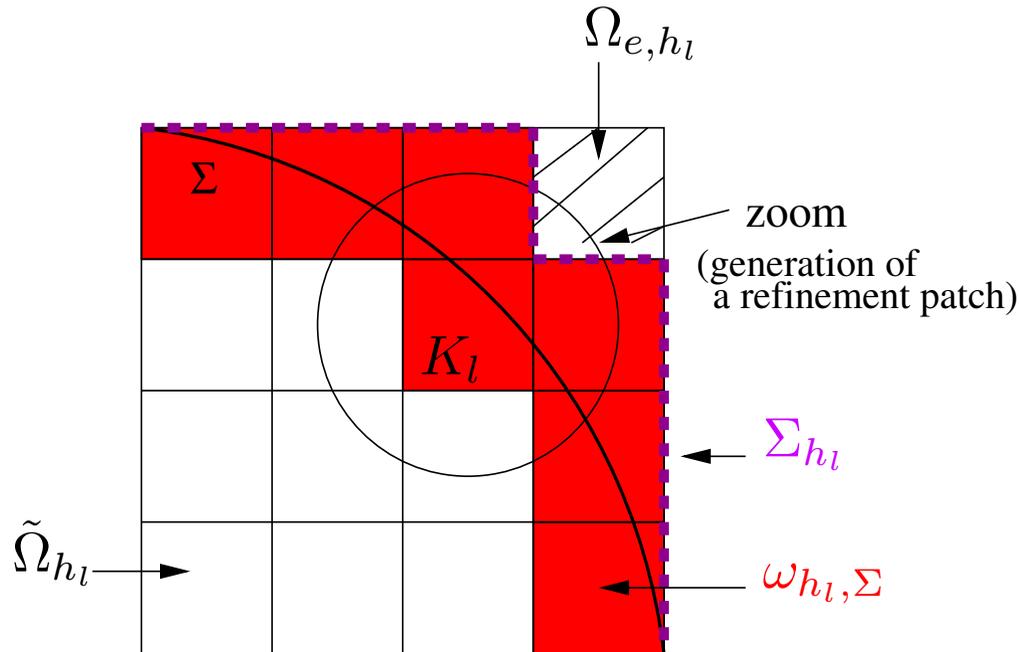
Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- **Interface fine**
- Résultats numériques avec raffinement

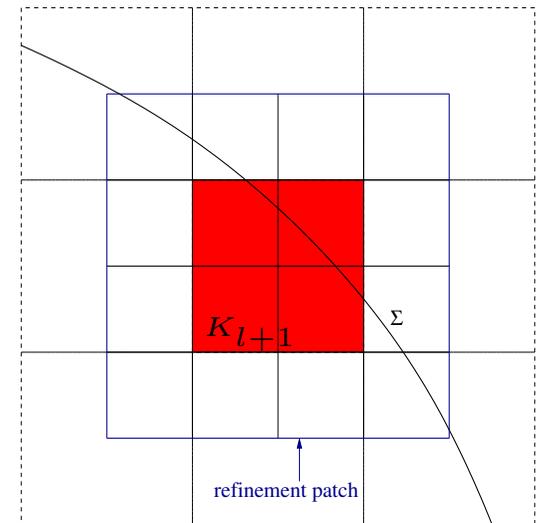
Analyse

Application industrielle

Conclusion



(a) Niveau l



(b) Patch G_{l+1} autour de K_l

⇒ conversation de la structure cartésienne et tensorielle du maillage sur les sous-niveaux.

Raffinement local multi-niveaux



- *Algorithme de restriction en flux*
(cf. FIC [Angot *et al.* 1992-2003]) consistant avec les sauts,
 - ◆ opérateur d'interpolation de la solution tenant compte des sauts de solution,
 - ◆ opérateur de restriction en flux tenant compte que des flux internes,
 - ◆ Recouvrement \Rightarrow DDM (Schwarz multiplicatif) comme lisseur.

Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

Analyse

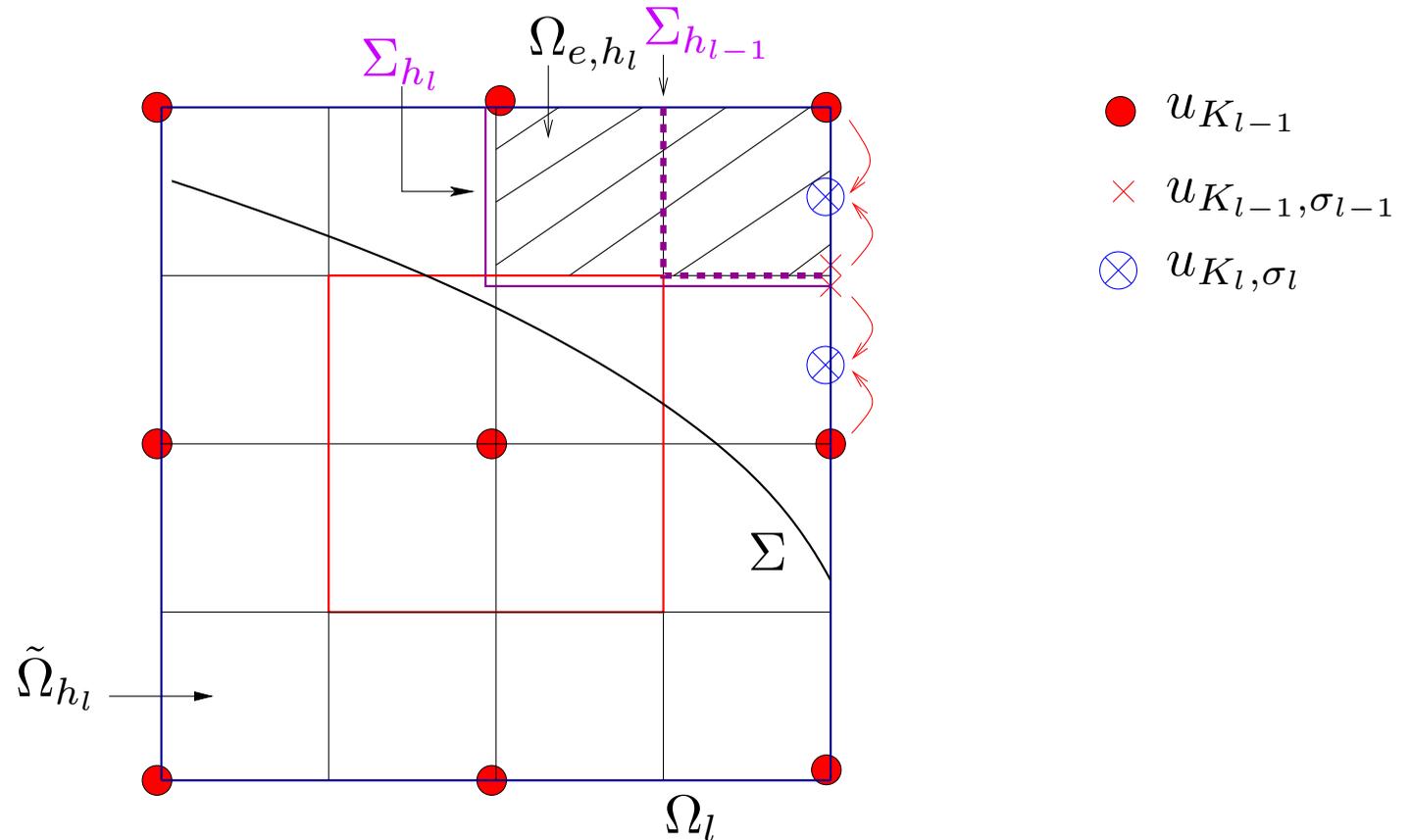
Application industrielle

Conclusion

Raffinement local multi-niveaux

Opérateur d'interpolation avec sauts de solution

$$h_{l+1} = \frac{h_l}{2}, \text{ Cas 2D.}$$



Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

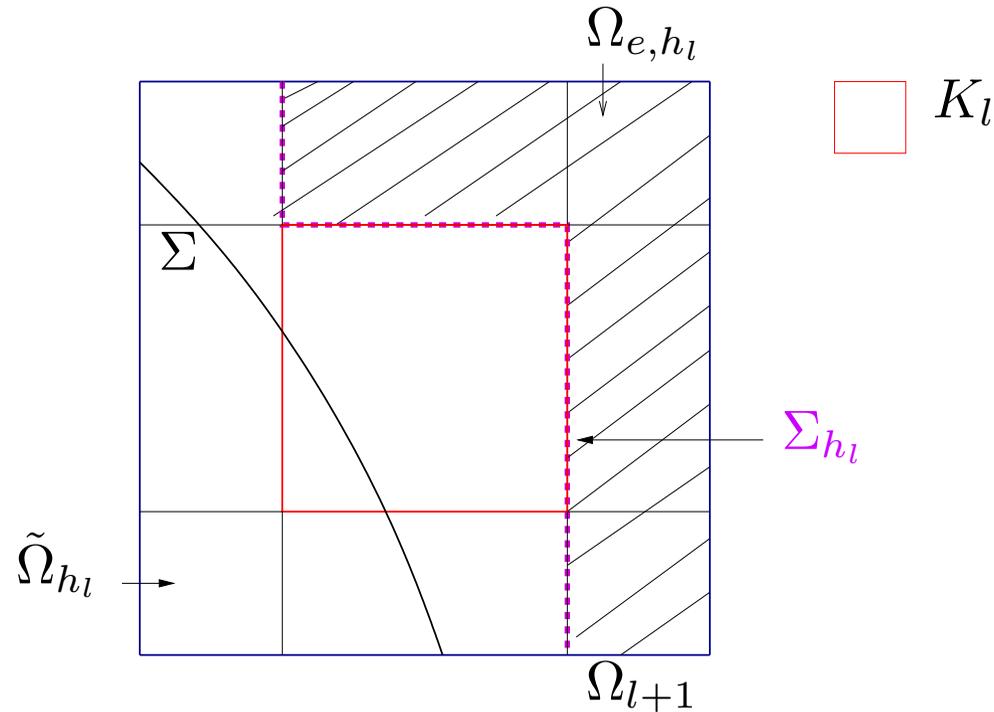
Analyse

Application industrielle

Conclusion

Raffinement local multi-niveaux

■ Opérateur de restriction



Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

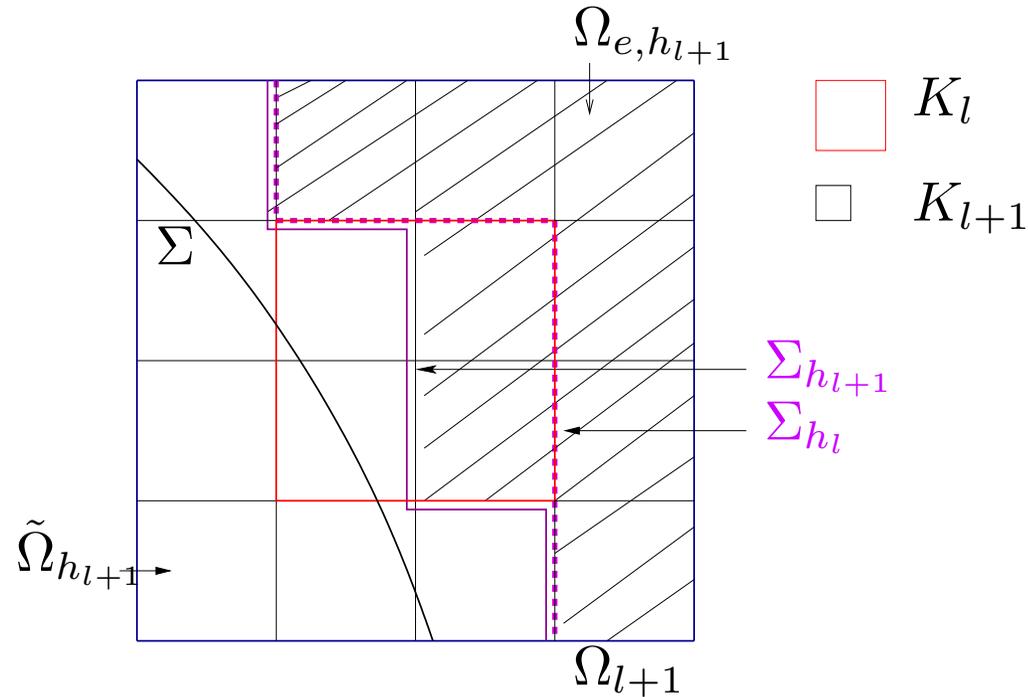
Analyse

Application industrielle

Conclusion

Raffinement local multi-niveaux

■ Opérateur de restriction



Introduction

Méthodes de domaine fictif

- Présentation du problème modèle
- Interface diffuse
- Interface fine
- Résultats numériques avec raffinement

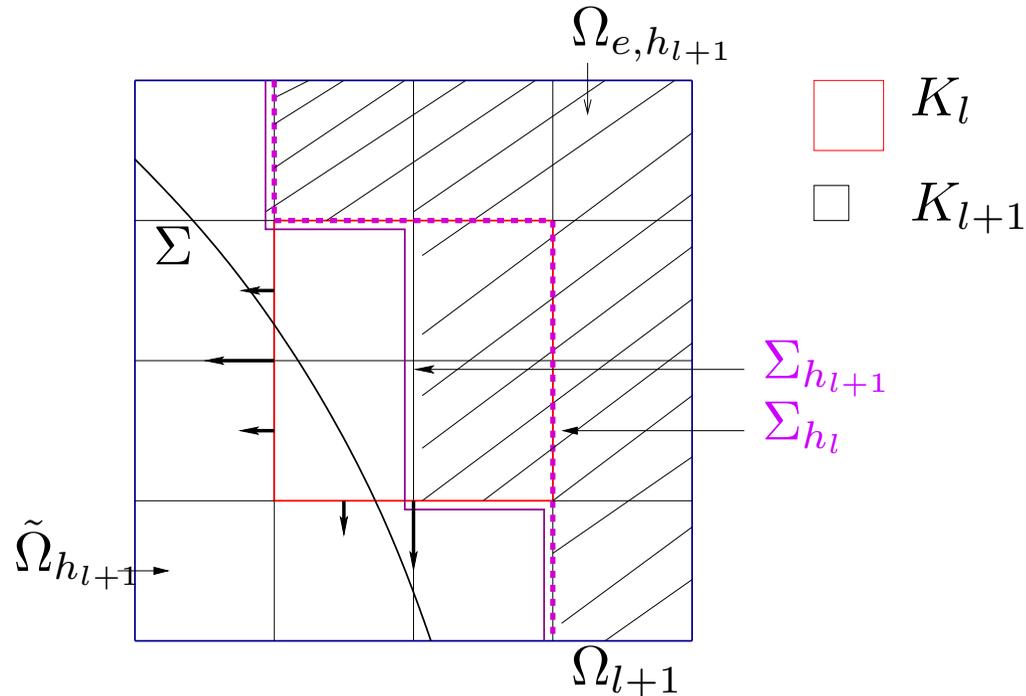
Analyse

Application industrielle

Conclusion

Raffinement local multi-niveaux

Opérateur de restriction

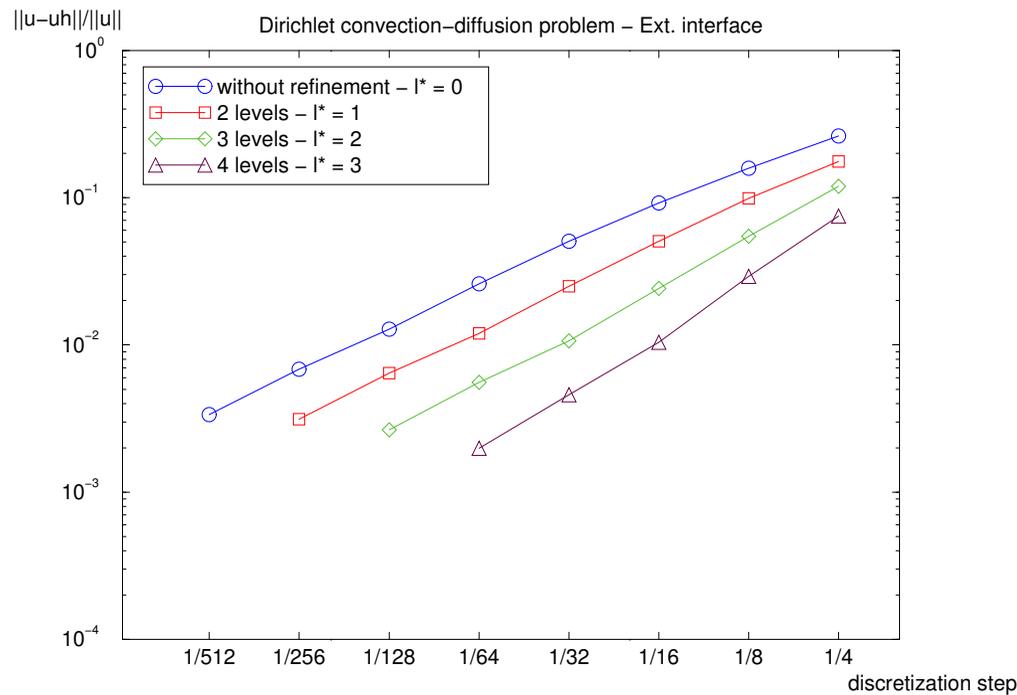


$$R_l^{l+1}(\mathcal{F}(u))(K_l) = \sum_{\substack{\{\sigma_{l+1} \subset \partial K_l; K_{l+1} \subset K_l \\ \sigma_{l+1} \in (\mathcal{E}_{ref})_{l+1} \\ \sigma_{l+1} \subset \sigma_l \in (\mathcal{E}_{ref})_l\}} \int_{\sigma_{l+1}} \mathcal{F}_{l+1}(u) \cdot \mathbf{n}_{K_{l+1}, \sigma_{l+1}} \cdot$$

⇒ Résidu en flux.

