



**HAL**  
open science

# Méthodes asymptotiques pour le calcul des champs électromagnétiques dans des milieux à couches minces. Application aux cellules biologiques.

Clair Poignard

► **To cite this version:**

Clair Poignard. Méthodes asymptotiques pour le calcul des champs électromagnétiques dans des milieux à couches minces. Application aux cellules biologiques.. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2006. Français. NNT: . tel-00124110v2

**HAL Id: tel-00124110**

**<https://theses.hal.science/tel-00124110v2>**

Submitted on 17 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 224-2006

Année 2006

THÈSE

présentée

devant l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1

pour l'obtention

du DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 25 avril 2002)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue publiquement le 23 Novembre 2006

par

**Clair POIGNARD**

---

**Méthodes asymptotiques pour le calcul des champs  
électromagnétiques dans des milieux à couches minces.  
Application aux cellules biologiques.**

---

Directrice de thèse : Michelle Schatzman

Directeur de thèse : Laurent Nicolas

JURY : Mme Sylvie Benzoni-Gavage, Présidente  
M Olivier Lafitte, Rapporteur  
Mme Michelle Schatzman, Directrice de thèse  
M Laurent Nicolas, Directeur de thèse  
M Laurent Krähenbühl, Examineur  
M Michael Vogelius, Examineur



## Remerciements

Toute ma gratitude, et mon profond respect à Michelle Schatzman. Merci de m'avoir fait confiance pour cette thèse, merci de m'avoir guidé, merci de tout ce que vous m'avez appris.

Je remercie vivement mes co-directeurs du CEGELY : Laurent Nicolas et Laurent Krähenbühl. Grâce à vous, l'électromagnétisme m'est un peu moins obscur. Merci de votre patience, de votre écoute et merci d'avoir motivé par des applications concrètes ce travail de thèse : les problèmes auxquels vous êtes confrontés sont de passionnants sujets de recherche mathématique, j'espère avoir l'occasion de travailler à nouveau avec vous.

Je remercie également Jon Chapman et Olivier Lafitte d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je suis très honoré de l'intérêt que vous avez porté à mon travail et vos remarques pertinentes ont permis d'améliorer la rédaction de ce manuscrit. Merci à toi, Olivier, de tout l'intérêt que tu as porté à mes travaux, avant même d'être rapporteur. Nos discussions sur le  $\omega$ -calcul pseudodifférentiel, entre Rutgers et Paris, puis entre Lyon et Paris m'ont beaucoup éclairé.

Merci à Sylvie Benzoni-Gavage, que j'ai eu le plaisir de cotoyer au sein de MAPLY puis de l'ICJ, d'avoir présidé le jury.

Grâce à une bourse EURODOC, j'ai eu l'honneur et le plaisir de travailler six mois sous l'égide de Michael Vogelius à Rutgers University. Merci de ta simplicité, de ta disponibilité et de ton hospitalité. Merci de m'avoir fait confiance : j'espère que nos thèmes de recherche se recroiseront bientôt.

Je remercie chaleureusement tous les membres de l'ICJ, et plus particulièrement ceux de l'ex-MAPLY. Un grand merci à Christiane Battoue, Christiane Ussel, merci à Sybil, Monique et Maria pour leur aide administrative à l'ICJ, merci à Philippe et Josiane du CEGELY ainsi qu'à Lynn Braun de Rutgers. Merci à Violaine et Thierry pour leur aide informatique, ainsi qu'à tous mes amis de l'ICJ, du CEGELY et de Rutgers University.

Merci à la Rochel family, Nathalie, Philippe, Nanette et Jacques, de m'avoir accueilli chaleureusement à Eastbrunswick ; grâce à vous, je ne me suis jamais senti seul. Thanks to all of you !

A mes amis et tout particulièrement à Franck, Antoine, Nico, Ronan et Viviane, Magali, Pietro, Prune, Bruno, Barbara, Noémie je tiens à dire merci d'avoir été là, à mes côtés durant ces dernières années. Thanks to you Derek.

Merci à Marie-Danielle de m'avoir ouvert le monde de la danse à Lyon, merci à Sirarpik. Merci au CNR de danse d'avoir accepté que je suive des cours d'une grande qualité.

Merci à Daniel et Zina.

Merci à Evelyne pour votre aide préciseuse et vos conseils toujours avisés.

Merci à mes chers parents, pour votre amour et votre soutien sans faille.

Merci à toi, Emkejem !



*A Camille, mon cher frère.*



## Table des matières

Introduction	3
1. Les équations de Maxwell en régime harmonique	4
2. La cellule biologique	7
3. Problématique	10
4. Etat de l'art et démarche suivie	11
5. Plan et principaux résultats	12
Chapitre I. Asymptotiques B.F. du champ électrique	29
I.1. Asymptotiques du champ dans une cellule circulaire	31
I.2. Asymptotiques du potentiel électrostatique dans un milieu fortement hétérogène à couche mince	69
I.3. Simulations numériques	83
I.4. Appendice	89
Chapitre II. Asymptotiques M.F. du champ électrique en mode TM	109
II.1. Asymptotiques pour l'équation de Helmholtz dans un milieu à couche mince	111
II.2. Simulations numériques	137
Chapitre III. Méthode asymptotiques hautes fréquences	145
III.1. Condition d'impédance généralisée hautes fréquences dans un matériau à couche mince	147
III.2. Estimation du champ diffracté à hautes fréquences par un petit objet circulaire	177
Bibliographie	203





# Introduction

Durant ces vingt dernières années, grâce à l'apparition de nouvelles technologies, les sources électromagnétiques se sont multipliées et l'exposition quotidienne de l'homme à ces champs s'est d'autant plus accrue. C'est pourquoi de nombreuses études se sont orientées vers les interactions entre champs électromagnétiques et tissus biologiques.

La connaissance de l'influence de ces champs sur le corps humain est d'une importance considérable, aussi bien dans le milieu médical qu'industriel. D'une part les champs électromagnétiques sont utilisés à des fins médicales, aussi bien pour les diagnostics (par exemple, en Imagerie par Résonance Magnétique (I.R.M.) ou plus généralement en imagerie médicale [16], [46]) que pour les traitements (en oncologie pour les traitements par électrochimiothérapie [61]). D'autre part, les matériels électriques sont soumis à une réglementation stricte imposée en vertu du principe de précaution [52] qui semble excessive à certains, laxiste à d'autres, et reste à justifier scientifiquement.

Pour modéliser précisément la distribution des champs électromagnétiques dans un organe du corps humain, une approche consiste à partir d'une modélisation microscopique (c'est-à-dire au niveau cellulaire) afin de construire un modèle macroscopique de l'organe par des méthodes d'homogénéisation; un modèle électrique ainsi qu'une connaissance précise de la distribution des champs dans la cellule biologique sont alors indispensables [52].

À l'échelle cellulaire, le calcul des champs présente des difficultés dues aux particularités de la cellule biologique [26], [50], [64] : fort contraste entre les paramètres électromagnétiques des différents milieux, présence d'une fine membrane difficile à mailler, géométrie complexe, présence d'inclusions dans le cytoplasme etc. C'est pourquoi de nombreuses approches numériques utilisent des modélisations simplifiées, qui, soit négligent certains phénomènes électromagnétiques, tels que les courants de déplacements ou les variations temporelles des champs, soit considèrent des cellules à géométries simples (circulaire, ovale) mais biologiquement peu réalistes.

Cette thèse présente des méthodes asymptotiques mathématiquement justifiées permettant de contourner les difficultés numériques que pose le modèle de la cellule biologique tout en permettant de rester le plus proche possible de la réalité biologique.

*REMARQUE. Nous avons choisi d'écrire une introduction détaillée, avec un rappel sur les équations de Maxwell, une présentation de la cellule biologique et l'énoncé de nos principaux théorèmes, lemmes ou propositions, afin que le lecteur soucieux de connaître la motivation de notre travail et le cadre de validité de nos résultats, et désirant les appliquer sans s'occuper des démonstrations, ait juste à lire ces premières pages.*

## 1. Les équations de Maxwell en régime harmonique

Les équations de Maxwell décrivent les phénomènes électromagnétiques dans un matériau. Nous notons  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  respectivement les permittivité diélectrique, perméabilité magnétique et conductivité électrique de ce matériau.

Les équations de Maxwell relient les champs de vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  (appelés champs électriques et magnétiques) ainsi que les champs de vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  (appelés inductions électrique et magnétique) à la densité de courant  $\mathbf{J}$  et à la densité de charge électrique  $\rho$ . Le lecteur désirant de plus amples précisions à ce sujet se référera au livre de Balanis et Constantine [12] pour une approche physique ou à ceux de Bossavit [17] ou Cessenat [21] pour une approche plus mathématique. Le système d'équations fondamentales s'écrit sous la forme suivante :

$$(1.1a) \quad \text{Loi de Faraday : } \text{rot } \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0,$$

$$(1.1b) \quad \text{Loi d'Ampère : } \text{rot } \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J},$$

$$(1.1c) \quad \text{Loi de Gauss magnétique : } \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$(1.1d) \quad \text{Loi de Gauss électrique : } \text{div } \mathbf{D} = \rho.$$

La relation de conservation de la charge se déduit de la loi d'Ampère (1.1b) et de la loi de Gauss électrique (1.1d) :

$$\text{div } \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0.$$

Afin de modéliser complètement les phénomènes électromagnétiques, il est nécessaire de rajouter les équations constitutives suivantes :

$$(1.2a) \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

$$(1.2b) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

ainsi que la loi d'Ohm

$$(1.2c) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Remarquons que la dépendance linéaire de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  respectivement par rapport à  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$ , bien qu'assez générale, n'a pas lieu pour une classe importante de matériaux (les matériaux ferromagnétiques par exemple). Cependant, dans cette thèse, nous ne considérons que des matériaux vérifiant les équations (1.2), et nous supposons que les constantes  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des quantités positives qui ne dépendent que de la variable d'espace et sont indépendantes des champs électromagnétiques. De cette modélisation, nous déduisons les équations satisfaites par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , en éliminant les inconnues  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$ .

**1.1. L'équation vectorielle des ondes en régime harmonique.** En régime harmonique, nous supposons que les champs électrique et magnétique s'écrivent sous la forme suivante :

$$(1.3) \quad \mathbf{E}(x, t) = E(x)e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, t) = H(x)e^{i\omega t},$$

où  $\omega$  est la pulsation à laquelle se déroule le phénomène étudié. Dans cette thèse, nous parlerons aussi bien de pulsation que de fréquence. Nous rappelons le lien entre ces deux entités :

$$\omega = 2\pi f.$$

Notons que l'unité du système international (S.I.) de la pulsation est le radian par seconde (rad/s) et celle de la fréquence le hertz (Hz).

Nous déduisons des équations (1.1) et (1.2) les équations de Maxwell en régime harmonique :

$$(1.4a) \quad \operatorname{rot} E = -i\omega\mu H,$$

$$(1.4b) \quad \operatorname{rot} H = i\omega\varepsilon E + \sigma E.$$

Remarquons que le système de Maxwell harmonique (1.4) est un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) d'ordre 1. Si nous ne nous intéressons qu'à une seule grandeur ( $E$  ou  $H$ ), il est possible de transformer le système (1.4) d'ordre 1 en une EDP d'ordre 2. Cette nouvelle EDP, appelée équation vectorielle des ondes en régime harmonique, s'écrit, pour  $E$ , sous la forme suivante :

$$(1.5) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 (\varepsilon - i\sigma/\omega) E = 0;$$

le champ  $H$  vérifie quant à lui

$$(1.6) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\varepsilon - i\sigma/\omega} \operatorname{rot} H \right) - \omega^2 \mu H = 0.$$

Ces égalités sont écrites au sens faible, ce qui signifie que des conditions de transmission sont sous-entendues lorsque les paramètres  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  ou  $\mu$  présentent des discontinuités.

Il reste à imposer une condition aux limites du domaine étudié pour déterminer de manière unique le champ électrique  $E$  ou le champ magnétique  $H$ . Différents types de conditions aux limites (C.L.) du domaine sont utilisés, par exemple, celles de type Neumann

$$(1.7) \quad \operatorname{rot} E \times n = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle,$$

ou de Dirichlet

$$E \times n = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle.$$

Il existe aussi des conditions d'impédance reliant le champ électrique au champ magnétique qui traduisent le fait que l'onde ne peut pénétrer dans le matériau que sur une faible épaisseur  $\delta$  appelée épaisseur de peau :

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \times n - \delta n \times E \times n = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle.$$

Ces conditions d'impédance sont aussi appelées conditions de radiation lorsqu'elles permettent de ramener les problèmes de diffraction à des domaines bornés [21].

**1.2. L'équation de Helmholtz.** Dans la plupart des matériaux, les paramètres  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont constants par morceau et  $\varepsilon - i\sigma/\omega$  n'est jamais nul, ce qui implique (en prenant la divergence de (1.4b)) que le champ électrique est à divergence nulle presque partout. De même, si  $\mu$  est constant par morceau,  $\operatorname{div} H$  est nul presque partout. Il est alors judicieux de transformer l'opérateur  $\operatorname{rot}((1/\mu) \operatorname{rot})$  de l'équation (1.5). En utilisant les relations suivantes<sup>1</sup> :

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \right) = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \right) - \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \right),$$

---

<sup>1</sup>Rappelons  $\operatorname{grad}(E) = [\operatorname{grad}(E_x), \operatorname{grad}(E_y), \operatorname{grad}(E_z)]$  et  $\operatorname{div}(E) = \begin{bmatrix} \operatorname{div}(E_x) \\ \operatorname{div}(E_y) \\ \operatorname{div}(E_z) \end{bmatrix}$

nous obtenons l'équation de Helmholtz sur  $E$  :

$$(1.8) \quad \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} E \right) + \omega^2 (\varepsilon - i\sigma/\omega) E = 0.$$

De manière analogue, nous obtenons pour  $H$  :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\varepsilon - i\sigma/\omega} \operatorname{grad} H \right) + \omega^2 \mu H = 0.$$

Différentes conditions aux limites sont utilisés pour déterminer complètement le champ  $E$ . Les plus courantes et les plus simples sont les conditions de Dirichlet :

$$E = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle,$$

ou de Neumann

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle .$$

Il existe aussi des conditions mixtes liant  $E$  et sa dérivée normale  $\partial E/\partial n$ , telles que la condition de Robin par exemple :

$$a \frac{\partial E}{\partial n} + bE = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle,$$

avec  $a$  et  $b$  des paramètres à ajuster en fonction des constantes électromagnétiques.

**1.3. La formulation diélectrique.** Dans cette formulation, aussi appelée approximation quasistatique, les variations temporelles de l'induction magnétique sont négligées. La loi de Faraday (1.1a) devient alors :

$$\operatorname{rot} E = 0.$$

En régime harmonique, nous obtenons alors :

$$(1.9a) \quad \operatorname{rot} E = 0,$$

$$(1.9b) \quad \operatorname{rot} H = i\omega\varepsilon E + \sigma E.$$

Comme  $\operatorname{rot} E$  est nul, cela revient à supposer que  $E$  dérive d'un potentiel  $V$  appelé potentiel scalaire :

$$E = \operatorname{grad} V.$$

En prenant la divergence de (1.9b), nous obtenons l'EDP elliptique suivante pour  $V$ , appelée formulation diélectrique :

$$(1.10) \quad \operatorname{div}((\omega\varepsilon - i\sigma) \operatorname{grad} V) = 0.$$

Les conditions aux limites usuelles pour cette EDP sont des conditions de Neumann :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle,$$

ou de Dirichlet

$$V = \langle \text{C.L. imposées sur le bord du domaine} \rangle .$$

Nous insistons sur le fait qu'à la différence des équations (1.4), (1.5), (1.6) et (1.8) qui ne négligent aucun phénomène, la formulation diélectrique néglige la partie rotationnelle du champ électrique.

Deux questions apparaissent alors. La première porte sur les conditions aux limites. Considérons le champ électrique  $E$  satisfaisant à l'équation vectorielle des ondes (1.5) avec une condition aux limites de Neumann (1.7) et soit  $V$  le potentiel scalaire satisfaisant à la formulation diélectrique (1.10). Quelles conditions aux limites faut-il imposer à  $V$  pour que les champs électriques  $E$  et  $\text{grad}(V)$  soient comparables ? Autrement dit, avec quelles conditions aux limites sur  $V$  pouvons-nous dire que le champ  $\text{grad}(V)$  est la partie statique du champ total  $E$  ?

La seconde interrogation porte sur l'utilisation de la formulation diélectrique. Comme nous venons de le voir, cette formulation est une approximation de l'équation vectorielle des ondes. Dans cette approximation, les variations temporelles de l'induction magnétique sont considérées comme nulles, c'est-à-dire que le rotationnel du champ électrique est nul. Est-il possible de quantifier, *a priori* et en fonction des paramètres du milieu et de la pulsation, l'erreur faite en utilisant l'approximation quasistatique et ainsi de savoir *a priori* quelle formulation il est plus judicieux d'utiliser ?

## 2. La cellule biologique

La motivation principale de ce travail de thèse est l'étude des champs électromagnétiques en régime harmonique dans une cellule biologique. Nous présentons, dans ce paragraphe, un modèle électrique de cellule biologique. Ce modèle a été utilisé par Fear et Stuchly [26], [27] ou plus récemment par Sebastián, Muñoz *et al.* [50], [64] pour étudier numériquement l'influence du champ électrique sur une cellule biologique.

Tout d'abord nous décrivons la structure moléculaire de la membrane plasmique qui lui permet de jouer à la fois un rôle d'isolant et de filtre entre l'intérieur de la cellule et le milieu extérieur. En revanche, suivant les travaux de Fear et Stuchly [26] et [27], nous ne présentons pas les différents éléments (cytosol, organelles, appareil de Golgi, noyau et autres constituants biologiques) composant le cytoplasme ; pour simplifier, nous le considérons comme un matériau électriquement homogène. Enfin, nous présentons le modèle électrique de la cellule biologique que nous utilisons dans cette thèse.

**2.1. La membrane cellulaire.** La membrane plasmique cellulaire joue un rôle primordial dans la vie de la cellule [5]. Elle entoure le cytosol et les organites qui y baignent, définit la frontière de la cellule et la protège de l'environnement extracellulaire. Elle forme un film protecteur très fin (Fig. 1) constitué de molécules lipidiques et protéinaires.

Les molécules lipidiques (phospholipides) sont arrangées en une double couche épaisse d'environ 5 nanomètres (nm). Cette bicouche lipidique fournit la structure fluide de base de la membrane et forme une barrière imperméable à la plupart des molécules solubles dans l'eau. Elle est parsemée de molécules protéinaires (Fig. 2) qui permettent notamment, la catalyse de réaction telles que la synthèse d'ATP, ou le transport de molécules à travers la membrane. Ces protéines jouent ainsi le rôle de lien structurel entre le cytosquelette et la matrice extracellulaire ou une cellule adjacente.

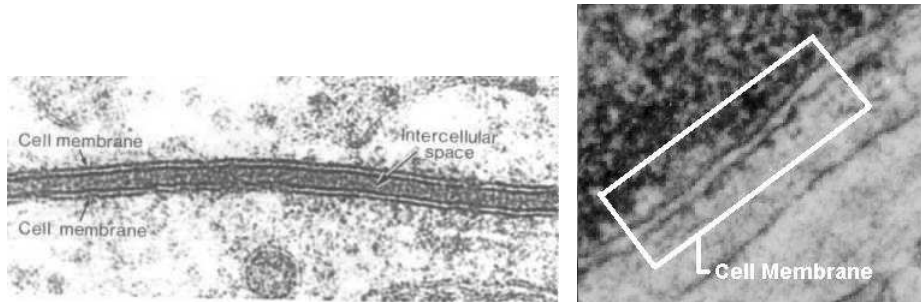


FIG. 1. Vues au microscope de membranes plasmiques [5].

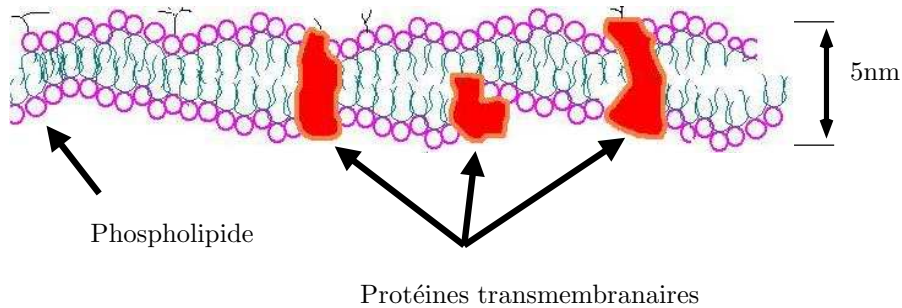


FIG. 2. Schéma bidimensionnel d'une membrane plasmique [5].

La membrane plasmique présente donc une structure moléculaire inhomogène qui lui permet de jouer un double rôle. Les phospholipides, qui constituent la matière de base de la membrane, en font un corps imperméable et isolant, protégeant ainsi la cellule des agressions extérieures, tandis que les molécules protéinaires éparses permettent, dans certaines circonstances, des échanges entre le cytoplasme et le milieu environnant (matrice cellulaire, ou autre cellule par exemple).

**2.2. Le modèle électrique de la cellule biologique.** Pour étudier l'influence des champs électromagnétiques sur les cellules biologiques, il est nécessaire de construire un modèle électrique de ces cellules. A l'aide de mesures d'impédance macroscopiques effectuées sur des organes (les travaux de Gabriel *et al.* [30], [31] et [32] font actuellement référence), Fear, Foster, Schwan et Stuchly (voir [26], [27], [29] et [68] par exemple) ont extrapolé un modèle électrique simplifié de la cellule. Dans ce modèle, cette dernière est considérée comme un matériau électriquement hétérogène composé d'un cytoplasme homogène dont la taille varie de 1 à quelques micromètres ( $\mu\text{m}$ ) suivant les cellules, entouré d'une fine membrane elle aussi homogène dont la taille est de l'ordre du nanomètre. Le cytoplasme présente une conductivité de 1 Siemens par mètre (S/m) alors que la conductivité de la membrane varie de  $10^{-7}\text{S/m}$  à  $10^{-5}\text{S/m}$ , suivant le type de cellule. Les permittivités relatives sont respectivement égales à 80 dans le cytoplasme et à 11.3 dans la membrane. La perméabilité dans toute la cellule est égale à celle du vide.

Nous donnons à la figure 3 les paramètres électriques de ce modèle. Nous rappelons les valeurs des perméabilité et permittivité du vide en unités S.I.

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}.$$

Ainsi, suivant la pulsation à laquelle est étudié le champ électrique, le rapport des permittivités complexes varie énormément. Pour des pulsations inférieures à  $10^6$ rad/s, nous avons

$$\left| \frac{\varepsilon_m - i\sigma_m/\omega}{\varepsilon_c - i\sigma_c/\omega} \right| \sim 10^{-5}$$

tandis que pour des pulsations dépassant  $10^9$ rad/s,

$$\left| \frac{\varepsilon_m - i\sigma_m/\omega}{\varepsilon_c - i\sigma_c/\omega} \right| \sim 10^{-1}$$

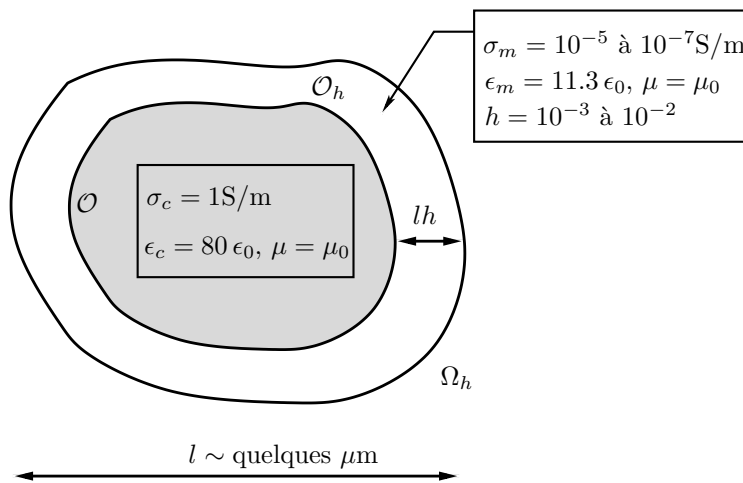


FIG. 3. Paramètres de la cellule biologique.

La cellule ainsi modélisée présente donc un double comportement. Lorsque la pulsation est inférieure à  $10^8$ rad/s c'est un matériau fortement hétérogène à couche mince, composé d'un milieu intérieur conducteur, le cytoplasme, entouré d'une fine membrane isolante, la membrane plasmique. Lorsque la fréquence est supérieure à  $10^8$ Hz, c'est un matériau diélectrique faiblement hétérogène car le rapport des permittivités est grand devant l'épaisseur de la membrane ( $|z_m/z_c| \sim 0.1$  tandis que  $h \sim 10^{-3}$ ).

