



**HAL**  
open science

# Microstructure et Macro-Comportement Acoustique : Approche par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative

Camille Perrot

► **To cite this version:**

Camille Perrot. Microstructure et Macro-Comportement Acoustique: Approche par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2006. Français. NNT: . tel-00123464

**HAL Id: tel-00123464**

**<https://theses.hal.science/tel-00123464>**

Submitted on 9 Jan 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre 2006-ISAL-00120  
Année 2006

Thèse

# **Microstructure et Macro-Comportement Acoustique : Approche par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative**

Présentée devant  
L'université de Sherbrooke  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Préparée à  
L'université de Sherbrooke  
L'école nationale des travaux publics de l'état

Pour obtenir  
Le grade de PhD et celui de docteur

Cotutelle internationale de thèse

Formation doctorale: Acoustique

École doctorale : MÉGA de Lyon

Par  
Camille Perrot

Soutenue le 20 décembre 2006 devant la Commission d'examen

Jury MM.

J.-F. Allard	Professeur Émérite (Université du Maine)	Rapporteur
N. Atalla	Professeur (Université de Sherbrooke)	
G. Daigle	Chercheur (CNRC) (Ottawa)	Rapporteur
J.-L. Guyader	Professeur (CNRS) (INSA de Lyon)	
X. Olny	Enseignant Checheur (CNRS) (ENTPE)	
R. Panneton	Professeur (Université de Sherbrooke)	

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	<b>CHIMIE DE LYON</b>  Responsable : M. Denis SINOU  Insa : R. GOURDON	Denis SINOU Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2 <sup>ème</sup> étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 <a href="mailto:sinou@univ-lyon1.fr">sinou@univ-lyon1.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b>  M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 <a href="mailto:Daniel.Barbier@insa-lyon.fr">Daniel.Barbier@insa-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a>  M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 <a href="mailto:E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDIIS</b>	<b>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</b> <a href="http://www.insa-lyon.fr/ediis">http://www.insa-lyon.fr/ediis</a>  M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 <a href="mailto:ediis@insa-lyon.fr">ediis@insa-lyon.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTE</b> <a href="http://www.ibcp.fr/ediss">http://www.ibcp.fr/ediss</a>  M. Alain Jean COZZONE Insa : M. LAGARDE	M. Alain Jean COZZONE <b>IBCP (UCBL1)</b> 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 <a href="mailto:cozzone@ibcp.fr">cozzone@ibcp.fr</a>
	<b>MATERIAUX DE LYON</b> <a href="http://www.ec-lyon.fr/sites/edml">http://www.ec-lyon.fr/sites/edml</a>  M. Jacques JOSEPH  Insa : J. M. PELLETIER	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 <a href="mailto:Jacques.Joseph@ec-lyon.fr">Jacques.Joseph@ec-lyon.fr</a>
<b>Math IF</b>	<b>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</b> <a href="http://www.ens-lyon.fr/MathIS">http://www.ens-lyon.fr/MathIS</a>  M. Franck WAGNER  Insa : G. BAYADA	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1 <sup>er</sup> étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 <a href="mailto:Franck.wagner@univ-lyon1.fr">Franck.wagner@univ-lyon1.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://www.lmf.aec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html">http://www.lmf.aec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html</a>  M. François SIDOROFF  Insa : G. DALMAZ	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systèmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél:04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 <a href="mailto:Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr">Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr</a>
<b>SSED</b>	<b>SCIENCES DES SOCIETES, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT</b>  Mme Claude-Isabelle BRELOT  Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr">Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr</a>

## Dédicace

---

Au Québec, pour m'avoir accueilli et donné les moyens  
de réaliser cette thèse

---

## Avant-propos

Les modèles semi-phénoménologiques constituent un outil fondamental pour des chercheurs et ingénieurs pour la simulation du comportement acoustique des matériaux poreux. Remarquablement efficaces, ils font toutefois abstraction des caractéristiques de la microstructure sous-jacente. Cette thèse fait le point sur des méthodes aujourd'hui disponibles permettant d'intégrer certaines caractéristiques de la microstructure des matériaux poreux dans la modélisation acoustique. Elle fait se rencontrer ces disciplines à priori distinctes que sont l'acoustique et la science des matériaux.

Cette thèse, débutée en janvier 2002, est issue d'une cotutelle de doctorat entre l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (Rhône-Alpes, France) et de l'Université de Sherbrooke (Québec, Canada). Ce travail fût en partie préparé au Laboratoire des Sciences de l'Habitat de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État sous la direction du Dr. Xavier Olny (à hauteur d'un tiers du temps au cours des trois premières années); et en partie préparé au Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke sous la direction du Pr. Raymond Panneton (le reste du temps). Je dois cette chance au Dr. Franck Sgard, enseignant chercheur à l'ENTPE et responsable du pôle acoustique du LASH, qui m'a proposé ce sujet et accueilli au sein de son équipe. Le Pr. Jean-Louis Guyader a en outre accepté de diriger cette thèse.

Le Dr. Claude Boutin qui a éveillé chez moi l'intérêt pour une théorie du passage micro-macro, tout en veillant chaleureusement à sa bonne mise en œuvre lors de mes retours en France. Le Dr. Denis Lafarge m'a généreusement indiqué une erreur dans un acte de conférence. Ses écrits ont en outre beaucoup stimulé mon intérêt pour la recherche.

Le fonctionnement du programme du Marcheur aléatoire permettant de simuler un mouvement Brownien, je le dois en particulier à Richard Bouchard et Louis-Michel Raynauld. Son évolution au Centre de Calculs Scientifiques de l'Université de Sherbrooke a été possible grâce à l'intervention de Francis Jackson, puis de Steve Allen.

Les travaux de stage de Marc Lefebvre, Félix Gauthier, Emmanuel Gautier, Igor Jovet et Fabien Chevillotte constituent autant de briques à l'édifice présenté. Je les remercie pour leur étroite coopération.

Les images 2D présentées dans ce document ont été réalisées avec le concours d'Irène Kelsey Lévesque du Centre de Caractérisation des

## **Avant-propos**

Matériaux de l'Institut des Matériaux et Systèmes Intelligents de l'Université de Sherbrooke.

Les doigts de fée de Christian Clavet, anciennement technicien au GAUS, et les interventions de Brian Driscoll, informaticien au département de génie mécanique, m'ont rendu plus d'un service.

Outre l'apprentissage scientifique que je dois à mes directeurs, c'est grâce à la confiance témoignée par Raymond Panneton, et à son soutien sans faille que j'ai pu trouver la force de mener à bien ce travail. Les critiques bienveillantes de Xavier Olny m'auront plus d'une fois désemparé. Je dois pourtant admettre, à la lumière du chemin parcouru, qu'elles se sont bien souvent avérées fondées ; ayant de ce fait enrichies ce document. Les encouragements de Jean-François Allard, que j'ai eu la chance de rencontrer lorsque je rédigeais ce manuscrit, me furent salutaires.

Ce projet de thèse a fait l'objet d'un soutien financier de la part de l'ENTPE, la région Rhône-Alpes, l'Université de Sherbrooke, le Centre Québécois de Recherche et de Développement de l'Aluminium et Alcan. La stabilité du financement fût assurée par le Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke, notamment via le Conseil National de Recherches Canada, le Fond Québécois de Recherches sur la Nature et les Technologies, et le réseau Auto21.

---

## **Microstructure et Macro-Comportement Acoustique : Approche par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative**

---

### Résumé

La question fondamentale de la détermination des propriétés acoustiques de milieux poreux à partir de leur géométrie locale est examinée dans cette thèse de doctorat, à partir d'un échantillon de mousse d'aluminium à cellules ouvertes ayant été analysé par microtomographie axiale à rayons-X. Plusieurs propriétés géométriques sont mesurées pour caractériser l'échantillon expérimental à l'échelle de la cellule. Cette information est utilisée de manière à reconstruire un milieu poreux au moyen d'unités cellulaires idéalisées tri- et bi- dimensionnelles. La dépendance en fréquences des champs de températures et de vitesses gouvernant la propagation et la dissipation des ondes acoustiques à travers un milieu poreux rigide est calculée par simulation de mouvement Brownien et par la méthode des éléments finis, respectivement. Le comportement macroscopique est obtenu par moyennes spatiales des champs locaux. Nos résultats sont comparés à des données expérimentales obtenues par des mesures au tube d'impédance. Premièrement, cette approche conduit à l'identification des paramètres macroscopiques du model semi-phénoménologique de Pride-Lafarge. Deuxièmement, elle fournit un accès direct aux perméabilités dynamiques thermique et visqueuse. Néanmoins, le modèle bidimensionnel sous-estime la perméabilité visqueuse statique ainsi que la longueur caractéristique visqueuse; ce qui requiert donc une implémentation tridimensionnelle.

**Mots-Clés:** microstructure – acoustique – milieu poreux – mousses à cellules ouvertes – méthode de reconstruction – microtomographie – mouvement Brownien – perméabilités dynamiques thermique et visqueuse.

---

**Microstructure and Acoustical Macro-Behaviour : Approach by reconstruction of a Representative Elementary Cell**

---

Abstract

The fundamental issue of determining acoustic properties of porous media from their local geometry is examined in this PhD dissertation thesis, thanks to a sample of open-cell aluminum foam analyzed by axial computed microtomography. Various geometric properties are measured to characterize the experimental sample at the cell size level. This is done in order to reconstruct a porous medium by means of idealized three- and two- dimensional unit-cells. The frequency dependant thermal and velocity fields governing the propagation and dissipation of acoustic waves through rigid porous media are computed by Brownian motion simulation and the finite element method, respectively. Macroscopic behavior is derived by spatial averaging of the local fields. Our results are compared to experimental data obtained from impedance tube measurements. Firstly, this approach leads to the identification of the macroscopic parameters involved in Pride and Lafarge semi-phenomenological models. Secondly, it yields a direct access to thermal and viscous dynamic permeabilities. However, the bi-dimensional model underestimates the static viscous permeability as well as the viscous characteristic length; what thus require a three-dimensional implementation.

**Key-words:** microstructure – acoustics – porous media – open-cell foams – reconstruction method – microtomography – Brownian motion – dynamic thermal and viscous permeabilities.



# Sommaire

# Partie 1 Introduction générale

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Contexte, motivations</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Problématique</b>	<b>2</b>
1.2.1	Problématique scientifique	2
1.2.2	Problématique technologique	2
<b>1.3</b>	<b>Objectifs</b>	<b>3</b>
1.3.1	Objectif généraux	3
1.3.2	Objectifs spécifiques	3
<b>1.4</b>	<b>État des connaissances</b>	<b>4</b>
1.4.1	Approche empirique	6
1.4.2	Approche phénoménologique et semi-phénoménologique	8
	1.4.2.1 <i>Approche phénoménologique</i>	9
	1.4.2.2 <i>Approche semi-phénoménologique</i>	9
1.4.3	Approche microstructurale	11
	1.4.3.1 <i>Méthodes d'homogénéisation</i>	11
	1.4.3.2 <i>Méthodes de résolution numérique</i>	12
	1.4.3.3 <i>Méthode des milieux reconstruits</i>	17
	1.4.3.3.1 Présentation	17
	Une approche unifiée	17
	Trois types de Transport	17
	Quatre classes de géométries	18
	Principe de la méthode	18
	1.4.3.3.2 Application aux mousses	19
	Structure indéformable	19
	Deux types de transport	19
<b>1.5</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>20</b>
	Étude préliminaire	20
	Acquisition	21
	Modélisation	21
	Calcul	21
	Mesures	21
<b>1.6</b>	<b>Originalités</b>	<b>22</b>
<b>1.7</b>	<b>Structure du document</b>	<b>24</b>

<b>1.8</b>	<b>Références</b>	<b>28</b>
	<b>Partie 2 Microstructure des mousses</b>	<b>35</b>
<b>2</b>	<b>Milieux poreux réels et microstructures idéalisées</b>	<b>36</b>
<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>2.2</b>	<b>Classes de milieux poreux</b>	<b>37</b>
2.2.1	Milieux granulaires	39
2.2.2	Milieux fibreux	40
2.2.3	Mousses	41
<b>2.3</b>	<b>Processus de formation, et méthodes de production</b>	<b>44</b>
2.3.1	Processus de formation typique d'une mousse	45
2.3.2	Cas particulier des mousses métalliques	46
	<i>2.3.2.1 Injection gazeuse</i>	<i>47</i>
	2.3.2.1.1 Principes de base	47
	2.3.2.1.2 Améliorations	49
	<i>2.3.2.2 Métallurgie des poudres</i>	<i>50</i>
	2.3.2.2.1 Approche standard	51
	2.3.2.2.2 Variante	53
	<i>2.3.2.3 Préforme</i>	<i>53</i>
	2.3.2.3.1 Dépôt	53
	2.3.2.3.2 Moulage	55
	Moule de sel	55
	Moule de sable	55
<b>2.4</b>	<b>Structure cellulaire périodique idéalisée</b>	<b>56</b>
2.4.1	Présentation des indicateurs	58
2.4.2	Lois topologiques et implications sur la cellule et son réseau	59
	<i>2.4.2.1 Loi d'Euler</i>	<i>60</i>
	<i>2.4.2.2 Loi de croissance de Neumann</i>	<i>61</i>
	<i>2.4.2.3 Loi d'Aboav-Weaire et règle de Lewis</i>	<i>64</i>
	<i>2.4.2.4 Bilan des tendances statistiques, et implications expérimentales</i>	<i>65</i>

## Sommaire

2.4.3	Formes périodiques canoniques pavant régulièrement l'espace	66
2.4.4	Limites d'une cellule unitaire périodique idéalisée : expériences de Matzke et de Kraynik	68
<b>2.5</b>	<b>Microstructure à l'équilibre</b>	<b>69</b>
2.5.1	Hypothèse du système à l'équilibre	70
2.5.2	Lois de Plateau : films et arêtes à l'équilibre	71
	<i>Loi d'équilibre des films</i>	72
	<i>Loi d'équilibre des arêtes</i>	72
2.5.3	Répartition locale de la matière	73
	<i>Loi d'équilibre des frontières de Plateau</i>	73
	<i>Extension aux fractions solides non-négligeables</i>	74
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>
2.6.1	Résumé de la démarche	74
2.6.2	Synthèse des résultats importants	76
<b>2.7</b>	<b>Références bibliographiques</b>	<b>77</b>

# 3 Acquisition de la morphologie cellulaire 84

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>84</b>
<b>3.2</b>	<b>Matériaux et méthodes</b>	<b>89</b>
3.2.1	Échantillons de mousses d'aluminium à cellules ouvertes	89
3.2.2	Système d'imagerie par microtomographie axiale à rayons-X	90
3.2.3	Acquisition de la microstructure	92
	<i>3.2.3.1 Radiographies</i>	93
	<i>3.2.3.2 Reconstruction de coupes transversales</i>	93
	<i>3.2.3.3 Segmentation et reconstruction tridimensionnelle</i>	94
	<i>3.2.3.3.1 Lissage des coupes et segmentation sur critères visuels</i>	95
	<i>3.2.3.3.2 Reconstruction de cellules isolées</i>	100
3.2.4	Mesure des paramètres de la morphologie cellulaire	102
<b>3.3</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>103</b>
3.3.2	Analyse quantitative tridimensionnelle de la morphologie cellulaire	103
3.3.3	Représentativité des résultats	109

3.3.4 Limitations 112

**3.4 Conclusion 113**

**Remerciements 114**

**Références 114**

## Partie 3 Propriétés acoustiques 118

### 4 Physique locale et macro-comportement acoustique 119

**4.1 Introduction 119**

**4.2 Formulation initiale du problème de propagation des ondes acoustiques en milieu poreux 120**

**4.3 Hypothèses de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques (HSP) 122**

**4.4 Principes de la méthode HSP 124**

**4.5 Obtention du comportement acoustique macroscopique 125**

4.5.1 Effets de dissipation visqueux 126

4.5.1.1 *Reformulation du problème local d'écoulement oscillant* 126

4.5.1.2 *Résultats remarquables et loi de Darcy généralisée* 127

4.5.2 Effets de dissipation thermiques 128

4.5.2.1 *Reformulation du problème de conduction de la chaleur* 128

4.5.2.2 *Loi formellement identique à une loi de Darcy généralisée* 129

4.5.3 Équation de propagation du milieu homogène équivalent 130

**4.6 Conclusion 132**

**4.7 Références 133**

<b>5</b>	<b>Méthode du parcours aléatoire</b>	<b>136</b>
<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>136</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulation multi-échelle du problème de conduction de la chaleur en régime harmonique</b>	<b>140</b>
<b>5.3</b>	<b>Analogie au problème de diffusion d'un soluté en régime permanent</b>	<b>141</b>
<b>5.4</b>	<b>Construction d'un parcours aléatoire</b>	<b>143</b>
<b>5.5</b>	<b>Algorithmique du parcours aléatoire</b>	<b>145</b>
<b>5.6</b>	<b>Expression de la perméabilité dynamique thermique</b>	<b>147</b>
5.6.1	Probabilité de survie	148
5.6.2	Temps de survie	149
	5.6.2.1 <i>Équation sans second membre</i>	150
	5.6.2.1.1 Solution particulière de l'équation sans second membre	151
	5.6.2.1.2 Solution générale de l'équation sans second membre	151
	5.6.2.2 <i>Équation particulière</i>	152
	5.6.2.3 <i>Solution générale</i>	152
5.6.3	Du champ de concentration 'scalant' au champ de température 'canonique'	153
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
<b>5.8</b>	<b>Références</b>	<b>155</b>

## A 5 Annexes du Chapitre 5 xvi

### Implémentation de l'algorithme du parcours aléatoire pour des géométries cellulaires périodiques tridimensionnelles xvi

<b>A 5.1</b>	<b>Positionnement aléatoire au sein du volume de contrôle</b>	<b>xvi</b>
A 5.1.1	Avant propos, principe de description de la géométrie	xvii
A 5.1.2	Repérage du volume de contrôle	xviii
A 5.1.3	Positionnement aléatoire du marcheur	xix
<b>A 5.2</b>	<b>Calcul de la sphère de plus grand rayon sans recouvrement avec une surface solide</b>	<b>xx</b>
A 5.2.1	Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur le plan du triangle appartient au triangle	xxii
	<i>A 5.2.1.1 Projeté orthogonal d'un point sur un plan</i>	<i>xxii</i>
	<i>A 5.2.1.2 Tester si un point appartient à un triangle</i>	<i>xxii</i>
A 5.2.4	Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur la droite passant par l'arête du triangle appartient à l'arête	xxiii
<b>A 5.3</b>	<b>Test de phase</b>	<b>xxiii</b>
<b>A 5.4</b>	<b>Test de piégeage : le marcheur est-il situé à une distance supérieure à la distance de piégeage ?</b>	<b>xxiv</b>
<b>A 5.5</b>	<b>Positionnement aléatoire sur une surface sphérique</b>	<b>xxv</b>
<b>A 5.6</b>	<b>Conditions aux limites périodiques</b>	<b>xxvi</b>

## 6 Simulations de parcours aléatoires 158

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>158</b>
<b>6.2</b>	<b>Méthode de simulation</b>	<b>161</b>
6.2.1	Convergence de la solution	162

## Sommaire

6.2.1.1	Norme $L_2$	164
6.2.1.2	Norme $L_\infty$	164
6.2.2	Estimation de l'erreur sur la solution numérique	165
6.2.2.1	Solutions de références	165
6.2.2.2	Loi d'évolution de l'erreur en fonction du nombre de PAs	168
<b>6.3</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>169</b>
6.3.1	Cellule périodique tridimensionnelle idéalisée	170
6.3.2	Géométries canoniques	171
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>179</b>
6.4.1	Distance de piégeage préconisée	180
6.4.2	Estimation de l'erreur et de l'intervalle de confiance	181
<b>Remerciements</b>		<b>182</b>
<b>Références</b>		<b>182</b>
<b>7</b>	<b>Calcul numérique de la perméabilité dynamique visqueuse d'une mousse à cellules ouvertes par homogénéisation</b>	<b>185</b>
<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>185</b>
<b>7.2</b>	<b>Modélisation géométrique (2D)</b>	<b>189</b>
<b>7.3</b>	<b>Formulation multi-échelle de problème des dissipations visqueuses par homogénéisation</b>	<b>191</b>
<b>7.5</b>	<b>Résultats numériques et discussion</b>	<b>194</b>
<b>7.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>200</b>
<b>Remerciements</b>		<b>200</b>
<b>Références</b>		<b>200</b>



<b>8</b>	<b>Méthode de détermination microstructurale des propriétés acoustiques d'une mousse d'aluminium à cellules ouvertes</b>	<b>203</b>
<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>204</b>
<b>8.2</b>	<b>Procédure de reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER)</b>	<b>205</b>
<b>8.3</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>208</b>
<b>8.4</b>	<b>Résumé et conclusions</b>	<b>213</b>
	<b>Remerciements</b>	<b>214</b>
	<b>Références</b>	<b>215</b>
	<b>Partie 4 Conclusion générale</b>	<b>217</b>
	<b>Références</b>	<b>223</b>
<b>B</b>	<b>Annexes de la thèse</b>	<b>xxviii</b>

# Partie 1

## Introduction générale

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte, motivations

## 1.2 Problématique

1.2.1 Problématique scientifique

1.2.2 Problématique technologique

## 1.3 Objectifs

## 1.4 État des connaissances

1.4.1 Approche empirique

1.4.2 Approches phénoménologique et semi-phénoménologique

1.4.3 Approche microstructurale

1.4.3.1 *Méthodes d'homogénéisation*

1.4.3.2 *Méthodes de résolution numérique*

1.4.3.3 *Méthode des milieux reconstruits*

## 1.5 Méthodologie

## 1.6 Originalités

## 1.7 Structure du document

## 1.8 Références

---

### 1.1 Contexte, motivations

La réduction des nuisances sonores est un enjeu clé pour l'industrie du bâtiment et celle des transports (automobile, ferroviaire, et aéronautique). C'est aussi une préoccupation de santé publique face aux coûts entraînés par le traitement des surdités liées aux environnements de travail bruyants.

Pour réduire les niveaux de bruits émis, la méthode habituelle consiste à positionner un matériau poreux sur le trajet emprunté par l'onde acoustique. L'onde acoustique pénètre alors dans le réseau de pores, et une partie de son énergie est dissipée sous forme de chaleur par frottements visqueux et conduction de la chaleur.

Les modèles habituellement employés par les acousticiens pour caractériser les performances acoustiques de matériaux poreux sont basés sur la mesure d'un certain nombre de paramètres macroscopiques, c'est-à-dire moyennés à l'échelle de l'échantillon. Or, ces paramètres macroscopiques sont dépendants les uns des autres, et dérivent de la géométrie locale du matériau. Chercher à améliorer les performances d'absorption acoustique d'un matériau en déterminant la combinaison optimale de paramètres macroscopiques est donc inutile car physiquement

irréalisable. L'idée est donc de tisser des liens entre microstructures et propriétés acoustiques des matériaux poreux en se basant sur des modèles physiques de la géométrie locale du milieu poreux. De cette manière, il sera effectivement envisageable de jouer sur la géométrie locale du milieu pour améliorer ses performances d'absorption acoustique.

---

## 1.2 Problématique

---

### 1.2.1 Problématique scientifique

À l'échelle de la géométrie locale du matériau poreux, pour des géométries simples (feuillet, cylindres) des relations mathématiques relient la microstructure aux propriétés macroscopiques. Et c'est d'ailleurs de ces relations que dérivent les modèles macroscopiques dominants. Mais dès qu'il s'agit de microstructures complexes telles que celles des mousses acoustiques, les expressions sont imprécises ou inexistantes. Ce constat conduit à illustrer la problématique scientifique des matériaux poreux par la Figure 1.1, ci-dessous. Il apparaît que la science locale des matériaux réels (côté gauche) est ignorée de la science de l'acoustique (côté droit), qui fonctionne par conséquent aujourd'hui en vase clos. C'est grâce aux percées scientifiques récentes permettant d'accéder à la géométrie locale tridimensionnelle des matériaux qu'une approche microstructurale est aujourd'hui possible. Il s'agit par conséquent au cours de ce programme de recherche de saisir une opportunité qui pourrait améliorer notre compréhension des phénomènes acoustiques en définissant la problématique suivante: **Comment déterminer les propriétés acoustiques à l'échelle locale du matériau poreux réel ?**

---

### 1.2.2 Problématique technologique

Malgré la présence de modèles sophistiqués, les ingénieurs concepteurs utilisent en général une démarche par ajustements successifs pour fabriquer des matériaux acoustiques. Au niveau de la fabrication des matériaux poreux, c'est la morphologie qui est contrôlée (côté gauche), tandis qu'au niveau acoustique ce sont les paramètres acoustiques qui sont mesurés (côté droit), Figure 1.1. Des relations sont essentielles pour autoriser la conception sur mesure de nouvelles mousses acoustiques, en passant par une optimisation réaliste des paramètres macroscopiques. Les mousses d'aluminium étant jadis utilisées pour leurs performances autres qu'acoustique, devront être conçues maintenant en incluant cette composante.

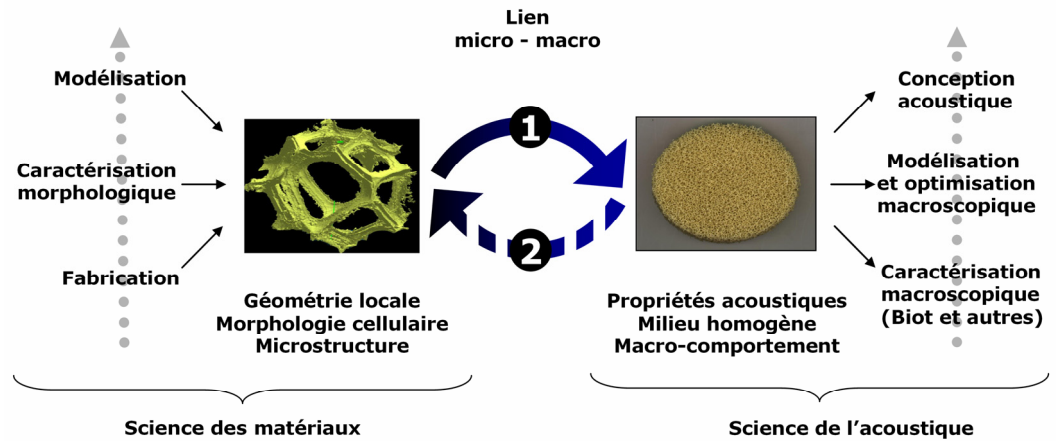


Figure 1.1 Problématique de l'acoustique des matériaux poreux

## 1.3 Objectifs

### 1.3.1 Objectif généraux

L'objectif général de cette thèse est la **détermination des propriétés acoustiques à l'échelle locale du matériau poreux réel**, notamment de mousses d'aluminium. Dans ce but, deux étapes sont nécessaires. La première étape consiste à déterminer la géométrie locale du matériau. La seconde à résoudre, dans la configuration géométrique, les équations locales de champ gouvernant les phénomènes de propagation et de dissipation acoustique.

### 1.3.2 Objectifs spécifiques

L'onglet « Objectifs » de la Figure 1.3 résume les objectifs spécifiques de la présente étude. La détermination de la géométrie locale du matériau implique une phase d'**acquisition**, idéalement au moyen d'une technique d'imagerie tridimensionnelle. Une fois la géométrie acquise, sa **modélisation** est préconisée. Elle permet d'envisager une réduction de la complexité de la configuration géométrique à ses caractéristiques influentes sur le comportement acoustique - ainsi que du coût de calcul. Une **étude préliminaire** devrait permettre de dégager les modèles géométriques les plus pertinents de la littérature. Généralement, les équations de champ sont linéaires, à dérivées partielles. Ce dernier trait les rend difficiles à traiter. Et le nombre de configurations dans lesquelles elles peuvent être résolues

analytiquement est particulièrement faible. En outre, une approche numérique est rendue possible grâce à l'avènement des supercalculateurs. Elle a l'avantage de résoudre des situations réalistes avec une précision acceptable. La résolution des équations de champ est alors envisagée par une phase de **calcul** numérique, pour pouvoir traiter des configurations géométriques non triviales. Les résultats numériques issus de ces calculs seront confrontés aux **mesures** des propriétés acoustiques. Finalement, on distingue cinq objectifs spécifiques intervenants dans le processus de détermination des propriétés acoustiques à l'échelle locale du matériau poreux réel :

- une **étude préliminaire**, permettant de dégager les modèles de la littérature pertinents pour décrire la géométrie locale du matériau poreux étudié;
- l'**acquisition** expérimentale de la géométrie locale au moyen d'une technique d'imagerie tridimensionnelle;
- sa **modélisation**;
- le **calcul** numérique des propriétés acoustiques;
- et la confrontation aux **mesures**.

L'ensemble de ces étapes clés constitue une méthode de reconstruction, détaillée dans la section suivante.

---

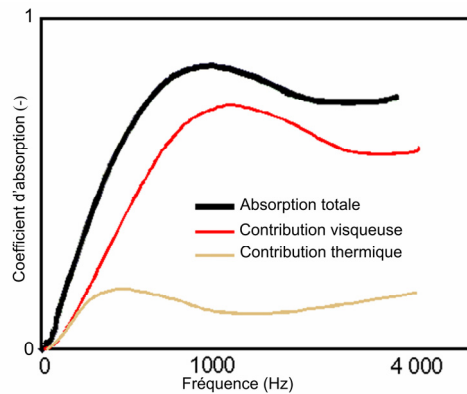
## 1.4 État des connaissances

Lorsqu'une onde acoustique se propage, il est possible de placer sur son chemin un matériau poreux dont la fonction est d'absorber une partie de l'énergie acoustique incidente. Cet effet d'absorption est habituellement quantifié par le coefficient d'absorption du matériau poreux  $\alpha(\omega)$ , **indicateur acoustique** défini par le rapport entre énergie acoustique absorbée (ou non réfléchi) et énergie acoustique incidente, à pulsation  $\omega$  donnée. Ce coefficient apparaît donc comme la résultante globale des dissipations d'énergie acoustique qui s'opèrent au sein du matériau, compte tenu de conditions aux limites particulières, mais ne tient pas compte de la nature des effets dissipatifs. Pour être absorbée, l'onde acoustique doit être en mesure de pénétrer dans le milieu. Il est donc important que la porosité du matériau soit ouverte ; les pores occlus ne participant pas au processus de dissipation. Lorsque le matériau poreux utilisé à des fins d'absorption acoustique est une mousse, ses pores, ou plus spécifiquement ses **cellules**, sont par conséquent généralement **ouvertes ou partiellement ouvertes**. On distingue néanmoins, à priori, trois mécanismes de dissipation d'énergie acoustique : les dissipations visqueuses, thermiques, et structurales. Lorsque le milieu poreux est trop lourd et/ou trop rigide pour être ébranlé

par l'onde acoustique incidente, seuls les effets dissipatifs visqueux et thermiques sont significatifs ; et contribuent typiquement à environ 70 % et 30 % des dissipations d'énergie totales, voir Figure 1.2.

Dans un **fluide libre**, à l'approximation où les **pertes** sont **négligées**, la propagation des ondes acoustiques est entièrement caractérisée à partir de la connaissance de la densité ambiante  $\rho_0$  et du module d'incompressibilité adiabatique  $K_a$  du fluide. En particulier, nombre d'onde  $q$  et impédance caractéristique  $Z_c$  sont réels, et s'expriment à partir de  $\rho_0$  et  $K_a$ .

Dans un **fluide limité par une structure poreuse**, nombre d'onde et impédance caractéristique deviennent, du fait de l'existence de **phénomènes irréversibles de pertes**, deux fonctions complexes ( $\sim$ ) de la pulsation  $\omega$ ,  $\tilde{q}(\omega)$  et  $\tilde{Z}_c(\omega)$ . Ces fonctions décrivent un **comportement effectif du fluide au niveau macroscopique**, étant entendu que la **longueur d'onde de la perturbation reste grande devant les dimensions microscopiques du réseau poreux**. Les relations liant nombre d'onde et impédance caractéristique à densité ambiante et module d'incompressibilité peuvent être maintenues en introduisant les **densité et incompressibilité effectives du fluide**,  $\tilde{\rho}(\omega)$  et  $\tilde{K}(\omega)$ , fonctions complexes de la pulsation  $\omega$ . Les deux fonctions  $\tilde{\rho}(\omega)$  et  $\tilde{K}(\omega)$  généralisent, pour le fluide limité, les constantes physiques  $\rho_0$  et  $K_a$  du fluide libre. Ces fonctions peuvent aussi s'écrire sous une forme reportant la dépendance fréquentielle sur deux **facteurs de réponse adimensionnels ou susceptibilités**  $\tilde{\alpha}(\omega)$  et  $\tilde{\beta}(\omega)$ . Le premier facteur  $\tilde{\alpha}(\omega)$  est appelé **tortuosité dynamique** (Johnson *et al.*, 1987)<sup>1</sup>, le second  $\tilde{\beta}(\omega)$  **compressibilité dynamique** (Lafarge, 1997)<sup>2</sup>. Les résultats peuvent aussi être présentés élégamment sous forme de **fonctions de relaxations** visqueuse  $\tilde{\chi}(\omega)$  et thermique  $\tilde{\chi}'(\omega)$ , qui se comportent élégamment sous forme de fonctions scalantes des problèmes fluide et thermique (Cortis *et al.*, 2001)<sup>3</sup>. Une **description symétrique** des processus visqueux et thermiques, qui réalise également la séparation des deux types de pertes, visqueuses et thermiques, est obtenue en considérant les **perméabilités dynamiques visqueuse**<sup>1</sup>  $\tilde{k}(\omega)$  et **thermique**<sup>2</sup>  $\tilde{k}'(\omega)$ . Les perméabilités dynamiques sont en outre reliées aux susceptibilités selon des relations connues (Johnson, 1987)<sup>1</sup> (Lafarge, 1997)<sup>4</sup>.



**Figure 1.2** Coefficient d'absorption typique d'un matériau poreux, contributions visqueuse et thermique

On constate finalement que la prise en compte des effets visqueux et thermiques lors de la propagation d'une onde sonore dans le fluide saturant une structure poreuse rigide, pose le problème de la détermination de deux fonctions complexes de la pulsation qui décrivent un comportement effectif du fluide au niveau macroscopique, parmi les couples équivalents suivants :  $\{\tilde{q}(\omega), \tilde{Z}_c(\omega)\}$ ,  $\{\tilde{\rho}(\omega), \tilde{K}(\omega)\}$ ,  $\{\tilde{\alpha}(\omega), \tilde{\beta}(\omega)\}$ ,  $\{\tilde{\chi}(\omega), \tilde{\chi}'(\omega)\}$ ,  $\{\tilde{k}(\omega), \tilde{k}'(\omega)\}$ . L'histoire de l'acoustique des matériaux poreux se résume à la détermination d'un de ces couples de fonctions, et aux différentes approches menées pour y parvenir.

#### 1.4.1 Approche empirique

La prédiction théorique des propriétés acoustiques de matériaux poreux est une tâche difficile en raison de la structure complexe des matériaux poreux. Au lieu de bâtir une théorie basée sur les détails microstructuraux, il est possible de mesurer les propriétés recherchées, et de développer des modèles empiriques pour la prédiction des propriétés de matériaux similaires.

Le modèle empirique de la littérature le plus connu est sans doute celui de Delany et Bazley<sup>5</sup>, publié en 1970. Dans leur modèle, les auteurs mesurent l'impédance caractéristique  $\tilde{Z}_c$  et le nombre d'onde  $\tilde{k}$  d'un grand nombre de matériaux fibreux, pour une gamme de fréquences  $f$  allant de  $0.01\sigma$  à  $\sigma$ , où  $\sigma$  est la résistance statique à l'écoulement ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-4}\cdot\text{s}$ ). À partir des mesures effectuées, un modèle empirique en loi de puissance est développé pour caractériser  $\tilde{Z}_c$  et  $\tilde{k}$  en fonction d'un rapport  $f/\sigma$  (ayant les dimensions de l'inverse d'une unité de masse volumique). Finalement, seule la connaissance de la résistivité est requise pour prédire l'impédance



caractéristique et le nombre d'onde de matériaux fibreux. Miki<sup>6</sup> constate que, dans le cas où le milieu fibreux est constitué de plusieurs couches, il arrive que la partie réelle de l'impédance calculée à partir du modèle de Delany et Bazley devienne négative en basses fréquences. Ce comportement n'étant pas acceptable d'un point de vue physique, Miki propose de contraindre la formulation du problème en introduisant des relations devant être respectées par les coefficients des lois de puissance de Delany et Bazley. Le problème étant ainsi contraint, Miki obtient un nouveau jeu de coefficients à partir de régressions réalisées sur la base des données expérimentales de Delany et Bazley ; corrigeant ainsi le comportement basses fréquences du modèle des deux auteurs, et étendant de surcroît la gamme de validité fréquentielle du modèle initial. Dans leur publication, Delany et Bazley n'ont pas réellement utilisé de paramètre adimensionnel, en omettant la densité du gaz. Néanmoins, la plupart des auteurs leur ayant succédé dans une démarche d'ajustement des coefficients d'une loi de puissance à des données expérimentales ont employé le paramètre adimensionnel  $\rho_0 f / \sigma$ , où  $\rho_0$  est la densité ambiante de l'air. Les données de Mechel<sup>7</sup> ont largement complétées la gamme des matériaux fibreux d'intérêt courant. Un jeu séparé d'équations fût néanmoins donné pour chaque type de matériau, alors que Delany et Bazley ont tracé leurs données pour une grande variété de matériaux fibreux, telles que des laines de verre et de roche confondues. Mechel a aussi étendu le travail de Delany et Bazley en corrigeant le comportement basses fréquences des propriétés acoustiques de milieux fibreux. Qunli<sup>8</sup>, et Cummings *et al.*<sup>9</sup> ont tous deux mesurés les propriétés de mousses plastiques complètement réticulées (absence de membranes ou de fenêtres, c'est-à-dire à cellules ouvertes) et développés des lois de puissance de la même forme que Delany et Bazley. Récemment, Muehleisen *et al.*<sup>10</sup> ont reproduit la démarche de Delany et Bazley pour une nouvelle sorte de mousses à cellules ouvertes, en carbone vitreux réticulé<sup>11</sup>.

L'approche empirique de Delany et Bazeley fût séminale, et a été largement utilisée pour une large gamme d'applications concernant les milieux poreux. De telles équations empiriques sont sans aucun doute très populaires, faciles à implémenter, et donnent des prédictions relativement précises. Une grande variété de modèles empiriques est disponible dans la littérature (voir par exemple les références incluses dans l'article de Cummings). Néanmoins, pour le cas des mousses, le degré de réticulation (le nombre de membranes présentes dans la structure) n'affecte pas seulement la résistance statique à l'écoulement, mais aussi la sinuosité du chemin suivi par l'onde acoustique. De plus, la porosité des matériaux poreux n'est pas toujours très proche de un. Cela affecte les propriétés

acoustiques du matériau et doit par conséquent être pris en compte, d'une manière ou d'une autre, dans toute méthode de prédiction empirique. C'est dans cet esprit que Miki<sup>12</sup>, en 1990, proposa d'étendre la démarche d'ajustement des coefficients d'une loi de puissance à des données expérimentales en introduisant deux paramètres supplémentaires, la porosité  $\Phi$ , et la tortuosité  $\alpha_\infty$ .

On constate finalement que la prolifération des modèles empiriques correspond à la diversité des structures étudiées. Alternativement, tenter de regrouper en un même modèle empirique plusieurs types de structures nécessite l'introduction de nouveaux paramètres macroscopiques (capables d'intégrer l'influence de la variabilité des caractéristiques structurales sur le comportement acoustique).

---

#### 1.4.2 Approche phénoménologique et semi-phénoménologique

Il est fréquent que des vocables différents soient utilisés pour désigner une même approche dans la littérature acoustique. Nous avons tenté de remédier à cette imprécision en distinguant l'approche phénoménologique, de l'approche semi-phénoménologique. Quoi que discutable, cette distinction permet de mettre en évidence deux périodes dans l'évolution de la modélisation des phénomènes de propagation et de dissipation des ondes acoustiques dans un milieu poreux. Une première période, qui débute typiquement avec la deuxième guerre mondiale, et s'étend jusqu'aux années quatre-vingts, vise à modifier la solution associée à des tubes circulaires de manière à s'ajuster à des géométries plus complexes. Cette approche est parfois appelée microstructurale, parfois phénoménologique. Le terme phénoménologique lui sera ici réservé. Le terme microstructural sera quant à lui utilisé pour désigner des méthodes permettant d'établir une connexion plus explicite entre la description de la géométrie du matériau poreux à l'échelle locale, et ses propriétés acoustiques (voir section 1.3.3).

On appelle d'autre part approche semi-phénoménologique l'étude mathématique des fonctions de réponses approchées d'un fluide saturant un milieu poreux soumis à une excitation acoustique, dont les coefficients macroscopiques sont généralement mesurés par des techniques physiques. Cette approche débute en 1987 avec la publication de l'article fondateur de Johnson et de ses collaborateurs<sup>1</sup>, et s'étend jusqu'à nos jours avec le perfectionnement des techniques d'identification expérimentale de ses coefficients.

#### 1.4.2.1 *Approche phénoménologique*

Les solutions analytiques étant impossibles à déterminer pour des géométries autres que celles des pores les plus idéalisés, la plupart des travaux antérieurs se sont basés sur une structure poreuse faite de tubes circulaires et non-connectés. Zwikker et Kosten<sup>13</sup>, qui rédigèrent leur ouvrage sous les bombardements; et Biot<sup>14</sup>, qui travaillait pour l'industrie pétrolière, partagent largement le crédit d'une théorie si populaire. Bien que Zwikker et Kosten aient écrit la solution en termes de fonctions de Bessel d'arguments complexes, alors que Biot l'a écrite en termes de fonctions de Kelvin, les deux formulations sont équivalentes. Évidemment, un milieu poreux revenant à des tubes circulaires, uniformes, et non-connectés serait d'un intérêt pratique mineur. La raison pour laquelle Zwikker et Kosten, et Biot, considèrent ce modèle, est qu'ils postulèrent que son comportement serait similaire à des milieux plus compliqués, et par conséquent pourrait être appliqué après quelques simples modifications et réinterprétations de ses paramètres.

De nombreux auteurs ont proposé des modifications à la solution du tube circulaire, la rendant plus largement applicable. En particulier, Attenborough<sup>15</sup> modifia les équations de Zwikker et Kosten, alors qu'Allard et ses collaborateurs<sup>16</sup> modifièrent les équations de Biot. Les résultats de ces travaux sont quelque peu différents, et discutés par Norris<sup>17</sup>, ainsi que Champoux et Stinson<sup>18</sup>. En général, les théories étendues contiennent un ou plusieurs facteurs de forme (ou de structure) dont le propos est de prendre en compte les variations entre la géométrie réelle des pores et celle d'un tube circulaire. D'autres sections de pores ont été analysées en dehors des sections circulaires, incluant fentes, triangles, et rectangles<sup>14, 17, 19, 20</sup>. Stinson considéra le cas de tubes ayant une section arbitraire, mais uniforme<sup>19</sup>. Champoux et Stinson<sup>18</sup> développèrent un modèle pour les pores de section uniforme.

Plus largement, le propos de la littérature phénoménologique fût de modifier finement la solution associée à des tubes circulaires de manière à s'ajuster à des cas plus compliqués.

#### 1.4.2.2 *Approche semi-phénoménologique*

À nouveau poussée par l'industrie pétrolière, l'acoustique des milieux poreux va bénéficier en 1987 de la publication d'un article majeur rédigé par Johnson, Koplik, et Dashen<sup>1</sup>. Les auteurs s'intéressent à la réponse visqueuse d'un fluide Newtonien saturant l'espace poreux d'un milieu isotrope rigide soumis à un gradient de pression oscillant aux bornes de l'échantillon; et dérivent les propriétés analytiques que doit respecter une telle fonction de réponse, ainsi que son comportement asymptotique hautes

et basses fréquences. Ils proposent alors un modèle simple basé sur une fonction d'interpolation de ces limites. Cela se traduit notamment par l'introduction d'un paramètre macroscopique supplémentaire gouvernant le comportement asymptotique hautes fréquences : la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$ .

Dans le contexte de la prospection pétrolière, les fluides considérés par Johnson et ses collaborateurs possèdent une conductivité thermique négligeable. Ce qui rend inutile l'étude des phénomènes de dissipation thermique au passage d'une onde acoustique. À contrario, lorsque le fluide saturant est un gaz, de l'air par exemple, le bilan dissipatif par effet thermique est certes généralement bien moindre que celui obtenu par effets visqueux, mais non négligeable (en particulier pour des faibles épaisseurs de matériaux accolés à un fond rigide).

C'est ainsi que, en suivant Johnson et de ses collaborateurs, Champoux et Allard<sup>21,22</sup> déterminèrent l'expression analytique la plus simple qui respecte le comportement asymptotique hautes fréquences de la réponse thermique d'un fluide conducteur saturant l'espace poreux. Un paramètre macroscopique supplémentaire est ainsi introduit, la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ . Lafarge, dans sa thèse de doctorat, a proposé d'étendre cette démarche au comportement asymptotique basses fréquences de la réponse thermique. Ceci se traduit par l'introduction macroscopiques supplémentaires : la perméabilité thermique basses fréquences  $k_0'$ <sup>4</sup>.

Parallèlement, Pride, Morgan et Gangi<sup>23</sup>, dans un article de 1993, proposent de raffiner le modèle de Johnson. Ils constatent en effet que lorsque le fluide est soumis à de fortes variations de sections, la partie réelle (imaginaire) de sa tortuosité (perméabilité) asymptotique basses fréquences n'est exacte qu'au premier ordre dans le modèle de Johnson. Ce constat mène à l'introduction d'un nouveau paramètre macroscopique qui permet de raffiner ce comportement asymptotique basses fréquences : la tortuosité visqueuse basses fréquences  $\alpha_0$ .

Une fois encore, cette démarche est étendue au problème thermique par Lafarge<sup>2</sup>, qui corrige une imprécision de Pride et de ses collaborateurs, et généralise le traitement du problème visqueux raffiné au problème thermique. Un nouveau et dernier paramètre macroscopique est finalement introduit, la tortuosité thermique basses fréquences  $\alpha_0$ .

Ces cinq modèles, à savoir Johnson (4 paramètres), Champoux-Allard (5 paramètres), Champoux-Allard modifié (6 paramètres), Pride (7 paramètres), et Lafarge (8 paramètres) sont reportés à la Figure 1.4.

En jetant un regard rétrospectif sur ces modèles, il n'est alors pas surprenant qu'à une croissance de leur sophistication corresponde une augmentation du nombre de paramètres. On peut en outre se questionner

quant à l'utilité pratique de tels raffinements. D'autant plus que si l'on s'intéresse uniquement au coefficient d'absorption d'un matériau poreux en basses fréquences, la partie réelle est peu influente dans la mesure où le terme imaginaire en  $i/\omega$  lui est très supérieur.

Pour remédier à ce type de problème, Wilson, en remarquant que les modèles semi-phénoménologiques peuvent être réécrits sous forme de modèles de relaxation, développa un modèle de relaxation comportant seulement deux paramètres ajustables<sup>24</sup>. Un autre avantage offert par le modèle de Wilson, de part la simplicité de sa structure mathématique, est la possibilité de travailler dans le domaine temporel (Wilson, 2004)<sup>25</sup>, ce qui n'est pas évident à partir des autres modèles<sup>26</sup>. En revanche, le principal défaut du modèle de Wilson est situé dans l'absence de correspondance physique des paramètres ajustables. En ce sens, malgré son intérêt pratique, il ne participe pas à une meilleure compréhension des phénomènes de dissipation, et nous n'en feront pas usage par la suite. Les cinq modèles brièvement décrits constituent aujourd'hui les modèles dominants de la littérature.

**Les modèles les plus détaillés ont finalement l'avantage de s'échafauder sur des paramètres macroscopiques asymptotiques ayant systématiquement une signification physique et pouvant être calculés numériquement à l'échelle locale du matériau poreux. En ce sens, ils peuvent participer à une meilleure compréhension des phénomènes de dissipation à l'échelle locale du matériau poreux réel.**

---

### 1.4.3 Approche microstructurale

#### 1.4.3.1 Méthodes d'homogénéisation

Les méthodes d'homogénéisation sont des techniques mathématiques permettant de relier les propriétés des constituants du milieu hétérogène aux propriétés du milieu macroscopique, souvent appelé homogène équivalent en acoustique. L'idée consiste en effet à définir un milieu continu macroscopiquement équivalent au milieu hétérogène, dont la description macroscopique dérivée soit intrinsèque au matériau et à l'excitation (indépendante des conditions aux limites macroscopiques).

Il n'est pas toujours possible de dériver une description effective de la description du milieu hétérogène. Néanmoins, si la condition fondamentale de séparation d'échelles entre la dimension caractéristique des hétérogénéités  $l$  et la dimension caractéristique macroscopique  $L$  est vérifiée, une description effective est alors possible. Cette condition fondamentale est commune à l'ensemble des méthodes d'homogénéisation.

Il existe différentes méthodes d'homogénéisation possibles. L'hypothèse d'invariance spatiale par translation est néanmoins commune à l'ensemble de ces méthodes.

- Les méthodes auto-cohérentes ont été développées dans les années 1940. Elles se fondent sur une hypothèse de microstructures parfaitement désordonnées, reproduites par des hétérogénéités génériques. Une hypothèse sur la forme de la solution est aussi nécessaire. Les méthodes auto-cohérentes permettent d'estimer les coefficients macroscopiques en tirant avantage de solutions analytiques dans des configurations simplifiées. Elles sont bien adaptées aux géométries idéalisables pour des matériaux de types fibreux ou granulaires.
- Les méthodes variationnelles, développées dans les années 1960, permettent d'obtenir des bornes sur les coefficients à partir de la connaissance des proportions des constituants. Une présentation complète de cette approche est disponible dans (Torquato, 2002)<sup>27</sup>.
- La méthode de l'Homogénéisation des Structures Périodiques (HSP) utilise la technique des développements à échelles multiples développée dans les années 1980 par Bensoussan *et al.* (Bensoussan *et al.*, 1978)<sup>28</sup> et Sanchez-Palencia (Sanchez-Palencia, 1980)<sup>29</sup>. L'hypothèse supplémentaire de microstructure périodique permet de prédire la nature du comportement, et la manière de calculer les coefficients associés.
- Mentionnons aussi les Méthodes Statistiques (MS) développées dans les années 1990 par Kröner (Kröner, 1986)<sup>30</sup> pour des structures aléatoires lorsqu'on dispose d'informations statistiques sur la phase, comme de fonctions de corrélations.

Un des avantages de la méthode HSP est de déduire rigoureusement les lois gouvernant les phénomènes de dissipation acoustique à l'échelle macroscopiques à partir des équations gouvernant la dynamique et la thermique du fluide à l'échelle du pore. La méthode indique aussi la manière de calculer les coefficients macroscopiques, quelle que soit la microstructure périodique. Néanmoins, les coefficients peuvent seulement être obtenus à partir de simulations numériques en raison de la forte complexité du flux à travers les pores.

#### 1.4.3.2 Méthodes de résolution numérique

Il s'agit désormais de résoudre un problème aux limites, c'est-à-dire un jeu d'équations aux dérivées partielles gouvernant localement les phénomènes de propagation et d'absorption des ondes acoustiques dans la configuration géométrique. L'état des connaissances concernant les méthodes numériques s'articule donc autour de trois questions.

- Premièrement, quel est le jeu d'équations résolues ?  
On parlera du problème visqueux, ou du problème thermique, selon qu'il s'agisse de résoudre l'équation de Navier-Stokes couplée à la condition d'incompressibilité locale, ou l'équation de la chaleur. On rappelle qu'une des difficultés en acoustique consiste à résoudre ces problèmes en régime harmonique, c'est-à-dire pour toute une gamme de fréquences.  
Nous verrons que certains auteurs ont contourné cette difficulté en résolvant le problème en comportement asymptotique basses et hautes fréquences, puis en utilisant les modèles semi-phénoménologiques. D'autres encore, choisissent simplement de résoudre le problème visqueux statique, puis ont recours aux modèles empiriques une fois la résistivité connue.
- Deuxièmement, quelle est la configuration géométrique pour laquelle le jeu d'équations aux dérivées partielles est résolu (problème aux limites) ?  
Il peut s'agir de géométries tubulaires, d'arrangements plus ou moins ordonnés de cylindres ou de sphères, de toute autre structure idéalisée; ou encore de représentations surfaciques de milieux réels. Ici, la dimensionnalité de la configuration géométrique est un aspect important de la question.
- Troisièmement, quelle est la méthode de résolution numérique utilisée ? Avantages et limites.  
La méthode de résolution numérique idéale devra permettre de résoudre les problèmes visqueux et thermique, en régime harmonique, dans une configuration géométrique réaliste. L'objet de cette section est de faire le bilan des études consacrées à la résolution numérique du problème acoustique autour de l'articulation équations – géométrie – méthode.

Un phénomène physique d'importance doit être mentionné pour appliquer une méthode de résolution numérique au problème analysé ici. Lorsque la fréquence augmente, le siège des dissipations visqueuses se rapproche de l'interface solide dans une couche limite dont l'épaisseur est inversement proportionnelle à la pulsation  $\omega$ . De même, les échanges thermiques ont lieu dans une épaisseur de couche limite d'épaisseur similaire. Pour donner un ordre de grandeur, son épaisseur typique est d'environ  $100\mu\text{m}$  à  $1\text{kHz}$ . Ces épaisseurs de couche limite sont d'importance cruciale pour caractériser les propriétés dynamiques du matériau poreux, puisque elles concentrent les principales contributions de dissipation d'énergie. Pour cette raison, la discrétisation de la solution numérique doit inévitablement être raffinée au voisinage de la frontière solide, au moyen de techniques qui peuvent s'avérer sophistiquées. À moins d'opter pour la résolution du problème en comportement asymptotique uniquement. D'autre part, du point de vue mathématique, la

résolution du problème thermique est un problème scalaire, comprenant une seule équation aux dérivées partielles. Alors que le problème visqueux qui est de nature vectorielle, comporte de ce fait un degré de liberté supplémentaire à déterminer en 2D, deux degrés de liberté supplémentaires à déterminer en 3D. Il doit de surcroît respecter la condition d'incompressibilité locale, ce qui en fait un problème plus compliqué à résoudre.

De nombreux auteurs ont abordé la résolution du problème visqueux et/ou thermique par la méthode des éléments finis. Craggs et Hildebrandt<sup>31</sup> ont résolu le problème visqueux par éléments finis pour le cas de tubes de section constante (section carrée, circulaire, triangle équilatéral, fentes, hexagonale). Firdaouss, Guermond et Lafarge<sup>32</sup>, ont résolu le problème visqueux en comportement asymptotique hautes fréquences pour le cas d'un conduit bidimensionnel rugueux. La présence d'arêtes vives constitue un problème singulier et nécessite des précautions numériques importantes. La solution est approximée au moyen d'éléments finis en utilisant une formulation variationnelle du problème. Pour s'assurer que la solution est précisément calculée, une méthode automatique de raffinement du maillage adaptatif est utilisée. La solution est calculée pour un maillage donné, puis une estimation a posteriori de l'erreur est calculée, finalement le maillage est raffiné au moyen d'une technique de Delaunay développée par Rebay<sup>33</sup>. La procédure est répétée tant que la norme de l'erreur estimée a posteriori atteint un niveau prescrit. La procédure fût testée sur plusieurs problèmes singuliers, et s'est avérée très efficace. Les performances du solveur éléments finis utilisé pour mener ces calculs sont reportées dans un article de Guermond *et al.*<sup>34</sup>. Les résultats obtenus par Firdaouss *et al.* au moyen d'éléments finis sont confirmés par Cortis *et al.*<sup>35</sup> qui utilisent une méthode de calcul analytique basée sur les transformations de Schwartz-Christoffel, en corrigeant une erreur de Smeulders *et al.*<sup>36</sup>. La procédure numérique de Guermond *et al.* a par ailleurs été réutilisée dans un article de synthèse récent de Cortis, Smeulders, Guermond, et Lafarge<sup>37</sup>. Cortis *et al.* ont aussi étudié le cas d'une configuration bidimensionnelle constituée par un arrangement régulier de cylindres<sup>3</sup>. D'une part, les problèmes visqueux et thermique sont tous deux résolus par éléments finis en comportement asymptotique basses et hautes fréquences à l'aide du code Sepran<sup>38</sup>. D'autre part, le problème visqueux dynamique est résolu par la procédure numérique de Guermond, alors que le problème dynamique thermique est résolu à l'aide du code Sepran. On note une excellente correspondance des courbes obtenues à l'aide des modèles raffinés de Pride et Lafarge, avec les points issus de la résolution des problèmes dynamiques. En revanche, les principales différences avec les modèles de



Johnson et Allard sont observées au niveau des fréquences de transition, et des points d'inflexion de la partie réelle hautes fréquences. De plus, les auteurs proposent de tracer les fonctions de réponse visqueuse et thermique d'une manière élégante, faisant apparaître une forme identique des courbes.

Pour une configuration géométrique similaire, c'est-à-dire un arrangement régulier de cylindres en deux dimensions, Lewandowska et Geindreau<sup>39</sup> ont proposé une implémentation du problème visqueux statique avec le logiciel commercial Femlab.

Boomsma et ses collaborateurs<sup>40</sup> ont quant à eux résolu le problème visqueux statique dans une configuration tridimensionnelle plus réaliste. Une mousse d'aluminium à cellules ouvertes est modélisée par une structure cellulaire périodique idéalisée. Le problème est résolu par éléments finis, en utilisant le mailleur Hypermesh, et le solveur CFD-ACE.

Gasser et ses collaborateurs ont quant à eux résolu le problème complet par éléments finis, initialement pour le cas de configurations élémentaires<sup>41</sup> pour lesquelles il existe des solutions analytiques; puis pour le cas d'un pavage cubique centré de sphères<sup>42, 43</sup>. Les simulations numériques sont en accord avec des résultats de la littérature disponibles pour des arrangements de sphères.

D'autres méthodes numériques ont été suggérées dans la littérature pour résoudre le problème visqueux en régime dynamique, telles que la méthode aux éléments de frontière<sup>44</sup>.

On note d'autre part un fort engouement pour une résolution du problème visqueux par la méthode du réseau de Boltzmann. Cette approche, extrêmement efficace du point de vue du coût de calcul, permet notamment de modéliser les écoulements polyphasiques dans des configurations géométriques tridimensionnelles réalistes obtenues par tomographie à rayons-X<sup>45</sup>. Néanmoins, à notre connaissance, cette approche est limitée au traitement des écoulements en régime statique. Toutefois, dans la mesure où la résolution du problème visqueux en régime statique donne accès à la résistivité, les propriétés d'absorption de matériaux poreux peuvent être estimées par un modèle empirique. Cette idée a notamment été exploitée par le département des fluides et structures complexes de l'institut Fraunhofer, et il semble intéressant d'en préciser ici les contours. L'accent des recherches est mis sur les matériaux fibreux. La démarche du groupe est ici exposée<sup>46</sup>. Premièrement, des images de la microstructure sont obtenues au moyen de techniques telles que la microscopie optique, ou la microtomographie à rayons-X lorsque cela est possible. Une fois la géométrie acquise, elle est modélisée par ajustements des paramètres du modèle. En particulier, pour les matériaux fibreux étudiés, les paramètres

d'entrée du modèle sont la porosité, la distribution des rayons de fibres, ainsi que l'anisotropie (orientation privilégiée des fibres). Le problème visqueux est ensuite résolu par la méthode du réseau de Boltzmann. Une fois la résistivité calculée, les propriétés d'absorption du matériau poreux sont obtenues grâce au modèle de Delany et Bazley, puis comparées à des mesures au tube à ondes stationnaires. L'optimisation des propriétés acoustiques est abordée de deux manières. En choisissant, d'une part, la configuration qui offre le coefficient d'absorption le plus intéressant parmi un grand nombre de configurations géométriques simulées. Ou encore, d'autre part, en inversant le modèle de Delany et Bazley, la résistivité optimale est déterminée. La configuration géométrie pour laquelle la résistivité optimale est atteinte est alors recherchée.

La méthode des différences finies est largement répandue dans la littérature pour déterminer la perméabilité et la conductivité de matériaux poreux<sup>47</sup>. Il s'agit de résoudre les équations de Stokes et de Laplace. Or, ces équations constituent des cas particuliers de l'équation de Navier-Stokes, respectivement en régime asymptotique basses et hautes fréquences. Il est donc envisageable de simuler le comportement acoustique d'un matériau poreux en comportement asymptotique basses, et hautes fréquences ; puis de déterminer le comportement acoustique du dit matériau grâce aux modèles semi-phénoménologiques de la littérature acoustique. Une telle approche permettrait de bénéficier des avantages associés à une technique de calcul éprouvée, telle que la méthode des différences finies<sup>48, 49</sup>.

Une dernière méthode numérique permettant de résoudre efficacement le problème thermique en régime harmonique pourrait mériter toute notre attention en raison de son originalité. Il s'agit de la méthode du parcours aléatoire. Le principe de la méthode consiste à simuler le mouvement Brownien (aléatoire) d'un grand nombre de particules appartenant à la phase fluide, et à relier leurs libres parcours moyens aux propriétés de conduction thermique du milieu fluide confiné<sup>50, 51</sup>. Un point important de la méthode est qu'une fois le libre parcours moyen d'un grand nombre de particules estimé, la réponse thermique peut être calculée pour toute fréquence.

Les premières simulations numériques ont récemment été proposées par Lafarge dans une configuration bidimensionnelle pour le cas d'arrangements réguliers ou aléatoires de cylindres<sup>52</sup>. La réponse thermique est calculée sur deux ordres de grandeur autour de la fréquence de transition, et comparée aux modèles d'Allard et de Lafarge. Les tendances observées confirment celles reportées par Cortis et al.<sup>3</sup>. À savoir que le modèle de Lafarge permet de prendre précisément en compte le

comportement thermique du fluide autour de la fréquence de transition – là où les dissipations sont les plus importantes – pour des configurations régulières, mais aussi aléatoires. En outre, Lafarge rapporte un petit problème de convergence de la méthode numérique autour du deuxième point d'inflexion de la réponse thermique (hautes fréquences).

#### 1.4.3.3 Méthode des milieux reconstruits

Résumons les principales caractéristiques de l'état des connaissances relatives à une approche microstructurale. Premièrement, il est possible, à partir de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques, de déduire rigoureusement les lois gouvernant les phénomènes de dissipation acoustique à l'échelle macroscopique à partir des équations gouvernant la dynamique et de la thermique du fluide à l'échelle du pore. La méthode indique aussi la manière de calculer les coefficients macroscopiques, quelle que soit la microstructure périodique. Deuxièmement, les coefficients macroscopiques peuvent être obtenus à partir de simulations numériques. Au regard de notre problématique, la détermination des propriétés acoustiques à l'échelle locale du matériau poreux réel, et plus généralement le développement de relations microstructure – propriétés acoustiques, est donc a priori possible compte tenu de l'état des connaissances. Reste à se doter d'une méthode. Cette dernière section de l'état des connaissances vise à dégager une méthode de la littérature prometteuse en matière de développement de relations microstructure – propriétés acoustiques.

---

##### 1.4.3.3.1 Présentation

###### Une approche unifiée

La méthode des milieux reconstruits a été formalisée avec un souci d'unification par Pierre M. Adler en 1992 dans son ouvrage intitulé « Porous Media: Geometry and Transports »<sup>47</sup>. Le lecteur pourra aussi se reporter à une revue de la littérature plus facilement accessible<sup>53</sup>, le livre étant épuisé. Le souci d'unification des connaissances d'Adler et de ses collaborateurs portant sur la modélisation des phénomènes de transport à travers les milieux poreux, le conduit à considérer la situation générale suivante. Les équations de champ correspondant à trois types de transport doivent être résolues pour quatre classes de géométries.

###### Trois types de Transport

Les exemples les plus simples de processus de transport pouvant avoir lieu dans un système hétérogène sont la diffusion d'un soluté et la conduction

de la chaleur; les équations locales étant identiques dans les deux cas. La convection, c'est-à-dire le mouvement d'un fluide à travers un système, ajoute un degré supplémentaire de complexité. Les deux phénomènes de base que sont la diffusion et la convection peuvent interagir. C'est le cas lorsqu'un soluté Brownien est libéré dans un fluide en mouvement.

#### Quatre classes de géométries

Pierre Adler remarque que dans de nombreuses situations, un système hétérogène est un milieu poreux à la fois inerte et indéformable. En dépit de cette simplification considérable, la description de la géométrie reste un problème, car la plupart des milieux poreux possèdent une structure inorganisée qu'il est difficile de décrire quantitativement. Des progrès peuvent néanmoins être réalisés à partir des **structures idéalisées**. Parmi celles-ci, il s'intéresse en particulier aux structures : *spatialement périodiques* (système invariant par translation à large échelle), *fractales* (système invariant par dilatation, ou changement d'échelle), *aléatoires* (description d'un objet par un ensemble de variables indépendantes aléatoires), et *reconstruites* (construites de manière à respecter certaines propriétés statistiques mesurées sur des échantillons réels).

#### Principe de la méthode

Rigoureusement, le concept de milieu poreux reconstruit est plutôt une méthode qu'une structure. Il peut représenter un mélange des trois types de structure, et le nom d'une structure distincte lui a été attribué en raison de son importance pratique. Le principe de la méthode des milieux reconstruits est composé de trois étapes majeures.

- La première implique la mesure de toute caractéristique géométrique saillante. Différentes caractéristiques géométriques peuvent être choisies selon les matériaux. Adler propose de mesurer la porosité et la fonction d'autocorrélation de l'espace poreux dans le cas où un grès de Fontainebleau est étudié (les deux premiers moments de la fonction de phase).
- La deuxième étape est le processus de reconstruction. Des échantillons aléatoires de milieux poreux sont générés de telle manière à ce que, en moyenne, ils possèdent les mêmes propriétés statistiques que les échantillons réels dans une tentative de mimétisme.
- Une fois ces échantillons générés, dans une troisième étape, tous les transports peuvent être étudiés, au moins en principe. La méthode consiste à résoudre les équations de champ à l'intérieur des échantillons reconstruits avec les conditions aux limites appropriées. Généralement, la quantité macroscopique d'intérêt est obtenue par intégration spatiale du champ

local. La méthode possède un caractère statistique, et les échantillons de milieux poreux peuvent être générés à volonté. La perméabilité de chaque échantillon est déterminée, et moyennée sur tous les échantillons.

Il est finalement possible de progresser d'une manière logique d'une plus petite à une plus grande échelle. **La complexité de la solution est similaire à la complexité de la description, et il est nécessaire de trouver un compromis.** L'intérêt principal de cette méthode de reconstruction est d'être applicable de manière systématique, quel que soit le milieu étudié.

---

#### 1.4.3.3.2 Application aux mousses

Nous proposons dans ce qui suit une méthode de reconstruction, similaire, dans les grandes lignes, à celle présentée par Adler. En restreignant néanmoins l'étude des milieux poreux au cas de mousses acoustiques, il est possible de formuler une hypothèse supplémentaire : la géométrie locale est gouvernée par minimisation d'énergie de surface. On verra dans le Chapitre 2, dédié à la modélisation de la microstructure, que cette hypothèse permet de considérer une mousse comme étant un milieu cellulaire doté d'un certain nombre de propriétés. Cette observation modifie sensiblement le schéma de reconstruction suggéré par Pierre Adler. En effet, les échantillons générés ne le sont plus de manière aléatoire, mais selon des règles de construction statistiques imposées par la physique des mousses. Le milieu poreux est alors réduit à un réseau cellulaire.

##### Structure indéformable

L'hypothèse de structure indéformable mentionnée par Adler est généralement réalisée avec une bonne approximation pour le cas d'une onde se propageant dans une mousse acoustique : en l'absence d'une plaque excitatrice placée directement au contact du matériau, la structure est trop lourde et/ou trop raide, pour être mise en mouvement par le petit mouvement acoustique du fluide.

##### Deux types de transport

La propagation du son dans le fluide saturant fait localement intervenir à la fois un caractère de conduction et un caractère de convection. Le caractère de *conduction* est lié aux dilatations/compressions du fluide. Celles-ci ont pour résultat une variation de température fluide/solide (ce dernier restant à température ambiante) entraînant une conduction de la chaleur, non

négligeable si le fluide est un gaz. La distribution microscopique de la température excédentaire dans les pores est identique à la distribution de concentration de particules en mouvement Brownien, uniformément et continûment produites dans la masse, et instantanément absorbées aux parois. Le caractère de *convection* est lié au fait qu'un mouvement relatif global fluide/solide est induit lors de la propagation. En acoustique, le terme de convection est rarement utilisé car l'ordre de grandeur de champs de vitesses mis en jeu est généralement très faible, de l'ordre de  $10^{-7}$  -  $10^{-8}$  m.s<sup>-1</sup>, et parce que le bilan du mouvement du fluide à travers le système macroscopique est nul. On parle alors plutôt d'écoulement local oscillant

Le mouvement peut, à la limite des grandes longueurs d'ondes par rapport aux dimensions des pores (ou au volume d'homogénéisation), être considéré comme incompressible en ce qui concerne la répartition du champ des vitesses et à gradient de pression nul en ce qui concerne la répartition des températures. Cette hypothèse justifie le principe de découplage des effets thermiques et visqueux de Zwikker et Kosten<sup>13</sup>. En outre, dans le cas de la propagation du son, la fréquence du mouvement joue un rôle important. Le caractère du mouvement se modifiant aux différentes fréquences, le fluide sonde différents aspects de la microgéométrie.

---

## 1.5 Méthodologie

L'onglet « Méthode » de la Figure 1.3 résume la méthode de reconstruction proposée pour atteindre les objectifs spécifiques énoncés.

### Étude préliminaire

La plupart des milieux poreux utilisés pour absorber de l'énergie acoustique possèdent une structure a priori désordonnée, qui est difficile de décrire quantitativement. Des progrès peuvent néanmoins être réalisés à partir de structures idéalisées. D'où la première question méthodologique relative à l'étude préliminaire. Existe-il une structure idéalisée sous-jacente au milieu poreux étudié ? La structure étant définie par l'organisation des constituants du milieu géométrique, dominée par un caractère général. Il s'agit alors de mettre en évidence, en vue d'un premier niveau de modélisation, si l'organisation des constituants de la géométrie locale du milieu poreux ne peut pas être approchée par un motif plus général. Par la suite, il restera à préciser dans un deuxième niveau de modélisation, la forme des constituants du milieu géométrique. On entend documenter cet aspect par des considérations physiques. D'où l'importance de se renseigner sur le processus de formation du matériau poreux. La seconde

question méthodologique guidant l'étude préliminaire est alors formulée de la manière suivante. Quels sont les principes physiques gouvernant la répartition locale de la matière ?

#### Acquisition

L'acquisition de la géométrie locale du milieu poreux est obtenue par microtomographie axiale à rayons-X grâce à une source de laboratoire disponible au GAUS. Elle sera complétée par la mesure des caractéristiques saillantes de la géométrie locale, identifiées lors de l'étude préliminaire.

#### Modélisation

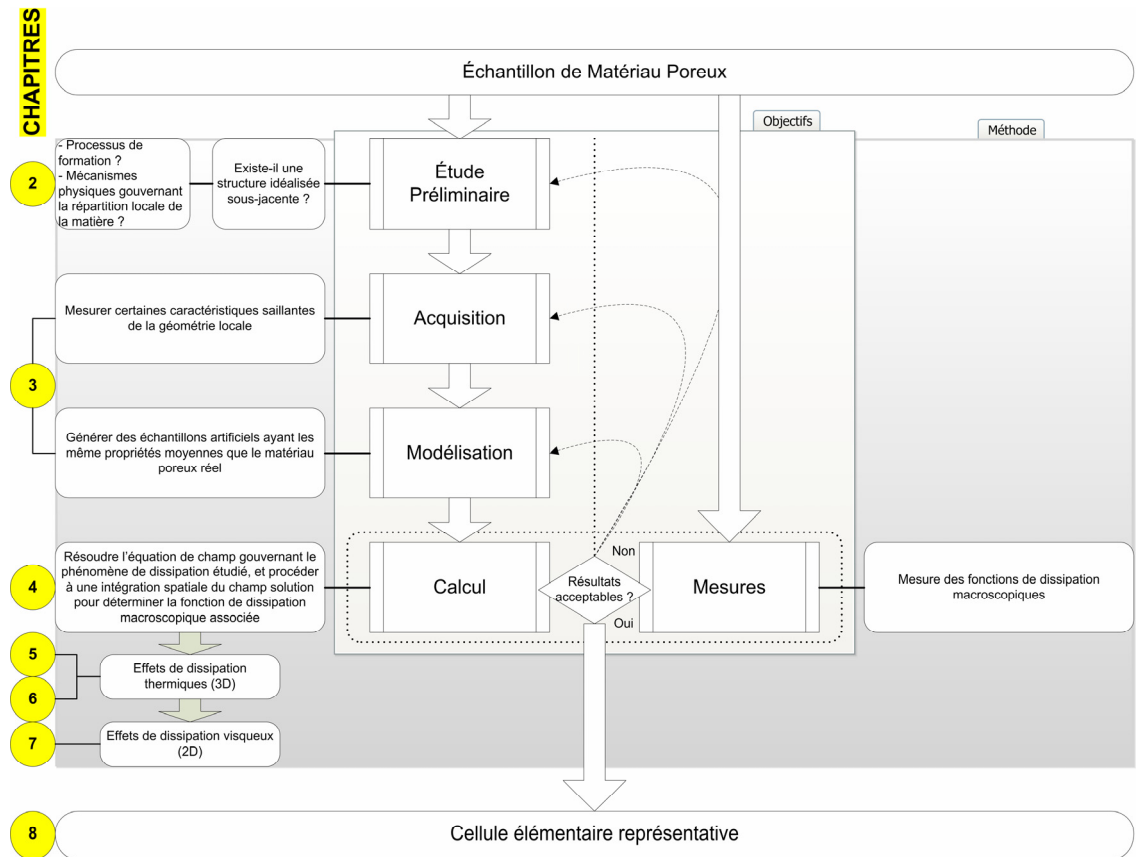
Une fois les caractéristiques pertinentes pour décrire la géométrie locale identifiées, et mesurées, des échantillons artificiels ayant les mêmes propriétés moyennes que le matériau poreux réel seront générés.

#### Calcul

Le calcul des propriétés acoustiques du milieu poreux est réalisé de la manière suivante. On procède à la résolution numérique de l'équation gouvernant le phénomène de dissipation étudié, puis à l'intégration du champ solution afin de déterminer la fonction de dissipation macroscopique associée. En faisant l'hypothèse d'une structure immobile, les dissipations d'énergie acoustique s'opèrent localement par conduction et écoulement local oscillant. À la limite des grandes longueurs d'ondes par rapport aux dimensions des pores, ces deux mécanismes sont découplés. On procède alors par ordre croissant de complexité. L'équation de la chaleur linéarisée en régime harmonique – de nature scalaire – est tout d'abord résolue par la méthode du parcours aléatoire, implémentée pour des structures tridimensionnelles. L'équation des fluides visqueux en régime harmonique – de nature vectorielle – est ensuite résolue par la méthode des éléments finis en utilisant un logiciel commercial pour des structures bidimensionnelles équivalentes.

#### Mesures

Les fonctions de dissipations expérimentales thermique et visqueuse sont obtenues par la méthode du tube à ondes stationnaires à deux cavités.



**Figure 1.3** Vision synoptique de la thèse

Au cœur du diagramme de flux figurent les objectifs spécifiques de la thèse. La manière dont on entend s’y prendre pour atteindre ces objectifs est systématiquement indiquée en correspondance, faisant clairement apparaître la méthodologie suivie. Finalement, les chiffres qui figurent à la périphérie du diagramme témoignent de l’articulation de l’ensemble du manuscrit, et de son découpage sous forme de chapitres. L’ensemble de la démarche conduit à la détermination des propriétés acoustiques du matériau poreux par reconstruction d’une cellule élémentaire représentative.

## 1.6 Originalités

Une des limitations intrinsèques des méthodes classiques de détermination des propriétés acoustiques de matériaux poreux est qu’elles ne sont pas en mesure de prévoir l’influence de la microstructure sur les propriétés acoustiques du milieu. Or, les propriétés acoustiques d’un milieu poreux dérivent effectivement de sa microstructure.



Pour répondre à cette demande, nous proposons de considérer une mousse comme un milieu cellulaire périodique idéalisé, sensible à la taille et à la forme des constituants d'une cellule élémentaire représentative. Le point sur les modèles de cellules périodiques idéalisées sera réalisé. Cette approche aura l'avantage de réduire la complexité de la microstructure du milieu poreux réel à une de ses briques élémentaires à l'échelle de laquelle pourront être étudiés l'ensemble des phénomènes de dissipation et de propagation d'une onde acoustique. Les paramètres de la morphologie cellulaire seront identifiés par une technique d'imagerie tridimensionnelle non-destructive, la microtomographie axiale à rayons-X.

La prise en compte de la dépendance fréquentielle des dissipations acoustiques par effets thermiques sera réalisée par la simulation de mouvements Browniens à l'échelle cellulaire. Pour la première fois, nous implémenterons l'algorithme du parcours aléatoire en trois dimensions. La convergence de la solution numérique sera documentée. Et l'évolution de l'erreur commise en fonction des paramètres de simulation par rapport aux solutions de référence existantes sera étudiée.

Une méthode par éléments finis, plus classique, sera utilisée pour le calcul des dissipations acoustiques par effets visqueux. L'originalité de l'approche tient ici à proposer un milieu de substitution qui soit bidimensionnel, et dérive de la cellule tridimensionnelle identifiée par des relations simples. On cherchera à savoir si une cellule périodique bidimensionnelle idéalisée soit à même de représenter l'ensemble de la microgéométrie sondée par un écoulement oscillant localement lorsqu'une onde acoustique se propage à travers le milieu poreux réel. Le fait que la fonction de dissipation visqueuse puisse être précisément reconstruite à partir d'un simple motif bidimensionnel en utilisant un modèle semi-phénoménologique constitue un résultat original intéressant.

Pour conclure, l'approche relatée dans cette thèse constitue une nouvelle manière de déterminer les propriétés acoustiques de mousses à cellules ouvertes à partir de l'analyse de leurs microstructures.

À l'issue de cette thèse, nous serons en mesure de :

- Déterminer les perméabilités dynamiques thermique et visqueuse d'un milieu poreux par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative.
- Identifier les paramètres macroscopiques des modèles de Pride-Lafarge.

Ces travaux pourront nous servir de tremplin pour optimiser la morphologie cellulaire de mousses, tout en tenant compte des contraintes physiques liées à la fabrication.

L'approche pourra ensuite être généralisée à d'autres types de matériaux poreux (fibreux, granulaires).

---

## 1.7 Structure du document

La géométrie locale des mousses gouverne l'organisation des deux premiers chapitres, examinée d'un point de vue qualitatif, puis quantitatif.

Le Chapitre 2 est un chapitre d'introduction dans lequel les caractéristiques générales de la géométrie de mousses sont discutées. Tel que souligné dans la méthodologie, cette monographie examine une approche de modélisation de la géométrie locale des matériaux poreux dans laquelle des structures sous-jacentes idéalisées sont considérées. Les grandes classes de matériaux poreux utilisés en acoustique sont brièvement présentées (fibreuse, granulaires, mousses), ainsi que les structures idéalisées associées. La discussion se focalise ensuite sur les mousses, cas d'application de la présente étude. Leur processus de formation est considéré, et son influence sur les caractères géométriques résultants. La structure des mousses, ou organisation des ligaments en polyèdres, est alors examinée sous l'angle des partitions périodiques optimales. La forme des ligaments est examinée à partir des principes physiques régissant la répartition locale de la matière. Le Chapitre 2 conclut alors par un bilan qualitatif des paramètres susceptibles de décrire pertinemment la géométrie locale des mousses, et conduit au concept de morphologie cellulaire.

Le Chapitre 3 traite quant à lui de la quantification des paramètres susceptibles de décrire pertinemment la morphologie cellulaire des mousses. Tel que mentionné dans la méthodologie, la géométrie tridimensionnelle du matériau poreux étudié est acquise au moyen d'un microtomographe à rayons-X. L'expérience acquise montre qu'il est souvent préférable d'aborder une telle acquisition par des micrographies. De tels clichés permettent en effet aussi bien de guider efficacement l'expérimentateur dans les réglages de son dispositif, que de calibrer les images obtenus avant la reconstruction de l'image tridimensionnelle. Une section du Chapitre 3 sera donc dédiée à l'étude préliminaire de la géométrie locale à l'aide de micrographies. Ensuite, les principes physiques et mathématiques de fonctionnement du microtomographe à rayons-X seront brièvement introduits de manière à clarifier les principales étapes d'acquisition, les problèmes inhérents à la technologie, et les moyens de les minimiser lors de la mise en œuvre du dispositif. Les mesures morphométriques seront alors présentées, et serviront à alimenter les modèles cellulaires de mousses issus du Chapitre 2. L'ensemble de la démarche d'acquisition et de modélisation de la morphologie cellulaire sera finalement discutée.

La géométrie locale de mousses ayant été décrite, la description des phénomènes de dissipation d'énergie au passage d'une onde dans le matériau poreux gouverne l'organisation du reste du document. Le Chapitre 4 introduit tout d'abord les outils théoriques permettant une description formelle des phénomènes de dissipation d'énergie acoustique, d'une plus petite à une plus grande échelle, dans le cadre de la méthode d'homogénéisation. Les hypothèses qui permettent d'assurer rigoureusement le passage d'une description locale à une description macroscopiques des phénomènes sont initialement rappelées. Le chapitre présente alors les mécanismes de dissipation d'énergie à l'échelle locale. Les caractéristiques majeures de l'équation de la chaleur, et de l'équation des fluides visqueux, linéarisées en régime harmonique, sont brièvement décrites. Les principes de la méthode d'homogénéisation, permettant de progresser rigoureusement d'une plus petite à une plus grande échelle sont alors résumés. Ils permettent notamment de prédire la forme des lois de comportement à l'échelle macroscopique, ainsi que la manière de calculer les fonctions de dissipation associées. Un bilan dégage finalement les conséquences principales de ce cheminement pour notre démarche de reconstruction.

Les Chapitres 5 et 6 concernent la mise au point, et la validation, d'un outil de résolution du problème thermique pour des configurations tridimensionnelles.

Le Chapitre 5 expose la méthode du parcours aléatoire comme outil de résolution de l'équation de la chaleur linéarisée en régime harmonique. Cette méthode de résolution étant encore relativement peu conventionnelle, le chapitre commence par une brève revue de la littérature sur la méthode, en plus de fournir les motivations pour son usage. En utilisant une analogie au problème de diffusion, il est possible de résoudre le problème thermique par constructions de mouvements browniens. Ces opérations sont réalisées au moyen de l'algorithme du parcours aléatoire, dont l'algorithmique est présentée; son implémentation étant reportée en annexe. Les expressions permettant de calculer la perméabilité dynamique thermique sont alors rapportées.

Le Chapitre 6 traite de la validation du code de calcul. La convergence de la solution est tout d'abord examinée. Des solutions analytiques exactes existent pour le cas de tubes de sections constantes. Ces solutions sont présentées. Elles permettent de confronter les lois de convergence théoriques associées à un phénomène stochastique, aux résultats de simulation effectivement obtenus. Une discussion relative à la convergence des résultats est assortie d'une tentative d'interprétation

géométrique. Les conclusions pratiques préconisant les paramètres d'utilisation du code sont finalement reportées.

Le Chapitre 7 concerne l'utilisation d'un logiciel conventionnel d'éléments finis pour résoudre l'équation de Navier-Stokes linéarisée en régime harmonique. La formulation du problème de l'écoulement local d'un fluide oscillant est tout d'abord exposée. La nature vectorielle de l'équation impose un degré de complexité supplémentaire. Néanmoins, les modèles cellulaires développés aux Chapitres 2 et 3 permettent de proposer des configurations bidimensionnelles pour décrire la géométrie locale de mousses. L'application développée est brièvement présentée. Les résultats de simulation des fonctions de dissipation visqueuses sont finalement exposés.

Le Chapitre 8 présente finalement une application de la méthode développée au cours des précédents chapitres. L'échantillon étudié est une mousse d'aluminium. La génération de morphologies cellulaires est mise en place selon une procédure de reconstruction spécifique. Le principe de la procédure de reconstruction est le suivant : des indicateurs microstructuraux des échantillons réels sont mesurés, idéalement au moyen de techniques d'analyse d'images tridimensionnelles, et des cellules artificielles sont générées avec les mêmes propriétés morphométriques moyennes. Le spectre de perméabilité thermique est alors calculé par la méthode du parcours aléatoire dans un espace tridimensionnel. Une cellule périodique équivalente dimensionnée par inversion permet un calcul du spectre de perméabilité visqueuse en un temps acceptable. Les résultats ainsi obtenus sont comparés à des mesures au tube à onde stationnaire. Finalement, les résultats sont exprimés en termes de coefficient d'absorption, quantité généralement utilisée par les ingénieurs concepteurs.

La dernière partie de cette thèse discute finalement de l'ensemble des résultats obtenus au regard des objectifs de la thèse.