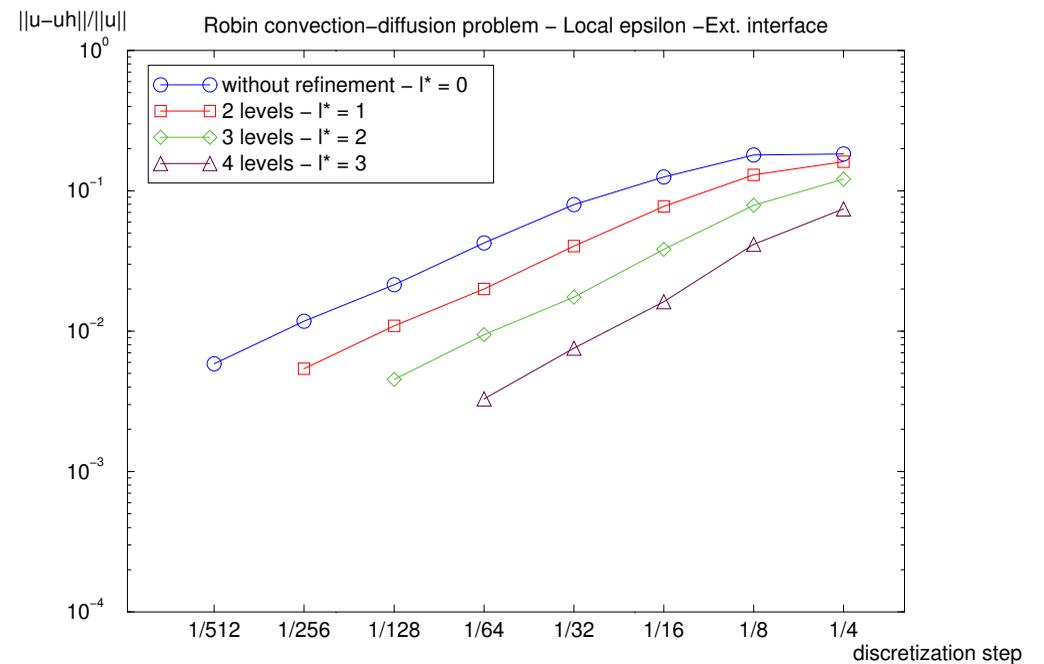
Interface extérieure

(D1) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM



(a) Problème Dirichlet

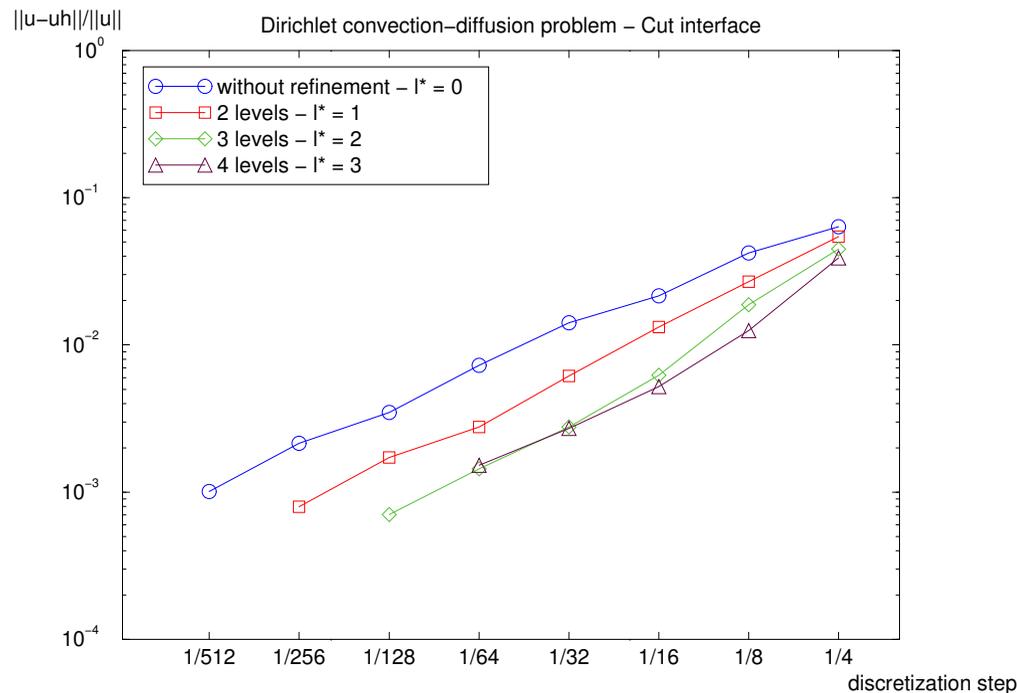
(R) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM



(b) Problème Robin

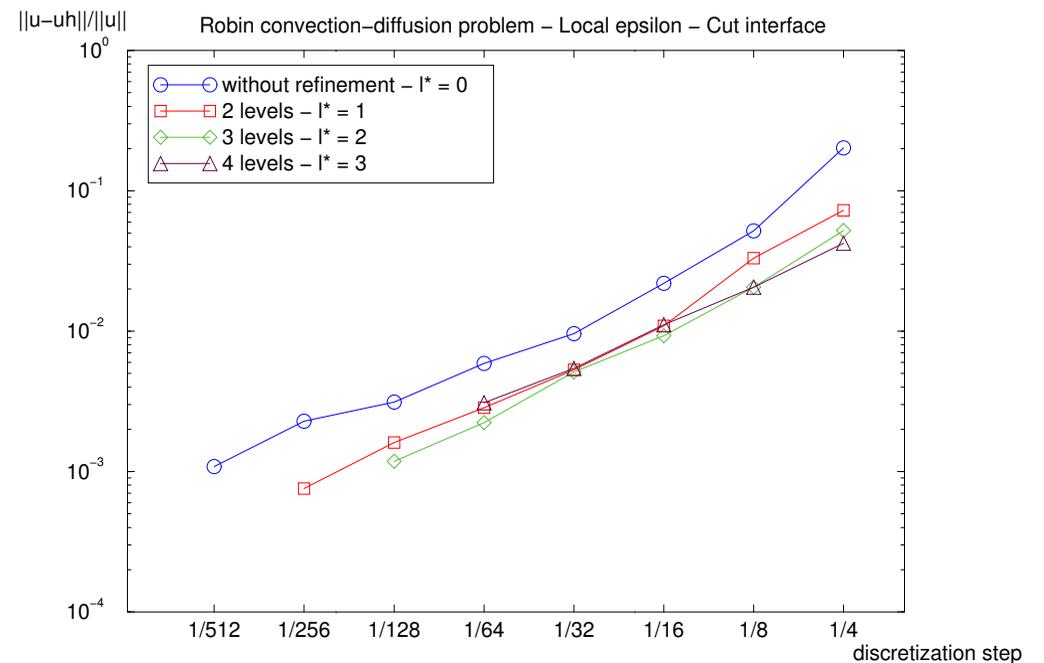
Interface coupée

(D1) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM



(a) Problème Dirichlet

(R) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM



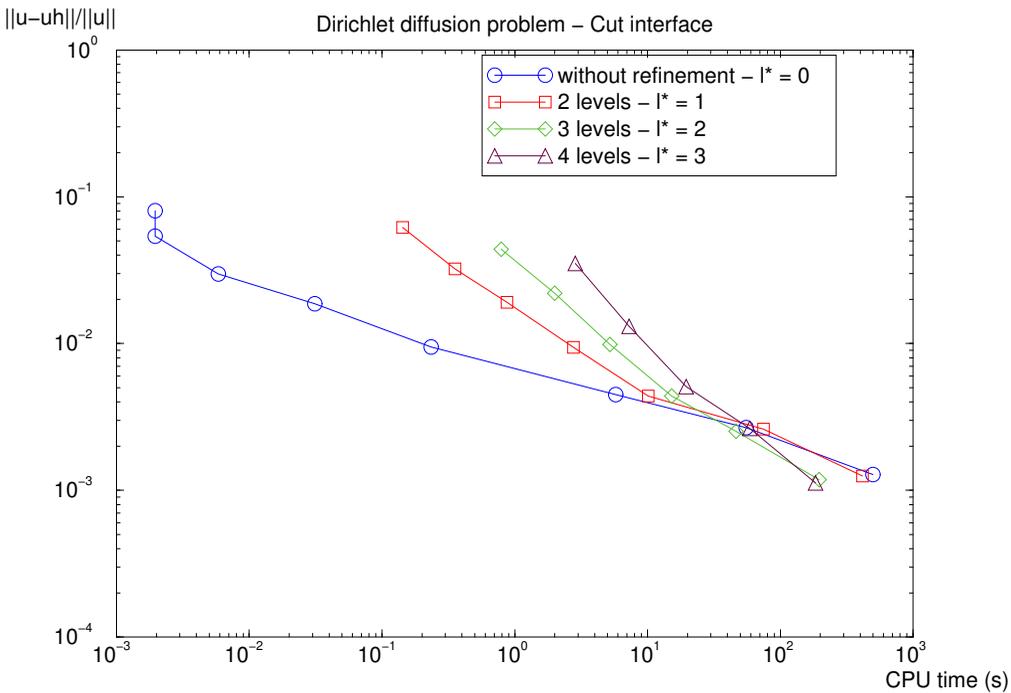
(b) Problème Robin

⇒ Méthodes en $\mathcal{O}(h_f)$ jusqu'à atteindre l'erreur de discrétisation de la partie non raffinée du maillage.