Dans notre modèle, les échanges intercellulaires ou les échanges cellule-milieu extracellulaire ne sont pas pris en compte. Ce modèle est valable pour une gamme de fréquence allant du hertz à quelques gigahertz [64]. Des recherches sont actuellement menées à Ampère<sup>2</sup> pour modéliser les phénomènes d'électroperméabilisation [65], [69], [72]. Cependant dans toute cette thèse, suivant les travaux de Sebastián *et al.* [50], [64], nous considérons la membrane comme un milieu homogène dont les

<sup>2</sup>Ampère est l'ex laboratoire CEGELY, le Centre de Genie Electrique de LYon.



paramètres sont ceux donnés à la figure 3, et nous ne tenons pas compte des échanges entre le cytoplasme et la membrane.

### 3. Problématique

De nombreuses études utilisant le modèle présenté à la figure 3 ont été menées pour étudier le champ électrique dans une cellule biologique. Par exemple, dans [26] daté de 1998, Fear et Stuchly ont étudié le potentiel transmembranaire (TMP pour TransMembranar Potential) afin de modéliser l'influence du champ sur les cellules.

Plus récemment, en 2001, Sebastián *et al.* ont montré, par des calculs par éléments finis, l'influence de la géométrie sur la distribution du champ dans une cellule. Ils ont ainsi mis en évidence l'importance d'utiliser des modèles géométriquement réalistes de cellules biologiques [64]. En 2004, les mêmes auteurs ont étudié le TMP sur des cellules ayant des géométries distinctes [50].

Enfin, Pucihar *et al.* ont donné dans [61] une modélisation de la membrane permettant de calculer le champ électrostatique dans une cellule sans avoir à mailler la fine membrane. Se basant sur des résultats d'imagerie et des considérations physiques, ils déduisent que la densité totale de courant  $J$  dans la membrane est égale à sa composante normale. Ceci revient à remplacer  $\omega$  par 0 dans l'équation (1.10) et à imposer la continuité du potentiel électrostatique  $V$  et de  $\sigma\partial_n V$  à travers la membrane. En notant  $\kappa_m$  la conductivité spécifique de surface de la membrane égale au quotient de la conductivité par l'épaisseur de la membrane, ils obtiennent le potentiel transmembranaire via la formule

$$V_{memb} - V_{cyto} = J/\kappa_m.$$

L'inconvénient principal de ces études par éléments finis vient des erreurs numériques et de la difficulté à quantifier de manière précise et *a priori* ces erreurs. En effet, les résultats sont sujets à des erreurs numériques dues d'une part aux forts contrastes entre les paramètres diélectriques de la membrane et du cytoplasme, et d'autre part à la finesse de la membrane, difficile à mailler. Pour pallier ces difficultés numériques, différentes approximations sont utilisées. Une première simplification est d'utiliser des géométries simples (sphériques, ovales etc.) qui présentent l'inconvénient d'être rarement réalistes d'un point de vue biologique. Une seconde simplification est de négliger certains phénomènes électromagnétiques et d'implémenter des formulations plus simples ; par exemple, à basse fréquence, la formulation diélectrique.

Ces approximations suscitent quelques interrogations. Une première question porte sur la formulation utilisée. En effet, la cellule biologique présente des paramètres diélectriques peu courants dans le domaine électrotechnique : jusqu'à quelle fréquence est-il pertinent d'utiliser l'approximation quasistatique ? De plus, dans le cas où des solutions analytiques ne sont pas connues, comment quantifier l'erreur numérique commise ? Le champ calculé numériquement est-il raisonnablement proche du champ réel ? Comment estimer *a priori* l'erreur lorsque des cellules de géométries complexes sont étudiées ?

Le but de cette thèse est de présenter des méthodes asymptotiques mathématiquement justifiées qui permettent de répondre à ces précédentes questions et qui ont l'avantage d'avoir un large spectre d'applications, car ce sont des méthodes génériques. Tous les résultats de cette thèse portent sur la dimension 2 d'espace,

mais nous pensons que les mêmes techniques mathématiques sont applicables aux dimensions supérieures.

#### 4. Etat de l'art et démarche suivie

La littérature mathématique est riche d'articles traitant de problèmes asymptotiques en diffraction électromagnétique dans des matériaux à couche mince. Ammari, Berreta, Kang, Santosa et Vogelius présentent une bibliographie impressionnante sur le sujet.

Généralement, ils considèrent un milieu homogène dans lequel est incluse une fine membrane de paramètres électromagnétiques différents du milieu (voir entre autres [6], [7], [10], [13], [14] ou [15]); puis ils comparent le champ réel (ou le potentiel électrostatique, suivant le problème étudié) au champ du milieu homogène sans inclusion, qu'ils appellent "*background electric field*" ou "*background voltage potential*". Ils estiment la différence de ces deux champs sur le bord du domaine en utilisant le tenseur de polarisation défini dans [8].

Cependant, avec cette approche, le champ dans l'inhomogénéité ainsi qu'à l'intérieur du domaine n'est pas connu, ni même estimé. De plus, les constantes intervenant dans les estimations dépendent des paramètres du milieu et de l'inhomogénéité, or dans le cas des cellules biologiques la membrane est très isolante par rapport au cytoplasme. Ainsi, lorsque le terme  $\sigma/\omega$  est plus grand que la permittivité  $\varepsilon$ , les résultats des précédents auteurs ne nous donnent aucun contrôle sur les constantes intervenant dans les estimations.

En outre, lorsque la cellule est plongée dans un milieu ambiant (le milieu extracellulaire par exemple, ou une solution pour préparation microscopique), il semble peu probable que ce milieu présente les mêmes caractéristiques électromagnétiques que le cytoplasme, ce qui nous amène à considérer trois domaines au lieu de deux.

Enfin, ces résultats ne nous sont d'aucun secours lorsque la condition aux limites est imposée sur le bord extérieur de la couche mince. Ce dernier cas est peu réaliste dans le cas d'une cellule biologique (vu la petitesse de la cellule, imposer un potentiel ou un champ sur le bord de la membrane semble très difficile à réaliser) mais il est utile par exemple lorsque l'on veut connaître le champ à l'intérieur d'un matériau recouvert d'un film très fin (pièce de métal recouverte d'une couche de peinture par exemple).

Pour ces précédentes raisons, nous avons adopté une approche mathématique différente de celle développée dans [6], [7], [10], [13], [14] ou [15]. A l'aide d'un changement en coordonnées locales, nous faisons apparaître l'épaisseur  $h$  dans l'expression de l'opérateur considéré (par exemple le Laplacien), les coordonnées locales étant dans un domaine indépendant de  $h$ . Nous obtenons aussi de nouvelles conditions de transmission, dans lesquelles  $h$  intervient. En supposant que le champ  $u$  s'écrit sous la forme  $u_0 + hu_1 + \dots$ , nous identifions les termes de puissances identiques en  $h$ . Ce raisonnement nous permet d'obtenir des expressions explicites des premiers termes du développement asymptotique du champ  $u$  dans la membrane. En ce qui concerne le champ en dehors de la fine couche, nous obtenons des conditions de transmission (ou des conditions aux limites suivant le cas) asymptotiques de part et d'autre de la membrane : nous évitons ainsi de mailler la membrane en la remplaçant par une condition appropriée. Dans la couche mince, nous avons

explicitement le champ approché et nous donnons l'erreur commise par rapport au champ réel.

Cette méthode asymptotique n'est plus applicable pour les hautes fréquences ( $\omega$  tend vers  $+\infty$ ) car alors il faudrait lier l'épaisseur  $h$  à  $1/\omega$ , ce qui n'a pas de sens. L'outil mathématique adéquat pour ce cas est le calcul pseudodifférentiel. Le but est de remplacer la membrane par une condition d'impédance généralisée haute fréquence, c'est-à-dire une condition qui lie le champ électrique et le champ magnétique. Le lecteur se référera à Trèves [71] ou Hörmander [70] et [41] pour une approche générale des opérateurs pseudodifférentiels et à Antoine, Barucq, Halpern, Lafitte, Rauch par exemple, [11], [37], [36], [43] et [44] pour une application du calcul pseudodifférentiel dans le but d'obtenir une condition d'impédance généralisée.

Olivier Lafitte [43], [44] donne une condition d'impédance pseudodifférentielle haute fréquence pour un conducteur parfait entouré d'une fine membrane fortement conductrice : il suppose que la conductivité de la membrane est de la forme

$$\sigma = a\omega,$$

où  $a$  est une constante strictement positive. Il donne la condition d'impédance généralisée sous forme d'un opérateur  $\omega$ -pseudodifférentiel dont il donne le symbole principal.

Nous plaçons dans le cas de la dimension 2. Nous supposons que le milieu intérieur n'est pas un conducteur parfait et que la conductivité de la membrane est de la forme

$$\sigma = a\omega^{1-\gamma},$$

avec  $\gamma \in [0, 1]$ . Ainsi, lorsque  $\gamma$  vaut 0, nous sommes dans le cas de Lafitte [43], et lorsque  $\gamma$  vaut 1, nous sommes dans le cas d'un matériau électrique usuel. L'introduction de ce type de conductivité fait apparaître des ondes évanescentes, ce qui se traduit par un calcul symbolique plus complexe.

Comme nous travaillons en dimension 2 d'espace, le bord des ouverts bornés considérés sont difféomorphes au cercle, et les fonctions dépendant de la coordonnée curviligne sont périodiques. C'est pourquoi nous utilisons le calcul pseudodifférentiel sur le tore introduit par Agranovič [4] et développé, entre autres, par Melo, Saranen, Turunen et Vainikko [49], [63], [74], [73].

## 5. Plan et principaux résultats

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier chapitre traite des basses fréquences et donne des résultats sur la formulation diélectrique. Dans le deuxième chapitre, nous donnons les asymptotiques du champ électrique en mode transverse magnétique (TM) dans une cellule plongée dans un domaine ambiant. Enfin, le troisième chapitre traite des méthodes asymptotiques pour les hautes fréquences.

Résumons et expliquons les principaux résultats de cette thèse.

NOTATION. Dans toute la suite de ce travail de thèse, la lettre  $\mu$  désignera la perméabilité relative,  $q$ , la permittivité complexe adimensionnée :

$$q = \omega^2 l^2 \mu_0 (\varepsilon_r \varepsilon_0 - i\sigma/\omega),$$

et  $z$  représentera le produit  $\mu q$ . Notons que  $z$  peut être écrit à l'aide de la longueur d'onde  $\lambda$  et de l'épaisseur de peau  $\delta$ . Rappelons les définitions de  $\lambda$  et  $\delta$  :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}};$$

nous obtenons alors :

$$z = 4\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} - 2i \frac{l^2}{\delta^2}.$$

Nous utiliserons les indices  $e$ ,  $c$  et  $m$  pour désigner les valeurs des quantités précédentes prises respectivement dans le milieu extérieur, le cytoplasme et la membrane.

**5.1. Le champ électrique à basse fréquence.** Dans une première partie, nous supposons que la cellule est circulaire. Nous présentons tout d'abord une "adimensionnalisation" de l'équation vectorielle des ondes, ce qui nous permettra dans toute la suite de ce travail de ne considérer que des nombres sans dimension. Une fois cette adimensionnalisation faite, nous étudions le champ électrique. Dans ce premier chapitre, la condition aux limites de Neumann est imposée sur le bord extérieur de la membrane.

5.1.a. La formulation diélectrique.

Nous considérons le potentiel électrique  $V$ , solution de la formulation diélectrique avec une condition de Neumann inhomogène imposée aux limites de la cellule.

Plus précisément, soit  $\mathcal{O}$  le disque unité, et soit  $\mathcal{O}_h$ , la couronne d'épaisseur  $h$  qui entoure  $\mathcal{O}$ . Nous notons

$$\Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h.$$

Soit  $h$  dans  $(0, 1)$  et soient  $q_c$  et  $q_m$  deux complexes. La fonction  $q_h$  est défini comme suit :

$$q_h = \begin{cases} q_m, & \text{dans } \mathcal{O}_h \\ q_c, & \text{dans } \mathcal{O}. \end{cases}$$

Soit  $\phi$  dans  $H^{-1/2}(\mathbb{T})$  vérifiant la condition de compatibilité :

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(\theta) d\theta = 0.$$

Nous notons  $V$  la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(q_h \operatorname{grad} V) = 0, & \text{dans } \Omega_h, \text{ au sens faible,} \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \phi/(1+h) & \text{sur } \partial\Omega_h, \end{cases}$$

avec la condition de jauge suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V d\sigma = 0.$$

**REMARQUE 5.1** (Remarque I.1.1). *La division de  $\phi$  par  $1+h$  nous permet d'obtenir une symétrie dans les formules des coefficients de Fourier de  $V$ . Dans un souci de clarté et afin que nos résultats soient plus lisibles, nous avons donc choisi cette convention. Le lecteur désirant travailler avec  $\phi$  plutôt que  $\phi/(1+h)$  déduira directement les formules adéquates de celles que nous présentons ici.*

- *Solution exacte dans toute la cellule.*

La proposition suivante nous donne l'expression exacte du potentiel électrostatique  $V$  dans une cellule biologique.

PROPOSITION (Proposition I.1.3 p. 39). *Si  $q_m/q_c \notin ]-\infty, -1]$ , alors  $V$  est dans  $H^1(\Omega_h)$ . De plus,  $V$  est donné explicitement par son développement en série de Fourier :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \text{ i.e dans le cytoplasme :} \\ V(r, \theta) = \frac{2q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|}} D_k \exp(ik\theta); \\ \forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T}, \text{ i.e dans la membrane :} \\ V(r, \theta) = (1 + q_m/q_c) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|}} \exp(ik\theta) \right) \\ \quad - (1 - q_m/q_c) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \exp(ik\theta) \right). \end{array} \right.$$

Les coefficients  $D_k$  sont donnés pour  $k \in \mathbb{Z}^*$  par

$$D_k = 1 + (1+h)^{-2|k|} + \frac{q_m}{q_c} \left( 1 - (1+h)^{-2|k|} \right),$$

et nous rappelons la définition des coefficients de Fourier de  $\phi$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \widehat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

REMARQUE (Remarque I.1.5 p. 40). *Lorsque le rapport  $q_m/q_c$  appartient à  $] -\infty, -1]$ , nous montrons que le problème satisfait par  $V$  est mal posé.*

Récrivons le potentiel  $V$  dans la membrane sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T}, \\ V(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} D_k \exp(ik\theta) \right) \\ + \frac{q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \exp(ik\theta) \right). \end{aligned}$$

En remarquant que le terme  $(r^{|k|} - r^{-|k|})/(1+h)^{|k|}$  est de l'ordre de  $O(h)$  alors que  $(r^{|k|} + r^{-|k|})/(1+h)^{|k|}$  est en  $O(1)$ , il est aisé de voir que dans le cytoplasme, le potentiel  $V$  est de l'ordre de  $|q_m/q_c|$  alors que dans la membrane, il est de l'ordre de  $h + |q_m/q_c|$ . Ainsi, pour des valeurs de  $|q_m/q_c|$  petite devant  $h$ , le potentiel se concentre sur la membrane. Nous retrouvons ainsi les observations de Sebastião *et al.* [64] et de Pucihar [61].

De cette expression analytique, nous allons extraire les deux premiers termes du développement asymptotique du champ statique  $\text{grad}(V)$  par rapport à  $h$ . Dans la membrane, nous obtenons une expression explicite de  $\text{grad}(V)$  en fonction de la donnée de Neumann  $\phi$  et dans le cytoplasme, le potentiel électrostatique approché est la solution d'une formulation diélectrique avec une condition aux limites particulière, exprimée en fonction de  $\phi$  et des paramètres diélectriques de la membrane.

- *Asymptotiques dans la membrane.*

Rappelons la définition de la transformée de Hilbert sur les fonctions  $2\pi$ -périodiques :

$$\mathcal{H}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k) \widehat{f}_k \exp(ik\theta).$$

La proposition suivante nous permet d'obtenir les deux premiers termes des asymptotiques du champ statique dans la membrane.

PROPOSITION (Proposition I.1.6 p. 44). *Soit  $\phi \in H^3(\mathbb{T})$  vérifiant la condition de compatibilité*

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(\theta) \, d\theta = 0.$$

*Définissons sur  $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$  les deux fonctions suivantes, notées  $\mathcal{L}_1(\phi)$  et  $\mathcal{L}_2(\phi)$  :*

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$\mathcal{L}_1(\phi)(r, \cdot) = \phi - i \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right),$$

$$\mathcal{L}_2(\phi)(r, \cdot) = \frac{q_m}{q_c} i \mathcal{H}(\phi) + \left( r-1-h \frac{q_m^2}{q_c^2} \right) \frac{d\phi}{d\theta}.$$

*Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $r \in [1, 1+h]$ ,*

$$\begin{aligned} \left| r \partial_r V(r, \cdot) - \mathcal{L}_1(\phi)(r, \cdot) \right| &\leq Ch^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}, \\ \left| \partial_\theta V(r, \cdot) - \mathcal{L}_2(\phi)(r, \cdot) \right| &\leq Ch^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Notons  $E^{app.stat.}$  le champ statique approché à  $O(h^2)$ . La proposition précédente nous donne l'expression explicite des composantes normale  $E_r^{app.stat.}$  et tangentielle  $E_\theta^{app.stat.}$  en fonction de  $q_c$ ,  $q_m$  et de la donnée aux bords :

$$(5.11) \quad \begin{cases} E_r^{app.stat.} = \frac{1}{r} \left( \phi - i \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right) \right), \\ E_\theta^{app.stat.} = \frac{1}{r} \left( \frac{q_m}{q_c} i \mathcal{H}(\phi) + \left( r-1-h \frac{q_m^2}{q_c^2} \right) \frac{d\phi}{d\theta} \right). \end{cases}$$

REMARQUE. *Lorsque  $|q_m/q_c|$  et  $h$  sont petits devant 1, seule la composante normale du champ  $\partial_r V$  est non négligeable dans la membrane à l'ordre  $h + |q_m/q_c|$ . De plus, elle est constante en  $r$ , à une erreur en  $h + |q_m/q_c|$  près.*

*Dans leur modélisation, Pucihar et al. [61] intuent que la densité de courant dans la membrane est égale à sa composante normale  $J$  :*

$$J = \frac{\sigma_m}{d} (V_0 - V_i),$$

*où  $V_0$  et  $V_i$  sont les valeurs du potentiel prises de part et d'autre de la membrane,  $\sigma_m$  est la conductivité de la membrane et  $d$  est son épaisseur. Comme  $d$  tend vers 0, le terme  $(V_0 - V_i)/d$  peut être vu comme une dérivée normale. Ainsi, nos asymptotiques à l'ordre 0 corroborent l'intuition de Pucihar et al.*

Cette proposition nous donne une expression explicite en fonction de la donnée aux bords du champ électrique statique approché à  $O(h^2)$  près. Par exemple, si la donnée aux bords est de la forme

$$\phi(\theta) = a \cos(m\theta) + b \sin(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{T},$$

pour  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $m, n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\mathcal{H}(\phi) = a \sin(m\theta) - b \cos(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{T}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\mathcal{H}\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right) = am \cos(m\theta) + bn \sin(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{T}.$$

Nous avons explicitement le champ statique approché à  $O(h^2)$  près dans la membrane  $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$  via l'égalité (5.11).

- *Asymptotiques dans le cytoplasme.*

Le théorème suivant donne la condition aux bords du cytoplasme satisfaite par le potentiel électrostatique  $V_{app}$  approché à  $O(h^2)$ . Cette condition permet de remplacer la membrane par une condition aux limites du cytoplasme : la membrane n'a plus besoin d'être maillée.

PROPOSITION (Proposition I.1.7 p. 46). *Notons  $V^c$  la restriction de  $V$  au cylindre  $\mathcal{C} = [0, 1] \times \mathbb{T}$ .*

*Soit  $V_{app}^c$  la solution du problème<sup>3</sup> suivant :*

$$\begin{cases} \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} V_{app}^c \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V_{app}^c = 0, \text{ au sens faible,} \\ \left. \frac{\partial V_{app}^c}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + i \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right) \right). \end{cases}$$

avec la condition de jauge

$$\int_0^{2\pi} V_{app}^c(1, \theta) d\theta = 0.$$

Alors, il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\|V^c - V_{app}^c\|_{H^1(\mathcal{C})} \leq c \frac{|q_m|}{|q_c|} h^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}.$$

Ainsi, dans le cas d'une cellule circulaire, étant donnée la condition aux bords  $\phi$ , il suffit de calculer  $\mathcal{H}(d\phi/d\theta)$  pour obtenir la condition aux bords du cytoplasme :

$$(5.12) \quad \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + \frac{q_m}{q_c} h \mathcal{H} \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right) \right),$$

satisfaite par le potentiel électrostatique  $V_{app}^c$  approché à l'ordre 2. Nous n'avons plus à mailler la membrane, son effet est contenu dans la donnée aux bords (5.12). L'erreur est en  $O(h^2)$ , où la constante du  $O$  est connue explicitement en fonction des paramètres diélectriques du milieu.

---

<sup>3</sup>Observons que le potentiel  $V_{app}^c$  satisfait à l'équation de Laplace écrite en coordonnées polaires.

Dans la proposition I.1.8, à l'aide du théorème de l'application conforme de Riemann, nous étendons ces résultats à des domaines simplement connexes assez réguliers. Cependant, du point de vue de l'implémentation numérique, ces derniers résultats sont difficilement applicables à des géométries complexes car ils nécessitent la connaissance explicite de l'application conforme qui envoie le cytoplasme sur le disque unité.

5.1.b. *L'équation vectorielle des ondes.*

Considérons maintenant le champ électrique  $E$  solution de l'équation vectorielle des ondes. Nous énonçons tout d'abord un résultat de régularité simple.

THÉORÈME (Théorème I.1.11 p. 49). *Soient  $q_c$  et  $q_m$  deux complexes non réels de la forme  $a - ib$ ,  $a > 0$  et  $b > 0$ . D'un point de vue physique,  $a$  correspond à la permittivité "adimensionnée"  $\omega^2 l^2 \mu_0 \varepsilon$  et  $b$  correspond à la conductivité "adimensionnée"  $\omega l^2 \mu_0 \sigma$ . Soient  $\mu_c$  et  $\mu_m$  deux nombres strictement positifs, qui correspondent aux perméabilités relatives des milieux. Soit  $f$  dans  $H^{3/2}(\partial\Omega_h)$ .*

*Alors, il existe une unique solution  $E$  satisfaisant au problème suivant*

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_h} \operatorname{rot} E \right) - q_h E = 0 \text{ dans } \Omega_h, \\ \operatorname{rot} E \times n|_{\partial\Omega_h} = f. \end{cases}$$

*Cette solution a la régularité suivante :*

$$E \in (H^1(\Omega_h))^2.$$

REMARQUE. *Le résultat précédent est valable quelquesoit le domaine  $\Omega_h$ , pourvu qu'il soit assez régulier.*

A l'aide de la transformation en série de Fourier, nous obtenons les expressions explicites des coefficients de Fourier de  $E$ , en fonction des fonctions de Bessel de première et seconde espèces. Le théorème précédent nous assure à la fois que chaque coefficient de Fourier est uniquement déterminé et que la série de Fourier de  $E$  converge bien vers  $E$ . Cependant, les formules exactes obtenues, de par leur complexité, sont difficilement exploitables telles quelles. Aussi allons-nous en déduire les asymptotiques du champ  $E$  dans le cytoplasme et dans la membrane.

- *Asymptotiques dans le cytoplasme.*

Le théorème suivant est l'analogue de la proposition I.1.7 p. 46. Il nous donne la condition à imposer aux limites du cytoplasme pour avoir une approximation en  $O(h^2)$  du champ électrique sans avoir à mailler la membrane.

THÉORÈME (Théorème I.1.12 p. 57). *Soit  $f$  dans  $H^3(\mathbb{T})$ . Supposons qu'il existe  $C_0$  strictement positive telle que*

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\mu_m}{\mu_c} \leq C_0.$$

*Soit  $E^{app}$  la solution dans le cylindre  $\mathcal{C} = [0, 1] \times \mathbb{T}$ , du problème suivant :*

$$(5.13) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E^{app} + z_c E^{app} = 0, \\ \operatorname{rot} E^{app} \times n = \frac{\mu_c}{\mu_m} \left( f + i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left( \frac{df}{d\theta} \right) \right). \end{cases}$$



Nous avons alors l'estimation suivante :

$$|z_c| \times \|E - E^{app}\|_{(L^2(C))^2} = O\left(\left(|z_m|h + h^2 \left(1 + \frac{|z_m|}{|z_c|}\right)\right) \left|f - \widehat{f}_0\right|_{H^3(\mathbb{T})} + (|z_c|^2 + |z_c|h^2) \left|\widehat{f}_0\right|\right),$$

lorsque  $z_m$ ,  $z_c$  et  $h$  tendent vers zero.

REMARQUE (Remarque I.1.13 p. 58). Observons que lorsque  $\mu_c = \mu_m = 1$ , la condition aux limites imposée à  $E^{app}$  est exactement la même que celle imposée à  $(q_c/q_m)\partial_n V^{app}$  (voir proposition I.1.7 p. 46).

Ce théorème nous permet, lorsque les coefficients

$$\left(|z_m|h + h^2 \left(1 + \frac{|z_m|}{|z_c|}\right)\right),$$

et  $|z_c|^2 + |z_c|h^2$  sont petits devant 1, de remplacer la membrane par la condition aux limites (5.13). Nous obtenons alors le champ dans le cytoplasme avec une erreur estimée par les constantes précédentes.

- *Asymptotiques dans la membrane.*

Dans la membrane, l'expression explicite du champ approché est donnée à la proposition suivante en fonction de la donnée aux bords et des paramètres  $z_c$  et  $z_m$ .