Effets visqueux	Effets thermiques	
$\tilde{\alpha} = \alpha_{\infty} \left[ 1 - i \frac{\omega_c}{\omega} B(\omega) \right]$ $\chi(\omega) = 1 - \alpha_{\infty} / \alpha(\omega)$	$\tilde{\beta} = \gamma - (\gamma - 1) \left[ 1 - i \frac{\omega_c}{\omega} B'(\omega) \right]^{-1}$ $\chi'(\omega) = (\beta(\omega) - 1) / (\gamma - 1)$	
Johnson et al. (1987)	Champoux et Allard (1991)	Champoux et Allard modifié par Lafarge (1993)
$B(\omega) = \left( 1 + \frac{1}{2} i M \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2}$ $\omega_c = \frac{\nu \Phi}{k_0 \alpha_{\infty}}, \text{ où } \nu = \frac{\eta}{\rho_0}$ $M = \frac{8k_0 \alpha_{\infty}}{\Phi \Lambda^2}$ <p>4 §:</p> $\Phi = \frac{V_f}{V}$ $k_0 = \frac{\eta}{\sigma}$ $\alpha_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\langle \bar{u}^2 \rangle}{\langle \bar{u} \rangle^2}$ $\Lambda = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 2 \frac{\int \bar{u}^2 dV}{\int \bar{u}^2 dS}$	$B'(\omega) = \left( 1 + \frac{1}{2} i \frac{\omega}{\omega'_c} \right)^{1/2}$ $\omega'_c = \frac{8\nu'}{\Lambda'^2}, \text{ où } \nu' = \frac{\kappa}{\rho_0 C_p}$ <p>1 § supplémentaire : <math>\Lambda'</math></p> $\Lambda' = 2 \frac{\int dV}{\int dS}$	$B'(\omega) = \left( 1 + \frac{1}{2} i M' \frac{\omega}{\omega'_c} \right)^{1/2}$ $\omega'_c = \frac{\nu' \Phi}{k'_0}$ $M' = \frac{8k'_0}{\Phi \Lambda'^2}$ <p>1 § supplémentaires: <math>k'_0</math></p> $k'_0 = \frac{1}{\Gamma}$
Pride et al. (1993)	Lafarge (1997)	
$B(\omega) = 1 - p + p \left( 1 + \frac{1}{2} i \frac{M}{p^2} \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2}$ $p = \frac{M}{4 \left( \frac{\alpha_0}{\alpha_{\infty}} - 1 \right)}$ <p>1 § supplémentaire : <math>\alpha_0</math></p> $\alpha_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\langle \bar{u}^2 \rangle}{\langle \bar{u} \rangle^2}$	$B'(\omega) = 1 - p' + p' \left( 1 + \frac{1}{2} i \frac{M'}{p'^2} \frac{\omega}{\omega'_c} \right)^{1/2}$ $p' = \frac{M'}{4(\alpha'_0 - 1)}$ <p>1 § supplémentaire : <math>\alpha'_0</math></p> $\alpha'_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2}$	

**Tableau 1.1** Synthèse des expressions analytiques approchées des facteurs de réponse

---

## 1.8 Références

- 1 D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J.Fluid Mech.* 176, 379-402 (1987).
- 2 D. Lafarge *et al.*, "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies," *J.Acoust.Soc.Am.* 102 (4), 1995-2006 (1997).
- 3 A. Cortis *et al.*, in IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Series: Solid Mechanics and Its Applications, edited by Wolfgang (Ehlers, Held at the University of Stuttgart, Germany, 2001) pp. 1-448.
- 4 Denis Lafarge, "Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide visco-thermique," Thèse de doctorat de l'université du Maine , 1-296 (1993).
- 5 M. E. Delany and E. N. Bazley, "Acoustical characteristics of fibrous absorbent materials," *NPL AERO Ac37*, 11 (1969).
- 6 Y. Miki, "Acoustical properties of porous materials-modifications of Delany-Bazley models," *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)* 11 (1), 19-24 (1990).
- 7 F. P. Mechel, "Ausweitung der absorberformel von Delany und Bazley zu tiefen frequenzen. Extending the Absorption Formulae of Delaney and Bazley to Low Frequencies," *Acustica* 35 (3), 210-213 (1976).
- 8 Wu Qunli, "Empirical relations between acoustical properties and flow resistivity of porous plastic open-cell foam," *Appl.Acoust.* 25 (3), 141-8 (1988).

- 9 A. Cummings and S. P. Beadle, "Acoustic properties of reticulated plastic foams," J.Sound Vibrat. 175 (1), 115-33 (1994).
- 10 R. T. Muehleisen, C. W. Beamer and B. D. Tinianov, "Measurements and empirical model of the acoustic properties of reticulated vitreous carbon," J.Acoust.Soc.Am. 117 (2), 536-544 (2005).
- 11 ERG Aerospace, "Carbone Vitreux Réticulé (CVR), est fabriqué par ERG Materials and Aerospace Corporation, 900 Stanford Avenue, Oakland, CA94608." , .
- 12 Y. Miki, "Acoustical properties of porous materials-generalizations of empirical models," Journal of the Acoustical Society of Japan (E) 11 (1), 25-8 (1990).
- 13 C. Zwicker and C. W. Kosten, Sound Absorbing Materials, edited by Elsevier Applied Sciences, (Elsevier Applied Sciences, New York, 1949), .
- 14 M. A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - II. Higher frequency range," J.Acoust.Soc.Am. 28, 179-191 (1956).
- 15 K. Attenborough, "Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbants and granular materials," J.Acoust.Soc.Am. 73 (3), 785-799 (1983).
- 16 J. F. Allard *et al.*, "Propriétés acoustiques des matériaux poreux saturés d'air et théorie de Biot," Journal d'Acoustique 3, 29-38 (1990).
- 17 A. N. Norris, "On the viscodynamic operator in Biot's equations of poroelasticity," J. Wave-Material Interaction 1, 365-380 (1986).

18 Yvan Champoux and Michael R. Stinson, "On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors," J. Acoust. Soc. Am. 92 (2), 1120-1131 (1992).

19 M. R. Stinson, "The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape," J. Acoust. Soc. Am. 89 (2), 550-558 (1991).

20 Michael R. Stinson and Yvan Champoux, "Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries," J. Acoust. Soc. Am. 91 (2), 685-695 (1992).

21 Y. Champoux and J. F. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," J. Appl. Phys. 70, 1975-1979 (1991).

22 J. F. Allard, Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials, edited by Elsevier Applied Science, (Elsevier Science Publishers LTD, New York and London, 1993), pp. 284.

23 S. R. Pride, F. D. Morgan and A. F. Gangi, "Drag forces of porous media acoustics," Physical Review B 47 (9), 4964-4975 (1993).

24 D. Keith Wilson, "Relaxation-matched modeling of propagation through porous media, including fractal pore structure," J. Acoust. Soc. Am. 94 (2), 1136-1145 (1993).

25 D. Keith Wilson, Vladimir E. Ostashev and Sandra L. Collier, "Time-domain equations for sound propagation in rigid-frame porous media (L)," J. Acoust. Soc. Am. 116 (4), 1889-1892 (2004).



26 Z. E. A. Fellah and C. Depollier, "Transient acoustic wave propagation in rigid porous media: A time-domain approach," J. Acoust. Soc. Am. 107 (2), 683-688 (2000).

27 S. Torquato, Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties, edited by Springer, 1st ed. New-York, 2002), pp. 701.

28 A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, edited by Anonymous 1st ed. ed. (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978), pp. 320 p.

29 E. Sanchez-Palencia, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, edited by Springer, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1980), pp. 398.

30 E. Kröner, Statistical Modelling, in Modelling Small Deformations of Polycrystals, edited by J. Gittus and J. Zarka, (Elsevier Appl. Sci. Publ., London, 1986), Chap. 8.

31 A. Craggs and J. G. Hildebrandt, "Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes," J.Sound Vibrat. 92 (3), 321-331 (1984).

32 M. Firdaouss, J. -L Guermond and D. Lafarge, "Some remarks on the acoustic parameters of sharp-edged porous media," Int.J.Eng.Sci. 36 (9), 1035-46 (1998).

33 S. Rebay, "Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm," Journal of Computational Physics 106 (1), 125-38 (1993).

34 J. -L Guermond and L. Quartapeller, "Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM," Journal of Computational Physics 132 (1), 12-33 (1997).

35 A. Cortis and D. M. J. Smeulders, "On the viscous length scale of wedge-shaped porous media," *Int.J.Eng.Sci.* 39 (8), 951-62 (2001).

36 D. M. J. Smeulders *et al.*, "Similarity of sharp-edged porous media," *Int.J.Eng.Sci.* 32 (6), 979-90 (1994).

37 A. Cortis *et al.*, "Influence of pore roughness on high-frequency permeability," *Phys.Fluids* 15 (6), 1766-75 (2003).

38 C. Cuvelier *et al.*, Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations, edited by Springer, (D. Reidel Publishing Company, Netherlands, 1986), pp. 504.

39 Jolanta Lewandowska and Christian Geindreau, in Physical chemistry, microbiology and modeling of transfert processes in complex porous media: Numerical calculations of flow and transport in porous media by homogenization, Anonymous (<http://geo.hmg.inpg.fr/~geindrea/mira/>, Gdansk, March 2003) .

40 K. Boomsma, D. Poulikakos and Y. Ventikos, "Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure," *Int J Heat Fluid Flow* 24 (6), 825-834 (2003).

41 S. Gasser, F. Paun and Y. Bréchet, in Poromechanics II, edited by Auriault et al. (Swets & Zeitlinger, Grenoble, 2002) pp. 657-661.

42 S. Gasser, "Étude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux: modèle à base de sphères creuses de nickel,". Thèse. Science et Génie des matériaux. Grenoble : INPG, 2003, 306 p.

43 S. Gasser, F. Paun and Y. Brechet, "Absorptive properties of rigid porous media: Application to face centered cubic sphere packing," *J.Acoust.Soc.Am.* 117 (4 I), 2090-2099 (2005).

44 L. Borne, "Harmonic Stokes flow through periodic porous media: a 3D boundary element method," *Journal of Computational Physics* 99 (2), 214-32 (1992).

45 P. M. Adler, editor, Multiphase Flow in Porous Media, Reprinted from *Transport in Porous Media* Vol. 20, Nos. 1 & 2 (1995) ed. (Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1995), pp. 196.

46 K. Schladitz *et al.*, "Design of acoustic trim based on geometric modeling and flow simulation for non-woven". *Bericht des Fraunhofer ITWM*, 72, 1-34 (2005).

47 Pierre M. Adler, Porous Media: Geometry and Transports, edited by H. Brenner, 1st ed. (Butterworth-Heinemann, Stoneham, MA, 1992), pp. 501.

48 Edward J. Garboczi, "Finite element and finite difference programs for computing the linear electric and elastic properties of digital images of random materials," NIST Interagency Report NISTIR 6269, Building and Fire Research Laboratory, National Institute of Standards and Technology, 1-202 (1998).

49 R. B. Bohn and E. J. Garboczi, "User Manual for Finite Element and Finite Difference Programs: A Parallel Version of NISTIR-6269," NIST Interagency Report 6997, Building and Fire Research Laboratory, National Institute of Standards and Technology, 1-275 (2003).

50 Richard Feynmann, *Le parcours aléatoire*, Chap. 6-3 In *Le cours de physique de Feynmann*, Tome 2: *Mécanique*, (edited by Dunod, Paris, 1998).

51 S. Torquato, "Efficient simulation technique to compute properties of heterogeneous media," Applied Physics Letter 55 (18), 1847-1849 (1989).

52 D. Lafarge, in Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics, edited by J. -L Auriault (Swets & Zeitlinger, Grenoble, 2002) pp. 703-708.

53 P. M. Adler and J. -F Thovert, "Real porous media: Local geometry and macroscopic properties," Appl.Mech.Rev. 51 (9), 537-585 (1998).

# Partie 2

## Microstructure des mousses

# 2 Milieux poreux réels et microstructures idéalisées

## 2.1 Introduction

## 2.2 Classes de milieux poreux

- 2.2.1 Milieux granulaires
- 2.2.2 Milieux fibreux
- 2.2.3 Mousses

## 2.3 Processus de formation et méthodes de fabrication des mousses

- 2.3.1 Processus de formation typique d'une mousse
- 2.3.2 Cas particulier des mousses métalliques

### 2.3.2.1 *Injection gazeuse*

- 2.3.2.1.1 Principe de base
- 2.3.2.1.2 Améliorations

### 2.3.2.2 *Métallurgie des poudres*

- 2.3.2.2.1 Approche standard
- 2.3.2.2.2 Variante

### 2.3.2.3 *Préforme*

- 2.3.2.3.1 Déposition
- 2.3.2.3.2 Moulage

## 2.4 Structure cellulaire périodique idéalisée

- 2.4.1 Présentation des indicateurs
- 2.4.2 Lois topologiques et implications sur la cellule et son réseau
  - 2.4.2.1 *Loi d'Euler*
  - 2.4.2.2 *Loi de croissance de Neumann*
  - 2.4.2.3 *Loi d'Aboav-Weaire et règle de Lewis*
  - 2.4.2.4 *Bilan des tendances statistiques, et implications expérimentales*
- 2.4.3 Formes périodiques canoniques pavant régulièrement l'espace
- 2.4.4 *Limites d'une cellule unitaire périodique idéalisée : expériences de Matzke et de Kraynik*

## 2.5 Microstructure à l'équilibre

- 2.5.1 Hypothèse du système à l'équilibre
- 2.5.2 Lois de Plateau : films et arêtes à l'équilibre
  - 2.5.2.1 *Loi d'équilibre des films*
  - 2.5.2.2 *Loi d'équilibre des arêtes*
- 2.5.3 Répartition locale de la matière
  - 2.5.3.1 *Loi d'équilibre des frontières de Plateau*
  - 2.5.3.2 *Extension aux fractions solides non-négligeables*

## 2.6 Conclusion

- 2.6.1 Résumé de la démarche
- 2.6.2 Synthèse des résultats importants

## 2.7 Références bibliographiques

---

## 2.1 Introduction

Il est toujours surprenant de voir à quel point peu d'études sur la géométrie locale des mousses sont disponibles dans la littérature acoustique. Le manque d'information de nature qualitative sur la géométrie des mousses - et donc de considérations géométriques est curieux - car les propriétés acoustiques des mousses sont entièrement déterminées par leurs géométries. Ce chapitre traite des principales caractéristiques de la géométrie locale des mousses, examinées d'un point de vue qualitatif.

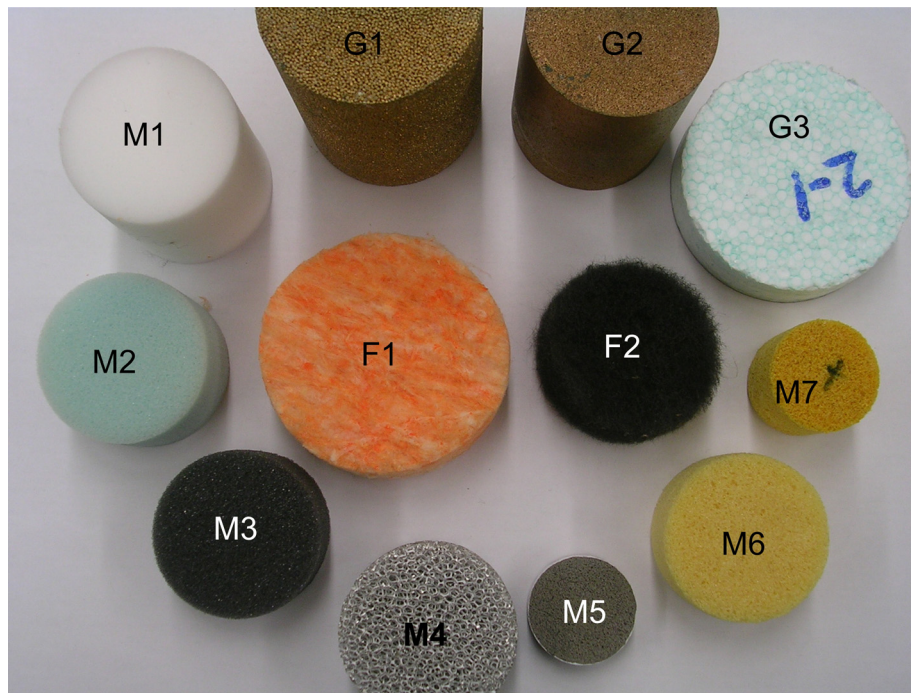
Ce chapitre a pour objectif de mettre au point une synthèse originale des différents travaux de la littérature permettant de décrire la microstructure idéalisée d'une mousse.

L'organisation du chapitre est présentée ci-dessous. Tel que souligné dans la méthodologie, cette monographie examine une approche de modélisation de la géométrie locale des matériaux poreux dans laquelle des motifs sous-jacents plus ou moins idéalisées sont considérées. Les grandes classes de matériaux poreux utilisés en acoustique sont brièvement discutées sur la base d'observations de divers échantillons poreux. La discussion se focalise ensuite sur les mousses, cas d'application de la présente étude. Si la microstructure résulte de mécanismes connus, il est possible d'incorporer directement cette connaissance dans la procédure de simulation. Le processus de fabrication des mousses est donc considéré, et son influence sur les caractères géométriques locaux résultants à deux niveaux d'échelles spatiales. À l'échelle du pore, la géométrie locale des mousses, ou pavage de polyèdres, est examinée sous l'angle des partitions périodiques optimales. À l'échelle des constituants du pore, la forme singulière des ligaments dérive aussi des principes physiques régissant la répartition locale de la matière. Le Chapitre 2 conclut alors par un bilan qualitatif des paramètres susceptibles de décrire pertinemment la géométrie locale des mousses, et conduit au concept de morphologie de la structure cellulaire périodique idéalisée, utilisable dans la suite du travail

---

## 2.2 Classes de milieux poreux

Cette section contient une variété d'illustrations de milieux poreux couramment rencontrés en acoustique. L'objet de cette section étant de montrer qu'à la complexité réelle du milieu poreux rencontré en acoustique peut être proposée une modélisation (simplification utile de la complexité réelle) de la géométrie locale basée sur des motifs plus ou moins idéalisées



**Figure 2.1** Exemples d'échantillons de matériaux poreux utilisés en acoustique

tels que des grains, fibres ou cellules; toutes les quantités géométriques étant mesurables sur des images d'échantillons réels. La Figure 2.1 propose des exemples illustratifs de la diversité des matériaux poreux disponibles dans un laboratoire d'acoustique. Un point commun à l'ensemble de ces échantillons est qu'ils sont tous fabriqués par l'homme.

En se reportant aux figures 2.2 à 2.4, il est possible de regarder de plus près chacun des échantillons. Ces clichés ont été obtenus à l'aide d'un microscope optique. Néanmoins, la plupart des structures observées sont généralement visibles à l'œil nu, ou à l'aide d'une loupe. D'un seul coup d'œil expérimenté, il est alors possible de répartir les échantillons disponibles selon trois groupes. Les échantillons notés G1 à G3 appartiennent au groupe des milieux granulaires, dans la mesure où ils sont constitués d'un agencement de grains. Tandis que les échantillons F1 et F2 appartiennent au groupe des fibreux, la fibre étant le constituant élémentaire du milieu. Le troisième groupe distinctif est celui des mousses, caractérisé par un empilement de cellules. Les échantillons M1 à M7 appartiennent à ce dernier groupe, dont les structures, généralement plus fines, nécessitent habituellement l'utilisation d'un microscope pour être observées. En outre, les mousses apparaissent comme le seul groupe ne



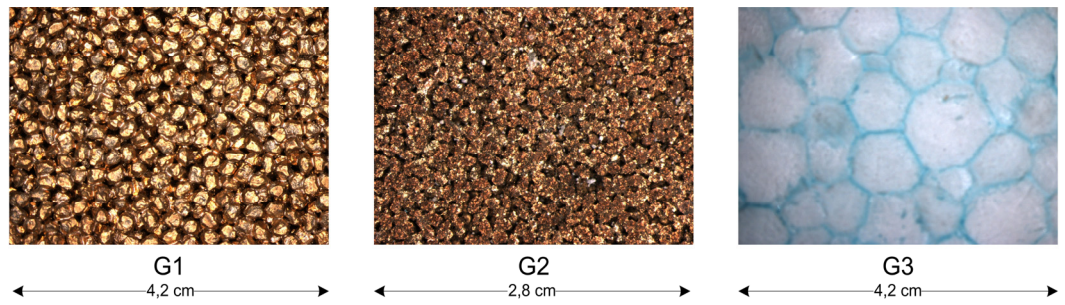
faisant pas explicitement référence au constituant élémentaire qui le caractérise. Il faut en fait faire appel à la définition d'une mousse pour trouver la mention du constituant élémentaire qui la caractérise. Une mousse étant définie par un système biphasique dans lequel des - cellules - gazeuses sont emprisonnées par un liquide (du latin *cella*, petit compartiment, espace clos). On s'intéresse ici aux mousses à l'état solide, et à leurs constituants élémentaires, les cellules. Il est de plus possible de formuler quelques remarques suite à l'observation de ces clichés.

---

### 2.2.1 Milieux granulaires

Les milieux granulaires G1 et G2 sont tous deux de nature métallique. Ils semblent avoir été obtenus par compaction, puis soudage des grains (par électrolyse par exemple). Les structures des échantillons G1 et G2 diffèrent essentiellement de part la taille des grains. En second lieu, la forme des grains semble différer d'un échantillon à l'autre. On peut alors penser que leurs répartitions spatiales en soient affectées. On constate d'ores et déjà que ces quelques observations et suppositions, si elles devaient être suivies d'une analyse quantitative des échantillons, gagneraient grandement à être étayées d'informations relatives au processus de fabrication.

L'échantillon G3, de nature bien différente, a été découpé dans une plaque de polystyrène, recouverte d'une feuille d'aluminium. Cet échantillon est habituellement utilisé comme isolant thermique. Voyons toutefois comment des observations de nature qualitatives relatives à la structure de l'échantillon peuvent être exploitées pour en déduire des tendances relatives à un comportement acoustique. Les grains sont ici constitués de billes de polystyrène, ayant été déformées lors d'un processus de compaction. Contrairement aux échantillons G1 et G2, les interstices de l'échantillon G3 ne sont pas constitués d'air, mais d'un liant de couleur bleue. On peut alors en déduire que la porosité ouverte de l'échantillon G3 doit être extrêmement faible, et se demander s'il est réellement pertinent d'avoir classé ce matériau parmi des échantillons poreux. Pour notre salut, les billes de polystyrène sont une sorte de mousse, dont une des phases est bien de l'air, d'où la légèreté d'un échantillon de polystyrène (la porosité fermée d'un échantillon de polystyrène est très proche de 1). Il s'agit néanmoins d'une porosité occluse, ce qui limite l'accès du réseau de pores à l'onde acoustique. Il doit s'en suivre de bonnes pertes acoustiques par transmission, et de piètres qualités d'absorption.



**Figure 2.2** Exemples de milieux granulaires

Il semble en outre opportun d'indiquer ici quelques références relatives aux matériaux granulaires. Les modélisations les plus simples considèrent les matériaux granulaires comme un assemblage de sphères (Morse, 1952)<sup>1</sup> (Morse, 1968)<sup>2</sup> (Korri, 1945)<sup>3</sup> (Ferra, 1951)<sup>4</sup> (Attenborough, 1985)<sup>5</sup> (Attenborough, 1987)<sup>6</sup> (Umnova, 2000)<sup>7</sup> (Horoshenkov, 2000)<sup>8</sup>. Des modélisations plus sophistiquées de la géométrie locale considèrent le milieu comme étant cellulaire, les grains pouvant aussi être vus comme des espaces clos<sup>1</sup>. La présentation des références et outils de modélisation de la géométrie locale des milieux granulaires est alors reportée à la section relative aux mousses.

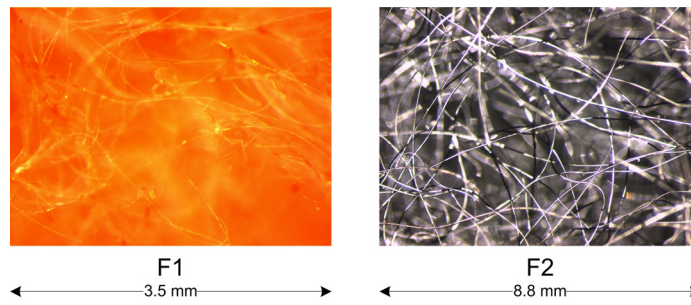
### 2.2.2 Milieux fibreux

En comparant les milieux fibreux F1 et F2 aux milieux granulaires G1 à G3, il apparaît clairement que la taille des structures caractéristiques des milieux fibreux est bien plus petite que celle des milieux granulaires ; la fibre étant de l'ordre de grandeur du micron, alors que le grain est de l'ordre de grandeur du millimètre<sup>2</sup>. Les fibres, très fines, sont par conséquent fortement diluées dans la phase fluide, l'air<sup>3</sup>. Raison pour laquelle de nombreux milieux fibreux offrent une grande porosité, souvent

<sup>1</sup> Cela ne veut pas dire que tous les matériaux granulaires soient à porosité occluse. Les enrobés acoustiques sont un bon exemple de matériau granulaire à porosité ouverte.

<sup>2</sup> Il s'agit une fois de plus d'une remarque générale d'ordre qualitatif visant à se familiariser avec l'observation de microstructures, et à en dégager des tendances en termes de comportement acoustique. Précisons toutefois qu'il existe des matériaux fibreux avec des fibres de taille très importante (panneaux réalisés à partir de fibres de bois par exemple).

<sup>3</sup> La dilution est liée à la densité. Là aussi il existe des plages de grandeurs très larges.



**Figure 2.3** Exemples de milieux fibreux

très proche de 1. En outre, en comparant les échantillons F1 et F2, la taille caractéristique des fibres semble elle-même changer d'un ordre de grandeur. On peut s'attendre à quelques micromètres pour la taille caractéristique des fibres de l'échantillon F1, quelques dizaines de micromètres pour celle des fibres de l'échantillon F2. L'échantillon F1, une laine minérale, est constitué d'une succession de couches, ou plans de fibrage, dans lesquels les fibres apparaissent de manière plus ou moins ordonnées. Ces plans ne sont plus visibles dans l'échantillon F2. Ordres de grandeur, orientation des fibres, plans de fibrage, une fois encore des informations relatives au processus de fabrication seraient d'une grande utilité dans un processus de modélisation de la géométrie locale. Ces informations sont disponibles dans la thèse de Jérôme Tran Van (Tran Van, 2005)<sup>9</sup>.

### 2.2.3 Mousses

Nous abordons finalement l'observation de quelques clichés de mousses, objet d'application de notre étude. Voyons s'il est possible d'en dégager quelques caractéristiques communes, ainsi que les traits qui les différencient.

Pour commencer, il apparaît que l'espace clos qui caractérisait les milieux cellulaires ne l'est pas (M1, M2, M4, M5), ou seulement partiellement (M3, M6, M7); les membranes des cellules ayant été totalement ou partiellement supprimées. On verra que la présence, l'absence, ou la présence partielle de membranes peut avoir une grande influence sur les caractéristiques acoustiques du milieu, et l'ensemble de ses paramètres macroscopiques.

Prenons par exemple la porosité comme paramètre macroscopique. Si le milieu n'est pas réticulé (présence des membranes), toute la porosité du milieu sera occluse. La porosité ouverte sera donc quasi nulle. À

contrario, pour un milieu parfaitement réticulé, pour lequel il ne subsiste que les ligaments des cellules, la porosité du milieu ne dépendra que de la taille des ligaments et pourra tendre vers un pour des ligaments très élancés. C'est d'ailleurs le cas de l'échantillon M1 qui est une mousse de mélamine, pour lequel les cellules observées sont extrêmement fines. En outre, la taille caractéristique des ligaments étant de l'ordre du micromètre, les ligaments pourraient être assimilés à des fibres. Aussi, la mélamine serait un cas limite de mousse dont les ligaments, extrêmement fins, sont si élancés que le milieu tende à se comporter comme un fibreux<sup>4</sup>. On remarque en outre que le coefficient d'absorption d'une mousse de mélamine peut évoluer de façon semblable à celui d'un matériau fibreux<sup>5</sup>.

De tels raisonnements, basés essentiellement sur l'observation de microstructures, peuvent être étendus aux paramètres macroscopiques. Nous nous bornerons ici aux paramètres macroscopiques les plus couramment rencontrés, ceux du modèle de Johnson.

Il est ainsi entendu que les membranes affecteront la sinuosité du parcours des molécules d'air lors de la propagation de l'onde acoustique, et par conséquent la tortuosité  $\alpha_\infty$  des échantillons<sup>6</sup>. Nous avons d'autre part remarqué, à partir de la revue des modèles empiriques, que la résistivité  $\sigma$  jouait un rôle prépondérant dans la caractérisation des performances acoustiques de matériaux poreux. Il est aisé de concevoir qu'un milieu non réticulé présentera un film plastique à l'écoulement et donc une résistance infinie au passage à l'air. Tandis que la suppression partielle ou totale des membranes va dans le sens d'une moindre résistance à l'écoulement, et diminue ainsi la résistivité au passage à l'air. Il est d'ailleurs courant de voir des mousses dont les membranes ont été artificiellement fendues pour leur conférer des propriétés d'absorption acoustique<sup>10,11</sup>. De plus, si l'on compare maintenant deux échantillons totalement réticulés, tels que les mousses M1 et M4, respectivement mousse de mélamine et mousse d'aluminium, on peut s'attendre à ce que la taille caractéristique des structures mises en jeu ait aussi une influence considérable sur la

---

<sup>4</sup> La structure d'un fibreux reste néanmoins discontinue, et c'est ce qui fait la différence, en particulier au niveau mécanique.

<sup>5</sup> Là encore, il s'agit d'une tendance observée à prendre avec précautions, puisque le comportement acoustique des laines dépend de la densité du matériau ; et qu'il est par conséquent très variable. De plus, les comportements élastiques d'une laine et d'une mousse de mélamine sont très différents.

<sup>6</sup> En faits, la tortuosité ça n'est pas uniquement associée à la sinuosité du parcours de l'onde acoustique. Un système présentant de grandes variations de sections est en effet peu sinueux et pourtant très tortueux, car il impose au fluide d'importantes accélérations locales (la définition de la tortuosité a été rappelée à la Figure 1.4). On rencontre ce type de configuration géométrique dans certaines mousses partiellement ouvertes.

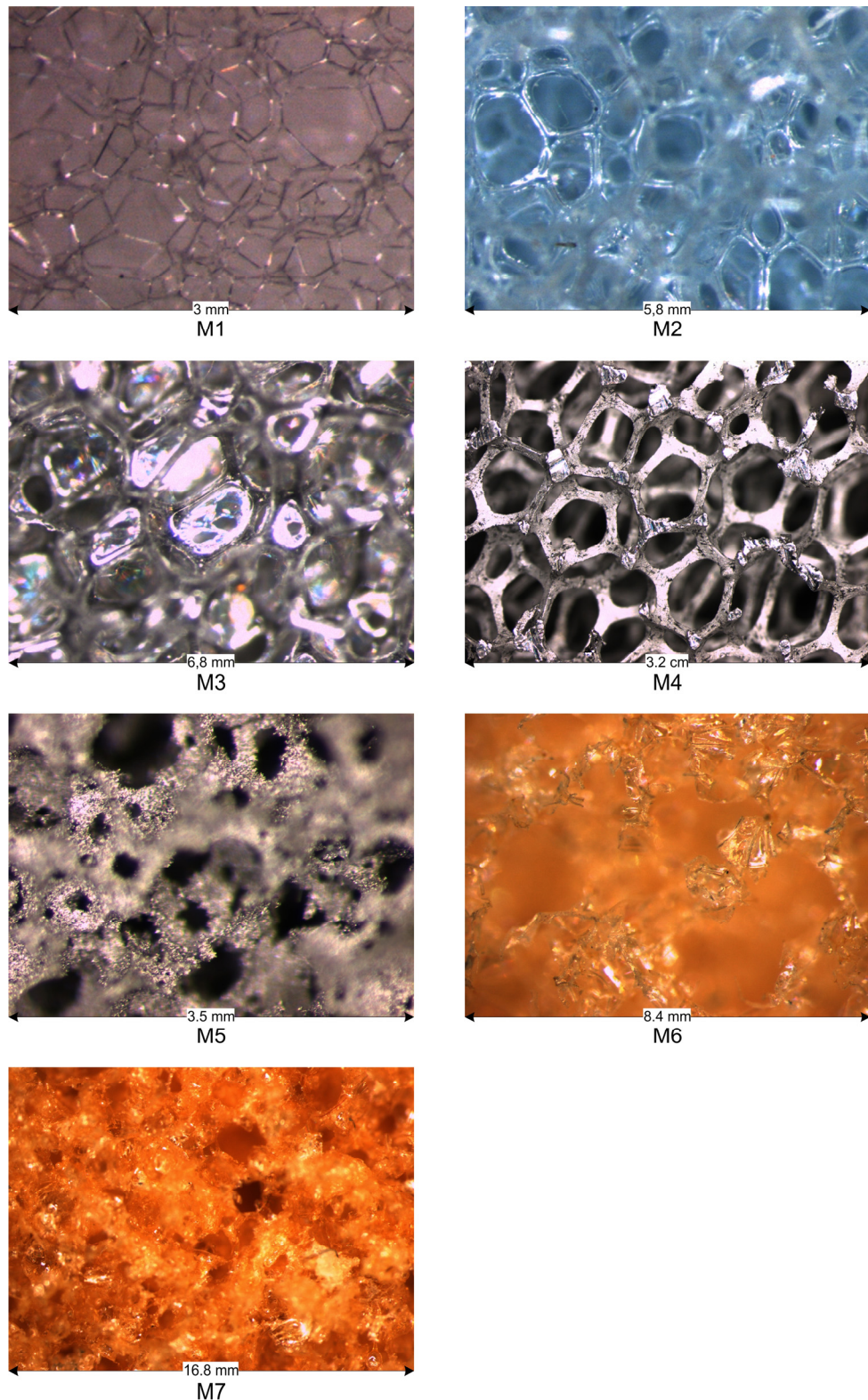


Figure 2.4 Exemples de mousses

résistivité. Les pores de la mélamine dont la taille caractéristique est inférieure d'au moins deux ordres de grandeur à ceux de la mousse d'aluminium présenteront en effet une résistance à l'écoulement beaucoup plus importante que celle de ces derniers.

En ce qui concerne la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ , ce paramètre, purement géométrique, est égal à deux fois le volume fluide sur la surface solide. Aussi, la présence de quelques membranes partiellement ouvertes pourra diminuer significativement la valeur de la longueur caractéristique thermique; en augmentant largement la surface solide, sans pour autant affecter significativement le volume fluide en présence. Par comparaison, dans une telle situation, la porosité sera quasi inchangée. (Le volume de quelques membranes qui ne définissent pas de volume fermé est négligeable devant celui de l'échantillon).

La vitesse locale du fluide pondère le poids des volumes et surfaces mis en jeu lors du calcul de la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$ . À débit constant, un rétrécissement local du pore sera associé d'une accélération locale du fluide. Le poids des petits pores prédomine alors sur celui des grands dans un calcul de longueur caractéristique visqueuse. La présence de membranes partiellement ouvertes, même très faiblement, peut alors considérablement réduire la valeur de  $\Lambda$  (cas de la mousse de polyuréthane M3 et la mousse de polyamide M6).

Par soucis d'exhaustivité, mentionnons que l'échantillon M5, qui a été très peu commenté jusqu'ici, est une mousse à base de Nickel qui présente de bonnes propriétés d'absorption sur un large spectre fréquentiel. On peut supposer que ses performances soient attribuables à l'existence d'un double réseau poreux effectivement observé (un seul est toutefois visible à cette échelle).

L'échantillon M7, plus exotique, semble avoir été fabriqué à partir d'une résine d'époxy, et suggère les limites de l'observation 2D. L'observation d'échantillons poreux s'est néanmoins révélée fort instructive, en montrant comment microstructures et propriétés acoustiques pouvaient être liés.

Nous verrons dans la section suivante en quoi la connaissance du processus de fabrication peut nous révéler une information significative et complémentaire aux observations, sur la forme et l'organisation interne des constituants du milieu poreux, à l'échelle locale, à travers l'exemple de mousses.

---

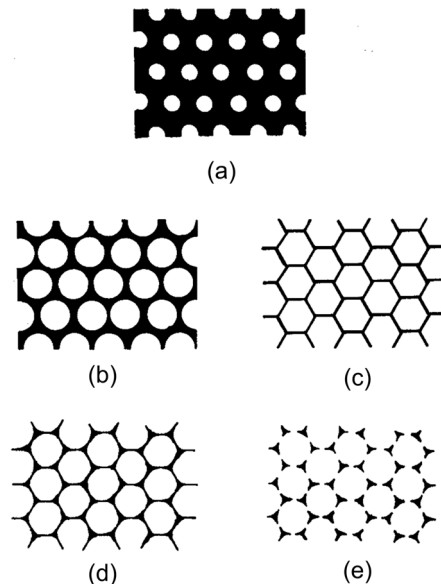
### 2.3 Processus de formation, et méthodes de production

Les mousses métalliques connaissent un renouveau d'attentions scientifique et industrielle particulières en raison de leur rapport élevé rigidité/poids

pour des applications structurales d'une part, et de leur capacité à absorber l'énergie d'impact lorsqu'elles subissent une déformation irréversible d'autre part (Banhart et Weaire, 2002)<sup>12</sup>. On assiste, de ce fait, à une demande grandissante des industriels pour une optimisation des propriétés d'absorption acoustique de ces composantes. De plus, les mousses métalliques présentent un contraste important en termes de densités de phases, ce qui facilite leurs imageries par microtomographie à rayons-X. Pour ces raisons, cette section considèrera tout d'abord le processus typique de formation des mousses polymériques à l'état solide ; puis, plus spécifiquement, les principaux processus de fabrication des mousses métalliques. Le but de cette section étant de proposer une vue d'ensemble des processus typiques de formation et de fabrication des mousses les plus fréquemment rencontrées à l'état solide, dans la mesure où cette connaissance facilite l'interprétation et la modélisation des microstructures de mousses.

### 2.3.1 Processus de formation typique d'une mousse

La majorité des mousses résultent d'un processus de **nucléation**, **croissance** et **expansion** de bulles de gaz dans un bain ou un système liquide réactif (Cunningham, 1994)<sup>14</sup>. Les représentations des structures idéalisées typiquement rencontrées à différents stades du processus d'expansion sont données à la Figure 2.5.



**Figure 2.5** Principe de formation des mousses de polymère (Hilyard, 1982)<sup>13</sup>

En premier lieu, les bulles sont dispersées à travers le bain. S'il est stabilisé à ce stade, alors la mousse sera de faible porosité – occluse, Figure 2.5(a). Pour des bulles sphériques de taille uniforme, la porosité tend vers une limite atteinte pour un pavage cubique à faces centrées ( $\pi/\sqrt{18} \approx 74,05\%$ ), Figure 2.5(b). À titre indicatif, un pavage aléatoire de sphère conduit expérimentalement à une porosité limite d'environ 64 %. Si le processus d'expansion continue, les bulles se touchent et se distordent de manière à combler les interstices et forment un réseau cellulaire caractérisé par un pavage polygonal dans un espace bidimensionnel, polyédrique dans un espace tridimensionnel, Figure 2.5(c). Mentionnons que les cellules périodiques les plus couramment rencontrées dans la littérature sont l'hexagone en 2D, la cellule de Kelvin en 3D. Ces représentations idéalisées seront introduites sous l'angle des partitions optimales au cours de la Section 2.4. Le système physique résultant (essentiellement de la viscosité, tension de surface et force gravitationnelle) évolue de sorte à ce que la matière liquide se concentre aux intersections en formant des frontières dites de Plateau, Figure 2.5(d). Cette répartition locale de la matière sera plus amplement examinée à la Section 2.5. À cette étape, la porosité de la mousse est élevée, et occluse. Les membranes des cellules (ou fenêtres) qui résultent de l'intersection des bulles sphériques peuvent alors être rompues. Cette rupture peut être occasionnée naturellement suite à l'expansion volumique des bulles de gaz et au drainage corollaire du liquide à l'extérieur des films ; ou encore au moyen d'un procédé chimique de réticulation. Ces mécanismes donnent lieu à des mousses dont toutes ou parties des cellules sont plus ou moins ouvertes, Figure 2.5 (e). L'état solide est obtenu par chauffage ou réaction catalytique. La formation d'une mousse constitue finalement un processus physico-chimique complexe dont le produit final dépend de l'interaction de nombreuses variables. Une discussion quantitative du processus de formation des mousses d'uréthane incluant 93 références est notamment disponible dans (Artavia *et al.*, 1994)<sup>15</sup>.

### 2.3.2 Cas particulier des mousses métalliques

Les manières de produire des mousses métalliques peuvent être divisées en trois catégories principales. Le procédé le plus économique consiste simplement à injecter un gaz dans un bain métallique visqueux. Le gaz se trouve alors piégé lors de la solidification du bain, formant ainsi les pores de la mousse. Bien que bon marché et relativement simple, cette méthode permet difficilement d'obtenir une structure cellulaire bien contrôlée ; d'où l'apparition d'adaptations variées. Un autre jeu de procédés, basé sur la



métallurgie des poudres, constitue un bon rapport qualité structurale -coût. Le principe consiste à mélanger puis compresser une poudre métallique et un agent moussant (agent chimique réagissant de manière à libérer un gaz) ; le mélange est ensuite chauffé au dessus du point de fusion du métal de manière à produire la mousse. Le procédé le plus fiable, mais aussi le plus coûteux, est obtenu par infiltration d'un métal liquide coulé dans le moule de la forme poreuse souhaitée ; puis destruction du moule. Le moule pouvant être travaillé à souhait, cette méthode tend à produire des structures de mousses à cellules ouvertes largement uniformes. En contrepartie, ce procédé s'avère généralement coûteux et compliqué, et seulement souhaitable pour la production de petites quantités associées à des applications spécifiques à haute valeur ajoutée. Dans le même ordre d'idée, mais à moindre coût, mentionnons les techniques de déposition consistant à déposer un métal vaporisé sur un polymère précurseur. L'objet de cette section est d'illustrer ces trois principales méthodes de production ainsi que leurs variantes, afin d'en déduire une information sur la géométrie locale des mousses ainsi produites.

### 2.3.2.1 Injection gazeuse

---

#### 2.3.2.1.1 Principes de base

Une méthode rapide, développée simultanément et indépendamment par les sociétés Alcan et Cymat d'une part à la fin des années 80, Norsk Hydro d'autre part au début des années 90, permettant de produire des mousses métalliques à faible coût implique l'injection directe d'un gaz dans un bain de métal fondu. Un schéma de principe du procédé est donné à la Figure 2.7 (Ashby, 2000)<sup>16</sup>. Le brevet est désormais exploité par Cymat ([www.cymat.com](http://www.cymat.com)). Pour éviter que les bulles injectées ne s'échappent du mélange, viscosité et tension de surface du bain doivent nécessairement être augmentées. Une approche consiste à disperser dans le bain de fines particules réfractaires (de céramique par exemple). L'addition de 5 à 15 % par volume, de particules dont la taille est inférieure à 20 µm permet de stabiliser le mélange et d'éviter l'explosion des bulles de gaz. Les particules permettent en effet d'augmenter la viscosité du mélange tout en agissant partiellement comme surfactant à l'interface gaz/métal.

Une illustration de mousse produite par injection gazeuse est donnée à la Figure 2.6(a). La taille des cellules, fermées, est relativement large, de l'ordre du centimètre. La distribution des pores est difficile à contrôler. Et la densité de la mousse est généralement plus élevée à sa base en raison de la gravité, sauf lorsque le procédé inclut une solidification

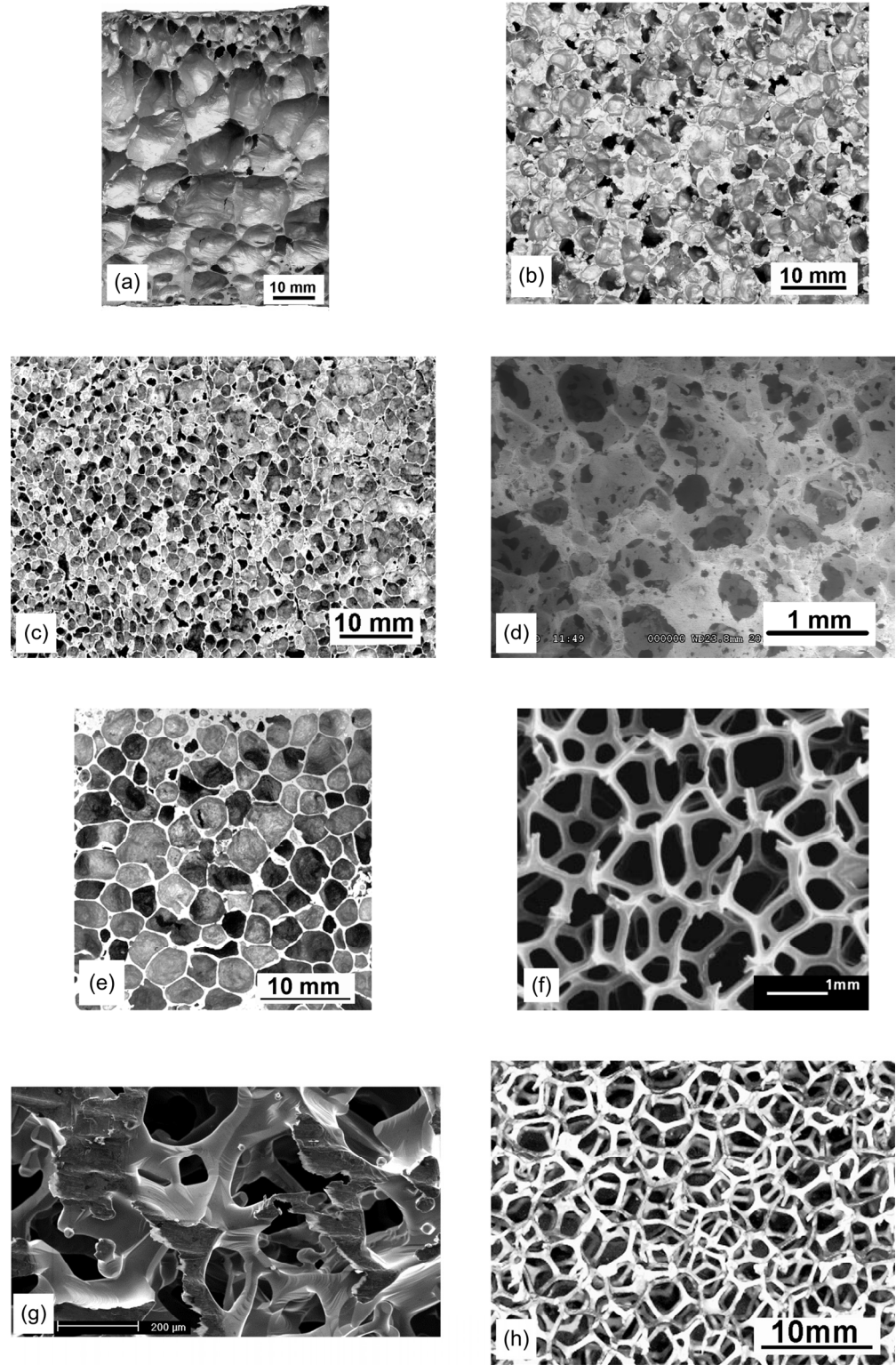
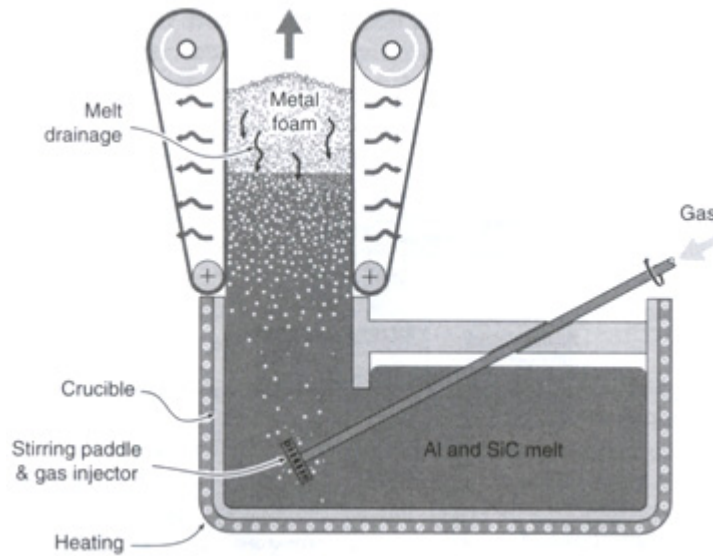


Figure 2.6 Illustration de mousses métalliques.



**Figure 2.7** Principe de fabrication d'une mousse par injection gazeuse (Ashby, 2000)<sup>16</sup>

verticale, telle que représentée à la Figure 2.7. La structure de la mousse est essentiellement influencée par le débit du gaz injecté, la viscosité, la tension superficielle, et la température du mélange.

Finalement, les méthodes d'injection gazeuse souffrent du fait qu'un relativement faible nombre de larges bulles est généré, ce qui conduit à des formes de pores relativement grossières et irrégulières. Dans la technique décrite ci-dessous, le gaz résulte d'une décomposition thermique d'un agent solide. De telle manière, un grand nombre de petites bulles est créé dans l'ensemble du bain.

#### 2.3.2.1.2 Améliorations

Au lieu d'ajouter directement le gaz au métal en fusion, il est possible d'ajouter un composé stable à température ambiante qui se décomposera à plus haute température pour libérer un gaz. En utilisant un agent moussant solide, le gaz sera dispersé d'une manière plus homogène à travers le bain. L'hydruure de titane  $TiH_2$  est bien adapté pour ce processus dans la mesure où il est stable à température ambiante mais se décompose à températures similaires au point de fusion de l'aluminium en libérant de grands volumes d'hydrogène à l'état gazeux ( $TiH_2 \rightarrow Ti_{(s)} + H_{2(g)}$ , à 465 °C).

Cette technique a été exploitée par la société Shinko Wire (Japon) pour produire une mousse baptisée Alporas<sup>7</sup>, Figure 2.6(b). L'ajout de l'hydrure de titane est ici précédé d'un ajout de calcium (1.5 % massique, à 680 °C, et atmosphère ambiante ; le point de fusion de l'aluminium étant à 660 °C). L'adition, et l'agitation subséquente d'un élément hautement réactif avec l'oxygène facilite un processus d'oxydation à la surface du métal mélangé et conduit à une augmentation de la viscosité par la formation d'oxydes (CaO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, CaAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub>).

Les mousses ainsi produites ont une porosité comprise entre 84 et 95 %, et des tailles cellulaires d'approximativement 5 mm. La microstructure des mousses ainsi obtenues est significativement plus homogène que celle des mousses produites par injection directe de gaz (et ne requiert pas l'addition de particules de céramique).

L'utilisation d'un agent moussant chimique donne finalement plus de contrôle sur la structure cellulaire que l'injection directe d'un gaz. Néanmoins, il est encore difficile de contrôler la dispersion de l'agent moussant au sein du mélange, ce qui implique que les composés moulés ne peuvent pas être réalisés facilement avec une structure cellulaire homogène.

### 2.3.2.2 Métallurgie des poudres

Les agents moussants peuvent être introduits dans les métaux à l'état solide en mélangeant directement des poudres consolidées. Cela permet de séparer l'étape de dispersion de l'agent moussant, de l'étape de sa décomposition. Il en résulte un certain nombre d'avantages. Premièrement, puisque le moussage n'a pas lieu au cours du mélange, il est possible de bénéficier de plus de temps pour améliorer l'homogénéité du mélange. Du même coup, des particules plus fines, qui auraient nécessité plus de temps pour être mélangées de manière homogène peuvent aussi être utilisées. Deuxièmement, le mélange peut alors être stocké dans des moules aux formes complexes, sans qu'il soit nécessaire de réserver un accès au mélangeur. Il est finalement possible de contrôler la température plus précisément avec un tel procédé.

---

<sup>7</sup> Les propriétés d'absorption acoustique de cette mousse, et la manière de les améliorer par création de fissures et/ou de trous ont été étudiées. Voir en particulier (Lu, 1999) [T. J. Lu, Audrey Hess and M. F. Ashby, "Sound absorption in metallic foams," J.Appl.Phys. 85 (11), 7528-7539 (1999)].

---

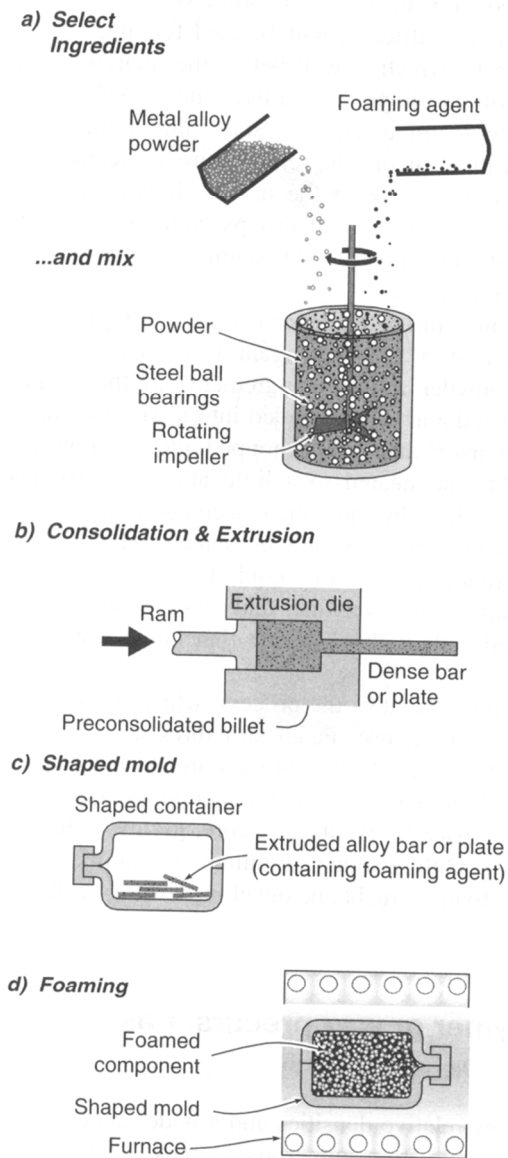
#### 2.3.2.2.1 Approche standard

Une des premières méthodes développée pour produire une mousse consiste à mélanger une poudre métallique avec un agent moussant et des particules ajoutées permettant d'augmenter la viscosité du mélange. Un point important de la méthode consiste à comprimer les poudres mélangées en un bloc relativement solide, de manière à ce que, lorsque le gaz se dégage, il ne s'échappe pas du mélange. Plusieurs groupes, notamment IFAM (Allemagne), LKR et Neuman-Alu (Alulight, Autriche), IMI (Metafoam, Canada) ont recours à la métallurgie des poudres pour produire leurs mousses métalliques.

Un schéma de principe de la séquence de fabrication typique est proposé à la Figure 2.8. Un agent moussant est tout d'abord combiné à un alliage métallique, Figure 2.8(a). Une fois les ingrédients bien mélangés, la poudre est compactée à froid, puis extrudée sous forme de barre ou de plaque, Figure 2.8(b). Durant l'extrusion, la friction entre particules détruit leurs barrières oxydantes et les lie ensemble. Alternativement, le mélange de poudre peut être pressé à chaud au dessous de la température causant la décomposition de l'agent moussant. Dans certains cas, il est aussi possible de presser la poudre à des températures situées au dessus de celles pour lesquelles l'agent moussant se décompose. L'agent moussant étant piégé par le métal sous forme solide dont la décomposition est inhibée par une forte pression. Dans une étape subséquente, le matériel ainsi obtenu est placé dans des moules scellés, puis chauffé légèrement au dessus du point de fusion de l'alliage, Figure 2.8(c). L'agent moussant se décompose alors, créant des pores sous haute pression interne. Le mélange à l'état semi-solide subit une expansion et se repend dans la forme du moule, Figure 2.8(d).

La structure cellulaire des mousses ainsi produites est fortement dépendante de la pression appliquée, de la température de cuisson, et de l'alliage utilisé, et des cycles thermiques imposés.

Cette technique est utilisée pour produire des mousses d'aluminium, de bronze, de cuivre, de nickel; en utilisant entre 0.5 et 1 % massique d'hydruure de titane ou de bicarbonate de sodium comme agents moussants. La technique est notamment mise en œuvre par Alulight pour produire des mousses d'alliage d'aluminium variés, dont les porosités sont comprises entre 63 et 89 %, et des tailles cellulaires de l'ordre du millimètre, tel qu'illustré à la Figure 2.6(c).



**Figure 2.8** Principe de fabrication d'une mousse par adjonction d'agents moussants (Ashby, 2000)<sup>16</sup>.

Une grande gamme d'alliages peut être utilisée en ayant recours aux mélanges adéquats de poudres métalliques. En choisissant le traitement thermique approprié, il est possible d'obtenir des structures cellulaires bien meilleures que par injection gazeuse. Les travaux de recherche actuels se focalisent notamment sur la manière de renforcer les mousses ainsi produites qui peuvent souffrir de fragilités et sont parfois friables, ce qui rend leur utilisation plus délicate. La Figure 2.6(d) illustre une mousse de

nickel relativement friable, mais dotée d'un double réseau poreux. Le désavantage principal des techniques basées sur la métallurgie des poudres est leur coût relativement élevé, essentiellement dû au besoin de produire, mélanger et traiter de fines poudres métalliques en de nombreuses étapes.

---

#### 2.3.2.2 Variante

Le procédé Formgrip (Foaming of Reinforced Metals by Gas Release in Precursors) intègre des avantages des approches par injection gazeuse et par métallurgie des poudres. Il se caractérise par la cuisson d'un mélange contenant un agent moussant piégé pour générer une mousse par dissociation, ce qui s'apparente aux procédés de métallurgie des poudres (section 2.3.2). Néanmoins, le mélange est préparé à partir d'un bain de métal en fusion, ce qui est propre aux méthodes d'injection gazeuse (section 2.3.1).

En soumettant l'hydruure de titane à un traitement thermique, il est possible de produire une couche d'oxyde de titane à sa surface, ce qui réduit la perméabilité à l'hydrogène. La couche d'oxyde agit comme barrière retardant la décomposition de l'hydruure de titane, ce qui permet de mieux le disperser dans un bain en fusion, une fois mélangé à des particules de silicate de carbone.

Au cours d'une deuxième étape, le mélange ainsi obtenu est cuit dans un moule (typiquement à 630°C), pour décomposer l'hydruure de titane et libérer le gaz d'hydrogène. En ajustant le temps de cuisson, des mousses dont la porosité est comprise entre 50 et 95 % peuvent être obtenues, avec des tailles de cellules allant de 1 à 10 mm. En raison de la dispersion améliorée, les mousses ont une structure cellulaire plus uniforme. Une mousse typique ainsi produite est présentée à la Figure 2.6(e).

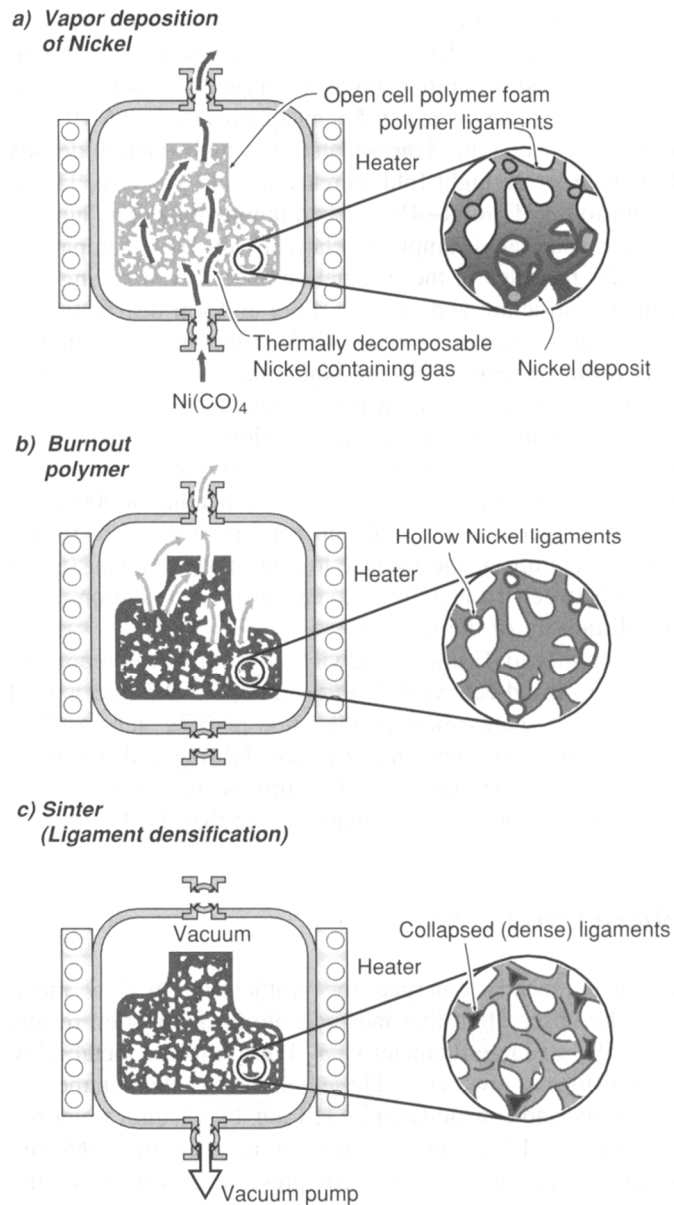
#### 2.3.2.3 Préforme

En utilisant une préforme de la structure cellulaire, il est possible d'obtenir des structures poreuses à cellules ouvertes hautement reproductibles. La préforme peut être une mousse de polymère, sur laquelle est déposé un métal à l'état gazeux ; ou encore le négatif de la structure cellulaire souhaitée, obtenue par moulage.

---

##### 2.3.2.3.1 Déposition

Plusieurs procédés ont été développés pour déposer un métal à la surface d'une mousse de polymère à cellules ouvertes. La Figure 2.9 illustre schématiquement une de ces approches. La mousse est placée dans une chambre emplie de nickel à l'état gazeux, le carbonyle de nickel  $\text{Ni}(\text{CO})_4$ .



**Figure 2.9** Principe de fabrication d'une mousse à partir d'un précurseur par déposition (Ashby, 2000)<sup>16</sup>.

L'échantillon est ensuite chauffé, de manière à ce que le gaz se décompose en formant une couche de nickel à la surface de la mousse de plusieurs dizaines de microns, Figure 2.9(a). La préforme de polymère est ensuite brûlée, Figure 2.9(b). À cette étape, les ligaments de la mousse de nickel



ainsi obtenus sont creux. La densification des filaments est alors obtenue par chauffage à vide, Figure 2.9(c).

Cette technique de déposition est commercialisée par Incofoam pour produire des mousses à cellules ouvertes de nickel dont la taille des cellules est comprise entre 20 et 400  $\mu\text{m}$  et la porosité peut atteindre 99 %, Figure 2.6(f).

---

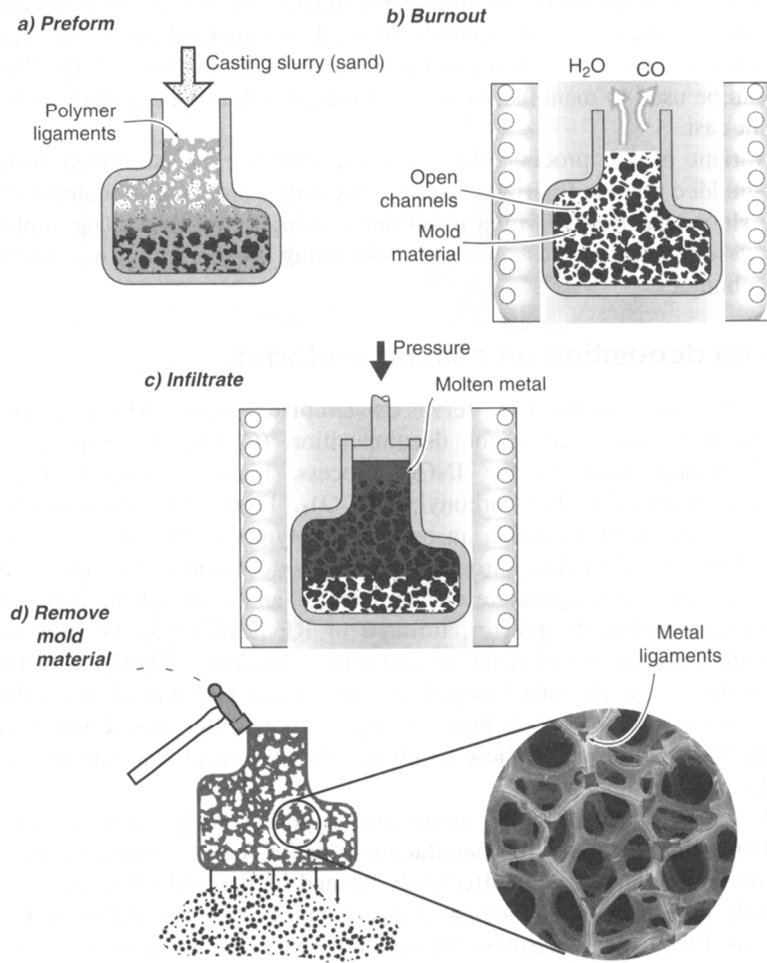
### 2.3.2.3.2 Moulage

#### Moule de sel

Dans un procédé développé à l'école polytechnique fédérale de Lausanne, la préforme est composée d'un matériau soluble à l'eau capable de supporter les températures du métal en fusion. Il peut par exemple s'agir de sel de mine, en raison de son faible coût. Les grains de sel remplissent le porte échantillon. Ils sont alors frittés afin de lier les grains entre eux. Un bloc de métal est ensuite placé au sommet du réseau compact de grains. L'ensemble est chauffé sous pression de manière à ce que le métal pénètre entièrement le réseau poreux. Les grains sont ensuite dissouts, révélant la mousse métallique à cellules ouvertes, Figure 2.6(g).

#### Moule de sable

Il existe une grande gamme de mousses de polymères à cellules ouvertes, de porosités élevées, pour lesquelles plusieurs tailles cellulaires sont disponibles. Ces mousses de plastique peuvent être utilisées comme préforme pour créer des moules dans lesquels une grande variété de métaux et alliages peuvent être coulés. La méthode est schématisée à la Figure 2.10. Une mousse de polymère à cellules ouvertes de porosité et de tailles cellulaires désirées et tout d'abord sélectionnée. Un sable fin est ensuite coulé dans la mousse de manière à remplir ses interstices, Figure 2.10(a). L'ensemble est cuit pour consolider la colée, et décomposer le précurseur polymère par évaporation ; laissant place au négatif de la préforme de polymère, Figure 2.10(b). Le moule est alors infiltré sous pression par l'alliage métallique en fusion, Figure 2.10(c). Le métal étant solidifié, le moule peut être détruit, laissant place à une mousse métallique équivalente à la mousse de polymère originale, Figure 2.10(d). Ce procédé est mis en œuvre par la société ERG-Aérospace, les mousses d'aluminium dont il est issu étant appelées Duocel. Il en résulte des mousses à cellules ouvertes dont la taille des pores est comprise entre 1 et 5 mm, et la porosité peut atteindre 98 %, Figure 2.6(h). Le principal désavantage de cette méthode de production repose sur sa complexité, et sur le coût résultant du procédé.



**Figure 2.10** Principe de fabrication d'une mousse à partir d'un précurseur par moulage (Ashby, 2000)<sup>16</sup>.

## 2.4 Structure cellulaire périodique idéalisée

Au cours des dernières années, une nouvelle approche permettant de modéliser les propriétés de transport à travers une structure poreuse bien définie a gagné en popularité (Boomsma, 2003)<sup>17</sup> (Gasser, 2005)<sup>18</sup>. L'idée est de modéliser une cellule idéalisée basée sur une unité périodique fondamentale, et de résoudre les équations de champ gouvernant le phénomène pour la configuration. La modélisation d'une matrice infiniment

large est obtenue au moyen de conditions aux limites périodiques<sup>8</sup>. Les mousses métalliques à cellules ouvertes constituent d'autre part un candidat privilégié pour des applications acoustiques dans la mesure où elles conjuguent les qualités d'absorption acoustique des mousses à cellules ouvertes ainsi que la rigidité et résistance aux environnements agressifs des matériaux métalliques. Avoir un matériau à fort potentiel pour des applications acoustiques conduit au développement d'un modèle adéquate pour optimiser des configurations de mousses<sup>9</sup>. La modélisation géométrique de mousses est significativement plus difficile que celle de milieux granulaires ou fibreux, en raison de la complexité accrue du motif idéalisé sur lequel elles se fondent, la cellule. Les milieux granulaires et fibreux sont généralement modélisés par un assemblage plus ou moins homogène et ordonné de sphères en deux dimensions (Torquato, 1991)<sup>19</sup> (Lafarge, 2002)<sup>20</sup>, ou encore de cylindres en trois dimensions (Schladitz, 2005)<sup>21</sup>. En dépit de cette difficulté accrue, les mousses métalliques à cellules ouvertes constituent un cas particulier en raison de leur porosité élevée, et d'une structure somme toute relativement bien définie. Une tentative de modélisation directe de la géométrie locale d'une mousse métallique de porosité élevée à cellules ouvertes est alors envisageable en définissant un volume élémentaire représentatif capturant la complexité des détails de la structure d'une mousse. Tel qu'en témoignent les travaux réalisés par Smith et du Plessis (1999)<sup>22</sup>, Diedericks et du Plessis (1997)<sup>23</sup>, et du Plessis et al. (1994)<sup>24</sup>, une approche par modélisation cellulaire simulant l'écoulement local à travers un milieu poreux est encourageante, mais les prismes rectangulaires constituent un niveau de représentation cellulaire grossier qui n'est pas apte à capturer l'écoulement induit par la complexité de la géométrie locale d'une mousse métallique à cellules

---

<sup>8</sup> Une approche alternative consiste typiquement à dupliquer le milieu tomographié par symétries miroirs pour obtenir des conditions aux limites périodiques. Cette approche est notamment utilisée pour le calcul de perméabilité visqueuse statique; voir par exemple (Ferréol, 1995)B. Ferreol and D. Rothman, "Lattice-Boltzmann Simulations of Flow Through Fontainebleau Sandstone," *Transport in Porous Media* 20, 3-20 (1995).. Dans notre cas, la dépendance fréquentielle du problème, et l'importance de pouvoir modifier la géométrie locale pour pouvoir en étudier l'influence sur les propriétés acoustiques nous incite à rechercher une Cellule Élémentaire Représentative (CER) du milieu poreux.

<sup>9</sup> La démarche s'applique plus généralement à l'ensemble des mousses.

ouvertes. Néanmoins, avec le développement rapide de la puissance de calcul, une approche détaillée de la modélisation cellulaire permettant de simuler un écoulement à travers une mousse à cellules ouvertes devient envisageable. Si la cellule périodique individuelle d'une mousse métallique à cellules ouvertes constituée par une large matrice périodique est modélisée avec précision, alors l'écoulement à travers les cellules individuelles peut être résolu avec des conditions aux limites périodiques, prenant ainsi en compte la présence des cellules environnantes pour lesquelles le champ de vitesse sera identique (Koch, 1989)<sup>25</sup>. La prochaine étape dans le processus de modélisation cellulaire direct est de recréer ce qui peut être considéré comme une structure cellulaire représentative d'une mousse métallique à cellules ouvertes. Les mousses métalliques à cellules ouvertes Duocel utilisées au cours des expérimentations (Chapitre 3) ont été produites en suivant un processus de fabrication par moulage à corps perdu à partir d'un précurseur polymère, Section 2.3.3.2 (Baumeister, 1997)<sup>26</sup>.

Or, il existe des indicateurs statistiques de la structure cellulaire auxquels on peut faire correspondre une cellule représentative périodique. Par la suite (Chapitre 3), il s'agira d'identifier expérimentalement ces indicateurs. L'organisation de cette section est décrite ci-dessous. Tout d'abord, il nous faudra définir les indicateurs de la structure cellulaire selon une nomenclature unifiée, Section 2.4.1. Les indicateurs de la structure cellulaire ayant été introduits, nous passerons brièvement en revue les relations et lois topologiques basées sur ces indicateurs ; ainsi que leurs implications statistiques sur la forme d'une cellule, et la taille des proches voisines, Section 2.4.2. Lorsque la tension de surface domine la formation des mousses (hypothèse plus amplement discutée à la Section 2.5.1), la structure cellulaire résulte de la minimisation de son aire à volume constant. Les structures cellulaires peuvent alors être examinées sous l'angle des partitions périodiques optimales, Section 2.4.3. Les limites d'une approche basée sur la modélisation directe d'une structure cellulaire périodique idéalisée seront finalement illustrées par l'expérience de Matzke<sup>27</sup>, et discutées à la Section 2.4.4. Cette section se terminera par un tableau récapitulatif des paramètres utiles pour caractériser la structure des mousses étudiées à l'échelle du pore, c'est-à-dire de la cellule.

---

#### 2.4.1 Présentation des indicateurs

L'apport majeur de Gibson et Ashby<sup>28</sup> est d'avoir proposé une vision unifiée et pratique concernant l'étude de la microstructure des mousses (solides cellulaires), à partir d'une littérature pourtant abondante, s'étalant

sur plusieurs siècles, et selon une seule nomenclature. L'idée principale de l'ouvrage consiste à considérer une mousse comme étant un ensemble de polyèdres ou cellules pavant l'espace, et donc comme un milieu pouvant être étudié d'un point de vue purement *géométrique*. L'unité de base de l'approche géométrique est la cellule, autour de laquelle s'organisent des formations cellulaires (du latin *cellarium*) appelées **solides cellulaires** : *réseau interconnecté de poutres et plaques solides formant les arêtes et faces de cellules*. Dès lors, l'étude de la microstructure d'une mousse, à l'échelle du pore, repose essentiellement sur la caractérisation de son unité de base, la cellule, dont la **structure** est *définie* en trois points :

1. La *taille* cellulaire. On peut alors se demander quelle est la taille caractéristique d'une cellule représentative du réseau cellulaire ?
2. La *forme* cellulaire. D'où la question des formes de cellules disponibles pour paver l'espace ? On peut éventuellement restreindre cette question au cas d'un pavage fait d'unités cellulaires périodiques.
3. Et la *topologie* cellulaire, qui comprend les distinctions suivantes :
  - 3.1 des cellules bidimensionnelles ou tridimensionnelles, on parle de la *dimensionnalité* de la structure cellulaire ;
  - 3.2 des cellules *ouvertes ou fermées*, ou partiellement fermées ;
  - 3.3 la *connectivité* des arêtes et faces cellulaires ; c'est-à-dire le nombre de voisins en contact, où  $Z_a$  est le nombre moyen d'arêtes par sommet (vaut habituellement 3 en deux dimensions, 4 en trois dimensions), et  $Z_f$  est le nombre moyen de faces par arête (vaut habituellement 2 en deux dimensions, 3 en trois dimensions).

L'ensemble de ces attributs structurels définissent les paramètres de la structure cellulaire. Nous verrons brièvement, au cours de la partie suivante (Section 2.4.2), comment ces indicateurs sont liés entre eux par des lois topologiques, et en quoi ces lois nous renseignent sur la nature même d'une cellule (taille et forme), ainsi que sur l'organisation des proches voisins.

---

#### 2.4.2 Lois topologiques et implications sur la cellule et son réseau

La plupart des mousses ne sont pas des arrangements réguliers d'unités identiques, mais contiennent des cellules de taille et de forme différentes. Néanmoins, même les mousses les plus désordonnées obéissent à des lois topologiques, de telle manière qu'il est possible d'en tirer des indicateurs précis et utiles.

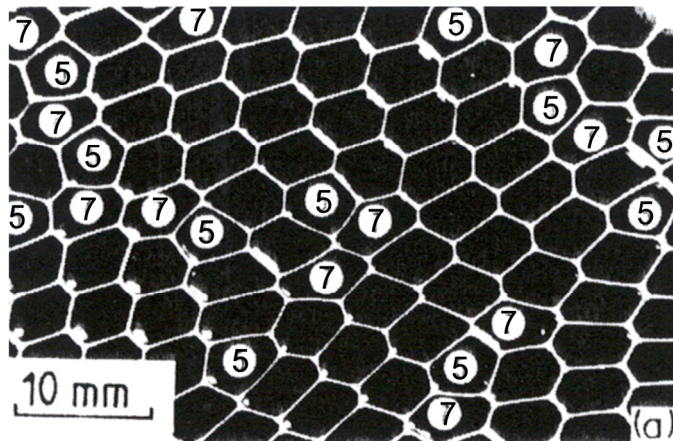
### 2.4.2.1 Loi d'Euler

D'un point de vue géométrique, une mousse est un objet constitué d'un ensemble de points appelés *sommets*  $S$ , joints les uns aux autres par des *arêtes*  $A$ . Les arêtes entourent des *faces*  $F$ , qui forment des *cellules*  $C$ . En deux dimensions, les sommets sont joints les uns aux autres par des arêtes qui entourent des faces ou cellules. Pour un large agrégat cellulaire, sommets, arêtes, faces et cellules sont liés entre eux par la loi d'Euler (Euler, 1746)<sup>29</sup> (Lakatos, 1976)<sup>30</sup>, respectivement en deux et trois dimensions :

$$F - A + S = 1, \quad (2.1)$$

$$-C + F - A + S = 1. \quad (2.2)$$

Un réseau hexagonal régulier est par définition constitué de six arêtes entourant chaque face. Une conséquence immédiate de la loi d'Euler, dont la démonstration n'est pas reportée ici, est qu'un réseau hexagonal irrégulier, soit un « nid d'abeille », dont la connectivité est de trois aura aussi, en moyenne, six côtés par face (Gibson, 1997)<sup>28</sup>. Cela veut dire qu'une face à cinq côtés ne peut être introduite que si, quelque part, une face compensatrice à sept côtés est aussi créée. De même, une face à quatre côtés requiert l'introduction d'une face à huit côtés, ou de deux faces à sept côtés ; et ainsi de suite, Figure 2.11. En pratique, cela signifie que la plupart des cellules auront six côtés, et que les cellules n'ayant pas six côtés seront appareillées. Plus généralement, ce résultat s'écrit mathématiquement, respectivement en deux et trois dimensions :



**Figure 2.11** Nid d'abeilles (Gibson, 1997)<sup>28</sup> : la plupart de cellules ont six côtés, et les cellules n'ayant pas six côtés sont appareillées.

$$\bar{n} = \frac{2Z_a}{Z_a - 2}, \quad (2.3)$$

$$\bar{n} = \frac{Z_a Z_f}{Z_a - 2} \left( 1 - \frac{2}{f} \right), \quad (2.4)$$

où  $\bar{n}$  et  $f$  désignent respectivement le nombre moyen de côtés par face, et le nombre de faces, de l'agrégat cellulaire.

Il s'en suit une conséquence importante: **dans la plupart des mousses, la plupart des cellules ont des faces à cinq arêtes, quel que soit la forme de la cellule.** Si, par exemple, les cellules sont en moyenne des dodécaèdres ( $f = 12$ ), alors le nombre moyen de côtés par face, conformément à l'équation (2.4), sera exactement de  $\bar{n} = 5$ . Si les cellules sont en moyenne des tétrakaidécaèdres ( $f = 14$ ), alors le nombre moyen de côtés par face sera de  $\bar{n} = 5,14$ . Et même si les cellules sont en moyenne des icosaèdres ( $f = 20$ ), le nombre moyen de côtés par face sera seulement de  $\bar{n} = 5,4$ .

Il en résulte qu'une étude statistique appropriée du nombre moyen de côtés par face  $\bar{n}$  donnera une information sur la forme cellulaire à travers l'équation (2.4).

L'avantage de cette formulation, c'est qu'à partir d'informations contenues dans un plan (nombre moyen de côtés par face), il est possible d'en déduire une information contenue dans l'espace (à laquelle on n'a pas forcément accès), soit le nombre moyen de faces d'une cellule. En revanche, si l'on a directement accès à la structure tridimensionnelle du milieu cellulaire, par microtomographie axiale à rayons-X par exemple, alors il peut être plus simple de compter directement le nombre moyen de faces par cellule pour se faire une idée de la forme cellulaire examinée, plutôt que d'évaluer le nombre moyen de côtés par faces pour finalement en déduire le nombre moyen de faces par cellule.

#### 2.4.2.2 Loi de croissance de Neumann

Tel que mentionné au cours de la Section 2.3.1, le processus de formation des mousses résulte principalement de trois étapes : la nucléation, la croissance, et l'expansion de bulles de gaz dans un bain ou un système

liquide réactif. La nucléation, ou formation des bulles, est généralement réalisée dans un procédé industriel par injection gazeuse ou adjonction d'agents moussants, Section 2.3.2. Cette section a pour objet l'étape de croissance des bulles de gaz. On s'intéresse aux mécanismes par lesquels une bulle croit, et aux conséquences que cela entraîne sur les proches voisines, de manière à en dégager des tendances observables sur la structure du réseau.

L'hypothèse selon laquelle la forme d'une mousse est principalement dominée par sa tension de surface est particulièrement pratique dans la mesure où elle permet d'exprimer la physique locale d'une mousse par une relation particulièrement simple et explicite, à partir de laquelle il est possible de raisonner et de tirer des tendances géométriques.

La courbure d'une membrane résulte d'une dualité entre différence de pression  $\Delta p$  de part et d'autre de la membrane d'une part, tension de surface  $T$  d'autre part (force par unité de longueur, ou énergie par unité d'aire), et s'exprime par une équation parfois appelée loi générale de Laplace :

$$\Delta p \sim T \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.5)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux de la membrane, Figure 2.12.

Il s'en suit qu'une cellule croit si le gaz contenu dans les cellules voisines diffuse à travers ses propres membranes ; le taux de diffusion étant proportionnel à la différence de pression  $\Delta p$ , par l'aire de la surface commune.

La loi de croissance de Neumann dérive de cette équation (Gibson, 1997)<sup>28</sup>, et établit que pour une cellule bidimensionnelle le taux de croissance surfacique est proportionnel à son nombre de côtés auquel on retranche six :

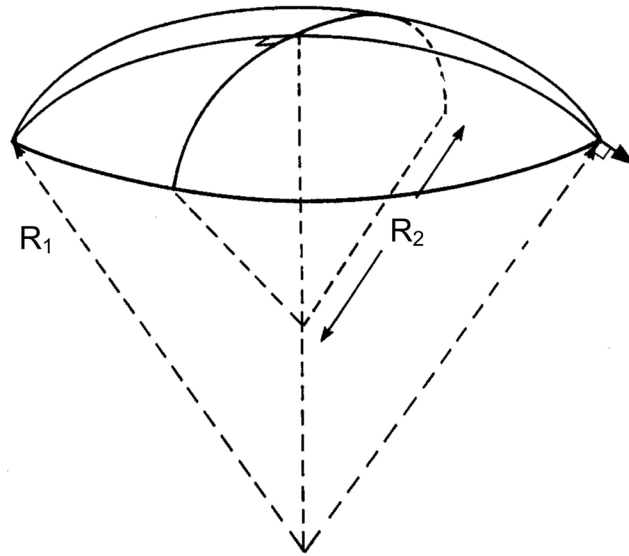
$$\frac{dA}{dt} = C_1 (n - 6), \quad (2.6)$$

où  $A$  est l'aire totale de la cellule bidimensionnelle, et  $C_1$  une constante (von Neumann, 1952)<sup>32</sup> (Rivier, 1986)<sup>33</sup> (Fortes, 1986a)<sup>34</sup>.

Le résultat tridimensionnel équivalent permettant de décrire le taux de croissance volumique d'une cellule est donné par Rivier (Rivier, 1983)<sup>35</sup> :

$$\frac{dV}{dt} = C_2 (f - \bar{f}), \quad (2.7)$$





**Figure 2.12** Rayons de courbure principaux d'une membrane de mousse (Weaire, 1999)<sup>31</sup>

où  $f$  est le nombre de faces de la cellule,  $\bar{f}$  le nombre moyen de faces de l'agrégat cellulaire (souvent 14), et  $C_2$  une autre constante.

Par conséquent, les cellules dont le nombre de faces est plus élevé que la moyenne auront tendance à croître, tandis que les cellules dont le nombre de faces est plus petit que la moyenne auront tendance à rétrécir. Il s'en suit une tendance à une structure de plus en plus inhomogène, pouvant atteindre, à long terme, une très large dispersion si le système est laissé à lui-même.

En ce qui concerne les mousses artificielles rencontrées dans l'industrie, l'homogénéité est généralement visée (sauf applications spécifiques visant à développer une structure fractale), et contrôlée par un refroidissement du système. Il n'en reste pas moins que la tendance selon laquelle une cellule de plus grande taille que la moyenne tendra à avoir un nombre de faces plus élevé que la moyenne, et vice-versa, est conservée.

D'un point de vue expérimental, cela implique qu'un biais sur le nombre moyen de faces par cellule peut être introduit si le comptage a lieu sur des cellules dont la taille n'est pas représentative de la taille moyenne des cellules de la mousse.

### 2.4.2.3 Loi d'Aboav-Weaire et règle de Lewis

Nous avons vu au cours de la Section 2.4.2.1 que dans un nid d'abeilles, une cellule à sept arêtes aura un partenaire à cinq arêtes, souvent appareillé ; et dans une mousse, une cellule à 16 faces sera sans doute appareillée à une cellule à 12 faces. Plus généralement, une cellule ayant plus de côtés que la moyenne aura des voisins qui, pris ensemble, auront moins de côtés que la moyenne. Cette corrélation fût notée par Aboav (1970, 1980)<sup>36,37</sup> à partir des clichés de Smith (1952, 1964)<sup>38,39</sup>. Elle peut être décrite pour des nids d'abeille par la règle d'Aboav (Aboav, 1970)<sup>36</sup> obtenue formellement par Weaire (Weaire, 1974)<sup>40</sup>, Figure 2.11 :

$$\bar{m} = 5 + \frac{6}{n} \quad (2.8)$$

où  $n$  est le nombre d'arêtes de la cellule observée, et  $\bar{m}$  sera le nombre d'arête moyen des cellules voisines (pour une discussion approfondie, voir Weaire et Rivier, 1984)<sup>41</sup>. Par extension, il est possible de penser qu'un résultat similaire puisse tenir en trois dimension, tel que :

$$\bar{g} = 13 + \frac{14}{f} \quad (2.9)$$

où  $f$  est le nombre de faces de la cellule considérée, et  $\bar{g}$  le nombre moyen de faces des cellules voisines. Des calculs menés par Fortes montrent que l'équation 9 est une bonne approximation lorsque le nombre moyen  $\bar{f}$  de faces par cellule d'un agrégat cellulaire est de 14. Rivier (1985)<sup>42</sup> donne une dérivation plus formelle d'une généralisation tridimensionnelle alternative.

Tous ces résultats expriment la même règle topologique : plus une cellule acquière de côtés, moins les cellules voisines en auront en moyenne. Autrement dit, en moyenne, une cellule prise accompagnée de celles qui l'entourent sera représentative du milieu.