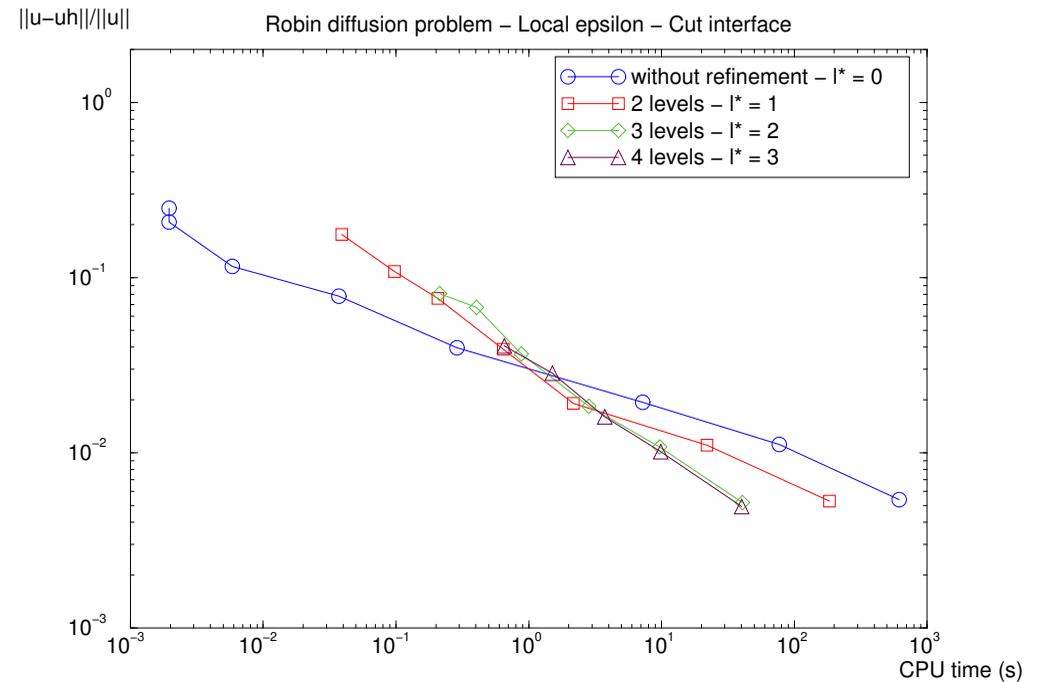
Interface coupée

(D1) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM

(R) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM



(a) Problème Dirichlet

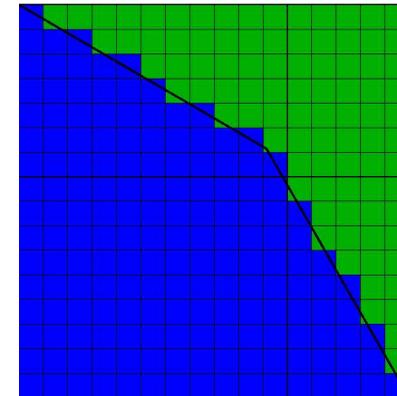
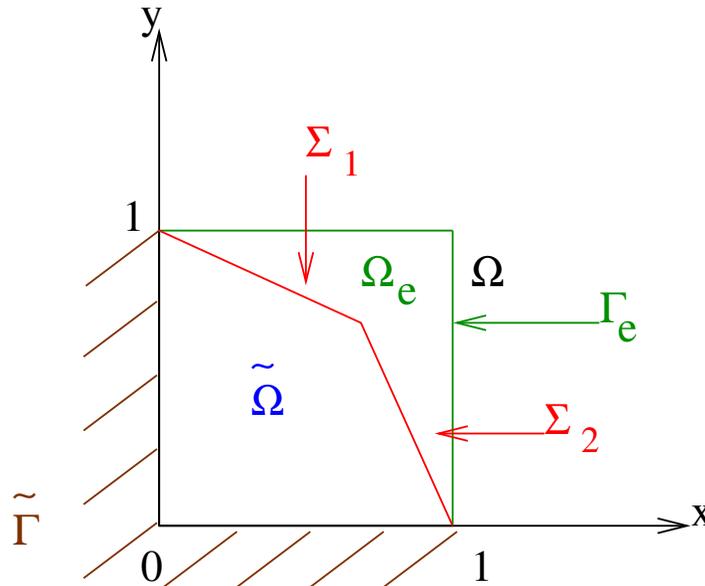


(b) Problème Robin

Conditions aux limites mixtes



■ *Domaine d'étude :*



■ *Problème de diffusion :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{u} = 4 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 \\ \tilde{u}|_{\Sigma_1} = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + 1 \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}|_{\Sigma_2} = \tilde{u}|_{\Sigma_2} + 4x^2 - 6x + 1 + \sqrt{3} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \text{sur } \Sigma_1, \\ \text{sur } \Sigma_2. \end{array}$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

● Présentation du problème modèle

● Interface diffuse

● Interface fine

● Résultats numériques avec raffinement

Analyse

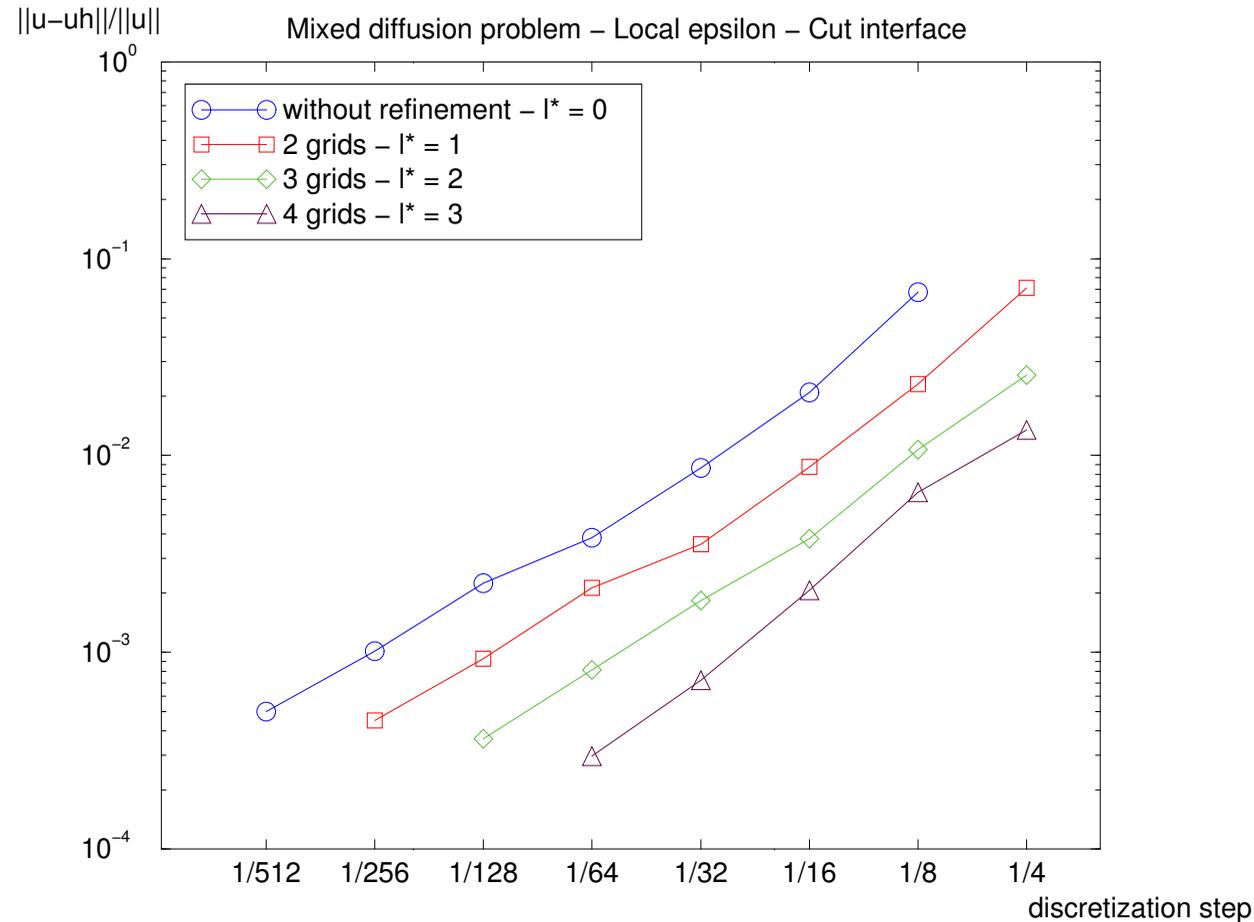
Application industrielle

Conclusion

Résultats numériques avec raffinement

Problème mixte avec interface coupée

(D1) + (R) E.B.C. method + FIC-EBC solver + DDM



⇒ Convergence en $\mathcal{O}(h_f)$.



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

- Maillage non-conforme
- Problème de Dirichlet
- Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

ANALYSE DE CONVERGENCE EN MAILLAGE NON CONFORME

Maillage non conforme - [Angot, R. 06]



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● Problème de Dirichlet

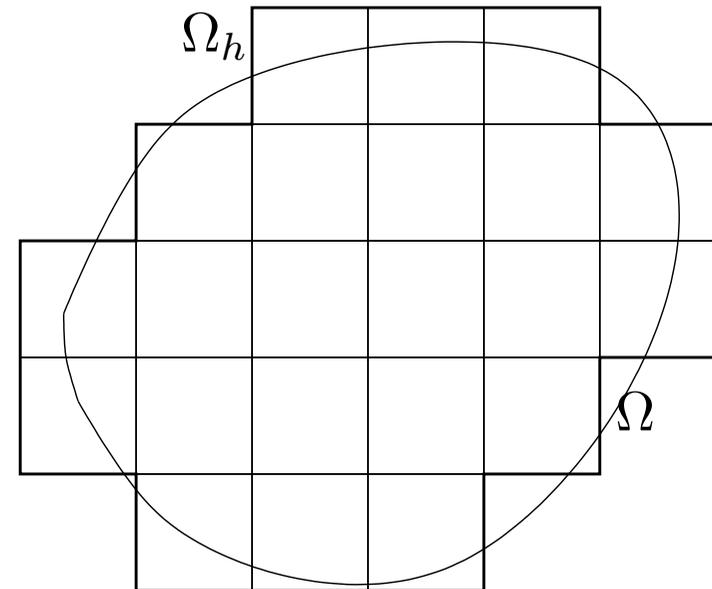
● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

- *Domaine originel*
 Ω convexe de frontière Γ
Lipstchitz-continue.

- *Maillage non adapté à la géométrie du domaine d'étude*
éléments finis \mathcal{Q}_1 rectangulaires uniformes.



$$\text{mes}((\Omega \cup \Omega_h) \setminus (\Omega \cap \Omega_h)) = \mathcal{O}(h).$$

- *Problème elliptique 2D* : $u \in H^2(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\text{div}(\mathbf{a}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0 \quad \text{ou} \quad -(\mathbf{a}\nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = \alpha u|_{\Gamma} + g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mathbf{a} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, $a_{ij} \in W^{1, \infty}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $0 \leq \alpha \in W^{1, \infty}(\Gamma)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

- Maillage non-conforme
- Problème de Dirichlet
- Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Dirichlet

$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2}(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● **Problème de Dirichlet**

● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Dirichlet

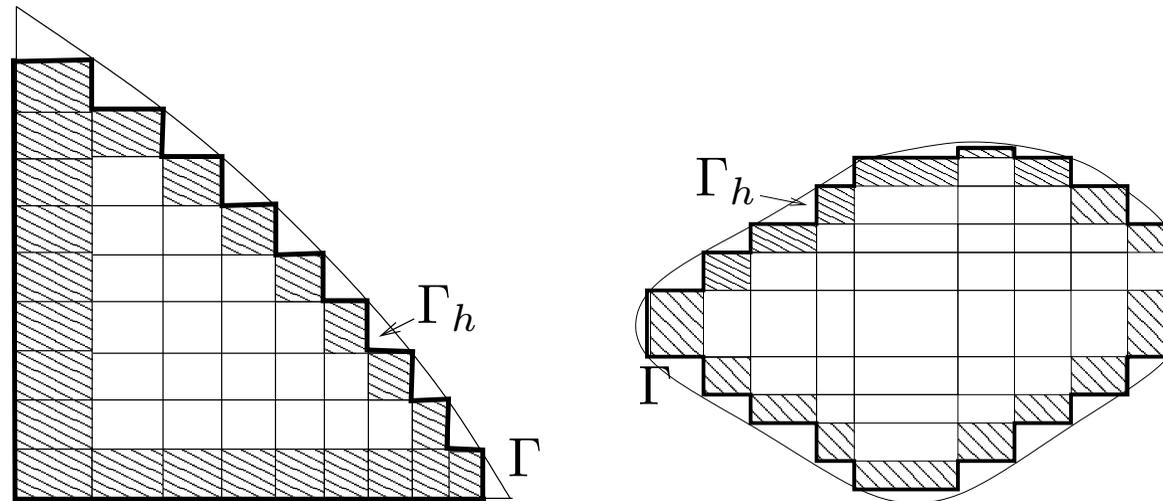
$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} (\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2} \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2} \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Démonstration

- Etape préliminaire : **maillage semi-conforme**



Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● **Problème de Dirichlet**

● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage Q_1 non-conforme - Cas Dirichlet

$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} (\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2} \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2} \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Démonstration

■ Etape préliminaire : maillage semi-conforme

- ◆ Lemme de Céa “classique”, extension de u_h par O ,

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{H^1(\Omega_h)}$$

- ◆ Estimation en norme H^1 :

$$|u|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_h)} \leq Ch^{1/2} \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

opérateur d'interpolation Q_1 tel que $\Pi_h^0 v|_{\Gamma_h} = O$,

estimation de $|\Pi_h u - \Pi_h^0 u|_{H^1(\Omega_h)}$.

- ◆ Passage à la norme L^2 : Aubin-Nitsche.

Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● **Problème de Dirichlet**

● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Dirichlet

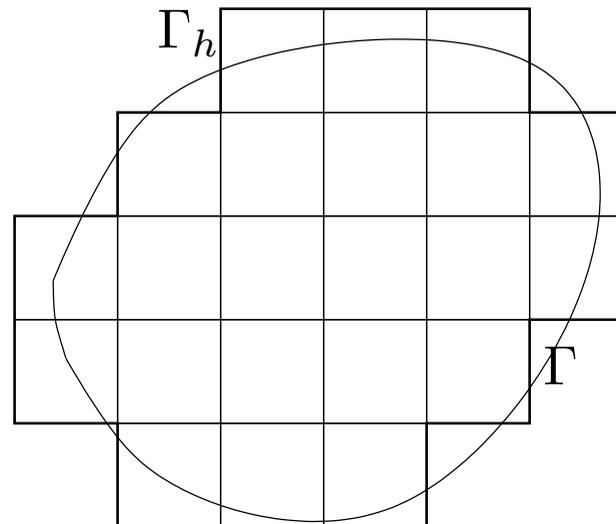
$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2}(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Démonstration

■ Cas général



Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● Problème de Dirichlet

● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Dirichlet

$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2}(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Démonstration

■ Cas général

◆ Extensions non triviales :

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega_h)} \leq \|\tilde{u}\|_{H^2(\tilde{\Omega})} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● Problème de Dirichlet

● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Dirichlet

$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} (\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2} \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch (\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2} \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Démonstration

■ Cas général

- ◆ Estimation H^1 : lemme de "Strang" (terme de consistance)

$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} |\tilde{u} - v_h|_{H^1(\Omega_h)} \right.$$

$$\left. + \sup_{w_h \in V_h} \frac{\left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_h} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_h} \tilde{f} w_h dx \right|}{|w_h|_{H^1(\Omega_h)}} \right).$$

Estimation dans le cas Dirichlet



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

● Maillage non-conforme

● **Problème de Dirichlet**

● Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Dirichlet

$$|\tilde{u} - u_h|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2}(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$\text{où } \hat{f} = -\text{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \in L^2(\tilde{\Omega}).$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch(\|u\|_{H^2(\Omega)} + h^{1/2}\|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h)}).$$

Démonstration

■ Cas général

- ◆ Passage à la norme L^2 avec arguments de dualité plus techniques.
 - problème dual défini sur l'enveloppe convexe de $\Omega \cup \Omega_h$,
 - prolongement de u et u_h par 0,
 - opérateur d'interpolation strictement intérieur à $\Omega \cap \Omega_h$ pour annuler les termes non consistants.

Estimation dans le cas Robin



Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Robin

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Introduction

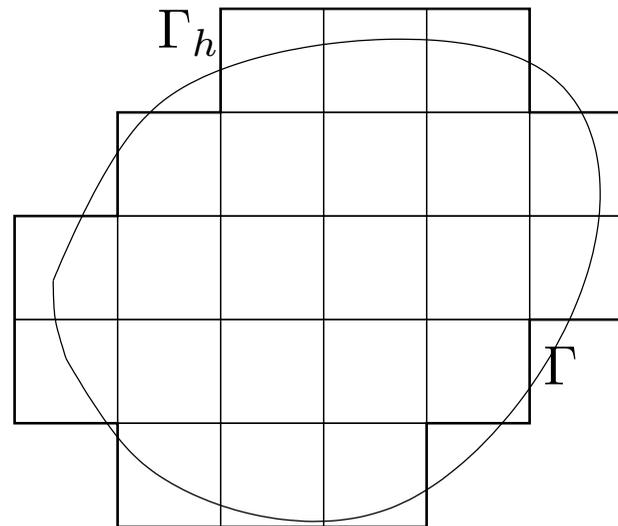
Méthodes de domaine fictif

Analyse

- Maillage non-conforme
- Problème de Dirichlet
- Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion



Estimation dans le cas Robin



Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Robin

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Démonstration

■ Cas général

- ◆ Relèvement des coefficients de Robin,
- ◆ Lemme général de “Strang”,

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|\tilde{u} - v_h\|_{H^1(\Omega_h)} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{\left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_h} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_h} \tilde{f} w_h dx + \int_{\Gamma_h} \frac{\tilde{\alpha} \tilde{u} + \tilde{g}}{\epsilon_h} w_h ds \right|}{\|w_h\|_{H^1(\Omega_h)}} \right).$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

- Maillage non-conforme
- Problème de Dirichlet
- Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion

Estimation dans le cas Robin



Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Robin

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

- Maillage non-conforme
- Problème de Dirichlet
- Problème de Robin

Application industrielle

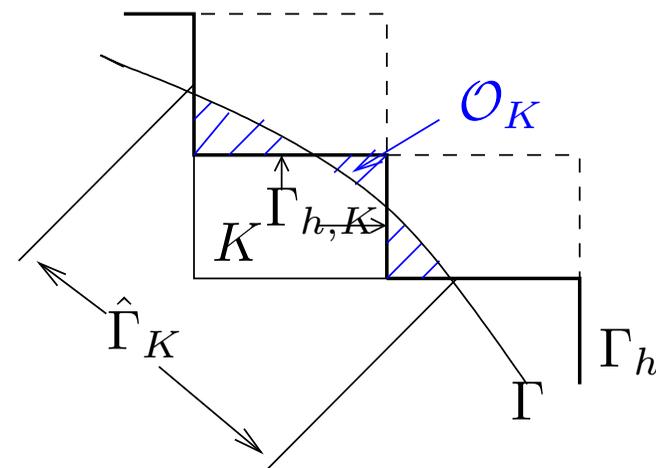
Conclusion

Démonstration

■ Cas général

- ◆ Paramètre correctif local $\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Gamma_{h,K})}{\text{mes}(\hat{\Gamma}_K)}$ tel que

$$\frac{1}{\epsilon_K} \int_{\Gamma_{h,K}} C ds - \int_{\hat{\Gamma}_K} C ds = 0$$



Estimation dans le cas Robin



Estimation de l'erreur en maillage \mathcal{Q}_1 non-conforme - Cas Robin

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Démonstration

■ Cas général

◆ Calcul local

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,K}} \frac{\tilde{\alpha} \tilde{u} + \tilde{g}}{\epsilon_h} w_h \, ds - \int_{\hat{\Gamma}_K} (\alpha u + g) w_h \, ds = \\ \frac{1}{\epsilon_K} \int_{\Gamma_{h,K}} [(\tilde{\alpha} \tilde{u} + \tilde{g}) w_h - \overline{(\tilde{\alpha} \tilde{u} + \tilde{g})} \cdot \overline{w_h}] \, ds \\ - \int_{\hat{\Gamma}_K} [(\alpha u + g) w_h - \overline{(\alpha u + g)} \cdot \overline{w_h}] \, ds. \end{aligned}$$

Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

- Maillage non-conforme
- Problème de Dirichlet
- Problème de Robin

Application industrielle

Conclusion



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

- Cas industriel 3D - Clotaire
- Approche domaine fictif avec interface diffuse
- Résolution numérique
- Résultats

Conclusion

APPLICATION INDUSTRIELLE

Cas industriel 3D - Clotaire



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

● Cas industriel 3D - Clotaire

- Approche domaine fictif avec interface diffuse
- Résolution numérique
- Résultats

Conclusion

■ Maquette d'un générateur de vapeur

- ◆ branche chaude,
- ◆ branche froide.