PROPOSITION (Proposition I.1.14 p. 59). Soit  $f$  dans  $H^3(\mathbb{T})$ . Soit  $E$  la solution de l'équation vectorielle des ondes avec  $f$  comme donnée de Neumann aux bords de la cellule.

Alors, nous obtenons les asymptotiques suivantes pour  $z_m$ ,  $z_c$  et  $h$  tendant vers zero :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{1}{z_m} \left( \frac{df}{d\theta} + i \frac{z_m}{z_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) \right. \\ \quad \left. + O\left(\left(|z_m|h + h^2 \left(1 + \frac{|z_m|}{|z_c|}\right)\right) |f|_{H^3(\mathbb{T})}\right) \right), \\ E_\theta = \frac{1}{z_m} \left( i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left( \frac{df}{d\theta} \right) + \left( (r-1) - \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h \right) \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right. \\ \quad \left. + O\left(\left(|z_m|h + h^2 \left(1 + \frac{|z_m|}{|z_c|}\right)\right) |f|_{H^3(\mathbb{T})}\right) \right). \end{array} \right.$$

REMARQUE (Remarque I.1.15 p. 60). Supposons  $\mu_m = \mu_c = 1$  et posons

$$\phi = \frac{df}{d\theta},$$

dans la proposition I.1.6. Nous obtenons alors l'estimation suivante entre le champ total et le champ statique dans la membrane

$$\forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T},$$

$$(z_m E - \text{grad } V)(r, \theta) = O\left(\left(|z_m|h + h^2 \left(1 + \frac{|z_m|}{|z_c|}\right)\right) |f|_{H^3(\mathbb{T})}\right).$$

Ainsi, lorsque la constante du  $O$  est petite devant 1, il suffit de calculer  $\text{grad } V$  pour obtenir une approximation de  $z_m E$  dans la membrane.

- *Comparaison champ statique/champ total dans le cytoplasme.*

Maintenant, nous comparons les champs statique et total dans le cytoplasme.

THÉORÈME (Théorème I.1.16 p. 61). *Soit  $f$  dans  $H^3(\mathbb{T})$ . Soit  $\phi$  définie par*

$$\phi = \frac{df}{d\theta}.$$

Le potentiel  $V_{app}$  est donnée à la proposition I.1.7.

Alors, nous obtenons l'estimation suivante dans le cytoplasme, lorsque  $z_m, z_c$  et  $h$  tendent vers zero :

$$\begin{aligned} \left\| z_c E - i \frac{z_c}{z_m} \text{grad}(V_{app}) \right\|_{(L^2(\mathcal{C}))^2} &= O \left( \left( \sqrt{|z_c|} \left( 1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h \right) + |z_m| h \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right) \right) \left| f - \widehat{f}_0 \right|_{H^3(\mathbb{T})} + |z_c| \left| \widehat{f}_0 \right| \cdot \right) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque les constantes

$$\sqrt{|z_c|} \left( 1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| h \right) + |z_m| h + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right)$$

et  $|z_c|$  sont très petites devant 1, le champ statique donne une bonne approximation du champ total dans le cytoplasme.

Ainsi, le théorème précédent et la remarque I.1.15 nous donnent des critères optimaux (car ce sont des asymptotiques de l'erreur) sur les paramètres  $z_c, z_m$  et  $h$  permettant de savoir *a priori* quelle formulation utiliser, avec une estimation de l'erreur.

Dans la section suivante, nous donnons un critère valable dans n'importe quel domaine borné simplement connexe. Cependant, ce critère n'est pas optimal car il est obtenu par des estimations d'énergie.

### 5.1.c. Comparaison champ statique/champ global.

Maintenant, le domaine  $\mathcal{O}$  n'est plus un disque mais un ouvert borné à bord régulier simplement connexe entouré d'une fine membrane d'épaisseur constante  $h$  notée  $\mathcal{O}_h$ . Nous notons

$$\Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h.$$

Nous étudions le champ électrique  $E$  solution de l'équation vectorielle des ondes avec une condition aux limites de Neumann notée  $f$ . Nous donnons la relation entre  $\phi$  et  $f$  pour que le potentiel électrostatique  $V$  soit la partie statique du champ  $E$  puis nous estimons la différence  $E - \text{grad}(V)$  en fonction des paramètres diélectriques de la cellule et de l'épaisseur  $h$ . Cette estimation justifie l'utilisation de la formulation diélectrique dans le cas des basses fréquences.

THÉORÈME (Théorème I.1.17 p. 62). *Soit  $h \in (0, 1)$  et soit  $f \in H^3(\partial\Omega_h)$ . Nous supposons qu'il existe une constante  $C_f > 0$  telle que*

$$(5.14) \quad \left\| \text{div} |_{\partial\Omega_h}(f) \right\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega_h)} \geq C_f \|f\|_{H^3(\partial\Omega_h)}.$$

Soient  $z_c$  et  $z_m$  deux nombres complexes non-réels de la forme  $a - ib$ ,  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que Notons  $C_0$  la constante suivante :

$$(5.15) \quad C_0 = \frac{\max\left(|\Re(z_c)|, |\Re(z_m)|\right)}{\min\left(|\Im(z_c)|, |\Im(z_m)|\right)}.$$

Nous posons

$$z_h = \begin{cases} z_c, & \text{in } \mathcal{O}, \\ z_m, & \text{in } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Soit  $E$  la solution de l'équation vectorielle des ondes

$$\text{rot rot } E - z_h E = 0, \text{ dans } \Omega_h,$$

avec la condition de Neumann

$$\text{rot } E \times n = f \text{ sur } \partial\Omega_h.$$

Soit  $V$  la solution de la formulation diélectrique

$$\begin{aligned} \text{div}(z_h \text{grad } V) &= 0, \text{ dans } \Omega_h, \\ \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_h} &= \text{div}|_{\partial\Omega_h}(f). \end{aligned}$$

Il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\mathcal{O}$  et de  $C_f$  telle que :

$$\begin{aligned} \|z_m E - \text{grad } V\|_{(L^2(\Omega_h))^2} &\leq C(1 + C_0) \left(1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h}\right) (|z_m| \\ &\quad + |z_c|) \|\text{grad } V\|_{L^2(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f$  est un polynôme trigonométrique non constant en fonction de la variable curviligne, l'inégalité (5.14) est satisfaite. Ainsi, il suffit que la constante

$$(1 + C_0) \left(1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h}\right) (|z_m| + |z_c|),$$

avec  $C_0$  définie en (5.15) soit petite devant 1 pour savoir que le formulation diélectrique donne une bonne approximation du champ.

Rappelons que  $z_m$  et  $z_c$  sont de la forme  $\omega^2 l^2 \mu(\varepsilon - i\sigma/\omega)$ , avec  $l$  une longueur caractéristique du domaine  $\mathcal{O}$  (son diamètre par exemple). Dans le cas de la cellule biologique, nous obtenons, pour  $\omega \leq 10^7$  l'estimation suivante :

$$(1 + C_0) \left(1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h}\right) (|z_m| + |z_c|) \leq 2 \times 10^{-5},$$

donc le champ statique est une bonne approximation du champ total.

Nous concluons la section I.1 par des simulations numériques. La section I.2 permet de calculer le potentiel électrostatique dans une cellule de géométrie quelconque.

5.1.d. Le potentiel électrostatique dans une cellule de forme quelconque.

A la section I.2, nous traitons du cas de la géométrie quelconque. Pour une donnée  $\phi$  assez régulière, nous notons  $V$  la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(q_h \operatorname{grad} V) = 0, \text{ dans } \Omega_h, \text{ au sens faible,} \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \phi \text{ sur } \partial\Omega_h, \end{cases}$$

avec la condition de jauge suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V \, d\sigma = 0.$$

- *Premiers termes du développement asymptotique de  $V$ .*

Nous notons  $f$  la fonction  $\phi$  “ramenée” au bord du cytoplasme. Plus précisément, soit  $I$  un voisinage ouvert de  $[0, 1]$  et notons  $\Phi(\eta, \theta)$  le difféomorphisme de  $I \times \mathbb{T}$  vers son image qui est un voisinage ouvert de la membrane, nous avons alors

$$f = \Phi|_{\eta=1} \circ \phi \circ \Phi|_{\eta=0}^{-1}.$$

La courbure de  $\partial\mathcal{O}$  est notée  $\kappa(\theta)$ . Nous posons :

$$\forall x \in \partial\mathcal{O}, \mathfrak{R}(x) = \kappa \circ \Phi^{-1}|_{\eta=0}.$$

Notons  $V_0$  et  $V_1$  les deux premiers termes du développement asymptotique de  $V$ . Les potentiels  $V_0^c$  et  $V_1^c$  sont définis comme suit.

$$\begin{cases} V_0^c \text{ satisfait à } \begin{cases} \Delta V_0^c = 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \partial_n V_0^c|_{\partial\mathcal{O}} = (q_m/q_c)f, \end{cases} \\ V_1^c \text{ satisfait à } \begin{cases} \Delta V_1^c = 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \partial_n V_1^c|_{\partial\mathcal{O}} = (q_m/q_c) (\partial_t^2 V_0^c + \mathfrak{R}f), \end{cases} \end{cases}$$

avec les conditions de jauge :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V_0^c \, d\sigma = 0, \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V_1^c \, d\sigma = 0.$$

Dans la membrane,  $V_0^m$  et  $V_1^m$  sont donnés explicitement dans les coordonnées locales  $(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$  par :

$$\begin{cases} \forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, & V_0^m(\eta, \theta) = V_0^c \circ \Phi_0(\theta), \\ \forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, & V_1^m(\eta, \theta) = \eta f + V_1^c \circ \Phi_0(\theta). \end{cases}$$

- *Estimation de l'erreur.*

Le théorème suivant donne une estimation de l'erreur commise par l'approximation asymptotique précédente. Nous prenons soin d'avoir une expression de la constante intervenant dans l'estimation explicite en fonction des paramètres diélectriques de la cellule.

**THÉORÈME** (Théorème I.2.1 p. 75). *Nous notons  $\kappa$  la courbure de  $\partial\mathcal{O}$  et nous définissons  $h_0 \in (0, 1)$  tel que*

$$h_0 < \frac{1}{\|\kappa\|_\infty}.$$

Soit  $h$  dans  $(0, h_0)$  et soit  $q_c$  et  $q_m$  deux nombres complexes non nuls tels que

$$\Re(q_c/q_m) > 0, \text{ où } \left( \Re(q_c/q_m) = 0, \text{ et } \Im(q_c/q_m) \neq 0 \right).$$

Soit  $\phi$  dans  $H^3(\partial\Omega_h)$ .

Soit  $W$  la fonction définie sur  $\Omega_h$  par :

$$W = \begin{cases} V - (V_0^c + hV_1^c), & \text{dans } \mathcal{O}, \\ V - (V_0^m \circ \Phi^{-1} + hV_1^m \circ \Phi^{-1}), & \text{dans } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Alors, il existe une constante  $C_{\mathcal{O}} > 0$  dépendant uniquement de  $\mathcal{O}$  telle que

$$\begin{aligned} \|W\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq C_{\mathcal{O}} \frac{1 + |q_m/q_c|}{\max(\Re(q_c/q_m), |\Im(q_c/q_m)|)} h^{3/2} \|f\|_{H^3(\partial\mathcal{O})}, \\ \|W\|_{H^1(\mathcal{O}_h)} &\leq C_{\mathcal{O}} (1 + |q_m/q_c|) h^{3/2} \|f\|_{H^3(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Les potentiels  $V_0^c$  et  $V_1^c$  sont solutions d'un problème de Laplace dans le cytoplasme avec des conditions aux limites spécifiques. La membrane n'a plus à être maillée : son effet est contenu dans les conditions aux limites du cytoplasme satisfaites par  $V_0^c$  et  $V_1^c$ .

Remarquons que ces potentiels se calculent successivement car la condition aux limites satisfait par  $V_1^c$  dépend de  $V_0^c$ . De plus, nous avons une expression explicite du potentiel approché dans la membrane, et les erreurs dans chaque domaine sont estimées.

Contrairement à l'utilisation de la transformation conforme, les résultats du théorème précédent sont facilement implémentables numériquement, et nous illustrons la théorie à l'aide d'un calcul par éléments finis à la section I.3 p. 83.

Nous concluons en donnant un résultat sur la dérivée tangentielle seconde d'un problème elliptique particulier, qui nous permet d'expliquer, à partir du théorème I.2.1 p. 75, la condition aux limites trouvées à la proposition I.1.7 p. 46.

LEMME (Lemme I.4.5 p. 92). Soit  $\sigma \geq 0$ . Soient  $g_1$  dans  $H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})$  et soit  $W$  la solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta W &= 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \partial_n W|_{\partial\mathcal{O}} &= g_1 - \int_{\partial\mathcal{O}} g_1(y) \, \text{dvol}_{\partial\mathcal{O}}(y). \end{aligned}$$

Alors  $\partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})$  et nous avons :

$$\partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}g_1 \in H^{3/2+\sigma}(\partial\mathcal{O}).$$

De plus il existe une constante  $C_{2,\mathcal{O}} > 0$  dépendant de  $\mathcal{O}$  uniquement telle que :

$$\|\partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}g_1\|_{H^{3/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{2,\mathcal{O}} \|g_1\|_{H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})}.$$

La dérivée tangentielle seconde de  $\partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}}$  est dans l'espace  $H^{-1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})$  et :

$$\partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}\partial_t g_1 \in H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O}).$$

De plus il existe une constante  $C_{2,\mathcal{O}} > 0$  dépendant de  $\mathcal{O}$  uniquement telle que :

$$\|\partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}\partial_t g_1\|_{H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{2,\mathcal{O}} \|g_1\|_{H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})}.$$

Du lemme précédent, nous déduisons que la partie principale (au sens de moins régulière) de la dérivée tangentielle seconde  $\partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}}$  de  $V_1$  le long de  $\mathcal{O}$  vaut :

$$\partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}} = i\mathcal{H}\partial_t\phi,$$

Ainsi, la condition de Neumann aux bords du cytoplasme à laquelle satisfait  $V_0 + hV_1$  est égale à :

$$\begin{aligned} \partial_n (V_0 + hV_1)|_{\partial\mathcal{O}} &= \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + \frac{q_m}{q_c} h \partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}} \right), \\ &= \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + ih \frac{q_m}{q_c} \mathcal{H} \partial_t \phi \right) + \text{termes plus réguliers.} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc la condition aux limites trouvées à la proposition I.1.7 p. 46 dans le cas de la géométrie circulaire .

**5.2. L'équation de Helmholtz.** Le deuxième chapitre traite des moyennes fréquences dans le mode transverse magnétique (TM) [12]. Nous considérons cette fois-ci une cellule plongée dans un domaine ambiant. Le terme moyenne fréquence signifie que le paramètre  $\omega^2 \mu l^2 (\varepsilon - i\sigma/\omega)$  est de l'ordre de 1 dans le cytoplasme et dans le milieu extérieur. Nous notons  $\mathcal{O}_c$  le cytoplasme,  $\mathcal{O}_h$  la fine membrane d'épaisseur  $h$  qui l'entoure et  $\mathcal{O}_e$  le milieu extérieur à la cellule. Nous posons

$$\Omega = \mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_h \cup \mathcal{O}_e.$$

Nous nous intéressons au champ électrique en mode TM solution de :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{grad}(u) \right) + qu = 0 \text{ dans } \Omega,$$

avec la condition aux limites<sup>4</sup>

$$\partial_n u|_{\partial\Omega} = \phi,$$

où

$$q = \begin{cases} q_e, & \text{dans } \mathcal{O}_{e,h}, \\ q_m, & \text{dans } \mathcal{O}_h, \\ q_c, & \text{dans } \mathcal{O}_c, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_e, & \text{dans } \mathcal{O}_{e,h}, \\ \mu_m & \text{dans } \mathcal{O}_h, \\ \mu_c, & \text{dans } \mathcal{O}_c. \end{cases}$$

Rappelons  $z = \mu q$ . Les constantes  $q_e$ ,  $q_m$  et  $q_c$  sont de la forme  $a - ib$ , avec  $a$  et  $b$  strictement positifs.

Contrairement au théorème I.2.1 du chapitre I où la condition aux limites était imposée sur le bord extérieur de la membrane, l'analyse asymptotique suivante nous donne des conditions de transmission entre le milieu ambiant qui entoure la cellule et le cytoplasme. Dans la membrane, le champ approché est connu explicitement.

Dans un premier temps, nous donnons les deux premiers termes du développement asymptotique du champ, avec une estimation dans laquelle la constante dépend implicitement des paramètres électromagnétiques.

- *Expression des deux premiers termes du développement asymptotique.*

Notons  $\Psi$  le difféomorphisme du tore  $\mathbb{T}$  sur  $\partial\mathcal{O}$ . La courbure du domaine fonction de la variable curviligne est notée  $\kappa$ . Nous posons :

$$\forall x \in \partial\mathcal{O}, \quad \mathfrak{R}(x) = \kappa \circ \Psi^{-1}.$$

---

<sup>4</sup>Les résultats suivants sont démontrés dans le cas d'une condition aux limites de Neumann imposée aux bords du milieu extérieur, mais la même démarche est applicable s'il est imposé une condition aux limites de Dirichlet.

- *Termes d'ordre 0.* Les champs électriques  $u_0^e$  et  $u_0^c$  sont solution du problème suivant dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \Delta u_0^e + z_e u_0^e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, & \text{dans } \mathcal{O}_c, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{aligned} u_0^c|_{\Gamma_0} &= u_0^e|_{\Gamma_0}, \\ \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0} &= \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0}, \end{aligned}$$

et la donnée de Neumann

$$\partial_n u_0^e|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Dans la membrane,  $u_0^m$  vaut

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_0^m = u_0^c \circ \Phi_0(\theta).$$

- *Termes d'ordre 1.* Les champs  $u_1^e$  et  $u_1^c$  vérifient :

$$\begin{cases} \Delta u_1^e + z_e u_1^e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, & \text{dans } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_1^e|_{\Gamma_0} &= \left( \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0} + (q_m - q_e) u_0^c|_{\Gamma_0}, \\ u_1^c|_{\Gamma_0} - u_1^e|_{\Gamma_0} &= \frac{\mu_e - \mu_m}{\mu_c} \{ \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

Dans la membrane

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_1^m = \eta \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c \circ \Phi_0 + u_1^e \circ \Phi_0.$$

**REMARQUE.** *Observons que le premier terme (d'ordre 0) impose la continuité du champ  $u$  ainsi que celle de  $(1/\mu)\partial_n u$ . Nous avons ainsi justifié le résultat de Pucihar et al. [61], basé sur des raisonnements physiques et des observations d'imagerie. De plus, nous améliorons ce résultat en donnant le terme d'ordre 1 de l'asymptotique. Enfin, notre méthode permet de construire le champ dans la fine membrane.*

- *Estimation de l'erreur.*

Le théorème suivant nous donne une estimation de l'erreur commise en calculant le champ par la méthode asymptotique précédente.

**THÉORÈME** (Théorème II.1.1 p. 115). *Soit*

$$0 < h_0 < \frac{1}{\|\kappa\|_\infty}.$$

*Soit  $h$  dans  $(0, h_0)$  et  $\phi$  dans  $H^s(\partial\Omega)$ ,  $s > 7/2$ . Nous notons  $(v^e, v^c)$  les fonctions définies dans  $\Omega$  par :*

$$\begin{aligned} v^e &= u_0^e + h u_1^e, & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ v^c &= u_0^c + h u_1^c, & \text{dans } \mathcal{O}_c. \end{aligned}$$

Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$\begin{cases} \|u - v^c\|_{H^1(\mathcal{O}_c)} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}, \\ \|u - v^e\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})} + \left\| \frac{1}{\mu_m} du - \frac{1}{\mu_e} dv^e \right\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}, \\ \|u - v^e\|_{H^1(\mathcal{O}_{e,h})} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que  $\mu$  est une constante égale, par exemple, à 1. Lorsque la membrane est très isolante, c'est-à-dire lorsque le paramètre  $z_m$  tend vers 0, nous remplaçons  $z_m$  par 0 dans les formules asymptotiques précédentes. Le théorème suivant nous donne une estimation de l'erreur.

THÉORÈME (Théorème II.1.13 p. 135). *Supposons que  $z_m$  est tel que*

$$|z_m| = o(h),$$

et qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$0 < -\frac{|z_m|}{\Im(z_m)} < c.$$

Les fonctions  $(u_0^e, u_0^c)$ ,  $u_0^m$ ,  $(u_1^e, u_1^c)$ , et  $u_1^m$  sont celles définies au théorème précédent en remplaçant  $z_m$  par 0.

Soit  $W$  la fonction définie dans  $\Omega$  par :

$$W = \begin{cases} u - (u_0^e + hu_1^e), & \text{dans } \mathcal{O}_{e,h}, \\ u - (u_0^c + hu_1^c), & \text{dans } \mathcal{O}_c, \\ u - (u_0^m \circ \Phi^{-1} + hu_1^m \circ \Phi^{-1}), & \text{dans } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|W\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( h^{3/2} + |z_m| \right) \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}.$$

Nous illustrons ces résultats à l'aide de calculs par éléments finis à la section II.2 p. 137.

**5.3. Les hautes fréquences.** Dans le dernier chapitre, nous présentons une analyse haute fréquence : nous supposons que la pulsation  $\omega$  tend vers l'infini. Afin d'être en conformité avec la plupart des articles traitant des hautes fréquences ([43], [44],[11] entre autres), nous changeons de modélisation. Nous supposons que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont de la forme :

$$\mathbf{E}(x, t) = E(x)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, t) = H(x)e^{-i\omega t}.$$

Dans cette modélisation, la permittivité complexe devient :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i\sigma/\omega,$$

où  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $\omega$  sont strictement positifs. Ce dernier chapitre comporte deux parties.



5.3.a. Condition d'impédance pseudodifférentielle.

Tout d'abord, nous considérons un domaine  $\Omega_\delta$  composé d'un domaine intérieur  $\mathcal{O}$  entouré d'une fine membrane d'épaisseur  $\delta$  et notée  $\mathcal{O}_\delta$ . Nous avons évité la notation  $h$ , car  $h$  désignera la 2-forme différentielle représentant le champ magnétique. L'analogie avec la cellule biologique est évidente, cependant ce cas n'est pas réaliste d'un point de vue biologique car il est connu (voir [69], [72], [65]) qu'au delà de plusieurs centaines de gigahertz, un phénomène d'ouverture de la membrane, appelé électroperméabilisation ou encore électroporation apparaît. Le modèle électrique de la cellule décrit à la figure 3 n'est plus valable.

Toutefois, il nous a semblé intéressant d'étudier des méthodes hautes fréquences dans des matériaux à couches minces, afin de nous familiariser aux outils mathématiques particuliers à ces méthodes. Ceci, nous l'espérons, nous permettra de savoir les appliquer, dans des travaux ultérieurs, à un modèle cellulaire plus complexe tenant compte de l'ouverture de la membrane.

Nous supposons que la conductivité de la membrane est de la forme

$$\sigma = a\omega^{1-\gamma}, \quad \text{avec } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Contrairement au cas d'une cellule biologique à basse fréquence, nous ne supposons pas le domaine  $\Omega_\delta$  fortement hétérogène.

L'objectif de cette première partie est d'obtenir une condition d'impédance généralisée équivalente à la membrane sous forme d'opérateurs pseudodifférentiels.

Dans un premier temps, nous faisons un calcul simple explicite dans le cas d'une cellule plate infinie. Puis nous passons à la géométrie quelconque bidimensionnelle. Du fait de la décroissance de la partie imaginaire de  $\tilde{\varepsilon}_m = \varepsilon_m + i\sigma_m/\omega^\gamma$ , deux cas sont à considérer suivant que la pulsation  $\omega$  s'approche d'une pulsation de résonance ou pas.

Lorsque nous omettons les ondes évanescentes, le  $\omega$ -calcul pseudodifférentiel s'effectue de manière similaire au cas  $\gamma = 0$ . Nous obtenons une condition d'impédance généralisée du type [43]. Nous construisons trois opérateurs pseudodifférentiels sur le tore,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{V}$  qui permettent d'obtenir les deux résultats suivants.

LEMME (Lemme III.1.4 p. 165). *Soit  $\mathbf{g} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ .*

*Alors il existe un unique  $v$  dans  $H^1(\mathcal{O})$  satisfaisant l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \operatorname{grad} v \right) + \omega^2 \mu_c v &= 0, \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v|_{\partial\mathcal{O}} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} &= \mathbf{g}, \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{aligned}$$

*De plus  $v$  satisfait aux inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} |v|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} &\leq \frac{C}{\omega} |\mathbf{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq \frac{C}{\omega^{(3-\gamma)/2}} |\mathbf{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq \frac{C}{\omega^{(1-\gamma)/2}} |\mathbf{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons l'estimation d'erreur suivante lorsque nous remplaçons la membrane par la condition d'impédance pseudodifférentielle aux bords du cytoplasme :

LEMME (Lemme III.1.5 p. 168). Soit  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega_\delta)$ . Nous notons  $\mathbf{g}$  la fonction  $\mathbf{g}$  “ramenée” aux bords du milieu intérieur par difféomorphisme :

$$\mathbf{g} = (g \circ \Phi_1) \circ \Phi_0^{-1}.$$

Soit  $v$  dans  $H^1(\mathcal{O})$  satisfaisant à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\varepsilon_c} \operatorname{grad} v \right) + \omega^2 \mu_c v &= 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\varepsilon_c} \partial_n v|_{\partial\mathcal{O}} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} &= \mathcal{V} \mathbf{g}, \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Soit  $H$  la solution de l'équation de Helmholtz dans toute la cellule :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} H \right) + \omega^2 \mu H &= 0, \text{ dans } \Omega_\delta = \overline{\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_\delta}, \\ H|_{\partial\Omega_\delta} &= g, \text{ sur } \partial\Omega_\delta. \end{aligned}$$

Nous avons alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|H - v\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} |\mathbf{g}|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|H - v\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} |\mathbf{g}|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Dans le cas des ondes évanescentes, l'analyse pseudodifférentielle est difficile à mener. Dans le cas d'un domaine circulaire, nous présentons les calculs explicites par transformation de Fourier qui nous permettent de construire une condition d'impédance généralisée aux bords du cytoplasme.