L'étude topologique de cellules biologiques a permis de mettre en évidence un autre résultat remarquable. Lewis (1923, 1928, 1943)<sup>43,44,45</sup>, en examinant une grande variété de motifs cellulaires bidimensionnels, trouva que **l'aire d'une cellule varie linéairement avec son nombre d'arêtes** :

$$\frac{A(n)}{A(\bar{n})} = \frac{n - n_0}{\bar{n} - n_0} \quad (2.10)$$

où  $A(n)$  est l'aire d'une cellule à  $n$  côtés,  $A(\bar{n})$  est l'aire de la cellule comportant le nombre moyen des cellules de l'agrégat cellulaire,  $\bar{n}$ , et  $n_0$  est une constante (Lewis trouve  $n_0 = 2$ ).

Ce n'est que plus de 50 ans plus tard, qu'une preuve de cette observation fût donnée par Rivier et Lessowski (1982)<sup>46</sup> qui généralisèrent du même coup la règle de Lewis en trois dimensions :

$$\frac{V(f)}{V(\bar{f})} = \frac{f - f_0}{\bar{f} - f_0} \quad (2.11)$$

où  $V(f)$  est le volume d'une cellule polyédrique à  $f$  faces,  $V(\bar{f})$  celui d'une cellule au nombre moyen de faces  $\bar{f}$ , et  $f_0$  une constante à peu près égale à 3.

#### 2.4.2.4 Bilan des tendances statistiques, et implications expérimentales

Cette synthèse de travaux portant sur la structure cellulaire idéalisée d'une mousse nous permet de mettre en exergue quelques tendances statistiques qui serviront à définir la forme et la taille d'une cellule périodique représentative idéalisée.

1. Il est possible, à partir de l'observation de micrographies (2D), et du comptage du nombre moyen de côtés par face, d'estimer le nombre moyen de faces par cellule, et par conséquent de se faire une idée de la forme cellulaire, équation (2.4).
2. Au cours de leur croissance, les cellules dont le nombre de faces est plus élevé que la moyenne auront tendance à croître, tandis que les cellules dont le nombre de faces est plus petit que la moyenne auront tendance à rétrécir, équation (2.7). Par conséquent, pour un système figé, une cellule de plus grande taille que la moyenne tendra à avoir un nombre de faces plus élevé que la moyenne, équation (2.11). D'un point de vue expérimental, cela implique que si le comptage du nombre moyen de faces par cellule est effectué sur des cellules dont la taille est représentative des cellules observées, alors le nombre moyen de faces par cellule ainsi obtenu devrait être représentatif du nombre moyen de faces par cellule de l'ensemble de l'agrégat cellulaire.

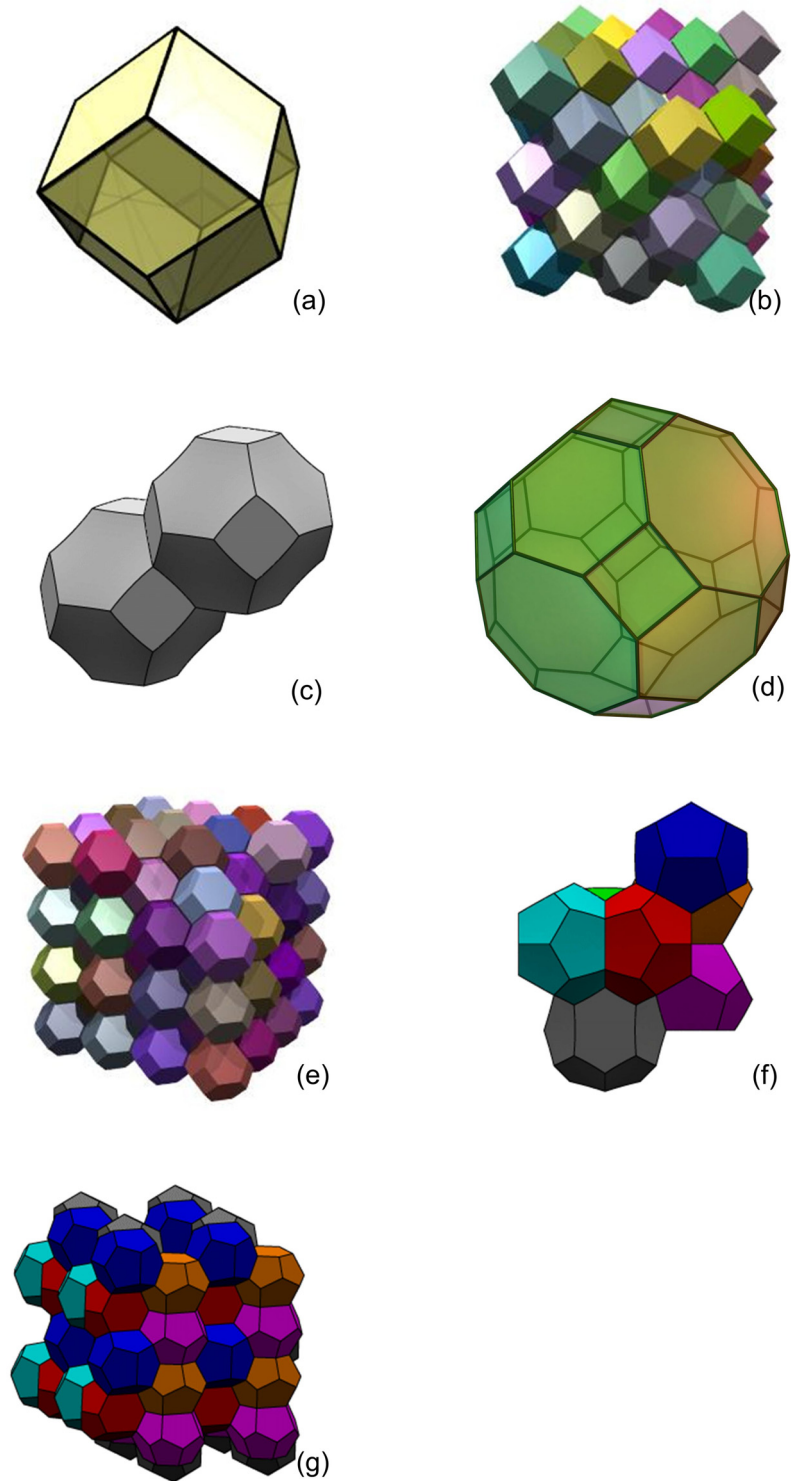
3. Si la cellule examinée est en réalité plus grande que la moyenne, les cellules voisines tendront à être plus petites que la moyenne, équations (2.2) et (2.9) combinées à l'équation (2.11). Un comptage effectué sur une cellule dont le volume semble représentatif, ainsi que ses proches voisines, tendra ainsi à compenser un manque de représentativité de la cellule choisie.

#### 2.4.3 Formes périodiques canoniques pavant régulièrement l'espace

De tout temps, les physiciens ont été particulièrement attirés par les mousses bidimensionnelles. Un retrait vers une dimensionnalité plus faible est une tactique généralement employée pour aborder les sujets difficiles. Nous avons d'ailleurs vu au cours de la section précédente que cette approche fonctionne bien dans la mesure où le problème est mieux contraint dans un espace bidimensionnel que tridimensionnel. Il semble donc judicieux de s'intéresser aussi bien aux partitions périodiques optimales de l'espace bidimensionnel, qu'à celles de l'espace tridimensionnel, dans la mesure où elles sont régies par le même principe et constituent ainsi des problèmes équivalents. Une partition étant optimale lorsqu'elle minimise le volume solide utile pour paver un volume donné.

A deux dimensions, le problème revient donc à trouver une configuration des bulles telle que leur périmètre total soit minimal. Un détour par l'architecture des ruches nous indique que les abeilles, qui construisent leurs ruches de manière à économiser la cire, bâtissent des alvéoles dont la section est un réseau hexagonal appelé nid-d'abeilles. Bien que la construction des abeilles soit tridimensionnelle, elle se réduit à un problème bidimensionnel car la ruche est identique à elle-même sur la troisième dimension. C'est le réseau de périmètre minimal. Si cette affirmation figure dans un traité d'apiculture datant de plus de 2000 ans, elle n'a été démontrée qu'en 2000 par le mathématicien Thomas Hales, de l'Université du Michigan, et illustre le fossé qui existe souvent entre intuition et démonstration rigoureuse (Hales, 2000)<sup>47</sup>.

Ainsi, à deux dimensions, les bulles s'agencent selon un réseau hexagonal. A trois dimensions, le problème est plus difficile, car moins contraint, comme nous l'avons déjà mentionné. Plateau (1873)<sup>48</sup>, dans son traité sur la géométrie des mousses, identifia la forme cellulaire comme un dodécaèdre rhombique (polyèdre à 12 faces, manière dont sont taillés les diamants), Figure 2.13(a,b). Il est en effet possible de paver l'espace tridimensionnel de cette manière, mais ce n'est pas la manière la plus efficace de le faire. Pendant plus d'un siècle, la cellule pavant l'espace en minimisant l'aire surfacique par unité de volume fût le tétrakaidécaèdre de Kelvin<sup>49</sup> aux faces légèrement incurvées, Figure 2.13(c).



**Figure 2.13** Formes périodiques canoniques pavant régulièrement l'espace (Wikipédia, l'encyclopédie libre)

Le tétrakaidécaèdre, approximation du tétrakaidécaèdre de Kelvin est représenté Figure 2.13(d), ainsi que son pavage en réseau cubique faces centrées Figure 2.13(e). Ce n'est que récemment, en utilisant le logiciel de minimisation d'aire surfacique Surface Evolver (Brakke, 1992)<sup>50</sup>, que Denis Weaire et Robert Phelan (1994)<sup>51</sup> ont identifié une unité cellulaire de moindre aire surfacique par unité de volume (d'environ 0,3380 %) composée de deux types de cellules de volume égal. Cette unité cellulaire est composée de huit cellules : six cellules à 14 faces, et de deux dodécaèdres pentagonaux (vert et bleu foncé), Figure 2.13(f). Les cellules à 14 faces contiennent 2 faces hexagonales opposées et 12 faces pentagonales. Les cellules à 14 faces sont empilées selon trois jeux de colonnes orthogonales, et les dodécaèdres remplissent les interstices entre les colonnes, ce qui permet d'obtenir une structure à symétrie cubique, périodique, Figure 2.13(g). **Aujourd'hui, on ignore toujours si cette partition est la meilleure.**

Ces arrangements restent une vision théorique des mousses, et l'expérience pratique de Matzke<sup>27</sup>, de même que les simulations numériques de Kraynik<sup>52</sup>, nous fournissent une illustration pratique intéressante des limites de l'approche des partitions optimales.

---

#### 2.4.4 Limites d'une cellule unitaire périodique idéalisée : expériences de Matzke et de Kraynik

Dans les années 40, le botaniste Edwin Matzke a observé sous une loupe binoculaire une à une 600 bulles d'une mousse où toutes les bulles avaient à peu près la même taille ; les bulles ayant été assemblées grâce à une seringue graduée (Matzke, 1946)<sup>27</sup>. Aucune cellule de Kelvin ne fût trouvée. Parmi toutes les cellules examinées, la cellule la plus abondante (19,7 %) est une cellule à 13 faces désignée 1-10-2 et aujourd'hui connue sous le nom de cellule de Matzke ; elle contient un quadrilatère, 10 pentagones, et deux hexagones. En classant les cellules par rapport à leur nombre de faces, Matzke s'est en revanche aperçu que **les cellules à 14 faces étaient les plus nombreuses**<sup>10</sup>. Il a aussi constaté que **99 % des**

---

<sup>10</sup> Les propositions de ces deux phrases ne sont pas incompatibles. Si l'on s'intéresse aux cellules d'après leurs formes, c'est bien la cellule 1-10-2 qui apparaît avec la plus grande occurrence; sachant qu'elle a 13 faces. En revanche, si on classe toutes les formes de cellules d'après le nombre de faces qu'elles contiennent, ce sont bien les cellules à 14 faces qui dominent.

**bulles ont un nombre de faces comprises entre 12 et 15 ; et que 95 % des faces ont entre quatre et six côtés.** Parmi ces faces, la majorité est constituée de pentagones (60 %), et il y a plus d'hexagones que de quadrilatères. **Au total, la moyenne du nombre d'arêtes par face  $\bar{n}$  est environ égale à 5,1.** Finalement, Matzke conclut qu'aucune cellule ne puisse être considérée comme étant typique puisque quatre types étaient requis pour former la majorité des bulles, et que les dix cellules les plus communes ne formaient que 80 % des cellules analysées.

Il est à noter que, dans une mousse aux bulles arrangées de façon désordonnée, même si toutes les bulles ont presque le même volume, voire rigoureusement le même volume, ce qui est réalisable à l'aide de simulations numériques, les structures ne sont jamais celles des réseaux ordonnés de faible surface. Ainsi, Andrew Kraynik<sup>52</sup>, du laboratoire Sandia du Nouveau-Mexique, a simulé l'organisation prise par 10 000 bulles, et n'a guère trouvé que 2 tétrakaidécaèdres de Kelvin, et aucune structure de Weaire-Phelan.

Au final, loin d'être la structure idéale, la mousse est désordonnée, mais elle est organisée par des lois statistiques d'ensemble. On constate donc que si aucune cellule n'est typique, il existe néanmoins des cellules dont les indicateurs structuraux sont, eux, typiques ; de sorte que ces cellules (Kelvin et Weaire-Phelan) puissent constituer de bons candidats pour une partition cellulaire unitaire périodique idéalisée.

## 2.5 Microstructure à l'équilibre

Au cours de cette section, nous allons commencer par détailler davantage les hypothèses sur lesquelles se fondent une structure cellulaire idéalisée. A partir de là, nous réexamineront les conséquences de telles hypothèses sur la structure cellulaire, justifiant ainsi certaines propositions statistiques de la section précédente, d'un point de vue tant expérimental que théorique. Finalement, des hypothèses considérées dérivent aussi une description affinée de la cellule idéalisée, s'appliquant à l'échelle des constituants de la cellule, et faisant intervenir la notion de ligaments. La description microstructurale sur laquelle débouche notre synthèse et analyse est finalement discutée, puis étendue.

### 2.5.1 Hypothèse du système à l'équilibre

Il s'agit ici de préciser ce que l'on entend par « forme dominée par la tension de surface », ainsi que les conditions d'équilibre associées à une telle proposition.

Une mousse, comme nous l'avons déjà mentionné, est un système biphasique dans lequel des cellules de gaz sont emprisonnées par un liquide. Les échantillons étudiés étant des mousses solidifiées, leurs caractéristiques et le vocabulaire employé dérivent de l'étude du système avant solidification. Plus précisément, il s'agit d'un système macroscopique dans lequel les éléments ne subissent pas de fluctuation thermique significative, par lesquelles ils pourraient explorer des alternatives au minimum local d'énergie dans lequel ils se trouvent. Cela veut dire qu'une mousse se trouve toujours dans un état métastable. De plus, l'état de basse énergie dans lequel elle se trouve, parmi d'autres, est déterminé par son histoire particulière. Selon le mot de Cyril Stanley Smith<sup>53</sup> emprunté à Borges, une mousse « n'a pas la capacité d'oublier ». En général, la structure d'une mousse est donc inconnue, à moins que toute l'histoire du système ne soit spécifiée par ses variables thermodynamiques. Rigoureusement, la structure de la mousse évolue constamment selon le principe de diffusion énoncé à la Section 2.4.2.2. Il est néanmoins possible de définir une structure canonique pour un type donné de mousse en comparant les échelles temporelles auxquelles se déroulent les phénomènes. Les modifications de la structure d'une mousse se déroulent lentement, dans un temps de l'ordre d'une dizaine de minutes ; alors que le changement topologique soudain subi par la mousse et observé lorsque une petite cellule cède l'ensemble de son gaz à une grande est quasi-immédiat, et dépend de la viscosité du liquide. De telle sorte, la mousse reste très proche d'un état d'équilibre vrai, excepté lorsque les changements topologiques locaux ont lieu. De plus, on considère qu'une mousse laissée à elle-même évoluera à long terme vers une structure d'échelle canonique, statistiquement identique à une précédente (les propriétés statistiques de la structure cellulaire ont été discutées au cours de la Section 2.4); le diamètre cellulaire moyen ayant néanmoins augmenté (The Physics of Foams, Chapitre 7)<sup>31</sup>. Ce jeu de considérations établit finalement les limites d'une théorie quasi-statique dans laquelle le système est considéré comme étant à l'équilibre en tout temps.

Physiquement, cet état d'équilibre consiste à négliger l'influence des forces gravitationnelle et de viscosité, responsables des modifications topologiques du système ; de sorte que la physique d'une mousse dérive



entièrement de sa tension de surface. On dit alors que la forme d'une mousse est dominée par la tension de surface.

En termes mathématique, une mousse à l'équilibre présente un cas pratique de minimisation contrainte de l'aire surfacique totale, obéissant à l'équation de Laplace.

C'est sur ces hypothèses que se fondent la plupart des modèles microstructuraux idéalisés d'une mousse, et dont dérivent mathématiquement les lois des films de savon (et de bien d'autres films) initialement établies sur la base d'expérimentations par Plateau.

### 2.5.2 Lois de Plateau : films et arêtes à l'équilibre

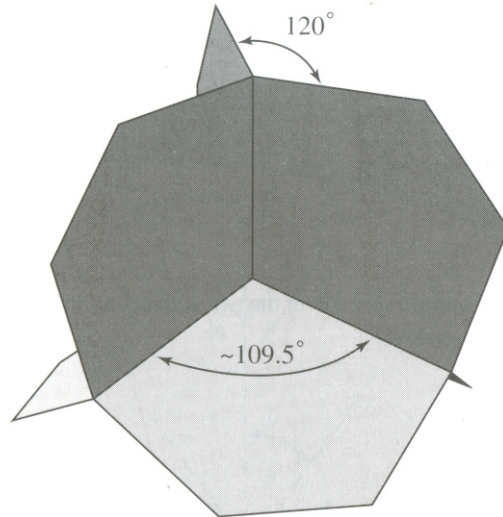
En 1873, le savant Belge Joseph A. F. Plateau<sup>48</sup> résume et établit les bases de la théorie des mousses dans son traité intitulé « Statique Expérimentale et Théorique des Liquides soumis aux seules Forces Moléculaires ». Par « seules Forces Moléculaires », Plateau se réfère à l'absence d'effets significatifs dus à la gravité, laissant le liquide à la merci de ses seules forces internes.

Expérimentalement, ces conditions sont bien réalisées pour des mousses dont la tension de surface élevée est généralement obtenue par la présence de tensioactifs. Ces constituants, présents à la surface des films, les stabilisent contre la rupture, en augmentant la tension de surface, voir équation 5 (grâce à leur architecture composée de l'association, dans une même molécule, d'une tête polaire hydrophile et d'une chaîne hydrocarbonée hydrophobe). Le paragraphe ci-dessous est un extrait du mémoire du Plateau, dont on énoncera les lois qui s'en dégagent.

*§ 188. On doit, je pense, regarder maintenant comme bien établies pour tous les assemblages laminaires, les lois que je viens de discuter. Or ces lois nous conduisent à une conséquence fort remarquable : la mousse qui se forme sur certains liquides, par exemple sur le vin de Champagne, sur la bière, sur l'eau de savon que l'on agite, est évidemment un assemblage laminaire, composé d'une foule de lamelles ou cloisons qui s'entre coupent et emprisonnent entre elles de petites portions de gaz; conséquemment, bien que tout y semble régi par le hasard, elle doit être soumise à ces mêmes lois; ainsi ses innombrables cloisons se joignent nécessairement partout trois à trois sous des angles égaux, et toutes ses arêtes se distribuent de manière qu'il y en ait toujours quatre aboutissant à un même point, en y faisant des angles égaux.*

*Loi d'équilibre des films*

Les films se rencontrent toujours par trois, en faisant donc entre eux des angles égaux à  $120^\circ$ , Figure 2.14 (les arêtes sont donc toujours la jonction



**Figure 2.14** Illustration des lois d'équilibre des films et arêtes de Plateau (Weaire, 1999)<sup>31</sup>

de trois films, et  $Z_f = 3$ , voir Section 2.4 ; en deux dimensions, la connectivité de face est abaissée de un).

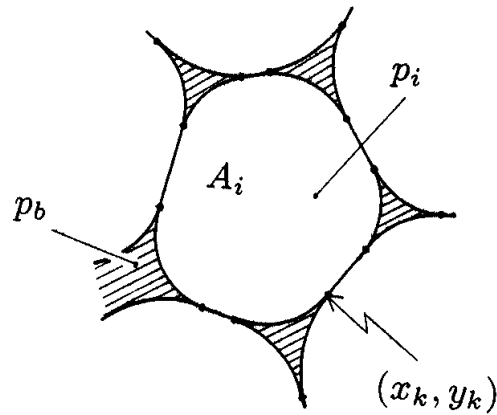
Initialement basée sur l'observation, cette propriété peut être démontrée de manière théorique pour un système à l'équilibre en considérant une intersection de type interdite, de plus haute énergie, donc instable. La règle des  $120^\circ$  est requise par l'équilibre des forces associées aux tensions de surface.

*Loi d'équilibre des arêtes*

Les arêtes se rencontrent toujours par quatre. Les angles symétriques que forment ces arêtes entre elles correspondent donc à ceux d'un tétraèdre régulier, à savoir  $\cos^{-1}(-1/3) \approx 109.47^\circ$ , Figure 2.14 (les sommets sont donc toujours la jonction de quatre arêtes et  $Z_a = 4$ , voir Section 2.4 ; en deux dimensions, la connectivité d'arête est aussi abaissée de un).

La première partie de cette règle n'est pas élémentaire. Elle fût démontrée rigoureusement qu'en 1976 par le mathématicien américain Jean Taylor (Taylor, 1976)<sup>54</sup>. Une justification moins exhaustive de cette règle

avait été proposée par Ernest Lamarle (Lamarle, 1864)<sup>55</sup>. La symétrie de l'angle tétraédrique requis est dictée par la symétrie des intersections adjointes de films, de sorte que cette partie de la règle découle de la loi d'équilibre des films.



**Figure 2.15** Illustration schématique de la loi d'équilibre des frontières de Plateau (Weaire, 1999)<sup>31</sup>

Lorsque la porosité est inférieure à 99 %, l'épaisseur des arêtes n'est plus négligeable, et la matière à l'échelle des ligaments est confinée selon des frontières dites de Plateau. Tout se passe alors comme si à la structure cellulaire, jusqu'ici filaire, étaient superposées des formes régies par les principes énoncés à la Section 2.5.3 suivante. Il s'agit du principe dit de « décoration ».

### 2.5.3 Répartition locale de la matière

#### *Loi d'équilibre des frontières de Plateau*

Là où les frontières de Plateau rejoignent un film adjacent, les surfaces se rejoignent doucement ; la normale aux surfaces étant la même de part et d'autre de l'intersection. Cela veut dire que les frontières de Plateau prennent une forme généralement incurvée, telle que présentée à la Figure 2.15. Dans le cas général, les frontières de Plateau ne sont pas symétriques, mais ont trois rayons de courbure, tous dictés par la loi générale de Laplace (équation 5). On a généralement recours aux simulations numériques pour exprimer de telles formes, et notamment au

logiciel libre Surface Evolver (Brakke, 1992)<sup>50</sup>  
 [http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/default.htm].



**Figure 2.16** Évolution de la section du ligament avec la porosité (Calmidi, 1998)<sup>56</sup>

*Extension aux fractions solides non-négligeables*

Les lois de Plateau s’appliquent pour une porosité tendant vers un. Leur pertinence pour des mousses dont la fraction solide est non négligeable est loin d’être évidente. Seules les tendances statistiques relevées au cours de la Section 2.4 à partir de lois topologiques nous permettent de penser que les connectivités d’une mousse réelle s’éloignent en moyenne peu des connectivités de Plateau. En effet, lorsque la porosité diminue, l’épaisseur des ligaments augmente, et des simulations numériques mettent en évidence que des jonctions multiples interdites peuvent alors être stabilisées, de sorte que  $Z_f$  et  $Z_a$  prennent des valeurs supérieures à 3 et 4 (Chapitre 6 de Weaire)<sup>31</sup>.

Il existe néanmoins des données expérimentales dans la littérature permettant de préciser la répartition locale de la matière dans le cas d’une porosité ne tendant pas vers un. On observe en effet expérimentalement que lorsque la porosité décroît, la forme de la section n’est plus assimilable à des frontières de Plateau, voir Figure 2.16 (Calmidi, 1998)<sup>56</sup>. La section des fibres tend progressivement vers celle d’un triangle équilatéral, pour  $\Phi \approx 94$  %. En deçà d’une telle porosité, le rayon de courbure des frontières s’inverse, et les sections deviennent convexes,  $\Phi \approx 90$  %. Pour des porosités inférieures, la section des ligaments tend vers une forme circulaire,  $\Phi \approx 85$  %.

**2.6 Conclusion**

2.6.1 Résumé de la démarche

L’analyse qualitative de microstructures se base tout d’abord sur l’observation d’échantillons. Trois classes de milieux poreux peuvent être distinguées, selon le motif idéalisé auxquels ils se réfèrent : les milieux

granulaires, les milieux fibreux, et les mousses. Les mousses ou solides cellulaires, cas d'application de la présente étude, sont constituées par un pavage de polyèdres.

Généralement, la structure des polyèdres résulte d'un processus de formation complexe, intégrant des phases successives de nucléation, croissance, et expansion de bulles de gaz dans un bain ou système réactif. Plus particulièrement, on peut distinguer trois grands axes de fabrication des mousses, et mousses d'aluminium : par injection gazeuse, adjonction d'un agent moussant, ou utilisation d'un précurseur. La connaissance de ces méthodes de fabrication est utile à la compréhension de la microstructure des échantillons de mousses étudiées. Elle peut être intégrée au processus de modélisation.

En outre, une approche récente consiste à modéliser les propriétés d'une mousse à partir d'une structure bien définie. L'idée est de modéliser une cellule idéalisée basée sur une unité périodique fondamentale. Il s'agit d'une tentative de modélisation directe de la géométrie locale d'une mousse en définissant un volume élémentaire représentatif capturant la complexité des détails de la géométrie.

Selon une nomenclature unifiée, la structure cellulaire est définie en trois points qu'il s'agit de caractériser: (1) forme, (2) taille, et (3) topologie cellulaire. En outre, les distinctions suivantes s'appliquant à la topologie : (i) dimensionnalité, (ii) cellules ouvertes ou fermées, (iii) et connectivités ( $Z_a$ , nombre moyen d'arêtes par sommet ;  $Z_f$ , nombre moyen de faces par arête). L'analyse des lois topologiques de la littérature permet de mettre en évidence des relations statistiques entre les différents indicateurs structuraux de la cellule, et ceux de ses proches voisines.

Afin de préciser les valeurs moyennes prises par les indicateurs de la structure cellulaire, il est utile de recourir à la physique des mousses. Sous certaines hypothèses simplificatrices, la microstructure d'une mousse dérive entièrement du principe de minimisation de l'énergie de surface. D'un point de vue thermodynamique, l'hypothèse consiste à considérer la mousse comme étant un système à l'équilibre. En mécanique, on dira que la forme de la mousse dérive essentiellement de sa tension de surface. En pratique, l'usage de tensioactifs est généralement requis, ainsi que la condition de porosité tendant vers un.

À l'échelle du pore, d'une part, le problème de la structure cellulaire consiste alors à chercher une partition optimale de l'espace bidimensionnel ou tridimensionnel. L'hypothèse de périodicité conduit aux formes canoniques pavant régulièrement l'espace : le réseau hexagonal en deux dimensions, et la cellule de Kelvin ou encore celle de Weaire-Phelan en trois dimensions. Ces cellules constituent des candidats potentiels pour

réduire la complexité d'une mousse réelle à une cellule périodique idéalisée. Mentionnons que si les candidats ne s'avèrent pas représentatifs, il est alors possible de complexifier la géométrie. En effet, la cellule de Weaire-Phelan appartient à un groupe plus important de structures connues des cristallographes sous le nom de phases topologiquement compactes, souvent appelées TCP ; et des métallurgistes sous le nom de structures de Franck-Kasper.

A l'échelle des constituants de la cellule, d'autre part, c'est-à-dire de ses ligaments, la matière se répartit aussi de manière à minimiser la surface occupée par le volume solide. Elle s'organise par conséquent selon les lois de Plateau. Lorsque la porosité est très proche de un, les ligaments peuvent être assimilés à des arêtes sans épaisseur. Puis, en faisant décroître faiblement la porosité, les ligaments prennent une épaisseur croissante, dont la forme est celle d'un triangle concave. Quand la porosité n'est plus assez importante, les lois de Plateau ne tiennent plus. On a alors recours à des données expérimentales pour préciser la forme des ligaments, dont la section tend vers la forme d'un cercle ( $\Phi \approx 0,85$ ), en passant par les stades successifs de triangle équilatéral ( $\Phi \approx 0,94$ ) et convexe ( $\Phi \approx 0,90$ ) ; phénomène que l'on observera au Chapitre 3.

On procède finalement par cette démarche à une idéalisation du milieu poreux réel dont il s'agit désormais d'identifier les paramètres microstructuraux, ce qui sera traité au cours du Chapitre 3.

---

### 2.6.2 Synthèse des résultats importants

Les principaux résultats de notre synthèse et analyse bibliographique, énoncés ci-dessous, détermineront notre méthode de caractérisation de la cellule périodique idéalisée.

Loin d'être la structure idéale, la mousse est désordonnée, mais elle est organisée par des lois statistiques d'ensemble. Si aucune cellule n'est typique, il peut néanmoins exister des cellules dont les indicateurs structuraux soient statistiquement, eux, typiques; de sorte que ces cellules puissent constituer de bons candidats pour une partition cellulaire unitaire périodique idéalisée.

Une étude statistique du nombre moyen de côtés par face, et du nombre moyen de faces par cellule, nous donnera une information sur la forme cellulaire.

On veillera autant que possible à identifier des cellules dont la taille est représentative de la taille moyenne des cellules de la mousse, afin de ne pas introduire de biais sur le nombre moyen de faces par cellule.

Un comptage effectué sur une cellule dont le volume semble représentatif, ainsi que sur ses proches voisines, tendra ainsi à compenser un manque de représentativité de la cellule choisie.

La structure cellulaire filaire peut ensuite être « décorée » par la superposition de frontières identifiées expérimentalement.

---

## 2.7 Références bibliographiques

1 R. W. Morse, "Acoustic Propagation in Granular Media," J. Acoust. Soc. Am. 24 (6), 696-700 (1952).

2 Philip M. Morse and K. Uno Ingard, Theoretical Acoustics. New-York : McGraw-Hill, 1968, 913 p.

3 J. Korri, R. Kronig and A. Smith, "On the theory of the reflection of sound by porous media," Physica 11, 209 (1945).

4 M. A. Ferraro and G. G. Sacerdote, "Parameters of sound propagation in Granular Absorbant Material," Acustica 1, 137-142 (1951).

5 K. Attenborough, "Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces," J.Sound Vibrat. 99 (4), 521-544 (1985).

6 K. Attenborough, "On the acoustic slow wave in air-filled granular media," J.Acoust.Soc.Am. 81 (1), 93-102 (1987).

7 Olga Umnova, Keith Attenborough and Kai Ming Li, "Cell model calculations of dynamic drag parameters in packings of spheres," J. Acoust. Soc. Am. 107 (6), 3113-3119 (2000).

8 K. V. Horoshenkov and M. J. Swift, "The acoustic properties of granular materials with pore size distribution close to log-normal," J. Acoust. Soc. Am. 110 (5), 2371-2378 (2001).

9 Jérôme Tran Van, "Etude de l'influence de l'isotropie transverse des laines minérales sur la transmission acoustique des parois multicouches," Thèse. Poitiers : Université de Poitiers. Faculté des sciences fondamentales et appliquées, 2004, 210 p.

10 T. J. Lu, Audrey Hess and M. F. Ashby, "Sound absorption in metallic foams," J.Appl.Phys. 85 (11), 7528-7539 (1999).

11 T. J. Lu, Feng Chen and Deping He, "Sound absorption of cellular metals with semiopen cells," J.Acoust.Soc.Am. 108 (4), 1697-709 (2000).

12 John Banhart and Denis Weaire, "On the road again: Metal foams find favor," Physics Today 55 (7), 37-43 (2002).

13 N. C. Hilyard and J. Young, Introduction. In N. C. Hilyard, Mechanics on Cellular Plastics. London : Applied Science Publishers, 1982.

14 A. Cunningham and N. C. Hilyard, Physical behaviour of polymeric foams - an overview, Chap. 1. In N. C. Hilyard and A. Cuningham, Low Density Cellular Plastics: Physical Basis of BehaviourU, First Edition. London Chapman & Hall : 1994, pp. 1-21.



15 Louis D. Artavia and Christopher W. Macoska, Polyurethane flexible foam formation. In N. C. Hilyard and A. Cunningham, Low density Cellular plastics, Chap. 2. Cambridge : Chapman-Hall, 1994 , pp. 22-55.

16 Michael Ashby et al., Metal Foams: A Design Guide. Bonston : Butterworth-Heinemann, 2000, 251 p.

17 K. Boomsma, D. Poulikakos and Y. Ventikos, "Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure," Int J Heat Fluid Flow 24 (6), 825-834 (2003).

18 S. Gasser, F. Paun and Y. Brechet, "Absorptive properties of rigid porous media: Application to face centered cubic sphere packing," J.Acoust.Soc.Am. 117 (4 I), 2090-2099 (2005).

19 S. Torquato, "Diffusion and reaction among traps: some theoretical and simulation results," Journal of Statistical Physics 65 (5-6), 1173-1206 (1991).

20 D. Lafarge, Determination of the dynamic bulk modulus of gases saturating porous media by Brownian motion simulation. In J. -L Auriault, C. Geindreau, P. Royer Eds, Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics. Lisse, Netherlands : A. A. Balkema, 2002, pp. 703-708.

21 K. Schladitz et al., "Design of acoustic trim based on geometric modeling and flow simulation for non-woven "Bericht des Fraunhofer ITWM," 72, 1-34 (2005).

22 G. J. F. Smit and J. P. Du Plessis, "Modelling of non-Newtonian purely viscous flow through isotropic high porosity synthetic foams," Chemical Engineering Science 54 (5), 645-654 (1999).

23 G. P. J. Diedericks and J. P. Du Plessis, "Modelling of flow through homogeneous foams," *Mathematical Engineering in Industry* 6 (2), 133-154 (1997).

24 Prieur Du Plessis *et al.*, "Pressure drop prediction for flow through high porosity metallic foams," *Chemical Engineering Science* 49 (21), 3545-3553 (1994).

25 Donald L. Koch *et al.*, "Effect of order on dispersion in porous media," *J.Fluid Mech.* 200, 173-188 (1989).

26 J. Baumeister, "Überblick: Verfahren zur Herstellung von Metallschäumen," *Technische Mitteilungen* 92, 94-99 (1999).

27 E. B. Matzke, "The three-dimensional shape of bubbles in foam: an analysis of the role of surface forces in three-dimensional cell shape determination," *Am. J. Botany* 33, 58-80 (1946).

28 L. J. Gibson and M. F. Ashby, *Cellular solids: Structure and Properties*, 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1997, pp. 510.

29 L. Euler, *Gedanken, &c or "Thoughts on the elements of bodies,"* *Memoirs of the Prussian Academy of Sciences* , (1746).

30 I. Lakatos, *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge : Cambridge University Press, 1976, 174 p.

31 D. Weaire and S. Hutzler, *The Physics of Foams.* First Edition. Oxford : Clarendon Press, 1999, pp. 246.

32 J. von Neumann, Discussion remark concerning paper of C.S. Smith, Grain shapes and other metallurgical applications of topology, In C. Herring ed., Metal interfaces. Cleveland : American Society of Metals, 1952, pp. 108-110.

33 N. Rivier, "Structure of random cellular networks and their evolution," *Physica D* 23 (1-3), 129-137 (1986).

34 M. A. Fortes, "Average rate of growth of individual cells in a cellular structure: effect of the number of topological elements," *J. Mater. Sci.* 21 (7), 2509-2513 (1986).

35 N. Rivier, "On the structure of random tissues or froths, and their evolution," *Philosophical Magazine B (Physics of Condensed Matter, Electronic, Optical and Magnetic Properties)* 47 (5), 45-9 (1983).

36 D. A. Aboav, "The arrangement of grains in a polycrystal," *Metallography* 3 (4), 383-90 (1970).

37 D. A. Aboav, "The arrangement of cells in a net," *Metallography* 13 (1), 43-58 (1980).

38 C. S. Smith, Grain shapes and other metallurgical applications of topology, In C. Herring ed., Metal interfaces. Cleveland : American Society of Metals, 1952, pp. 65-108.

39 C. S. Smith, "Some Elementary Principles of Polycrystalline Microstructure," *Metal. Rev.* 9 (33), 1-48 (1964).

40 D. Weaire, "Some remarks on the arrangement of grains in a polycrystal," *Metallography* 7 (2), 157-160 (1974).

41 D. Weaire and N. Rivier, "Soap, cells and statistics-random patterns in two dimensions," *Contemporary Physics* 25 (1), 59-99 (1984).

42 N. Rivier, "Statistical crystallography structure of random cellular networks," *Philosophical Magazine B: Physics of Condensed Matter; Electronic, Optical and Magnetic Properties* 52 (3), 795-819 (1985).

43 F. T. Lewis, "The typical shape of polyhedral cells in vegetable parenchyma and the restoration of that shape following cell division," *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* 58, 537-552 (1923).

44 F. T. Lewis, "The correlation between cell division and the shapes and sizes of prismatic cells in the epidermis of Cucumis," *Anat. Rec.* 38, 341-376 (1928).

45 F. T. Lewis, "The geometry of growth and cell division in epithelial mosaics," *Amer. J. Bot.* 30, 766-776 (1943).

46 N. Rivier and A. Lissowski, "On the correlation between sizes and shapes of cells in epithelial mosaics," *Journal of Physics A (Mathematical and General)* 15 (3), 143-8 (1982).

47 T. C. Hales, "The honeycomb conjecture," *Discrete & Computational Geometry* 25 (1), 1-22 (2001).

48 Plateau, J. A. F., *Statistique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Tome premier. Paris : Gauthier-Villard, 1873, pp. 452.

49 Kelvin, Lord (Thompson, W.), "On the division of space with minimum partitional area," *Philos. Mag.* 23, 503-514 (1887).

50 Kenneth A. Brakke, "The surface evolver," *Experimental Mathematics* 1 (2), 141-165 (1992).

51 D. Weaire and R. Phelan, "A counter-example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces," *Philosophical Magazine Letters* 69 (2), 107-110 (1994).

52 A. M. Kraynik, D. A. Reinelt and F. van Swol, "Structure of random monodisperse foam," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* 67 (3), 31403-1 (2003).

53 C. S. Smith, *A Search for Structure: Selected Essays on Science, Art and History*. Cambridge, Mass : MIT Press, 1981, 410 p.

54 Jean E. Taylor, "The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces," *Ann. Math.* 103, 489-539 (1976).

55 E. Lamarle, "Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces," *Mém. Acad. R. Belg.* 35, 3-104 (1864).

56 Varaprasad Venkata Calmidi, "Transport phenomena in high porosity fibrous metal foams," PhD Thesis. Boulder, CO. : University of Colorado, 1998.

# 3 Acquisition de la morphologie cellulaire

## 3.1 Introduction

## 3.2 Matériaux et méthodes

3.2.1 Échantillons de mousses d'aluminium à cellules ouvertes

3.2.2 Système d'imagerie par microtomographie axiale à rayons-X

3.2.3 Acquisition de la microstructure

3.2.3.1 *Radiographies*

3.2.3.2 *Reconstruction de coupes transversales*

3.2.3.3 *Segmentation et reconstruction tridimensionnelle*

3.2.4 Mesure des paramètres de la morphologie cellulaire

## 3.3 Résultats et discussion

3.3.1 Analyse quantitative tridimensionnelle de la morphologie cellulaire

3.3.2 Représentativité des résultats

3.3.3 Limitations

## 3.4 Conclusion

## 3.5 Références

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, un dispositif de microtomographie axiale à rayons-X est utilisé de manière à identifier des caractéristiques microstructurales de forme et de taille d'une mousse d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes. Cette identification expérimentale se basera sur les principes d'acquisition des caractéristiques de la morphologie cellulaire rapportés au cours du Chapitre 2. La taille des cellules examinées devra être représentatives pour que leurs caractéristiques microstructurales le soient. Les paramètres de forme mesurés sont le nombre moyen d'arêtes/face  $\bar{n}$ , et le nombre moyen de faces par cellule,  $f$ . Les paramètres de taille mesurés sont les principaux diamètres caractéristiques cellulaires  $D_1$  et  $D_2$ ; les longueurs  $l$  et distributions de longueurs de ligaments; ainsi que les épaisseurs  $t$  et distributions d'épaisseurs de ligaments. A notre connaissance, un portrait microstructural aussi exhaustif d'une mousse d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes n'a pas été réalisé dans la littérature. De plus, il s'agit d'une approche originale basée sur l'analyse tridimensionnelle de cellules isolées. Plus généralement, le propos de ce chapitre est donc de visualiser des morphologies cellulaires de mousses à cellules ouvertes en utilisant la microtomographie axiale à rayons-X, de mesurer des quantités tridimensionnelles en utilisant les images de cellules

comme données expérimentales, et d'évaluer les caractéristiques des structures examinées.

Bien que l'examen de la littérature des mousses réalisé au cours du Chapitre 2 fasse émerger une connaissance valable des formes tridimensionnelle d'une unité cellulaire, aucune donnée quantitative précise ne peut en être extraite. Des mesures quantitatives de la microstructure tridimensionnelle d'une mousse sont donc nécessaires. La mesure de quantités tridimensionnelles peut être réalisée en identifiant expérimentalement les paramètres mis en évidence au cours du Chapitre 2 pour décrire la morphologie cellulaire des mousses. Les études conventionnelles portant sur la structure des mousses solides sont généralement réalisées par microscopie optique ou électronique à balayage (MEB). La MEB donne des images de haute résolution et de grande profondeur de champ. Néanmoins, une évaluation bidimensionnelle fournit généralement une information partielle de la morphologie cellulaire. Une étude directe et non-destructive de microstructures tridimensionnelles est en principe possible en utilisant la tomographie calculée à rayons-X (CT) (Kak, 1988)<sup>1</sup>. L'acquisition de microtomographies tridimensionnelles à rayons-X ( $\mu$ CT) d'échantillons de mousses devrait donc permettre d'identifier expérimentalement les valeurs des paramètres microstructuraux de la morphologie cellulaire.

La  $\mu$ CT est une technique d'imagerie non-destructive fournissant une cartographie de la structure interne d'un échantillon à partir de mesures de l'atténuation d'un faisceau de rayons-X passant à travers un échantillon à différents angles d'incidence. Cette technique d'imagerie est similaire à la tomographie calculée conventionnelle, largement utilisée en médecine, mais possède une meilleure résolution spatiale, voir par exemple (Grangeat, 2002)<sup>2</sup> (Kalender, 2005)<sup>3</sup>. Un dispositif compact de laboratoire Skyscan-1072 (SkyScan, Aartselaar, Belgique) disponible à l'Université de Sherbrooke a été utilisé pour cette étude.

Plusieurs auteurs ont utilisé la  $\mu$ CT pour étudier la microstructure des mousses. Ces enquêtes incluent des mousses métalliques ou polymériques, à cellules fermées ou ouvertes. Elles fournissent des mesures de paramètres microstructuraux, et détaillent les procédures utilisées.

Elmoutaouakkil et ses collaborateurs ont caractérisés trois mousses d'aluminium à cellules fermées, en utilisant la  $\mu$ CT synchrotron (Elmoutaouakkil, 2002)<sup>4</sup>. L'avantage d'une radiation synchrotron étant de travailler avec un faisceau monochromatique, ce qui assure des images de

très bonne qualité. Sur la gamme de résolutions disponibles, allant de 1 à 40 micromètres, une résolution intermédiaire de 30 micromètres a été choisie de manière à détecter les épaisseurs de parois d'une part, et à disposer de suffisamment de cellules pour effectuer un calcul de porosité d'autre part. Cymat, Alporas, et IFAM, sont les mousses d'aluminium à cellules fermées étudiées, dont les principes de fabrication ont été rappelés au cours du Chapitre 2. L'étape de segmentation, permettant de séparer les phases fluides et solides, est assurée manuellement, de manière à éviter les connections non-réelles entre cellules, c'est-à-dire selon un critère visuel. Les principaux paramètres mesurés sont la taille cellulaire, et la distribution des tailles cellulaires. Le degré de sphéricité, l'élongation des cellules, ainsi qu'une estimation de la porosité des mousses sont aussi calculés par analyse d'images. Olurin et ses collaborateurs (Olurin, 2002)<sup>5</sup> rapportent une étude similaire menée sur des échantillons de mousses fabriquées par métallurgie des poudres (Mepura, Neumann), en utilisant cette fois un dispositif de laboratoire Scanco AG  $\mu$ CT40 (Scanco Medical, Bassersdorf, Suisse). La gamme de résolution utilisée est comprise en 15 et 37 micromètres. La segmentation est assurée par un algorithme de seuillage adaptatif : la porosité, calculée par intégration des éléments de volume, est tracée en fonction du niveau de seuillage ; et la valeur de seuillage optimum est atteinte lorsque le taux de variation de la porosité avec le niveau de seuillage est minimum.

La microstructure de mousses de polymère à cellules fermées a aussi été étudiée, par  $\mu$ CT synchrotron (Elmoutaouakkil, 2003)<sup>6</sup>, et  $\mu$ CT axiale (Trater, 2005)<sup>7</sup>. Elmoutaouakkil, de même que Trater et leurs collaborateurs, ajustent le niveau de seuillage manuellement lors de l'étape de segmentation, par comparaison visuelle des images originales et segmentées. Le dispositif de  $\mu$ CT utilisé par Trater *et al.* est le même que celui utilisé dans cette étude. Trater *et al.* utilisent une résolution comprise entre 10 et 20 micromètres pour tous les échantillons de mousses de polymère à cellules fermées testés.

D'autre part, Montminy développa un algorithme pour trouver les centres nodaux d'une mousse à cellules ouverte, et la longueur de ses ligaments (Montminy, 2001a)<sup>8</sup>. Plusieurs échantillons de mousses de polyuréthane à cellules ouvertes sont envoyés à des laboratoires externes pour être imagés (au coût de 500 \$ par échantillon). Le dispositif d'imagerie utilisé par les laboratoires externes est le même que celui utilisé dans notre étude ; pour une résolution atteignant 5 micromètres. Le niveau de seuillage est ajusté sur critères visuels. La microstructure de six échantillons de mousses de polyuréthane à cellules ouvertes a ainsi été analysée au cours de sa thèse (Montminy, 2001b)<sup>9</sup> (Montminy, 2004)<sup>10</sup>,



dont résulte un portrait très riche de la morphologie cellulaire de mousses à cellules ouvertes réelles. À notre connaissance, les travaux de Montminy sont les seuls à reporter des mesures tridimensionnelles de longueurs de ligaments, et leurs distributions. L'épaisseur des ligaments, et leurs distributions n'est en revanche par fournie dans ses travaux.

Plus spécifiquement, parmi les études relatives à la microstructure de mousses d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes, Nieh et ses collaborateurs obtinrent une microtomographie synchrotron d'un échantillon Duocel® afin de prédire ses propriétés mécaniques par éléments finis (Nieh, 1998)<sup>11</sup>. Leur analyse microstructurale est néanmoins essentiellement qualitative. Bhattacharya et ses collaborateurs (Bhattacharya, 2002)<sup>12</sup>, dans la suite des travaux de thèse de Calmidi (Calmidi, 1998)<sup>13</sup>, ont publié des micrographies de sections des ligaments de la mousses Duocel®, afin d'insister sur la dépendance porosité – forme des sections (d'une section circulaire pour  $\Phi \approx 0.85$ , à une section de triangulaire concave pour  $\Phi \approx 0.97$ ).

Plusieurs analyses quantitatives de la microstructure d'échantillons Duocel® ont été conduites. Zhou et ses collaborateurs (Zhou, 2002)<sup>14</sup> ont reporté des mesures de longueur, d'épaisseur de ligaments, et de diamètres cellulaires pour trois densités surfaciques de pores différentes (10, 20 et 40 ppi); obtenues par analyse stéréologique à partir de micrographies. Scheffler et ses collaborateurs (Scheffler, 2004)<sup>15</sup> caractérisèrent l'échantillon Duocel 20 ppi de porosité 93.2 % pour l'utilisation d'un substrat zéolithe (utilisé dans les procédés d'échanges ioniques) à l'aide du dispositif Scanco AG  $\mu$ CT40. À partir des données issues du microtomographe, un indicateur de model structural (SMI) morphométrique a été calculé. Le SMI est ou outil pour la quantification de la microarchitecture osseuse et peut être utilisé pour la caractérisation morphologique de mousses rigides. La distribution des épaisseurs de ligaments, et celle des diamètres cellulaires, sont les paramètres reportées dans cette étude. Les mesures de longueurs de ligaments ne sont pas disponibles. On peut aussi déplorer le fait qu'un seul échantillon ait été caractérisé. Finalement, Schmierer et ses collaborateurs étudièrent la microstructure de nombreux échantillons par  $\mu$ CT axiale afin de mesurer leurs surfaces spécifiques (Schmierer, 2004)<sup>16</sup>. La surface spécifique est déduite de la mesure de l'aire et du périmètre de sections de ligaments. Ces mesures permettent aussi aux auteurs d'en déduire la distribution du rayon hydraulique des ligaments. Des tailles de voxels (contraction de pixel et volumique) de 113, 55, et 38 micromètres furent utilisées selon les grossissements étudiés. Un calcul de porosité est aussi effectué, la segmentation étant réalisée en choisissant le niveau de gris moyen à

l'interface. Pour le calcul de la surface spécifique, les images obtenues furent calibrées de manière à ce que la porosité calculée corresponde à la porosité mesurée par méthodes gravimétriques. Les dispersions maximums sur la surface spécifique et la porosité sont respectivement estimées à 13 % et 10 %. Cette étude ne permet pas de quantifier les longueurs de ligaments.

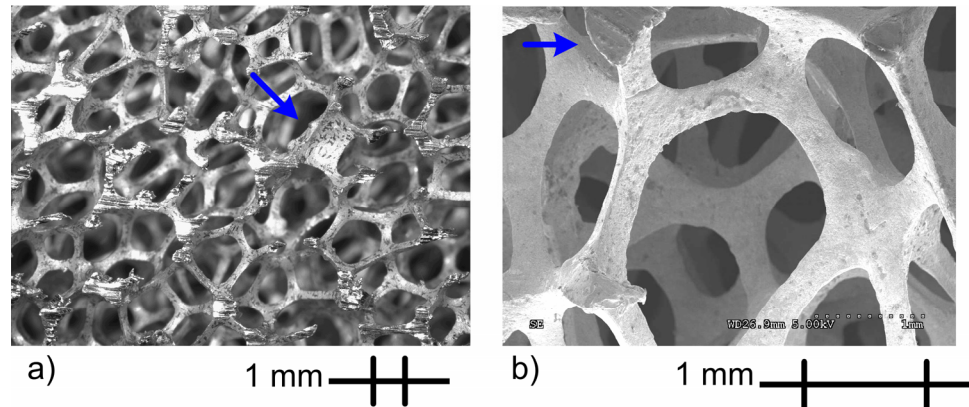
On remarque finalement qu'aucune des trois études clés portant sur la microstructure de mousses d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes ne traite des paramètres de forme cellulaire (nombre moyen d'arête par face, nombre moyen de faces par cellules), pourtant utiles à l'identification d'un modèle cellulaire<sup>14-16</sup>. D'autre part, parmi les deux études menées à partir d'images tridimensionnelles, on remarque que la mesure de longueur de ligaments n'est pas fournie<sup>15,16</sup>.

L'approche originale proposée ici est basée sur la visualisation et la mesure directe de paramètres de taille et de forme de cellules tridimensionnelles isolées. Elle vise à compléter le portrait microstructural de mousses à cellules ouvertes de porosité élevée de la littérature, afin d'identifier expérimentalement l'ensemble des caractéristiques de la morphologie cellulaire : de forme (nombre d'arêtes par face, nombre de faces par cellule, degré d'anisotropie, forme des sections) d'une part, et de taille (distributions de longueurs et d'épaisseurs de ligaments, principaux diamètres cellulaires caractéristiques) d'autre part.

Au cours de ce chapitre, l'application d'un dispositif de  $\mu$ CT à l'analyse quantitative de la morphologie cellulaire d'une mousse d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes est présentée. Après une brève description des échantillons de mousses étudiées, ainsi que du système d'imagerie utilisé, la procédure d'acquisition de la microstructure des échantillons est détaillée et illustrée. L'expérience montre qu'il est important d'aborder une telle acquisition avec le support de micrographies. Les micrographies permettent de guider l'expérimentateur dans les réglages de son dispositif, et de calibrer les images obtenues avant la reconstruction de l'image tridimensionnelle. En outre, les principes physiques et mathématiques de fonctionnement du microtomographe à rayons-X seront brièvement introduits au cours de l'exposé des principales étapes d'acquisition de manière à le clarifier. Des mesures morphométriques aussi complètes que possible seront alors présentées, pour alimenter les modèles microstructuraux de mousses issus de notre analyse au Chapitre 2. L'ensemble de la démarche d'acquisition et de modélisation de la morphologie cellulaire sera finalement discutée.

## 3.2 Matériaux et méthodes

### 3.2.1 Échantillons de mousses d'aluminium à cellules ouvertes



**Figure 3.1** Micrographies optique (a) et à balayage électronique (b) d'une mousse d'aluminium 6101 40 ppi de porosité égale à 91.2 +/- 1 % (Panneton, 2005)<sup>17</sup>

Quatre échantillons de mousses d'aluminium Duocel [alliage Aluminium 6101-T6 ; de densité environ égale à  $2700 \text{ kg.m}^{-3}$  ; de composition massique (%) 99.32 Al – 0.19 Mg – 0.27 Si – 0.12 Fe – 0.1 autres (Cu, Mg, Zn, B)] à cellules ouvertes de densités surfaciques de pores différentes ont été sélectionnés : 5 ppi, 10 ppi, 20 ppi et 40 ppi (pores per inches). Il s'agit de la désignation du manufacturier, pas nécessairement de la vraie taille de pores. Le produit est fabriqué par la société ERG Aerospace (Oakland, État de Californie, États-Unis). Pour chaque densité surfacique de pore, un échantillon de forme cylindrique est usiné. Afin de ne pas endommager la microstructure de la mousse, les échantillons sont usinés par électroérosion à fil. Ces mousses d'aluminium à cellules ouvertes sont fabriquées en utilisant une méthode de moulage à corps perdu sur précurseur polymère, incluant une étape de solidification directionnelle. Leur anisotropie se manifeste par deux orientations privilégiées des cellules : ou bien longitudinale (L), ou encore transverse (T), par rapport à la direction de solidification. Le principe général de fabrication de ces mousses a été exposé au Chapitre 2, Section 2.3.2.3. En première approche, la morphologie de la mousse est étudiée en utilisant des techniques conventionnelles de microscopie, par microscopie optique et MEB. La

microstructure de la mousse est montrée à la Figure 3.1. Il s'agit d'une microstructure typiquement obtenue par moulage, laissant apparaître des inclusions grossières. Aucun espace vide ne fut observé au sein de ligaments (Nieh, 1998)<sup>11</sup>. Les cellules de la mousse montrée à la Figure 3.1 sont à prédominance ouvertes, mais il existe quelques cellules partiellement fermées tel qu'en témoigne la Figure 3.1(a), solidifiées sur place avant que les membranes aient été drainées. Les sections des ligaments ont une forme essentiellement triangulaire légèrement convexe, Figure 3.1(b). Les cellules partiellement fermées indiquent la nature non-équilibrée du processus de moulage. On peut voir à la Figure 3.1(b) que les lois de Plateau semblent bien respectées. Ces premières observations, de nature qualitative, ont néanmoins besoin d'être confirmées et quantifiées en utilisant une technique d'analyse d'images tridimensionnelle. Pour ce faire, une technologie de  $\mu$ CT à rayons-X sera utilisée. Le dispositif compact de laboratoire disponible à l'Université de Sherbrooke sera brièvement présenté, en vue de décrire le processus d'acquisition des données.

---

### 3.2.2 Système d'imagerie par microtomographie axiale à rayons-X

La géométrie locale de mousses d'aluminium est obtenue en utilisant un dispositif Skyscan 1072-80 kV, une source de laboratoire à rayons-X pour  $\mu$ CT axiale. Les principaux organes du dispositif sont présentés à la Figure 3.2. Typiquement, un système de CT utilise un jeu de mesures par transmission réalisé à l'issue du parcours des rayons-X à travers l'échantillon selon différentes directions (données par la rotation du porte échantillon). Chacune des mesures par transmission est digitalisée et stockée dans un ordinateur. L'échantillon est subséquemment reconstruit par une technique de rétroprojection<sup>18,19</sup>.

Le faisceau de rayons-X divergent est généré par un tube microfoyer à rayons-X de 8  $\mu$ m, Figure 3.2(a). Contrairement aux sources synchrotron, un tube à rayons-X produit un spectre d'énergie polychromatique. La polychromaticité du faisceau altère la qualité des images obtenues. Cette caractéristique des sources conventionnelles à rayons-X provoque un « durcissement » du faisceau<sup>11</sup> et génère des

---

<sup>11</sup> Comme son nom l'indique, il s'agit d'une augmentation de l'énergie moyenne du faisceau, ou « durcissement » lors de son parcours à travers l'objet scanné. Ces artefacts ont pour origine la non

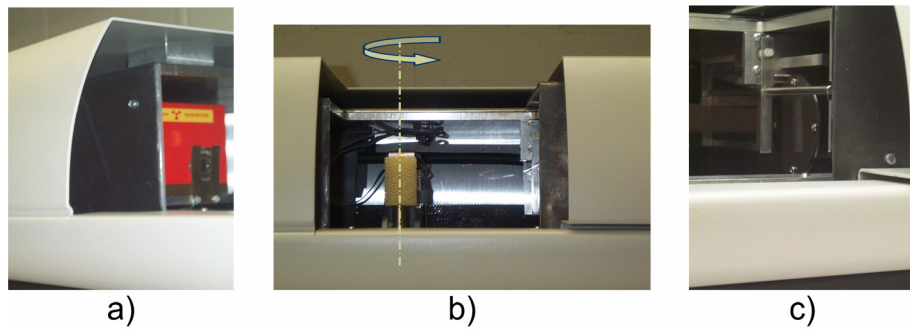
artefacts de reconstruction sur les images tomographiques, ce qui a pour effet de limiter la résolution spatiale des dispositifs de laboratoire. La présence d'un filtre d'aluminium a permis de réduire ces artefacts, sans pour autant les supprimer.

L'échantillon est monté sur une plate-forme rotative, animée par un moteur pas-à-pas qui contrôle sa position angulaire par pas supérieurs ou égaux à  $0.225^\circ$ , Figure 3.2(b). Le porte échantillon rotatif est lui-même fixé sur un banc mécanique, ce qui assure un contrôle des positions horizontale et verticale de l'échantillon. Des portes échantillons ont été usinés pour cette étude afin d'assurer une rotation axisymétrique de l'échantillon.

Un détecteur bidimensionnel enregistre le faisceau transmis à travers l'échantillon, Figure 3.2(c). Le faisceau de rayons-X étant divergent, la position de l'échantillon par rapport au couple source-récepteur détermine le grossissement géométrique de celui-ci. Par exemple, si l'échantillon est positionné à proximité du détecteur, son image aura une taille de l'ordre de celle de l'objet réel ; inversement, si l'échantillon est placé au voisinage de la source, son grossissement peut atteindre un facteur 100. Le détecteur bidimensionnel est basé sur un dispositif à transfert de charges (CCD, charge coupled device) de  $1024 \times 1024$  éléments d'images (pixels, picture elements), couplé à un photo-scintillateur permettant de convertir les photons X en photons visibles. La CCD enregistre alors l'image lumineuse convertie après grossissement géométrique. Typiquement, la taille d'un pixel est de  $21,8 \times 21,8 \mu\text{m}^2$  pour un grossissement géométrique de 10.

---

monochromaticité du faisceau incident de rayons-X. Les composantes de plus basse énergie sont d'avantage atténuées que celles de plus haute énergie. Les rayons de faible parcours sont donc proportionnellement plus atténués que ceux de grand parcours. Pour des objets de densité uniforme et de section constante, la périphérie apparaît alors plus claire que l'intérieur.



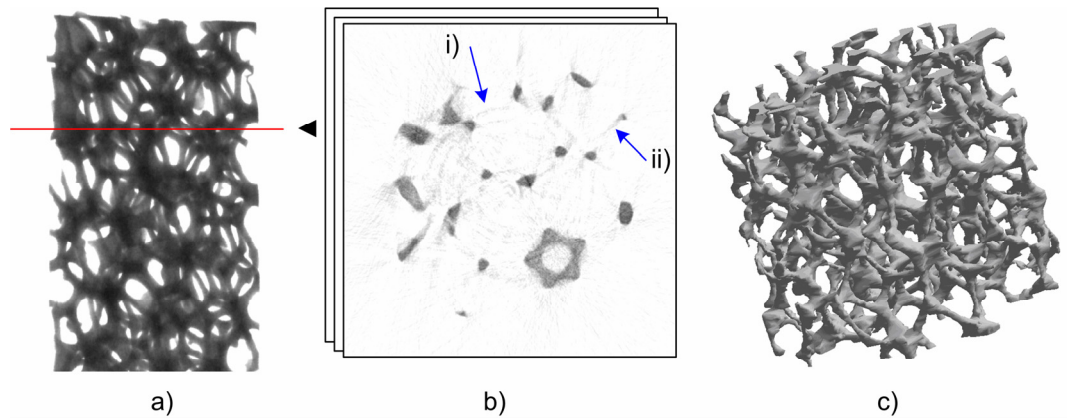
**Figure 3.2** Principaux organes du dispositif expérimental Skyscan 1072 – 80 kV : (a) une source de rayons-X microfocus de 8  $\mu\text{m}$ , (b) un porte échantillon rotatif animé par un moteur pas-à pas, (c) et un récepteur CCD.

Durant l'acquisition, la rotation séquentielle de l'échantillon a été réalisée sur 180°. On procède typiquement à l'acquisition de 200 images radiographiques de l'échantillon (correspondant à approximativement 400 Mo par échantillon). De plus, une image est enregistrée sans échantillon avec le même temps d'exposition avant chaque scan pour réaliser une correction de champ plat. Une correction de champ plat est une calibration de la CCD visant à homogénéiser la réponse de chacun de ses éléments.

---

### 3.2.3 Acquisition de la microstructure

Le problème central du point de vue de l'expérimentateur est d'obtenir des images représentatives de l'échantillon réel. Les échantillons décrits à la Section 3.2.1 sont imagés en utilisant le dispositif de  $\mu\text{CT}$  axiale à rayons-X Skyscan-1072 décrit à la Section 3.2.2. Des échantillons de mousses cylindriques, avec un diamètre variant de 5 à 20 mm, ont été usinés de manière à assurer une symétrie axiale durant la rotation du porte échantillon. Les trois principales étapes du processus de reconstruction par  $\mu\text{CT}$  axiale à rayons-X sont illustrées à la Figure 3.3, et détaillées ci-dessous.



**Figure 3.3** Principales étapes du processus de reconstruction par microtomographie calculée axiale à rayons-X. (a) Acquisition de radiographies classiques, ou « ombres projetées de rayons-X » de l'échantillon réel. (b) Reconstruction de tranches bidimensionnelles de l'échantillon réel, montrant (i) des artefacts en « anneau » et (ii) des artefacts « d'épandage en étoile ». (c) Reconstruction de l'image tridimensionnelle d'une portion axiale de l'échantillon réel, après binarisation des images bidimensionnelles.

### 3.2.3.1 Radiographies

Premièrement, un bon contraste visuel entre les phases fluides (air) et solides (aluminium) est obtenu sur les radiographies lorsque la source de rayons-X est ajustée à 80 kV et 62  $\mu$ A, Figure 3.3(a). Pour chaque échantillon, l'acquisition de 200 radiographies de  $1024 \times 1024$  pixels est réalisée sur  $180^\circ$  (pas angulaire de  $0.9^\circ$ ). Pour chaque radiographie, le temps d'intégration est réglé à 112 ms. Avant enregistrement, chaque radiographie est prétraitée pour intégrer la correction de champ plat. Pour chaque pixel, l'intensité de la projection corrigée est donc calculée. Cette correction supprime les inhomogénéités du champ de rayons-X et de la réponse du détecteur. La Figures 3.3(a) montre un exemple de radiographie corrigée obtenue pour l'échantillon 40 ppi, avec un facteur de grossissement égal à 10. Dans ces conditions, la procédure d'acquisition de 200 radiographies prend environ 1h30, et chaque pixel représente  $21.8 \mu\text{m}$  de côté.

### 3.2.3.2 Reconstruction de coupes transversales

Deuxièmement, des coupes bidimensionnelles de l'échantillon sont alors reconstruites à partir des projections corrigées en utilisant un algorithme de rétroprojection filtrée pour faisceau divergent, Figure 3.3(b). Les images reconstruites représentent la cartographie bidimensionnelle du coefficient d'absorption linéaire  $\mu(x,y)$  pour l'énergie émise. Le logiciel de reconstruction bidimensionnelle Cone-Beam utilisé est fourni par Skyscan (Feldkamp, 1984)<sup>20</sup>. L'épaisseur des coupes reconstruites est fixée par la dimension d'un pixel, soit 21,8  $\mu\text{m}$ . A titre indicatif, le temps de reconstruction d'une coupe de  $1024 \times 1024$  pixels est d'environ 5 s avec une station de travail double processeur Dual Intel Xeon 2 GHz, 1.5 GB RAM, carte graphique 3DLabsWildcatVP870. Une coupe typique de l'échantillon après reconstruction et avant traitement est montrée à la Figure 3.3(b). Deux types d'artefacts sont visibles sur cette image : (i) les artefacts « d'anneau », (ii) et les artefacts « d'épandage en étoile ». Les artefacts d'anneau apparaissent comme des cercles partiels ou complets centrés sur l'axe de rotation. Ils sont attribués à une sensibilité différente du détecteur à un faisceau de dureté variable. Les artefacts d'épandage en étoile sont caractérisés par des stries émanant de l'objet dans son voisinage proche. Ils peuvent survenir si la section d'un objet fortement atténuant n'est pas circulaire, ce qui est le cas des sections de ligaments des mousses d'aluminium étudiées. Ces deux artefacts dérivent d'une origine commune, la non-monochromaticité du faisceau de rayons-X. Pour une définition et une discussion complète de ces problèmes, voir la référence (Ketcham, 2001)<sup>21</sup>. Ces complications subtiles dues à l'utilisation d'une source de laboratoire peuvent rendre les données plus problématiques pour un usage quantitatif. En particulier, ces artefacts risquent d'introduire une rugosité artificielle à la surface des objets tridimensionnels qui seront reconstruits.

### 3.2.3.3 Segmentation et reconstruction tridimensionnelle

Troisièmement, une représentation tridimensionnelle de l'échantillon examiné est obtenue par lissage et assemblage des coupes transversales reconstruites, Figure 3.3(c).

Un point clé du processus de reconstruction tridimensionnelle est la segmentation des coupes transversales. La segmentation consiste à séparer la microstructure de la mousse (phase solide) du fond (phase fluide). Dans ce but, une méthode de seuil global est généralement appliquée : les voxels ayant un niveau de gris supérieur (respectivement inférieur) à une valeur seuil donnée seront affectés à la structure



d'aluminium (respectivement au fond) avec un niveau binaire de 1 (respectivement zéro) dans l'image volumique résultante.

Dans un premier temps, le niveau de seuillage de coupes lissées est ajusté manuellement de manière à ce qu'une section superficielle de l'objet tridimensionnel reconstruit soit comparable à une micrographie de référence de l'échantillon de mousse vu de dessus, Section 3.2.3.3.1. S'assurer que l'échantillon reconstruit est visuellement représentatif de l'objet réel revient à valider la procédure d'acquisition de la microstructure tridimensionnelle d'un échantillon réel de mousse par  $\mu$ CT axiale à rayons-X, tout en déterminant le niveau de seuillage adéquat.

Dans un deuxième temps, une fois l'ensemble de la démarche d'acquisition de la microstructure validée, et le niveau de seuillage adéquat déterminé ; seules des régions d'intérêt de coupes reconstruites sont sélectionnées afin de reconstruire des cellules isolées, Section 3.2.3.3.2.

---

#### 3.2.3.3.1 Lissage des coupes et segmentation sur critères visuels

L'approche de segmentation adoptée consiste à reconstruire un échantillon en se basant sur un critère visuel à partir de micrographies.

Les coupes reconstruites sont initialement moyennées, avant segmentation et assemblage, de manière à réduire l'influence des artefacts de reconstruction. Pour ce faire, on a recours au logiciel Tconv fourni par Skyscan. L'opération réalisée consiste à remplacer une matrice initiale composée de blocs de  $4 \times 4$  pixels, par une nouvelle matrice dont chaque bloc est composé d'un seul pixel résultant de la moyenne des valeurs des pixels initiaux. Cette opération a pour effet de lisser les coupes reconstruites, et donc de réduire l'influence des artefacts sur l'état de

surface de l'échantillon reconstruit. Ce lissage s'opère néanmoins au détriment de la résolution spatiale qui passe de 21.8 à 87.2  $\mu\text{m}$  / pixel.<sup>12</sup>

Le niveau de seuillage des coupes reconstruites lissées est ensuite ajusté manuellement de manière à ce qu'une section superficielle du volume segmenté, Figure 3.4(a); soit comparable à une micrographie de la même section superficielle de l'échantillon, Figure 3.4(b). Un exemple de comparaison quantitative est fourni à la Figure 3.5. Les dimensions caractéristiques de motifs facilement identifiables sur la section superficielle de volume reconstruit et sur la micrographie de référence sont comparées avec succès.<sup>13</sup>

Une fois le niveau de seuillage ainsi déterminé, l'échantillon peut être entièrement reconstruit. La représentation tridimensionnelle résultante a été illustrée à la Figure 3.3(c). L'objet reconstruit étant visuellement représentatif de l'échantillon réel, l'ensemble de la démarche d'acquisition

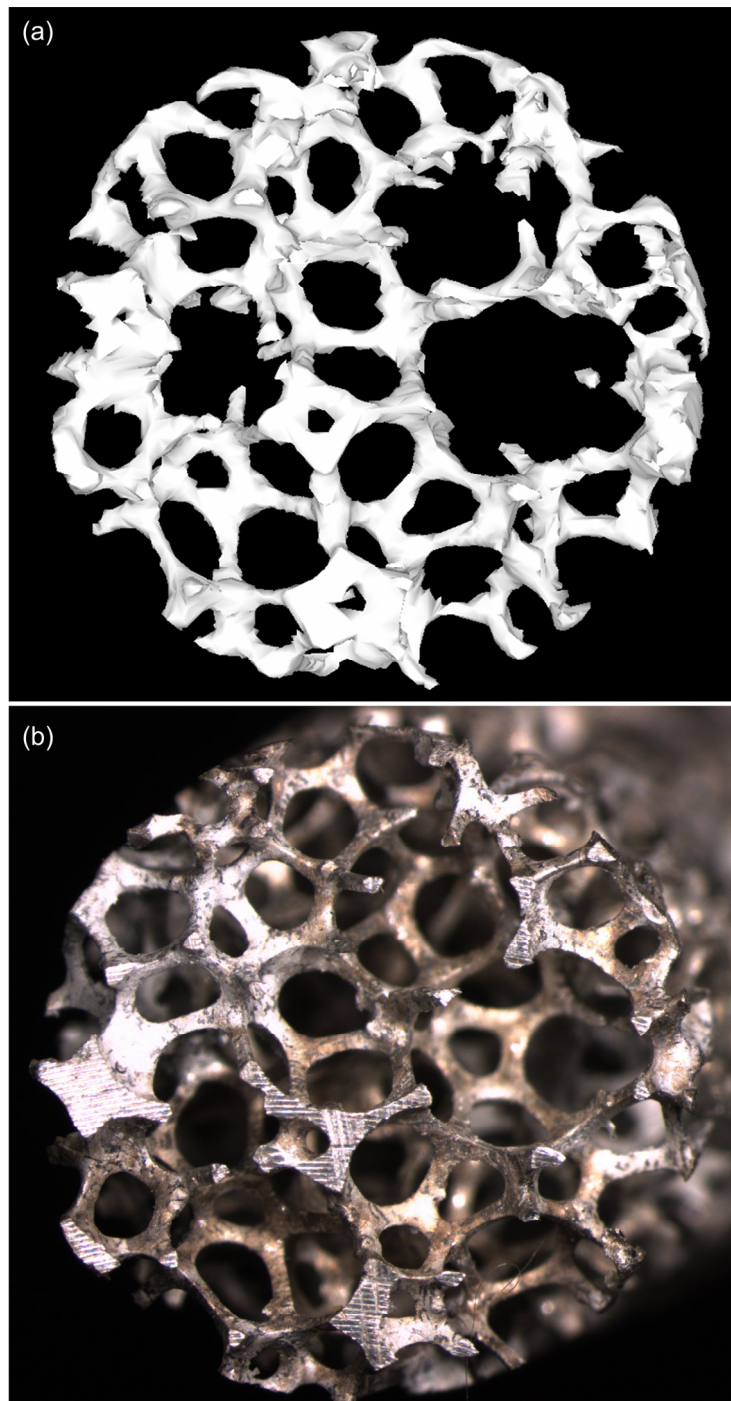
---

<sup>12</sup> Nous verrons plus loin que l'épaisseur moyenne des ligaments les plus fins est de 0.37 mm, soit 370  $\mu\text{m}$  environs. La résolution étant de 87.2  $\mu\text{m}$  / pixel, on ne compte en moyenne que 4.24 pixel sur toute la longueur de la base d'une section triangulaire de ligament. L'incertitude liée à l'acquisition étant généralement associée à la précision de l'instrument de mesure, on estime donc que la longueur moyenne de la base d'une section de ligament est de 4.24 +/- 1 pixels, ce qui porte le coefficient de variation de la mesure à une valeur non-négligeable d'environ 23% (écart-type/moyenne). En pratique, l'importance de cette incertitude nous interdit d'estimer les paramètres macroscopiques de porosité et de longueur caractéristique thermique par intégration spatiale des éléments de surface et de volume. Une règle pratique issue d'une étude de Garboczi *et al.* nous informe en effet que pour conserver l'information de surface à 1 % près, un disque doit compter un nombre supérieure ou égal à 15 pixels par diamètre (Garboczi, 1991) [E. J. Garboczi, M. F. Thorpe and M. S. DeVries, et al., "Universal conductivity curve for a plane containing random holes," *Physical Review A (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)* 43 (12), 6473-82 (1991)]. Pour contourner cette difficulté, et compte tenu de la résolution de l'appareil, on peut néanmoins associer à chaque disque pixelisé un disque continu, c'est-à-dire procéder à une sorte d'idéalisation continue du milieu discrétisé. C'est l'idée qui sera défendue tout au long de cette thèse.

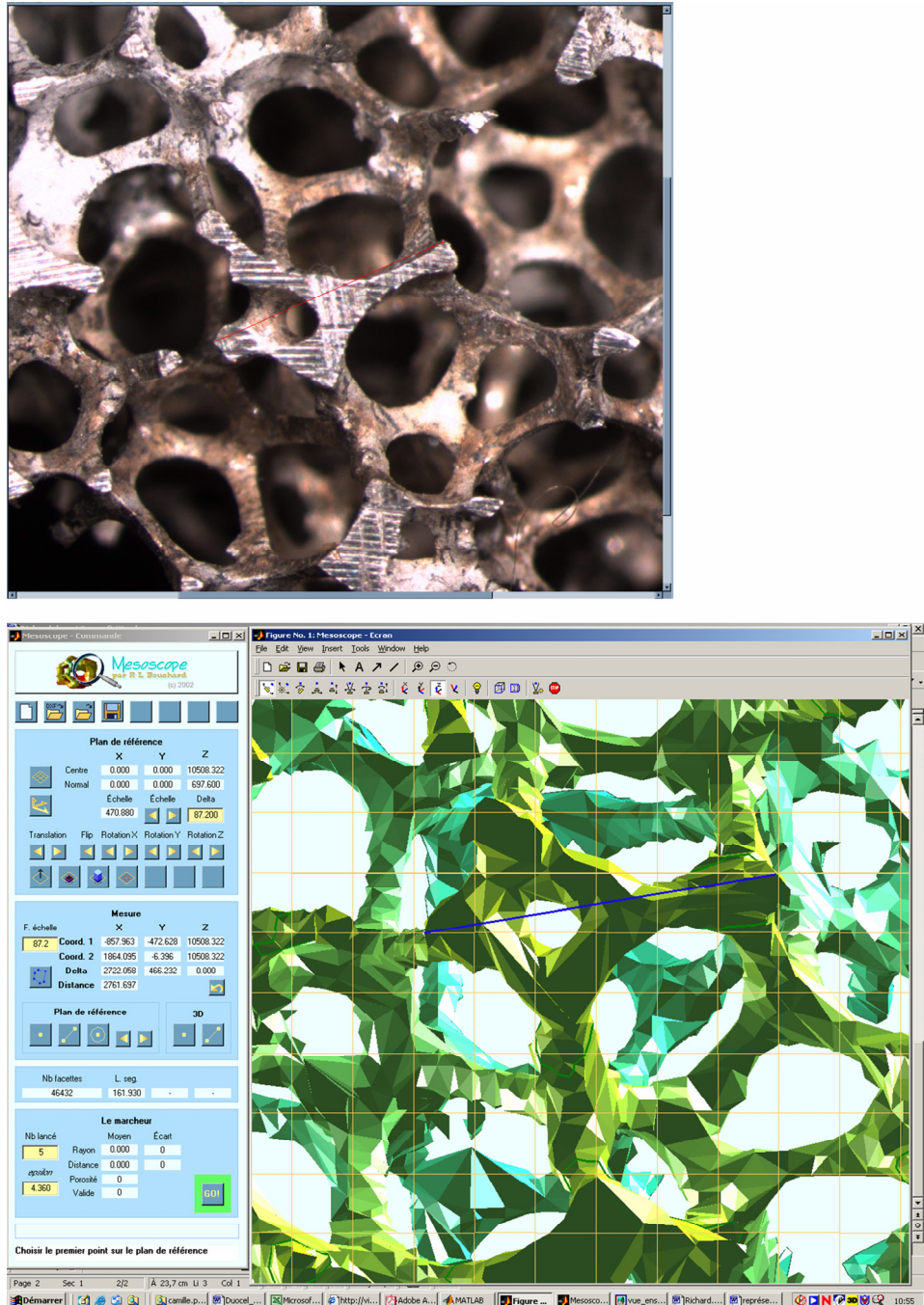
<sup>13</sup> En pratique, les distances des objets pixelisés sont effectivement conservées, ce qui nous permettra de procéder à l'idéalisation continue du milieu.

de la microstructure tridimensionnelle d'un échantillon réel de mousse par  $\mu$ CT axiale à rayons-X est validée.

Un calcul de porosité et de longueur caractéristique thermique (paramètres définis au Chapitre 1, Figure 1.4) peut ensuite être effectué par intégration des éléments de volume et surface de l'échantillon tridimensionnel reconstruit par  $\mu$ CT axiale à rayons-X. À titre indicatif, pour l'échantillon 40 ppi ainsi reconstruit, on trouve  $\Phi = 90.17 \%$ , et  $\Lambda' = 1.76 \text{ mm}$ .

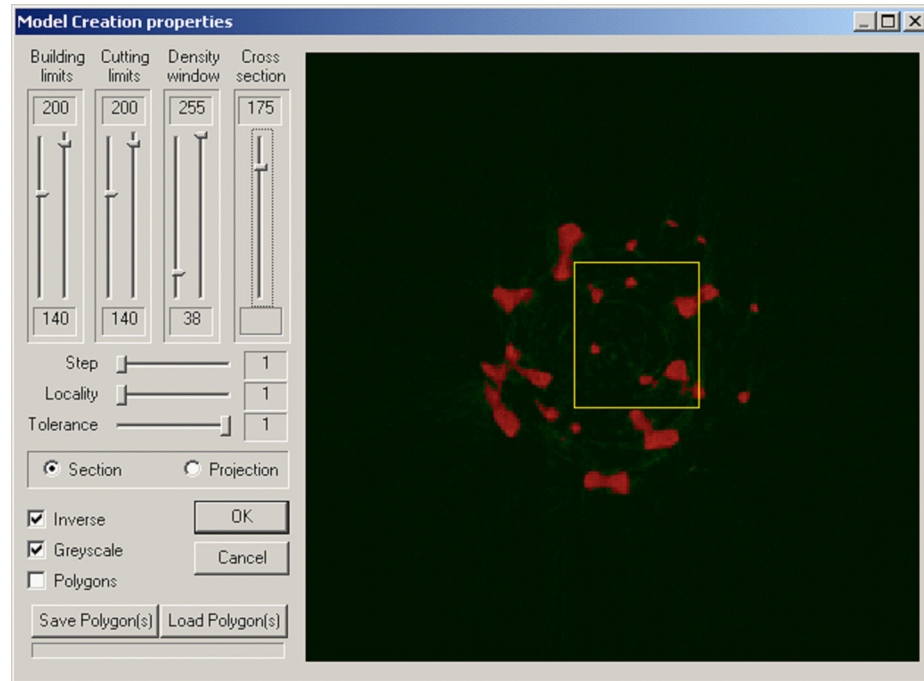


**Figure 3.4** Segmentation sur critères visuels : le niveau de seuillage est ajusté manuellement de manière à ce qu'une coupe superficielle de l'objet reconstruit (a) soit comparable à une micrographie de référence de la même section superficielle de l'échantillon (b).



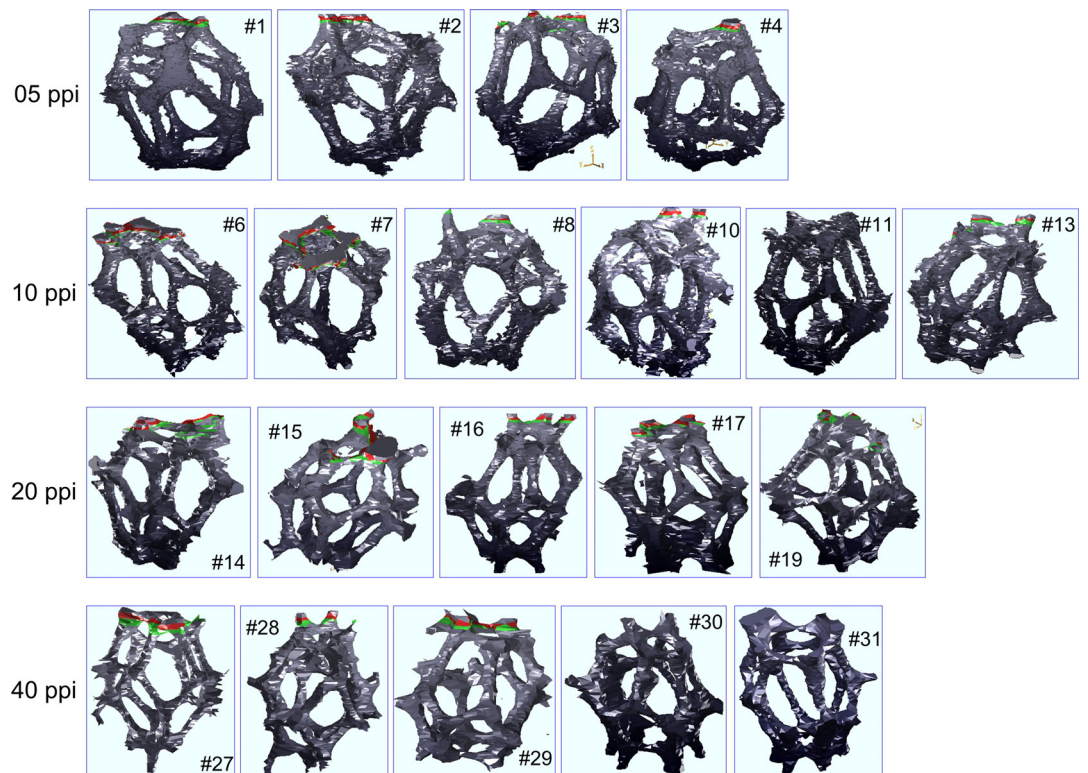
**Figure 3.5** Détails d'une comparaison quantitative de section superficielle du volume segmenté (en bas) à une micrographie de la même section superficielle de l'échantillon (en haut). La distance mesurée sur l'objet reconstruit est de 2743  $\mu\text{m}$ . La distance mesurée sur l'objet de référence est de 2780  $\mu\text{m}$ . L'erreur commise sur la distance reconstruite est ici d'environ 1.3 %.

### 3.2.3.3.2 Reconstruction de cellules isolées



**Figure 3.5** Exemple illustratif de segmentation par seuil pour l'échantillon 20 ppi de 20 mm de diamètre. La fenêtre jaune permet de sélectionner la zone à reconstruire ; il s'agit ici de la cellule # 15. Le niveau de seuil est ajusté grâce au troisième curseur en partant de la gauche, fixé à 38 sur l'illustration. Les voxels qui seront affectés à la structure d'aluminium (respectivement à l'air) apparaissent en rouge (respectivement en noir).

Une fois la démarche d'acquisition de la microstructure tridimensionnelle d'un échantillon réel de mousse par  $\mu$ CT axiale à rayons-X validée, et le niveau de seuillage adéquat déterminé, des cellules isolées sont reconstruites. En raison des artefacts de reconstruction visibles sur les coupes bidimensionnelles reconstruites, une rugosité artificielle à la surface des cellules reconstruites persiste. On considère néanmoins que cette rugosité artificielle ne devrait que peu affecter les résultats d'une morphométrie réalisée sur cellules isolées.