■ Bilan d'énergie

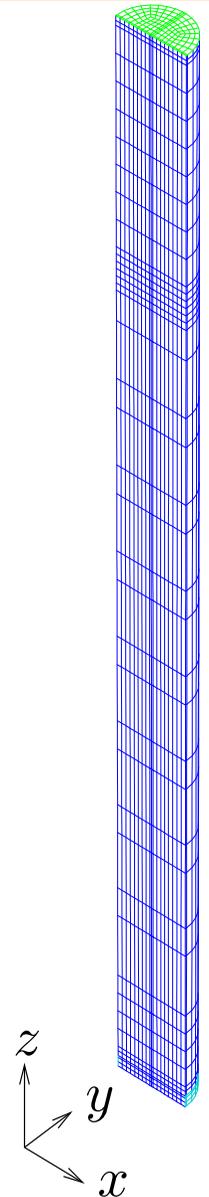
$$\begin{aligned}\beta\rho\partial_t H + \beta\mathbf{G}\cdot\nabla H - \operatorname{div}(\beta\chi_T\nabla H) \\ = \beta Q - \operatorname{div}(\beta x(H)(1-x(H))\rho\mathcal{L}\mathbf{V}_R),\end{aligned}$$

■ C.L.

- ◆ $H_D = 119,3 \text{ KJ.kg}^{-1}$ (entrée - branche chaude),
- ◆ $H_D = 118,5 \text{ KJ.kg}^{-1}$ (entrée - branche froide),
- ◆ $\nabla H \cdot \mathbf{n} = 0$ (reste du domaine)

■ C.I. : profil d'enthalpie linéaire de $118,5 \text{ KJ.kg}^{-1}$ à 140 KJ.kg^{-1} .

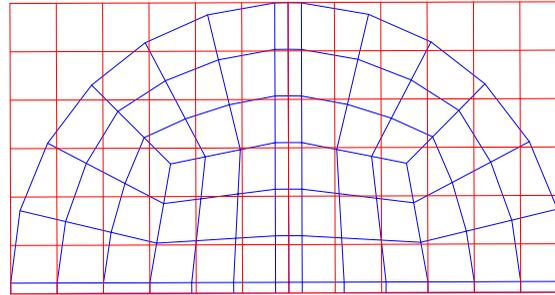
■ Régime stationnaire : $\frac{\|H^{n+1} - H^n\|_{L^2}}{\|H^n\|_{L^2} \Delta t} \leq 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.



Approche domaine fictif avec interface diffuse

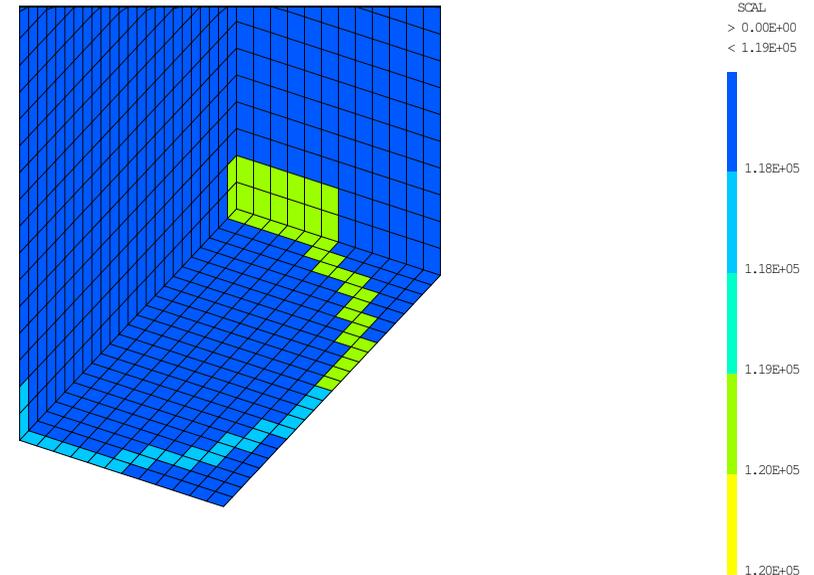


- *Eléments finis Q_1* : code 3D non-structuré.



- *Conditions aux limites immergées :*

- ◆ pénalisation L^2 pour Dirichlet,
- ◆ pas de saut de flux pour Neumann homogène.



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

● Cas industriel 3D - Clotaire

● Approche domaine fictif avec interface diffuse

● Résolution numérique

● Résultats

Conclusion

Résolution numérique



- *Schéma en temps* : Cranck-Nicholson + second membre explicite,
- *Eléments finis* Q_1 : correction BTD (convection),
- *Maillages* :
 - ◆ maillage **adapté de référence** à 143 360 cellules,
 - ◆ maillages **cartésiens uniformes** (fictif) à 7 200, 57 600 et 460 800 cellules,
- *Solveur* : CGS préconditionné ILLU (lissage).

Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

- Cas industriel 3D - Clotaire
- Approche domaine fictif avec interface diffuse
- Résolution numérique
- Résultats

Conclusion

Résolution numérique



■ *Champ de vitesses massiques interpolé*

Introduction

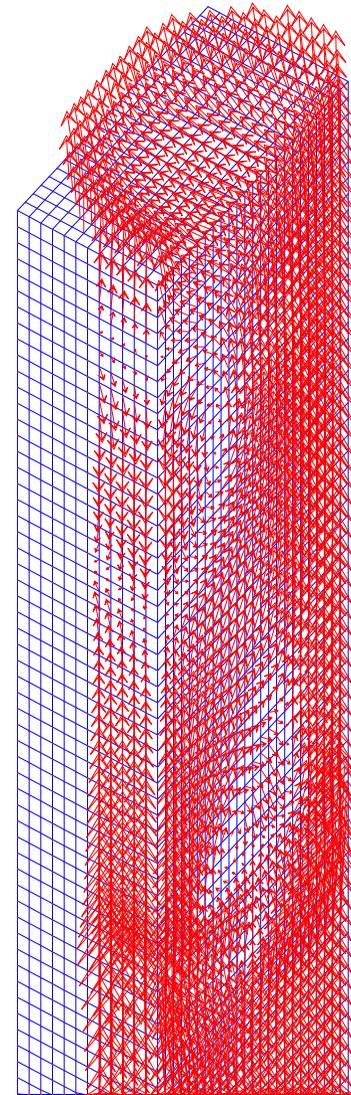
Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

- Cas industriel 3D - Clotaire
- Approche domaine fictif avec interface diffuse
- Résolution numérique
- Résultats

Conclusion



Résultats

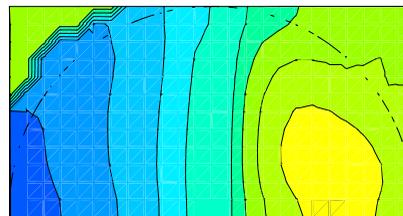
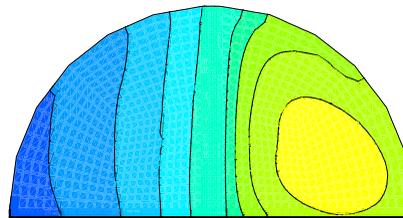


■ Puissance échangée primaire/secondaire :

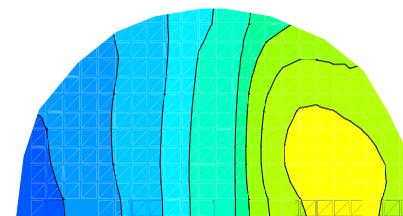
Nb cellules	Puissance échangée (MW)	Erreur relative
143 360 (mail. adapt.)	1,48873	-
7 200	1,49054	$1,1 \cdot 10^{-3}$
57 600	1,48851	$1,5 \cdot 10^{-4}$
460 800	1,48763	$7,4 \cdot 10^{-4}$

■ Isovaleur d'enthalpie :