Le résultat obtenu généralise le travail d'Olivier Lafitte [43]–[44] effectué dans le cas d'un matériau fortement conducteur fin, c'est-à-dire  $\gamma = 0$ , entourant un conducteur parfait.

### 5.3.b. Diffraction d'une onde incidente par un petit objet.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous présentons un article<sup>5</sup> écrit en collaboration avec Michael Vogelius et Derek Hansen qui traite d'une onde à la pulsation  $\omega$  diffractée par une disque de rayon  $\varepsilon$  lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ ,  $\varepsilon$  tend vers 0 et  $\omega\varepsilon$  tend vers  $+\infty$ .

Nous notons  $\epsilon_e$  la permittivité réelle du “background” et  $\epsilon$  la permittivité complexe de l'inhomogénéité. Les perméabilités respectives de l'inhomogénéité et du “background” sont notées  $\mu$  and  $\mu_e$ . Nous considérons une inhomogénéité fortement conductrice. Nous imposons

$$\epsilon = a + ib, \quad a > 0, b > 0,$$

et nous notons  $q_e$  et  $q$  les constantes suivantes :

$$q_e = \mu_e \epsilon_e, \quad q = \mu \epsilon.$$

A l'aide d'une analyse pseudodifférentielle qui ressemble à celle effectuée dans le paragraphe précédent, nous remplaçons l'inhomogénéité par une condition d'impédance généralisée sur sa frontière. Ensuite, nous bornons la trace du champ approché  $u$  sur l'inhomogénéité. Une estimation de la différence entre le champ diffracté total

<sup>5</sup>Ce travail a été effectué lors d'un séjour Eurodoc de 6 mois, de septembre 2005 à mars 2006, à Rutgers University (USA), sous la direction de Michael Vogelius.

et le champ diffracté approché par la condition d'impédance généralisée nous permet d'obtenir le théorème suivant.

THÉORÈME. Soit  $u^i$  une onde incidente de la forme

$$u^i(r, \theta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l J_l(\sqrt{q_e} \omega r) e^{il\theta}.$$

Soit  $(u^t, u^s)$  la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^t + q\omega^2 u^t = 0, & (r, \theta) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{T}, \\ \Delta u^s + q_e \omega^2 u^s = 0, & (r, \theta) \in ]\varepsilon, +\infty[ \times \mathbb{T}, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission en  $r = \varepsilon$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} \partial_r u^t|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\mu_e} (\partial_r u^s|_{r=\varepsilon} + \partial_r u^i|_{r=\varepsilon}), \\ u^t|_{r=\varepsilon} = u^s|_{r=\varepsilon} + u^i|_{r=\varepsilon}, \end{cases}$$

et la condition de radiation classique à l'infini :

$$\partial_r u^s - i\sqrt{q_e} \omega u^s = O(r^{-3/2}).$$

Alors, il existe deux constantes  $C = \text{const}(q, q_e, \mu/\mu_e)$  et  $\lambda_0 \geq 1$  dépendant uniquement de  $q$  telles que pour tout  $r \geq 1$  et pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $\omega > 0$  tels que  $\varepsilon \omega \geq \lambda_0$ ,

$$\|u^s\|_{H^{-1/2}(\partial B_r)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\|a\|_\infty.$$

Ce résultat justifie l'analyse formelle de M. Vogelius et D. Hansen [38] basée sur un raisonnement d'optique géométrique.

## Asymptotiques B.F. du champ électrique

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique du champ électrique en régime harmonique à basse fréquence dans un milieu à couche mince hétérogène.

La section I.1 présente trois objectifs. Tout d'abord, après avoir rappelé les caractéristiques électromagnétiques du modèle effectif de la cellule, nous présentons au paragraphe I.1.1.a une adimensionnalisation de l'équation (I.1.16) appelée équation vectorielle des ondes. Cette adimensionnalisation va nous permettre de ne plus travailler qu'avec des quantités sans dimension, que nous pourrons donc comparer à 1. Ainsi, les critères ultérieurs que nous allons donner pour valider nos asymptotiques seront applicables à n'importe quel matériau électromagnétique, pourvu que ses paramètres satisfassent aux hypothèses de nos propositions. Dans toute la suite de ce manuscrit, nous utiliserons les équations adimensionnées que nous présentons dans ce chapitre.

Ensuite, nous considérons une cellule circulaire, ce qui nous permet de faire des calculs explicites à l'aide des séries de Fourier et ainsi, de mieux comprendre les phénomènes qui se produisent. En I.1.2, nous présentons la formulation dite *diélectrique* (I.1.23) ; cette formulation est utilisée pour obtenir le champ électrique à basse fréquence. Elle ne tient compte que de la partie statique du champ. Cela revient à poser  $E = \text{grad}(V)$  dans le système d'équations de Maxwell et à prendre la divergence de l'équation d'Ampère (1.4b).

A l'aide des séries de Fourier, nous donnons à la proposition I.1.3 le développement exact du potentiel  $V$  solution de la formulation diélectrique (I.1.23). De ce développement en série de Fourier, nous extrayons les premiers termes du développement asymptotique du champ électrique statique  $\text{grad}(V)$ . Dans la membrane, la proposition I.1.6 nous donne une expression approchée explicite du champ statique en fonction de la condition aux limites et des paramètres diélectriques de la cellule, avec une erreur estimée ; tandis que dans le cytoplasme, le champ statique approché satisfait à l'équation de Laplace avec une donnée de Neumann appropriée (voir proposition I.1.7).

Le théorème de l'application conforme de Riemann (voir Rudin [62]), nous permet de généraliser la proposition I.1.7 à n'importe quel domaine simplement connexe assez régulier (disons à bord lisse pour simplifier). Cependant, en raison de la difficulté à expliciter l'application conforme, le résultat de la proposition I.1.8 est difficilement implémentable pour un domaine régulier quelconque. La section I.2 pallie cette difficulté.

Ensuite, nous nous intéressons à la solution  $E$  de l'équation vectorielle des ondes. Nous énonçons un résultat de régularité au théorème I.1.3.a. Puis, nous donnons les coefficients de Fourier de chaque composante de  $E$ . Nous en tirons des asymptotiques dans le cytoplasme au théorème I.1.12. Nous concluons cette partie

en comparant asymptotiquement les champs total et statique dans le cytoplasme au théorème I.1.16

Dans le paragraphe I.1.4 nous comparons les champs statique et total dans un domaine de géométrie quelconque. Tout d'abord nous donnons la condition de Neumann à imposer sur le champ statique pour pouvoir le comparer au champ total. Ensuite, à l'aide du théorème I.1.17, nous estimons les erreurs absolue et relative commises par l'approximation quasistatique. Ceci justifie, *a priori*, qu'à basse fréquence, le rotationnel du champ est négligé. Remarquons que ces estimations sont *a priori* moins précises que celles des théorèmes I.1.12 et I.1.16. Cependant, nous avons jugé intéressant de présenter ce résultat car il est valable pour n'importe quel domaine du plan simplement connexe assez régulier entouré d'une fine membrane, alors que les résultats des théorèmes I.1.12 et I.1.16 ne sont démontrés qu'en géométrie circulaire.

Nous illustrons les résultats de la section I.1 par des simulations numériques dans une géométrie circulaire avec le logiciel élément finis GetDP [25].

La section I.2 est une extension à une géométrie quelconque (assez régulière) des propositions I.1.6 et I.1.7. Nous donnons au théorème I.2.1 les deux premiers termes du développement asymptotique du potentiel scalaire solution de la formulation diélectrique avec une estimation de l'erreur commise. Le principe général des asymptotiques est de supposer que le potentiel  $V$  solution de l'équation (I.2.75) vérifie l'ansatz suivant :

$$V = V_0 + hV_1 + \dots$$

Puis, en identifiant les termes en puissance de  $h$ , nous obtenons successivement des conditions sur les potentiels  $V_0, V_1 \dots$ . Ainsi, alors qu'au théorème I.1.8 le champ statique approché est solution d'un problème de Laplace avec une condition aux limites appropriée, le champ approché à l'ordre  $h^2$  par la méthode des asymptotiques est obtenu en résolvant deux problèmes de Laplace bien posés successifs (voir théorème I.2.1). L'avantage de cette approche par rapport à celle du théorème I.2.1 est d'une part que nous n'avons pas besoin d'explicitier l'application conforme : c'est donc très facilement implémentable à l'aide un logiciel éléments finis, d'autre part, elle peut se généraliser à d'autres problèmes elliptiques (par exemple, et c'est ce que nous ferons au chapitre suivant, à l'équation de Helmholtz) et à des dimensions d'espace supérieures à 2. Enfin, formellement nous pouvons, par cette méthode, aller aussi loin que nécessaire dans le développement asymptotique de  $V$ . Ainsi, si nous désirons approcher le potentiel scalaire avec une erreur de l'ordre de  $h^n$ , il nous faudra résoudre  $n$  problèmes de Laplace successifs. Remarquons cependant que, bien que conceptuellement il est possible d'aller aussi loin que nécessaire dans le développement, la technicité des calculs et celle de la preuve du développement deviennent vite très importantes et fastidieuses.

Pour conclure ce chapitre, nous illustrons, à la section I.3, les résultats de la section I.2 dans le cas d'une cellule allongée, à l'aide du logiciel GetDP.

En appendice, nous présentons un résultat sur la dérivée tangentielle seconde d'un problème particulier (voir le théorème I.4.2). Le lemme I.4.5 nous permet de relier le théorème I.1.8 de la section I.1 et le théorème I.2.

## I.1. Asymptotiques du champ dans une cellule circulaire

### Asymptotic Expansions Of The Electric Field In The Biological Cell At Low Frequencies : The Circular Case

CLAIR POIGNARD

ABSTRACT : *We consider a 2D circular dielectric material surrounded by a thin layer with constant thickness  $h$ . We study the behavior of the electric field in time-harmonic regime for low frequencies. Two problems are considered: the vector wave equation and its quasistatic approximation also called the dielectric formulation. By Fourier analysis we give the explicit Fourier expansions of the solution of the dielectric formulation. We simplify its solution by giving asymptotics for  $h$  tending to zero. Then we compare both formulations by estimating the difference of the electric fields. This result leads to criterium on the frequency and on the dielectric parameters of the material to know a priori, which formulation has to be computed to obtain the electric field with a good accuracy. We illustrate our results by numerical simulations.*

Les résultats numériques du paragraphe I.1.4.d ont été présentés à la conférence COMPUMAG'05, [57]. Lors de la conférence Waves'05, [55] le cas d'une cellule de forme quelconque a été traité.

**Introduction.** We study in this paper the behavior of the electric field in time-harmonic regime in a highly contrasted circular domain  $\Omega_{l,h}$  composed by an interior medium  $\mathcal{O}_l$  with a characteristic length  $l$  surrounded by a thin layer  $\mathcal{O}_{l,h}$  with a constant thickness  $lh$ . The motivation of this work comes from numerical problems, which appear in the computation of the solution of the vector wave equation (I.1.16) in a biological cell. Because of its non common dielectric parameters, the computation of the electric field in a biological cell leads to matrices with very small coefficients, which are not easily invertible with the presently available numerical methods. To avoid these difficulties, at low frequency, the electrotechnician researchers of the CEGELY<sup>1</sup> used to approach the field by a quasi-static approximation also called dielectric formulation. It consists of neglecting the curl part of the electric field solution of (I.1.16), and in solving the following scalar partial differential equation with Neumann boundary condition:

$$\begin{cases} \operatorname{div}((\epsilon - i\sigma/\omega) \operatorname{grad} V) = 0, & \text{in } \Omega_{l,h}, \text{ in the weak sense,} \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \phi, & \text{on } \partial\Omega_{l,h}, \end{cases}$$

where  $\epsilon - i\sigma/\omega$  is the complex permittivity of the material. Remark that to determine  $V$ , we need a gauge condition, which will be chosen later. The electric field is then given by  $\mathbf{E} \sim \operatorname{grad}(V)$ . The function  $V$  is called scalar potential.

Several natural questions appear: first of all, which function  $\phi$  related to the boundary condition of (I.1.16) must we take to obtain a good approximation of the electric field? Given dielectric parameters and frequency, can we know a priori

<sup>1</sup>The CEGELY is the center of electrical engineering of Lyon (France).

the error estimate made by the dielectric formulation to compute the electric field? What is the effect of the thin layer on the field of the interior domain? In this article we answer these questions in a simple geometry: a circular domain, which permits explicit calculus using Fourier analysis. A following work will consist of the generalization of these results to a smooth bidimensionnal domain. Now we present the biological cell.

In the simplest modelization, the biological cell consists of a circular cytoplasm, a conducting dielectric material of length  $2\mu\text{m}$ , surrounded by a thin insulating membrane, which is a few nanometers thick. The typical parameters of the biological cell are described in Fig. 1. The permeability  $\mu_0$  and the permittivity  $\epsilon_0$  are constant, equal in MKSA units as everything else in this article to:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}, \quad \epsilon_0 = 8.85 10^{-11}.$$

The membranar thickness is constant equal to  $lh$ . The conductivities of these

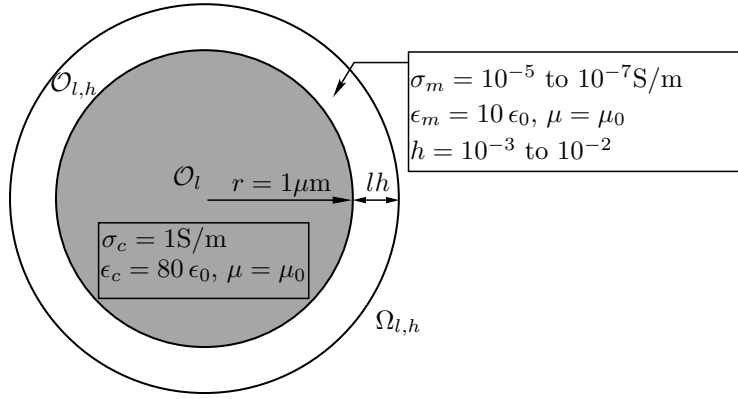


FIGURE 1. Typical parameters of the biological cell.

materials are highly contrasted, whereas the relative permittivities vary from 10 in the membrane to 80 in the cytoplasm. Thus, the cell is a highly heterogeneous dielectric material.

In Fig. 1 we denote by  $\Omega_{l,h}$  the part of the plane filled by the biological cell,  $\mathcal{O}_l$  the one filled by its cytoplasm and  $\mathcal{O}_{l,h}$  the one filled by its membrane. We define the cell conductivity and permittivity as follows:

$$\sigma(y) = \begin{cases} \sigma_c, & \text{if } y \in \mathcal{O}_l \\ \sigma_m, & \text{if } y \in \mathcal{O}_{l,h} \end{cases}, \quad \epsilon(y) = \begin{cases} \epsilon_c, & \text{if } y \in \mathcal{O}_l \\ \epsilon_m, & \text{if } y \in \mathcal{O}_{l,h} \end{cases}.$$

Let  $\mathbf{f}$  be a function defined on the boundary  $\partial\Omega_{l,h}$  of  $\Omega_{l,h}$ . The vector wave equation stemmed from Maxwell equations is:

$$(I.1.16a) \quad \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \right) \mathbf{E} - \omega^2 \epsilon \mathbf{E} + i\omega\sigma \mathbf{E} = 0 \text{ in } \Omega_{l,h},$$

$$(I.1.16b) \quad \text{rot} \mathbf{E} \times n = \mathbf{f} \text{ on } \partial\Omega_{l,h}.$$

Here,  $n$  designates the unitary exterior normal vector of  $\partial\Omega_{l,h}$ . We remark that in the biological cells, the permeability  $\mu$  is constant equal to  $\mu_0$ .

To study the behavior of  $\mathbf{E}$  in  $\Omega_{l,h}$  we structured this article in four parts. First we set the problem: we present the non dimensionalized equation of (I.1.16), and we precise the choice of coordinates we made. Once our conventions are presented, we introduce the dielectric formulation also called the quasistatic approximation with Neumann boundary condition. This formulation leads to compute the gradient component of Hodge decomposition of the electric field  $\mathbf{E}$ , which is solution of Problem (I.1.16). This amounts to saying that the curl part of  $\mathbf{E}$  is null.

In Proposition I.1.3 we give the explicit Fourier expansion of the solution of the dielectric formulation. From these expansions, we derive asymptotic estimates of the static electric field for the membranar thickness  $h$  tending to 0 with an assumption on the dielectric parameters and on the frequency. These expansions are given in Proposition I.1.6 for the field in the membrane and in Proposition I.1.7 for the field in the cytoplasm. They lead to simple formulae for the gradient of the scalar potential in terms of the boundary data, with an error estimate. Using conformal mapping theorem (see Rudin [62]) we generalize Proposition I.1.7 to a simply connected bidimensional domain (say smooth to simplify).

In the third part, we come back to the vector wave equation. First, in Theorem I.1.11 we show a classical regularity result on the electric field  $E$  for a boundary condition in the Sobolev space  $H^{3/2}(\partial\Omega_h)$ . Then we use Fourier transform and we give the expressions of Fourier coefficients of each components of  $E$ . Assuming that  $\mu$  is constant equal to 1, we deduce the asymptotics of the electric field in the cytoplasm. We also compare asymptotically the electric field and the static field.

The fourth part is devoted to the comparison of both formulations in a domain with an arbitrary shape. We assume that  $\mu$  is constant. First, we give the boundary data of the dielectric formulation, which has to be imposed to compare the solution of the vector wave equation with Neumann boundary data and the static field computed by the dielectric formulation. Then we compare both formulations used to compute the electric field (the dielectric formulation and the vector wave equation). Theorem I.1.17 gives a simple criterium on the dielectric parameters of the domain and on the frequency so that the quasi-static approximation gives the electric field, with an error estimate. This part justify that at low frequencies, the electrotechnician researchers used to compute the solution of the dielectric formulation. It gives a cut-off frequency under which the dielectric approximation gives good results. Finally we illustrate the previous results by numerical simulations in a circular domain.

### I.1.1. Statement of the problem.

I.1.1.a. *Non dimensionalization.* In this paragraph, we study the dimensions of the physical quantities present in (I.1.16). We use the system MKSA. The respective physical dimensions of conductivity, absolute electric permittivity, absolute magnetic permeability, electric field and electric potential are as follows:

$$\begin{aligned} \text{electric conductivity } \sigma &: \text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}\text{s}^3\text{A}^2 \\ \text{absolute electric permittivity } \epsilon &: \text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2 \\ \text{absolute magnetic permeability } \mu &: \text{m kg s}^{-2}\text{A}^{-2} \\ \text{electric field } \mathbf{E} &: \text{m kg s}^{-3}\text{A}^{-1} \\ \text{electric potential } V &: \text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-1} \end{aligned}$$



We will now perform a non dimensionalization, in order to work only with dimensionless quantities.

Let  $V_0$  be a potential scale to be chosen. For example, we can take the transmembrane potential (TMP) of the cell without excitation. We scale the spatial domain, so that it will be of size 1:

$$\begin{aligned}\Omega_h &= \Omega_{l,h}/l, \\ \mathcal{O} &= \mathcal{O}_l/l, \\ \mathcal{O}_h &= \mathcal{O}_{l,h}/l.\end{aligned}$$

Therefore in the following,  $\Omega_h$  is the disc of radius  $1+h$  around 0,  $\mathcal{O}$  is the unit disc and  $\mathcal{O}_h$  is the annulus  $\Omega_h \setminus \mathcal{O}$ .

We denote by  $x$  an element of  $\Omega_h$  and by  $\mathbf{x}$  an element of  $\Omega_{l,h}$ . The equality  $x = l\mathbf{x}$  gives  $x$  in terms of  $\mathbf{x}$ . We define the non dimensionalized following quantities:

$$(I.1.17) \quad E(x) = \frac{l}{V_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

$$(I.1.18) \quad f(x) = \frac{l^2}{V_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

In the new spatial variables, the conductivity of the cell is a function given by:

$$\sigma_h(x) = \begin{cases} \sigma_c, & \text{if } x \in \mathcal{O}, \\ \sigma_m, & \text{if } x \in \mathcal{O}_h, \end{cases}$$

its permittivity is:

$$\epsilon_h(x) = \begin{cases} \epsilon_c, & \text{if } x \in \mathcal{O}, \\ \epsilon_m, & \text{if } x \in \mathcal{O}_h, \end{cases}$$

and its permeability is:

$$\mu_h(x) = \begin{cases} \mu_c, & \text{if } x \in \mathcal{O}, \\ \mu_m, & \text{if } x \in \mathcal{O}_h, \end{cases}$$

We use expressions (I.1.17) and (I.1.18) to perform a change of variable in (I.1.19). A simple calculation shows that  $E$  satisfies the following non dimensionalized equations:

$$(I.1.19a) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_h} \operatorname{rot} E \right) - l^2 \omega^2 \epsilon_h E + i l^2 \omega \sigma_h E = 0, \text{ in } \Omega_h,$$

From now on, we consider non dimensionalized problem (I.1.19). The non dimensionalized permittivity, conductivity and complex permittivity are functions defined on the scaled cell  $\Omega_h$  by:

$$(I.1.20) \quad \begin{cases} \alpha_h = l^2 \omega^2 \epsilon_h, & \beta_h = l^2 \omega \sigma_h, \\ q_h = \alpha_h - i \beta_h, & z_h = \mu_h q_h. \end{cases}$$

We rewrite problem (I.1.19):

$$(I.1.21a) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_h} \operatorname{rot} E \right) - q_h E = 0 \text{ in } \Omega_h,$$

$$(I.1.21b) \quad \operatorname{rot} E \times n = f \text{ on } \partial \Omega_h.$$

In order to understand the relevant orders of their magnitude and their relationships, let us introduce the wavelength (see the book of Balanis and Constantine [12] page 150):

$$\lambda = 2\pi/(\omega\sqrt{\mu\epsilon}),$$

and the skin depth,

$$\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}.$$

We have of course distinct values of these expressions in the membrane and in the cytoplasm, and we may emphasize their differences by subscripting  $\lambda$  and  $\delta$  with  $m$  or  $c$ . The characteristic sizes of the membrane and the cytoplasm are respectively  $l_m = lh$  and  $l_c = l$ . With these notations, we may write

$$z_m = 4\pi^2 \frac{l_m^2}{h^2\lambda_m^2} - 2i \frac{l_m^2}{h^2\delta_m^2},$$

$$z_c = 4\pi^2 \frac{l_c^2}{\lambda_c^2} - 2i \frac{l_c^2}{\delta_c^2}.$$

Let us plot the modulus of  $z$  against  $\omega$  in log-log scale.

Fig. 2 shows the behavior of the two curves for following choice of electromagnetic parameters:

$$\begin{aligned} l &= 10^{-6} & h &= 0.001 \\ \sigma_c &= 1 & \sigma_m &= 10^{-6} \\ \epsilon_c &= 80\epsilon_0 & \epsilon_m &= 10\epsilon_0 \end{aligned}$$

and  $\mu_h \equiv 1$ . It is plain on Fig. 2 that there are different regimes, and that transitions occur at:

$$\begin{aligned} \omega_m &\sim \sigma_m/\epsilon_m, \\ \omega_c &\sim \sigma_c/\epsilon_c. \end{aligned}$$

Of course with different parameters, the curves could be in different positions, and the elbows also.

We observe that for  $\omega < \min(\omega_c, \omega_m)$ ,

$$\log \left| \frac{z_m}{z_c} \right| \sim \log \left| \frac{\sigma_m}{\sigma_c} \right|,$$

and for  $\omega > \max(\omega_c, \omega_m)$ ,

$$\log \left| \frac{z_m}{z_c} \right| \sim \log \left| \frac{\epsilon_m}{\epsilon_c} \right|.$$

I.1.1.b. *Choice of coordinates.* We choose to work in a disc because we can separate variables and use Fourier analysis. We work in the polar coordinates.