**Figure 3.6** Illustration des cellules tridimensionnelles isolées reconstruites pour chaque échantillon

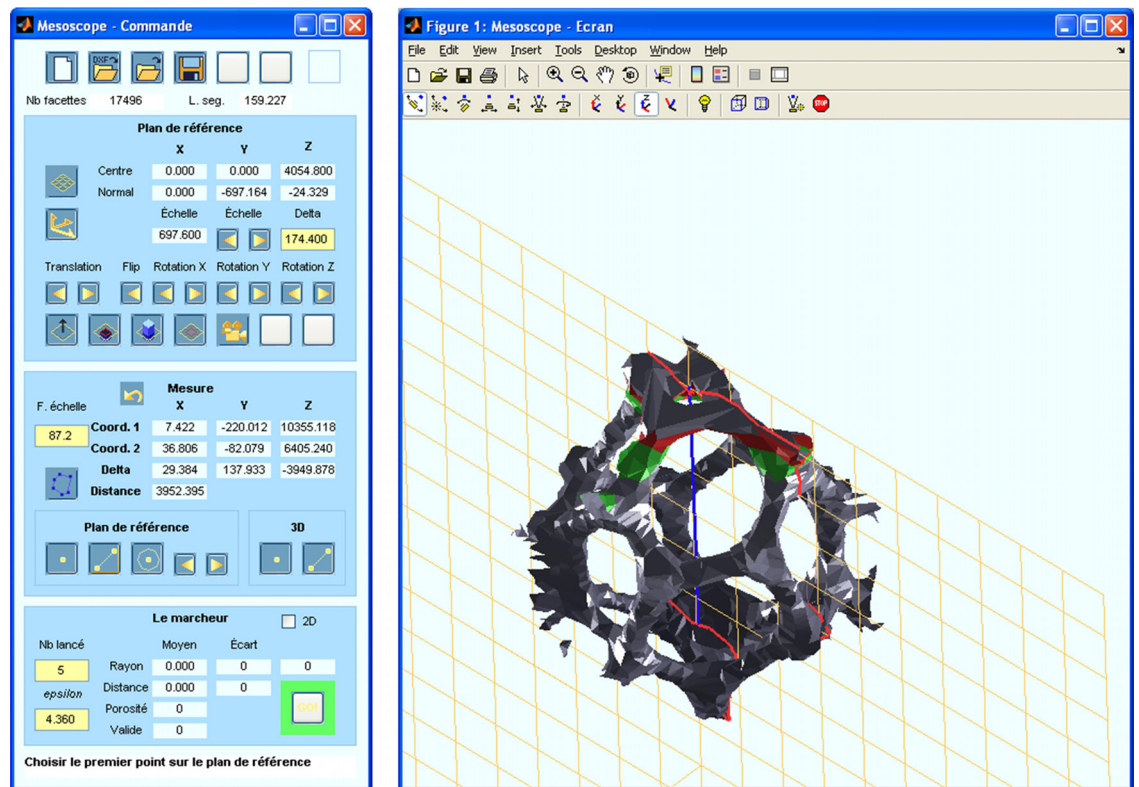
Au cours de cette seconde étape, seules des cellules tridimensionnelles isolées sont reconstruites. Le niveau de seuillage déterminé au cours de l'étape de reconstruction précédente est conservé. À partir du jeu de coupes transversales, il est possible de déterminer une région d'intérêt contenant une seule cellule, puis de fixer les bornes haute et basse de la série de coupes transversales à assembler, tel qu'une seule cellule correspondant au volume d'intérêt déterminé soit reconstruite; pour un niveau de seuillage donné. La Figure 3.5 illustre cette opération. En jaune, la région d'intérêt contient une seule cellule. Les bornes d'assemblage haute et basse sont restreintes à la taille de la cellule (cutting and building limits). Ce processus est reproduit une vingtaine de fois, pour constituer une banque de cellules à analyser, Figure 3.6.

---

### 3.2.4 Mesure des paramètres de la morphologie cellulaire

La prochaine étape est d'extraire des cellules isolées leurs paramètres morphométriques, grâce à un outil de mesure tridimensionnel programmé à cette fin sous environnement Matlab, le Mésoscop illustré par la Figure 3.7. Une mesure logicielle précise en trois dimensions est obtenue en positionnant les motifs de l'objet à mesurer dans un plan de référence. En effet, lorsqu'une région de l'espace tridimensionnel est pointée sur un écran, sa profondeur est généralement incertaine, à moins d'être contrainte par une variable supplémentaire : un plan de référence par exemple. Les caractéristiques de la morphologie cellulaire mesurées sont décrites ci-dessous. Pour caractériser la taille d'une cellule, nous avons mesuré les diamètres caractéristiques principaux  $D_1$  et  $D_2$  d'un ellipsoïde inscrit dans une cellule, respectivement le plus petit et le plus grand ; et pour chacun des ligaments d'une cellule, la longueur  $l$  sommet-à-sommet; et l'épaisseur  $t$  prise à équidistance entre le point milieu d'un ligament et ses extrémités. Le nombre de faces par cellule  $f$ , ainsi que le nombre d'arêtes par face  $\bar{n}$ , nous renseignent directement sur la forme cellulaire. De même que le degré d'anisotropie  $DA$ , qui dérive du rapport entre le plus grand et le plus petit diamètre principal d'une cellule. Le calcul des distributions, notamment de longueurs et d'épaisseurs de ligaments, est significatif de la taille comme de la forme d'une cellule.





**Figure 3.7** Illustration d'une mesure de diamètre caractéristique principal réalisée grâce à un logiciel « maison » de visualisation et de mesure en trois dimensions, le Mésoscope. À gauche, l'interface permet de positionner précisément un plan de référence dans l'espace tridimensionnel, sur lequel sera réalisée la mesure. Le contrôle visuel est assuré grâce à l'interface de droite.

### 3.3 Résultats et discussion

#### 3.3.2 Analyse quantitative tridimensionnelle de la morphologie cellulaire

La mesure tridimensionnelle des caractéristiques cellulaires d'une mousse d'aluminium synthétisée pour plusieurs densités surfaciques de pores nous permet d'identifier les paramètres de la morphologie cellulaire de mousses

à cellules ouvertes. Pour chaque échantillon de mousse, 4 à 6 cellules furent analysées en détail, soit 20 cellules au total<sup>14</sup>.

La forme cellulaire est étudiée grâce aux indicateurs présentés au Tableau 3.2. Pour les échantillons disponibles, la plupart des cellules détectées ont entre 11 et 16 côtés. La cellule moyenne détectée a 12.46 faces, avec un écart-type de 1.28 faces / cellule. De plus, les cellules isolées ont entre 4.91 et 5.33 arêtes / face. La cellule moyenne isolée a 5.14 arêtes / face, avec un écart-type de 0.12 arête / face. Le degré d'anisotropie reporté à la Table 3.2 donne une idée de l'élongation des structures observées. Le degré d'anisotropie de 20 cellules étudiées se situe entre 1.02 et 1.91 (87 % de variation). La cellule moyenne possède un degré d'anisotropie égal à 1.41, avec un écart-type de 0.18 ; ce qui en fait une structure assez allongée, plus proche de la forme d'un œuf que de celle d'une sphère. Les modèles théoriques proposés tels que le dodécaèdre rhombique ( $f = 12$  faces / cellule,  $\bar{n} = 4$  arêtes / face), le tétrakaidécaèdre ( $f$

---

<sup>14</sup> Un nombre de 4 à 6 cellules analysées ne constitue pas un nombre suffisant, mais plutôt un nombre minimum de cellules à analyser. La question de la manière de déterminer le nombre de cellules à analyser se pose alors. Pour ce faire, il s'agit typiquement d'étudier l'évolution de la variation (écart-type, ou coefficient de variation) des grandeurs étudiées (longueur des ligament, épaisseur des ligaments, principaux diamètres caractéristiques) en fonction du nombre de cellules; tout en déterminant, à priori, la précision souhaitée; voir en particulier (Forest, 2006, § 4.3) [Samuel Forest, La question du Volume Élémentaire en physique et mécanique des matériaux hétérogènes, in Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes, Edited by Presses de l'Ecole des Mines de Paris. 1ère Ed. Paris, 2006), pp. 127-133]. Ce type d'étude a été réalisé à la Figure 3.9, même si l'on n'a pas mentionné la précision souhaitée à priori. On remarquera que si l'on s'intéresse plus particulièrement à l'échantillon 40 ppi, un nombre supérieure ou égal à 5 cellules permet d'obtenir un coefficient de variation inférieure à 7 % pour l'ensemble des grandeurs étudiées; ce qui n'est pas si mal. À noter cependant que les cellules n'ont pas été choisies au hasard. Elles ont été choisies car leurs formes s'apparentaient à celle d'un tétrakaidécaèdre, et que leurs tailles semblaient représentatives de la taille moyenne des cellules observées, ce qui permet d'expliquer les faibles coefficients de variation obtenus. De plus, les cellules reconstruites tiennent compte de l'information obtenue par microscopie, information relative à la rugosité et à la forme des sections par exemple.

= 14 faces / cellule,  $\bar{n} = 5.14$  arêtes / face), et la partition de Weaire-Phelan (13.5 faces / cellule,  $\bar{n} = 5.02$  arêtes / face) suggèrent que ces formes, une fois allongées, puissent constituer une approximation raisonnable des échantillons de mousse étudiés. Mais la diversité des formes cellulaires observées au sein des échantillons montre que ces modèles sont des structures simplifiées des mousses à cellules ouvertes réelles. Les mousses à cellules ouvertes observées ayant une forme cellulaire plus diversifiée.

Échantillons	Cellules #	Nombre de faces / cellule <i>f</i>	Nombre d'arêtes / face <i>n</i>	Degré d'Anisotropie <i>DA</i>
05 ppi	1	14	5,14	1,34
	2	11	5,27	1,02
	3	11	5,09	1,45
	4	12	5,00	1,22
	Moyenne	12,00	5,13	1,26
	Écart-type CV (%)	1,41 11,79	0,11 2,22	0,18 14,64
10 ppi	6	12	5,17	1,91
	7	12	5,33	1,40
	8	11	5,09	1,53
	10	16	5,25	1,63
	11	13	5,08	1,55
	13	13	5,23	1,34
	Moyenne	12,83	5,19	1,56
	Écart-type CV (%)	1,72 13,42	0,10 1,91	0,20 12,90
20 ppi	14	12	5,00	1,46
	15	12	5,17	1,40
	16	14	5,14	1,50
	17	13	5,08	1,22
	19	11	4,91	1,53
	Moyenne	12,40	5,06	1,42
	Écart-type CV (%)	1,14 9,19	0,11 2,09	0,12 8,65
40 ppi	27	12	5,17	1,44
	28	13	5,08	1,52
	29	12	5,00	1,30
	30	12	5,33	1,37
	31	14	5,29	1,45
	Moyenne	12,60	5,17	1,42
	Écart-type CV (%)	0,89 7,10	0,14 2,69	0,08 5,92
05 - 40 ppi	Moyenne	12,46	5,14	1,41
	Écart-type	1,28	0,12	0,18
	CV (%)	10,25	2,30	12,72

**Tableau 3.1** Indicateurs statistiques de forme cellulaire : valeurs moyennes, écart-type, et coefficient de variation (CV, écart-type/moyenne) du nombre de

faces par cellule,  $f$  ; du nombre d'arêtes par face,  $n$  ; et du degré d'anisotropie,  $DA$

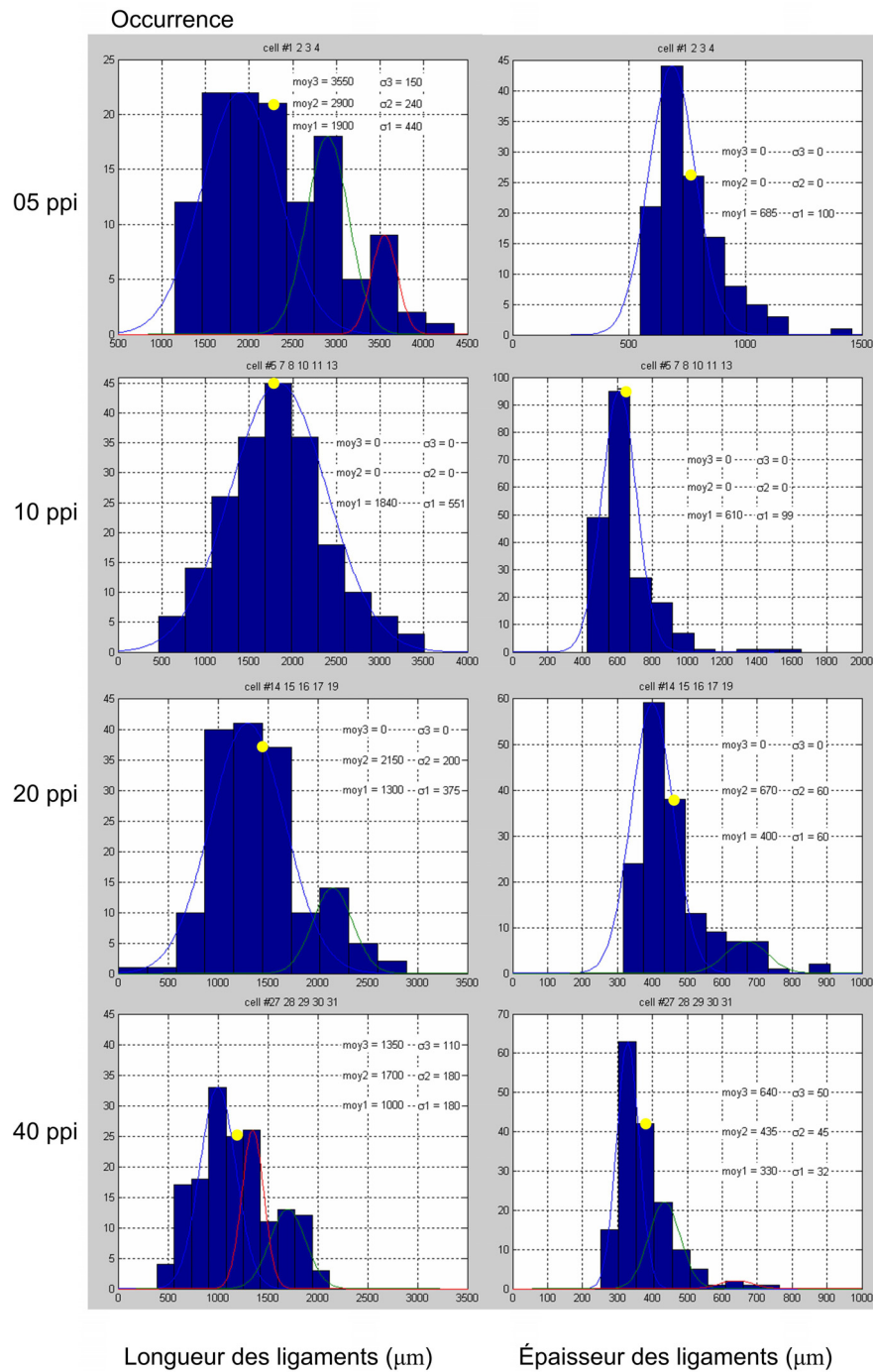
Les résultats présentés au Tableau 3.3 correspondent à une moyenne des paramètres de taille extraits pour chaque cellule, puis à une moyenne des paramètres par échantillon. Les moyennes du plus petit diamètre caractéristique principal  $D_1$ , et du plus grand diamètre caractéristique principal  $D_2$  des échantillons étudiés, s'étend respectivement de 1.4 mm à 2.6 mm (85 % de variation), et de 2 mm à 3.2 mm (60 % de variation).

La moyenne des longueurs de ligaments des échantillons étudiés varie de 1.062 et 2.396 mm (126 % de variation), tandis que la moyenne des épaisseurs de ligaments des structures observées se situe entre 0.351 et 0.768 mm (119 % de variation). Les longueurs et épaisseurs de ligaments sont les caractéristiques microstructurales présentant les variations relatives les plus importantes d'un échantillon à l'autre. Les longueurs et épaisseurs des ligaments augmentent avec celles des rayons caractéristiques, ce qui paraît contradictoire avec une logique conventionnelle dans laquelle une expansion des cellules serait liée à un étirement des ligaments accompagné d'une diminution de leurs épaisseurs. En fait, la moyenne des rapports d'élongation longueur/épaisseur est à peu près constante quelque soit l'échantillon, et se situe entre 2.85 et 3.18, avec une moyenne de 3.03 et un coefficient de variation inférieur à 1 % (CV, écart-type/moyenne); ce qui renforce l'idée d'une microstructure invariante par changement d'échelle. Pour chaque échantillon, longueurs et épaisseurs moyennes des ligaments sont reportées au Tableau 3.3. Pour chaque cellule, le coefficient de variation de l'épaisseur des ligaments et celui de la longueur des ligaments se situent respectivement autour de 20 et 30 %. Pour chaque échantillon, les distributions d'épaisseurs et de longueurs des ligaments sont étudiées sous forme d'histogrammes, et présentées à la Figure 3.8. Les points jaunes pointent les modes (valeurs dominantes). On constate que la matière d'une cellule moyenne d'échantillon n'est pas répartie de manière homogène à l'échelle des ligaments. La distribution normale de longueurs de ligaments est généralement bi-modale, ce qui a aussi été reporté dans d'autres études récentes telles que (Trater, 2005)<sup>22</sup>. Tandis que la distribution normale de l'épaisseur des ligaments est essentiellement mono-modale, mais asymétrique tirée vers la droite, une forme de distribution détectée au cours d'analyses antérieures portant sur la microstructure des mousses, voir par exemple (Elmoutaouakkil, 2003)<sup>23</sup> (Montminy, 2004)<sup>10</sup>. Ces données portent à croire qu'une cellule moyenne pourrait être convenablement

représentée en première approximation par des ligaments d'épaisseur constante. On peut en revanche distinguer au moins deux longueurs moyennes de ligaments, ce qui renforce la représentation d'une cellule moyenne anisotrope.

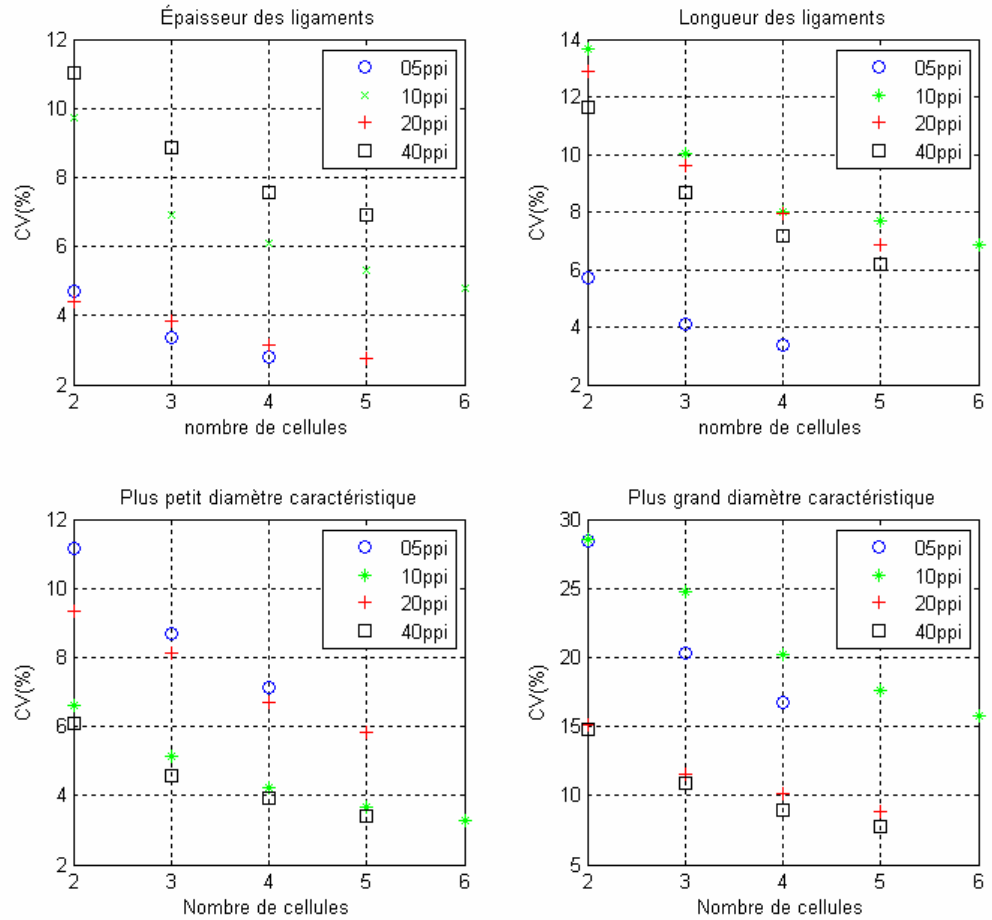
Échantillons	Cellule #	Diamètres principaux		Longueur des ligaments		Épaisseur des ligaments	
		D <sub>1</sub> (mm)	D <sub>2</sub> (mm)	Moyenne (mm)	CV (%)	Moyenne (mm)	CV (%)
05 ppi	1	2,85	3,81	2,40	31,16	0,77	21,88
	2	2,49	2,54	2,21	29,59	0,78	21,40
	3	2,43	3,52	2,28	33,20	0,73	16,74
	4	2,62	3,19	2,32	27,01	0,75	15,46
	Moyenne CV (%)	2,60 7,11	3,27 16,79	2,30 3,38	30,24	0,76 2,82	18,92
10 ppi	6	2,22	4,25	1,89	31,53	0,64	20,39
	7	2,03	2,84	1,74	32,59	0,69	30,11
	8	2,12	3,24	1,97	30,78	0,60	19,45
	10	2,05	3,34	1,63	28,08	0,66	19,39
	11	2,09	3,24	1,91	37,53	0,63	18,09
	13	2,11	2,82	1,83	27,42	0,64	37,11
Moyenne CV (%)	2,10 3,29	3,29 15,80	1,83 6,87	31,41	0,64 4,79	24,21	
20 ppi	14	1,71	2,50	1,53	29,32	0,45	19,56
	15	1,66	2,32	1,43	26,49	0,45	23,37
	16	1,47	2,20	1,28	34,59	0,46	18,04
	17	1,68	2,05	1,41	24,49	0,46	24,04
	19	1,66	2,54	1,50	41,84	0,48	29,38
Moyenne CV (%)	1,63 5,83	2,32 8,83	1,43 6,88	31,36	0,46 2,75	22,94	
40 ppi	27	1,42	2,05	1,25	30,81	0,35	24,08
	28	1,39	2,12	1,22	32,85	0,40	21,08
	29	1,32	1,72	1,21	26,44	0,34	15,92
	30	1,44	1,97	1,18	32,30	0,39	15,52
	31	1,36	1,97	1,06	36,93	0,39	26,30
Moyenne CV (%)	1,39 3,42	1,97 7,71	1,19 6,20	31,73	0,37 6,92	20,64	

**Tableau 3.2** Indicateurs de taille : valeurs moyennes et coefficients de variation (CV, écart-type/moyenne) des diamètres principaux, longueurs et épaisseurs de ligaments



**Figure 3.8** Distribution des longueurs et épaisseurs de ligaments des cellules analysées pour chacun des échantillons étudiés ; les points jaunes pointent la moyenne

3.3.3 Représentativité des résultats



**Figure 3.9** Évolution du coefficient de variation des paramètres de taille en fonction du nombre de cellules isolées,  $CV = \text{écart-type}/\text{moyenne}$ .

Dans cette section, on s'intéresse tout d'abord à la stabilité de l'analyse quantitative des paramètres de taille en fonction du nombre de cellules isolées. On remarque préalablement au Tableau 3.3 que lorsque les cellules sont prises individuellement, les coefficients de variation sur la longueur et l'épaisseur des ligaments sont importants, de l'ordre de 30 % et 20 % respectivement (en bleu ciel). En revanche, les valeurs moyennes de longueurs et d'épaisseurs de ligaments varient relativement peu d'une cellule à l'autre, en attestent les faibles coefficients de variations calculés sur les valeurs moyennes de l'ensemble des cellules analysés (en bleu foncé), inférieurs à 7 %. Pour une analyse plus fine, on peut calculer le plus

grand coefficient de variation CV, qui correspond à l'écart-type divisé par la moyenne, en fonction du nombre de cellules ; et ce pour l'ensemble des indicateurs de taille considérés. Ces résultats sont présentés à la Figure 3.9. Bien sur, le coefficient de variation diminue avec le nombre de cellules analysées. Tel que remarqué précédemment, le CV associé à quasiment tous les paramètres (longueur des ligaments, épaisseur des ligaments, plus petit rayon caractéristique) atteint une valeur inférieure à 7 % avec le nombre maximum de cellules considérées (4, 6, 5, 5 respectivement pour 05, 10, 20, et 40 ppi) ; sauf lorsque on considère le plus grand rayon caractéristique, pour lequel le CV n'atteint qu'une valeur inférieure à environ 15 %.

Dans ce cas particulier de mousses d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes, ces résultats tendent à démontrer la stabilité et la reproductibilité d'une analyse quantitative menées sur un faible nombre de cellules (de tailles moyennes) extraites d'échantillons reconstruits en s'appuyant sur des micrographies. La réduction du nombre de cellules analysées permet un gain de temps au détriment d'un biais introduit dans la représentativité des résultats. Le faible nombre de cellules analysées tient néanmoins à la lourdeur du protocole expérimental, limitant ainsi la portée des conclusions relatives à la représentativité de la cellule moyenne.

Une comparaison des données de la littérature est finalement montrée à la Figure 3.10.

Les échantillons étudiés par les différents auteurs ne sont pas nécessairement les mêmes, en attestent les différences de porosités reportées dans le premier graphique de la Figure 3.10. En outre, la porosité est généralement déterminée par méthode gravimétrique, à l'exception des mesures ENTPE réalisées selon une méthode thermodynamique (Champoux, 1991)<sup>24</sup>.

Schmierer a mesuré le diamètre hydraulique  $D_h$  des ligaments, alors que dans l'étude de Zhou et la présente, l'épaisseur mesurée est une hauteur  $h$  de triangle ( $D_h = 2h/3$ ). Les données de Schmierer ont donc été converties en les multipliant par un facteur 3/2, afin d'être comparées aux autres. Une fois cette précaution respectée, une excellente correspondance entre les épaisseurs mesurées par Schmierer et les nôtres est obtenue. De plus, les mesures d'épaisseur réalisées par Zhou, ainsi que celles de Scheffler, sont généralement contenues dans la gamme d'incertitudes.



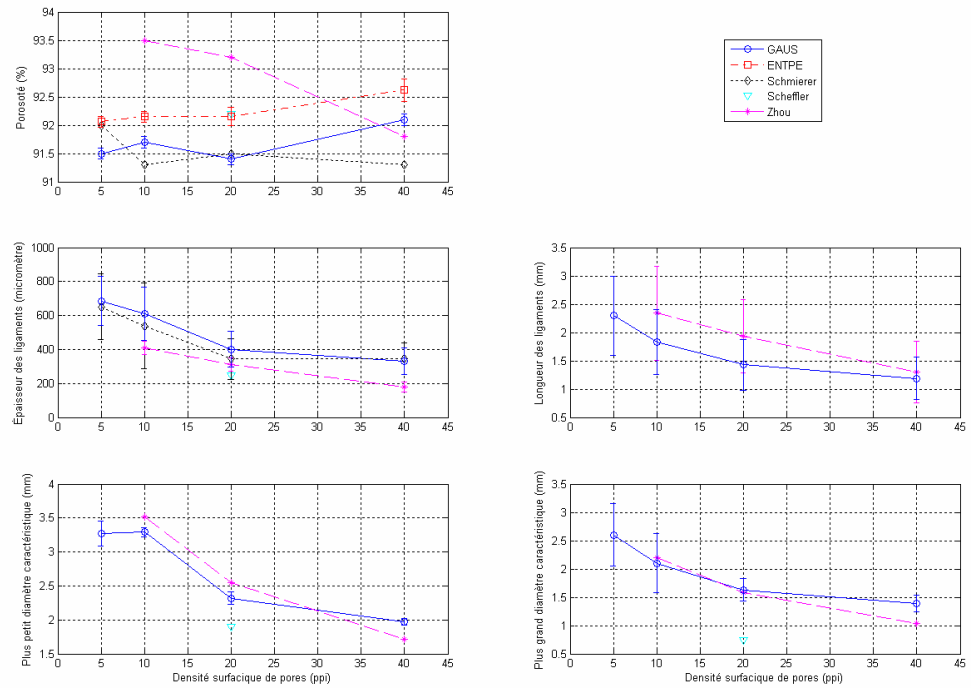


Figure 3.10 Comparaison des données de la littérature

À notre connaissance, les seules mesures de la littérature disponibles en termes de longueurs de ligaments sont celles de Scheffler. Pour de faibles densités surfaciques de pores, seules les incertitudes permettent de recouper les mesures de longueur de ligaments. Néanmoins, les mesures de ligaments effectuées par Scheffler, et celles obtenues dans cette étude, convergent avec l'augmentation de la densité surfacique de pores. Ceci s'explique par le fait que les échantillons associés aux faibles densités surfaciques de pores n'ont pas la même porosité dans les deux études. La tendance étant que plus la porosité d'un échantillon est élevée, plus minces et allongés sont ses ligaments. Les échantillons de Scheffler ayant une porosité plus élevée, ses ligaments sont plus longs, ce qui est effectivement observé et permet d'interpréter les divergences mentionnées aux faibles densités surfaciques de pores.

Finalement, les mesures de plus petit et plus grand diamètres caractéristiques cellulaires obtenues par Scheffler sont sensiblement identiques aux nôtres.

En dernière instance, cette comparaison aux données de la littérature aura permis de valider l'ensemble de la démarche d'acquisition de la morphologie cellulaire.

### 3.3.4 Limitations

Bien que la méthode présentée constitue une nouvelle manière d'identifier les paramètres de la microstructure d'une mousse, elle possède des limitations. Premièrement, la méthode est relativement longue à mettre en œuvre. Deuxièmement, la résolution des équipements actuels d'imagerie tridimensionnelle de laboratoire est limitée à une dizaine de micromètres environ, ce qui réduit leur potentiel d'utilisation pour des microstructures dont les tailles caractéristiques sont inférieures à une centaine de micromètres environ (cas de la mélamine par exemple). On discutera des limites de la procédure d'acquisition de la morphologie cellulaire développée en donnant une estimation de l'erreur commise sur  $\Phi$  et  $\Lambda'$  d'une part, en préconisant la résolution à adopter pour de futurs travaux d'acquisition d'autre part.

On peut quantifier les limites liées à l'acquisition en donnant les incertitudes sur des paramètres tels que la porosité  $\Phi$  et la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ . Pour ce faire, on détaille tout d'abord la manière d'obtenir une estimation de  $\Phi$  et  $\Lambda'$ . Ensuite, une estimation de l'incertitude sur ces paramètres peut être donnée en appliquant la même procédure avec des paramètres d'entrée entachés d'une erreur de mesure de  $0.87 \mu\text{m}$  (1 pixel). D'après le Tableau 3.2, l'épaisseur moyenne de ligaments  $t$ , et le plus petit rayon caractéristique cellulaire  $R_l$ , sont respectivement donnés par  $t \approx 0.37 \text{ mm}$ , et  $R_l \approx 1.39 \text{ mm}$ . Dans le cas général, une estimation du premier mode  $l_l$  de la distribution de longueurs des ligaments (plus petite longueur moyenne) est fournie par la relation géométrique suivante, valable pour une cellule ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre:  $R_l \approx l_l \sqrt{2}$ . En dimensionnant une cellule isotrope ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre avec des ligaments de section triangulaire de longueur  $l_l \approx 0.9829 \text{ mm}$  et de hauteur  $t \approx 0.37 \text{ mm}$ , puis en étirant la cellule d'un facteur d'anisotropie égal à 1.42, et en intégrant les éléments de volume et de surface de la cellule reconstruite on trouve  $\Phi \approx 0.9228$  (-) et  $\Lambda' \approx 1.8704 \text{ mm}$ . L'erreur de mesure ( $0.87 \mu\text{m}$ , soit 1 pixel) se répercute finalement par une erreur  $\Delta\Phi$  sur  $\Phi$  et  $\Delta\Lambda'$  sur  $\Lambda'$  de -2.2 % et -2.3 %, respectivement. Une telle précision a pu être obtenue en utilisant une procédure de reconstruction de Cellule Élémentaire Représentative (CER). Calculer directement  $\Phi$  et  $\Lambda'$  sur les cellules isolées conduit à une erreur beaucoup plus importante, en particulier en raison de la rugosité artificielle persistante.

Finalement, la résolution utilisée, supérieure à 16 pixels par élément à mesurer, semble être une bonne base à préconiser pour l'acquisition d'une microstructure par microtomographie axiale à rayons-X.

Selon cet ordre de grandeur, imager les ligaments de la mousse de mélamine, dont les épaisseurs sont de l'ordre de 6  $\mu\text{m}$ , demanderait une résolution de l'ordre de 0.4  $\mu\text{m}/\text{pixel}$ . Actuellement, une telle résolution n'est accessible qu'en utilisant une source synchrotron. Alternativement, l'utilisation d'un microscope électronique à balayage couplé à une technique d'analyse par stéréologie reste à explorer comme substitut de source synchrotron qui reste couteuse et difficile d'accès<sup>25,26,27</sup> ; au risque de passer à côté de l'information tridimensionnelle.

### 3.4 Conclusion

L'objectif général de cette thèse est la détermination du macro-comportement acoustique d'un milieu poreux à partir de sa microstructure. Au cours de ce chapitre, l'utilisation de la  $\mu\text{CT}$  axiale à rayons-X pour l'identification quantitative des caractéristiques de la morphologie cellulaire d'une mousse d'aluminium à cellules ouvertes a été proposée. Cette technique d'imagerie tridimensionnelle de laboratoire a permis d'obtenir des images de plusieurs échantillons d'une mousse d'aluminium à cellules ouvertes, avec une résolution de l'ordre d'un dixième de millimètre, et ouvre ainsi des perspectives intéressantes, notamment pour estimer la porosité et la longueur caractéristique thermique par une approche non-acoustique. De plus, cette technique, couplée à un logiciel de mesure en trois dimensions, permet une quantification des paramètres de la morphologie cellulaire, notamment par l'évaluation tridimensionnelle : du nombre  $f$  de faces par cellule, du nombre  $\bar{n}$  d'arêtes par face, et du degré d'anisotropie  $DA$ ; ainsi que des diamètres caractéristiques principaux  $D_1$  et  $D_2$ , des longueurs  $l$  et épaisseur  $t$  de ligaments, et de leurs distributions. Les paramètres de taille mesurés se comparent bien aux données de la littérature et permettent d'alimenter les modèles de microstructures idéalisées aperçus au cours du Chapitre 2, qui apparaissent comme étant une approximation raisonnable des échantillons de mousse étudiés. Le processus de validation consistant à calculer les paramètres de taille pour un faible nombre de cellules a montré une relativement bonne stabilité et reproductibilité des résultats, ce qui tend à accréditer l'idée qu'une cellule moyenne dimensionnée à partir d'un faible nombre de cellules pertinemment sélectionnées puisse être représentative des échantillons

analysés <sup>15</sup>. On note cependant que les variations les plus importantes d'une cellule à l'autre sont mesurées sur le plus grand rayon caractéristique, ce qui tendrait à promouvoir des modèles d'unités cellulaires périodiques idéalisés constitués de plusieurs tailles caractéristiques cellulaires.

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Richard Bouchard et Marc Lefebvre pour leurs précieuses contributions à cette étude; au cours de stages réalisés au GAUS. Richard Bouchard a programmé l'outil de visualisation et de mesure tridimensionnelle développé sous environnement Matlab, le Mesoscope. Et Marc Lefebvre a réalisé les mesures d'indicateurs microstructuraux. Mes remerciements vont aussi au personnel du Centre de Caractérisation des Matériaux (CCM) de l'Institut des Matériaux et des Systèmes Intelligents (IMSI) de l'Université de Sherbrooke : Sonia Blais, Stéphane Gutierrez, Carole-Anne Létourneau, et Irène Kelsey pour leur assistance sans faille au cours de cette étude.

---

## Références

1 A. C. Kak and M. Slaney, Principles of Computerized Tomographic Imaging, edited by R. F. Cotelessa, (IEEE Press, New York, 1988), pp. 329.

2 P. Grangeat, La Tomographie: Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle, edited by Lavoisier, 1ère ed. (Hermès-Sciences, Paris, 2002), pp. 287.

---

<sup>15</sup> La pertinence est ici essentiellement associée à la taille des cellules, sélectionnées par l'opérateur comme étant de tailles moyennes (voir Chapitre 2). Une sélection en aveugle d'un faible nombre de cellules n'aurait probablement pas abouti aux mêmes résultats. Une analyse statistique menée sur un grand nombre de cellules reste à faire.

3 Willi A. Kalender, Computed Tomography: Fundamentals, System Technology, Image Quality, Applications, edited by Publicis KommunikationsAgentur GmbH, GWA, 2nd ed. (Publicis Corporate Publishing, Germany, 2005), pp. 306.

4 A. Elmoutaouakkil *et al.*, "2D and 3D characterization of metal foams using X-ray tomography," *Advanced Engineering Materials* 4 (10), 803-7 (2002).

5 O. B. Olurin *et al.*, "The investigation of morphometric parameters of aluminium foams using micro-computed tomography," *Materials Science and Engineering A* 328 (1), 334-343 (2002).

6 A. Elmoutaouakkil *et al.*, "Three-dimensional quantitative analysis of polymer foams from synchrotron radiation x-ray microtomography," *J.Phys.D* 36 (10 A), 37-43 (2003).

7 A. M. Trater, S. Alavi and S. S. H. Rizvi, "Use of non-invasive X-ray microtomography for characterizing microstructure of extruded biopolymer foams," *Food Res.Int.* 38 (6), 709-719 (2005).

8 M. D. Montminy, A. R. Tannenbaum and C. W. Macosko, "New algorithms for 3-D imaging and analysis of open-celled foams," *Journal of Cellular Plastics* 37 (6), 501-515 (2001).

9 Matthew Dennis Montminy, "Complete structural characterization of foams using three-dimensional images," *UMI Dissertation Services* , 1-241 (2001).

10 Matthew D. Montminy, Allen R. Tannenbaum and Christopher W. MacOsko, "The 3D structure of real polymer foams," *J.Colloid Interface Sci.* 280 (1), 202-211 (2004).

11 T. G. Nieh *et al.*, "Morphology and elastic properties of aluminum foams produced by a casting technique," *Scr.Mater.* 38 (10), 1487-94 (1998).

12 A. Bhattacharya, V. V. Calmidi and R. L. Mahajan, "Thermophysical properties of high porosity metal foams," *Int.J.Heat Mass Transfer* 45 (5), 1017-1031 (2002).

13 Varaprasad Venkata Calmidi, "PhD thesis: Transport phenomena in high porosity fibrous metal foams," , (1998).

14 J. Zhou, C. Mercer and W. O. Soboyejo, "An investigation of the microstructure and strength of open-cell 6101 aluminum foams," *Metall Mat Trans A Phys Metall Mat Sci* 33 (5), 1413-1427 (2002).

15 Franziska Scheffler *et al.*, "Preparation and properties of an electrically heatable aluminium foam/zeolite composite," *Microporous and Mesoporous Materials* 67 (1), 53-59 (2004).

16 Eric N. Schmierer *et al.*, in 2004 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE, Nov 13-19 2004, Anonymous (American Society of Mechanical Engineers, New York, NY 10016-5990, United States, Anaheim, CA, United States, 2004) pp. 415-424.

17 R. Panneton and E. Gros, "A missing mass method to measure the open porosity of porous solids," *Acta Acustica United With Acustica* 91 (2), 342-8 (2005).

18 Anonymous "Standard guide for computed tomography (CT) imaging," *ASTM Designation E1441-00* , (2000).

- 19 Anonymous "Standard practice for computed tomographic (CT) examination," ASTM Designation E1570-00 , (2000).
- 20 I. A. Feldkamp, L. C. Davis and J. W. Kress, "Practical cone-beam algorithm," Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science 1 (6), 612-619 (1984).
- 21 R. A. Ketcham and W. D. Carlson, "Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences," Comput.Geosci. 27 (4), 381-400 (2001).
- 22 A. M. Trater, S. Alavi and S. S. H. Rizvi, "Use of non-invasive X-ray microtomography for characterizing microstructure of extruded biopolymer foams," Food Res.Int. 38 (6), 709-719 (2005).
- 23 A. Elmoutaouakkil *et al.*, "Three-dimensional quantitative analysis of polymer foams from synchrotron radiation x-ray microtomography," Journal of Physics D (Applied Physics) 36 (10A), 37-43 (2003).
- 24 Yvan Champoux, Michael R. Stinson and Gilles A. Daigle, "Air-based system for the measurement of porosity," J. Acoust. Soc. Am. 89 (2), 910-916 (1991).
- 25 M. B. Rhodes and B. Khaykin, "Stereology. A technique for the quantitative characterization of foam structure," Journal of Thermal Insulation 14, 175-183 (1991).
- 26 M. B. Rhodes, "Quantitative characterization of the cellular structure in polymeric foams," Journal of Thermal Insulation 15, 101-109 (1991).

27 M. O. W. Richardson and D. S. Nandra, "CELL SIZE DETERMINATION OF POLYMERIC FOAMS," Cell.Polym. 5 (6), 423-431 (1986).



# Partie 3

## Propriétés acoustiques

# 4 Physique locale et macro-comportement acoustique

- 4.1 Introduction**
- 4.2 Formulation initiale du problème de propagation des ondes acoustiques en milieu poreux**
- 4.3 Hypothèses de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques (HSP)**
- 4.4 Principes de la méthode HSP**
- 4.5 Obtention du comportement acoustique macroscopique**
  - 4.5.1 Effets de dissipation visqueux
    - 4.5.1.1 *Reformulation du problème local d'écoulement oscillant*
    - 4.5.1.2 *Résultats remarquables et loi de Darcy généralisée*
  - 4.5.2 Effets de dissipation thermiques
    - 4.5.2.1 *Reformulation du problème local de conduction de la chaleur*
    - 4.5.2.2 *Loi formellement identique à une loi de Darcy généralisée*
  - 4.5.3 Équation de propagation du milieu homogène équivalent
- 4.6 Conclusion**

---

## 4.1 Introduction

La géométrie locale de mousses a été décrite au cours de la première partie de ce document. La description des phénomènes de dissipation d'énergie au passage d'une onde dans le matériau poreux gouverne l'organisation du reste du document. L'idée développée au cours de la première partie consiste tout d'abord à modéliser une cellule idéalisée basée sur une unité périodique fondamentale en définissant un volume élémentaire représentatif capturant la complexité des détails de la structure d'une mousse, Chapitre 2; puis à utiliser la microtomographie à rayons-X pour identifier les paramètres de la morphologie cellulaire, Chapitre 3. L'objectif du Chapitre 4 est d'introduire les bases théoriques permettant de décrire formellement les phénomènes de dissipation d'énergie acoustique, d'une plus petite à une plus grande échelle, dans le cadre de la méthode d'homogénéisation. Le chapitre présente la description classique des mécanismes de dissipation d'énergie acoustique à l'échelle locale. Les hypothèses qui permettent d'assurer le passage d'une description locale à une description macroscopiques des phénomènes sont alors énoncées. Les principes de la méthode d'homogénéisation, permettant de progresser d'une plus petite à

une plus grande échelle sont alors résumés. Ils permettent notamment de prédire la forme des lois de comportement à l'échelle macroscopique, ainsi que la manière de calculer les fonctions de dissipation associées. Un bilan pratique dégage finalement les conséquences principales de ce cheminement en termes de méthode pour notre démarche de reconstruction.

## 4.2 Formulation initiale du problème de propagation des ondes acoustiques en milieu poreux

Le problème de la propagation et de l'absorption des ondes acoustiques dans un matériau poreux fût initialement formulé par Kirchhoff en 1868 (Kirchhoff, 1868)<sup>1,2</sup>. Le fluide, de l'air saturant le milieu poreux, est défini comme étant visqueux et Newtonien, thermiquement conducteur, ses propriétés thermodynamiques étant celles d'un gaz parfait. Le squelette est considéré comme étant immobile, sa température étant uniforme et constante. Cette hypothèse est généralement valide pour la plupart des matériaux poreux peu dilués, pour lesquels l'inégalité  $\Xi = \Phi(\rho_0 C_p)_{\text{fluide}} / (1-\Phi)(\rho_{\text{mat}} C_{ps})_{\text{solide}} \ll 1$  est respectée; où  $\rho_0$  ( $\approx 1.23 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et  $C_p$  ( $\approx 1000 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ) sont respectivement la masse volumique et la capacité calorifique du fluide à pression constante, et  $\rho_{\text{mat}}$  ( $\approx 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et  $C_{ps}$  ( $\approx 895 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ) la masse volumique et la capacité calorifique de la partie solide (alliage d'aluminium 6101-T6) à pression constante.

On s'intéresse à la description des phénomènes de propagation et d'absorption d'une onde acoustique dans la phase fluide à l'équilibre, c'est-à-dire à température ambiante et sans courant d'air excessif. De plus, les ondes acoustiques incidentes sont de faible amplitude, de sorte que l'on se situe dans le domaine de l'acoustique linéaire. Tout signal acoustique incident est décomposable en une somme de sinusoïdes pures par une décomposition en séries de Fourier, de telle sorte que l'on travaille en régime harmonique ( $e^{j\omega t}$ ).

Dans ces conditions, le problème mathématique général à résoudre est décrit par un jeu de cinq équations. La dynamique du fluide est régie par l'équation de Navier-Stokes (Landau et Lifshitz, 1987)<sup>3</sup> linéarisée en régime harmonique

$$\rho_0 j \omega \vec{v} = -\nabla p + (\zeta + \eta) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (4.1)$$

où  $\eta$  et  $\zeta$  sont les coefficients de viscosité dynamique et de volume du fluide; et  $\nabla$  est l'opérateur nabla égal à  $\vec{x}\partial/\partial x + \vec{y}\partial/\partial y + \vec{z}\partial/\partial z$  en

coordonnées cartésiennes. L'équation de la dynamique du fluide doit être complétée par les conditions aux limites appropriées. Le squelette étant immobile, son mouvement est nul, et la condition d'adhérence à l'interface  $\Gamma$  s'écrit (voir Figure 4.2),

$$\vec{v}|_{\Gamma} = 0, \quad (4.2)$$

où  $\vec{v}$  désigne le champ de vitesses. Pour être complète, la description du mouvement du fluide doit inclure l'équation de conservation de la masse, ou équation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{v} + j\omega \left( \frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) = 0. \quad (4.3)$$

L'équation de continuité inclut la température fluctuante  $\tau$ , faisant apparaître un couplage entre le mouvement local du fluide et son comportement thermique. Il est par conséquent nécessaire d'inclure l'équation de la chaleur au problème. L'équation de la chaleur linéarisée en régime harmonique s'écrit

$$\rho_0 j\omega C_p \tau = j\omega p + \kappa \nabla^2 \tau. \quad (4.4)$$

Elle doit être complétée par la définition de conditions aux limites. L'hypothèse de squelette isotherme conduit à la condition aux limites

$$\tau|_{\Gamma} = 0, \quad (4.5)$$

en considérant la continuité des températures à l'interface.

En principe, tout problème d'acoustique linéaire impliquant un matériau poreux pourrait être traité à partir de ce formalisme : un jeu de cinq équations couplées à résoudre, pour la géométrie de l'espace poreux. En pratique, la résolution d'équations aux dérivées partielles couplées pour une géométrie quelconque est un problème difficile. Et la majorité de la littérature acoustique porte sur des formulations simplifiées de ce problème. Les simplifications peuvent provenir de la géométrie et/ou de la physique, par l'introduction d'hypothèses additionnelles.

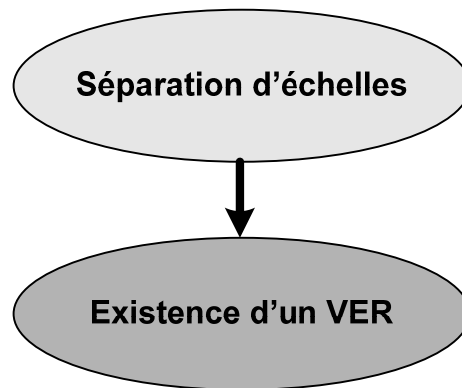
### 4.3 Hypothèses de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques (HSP)

Une approche dans laquelle le comportement macroscopique, ou effectif, dérive d'une description microscopique est privilégiée. L'idée est de définir un milieu continu macroscopiquement équivalent au milieu hétérogène. La description macroscopique devant être intrinsèque au matériau et à l'excitation, c'est-à-dire indépendante des conditions aux limites macroscopiques. La question se pose alors de savoir s'il est toujours possible de dériver une description effective. En effet, les techniques d'homogénéisation ne peuvent pas être appliquées dans tous les cas, mais seulement si la condition fondamentale de séparation d'échelles est respectée<sup>4</sup>, à savoir :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1 \quad (4.6)$$

où  $l$  est la dimension caractéristique des hétérogénéités,  $L$  est la dimension caractéristique macroscopique, et  $\varepsilon$  est une mesure de la séparation d'échelles. Cette condition fondamentale, même si elle n'est pas toujours explicite, est commune à toutes les méthodes d'homogénéisation. Et il n'existe pas de description effective si elle n'est pas respectée.

Cela veut dire que la longueur caractéristique microscopique  $l$  doit être petite comparée à la taille macroscopique de l'échantillon considéré, et à la taille caractéristique du phénomène. La longueur caractéristique macroscopique  $L$  est donc la plus petite longueur parmi la taille macroscopique de l'échantillon, et la taille caractéristique du phénomène. En acoustique, la taille caractéristique du phénomène est de l'ordre de grandeur de  $\lambda/2\pi$  (Boutin *et al.*, 1998)<sup>5</sup> (Olny et Boutin, 2003)<sup>6</sup>, voir Section 4.5.4 pour plus de détails. La description macroscopique sera d'autant plus exacte que la séparation d'échelle l'est.



**Figure 4.1** La condition de séparation d'échelles assure l'existence d'un VER

Si la structure du milieu est périodique, la méthode d'homogénéisation pour structures périodiques peut être appliquée (HSP), aussi appelée méthode d'expansions asymptotiques. Celle-ci fut introduite par Keller (1980)<sup>7</sup>, Bensoussan, Lions, Papanicolaou (1978)<sup>8</sup>, Sanchez-Palencia (1974<sup>9</sup>, 1980<sup>10</sup>), et J.-L. Auriault (1985<sup>11</sup>, 1992<sup>12</sup>, 1993<sup>13</sup>, 1994<sup>14</sup>). Le milieu est considéré comme étant périodique, de période  $l$ . De plus, la condition fondamentale de séparation d'échelles (équation 4.1) implique qu'il existe un volume élémentaire représentatif (VER), qui soit par définition le plus petit volume dont les propriétés moyennes ne varient pas spatialement, Figure 4.1.

En résumé, on considère un milieu poreux périodique de période  $l$  pour lequel, si la condition fondamentale de séparation d'échelle (4.1) est respectée, alors il existe un volume élémentaire représentatif, dont la période  $l$  est caractéristique des hétérogénéités du milieu poreux. Dans notre cas, ce volume élémentaire représentatif sera une cellule idéalisée illustrée à la Figure 4.2 (Chapitre 2) dont les paramètres caractéristiques de la morphologie cellulaire ont été identifiés expérimentalement (Chapitre 3).

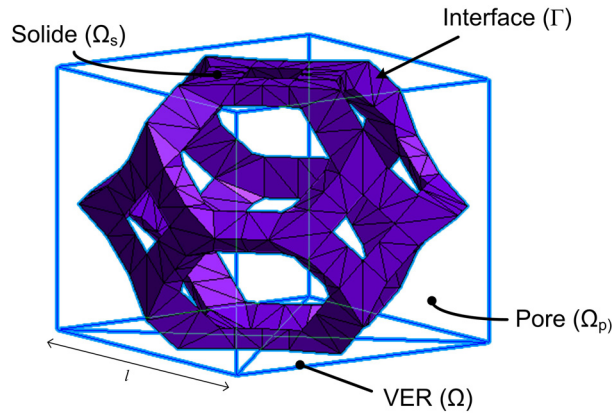


Figure 4.2 Description d'une cellule périodique à l'échelle microscopique

#### 4.4 Principes de la méthode HSP

Soit une variable d'espace  $\vec{X}$ . À partir des deux longueurs caractéristiques  $l$  et  $L$ , on peut définir deux variables d'espace adimensionnelles :  $\vec{y} = \vec{X}/l$ , la variable d'espace microscopique adimensionnelle; et  $\vec{x} = \vec{X}/L$ , la variable d'espace macroscopique adimensionnelle. La condition fondamentale de séparation d'échelle (équation 4.1), soit  $\varepsilon$  petit, implique alors que toute quantité  $\varphi$  (vitesse, pression, et densité acoustiques) puisse s'exprimer comme une fonction de ces deux variables séparées :  $\varphi = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ . La règle de différentiation de la quantité  $\varphi$  par rapport à la variable physique  $\vec{X}$  s'écrit donc:

$$\frac{\partial \varphi(y, x)}{\partial X_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial X_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \frac{1}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{1}{L} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (4.7)$$

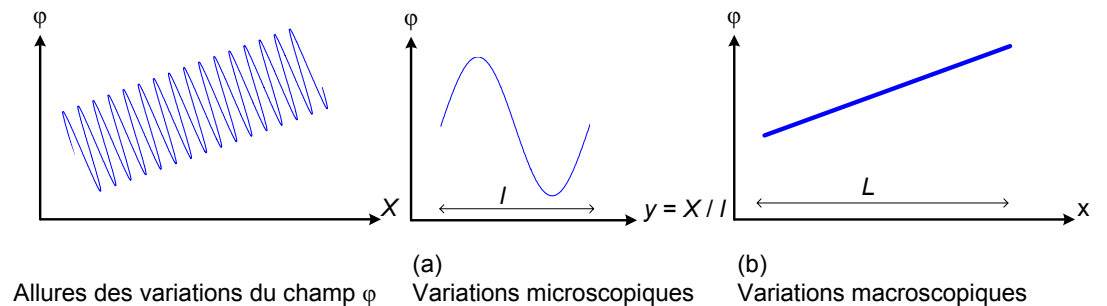


Figure 4.3 Signification d'une séparation d'échelles

La Figure 4.3 illustre la signification de cette séparation d'échelles. La variation de la quantité  $\varphi$  en fonction de la variable physique  $\vec{X}$ , moyennant une séparation d'échelles, peut être examinée selon deux variables d'espace distinctes, l'une rapide  $\vec{y}$ , l'autre lente  $\vec{x}$ , associées à des variations respectivement microscopiques (a) et macroscopiques (b).

Conséquence de la séparation d'échelles, les quantités inconnues peuvent être cherchées sous la forme d'une expansion asymptotique en puissances de  $\varepsilon$  :

$$\varphi(\vec{y}, \vec{x}) = \varphi^{(0)}(\vec{y}, \vec{x}) + \varepsilon \varphi^{(1)}(\vec{y}, \vec{x}) + \varepsilon^2 \varphi^{(2)}(\vec{y}, \vec{x}) + \dots, \quad (4.8)$$

la quantité  $\varphi^{(i)}$  étant  $\vec{y}$ -périodique. La procédure peut ensuite être séparée en deux étapes. La première étape consiste à adimensionnaliser les équations gouvernant la physique locale. Tandis que la seconde consiste à introduire les développements asymptotiques dans les équations adimensionnalisées. Les expansions sont introduites dans le jeu d'équations adimensionnalisées. Les problèmes aux limites aux ordres successifs d' $\varepsilon$ , définis sur une cellule périodique, doivent alors être résolus de manière à en déduire la description macroscopique.

Les avantages de la méthode sont les suivants :

- Évite un pré-requis sur la forme des équations à l'échelle macroscopique.
- Permet une modélisation des milieux à échelles multiples, voir par exemple (Olny et Boutin, 2003)<sup>6</sup>.
- Donne les domaines de validité des modèles macroscopiques.
- Mène à un problème local bien posé grâce à la condition additionnelle de périodicité.

## 4.5 Obtention du comportement acoustique macroscopique

L'application de la méthode HSP au problème de la propagation des ondes acoustiques à travers un milieu poreux conduit à considérer les effets de dissipation visqueux (Section 4.5.1) et thermiques (Section 4.5.2) par la reformulation des problèmes aux limites d'écoulement local (4.5.1.1) et de



conduction thermique (4.5.2.1) sous une forme symétrique découplée (4.5.3) dont dérive le macro-comportement acoustique décrit par l'équation de propagation de l'onde de compression à travers le milieu homogène équivalent (4.5.4).

#### 4.5.1 Effets de dissipation visqueux

Cette section traite des effets de dissipation visqueux, envisagés du point de vue local (Section 4.5.1.1) et macroscopique (Section 4.5.1.2).

##### 4.5.1.1 Reformulation du problème local d'écoulement oscillant

Le problème aux limites de l'écoulement local d'un fluide newtonien incompressible, en régime harmonique, et à faible nombre de Reynolds, est décrit par le jeu complet d'équations suivantes ; respectivement l'équation de Navier-Stokes linéarisée en régime harmonique, la condition locale d'incompressibilité, la condition aux limites d'adhérence, et la condition de périodicité :

$$\frac{j\omega}{\nu} \vec{v}^{(0)} - \nabla_y^2 \vec{v}^{(0)} + \frac{1}{\eta} \nabla_y p^{(0)} = 0, \quad (4.9)$$

$$\nabla_y \cdot \vec{v}^{(0)} = 0, \quad (4.10)$$

$$\vec{v}^{(0)} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.11)$$

$$\vec{v}^{(0)} \text{ et } p^{(0)} \text{ } \Omega\text{-périodiques ;} \quad (4.12)$$

où  $\nu = \eta / \rho_0$  est la viscosité cinématique. Le terme central des membres de droite de l'équation (4.1) n'est pas reporté dans l'équation (4.9) en raison de la condition d'incompressibilité (4.10) qui sera justifiée ci-dessous à partir des résultats d'homogénéisation.

Le problème local d'écoulement est désormais bien posé grâce à la condition de périodicité (4.12): les conditions aux limites du problème sont maintenant précisément définies sur l'ensemble du domaine fluide.

#### 4.5.1.2 Résultats remarquables et loi de Darcy généralisée

La description des dissipations acoustiques visqueuses du macro-comportement acoustique est obtenue en appliquant la méthode d'homogénéisation des structures périodiques (Section 4.4) à partir d'une description locale de l'écoulement oscillant d'un fluide visqueux (Section 4.5.1.1). On remarque que le problème visqueux, ainsi formulé, est découplé du problème thermique à l'ordre 0  $(^{(0)})$ . Nous allons voir que la déconnexion de ces problèmes est justifiée à posteriori par les résultats obtenus grâce à la méthode d'homogénéisation.

Ce problème spécifique fût résolu par (Levy, 1979)<sup>15</sup> et (Auriault, 1980)<sup>16</sup>. Le raisonnement est aussi notamment disponible chez (Auriault, 1985)<sup>11</sup> (Boutin, 1998)<sup>5</sup> (Olny, 1999)<sup>17</sup> (Olny et Boutin, 2002)<sup>6</sup>, il ne sera par conséquent pas reproduit ici. On s'intéressera en revanche aux principaux résultats,

$$\nabla_y p^{(0)} = 0 \Rightarrow p^{(0)} = p^{(0)}(\vec{x}), \quad (4.13)$$

$$\nabla_y \cdot \vec{v}^{(0)} = 0, \quad (4.14)$$

$$\langle \vec{v}^{(0)} \rangle_{\Omega} = -\frac{\tilde{k}(\omega)}{\eta} \nabla_x p^{(0)}; \quad (4.15)$$

ainsi qu'à leurs significations physiques.

- L'équation (4.13) indique que le gradient des pressions microscopiques s'annule à l'ordre 0. La pression est donc considérée homogène selon un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Par exemple, si l'excitation a lieu selon l'axe des  $\vec{x}$ , alors on peut écrire  $p^{(0)} = p^{(0)}(\vec{x})$ . La pression  $p$  est donc une constante à l'échelle du pore, c'est donc un paramètre macroscopique.
- L'équation (4.14) signifie que la divergence des vitesses microscopiques s'annule à l'ordre 0, c'est-à-dire en première approximation. On rappelle que cette approximation est d'autant mieux vérifiée que la séparation d'échelle l'est, c'est-à-dire pour  $\varepsilon$  petit.

Les résultats associés aux équations (4.13) et (4.14) sont particulièrement intéressants dans la mesure où ils permettent de justifier rigoureusement, à

posteriori, les hypothèses locales d'incompressibilité du fluide, et de pression homogène à l'échelle du pore, ayant permis de découpler les problèmes fluide et thermique. Ces hypothèses peuvent donc être considérées comme dérivant directement de l'hypothèse de séparation d'échelles ; en l'occurrence d'une condition de grande longueur d'onde devant la taille des pores.

- Dans l'équation (4.15), le comportement macroscopique au premier ordre est régi par une loi de Darcy généralisée; où  $\langle \cdot \rangle_\Omega$  désigne une moyenne spatiale sur le volume  $\Omega$ . L'existence et l'unicité de  $\bar{\mathbf{v}}^{(0)}$  est assurée (Lax-Milgram),  $\bar{\mathbf{v}}^{(0)}$  dépend linéairement de  $\nabla_x p^{(0)}$ . Le gradient de pression et la moyenne des vitesses de l'écoulement sont linéairement reliés par un tenseur de perméabilité complexe ; qui se réduit au scalaire complexe  $\tilde{k}(\omega)$  dans le cas isotrope.

A titre complémentaire, la masse volumique dynamique  $\tilde{\rho}(\omega)$ , plus couramment rencontrée en acoustique, est liée à la perméabilité dynamique visqueuse  $\tilde{k}(\omega)$  par la relation

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{\eta}{j\omega\tilde{k}(\omega)} = \rho_0 \frac{\delta_v(\omega)^2}{j\tilde{k}(\omega)}, \quad (4.16)$$

avec

$$\delta_v(\omega) = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}, \quad (4.17)$$

l'épaisseur de couche limite visqueuse.

---

## 4.5.2 Effets de dissipation thermiques

Cette section traite des effets de dissipation thermiques par conduction de la chaleur, envisagés du point de vue local (Section 4.5.2.1) et macroscopique (Section 4.5.2.2).

### 4.5.2.1 Reformulation du problème de conduction de la chaleur

Le problème aux limites de la conduction de la chaleur dans un fluide conducteur, en régime harmonique, est décrit à l'ordre 0  $(^{(0)})$  par le jeu

complet d'équations suivantes ; respectivement l'équation de la chaleur linéarisée en régime harmonique (4.18), la condition aux limites de température acoustique nulle (4.19), et la condition de périodicité (4.20).

$$-\frac{j\omega}{\nu'} \tau^{(0)} + \nabla^2 \tau^{(0)} + \frac{j\omega}{\kappa} p^{(0)} = 0, \quad (4.18)$$

$$\tau^{(0)} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.19)$$

$$\tau^{(0)} \text{ et } p^{(0)} \text{ } \Omega\text{-périodiques,} \quad (4.20)$$

où  $\nu' = \kappa / \rho_0 C_p$  est la diffusivité thermique du fluide,  $\kappa$  ( $\approx 0.026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) sa conductivité thermique, et  $C_p$  ( $\approx 1000 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ) sa capacité calorifique à pression constante. En effet, lorsque la capacité calorifique et la conductivité thermique du squelette sont très grandes devant celles de l'air, ce qui est généralement le cas pour les milieux poreux usuels, le squelette peut être considéré en première approximation comme un thermostat, et la température acoustique  $\tau$  à la surface de contact peut être égalée à zéro. Ces équations constituent la contrepartie scalaire des équations linéarisées associées aux effets d'écoulement local. L'opérateur nabla s'applique ici aux variables rapides puisque on considère la formulation du problème local,

Dans le cas où la quantité de solide est très faible (laines de verre de très grande porosité tel que  $\Phi > 0.99$  par exemple), la capacité calorifique du fluide n'est plus négligeable devant celle du solide, et la condition aux limites de température acoustique de l'air nulle à la surface du solide est reconsidérée, voir en particulier les développements de (Lemarinier, 1997)<sup>18</sup>. Les effets macroscopiques de la modification de cette condition aux limites sont indiqués à la Section 4.5.2.2.

Le problème local de conduction est désormais lui aussi bien posé à l'ordre 0 en raison de la condition de périodicité (4.20) : les conditions aux limites du problème sont précisément définies sur l'ensemble du domaine fluide.

#### 4.5.2.2 Loi formellement identique à une loi de Darcy généralisée

À nouveau, la description des dissipations acoustiques thermiques du macro-comportement acoustique est obtenue en appliquant la méthode d'homogénéisation des structures périodiques (Section 4.4) à partir d'une

description locale des phénomènes de conduction de la chaleur (Section 4.5.2.1). Le découplage des problèmes fluide et thermique est désormais justifié à l'ordre 0 grâce aux résultats remarquables énoncés (Section 4.5.1.2).

La démonstration est identique à celle qui a été menée par Auriault (Auriault, 1985)<sup>11</sup>. On s'intéressera, ici encore, aux principaux résultats. Le problème thermique, bien posé, admet une solution unique (Lax-Milgram) qui se réduit elle aussi à l'échelle macroscopique à une loi formellement identique à une loi de Darcy généralisée :

$$\langle \tau^{(0)} \rangle = j\omega \frac{\tilde{k}'(\omega)}{\kappa} p^{(0)}. \quad (4.21)$$

Le module de compressibilité dynamique  $\tilde{K}(\omega)$  plus couramment rencontré en acoustique, est lié à la perméabilité dynamique thermique  $\tilde{k}'(\omega)$  par la relation suivante :

$$\tilde{K}(\omega) = \rho_0 \frac{p^{(0)}}{\langle \tilde{\rho}^{(0)}(\omega) \rangle_\Omega} = \frac{\gamma P_0 / \Phi}{\gamma - j(\gamma - 1) \frac{\tilde{k}'(\omega)}{\delta_t(\omega)^2 \Phi}}, \quad (4.22)$$

avec

$$\delta_t(\omega) = \sqrt{\frac{\nu'}{\omega}}, \quad (4.23)$$

l'épaisseur de couche limite thermique.  $\tilde{K}(\omega)$  varie de sa valeur isotherme ( $P_0 / \Phi$ ) en basses fréquences, à sa valeur adiabatique ( $\gamma P_0 / \Phi$ ) en hautes fréquences.

#### 4.5.3 Équation de propagation du milieu homogène équivalent

Pour être complète, la description des phénomènes de dissipation et de propagation d'énergie acoustique à travers un matériau poreux rigide doit inclure l'équation d'onde.

L'équation d'onde macroscopique, pour le milieu homogène équivalent, prenant en compte les effets de dissipation visqueux et thermiques, s'écrit

finalement en fonction des perméabilités dynamiques visqueuses et thermiques (Olny, 1999)<sup>17</sup>:

$$j\omega \left( \frac{\gamma - j(\gamma - 1) \frac{\tilde{k}'(\omega)}{\delta_t(\omega)^2 \Phi}}{\gamma P_0} \right) p^{(0)} - \nabla_x \cdot \left( \frac{\tilde{k}}{\eta} \nabla_x p^{(0)} \right) = 0 \quad (4.24)$$

dans le cas d'un milieu isotrope.

En introduisant la densité effective dynamique du fluide (4.16), ainsi que son module de compressibilité dynamique (4.22), l'équation (4.24) prend la forme plus familière en acoustique d'une équation de Helmholtz pour le milieu homogène équivalent:

$$\nabla_x^2 p^{(0)} + \frac{\tilde{\rho}(\omega)}{\tilde{K}(\omega)} \omega^2 p^{(0)} = 0. \quad (4.25)$$

Et la vitesse de l'onde s'écrit :

$$\tilde{c} = \sqrt{j\omega \tilde{K} \frac{\tilde{k}}{\eta}} = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{\tilde{\rho}}}, \quad (4.26)$$

compte-tenu de la relation (4.16). Ce qui permet entre autres d'en déduire la longueur d'onde ( $\tilde{\lambda} = \tilde{c} / f$ ) de l'onde de compression dissipative se propageant dans le milieu poreux rigide.

À partir de ce résultat, il est désormais possible par des considérations simples de quantifier le domaine de validité de la description.

Pour se faire, on considère une onde plane de la forme  $\tilde{p} = P e^{j(\omega t - \tilde{q}x)}$  se propageant dans la direction des  $x$  positifs, où  $\tilde{q} = 2\pi / \tilde{\lambda}$  est le nombre d'onde de l'onde propagative. Dans ces conditions, le gradient de pression s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = -j \frac{2\pi}{\tilde{\lambda}} \tilde{p}. \quad (4.27)$$

On estime le gradient de pression par :

$$\left| \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right| = O\left(\frac{p}{L}\right), \quad (4.28)$$

où  $L$  est la longueur sur laquelle s'établit le phénomène de variation de pression. En égalisant (4.27) et (4.28), on obtient finalement une estimation de la longueur caractéristique macroscopique du phénomène :

$$L = O\left(\frac{\tilde{\lambda}}{2\pi}\right). \quad (4.29)$$

On rappelle finalement que la description est valide pour  $\varepsilon = l/L \ll 1$  où  $L$  est la longueur la plus petite entre la taille caractéristique de l'échantillon et celle du phénomène acoustique.

#### 4.6 Conclusion

Dans le cadre de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques (HSP), si l'hypothèse fondamentale de changement d'échelles  $\varepsilon = l/L \ll 1$  est respectée, alors il existe un volume élémentaire représentatif périodique de période  $l$  (taille caractéristique d'une cellule idéalisée).

Le recours à la théorie de l'homogénéisation permet notamment de justifier à l'ordre 0 les hypothèses de pression homogène à l'échelle du pore (4.13) et de fluide localement incompressible (4.14).

Il en résulte une simplification du problème classique de propagation d'une onde acoustique dans un fluide homogène visco-thermique saturant un matériau poreux à structure rigide (4.1 - 4.5). Les problèmes aux limites découplés d'écoulement local (4.9 - 4.12) et de conduction de la chaleur (4.18 - 4.20) sont alors bien posés grâce à deux jeux complets d'équations pour lesquels les conditions aux limites sont définies sur l'ensemble du domaine fluide, notamment grâce à l'introduction de conditions d' $\Omega$ -périodicité (4.12 et 4.20) qui dérivent naturellement de la démarche HSP. Les champs de solutions uniques de températures et de vitesses peuvent alors être obtenus numériquement.

Le passage d'une plus petite à une plus grande échelle permet donc d'obtenir rigoureusement une description symétrique, bien posée, des

phénomènes de dissipation à l'échelle locale. De plus, la méthode indique la forme des lois qui régissent les phénomènes de dissipation à l'échelle macroscopique, ainsi que la manière de calculer les coefficients impliqués dans ces lois (perméabilités dynamiques). Compte-tenu de la structure des lois macroscopiques, les perméabilités dynamiques visqueuse  $\tilde{k}(\omega)$  (4.15) et thermique  $\tilde{k}'(\omega)$  (4.21), scalaires dans le cas isotope, peuvent être calculées à partir de la résultante moyenne des champs de vitesses et de températures.

---

#### 4.7 Références

- 1 G. Kirchhoff, "Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung," Ann. Phys. Chem. 134, 177-193 (1868).
- 2 G. Kirchhoff, On the influence of heat conduction in a gas on sound propagation, edited by R. B. Lindsay, (Hutchison & Ross, Dowden, 1974).
- 3 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, edited by Anonymous 2nd ed. (Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 1987), .
- 4 J. L. Auriault, "Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible?" Int.J.Eng.Sci. 29 (7), 785-795 (1991).
- 5 C. Boutin, P. Royer and J. L. Auriault, "Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity," Int.J.Solids Structures 35 (34-35), 4709-4737 (1998).
- 6 Xavier Olny and Claude Boutin, "Acoustic wave propagation in double porosity media," J. Acoust. Soc. Am. 114 (1), 73-89 (2003).
- 7 J. B. Keller, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science, in Darcy's law for flow in porous media and the two space method, edited by R. L.



Sternberg, A. J. Kalinowski and J. S. Papakadis, (Dekker, Marcel, New York, 1980) Vol. 54, pp. 429-443.

8 A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, edited by Anonymous (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978), pp. 320.

9 E. Sanchez-Palencia, "Local and macroscopic behaviour of a type of heterogeneous physical medium," *Int.J.Eng.Sci.* 12 (4), 331-51 (1974).

10 E. Sanchez-Palencia, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, edited by Springer, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1980), pp. 398.

11 J. -L. Auriault, L. Borne and R. Chambon, "Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy," *J.Acoust.Soc.Am.* 77 (5), 1641-50 (1985).

12 J. L. Auriault and C. Boutin, "Deformable porous media with double porosity Quasi-statics. I: Coupling effects," *Transp.Porous Media* 7, 63-82 (1992).

13 J. L. Auriault and C. Boutin, "Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. II: memory effects," *Transp.Porous Media* 10 (2), 153-169 (1993).

14 J. L. Auriault and C. Boutin, "Deformable porous media with double porosity III: Acoustics," *Transp.Porous Media* 14, 143-162 (1994).

15 T. Levy, "Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid," *Int.J.Eng.Sci.* 17 (9), 1005-14 (1979).

16 J. L. Auriault, "Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a Newtonian fluid," *Int.J.Eng.Sci.* 18 (6), 775-85 (1980).

17 X. Olny, "Absorption acoustique des milieux à simple et double porosité: modélisation et validation expérimentale," Thèse. Lyon : INSA de Lyon, 1999, 264 p.

18 P. Lemarinier, "Propagation du son à basses fréquences audibles (30 - 5000 Hz) dans des mousses et une laine de verre saturées d'air: validation expérimentale de modèles thermiques, analogies diélectriques, imprégnation polymères de mousses," Thèse. Le Mans : Université du Maine, 1997, 120 p.

# 5 Méthode du parcours aléatoire

- 5.1 Introduction**
- 5.2 Formulation multi-échelles du problème de diffusion de la chaleur en régime harmonique**
- 5.3 Analogie au problème de diffusion d'un soluté en régime permanent**
- 5.4 Construction d'un parcours aléatoire**
- 5.5 Algorithmique du parcours aléatoire**
- 5.6 Expression de la perméabilité dynamique thermique**
  - 5.6.1 Probabilité de survie
  - 5.6.2 Temps de survie
    - 5.6.2.1 *Équation sans second membre (essm)*
      - 5.6.2.1.1 Solution particulière de l'essm
      - 5.6.2.1.2 Solution générale de l'essm
    - 5.6.2.2 *Équation particulière*
    - 5.6.2.3 *Solution générale*
- 5.7 Conclusion**
- 5.8 Références**

## ANNEXES DU CHAPITRE 5

---

### 5.1 Introduction

Une cellule idéalisée dont les paramètres microstructuraux ont été identifiés expérimentalement peut-elle servir de base à la modélisation des phénomènes de dissipation acoustique dans les mousses à cellules ouvertes ? Comment les propriétés acoustiques dépendent-elles des paramètres microstructuraux ? Ce sont deux des nombreuses questions dominant l'étude des relations entre la microstructure et les propriétés acoustiques des milieux poreux tels que les mousses à cellules ouvertes.

De telles questions peuvent être abordées de plusieurs manières. La méthode la plus directe est probablement de conduire une série de mesures en laboratoires sur des échantillons de paramètres microstructuraux variables, voir par exemple (Vasina, 2006)<sup>1</sup>. Alternativement, à la quête d'une compréhension théorique, on peut se tourner vers une meilleure compréhension des bases mathématiques et physiques des équations régissant les phénomènes de dissipation acoustique à l'échelle macroscopique (Johnson, 1987)<sup>2</sup> (Champoux et Allard, 1991)<sup>3,4</sup>

(Pride, 1993)<sup>5</sup> (Lafarge, 1997)<sup>6</sup>. Finalement, il est possible de considérer les études basées sur des simulations numériques (Craggs, 1984)<sup>7</sup> (Firdaouss, 1998)<sup>8</sup> (Cortis, 2001)<sup>9</sup> (Boomsma, 2003)<sup>10</sup> (Cortis, 2003)<sup>11</sup> (Gasser, 2005)<sup>12</sup>.

Chacune de ces approches a ses forces et ses faiblesses. Les mesures en laboratoire ont la valeur indiscutable des marqueurs de terrain ; elles peuvent, néanmoins, requérir de grandes dépenses. Les études théoriques à échelle macroscopique aboutissent à des modèles fiables et robustes ; mais nécessitent aussi la mesure de paramètres macroscopiques, non-indépendants les uns des autres. Les simulations numériques ont habituellement pour vocation de jeter un pont entre théorie et expérience. Mais leurs portées sont généralement restreintes par le besoin de simplifications portant sur la géométrie ou sur la physique, voir les deux.

Au cours des dernières années, une approche d'étude numérique des propriétés acoustiques de milieux poreux a gagné en popularité. L'idée est de résoudre numériquement l'équation des fluides visqueux couplée à la condition locale d'incompressibilité (problème visqueux) et l'équation de la chaleur (problème thermique) avec les conditions aux limites appropriées dans une configuration microstructurale constituée par une cellule périodique idéalisée; puis d'étudier comment les propriétés moyennes des champs de vitesses et de températures dépendent des paramètres microstructuraux. Comparées aux modèles macroscopiques, ces études offrent la possibilité d'étudier les bases micro-physiques du macro-comportement acoustique.

On procède en outre par ordre croissant de complexité. Ce qui implique de résoudre initialement le problème thermique, contrepartie scalaire du problème visqueux.

La plupart des auteurs ont abordé la résolution du problème thermique par la méthode des éléments finis. Craggs a résolu le problème thermique dynamique pour des tubes de section constante (Craggs, 1984)<sup>7</sup>. Cortis et ses collaborateurs ont étudié le cas d'une configuration bidimensionnelle constituée par un arrangement régulier de cylindres<sup>9</sup> à l'aide du code *Sepran*<sup>13</sup>. On note une excellente correspondance des courbes obtenues à l'aide du modèle semi-phénoménologique de Lafarge, avec les points issus de la résolution numérique du problème dynamique. En revanche, les principales différences avec les modèles de Champoux-Allard sont observées au niveau de la fréquence de transition, et du point d'inflexion de la partie réelle hautes fréquences. Gasser et ses collaborateurs se sont intéressés au cas d'un pavage cubique centré de

sphères<sup>12</sup>. Les simulations numériques sont en accord avec des résultats de la littérature disponibles pour des arrangements de sphères.

Alternativement, une méthode numérique originale permettant de résoudre efficacement le problème thermique en régime harmonique a récemment été proposée par Lafarge à la communauté des mécaniciens des milieux poreux (Lafarge, 2002)<sup>14</sup>. Il s'agit de la méthode du parcours aléatoire. Le principe de la méthode consiste à simuler le mouvement Brownien (aléatoire) d'un grand nombre de particules appartenant à la phase fluide, et à relier leurs libres parcours moyens aux propriétés de conduction thermique du milieu fluide confiné (Feynmann, 1998)<sup>15</sup> (Torquato, 1989)<sup>16</sup>. Un point important de la méthode est qu'une fois le libre parcours moyen d'un grand nombre de particules estimé, la réponse thermique peut être calculée pour toute fréquence.

La méthode du parcours aléatoire a été implémentée en deux (Torquato, 1989)<sup>16</sup>, puis trois dimensions (Coker, 1994)<sup>17</sup> pour calculer la constante de piégeage d'un arrangement bidimensionnel de fibres de sections circulaires pénétrables, puis de géométries tridimensionnelles digitalisées. Néanmoins, la constante de piégeage ne fournit que le comportement asymptotique basses fréquences du problème thermique.

Les premières simulations numériques en régime harmonique ont récemment été proposées par Lafarge dans une configuration bidimensionnelle pour le cas d'arrangements réguliers et aléatoires de fibres de sections circulaires (Lafarge, 2002)<sup>14</sup>. La réponse dynamique thermique est calculée sur deux ordres de grandeur autour de la fréquence de transition, et comparée aux modèles de Champoux-Allard (Champoux, 1991)<sup>3</sup> modifié par Lafarge (Lafarge, 1997)<sup>6</sup> et de Pride-Lafarge (Lafarge, 1993)<sup>18</sup>. Les tendances observées confirment celles reportées par Cortis et ses collaborateurs (Cortis, 2001)<sup>9</sup>. À savoir que le modèle de Lafarge permet de prendre précisément en compte le comportement thermique du fluide en basses fréquences ce qui a un impact autour de la fréquence de transition – là où les dissipations sont les plus importantes – pour des configurations régulières, mais aussi aléatoires. En outre, Lafarge rapporte un petit problème de convergence de la méthode numérique autour du deuxième point d'inflexion de la réponse thermique (hautes fréquences)<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Mentionnons au passage qu'il ne s'agissait pas d'un problème de convergence, mais d'une erreur dans la formule (9) de l'acte de conférence en question,

Les conclusions de cette brève revue de la littérature portant sur le calcul numérique de la réponse dynamique thermique d'un fluide conducteur soumis à une excitation acoustique, et en particulier sur l'utilisation de la méthode du parcours aléatoire dans ce contexte, sont les suivantes.

Premièrement, toutes méthodes confondues, les simulations du comportement thermique – dynamique – n'ont été réalisées que pour des arrangements bi- ou tri- dimensionnels de sphères. Aucune résolution numérique du problème dynamique thermique n'a été proposée pour le cas d'une configuration géométrique constituée par une cellule périodique idéalisée de mousse à cellules ouvertes<sup>17</sup>.

Deuxièmement, l'implémentation tridimensionnelle de la méthode du parcours aléatoire fût limitée au calcul du comportement asymptotique basses fréquences.

On se propose ici de mener un calcul de perméabilité dynamique thermique de mousse à cellules ouvertes. Pour ce faire, la méthode du parcours aléatoire sera implémentée en trois dimensions, pour des configurations cellulaires périodiques, dont les paramètres microstructuraux ont été identifiés expérimentalement par microtomographie axiale à rayons-X.

La méthode de résolution du parcours aléatoire étant prometteuse et encore relativement peu conventionnelle en acoustique, le propos de ce chapitre est d'exposer brièvement ses principes, et d'en proposer une implémentation tridimensionnelle. Le chapitre commence par un rappel de la formulation multi-échelle du problème de diffusion de la chaleur en régime harmonique. En utilisant une analogie avec le problème de diffusion d'un soluté en régime permanent, il est alors possible de résoudre le

mentionnée par l'auteur lors d'une communication personnelle. La formule (9) est valable en 3D, mais ne l'est pas en 2D. En 2D, il faut passer  $p(R)=1/I_0(\mu)$ , tel qu'indiqué à l'équation (5.15) de ce chapitre. Le facteur 3/2 de la formule (10) est alors à supprimer quelque soit la dimensionnalité du problème.

<sup>17</sup> Les calculs de Gasser concernent le cas de sphères creuses (Gasser, 2005)

(Gasser, 2002); tandis que les calculs de perméabilités menés sur des microtomographies synchrotron d'échantillons réels sont actuellement limités au cas statique.

problème thermique par simulations de mouvements Browniens. Ces opérations sont basées sur la construction de parcours aléatoire. Pour ce faire, l'algorithme développée est présentée; les détails relatifs à son implémentation étant reportés en annexes. Les expressions permettant de calculer la perméabilité dynamique thermique sont finalement rapportées ; et les apports de la méthode discutés.

## 5.2 Formulation multi-échelle du problème de conduction de la chaleur en régime harmonique

L'objet de cette section est de rappeler les résultats du Chapitre 4 relatifs à la formulation multi-échelles du problème de conduction de la chaleur en régime harmonique.

Localement, le problème aux limites de la conduction de la chaleur en régime harmonique est régi à l'ordre 0  $(^{(0)})$  par l'équation de la chaleur linéarisée en régime harmonique (5.1), associée à la condition aux limites de température acoustique nulle à l'interface (5.2), et la condition de périodicité sur le volume  $\Omega$  (5.3):

$$\frac{j\omega}{\nu'} \tau^{(0)} = \nabla_y^2 \tau^{(0)} + \frac{j\omega p^{(0)}}{\kappa}, \quad (5.1)$$

$$\tau^{(0)} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (5.2)$$

$$\tau^{(0)} \text{ et } p^{(0)} \text{ } \Omega\text{-périodiques ;} \quad (5.3)$$

où l'indice  $y$  représente une variable dite rapide c'est-à-dire locale (voir Chapitre 4),  $j\omega p / \kappa$  le terme source de l'équation aux dérivées partielles (5.1),  $\nabla_y^2 \tau$  le terme de diffusion par conduction thermique, et  $(j\omega / \nu') \tau$  le terme antagoniste d'inertie thermique.

On rappelle que  $\kappa$  est la conductivité thermique du fluide ( $\approx 0.026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  pour l'air),  $\nu' = \kappa / \rho_0 C_p$  ( $\approx 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ) sa diffusivité, et  $\rho_0 C_p$  ( $\approx 1.23 \text{ kg.m}^{-3} \times 1000 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) le produit de la masse volumique du fluide à l'équilibre par sa capacité calorifique à pression constante caractérisant son inertie thermique.

Suite à une excitation acoustique de nature harmonique, le fluide subit localement un cycle de compression/détente dont résulte une augmentation/diminution locale de la température. Il s'en suit une diffusion de la chaleur localement excédentaire/déficitaires selon deux mécanismes dissipatifs antagonistes par conduction et inertie thermiques dépendants de la pulsation d'excitation. Ces mécanismes de dissipation sont d'autant plus importants que la température à l'interface est constante, car l'inertie thermique de la phase solide est généralement bien supérieure à celle de la phase fluide, ce qui se traduit par la condition  $(1-\Phi)(\rho_0 C_p)_{solide} \gg \Phi(\rho_0 C_p)_{fluide}$ , où  $\Phi$  est la porosité du milieu poreux<sup>18</sup>.

À l'échelle macroscopique, l'ensemble des phénomènes dissipatifs par effets thermiques moyennés sur un volume élémentaire représentatif  $\Omega$ -périodique est pris en compte par un tenseur réductible à un scalaire dans le cas isotrope appelé perméabilité dynamique thermique

$$\tilde{k}'(\omega) = \langle \tau^{(0)} \rangle \times \frac{1}{\frac{j\omega p^{(0)}}{\kappa}} ; \quad (5.4)$$

qui s'exprime comme le produit de la moyenne du champ de températures acoustiques, par l'inverse du terme source.

Dès lors, le principe de calcul de la perméabilité dynamique thermique est clairement basé sur la résolution du problème local (5.1-5.3) et l'intégration spatiale du champ de températures solution.

En l'occurrence, la méthode de résolution numérique du parcours aléatoire repose sur une analogie avec le problème de diffusion d'un soluté en régime permanent, analogie exposée ci-dessous.

### 5.3 Analogie au problème de diffusion d'un soluté en régime permanent

---

<sup>18</sup> Pour le cas d'une mousse d'aluminium de porosité 0.92, le rapport des capacités calorifiques des parties fluide et solide vaut environ 170. L'inégalité est donc respectée.