VAL - LSK
 > 1.18E+05
 < 1.40E+05



restriction →



Introduction

Méthodes de domaine fictif

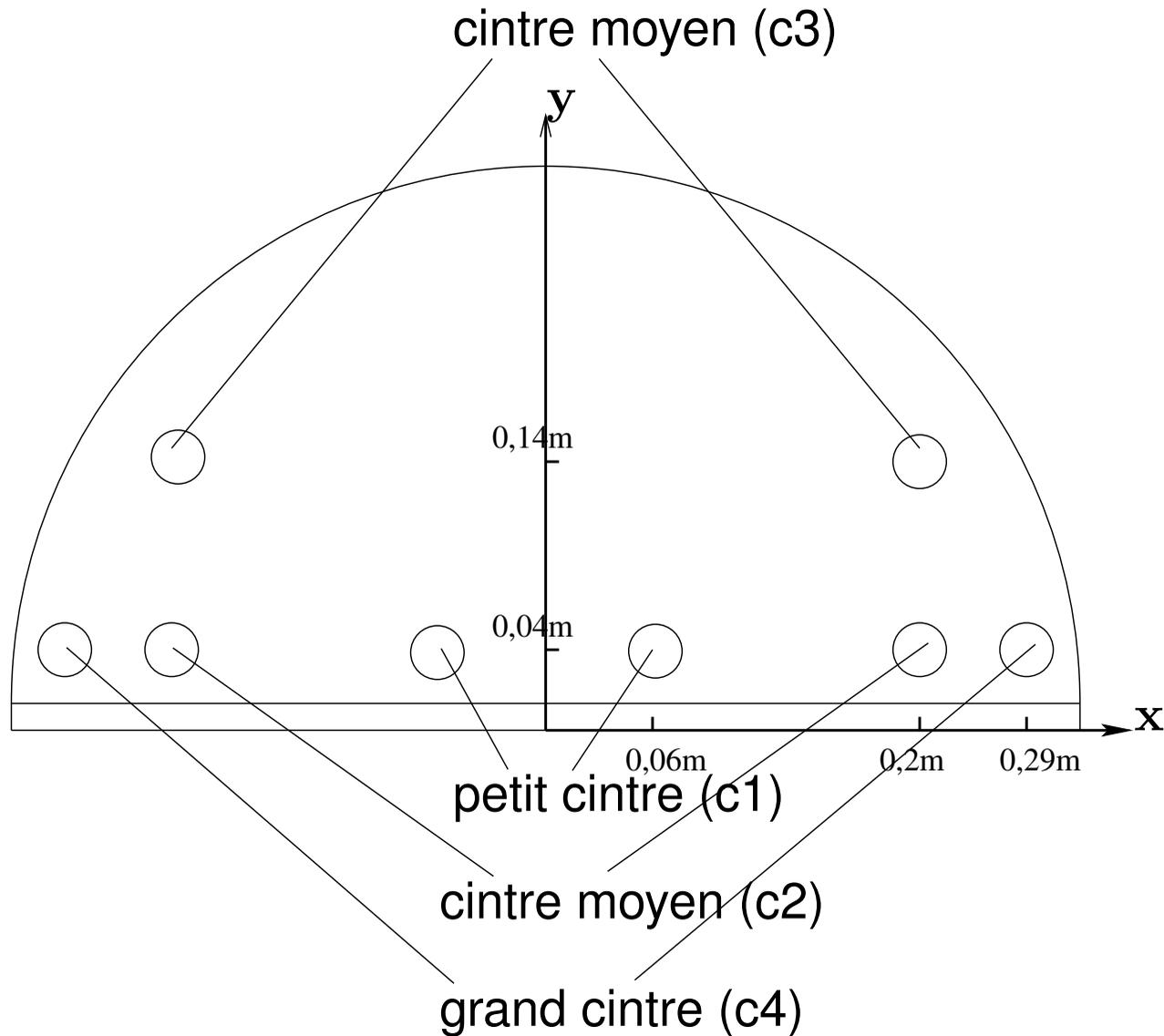
Analyse

Application industrielle

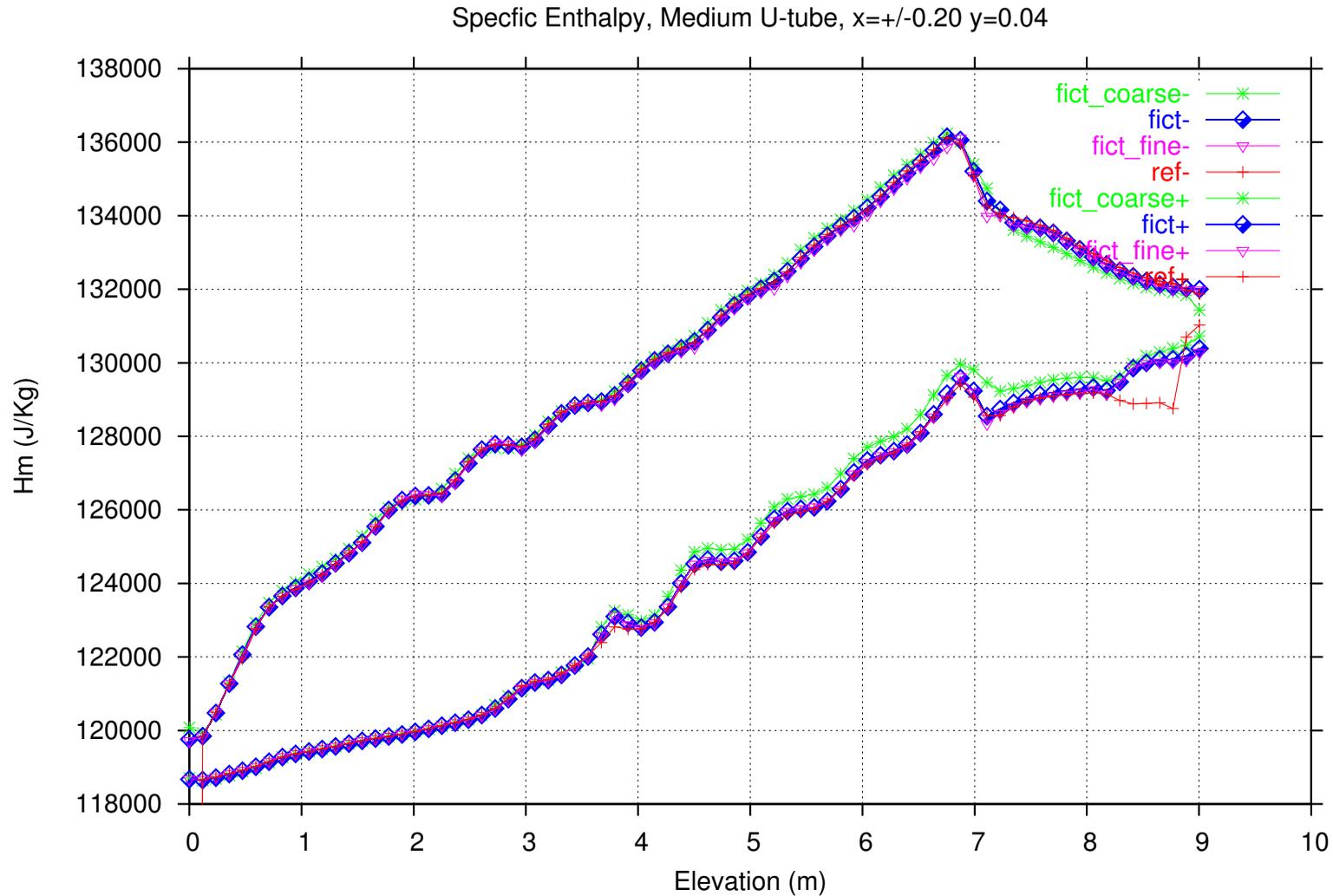
- Cas industriel 3D - Clotaire
- Approche domaine fictif avec interface diffuse
- Résolution numérique
- Résultats

Conclusion

■ Position des cintres :



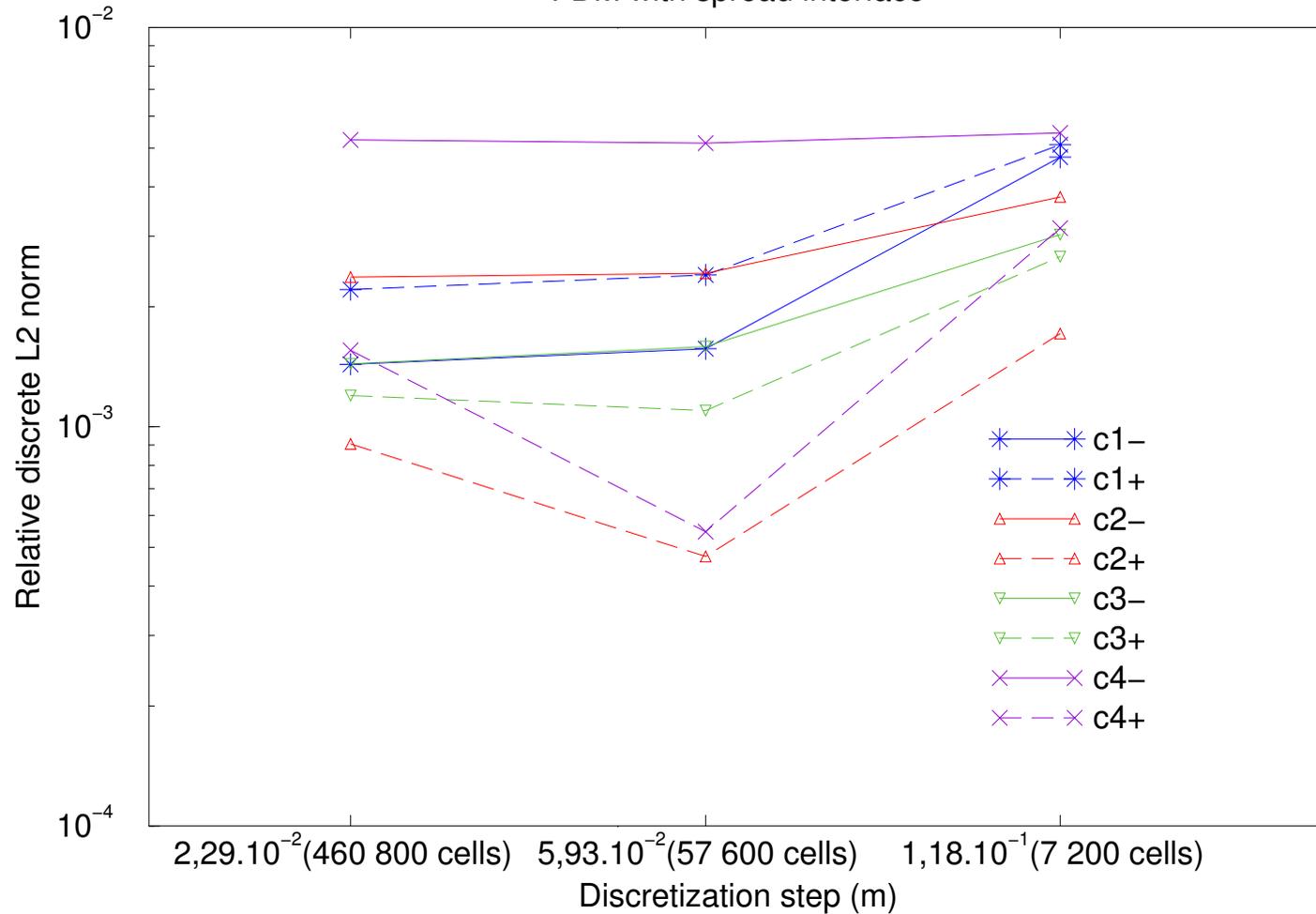
■ *Profil d'enthalpie - cintre moyen :*



■ *Convergence en maillage (norme L^2):*

Clotaire Benchmark

FDM with spread interface





[Introduction](#)

[Méthodes de domaine fictif](#)

[Analyse](#)

[Application industrielle](#)

[Conclusion](#)

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Etude et validation* de deux méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques :
 - ◆ **unique maillage cartésien** \Rightarrow interface immergée approchée (fine ou diffuse),
 - ◆ pas d'inconnues locales supplémentaires,
 - ◆ **toutes les C.L. générales** simulées avec une seule formulation générique,
 - ◆ pas de modification du schéma numérique,
 \Rightarrow facilité et rapidité d'implémentation,
 - ◆ combinaison avec des **algorithmes de raffinement de maillage multi-niveaux**,
 \Rightarrow amélioration de la précision de la solution/coût,
 - ◆ **validation** sur des cas académiques 2D.