The vectors of the polar basis  $(e_\theta, e_{\theta+\pi/2})$  of  $\mathbb{R}^2$  are given in the Euclidian coordinates by:

$$\begin{aligned} e_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \\ e_{\theta+\pi/2} &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

The electric field is then decomposed as follows:

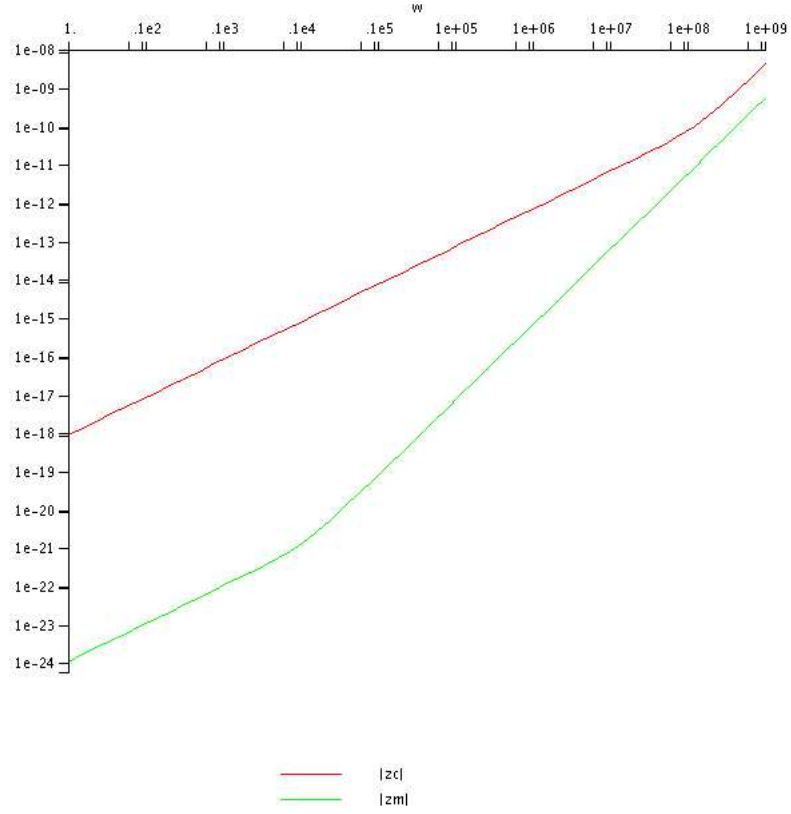


FIGURE 2. Modulus of  $z_c$  and  $z_m$  for the biological cell parameters.

$$E = \mathbb{E}_r e_\theta + \mathbb{E}_\theta e_{\theta+\pi/2},$$

and the curl of  $E$  is:

$$\text{rot } E = \frac{\partial \mathbb{E}_\theta}{\partial r} + \frac{\mathbb{E}_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta}.$$

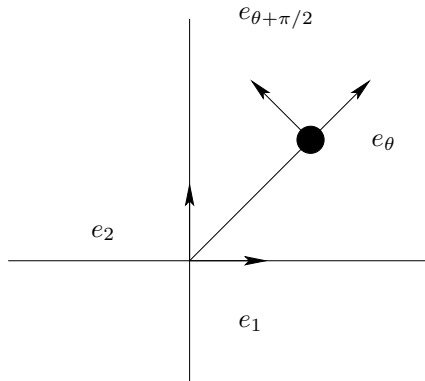
To simplify calculation, we take the following convention:

$$E = \mathbb{E}_r e_\theta + \frac{1}{r} E_\theta e_{\theta+\pi/2}.$$

thus,

$$E_\theta = r \mathbb{E}_\theta.$$

We emphasize that this convention is the standard geometric convention, which will be needed in case of a cell of arbitrary shape. The nice property of this convention



is that it yields a simple expression of the curl in polar coordinates

$$\text{rot } E = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right).$$

At last, if we assume that the field  $E$  is derived from a scalar potential  $V$ , that is if  $E = \text{grad } V$ , we have the simple relation:

$$E_\theta = \partial_\theta V, \quad E_r = \partial_r V.$$

**I.1.2. The dielectric formulation with Neumann condition.** In that part, we study the problem so-called dielectric formulation by the electrotechnician researchers. Let  $\phi$  be a function defined on the boundary  $\partial\Omega_h$  such that

$$(I.1.22) \quad \int_{\partial\Omega_h} \phi \, d\sigma = 0.$$

Let  $q_h$  be a piecewise-constant function:

$$\forall x \in \Omega_h, \quad q_h(x) = \begin{cases} q_c, & \text{if } x \in \mathcal{O}, \\ q_m & \text{if } x \in \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

We are interested in the following problem:

$$\text{find } V \in H^1(\Omega_h) \text{ such that:}$$

$$(I.1.23a) \quad \text{div}(q_h \text{grad } V) = 0 \text{ in } \Omega_h,$$

with Neumann boundary condition:

$$(I.1.23b) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\phi}{1+h} \text{ on } \partial\Omega_h.$$

To determine  $V$ , we impose the gauge condition on the boundary of the cytoplasm:

$$(I.1.23c) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V \, d\sigma = 0.$$

**REMARK I.1.1.** *To simplify the next calculations, we have divided the boundary data  $\phi$  by  $1+h$  at (I.1.23b). Of course, the same calculations could have been performed with  $\phi$  instead of  $\phi/(1+h)$ .*

In Section I.1.4 we explicit the link between the gradient of  $V$  and the electric field solution of Problem (I.1.21).

I.1.2.a. *Explicit expression of  $V$  in Fourier series.* We use polar coordinates in order to perform explicit calculation by Fourier analysis. First of all, in Proposition I.1.3 we give the explicit formulae of the scalar potential  $V$ . From these Fourier expansions we derive the expression of the gradient of  $V$  in terms of the boundary data  $\phi$ , with an estimated error.

Let us denote by  $\mathbb{T}$  the torus:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

The domain  $\Omega_h$  is parametrized by:

$$\Omega_h = \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (r, \theta) \in [0, 1+h] \times \mathbb{T}\},$$

and the boundary  $\partial\Omega_h$  is isomorphic to the torus  $\mathbb{T}$ . Problem (I.1.23) can be rewritten as follows:

$$(I.1.24a) \quad \forall (r, \theta) \in [0, 1+h] \times \mathbb{T},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( q_h r \frac{\partial}{\partial r} V \right) + \frac{q_h}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V = 0,$$

$$(I.1.24b) \quad \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=1+h} = \phi.$$

with the transmission conditions on  $\partial\mathcal{O}$ :

$$(I.1.24c) \quad V(1^-, \theta) = V(1^+, \theta),$$

$$(I.1.24d) \quad q_c \frac{\partial}{\partial r} V \Big|_{r=1^-} = q_m \frac{\partial}{\partial r} V \Big|_{r=1^+}.$$

The gauge condition (I.1.23c) on the boundary of the cytoplasm is

$$(I.1.24e) \quad \int_0^{2\pi} V(1, \theta) d\theta = 0.$$

Observe that the transmission conditions are derived from (I.1.24a) taken weakly.

NOTATION I.1.2. *The  $k^{\text{th}}$ -Fourier coefficient of a function*

$$g : (r, \theta) \rightarrow g(r, \theta),$$

*assumed to be  $2\pi$ -periodic with respect to  $\theta$ , is defined by:*

$$\widehat{g}_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) \exp(-ik\theta) d\theta.$$

*A function  $g$  belongs to  $L^2(\Omega_h)$  iff:*

$$\int_0^{1+h} \int_0^{2\pi} |g(r, \theta)|^2 r dr d\theta < +\infty,$$

*and  $g$  belongs to  $H^1(\Omega_h)$  iff  $g$  is in  $L^2(\Omega_h)$  and both following integrands:*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_r g(r, \theta)|^2 r dr d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_\theta g(r, \theta)|^2 dr d\theta,$$

*are finite.*

Remark that the condition (I.1.22) on the boundary condition  $\phi$  implies  $\widehat{\phi}_0 = 0$ .

PROPOSITION I.1.3. *Let  $h \in (0, 1)$ ,  $q_c$  and  $q_m$  in  $\mathbb{C}^*$  satisfying :*

$$(I.1.25) \quad \frac{q_m}{q_c} \notin ]-\infty, -1].$$

For  $\phi \in H^{-1/2}(\mathbb{T})$  satisfying (I.1.22), the solution  $V$  of the problem (I.1.24) is in  $H^1(\Omega_h)$ . It is given by the following Fourier expansions:

$$(I.1.26a) \quad \begin{aligned} & \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \text{ i.e in the cytoplasm:} \\ V(r, \theta) &= \frac{2q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \exp(ik\theta); \end{aligned}$$

$$(I.1.26b) \quad \begin{aligned} & \forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T}, \text{ i.e in the membrane:} \\ V(r, \theta) &= (1 + q_m/q_c) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \exp(ik\theta) \right) \\ & - (1 - q_m/q_c) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \exp(ik\theta) \right). \end{aligned}$$

Here the quantities  $D_k$  are given for  $k \in \mathbb{Z}^*$  by

$$(I.1.27) \quad D_k = 1 + (1+h)^{-2|k|} + \frac{q_m}{q_c} \left( 1 - (1+h)^{-2|k|} \right).$$

REMARK I.1.4. *Observe that according to hypothesis (I.1.25), there exists a constant  $C$ , which only depends on  $q_c$  and  $q_m$  such that for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ , for all  $h \in (0, 1)$ ,*

$$(I.1.28) \quad |D_k| \geq C > 0.$$

Actually, denote  $q_m/q_c$  by  $a + ib$  and replace  $(1+h)^{-2|k|}$  by  $x$  in the expression of  $D_k$ . We obtain

$$\begin{aligned} |D_k|^2 &= (1 + a + x(1-a))^2 + b^2(1-x)^2, \\ &= x^2((1-a)^2 + b^2) + 2x((1-a^2) - b^2) + (1+a)^2 + b^2. \end{aligned}$$

The reduced discriminant  $\Delta'$  of the above polynomial defined by

$$\Delta' = ((1-a^2) - b^2)^2 - ((1+a)^2 + b^2)((1-a)^2 + b^2),$$

is equal through a simple calculation to

$$\Delta' = -4b^2.$$

Thus, two cases appear.

- If  $b \neq 0$ , the above trinomial in  $x$  never vanishes and since  $x$  belongs to the compact  $[0, 1]$ , we infer that there exists  $C > 0$  such that for all  $x \in [0, 1]$ ,

$$x^2((1-a)^2 + b^2) + 2x((1-a^2) - b^2) + (1+a)^2 + b^2 > C,$$

hence, for all  $k \in \mathbb{Z}$ , for all  $h \in (0, 1)$ ,

$$|D_k| \geq C > 0.$$

- Suppose  $b = 0$ , and set  $a = -1 + c$ , with  $c > 0$ . Then  $D_k$  is equal to:

$$D_k = c + (2 - c)x.$$

Thus for all  $x \in [0, 1]$ ,  $c + (2 - c)x > \min(2, c)$  hence for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ , for all  $h \in (0, 1)$ ,

$$|D_k| \geq \min(2, c) > 0,$$

hence inequality (I.1.28).

REMARK I.1.5. Before proving our proposition we show that when  $q_m/q_c$  belongs to  $] -\infty, -1]$ , problem (I.1.24) satisfied by  $V$  is ill posed.

Denote by  $q$  the ratio

$$q = -q_m/q_c,$$

and suppose that  $q_c = 1$ .

- Suppose  $q > 1$ . Since

$$\frac{q-1}{q+1} \in (0, 1),$$

it is obvious that for all  $h_0 \in (0, 1)$  there exists  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  and  $h \in (0, h_0)$  such that

$$(I.1.29) \quad (1+h)^{-2k_0} = \frac{q-1}{q+1}.$$

Let  $g$  be equal to

$$g(\theta) = k_0 e^{ik_0\theta} / (1+h),$$

and let  $V$  be the solution of problem (I.1.24) with  $g$  as Neumann boundary condition. Using Fourier coefficients, if  $V$  exists, it necessarily has the following expression:

$$V_{k_0}^c(r) = a_c r^{k_0}, \text{ for } 0 \leq r \leq 1$$

$$V_{k_0}^m(r) = a_m r^{k_0} + b_m r^{-k_0}, \text{ for } 1 \leq r \leq 1+h.$$

Transmission conditions imply:

$$a_m + b_m = a_c,$$

$$-q(a_m - b_m) = a_c,$$

$$a_m(1+h)^{k_0} - b_m(1+h)^{-k_0} = 1,$$

hence:

$$(1-q)a_m + (1+q)b_m = 0,$$

$$a_m(1+h)^{k_0} - b_m(1+h)^{-k_0} = 1,$$

or

$$a_m = \frac{q+1}{q-1} b_m,$$

$$a_m = (1+h)^{-2k_0} b_m + (1+h)^{-k_0}.$$

Therefore, through equality (I.1.29) we infer:

$$0 = (1+h)^{-k_0},$$

which is clearly a non-sense.

- Let  $h \in (0, 1)$ .

Suppose  $q = 1$ . Let  $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  be a sequence of functions defined by:

$$g_p(\theta) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} e^{ik\theta}.$$

Let us define the sequence of functions  $V_p$  defined by

$$V_p^c(r, \theta) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} (1+h)^{|k|r} e^{ik\theta}, \quad \forall 0 \leq r \leq 1,$$

$$V_p^m(r, \theta) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} (1+h)^{|k|r-|k|} e^{ik\theta}, \quad \forall 1 \leq r \leq 1+h.$$

For all  $p \in \mathbb{N}$ , the function  $V_p$  is  $\mathcal{C}^\infty$ -solution of problem (I.1.24) with  $g_p$  as Neumann boundary condition, but the serie  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} V_p$  does not belong to  $L^2(\mathcal{C})$ , while  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} g_p$  belongs to  $L^2(\mathbb{T})$ .

PROOF OF PROPOSITION I.1.3. We denote by  $\widehat{V}_k$  the  $k^{\text{th}}$ -Fourier coefficient of the potential in the whole cell. It is convenient to write  $\widehat{V}_k^c$  the  $k^{\text{th}}$ -Fourier coefficient of the potential  $V$  in the domain  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  corresponding to the cytoplasm, and  $\widehat{V}_k^m$  the  $k^{\text{th}}$  Fourier coefficient of  $V$  in the domain  $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$  corresponding to the membrane and  $\widehat{f}_k$ .

We have for all  $k \in \mathbb{Z}$ , for all  $r \in [0, 1]$ ,

$$(I.1.30a) \quad r^2 \frac{d^2 \widehat{V}_k^c}{dr^2} + r \frac{d \widehat{V}_k^c}{dr} - k^2 \widehat{V}_k^c = 0,$$

for all  $r \in [1, 1+h]$  :

$$(I.1.30b) \quad r^2 \frac{d^2 \widehat{V}_k^m}{dr^2} + r \frac{d \widehat{V}_k^m}{dr} - k^2 \widehat{V}_k^m = 0,$$

with the transmission conditions:

$$(I.1.30c) \quad \widehat{V}_k^c \Big|_{r=1^-} = \widehat{V}_k^m \Big|_{r=1^+},$$

$$(I.1.30d) \quad q_c \frac{d \widehat{V}_k^c}{dr} \Big|_{r=1^-} = q_m \frac{d \widehat{V}_k^m}{dr} \Big|_{r=1^+},$$

and the boundary condition :

$$(I.1.30e) \quad \frac{d \widehat{V}_k^m}{dr} \Big|_{r=1+h} = \widehat{\phi}_k / (1+h).$$

Since the gauge condition is:

$$(I.1.30f) \quad \widehat{V}_0^c(1) = 0,$$

we obtain immediately:

$$\widehat{V}_0^c = 0, \quad \widehat{V}_0^m = 0.$$



For  $k \neq 0$ , a basis of solutions of the ordinary differential equation of the second order  $r^2 u'' + r u' - k^2 u = 0$  is  $r^{|k|}, r^{-|k|}$ . The energy of the solution of (I.1.23) is finite on the domain  $\Omega_h$ , so the two entities  $\widehat{V}_k^c$  and  $\widehat{V}_k^m$  are necessarily of the form:

$$\begin{aligned}\widehat{V}_k^c &= A_k^c r^{|k|}, \\ \widehat{V}_k^m &= A_k^m r^{|k|} + B_k^m r^{-|k|},\end{aligned}$$

where  $A_k^c, A_k^m$ , and  $B_k^m$  are constants, which will be determined by the transmission conditions (I.1.30c)–(I.1.30d) and the boundary condition (I.1.30e). More precisely, we have:

$$\begin{aligned}\text{(I.1.31a)} \quad & A_k^c = A_k^m + B_k^m, \\ \text{(I.1.31b)} \quad & q_c A_k^c = q_m (A_k^m - B_k^m), \\ \text{(I.1.31c)} \quad & A_k^m (1+h)^{|k|} - B_k^m (1+h)^{-|k|} = \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|}.\end{aligned}$$

We denote by  $b_k = (1+h)^{-2|k|}$  and we write:

$$\begin{aligned}\text{(I.1.32)} \quad & M_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ q_c & -q_m & q_m \\ 0 & 1 & -b_k \end{pmatrix}, \\ & A_k = \begin{pmatrix} A_k^c \\ A_k^m \\ B_k^m \end{pmatrix}, \\ & \Phi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{\phi}_k / (|k|(1+h)^{|k|}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

The system (I.1.31) can be written as following:

$$M_k A_k = \Phi_k.$$

Let  $\det(M_k)$  be the determinant of the matrix  $M_k$ . We have:

$$\begin{aligned}\text{(I.1.33)} \quad & \det(M_k) = -(q_c(1+b_k) + q_m(1-b_k)), \\ \text{(I.1.34)} \quad & = -q_c D_k,\end{aligned}$$

where  $D_k$  is given by (I.1.27). Thus, according to (I.1.28),  $M_k$  is invertible and:

$$M_k^{-1} = -\frac{1}{\det(M_k)} \begin{pmatrix} * & * & 2q_m \\ * & * & q_c + q_m \\ * & * & -q_c + q_m \end{pmatrix}.$$

We obtain the expression for  $A_k$ :

$$\text{(I.1.35)} \quad A_k = \begin{pmatrix} 2q_m/q_c \\ 1 + q_m/q_c \\ -1 + q_m/q_c \end{pmatrix} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|(1+h)^{|k|} D_k}.$$

Thereby, we have:

$$\begin{aligned}\widehat{V}_k^c &= \frac{2q_m}{q_c} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k}, \\ \widehat{V}_k^m &= (1+q_m/q_c) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} - (1-q_m/q_c) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k}.\end{aligned}$$

Thus the following expansion in Fourier series for  $V$  hold:

$$\begin{aligned}\forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ V(r, \theta) &= \frac{2q_m}{q_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \exp(ik\theta) \right), \\ \forall (r, \theta) \in [1, 1+h] \times \mathbb{T}, \\ V(r, \theta) &= (1+q_m/q_c) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \exp(ik\theta) \right) \\ &\quad - (1-q_m/q_c) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \exp(ik\theta) \right).\end{aligned}$$

Now we prove the regularity result. According to (I.1.28), we have

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in [0, 1+h], \left| \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \right| \leq \frac{1}{C},$$

For all integer  $k \in \mathbb{Z}^*$ , we have:

$$\begin{aligned}\int_0^{1+h} \left| \frac{\widehat{\phi}_k r^{|k|}}{k(1+h)^{|k|} D_k} \right|^2 r \, dr &= \frac{|\widehat{\phi}_k|^2}{(2|k|+2)k^2} \frac{(1+h)^{2|k|+2}}{(1+h)^{|k|} D_k} \\ &\leq \frac{1}{2C} \frac{|\widehat{\phi}_k|^2}{|k|^3}.\end{aligned}$$

So, if  $\phi \in H^{-3/2}(\partial\Omega_h)$ , we have:

$$\int_0^{1+h} \left| \frac{\widehat{\phi}_k r^{|k|}}{k(1+h)^{|k|} D_k} \right|^2 r \, dr \in L^2(\mathbb{Z}),$$

thus, by Parseval equality, if  $\phi$  is in  $H^{-3/2}(\partial\Omega_h)$ ,  $V$  belongs to the space  $L^2(\Omega_h)$ .

Moreover, if  $\phi$  is in  $H^{-1/2}(\partial\Omega_h)$ , by the same way we show that:

$$\int_0^{1+h} \left| \frac{\widehat{\phi}_k r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \right|^2 r \, dr \in L^2(\mathbb{Z}),$$

which proves, by Parseval equality, that both integrands

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_r V(r, \theta)|^2 r \, dr \, d\theta, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{1+h} |\partial_\theta V(r, \theta)|^2 dr \, d\theta,\end{aligned}$$

are finite, and the regularity result is shown.  $\square$

I.1.2.b. *Asymptotic Estimates of the Electric Field.* From these explicit formulae, we give now the first two terms of the asymptotic expansion in power of  $h$  of the static electric field  $E = \text{grad}(V)$ . Actually, we give asymptotics of  $\partial_r V$  and  $\partial_\theta V$ .

*Asymptotics in the membrane.* We remember the definition of Hilbert transform (see Stein [66], Stein and Weiss [67] or Katznelson [42]) on  $2\pi$ -periodic functions

$$\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sgn}(k) \widehat{f}_k \exp(ik\theta).$$

PROPOSITION I.1.6. *Let  $\phi \in H^3(\mathbb{T})$  satisfy compatibility condition (I.1.22). Let  $(q_c, q_m) \in (\mathbb{C}^*)^2$  satisfy condition (I.1.25), and  $h$  be in  $(0, 1)$ . We denote by  $V$  the solution of Problem (I.1.24) with Neumann boundary condition  $\phi$ .*

*We define the two following functions  $\mathcal{L}_1(\phi)$  and  $\mathcal{L}_2(\phi)$  on  $[1, 1+h] \times \mathbb{T}$  by:*

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$\mathcal{L}_1(\phi)(r, \cdot) = \phi - i \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta},$$

$$\mathcal{L}_2(\phi)(r, \cdot) = \frac{q_m}{q_c} i \tilde{\phi} + \left( r-1-h \frac{q_m^2}{q_c^2} \right) \frac{d\phi}{d\theta}.$$

*The following estimates hold, for all  $r$  in  $[1, 1+h]$  when  $h$  tends to zero:*

$$(I.1.36a) \quad \left| r \partial_r V(r, \cdot) - \mathcal{L}_1(\phi)(r, \cdot) \right| = O(h^2(1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}),$$

$$(I.1.36b) \quad \left| \partial_\theta V(r, \cdot) - \mathcal{L}_2(\phi)(r, \cdot) \right| = O(h^2(1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}).$$

PROOF. We make asymptotic estimates on Fourier coefficients of  $r \partial_r V$  and  $\partial_\theta V$  for  $h$  tending to zero. Fourier expansion (I.1.26b) of  $V$  in the membrane for all  $r$  in  $[1, 1+h]$  implies, for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ :

$$r \frac{d\widehat{V}_k}{dr}(r) = \left( \frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \widehat{\phi}_k + \frac{q_m}{q_c} \frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}} \right) \frac{\widehat{\phi}_k}{D_k}.$$

Denote by  $f$  and  $g$  the functions defined on  $[0, h]$  by:

$$\forall s \in [0, h],$$

$$f(s) = \frac{(1+s)^{|k|} + (1+s)^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}},$$

$$g(s) = \frac{(1+s)^{|k|} - (1+s)^{-|k|}}{(1+h)^{|k|}},$$

thus, for all  $r \in [1, 1+h]$ ,

$$r \frac{d\widehat{V}_k}{dr}(r) = \left( f(r-1) + \frac{q_m}{q_c} g(r-1) \right) \frac{\widehat{\phi}_k}{D_k}$$

In the following, we use the notation  $O$  of Landau. The notation  $O(\|g\|)$  denotes a quantity  $\gamma$  such that  $|\gamma| \leq C \|g\|$  for some constant  $C > 0$ .

Observe that the constants, which appear in the following  $O$  depend neither on  $h$  nor on  $k$ . Moreover they are independant of  $q_c$  and  $q_m$ .