On considère des espèces créées dans l'espace fluide à un taux  $\sigma$ , constante spatiale et temporelle. Le soluté se diffuse avec un coefficient de diffusion  $D$ , absorbé soit instantanément au contact de la phase solide, soit à un taux constant  $\kappa_b$  dans la phase fluide. Le champ de concentration  $n$  des particules diffusantes obéit alors, en régime permanent, au problème local de diffusion en régime permanent suivant :

$$\frac{\kappa_b}{D}n = \nabla^2 n + \frac{\sigma}{D}, \quad (5.5)$$

$$n|_{\Gamma} = 0, \quad (5.6)$$

$$n \text{ } \Omega\text{-périodique.} \quad (5.7)$$

On remarque que le problème local de diffusion thermique en régime harmonique (5.1-5.3) est formellement identique au problème local de diffusion d'un soluté en régime permanent (5.5-5.7), moyennant les changements de variables suivants :

$$n = \tau^{(0)}, \quad (5.8)$$

et

$$\frac{\kappa_b}{D} = \frac{j\omega}{\nu'}. \quad (5.9)$$

Cette analogie nous permet donc de déduire du résultat (5.4) issu du Chapitre 4 que la perméabilité dynamique thermique est égale, au terme source  $\sigma/D$  près, à la moyenne du champ de concentration scalaire  $\langle n \rangle$ ; d'où l'on tire :

$$\tilde{k}'(\omega) = \langle n \rangle \times \frac{1/\sigma}{D} = D \times \frac{\langle n \rangle}{\sigma} \quad (5.10)$$

En régime permanent, la quantité d'espèces diffusantes créée par unité de temps et de volume fluide,  $\sigma$ , est exactement compensée par la quantité d'espèces absorbée dans le volume fluide et au contact des surfaces solides  $\Gamma$ . Par conséquent, le champ moyen de concentration d'espèces  $\langle n \rangle$  doit être égal au produit  $\sigma \langle t \rangle$ , où  $\langle t \rangle$  est le temps de survie

moyen d'une particule diffusante lâchée aléatoirement dans l'espace fluide, d'où l'on tire l'égalité suivante :

$$\langle t \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\sigma}. \quad (5.11)$$

En substituant l'équation (5.11) dans l'équation (5.10), on obtient finalement :

$$\tilde{k}'(\omega) = D \langle t \rangle. \quad (5.12)$$

Il apparait désormais clairement au regard de la relation (5.12) que les méthodes de résolution numérique habituellement dédiées à la résolution des problèmes de diffusion d'un soluté en régime permanent (5.5-5.7) peuvent être mises à profit pour résoudre le problème analogue de la diffusion de la chaleur en régime harmonique (5.1-5.3).

La méthode du parcours aléatoire repose sur la construction d'un parcours aléatoire, dont le principe est exposé à la section suivante.

#### 5.4 Construction d'un parcours aléatoire

L'idée à la base de la méthode de simulation employée dans cette étude est la suivante: le mouvement aléatoire d'une particule diffusante n'a pas à être simulé en détail. En faits, le détail des zigzags du mouvement Brownien est pris en compte au cours d'une seule étape de simulation moyennant la connaissance de la distribution de probabilité du temps de premier passage d'une particule diffusante (Agmon, 1984)<sup>19</sup> :

$$P(t, R) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \exp\left(-\frac{Dm^2 \pi^2 t}{R^2}\right), \quad (5.13)$$

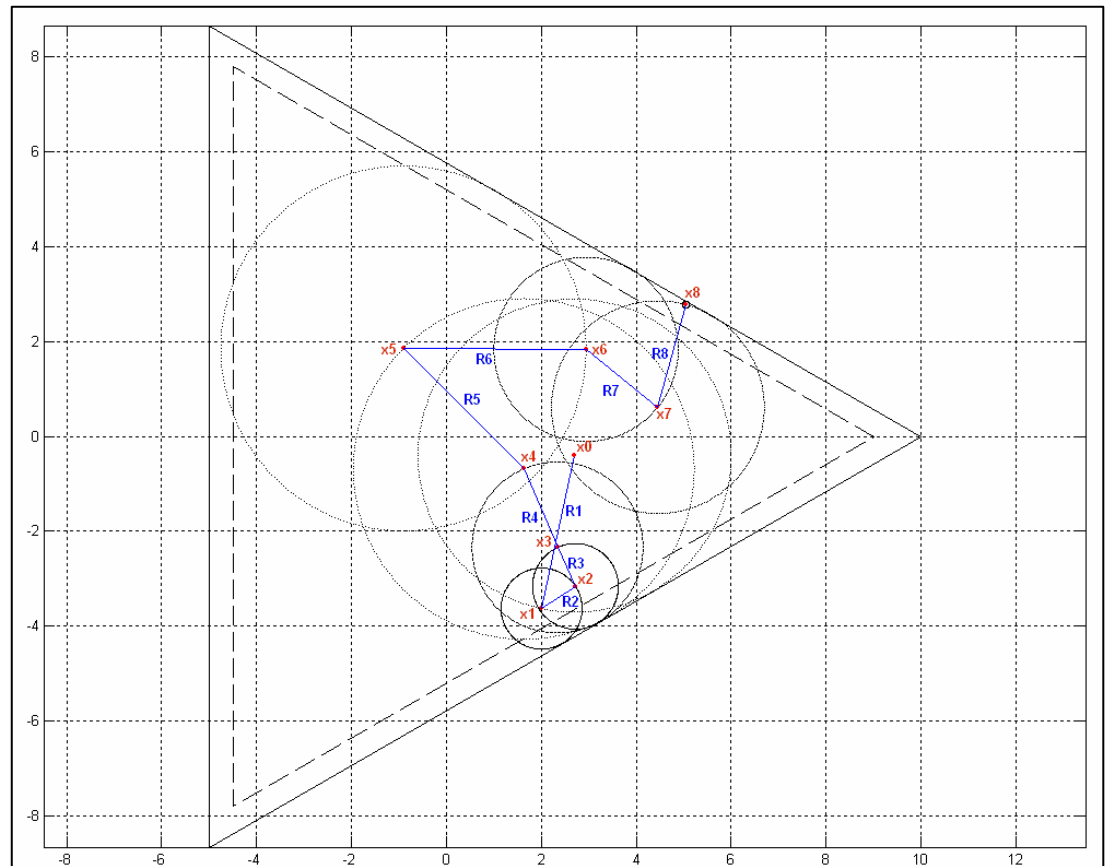
où  $P(t, r)$  est la fonction de distribution cumulative associée au temps  $t$  pris par une particule diffusante initialement à l'origine pour atteindre la

surface d'une sphère de rayon  $R$  en l'absence d'absorption de volume<sup>19</sup>. Par conséquent, il s'agit plutôt de construire la sphère concentrique de plus grand rayon  $R_i$  sans recouvrement avec la phase solide, qui agit comme un piège. La position suivante de la particule diffusante, appelée marcheur, est prise aléatoirement à la surface de la sphère concentrique de rayon  $R_i$ . Ce processus est alors répété jusqu'à ce que le marcheur aléatoire soit piégé, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'il soit situé au voisinage d'un piège solide selon une distance inférieure une distance de piégeage  $d_p$ .

La méthode de simulation employée repose donc sur la construction d'un parcours aléatoire illustré Figure 5.1. Le marcheur est positionné aléatoirement dans l'espace fluide, schématisé par un prisme triangulaire, initialement en  $x_0$ . La sphère concentrique de plus grand rayon  $R_I$  est construite, sans chevauchement avec la phase solide. La position suivante  $x_I$  est déterminée aléatoirement à la surface de la sphère de centre  $x_0$  et de rayon  $R_I$ . De telle manière, le parcours  $x_0, x_I, \dots, x_n$  du marcheur aléatoire est généré, et stoppé lorsque  $x_n$  se situe à une distance inférieure à la distance de piégeage  $d_p$  de la phase solide ( $R_{n+1} < d_p$  où  $d_p = \delta \times \Lambda'$ ). Dans cet exemple, le prisme triangulaire équilatéral est généré à partir d'un cercle de rayon  $R = 10$ . La longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$  associée à cette géométrie canonique est égale à  $R/2$ . Et la distance de piégeage tracée est égale à  $R/10$  ( $\delta = 0,2$ ).

---

<sup>19</sup> L'équation (5.13) est valable en 3D, voir par exemple (Torquato, 1989). En pratique, la distinction entre les cas bi- et tri- dimensionnels sera réalisée à partir des formules (5.17) et (5.18) respectivement.



**Figure 5.1** Exemple de construction d'un parcours aléatoire

## 5.5 Algorithmique du parcours aléatoire

Le principe de construction d'un parcours aléatoire ayant été décrit au cours de la Section 5.4, il est désormais nécessaire de mettre au point un algorithme dédié à la génération systématique d'un tel processus, et au stockage des rayons associés.

Il s'agit d'un problème de géométrie analytique, ayant été décomposé en six étapes distinctes, numérotées de un à six selon l'algorithmique de la Figure 5.2. Seules les grandes lignes de l'algorithmique sont décrites dans le paragraphe suivant.

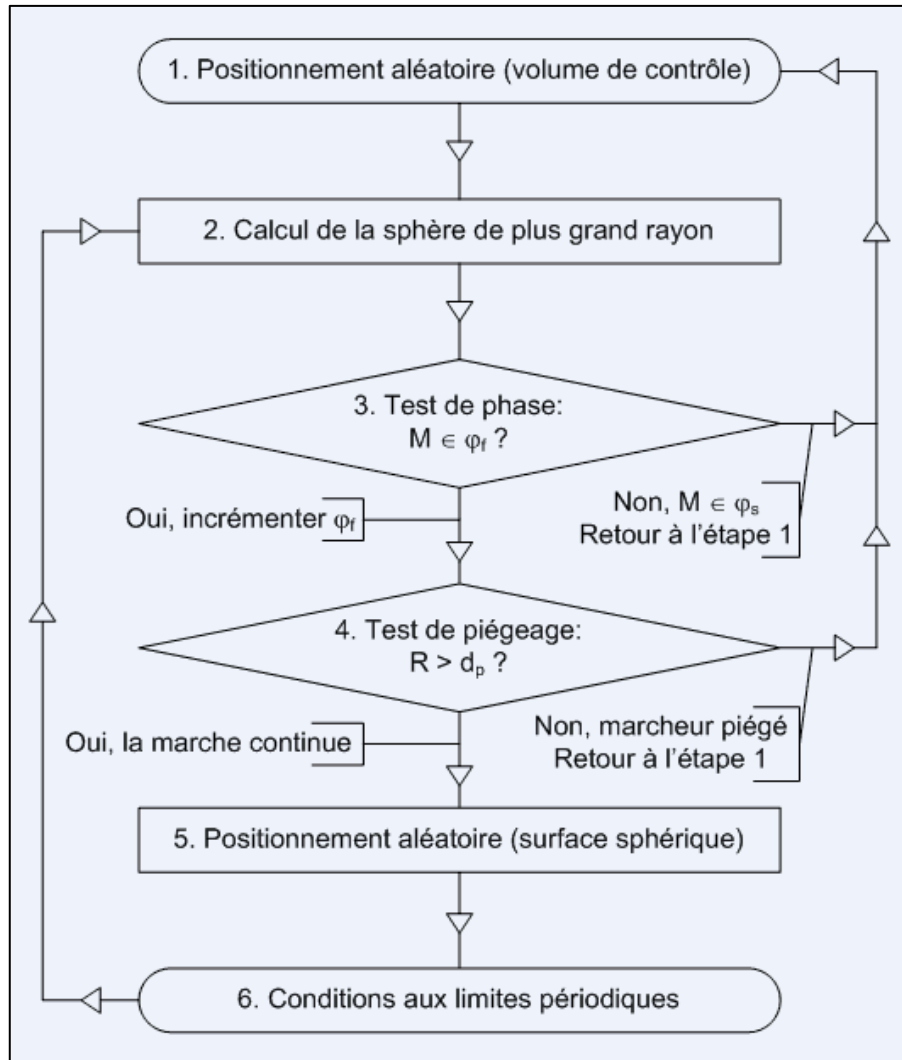


Figure 5.2 Algorithmique du parcours aléatoire

Selon l'algorithmique développée, un parcours aléatoire typique consiste à : (1) Positionner aléatoirement un marcheur au sein du volume de contrôle, prisme rectangulaire délimité par les coordonnées  $(x_{\min}, x_{\max}), (y_{\min}, y_{\max}), (z_{\min}, z_{\max})$  d'une cellule périodique tridimensionnelle. (2) Calculer la sphère concentrique de plus grand rayon  $R$  sans recouvrement avec une surface solide. (3) Tester si le marcheur positionné au point  $M$  appartient à la phase fluide,  $\varphi_f$ . (4) Si à l'issue de ce

test, le marcheur n'appartient pas à la phase fluide, alors aller à l'étape 1. Dans le cas contraire, incrémenter le compteur de phase fluide, et aller à l'étape suivante. (4) Effectuer un test de piégeage. Si la valeur du rayon  $R$  est supérieur à celle de la distance de piégeage  $d_p$ , alors le marcheur n'est pas piégé, et le parcours continue. Dans le cas contraire, aller à l'étape 1. (5) Positionner aléatoirement le marcheur à la surface de la sphère de rayon  $R$ . (6) Appliquer la procédure de conditions aux limites périodiques. Il est en effet possible qu'à l'issue du positionnement aléatoire du marcheur sur la surface de la sphère de rayon  $R$ , le marcheur soit situé à l'extérieur des limites du volume de contrôle. Dans ce cas, puisque la configuration géométrique est une cellule périodique, le marcheur doit être translaté d'une période de manière à se retrouver dans une position équivalente à celle qu'il occuperait si le milieu poreux était infini. Dans le cas contraire, la position du marcheur est inchangée. Le parcours du marcheur peut ensuite se poursuivre en allant à l'étape 2 ; jusqu'à ce qu'il soit piégé. Une fois le marcheur piégé, un nouveau parcours aléatoire peut débuter par l'étape 1.

En outre, la méthode développée privilégie une approche analytique dans laquelle le calcul de la sphère de plus grand rayon sans recouvrement avec la phase solide est exact. Cette orientation a été choisie afin de pouvoir disposer d'un code de référence. On peut en effet par la suite imaginer d'optimiser la construction d'un parcours aléatoire selon un algorithme de croissance, dans lequel la sphère de plus grand rayon est obtenue par croissance du rayon à pas fixe, puis ajustements successifs. La phase d'ajustements successifs impliquant un résultat approché, aussi précis soit-il ; mais des calculs moins coûteux qu'avec une approche exacte.

L'implémentation de cette algorithmique fait l'objet d'un examen détaillé reporté en annexes à la fin de ce chapitre.

Une fois l'algorithmique du parcours aléatoire implémentée, des simulations numériques peuvent être obtenues pour une configuration géométrique constituée d'une cellule périodique tridimensionnelle. Pour  $M$  parcours aléatoire simulés, les données recueillies consistent en  $M$  successions de  $R_i$  rayons. La question est donc de savoir comment cette succession de rayons peut être traduite sous forme de perméabilité dynamique thermique, objet de la section suivante.

---

## 5.6 Expression de la perméabilité dynamique thermique

En supposant connus la probabilité  $p(R)$  d'atteindre pour la première fois la surface d'une sphère de rayon  $R$ , ainsi que le temps  $t(R)$  avant qu'un marcheur atteigne la surface d'une sphère de rayon  $R$ , le temps de survie d'un marcheur lors de son parcours aléatoire  $x_0, x_1, \dots, x_n$  s'exprime (Lafarge, 2002)<sup>14</sup> par

$$t(x_0, \dots, x_n) = t(R_1) + p(R_1)t(R_2) + p(R_1)p(R_2)t(R_3) + \dots + p(R_1)\dots p(R_{n-1})t(R_n). \quad (5.14)$$

Pour un grand nombre de positions initiales aléatoires  $M$ , c'est-à-dire de marcheurs aléatoires, le temps de survie moyen  $\langle t \rangle$  d'un marcheur aléatoire est la moyenne des temps de survie des  $M$  marcheurs aléatoires:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M t(x_0, \dots, x_n). \quad (5.15)$$

Une fois la succession de rayons  $R_i$  déterminée par simulations de parcours aléatoire, la détermination de la perméabilité dynamique thermique  $k'(\omega) = \Phi D \langle t \rangle$  nécessite la connaissance de deux fonctions de  $R$ ,  $p(R)$  et  $t(R)$ , dont les expressions sont données ci-dessous.

### 5.6.1 Probabilité de survie

En présence d'absorption de volume, la probabilité  $p(R)$  pour qu'un marcheur initialement au centre d'une sphère de la construction précédente survive et atteigne sa frontière n'est plus unitaire, et s'exprime

$$p(R) = \int_0^{\infty} \frac{\partial P(t, R)}{\partial t} \exp(-\kappa_b t) dt, \quad (5.16)$$

où  $\kappa_b$  est le coefficient d'absorption volumique; ce qui donne, respectivement en deux (2D) et trois dimensions (3D)<sup>20</sup>:

---

<sup>20</sup> Ces formules constituent la version corrigée de l'acte de conférence de D. Lafarge (Lafarge, 2002), version indiquée par l'auteur lors d'une communication personnelle.

$$p(R)_{2D} = \frac{1}{I_0(\mu)}, \quad (5.17)$$

$I_0$  étant la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre zéro, et

$$p(R)_{3D} = \frac{\mu}{\sinh(\mu)}; \quad (5.18)$$

où

$$\mu = R\xi, \quad (5.19)$$

avec

$$\xi = \sqrt{\frac{\kappa_b}{D}}. \quad (5.20)$$

---

### 5.6.2 Temps de survie

En régime permanent, le temps de survie  $t(r)$  d'une particule lâchée à la position  $r$  avant qu'elle soit absorbée, soit instantanément au contact d'une paroi solide à  $r = R$ , soit dans le volume fluide (au taux d'absorption constant  $\kappa_b$  par unité de temps et de volume), est donné par (Pontryagin, 1933)<sup>20</sup> (Lifson et Jackson, 1962)<sup>21</sup>:

$$t(r) = u_R(r) / D, \quad (5.21)$$

où  $u_R(r) \equiv n(x, y, z)$  est le champ de concentration solution du problème de diffusion scalant (terme source unitaire,  $\sigma = D$ ) en régime permanent :

$$\frac{\kappa_b}{D} u_R(r) = \nabla^2 u_R(r) + 1, \quad (5.22)$$

$$u_R(r = R) = 0, \quad (5.23)$$

vérifiant l'équation (5.20) dans la région  $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$  (en deux dimensions, la coordonnée  $z$  est gelée), et la condition aux limites (5.23) au contact d'une paroi solide.



Il s'agit dès lors de résoudre l'équation aux dérivées partielles (5.22) compte tenu de la condition aux limites (5.23), et ce en coordonnées cylindriques ou sphériques, selon que l'on s'intéresse à la solution du problème respectivement en deux ou trois dimensions. Le détail du calcul est ici proposé dans le cas tridimensionnel, sachant que la démarche peut être reproduite pour le cas bidimensionnel.

En coordonnées sphériques, le laplacien  $\nabla^2 u_R(r)$  s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru_R)}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial u_R}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_R}{\partial r^2}. \quad (5.24)$$

Ainsi, en effectuant le changement de variable  $\xi = \sqrt{\kappa_b / D}$ , l'équation de diffusion scalante en régime permanent

$$\xi^2 u_R = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru_R)}{\partial r^2} + 1, \quad (5.25)$$

s'écrit en coordonnées sphériques

$$\frac{\partial^2 u_R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_R}{\partial r} - \xi^2 u_R = -1. \quad (5.26)$$

Soit, en multipliant membres à membres par  $r^2$ ,

$$r^2 \frac{\partial^2 u_R}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_R}{\partial r} - r^2 \xi^2 u_R = -1. \quad (5.27)$$

Cette équation aux dérivées partielles se résout par la méthode classique dite de la variation de la constante, où la solution générale s'exprime par la somme de la solution de l'équation sans second membre (5.6.2.1) et d'une équation particulière (5.6.2.2).

#### 5.6.2.1 Équation sans second membre

$$r^2 \frac{\partial^2 u_R}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_R}{\partial r} - r^2 \xi^2 u_R = 0 \quad (5.28)$$

L'équation (5.26) s'apparente à l'équation différentielle Sphérique de Bessel, à l'exception du signe du troisième terme. On procède alors au

changement de variable  $x = j\xi r$ , de sorte que l'équation prenne la forme appropriée

$$x^2 \frac{\partial^2 u_R}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial u_R}{\partial x} + x^2 u_R = 0. \quad (5.29)$$

---

#### 5.6.2.1.1 Solution particulière de l'équation sans second membre

Les solutions particulières de cette équation sans second membre s'obtiennent par identification avec la forme générale de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{\partial^2 u_R}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial u_R}{\partial x} + [x^2 - n(n+1)] u_R = 0 \quad (5.30)$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

dont les solutions particulières sont les fonctions de Bessel Sphérique du premier type

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (5.31)$$

et les fonctions de Bessel Sphérique du deuxième type

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (5.32)$$

pour tout  $n$ , où  $J_{0+1/2}(x)$  et  $Y_{0+1/2}(x)$  sont respectivement les fonction de Bessel du premier type et fonction de Bessel du deuxième type d'ordre  $(0 + 1/2)$  (Abramowitz, 1970)<sup>22</sup>.

---

#### 5.6.2.1.2 Solution générale de l'équation sans second membre

La solution générale de l'équation sans second membre est une combinaison linéaire des solutions particulières  $j_0(j\xi r) = J_{1/2}(j\xi r) \sqrt{\pi/2j\xi r}$ , et  $y_0(j\xi r) = Y_{1/2}(j\xi r) \sqrt{\pi/2j\xi r}$ , soit :

$$u_R(r) = Aj_0(j\xi r) + By_0(j\xi r). \quad (5.33)$$

Néanmoins,  $y_0(0) = -\infty$ , ce qui représenterait un champ de concentration local infini, est une solution physiquement exclue. Par conséquent, la constante  $B$  est fixée à zéro et la solution générale de l'équation sans second membre se réduit à :

$$u_R = Aj_0(j\xi r). \quad (5.34)$$

### 5.6.2.2 Équation particulière

On fait apparaître une équation particulière du problème de diffusion scalant en régime permanent (5.22) en faisant tendre le coefficient de diffusion  $D$  vers zéro. Soit, compte tenu du changement de variable  $\xi$  reporté dans l'équation (5.25) :

$$\xi^2 u_R = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_R)}{\partial r^2} + 1 \Rightarrow u_R = \frac{1}{\xi^2} \quad (5.35)$$

Physiquement, l'équation (5.35) est un cas analogue à l'équation (5.1) en hautes fréquences dans laquelle le terme de diffusion par conduction thermique  $\nabla_y^2 \tau$  devient alors négligeable par rapport au terme antagoniste d'inertie thermique  $(j\omega / \nu') \tau$ .

### 5.6.2.3 Solution générale

La solution générale de l'équation aux dérivées partielle (5.20) est donc

$$u_R(r) = Aj_0(j\xi r) + \frac{1}{\xi^2}, \quad (5.36)$$

pour laquelle il s'agit de déterminer la valeur de la constante  $A$  grâce à la condition aux limites (5.23), soit

$$u_R(r=R) = Aj_0(j\xi R) + \frac{1}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{j_0(j\xi R)} \times \frac{1}{\xi^2} \quad (5.37)$$

Le bilan s'écrit par substitution de (5.37) dans (5.36), soit

$$u_R(r) = \frac{1}{\xi^2} \left( 1 - \frac{j_0(j\xi r)}{j_0(j\xi R)} \right). \quad (5.38)$$

5.6.3 Du champ de concentration 'scalant' au champ de température 'canonique'

Compte tenu de la relation (5.21),

$$t(R) = u_R(0) / D \quad (5.39)$$

est le temps moyen pour qu'une particule lâchée au centre d'un cercle de rayon  $r = R$  pour être soit absorbée dans la phase fluide, soit présente au premier passage en  $r = R$ , que l'on cherche à estimer.

D'après la solution (5.38), et sachant que  $j_0(0) = 1$  (Abramowitz, 1970, table 10.1)<sup>22</sup>, on en déduit que

$$u_R(0) = \frac{1}{\xi^2} \left( 1 - \frac{1}{j_0(j\xi R)} \right). \quad (5.40)$$

Le retour du champ 'scalant'  $u_R(0)$  au champ 'canonique'  $\hat{u}_R(0)$  s'effectue par changement de variable grâce à l'analogie entre le problème de diffusion en régime permanent et le problème de diffusion de la chaleur en régime harmonique selon l'identification (5.9),  $\kappa_b / D = j\omega / \nu'$ .

Ainsi

$$\hat{u}_R(0) = -\frac{1}{K^2} \left( 1 - \frac{1}{j_0(KR)} \right), \quad (5.41)$$

avec

$$K = \left( \frac{-j\omega}{\nu'} \right)^{1/2}. \quad (5.42)$$

On constate que le calcul du champ 'canonique' lors du passage 2D - 3D s'effectue simplement en substituant la fonction de Bessel du premier type d'ordre zéro  $J_0(KR)$  apparaissant dans la formule (15) de l'acte de conférence de Lafarge (Lafarge, 2002)<sup>14</sup>, par une fonction de

Bessel Sphérique du premier type d'ordre zéro soit  $j_0(KR) = J_{1/2}(KR)\sqrt{\pi/2KR}$ .

Finalement, compte tenu des relations (5.12) et (5.21), la perméabilité dynamique du problème thermique canonique s'exprime simplement

$$\tilde{k}'(\omega) = \langle \hat{u}_R(0) \rangle. \quad (5.43)$$

En simplifiant la notation  $\hat{u}_R(0)$  par  $\hat{u}(R)$ , la relation (5.41) s'écrit

$$\tilde{k}'(\omega) = \langle \hat{u}_R(0) \rangle = \frac{1}{M} \sum \hat{u}(x_0, \dots, x_n) \quad (5.44)$$

avec,

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_0, \dots, x_n) = & \hat{u}(R_1) + p(R_1)\hat{u}(R_2) + p(R_1)p(R_2)\hat{u}(R_3) + \dots \\ & + p(R_1)\dots p(R_{n-1})\hat{u}(R_n). \end{aligned} \quad (5.45)$$

où la fonction  $p(R)$  est donnée par les équations (5.17) et (5.18) respectivement en deux et trois dimensions; et la fonction  $\hat{u}(R) = \hat{u}_R(0)$  est donnée par l'équation (5.41) modifiée en deux dimensions, et (5.41) en trois dimensions. En deux dimensions, la modification de l'équation (5.41) consiste à substituer  $j_0(KR)$ , la fonction de Bessel Sphérique du premier type d'ordre zéro, par  $J_0(KR)$ , la fonction de Bessel du premier type d'ordre zéro.

L'intérêt de cette méthode de calcul tient au fait que la simulation de  $M$  parcours aléatoires est indépendante de la fréquence. Cela signifie qu'une fois les  $M$  successions de rayons connues pour une configuration géométrique, la perméabilité dynamique thermique peut être calculée quelque soit la pulsation; et ce avec le même coût de calcul. De ce fait, on s'affranchit des difficultés rencontrées avec les méthodes de calcul numérique conventionnelles, telle que la méthode des éléments finis. En éléments finis, le maillage doit en effet être raffiné au voisinage de l'interface lorsque la fréquence augmente, afin de prendre en compte la diminution de l'épaisseur de la couche limite. Contrairement à la méthode du parcours aléatoire, cela se traduit généralement par un coût de calcul de la réponse dynamique rédhibitoire pour des configurations géométriques tridimensionnelles.

---

## 5.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter une méthode numérique non conventionnelle adaptée au calcul de la perméabilité dynamique thermique d'une cellule périodique, grâce au développement et à l'implémentation tridimensionnelle d'une algorithmique originale de parcours aléatoire, dont les détails sont reportés en annexes au cours des pages qui suivent.

---

## 5.8 Références

- 1 M. Vasina *et al.*, "The acoustical properties of consolidated expanded clay granulates," *Appl.Acoust.* 67 (8), 787-796 (2006).
- 2 D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J.Fluid Mech.* 176, 379-402 (1987).
- 3 Y. Champoux and J. F. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," *J.Appl.Phys.* 70, 1975-1979 (1991).
- 4 J. F. Allard, Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials, edited by Elsevier Applied Science, (Elsevier Science Publishers LTD, New York and London, 1993), pp. 284.
- 5 S. R. Pride, F. D. Morgan and A. F. Gangi, "Drag forces of porous media acoustics," *Physical Review B* 47 (9), 4964-4975 (1993).
- 6 D. Lafarge *et al.*, "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies," *J.Acoust.Soc.Am.* 102 (4), 1995-2006 (1997).

7 A. Craggs and J. G. Hildebrandt, "Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes," *J.Sound Vibrat.* 92 (3), 321-331 (1984).

8 M. Firdaouss, J. -L Guermond and D. Lafarge, "Some remarks on the acoustic parameters of sharp-edged porous media," *Int.J.Eng.Sci.* 36 (9), 1035-46 (1998).

9 A. Cortis *et al.*, in IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Series: Solid Mechanics and Its Applications, edited by Wolfgang (Ehlers, Held at the University of Stuttgart, Germany, 2001) pp. 1-448.

10 K. Boomsma, D. Poulikakos and Y. Ventikos, "Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure," *Int J Heat Fluid Flow* 24 (6), 825-834 (2003).

11 A. Cortis *et al.*, "Influence of pore roughness on high-frequency permeability," *Phys.Fluids* 15 (6), 1766-75 (2003).

12 S. Gasser, F. Paun and Y. Brechet, "Absorptive properties of rigid porous media: Application to face centered cubic sphere packing," *J.Acoust.Soc.Am.* 117 (4 I), 2090-2099 (2005).

13 C. Cuvelier *et al.*, Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations, edited by Springer, (D. Reidel Publishing Company, Netherlands, 1986), pp. 504.

14 D. Lafarge, in Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics, edited by J. -L Auriault (Swets & Zeitlinger, Grenoble, 2002) pp. 703-708.

15 Richard Feynmann, Le parcours aléatoire, Chap. 6-3, In *Le cours de physique de Feynmann*, Tome 2 (edited by Dunod, Paris, 1998)

16 S. Torquato, "Efficient simulation technique to compute properties of heterogeneous media," *Applied Physics Letter* 55 (18), 1847-1849 (1989).

17 D. A. Coker, "Simulation of diffusion and trapping in digitized heterogeneous media," *J.Appl.Phys.* 77 (3), p. 955 (1994).

18 Denis Lafarge, "Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide visco-thermique," Thèse de doctorat de l'université du Maine , 1-296 (1993).

19 N. Agmon, "Residence times in diffusion processes," *J.Chem.Phys.* 81 (8), 3644-7 (1984).

20 L. Pontryagin, A. Andronov and A. Witt, "On the statistical treatment of dynamical systems (in Russian)". *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 3, 172 (1933).

21 Shneior Lifson and Julius L. Jackson, "On the Self-Diffusion of Ions in a Polyelectrolyte Solution," *J. Chem. Phys.* 36 (9), 2410-2414 (1962).

22 M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, edited by Anonymous (Dover Publications, New York, 1970), pp. 1046.

23 R. E. Knop, "Random vectors uniform in solid angle," *Commun ACM* 13 (5), 326 (1970).

24 Donald Ervin Knuth, The art of computer programming, vol. 2: Seminumerical algorithms, edited by Anonymous 3rd ed. (Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1997).



## A 5 Annexes du Chapitre 5

# Implémentation de l'algorithme du parcours aléatoire pour des géométries cellulaires périodiques tridimensionnelles

### **A 5.1 Positionnement aléatoire au sein du volume de contrôle**

A 5.1.1 Avant propos, principe de description de la géométrie

A 5.1.2 Repérage du volume de contrôle

A 5.1.3 Positionnement aléatoire du marcheur

### **A 5.2 Calcul de la sphère de plus grand rayon sans recouvrement avec une surface solide**

A 5.2.1 *Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur le plan du triangle appartient au triangle*

A 5.2.1.1 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

A 5.2.1.2 Tester si un point appartient à un triangle

A 5.2.2 *Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur la droite passant par l'arête du triangle appartient à l'arête*

### **A 5.3 Test de phase : le marcheur appartient-il à la phase fluide ?**

### **A 5.4 Test de piégeage : le marcheur est-il situé à une distance supérieure à la distance de piégeage ?**

### **A 5.5 Positionnement aléatoire sur une surface sphérique**

### **A 5.6 Conditions aux limites périodiques**

---

### **A 5.1 Positionnement aléatoire au sein du volume de contrôle**

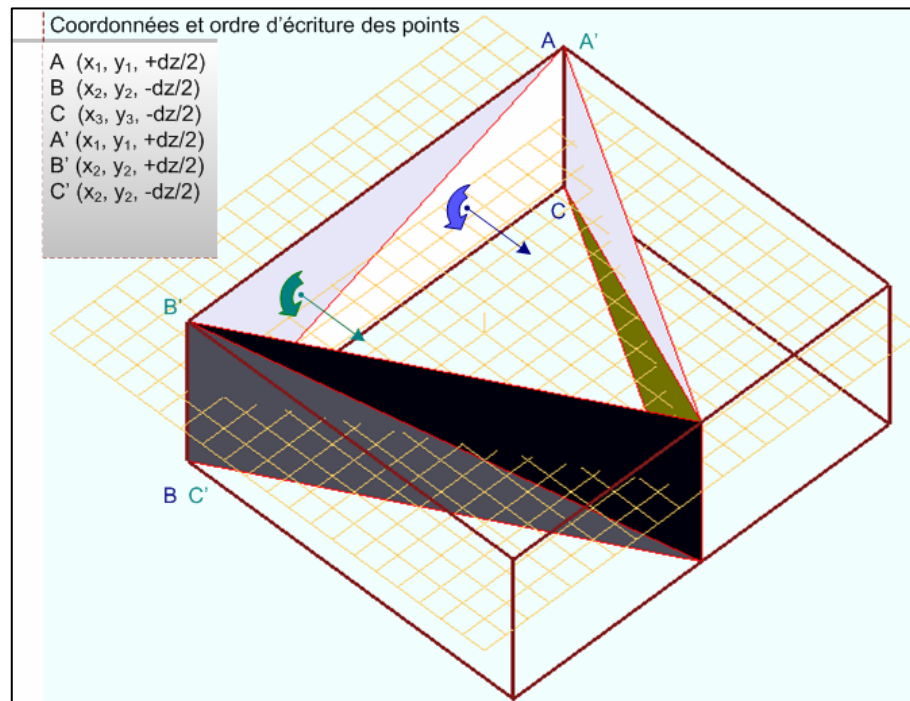
Cette annexe présente en détails la première étape de l'algorithmique développé, soit le positionnement aléatoire du marcheur au sein du volume de contrôle. Le marcheur est positionné aléatoirement au sein d'une configuration géométrique tridimensionnelle constituée par une cellule périodique tridimensionnelle réalisée à partir d'un assemblage de facettes triangulaires. Dans un premier temps, on commence par introduire les principes adoptés pour décrire la géométrie au cours de la Section A 5.1.1.

Nous verrons ensuite au cours de la Section A 5.1.3 qu'il peut-être utile de repérer un volume de contrôle permettant de délimiter l'espace tridimensionnel dans lequel sera introduit le marcheur. Cette étape facilite en effet le positionnement aléatoire du marcheur décrit sur ces bases à l'Annexe A 5.2.

#### A 5.1.1 Avant propos, principe de description de la géométrie

La géométrie est décrite par une surface composée d'un assemblage d'éléments triangulaires, ou facettes. À toute facette est associée une normale, définie par la règle dite du bonhomme d'Ampère. La convention usuelle est utilisée pour distinguer la phase fluide de la phase solide, où les normales pointent vers la phase fluide. La description du milieu diphasique est alors conditionnée par le respect des règles suivantes :

- L'ordre d'écriture de trois points d'une facette.  
La phase fluide est située à l'intérieur (A-B-C, voir Figure A 5.1) / extérieur (A-C-B) du triangle.
- L'homogénéité adoptée lors de l'écriture des facettes.  
La Figure A 5.1 illustre ces principes de description d'une géométrie diphasique pour le cas d'un tube de section triangulaire.



**Figure A 5.1** Principe de description de la géométrie, cas d'un tube triangulaire

## A 5.1.2 Repérage du volume de contrôle

La configuration géométrique est située dans un espace tridimensionnel défini par un repère cartésien orthonormé ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ). On considère que toute configuration peut s'inscrire dans un volume de contrôle de forme parallélépipédique rectangulaire. On appelle  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les matrices dans lesquelles sont respectivement stockées les abscisses, ordonnées, et élévations de l'ensemble des points permettant de décrire la géométrie de l'objet tridimensionnel. La Figure A 5.2 illustre le volume de contrôle repéré à l'aide de ses bornes ( $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ;  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ;  $z_{min}$ ,  $z_{max}$ ), dont on tire les dimensions principales notées ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ).

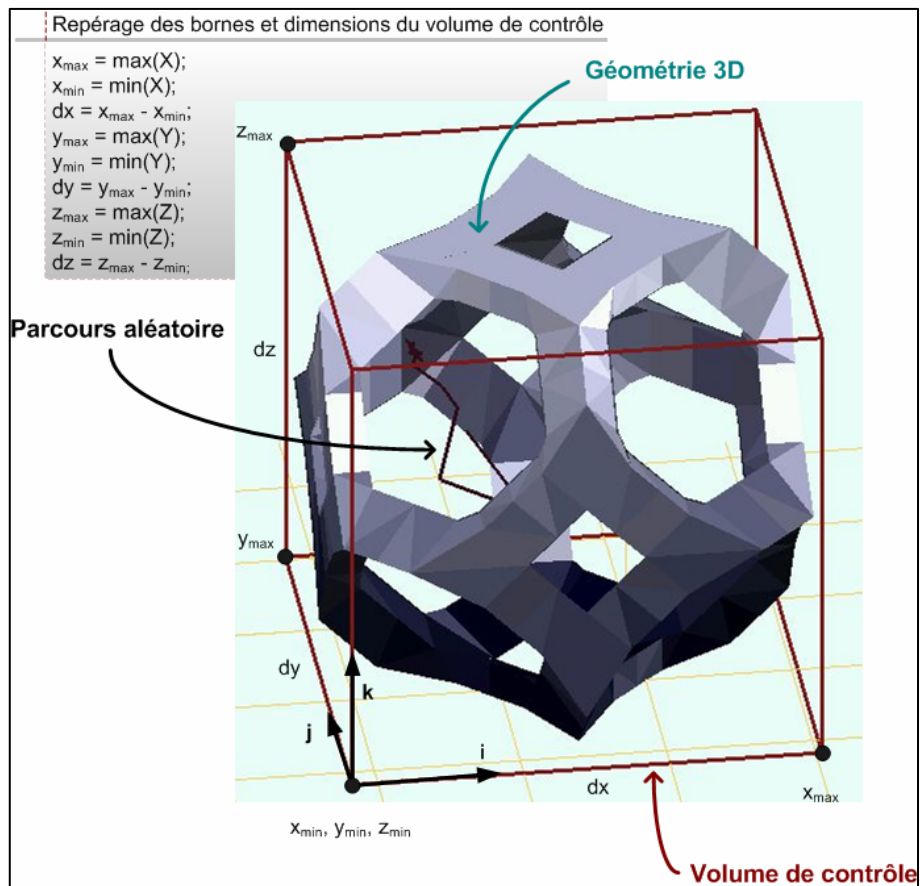


Figure A 5.2 Repérage du volume de contrôle

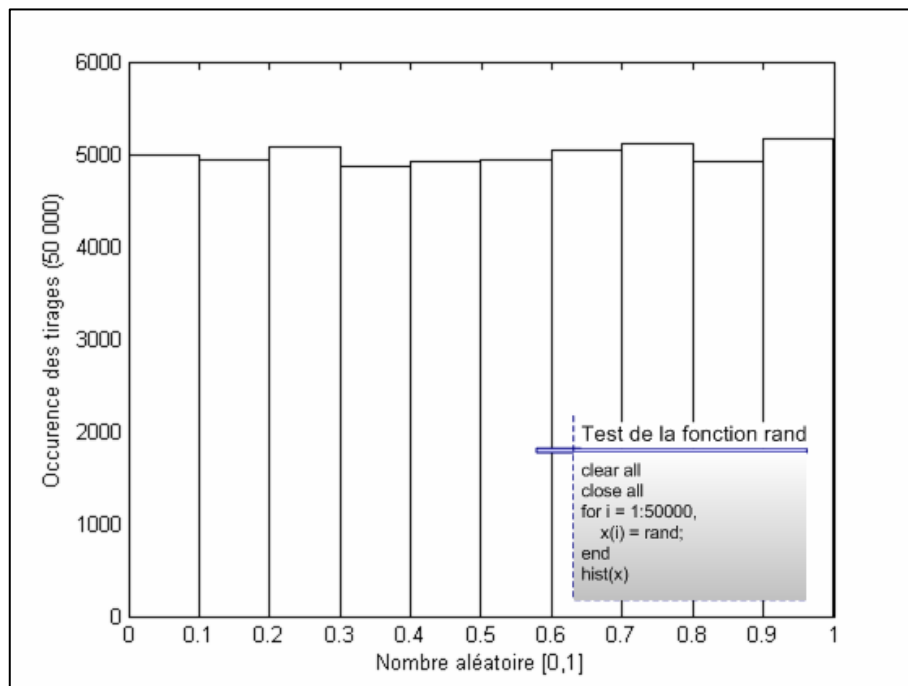
## A 5.1.3 Positionnement aléatoire du marcheur

Une fois le volume de contrôle de forme rectangulaire parallélépipédique repéré, notamment par ses bornes inférieures  $x_{min}$ ,  $y_{min}$ ,  $z_{min}$ , et ses dimensions principales  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$ , il est possible de positionner aléatoirement le marcheur de coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  au sein du volume de contrôle:

$$\begin{cases} x = x_{min} + \text{rand} \times dx \\ y = y_{min} + \text{rand} \times dy \\ z = z_{min} + \text{rand} \times dz \end{cases} \quad \text{A (5.1)}$$

où  $\text{rand}$  est une fonction permettant d'assurer un tirage équiprobable de nombres compris entre zéro et un.

La propriété d'équiprobabilité est importante car elle conditionne l'ensemble des résultats associés au milieu poreux sondé au moyen une marche aléatoire. Elle peut être vérifiée en s'assurant que l'histogramme d'un grand nombre de tirages aléatoires est bien d'allure plane, voir Figure A 5.3.



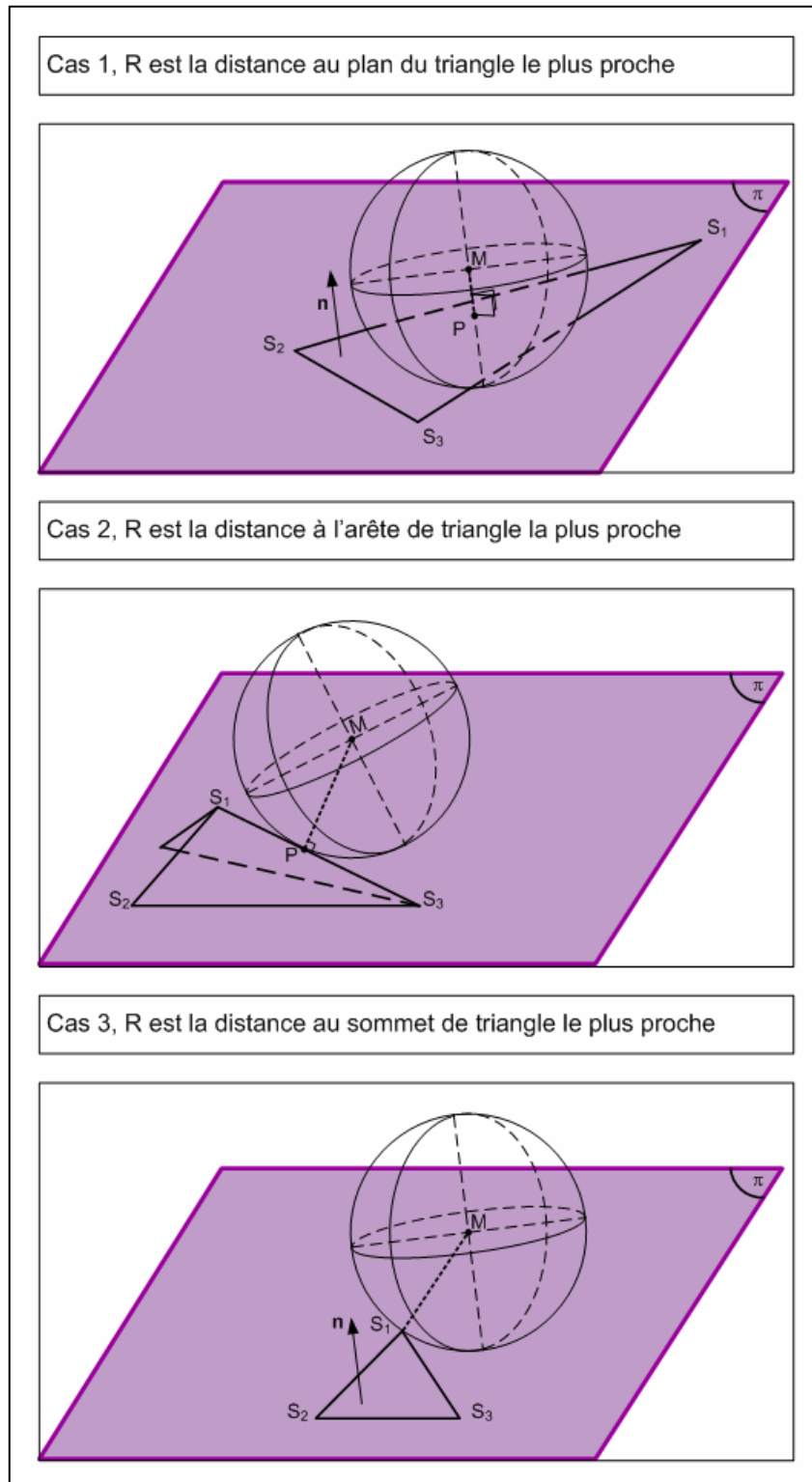
**Figure A 5.3** Exemple de test d'équiprobabilité de la fonction de génération de nombres aléatoires

## A 5.2 Calcul de la sphère de plus grand rayon sans recouvrement avec une surface solide

Cette étape centrale de l'algorithme est assurée au moyen de la boucle suivante, Figure A 5.4, elle-même illustrée par la Figure A 5.5.

- Pour chaque triangle :  
Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur le plan du triangle appartient au triangle (§ A 5.2.1)
    - Si oui, alors R est la distance au plan du triangle  
cf. Figure A 5.5, cas 1
    - Si non, alors aller à l'étape suivante
  - Pour les deux arêtes du triangle relatives au sommet le plus proche :  
Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur la droite passant par l'arête du triangle appartient à l'arête (§ A 5.2.2)
    - Si oui, alors R est la distance à la droite passant par l'arête du triangle;  
cf. Figure A 5.5, cas 2
      - Retourner le rayon le plus court R
    - Si non, alors aller à l'étape suivante
  - Pour chaque sommet du triangle :  
Calculer  $R^2 = d^2$ , carré de la distance au sommet du triangle  
cf. Figure A 5.5, cas 3
    - Retourner le rayon le plus court R
- Retourner le rayon le plus court R.

**Figure A 5.4** Boucle permettant de tester si le projeté orthogonal du marcheur sur le plan du triangle appartient au triangle



**Figure A 5.5** Calcul de la sphère de plus grand rayon R

A 5.2.1 Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur le plan du triangle appartient au triangle

Pour tester si le projeté orthogonal du marcheur sur le plan du triangle appartient au triangle, nous commençons par déterminer le projeté orthogonal d'un point M sur le plan du triangle (§ A 5.2.1.1), puis nous testons si le point projeté appartient au prisme triangulaire issu du triangle (§ A 5.2.1.2). Ces deux étapes sont décrites au cours de cette section.

A 5.2.1.1 *Projeté orthogonal d'un point sur un plan*

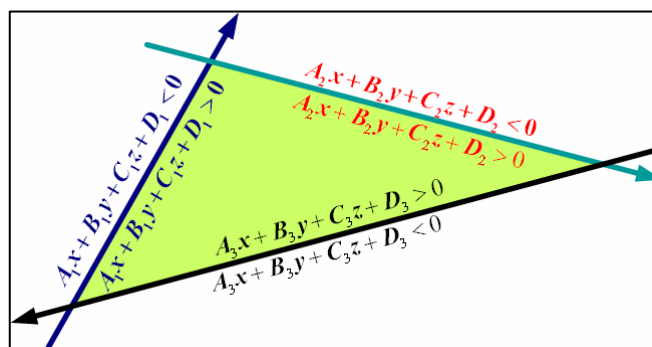
Du point M, abaissons une perpendiculaire à  $\pi$  qui rencontre  $\pi$  au point P. Soit  $\vec{n}$ , un vecteur normal à  $\pi$ , et S<sub>1</sub>, un point quelconque de  $\pi$ . En projetant  $\vec{MS}_1$  sur  $\vec{n}$ , nous obtenons  $\vec{MP}$  :

$$\vec{MP} = \vec{MP}_{\vec{n}} = \left( \frac{\vec{MS}_1 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n}. \tag{A 5.2}$$

D'où on tire les coordonnées du point P :  $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$ .

A 5.2.1.2 *Tester si un point appartient à un triangle*

Un prisme triangulaire peut-être défini par l'intersection de trois semi-espaces positifs, voir Figure A 5.6, où une équation de plan est simplement une équation du plan contenant une arête (on pourra choisir les plans normaux au triangle).



**Figure A 5.6** Prisme triangulaire défini par l'intersection de trois semi-espaces positifs

Or, l'équation d'un plan de l'espace tridimensionnel peut-être définie par la forme  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Compte tenu de la condition précédente (§ A 5.2.1.1), le point P de coordonnées  $(x, y, z)$  doit donc vérifier les conditions suivantes pour appartenir au triangle :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &> 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &> 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &> 0. \end{aligned} \quad \text{A (5.3)}$$

---

#### A 5.2.4 Tester si le projeté orthogonal du marcheur sur la droite passant par l'arête du triangle appartient à l'arête

La droite vectorielle passant par  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ , ayant  $\vec{u}(d, e, f)$  comme vecteur directeur est donnée par :

$$D : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(d, e, f), \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{A (5.4)}$$

P étant le projeté orthogonal de M sur  $[S_1S_2]$ , P vérifie cette équation vectorielle de droite pour  $k = \vec{S_1M} \cdot \vec{S_1S_2}$ . Donc  $P \in [S_1S_2]$  si  $0 \leq k \leq 1$ .

---

### A 5.3 Test de phase

Au terme de l'étape 2, le rayon de la sphère de plus grand rayon est connu. Il peut s'agir de la distance : (cas 1) au plan du triangle, (cas 2) à l'arête du triangle, (cas 3) au sommet du triangle.

Une fois le cas de figure identifié, le principe du test de phase proposé repose sur l'analyse du signe résultant d'un produit scalaire effectué entre les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{MP}$  où :

- $\vec{n}$  désigne, au sens général, la résultante des normales aux triangles adjacents au point le plus proche la résultante le(s) vecteur(s) normal(aux) au(x) triangle(s) considéré(s) d'autre part (un seul triangle dans le cas 1, deux dans le cas 2, plusieurs dans le cas 3).
- le vecteur formé entre le point M et le point P d'intersection sphère / phase solide d'une part (P dans les cas 1 et 2,  $S_p$  dans le cas 3 où  $S_p$  est le sommet le plus proche de M);



Le point M appartient alors à la phase fluide ( $\varphi_f$ ) si le signe du produit scalaire entre  $\vec{n}$ , résultante des normales aux triangles associées au point le plus proche, et  $\vec{MP}$  est négatif. Ce qui peut se résumer au moyen de la boucle suivante.

- Pour chaque vecteur normal  $\vec{n}_i$ .  
Tester si  $\vec{MP} \cdot \vec{n}_i < 0$ .
  - Si oui, alors  $M \in \varphi_f$ .  
Incrémenter le compteur de phase fluide, le parcours continue.
  - Si non, alors  $M \in \varphi_s$ .  
Arrêt du parcours, et retour à l'étape 1.

#### **A 5.4 Test de piégeage : le marcheur est-il situé à une distance supérieure à la distance de piégeage ?**

Le parcours aléatoire est arrêté lorsque le marcheur est piégé, c'est-à-dire qu'il arrive à proximité de la phase solide à une distance inférieure à une distance critique. Cette distance critique est généralement nommée épaisseur de coque dans la littérature, mais il semble plus judicieux de la rebaptiser épaisseur de peau lorsque la phase solide n'est pas exclusivement formée de sphères (ou coques). En dernière analyse, le terme distance de piégeage ( $d_p$ ) pourrait aussi convenir, et il a l'avantage d'être bien plus explicite. C'est celui que nous conserverons.

En pratique, pour préciser l'influence de la distance de piégeage lors d'une étude de convergence, il semble commode d'avoir recours à un paramètre adimensionnel  $\delta$  pour pouvoir généraliser les résultats obtenus :

$$R_{n+1} < d_p, \text{ où } d_p = \delta \times \Lambda' \quad \text{A (5.5)}$$

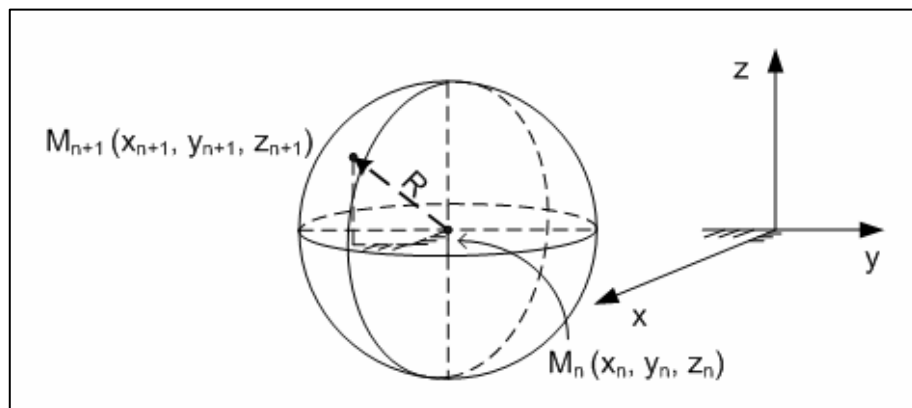
À titre indicatif, ce paramètre est généralement fixé à  $10^{-4}$  dans la littérature (cf. Chapitre 6). Il s'agit d'une distance de piégeage normalisée par rapport au rayon caractéristique de la géométrie étudiée.

### A 5.5 Positionnement aléatoire sur une surface sphérique

On cherche à générer des nombres aléatoires  $x_{n+1}$ ,  $y_{n+1}$  et  $z_{n+1}$  respectant l'équation de sphère

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + (z_{n+1} - z_n)^2 = R^2 \quad \text{A (5.6)}$$

de centre  $(x_n, y_n, z_n)$  et de rayon  $R$  connus, tel qu'illustré à la Figure A 5.7.



**Figure A 5.7** Positionnement aléatoire du marcheur  $M_{n+1}$  sur la surface sphérique de centre  $M_n$  et de rayon  $R$

Cette équation est vérifiée, si  $(x + y + z) \neq 0$ , pour

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + x_n, \\ y_{n+1} = \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y_n, \\ z_{n+1} = \frac{Rz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z_n. \end{cases} \quad \text{A (5.7)}$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des nombres aléatoires indépendants de moyenne nulle et de variance unitaire; c'est-à-dire répartis selon une gaussienne.

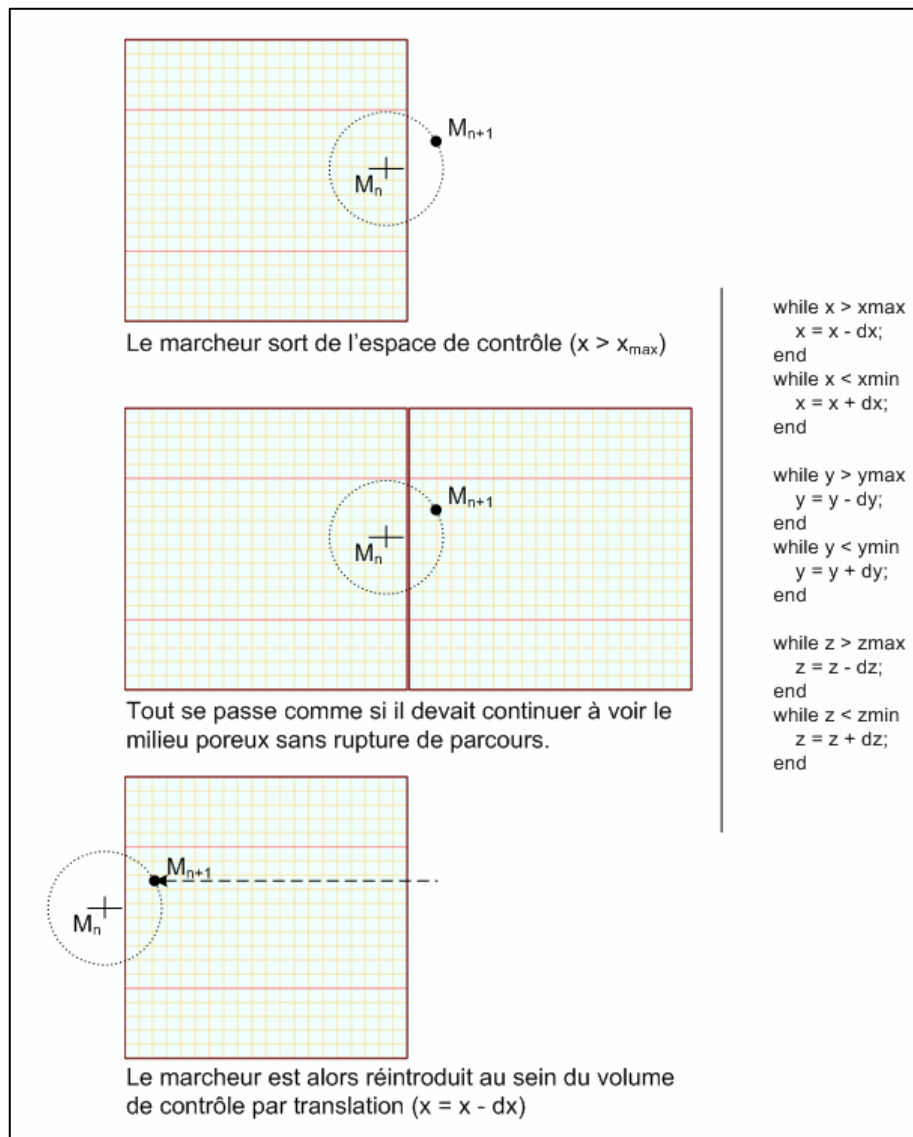
Cette dernière propriété est importante car elle permet d'assurer une répartition homogène de points positionnés sur la surface de la sphère de rayon  $R$ . À contrario, une distribution homogène de nombres aléatoires centrés sur zéro aurait augmenté la densité surfacique de marcheurs au niveau des six pôles  $(R,0,0)$ ,  $(-R,0,0)$ ,  $(0,R,0)$ ,  $(0,-R,0)$ ,  $(0,0,R)$  et  $(0,0,-R)$ .

Pour s'en convaincre, réalisons l'expérience de pensée suivante. En distribuant uniformément des points sur une ligne verticale du globe qui s'étend du nord au sud, puis en procédant de la même manière sur le pourtour d'une ligne horizontale située au niveau de l'équateur, on positionne autant de points sur chaque élément surfacique du globe défini, pour un rayon constant, par des angles azimutal et vertical constants. Les éléments surfaciques situés à proximité des pôles ayant une surface inférieure à ceux situés au niveau de l'équateur, on en déduit que l'utilisation d'une distribution homogène de nombres aléatoires se traduit bien par l'existence d'une augmentation de la densité surfacique de marcheurs à la surface des pôles; raison pour laquelle une distribution normale est requise.

En pratique, pour des raisons de performance, on a recours à des fonctions optimisées issues de la bibliothèque `gsl` nomées `gsl_ran_dir_2d`, et `gsl_ran_dir_3d`. Celles-ci sont disponibles gratuitement sur internet (<http://www.gnu.org/software/gsl/>). La méthode d'optimisation employée en 3D est due à Robert E. Knop (Knop, 1970)<sup>23</sup> (Knuth, 1997)<sup>24</sup>.

## A 5.6 Conditions aux limites périodiques

Lorsque le marcheur sort de l'espace de contrôle avant d'avoir été piégé par la phase solide, il est nécessaire de l'y réintroduire afin qu'il puisse terminer sa course sans rupture artificielle de parcours. Cette condition est assurée par l'implémentation de conditions aux limites périodiques. Le principe de l'opération consiste à réintroduire le marcheur au sein de la géométrie diphasique de manière à ce qu'il continue à voir l'environnement qu'il avait commencé à explorer. Lorsque l'espace poreux est décrit par translation d'un motif élémentaire, la réintroduction du marcheur a lieu par translation. Ce principe de réintroduction est illustré par la Figure A 5.8, complétée par quelques lignes de code permettant de guider la programmation.



**Figure A 5.8** Illustration schématique et codée du principe de réintroduction du marcheur par implémentation de conditions aux limites périodiques

# 6 Simulations de parcours aléatoires

## 6.1 Introduction

### 6.2 Méthode de simulation

#### 6.2.1 Convergence de la solution

6.2.1.1 Norme  $L_2$

6.2.1.2 Norme  $L_\infty$

#### 6.2.2 Estimation de l'erreur sur la solution numérique

6.2.2.1 Solutions de références

6.2.2.2 Loi d'évolution de l'erreur en fonction du nombre de PAs

### 6.3 Résultats et discussion

#### 6.3.1 Cellule périodique tridimensionnelle idéalisée

#### 6.3.2 Géométries canoniques

### 6.4 Conclusion

#### 6.4.1 Distance de piégeage préconisée

#### 6.4.2 Estimation de l'erreur et de l'intervalle de confiance

### Remerciements

### Références

---

## 6.1 Introduction

La méthode du parcours aléatoire (MPA) constitue un outil de calcul puissant non conventionnel des propriétés de dissipation d'énergie acoustique d'un milieu poreux, par diffusion de la chaleur, lorsque celui-ci est soumis à une excitation acoustique. Ces propriétés sont habituellement évaluées par la détermination du module de compressibilité dynamique du milieu poreux, ou encore, de manière équivalente, de sa perméabilité dynamique thermique (Lafarge, 1997)<sup>1</sup>.

Bien que la MPA soit prometteuse, elle est encore peu documentée et souffre d'un manque de détails techniques permettant de déterminer comment la perméabilité dynamique thermique varie avec les conditions de simulation; telles que la distance de piégeage, le nombre de parcours aléatoires (PAs), et la nature de la configuration géométrique. Cette information s'avère pourtant nécessaire pour valider et soutenir le développement de la méthode. L'objet de ce chapitre est donc de remédier à ces lacunes en testant la convergence de la solution d'une part, et en évaluant l'influence des paramètres de simulation sur l'erreur commise lorsque des solutions de référence existent.

L'intérêt de cette méthode de calcul non-conventionnelle tient au fait que la simulation de PAs soit indépendante de la fréquence. Cela signifie que les propriétés de dissipation par effets thermiques peuvent être calculées quelque soit la fréquence, pour un coût de calcul identique. On s'affranchit de ce fait des difficultés rencontrées avec les méthodes de calcul numérique conventionnelles, telle que la méthode des éléments finis, pour laquelle le maillage doit être raffiné au voisinage de l'interface lorsque la fréquence augmente afin de prendre en compte la diminution de l'épaisseur de la couche limite, ce qui se traduit généralement par un coût de calcul de la réponse dynamique rédhibitoire pour des configurations géométriques tridimensionnelles (Gasser, 2003)<sup>2</sup> (Gasser, 2005)<sup>3</sup>. De plus, la méthode nécessite la simulation d'un grand nombre de PAs, ce qui convient bien à l'utilisation des ressources informatiques émergentes constituées de grappes dédiées au calcul séquentiel ou parallèle.

La MPA a notamment été implémentée en deux (Torquato, 1989)<sup>4</sup>, puis trois dimensions (Coker, 1994)<sup>5</sup> pour calculer la constante de piégeage d'un arrangement bidimensionnel de fibres de sections circulaires pénétrables, puis de géométries tridimensionnelles digitalisées. Néanmoins, la constante de piégeage ne fournit que le comportement asymptotique basses fréquences du problème thermique.

Les premières simulations numériques en régime harmonique ont récemment été proposées par Lafarge dans une configuration bidimensionnelle pour le cas d'arrangements réguliers et aléatoires de fibres de sections circulaires (Lafarge, 2002)<sup>6</sup>. La réponse dynamique thermique est calculée sur deux ordres de grandeur autour de la fréquence de transition, et comparée aux modèles de Champoux-Allard modifié (Champoux et Allard, 1991)<sup>7</sup> (Allard, 1993)<sup>8</sup> (Lafarge, 1993)<sup>9</sup> et de Lafarge (Lafarge, 1997)<sup>1</sup>. En outre, les tendances observées confirment celles reportées par Cortis et ses collaborateurs (Cortis, 2001)<sup>10</sup>. À savoir que le modèle de Lafarge permet de prendre précisément en compte le comportement thermique du fluide autour de la fréquence de transition – là où les dissipations sont les plus importantes – pour des configurations régulières, mais aussi aléatoires. Lafarge rapporte néanmoins un petit problème de convergence de la méthode numérique autour du deuxième

point d'inflexion de la réponse thermique (hautes fréquences)<sup>21</sup> (Lafarge, 2005)<sup>11</sup>.

En théorie, la MPA présentée par Torquato et Kim (Torquato, 1989)<sup>4</sup>, et adaptée récemment par Lafarge en régime hamonique (Lafarge, 2002)<sup>6</sup>, converge vers la réponse exacte du système pour un nombre infini de PAs. En d'autres termes, la réponse numérique dévie de la réponse exacte avec une erreur inversement proportionnelle à la racine du nombre de parcours aléatoires; voir par exemple une discussion de Feynman pour un énoncé de cette propriété (Feynman, 1999)<sup>12</sup>. En pratique, les principales études recensées (Zheng, 1988)<sup>13</sup> (Torquato, 1989)<sup>4</sup> (Coker, 1994)<sup>5</sup> (Lafarge, 2002)<sup>6</sup> relatent des simulations sur une population de l'ordre de 50 000 à 500 000 PAs, et pour une distance de piégeage  $d_p < 0.01\% a$ ,  $a$  étant le rayon caractéristique des fibres ou sphères solides. Les résultats sont jugés relativement insensibles à une distance de piégeage normalisée  $d_p/a < 0.01\%$ , et satisfaisants pour une telle population de marcheurs.

Néanmoins, ces recherches ne permettent pas de quantifier l'erreur et l'intervalle de confiance commis en fonction : (i) de la nature de la géométrie étudiée (bi- ou tridimensionnelle, degré de concavité); (ii) du nombre de parcours aléatoires  $NPA$ ; (iii) et de la distance de piégeage  $d_p$ , ou de la distance de piégeage normalisée  $d_p / a$ . Mentionnons d'autre part que les simulations proposées sont restreintes aux cas de matériaux fibreux ou granulaires. Il apparaît dès lors important de tenter de dégager plus précisément l'influence de ces trois paramètres sur la solution numérique.

En définitive, l'objectif est de pouvoir délimiter les conditions de simulations adéquates pour une configuration géométrique donnée, tout en estimant l'erreur commise sur la prédiction associée.

Dans ce chapitre, on examinera donc les performances de l'algorithme de la MPA permettant de calculer la perméabilité dynamique thermique de structures périodiques. Une algorithmique de la méthode du PA étendue à des structures tridimensionnelles a été détaillée au cours du Chapitre 5. L'algorithme décrite a initialement été implémentée sous

---

<sup>21</sup> « L'expression (9) de la probabilité  $p(R)$  n'est pas bonne. Il faut poser à la place de l'eq.(9)  $p(R) = 1/\text{besseli}(0,\mu)$  en notation Matlab. Cette erreur était à l'origine de petites déviations observées aux fréquences intermédiaires. » (Erratum, D. Lafarge, private communication).

Matlab, puis en C, afin de réaliser un grand nombre de simulations sur des structures périodiques tridimensionnelles à l'aide de grappes de calcul hautes performances. À cette fin, une configuration typique impliquant les données microstructurales d'une mousse d'aluminium à cellules ouvertes est tout d'abord présentée. La convergence de la solution peut alors être testée sur cette configuration géométrique tridimensionnelle, constituée d'une cellule périodique idéalisée ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre. Des solutions analytiques de référence, permettant de tester l'influence des paramètres de simulation sur la convergence de la solution, sont ensuite présentées. Les résultats des simulations sont finalement reportés et discutés.

## 6.2 Méthode de simulation

Une méthode de simulation est mise en place de manière à tester la convergence de la solution numérique d'une part, et estimer l'erreur commise sur la prédiction en fonction des paramètres de simulation d'autre part.

La perméabilité dynamique thermique  $\tilde{k}'(\omega)$  est calculée sur soixante points répartis uniformément sur une échelle logarithmique centrée sur  $\omega_{ic}$ , pulsation thermique critique (du régime isotherme en limite basses fréquences au régime adiabatique en limite hautes fréquences). Pour le cas d'un tube de section circulaire, la pulsation thermique critique est donnée par les relations suivantes (Lafarge, 1997)<sup>1</sup>,

$$\omega_{ic} = \frac{\Phi v'}{k'_0}, \quad (6.1)$$

avec

$$k'_0 = \frac{\Lambda'^2}{8}. \quad (6.2)$$

Ce qui nous permet d'estimer, à priori, la pulsation thermique critique

$$\omega_{ic} = \frac{8\Phi v'}{\Lambda'^2} \quad (6.3)$$

à partir de la connaissance des caractéristiques physiques du fluide d'une part, de la configuration géométrique d'autre part; et donc d'en déduire les



fréquences pour lesquelles la réponse complexes sera calculée. On rappelle que  $\nu' = \kappa / \rho_0 C_p$  est la diffusivité thermique du fluide,  $\Lambda' = 2V_f / S_s$  est la longueur caractéristique de la configuration géométrique, et  $\Phi$  la porosité ouverte de la configuration géométrique. Lorsque le fluide est de l'air, la diffusivité thermique est calculée en prenant  $\kappa = 0.026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$ , et  $C_p = 1000 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ , ce qui donne  $\nu' \approx 2.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . D'autre part, connaissant la configuration géométrique à tester, la longueur caractéristique thermique est obtenue par intégration du volume fluide  $V_f$  et de la surface solide mouillée  $S_s$  de la cellule périodique considérée (en contact avec le fluide saturant).

En pratique, les simulations seront réalisées sur des structures dont les tailles caractéristiques sont comprises entre 1 et 10 m. Connaissant le facteur d'échelle [structure simulée – microstructure] ( $10^{-3}$  par exemple), les résultats en amplitude et en fréquences issus des simulations numériques pour la structure simulée peuvent ensuite être transposés en amplitudes et en pulsations à la microstructure. Sachant que  $k'(\omega) \sim \Lambda'^2$  (équation 6.2) et  $\omega \sim 1/\Lambda'^2$  (équation 6.3), amplitudes et pulsations de la microstructure peuvent donc être obtenues respectivement au moyen des relations suivantes :

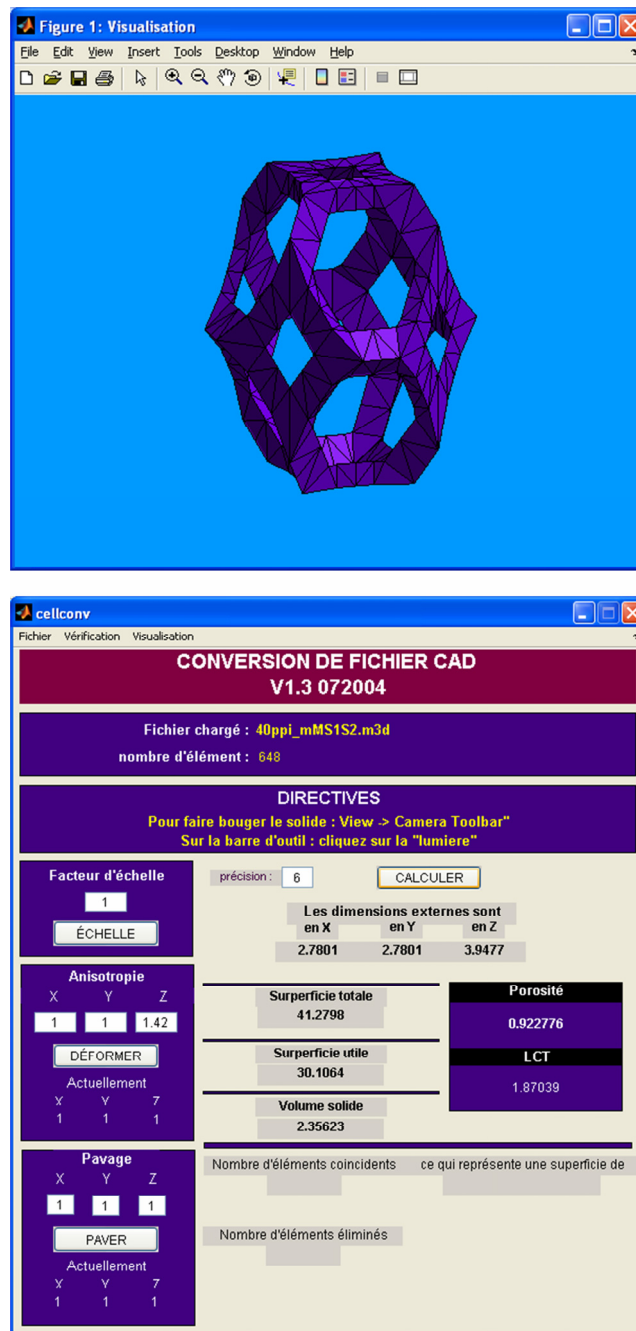
$$k'(\omega)_{\text{microstructure}} = k'(\omega)_{\text{structure simulée}} \times \text{facteur d'échelle}^2, \quad (6.4)$$

$$\omega_{\text{microstructure}} = \omega_{\text{structure simulée}} / \text{facteur d'échelle}^2. \quad (6.5)$$

L'ensemble des simulations de parcours aléatoires est mené sur une grappe de calcul séquentiel du Centre de Calcul Scientifique de l'Université de Sherbrooke (chacune des unités de calcul est composé de processeurs Intel Pentium 4, 3.2 GHz). Cela permet de simuler un grand nombre de parcours aléatoires de manière systématique afin d'évaluer l'influence des paramètres de simulation sur la perméabilité dynamique thermique.

### 6.2.1 Convergence de la solution

Dans le cas général constitué d'une configuration géométrique non-triviale, il n'existe pas de solution de référence pour tester la convergence de la solution. On peut néanmoins étudier la stabilité de la solution numérique au moyen d'indicateurs appelés normes. Il s'agit alors d'examiner l'évolution



**Figure 6.1** Configuration géométrique typique de microstructure idéalisée de mousse permettant de tester la convergence de la solution. En bas, porosité et longueur caractéristique thermique (LCT) sont obtenus par intégration spatiale des éléments de volume et de surface. En haut, la cellule périodique tridimensionnelle a la forme d'un tétrakaidécèdre, ses ligaments sont de section triangulaire, et le facteur d'anisotropie est de 1.42.

de la différence relative entre la réponse calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA$ , et celle calculée pour un nombre de PAs égal  $NPA + \Delta NPA$ . En pratique,  $\Delta NPA$  est fixé à 2000. Deux normes sont présentées ci-dessous.

La configuration géométrique étudiée est une microstructure idéalisée typique de mousse. Il s'agit d'une cellule périodique tridimensionnelle ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre, dont les ligaments ont une section de forme triangulaire d'épaisseur  $t \approx 0.37$  m, et pour laquelle  $\Lambda' = 1.87039$  m, voir Figure 6.1.

### 6.2.1.1 Norme $L_2$

La norme  $L_2$ , telle que formulée, est une mesure de la stabilité de la solution en fonction du nombre de PAs. Elle représente la somme des variations relatives sur la bande de fréquences considérée, entre la réponse calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA + \Delta NPA$ , et celle calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA$ . La norme  $L_2$  est construite de la manière suivante :

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_f [\Re(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) - \Re(\tilde{k}'(f)_{NPA})]^2}{\sum_f \left[ \frac{\Re(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) + \Re(\tilde{k}'(f)_{NPA})}{2} \right]^2} + \frac{\sum_f [\Im(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) - \Im(\tilde{k}'(f)_{NPA})]^2}{\sum_f \left[ \frac{\Im(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) + \Im(\tilde{k}'(f)_{NPA})}{2} \right]^2}} \quad (6.6)$$

### 6.2.1.2 Norme $L_\infty$

La norme  $L_\infty$  est une mesure, à priori, plus contraignante que la norme  $L_2$  dans la mesure où, cette fois-ci, c'est la plus grande des différences locales (à fréquence donnée), entre la réponse calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA + \Delta NPA$ , et celle calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA$ , qui est comparée à la réponse moyenne. Contrairement à la norme  $L_2$ , les fluctuations de réponses en fréquence cumulées ne sont donc plus lissées par la réponse moyenne cumulée. On force en revanche la réponse à être calculée sur un nombre suffisant de PAs, pour que les fluctuations relatives les plus importantes de la réponse ne dépassent pas un seuil admissible. La norme  $L_\infty$  est construite de la manière suivante :

$$L_\infty = \max \left\{ \frac{\max_f |\Re(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) - \Re(\tilde{k}'(f)_{NPA})|}{\frac{1}{nb\ f} \sum_{i=1}^{nb\ f} \frac{\Re(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) + \Re(\tilde{k}'(f)_{NPA})}{2}}, \frac{\max_f |\Im(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) - \Im(\tilde{k}'(f)_{NPA})|}{\frac{1}{nb\ f} \sum_{i=1}^{nb\ f} \frac{\Im(\tilde{k}'(f)_{NPA+\Delta NPA}) + \Im(\tilde{k}'(f)_{NPA})}{2}} \right\}, \quad (6.7)$$

avec  $nb\ f$  le nombre de fréquences calculé.

## 6.2.2 Estimation de l'erreur sur la solution numérique

Alternativement, la connaissance de solutions de références permet d'estimer l'erreur commise sur la prédiction numérique en fonction des paramètres de simulation. Les solutions de référence qui existent pour le cas de tubes de sections constantes seront présentées dans un premier temps. On cherchera ensuite à dégager, à priori, une loi simple d'évolution de l'erreur en fonction du nombre de PAs. La pertinence d'une telle loi pourra alors être évaluée par la méthode des moindres carrés à l'issue des simulations, en examinant le coefficient de corrélation déterminé. Les coefficients de la loi nous renseigneront sur le taux de décroissance de l'erreur en fonction du nombre de PAs, pour différentes distances de piégeage. Le rayon générateur des géométries canoniques sera fixé à  $R = 10$  m.

### 6.2.2.1 Solutions de références

Cette section est dédiée à la présentation de géométries dites canoniques pour lesquelles des solutions analytiques approchées à 0.1 % près sont connues.

Stinson (Stinson, 1991)<sup>14</sup> propose de simplifier la théorie exacte de Kirchhoff (Kirchhoff, 1868)<sup>15</sup> rendant compte de la propagation du son, dans des tubes de section circulaire pour la gamme suivante de rayons et de fréquences:

$$r \cdot f^{3/2} < 10^4 \text{ m.s}^{-3/2}, r > 10 \mu\text{m}, \quad (6.8)$$

c'est-à-dire pour

$$r > 10 \mu\text{m}, f < 10 \text{ MHz}. \quad (6.9)$$

L'analyse numérique de la solution des équations formulées par Kirchhoff lui permet de formuler les observations suivantes :

- Dépendance purement axiale de la pression acoustique constante à travers la section tubulaire (dans le pire des cas, approximation vérifiée à 0.1 % près en limites *large tube - haute fréquence*).

- Masse volumique  $\rho$  et pression  $p$  acoustiques sont d'amplitudes comparables lorsque ramenées à la densité  $\rho_0$  et à la pression  $P_0$  du fluide à l'équilibre. Ces termes sont égaux en amplitude dans des conditions isothermes (rapport  $|\tau/T_0|$  de la température acoustique  $\tau$  sur la température du fluide à l'équilibre  $T_0$  négligeable en amplitude), et diffèrent d'un facteur  $\gamma = 1.4$  pour des conditions adiabatiques (influence non négligeable de la température acoustique). Dans tous les cas  $\rho/\rho_0 \sim p/P_0$ .
- L'approximation  $\omega\nu/c^2 \ll 1$  permet la séparation formelle des contributions visqueuses et thermiques (voir Chapitre 5). Ainsi, la densité effective s'écrit indépendamment des effets de conduction thermique et la compressibilité est une fonction de la diffusivité thermique  $\nu'$ , et non de la viscosité cinématique  $\mu = \eta/\rho_0$ .

Stinson émet ensuite l'hypothèse que ces observations puissent s'étendre au cas de tubes uniformes de section arbitraire afin d'élaborer une théorie généralisée de la propagation du son dans des tubes de section constante petits à grands.

En prenant en compte la direction essentiellement axiale de la vitesse acoustique en tubes de section constante, l'équation linéarisée de la dynamique des gaz visqueux, sous sollicitations harmoniques ( $\partial\tilde{p}/\partial x \sim \tilde{q}\tilde{p}$ ), est réductible à l'équation aux dérivées partielles désormais scalaire

$$\nabla_s^2 u - \left(\frac{j\omega}{\mu}\right)u = \left(\frac{\tilde{q}}{\eta}\right)p, \quad (6.10)$$

où  $\tilde{q}$  étant le nombre d'onde complexe, et  $\nabla_s^2$  est le terme de l'opérateur Laplacien représentant la différentiation sur la section, tel que  $\nabla^2 \equiv \nabla_s^2 + \partial^2/\partial x^2$  (dans cet exemple, on considère une propagation selon l'axe des  $x$ ). Dans ces conditions, l'équation linéarisée de la dynamique des gaz visqueux est en tous points formellement identique à l'équation de la chaleur linéarisée,

$$\nabla_s^2 \tau - \left(\frac{j\omega}{\nu'}\right)\tau = -\left(\frac{j\omega}{\kappa}\right)p. \quad (6.11)$$

Moyennant les changements de variables  $u = -(\tilde{q}p/j\omega\rho_0)\psi$  et  $\tau = (p/\rho_0 C_p)\psi$ , et compte tenu d'une condition aux limites identique d'annulation des vitesse et température acoustiques à la paroi, les champs

de vitesse et de température acoustiques sont alors solution d'une seule équation différentielle,

$$\nabla_s^2 \psi - \left( \frac{j\omega}{\nu} \right) \psi = - \frac{j\omega}{\nu} \quad (6.12)$$

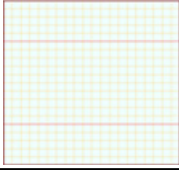
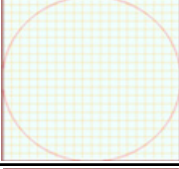
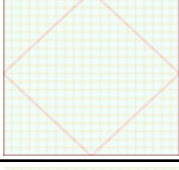
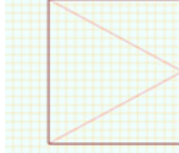
où l'on posera  $\nu = \eta / \rho_0 = \mu$  pour décrire le champ solution du problème de convection, et  $\nu = \kappa / \rho_0 C_p$  pour décrire le champ solution du problème de diffusion.

Ce formalisme permet de mettre en évidence l'existence d'une fonction  $F(\nu) = \langle \psi \rangle$  associée à la moyenne d'un champ scalaire généralisé  $\psi$ , champ solution approché des problèmes locaux de diffusion et de convection, lorsque une onde acoustique se propage dans un tube de section constante.  $\nu$  représente une variable de diffusion généralisée. Ainsi,  $\nu$  est substituable par la diffusivité thermique  $\nu' = \kappa / \rho_0 C_p$  lorsque on s'intéresse aux effets thermiques et par la viscosité cinématique  $\mu = \eta / \rho_0$  lorsque on s'intéresse aux effets visqueux. Ces fonctions solutions sont reportées au Tableau 6.1 pour le cas de géométries canoniques. Les solutions pour les cas particuliers du cercle et des fentes ont initialement été publiées par Zwicker et Kosten (Zwicker et Kosten, 1949)<sup>16</sup>, et Attenborough (Attenborough, 1983)<sup>17</sup>, tandis que les cas rectangulaire et triangulaire sont traités par Stinson (Stinson, 1991)<sup>14</sup>, puis Stinson et Champoux (Stinson et Champoux, 1992)<sup>18</sup>.

Les solutions analytiques approchées s'expriment en termes de perméabilité dynamique thermique sous la forme générale suivante :

$$k'(\omega) = \frac{\nu'}{j\omega} \times F(\nu'). \quad (6.13)$$

On se reportera au Tableau 6.1 pour l'expression détaillée de  $F(\nu')$ , selon la forme de section du tube considéré.