Conclusion



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Etude et validation* de deux méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques :
 - ◆ **unique maillage cartésien** \Rightarrow interface immergée approchée (fine ou diffuse),
 - ◆ pas d'inconnues locales supplémentaires,
 - ◆ **toutes les C.L. générales** simulées avec une seule formulation générique,
 - ◆ pas de modification du schéma numérique,
 \Rightarrow facilité et rapidité d'implémentation,
 - ◆ combinaison avec des **algorithmes de raffinement de maillage multi-niveaux**,
 \Rightarrow amélioration de la précision de la solution/coût,
 - ◆ **validation** sur des cas académiques 2D.

- *Etude de convergence* en maillage non-conforme,
 \Rightarrow confirmation de l'ordre de convergence pour les deux types de C.L. (Dirichlet et Robin)

Conclusion



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

- *Etude et validation* de deux méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques :
 - ◆ **unique maillage cartésien** \Rightarrow interface immergée approchée (fine ou diffuse),
 - ◆ pas d'inconnues locales supplémentaires,
 - ◆ **toutes les C.L. générales** simulées avec une seule formulation générique,
 - ◆ pas de modification du schéma numérique,
 \Rightarrow facilité et rapidité d'implémentation,
 - ◆ combinaison avec des **algorithmes de raffinement de maillage multi-niveaux**,
 \Rightarrow amélioration de la précision de la solution/coût,
 - ◆ **validation** sur des cas académiques 2D.
- *Etude de convergence* en maillage non-conforme,
 \Rightarrow confirmation de l'ordre de convergence pour les deux types de C.L. (Dirichlet et Robin)
- *Validation industrielle* de l'approche avec interface diffuse.

Perspectives



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

■ *Court terme*

- ◆ combinaison **patches** avec interface diffuse,
⇒ solveur fictif utilisé récursivement,
- ◆ **approche interface fine à valider industriellement**,
- ◆ **analyse complète de convergence** pour les deux méthodes de domaine fictif.

■ *Long terme*

- ◆ méthodes de **multirésolution** (analyse de type ondelettes),
- ◆ **frontières mobiles et/ou déformables**,
- ◆ problème de Stokes et **Navier-Stokes**,
⇒ variables colocalisées.



Introduction

Méthodes de domaine fictif

Analyse

Application industrielle

Conclusion

Questions

QUESTIONS

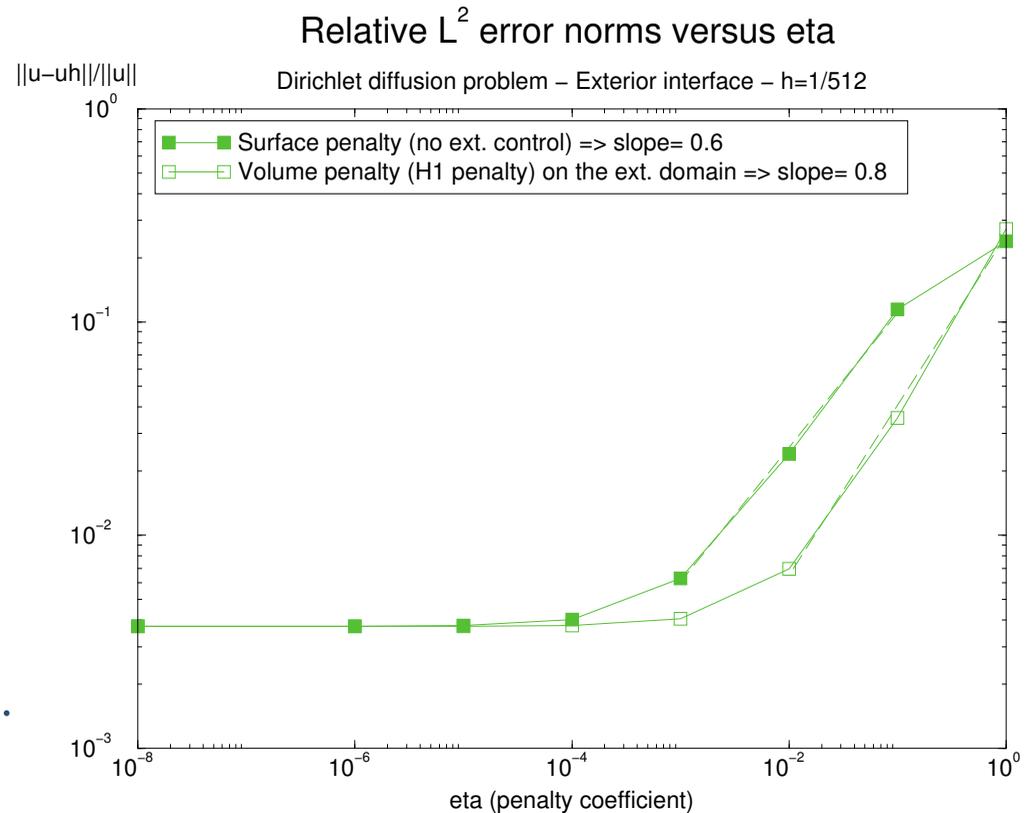
Problème de diffusion

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 4 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u} = u_D = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

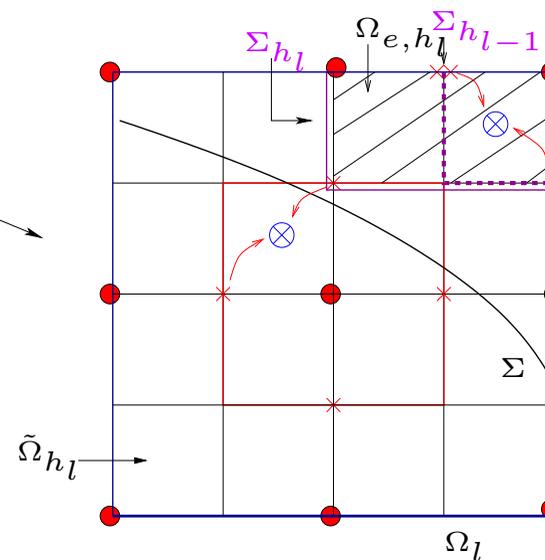
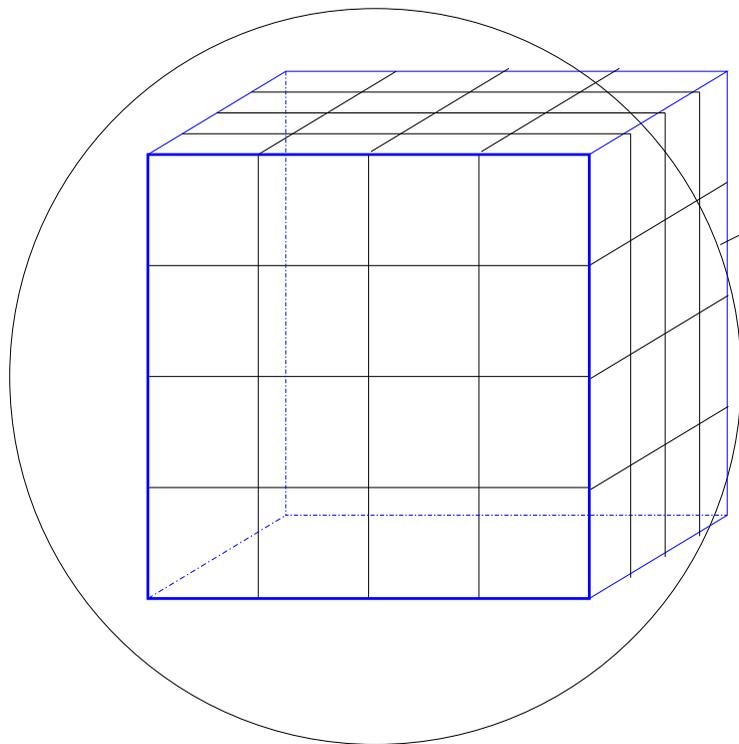
Solution analytique :

$$\tilde{u} = 1 - r^2 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\Rightarrow \mathcal{O}(\eta^{\frac{1}{2}})$ pour la pénalisation de surface,
 $\Rightarrow \mathcal{O}(\eta^{\frac{3}{4}})$ pour la pénalisation H^1 extérieure.



- *Pas de discrétisation* : $h_{l+1} = \frac{h_l}{2}$,
- *Cas 3D*



- $u_{K_{l-1}}$
- × $u_{K_{l-1},\sigma_{l-1}}$
- ⊗ u_{K_l,σ_l}

■ Résidu en flux

$$r_l(\mathcal{F})(K_l) = \frac{1}{\text{mes}(K_l)} \left\{ R_l^{l+1}(\mathcal{F}(u))(K_l) - \sum_{\substack{\{\sigma_l \subset \partial K_l; \\ \sigma_l \in (\mathcal{E}_{ref})_l\}}} \int_{\sigma_l} \mathcal{F}_l(u) \cdot \mathbf{n}_{K_l, \sigma_l} \right\}$$

avec l'opérateur de restriction R_l^{l+1} défini par

$$R_l^{l+1}(\mathcal{F}(u))(K_l) = \sum_{\substack{\{\sigma_{l+1} \subset \partial K_l; K_{l+1} \subset K_l \\ \sigma_{l+1} \in (\mathcal{E}_{ref})_{l+1} \\ \sigma_{l+1} \subset \sigma_l \in (\mathcal{E}_{ref})_l\}}} \int_{\sigma_{l+1}} \mathcal{F}_{l+1}(u) \cdot \mathbf{n}_{K_{l+1}, \sigma_{l+1}}$$

■ Correction du second membre

$$\begin{cases} f_l^0 &= f|_{\Omega_l} \\ f_l^k &= f_l^{k-1} + \sum_{K_l \subset \mathcal{A}_l} \chi_{K_l} r_l^k(\mathcal{F})(K_l) \end{cases} \cdot$$