Using Taylor formula with integral remainder we have

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall s \in [0, h],$$

$$f(s) = \frac{2}{(1+h)^{|k|}} + h^2 \int_0^1 (1-t)f''(th)dt,$$

$$g(s) = \frac{2s|k|}{(1+h)^{|k|}} + h^2 \int_0^1 (1-t)g''(th)dt;$$

moreover

$$(I.1.37) \quad (1+h)^{-|k|} = 1 - |k|h + |k|(|k|+1)h^2 \int_0^1 (1-t)(1+ht)^{-|k|-2}dt,$$

we infer the existence of a constant  $C$  independant of  $k$  such that:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall s \in [0, h],$$

$$(I.1.38a) \quad \left| f(s) - 2(1-|k|h) \right| \leq Ch^2k^2,$$

$$(I.1.38b) \quad \left| g(s) - 2s|k| \right| \leq Ch^2k^2.$$

Since  $D_k$  is equal to:

$$D_k = 1 + (1+h)^{-2|k|} + \frac{q_m}{q_c} \left( 1 - (1+h)^{-2|k|} \right),$$

there exists a constant, still denoted by  $C$ , such that:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,$$

$$(I.1.39) \quad \left| \frac{1}{D_k} - \frac{1}{2} \left( 1 + |k|h(1 - q_m/q_c) \right) \right| \leq C \left( h^2k^2(1 + |q_m/q_c|) \right).$$

Using (I.1.38) and (I.1.39), there exists a constant  $C > 0$  such that:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall s \in [0, 1],$$

$$\left| \frac{f(s)}{D_k} - (1-h|k|q_m/q_c) \right| \leq Ch^2(1 + |q_m/q_c|)k^3,$$

$$\left| \frac{g(s)}{D_k} - s|k| \right| \leq Ch^2(1 + |q_m/q_c|)k^3.$$

We infer:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^* \forall r \in [1, 1+h],$$

$$\left| r \frac{d\widehat{V}_k}{dr}(r) - \widehat{\phi}_k \left( 1 + |k| \frac{q_m}{q_c} (r-1-h) \right) \right| \leq Ch^2(1 + |q_m/q_c|)^2 k^3 \left| \widehat{\phi}_k \right|.$$

This estimate implies (I.1.36a). We obtain the asymptotic for  $\partial_\theta V$  by the same way. Actually, we have for all non-zero integer  $k$ , for all  $r$  in  $[1, 1+h]$ :

$$(I.1.40) \quad ik\widehat{V}_k(r) = i \operatorname{sgn}(k) \frac{r^{|k|} - r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \widehat{\phi}_k + i \operatorname{sgn}(k) \frac{q_m}{q_c} \frac{r^{|k|} + r^{-|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k} \widehat{\phi}_k,$$

using the previous notations, we have

$$ik\widehat{V}_k(r) = i\operatorname{sgn}(k)\widehat{\phi}_k \left( \frac{q_m}{q_c} \frac{f(r-1)}{D_k} + \frac{g(r-1)}{D_k} \right),$$

thus we infer:

$$ik\widehat{V}_k(r) = i\operatorname{sgn}(k)\widehat{\phi}_k \left( \frac{q_m}{q_c} + |k|(r-1) - h|k|\frac{q_m^2}{q_c^2} \right),$$

this implies directly estimate (I.1.36b).  $\square$

*Asymptotics in the cytoplasm.* To obtain the asymptotics of the electric field in the cytoplasm, we just have to use the following expression of  $\widehat{V}_k$  in  $[0, 1]$ :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,$$

$$\widehat{V}_k^c = \frac{2q_m}{q_c} \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} \frac{r^{|k|}}{(1+h)^{|k|} D_k}.$$

Using estimates (I.1.37) and (I.1.39) of  $(1+h)^{-|k|}$  and  $D_k$ , we obtain easily:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^* \quad \left| \left( r \frac{d\widehat{V}_k}{dr} \right) \Big|_{r=1^-} - \widehat{\phi}_k \left( 1 - |k|h \frac{q_m}{q_c} \right) \right| \leq Ch^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 k^3 \left| \widehat{\phi}_k \right|.$$

We infer

$$(I.1.41) \quad \left| \left( r \frac{dV}{dr} \right) \Big|_{r=1^-} - \left( \phi + i \frac{q_m}{q_c} h \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} \right) \right| \leq Ch^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}.$$

Therefore we obtain Neumann condition at the boundary  $\mathcal{O}$  of the cytoplasm with an error in  $h^2$ . More precisely we have the following proposition.

**PROPOSITION I.1.7.** *Let  $\phi \in H^3(\mathbb{T})$  satisfy compatibility condition (I.1.22). Let  $V$  be the solution of Problem (I.1.24). Let  $q_c$  and  $q_m$  be non null complex numbers satisfying condition (I.1.25), and let  $h$  be in  $(0, 1)$ . Let  $V^c$  be the restriction to  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  of the solution  $V$  of Problem (I.1.24).*

*Let  $V_{app}$  be the solution of the following problem:*

$$\begin{aligned} \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} V_{app} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V_{app} = 0, \\ \left( r \frac{\partial V_{app}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + i \frac{q_m}{q_c} h \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} \right). \end{aligned}$$

*with gauge condition on the boundary of the cytoplasm*

$$\int_0^{2\pi} V_{app}(1, \theta) d\theta = 0.$$

*Denote by  $\mathcal{C}$  the cylinder  $[0, 1] \times \mathbb{T}$ .*

There exists a constant  $c > 0$  such that:

$$(I.1.42) \quad \|V - V_{app}\|_{H^1(\mathcal{C})} \leq c \frac{|q_m|}{|q_c|} h^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}.$$

PROOF. Obviously  $\phi + (q_m h/q_c) d\tilde{\phi}/d\theta$  satisfies condition (I.1.22), thus  $V_{app}$  is well-defined. To prove Proposition I.1.7, we just have to study the difference  $W$  between  $V$  and  $V_{app}$ . It satisfies in  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \Delta W &= 0, \text{ in } \mathcal{C}, \\ r \frac{dW}{dr} \Big|_{r=1} &= r \frac{dV^c}{dr} \Big|_{r=1-} - \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + \frac{q_m}{q_c} h \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} \right). \end{aligned}$$

Transmission condition (I.1.24d) implies:

$$r \frac{dW}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{q_m}{q_c} \left( r \frac{dV^m}{dr} \Big|_{r=1+} - \left( \phi + \frac{q_m}{q_c} h \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} \right) \right).$$

Estimate (I.1.41) implies directly Proposition I.1.7.  $\square$

Using Riemann conformal mapping theorem, we obtain directly the following result for any domain  $\Omega_h$  composed of a smooth simply connected domain  $\mathcal{O}$  surrounded by a thin membrane  $\mathcal{O}_h$  with constant thickness  $h$ .

PROPOSITION I.1.8. *Let  $\psi \in H^3(\partial\Omega_h)$  satisfy compatibility condition (I.1.22). Let  $V$  be the solution of Problem (I.1.24) with Neumann boundary condition  $\psi$ .*

*Denote by  $\gamma$  the conformal mapping, which maps  $\mathcal{O}$  onto the unit disc and  $\gamma_0$  the restriction of  $\gamma$  to  $\partial\mathcal{O}$ , which maps  $\partial\mathcal{O}$  onto  $\mathbb{T}$ . Let  $\phi$  be defined on the torus by:*

$$\phi = \psi \circ \gamma_0^{-1}.$$

*We denote by  $f$  and  $g$  the following functions defined on  $\partial\mathcal{O}$ :*

$$\begin{aligned} f &= \phi \circ \gamma_0, \\ g &= \left( \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} \right) \circ \gamma_0. \end{aligned}$$

*Let  $q_c$  and  $q_m$  be in  $\mathbb{C}^*$  satisfying condition (I.1.25), and  $h$  be in  $(0, 1)$ . let  $V^c$  be the restriction to  $\mathcal{O}$  of the solution  $V$  of Problem (I.1.24).*

*Let  $V_{app}$  be the solution of the following problem:*

$$\begin{aligned} \Delta V_{app} &= 0, \text{ in } \mathcal{O}, \\ \frac{\partial V_{app}}{\partial n} \Big|_{\partial\mathcal{O}} &= \frac{q_m}{q_c} \left( f + \frac{q_m}{q_c} h g \right). \end{aligned}$$

*with gauge condition on the boundary of the cytoplasm gives:*

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V_{app} d\sigma = 0.$$

*There exists a constant  $c > 0$  depending on  $\mathcal{O}$  such that:*

$$(I.1.43) \quad \|V - V_{app}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq c h^2 (1 + |q_m/q_c|)^2 \|f\|_{H^3(\partial\mathcal{O})}.$$

Thus, we have given the first two terms of the asymptotic expansion of  $V$  in power of  $h$  in the cytoplasm. However, given a simply connected domain  $\mathcal{O}$ , it is difficult to compute  $V_{app}$  since we need the conformal map  $\gamma$  to obtain the boundary data. In [59] we give the first two terms of  $V$  by resolving two successive problems, which are easily computable.

REMARK I.1.9. *In the following, we need a lower bound on  $\text{grad}(V)$ . Let  $s \geq 0$ .*

*Denote by  $V_{app}$  the first two terms of the asymptotic expansion of  $V$  given in Proposition I.1.6 and Proposition I.1.7.*

*Let Neumann boundary data  $\phi$  be in  $H^{3+s}(\mathbb{T})$ ,  $s \geq 0$ . According to Proposition I.1.6 and to Proposition I.1.7 and using Fourier coefficients we infer the following lower bounds on the approximated potential:*

$$(I.1.44a) \quad \|\text{grad}(V_{app})\|_{H^{1+s}(\mathcal{O})} \geq \frac{|q_m|}{|q_c|} \left( \|\phi\|_{H^{-1/2+s}(\mathbb{T})} - h \frac{|q_m|}{|q_c|} \|\phi\|_{H^{1/2+s}(\mathbb{T})} \right).$$

and

$$(I.1.44b) \quad \|\text{grad}(V_{app})\|_{H^{1+s}(\mathcal{O}_h)} \geq \left( h + \frac{|q_m|}{|q_c|} \right) \left( \|\phi\|_{H^{1+s}(\mathbb{T})} - h \frac{|q_m|}{|q_c|} \|\phi\|_{H^{2+s}(\mathbb{T})} \right).$$

*Using Riemann mapping theorem, we obtain the following result for any domain  $\Omega_h$  composed of a smooth simply connected domain  $\mathcal{O}$  surrounded by a thin membrane  $\mathcal{O}_h$  with constant thickness  $h$ .*

PROPOSITION I.1.10. *Let  $\psi \in H^3(\partial\Omega_h)$  and  $\phi \in H^3(\mathbb{T})$  defined as in Proposition I.1.8. We suppose that there exists a constant  $C_\phi > 0$  such that:*

$$(I.1.45) \quad \|\phi\|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \geq C_\phi \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}.$$

*Let  $q_c$  and  $q_m$  be in  $\mathbb{C}^*$  satisfying (I.1.25). Denote by  $V$  the solution of Problem (I.1.24) in  $\Omega_h$ . Then there exists  $c_{\mathcal{O},\phi} > 0$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  and on  $C_\phi$  and there exists  $h_0 \in (0, 1)$  such that:*

$$\forall h \in (0, h_0),$$

$$(I.1.46a) \quad \|V\|_{H^1(\mathcal{O})} \geq \frac{|q_m|}{|q_c|} c_{\mathcal{O},\phi} \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})},$$

$$(I.1.46b) \quad \|V\|_{H^1(\mathcal{O}_h)} \geq h \left( 1 + \frac{|q_m|}{|q_c|} \right) c_{\mathcal{O},\phi} \|\phi\|_{H^3(\mathbb{T})}.$$

PROOF. We just have to write

$$\|V\|_{H^1(\mathcal{O})} \geq \|V_{app}\|_{H^1(\mathcal{O})} - \|V - V_{app}\|_{H^1(\mathcal{O})},$$

and the previous results (I.1.44) with hypothesis (I.1.45) imply directly estimates (I.1.46).  $\square$

**I.1.3. The Vector Wave Equation with a Neumann condition.** In this section, we study the solution of the vector wave equation. We remember that

$$\Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h,$$

is the circular domain defined in Section I.1.1.a.

Let  $f$  be a given function in  $H^{3/2}(\mathbb{T})$ . Let  $q_c$  and  $q_m$  be two non-real complex numbers with positive real part and negative imaginary part, and let  $\mu_c$  and  $\mu_m$  be two strictly positive numbers. We define the piecewise constant functions  $q_h$  and

$\mu_h$  as (I.1.20). This section is devoted to the study of the solution  $E$  of the vector wave equation (I.1.21):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_h} \operatorname{rot} E \right) - q_h E = 0 \text{ in } \Omega_h, \\ \operatorname{rot} E \times n|_{r=1+h} = f. \end{cases}$$

First Theorem I.1.11 gives a regularity result on  $E$  and we deduce Helmholtz equation satisfied by  $E$ . Then, we separate variables to perform Fourier transform and we give the equations satisfied by each components of the field  $E$ . We obtain explicit formulae of Fourier coefficients of each components of  $E$ , from which we infer asymptotics. Then we compare  $E$  with the static electric field  $\operatorname{grad}(V)$ , where  $V$  is the solution of the dielectric formulation.

I.1.3.a. *Regularity result.* Let us give the regularity result on  $E$ .

**THEOREM I.1.11.** *Let  $q_c$  and  $q_m$  be non-real complex numbers with positive real part and negative imaginary part and let  $\mu_c$  and  $\mu_m$  be two strictly positive numbers. Let  $f$  be in  $H^{3/2}(\partial\Omega_h)$ .*

*Therefore, there exists a unique solution  $E$  satisfying Problem (I.1.21). This solution has the following regularity:*

$$E \in (H^1(\Omega_h))^2.$$

**PROOF.** The proof of this result is easy. First, by Lax-Milgram Lemma (see Nečas [51] or Brézis [18]) we prove the existence and the uniqueness in the space<sup>2</sup>  $H_{\operatorname{rot}}(\Omega_h)$  of the solution of Problem (I.1.21). We leave this classical part to the reader.

Since  $\operatorname{div}(E)$  is in  $L^2(\Omega_h)$  (it is null almost everywhere in  $\Omega_h$ ), we infer that  $E$  is in  $H_{\operatorname{div}} \cap H_{\operatorname{rot}}(\Omega_h)$ , so by Corollary 2.10 of Girault and Raviart [35] page 36, we infer:

$$E \in (H_{\operatorname{loc}}^1(\Omega_h))^2.$$

Since  $\partial\Omega_h$  is regular, we may define the unitary exterior normal vector of  $\partial\Omega_h$  in a tubular neighborhood of the boundary. We still denote it by  $n$ . We perform the scalar product of (I.1.21a) with  $n$  and we restrict the result to the boundary. To simplify, we denote respectively by  $z_c$  and by  $z_m$  the products  $\mu_c q_c$  and  $\mu_m q_m$ . We obtain:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E \cdot n - z_m E \cdot n = 0.$$

Using the properties of the operators curl and divergence restricted to the boundary (see T. Abboud and J.C. Nédélec [1]), we obtain:

$$z_m E \cdot n = \operatorname{div}|_{\partial\Omega_h} (\operatorname{rot} E \times n),$$

boundary condition (I.1.21b) implies:

$$z_m E \cdot n = \operatorname{div}|_{\partial\Omega_h} (f).$$

Since  $f$  is assumed to be in  $H^{3/2}(\partial\Omega_h)$ , we obtain that  $E \cdot n$  is in  $H^{1/2}(\partial\Omega_h)$ . We have  $E \in (H_{\operatorname{loc}}^1(\Omega_h))^2$  and  $E \cdot n \in H^{1/2}(\partial\Omega_h)$ , therefore  $E$  is in  $(H^1(\Omega_h))^2$ .  $\square$

---

<sup>2</sup> $H_{\operatorname{rot}}(\Omega_h)$  is the subspace of the functions in  $L^2(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h)$  whose curl in  $L^2(\Omega_h)$ . We have a similar definition of  $H_{\operatorname{div}}(\Omega_h)$ .



Let us present how we go from the vector wave equation to Helmholtz equation. Since the solution  $E$  of Problem (I.1.21) is in  $H^1(\Omega_h) \times H^1(\Omega_h)$ , its divergence is in  $L^2(\Omega_h)$ . The following equalities hold in the weak sense:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) &= 0, \\ \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_h} \operatorname{rot} v\right) &= \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu_h} \operatorname{div} v\right) - \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_h} \operatorname{grad} v\right), \end{aligned}$$

where  $\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_h} \operatorname{grad} v\right)$  is defined by:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_h} \operatorname{grad} v\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{div}((1/\mu_h) \operatorname{grad} v_x) \\ \operatorname{div}((1/\mu_h) \operatorname{grad} v_y) \end{pmatrix}.$$

Thus we obtain that the solution  $E$  of Problem (I.1.21) satisfies:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &\equiv 0, \text{ in } L^2(\Omega_h), \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_h} \operatorname{grad} E\right) + q_h E &= 0, \text{ in } \Omega_h. \end{aligned} \tag{I.1.47}$$

with the conditions:

$$\operatorname{rot}(E) \times n/\mu_h \text{ and } E \times n/\mu_h \text{ are continuous in } r = 1. \tag{I.1.48}$$

I.1.3.b. *Separation of variables.* We remember that according to Section I.1.1.b the field  $E$  is decomposed on the orthonormal basis  $(e_\theta, e_{\theta+\pi/2})$  as follows:

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{E}_r e_\theta + \mathbb{E}_\theta e_{\theta+\pi/2}, \\ &= \mathbb{E}_r e_\theta + \frac{1}{r} E_\theta e_{\theta+\pi/2}. \end{aligned}$$

and we have the simple formula for the curl of  $E$ :

$$\operatorname{curl} E = \frac{1}{r} (\partial_r E_\theta - \partial_\theta \mathbb{E}_r).$$

Using these conventions, we rewrite Problem (I.1.21) in cylindrical coordinates:

$$\rho = \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial \theta}, \tag{I.1.49a}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_h} \rho \right) - q_h \mathbb{E}_r = 0, \text{ for } 0 \leq r \leq 1+h, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{I.1.49b}$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_h r} \rho \right) + q_h E_\theta = 0, \text{ for } 0 \leq r \leq 1+h, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{I.1.49c}$$

$$\rho(1+h, \theta) = (1+h)f(\theta), \text{ for } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{I.1.49d}$$

We perform the Fourier transform in the variable  $\theta$  in equations (I.1.49). We denote by  $\widehat{E}^k = (\widehat{\mathbb{E}}_r^k, \widehat{E}_\theta^k/r)$  the  $k^{\text{th}}$ -Fourier coefficients of  $E$ , and  $\widehat{\rho}^k$ , those of  $\rho$ .

For  $k \in \mathbb{Z}$  and  $r \in [0, 1 + h]$ , we have the following equalities:

$$(I.1.50a) \quad \widehat{\rho}^k = \frac{d\widehat{E}_\theta^k}{dr} - ik \widehat{\mathbb{E}}_r^k,$$

$$(I.1.50b) \quad ik \frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r^2} - q_h \widehat{\mathbb{E}}_r^k = 0,$$

$$(I.1.50c) \quad r \frac{d}{dr} \left( \frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r} \right) + q_h \widehat{E}_\theta^k = 0,$$

$$(I.1.50d) \quad \widehat{\rho}^k|_{1+h} = (1+h) \widehat{f}_k.$$

We multiply by  $r$  equation (I.1.50b) and we differentiate with respect to  $r$  the results; we obtain:

$$\frac{d}{dr} \left( q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right) = ik \frac{d}{dr} \left( \frac{\widehat{\rho}^k}{\mu_h r} \right),$$

or, using (I.1.50c),

$$r \frac{d}{dr} \left( q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right) = -ik q_h E_\theta.$$

Let us differentiate one more time with respect to  $r$ . Using equalities (I.1.50a)–(I.1.50b), we conclude that:

$$\frac{1}{\mu_h} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{q_h} \frac{d}{dr} \left( q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right) \right) = \left( \frac{k^2}{\mu_h r} - r \right) q_h r \widehat{\mathbb{E}}_r^k.$$

and we have the following transmission conditions:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_c} \frac{d}{dr} \left( q_c r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right) \Big|_{r=1^-} &= \frac{1}{z_m} \frac{d}{dr} \left( q_m r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right) \Big|_{r=1^+}, \\ q_c \widehat{\mathbb{E}}_r^k \Big|_{r=1^-} &= q_m \widehat{\mathbb{E}}_r^k \Big|_{r=1^+}. \end{aligned}$$

Let us denote by  $\widehat{E}_r^k$  the following quantity:

$$\widehat{E}_r^k = r \widehat{\mathbb{E}}_r^k.$$

We obtain easily that  $\widehat{E}_r^k$  is solution of Bessel equation in each domain:

$$(I.1.51a) \quad \frac{d^2}{dr^2} \widehat{E}_r^k + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \widehat{E}_r^k + (\mu_h q_h - k^2/r^2) \widehat{E}_r^k = 0,$$

with the following transmission conditions in  $r = 1$  for  $E_r$  :

$$(I.1.51b) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu_c} \frac{d\widehat{E}_r^k}{dr} \Big|_{r=1^-} &= \frac{1}{\mu_m} \frac{d\widehat{E}_r^k}{dr} \Big|_{r=1^+}, \\ q_c \widehat{E}_r^k \Big|_{r=1^-} &= q_m \widehat{E}_r^k \Big|_{r=1^+}. \end{aligned}$$

We remember that  $z_h = \mu_h q_h$ . Relation (I.1.50b) gives  $\widehat{E}_r^k$  in terms of  $\widehat{\rho}^k$ :

$$(I.1.52) \quad \widehat{E}_r^k = \frac{ik}{z_h r} \widehat{\rho}^k.$$

According to boundary condition (I.1.50d), we obtain the following Dirichlet boundary condition for  $\widehat{E}_r^k$  in  $r = 1 + h$ :

$$(I.1.53) \quad \widehat{E}_r^k \Big|_{1+h} = \frac{ik}{z_m} \widehat{f}_k.$$

We remark that for all non-zero integer  $k$ , for all  $r$  in  $[0, 1 + h]$ , we have easily  $\widehat{E}_\theta^k/r$  in terms of  $\widehat{E}_r^k$ . Actually, replacing equality (I.1.52) in relation (I.1.50c), we obtain:

$$(I.1.54) \quad \widehat{E}_\theta^k = \frac{1}{ik} r \frac{d}{dr} \left( \widehat{E}_r^k \right),$$

or,

$$\widehat{\mathbb{E}}_\theta^k = \frac{1}{ik} \frac{d}{dr} \left( r \widehat{\mathbb{E}}_r^k \right),$$

thus the knowledge of  $\widehat{E}_r^k$  suffices to obtain all the non-zero Fourier modi of  $E$ . The case  $k = 0$  has to be considered separately. Actually, if  $k = 0$ , using equalities (I.1.50) we obtain directly the following equation for  $\widehat{E}_r^0$ :

$$(I.1.55a) \quad \text{for } r \in [0, 1 + h],$$

$$r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\mu_h r} \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right) + q_h r \widehat{E}_\theta^0 = 0,$$

Replacing boundary condition (I.1.50d) in equality (I.1.50a) applied in  $r = 1 + h$ , we obtain the following Neumann boundary condition for  $\widehat{E}_\theta^0$ :

$$(I.1.56) \quad \left. \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right|_{r=1+h} = (1 + h) \widehat{f}_0.$$

I.1.3.c. *Study of  $E_r$ .* In this section we give Fourier expansion of the normal component  $\mathbb{E}_r$  of  $E$ . Since we know explicitly the solutions of Bessel equation satisfied by  $E_r$ , it is more convenient to study  $E_r$ , which is equal to  $r\mathbb{E}_r$ .

Let  $h$  be in  $(0, 1)$ . Let  $q_c, q_m, \mu_c$  and  $\mu_m$  be given constants as in Theorem I.1.11. We define :

$$z_c = \mu_c q_c, \quad z_m = \mu_m q_m,$$

$$q_h(r) = \begin{cases} q_c, & \text{if } 0 \leq r \leq 1, \\ q_m, & \text{if } 1 \leq r \leq 1 + h, \end{cases}$$

$$\mu_h(r) = \begin{cases} \mu_c, & \text{if } 0 \leq r \leq 1, \\ \mu_m, & \text{if } 1 \leq r \leq 1 + h, \end{cases}$$

$$z_h = \mu_h q_h.$$

Let  $f$  be a given function in  $L^2(\mathbb{T})$ . For all integer  $k$ ,  $\widehat{E}_r^k$  is the solution of the following problem:

$$(I.1.57a) \quad \frac{d^2}{dr^2} \widehat{E}_r^k + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \widehat{E}_r^k + (z_h - k^2/r^2) \widehat{E}_r^k = 0,$$

with the following transmission conditions in  $r = 1$ :

$$(I.1.57b) \quad \frac{1}{\mu_c} \frac{d\widehat{E}_r^k}{dr} \Big|_{r=1^-} = \frac{1}{\mu_m} \frac{d\widehat{E}_r^k}{dr} \Big|_{r=1^+},$$

$$(I.1.57c) \quad q_c \widehat{E}_r^k \Big|_{r=1^-} = q_m \widehat{E}_r^k \Big|_{r=1^+},$$

and with the Dirichlet Boundary condition:

$$(I.1.57d) \quad \widehat{E}_r^k \Big|_{r=1+h} = \frac{ik}{z_m} \widehat{f}_k;$$

in particular

$$\widehat{E}_r^0 \equiv 0.$$

Let  $J_k$  and  $Y_k$  be Bessel functions of first and second kind. Since, for all integer  $k$  in  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\widehat{E}_r^k$  is the solution of Problem (I.1.57), we know (see Watson [76] or Nikiforov and Ouvarov [53]) that  $\widehat{E}_r^k$  can be written under the following form:

$$(I.1.58a) \quad \forall r \in [0, 1], \quad \widehat{E}_r^k(r) = \alpha_k^c J_{|k|}(\sqrt{z_c}r),$$

$$(I.1.58b) \quad \forall r \in [1, 1+h], \quad \widehat{E}_r^k(r) = \alpha_k^m J_{|k|}(\sqrt{z_m}r) + \beta_k^m Y_{|k|}(\sqrt{z_m}r).$$

Transmission conditions (I.1.57b) and (I.1.57c) with Neumann boundary condition (I.1.57d) should permit to determine the constants  $\alpha_k^c$ ,  $\alpha_k^m$  and  $\beta_k^m$ . Actually, these constants must satisfied a  $3 \times 3$  matricial system of 3 equations with 3 unknowns. For all  $n$  in  $\mathbb{N}^*$ , for all we define the sequence of matrices  $\mathcal{A}_k(h)$ :

$$(I.1.59) \quad \mathcal{A}_n(h) = \begin{pmatrix} q_c J_n(\sqrt{z_c}) & -q_m J_n(\sqrt{z_m}) & -q_m Y_n(\sqrt{z_m}) \\ \mu_m \sqrt{z_c} J_n'(\sqrt{z_c}) / \mu_c & -\sqrt{z_m} J_n'(\sqrt{z_m}) & -\sqrt{z_m} Y_n'(\sqrt{z_m}) \\ 0 & J_n(\sqrt{z_m}(1+h)) & Y_n(\sqrt{z_m}(1+h)) \end{pmatrix},$$

and  $\alpha_k^c$ ,  $\alpha_k^m$  and  $\beta_k^m$  must satisfy:

$$(I.1.60) \quad \mathcal{A}_{|k|}(h) \begin{pmatrix} \alpha_k^c \\ \alpha_k^m \\ \beta_k^m \end{pmatrix} = \frac{ik}{z_m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{f}_k \end{pmatrix}.$$

I.1.3.d. *Study of  $E_\theta$ .* For  $k$  non nul, we have the following expression of  $\widehat{E}_\theta^k$  in terms of  $\widehat{E}_r^k$ :

$$(I.1.61) \quad \widehat{E}_\theta^k = \frac{1}{ik} r \frac{d}{dr} \left( \widehat{E}_r^k \right).$$

The 0<sup>th</sup> Fourier coefficient of  $E_\theta$  satisfies the following equation

$$(I.1.62a) \quad \text{for } r \in [0, 1+h],$$

$$(I.1.62a) \quad r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\mu_h r} \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \right) + q_h r \widehat{E}_\theta^0 = 0,$$

$$(I.1.62b) \quad \frac{d\widehat{E}_\theta^0}{dr} \Big|_{1+h} = (1+h) \widehat{f}_0.$$

Equation (I.1.62a) is an ordinary differential equation of type Laplace at the sense of Hille [40]. With change of variables, we obtain the general solution of (I.1.62a) in each interval where  $z_h$  is constant, with Bessel functions. Define

$$\begin{aligned}\zeta &= \sqrt{z_c}, \\ \eta &= \sqrt{z_m}, \\ \tilde{\eta} &= (1+h)\sqrt{z_m},\end{aligned}$$

and set:

$$w(s) = \frac{\widehat{E}_\theta^0(s/\sqrt{z_h})}{s}.$$

The function  $w$  is the solution, in the complex segments  $\zeta[0, 1]$  and  $\eta[1, 1+h]$  of following Bessel equation:

$$s^2 w'' + s w' + (s^2 - 1)w = 0.$$

A fundamental system of solutions of this equation consists of Bessel functions of first and second kinds, denoted respectively by  $J_1$  and by  $Y_1$ .