<p><b>Fentes</b> écartement <math>e</math> <math>\Lambda' = e = R</math></p>		$F(\nu') = 1 - \frac{\tanh\left(\frac{e}{2} \sqrt{\frac{j\omega}{\nu'}}\right)}{\frac{e}{2} \sqrt{\frac{j\omega}{\nu'}}$
<p><b>Cercle</b> rayon <math>R</math> <math>\Lambda' = R</math></p>		$F(\nu') = 1 - \frac{2 J_1\left(R \sqrt{\frac{-j\omega}{\nu'}}\right)}{R \sqrt{\frac{-j\omega}{\nu'}} J_0\left(R \sqrt{\frac{-j\omega}{\nu'}}\right)}$
<p><b>Rectangle</b> demi-hauteurs <math>a</math> et <math>b</math> <math>\Lambda' = a = b = R/\sqrt{2}</math></p>		$F(\nu') = \frac{4j\omega}{\nu' a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha_k^2 \beta_n^2 \left( \alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{j\omega}{\nu'} \right) \right]^{-1}$ $\alpha_k = \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a}, \beta_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{b}$
<p><b>Triangle équilatéral</b> côté <math>d</math> <math>\Lambda' = d/2\sqrt{3}</math></p>		$F(\nu') = \frac{\varepsilon^2 - 3\varepsilon \coth(\varepsilon) + 3}{\varepsilon^2}$ $\varepsilon = \frac{d\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{j\omega}{\nu'}}$

**Tableau 6.1** Synthèse des solutions analytiques approchées de référence disponibles pour des tubes de section constante. La section fluide du tube a la forme de fentes, d'un cercle, d'un rectangle, d'un triangle équilatéral. Ces solutions sont valables en deux, et trois dimensions. En pratique, les solutions analytiques approchées seront comparées aux solutions numériques en fixant  $R$  à 10 m

### 6.2.2.2 Loi d'évolution de l'erreur en fonction du nombre de PAs

Les phénomènes stochastiques (recours au calcul des probabilités pour exploiter des données statistiques) se caractérisent généralement par une évolution de l'erreur inversement proportionnelle à la racine du nombre d'expériences réalisées,  $N$ ; voir par exemple une discussion de Feynman (Feynman, 1999)<sup>12</sup> :

$$\varepsilon \sim 1/\sqrt{N}. \quad (6.14)$$

Si l'on transpose cette tendance au problème de la simulation d'un mouvement Brownien, cela signifie qu'il est nécessaire d'augmenter le nombre de parcours aléatoires  $NPA$  de deux ordres de grandeur afin de réduire l'erreur d'un ordre de grandeur lors d'une simulation. Il est donc important a priori pour étudier l'influence du nombre de PAs sur l'erreur  $\varepsilon$

de se doter d'une échelle dynamique permettant de conserver la même sensibilité sur plusieurs ordres de grandeur, l'échelle logarithmique. On s'attend donc, en prenant le logarithme décimal (généralement noté logarithme dans la suite du texte) de l'équation (6.14) :

$$\log_{10} \varepsilon \sim -\frac{1}{2} \log_{10} NPA, \quad (6.15)$$

à une relation linéaire liant l'évolution du logarithme de l'erreur en fonction au logarithme du nombre de parcours aléatoires. En généralisant cette observation, il semble judicieux de proposer une loi d'évolution de l'erreur commise sur la prédiction en fonction du nombre de parcours aléatoires de la forme

$$\log_{10} \varepsilon = a \log_{10} NPA + b. \quad (6.16)$$

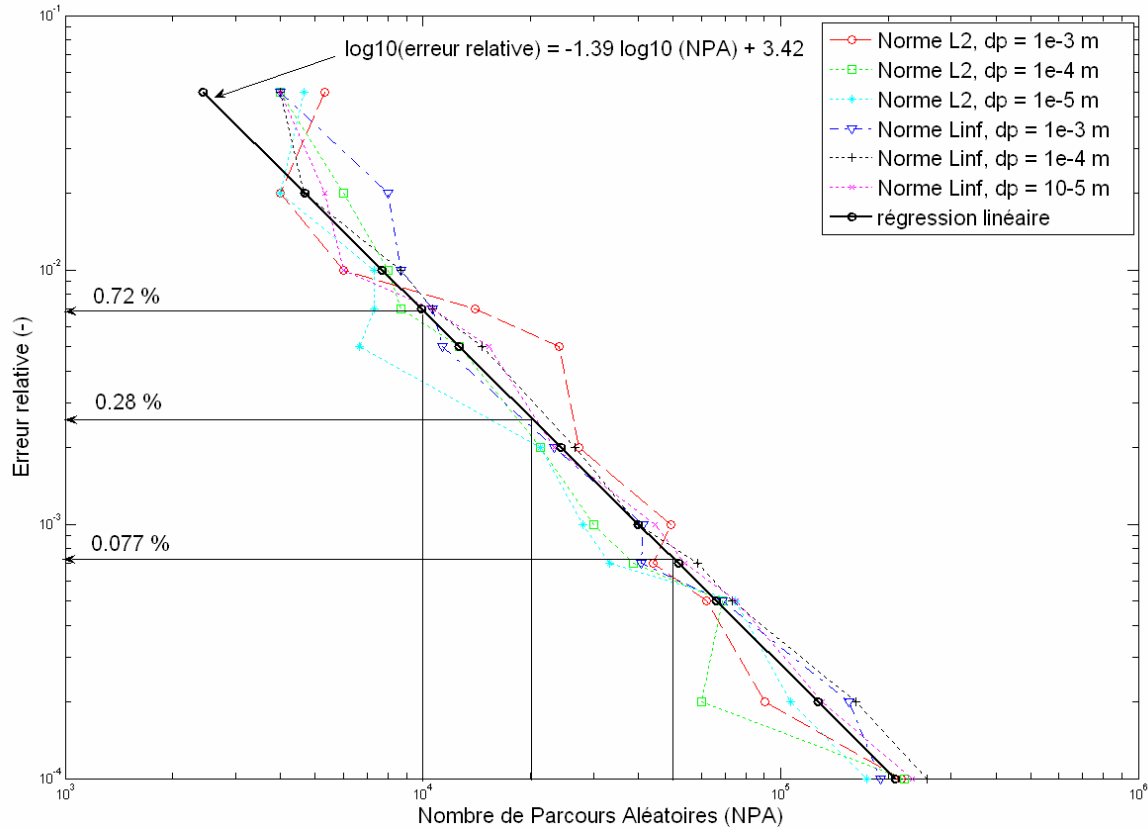
Ainsi présenté, le coefficient  $a$  (pente de la droite) représente un taux de décroissance linéaire du logarithme de l'erreur en fonction logarithme du nombre de parcours aléatoires et s'exprime en *nombre de marches*<sup>-1</sup>. L'ordonnée à l'origine (le coefficient  $b$ ) représente quant à elle une erreur initiale (sans dimension), qui serait obtenue en extrapolant la relation pour un nombre de PAs unitaire. Pour faire suite à ces observations, il est proposé de calculer ces coefficients au moyen de régressions linéaires par la méthode des moindres carrés, et d'évaluer l'hypothèse de corrélation linéaire entre les variables  $\log_{10}\varepsilon$  et  $\log_{10}NPA$  grâce au coefficient de corrélation  $r$ . Cette méthode devrait permettre de quantifier l'influence du nombre de PAs sur l'estimation de la perméabilité, pour les différentes géométries étudiées, et pour différentes distances de piègeages.

### 6.3 Résultats et discussion

Cette section est dédiée à la présentation des résultats de simulations de parcours aléatoires obtenus selon la méthode décrite ci-dessus, ainsi qu'à leurs discussions. En premier lieu, les résultats relatifs à la convergence de la solution numérique, dans le cas général d'une configuration géométrique pour laquelle il n'existe pas de solution de référence, sont tout d'abord présentés et discutés. En second lieu sont alors présentés puis discutés les résultats relatifs à l'estimation de l'erreur relative commise sur la prédiction de la perméabilité dynamique thermique en fonction des paramètres de simulation lorsque la configuration géométrique admet une solution de référence, cas des tubes de section constante.



6.3.1 Cellule périodique tridimensionnelle idéalisée



**Figure 6.2** Étude de la convergence de la solution évaluée au moyen d’indicateurs appelés normes,  $L_2$  et  $L_\infty$ , dont on examine l’évolution avec le nombre de parcours aléatoires pour différentes distances de piégeage  $d_p$

La Figure 6.2 présente l’évolution selon une échelle logarithmique de l’erreur relative  $\varepsilon$  associée aux normes  $L_2$  et  $L_\infty$  en fonction du nombre de parcours aléatoires, pour trois distances de piégeage :  $d_p = 10^{-3}$  m,  $d_p = 10^{-4}$  m, et  $d_p = 10^{-5}$  m. Chaque point est la résultante moyenne de trois tests de simulations.  $11 \times 6 \times 3 = 198$  simulations ont été effectuées pour tracer ce graphique (résultats obtenus en quatre heures environ grâce à la grappe de calcul séquentiel). Une régression linéaire a été calculée à partir de l’ensemble des résultats de simulations en utilisant une fonction de la forme de l’équation (6.16), et comparée aux courbes de convergence. La droite résultante, qui minimise les écarts avec l’ensemble des résultats de simulations, est obtenue avec un bon degré de corrélation,  $r = -0.95$ . La

tendance générale mentionnée est donc raisonnablement quantifiable, avec  $a = -1.39$  (logarithme décimal de l'erreur relative / logarithme décimal du nombre de parcours aléatoires), et  $b = 3.42$  (26 3026 %); où  $a$  et  $b$  représentent respectivement le taux de décroissance logarithmique moyen des fluctuations relatives en fonction du logarithme du nombre de parcours aléatoires, et la fluctuation moyenne qui serait obtenue pour un nombre de parcours aléatoires unitaire. Typiquement, si on augmente le nombre de parcours aléatoires d'un ordre de grandeur, on divise par 25 l'erreur relative. Sachant qu'à 10 000 PAs on a déjà une erreur de 0.72 %, il ne semble pas nécessaire d'augmenter significativement le nombre de PAs. Il s'agit d'un compromis temps-précision souhaitée. On remarque en outre que les points de simulations associés à la norme  $L_2$  ( $L_\infty$ ) se situent généralement au dessus (dessous) de la droite de régression, ce qui indique que la norme  $L_\infty$  est effectivement plus contraignante que la norme  $L_2$ .

On peut donc raisonnablement conclure à la stabilité de la solution numérique calculée par la méthode du parcours aléatoire dans une configuration géométrique idéalisée typique de mousse (cellule périodique tridimensionnelle ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre, dont les ligaments ont une section triangulaire). La somme des variations relatives sur la bande de fréquences considérée, entre la réponse calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA + \Delta NPA$ , et celle calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA$ , est faible et diminue en moyenne de manière monotone selon la loi mentionnée, quelle que soit la norme considérée.

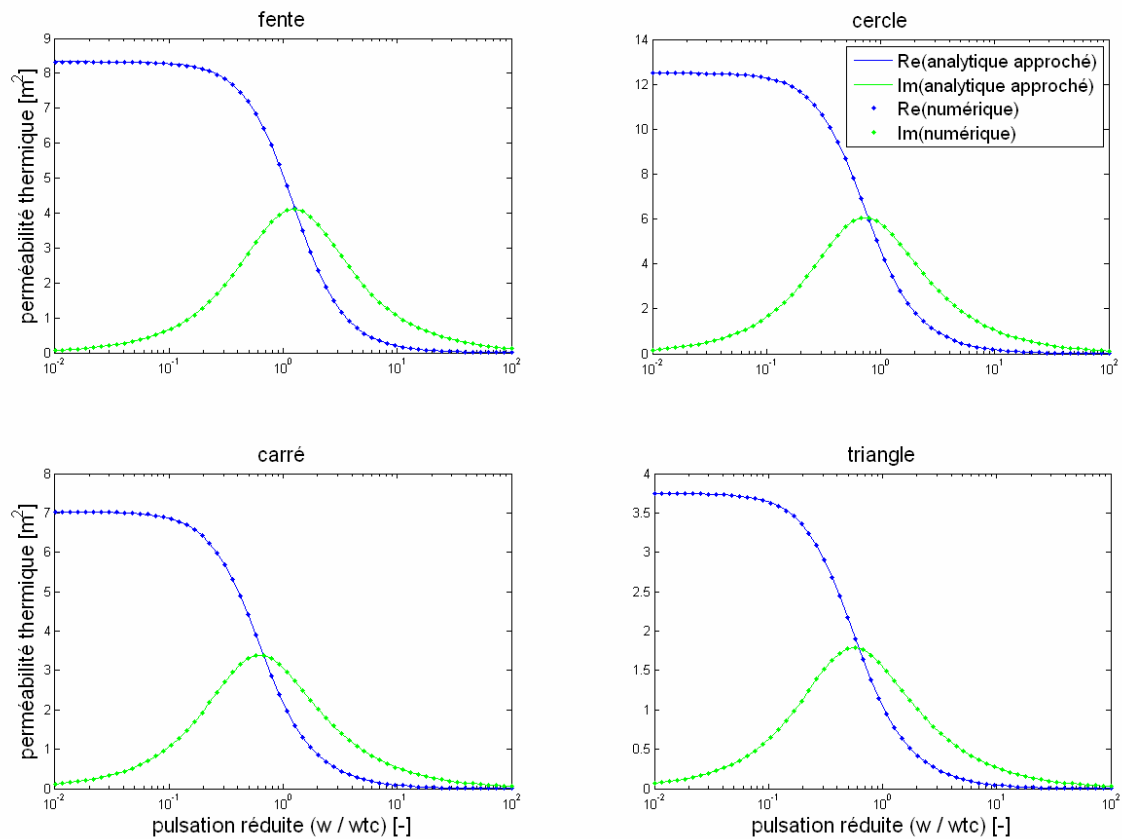
En résumé, on a montré:

- que la méthode converge bien selon une évolution à toute fin pratique monotonique en suivant une loi du type  $(a \log_{10} NPA + b)$ ;
- que pour cette forme de cellule la variation des résultats en fonction du NPA est prédictible ce qui nous laisse penser qu'une NPA de 50 000 offre un bon compromis temps-précision.

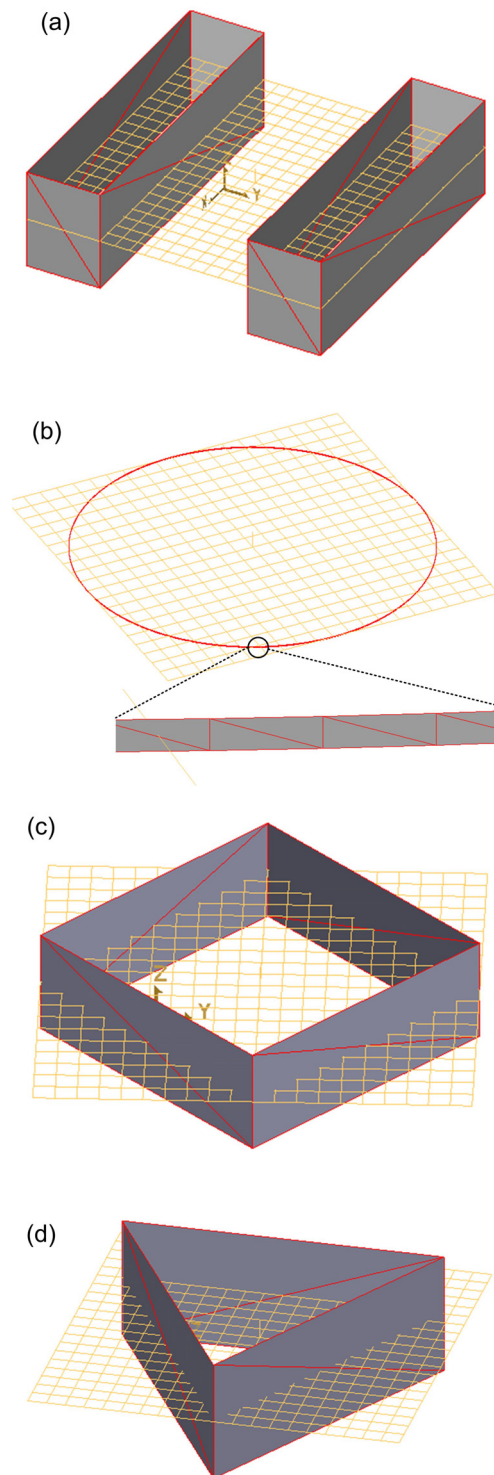
### 6.3.2 Géométries canoniques

La Figure 6.3 présente la comparaison des valeurs de perméabilité dynamique thermique obtenues par simulations de PAs (points), aux solutions analytiques approchées de référence (courbes). Les résultats sont tracés pour les quatre configurations géométriques tridimensionnelles canoniques (Tableau 6.1): des fentes avec une distance d'écartement égale à 10 m, un tube de section circulaire de 10 m de rayon, le tube de section carré de côté égal à  $10\sqrt{2}$  m, et un tube dont la section a la forme d'un

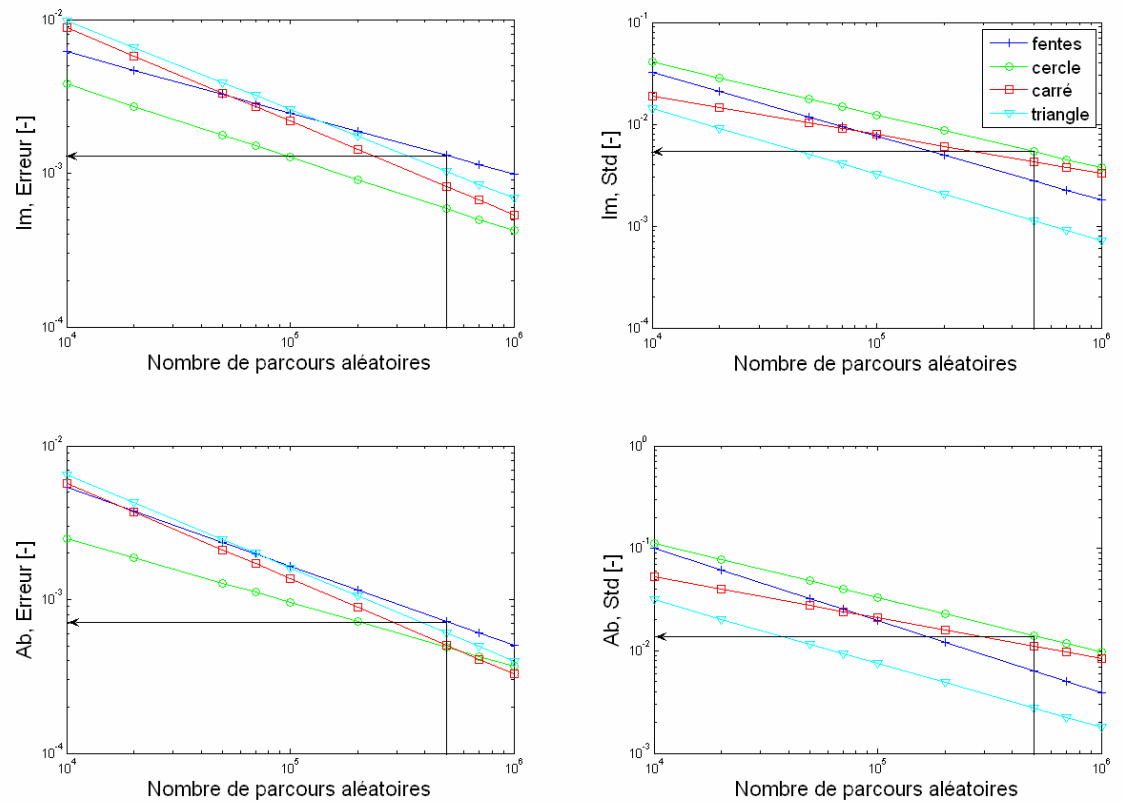
triangulaire équilatéral de côté égal à  $10\sqrt{3}$  m. Pour valider l'outil, qui est tridimensionnel, les formes canoniques à savoir la fente, le cercle, le carré et le triangle, ont été extrudées; voir Figure 6.4. Dans ces exemples, pour chaque simulation, la distance de piégeage est fixée à  $10^{-4}$  m, et le nombre de parcours aléatoires à 500 000. Les points issus des simulations représentent la moyenne de trois simulations distinctes. À titre indicatif, simuler 500 000 parcours aléatoires avec une distance de piégeage fixée à  $10^{-4}$  m, et calculer les valeurs de perméabilité thermique associées pour 60 fréquences différentes requiert de 1h30 (fentes 3D, constituées de 4 facettes) à 3h30 (cercle 3D, constitué de 720 facettes) avec un processeur Intel Pentium 4, 3.2 GHz. On remarque que les points issus des simulations de parcours aléatoires se superposent remarquablement bien aux courbes de références.



**Figure 6.3** Perméabilité dynamique thermique ; comparaison entre les formulations analytiques approchées et le calcul numérique pour :  $NPA = 500\ 000$  parcours aléatoires et  $d_p = 10^{-4}$  m (le rayon générateur des tubes de section constante a été fixé à  $R = 10$  m)



**Figure 6.4** Formes canoniques extrudées : (a) fentes, (b) cercle, (d) carré, et (d) triangle.



**Figure 6.5** Évolution de l'erreur moyenne (Erreur) et de la moyenne des incertitudes (Std) en fonction du nombre de parcours aléatoires. Partie imaginaire (Im) et module (Ab). Dans cet exemple, la distance de piégeage est fixée à  $10^{-4}$  m

Les divergences les plus importantes, bien que minimales, entre les points issus des simulations et les courbes de références sont observées pour la géométrie triangulaire, en parties imaginaires. Compte tenu des paramètres de simulation, et d'après la Figure 6.5, on estime que l'erreur relative commise sur la perméabilité dynamique thermique est inférieure à 0.3% +/- 2% en parties imaginaires (Im), et à 0.2 % +/- 5 % en modules (Abs).

La section suivante aborde la question de l'influence de la distance de piégeage. Pour chaque configuration géométrique de référence, la distance de piégeage  $d_p$  est fixée à  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ , ...,  $10^{-8}$ ,  $10^{-9}$  m; et le nombre de parcours aléatoires  $NPA$  varie selon la série 10 000, 20 000, 50 000, 70 000, 100 000, 200 000, 500 000, 700 000, 1 000 000. Chaque cas caractérisé par un trio différent (*configuration géométrique de référence*,  $d_p$ ,  $NPA$ ) fut alors simulé trois fois de manière à évaluer la

dispersion des résultats. Au total, 4 configurations géométriques de référence, 9 distances de piégeage, et  $9 \times 3$  nombres de parcours aléatoires auront donc été simulés, ce qui porte le nombre de cas simulés à 972. Les résultats de simulations sont ensuite traités afin d'évaluer l'erreur moyenne  $\varepsilon$  par rapport à la solution analytique approchée de référence (moyenne des erreurs relatives sur les soixante points), et la moyenne des écarts-type des résultats numériques, notée  $\Delta\varepsilon$  (un écart type est calculé sur trois point, et  $\Delta\varepsilon$  résulte de la moyenne de soixante écart-types). Pour chaque configuration géométrique, et chaque distance de piégeage, il est donc possible de déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$ , et  $r$  de la droite ayant la forme de l'équation (6.16) qui minimise les écarts avec les  $9 \times 3$  points obtenus par simulations, selon la méthode des moindres carrés. Ces coefficients sont présentés aux Tableaux 6.2 et 6.3, respectivement pour l'erreur moyenne d'une part, et la moyenne des écarts-type d'autre part. Les parties réelle (Re), imaginaire (Im), et le module (Ab) de la perméabilité thermique sont examinés séparément.

Les valeurs grisées du Tableau 6.2 représentent les meilleurs coefficients de corrélation obtenus. On constate que leurs valeurs absolues sont généralement supérieures à 0.9 (cas de la fente, du carré et du cercle), ou tout au moins systématiquement supérieur à 0.8 (0.81 pour le cas du triangle) ce qui signifie qu'une loi de la forme de l'équation (6.16) permet de corréler la décroissance logarithmique de l'erreur sur la prédiction au nombre de parcours aléatoires avec un bon degré de confiance. On peut alors faire correspondre à ces coefficients de corrélation, pour chaque géométrie, les distances de piégeage (valeurs grisées du tableau) ayant permis d'obtenir une loi de décroissance de l'erreur avec un indice de confiance élevé. On dispose en définitive, pour chaque géométrie, d'une valeur de distance de piégeage adéquate de manière à s'assurer de la convergence de la solution numérique vers la solution exacte selon une loi de la forme de l'équation (6.16). En outre, on remarque que les coefficients de corrélation du Tableau 6.3 associés aux distances de piégeage en question correspondent aussi à un degré de confiance satisfaisant ( $|r| > 0.75$ ).

Géométries canoniques et distances de piégeage adéquates associées sont ainsi récapitulées au Tableau 6.4. Pour chaque géométrie canonique, on est alors en mesure d'estimer la perméabilité dynamique thermique avec une erreur  $\varepsilon(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$  et un intervalle de confiance  $\Delta\varepsilon(a_{\Delta\varepsilon}, b_{\Delta\varepsilon})$ , respectivement grâce aux Tableaux 6.2 et 6.3.

	$d_p$	Ab			Re			Im		
		a	b	r	a	b	r	a	b	r
fentes	1e-1	0,02	-180,70%	0,26	-0,07	-140,73%	-0,84	0,00	-150,21%	-0,02
	1e-2	-0,06	-226,70%	-0,24	-0,22	-126,54%	-0,80	-0,11	-176,77%	-0,28
	1e-3	-0,40	-79,14%	-0,99	-0,43	-32,51%	-0,96	-0,68	71,04%	-0,93
	1e-4	-0,52	-20,66%	-0,92	-0,54	22,56%	-0,92	-0,40	-62,14%	-0,74
	1e-5	-0,55	-16,36%	-0,88	-0,56	25,47%	-0,92	-0,45	-40,62%	-0,74
	1e-6	-0,59	17,78%	-0,86	-0,50	-0,07%	-0,90	-0,72	98,88%	-0,85
	1e-7	-0,51	-13,96%	-0,72	-0,47	-2,92%	-0,82	-0,48	-3,90%	-0,65
	1e-8	-0,13	-156,39%	-0,64	-0,15	-133,66%	-0,71	-0,11	-139,84%	-0,54
	1e-9	-0,01	-117,29%	-0,15	-0,01	-102,15%	-0,28	-0,01	-87,31%	-0,35
cercle	1e-1	-0,01	-174,16%	-0,29	-0,03	-173,99%	-0,57	-0,02	-161,21%	-0,28
	1e-2	-0,13	-209,50%	-0,34	-0,41	-40,37%	-0,90	-0,23	-135,57%	-0,49
	1e-3	-0,33	-144,20%	-0,76	-0,48	-25,47%	-0,93	-0,37	-100,74%	-0,68
	1e-4	-0,42	-94,21%	-0,83	-0,43	-53,33%	-0,90	-0,48	-51,22%	-0,92
	1e-5	-0,36	-103,96%	-0,77	-0,40	-57,58%	-0,87	-0,43	-50,73%	-0,70
	1e-6	-0,30	-148,81%	-0,62	-0,41	-55,48%	-0,90	-0,47	-44,39%	-0,79
	1e-7	-0,55	-17,59%	-0,80	-0,53	8,76%	-0,94	-0,43	-57,86%	-0,79
	1e-8	0,00	-227,91%	0,00	-0,08	-169,94%	-0,44	0,07	-242,62%	0,24
	1e-9	0,01	-125,42%	0,41	0,02	-120,73%	0,64	0,00	-99,20%	0,14
carré	1e-1	-0,01	-163,00%	-0,20	-0,03	-159,80%	-0,54	-0,01	-152,07%	-0,12
	1e-2	-0,19	-169,75%	-0,52	-0,34	-67,41%	-0,94	-0,32	-77,36%	-0,69
	1e-3	-0,60	35,96%	-0,99	-0,54	29,62%	-0,98	-0,61	63,51%	-0,94
	1e-4	-0,62	24,59%	-0,95	-0,51	11,84%	-0,98	-0,61	37,99%	-0,88
	1e-5	-0,58	9,93%	-0,83	-0,60	53,84%	-0,90	-0,64	56,30%	-0,78
	1e-6	-0,47	-50,18%	-0,82	-0,45	-21,82%	-0,95	-0,53	-1,70%	-0,81
	1e-7	-0,50	-45,31%	-0,87	-0,55	23,02%	-0,96	-0,32	-114,53%	-0,65
	1e-8	0,09	-278,66%	0,59	-0,01	-208,86%	-0,08	0,15	-291,93%	0,74
	1e-9	0,00	-124,07%	0,07	-0,01	-108,73%	-0,20	0,01	-106,03%	0,26
triangle	1e-1	-0,02	-139,73%	-0,50	-0,04	-142,71%	-0,77	-0,02	-132,80%	-0,22
	1e-2	-0,19	-150,88%	-0,50	-0,35	-59,36%	-0,90	-0,26	-96,26%	-0,59
	1e-3	-0,35	-117,28%	-0,69	-0,37	-67,93%	-0,92	-0,30	-115,98%	-0,63
	1e-4	-0,61	23,99%	-0,82	-0,65	82,56%	-0,97	-0,58	30,21%	-0,75
	1e-5	-0,41	-75,39%	-0,90	-0,40	-47,43%	-0,90	-0,38	-70,75%	-0,81
	1e-6	-0,28	-143,48%	-0,74	-0,42	-37,96%	-0,98	-0,37	-71,42%	-0,78
	1e-7	-0,63	38,78%	-0,85	-0,52	16,51%	-0,88	-0,47	-24,72%	-0,79
	1e-8	-0,07	-184,17%	-0,38	-0,10	-155,15%	-0,54	-0,11	-141,93%	-0,66
	1e-9	0,02	-131,81%	0,49	0,03	-129,10%	0,60	0,01	-105,78%	0,36

**Tableau 6.2** Coefficients des régressions logarithmiques pour l'évolution de l'erreur moyenne (Ab, valeur absolue; Re, partie réelle; Im, partie imaginaire) sur la perméabilité thermique en fonction du nombre de parcours aléatoires  $NPA$  ( $10\ 000 < NPA < 1\ 000\ 000$ ) à distance de piégeage ( $d_p$  [m]) fixée.  $a$  [ $N^{-1}$ ],  $b$  [-], et  $r$  sont respectivement la pente, l'ordonnée pour un  $NPA$  unitaire et le coefficient de corrélation de la régression

	$d_p$	Ab			Re			Im		
		$a$	$b$	$r$	$a$	$b$	$r$	$a$	$b$	$r$
fentes	1e-1	-0,58	105,41%	-0,78	-0,57	97,17%	-0,79	-0,54	50,20%	-0,91
	1e-2	-0,39	19,65%	-0,70	-0,39	17,82%	-0,72	-0,39	-16,31%	-0,79
	1e-3	-0,43	45,84%	-0,75	-0,44	44,95%	-0,76	-0,46	13,93%	-0,82
	1e-4	-0,70	181,69%	-0,90	-0,70	174,86%	-0,90	-0,63	103,18%	-0,93
	1e-5	-0,41	36,46%	-0,81	-0,41	35,71%	-0,82	-0,45	14,23%	-0,87
	1e-6	-0,59	123,82%	-0,93	-0,58	116,59%	-0,94	-0,54	59,81%	-0,96
	1e-7	-0,46	63,37%	-0,83	-0,45	56,81%	-0,83	-0,43	5,00%	-0,85
	1e-8	-0,31	-33,22%	-0,55	-0,32	-32,22%	-0,57	-0,38	-32,36%	-0,73
	1e-9	-0,51	104,82%	-0,93	-0,51	99,09%	-0,93	-0,53	64,28%	-0,93
cercle	1e-1	-0,35	-1,13%	-0,74	-0,36	-1,55%	-0,75	-0,38	-24,26%	-0,81
	1e-2	-0,57	113,85%	-0,87	-0,57	107,43%	-0,88	-0,50	40,34%	-0,93
	1e-3	-0,65	148,34%	-0,94	-0,64	141,34%	-0,94	-0,61	90,81%	-0,97
	1e-4	-0,53	117,47%	-0,87	-0,54	115,18%	-0,87	-0,52	68,15%	-0,88
	1e-5	-0,69	181,93%	-0,93	-0,68	175,24%	-0,93	-0,70	145,71%	-0,95
	1e-6	-0,57	108,03%	-0,87	-0,56	102,40%	-0,89	-0,54	54,73%	-0,95
	1e-7	-0,40	40,93%	-0,71	-0,41	39,89%	-0,73	-0,45	26,61%	-0,84
	1e-8	-0,59	142,84%	-0,97	-0,59	136,87%	-0,97	-0,57	89,36%	-0,95
	1e-9	-0,65	154,90%	-0,88	-0,64	148,79%	-0,89	-0,60	97,79%	-0,96
carré	1e-1	-0,51	65,23%	-0,80	-0,51	61,95%	-0,81	-0,51	33,49%	-0,87
	1e-2	-0,68	154,06%	-0,85	-0,67	142,86%	-0,86	-0,52	41,95%	-0,89
	1e-3	-0,42	30,12%	-0,90	-0,42	26,62%	-0,91	-0,40	-15,85%	-0,92
	1e-4	-0,40	31,00%	-0,90	-0,40	27,74%	-0,91	-0,38	-19,84%	-0,88
	1e-5	-0,48	59,17%	-0,85	-0,48	55,52%	-0,85	-0,51	36,58%	-0,90
	1e-6	-0,68	153,30%	-0,96	-0,67	146,07%	-0,96	-0,62	86,18%	-0,95
	1e-7	-0,42	24,06%	-0,78	-0,42	22,60%	-0,80	-0,46	7,16%	-0,87
	1e-8	-0,62	131,44%	-0,86	-0,62	122,48%	-0,87	-0,56	64,85%	-0,90
	1e-9	-0,46	59,18%	-0,81	-0,46	54,51%	-0,82	-0,41	-3,36%	-0,87
triangle	1e-1	-0,46	25,10%	-0,78	-0,46	22,95%	-0,79	-0,51	11,92%	-0,85
	1e-2	-0,50	44,55%	-0,92	-0,50	43,40%	-0,93	-0,52	17,36%	-0,95
	1e-3	-0,58	88,80%	-0,93	-0,57	81,57%	-0,94	-0,51	18,05%	-0,92
	1e-4	-0,62	97,92%	-0,83	-0,63	96,74%	-0,84	-0,65	75,68%	-0,87
	1e-5	-0,40	-2,96%	-0,75	-0,41	-5,77%	-0,77	-0,36	-57,72%	-0,84
	1e-6	-0,50	25,61%	-0,76	-0,49	18,08%	-0,77	-0,44	-35,87%	-0,77
	1e-7	-0,32	-62,75%	-0,87	-0,33	-61,86%	-0,89	-0,42	-45,27%	-0,96
	1e-8	-0,47	31,89%	-0,85	-0,48	32,44%	-0,87	-0,52	21,50%	-0,94
	1e-9	-0,72	157,71%	-0,95	-0,70	145,53%	-0,95	-0,59	56,19%	-0,95

**Tableau 6.3** Coefficients des régressions logarithmiques pour l'évolution de la moyenne des écart-types (Ab, valeur absolue; Re, partie réelle; Im, partie imaginaire) sur la perméabilité thermique en fonction du nombre de parcours aléatoires  $NPA$  ( $10\ 000 < NPA < 1\ 000\ 000$ ) à distance de piégeage ( $d_p$  [m]) fixée.  $a$  [ $N^{-1}$ ],  $b$  [-], et  $r$  sont respectivement la pente, l'ordonnée pour un  $NPA$  unitaire et le coefficient de corrélation de la régression



Géométrie	fentes, carré	cercle	triangle
$d_p$ [m]	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

**Tableau 6.4** Synthèse des distances de piégeage offrant le coefficient de corrélation le plus élevé lors d'une estimation de l'erreur moyenne et de la moyenne des déviations standard associées à un calcul de perméabilité selon une loi de type  $\log_{10}\varepsilon = a \log_{10}NPA + b$

Le Tableau 6.4 suggère la vision géométrique suivante :

- Fentes et carré sont en réalité deux cas de figure d'une même géométrie, le rectangle. La fente représente en effet un cas limite du rectangle, lorsqu'une de ses dimensions tend vers l'infini; alors que le carré n'est qu'un cas particulier du rectangle, lorsque longueur et largeur sont identiques. Toutes deux offriraient au marcheur des surfaces essentiellement planes.
- Le cercle est quant à lui modélisé par un polygone d'ordre  $n = 360$ . L'angle formé entre deux facettes non coplanaires est donc largement obtus.
- Le triangle, finalement, est lui aussi un polygone, cette fois d'ordre  $n = 3$ . L'angle formé entre deux facettes non coplanaires est ici largement aigu.

À partir de cette vision géométrique des formes canoniques, on constate que la distance de piégeage adéquate pour pouvoir estimer avec un bon degré de confiance la décroissance de l'erreur sur la perméabilité dynamique thermique en fonction du nombre de parcours aléatoires est de :

- $10^{-3}$  m dans le cas où la géométrie offrirait au marcheur une surface essentiellement plane;
- $10^{-4}$  m dans le cas où la géométrie offre au marcheur une surface concave d'angle essentiellement obtus;
- $10^{-5}$  m dans le cas où la géométrie offre au marcheur une surface concave d'angle essentiellement aigu.

Cette tentative d'interprétation semble en accord avec la représentation physique suivante. Une distance de piégeage relativement grande augmente le risque de piégeage du marcheur avant qu'il ait pu sonder les concavités fluides de l'espace poreux. **Ainsi, lorsque l'angle formé entre deux plans décrivant une concavité fluide de l'espace poreux tend vers zéro, la distance de piégeage doit elle aussi tendre vers zéro afin d'éviter au marcheur d'être piégé avant d'avoir pu sonder l'ensemble de la géométrie.**

## 6.4 Conclusion

Si l'on s'en tient à des considérations pratiques, l'objectif principal de cette étude était de pouvoir préciser les paramètres de simulations de parcours aléatoires à adopter, pour s'assurer que la solution numérique résultante soit une bonne estimation du champ solution moyenné de températures acoustiques, dans une configuration géométrique constituée par une cellule périodique tridimensionnelle pour laquelle il n'existe pas de solution analytique.

Pour ce faire, une méthode de simulation a été mise en place de manière à tester la convergence de la solution numérique d'une part, et à estimer l'erreur commise sur la prédiction en fonction des paramètres de simulation d'autre part.

Dans le cas général constitué d'une configuration géométrique non-triviale, il n'existe pas de solution de référence pour tester la convergence de la solution. La stabilité de la solution numérique a donc été étudiée au moyen d'indicateurs appelés normes. Les simulations réalisées indiquent que la convergence strictement monotone de la solution numérique n'est pas garantie. Néanmoins, une régression linéaire a été calculée à partir de 198 résultats de simulations (de parcours aléatoires menées de manière systématique sur une grappe de calcul séquentiel) en utilisant une fonction de la forme  $\log_{10}\varepsilon = a \times \log_{10}NPA + b$ , et comparée aux courbes de convergence. La somme des variations relatives sur la bande de fréquences considérée, entre la réponse calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA + \Delta NPA$ , et celle calculée pour un nombre de PAs égal à  $NPA$ , est faible et diminue en moyenne de manière monotone selon la loi mentionnée, quelles que soient les normes,  $L_2$  et  $L_\infty$ , et les distances de piégeage considérées,  $d_p = 10^{-3}$  m,  $d_p = 10^{-4}$  m, et  $d_p = 10^{-5}$  m. On peut donc raisonnablement conclure à la stabilité de la solution numérique calculée par la méthode du parcours aléatoire dans le cas d'une configuration géométrique typique de mousse (cellule périodique tridimensionnelle ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre, dont les ligaments ont une section triangulaire) avec distance de piégeage normalisée  $d_p / a$  de l'ordre de  $10^{-2} - 10^{-4}$  m ( $a$  étant la taille caractéristique d'une fibre,  $a$  vaut  $t/3$  lorsque la fibre a la forme d'un triangle équilatéral de hauteur  $t$ , soit  $0.37/3$  m pour la configuration mentionnée).

Alternativement, la connaissance de solutions de références nous a permis d'estimer l'erreur commise sur la prédiction numérique en fonction des paramètres de simulation (*configuration géométrique de référence, distance de piégeage, nombre de parcours aléatoires*). Les solutions analytiques approchées qui existent pour le cas de tubes de sections constantes ont tout d'abord été rappelées. On a ensuite dégagé, à priori, des lois simples d'évolution de l'erreur moyenne  $\varepsilon$ , et de la moyenne des écarts-type  $\Delta\varepsilon$ , en fonction du nombre de parcours aléatoires  $NPA$ , ayant respectivement les formes  $\log_{10} \varepsilon = a_\varepsilon \log_{10} NPA + b_\varepsilon$  et  $\log_{10} \Delta\varepsilon = a_{\Delta\varepsilon} \log_{10} NPA + b_{\Delta\varepsilon}$ . La pertinence de telles lois a ensuite été évaluée par la méthode des moindres carrés à l'issue d'un ensemble de 972 simulations de parcours aléatoires menées de manière systématique sur une grappe de calcul séquentiel, en examinant le coefficient de corrélation déterminé. Les coefficients des lois, reportés aux Tableaux 6.2 et 6.3, nous renseignent ainsi sur le taux de décroissance de l'erreur en fonction du nombre de PAs pour différentes distances de piégeage.

Les conclusions pratiques de cette étude sont détaillées ci-dessous. Elles sont exprimées en termes de distance de piégeage préconisée d'une part, d'une estimation d'erreur et d'intervalle de confiance associés à la prédiction d'autre part.

---

#### 6.4.1 Distance de piégeage préconisée

Des résultats du Chapitre 6, on conclut que la distance de piégeage doit être comprise entre  $10^{-3}$  m et  $10^{-7}$  m si l'on veut pouvoir s'assurer de la convergence avec un degré de confiance acceptable. Des distances de piégeage supérieures à  $10^{-3}$  m correspondent à une discrétisation de l'espace fluide au voisinage de la frontière solide insuffisante pour estimer avec confiance le champ de température acoustique moyenné dans une configuration géométrique soumise à une excitation acoustique. En deçà de  $10^{-7}$  m, l'utilisateur atteint les limites du code associées à des erreurs d'arrondis. Lorsque la configuration géométrique étudiée expose à la particule diffusante des surfaces localement concaves formant des angles obtus à aigus, la réduction de la distance de piégeage de un à deux ordres de grandeur à partir d'un seuil d'entrée d'utilisation fixé à  $10^{-3}$  m permet de s'assurer de la convergence avec un meilleur degré de confiance. En ce qui nous concerne, le tétrakaidécaèdre est une cellule dont les faces sont assimilables à des tubes de sections carrées (six) et hexagonales (huit); voir Figure 6.1. Par conséquent, la configuration géométrique d'intérêt est dépourvue de concavités dont les facettes constituantes formeraient entres

elles des angles aigus. Cette caractéristique géométrique permet d'exclure la valeur  $10^{-5}$  parmi les trois distances de piégeage candidates restantes. Ceci étant dit, la distance de piégeage fixée à  $10^{-4}$  m semble être la valeur la plus polyvalente. Elle est en effet associée à des indices de confiance relatifs à l'estimation de l'erreur commise encore souvent très bons (en particulier pour la prédiction de l'erreur sur la partie réelle et le module de la perméabilité dynamique thermique).

Finalement, il est préconisée de fixer la distance de piégeage à  $10^{-4}$  m afin de garantir une prédiction de l'erreur sur la perméabilité thermique d'une configuration géométrique type tétrakaidécaèdre avec un bon degré de confiance. La distance de piégeage étant fixée, il est désormais possible de donner une estimation de l'erreur et de l'intervalle de confiance sur la perméabilité thermique dynamique en fonction du nombre de parcours aléatoires pour la configuration géométrique d'intérêt.

---

#### 6.4.2 Estimation de l'erreur et de l'intervalle de confiance

Les courbes d'estimation du taux de décroissance de l'erreur moyenne et de la moyenne des dispersions sur la perméabilité thermique dynamique ont été tracées à la Figure 6.5 pour la distance de piégeage préconisée ( $d_p = 10^{-4}$  m), et ce en partie imaginaire ainsi qu'en module. Pour  $d_p$  fixée à  $10^{-4}$  m, à partir des cas de figure les plus défavorables parmi l'ensemble des géométries à disposition on estime finalement que :

- L'erreur moyenne sur la perméabilité dynamique thermique sera inférieure ou égale à 1 % pour  $N = 10\ 000$  parcours aléatoires (en partie imaginaire comme en module);  
et inférieure ou égale à 0.1% pour  $N = 1\ 000\ 000$  parcours aléatoires (en partie imaginaire comme en module).
- La moyenne des dispersions sur la perméabilité thermique dynamique sera inférieure ou égale à 5 % en partie imaginaire, et inférieure ou égale à 2 % en module, pour  $N = 10\ 000$  parcours aléatoires; inférieure ou égale à 0.4 % en partie imaginaire, et inférieure ou égale à 1 % en module, pour  $N = 1\ 000\ 000$  parcours aléatoires (en partie imaginaire comme en module).

Pour clore ces conclusions pratiques, en fixant  $d_p = 10^{-4}$  m ( $d_p / a \approx 10^{-3}$  si l'on transpose ce résultat au cas de la cellule tétrakaidécaédrique), un utilisateur du code désirent obtenir un spectre de perméabilité de structure cellulaire telle que celle représentée à la Figure 6.1 obtiendra une

prédiction entachée d'une erreur estimée inférieure ou égale à 1 % avec une incertitude estimée inférieure ou égale à 5 % en simulant 10 000 parcours aléatoires. Pour gagner un ordre de grandeur en précision sur le résultat, il devra augmenter le nombre de parcours aléatoires de deux ordres de grandeur, conformément à ce que prédit la théorie.

## Remerciements

Lors de cette étude, de nombreuses personnes ont activement contribué au succès de l'implémentation de la méthode du parcours aléatoire, qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés. Richard Bouchard, étudiant en génie mécanique à l'Université de Sherbrooke (UdeS) a programmé la version de développement initiale de la méthode, sous environnement Matlab, dans le cadre d'un stage de fins d'études. Louis-Michel Raynauld, étudiant en génie informatique à l'UdeS, s'est ensuite chargé de l'implémentation et de la systématisation de la méthode en langage C, dans le cadre d'un projet de spécialité. Le code a ensuite été optimisé grâce au concours de l'équipe du Centre de Calcul Scientifique (CCS) de l'UdeS. Le bon fonctionnement de la méthode sur la grappe de calcul séquentiel MS du CCS est en particulier dû à Francis Jackson et Steve Allan. Leurs implications dans ce projet, et l'expertise dont ils ont fait preuve, m'ont rendu de grands services.

## Références

1 D. Lafarge *et al.*, "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies," *J.Acoust.Soc.Am.* 102 (4), 1995-2006 (1997).

2 S. Gasser, "Étude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux: modèle à base de sphères creuses de nickel,". Thèse. Science et Génie des matériaux. Grenoble : INPG, 2003, 306 p.

3 S. Gasser, F. Paun and Y. Brechet, "Absorptive properties of rigid porous media: Application to face centered cubic sphere packing," *J.Acoust.Soc.Am.* 117 (4 I), 2090-2099 (2005).

4 S. Torquato, "Efficient simulation technique to compute properties of heterogeneous media," *Applied Physics Letter* 55 (18), 1847-1849 (1989).

5 D. A. Coker, "Simulation of diffusion and trapping in digitized heterogeneous media," *J.Appl.Phys.* 77 (3), p. 955 (1994).

6 D. Lafarge, in Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics, edited by J. -L Auriault (Swets & Zeitlinger, Grenoble, 2002) pp. 703-708.

7 Y. Champoux and J. F. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," *J.Appl.Phys.* 70, 1975-1979 (1991).

8 J. F. Allard, Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials, edited by Elsevier Applied Science, (Elsevier Science Publishers LTD, New York and London, 1993), pp. 284.

9 Denis Lafarge, "Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide visco-thermique," Thèse de doctorat de l'université du Maine , 1-296 (1993).

10 A. Cortis *et al.*, in IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Series: Solid Mechanics and Its Applications, edited by Wolfgang (Ehlers, Held at the University of Stuttgart, Germany, 2001) pp. 1-448.

11 Determination of the dynamic bulk modulus of gases saturating porous media by Brownian motion simulation. In J. -L Auriault, C. Geindreau, P. Royer Eds, Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics. Lisse, Netherlands : A. A. Balkema, 2002, pp. 703-708.

12 Richard Feynmann, Le parcours aléatoire, Chap. 6-3, In Le cours de physique de Feynmann, Mécanique, Tome 2, edited by Dunod, Paris, 1998.

13 Li Hua Zheng and Yee C. Chiew, "Computer simulation of diffusion-controlled reactions in dispersions of spherical sinks," J.Chem.Phys. 90 (1), 322-7 (1989).

14 M. R. Stinson, "The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape," J.Acoust.Soc.Am. 89 (2), 550-558 (1991).

15 G. Kirchhoff, "Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung," Ann. Phys. Chem. 134, 177-193 (1868).

16 C. Zwicker and C. W. Kosten, Sound Absorbing Materials, edited by Elsevier Applied Sciences, (Elsevier Applied Sciences, New York, 1949), .

17 K. Attenborough, "Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbants and granular materials," J.Acoust.Soc.Am. 73 (3), 785-799 (1983).

18 Michael R. Stinson and Yvan Champoux, "Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries," J. Acoust. Soc. Am. 91 (2), 685-695 (1992).

# 7 Calcul numérique de la perméabilité dynamique visqueuse d'une mousse à cellules ouvertes par homogénéisation

## 7.1 Introduction

## 7.2 Modélisation géométrique (2D)

## 7.3 Formulation multi-échelle de problème des dissipations visqueuses par homogénéisation

## 7.4 Résultats numériques

## 7.5 Conclusion

### Remerciements

### Références

La dépendance en fréquences de l'écoulement local oscillant d'un fluide visqueux à travers des fibres de sections triangulaires disposées selon un réseau hexagonal est étudiée. Le champ de vitesses du problème aux limites homogénéisé est calculé par éléments finis, puis spatialement intégré, de manière à déterminer les pertes par dissipation visqueuse d'une mousse à cellules ouvertes lors du passage d'une onde acoustique. La perméabilité dynamique visqueuse ainsi obtenue est comparée avec succès aux modèles standards de Johnson et de Pride (voir Tableau 1.4). Puis une analyse est brièvement menée à partir de l'analyse de l'évolution des champs de vitesses dans la cellule bidimensionnelle équivalente.

---

## 7.1 Introduction

Le problème thermique de nature scalaire ayant initialement été résolu par la méthode du parcours aléatoire pour une géométrie cellulaire tridimensionnelle idéalisée au cours des Chapitres 5 et 6, la résolution du problème visqueux, contrepartie vectorielle du problème thermique, est désormais requise. À un champ de température de nature scalaire devra donc se superposer un champ de vitesses de nature vectorielle, caractérisé par deux ou trois composantes au lieu d'une selon que l'on s'intéresse à une configuration géométrique bi- ou tri- dimensionnelle.



Au cours des dernières années, une approche d'étude numérique des propriétés acoustiques de milieux poreux a gagné en popularité. L'idée est de résoudre numériquement l'équation des fluides visqueux couplée à la condition locale d'incompressibilité (problème visqueux) et l'équation de la chaleur (problème thermique) avec les conditions aux limites appropriées dans une configuration microstructurale constituée par une cellule périodique idéalisée; puis d'étudier comment les propriétés moyennes des champs de vitesses et de températures dépendent des paramètres microstructuraux. Comparées aux modèles macroscopiques, ces études offrent la possibilité d'étudier les bases micro-physiques du macro-comportement acoustique.

Contrairement à la méthode du parcours aléatoire pour laquelle la simulation de parcours est indépendante de la fréquence, la résolution du problème visqueux par une technique de calcul conventionnelle telle que la méthode des éléments finis nécessite un raffinement du maillage au voisinage de l'interface lorsque la fréquence augmente afin de prendre en compte la diminution de l'épaisseur de la couche limite.

La nature vectorielle du problème visqueux se traduit donc par une augmentation importante du coût de calcul. Pour cette raison, nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude d'une configuration géométrique constituée par une cellule périodique de nature bidimensionnelle. Aussi, la question abordée dans ce chapitre consiste à se demander si un modèle géométrique bidimensionnel de mousse, basé sur l'analyse de sa microstructure idéalisée, puisse être représentatif de la dynamique de l'écoulement local lors du passage d'une onde acoustique. Cette question est importante car elle devrait permettre de déterminer si une modélisation tridimensionnelle est nécessaire, ou si l'on peut se contenter d'une idéalisation géométrique bidimensionnelle pour étudier les dissipations visqueuses du milieu. En définitive, l'objectif de ce chapitre est de mettre au point un outil d'analyse pour résoudre, dans la configuration géométrique constituée d'une cellule périodique idéalisée, les équations locales de champ gouvernant les phénomènes de dissipation acoustique par effets visqueux introduites au Chapitre 5.

Craggs et Hildebrandt ont résolu le problème dynamique visqueux par éléments finis pour des tubes de section constante (Craggs, 1982)<sup>1</sup>. Les propriétés acoustiques de milieux rugueux, modélisés par un canal bidimensionnel périodique dont la partie interne est pavée d'arêtes vives

dont l'angle tend vers zéro, ont été étudiées en utilisant la transformée de Schwartz-Christoffel (Smeulders, 1994)<sup>2</sup>, par éléments finis (Firdaouss, 1998)<sup>3</sup> (Cortis, 2003)<sup>4</sup>, ou les deux (Cortis, 2001)<sup>5</sup>. Cortis et ses collaborateurs ont aussi appliqué une procédure de calcul par éléments finis pour étudier les propriétés acoustiques de géométries poreuses caractérisées par un arrangement régulier de cylindres (Cortis, 2001)<sup>5</sup>. En trois dimensions, les propriétés acoustiques de géométries périodiques ont été étudiées numériquement uniquement pour le cas d'un arrangement cubique faces centrées de sphères (Gasser, 2005)<sup>6</sup>. On note aussi qu'une structure cellulaire périodique tridimensionnelle de mousse fût utilisée par Boomsma et ses collaborateurs pour déterminer la perte de charge du milieu, mais ne présente pas d'étude dynamique (Boomsma, 2003)<sup>7</sup>. On constate finalement au regard de cette brève revue de la littérature qu'une méthodologie ainsi que des procédures de calcul par éléments finis relativement sophistiquées ont été développées afin de résoudre, dans des configurations géométriques bi- (Firdaouss, 1998)<sup>3</sup> (Cortis, 2001)<sup>5</sup> ou tri- (Gasser, 2005)<sup>6</sup> dimensionnelles, les équations locales de champ qui gouvernent les phénomènes de dissipation acoustiques. Néanmoins, aucun modèle géométrique de mousse n'a été testé.

Ce chapitre traite le cas d'une structure poreuse particulière, une mousse d'aluminium de porosité élevée à cellules ouvertes. Néanmoins, la méthode proposée au cours de ce chapitre peut être appliquée à l'étude d'autres mousses à structure rigide ayant une porosité ouverte, dont la structure cellulaire peut être considérée comme étant périodique, pour lesquelles les propriétés acoustiques peuvent être calculées.

Dans ce chapitre, le problème visqueux est formulé sous sa forme homogénéisée, puis implémenté dans un logiciel commercial d'éléments finis. La géométrie locale de la mousse est modélisée par un réseau cellulaire dont les dimensions caractéristiques ont été identifiées expérimentalement. La méthode de calcul numérique est appliquée pour prédire les propriétés dynamiques de dissipation acoustique par effet visqueux d'un échantillon réel de mousse, et comparée aux modèles de Johnson et de Pride pour s'assurer de la validité de l'évolution des simulations numériques.

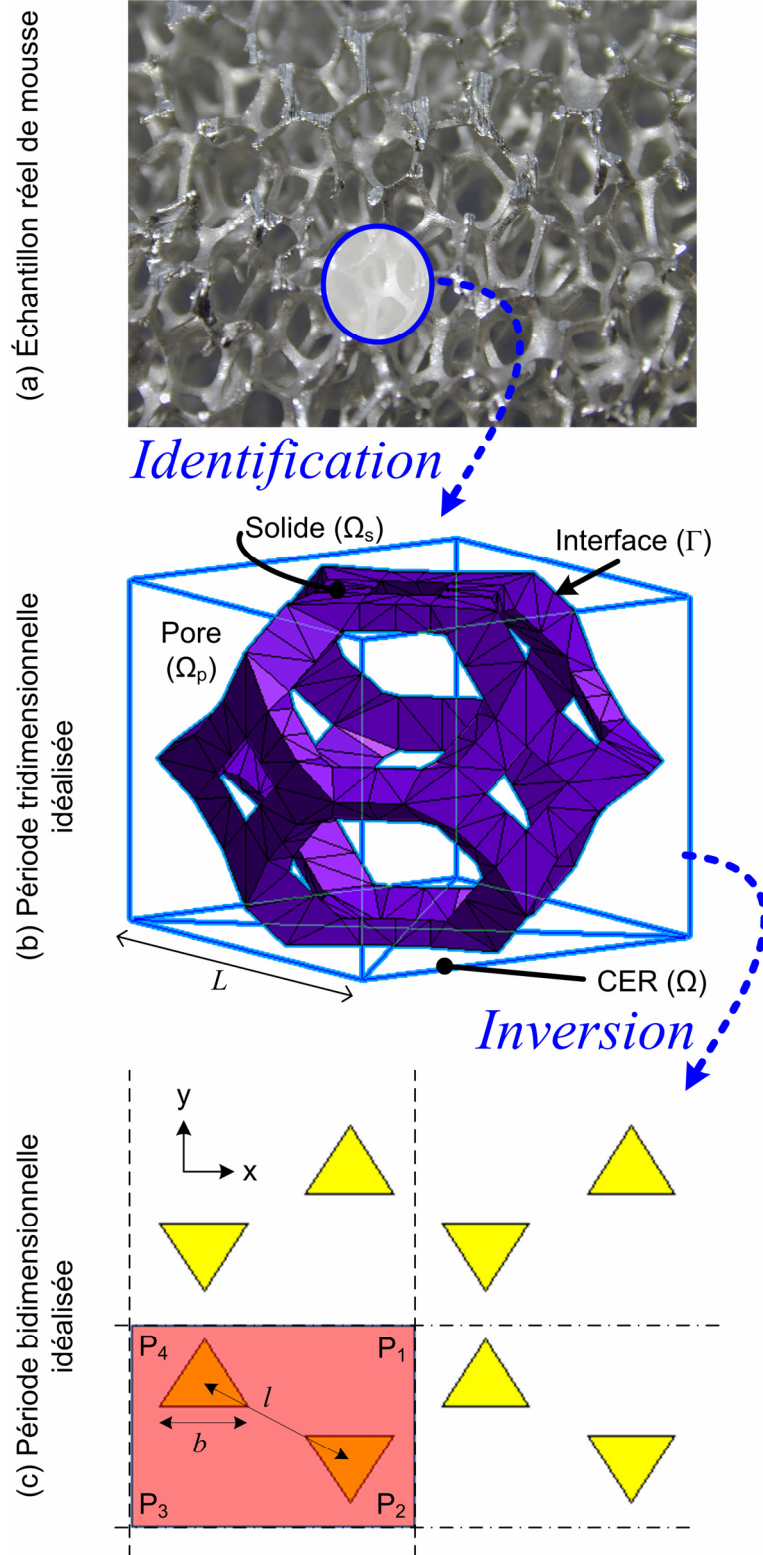


Figure 7.1 Définition géométrique du problème idéalisé

## 7.2 Modélisation géométrique (2D)

De manière à formuler le problème homogénéisé, commençons par considérer le milieu poreux étudié à l'échelle macroscopique, parfois aussi appelée échelle de Darcy, Figure 7.1(a).

On considère un milieu poreux constitué de deux phases distinctes distribuées de manière à ce qu'il soit possible de définir un Volume Élémentaire Représentatif (VER), ou période  $\Omega$  si le milieu possède une structure périodique. La condition de périodicité est plutôt restrictive, mais c'est la seule approche rigoureuse disponible à présent. La deuxième partie de cette thèse a permis d'identifier la période tridimensionnelle idéalisée et les dimensions statistiques d'une mousse à cellules ouvertes de porosité élevée, de sorte que le VER soit identifiable à une Cellule Élémentaire Représentative (CER), Figure 7.1 (b).

Pour simplifier la géométrie, un motif bidimensionnel qui soit équivalent à la période tridimensionnelle identifiée est recherché. Le réseau hexagonal minimise le périmètre à surface constante, analogue bidimensionnel des cellules de Kelvin et de Weaire-Phelan discutées au Chapitre 2. Une période bidimensionnelle peut en être extraite, Figure 7.1(c). L'ensemble du réseau hexagonal est retrouvé par translations horizontales, et symétries miroir du motif de base. Le dimensionnement des tailles caractéristiques  $b$  et  $l$  du réseau hexagonal de sections triangulaires est obtenu par inversion, connaissant la porosité

$$\Phi = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{b}{l} \right)^2, \quad (7.1)$$

et la longueur caractéristique thermique

$$\Lambda' = \frac{3l^2 - b^2}{2\sqrt{3}b} \quad (7.2)$$

de la période tridimensionnelle. En effet, une fois les tailles caractéristiques de la période tridimensionnelle idéalisée identifiées expérimentalement, la

porosité  $\Phi$  et la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$  de la période tridimensionnelle peuvent être précisément déterminées par intégration numérique des éléments de surface et de volume de la cellule. Pour l'échantillon de mousse d'aluminium 40 ppi, on trouve de cette manière  $\Phi = 92.28 \%$  et  $\Lambda' = 1.87 \text{ mm}$ . D'après les équations (7.1) et (7.2),  $\Phi$  et  $\Lambda'$  dépendent uniquement des tailles caractéristiques du réseau hexagonal, et de la forme des sections ; de sorte que, pour une section donnée, il soit possible d'écrire

$$b = 2\sqrt{3}\Lambda' \left( \frac{1-\Phi}{\Phi} \right) \quad (7.3)$$

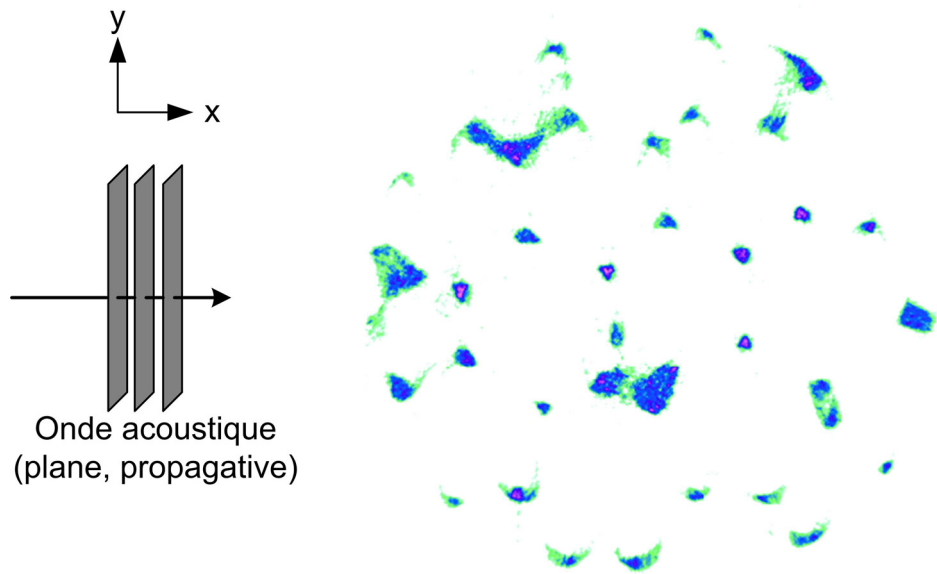
et

$$l = 2\Lambda' \frac{\sqrt{1-\Phi}}{\Phi} \quad (7.4)$$

en fonction de  $\Phi$  et  $\Lambda'$  uniquement. Avec  $\Phi = 92.28 \%$  et  $\Lambda' = 1.87 \text{ mm}$ , et compte tenu de (7.3) et (7.4) on trouve  $b = 0.54 \text{ mm}$  et  $l = 1.13 \text{ mm}$ , tailles caractéristiques de la cellule périodique bidimensionnelle équivalente à la cellule tridimensionnelle identifiée.

La Figure 7.2 permet d'étayer le raisonnement conduisant au choix du motif géométrique périodique retenu. En supposant une onde plane progressive selon l'axe des  $x$  positifs tel qu'illustré à la Figure 7.2, l'onde acoustique passera, dans le plan  $x$ - $y$ , au travers d'un réseau de fibres agencées selon le motif proposé. Cette explication justifie, à priori, notre choix de motif idéalisé bi-dimensionnel.

Pour être applicable, cette représentation implique les conditions initiales et aux limites suivantes. On considère tout d'abord un gradient de pression selon l'axe des  $x$ . Une condition de collement est imposée sur le périmètre des ligaments. Les autres conditions aux limites dérivent de la symétrie du problème. D'une part, la symétrie par translation impose une condition aux limites de périodicité des champs de vitesses et de pressions par translation. D'autre part, la symétrie miroir impose une périodicité des champs de vitesses et de pressions par symétrie miroir.



**Figure 7.2** Coupe d'un échantillon 40 ppi de 10 mm de diamètre, obtenue par microtomographie axiale à rayons-X. Sur la figure, on retrouve aisément la période bi-dimensionnelle idéalisée de la Figure 7.1(c). Les ligaments, de forme approximativement triangulaire, sont en effet généralement disposés en réseau hexagonal. Les amas observés peuvent correspondre à des ligaments coupés dans la longueur, tels que schématisés par les faces du cube de la Figure 7.1(a), ou encore à des fenêtres partiellement fermées (plus rarement).

### 7.3 Formulation multi-échelle de problème des dissipations visqueuses par homogénéisation

L'objet de cette section est de rappeler les résultats du Chapitre 4 relatifs à la formulation multi-échelles du problème des dissipations acoustiques par effets visqueux, et d'en préciser certains aspects.

Localement (l'indice  $y$  mentionne que l'opérateur nabla s'applique à une variable dite rapide c'est-à-dire locale, voir Chapitre 4), le problème aux limites de l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible, en régime harmonique, et à faible nombre de Reynolds, est décrit à l'ordre 0  $(^{(0)})$  par le jeu complet d'équations suivantes ; l'équation de Navier-Stokes linéarisée en régime harmonique, la condition locale d'incompressibilité, la condition aux limites d'adhérence, et la condition de périodicité, respectivement :

$$\frac{j\omega}{\nu} \vec{v}^{(0)} = \nabla_y^2 \vec{v}^{(0)} - \frac{1}{\eta} \nabla_y p^{(0)}, \quad (7.5)$$

$$\nabla_y \cdot \vec{v}^{(0)} = 0, \quad (7.6)$$

$$\vec{v}^{(0)} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (7.7)$$

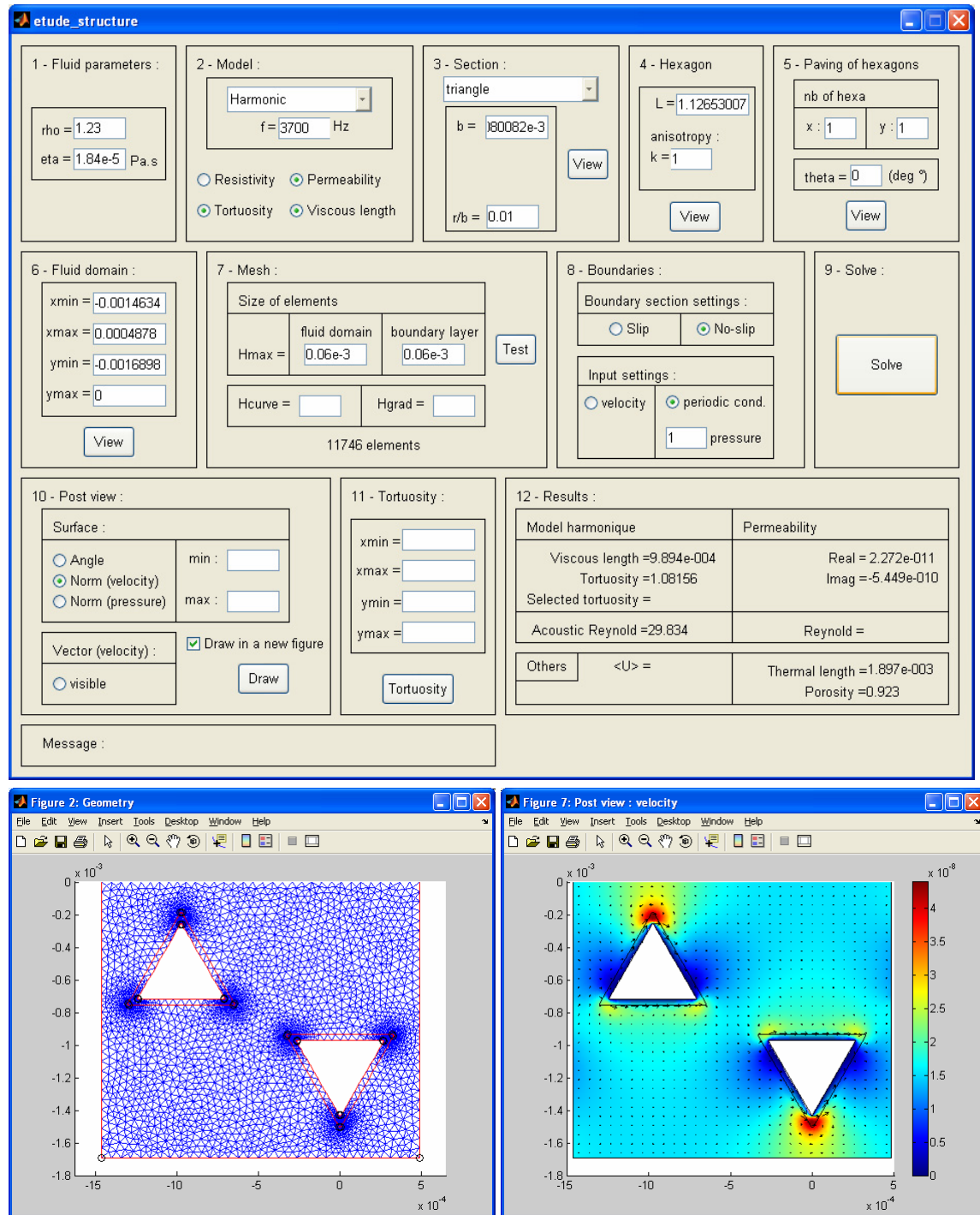
$$\vec{v}^{(0)} \text{ et } p^{(0)} \text{ } \Omega\text{-périodiques ;} \quad (7.8)$$

où  $\nabla_y p^{(0)}$  dans l'équation aux dérivées partielles (7.5) dérive du terme source  $e^{j\omega t} (\Delta p / L) \vec{x}$  (gradient macroscopique de pression oscillant),  $\nabla_y^2 \vec{v}^{(0)}$  représente le terme dissipatif de diffusion par effets visqueux qui prédomine en basses fréquences, et  $j\omega \vec{v}^{(0)} / \nu$  le terme antagoniste dissipatif par effets inertiels qui prédomine en hautes fréquences; avec  $\nu = \eta / \rho_0$  la viscosité cinématique du fluide ( $\approx 1.84 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1} / 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$ ),  $L$  la taille caractéristique du VER, et  $\vec{x}$  le vecteur unitaire. L'équation de Navier-Stokes linéarisée apparaît sous sa forme simplifiée (7.5) en raison de la condition locale d'incompressibilité (7.6), justifiée à partir des résultats de la méthode d'homogénéisation (le fluide est localement incompressible à l'ordre zéro, approximation d'autant mieux réalisée que la séparation d'échelles l'est). Le problème de l'écoulement local d'un fluide visqueux oscillant est dit bien posé grâce à la condition de périodicité (7.8): les conditions aux limites du problème sont entièrement définies sur l'ensemble du domaine fluide.

À l'échelle macroscopique, l'ensemble des phénomènes dissipatifs par effets visqueux moyennés sur un volume élémentaire représentatif  $\Omega$ -périodique est pris en compte par un tenseur réductible à un scalaire dans le cas isotrope appelé perméabilité dynamique visqueuse

$$\tilde{k}(\omega) = \left\langle \vec{v}^{(0)} \right\rangle_{\Omega} \times \frac{1}{\frac{|\nabla_x p^{(0)}|}{\eta}} \quad (7.9)$$

qui s'exprime comme le produit de la moyenne du champ de vitesses acoustique, par l'inverse du terme source (l'indice  $x$  mentionne que l'opérateur nabla s'applique à une variable dite lente c'est-à-dire macroscopique, voir Chapitre 4). Dès lors, le principe de calcul de la perméabilité dynamique visqueuse est clairement basé sur la résolution du problème local (7.5-7.8) et l'intégration spatiale du champ de vitesses



**Figure 7.3** Illustration de l'application développée pour calculer par la méthode des éléments finis la perméabilité dynamique visqueuse d'une mousse à cellules ouvertes par homogénéisation. En haut se situe l'interface ; en bas à gauche la cellule unitaire maillée ; et en bas à droite le champ de vitesses calculé.

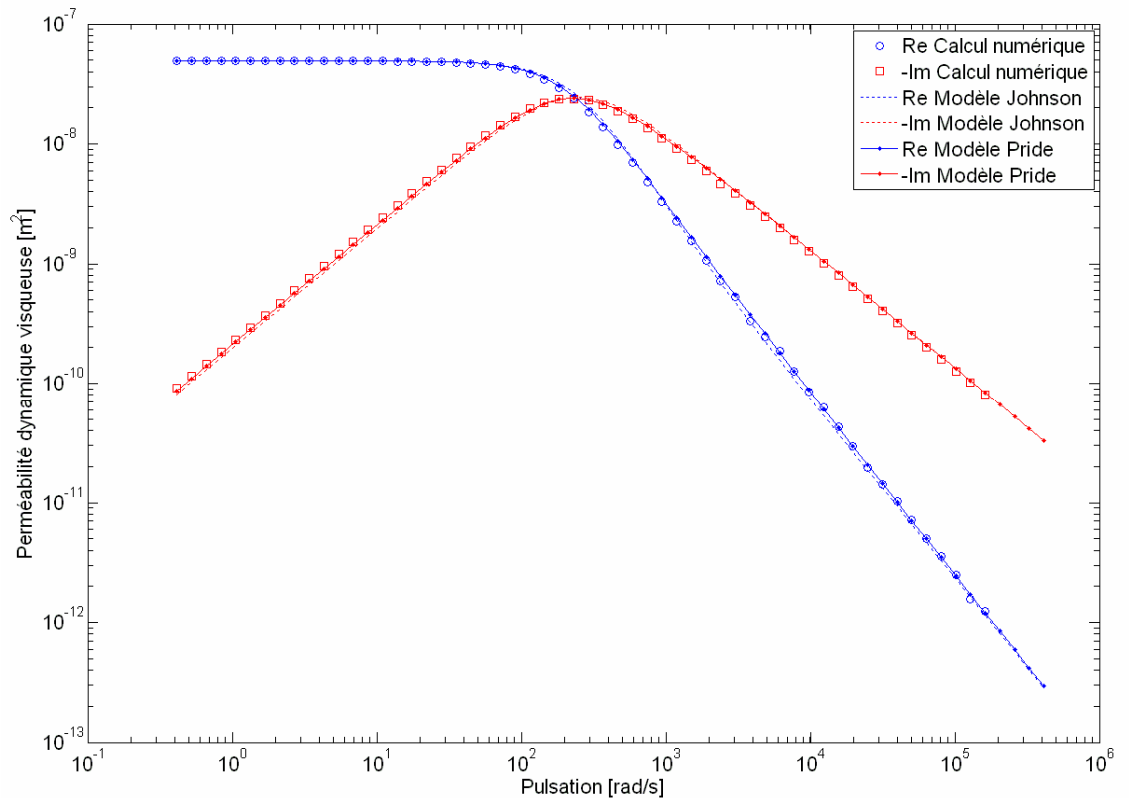


solution. En l'occurrence, la méthode de résolution numérique par éléments finis proposée ici utilise une application développée sous un logiciel commercial (Comsol 3.2)<sup>8</sup>, dont le principe consiste à spécifier le jeu d'équations à résoudre par éléments finis, pour des conditions aux limites prescrites par l'utilisateur, dans la configuration géométrique étudiée présentée à la section précédente. L'application développée est illustrée à la Figure 7.3.

## 7.5 Résultats numériques et discussion

En utilisant le code développé, les calculs numériques ont été réalisés sur un quadrilatère périodique  $P_1$ - $P_4$  de sommets  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(0,-3l/2)$ ,  $P_3(-\sqrt{3}l,-3l/2)$ ,  $P_4(-\sqrt{3}l,0)$  illustré à la Figure 7.1(c); de sorte que les ligaments représentés de section triangulaire de base  $b$  soient espacés d'une longueur  $l$ . Les sommets des sections triangulaires ont été arrondis de manière à éviter les problèmes de singularités susceptibles d'être causés par des arêtes d'angles aigus (Firdaouss, 1998). Le rayon du congé a été fixé à  $10^{-2} b$ . Les valeurs de  $l$  et  $b$  ont été déterminées d'après la procédure détaillée à la Section 7.2. En prenant le gradient de pression dans la direction horizontale, le problème homogénéisé (7.5-7.8) est résolu en utilisant un logiciel commercial d'éléments finis<sup>8</sup>. Une condition aux limites de type Dirichlet est prescrite au bord des sections solides (7.7). Une condition aux limites de périodicité par translation est appliquée en entrée et sortie du domaine. Et une condition aux limites de périodicité par symétrie est appliquée sur les frontières latérales du domaine fluide. On parle alors de conditions de Neumann généralisées ou de Robin selon les appellations. La solution au problème de homogénéisé est approximée au moyen de  $N_I$  éléments finis. Une fois le champ de vitesses connu, la perméabilité dynamique visqueuse est calculée en utilisant l'équation (7.9).

Les parties réelles et imaginaires de la perméabilité dynamique visqueuse calculée numériquement sont comparées au modèle de Johnson ainsi qu'à celui de Pride à la Figure 7.4 (Johnson, 1987)<sup>9</sup> (Pride, 1993)<sup>10</sup>. Le modèle de Johnson, introduit au Chapitre 1, nécessite la connaissance de 4 paramètres macroscopiques résumés à la Figure 1.4 (porosité  $\Phi$ , résistivité  $\sigma$  ou perméabilité visqueuse statique  $k_0$ , tortuosité  $\alpha_\infty$ , et longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$ ). La porosité  $\Phi$  de la géométrie a été déterminée par la méthode décrite à la Section 7.2. Pour une fréquence  $f = 0.042$  Hz (trois ordres de grandeur au dessous de la fréquence de transition visqueuse), la perméabilité visqueuse  $k_0$  est approximée par sa valeur quasi-statique. On trouve ainsi  $k_0 \approx 4.897 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ . La tortuosité dynamique  $\alpha(\omega)$



**Figure 7.4** Perméabilité dynamique visqueuse de la période bidimensionnelle équivalente : résultats numérique ( $\circ$ ,  $\square$ ) et comparaison aux modèles de Johnson<sup>9</sup> (---) et de Pride<sup>10</sup> (-.-).

étant liée à la perméabilité dynamique visqueuse par la relation  $\alpha(\omega) = -j\eta\Phi/\omega k(\omega)\rho_0$  (Johnson, 1987)<sup>9</sup>, la tortuosité infinie  $\alpha_\infty$  est approximée par sa valeur en régime hautes fréquences. Pour  $f = 25\,867$  Hz (quasiment trois ordres de grandeur au dessus de la fréquence de transition visqueuse), on trouve ainsi  $\alpha_\infty \approx 1.0696$  [-]. La difficulté du calcul de la longueur caractéristique visqueuse, définie en deux dimensions par

$$\Lambda = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 2 \frac{\int \vec{v}^2 dS}{\int \vec{v}^2 d\Gamma}, \quad (7.10)$$

repose sur l'évaluation de l'intégrale de périmètre (Johnson, 1987)<sup>9</sup>. En toute rigueur,  $\Lambda$  devrait être calculée en résolvant l'équation de Laplace,  $\nabla^2 p = 0$  ; voir par exemple (Zhou, 1989)<sup>11</sup> (Firdaouss, 1998)<sup>3</sup>. Ici,  $\Lambda$  est approximée par sa valeur en régime hautes fréquences en réalisant

L'intégrale de périmètre au niveau de l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta_v = \sqrt{2\nu/\omega}$ . Puisque, dans notre cas, la vitesse est nulle à la paroi, elle est nécessairement moins élevée au niveau de l'épaisseur de couche limite que ce qu'elle aurait été pour un fluide non visqueux. L'intégrale de périmètre du dénominateur est donc sous-estimée, et on s'attend à ce que notre approximation tende à surestimer légèrement  $\Lambda$ . Pour  $f = 25\,867$  Hz, on trouve ainsi  $\Lambda \approx 0.9974$  mm, et  $\Lambda'/\Lambda \approx 1.87$ . On remarque au passage que le rapport  $\Lambda'/\Lambda$  est proche de 2, valeur théorique associée au cas d'une fibre circulaire fortement diluée (Allard, 1992)<sup>12</sup>. Il s'agit d'un résultat cohérent avec la modélisation employée, puisque la cellule bidimensionnelle utilisée représente effectivement un arrangement régulier de fibres perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde acoustique. D'autre part, le calcul du facteur de forme de Johnson est aussi mentionné à titre indicatif. Il s'écrit  $M = 8k_0\alpha_\infty/\Phi\Lambda^2$  et vaut d'après les paramètres précédemment calculés 0.4547 (-). Pride et ses collaborateurs ont étudié la perméabilité dynamique visqueuse de canaux de section variable (Pride, 1993)<sup>10</sup>, et ils ont pu mettre en évidence que le modèle de Johnson tend à sous-estimer la partie imaginaire basses fréquences de la perméabilité dynamique visqueuse. Les différences étant d'autant plus importantes que les variations de sections le sont. La raison étant que le modèle de Johnson n'impose pas à la partie imaginaire de la perméabilité visqueuse de satisfaire exactement la dépendance asymptotique basses fréquences. Le modèle de Pride, introduit au Chapitre 1, nécessite la connaissance d'un paramètre supplémentaire, la tortuosité statique  $\alpha_0$ , approximée par sa valeur en régime basses fréquences. Pour  $f = 0.042$  Hz, on trouve  $\alpha_0 \approx 1.2695$  [-] (l'inégalité  $\alpha_0 > \alpha_\infty$  est respectée). Le paramètre de Pride, défini par  $p = M/4(\alpha_0/\alpha_\infty - 1)$  peut alors être calculé. Dans la configuration étudiée,  $p \approx 0.5811$  [-]. Puisque  $p$  est significativement différent de 1, le modèle de Pride n'est pas réductible au modèle de Johnson, et présente par conséquent un intérêt dans cette étude. On note globalement un bon accord entre le calcul numérique et les modèles de Johnson et de Pride. Cela permet de s'assurer que la procédure de calcul numérique par homogénéisation développée conduit aux bonnes tendances. En basses fréquences, la partie imaginaire de la perméabilité visqueuse prédite par le modèle de Johnson ( $\approx 8.1339 \times 10^{-11}$  m<sup>2</sup>) est légèrement inférieure à celle issue du calcul numérique ( $\approx 9.1430 \times 10^{-11}$  m<sup>2</sup>) avec une différence relative d'environ 11 %. Cette différence semble attribuable aux limites du modèle de Johnson. Toujours en basses fréquences, l'écart entre les parties imaginaires des perméabilités visqueuses prédites par le modèle de Pride ( $\approx 8.7279 \times 10^{-11}$  m<sup>2</sup>) et le calcul numérique se réduit à environ 4.6 %.

Après s'être assurée que la procédure de calcul numérique fournit les bonnes tendances, un examen qualitatif plus détaillé de l'évolution des champs de vitesses au sein de la cellule bidimensionnelle en fonction de la fréquence peut être réalisé. La Figure 7.5 présente trois types de champs de vitesses caractéristiques : en régime basses fréquences ( $f \approx 0.37$  Hz) ; au dessus de la fréquence de transition visqueuse, pour un régime appelé régime intermédiaire hautes fréquences ( $f \approx 367$  Hz) ; et en régime hautes fréquences ( $f \approx 3670$  Hz). On remarque que, d'une manière générale, les passages empruntés par le fluide en régime basses fréquences sont plus concentrés et suivent un chemin plus tortueux que ne le fait le fluide en régime hautes fréquences. Ce résultat a notamment été mentionné par Martys et Garboczi (Martys, 1992)<sup>13</sup> sur des structures périodiques bidimensionnelles constituées d'arrangement aléatoires de sphères de tailles différentes.

- En régime basses fréquences (deux ordres de grandeur au dessous de la fréquence de transition visqueuse,  $f \approx 0.37$  Hz, et  $\delta_v \approx 3.6$  mm), l'écoulement est entièrement porté par un ou deux chemins spécifiques seulement. L'écoulement est contrôlé par les zones de moindre étranglement, et suit un chemin continu connecté par les ouvertures les plus larges. Remarquez que l'épaisseur de la couche limite visqueuse a volontairement été sous dimensionnée sur l'illustration car elle aurait été trop grande pour être représentée à l'échelle.

- Autour de la fréquence de transition visqueuse ( $f \approx 37$  Hz, et  $\delta_v \approx 0.36$  mm), là où les dissipations par effets visqueux sont les plus importantes, l'épaisseur de la couche limite visqueuse est du même ordre de grandeur que la taille moyenne  $e_m$  des étranglements vue par l'écoulement ( $e = l - 2b/\sqrt{3} \approx 0.51$  mm,  $e_a = e/2$ ,  $e_m = 3e/4 \approx 0.38$  mm); c'est la transition entre le régime basses et hautes fréquences. Le champ de vitesses a la même allure qu'en régime basses fréquences, seules les amplitudes en vitesses sont divisées par deux environ. Pour cette raison, le champ de vitesses autour de la fréquence de transition visqueuse n'a pas été illustré, car il aurait été redondant.

- En régime hautes fréquences (deux ordres de grandeur au dessus de la fréquence de transition visqueuse,  $f \approx 3675$  Hz, et  $\delta_v \approx 0.036$  mm soit environ  $36 \mu\text{m}$ ), le fluide est beaucoup moins sensible aux étranglements

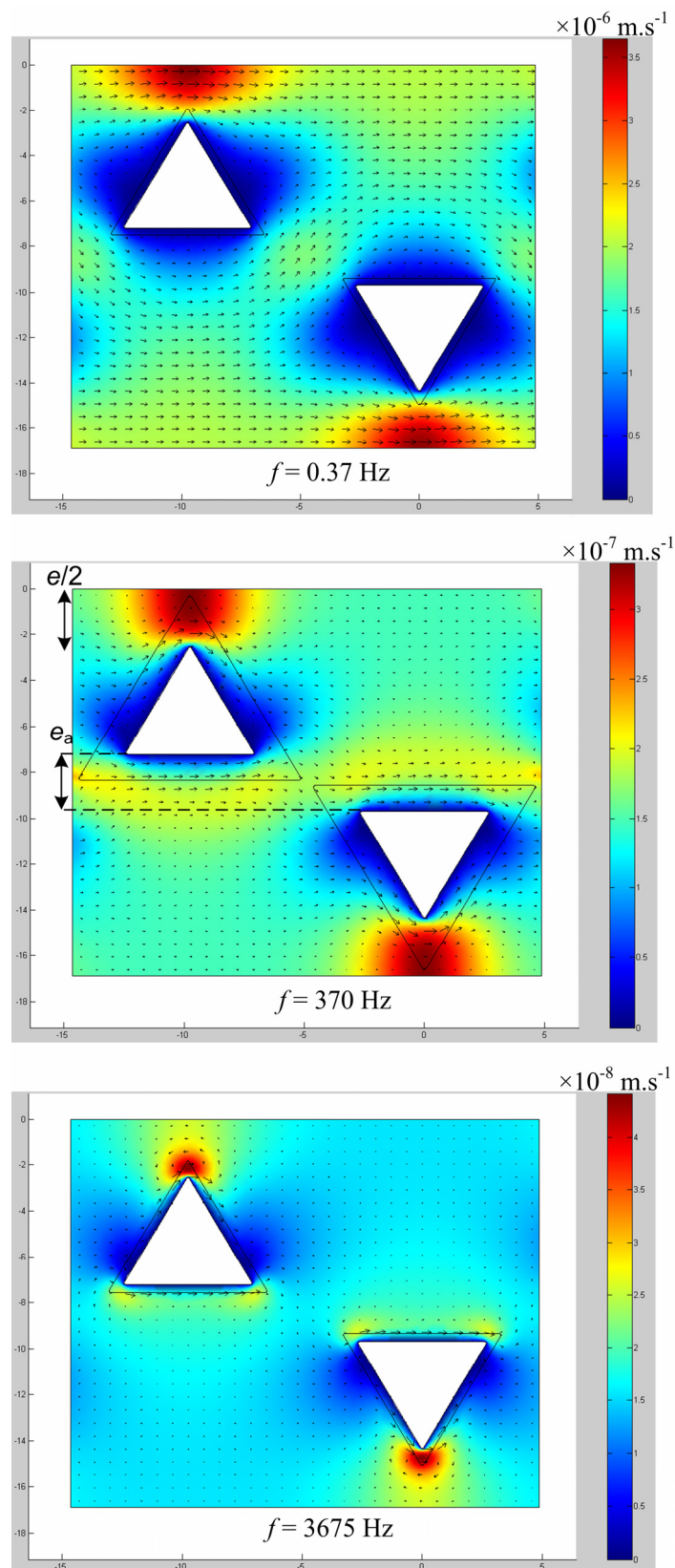


Figure 7.5 Évolution de champs de vitesses avec la fréquence

car il tend à se comporter comme un fluide non-visqueux avec une condition de glissement à l'interface fluide-structure  $\Gamma$ . L'écoulement apparaît donc comme étant plus homogène à l'échelle du pore, avec de perturbations très localisées au voisinage des zones d'étranglement.

On note au passage quelques remarques d'ordre plus général révélées par la modélisation adoptée.

- Malgré la simplicité du modèle bidimensionnel proposé, ce calcul de la perméabilité dynamique visqueuse par homogénéisation a l'avantage d'illustrer, voire de préciser clairement les bases micro-physiques de comportements macroscopiques mesurés. Par exemple, les expérimentateurs savent bien que la tortuosité dynamique mesurée au tube à ondes stationnaires diminue avec la fréquence, pour tendre vers un ; ce qui s'illustre clairement par une homogénéisation du champ de vitesses avec la fréquence.
- Les acousticiens ont d'autre part coutume de dire que les dissipations visqueuses sont les plus importantes là où l'épaisseur de la couche limite est du même ordre de grandeur que la taille caractéristique des pores. Ce calcul tend à démontrer que les dissipations visqueuses sont les plus importantes non pas là où l'épaisseur de la couche limite est du même ordre de grandeur que la taille des pores, mais là où l'épaisseur de la couche limite est du même ordre de grandeur que la taille des étranglements apparents, qui s'exprime comme la moyenne arithmétique des tailles d'étranglements vus par l'écoulement, c'est-à-dire projetés selon un axe perpendiculaire à sa direction de propagation.

On peut finalement suggérer quelques perspectives d'utilisation de l'outil développé, telles que l'étude de l'influence de la forme des sections. Des résultats préliminaires qui n'ont pas encore été rédigés ici tendent à montrer que, porosité et longueur caractéristique thermique étant constantes par ailleurs, la tortuosité augmente sensiblement avec la concavité des sections, selon l'ordre de la forme des sections suivantes : circulaire, triangle convexe, triangle équilatéral, triangle concave, Figure 7.6. **En outre, cette tendance numérique semble en accord avec l'expérience. En effet, les mousses qui présentent généralement les meilleures performances en termes d'absorption ont généralement une tortuosité relativement élevée et une porosité très proche de un, dernier trait que l'on peut maintenant associer à des sections de forme concave (voir Chapitre 2).**

---

## 7.6 Conclusion

La perméabilité dynamique visqueuse d'un motif géométrique bidimensionnel constitué de fibres de sections triangulaires disposées selon un réseau hexagonal a été étudiée. La perméabilité dynamique visqueuse du motif est tout d'abord obtenue en calculant la solution complète de l'écoulement visqueux oscillant dans la configuration. Ces résultats numériques ont ensuite été comparés aux modèles de Johnson (différence relative inférieure à 11 % en partie imaginaire basses fréquences) et de Pride (différence relative inférieure à 5 % en partie imaginaire basses fréquences) avec un relativement bon accord, ce qui permet de s'assurer que la procédure de calcul numérique développée conduit aux bonnes tendances. Une brève analyse de l'évolution du champ de vitesses en fonction de la fréquence a ensuite pu être menée. Une comparaison à des résultats expérimentaux sera donnée dans le chapitre suivant. Elle devrait permettre de déterminer si le modèle géométrique bidimensionnel équivalent proposé est une bonne approximation de la microstructure vue par un écoulement visqueux lors du passage d'une onde acoustique. Dans ce cas, les pertes par effets visqueux d'une mousse à cellules ouvertes pourraient effectivement être capturées en simulant un écoulement oscillant à travers une unité cellulaire périodique bidimensionnelle équivalente.

## Remerciements

Je tiens ici à remercier Igor Jovet et Fabien Chevillotte, tous deux stagiaires de l'ECAM au GAUS, respectivement au cours des sessions d'hiver 2004 et d'hiver 2006, pour leur implication dans le développement de l'application de calcul numérique sous Comsol.

## Références

1 A. Craggs and J. G. Hildebrandt, "Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes," *J. Sound Vibrat.* 92 (3), 321-331 (1984).

2 D. M. J. Smeulders *et al.*, "Similarity of sharp-edged porous media," *International Journal of Engineering Science* 32 (6), 979-990 (1994).

- 3 M. Firdaouss, J. -L Guermond and D. Lafarge, "Some remarks on the acoustic parameters of sharp-edged porous media," *Int.J.Eng.Sci.* 36 (9), 1035-46 (1998).
- 4 A. Cortis *et al.*, "Influence of pore roughness on high-frequency permeability," *Phys.Fluids* 15 (6), 1766-75 (2003).
- 5 A. Cortis *et al.*, in IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Series: Solid Mechanics and Its Applications, edited by Wolfgang (Ehlers, Held at the University of Stuttgart, Germany, 2001) pp. 1-448.
- 6 S. Gasser, F. Paun and Y. Brechet, "Absorptive properties of rigid porous media: Application to face centered cubic sphere packing," *J.Acoust.Soc.Am.* 117 (4 I), 2090-2099 (2005).
- 7 K. Boomsma, D. Poulikakos and Y. Ventikos, "Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure," *Int J Heat Fluid Flow* 24 (6), 825-834 (2003).
- 8 Comsol 3.2, WTC, 5 pl. Robert Schuman F-38000 Grenoble.
- 9 D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J.Fluid Mech.* 176, 379-402 (1987).
- 10 S. R. Pride, F. D. Morgan and A. F. Gangi, "Drag forces of porous media acoustics," *Physical Review B* 47 (9), 4964-4975 (1993).
- 11 M. Y. Zhou and P. Sheng, "First-principles calculations of dynamic permeability in porous media," *Phys. Rev. B* 39 (16), 12027-12039 (1989).



12 Jean-F Allard and Yvan Champoux, "New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials," J. Acoust. Soc. Am. 91 (6), 3346-3353 (1992).

13 N. Martys and E. J. Garboczi, "Length scales relating the fluid permeability and electrical conductivity in random two-dimensional model porous media," Physical Review B (Condensed Matter) 46 (10), 6080-90 (1992).

# 8 Méthode de détermination microstructurale des propriétés acoustiques d'une mousse d'aluminium à cellules ouvertes

## 8.1 Introduction

## 8.2 Processus de reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER)

## 8.3 Résultats et discussion

## 8.4 Résumé et conclusions

### Références

### Remerciements

Ce chapitre décrit une approche récente d'analyse microstructurale des propriétés acoustiques d'échantillons de mousses à cellules ouvertes. Il rassemble différentes techniques mises en œuvre de manière isolées au cours des chapitres précédents. Le principal propos de ce Chapitre est de présenter une technique de détermination des propriétés acoustiques de mousses à cellules ouvertes, qui introduise une structure cellulaire sous-jacente, mais utilise seulement des paramètres géométriques qui peuvent être mesurées sur des images tridimensionnelles d'échantillons réels. Toute quantité géométrique peut-être mesurée, et le milieu est ensuite généré avec les mêmes propriétés moyennes. Cette technique est basée sur des modèles de cellules périodiques simples, dont les dimensions caractéristiques sont identifiées expérimentalement. Les coefficients macroscopiques gouvernant le comportement asymptotique (en limites basses et hautes fréquences) du milieu sont calculés numériquement à l'échelle des cellules reconstruites. Le macro-comportement acoustique de la mousse est ensuite obtenu en utilisant les modèles semi-phénoménologiques de Johnson (Johnson, 1987)<sup>1</sup> et Champoux-Allard (Champoux, 1991)<sup>2</sup> (Allard, 1993)<sup>3</sup> modifié par Lafarge (Lafarge, 1997)<sup>4</sup>.

---

## 8.1 Introduction

La description précise des phénomènes de propagation et de dissipation des ondes acoustiques dans un milieu poreux est actuellement basée sur l'utilisation de modèles semi-phénoménologiques pour lesquels la mesure d'un grand nombre de paramètres mesurés à l'échelle macroscopique est requise. Le milieu est alors considéré comme un fluide homogène dont les propriétés sont équivalentes au matériau poreux. Les acousticiens font ainsi l'épargne d'une description de la géométrie locale du milieu, souvent complexe, et appelée microstructure par opposition au macro-comportement acoustique qu'ils cherchent à modéliser. Or, les paramètres macroscopiques sont liés entre eux, ainsi qu'à la microstructure. Une optimisation des propriétés acoustiques d'un matériau poreux (problème technologique), de même qu'une meilleure compréhension des phénomènes de propagation et de dissipation qui s'opèrent à l'échelle locale (problème scientifique), nécessitent donc de lier la description de la microstructure à celle du macro-comportement acoustique qui en dérive.

Pour lier la microstructure aux propriétés acoustiques de mousses à cellules ouvertes, on cherchera à répondre à la question suivante : existe-t-il une Cellule Élémentaire Représentative (CER) du milieu poreux ? Une CER est ici comprise comme une petite cellule (devant la longueur d'onde) pour laquelle la représentation du comportement acoustique (par les paramètres macroscopiques habituels) est une description suffisamment précise de la réponse dynamique moyenne. La mise en évidence d'une telle cellule permettrait de réduire la complexité de la géométrie du milieu poreux hétérogène à une géométrie élémentaire paramétrable, à l'échelle de laquelle pourraient être étudiés les phénomènes de dissipation acoustique.

La CER recherchée aura si possible une forme relativement simple, et compatible avec les principes gouvernant la physique des mousses (formes de surface minimale pour un volume donné). Si on impose à la cellule une contrainte supplémentaire de périodicité afin d'alléger les calculs, les premiers candidats potentiels adopteront alors en trois dimensions la forme d'un tétrakaidécaèdre (c'est-à-dire un polyèdre à 14 faces constituées de 6 carrés et 8 hexagones, que l'on obtient en tronquant les sommets d'un octaèdre), et en deux dimensions celle du réseau hexagonal (nid d'abeilles). On s'attend à ce que les dimensions caractéristiques du motif géométrique soient identifiables en utilisant une méthode d'imagerie tridimensionnelle non-destructive, la microtomographie axiale à rayons-X.

L'objectif est donc de déterminer si une cellule périodique tridimensionnelle ayant la forme d'un tétrakaidécaèdre, dont les dimensions caractéristiques sont identifiées expérimentalement, peut servir de base à la détermination microstructurale des propriétés acoustiques de mousses.

Ce chapitre est organisé comme suit. La Section 8.2 couvre le processus de reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER) de mousse réticulée (absence de membranes ou de fenêtres, c'est-à-dire à cellules ouvertes). La Section 8.3 présente et discute les résultats obtenus confrontés à des mesures au tube d'impédance. La Section 8.4 conclut ce chapitre.

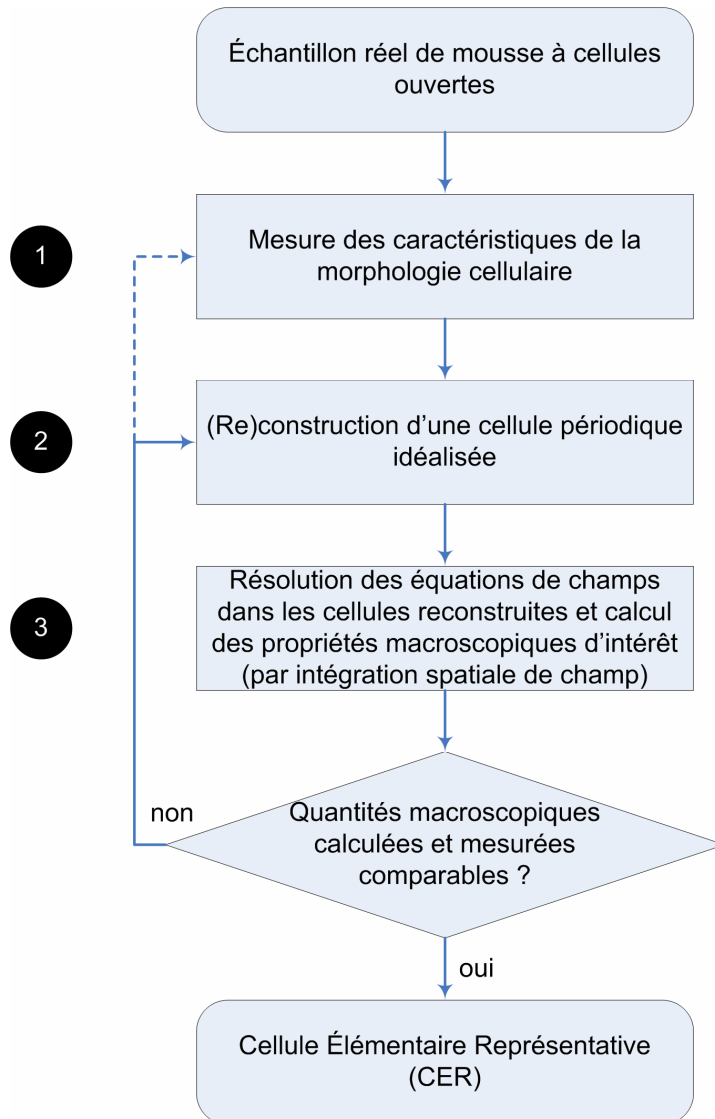
---

## **8.2 Procédure de reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER)**

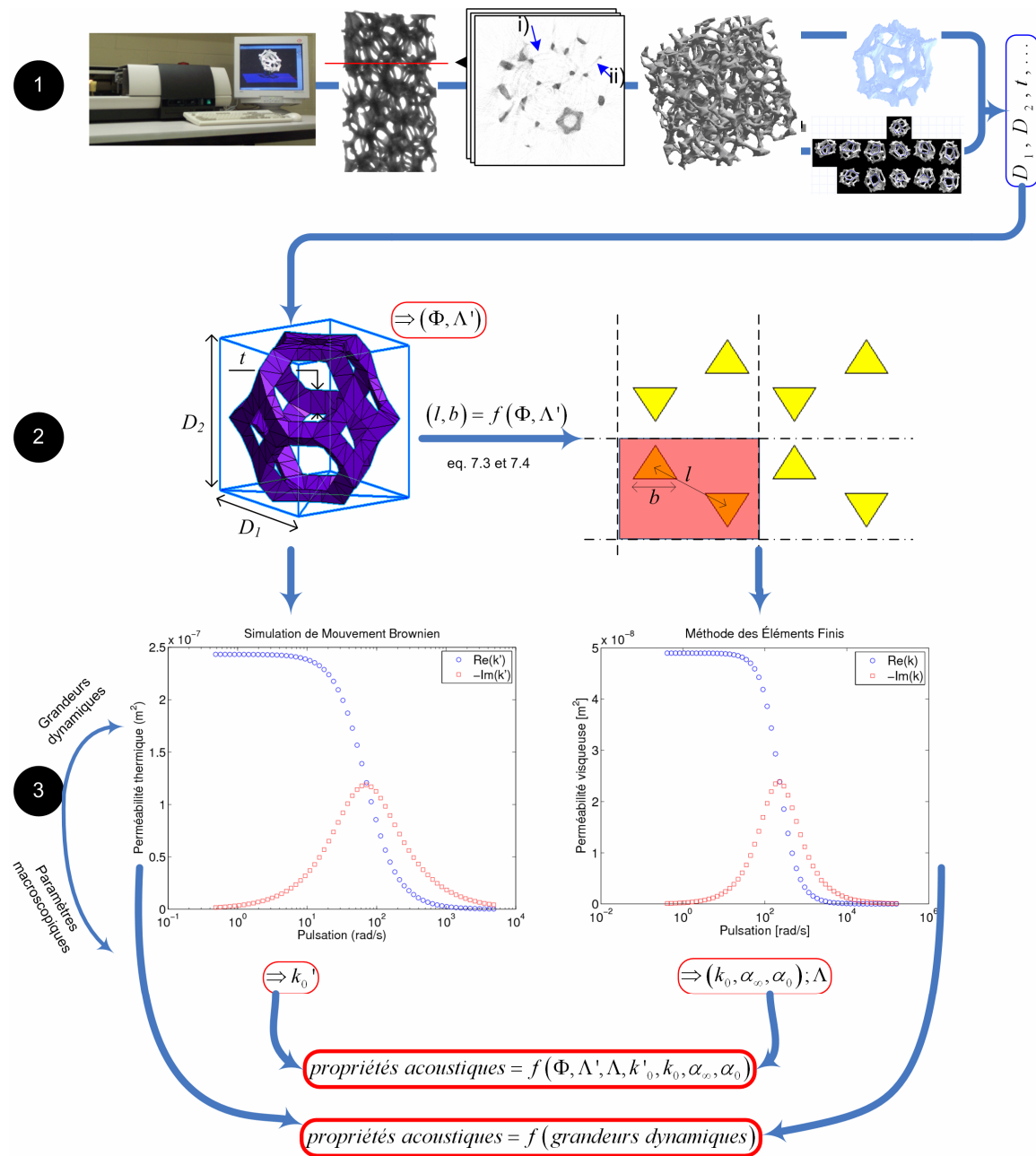
Cette section décrit la méthode développée de détermination microstructurale des propriétés acoustiques d'une mousse réticulée par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER). L'échantillon considéré est une mousse d'aluminium Duocel<sup>5</sup> 40 ppi (pores par inches) à cellules essentiellement ouvertes de porosité élevée. La méthode s'échafaude sur l'ensemble des chapitres précédents de cette thèse. L'emphase est volontairement placée sur la méthode en tant que vue d'ensemble. Les détails techniques sont accessibles dans les chapitres précédents, et ne seront pas répétés ici sans quoi ils auraient été redondants.

Le principe de cette méthode est composé de trois étapes majeures. La Figure 8.1 décrit le principe général de la méthode. Elle présente les objectifs intermédiaires à atteindre et leur articulation sous forme d'enchaînement d'étapes. La Figure 8.2 illustre les actions mises en place pour atteindre chacun des objectifs intermédiaires. La première étape implique la mesure des caractéristiques de la morphologie cellulaire (Figure 8.1, ❶) au moyen d'une technique d'imagerie tridimensionnelle, par microtomographie axiale à rayons-X (Figure 8.2, ❶). La deuxième étape est le processus de reconstruction (Figure 8.1, ❷). Des cellules périodiques idéalisées tri- et bi- dimensionnelles sont reconstruites avec des caractéristiques géométriques moyennes identiques à celles qui ont été mesurées (Figure 8.2, ❷). Au cours d'une troisième étape, tous les phénomènes acoustiques peuvent être étudiés, au moins en principe. La méthode consiste à résoudre les équations de champs dans la cellule reconstruite avec les conditions aux limites adéquates. Généralement, la quantité macroscopique d'intérêt est obtenue par intégration spatiale du

champ local (Figure 8.1, ❸). Les perméabilités dynamiques thermique et visqueuse des cellules reconstruites sont déterminées par simulation de mouvements Browniens, et méthode des éléments finis (Figure 8.2, ❸). À l'issue de ces trois étapes, la quantité macroscopique d'intérêt ainsi obtenue est confrontée à la mesure. On peut alors se prononcer quant à la représentativité de la cellule élémentaire reconstruite, et à la pertinence de cette approche microstructurale.



**Figure 8.1** Principe de la méthode de détermination des propriétés acoustiques d'une mousse à cellules ouvertes par reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER) du milieu poreux.



**Figure 8.2** Illustration des trois principales étapes de la méthode de détermination microstructurale des propriétés acoustique d'une mousse à cellules ouvertes: **1** Mesure des caractéristiques de la morphologie cellulaire, **2** Reconstruction d'une cellule périodique idéalisée, **3** Résolution des équations de champ dans la cellule reconstruite et calcul des propriétés macroscopiques d'intérêt (grandeurs dynamiques et paramètres macroscopiques du milieu poreux).

On appelle approche microstructurale directe une approche fondée uniquement sur l'analyse de la microstructure du milieu poreux, et faisant abstraction des modèles semi-phénoménologiques. L'approche microstructurale indirecte indique un recours aux modèles semi-phénoménologiques ; les paramètres macroscopiques étant calculés numériquement à l'échelle des cellules périodiques idéalisées tri- et bi-dimensionnelles reconstruites.

### 8.3 Résultats et discussion

Les résultats de nos calculs et expérimentations menés sur la mousse d'aluminium à cellules ouvertes 40 ppi sont résumés au Tableau 8.1, et aux Figures 8.3 à 8.5.

Paramètres macroscopiques	Calcul	Mesure	
$\Phi$ (-)	0.9228	0.912 +/- 0.01 <sup>a</sup>	0.926 +/- 0.002 <sup>b</sup>
$\Lambda'$ (mm)	1.8704	1.926 +/- 0.431 <sup>c</sup>	
$\Lambda$ (mm)	0.9974	0.988 +/- 0.057 <sup>c</sup>	
$k'_0$ (m <sup>2</sup> )	$2.4324 \times 10^{-7}$	-	
$k_0$ (m <sup>2</sup> )	$4.8970 \times 10^{-8}$	$(10.3955 \pm 1.23) \times 10^{-8}$ <sup>d(1)</sup>	$9.9052 \times 10^{-8}$ <sup>d(2)</sup>
$\alpha_\infty$ (-)	1.0623	1.07 +/- 0.01 <sup>c</sup>	
$\alpha_0$ (-)	1.2695	-	

**Tableau 8.1** Paramètres macroscopiques de la mousse d'aluminium 40 ppi calculés et mesurés par :

- (a) la méthode de la masse manquante (Panneton, 2005)<sup>6</sup>;
- (b) une méthode thermodynamique (Champoux, 1991)<sup>7</sup>;
- (c) inversion <sup>22, 23</sup> (Atalla, 2005)<sup>8</sup>;

<sup>22</sup> La mesure de la tortuosité  $\alpha_\infty$  et des longueurs caractéristiques  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  est basée sur une technique d'inversion. Le principe de l'inversion consiste à minimiser la différence entre l'impédance estimée et l'impédance mesurée, sachant que l'impédance estimée est déduite des modèles de Johnson (Johnson, 1987) pour la densité effective et de Champoux-Allard (Champoux, 1991) pour le module d'incompressibilité effectif. On cherche le minimum global de la somme des carrés des écarts entre impédance mesurée et impédance estimée fonction du triplet de paramètres ( $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$ ) sur la gamme de fréquences d'intérêt, tout en satisfaisant à des contraintes physiques sur ces paramètres.

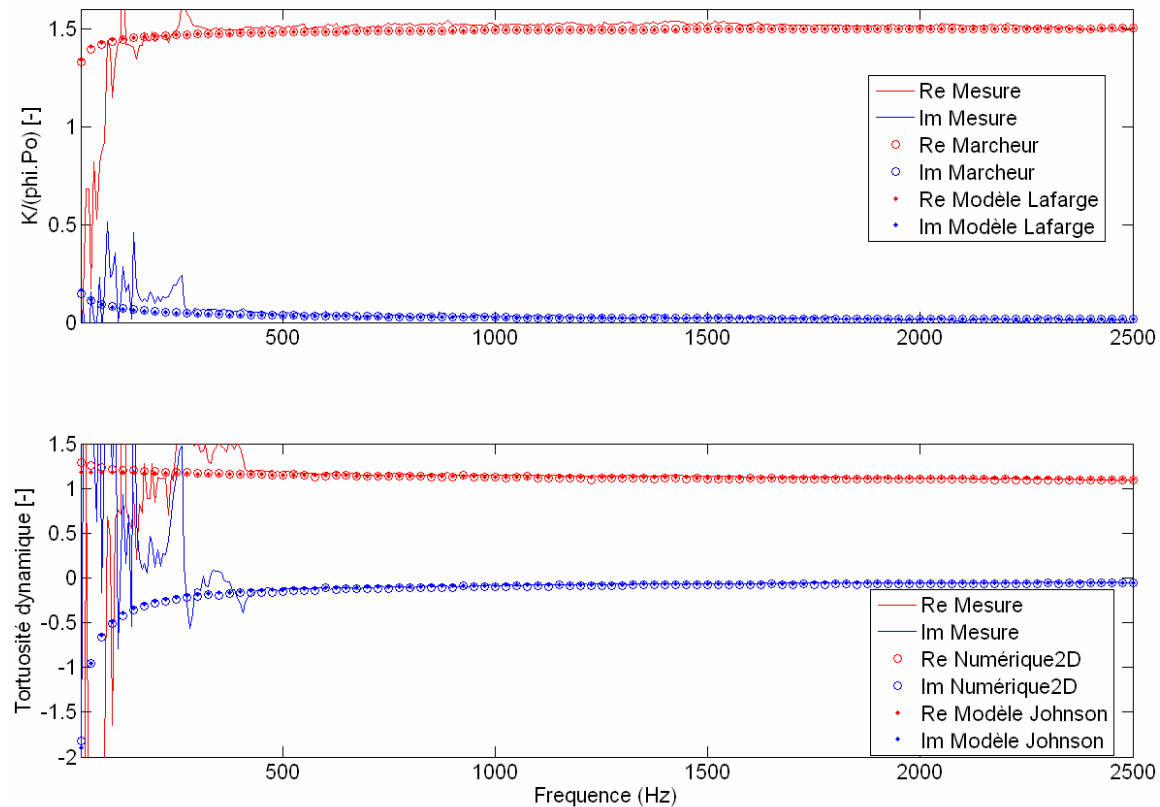
<sup>23</sup> On remarque en outre qu'étant donné la grande taille des pores de la mousse étudiée (de l'ordre du mm), les fréquences de transition du milieu poreux considérées sont très basses (de l'ordre de la dizaine de Hz), et le comportement en fréquences mesuré ne sera significatif que du comportement hautes fréquences du milieu. Par conséquent, la longueur caractéristique thermique déterminée par cette méthode d'inversion sera la même que celle qui aurait été trouvée si le modèle de Lafarge (Lafarge, 1997) avait été implémenté au lieu du modèle de Champoux-Allard pour la partie thermique.

(d) un résistivimètre (1) du GAUS (2) et de l'ENTPE (Stinson, 1988)<sup>9</sup>.

Le Tableau 8.1 présente une comparaison des paramètres macroscopiques de l'échantillon analysé obtenus par le calcul d'une part, c'est-à-dire grâce à l'approche microstructurale développée ; et par la mesure d'autre part. Globalement, on note une bonne correspondance entre les paramètres calculés et mesurés.

Seule la prédiction de la perméabilité visqueuse statique  $k_0$  s'écarte de la valeur mesurée, d'un facteur environ égal à 2. La reproductibilité des mesures de perméabilité visqueuse statique (résistivité) laisse à penser que l'approche microstructurale conduit à une sous-estimation (surestimation) de la perméabilité (résistivité). Ceci peut s'expliquer par la simplification bidimensionnelle opérée. En effet, dans la modélisation bidimensionnelle employée, les fibres sont systématiquement orientées perpendiculairement à l'écoulement ; orientation spatiale offrant le plus de résistance à l'écoulement. Alors qu'en trois dimensions, les ligaments de l'échantillon réel adoptent aussi d'autres orientations spatiales, ce qui réduit la résistance offerte par le milieu poreux réel. Ce résultat est d'ailleurs en accord avec les tendances reportées dans la littérature pour le cas de milieux poreux constitués de fibres de sections circulaires et ayant une porosité supérieure à 90 %. Pour un écoulement parallèle à l'orientation des fibres, la résistivité  $R_{//}$  est environ égale à la moitié de la valeur reportée  $R_{\perp}$  pour un écoulement perpendiculaire à la direction des fibres,  $R_{//} = R_{\perp} / 2$  ; voir par exemple (Tarnow, 1996)<sup>10</sup> (Tarnow, 2002)<sup>11</sup> et références incluses. Cette propriété peut éventuellement être utilisée pour corriger la prédiction trouvée avec un modèle géométrique bidimensionnel. Dans notre cas, l'ordre de grandeur de la résistivité du milieu est si faible ( $\approx 376 \text{ N.m}^{-4}.\text{s}$ ) qu'on s'attend à ce qu'une erreur commise sur son estimation avec un facteur environ égal à 2 ( $\approx 177 \text{ N.m}^{-4}.\text{s}$ ) n'ait que peu d'influence sur les caractéristiques acoustiques prédites. Plus généralement, ce résultat constitue néanmoins un argument important en faveur d'une implémentation tridimensionnelle de la méthode de détermination de la perméabilité dynamique visqueuse d'une mousse à cellules ouvertes par éléments finis.

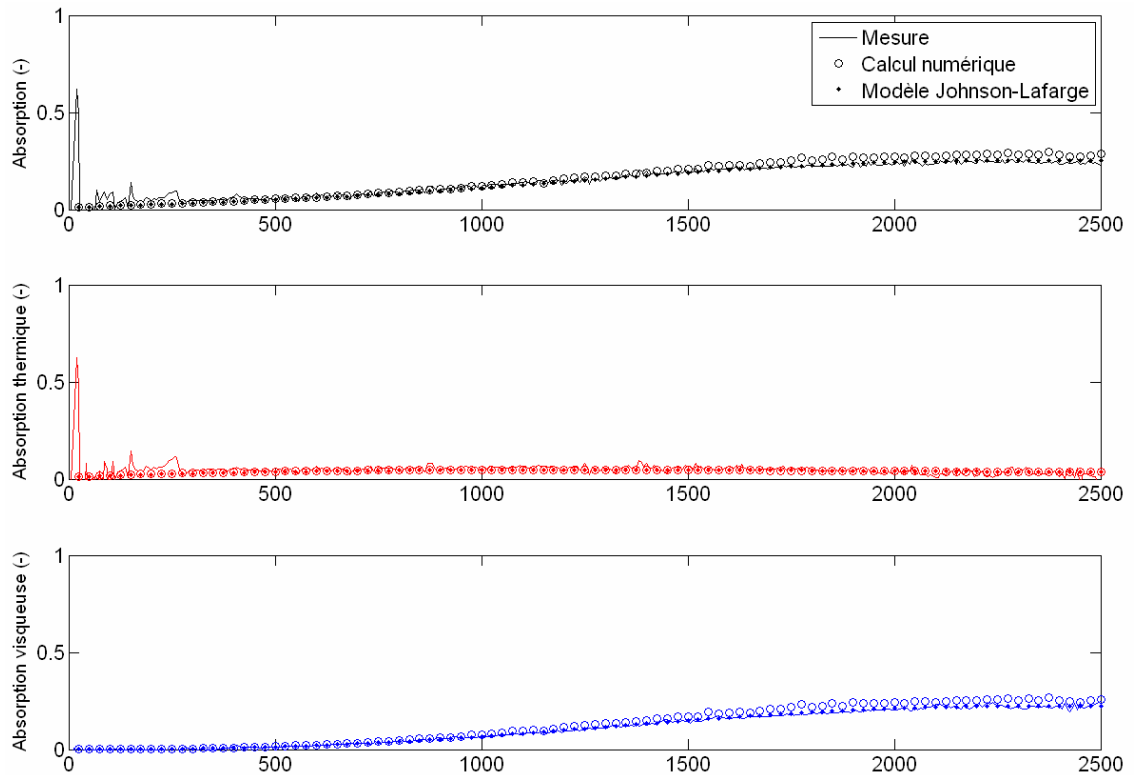




**Figure 8.3** Module d'incompressibilité équivalent normalisé ( $K/\phi_i.Po$ ) et tortuosité dynamique en fonction de la fréquence. Comparaison entre la mesure (—, —), l'approche microstructurale directe basée sur le calcul numérique (○, ○), et l'approche microstructurale indirecte basée sur les modèles de Johnson<sup>1</sup> et Lafarge<sup>4</sup> (•, •); où les paramètres des modèles sont obtenus par intégration spatiale des champs calculés en limites asymptotiques basses et hautes fréquences (voir Chapitre 7).

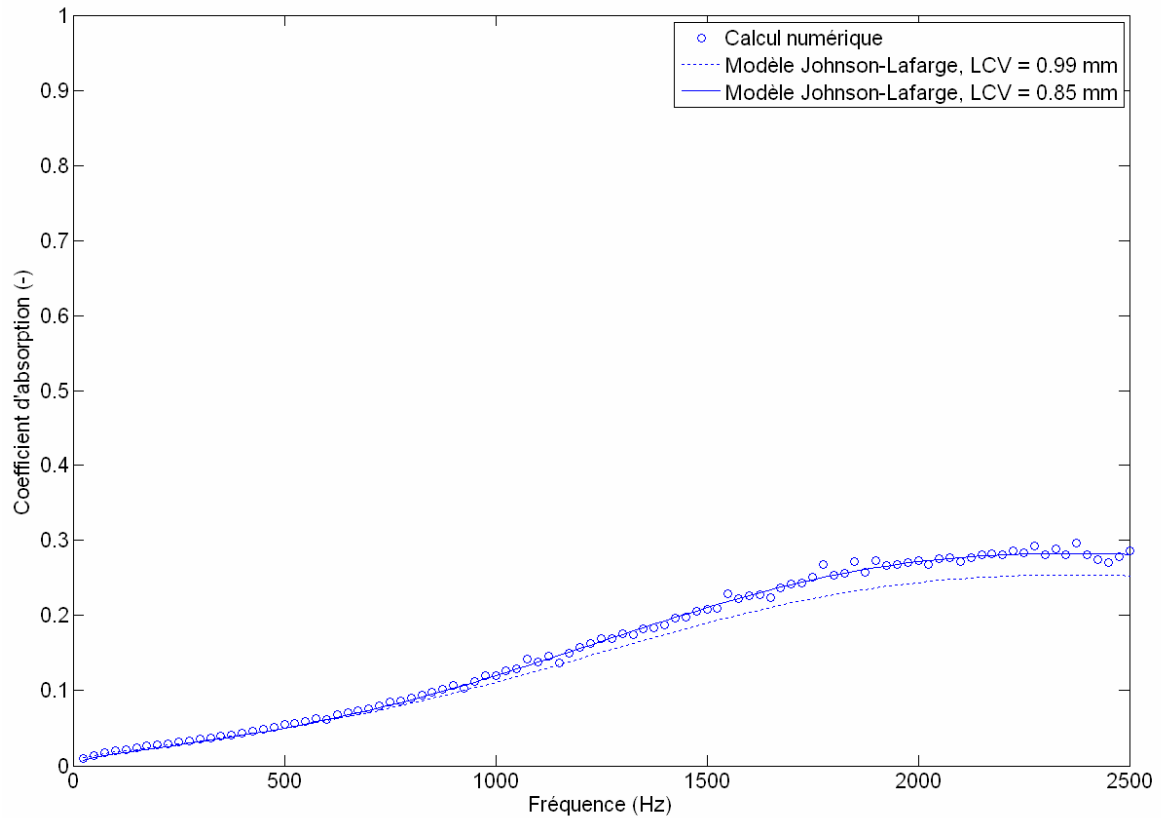
Trois points supplémentaires semblent importants à mentionner à partir de l'analyse des Figures 8.3 à 8.5.

Premièrement, la mesure des grandeurs dynamiques est bruitée en basses fréquences, ce qui ne permet pas d'évaluer la qualité de la prédiction microstructurale en dessous de 400 Hz environ. Une mesure plus précise présentée en annexes du module d'incompressibilité a néanmoins pu être obtenue pour une gamme de fréquences comprise entre 100 et 1000 Hz en augmentant la distance inter-microphonique du tube à ondes stationnaires. Dans ces conditions, la cellule tridimensionnelle anisotrope reconstruite fournit une bonne prédiction de la réponse thermique du milieu poreux réel.



**Figure 8.4** Coefficient d'absorption de la mousse d'aluminium à cellules ouvertes : absorption totale, contribution à l'absorption par effets thermiques, et contribution à l'absorption par effets visqueux. Comparaison entre la mesure (—, —, —), l'approche microstructurale directe (○, ○, ○), et l'approche microstructurale indirecte basée sur les modèles de Johnson<sup>1</sup> et de Lafarge<sup>4</sup> (•, •, •).

Deuxièmement, on observe que la prédiction de la contribution au coefficient d'absorption par effets visqueux, estimée à partir d'un calcul par éléments finis au niveau d'une cellule périodique bidimensionnelle, est un peu bruitée. Ceci s'explique par la faible précision retenue lors du calcul de la perméabilité dynamique visqueuse, de 3 décimales uniquement. L'inverse d'un petit nombre tronqué se traduit effectivement par un bruit numérique, qui devrait disparaître en augmentant le nombre de décimales retenues.



**Figure 8.5** Coefficient d'absorption de la mousse d'aluminium à cellules ouvertes (---), pour laquelle on a fait varier la longueur caractéristique visqueuse (LCV) de manière à faire coïncider sa courbe d'absorption ( — ) avec la courbe d'absorption obtenue numériquement (●).

Troisièmement, la prédiction de la contribution visqueuse au coefficient d'absorption produite par l'approche microstructurale directe s'écarte en hautes fréquences de la prédiction issue de l'approche microstructurale indirecte et de la mesure, Figure 8.4. On a pu faire correspondre la courbe d'absorption issue du modèle de Johnson-Lafarge aux points issus du calcul directe en ajustant la longueur caractéristique visqueuse du modèle à 0.85 mm, Figure 8.5. Cela veut dire que la longueur caractéristique visqueuse de la cellule bidimensionnelle n'est pas égale à 0.99 mm, telle qu'estimée ; mais qu'elle vaut en réalité 0.85 mm. D'un point de vue technique, cela confirme que la méthode de calcul employée conduit à une surestimation de  $\Lambda$  ; et qu'une estimation précise de  $\Lambda$  doit se baser sur la résolution de l'équation de Laplace. Du point de vue de la microstructure, cela veut dire qu'un modèle cellulaire bidimensionnel

conduit à une sous-estimation de la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$  du milieu poreux réel.

En pratique, la méthode de reconstruction d'une CER considérée ici semble néanmoins fournir une description relativement précise des propriétés de propagation et de dissipation d'une onde acoustique à travers une mousse à cellules ouvertes, en se basant uniquement sur l'analyse de sa microstructure. Il s'agit d'une amélioration substantielle sur les méthodes de prédictions précédentes, dans la mesure où aucune mesure macroscopique n'est requise. Ces résultats sont toutefois à nuancer car ils concernent uniquement le comportement hautes fréquences du matériau poreux étudié, domaine de fréquences sur lequel on observe peu de variations sur  $\tilde{\rho}/\rho_0$  et  $\tilde{K}$ . Des résultats sont attendus sur des structures plus petites, mais aussi plus difficiles à imager, et pour lesquelles on se heurte à des difficultés d'acquisition. De plus, la présente étude révèle qu'une implémentation tridimensionnelle du calcul des propriétés dynamiques visqueuses du milieu est nécessaire. Les travaux à venir devraient ensuite se focaliser sur l'influence de l'anisotropie cellulaire et de la forme des sections de ses ligaments sur le macro-comportement acoustique, et en particulier sur ses propriétés dynamiques visqueuses.

---

#### 8.4 Résumé et conclusions

- (1) Un jeu unifié de calculs de conduction de la chaleur et d'écoulement oscillant à l'échelle respective de cellules périodiques unitaires tri- et bi- dimensionnelles d'une mousse à cellules ouvertes a été mené.
- (2) Pour la mousse d'aluminium réticulée étudiée ici, les approches microstructurales directes et indirectes proposées fournissent une bonne prédiction des grandeurs dynamiques et des paramètres macroscopiques qui gouvernent les phénomènes de propagation et d'absorption d'une onde acoustique dans un matériau poreux. Néanmoins, le modèle cellulaire bidimensionnel conduit à une sous-estimation de la perméabilité visqueuse statique  $k_0$  et la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$  du milieu poreux réel.
- (3) Les modèles cellulaires proposés, bien que simples, permettent toutefois de tisser des liens entre microstructure et macro-comportement acoustique de mousses à cellules ouvertes; en étudiant par exemple l'influence de la forme des sections de ligaments, ou encore celle de l'anisotropie cellulaire.

- (4) Cette approche microstructurale doit être étendue au cas de structures plus fines pour lesquelles on observe des variations plus importantes sur  $\tilde{\rho} / \rho_0$  et  $\tilde{K}$ .
- (5) De plus amples développements sont requis pour implémenter le calcul direct des propriétés dynamiques visqueuses en trois dimensions ; pour améliorer les performances acoustiques des mousses d'une part, notre compréhension des phénomènes de dissipation à l'échelle locale d'autre part.

## Remerciements

Ce travail de doctorat fût réalisé sous la cotutelle de l'INSA de Lyon et de l'Université de Sherbrooke. Il fût en partie préparé au Laboratoire des Sciences de l'Habitat (LASH) de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE) sous la direction du Dr. Xavier Olny ; et en partie préparé au Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (GAUS) sous la direction du Pr. Raymond Panneton. Le Pr. J.-L. Guyader a en outre accepté de diriger cette thèse.

De nombreuses personnes ont collaboré à la bonne marche de ces travaux : étudiants stagiaires et professionnels de recherche à l'Université de Sherbrooke (UdeS). Je tiens ici à les remercier (par ordre chronologique de participation). Richard Bouchard est l'auteur du logiciel de visualisation et de mesure de cellules tridimensionnelles, le Mésoscope; ainsi que d'une version de développement du programme de simulation de mouvements Browniens, le Marcheur. Irène Kelsey Lévesque, Stéphane Gutierrez, et Sonia Blais du Centre de Caractérisation des Matériaux (CCM) de l'Institut des Matériaux et Systèmes Intelligents (IMSI) de l'UdeS se sont toujours montrés disponibles pour m'assister et me procurer un accès facile à l'ensemble des techniques de microscopie (optique ou électronique à balayage) dont ils disposent. Marc Lefebvre a contribué aux mesures des caractéristiques de la morphologie cellulaire. Félix Gauthier a réalisé des mesures d'absorption au tube d'impédance sur les échantillons de mousse d'aluminium. Le lui dois aussi le programme de conversion de fichiers CAD dans les principaux formats standards ayant notamment permis de valider la procédure de calcul des propriétés géométriques de surface et de volume d'une cellule. Emmanuel Gauthier a exploré le logiciel Surface Evolver, dont nous nous sommes inspirés pour générer des tétrakaidécaèdres ; et a réalisé quelques mesures de grandeurs dynamiques au tube à ondes stationnaires selon la méthode à deux microphones et deux cavités. Igor Jovet a programmé une interface conviviale de calcul par

éléments finis des propriétés acoustiques visqueuses de réseaux fibreux agencés selon un motif périodique hexagonal. Louis-Michel Raynauld a non seulement programmé en langage C, mais en grande partie repensé l'algorithme du Marcheur. Francis Jackson du Centre de Calcul Scientifique (CCS) a fait preuve de son art de numéricien pour débogger et implanter le Marcheur sur la grappe de calcul séquentiel de l'Université de Sherbrooke. Fabien Chevillotte a contribué à l'assemblage des différentes pièces du puzzle lors de la phase terminale de mise en œuvre de la méthode de caractérisation microstructurale. Steve Allen a repris le flambeau de Francis, et m'assiste encore actuellement dans les modifications et améliorations successives du Marcheur.

Ce projet de thèse a été soutenu par l'attribution de bourses délivrées par la région Rhône-Alpes, l'UdeS, Alcan, et le CQRDA. La stabilité du financement fût assurée par le Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (GAUS), notamment via le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) et le Fond Québécois de Recherches sur la Nature et les Technologies (FQRNT).

J'aimerais remercier les Dr. Claude Boutin et Denis Lafarge pour leurs soutiens et commentaires constructifs.

## Références

- 1 D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J.Fluid Mech.* 176, 379-402 (1987).
- 2 Y. Champoux and J. F. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," *J.Appl.Phys.* 70, 1975-1979 (1991).
- 3 J. F. Allard, Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials, edited by Elsevier Applied Science, (Elsevier Science Publishers LTD, New York and London, 1993), pp. 284.
- 4 D. Lafarge *et al.*, "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies," *J.Acoust.Soc.Am.* 102 (4), 1995-2006 (1997).

5 ERG Aerospace, Mousse d'aluminium Duocel fabriquée par la société ERG Materials & Aerospace Corporation, 900 Standford Avenue, Oakland, CA 94608.

6 R. Panneton and E. Gros, "A missing mass method to measure the open porosity of porous solids," *Acta Acustica United With Acustica* 91 (2), 342-8 (2005).

7 Yvan Champoux, Michael R. Stinson and Gilles A. Daigle, "Air-based system for the measurement of porosity," *J. Acoust. Soc. Am.* 89 (2), 910-916 (1991).

8 Y. Atalla and R. Panneton, "Inverse acoustical characterization of open cell porous media using impedance tube measurements," *Can. Acoustics* 33 (1), 11-24 (2005).

9 Michael R. Stinson and Gilles A. Daigle, "Electronic system for the measurement of flow resistance," *J. Acoust. Soc. Am.* 83 (6), 2422-2428 (1988).

10 Viggo Tarnow, "Airflow resistivity of models of fibrous acoustic materials," *J. Acoust. Soc. Am.* 100 (6), 3706-3713 (1996).

11 Viggo Tarnow, "Measured anisotropic air flow resistivity and sound attenuation of glass wool," *J. Acoust. Soc. Am.* 111 (6), 2735-2739 (2002).

# Partie 4

## Conclusion générale



Les premiers calculs de microstructures incluant des phases d'acquisition de la géométrie locale, de reconstruction du milieu, et de résolution des équations de champ remontent approximativement au début des années 90 dans les domaines de la géophysique et sont essentiellement stimulés par la prospection pétrolière. Voir par exemple (Adler, 1998)<sup>1</sup>. Rétrospectivement, les modèles semi-phénoménologiques, aujourd'hui indispensables aux acousticiens des milieux poreux, dérivent aussi des efforts de recherches considérables menés en géophysique et prospection pétrolière. Voir par exemple (Johnson, 1987)<sup>2</sup> (Zhou, 1987)<sup>3</sup>. On pourrait donc s'attendre à ce que l'acoustique des milieux poreux puisse à son tour bénéficier des progrès de recherche réalisés en géophysique en matière d'approche microstructurale. C'est ce que nous avons tenté de réaliser au cours de cette thèse.

Il s'agissait donc de baliser clairement le chemin qui part d'une représentation explicite de la microstructure d'un milieu poreux, pour se rendre jusqu'à l'expression des propriétés acoustiques qui en dérivent. D'un point de vue purement théorique, la voie du passage micro-macro était toute tracée. Parallèlement à ce travail, une publication récente a d'ailleurs fait l'objet d'un passage micro-macro explicite en acoustique pour le cas d'une structure constituée d'un assemblage de sphères creuses (Gasser, 2005)<sup>4</sup>, et le bien fondé des méthodes d'homogénéisation numériques avait été éprouvé pour des géométries académiques bidimensionnelles représentant, le plus souvent, des réseaux fibreux ou des canaux dentelés (Cortis, 2001)<sup>5</sup> (Cortis, 2003)<sup>6</sup>. Nous avons montré par la pratique qu'il est effectivement possible de partir de la représentation d'une structure réelle non-triviale, en l'occurrence une mousse à cellules ouvertes, et d'en déduire ses propriétés acoustiques en s'appuyant sur la description des phénomènes physiques à l'échelle locale.

La mise en évidence de la résolution pratique d'un tel problème, abordé dans sa totalité, a toutefois nécessité de surmonter un grand nombre de difficultés. La première difficulté, d'ordre expérimental, consistait à obtenir une image tridimensionnelle de la géométrie locale d'une mousse qui soit fidèle à l'objet réel. Nous ne nous doutions pas que l'utilisation d'un microtomographe compacte de laboratoire nécessiterait une réelle expertise pour décrire fidèlement, et non pas de manière approximative, une géométrie locale. Outre la finesse des réglages requis, et le manque de règles pratiques pour guider l'expérimentateur, les artefacts de reconstruction inhérents à une technologie basée sur un faisceau polychromatique de rayons-X allaient progressivement affecter l'ensemble

de la démarche microstructurale : puisque l'objectif n'était pas explicitement d'améliorer une technique d'imagerie tridimensionnelle imparfaite, pouvait-on tout de même tirer parti de la description existante en la modélisant et en réduisant par là-même les coûts de calculs ?

Il fallait pour ce faire développer les outils logiciels de visualisation et de mesure d'une géométrie tridimensionnelle d'une part, inexistantes ou trop coûteux ; et s'intéresser aux modèles géométriques de mousses d'autre part. Une fois les paramètres de la géométrie locale identifiés, générer un maillage de la morphologie cellulaire idéalisée ne fût pas non plus immédiat, tant ce type de morphologie peut paraître exotique de prime abord. Ce travail fut facilité par l'utilisation du logiciel libre Surface Evolver<sup>24</sup> qui permet notamment de modéliser les formes prises par des structures cellulaires lorsqu'elles sont dominées par la tension de surface. Côté calcul, Denis Lafarge nous avait mis sur la piste d'une méthode de calcul numérique des propriétés dynamiques thermiques attrayante en termes de coûts de calcul lors de la 2<sup>ème</sup> Conférence de Biot sur la mécanique des milieux poreux qui s'est déroulée à Grenoble en août 2002 (Lafarge, 2002)<sup>7</sup>. L'originalité consistait alors à implémenter la technique de calcul en trois dimensions pour des configurations périodiques; puis à éprouver la convergence de la solution, puisque aucune donnée n'avait été publiée à ce sujet dans la littérature, tout en fournissant des estimations de l'erreur commise sur la prédiction.

Mais le fait que nous nous limitions à la détermination de la perméabilité dynamique thermique n'était pas tout à fait satisfaisant puisque il manquait un ingrédient capital pour reconstruire la réponse acoustique complète d'un milieu poreux : la perméabilité dynamique visqueuse. Travailler sur une cellule périodique bidimensionnelle, qui puisse éventuellement être équivalente au milieu poreux tridimensionnel, en s'inspirant des modèles de la physique des mousses idéalisées apparaissait alors être un bon compromis : cela permettrait d'atteindre l'objectif de détermination microstructurale des propriétés acoustiques d'un milieu poreux réel tout en testant une idée originale.

---

<sup>24</sup> Ken Brakke's. The Surface Evolver.  
Disponible à l'adresse <http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver>.

À l'issue de cette dernière expérience numérique, il n'apparaît pas étonnant qu'une cellule bidimensionnelle périodique ne soit pas en mesure de représenter l'ensemble de la micro-géométrie sondée par une onde acoustique lorsqu'elle se propage dans le milieu poreux réel. Il est par contre intéressant de constater qu'un simple motif bidimensionnel périodique permette d'obtenir une prédiction relativement fiable des propriétés acoustiques d'une mousse à cellules ouvertes, et puisse par conséquent constituer un outil de base pour étudier l'influence des caractéristiques de la géométrie locale du milieu sur ses propriétés acoustiques (ex. effet de la forme des sections de ligaments sur la tortuosité et l'absorption basses fréquences). De ce point de vu, l'objectif consistant à lier la microstructure d'un milieu poreux réel à son macro-comportement acoustique a donc été atteint.

Les perspectives, néanmoins, ne manquent pas. À commencer par l'implémentation tridimensionnelle du calcul des propriétés dynamiques visqueuses, ce qui permettrait éventuellement de s'affranchir des modèles semi-phénoménologiques, intéressants du point de vue de la prédiction, mais pas de l'optimisation. De plus, on dispose d'ores et déjà d'un grand nombre d'outils puissants qui n'ont pas encore été exploités dans toutes leurs potentialités, alors qu'ils permettent d'étudier l'influence des paramètres de la géométrie locale sur les propriétés acoustiques du milieu poreux. La démarche pourrait ensuite être étendue à la détermination des propriétés acoustiques de structures beaucoup plus fines, présentant des étroitures de l'ordre du dixième de millimètre, et des propriétés d'absorption réellement intéressantes - telles que celles présentées par une mousse de mélamine<sup>25</sup>. On peut d'autre part envisager de tester les propriétés acoustiques de mousses pour lesquelles les caractéristiques de la microstructure tridimensionnelle ont déjà été publiées (référence incluses au Chapitre 3). Il s'agirait ici de faire l'économie de l'étape d'acquisition expérimentale de la microstructure tridimensionnelle. Une approche microstructurale uniquement basée sur des observations bidimensionnelles

---

<sup>25</sup> À titre indicatif, nos observations réalisées au microscope électronique à balayage révèlent des formes cellulaires qui s'apparentent à des tétrakaidécaèdres, avec des longueurs de ligaments de l'ordre de quarante à cinquante micromètres environ, et des épaisseurs de ligaments de l'ordre de 6 à 7 micromètres. Le recours à des colorations à base de métaux lourds a permis de rendre la mélamine non-transparente aux rayons-X. Mais la résolution des microtomographes de laboratoire est encore trop faible pour pouvoir disposer d'une image exploitable d'un point de vue quantitatif, en particulier sur l'épaisseur des ligaments. L'imagerie synchrotron est alors requise.

par stéréologie reste aussi à explorer. Voir par exemple (Rhodes, 1991)<sup>8</sup> (Richardson, 1986)<sup>9</sup> (Rhodes, 1991)<sup>8</sup>. Un gain de temps considérable est ainsi escompté, sans que la description de la géométrie locale ne soit nécessairement affectée.

Voici pour conclure les points nouveaux relatés dans cette thèse, en même temps que les limitations actuelles :

- 1) *Une mise en évidence des principaux modèles cellulaires décrivant la morphologie idéalisée de mousses.* Deux modèles cellulaires périodiques ont été retenus. Le premier modèle géométrique est tridimensionnel, il s'agit de la cellule de Kelvin ou tétrakaidécaèdre. Le deuxième est la contrepartie bidimensionnelle du premier, le nid d'abeilles ou réseau hexagonal. Les sections de ligaments adoptent ensuite une forme généralement dépendante de la porosité de l'échantillon, et se superposent à un modèle filaire grâce au principe de « décoration ». Ces modèles géométriques tiennent compte des mécanismes de formation physique des mousses. Ils peuvent donc servir de base à une optimisation du milieu fondée sur une modification réaliste des paramètres de sa géométrie locale.
- 2) *Une identification des paramètres expérimentaux de la géométrie cellulaire, par microtomographie axiale à rayons-X, et mesures à l'échelle de cellules isolées.* Compte tenu de la résolution disponible, de l'ordre d'un dixième de millimètre environ, l'objectif visé est la reconstruction d'une cellule élémentaire représentative (CER). Des mesures effectuées à l'échelle de quelques cellules de taille moyenne ont permis de quantifier les paramètres de la morphologie cellulaire. La reconstruction d'un volume élémentaire représentatif (VER) reste à faire en acoustique, même si l'approche à utiliser est aujourd'hui bien documentée (Forest, 2005)<sup>10</sup>. Une résolution de l'ordre d'une quinzaine de pixels par diamètre de ligament est a priori nécessaire pour disposer d'une image tridimensionnelle fidèle à l'objet réel. Pour la plupart des structures couramment rencontrées en acoustique, les tailles caractéristiques de ligaments sont de l'ordre de la dizaine de micromètres. La résolution requise est donc actuellement difficile à atteindre avec un microtomographe de laboratoire. L'imagerie synchrotron serait idéale pour aborder un tel problème.
- 3) *Une implémentation tridimensionnelle de la méthode du parcours aléatoire pour le calcul de la perméabilité dynamique thermique de géométries cellulaires périodiques.* La méthode de calcul proposée par Lafarge (Lafarge, 2002)<sup>7</sup> n'avait été implémentée que pour des motifs

bidimensionnels. L'algorithmique proposée a été largement documentée.

- 4) *Une étude de convergence de la méthode du parcours aléatoire.* La méthode de calcul de la perméabilité dynamique thermique étant relativement récente, elle était peu documentée. Le recours à des grappes de calcul séquentiel a permis de simuler un grand nombre de parcours aléatoires pour étudier la convergence de la solution et l'influence des paramètres de simulation (distance de piégeage, nombre de parcours aléatoires, configuration géométrique) sur la prédiction.
- 5) *Un calcul de la perméabilité dynamique visqueuse d'un réseau cellulaire bidimensionnel par homogénéisation numérique.* Il s'agissait de tester si une cellule périodique bidimensionnelle, déduite de la cellule périodique tridimensionnelle identifiée expérimentalement, par conservation des propriétés de volume et surface ( $\Phi$ ,  $\Lambda'$ ), puisse être représentative des propriétés dynamiques visqueuses d'une mousse à cellules ouvertes réelle. Pour la mousse à cellules ouvertes étudiée, le modèle bidimensionnel proposé conduit à une relativement bonne prédiction de la tortuosité dynamique du matériau poreux réel ; avec néanmoins une sous-estimation de la perméabilité visqueuse statique  $k_0$  et de la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$ . L'équation de Laplace devra être résolue pour estimer plus précisément  $\Lambda$ . L'implémentation tridimensionnelle du modèle cellulaire reste à faire et devrait corriger les sous-estimations de  $k_0$  et  $\Lambda$ .
- 6) *Une méthode de détermination microstructurale des propriétés acoustiques d'une mousse à cellules ouvertes.* Jusqu'à maintenant, la détermination microstructurale des propriétés acoustiques de milieux poreux par homogénéisation numérique était limitée au cas de matériaux synthétiques constitués d'empilement de sphères creuses (Gasser, 2003)<sup>11</sup> (Gasser, 2005)<sup>4</sup>. La méthode proposée ici a permis d'étendre une démarche de caractérisation fondée sur le calcul de microstructures au cas des mousses à cellules ouvertes par idéalisation de la complexité du milieu poreux réel. Néanmoins, les variations des propriétés acoustiques dynamiques du matériau étudié sont faibles en raison de la taille caractéristique des pores mis en jeu ( $\sim 2$  mm). Étendre l'approche proposée au cas de mousses constituées de pores plus petits ( $\sim 0.1$  mm) devrait permettre d'éprouver pleinement la méthode de caractérisation microstructurale développée. Il reste encore à quantifier l'influence de la morphologie cellulaire sur les propriétés acoustiques du milieu. Des travaux d'optimisation basés sur les outils développés sont aussi envisageables. La démarche pourra ensuite être étendue au cas de milieux fibreux.

*To conclude on an optimistic note, may we say that the field of porous media is really fascinating because of its unique blend of practical, theoretical, and numerical problems. Welcome to the field. PM Adler*

---

## Références

1 P. M. Adler and J. -F Thovert, "Real porous media: Local geometry and macroscopic properties," *Appl.Mech.Rev.* 51 (9), 537-585 (1998).

2 D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J.Fluid Mech.* 176, 379-402 (1987).

3 M. Y. Zhou and P. Sheng, "First-principles calculations of dynamic permeability in porous media," *Phys. Rev. B* 39 (16), 12027-12039 (1989).

4 S. Gasser, F. Paun and Y. Brechet, "Absorptive properties of rigid porous media: Application to face centered cubic sphere packing," *J.Acoust.Soc.Am.* 117 (4 I), 2090-2099 (2005).

5 A. Cortis *et al.*, in IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Series: Solid Mechanics and Its Applications, edited by Wolfgang (Ehlers, Held at the University of Stuttgart, Germany, 2001) pp. 1-448.

6 A. Cortis *et al.*, "Influence of pore roughness on high-frequency permeability," *Phys.Fluids* 15 (6), 1766-75 (2003).

7 D. Lafarge, in Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics, edited by J. -L Auriault (Swets & Zeitlinger, Grenoble, 2002) pp. 703-708.

## Conclusion générale

8 M. B. Rhodes and B. Khaykin, "Stereology. A technique for the quantitative characterization of foam structure," *Journal of Thermal Insulation* 14, 175-183 (1991).

9 M. O. W. Richardson and D. S. Nandra, "CELL SIZE DETERMINATION OF POLYMERIC FOAMS," *Cell.Polym.* 5 (6), 423-431 (1986).

10 Samuel Forest, La question du Volume Élémentaire en physique et mécanique des matériaux hétérogènes, in Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes, edited by Presses de l'Ecole des Mines de Paris, 1ère ed. Paris, 2006), pp. 127-133.

11 S. Gasser, "Étude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux: modèle à base de sphères creuses de nickel,". Thèse. Science et Génie des matériaux. Grenoble : INPG, 2003, 306 p.

## B Annexes de la thèse

### Actes de conférences publiés

- B 1 Mesostructural approach for characterising macroscopic parameters of open cell foams with computed microtomography**  
C. Perrot, R. Panneton, X. Olny and R. Bouchard  
Proc. Inst. Acoust. 25, 169-175 (Sept 2003)  
ISBN 1 901656 56 X
- B 2 Microscopic and mesoscopic approaches for describing and building sound absorbing porous materials**  
X. Olny, F. Sgard, C. Perrot and R. Panneton  
Proceedings of the Second TUL-ENTPE Workshop - Experimental Knowledge versus Theoretical model - Soils and Composite Materials, Edited by C. Boutin, M. Lefik and T. Doanh, (École Nationale des Travaux Publics de l'État, Vaulx en Velin, France - Technical university of Lodz, Lodz, Poland, March 2004), pp. 187-206  
ISBN 2 86834 121 7
- B 3 Computation of the dynamic thermal properties of a three-dimensional unit cell of porous media by Brownian motion simulation**  
C. Perrot, R. Panneton and X. Olny  
Abstract J. Acoust. Soc. Am. 115 (5), 2625 (May 2004)
- B 4 From microstructure to acoustic behaviour of porous materials**  
C. Perrot, R. Panneton and X. Olny  
Canadian Acoustics - Acoustique Canadienne 32 (3), 18-19 (Sept 2004)
- B 5 Computation of the dynamic bulk modulus of acoustic foams**  
C. Perrot, R. Panneton and X. Olny  
From microstructure to acoustic behaviour of porous materials  
Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials, Collected by Jaouen, L. et al (Société Française d'Acoustique / Lash-ENTPE, Lyon, France, Dec 2005) pp. 21-28
- B 6 Linking microstructure with acoustic properties of open-cell foams**  
C. Perrot, R. Panneton and X. Olny  
Invited paper – J. Acoust. Soc. Am. 120 (5), 3145 (Nov 2006)



# MESOSTRUCTURAL APPROACH FOR CHARACTERISING MACROSCOPIC PARAMETERS OF OPEN CELL FOAMS WITH COMPUTED MICROTOMOGRAPHY

C. Perrot GAUS, Department of mechanical engineering, Université de Sherbrooke, Canada  
 R. Panneton GAUS, Department of mechanical engineering, Université de Sherbrooke, Canada  
 X. Olny ENTPE, DGCB URA CNRS 1652, Vaulx-en-Velin Cedex, France  
 R. Bouchard GAUS, Department of mechanical engineering, Université de Sherbrooke, Canada

## 1 INTRODUCTION

This paper presents recent research activities at the University of Sherbrooke in the characterization of open-cell foams from the cell's morphology. The goal is to link the morphology to the most common macroscopic acoustic parameters (porosity, resistivity, tortuosity, characteristic lengths and thermal permeability); and to link the acoustics to material sciences (see figure 1) in view of guiding the design of acoustical foams. To achieve this, one needs first to determine the local geometry of the media. The use of the modern technique of Computed Micro Tomography (CMT) is investigated. Difficulties met until now, and proposed solutions will be presented. In a first attempt, only the scalar macroscopic parameters (porosity and thermal characteristic length) are investigated. Let us mention that microstructural approaches have originally been initiated in the field of mechanical properties. Similar approaches in the field of transport properties rely on the reconstruction of the porous media by some statistical techniques.

## 2 MACROSCOPIC PARAMETERS OF FOAMS (ACOUSTICS)

In acoustics, open-cell porous foams used in sound absorbing applications are classically characterized by macroscopic parameters. The most common of these parameters are the porosity, static airflow resistivity, tortuosity, viscous characteristic length, thermal characteristic length, and thermal permeability. These parameters are confidently used in models to predict the acoustical behavior of these materials<sup>1-3</sup>. Typically, under the assumption of a rigid frame, the different sources of dissipation are separated (visco-inertial and thermal), and the exact asymptotic behavior of the macroscopic laws governing these processes is derived. Mathematical parameters involved in these formulations are finally related to the measurable macroscopic parameters.

The characterization of these parameters is done at a macroscopic scale (i.e. homogeneous properties) using different methods. While porosity, resistivity, and tortuosity (for non conductive frame) can be directly measured<sup>4-6</sup>, the other parameters are usually measured using acoustical methods<sup>7,8</sup>. However, all of these methods give no clue on the morphology of the cells and no interrelation between the macroscopic parameters. This limits the guided design of acoustical foams since the manufacturer mostly control the morphological parameters of the foams (density, cell topology and geometry).

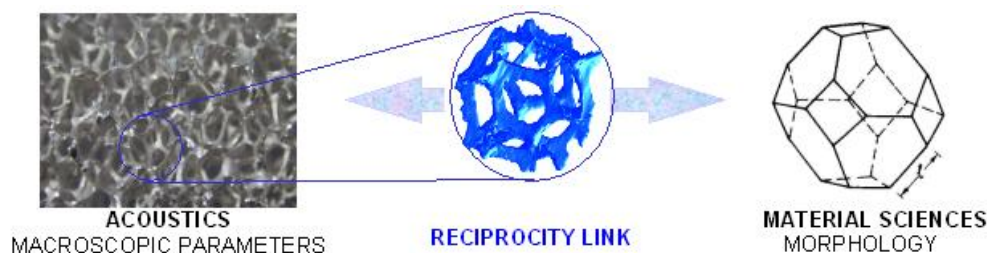


Figure 1: Linking acoustics to material sciences

In the following, since only the two scalar geometrical macroscopic parameters of the foams will be investigated, their mathematical descriptions are now introduced. These parameters are the open porosity and thermal characteristic length. They are scalar geometrical properties since they only depend on the geometry of the porous network. The porosity is given by:

$$\Phi = V/V_b, \quad (\text{Eq. 1})$$

where  $V$  is the volume of the open air space contained in a macroscopic bulk volume  $V_b$  of the foam. Similarly, the characteristic length is given by

$$\Lambda' = 2 \int_V dV / \int_A dA. \quad (\text{Eq. 2})$$

The integrations in the numerator and denominator are over the volume  $V$  and surface  $A$  of the pores, respectively.

### 3 MORPHOLOGICAL PARAMETERS OF FOAMS (MATERIAL SCIENCES)

In the previous section, it was mentioned that the acoustics of foams is based on macroscopic measurements. We shall now introduce the cell's morphology that is used in this study to develop the reciprocity link between the macroscopic parameters and the cell's morphology. Different morphologies of cells could have been chosen. However, to respect some physical considerations in the creation of foams and the simplicity of the proposed model, the tetrakaidecaedral unit cell was chosen<sup>9</sup>, see figure 2. Discussion of this choice is beyond the scope of this paper. However, one can note that this topology fairly represents real foam's cell (see figure 5).

The tetrakaidecaedral unit cell is a periodical structuring element, which can be seen as the mesostructural bridge linking scalar macroscopic parameters (acoustics) and microscopic descriptors (material sciences). It is an idealized model of high porosity open cell foam, and a good approximation of the surface area covered by a real foam's cell.

From this mesostructure, it is shown that the couple of scalar macroscopic parameters ( $\Phi$ ,  $\Lambda'$ ) can be entirely defined by a corresponding couple of microstructural descriptors ( $l$ ,  $d$ ); where  $l$  and  $d$  define the length and diameter of the cell's struts, respectively. Assuming (i) a circular cross section of the struts (edges), and a strut's length much larger than the strut's diameter (i.e. high porosity foam), Gibson and Ashby have given the theoretical porosity associated to such a unit cell<sup>10</sup>, see Table 2. Similarly, we have prolonged their calculations to obtain the analytical expressions of the thermal characteristic length associated with various kinds of cross sectional shape areas. Only the results are presented in Table 2.

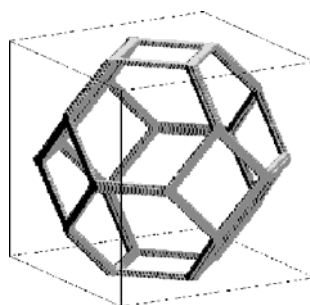


Figure 2: Regular tetrakaidecahedron unit cell

**Table 1: Analytical macro-micro relationships**

Assumption on the shape of the cross sectional area	Porosity $\Phi$ (Eq. 3a,b)	Thermal characteristic length $\Lambda'$ (Eq. 4a,b)
Circular	$1 - \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \left(\frac{d}{l}\right)^2 \approx 1 - 0.83 \left(\frac{d}{l}\right)^2$	$\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{l^2}{d} - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \left(\frac{\Phi}{1-\Phi}\right) \approx 0.60 \frac{l^2}{d} - 0.5d \approx 0.5 \left(\frac{\Phi}{1-\Phi}\right)$
$d$ , diameter $l$ , length		
Triangular	$1 - \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \left(\frac{b}{l}\right)^2 \approx 1 - 0.46 \left(\frac{b}{l}\right)^2$	$\frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{l^2}{b} - \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\Phi}{1-\Phi}\right) \approx 0.63 \frac{l^2}{b} - 0.29b \approx 0.29 \left(\frac{\Phi}{1-\Phi}\right)$
$b$ basis		
$h$ height		
$l$ , length		
	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \approx 1 - 0.61 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{l^2}{h} - \frac{h}{3} = \frac{h}{3} \left(\frac{\Phi}{1-\Phi}\right) \approx 0.54 \frac{l^2}{h} - 0.33h \approx 0.33 \left(\frac{\Phi}{1-\Phi}\right)$

## 4 COMPUTED MICROTOMOGRAPHY

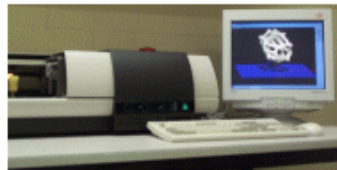
To use the equations presented in the previous sections, one needs real three-dimensional local information. In this study, this information is obtained by means of computed microtomography ( $\mu$ CT). The system used is a Skyscan desktop  $\mu$ CT scanner presented in figure 3. This  $\mu$ CT is based on the same physical principles and mathematical algorithms as the classical medical CT-scanners. During the data acquisition, the  $\mu$ CT scanner collects 2-dimensional X-ray images through the object from different views through 180-degree object rotation (see figure 3b). Corresponding lines from all views are used afterwards in the reconstruction procedure to create a 3D image by a tomographical back projection algorithm (see figure 3c). Note that the main technical improvements compared to the medical scanners which were operating in the sixties, is the use of a microfocus X-ray tube with a higher energy sealed tube (for penetrating harder materials), and a modern detector (a CCD camera instead of a photographic plate).

### Calibration of the three-dimensional $\mu$ CT image

At first, nothing guarantees the fidelity of a 3D image produced by  $\mu$ CT to the original real object. Many artefacts have to be filtered and image processing has to be done in view to obtain a good visual quality of the 3D image. Despite all of the filtering and processing, the quality of the 3D image limits the fine measurement of the dimensions of the different features of the tomographed object. In this study, to improve the fidelity of the 3D image and the precision in the measurement of the microstructural descriptors  $l$  and  $d$ , a calibration test on the 3D image is proposed.

The calibration test consists in comparing the computed open porosity obtained by image processing on the 3D image to the one directly measured using classical techniques. Here the computed open porosity is obtained using eq.1 and an image processing in which the volume  $V$  of air (black region) and the bulk volume  $V_b$  of the 3D image are determined. As an example, figure 4 shows a 3D image obtained for an aluminium foam. Prior to the calibration, one can observe solid particles hanging in the air phase (the air phase is coloured in black in the image). These particles are artefacts and are non-real. They decrease the computed open porosity of the foam. During the calibration, the contrast is adjusted so that the computed open porosity equals the one directly measured. This calibration reduces significantly the non-physical effects of artefacts that may be produced by the  $\mu$ CT system, and yields a cleaned image, as shown in figure 4.

**a) The experimental set-up**

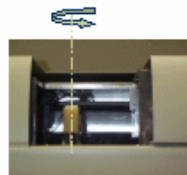


Skyscan 1072 desktop  $\mu$ CT scanner

**b) The main parts of the setup**



Microfocus x-ray

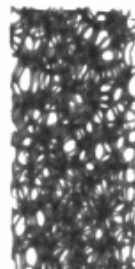


Rotating sample holder



CCD camera

**c)  $\mu$ CT advantages**



Digital radiography system  
 - produces 2D images  
 - no in-depth information



$\mu$ CT system  
 - produces 3D images  
 - internal structure information

Figure 3: Experimental set-up and results

**Measurement protocol**

Finally, once a three-dimensional calibrated image is acquired, microstructural measurements are carried out through a visualization and measurement tool specifically developed for this study under the Matlab™ environment. With this tool, isolated cells are analyzed according to the following measurement protocol. First, a reference plane is positioned so that it passes through a window belonging to the studied cell. Second, the length  $l$  and depth  $d$  of each of the struts forming the contour of the window are measured. The internal perimeter of the window is also reported, as well as the radius  $R$  of a circle inscribed in the window. Next, the first and second steps are repeated until all the windows of a cell are analyzed. To close the measurement protocol for one cell, the radius of a sphere inscribed in the cell is estimated. Following this protocol, since a strut is shared between two windows for an isolated cell, each of the strut dimensions has been measured twice. This improves the validity of the measurements.



Figure 4: Calibration of the three dimensional CMT image

## 5 APPLICATION FOR DUOCEL<sup>®</sup> 40 PPI ALUMINIUM FOAM

Investigations have been carried out for a Duocel aluminium foam sample (40 pores per inch). The sample measures 5 mm in diameter and around 40 mm in height. It has been scanned at the lowest magnification of the desktop. The magnification factor is 10. The corresponding resolution is 21.80 micrometers per pixel.

Using the classical macroscopic techniques discussed in section 2, the measurements of the macroscopic open porosity and thermal characteristic yield, respectively:

$$\Phi = 0.920$$

$$\Lambda' \text{ (mm)} = 1.484 \pm 0.154$$

Following the microscopic approach and the measurement protocol described in section 4, the values of the microscopic parameters measured on a single cell are:

$$\langle l \rangle = 1.11 \pm 0.37 \text{ mm}$$

$$\langle d \rangle = 0.37 \pm 0.15 \text{ mm}$$

$$\langle R \rangle = 1.37 \pm 0.05 \text{ mm}$$

Figure 5 also recalls the definition of the macroscopic parameters  $l$ ,  $d$ , and  $R$ .

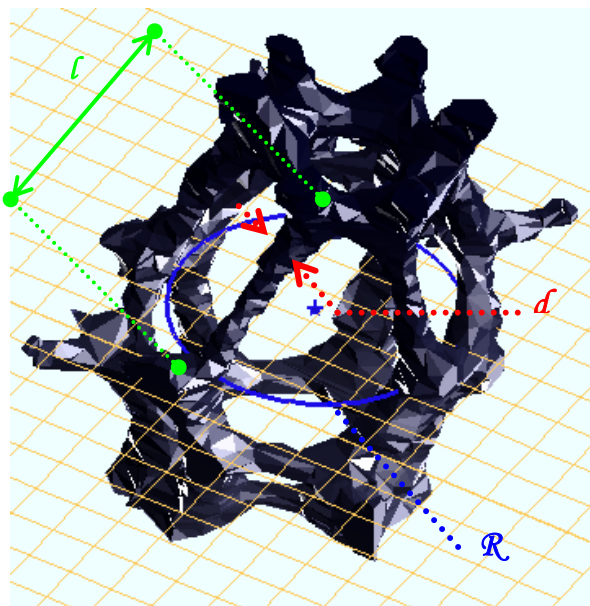


Figure 5: Microscopic parameters

### Micro to macro

Using these values in the theoretical micro-macro relationships given by eqs. 3a and 4a, the open porosity and thermal length are:

$$\begin{aligned}\Phi &= 0.864 \text{ ( 5.6 \%)} \\ \Lambda' \text{ (mm)} &= 1.451 \text{ (2.19 \%)}\end{aligned}$$

where the percentages in parenthesis are the relative errors compared with the macroscopically measured values. The theoretical predictions are based only on the characterization of a single cell taken randomly. To minimize the relative error, the analysis must be performed on many cells. The number of cells required, so that the errors tend to zero, is linked to the macroscopic volume of homogenisation or the Representative Volume Element (RVE). For high porosity foams, this RVE has yet to be defined (this is beyond the scope of this paper).

Since it is possible to predict some macroscopic features of the foam morphology with microscopic information averaged only on a single cell, one can conclude that local information can be used to predict global information.

### Macro to micro

In a same manner, using the macroscopically measured parameters in the micro-macro relationships given by eqs. 3a and 4a, the microscopic parameters can be deduced. They are given below with their relative errors compared to the one measured on the single cell:

$$\begin{aligned}\langle l \rangle &= 0.83 \text{ mm (44 \%)} \\ \langle d \rangle &= 0.26 \text{ mm (30 \%)} \\ \langle R \rangle &= 1.17 \text{ mm (15 \%)}\end{aligned}$$

These results show that the reverse relationships (macro to micro) yield larger errors than the direct relationships (micro to macro). This is logical since the direct relationships show squared small numbers, and the reverse relationships show roots of larger numbers. In the reverse case, the predictions of the microscopic parameters should be compared to the microscopic parameters measured following the proposed protocol and averaged over many cells or, in other words, over the RVE.

## 6 CONCLUSION AND PERSPECTIVES

This study proposed a calibration test and a measurement procedure to obtain from computed microtomographic ( $\mu$ CT) analyses acceptable precision in the characterization of the microstructural topology of open foams. It was shown that the tetrakaidecahedron unit cell topology permits to establish theoretical reciprocity links between scalar macroscopic parameters (acoustics) and microstructural indicators (material sciences). An application to an aluminum foam showed that, from the knowledge of the microscopic parameters of single cell chosen randomly, the reciprocity links yield small errors in the prediction of the macroscopic parameters (porosity and thermal characteristic length). However, the prediction of the microscopic parameters of this single cell from the macroscopic parameters yield large errors. To minimize the errors, it was pointed out that the analysis must be performed on the number of cells contained in a representative volume element (RVE). The determination of the RVE for acoustical foams is still an open question. The proposed procedure could be used confidently to establish the minimum number of cells required for the RVE.

## 7 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank ALCAN, NSERC, FQRNT, and CQRDA for their financial support to the project.

Camille Perrot

Thèse en acoustique / 2006

Institut national des sciences appliquées de Lyon - Université de Sherbrooke

## 8 REFERENCES

1. D. Lafarge, P. Lemarinier, J.F. Allard, and V. Tarnow, 'Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies', *J. Acoust. Soc. Am.* 102(4) 1995-2006. (1997).
2. J.F. Allard. Propagation of sound in porous media, London and New York: Elsevier Applied Science. (1993).
3. D.K. Wilson, 'Relaxation-matched modeling of propagation through porous media, including fractal pore structure', *J. Acoust. Soc. Am.* 94(2) 1136-1145. (1993).
4. Y. Champoux, M.R. Stinson, and G.A. Daigle, 'Air-based system for the measurement of the porosity', *J. Acoust. Soc. Am.* 89, 910-916 (1990).
5. J.F. Allard, B. Castagnède, M. Henry, and W. Lauriks, 'Evaluation of tortuosity in acoustic porous materials saturated by air', *Rev. Sci. Instrum.* 65, 754-755 (1994).
6. M. R. Stinson and G. A. Daigle, "Electronic system for the measurement of flow resistance," *J. Acoust. Soc. Am.* 83, 2422-2428 (1988).
7. P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, M. Melon, N. R. Brown, and B. Castagnede, 'Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air', *J. Appl. Phys.* 80, 2009-2012 (1996).
8. Y. Atalla and R. Panneton, 'Three parameters inverse characterization of open cell porous media through impedance tube measurements', accepted for publication in *J. Acoust. Soc. Am.* (2002).
9. N.C. Hilyard and A. Cunningham: *Low density cellular plastics*, Chapman & Hall, London. (1994).
10. L.J. Gibson and M.F. Ashby: *Cellular solids, structure and properties*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge. (1997).

Experimental knowledge versus theoretical model  
Soils and composite materials  
Szkłarska Poreba  
March 3-6, 2004

## Microscopic and mesoscopic approaches for describing and building sound absorbing porous materials

Xavier Olny, Franck Sgard, Camille Perrot  
*Laboratoire des Sciences de l'Habitat – DGCB – URA CNRS 1652*  
*Ecole Nationale des Travaux Public de l'Etat – Rue Maurice Audin*  
69518 Vaulx en Velin Cédex - Email : [xavier.olny@entpe.fr](mailto:xavier.olny@entpe.fr)

Raymond Panneton  
*GAUS, Department of mechanical engineering, Université de Sherbrooke, 2500 Bd de l'Université, Sherbrooke, Québec, J1K 2R1, Canada*

**Abstract.** Porous materials, such as mineral wools, or open-cells foams, remain widely used in noise control devices for their dissipative and damping properties. However, finding and designing materials adapted to reduce specific sounds, with various spectra, are often tricky. This is mainly due to the fact that the frequency behavior of these heterogeneous materials highly depends on the fluid-structure interactions occurring at a complex microscopic scale. To achieve this optimization task, two approaches are considered in this study: the first one deals with the mesoscopic modification of the porous medium. It was shown previously, that creating a second network of meso-pores, in a porous structure can dramatically improve its absorption coefficient. In this paper the influence of the shape of these meso-pores, is studied using the theory of homogenization, applied to double porosity materials, and a finite elements method. The complementarity of the two methods is underlined, and the theoretical results are confronted to absorption coefficients measurements, made on artificial materials.

The second approach consists in describing the geometry of the porous material at the local scale, in order to establish the links between the microstructure, and the macroscopic behaviour of the medium. A 3D periodic elementary cell of aluminium foam is reconstructed from micro-tomographic imaging. Then, a Brownian motion simulation is used to compute the macroscopic dynamic compressibility, including thermal conduction effects. The numerical results are compared to measurements obtained in a standing waves tube.

**Keywords:** porous materials, acoustics, double-porosity, microstructure.



## 1. Introduction

Porous materials are widely used in building engineering or automotive industry in order to absorb acoustic waves, for noise control. Their absorbing properties directly depend on their complex microstructure which characteristic size is generally about few micrometers. The porous materials under consideration are open-cells materials. Typical materials used for their acoustical absorption properties are for instance, polymeric foams, mineral wools, granular materials. The acoustical dynamical behaviour of these materials is well known, and their absorbing coefficients can be accurately predicted using semi-phenomenological models and a set of intrinsic parameters such as, permeability, porosity, tortuosity, viscous or thermal characteristic lengths ... These macroscopic models assume the existence of only two characteristic scales (macroscopic and microscopic) and one representative elementary volume (REV) defined from the pores and solid skeleton heterogeneities. In this paper, the porous materials are supposed to be saturated by air (viscous Newtonian fluid), and the skeleton is motionless and isothermal.

In order to modify the acoustic properties and optimize the absorption of porous materials, one can try to alter the microstructure. Considering the characteristic sizes involved and the sensitivity of the process, this remains a difficult task that requires a good knowledge and description of dynamics from the local point of view.

Another way to optimize the absorption properties of a porous material is to change its structure at an intermediate scale, called mesoscale, but still below the macroscopic scale. For instance, It has been shown that creating a second network of (meso)-pores in a microporous medium, can lead to a dramatic increase of its absorption coefficient.

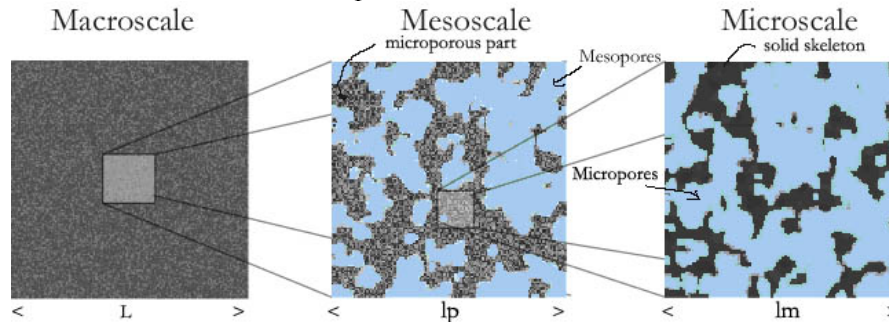


Figure 1 : representation of a three scales material

The interests for “double-porosity” materials, relies on the fact that the characteristic size of the mesoscopic scale can typically be in the order of one centimetre (Olny 1999; Atalla et al. 2001; Sgard et al. 2005). This gives

many more possibilities for the design of “made-to-measure” absorbing systems.

In this paper, the dissipation mechanisms and the macroscopic description of double porosity materials, obtained using the homogenization method for periodic separated scales media, are recalled. The study is then focus on the influence of the meso-geometry of the material. Double porosity materials, made of perforated microporous structures with cylindrical and pyramidal profiles are studied from the theoretical and experimental point of view. The diffusion effect responsible for the increase of absorption in those heterogeneous media is also illustrated and displayed by means of finite elements computation of the pressure field in a perforated porous material. The case of a double porosity material covered with an impervious screen is also tackled to point out the importance of the pressure diffusion effects.