We define the matrix  $\mathcal{A}_0$  by:

$$\mathcal{A}_0(h) = \begin{pmatrix} \zeta J_1(\zeta) & -\eta J_1(\eta) & -\eta Y_1(\eta) \\ q_c J_1'(\zeta) & -q_m J_1'(\eta) & -q_m Y_1'(\eta) \\ 0 & \eta(\tilde{\eta} J_1'(\tilde{\eta}) + J_1(\tilde{\eta})) & \eta(\tilde{\eta} Y_1'(\tilde{\eta}) + Y_1(\tilde{\eta})) \end{pmatrix}.$$

Then,  $\widehat{E}_\theta^0$  is equal to:

$$(I.1.63a) \quad \widehat{E}_\theta^0(r) = a_0^c r \zeta J_1(r\zeta) \text{ for } 0 \leq r \leq 1,$$

$$(I.1.63b) \quad \widehat{E}_\theta^0(r) = a_0^m r \eta J_1(r\eta) + b_0^m r \eta Y_1(r\eta), \text{ for } 1 < r \leq 1+h$$

where the constants  $a_0^c$ ,  $a_0^m$ ,  $b_0^m$  are defined by:

$$\mathcal{A}_0(h) \begin{pmatrix} a_0^c \\ a_0^m \\ b_0^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+h)\widehat{f}_0 \end{pmatrix}.$$

I.1.3.e. *Resolubility.* We could perform calculations on Bessel functions to show that for each  $k$ , Fourier coefficients are well defined by the previous expressions, and we could show that Fourier series converge in appropriate spaces. However, there is a simpler reasoning. According to Theorem I.1.3.a,  $E$  is in  $(H^1(\Omega_h))^2$ , thus its components  $\mathbb{E}_r$  and  $\mathbb{E}_\theta$  are in  $H^1(\Omega_h)$ . Since

$$E_r = r \mathbb{E}_r,$$

$E_r$  is also in  $H^1(\Omega_h)$ . Thus for each  $k \in \mathbb{Z}$ , the vector

$$\begin{pmatrix} \alpha_k^c \\ \alpha_k^m \\ \beta_k^m \end{pmatrix},$$

is well-defined by (I.1.60) and the serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{E}_r^k(r) \exp(ik\theta),$$

with coefficients  $\widehat{E}_r^k$  defined by (I.1.58), converges in  $L^2(\mathbb{T})$  for almost all  $r$  in  $[0, 1 + h]$ , and its sum is a function, which belongs to  $H^1(\Omega_h)$ . We have the same result for

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{E}_\theta^k(r) \exp(ik\theta).$$

Now we show asymptotic expansion of each components of  $E$ , when the Neumann boundary data  $f$  is a trigonometric polynomial.

I.1.3.f. *Asymptotics.*

- *Asymptotics in the cytoplasm.*

Let  $k \in \mathbb{Z}^*$  and suppose that there exists a constant  $C_0 > 0$  such that

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\mu_m}{\mu_c} \leq C_0.$$

We remember that  $z_m$  and  $z_c$  are the respective products  $\mu_m q_m$  and  $\mu_c q_c$ .

Denote by  $D_1$  and  $D_2$  the two following expressions:

$$\begin{aligned} D_1 &= J_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)) Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - J'_{|k|}(\sqrt{z_m}) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)), \\ D_2 &= J_{|k|}(\sqrt{z_m}) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)) - J_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+h)). \end{aligned}$$

Recall (see Watson [76] page 76) that:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad J_{|k|}(z) Y'_{|k|}(z) - J'_{|k|}(z) Y_{|k|}(z) = \frac{2}{\pi z}.$$

From (I.1.60), we infer through a simple calculation the following expression of  $\alpha_k^c$ :

$$\alpha_k^c = \frac{2/(\pi\sqrt{z_m})}{D_1 + \left(\sqrt{z_m/z_c}\right) \left(J'_{|k|}(\sqrt{z_c})/J_{|k|}(\sqrt{z_c})\right) D_2} \times \frac{i\mu_c k \widehat{f}_k}{\mu_m z_c J_{|k|}(\sqrt{z_c})}.$$

Using Taylor formula, we obtain :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2}{\pi\sqrt{z_m}} + \frac{h^2 z_m}{2} \int_0^1 (1-th)^2 \left( J''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) \right. \\ &\quad \left. - Y''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) J'_{|k|}(\sqrt{z_m}) \right) dt, \\ D_2 &= \frac{2h}{\pi} - \frac{h^2 z_m}{2} \int_0^1 (1-th)^2 \left( J''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}) \right. \\ &\quad \left. - Y''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) J_{|k|}(\sqrt{z_m}) \right) dt. \end{aligned}$$

We have for all  $k \in \mathbb{N}$ , for all  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$z f_k(z) = k f_k(z) - f_{k+1}(z),$$

for  $f_k$  equal to  $J_{|k|}$  or  $Y_{|k|}$ . Thus, as straightforward consequences of the well known asymptotics properties of Bessel functions (see Watson), there exists  $C > 0$  such

that

$$\left| z_m \left( J''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) J'_{|k|}(\sqrt{z_m}) \right) \right| \leq Ck^2/\sqrt{|z_m|},$$

$$\left| z_m \left( J''_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}(1+th)) J_{|k|}(\sqrt{z_m}) \right) \right| \leq Ck^2,$$

for  $z_m$  and  $h$  tending to zero, thus we infer:

$$D_1 = \frac{2}{\pi\sqrt{z_m}} \left( 1 + O(k^2h^2) \right),$$

$$D_2 = \frac{2h}{\pi} + O(k^2h^2).$$

We also have, for  $z_c$  tending to zero:

$$J'_{|k|}(\sqrt{z_c})/J_{|k|}(\sqrt{z_c}) = \frac{|k|}{\sqrt{z_c}} + O\left(\frac{\sqrt{|z_c|}}{1+|k|}\right).$$

Therefore we obtain:

$$(I.1.64) \quad D_1 + \left(\sqrt{z_m/z_c}\right) \left(J'_{|k|}(\sqrt{z_c})/J_{|k|}(\sqrt{z_c})\right) D_2 = 2/(\pi\sqrt{z_m}) \left(1 + O(k^2h^2)\right)$$

$$+ \left(\sqrt{z_m/z_c}\right) \left(|k|/\sqrt{z_c} + O\left(\sqrt{|z_c|}/(1+|k|)\right)\right) (2h/\pi + O(k^2h^2)),$$

thus

$$\alpha_k^c = \left( 1 - \frac{z_m}{z_c} |k|h + O\left(\frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) \right) \times \frac{\mu_c i k \hat{f}_k}{\mu_m z_c J_{|k|}(\sqrt{z_c})}.$$

Thus, we infer the asymptotic expression of  $\widehat{E}_r^k$ , for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ :

$$(I.1.65) \quad \widehat{E}_r^k = \left( 1 - \frac{z_m}{z_c} |k|h + O\left(\frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) \right)$$

$$\times \frac{\mu_c i k \hat{f}_k J_{|k|}(\sqrt{z_c}r)}{\mu_m z_c J_{|k|}(\sqrt{z_c})}.$$

Using equality (I.1.61), we infer

$$(I.1.66) \quad \widehat{E}_\theta^k = \left( 1 - \frac{z_m}{z_c} |k|h + O\left(\frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) \right)$$

$$\times \frac{\mu_c \hat{f}_k \sqrt{z_c} J'_{|k|}(\sqrt{z_c}r) + J_{|k|}(\sqrt{z_c})}{\mu_m z_c J_{|k|}(\sqrt{z_c})}.$$

It remains to study  $\widehat{E}_\theta^0$  defined by (I.1.63).

A simple (but tedious!) calculation implies:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta^0 &= (2/(\pi\sqrt{z_m}))/\left(\sqrt{z_c z_m}(1+h)J_1'(\sqrt{z_c})\left(J_1(\sqrt{z_m})Y_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- Y_1(\sqrt{z_m})J_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right) + \sqrt{z_c}J_1'(\sqrt{z_c})\left(Y_1(\sqrt{z_m})J_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- J_1(\sqrt{z_m})Y_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right) + J_1(\sqrt{z_c})z_m(1+h)\left(Y_1'(\sqrt{z_m})J_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- J_1'(\sqrt{z_m})Y_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right) + J_1(\sqrt{z_c})\sqrt{z_m}\left(Y_1'(\sqrt{z_m})J_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- J_1'(\sqrt{z_m})Y_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right)\right) \times r\sqrt{z_c}J_1(\sqrt{z_c}r)\frac{\mu_c(1+h)\sqrt{z_m}}{\mu_m\sqrt{z_c}}\widehat{f}_0. \end{aligned}$$

Using properties of Bessel functions, as we did above, we infer

$$\begin{aligned} &\sqrt{z_c z_m}(1+h)J_1'(\sqrt{z_c})\left(J_1(\sqrt{z_m})Y_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right. \\ &\quad \left.- Y_1(\sqrt{z_m})J_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right) + \sqrt{z_c}J_1'(\sqrt{z_c})\left(Y_1(\sqrt{z_m})J_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right. \\ &\quad \left.- J_1(\sqrt{z_m})Y_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right) + J_1(\sqrt{z_c})z_m(1+h)\left(Y_1'(\sqrt{z_m})J_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right. \\ &\quad \left.- J_1'(\sqrt{z_m})Y_1'(\sqrt{z_m}(1+h))\right) + J_1(\sqrt{z_c})\sqrt{z_m}\left(Y_1'(\sqrt{z_m})J_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right. \\ &\quad \left.- J_1'(\sqrt{z_m})Y_1(\sqrt{z_m}(1+h))\right) = \left(2(1+h)/\pi + O\left(|z_c| + h^2\left(1 + \sqrt{|z_m|} + |z_m|\right)\right)\right) \\ &\quad \times J_1(\sqrt{z_c}). \end{aligned}$$

Thereby, we deduce the asymptotic for  $\widehat{E}_\theta^0$ . A simple calculation implies:

$$\widehat{E}_\theta^0 = \left(1 + O\left(|z_c| + h^2\left(1 + \sqrt{|z_m|} + |z_m|\right)\right)\right) r\frac{\mu_c J_1(\sqrt{z_c}r)}{\mu_m J_1(\sqrt{z_c})}\widehat{f}_0.$$

Therefore, we infer the following theorem.

**THEOREM I.1.12.** *Let  $f$  be  $H^3(\mathbb{T})$ . Suppose that there exists a constant  $C_0 > 0$  such that*

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\mu_m}{\mu_c} \leq C_0.$$

*Let  $E_r$  and  $E_\theta$  be the components of the solution of Problem (I.1.49). We define  $E^{app}$  the solution in  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  of the following problem:*

$$(I.1.67a) \quad \text{rot rot } E^{app} + z_c E^{app} = 0,$$

$$(I.1.67b) \quad \text{rot } E^{app} \times n = \frac{\mu_c}{\mu_m} \left( f + i\frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left( \frac{df}{d\theta} \right) \right).$$

*We denote by  $\widehat{E}_\theta^{app}(\cdot, k)$  and by  $\widehat{E}_r^{app}(\cdot, k)$  the Fourier coefficients of each components of  $E^{app}$ . Then for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ , we have*

$$z_c \left( \widehat{E}_r^k - \widehat{E}_r^{app}(\cdot, k) \right) = O \left( \left( \frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2 k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2 |k|^3 \right) \left| \widehat{f}_k \right| \right),$$

*and*

$$z_c \left( \widehat{E}_\theta^k - \widehat{E}_\theta^{app}(\cdot, k) \right) = O \left( \left( \frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2 k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2 |k|^3 \right) \left| \widehat{f}_k \right| \right),$$



and for  $k = 0$ , we have:

$$\widehat{E}_\theta^0 - \widehat{E}_\theta^{app}(\cdot, 0) = O\left(|z_c| + h^2\left(1 + \sqrt{|z_m|} + |z_m|\right)\right) r \left|\widehat{f}_0\right|.$$

Remember that  $\mathbf{C} = [0, 1] \times \mathbb{T}$ . The above estimates imply in particular:

$$\begin{aligned} |z_c| \|E - E^{app}\|_{(L^2(\mathbf{C}))^2} &= O\left(\left(|z_m|h + h^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|}h^2\right) \left|f - \widehat{f}_0\right|_{H^3(\mathbb{T})}\right. \\ &\quad \left.+ (|z_c|^2 + |z_c|h^2) \left|\widehat{f}_0\right|\right), \end{aligned}$$

for  $z_m$ ,  $z_c$  and  $h$  tending to zero.

REMARK I.1.13. Observe that if  $\mu_c = \mu_m$  and if  $\phi = z_c f / z_m$ , the boundary condition imposed for  $E^{app}$  is exactly the same as those imposed on  $\partial_n V^{app}$  in Proposition I.1.7.

- *Asymptotics in the membrane.*

In the membrane,  $\widehat{E}_r^k$  has the following expression, for  $k \neq 0$ :

$$\widehat{E}_r^k = \alpha_k^m J_{|k|}(\sqrt{z_m}r) + \beta_k^m Y_{|k|}(\sqrt{z_m}r),$$

with  $\alpha_k^m$  and  $\beta_k^m$  are given by:

$$\begin{aligned} \alpha_k^m &= \frac{Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m/z_c} \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) Y_{|k|}(\sqrt{z_m})}{D_1 + \left( \sqrt{z_m/z_c} \right) \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) D_2} \times \frac{ik \widehat{f}_k}{z_m}, \\ \beta_k^m &= - \frac{J'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m/z_c} \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) J_{|k|}(\sqrt{z_m})}{D_1 + \left( \sqrt{z_m/z_c} \right) \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) D_2} \times \frac{ik \widehat{f}_k}{z_m}. \end{aligned}$$

We infer:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_r^k &= \left( \frac{J_{|k|}(\sqrt{z_m}r) Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y_{|k|}(\sqrt{z_m}r) J'_{|k|}(\sqrt{z_m})}{D_1 + \left( \sqrt{z_m/z_c} \right) \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) D_2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{z_m/z_c} \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{J_{|k|}(\sqrt{z_m}r) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y_{|k|}(\sqrt{z_m}r) J_{|k|}(\sqrt{z_m})}{D_1 + \left( \sqrt{z_m/z_c} \right) \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) D_2} \right) \\ &\quad \times \frac{ik \widehat{f}_k}{z_m}. \end{aligned}$$

Using Taylor formula, we obtain:

$$\begin{aligned} J_{|k|}(\sqrt{z_m}r) Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y_{|k|}(\sqrt{z_m}r) J'_{|k|}(\sqrt{z_m}) &= \frac{2}{\pi \sqrt{z_m}} \left( 1 + O(h^2 k^2) \right), \\ J_{|k|}(\sqrt{z_m}r) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}) - Y_{|k|}(\sqrt{z_m}r) J_{|k|}(\sqrt{z_m}) &= (r-1)|k| \frac{2}{\pi} + O(h^2 k^2). \end{aligned}$$

Using (I.1.64), we infer easily:

$$\widehat{E}_r^k = \left( 1 - \frac{z_m}{z_c} |k|(r-1-h) + O\left(\frac{|z_m|h}{1+|k|} + h^2 k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2 |k|^3\right) \right) \times \frac{ik \widehat{f}_k}{z_m}.$$

Therefore, by summing for  $k \in \mathbb{Z}^*$ , we obtain the following asymptotic in the membrane,

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{z_m} \left( \frac{df}{d\theta} + i \frac{z_m}{z_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + O \left( \left( |z_m| h + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right) \right) |f|_{H^3(\mathbb{T})} \right) \right). \end{aligned}$$

For  $\widehat{E}_\theta^k$ , we use (I.1.61). We obtain:

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta^k &= \left( \frac{\sqrt{z_m} J'_{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y'_{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m} Y'_{|k|}(\sqrt{z_m} r) J'_{|k|}(\sqrt{z_m})}{D_1 + \left( \sqrt{z_m}/z_c \right) \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) D_2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{z_m}/z_c \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\sqrt{z_m} J'_{|k|}(\sqrt{z_m} r) Y_{|k|}(\sqrt{z_m}) - \sqrt{z_m} Y'_{|k|}(\sqrt{z_m} r) J_{|k|}(\sqrt{z_m})}{D_1 + \left( \sqrt{z_m}/z_c \right) \left( J'_{|k|}(\sqrt{z_c}) / J_{|k|}(\sqrt{z_c}) \right) D_2} \right) \\ &\quad \times \frac{r \widehat{f}_k}{z_m}. \end{aligned}$$

Exactly by the same way, we obtain:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta^k &= \left( \frac{z_m}{z_c} |k| - k^2(r-1) + \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h \right. \\ &\quad \left. + O \left( |z_m| h + h^2 k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2 |k|^3 \right) \right) \times \frac{\widehat{f}_k}{z_m}. \end{aligned}$$

A simple estimate shows that

$$\widehat{E}_\theta^0 = O \left( h |\widehat{f}_0| \right).$$

Therefore, if  $f$  belongs to  $H^3(\mathbb{T})$ , we obtain:

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{1}{z_m} \left( i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left( \frac{df}{d\theta} \right) + \left( (r-1) - \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h \right) \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right. \\ &\quad \left. + O \left( \left( |z_m| h + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right) \right) |f|_{H^3(\mathbb{T})} \right) \right). \end{aligned}$$

We have therefore showed the following proposition.

**PROPOSITION I.1.14.** *Let  $f$  belong to  $H^3(\mathbb{T})$ . Let  $E$  be the solution of the vector wave equation in all the cell, with  $f$  as Neumann boundary condition.*

Then, we have the following asymptotics for  $z_m$ ,  $z_c$  and  $h$  tending to zero, for all  $r$  in  $[1, 1+h]$ :

$$\forall r \in [1, 1+h],$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{z_m} \left( \frac{df}{d\theta} + i \frac{z_m}{z_c} (r-1-h) \mathcal{H} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + O \left( \left( |z_m| h + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right) \right) |f|_{H^3(\mathbb{T})} \right) \right), \\ E_\theta &= \frac{1}{z_m} \left( i \frac{z_m}{z_c} \mathcal{H} \left( \frac{df}{d\theta} \right) + \left( (r-1) - \frac{z_m^2}{z_c^2} k^2 h \right) \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right. \\ &\quad \left. + O \left( \left( |z_m| h + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right) \right) |f|_{H^3(\mathbb{T})} \right) \right). \end{aligned}$$

REMARK I.1.15. Let us suppose  $\mu_m = \mu_c = 1$ . We observe that if we set

$$\phi = \frac{df}{d\theta},$$

in Proposition I.1.6, we get straight to the following estimate in the membrane, i.e. for all  $r \in [1, 1+h]$ ,

$$(z_m E - \text{grad} V)(r, \cdot) = O \left( \left( |z_m| h + h^2 \left( 1 + \frac{|z_m|}{|z_c|} \right) \right) |f|_{H^3(\mathbb{T})} \right).$$

I.1.3.g. *Comparison with the dielectric formulation in the cytoplasm.* Now we compare  $E$  with  $V^{app}$  given in Proposition I.1.7. We suppose that

$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = 1.$$

Since we have for all  $r \in (0, 1)$ , for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ , for  $z_c$  tending to zero:

$$\frac{J_{|k|}(\sqrt{z_c} r)}{J_{|k|}(\sqrt{z_c})} = r^{|k|} \left( 1 + O(\sqrt{|z_c|}) \right),$$

we infer from (I.1.65), for  $h$ ,  $z_m$  and  $z_c$  tending to zero the following asymptotic

$$\begin{aligned} \widehat{E}_r^k &= \left( 1 - \frac{z_m |k| h}{z_c} + O \left( \sqrt{|z_c|} \left( 1 + \left| \frac{z_m}{z_c} \right| |k| h \right) + \frac{|z_m| h}{1 + |k|} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{|z_m|} h^2 k^2 + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2 |k|^3 \right) \right) \times \frac{i k \widehat{f}_k}{z_c} r^{|k|}. \end{aligned}$$

We emphasize that the constant in  $O$  depends on  $k$ .

Let us remember the asymptotic expression of Fourier coefficient of  $V_{app}$  given in Proposition I.1.7:

$$\widehat{V}_{app}^k = \frac{z_m}{z_c} \left( 1 - \frac{z_m |k| h}{z_c} \right) \frac{\widehat{\phi}_k}{|k|} r^{|k|},$$

thus:

$$\begin{aligned} r\partial_r \widehat{V}_{app}^k &= \frac{z_m}{z_c} \left(1 - \frac{z_m|k|h}{z_c}\right) \widehat{\phi}_k r^{|k|}, \\ ik \widehat{V}_{app}^k &= \frac{z_m}{z_c} \left(1 - \frac{z_m|k|h}{z_c}\right) i \operatorname{sgn}(k) \widehat{\phi}_k r^{|k|}. \end{aligned}$$

Thereby, if  $\widehat{\phi}_k = ik\widehat{f}_k/z_m$ , we have shown that for each  $k \in \mathbb{Z}^*$ , for all  $r \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{E}_r^k - r\partial_r \widehat{V}_{app}^k &= O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|}\right. \\ &\quad \left.+ \sqrt{|z_m|h^2k^2} + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) \times \frac{|k\widehat{f}_k|}{|z_c|} r^{|k|}. \end{aligned}$$

Using equality (I.1.61), and using well known properties of Bessel functions, we infer that for each  $k \in \mathbb{Z}^*$ , for all  $r \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta^k - ik \widehat{V}_{app}^k &= O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|}\right. \\ &\quad \left.+ \sqrt{|z_m|h^2k^2} + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) \times \frac{|k\widehat{f}_k|}{|z_c|} r^{|k|}. \end{aligned}$$

Therefore, we infer the following theorem.

**THEOREM I.1.16.** *Let  $f$  belong to  $H^3(\mathbb{T})$ . Let  $E_r$  and  $E_\theta$  be the components of the solution of Problem (I.1.49). Let  $\phi$  be the following function*

$$\phi = \frac{df}{d\theta},$$

and  $V_{app}$  is given in Proposition I.1.7.

Then for all  $k \in \mathbb{Z}^*$ , we have

$$\begin{aligned} z_c \widehat{E}_\theta^k - i \frac{z_c}{z_m} k V_{app}^k &= O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|}\right. \\ &\quad \left.+ \sqrt{|z_m|h^2k^2} + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) |\widehat{f}_k| r^{|k|}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} z_c \widehat{E}_r^k - r \frac{z_c}{z_m} \partial_r \widehat{V}_{app}^k &= O\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| |k|h\right) + \frac{|z_m|h}{1+|k|}\right. \\ &\quad \left.+ \sqrt{|z_m|h^2k^2} + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2|k|^3\right) |\widehat{f}_k| r^{|k|}. \end{aligned}$$

In particular, we infer, when  $z_m$ ,  $z_c$  and  $h$  tend to zero:

$$\begin{aligned} \left\| z_c E - i \frac{z_c}{z_m} \operatorname{grad}(V_{app}) \right\|_{(L^2(\mathcal{C}))^2} &= O\left(\left(\sqrt{|z_c|} \left(1 + \left|\frac{z_m}{z_c}\right| h\right) + |z_m|h\right. \right. \\ &\quad \left. \left.+ \sqrt{|z_m|h^2} + \frac{|z_m|}{|z_c|} h^2\right) \|f - \widehat{f}_0\|_{H^3(\mathbb{T})} + |z_c| |\widehat{f}_0|\right). \end{aligned}$$

In the next section, we shall give estimates between the static field and the total field in a domain with an arbitrary shape.