Another way to modify the acoustic properties of a porous medium is to directly act at the microscopic scale. This requires the knowledge of the solid skeleton geometry and tools to compute the dynamic functions involved in the sound propagation, such as the dynamic permeability, and compressibility. However the first step of the work is to acquire or model a representative volume of the microstructure. This can be done using, for instance, micro-tomography. From this X-Ray based apparatus, a 3D picture of the microstructure can be obtained. The next step consists in finding a representative elementary volume. Then solutions of the local equations, (thermal conductivity, Navier-Stokes), are looked for in order to find out the dynamic macroscopic behaviour.

Following this process, we present the study of the compressibility effects in an aluminium foam. The conductivity problem is solved using a Brownian motion simulation, a method successfully applied by Lafarge (Lafarge 2002), in two-dimensional cases.

## 2. Mesostructural approach

### 2.1 PHYSICAL ANALYSIS

Designing double porosity materials requires a good understanding of physics especially at the mesoscale. This physical analysis can be first clarified using a qualitative analysis of the interscales couplings between the two networks of meso- and micro-pores. Parameters related to the meso- and microscopic scales are respectively identified with subscripts  $p$  and  $m$ . Hence,  $l_p$  and  $l_m$  are the characteristic lengths of these two scales

(see Figure 1). It has been shown before that when the contrast between  $l_p$  and  $l_m$  is strong enough, pressure variations can occur at the mesoscopic scale and enhance the dissipation in the microporous part of the medium. An explanation of this phenomenon can be given comparing the asymptotic behaviours of the wavelengths in both networks of mesopores and micropores as if they would exist independently. The separation of scales ( $l_p \gg l_m$ ) justifies this comparison: at the first order of approximation, it can be assumed that the microporosity doesn't modify physics at the upper scale (meso). Moreover, the boundary conditions applied to the microporous part are macroscopic, so that physics in this area remain the same as in an « infinite » microporous medium. Note that these points are fully justified during the homogenization process (Olny et al. 2001; Olny et al. 2003). For both networks of (meso)pores and micropores, two asymptotic behaviours are identified: at low frequencies, viscous forces dominate and waves in the pores are of diffusive kind. At high frequencies, inertial forces prevail on viscous forces, and waves are propagative. The transition occurs around  $\omega_{vp}$  (in the mesopores) et  $\omega_{vm}$  (in the micropores), defined as the viscous characteristic frequencies (Biot 1956).

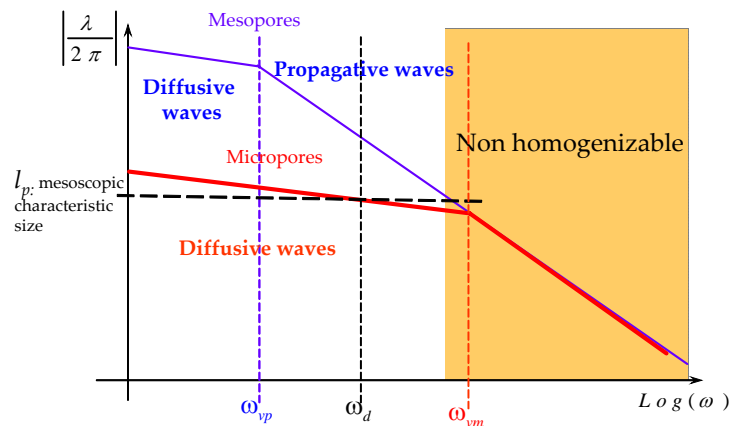


Figure 2 : asymptotic behaviours of the wavelengths in mesopores and micropores in a double porosity medium with high-permeability contrast (log-log graph)

The graph on figure 2 depicts the case of a strong contrast of permeabilities between the two networks of pores. Two points have to be underlined:

- In the frequency range of interest, the microporous part waves are diffusive so that the separation of scales leads to a separation of the wavelengths. This point confirms the fact that at the first order of approximation the macroscopic behaviour of the double porosity medium is governed by physics in the mesopores which are not influenced by the micropores.

- below the non-homogenizable area, the wavelength in the micropores can be of same order as the mesoscopic size  $l_p$ .

These two points show that in a frequency band around  $\omega_d$ , acoustic pressure, and velocity vary in the microporous part at the mesoscopic scale.

## 2.2 MESOSCOPIC AND MACROSCOPIC DESCRIPTIONS OBTAINED BY HOMOGENIZATION TECHNIQUE: PRESSURE DIFFUSION EFFECTS

The homogenization technique for periodic material, using the asymptotic developments method was utilized to derive the macroscopic behaviours of double-porosity materials with low and high permeability contrast. The main results obtained in the latter case are briefly recalled and illustrated. More details about the mathematical developments can be found in (Olny *et al.* 2001; Olny *et al.* 2003).

### *Macroscopic flow*

Considering the high permeability contrast situation, leads to find that the first order dynamic macroscopic flow in the double porosity material is given by the generalized Darcy's law in the mesopores

$$\langle \vec{v}^0 \rangle = - \frac{[\Pi_p(\omega)]}{\eta} \vec{\nabla}_x p_p^0 \quad (1)$$

This equation gives, at the first order, the relation between the macroscopic velocity  $v^0$ , the macroscopic pressure gradient, the intrinsic permeability  $\Pi_p$  tensor, of the mesopores structure and the dynamic viscosity  $\eta$ . The subscript  $x$  means that the derivation deals with the macroscopic variables.

### *Effect of pressure diffusion effects on the bulk modulus*

Regarding compressibility effects, at the mesoscale, the coupling between mesopores and the microporous part requires to solve the following diffusion problem.

$$j\omega \frac{\phi_m p_m^0}{P_0} - \frac{\Pi_m(0)}{\eta} \Delta_y p_m^0 = 0 \quad (2)$$

The subscript  $y$  means that the derivation deals with the mesoscopic variables.

$\Pi_m(0)$  is the intrinsic static permeability of the microporous part,  $P_0 / \phi_m$  its bulk modulus ( $P_0$  static pressure,  $\phi_m$  porosity).

On the surface of the microporous part, the boundary condition of equation (2) is given by the pressure in the mesopores which varies at the macroscale:

$$p_m^0(\vec{x}, \vec{y}) = p_p^0(\vec{x}) \quad (3)$$

The solution to this problem can be written (Boutin et al. 1998) :

$$p_m^0(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \omega) p_p^0(\vec{x}) \quad (4)$$

The mesoscopic function  $f$  depends on the properties of the microporous material, the geometry of the mesostructure, and of frequency. It expresses the partial coupling between mesopores and micropores, in which the pressure is lower because of the viscous flow (low frequency behaviour) in the latter. For basic mesostructures, such as parallel slits, or cylindrical holes,  $f$  can be computed analytically (Olny *et al.* 2003). For more complex structures the use of numerical methods, such as finite element methods, can help to estimate the pressure diffusion function. The pressure field in the microporous part of a perforated material (rectangular hole) is depicted on figure 3. Periodic boundary conditions in the direction perpendicular to the perforations have been considered. The excitation used was a plane wave parallel to the axis of the hole. A rigid backing was also simulated at one end of the material (red side). The variations are observed around  $\omega_d$  the characteristic frequency of pressure diffusion effects.

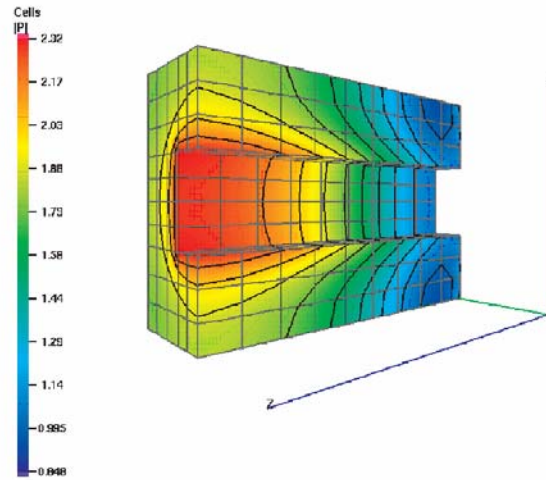


Figure 3 : Pressure field in a perforated microporous structure (obtained by finite element method (Sgard *et al.* 2005))

Averaging equation (4) over a period at the mesoscale leads to introduce the macroscopic function  $F$ :

$$\langle p_m^0 \rangle_{\Omega_{sp}} = F(\omega) p_p^0 \quad (5)$$

Since the pressure diffusion problem is very similar to the dynamic flow problem, or the thermal conduction problem solved in single porosity media, this function can be estimated using semi-phenomenological models such as the ones proposed by Johnson et al. for the dynamic permeability or Lafarge, for the thermal permeability (Johnson et al. 1987; Lafarge et al. 1997):

$$F(\omega) = \left( 1 - j\omega \frac{\phi_m \eta}{P_0 \Pi_m(0)(1-\phi_p)} D(\omega) \right) \quad (6)$$

The function  $D$ , has the dimension of an intrinsic permeability and is very analogue to the thermal permeability:

$$D(\omega) = D(0) / (j\omega_d^* + (1 + j \frac{M_d}{2} \omega_d^*)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

with  $\omega_d^* = \omega / \omega_d$

$\omega_d$  expresses the transition between the total coupling situation at low frequencies ( $\langle p_m^0 \rangle_{\Omega_{sp}} = p_p^0$ ), whereas the influence of the microporous medium tends to disappear as  $\omega$  increases ( $\langle p_m^0 \rangle_{\Omega_{sp}} = 0, \omega \rightarrow \infty$ ). This characteristic frequency can be estimated with:

$$\omega_d = (1 - \phi_p) P_0 \Pi_m(0) / \phi_m \eta D(0) \quad (8)$$

$\phi_p$  is the mesoporosity, i.e. the ratio of fluid in the mesopores to the total volume. The function  $M_d$  is a form factor parameter very similar to the parameter  $M'$  defined by (Allard 1993).

Assuming isothermal exchanges in pores and micropores, the wave equation in the double porosity material rewrites:

$$j\omega \left[ \phi_p + \phi_m(1 - \phi_p) F(\omega) \right] \frac{P_p^0}{P_0} - \frac{\Pi_p(\omega)}{\eta} \Delta_x p_p^0 = 0 \quad (9)$$

When dynamic thermal exchanges are taken into account, the incompressibility modulus, or bulk modulus, is finally given by :

$$K_{db}(\omega) = \left( \frac{1}{K_p(\omega)} + (1 - \phi_p) F(\omega) \frac{P_0}{\phi_m K_m(\omega)} \frac{1}{K_m(\omega)} \right)^{-1} \quad (10)$$

Functions  $K_p(\omega)$  and  $K_m(\omega)$  are respectively the dynamic bulk modulus of the « mesoporous material » assuming an impervious microstructure,

and the bulk modulus of microporous part alone. The pressure variations in the microporous part induce a dissipation effect that comes on the top of the viscous and thermal effects that exist in single porosity materials. This dissipation can be controlled playing on the meso parameters and specially those modifying the function  $F$ . The examples of double porosity materials presented in the following paragraph show how the absorption spectrum can be modified and adjusted to desired properties.

### 2.3 DESIGN OF DOUBLE POROSITY MATERIALS

Two types of application of the double porosity concept in acoustics are presented. The first one deal with the study of the influence of the mesopores profile, when perforating a microporous structure. Straight circulars have been widely studied and we show that the use of irregular profiles can lead to very different and interesting absorbing properties. The second application is about the design of double porosity materials including a protecting impervious screen.

The physical analysis presented in §2.1 gives the guidelines for designing double porosity materials, in which pressure diffusion can be used to enhance the absorption. Two requirements are needed:

- Waves in the microporous part must be of diffusive kind. This means that in the frequency band of interests, the dynamic flow in the micropores has to be mainly viscous. This lay down a condition on the viscous characteristic frequency of the micropores:

$$\omega \ll \omega_{vm} = \sigma_m \phi_m / \rho_0 \alpha_{sm} \quad (11)$$

This requirement helps to define a « good candidate » for choosing the microporous structure in terms of air flow resistivity ( $\sigma_m = \eta / \Pi_m(0)$ ), porosity, and tortuosity ( $\alpha_{sm}$ ),  $\rho_0$  being the density of air.

- The wave length in the microporous part must be of the same order as the characteristic size of the mesoscale. This condition can only be fulfilled if the characteristic frequency of pressure diffusion effects is small compared to the viscous frequency in the micropores :

$$\frac{\omega_d}{\omega_{vm}} = P_0 \rho_0 \frac{(1-\phi_p)}{D(0)} \frac{\alpha_{\infty micro}}{\sigma_m^2 \phi_{micro}^2} \ll 1 \quad (12)$$

It must be recalled that  $D(0)$  is a geometrical parameter, homogeneous to an intrinsic permeability and in the order of  $l_p^2$ .

The two materials used to build double porosity systems, and whose properties are given in table 1, verifies the requirements. In the frequency range of interests, typically between 50 et 4000 Hz, the first requirement impose the use of a high resistivity, porosity, and low tortuosity material.

	$\sigma_m$ (Nm <sup>-1</sup> s)	$\phi_m$	$\alpha_{\infty m}$	$\Lambda_m$ (μm)	$\Lambda'_m$ (μm)	$k_0$ (10 <sup>-9</sup> m <sup>2</sup> )
Mat.1	135000	0.94	2.1	49	166	3.3
Mat.2	175000	0.99	1.0	50	142	4.7

Table 1 : Acoustical parameters of the foam used as microporous matrix to build perforated double porosity materials (Johnson-Lafarge's model).

According to those values, the viscous characteristic frequency is about  $f_{vm} = \omega_{vm} / 2\pi \approx 8000$  Hz for mat.1 and 23000Hz for mat.2. Compared to the acoustical frequency range considered, those values are large enough to observed pressure diffusion effects.

### 2.3.1 Numerical results

First cylindrical hole shape with varying square cross sections along the thickness had been numerically studied. The absorption coefficient is computed using a finite element modelling of the double porosity material at the mesoscopic scale inserted in a wave guide. The wave propagation inside the porous material is described by Biot-Allard's theory (Biot 1956; Biot 1956) and inside the mesopores by Helmholtz equation. Due to their size, Dissipation in the mesopores is neglected. The weak integral forms associated to each domain are then discretized into finite elements. More details about the modelling process can be found in (Sgard *et al.* 2005).



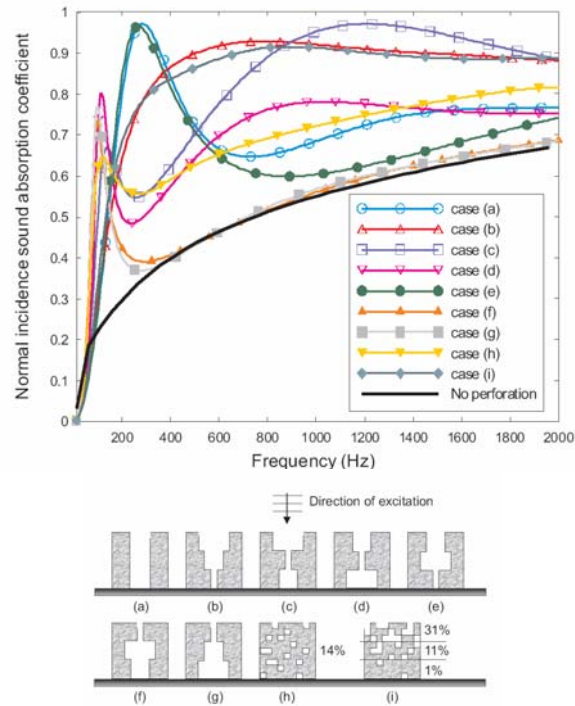


Figure 4: absorption coefficients of perforated double porosity materials with different hole profiles (above), cuts of hole profiles investigated (below)

The absorption coefficients of materials of thickness 11.5 cm, made of material 1 (see Table 1), have been computed for normal incidence plane waves with a rigid backing at the rear of the materials.

Note that case (h) and (i) are obtained by randomly distributing air patches along the thickness. For each configuration, the mesoporosity, is 14%.

It clearly appears that the hole profile strongly influence the performance of the material. A progressive decrease of the mesoporosity as the wave penetrates inside the material provides a significant increase of the absorption coefficient in a very wide frequency band. A small mesoporosity at the surface of the material leads to a more selective absorption at low frequencies, but the gain (compared to the material with no hole) is less important at higher frequencies. The random distributions give materials that are efficient on a wide frequency band. The hole profile can therefore be appropriately performed to improve significantly the absorption coefficient in a given frequency band. Note the very similar appearance of cases (i) and (b).

### 2.3.2 Analytical and experimental results

With the aim to confirm the results obtained with the numerical approach, three double porosity materials with different hole profiles have been built and their acoustical properties were measured. The model derived from the homogenization technique has also been used to predict the absorption coefficient and compared the results with measurements. The three configurations tested are depicted in the Figure 5. Circular cylindrical holes, with straight and step pyramidal (config. 2 and 3) profiles have been made in order to obtain a 12% mesoporosity.

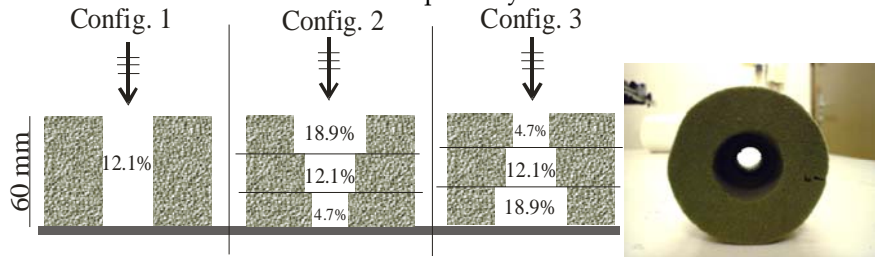


Figure 5 : vertical cuts of the three tested double porosity materials (left), and front view of a sample (diam. 46 mm, corresponding to config. 2). The % values are the mesoporosity values for each “layer” of the material. The diameters of the perforations performed in the microporous matrix are 10,16, and 20 mm.

The normal incidence plane waves absorption coefficients were measured in a standing wave tube (diam. 46 mm). These measurements are compared to the model presented in part 2.2. For this study the microporous material 2 was used (see Table 1).

Regarding the config. 1, the parameters involved in the  $F$  function, they can be estimated analytically as proposed in (Olny *et al.* 2003). For instance, the characteristic frequency of the diffusion effects is about  $f_d = \omega_d / 2\pi \approx 573$  Hz.

The cases of configurations 2 and 3 are a bit more complex since the structure is not periodic along the thickness. However, the step pyramidal configurations can be seen as a multi-layer material made of three layers, with straight circular constant holes. Knowing the macroscopic behaviour of each layer, the surface impedance and absorption coefficient of the multilayer system can be deduced (Allard 1993). The diffusion parameters ( $\omega_d, M_d, D(0)$ ) are estimated for each layer. From the layer with the bigger mesoporosity (18.2%) to the smallest (4.7%), the characteristic frequencies of the diffusion effects are 852, 573 and 320 Hz.

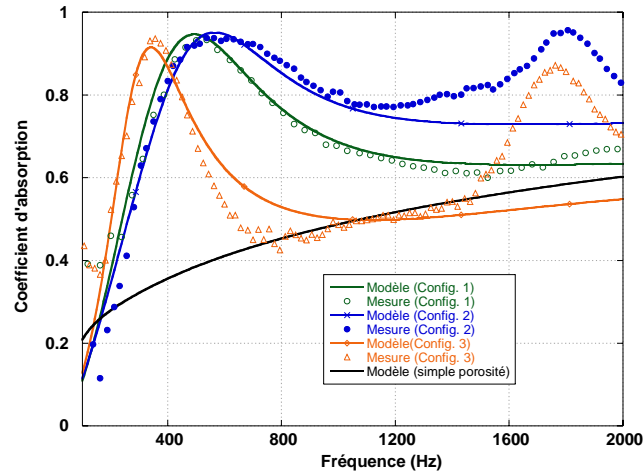


Figure 6 : absorption coefficients measured and predicted for the three profiles. Results are also compared to the absorption coefficient of the material without hole.

First, it is to be noticed that the tendencies obtained numerically are observed on the experimental results. Regarding config. 1, a peak of absorption appears around 500 Hz and the increase of absorption compared to the single porosity material is greater than 40%. The configuration 2 leads to an increase of the absorption coefficient on a wider frequency range but the maximum is shifted at higher frequencies (around 600Hz). For the pyramidal configuration 3, this maximum is shifted in a lower frequency range (300 Hz) however the less gain is observed at higher frequencies. The increase of absorption for the three materials that appears at higher frequencies (around 1800 Hz) is not due to the diffusion effect in the material but has been identify as an elastic resonance of the solid frame. The model used to predict the behaviour of the double porosity materials doesn't take into account the motion of the skeleton. However, this model is able to give very good tendencies at lower frequencies where the frame is assumed to be motionless. The relative simplicity of this model gives ones a mean to play on the mesoscopic parameters and to widen the possibilities regarding the design of new absorbing systems.

#### *Influence of an impervious screen*

In this part, we investigate the potential of double porosity material covered with an impervious screen. Porous materials can be sensitive to external aggressions such as humidity or mechanical shocks, and it is often necessary to use a screen as a protection. But, when it is impervious this screen can affect the absorption properties in a bad way. In the case of double porosity media, the dissipation is mainly due to pressure diffusion effects, and not to the viscous dissipation in the microporous medium.

That's why the influence of the screen can be very different. This influence has been studied experimentally on a sample corresponding to the first configuration. An impervious aluminum foil, usually utilized in the automotive industry as a protection for porous absorbers, has been glued on the double porosity material so that it covered its upper face (see Figure 7). Another sample of material covered by the screen but without perforation was also tested. Their absorption coefficients are presented on Figure 7, and it is clear that the performances of the single porosity material with screen are very low on the whole frequency range. However in the case of the double porosity material interesting values of absorption can be observed. The frequency behaviour is very similar to the one obtained without screen and reveals that the dissipation due to pressure diffusion still occurs for this system. This is mainly explained by the fact that the screen is very light (approx  $40\text{g/m}^2$ ), so that the airborne wave is almost fully transmitted in the mesopores (perforations), and then the double porosity behaviour remains almost unchanged. This is an important result that could help to create new absorbing devices, with both acoustical and toughness properties.

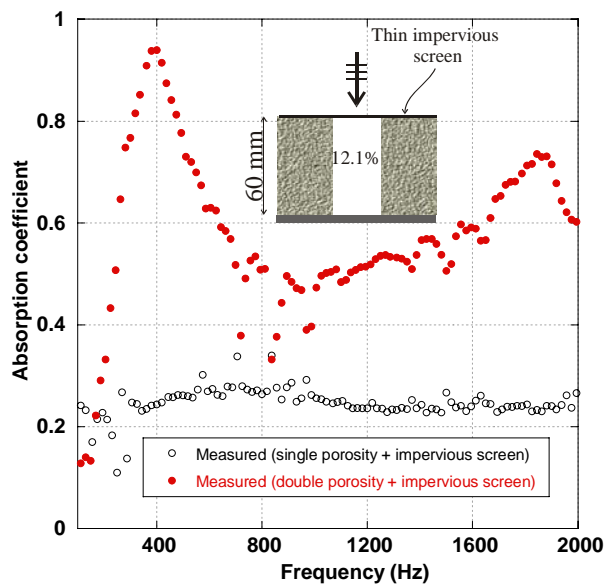


Figure 7 : effect on an impervious screen glued on a double porosity material.

### 3. Microstructural approach

The aim of this part is to study a porous material from a microstructural approach. The heterogeneous medium is supposed to have a single porosity, so that we can define a single REV. The solid part of the material is also supposed to be motionless, so that only compression waves in the fluid part are studied. Under these assumptions, the propagation properties are given by the knowledge of the dynamic permeability and bulk modulus of the equivalent homogeneous medium.

These functions are usually evaluated by means of robust, but non exact semi-phenomenological formulations; and require the knowledge of intrinsic macroscopic geometrical parameters. Macroscopic parameters being linked and generally depending on a complex microstructure, increasing or adapting the absorption spectrum depends on the ability to establish relationships between microstructure and macroscopic behaviour. In this paper, attention is focused on a way to directly compute the dynamic thermal behaviour of complex real microstructure.

To do so, one has typically to proceed following a three steps methodology. At first, a three dimensional description of the microstructure must be available. Local description of the porous media can be acquired by means of modern non destructive three dimensional imaging techniques like nuclear magnetic resonance (NMR) or X-ray computed microtomography (X-ray  $\mu$ CT). From qualitative and statistical analysis, a simplified 3D cells is proposed to represent the real material. Then, the thermal problem can be treated at the local scale, where two continuous phases coexist: an isothermal skeleton, with air saturating pores, and a locally incompressible Newtonian fluid.

#### 3.1. THREE DIMENSIONAL DESCRIPTION OF THE MICROSTRUCTURE

Computer microtomography ( $\mu$ CT) is a technology derived from medical imaging. The non destructive three dimensional visualisation of small dense objects is nowadays possible due to the relatively recent conjugate improvements in terms of (i) X-ray source power, (ii) CCD resolution and (iii) computer sciences. The main problematic which should guide the user of a  $\mu$ CT is always to wonder if the produced image really corresponds to the real object. The more reliable results are obtained by means of synchrotron sources, which offer a large power range of highly monochromatic and monodirectional radiations. It constitutes the ideal

candidate for specific and temporary applications. Alternatively, laboratory sources are requiring practice and a few usage precautions. This point of view will be illustrated through the tomography of open cell aluminium foams, whose important density contrast between the fluid and solid phases facilitates the acquisition of good images. The order of magnitude of the pore sizes being the millimetre, the acoustical performances of such foams are really poor. Nevertheless, the structure of the analyzed aluminium foams is similar to numerous polymeric foams largely used in industry for their effective acoustical dissipation properties. And we will show that open cell aluminium and polymeric foams can basically be described from a similar generating unit cell, differing only by a different scaling factor.

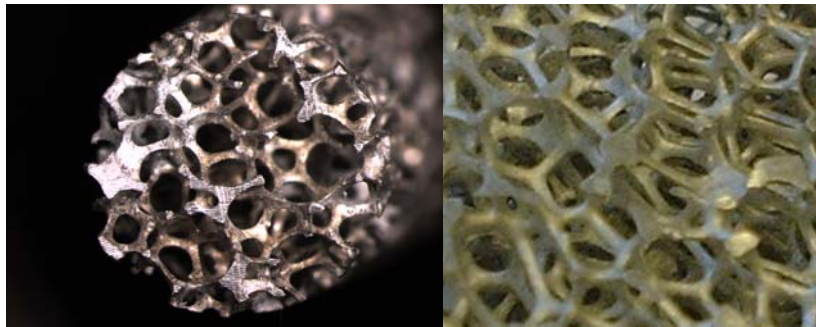


Figure 8 : Pictures of the Duocel® aluminium foam samples

At first, the X-ray source power must be adjusted to obtain a good contrast between the apparent projected fluid and solid phases. According to the Beer law, the X-ray absorption is related to the local density of the porous sample. So that each point of the collected image represents the sum of the local absorptions encountered by an X-ray from the source to the receptor. This resulting two dimensional image is well known as radiography and is also called an X-ray shadow projection. This last expression points out the fact that the three dimensional information is mixed through a projection in two dimensions. A good contrast is obtained for relatively low energies (as a contrary, for an infinite amount of incident energy, the porous sample will appear as completely transparent for X-rays, leading to a “white shadow”). When a good contrast is found, X-ray shadow projections can be collected for different angles of the rotating sample holder. After that, the inverse problem can be solved by a retro-projection algorithm. Note that the exact solution is given by the Radon transformation for a continuous (or infinite) number of projections through a semi-revolution of the object. This implies that the virtual slices of the object resulting from the reconstruction process are always an approximation of the corresponding real object. Moreover, when this theoretical problem is transposed on the

experimental scene, the investigator will be confronted to reconstruction artefacts, such as beam hardening due to the non monochromatic character of the emission. It is consequently fundamental to calibrate the set of two dimensional images by adjusting their contrast. This calibration will be accomplished on the basis of pictures taken by classical optical microscopy, showing accurately the surface of the real porous media. The set of two dimensional calibrated slices is finally assembled through a three dimensional reconstruction process to create the three dimensional  $\mu$ CT model.

Once the three dimensional  $\mu$ CT model is available, the dynamic dissipation functions, as well as the macroscopic parameters involved in semi-phenomenological models could be directly computed assuming a REV. Alternatively, extending an approach discussed by Boomsma *et al.* for modeling flow through porous media (Boomsma *et al.* 2003), if the individual periodic cell in an open cell foam consisting of a large periodic matrix is accurately modeled, viscous and thermal dynamic permeabilities of an individual cell can be solved with Periodic Boundary Conditions (PBC), thereby modeling the presence of surrounding cells with the identical dynamic dissipation functions. By this method, the individual periodic cell is then able to capture all acoustic characteristics of a larger rigid porous matrix. The next step in the cell modelling process is to extract the most representative cell structure of an open cell foam. To do so, we are following an experimental methodology defined by Gibson and Ashby in their classical book "Cellular solids" which consists in filling a typical chart for characterizing foams (Gibson *et al.* 1997). By this way, we aim to identify the interconnected network of solid struts which form the edges of the cells: polyhedra which pack in three dimensions to fill space.

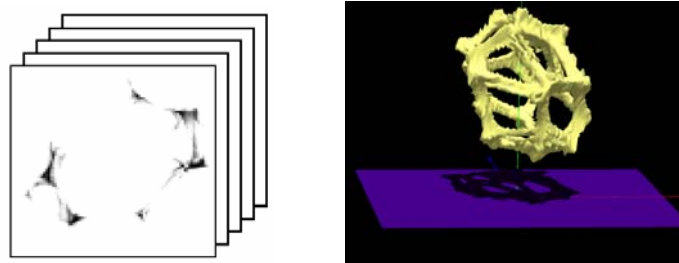


Figure 9 : cut of aluminium foam obtain during micro-tomography (left), reconstructed cell of the foam (right).

The cellular collected measurements carried out on the  $\mu$ CT models enables one to build a RVE.

At this point of the analysis, the question of the possible extension of a tetrakaidecahedron unit cell model to other kinds of open cell foams, like polymeric foams - without requiring any microtomograph – arise (the structure of the Duocel® foam takes on the shape of foamed polymer, and not a molten metal). This question is indeed motivated by several reasons. A first technical reason is that  $\mu$ CT is still a relatively time consuming process, for which a reliable three dimensional description of the original object requires many adjustments (during acquisition and post-processing); and polymers behaves like soft tissues, nearly transparent to X-rays, requiring tips like colorations to be imaged with a good contrast. But the more important reason justifying the need of an analytical morphologic scaling model is probably the following scientific one: if a micro-macro causality link can be built by an experimental model, it is also of great importance to authorize a reciprocity link, in order to predict the tendencies of the dynamic dissipation functions - from a few available geometric macroscopic parameters like the porosity and thermal characteristic length (related to the specific surface area), completed with simple local observation by optical microscopy.

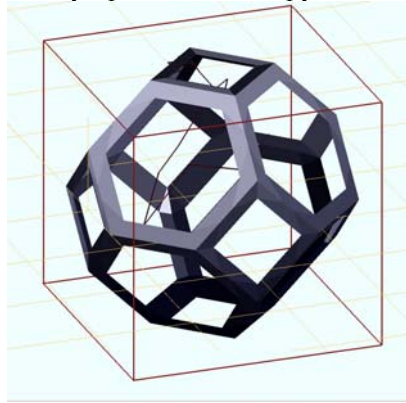


Figure 10 : "representative" tetrakaidecahedron unit cell model of the aluminium foam used to compute the dynamic incompressibility with thermal dissipation effects

### 3.2 COMPUTATION OF THE DYNAMIC BULK MODULUS

The next step of the microstructural technique is to solve the linearized heat transfer equation considering isothermal boundary conditions on the solid part of the material:

$$\begin{cases} \kappa \Delta \tau - j\omega \rho_0 C_p \tau = -j\omega p \\ \tau = 0 \quad \text{on the skeleton} \end{cases} \quad (13)$$



In this equation  $\kappa$  is the conduction coefficient of air, and  $C_p$  its specific heat coefficient at constant pressure.

Lafarge (Lafarge *et al.* 1997) have shown that this problem can be solved using the analogy with the diffusion of Brownian particules in the air-filled region. This technique was proposed by Torquato and Kim (Torquato et al. 1989). He has successfully applied this method to estimate the dynamic thermal permeability and bulk modulus of 2D structures made of solid fibers in regular and random arrangements (ref).

Considering  $n$ , the concentration of particules diffusing in a medium having a  $D$  diffusion coefficient, the problem to solve rewrites:

$$\begin{cases} D\Delta n - \kappa_b n = -\sigma \\ n = 0 \quad \text{on the skeleton} \end{cases} \quad (14)$$

In this equation,  $\kappa_b$  is the rate of absorption in the bulk and  $\sigma$  is the rate of creation of the particles. From equations (13) and (14) the analogy appears clearly. The analogy leads to set:

$$\frac{\kappa_b}{D} \equiv \frac{j\omega\rho_0 C_p}{\kappa} \quad (15)$$

From the macroscopic point of view, the solution of system (13) rewrites:

$$\langle \tau \rangle = j\omega \frac{k'(\omega)}{\kappa} p \quad (16)$$

Lafarge also showed that the mean survival time ( $\langle t \rangle = \langle n \rangle / \sigma$ ) of the particle is directly and linearly related to the macroscopic dynamic thermal permeability  $k'(\omega)$ :

$$k'(\omega) = \kappa \langle t \rangle \quad (17)$$

The mean survival time is finally estimated using a “random walker” technique. The paths of randomly generated particles are calculated and the probability for each particle to reach its next position is estimated. When this particle is close enough to the solid part, it is absorbed. The statistical process requires generating enough particles for the mean survival time to converge. One point of great interest in the method is that the process is frequently independent (see equation(15)). The technique only requires computing the survival time one time, and then the dynamic thermal permeability can be estimated for each  $\omega$ .

This technique has been adapted to the 3D geometry derived from microtomography and modelling process. The dynamic bulk modulus (directly related to the thermal permeability) of the aluminium foam has

also been measured in a Kundt tube and compared to the simulation. The comparison is presented in Figure 11. The results are very promising; it should however be underlined that due to the characteristic size of the aluminium foam microstructure (about 1 mm) and the frequency range of measurement, the thermal exchanges in the material are mainly adiabatic, so that only the high frequency behaviour can be observed.

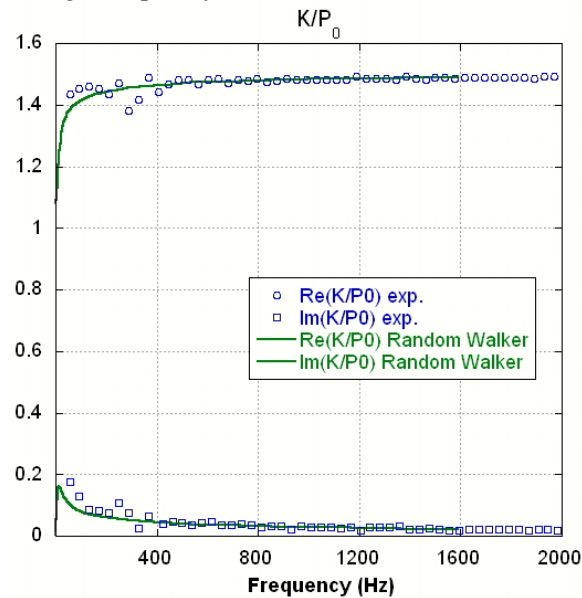


Figure 11 : dynamic normalized bulk modulus measured and computed using a Brownian motion simulation and "random walker" algorithm.

#### 4. Conclusion and perspectives

The present study shows how the design of absorbing porous materials can be improved playing on local scales. Regarding double porosity media, it has been shown that the mesostructure of the material strongly modifies the efficiency of the material, and how it can be used to design systems with desired absorption spectra. Moreover, the optimization can be performed using models obtained by the homogenization technique when the mesogeometry is simple enough. For more complex heterogeneous materials, numerical methods are however required.

The microscopic approach, relatively recent in acoustics, also offers new opportunities for modelling. The next step in the work is the computation of dynamic flow and the optimization of the microstructure.

## 5. References

- Allard, J. F. (1993). Propagation of sound in porous media. London and New-york, Elsevier Applied Science.
- Atalla, N., F. Sgard, et al. (2001). "Acoustic absorption of macro-perforated porous materials." *Journal of sound and vibration* **243**(4): 659-678.
- Biot, M. A. (1956). "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - I. Low frequency range." *J. Acoust. Soc. Am.* **28**: 168-178.
- Biot, M. A. (1956). "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - II. Higher frequency range." *J. Acoust. Soc. Am.* **28**: 179-191.
- Boomsma, K., D. Poulikakos, et al. (2003). "Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized preiodic cell structure." *Heat and Fluid Flow* **24**: 825-834.
- Boutin, C., P. Royer, et al. (1998). "Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity." *Int. J. Solids Structures* **35**(34-35): 4709-4737.
- Gibson, L. J. and M. F. Ashby (1997). *Cellular solids, structure and properties*, 2nd ed. Cambridge.
- Johnson, D. L., J. Koplik, et al. (1987). "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media." *J. Fluid Mech.* **176**: 379-402.
- Lafarge, D. (2002). Determination of the dynamic bulk modulus of gases saturating porous media by Brownian motion simulation. Second Biot conference on Poro-mechanics, Grenoble.
- Lafarge, D., P. Lemarinier, et al. (1997). "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies." *J. Acoust. Soc. Am.* **102**(4): 1995-2006.
- Olny, X. (1999). Absorption acoustique des milieux poreux a simple et double porosité - Modélisation et validation expérimentale. Conception en bâtiment et techniques urbaines. Lyon, INSA: 281.
- Olny, X. and C. Boutin (2001). Acoustic dissipation through "realistic" double porosity materials. Comparison with experiment. *Homogenisation Methods in Civil Engineering*, Szklarska Poreba.
- Olny, X. and C. Boutin (2003). "Acoustic wave propagation in double porosity media." *J. Acoust. Soc. Am.* **114**(1): 73-89.
- Sgard, F., X. Olny, et al. (2005). "On the use of perforations to improve the sound absorption of porous materials." *Applied Acoustics* **66**: 625-651.
- Torquato, S. and I. C. Kim (1989). "Efficient simulation technique to compute properties of heterogeneous media." *Appl. Phys. Lett.* **55**(18).

## **Computation of the dynamic thermal properties of a three-dimensional unit cell of porous media by Brownian motion simulation**

Camille Perrot (GAUS and ENTPE), Xavier Olny (ENTPE, DGCB URA CNRS 1652, Vaulx-en-Velin Cedex, France), Raymond Panneton, and Richard Bouchard (GAUS, Mech. Eng. Dept., Univ. de Sherbrooke, Canada, [raymond.panneton@usherbrooke.ca](mailto:raymond.panneton@usherbrooke.ca))

J. Acoust. Soc. Am., Vol. 115, No. 5, Pt. 2, May 2004  
147th Meeting: Acoustical Society of America

Acoustic dissipation in porous media is mainly due to viscous and thermal mechanisms that occur in the pores of the microstructure. The purpose of this study is the determination of the macroscopic dynamic acoustic bulk modulus and thermal permeability of real foams from a local scale approach. To achieve this goal, two distinct steps are followed. First, the local geometry of a real foam is obtained using computed microtomography ( $\mu$ CT), then a periodic and regularly paving space tetrakaidecahedron cell is identified from the microstructure. Secondly, the heat equation is solved for the geometrical model. The paper provides a three-dimensional application of the efficient simulation technique of Brownian motion proposed by Torquato *et al* for steady state diffusion-controlled problems [Appl. Phys. Lett. 55, 1847-1849 (1989)] and adapted by Lafarge [Poromechanics II, 708-708 (2002)] in a bi-dimensional case. The influence of the model's microstructural details (anisotropy, and struts' junction and cross-section) on the macroscopic properties are studied. The predictions of the macroscopic properties using this local scale approach are then compared to experimental measurements.

Number of words in abstract: 172

Suggested for special session on Physical Acoustics

Technical Area: Physical Acoustics

Special facility: Computer projector

PACS Subject Classification number(s): 43.20.Bi, 43.20.Hq

# FROM MICROSTRUCTURE TO ACOUSTIC BEHAVIOUR OF POROUS MATERIALS

C. Perrot<sup>1,2</sup>, R. Panneton<sup>1</sup>, and X. Olny<sup>2</sup>

<sup>1</sup>GAUS, Mechanical engineering department, Université de Sherbrooke, Sherbrooke QC Canada J1K 2R1

<sup>2</sup>LASH, DGCB URA CNRS 1652, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 69518 Cedex, France

## 1. INTRODUCTION

**Subject.** To study how the microstructure (form and structure revealed using microscopy) of a foam can be used to determine its general sound absorption properties.

**Background.** (i) Foams can be seen as an arrangement of cells paving space [1], whose form and constitutive struts are determined by physical principles [2]. The two-dimensional ordered monodisperse foam is the celebrated honeycomb structure, the hexagonal structure. Kelvin's tetrakaidecahedron packed in a bcc structure is an acceptable equilibrium structure. (ii) The exact acoustic response of a microstructural system is restricted to the case of tubes of constant cross-section and slits. A real porous material is consequently seen as equivalent-fluid medium, of effective complex and frequency dependant density  $\rho$  and bulk modulus  $K$  (or equivalent set of dissipative functions) under the assumption of a rigid frame. Hence, a macroscopic Helmholtz equation provides a suitable paradigm for acoustic propagation and dissipation through porous media [3]. However, local geometrical variables (for example radius and thickness of tubes) do not appear explicitly in such a macroscopic description.

**Purpose.** To describe a novel procedure to characterize the sound absorption of reticulated foams (i.e. with open cells) from their microstructure.

**Relevance.** The enhancement of sound absorption properties of porous materials relies on the capacity to describe (i) microstructure and (ii) microstructure – acoustic energy interactions.

**Outline.** In Sec. II, methods to compute effective acoustic properties of reticulated foams are presented. Simulation results for effective acoustic properties of scaled cellular systems (Kelvin or honeycomb structure) are given in Sec. III and compared with direct experimental measurements.

## 2. METHOD

In this approach, one defines an elementary cell paving periodically space, experimentally identified or scaled by a simple geometrical model. We will develop here some of the essential notations relating to structure. Dissipation functions are computed by sophisticated numerical methods from the microstructure.

### 2.1 Input parameters, some necessary definitions

At microscale. Foam structure is experimentally identified by computed microtomography ( $\mu$ CT), including the average: (i) topology of a three-dimensional unit cell paving periodically space, (ii) shape of the struts of length  $\ell$  and thickness  $\tau$ .

At macroscale. Porosity  $\Phi$  and thermal characteristic length  $\Lambda'$  can be determined by independent and non-acoustical techniques. The porosity is actually the more common macroscopic parameter and is confidently measured. It is defined by the pore volume to bulk volume ratio (fluid volume fraction). The quantity  $\Lambda'$  is also known as the hydraulic radius and defined by twice the pore volume to pore surface ratio, or  $2V_p/S$ .

### 2.2 Cellular model, linking micro to macro scale

Once the morphology has been identified, a micro-macro relationship can also be established, leading to a cellular model of the foam. For exemple, in the case of (i) the Kelvin structure (a tetrakaidecahedron unit-cell or semi-regular polyhedron of fourteen sides paving efficiently space), (ii) having struts of regular triangle cross-section shape, the macroscopic indicators  $\Phi$  and  $\Lambda'$  are written according to the microstructural indicators  $\ell$  and  $\tau$ . Therefore, these expressions for  $\Phi$  and  $\Lambda'$  determine macroscopic surface and volume information for the Kelvin structure. For the purposes of our study, the solutions of this system are of primary interest as they describe the local dimensions of reticulated foams when microstructural information is not available.

### 2.3 Local computation of the dissipation functions

The result relating the porosity  $\Phi$  and the thermal characteristic length  $\Lambda'$  to the sizes of the triangular struts arranged in a Kelvin structure,  $\ell$  and  $\tau$ , allows for a simple cellular model to solve the viscous and thermal problems. Viscous problem. It has been shown that the Finite Element Method leads to a velocity field that is a solution of the Navier-Stokes equation [4]. Periodic boundary conditions are easily implemented under the Femlab® environment. The relevant physical properties are ensemble averages. Thermal problem. The first passage sphere algorithm [5] was used to determine the frequency dependent bulk modulus of air saturating different arrangements of parallel solid cylinders [6]. We shall apply this algorithm to more complex three dimensional geometries, such as media comprised of Kelvin cells.

## 3. RESULTS

As a result, the dynamic bulk modulus can be computed in a periodic unit cell as shown in figure 1 and 2, as well as the macroscopic parameters (table 1).

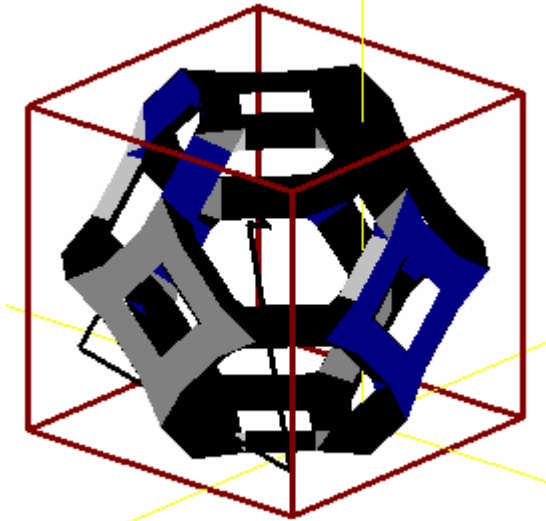


Fig. 1. The Kelvin structure paves periodically space. A “random walker” is seen. It serves to compute an essential thermal dissipation function, the dynamic bulk modulus.

In Tab. 1, the computed viscous macroscopic parameters are compared with measurements. The numerical resistivity  $\sigma$  is greater than the experimental one. In the hexagonal model, struts perpendicular to the flow direction increase resistivity. In Fig. 2, the computed dynamic bulk modulus  $K$  is compared with measurements. Here, it is seen that there is a shift in amplitude for the polymeric foam. Therefore, the zero acoustic temperature boundary condition is not valid for this material. As shown by Tarnow in 1995, it is due to the fact that the ratio of the air/solid heat capacity coefficients is not small.

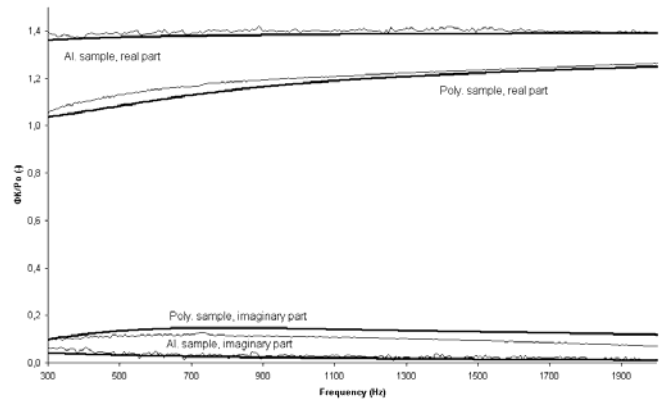


Fig. 2. Bulk modulus as a function of frequency for two real samples. Computed by Brownian motion simulations and compared to measurements for (i) identified (Duocel® al. foam 40 ppi) and (ii) scaled (polymeric foam) Kelvin structures. Top: real parts. Bottom: Imaginary parts.

Table 1. Macroscopic viscous properties

	Porosity (-)	Thermal length ( $\mu\text{m}$ )	Resistivity ( $\text{N.s.m}^{-4}$ )	Tortuosity (-)	Viscous length ( $\mu\text{m}$ )
Measurements	0.921 +/- 0.001	1926 +/- 431	177 +/- 21	1.07 +/- 0.01	988 +/- 57
FEM	0.911	1910	339	1.04	1047

## 4. CONCLUSION

We have proposed a method to determine the macroscopic parameters of absorbent materials from the knowledge of their cellular microstructure, either identified by  $\mu\text{CT}$ , or scaled by a macro-micro geometrical model. A good agreement is found between the microstructural approach and classical macroscopic measurements for the two samples studied. The principal contribution of the present work is that all the relevant quantities have been computed on cellular systems (Kelvin or honeycomb structure). In summary then, we have computed, for 3D cellular porous systems, the dynamic thermal permeability  $k'$ , its static value  $k'_0$ , the static thermal tortuosity  $\alpha'_0$ , the transition frequency  $f_{ic}$  and the form factor  $M'$ . Study of the fluid velocity field for a hexagonal porous system (2D counterpart of the Kelvin structure) revealed significant quantitative agreement between macroscopic parameters derived and measured from a real aluminium foam. This lends support to the idea that there is a deep connection between Kelvin structure and real reticulated foams: the scaled Kelvin structure is a representative configuration of reticulated foams.

## REFERENCES

- [1] Gibson, L. J. and Ashby, M. F. Cellular Solids (Structure and Properties) (2<sup>nd</sup> edition). Cambridge University Press (1997).
- [2] Weaire, D. and Hutzler, S. The Physics of Foams. Oxford University Press (1999).
- [3] Allard, J. F. Sound Propagation in Porous Media (Modelling Sound Absorption Materials). Elsevier, New Kork (1994).
- [4] Craggs, A. and J.G. Hildebrandt. Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes. J.S.V. 92(3), 321-331(1984).
- [5] Torquato, S. and Kim, I. C. Appl. Phys. Let. 55, 1847 (1989).
- [6] Lafarge, D. Determination of the dynamic bulk modulus of gases saturating porous media by Brownian motion simulation. Poromechanics II, Auriault *et al* (eds.) (2002).

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by NSERC Canada and FQRNT Québec.

C. Perrot would like to thank F. Gauthier, E. Gautier, I. Jovet and M. Lefebvre for assistance; Alcan, CQRDA, and Region Rhône-Alpes for financial support.

# Computation of the dynamic bulk modulus of acoustic foams

Camille Perrot <sup>1,2</sup>, Raymond Panneton <sup>1</sup>, Xavier Olny <sup>2</sup>

<sup>1</sup>GAUS, Department of mechanical engineering, Université de Sherbrooke,  
Sherbrooke QC J1K 2R1, Canada

<sup>2</sup>Laboratoire des Sciences de l'Habitat, DGCB URA CNRS 1652, ENTPE  
2 rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France

*This paper describes a recent approach to the analysis of the dynamic bulk modulus of acoustic foams. The principle of this method is composed of three major steps. The first involves the measurement of any salient geometric feature. It has been achieved using X-ray computed microtomography (X-ray  $\mu$ CT) of an aluminium foam. Measurements of cell morphology indicators are carried out on a few unit cells. The second step is the reconstruction process. Idealized three-dimensional periodic cellular models, based on simple physical considerations, are generated in such a way that, on average, they possess the same statistical properties as the local geometry of the foam samples they are assumed to mimic. Once these samples are generated, in the third step, the dynamic bulk modulus is studied. This necessitates the resolution of the linear heat equation, and the spatial integration of the temperature field. It is obtained from a diffusion equation analogy solved by an efficient random walker algorithm. Finally, the derived dynamic bulk modulus is compared to measurements performed on real samples. This method is applied with reasonable success.*

## 1 Introduction

Many authors have worked on reconstruction methods [1]; however it has been only recently applied in the field of acoustics to study the dynamic bulk modulus of two dimensional models of glass wool [2]. The purpose of this paper is to present a reconstruction technique, which introduces an underlying foam structure, but only makes use of geometrical parameters that can be measured on images of real samples. From this stand point, the main steps of the methodological approach are summed-up in Figure 1, and discussed in the following sections. This paper is organized as follows. Section 2 covers a review of foams structure. It shows the typical features of foams local geometry, and presents a few elementary polyhedral unit cells satisfying constraints imposed by physics, as first candidates for modelling foam microstructures. Section 3 addresses the practical acquisition of cellular morphology using X-ray  $\mu$ CT, with particular application of the Duocel<sup>TM</sup> aluminium foam. This is a non-trivial process, including reconstruction artefacts, which is illustrated and discussed. Topological indicators, mean struts length and thickness, and characteristic dimensions of isolated cells are then reported. Once these microstructural descriptors are known, artificial unit cells can be generated, and their influence examined. Finally, the dynamic bulk modulus of isotropic and anisotropic generated samples is determined and compared to measurements in section 4, which concludes this paper.

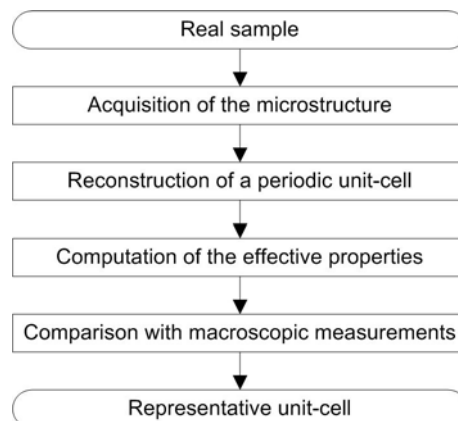


Figure 1: Reconstruction process



## 2 Review of foam structure

Kraynik recently reviewed foams structure [3], deriving from the fluid state as gas bubbles expand to form polyhedral cells. The microstructure of high-porosity foams is based on the packing of polyhedral cells that fill space [4, 5]; this characteristic distinguishes foams from other porous materials that are not cellular in nature. Liquid and solid foams share many topological and geometric properties because solid foams typically evolve in the fluid state as gas bubbles form, expand, and deform under the influence of surface tension, viscous forces, phase change, and so on. In both cases, the cells contain gas, and the volume fraction of the liquid or solid phase is small. The primary feature found in high-porosity open foams is a network of slender struts with a usual connectivity of four. Struts are the solid counterparts of *Plateau borders* that form along the edges of polyhedral cells in liquid foams. Similarly, cell walls in closed-cell foams are related to liquid films that define the faces of polyhedra. In general, foams are random polydisperse materials that contain cells of different sizes and shapes. Monodisperse foams, which have equal-volume cells, are a special case. A “dry” soap foam, commonly called soap froth, is a liquid foam in which the porosity tends to unity.

The basic cell geometry is particularly well defined in soap froth because it can be viewed as a network of minimal surfaces that form the faces, edges, and vertices of polyhedral cells [6]. The static structure is completely determined by area minimization because the only relevant force besides gas pressure comes from surface tension. Consequently, the local geometry obeys Plateau’s law: (1) each face has a constant mean curvature to balance the pressure difference between adjacent cells, (2) three faces meet at equal dihedral angles of  $120^\circ$  at each cell edge, and (3) four edges join at equal tetrahedral angles of  $\cos^{-1}(-1/3) \approx 109,47^\circ$  at each cell vertex. The difficult problem of calculating the shape of minimal surfaces can be handled by the Surface Evolver computer software [7]. Ordered foams provide a natural starting point for understanding structure and predicting properties. The Kelvin cell [8] (Figure 2) is the only structure that satisfies Plateau’s laws and forms a perfectly ordered soap froth in which all cells have identical shapes and orientations. Kelvin cells pack on a body centred cubic lattice and only contain quadrilateral and hexagonal faces. All of the cell edges and vertex regions have similar shapes. The Weaire-Phelan foam [9] (Figure 2) has the lowest surface area of any known monodisperse structure. It contains eight cells: two pentagonal dodecahedra and six 14-hedra with twelve pentagonal and two hexagonal faces. Weaire-Phelan foam has cubic symmetry. Real foams are disordered. Matzke [10] described their complexity in its classic experiments on bubble shapes in monodisperse systems. A microscope was used to count the different polyhedra in foams that were meticulously assembled – one bubble at a time – with a graduated syringe. Cells were classified according to the type of faces they contained, and pentagons were predominant. No Kelvin cells were found, even though 14-hedra were the most common f-hedra (f is the number of faces). The most common abundant cell (19,7 %) was a 13-hedron designated 1-10-2 and now called the Matzke cell; it contains one quadrilateral, ten pentagons, and two hexagons. Matzke concluded that no cell could be considered typical because four types were required to form the majority of bubbles, and the ten most common types only covered 80 % of the 600 cells that were examined. In this work, we only consider spatially periodic models, which are based on a representative volume (unit cell) of foam. The unit cell in the simplest models only contains one foam cell. These perfectly ordered models composed of identical cells are most likely to admit analytical solutions which reveal important physics. The topological features of the Kelvin, Matzke, and Weaire-Phelan cells are reported in Table 1. They can be compared to experimental data for identification purpose.

Table 1: Main idealised unit cells of monodisperse foams.

	<i>Kelvin (1887)</i>	<i>Matzke (1945)</i>	<i>Weaire-Phelan (1994)</i>
Edges / face, $n$	5.143	5.124	5.018
Faces / cell, $f$	14	13.7	13.5

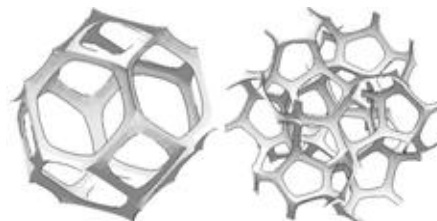


Figure 2: *Kelvin* and *Weaire-Phelan* unit cells, modeled under the Surface Evolver program, showing *Plateau borders*.

### 3 Acquisition of the cellular morphology of an aluminium foam

Metallic foams have been produced mainly by casting (ERG, Duocel™) and deposition techniques (Inco, Recemat™), although some have also been produced by powder metallurgy (Metafoam). In this study, 6101 aluminium foams (composition (wt.%) Al-0.6 Mg-0.5 Si) were fabricated by ERG, Inc. using a directional solidification technique. Typically, it involves a two-stage investment casting processes, which replicates the shape of polymeric foams. These foams have cell size from 10 to 40 pore per inch (ppi), and an orientation that is either longitudinal (L), either transverse to the solidification direction. At first, the morphology of the foam is studied using conventional techniques of microscopy. i.e. optical microscope and scanning electron microscope (SEM). The microstructure of the foam is shown in Figure 3, which is a typical cast microstructure containing large grains and coarse inclusions. No internal voids were observed within the ligaments [11]. The foam shown in Figure 3 is predominately open-cell, but there are a number of partially closed cells (Figure 3a), solidified in place before the cell walls could drain away. The cross-sections of the ligaments are essentially triangular in shape and slightly convexes (Figure 3b). Partially closed cells indicate the non-equilibrium nature of the casting process. One can observe that the Plateau's law seems well respected (Figure 3b). These first observations need to be confirmed and quantified using a three-dimensional image analysis technique. This will be achieved by means of the X-ray computed microtomography technology ( $\mu$ CT). The desktop laboratory source available at the Université of Sherbrooke will be briefly presented, in view of describing the acquisition process of the  $\mu$ CT data.

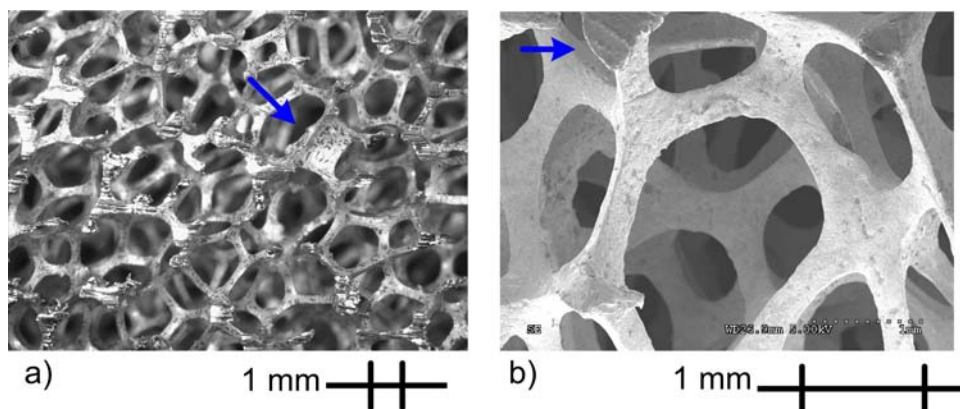


Figure 3: (a) Optical and (b) SEM of a 6101 aluminium foam with a 92.1 +/- 1 % porosity [15].

The local geometry of aluminium foams is obtained using the Skyscan 1072-80kV desktop, an X-ray laboratory source for axial  $\mu$ CT. The main parts of the setup are presented in Figure 4. Basically, a CT system utilises a set of transmission measurements made along the X-ray paths through the sample from many different directions (given by the rotation of the sample holder). Each of the transmission measurements is digitised and stored in a computer where they are subsequently reconstructed by a back-projection technique [12, 13].

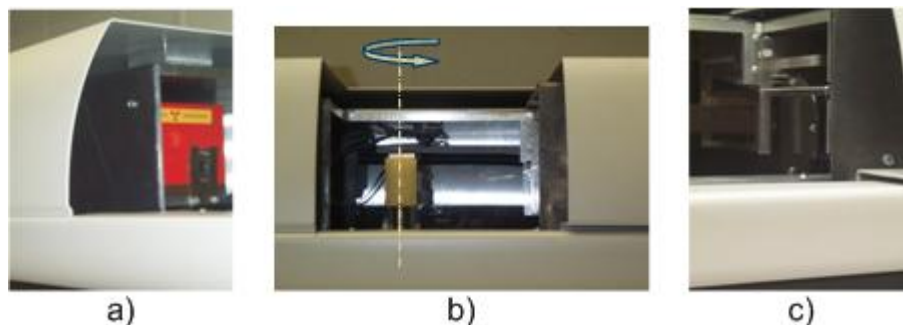


Figure 4: The main parts of the Skyscan 1072 - 80kV desktop: (a) an 8  $\mu$ m microfocused X-ray source, (b) a step-by-step rotating sample holder, (c) and a digital camera coupled to a photoscintillator.

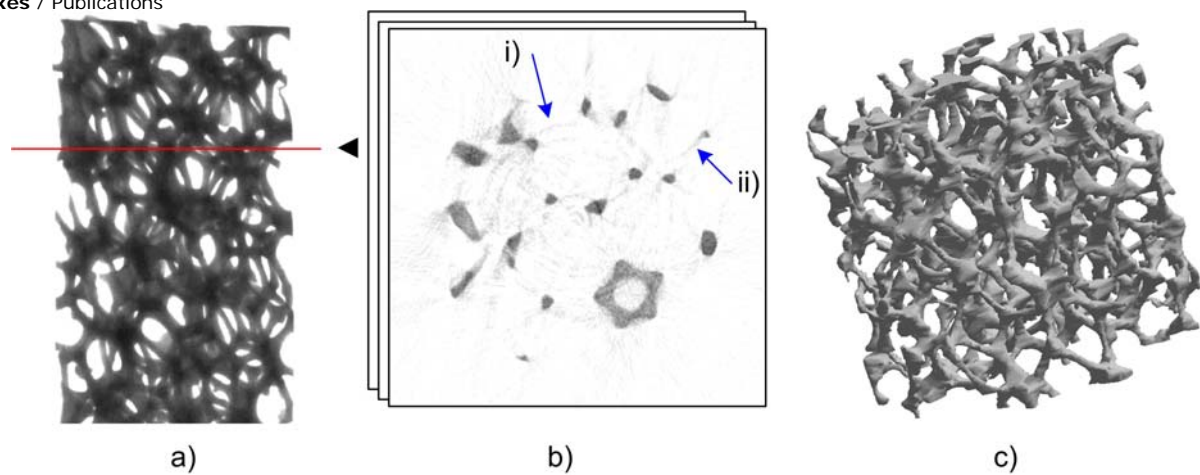


Figure 5: Main steps of the X-ray computed microtomography reconstruction process. (a) Acquisition of classical radiographies, or « X-ray shadow images » of the real sample. (b) Reconstruction of two-dimensional slices of the real sample, showing (i) “ring” artefacts and (ii) “starburst” artefacts. (c) Reconstruction of the three-dimensional image of an axial portion the real sample after binarisation of the two-dimensional images.

The central problem from the experimental point of view is to obtain a representative image of the real sample. Cylindrical foam samples with dimensions varying from 5 to 20 mm in diameter were cut, ensuring axial symmetry during the rotation of the sample holder. The main steps of the X-ray  $\mu$ CT reconstruction process are illustrated in Figure 5. At first, classical radiographies, or « X-ray shadow images » of the sample, are acquired for different rotation positions of the sample holder (Figures 4b, 5a). Images were acquired from 200 rotation views through 180 degrees rotation. The input energy is relatively low to improve the contrast between the solid and fluid phases. The source is set at 80 kV / 62  $\mu$ A with a 112 ms integration time. The geometric magnification factor is set at 10, corresponding to a theoretical resolution of 21.8  $\mu$ m / pixel. Secondly, two-dimensional reconstructed images, or « slices » of the sample are obtained using the (cone-beam) Skyscan backprojection algorithm (Figure 5b). Two kinds of artefacts are visible on this picture: (i) “ring” artefacts, (ii) and “starburst” artefacts. Ring artefacts appear as full or partial circles centered on the rotational axis. They are attributed to a differential sensitivity of the detector to varying beam hardness. Starburst artefacts are characterised by bright streaks which emanate from the object for a short distance into nearby material. They can arise if a highly attenuating object is noncircular in cross-section, which is the case for the ligaments of the aluminium foam under study. Both of these artefacts derive from a common origin, the non-monochromaticity of the X-ray source. For a full definition and discussion of these problems, see reference [14]. These subtle complications can render the data more problematic for quantitative use. In particular, artefacts introduce an artificial roughness. A “calibration” of the data is consequently recommended before assembling the set of slices in the three-dimensional reconstruction step. The two-dimensional raw images are smoothed by a 4 $\times$ 4 averaging filter, reducing the theoretical resolution to 87.2  $\mu$ m / pixel. After that, the set of images is binarised such that the three-dimensional reconstructed object is a compromise between (1) the roughness (the visual aspect of the object is compared to micrographies, using classical techniques of microscopy, see Figure 3), and (2) the porosity of the real sample [15]. Finally, the expected resolution of the three-dimensional object is approximately 0.1 mm / pixel (Figure 5c). Five cells numbered from one to five are isolated from the bulk volume, see Figure 6. Typical morphometric indicators are directly measured out on these cells, and reported in Table 2.

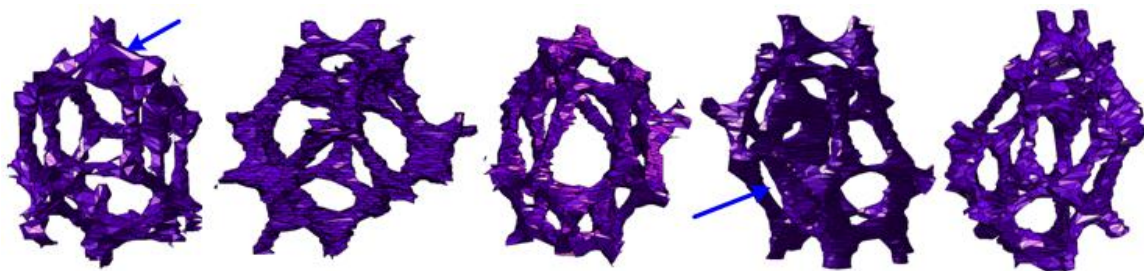


Figure 6: Five isolated cells, cells 1 and 4 show partially closed and closed walls.

Table 2: Cellular morphometry of aluminium foam ERG 40 ppi – L obtained by  $\mu$ CT analysis

	Cell #					Statistics
	1	2	3	4	5	
Faces / cell, $f$	12	13	12	12	14	$12.60 \pm 0.89$
Edges / face, $n$	5.17	5.08	5.00	5.33	5.29	$5.17 \pm 0.14$
Cell edge length (mm), $l$	$1.25 \pm 0.39$	$1.22 \pm 0.40$	$1.21 \pm 0.32$	$1.18 \pm 0.38$	$1.06 \pm 0.39$	$1.18 \pm 0.38$
Cell edge thickness (mm), $t$	$0.35 \pm 0.08$	$0.40 \pm 0.08$	$0.34 \pm 0.05$	$0.39 \pm 0.06$	$0.39 \pm 0.10$	$0.37 \pm 0.08$
Smallest principal cell dimension (mm), $S_1$	1.42	1.39	1.32	1.44	1.36	$1.39 \pm 0.05$
Shape anisotropy ratio, $S_2$	1.46	1.40	1.50	1.22	1.53	$1.42 \pm 0.12$

This paragraph briefly discusses comparison of Tables 1 and 2. The upper bound of the experimental number of faces per cell  $f$  is approximately 13.5. This is comparable to the mean number of faces per cell for all the main idealised unit cells presented in Table 1. Considering now the statistics on the experimental number of edges per face,  $n$  typically ranges from 5.03 to 5.31. This second topological parameter is still in good agreement with unit cells of Table 1. Following that discussion, we may conclude that any one of the presented unit cells in Table 1 could be proposed as good candidate for representing the typical topology of the real foams. For the sake of simplicity, a tetrakaidecahedron unit cell will be used in the reconstruction process (see Figure 7), which is an approximation of the Kelvin-cell.

#### 4 Computations of the dynamic bulk modulus

The method of reconstructed unit cells can be applied to the determination of the dynamic normalised bulk modulus  $K/Ka$ . First, the cellular morphology is acquired according to the process described in section 3. Then, it is reconstructed using a tetrakaidecahedron unit cell to mimic the topological characteristics reported in Table 2. Three artificial unit cells are generated (Figure 7) from local measurements performed on isolated cells (Figure 6). The first one is isotropic and sized-up from the length  $l$  and thickness  $t$  of cell edges given in Table 2. The second unit cell is reconstructed from the smallest principal cell dimension  $S_1$ , and the shape anisotropy ratio  $S_2$  given in Table 2. It is consequently anisotropic. For these two generated unit cells,  $\Phi$  and  $\Lambda'$  are computed by spatial integration, and reported in Figure 7. To test the influence of anisotropy on the dynamic bulk modulus of acoustic foams, a third unit cell has been reconstructed by inversion (see Appendix A). This reconstruction yields an equivalent isotropic unit cell for which the geometrical parameters of the anisotropic cell (i.e.  $\Phi = 0.9248$ ,  $\Lambda' = 1.8704$  mm) were used to constrain the inverse reconstruction process. This is why its final geometrical parameters  $\Phi$  and  $\Lambda'$  are similar to the ones of the anisotropic cell. The linearised heat equation is then solved for these media, from a diffusion equation analogy, by an efficient random walker algorithm implemented in three-dimensions. See reference [2], and references therein for details. The computations were run and averaged over 50 000 random walkers. The trapping distance was taken to be  $10^{-4}$  m for scaled structures, whose characteristic dimensions range between 1 m and 10 m.

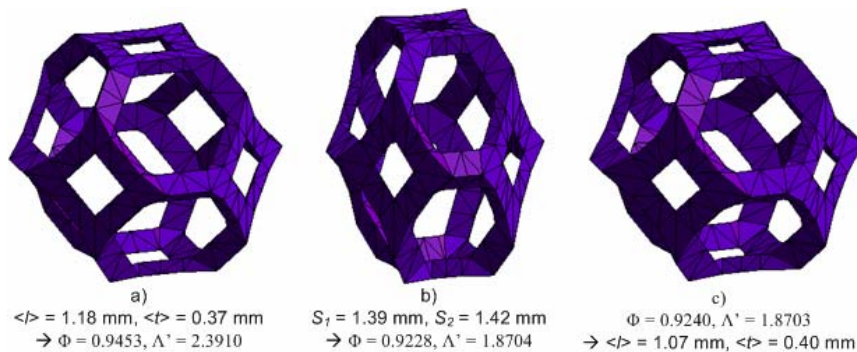


Figure 7: Idealized three-dimensional periodic cellular models: tetrakaidecahedron unit cells with triangular cross-sections. Isotropic (a) and anisotropic (b) unit cells are directly reconstructed from local measurements, whereas (c) is an equivalent isotropic unit cell sized-up by inversion using macroscopic parameters of (b) as input data.

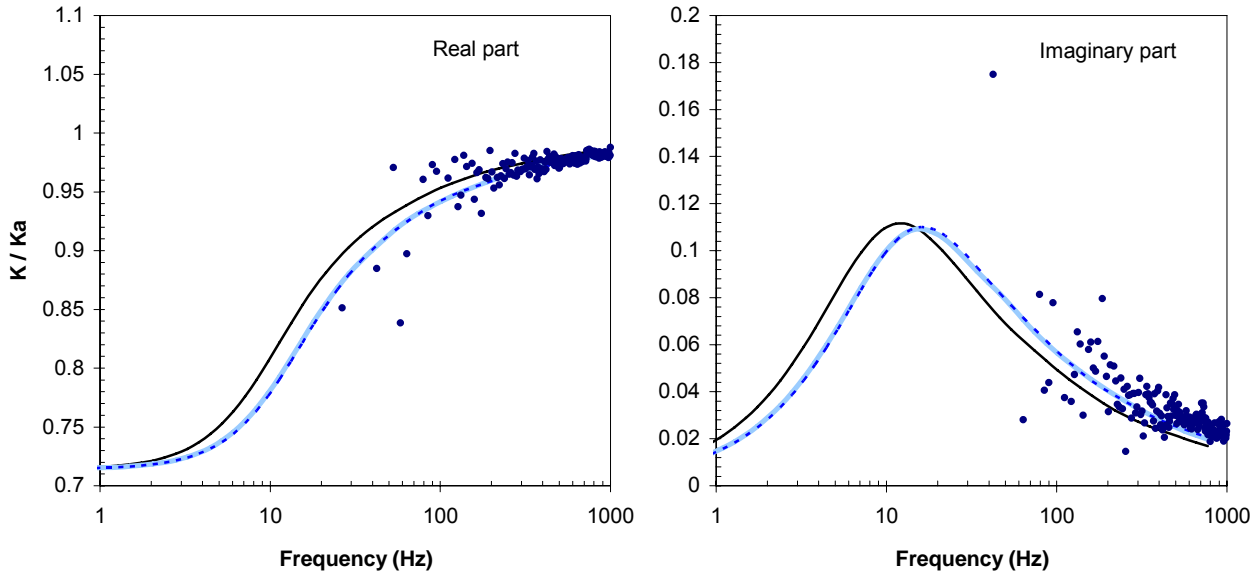


Figure 8: Measured and computed normalised dynamic bulk modulus ( $K/Ka$ ) using random walker algorithm for different unit cells. Results for isotropic cell (—), anisotropic cell (---), equivalent isotropic cell (· · ·), and measurements (•).

Under these conditions, a simulation requires less than half-an-hour on a CPU Intel P4, 3.2 GHz, 2 GB RAM. Predicted results are compared to macroscopic measurements in Figure 8. The macroscopic measurements (dots) were obtained using a 44.4 mm impedance tube with the two-cavity technique [16]. In Figure 8, one can note that the model predicts a transition frequency around 10 Hz. More precisely, the transition frequencies computed for the reconstructed media are 13 Hz for sample a), and 15.5 Hz for sample b) and c). This very low transition frequency is due to the large cells of the foam. Using the experimental set-up, it was not possible to measure the low frequency behaviour; however the experimental results in the measurable frequency range [100-1000 Hz] are in good accordance with the predicted asymptotic adiabatic regime, especially for unit cells b) and c). Moreover, the thermal characteristic length of the real foam has been estimated by an inverse acoustical characterization method, giving  $\Lambda' = 1.926 \pm 0.431$  mm [17]. This experimental estimation also agrees with the values obtained from the reconstructed unit cells (Figure 7). Furthermore, the dynamic bulk modulus of unit cells b) and c) being identical, it is found that this thermal dissipation related quantity is oblivious to the anisotropy of the real media, even if  $\Phi$  and  $\Lambda'$  are related to anisotropy.

## Concluding Remarks

This paper presented a method for morphological characterisation of open-cell foams and reconstruction procedure conditioned by a cellular vision of the porous media. This method was applied to predict thermal dissipation related features of an aluminium foam. Good agreements with macroscopic measurements were obtained for the thermal characteristic length  $\Lambda'$  and the normalised dynamic bulk modulus  $K/Ka$ . The most outstanding result is the ability of the method to predict such thermal dissipation features based on the direct measurement of the local geometry only. It was found that the dynamic bulk modulus of the reconstructed anisotropic unit cell is oblivious to this feature (anisotropy): for a given topology and cross section shape, periodic unit cells with identical porosities and thermal characteristic lengths share the same dynamic bulk modulus (because thermal dissipation effects rely on a scalar problem). In addition, measuring the principal cell dimensions appeared as more pertaining than measuring the average cell edge length and thickness. It is faster, and leads to a better estimation of the thermal dissipation features. To conclude, it seems that the proposed method of reconstructed porous media is promising, especially to investigate the influence of microstructures on macroscopic properties of acoustic foams, and for optimisation purposes of acoustic dissipations through porous media. Other acoustic properties, such as the dynamic effective density, and other types of porous media need to be specifically addressed in subsequent studies following the proposed method.

## Acknowledgments

This work was supported by Alcan, CQRDA, REGAL, FQRNT, NSERC, Auto21, and Région Rhône-Alpes. The authors would like to thank R. Bouchard and L.-M. Raynauld for their helpful contributions in the development of the numerical programs. The support of I. Kelsey, from IMSI of Université de Sherbrooke, for providing micrographies is acknowledged. Finally, computations were performed at the Centre for Computational Science at the Université de Sherbrooke whose support is gratefully acknowledged.

## References

1. P.M. Adler, *Porous media: geometry and transports* (Butterworth/Heinemann, 1992)
2. D. Lafarge, "Determination of the dynamic bulk modulus of gases saturating porous media by Brownian motion simulation," Proceedings of Poromechanics II (Auriault et al eds), 703-708 (2002).
3. A. M. Kraynik, *Foam structure: from soap froth to solid foams* (MRS Bulletin 28, 2003).
4. L. J. Gibson and M. F. Ashby, *Cellular solids: Structure and Properties* (2<sup>nd</sup> ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
5. N. C. Hilyard and A. Cunningham, *Low Density Cellular Plastics* (Chapman & Hall, London, 1994).
6. D. Weaire and S. Hutzler, *The Physics of Foam* (Oxford University Press, Oxford, 1999).
7. K. A. Brakke, *The Surface Evolver*, Experimental Mathematics 1(2), 141-165 (1992).
8. W. Thomson (Lord Kelvin), "On the division of space with minimum partitional area," Philos. Mag. 24, pp 503 (1887).
9. D. Weaire and R. Phelan, "A counterexample to Kelvin's conjecture on minimal surfaces," Philos. Mag. Lett. 69, pp. 107 (1994).
10. E. B. Matzke, Am. J. Botany 33, pp. 58 (1946).
11. T. G. Nieh, K. Higashi, and J. Wadsworth, "Effects of cell morphology on the compressive properties of open-cell aluminium foams," Materials Science and Engineering A283, 105-110 (2000).
12. *Standard Guide for Computed Tomography (CT) Imaging*, ASTM Designation E1441-00 (2000).
13. *Standard Practice for Computed Tomographic (CT) Examination*, ASTM Designation E1570-00 (2000).
14. R. A. Ketcham and W. D. Carlson, "Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences," Computer and geosciences 27, 381-400 (2001).
15. R. Panneton and E. Gros, "A Missing Mass Method to Measure the Open Porosity of Porous Solids," Acta Acustica, 91 (2), 342-348 (2005).
16. H. Utsuno, T. Tanaka, and T. Fujikawa, "Transfer function method for measuring characteristic impedance and propagation constant of porous materials," J. Acoust. Soc. Am. 86, 637-643 (1989).
17. Y. Atalla and R. Panneton, "Inverse acoustical characterization of open cell porous media using impedance tube measurements," Canadian Acoustics 33(1), 11-24 (2005).

## Appendix: Simple inverse model for sizing-up an equivalent unit-cell

The purpose of this appendix is to present simple equations for sizing-up an isotropic unit-cell. The inverse problem involves the determination of local dimensions for a periodic unit cell, when  $\Phi$  and  $\Lambda'$  are known. Gibson and Ashby have noticed that if the cell edge-length is  $l$  and the cell-wall thickness is  $t$ , and  $t \ll l$  – that is the porosity  $\Phi$  is high – then for all open-cell foams:

$$\Phi = 1 - C \left( \frac{t}{l} \right)^2 \quad [1]$$

where  $C$  is a numerical constant, near unity, that depends on the details of the cell shape. Assuming a tetrakaidecahedron unit-cell, this constant can be analytically calculated for different cross-section shapes. This has been done for the case of an equilateral triangular cross-section shape of height  $h$ , where  $C = \sqrt{3}/2\sqrt{2} \approx 0.61$ . Thermal characteristic length  $\Lambda'$  can also be estimated from local measurements via a second equation, which takes the following form:

$$\Lambda' = D_1 \frac{l^2}{t} - D_2 t \quad [2]$$

where  $D_1$  and  $D_2$  are still numerical constants near unity which can be determined analytically for simple cases. For an equilateral triangle cross-section shape of height  $h$ , we found  $D_1 = 2\sqrt{2}/3\sqrt{3} \approx 0.54$ , and  $D_2 = 1/3 \approx 0.33$ . Finally, the system of micro-macro equations, [1] and [2], is easily inverted in a new set of simple analytical macro-micro relationships, [3] and [4], holding under the small struts thickness hypothesis (or close-to-one porosity) for an identified tetrakaidecahedron unit-cell:

$$t = \frac{\Lambda'}{D_2} \left( \frac{1 - \Phi}{\Phi} \right) \quad [3]$$

$$l = \frac{\Lambda'}{D_2} \left( \frac{\sqrt{C(1 - \Phi)}}{\Phi} \right) \quad [4]$$

Taking  $\Phi = 0.913$  [-] and  $\Lambda' = 1.870$  mm as input data in equations [3] and [4], the following couple of average struts length and thickness is found:  $l = 1.073$  mm, and  $t = 0.330$  mm. The struts thickness is finally adjusted in order that, when  $\Phi$  and  $\Lambda'$  are numerically determined on the generated samples, they fit with the desired macroscopic data.

## **Linking microstructure and acoustic properties of open-cell foams**

Camille Perrot, Raymond Panneton (GAUS, Department of mechanical engineering, Université de Sherbrooke, Quebec, Canada, J1K 2R1, camille.perrot@usherbrooke.ca) and Xavier Olny (ENTPE – DGCB URA CRNS 1652 – rue Maurice Audin 69518 Vaulx en Velin - France)

4th Joint Meeting of the Acoustical Society of America and the Acoustical Society of Japan  
28 November--2 December 2006

### **Invited Paper**

A research program has been initiated in 2002 in order to link microstructure of high porosity open-cell foams to their acoustic properties. This paper is intended to highlight the main results of this study. The general objective of the research program is the determination of the acoustical macro-behavior from the physics at the local scale. A real rigid-framed porous media is studied. To this end, one needs first to determine the local geometry of the media, and second to solve over this geometry the partial differential equations which govern dissipation phenomena by thermal and viscous effects. The first step has been overcome by the technique of computed microtomography. This leads to experimental identification of the parameters of an idealized periodic unit-cell. The second step, solving harmonic heat and viscous fluid equations, is performed using Brownian motion and finite element simulations respectively. Then, macroscopic behavior is obtained by spatial averaging of the local and frequency-dependent thermal and velocity fields. Results are presented in terms of two dynamic characteristic functions (viscous and thermal permeabilities) compared to impedance tube measurements. This computational methodology may be seen as a first step to optimize microstructure of foams from a bottom-up approach for better sound proofing.

Number of words in abstract: 200

Invited for special session on Recent developments in acoustical materials and structures

Technical Area: Architectural Acoustics

PACs Subject Classification number(s): 43.55.Ev, 43.20.Ye



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA) ET L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON (FRANCE)

NOM : PERROT

DATE de SOUTENANCE : 20 décembre 2006

Prénoms : Camille, Nicolas, Joseph

TITRE : Microstructure et Macro-Comportement Acoustique : Approche par Reconstruction d'une Cellule Élémentaire Représentative

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2006-ISAL-00120

Ecole doctorale : MÉGA

Spécialité : Acoustique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RESUME :

La question fondamentale de la détermination des propriétés acoustiques de milieux poreux à partir de leur géométrie locale est examinée dans cette thèse de doctorat, à partir d'un échantillon de mousse d'aluminium à cellules ouvertes ayant été analysé par microtomographie axiale à rayons-X. Plusieurs propriétés géométriques sont mesurées pour caractériser l'échantillon expérimental à l'échelle de la cellule. Cette information est utilisée de manière à reconstruire un milieu poreux au moyen d'unités cellulaires idéalisées tri- et bi- dimensionnelles. La dépendance en fréquences des champs de températures et de vitesses gouvernant la propagation et la dissipation des ondes acoustiques à travers un milieu poreux rigide est calculée par simulation de mouvement Brownien et par la méthode des éléments finis, respectivement. Le comportement macroscopique est obtenu par moyennes spatiales des champs locaux. Nos résultats sont comparés à des données expérimentales obtenues par des mesures au tube d'impédance. Premièrement, cette approche conduit à l'identification des paramètres macroscopiques du modèle semi-phénoménologique de Pride-Lafarge. Deuxièmement, elle fournit un accès direct aux perméabilités dynamiques thermique et visqueuse. Néanmoins, le modèle bidimensionnel sous-estime la perméabilité visqueuse statique ainsi que la longueur caractéristique visqueuse; ce qui requiert donc une implémentation tridimensionnelle.

MOTS-CLES : microstructure – acoustique – milieu poreux – mousses à cellules ouvertes – méthode de reconstruction – microtomographie – mouvement Brownien – perméabilités dynamiques thermique et visqueuse

Laboratoire (s) de recherche : - Laboratoire des Sciences de l'Habitat (LASH, ENTPE, France)  
- Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (GAUS, Université de Sherbrooke, Canada)

Directeur de thèse: Dr. Xavier Olny et Pr. Jean Louis Guyader (co-directeur) – France  
Pr. Raymond Panneton – Canada

Président de jury :

Composition du jury :

J.-F. Allard	Professeur Émérite (Université du Maine)	Rapporteur
N. Atalla	Professeur (Université de Sherbrooke)	
G. Daigle	Chercheur (CNRC) (Ottawa)	Rapporteur
J.-L. Guyader	Professeur (CNRS) (INSA de Lyon)	
X. Olny	Enseignant Checheur (CNRS) (ENTPE)	
R. Panneton	Professeur (Université de Sherbrooke)	