**I.1.4. Comparison of the formulations in a domain with an arbitrary shape.** In the following, the permeability  $\mu_h$  is constant, equal to 1.

At low frequencies, to compute the electric field in a dielectric material, electrotechnician researchers got into the habit of working with the dielectric formulation instead of computing the solution of the vector wave equation. This means that they neglect the curl part of the field, and make the quasi-static approximation:

$$(I.1.68) \quad E \sim \text{grad } V.$$

Given a dielectric material, it is convenient to know the cut-off frequency under which the dielectric formulation gives good results and to be able to estimate the error made with this approximation.

I.1.4.a. *Which boundary data has to be imposed?* First of all, we have to find the boundary data for dielectric formulation (I.1.23), so that we may compare the solutions of the dielectric formulation and the vector wave equation. We recall that the electric field is solution of the following problem:

$$(I.1.69a) \quad \begin{aligned} &\text{find } E \in H(\text{curl}, \Omega_h) \text{ such that :} \\ &\text{rot rot } E - z_h E = 0, \text{ in } \Omega_h, \end{aligned}$$

with Neumann boundary condition:

$$(I.1.69b) \quad \text{rot } E \times n = f \text{ on } \partial\Omega_h.$$

Taking the divergence of (I.1.69a), we obtain  $\text{div}(z_h E) = 0$ . Moreover, extending the vector  $n$  to a neighbourhood of  $\partial\Omega_h$ , and taking the scalar product by  $n$  of (I.1.69a), boundary condition (I.1.69b) gives the boundary condition on  $E \cdot n$  on  $\partial\Omega_h$ :

$$\begin{aligned} z_m E \cdot n|_{\partial\Omega_h} &= \text{rot rot } E \cdot n, \\ &= \text{div}|_{\partial\Omega_h}(\text{rot } E \times n), \end{aligned}$$

thus, by Neumann boundary condition (I.1.69b), we obtain:

$$(I.1.70) \quad z_m E \cdot n|_{\partial\Omega_h} = \text{div}|_{\partial\Omega_h}(f).$$

We refer the reader to T. Abboud and J.C. Nédélec [1] for more details on the operators  $\text{div}$  and  $\text{rot}$  restricted to a boundary.

Replacing  $E$  by approximation (I.1.68) in equality (I.1.70), we obtain the following Neumann boundary condition on  $V$ :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_h} = \frac{1}{z_m} \text{div}|_{\partial\Omega_h}(f).$$

I.1.4.b. *Error estimate.* In this section we compare the electric field computed by assuming that its curl part is null (*i.e* the solution of the dielectric formulation) to the solution of the whole vector wave equation. This is to justify that at low frequencies the electric field can be computed by the dielectric formulation. We give error estimates and criteria on the electric parameters of the domain, so that the quasi-static approximation might be validated.

**THEOREM I.1.17 (Relative and absolute errors).** *Let  $h \in (0, 1)$ . Let  $f$  belong to  $H^3(\partial\Omega_h)$ . We suppose that there exists a constant  $C_f > 0$  such that*

$$(I.1.71) \quad \|\text{div}|_{\partial\Omega_h}(f)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega_h)} \geq C_f \|f\|_{H^3(\partial\Omega_h)}.$$

Observe that such inequality holds for trigonometric polynomials. Let  $z_c$  and  $z_m$  be two non-real complex with positive real part and negative imaginary part; and denote by  $C_0$

$$(I.1.72) \quad C_0 = \frac{\max\left(|\Re(z_c)|, |\Re(z_m)|\right)}{\min\left(|\Im(z_c)|, |\Im(z_m)|\right)}.$$

We denote by  $z_h$  the piecewise-constant function defined by:

$$z_h = \begin{cases} z_c, & \text{in } \mathcal{O}, \\ z_m, & \text{in } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Let  $E$  be the solution of the vector wave equation:

$$(I.1.73a) \quad \text{rot rot } E - z_h E = 0, \text{ in } \Omega_h,$$

with Neumann boundary condition:

$$(I.1.73b) \quad \text{rot } E \times n = f \text{ on } \partial\Omega_h.$$

Let  $V$  be the solution of the following dielectric formulation:

$$\begin{aligned} \text{div}(z_h \text{grad } V) &= 0, \text{ in } \Omega_h, \\ \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_h} &= \text{div}|_{\partial\Omega_h}(f). \end{aligned}$$

There exists a constant  $C$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  and on  $C_f$  such that we have the following estimate for the absolute error:

$$\|z_m E - \text{grad } V\|_{(L^2(\Omega_h))^2} \leq C(1 + C_0)(|z_c| + |z_m|) \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_h)},$$

and for the relative error

$$\begin{aligned} \|z_m E - \text{grad } V\|_{(L^2(\Omega_h))^2} &\leq C(1 + C_0) \left(1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h}\right) (|z_m| \\ &\quad + |z_c|) \|\text{grad } V\|_{L^2(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

PROOF. Denote by  $A$ :

$$A = z_m E - \text{grad}(V).$$

A simple computation shows:

$$\text{rot rot } A - z_h A = z_h \text{grad}(V), \text{ in } \Omega_h,$$

with Neumann boundary condition:

$$\text{rot } A \times n = z_m f \text{ on } \partial\Omega_h.$$

Observe that

$$A \cdot n|_{\partial\Omega_h} = 0,$$

moreover,  $\text{div}(A) = 0$ , thus [35] Lemma 3.6 (page 53) and [35] Theorem 3.8 (page 54) imply the existence of a constant  $C$  depending on the domain such that:

$$\|A\|_{(H^1(\Omega_h))^2} \leq C \|\text{rot}(A)\|_{L^2(\Omega_h)}.$$

Observe that *a priori*, the above constant  $C$  depends on  $h$  since it depends on  $\Omega_h$ . However, it is clear that it does not blow up for  $h$  tending to zero, and it might be bounded by a constant depending on  $\mathcal{O}$ , which is independent on  $h$ .

By classical way, using imaginary and real parts of  $z_h$  and hypothesis (I.1.72), we infer that there exists a constant  $c$  such that

$$\begin{aligned} \|\text{rot}(A)\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq c \left( 1 + \frac{\max(|\Re(z_c)|, |\Re(z_m)|)}{\min(|\Im(z_c)|, |\Im(z_m)|)} \right) (|z_m| \\ &\quad + |z_c|) \left( \|\text{grad } V\|_{L^2(\Omega_h)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_h)} \right). \end{aligned}$$

It is obvious that there exists an  $h$ -independent constant  $C$  such that

$$\|\text{grad } V\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_h)},$$

hence the estimate of the absolute error. We also have:

$$\begin{aligned} \|\text{rot}(A)\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq c \left( 1 + \frac{\max(|\Re(z_c)|, |\Re(z_m)|)}{\min(|\Im(z_c)|, |\Im(z_m)|)} \right) (|z_m| \\ &\quad + |z_c|) \left( \|\text{grad } V\|_{L^2(\Omega_h)} + \|f\|_{H^3(\partial\Omega_h)} \right) \end{aligned}$$

According to Proposition I.1.10, there exists a constant  $\tilde{c}$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  such that:

$$(|z_m/z_c| + h(1 + |z_m/z_c|)) \|f\|_{H^3(\mathbb{T})} \leq \tilde{c} \|\text{grad } V\|_{L^2(\Omega_h)}.$$

This ends the proof of Theorem I.1.17. □

I.1.4.c. *Application to the biological cell.* Let us apply the previous result to the biological cell described by Fig. 1. We remember the values of the parameters of the cell:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= 8.85 \cdot 10^{-10}, & \sigma_m &= 10^{-5}, \\ \varepsilon_c &= 8.85 \cdot 10^{-9}, & \sigma_c &= 1, \\ l &= 10^{-6}, & h &= 10^{-3}, \end{aligned}$$

and

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}.$$

We also remember the definition of  $z_c$  and  $z_m$ :

$$\begin{aligned} z_m &= \omega^2 \mu_0 l^2 (\varepsilon_m - i\sigma_m/\omega), \\ z_c &= \omega^2 \mu_0 l^2 (\varepsilon_c - i\sigma_c/\omega). \end{aligned}$$

We remember the definition of  $C_0$ :

$$C_0 = \frac{\max(|\Re(z_c)|, |\Re(z_m)|)}{\min(|\Im(z_c)|, |\Im(z_m)|)}.$$

Therefore, we have the following bounds:

$$\begin{aligned} C_0 &\leq 1 + 10^{-4}\omega, \\ |z_m| + |z_c| &\leq 2 \cdot 10^{-18} \omega^2 (10^{-9} - i/\omega). \end{aligned}$$

We infer that if  $\omega \leq 10^4$ ,

$$(1 + C_0) \left( 1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h} \right) (|z_m| + |z_c|) \leq 2 \cdot 10^{-15} \omega,$$

and if  $10^4 \leq \omega \leq 10^8$ ,

$$(1 + C_0) \left( 1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h} \right) (|z_m| + |z_c|) \leq 2 \cdot 10^{-19} \omega^2.$$

Observe also that for  $\omega \geq 10^{10}$ ,

$$(1 + C_0) \left( 1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h} \right) (|z_m| + |z_c|) \geq 10^{-30} \omega^3.$$

Replacing these bounds in Theorem I.1.17, we justify the use of the dielectric formulation to compute the electric field in a single biological cell for pulsations under  $10^7$ rad/s: the relative error performed is of order  $10^{-5}$ .

I.1.4.d. *Numerical simulations.* We illustrate by numerical simulations the results of Section I.1.4. We perform calculus on a circular material of 2 meters radius surrounded by a shell of relative thickness equal to  $h = 0.1$ . The dielectric parameters of these materials are in the following table:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= 11 & \sigma_m &= 0.11 \\ \varepsilon_c &= 10^3 \varepsilon_0 & \varepsilon_m &= 10^4 \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Thus, we have:

$$\begin{aligned} z_c &= (4.45 \cdot 10^{-14}) \omega^2 - i(5.53 \cdot 10^{-5}) \omega \\ z_m &= (4.45 \cdot 10^{-13}) \omega^2 - i(5.53 \cdot 10^{-7}) \omega. \end{aligned}$$

We choose a simple boundary data:  $g(\theta) = \cos(2\theta) + 1$ . With these parameters, we have the following bounds of the constants  $C_0$ ,  $|z_m/z_c|$  and  $|z_m| + |z_c|$ , which appear in Theorem I.1.17:

	$\omega$	$10^3$	$10^4$	$10^5$
(I.1.74)	$ z_c  +  z_m $	$\sim 6 \cdot 10^{-2}$	$\sim 6 \cdot 10^{-1}$	$\sim 6$
	$ z_m/z_c $	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-2}$
	$C_0$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-1}$
	$C$	$\sim 6 \cdot 10^{-1}$	$\sim 6$	$\sim 60$

where  $C$  is the following constant:

$$C = (1 + C_0) \left( 1 + \frac{1}{|z_m/z_c| + h} \right) (|z_m| + |z_c|).$$

The numerical simulations have been computed by FEM. We used the scientific software GetDP [25].

Fig. 3, Fig. 4 and Fig. 5 represent, in the cytoplasm the euclidian norm of  $z_c E^c$  and in the membrane, the euclidian norm of  $z_m E^m$  respectively at the pulsations  $10^3$ rad/s,  $10^4$ rad/s and  $10^5$ rad/s for the vector wave equation (V.W.E) and the dielectric formulation (Diel Form).

For pulsations bigger than  $10^4$ rad/s, since the constant  $C$  defined above would be greater than 1, the dielectric formulation should not give the electric field with good accuracy. At  $10^5$ rad/s, we observe that a wave phenomenon appears in the cytoplasm: the dielectric formulation cannot be used anymore to compute the



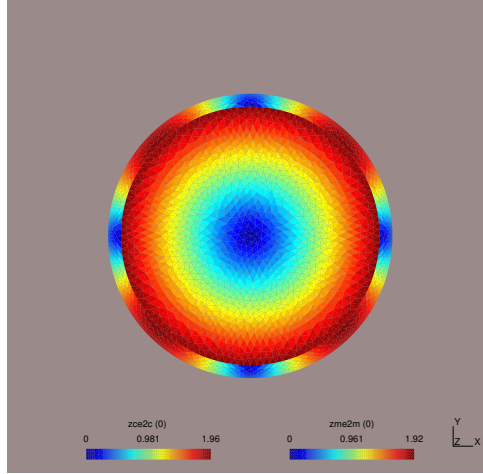
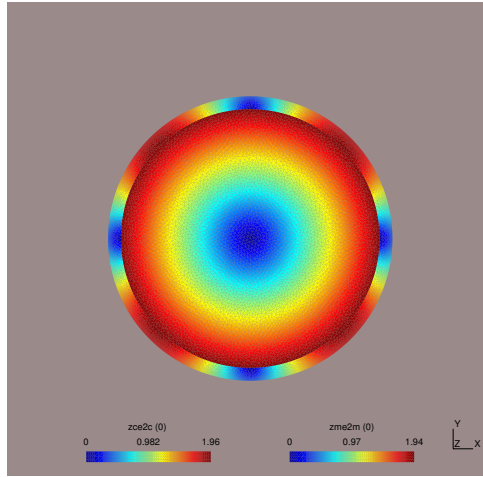
(a) V.W.E. at  $\omega = 10^3$ (b) Diel.Form at  $\omega = 10^3$ 

FIGURE 3. Simulations at  $10^3$ rad/s.  $l = 2$ ,  $h = 0.1$ ,  $z_c = 4.45 \cdot 10^{-8} - i5.53 \cdot 10^{-2}$ ,  $z_m = 4.45 \cdot 10^{-7} - i5.53 \cdot 10^{-4}$

electric field; this shows that the curl part of the field is no more neglectable for pulsations bigger than  $10^4$ rad/s.

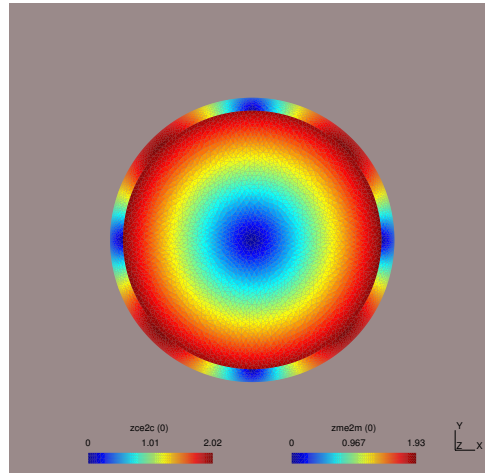
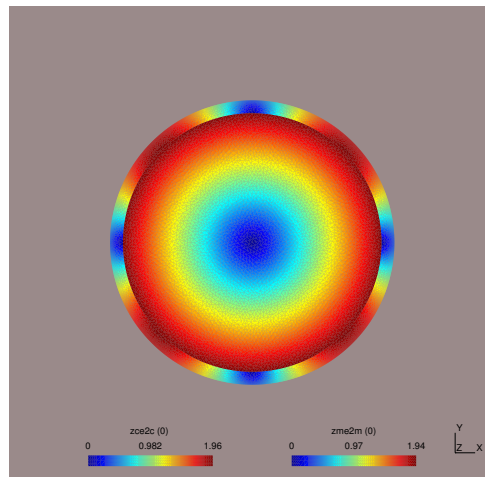
(a) V.W.E. at  $\omega = 10^4$ (b) Diel.Form at  $\omega = 10^4$ 

FIGURE 4. Simulations at  $10^4$ rad/s.  $l = 2$ ,  $h = 0.1$ ,  $z_c = 4.45 \cdot 10^{-06} - i5.53 \cdot 10^{-1}$ ,  $z_m = 4.45 \cdot 10^{-5} - i5.53 \cdot 10^{-3}$

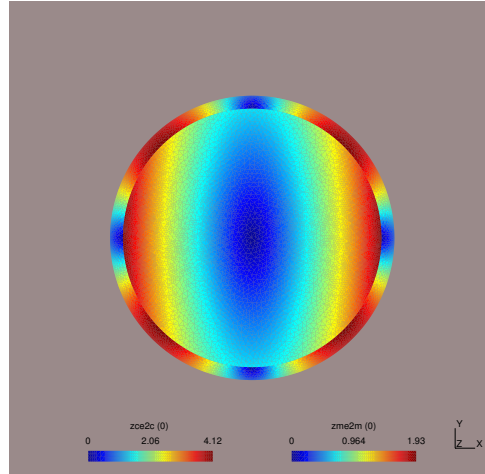
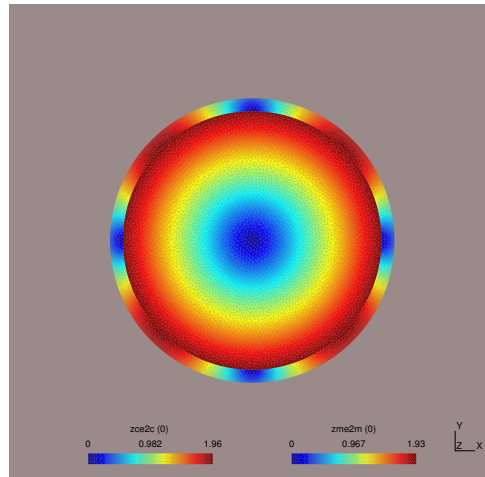
(a) V.W.E. at  $\omega = 10^5$ (b) Diel.Form at  $\omega = 10^5$ 

FIGURE 5. Simulations at  $10^5$  rad/s.  $l = 2$ ,  $h = 0.1$ ,  $z_c = 4.45 \cdot 10^{-4} - i5.53$ ,  $z_m = 4.45 \cdot 10^{-3} - i5.53 \cdot 10^{-2}$

## I.2. Asymptotiques du potentiel électrostatique dans un milieu fortement hétérogène à couche mince

### Rigorous Asymptotics for Steady State Voltage Potentials in a Bidimensional Highly Contrasted Medium

*Submitted to M2AN in may 2006, [59].*

CLAIR POIGNARD <sup>3</sup>

**ABSTRACT :** *We study the behavior of steady state voltage potentials in a bidimensional highly contrasted medium composed of a conducting cytoplasm surrounded by an insulating membrane of thickness  $h$ . We provide a rigorous derivation of the first two terms of the asymptotic expansion of steady state voltage potentials as  $h$  tends to zero. The first two terms of the potential in the membrane are given explicitly in local coordinates in terms of the boundary data, while the first terms of the cytoplasmic potential are the solutions of the so-called dielectric formulation with appropriate boundary conditions given in terms of the boundary data. The error estimates are given in terms of the conductivities and of the boundary data.*

**Introduction.** We study in this paper the behavior of the solution of steady state voltage potentials in a bidimensional highly contrasted medium. This work is the generalization to a domain of class  $\mathcal{C}^\infty$  of arbitrary shape of the asymptotic expansion performed by the author in the case of a circular domain [57] and [58] for the so-called dielectric formulation with Neumann boundary condition (see Propositions III.1, III.2 and Corollary III.1 of [58]). The motivation of the present work and of [58] comes from numerical problems raised by the researchers in computational electromagnetics of CEGELY<sup>4</sup>, who want to compute the electric field in the biological cell. Because of its unusual dielectric parameters, the computation of the vector wave equation (see [58]) leads to matrices with very small coefficients, which are not easily invertible with the presently available numerical methods. To avoid these numerical difficulties, they used to neglect the curl part of the electric field. They compute the solution of the so called dielectric formulation (see [58]), which gives the steady state potentials. In the present paper, we give rigorous asymptotics of these potentials. In Fig. 6 we give the dielectric and geometric parameters of the biological cell. The permeability  $\mu_0$  and the permittivity  $\epsilon_0$  are constant, equal to:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}, \quad \epsilon_0 = 8.85 10^{-11}.$$

In [58], we denoted by  $q_h$  the following piecewise constant function, giving the non dimensionalized complex permittivity:

$$q_h = \begin{cases} q_c = l^2 \omega^2 \mu (\epsilon_c - i\sigma_c/\omega), & \text{in } \mathcal{O}, \\ q_m = l^2 \omega^2 \mu (\epsilon_m - i\sigma_m/\omega), & \text{in } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

As has been proved in [58] in the case of a circular biological cell, up to 100GHz the dielectric formulation gives an approximation of the solution of the vector wave equation; in this frequency range,  $|q_c| + |q_m|$  is at most  $10^{-2}$  and the relative error is of order  $|q_c| + |q_m|$ . This is the reason why, in this paper, we focus on the dielectric

<sup>3</sup>We would like to thank Prof. Michelle Schatzman for reading carefully the manuscript.

<sup>4</sup>The CEGELY is the center of electrical engineering of Lyon (France).

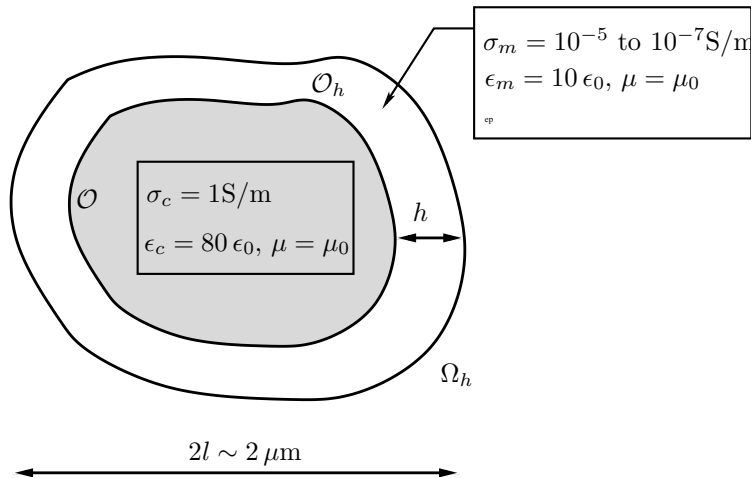


FIGURE 6. Typical parameters of the biological cell.

formulation. In upcoming papers, the author deals with the vector wave equation in a smooth domain of arbitrary shape; the circular case for the vector wave equation is treated in Section IV of [58].

Let  $\Omega_h$  be a smooth bounded bidimensional domain, composed of a smooth domain  $\mathcal{O}$  surrounded by a thin membrane  $\mathcal{O}_h$  with a small constant thickness  $h$  (see Fig. 6):

$$\Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h.$$

Since we impose a Neumann boundary condition on  $\partial\Omega_h$  the data  $\phi$  must satisfy the compatibility condition:

$$\int_{\partial\Omega_h} \phi \, d\sigma = 0.$$

Let  $q_c$  and  $q_m$  be two non vanishing complex numbers. We denote by  $q_h$  the following piecewise constant function:

$$\forall x \in \Omega_h, \quad q_h(x) = \begin{cases} q_c, & \text{if } x \in \mathcal{O}, \\ q_m & \text{if } x \in \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

We would like to understand the behavior for  $h$  tending to zero of the solution  $V$  of Problem (I.2.75) with Neumann boundary condition:

$$(I.2.75a) \quad \operatorname{div}(q_h \operatorname{grad} V) = 0 \text{ in } \Omega_h, ,$$

$$(I.2.75b) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \phi \text{ on } \partial\Omega_h.$$

To determine  $V$ , we impose the following gauge condition on the boundary of the cytoplasm:

$$(I.2.75c) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V \, d\sigma = 0.$$

Several authors have worked on similar problems (see for instance Beretta *et al.* [14] and [15]). They compared the exact solution to the so-called background

solution defined by replacing the material of the membrane by cytoplasmic material. The difference between these two solutions has then been given through an integral involving the polarization tensor defined for instance in [8], [9], [14], [15], [19], plus some remainder terms. The remainder terms are estimated in terms of the measure of the inhomogeneity. In this paper, we do not use this approach, for several reasons.

First of all, the Beretta *et al.* estimate of the remainder terms depends linearly on  $|q_m|$ ,  $|q_c|$  and  $|q_c/q_m|$ . Here the ratio  $|q_m/q_c|$  varies from  $10^{-5}$  to  $10^{-2}$  according to the frequency. Secondly,  $q_m$  and  $q_c$  are complex-valued, hence differential operators involved in our case are not self-adjoint, so that the  $\Gamma$ -convergence techniques of Beretta *et al.* do not apply. Thirdly, the potential in the membrane is not given explicitly in [14], [15] or [19], while we are definitely interested in this potential, in order to obtain the transmembranar potential (see Fear and Stuchly [26]). In this paper we work with bidimensional domain and we expect that the same analysis could be performed in higher dimensions.

The heuristics of this work consist in performing a change of coordinates in the membrane  $\mathcal{O}_h$ , so as to parameterize it by local coordinates  $(\eta, \theta)$ , which vary in a domain independently of  $h$ ; in particular, if we denote by  $L$  the length of  $\partial\mathcal{O}$ , the variables  $(\eta, \theta)$  should vary in  $[0, 1] \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ . This change of coordinates leads to an expression of the Laplacian in the membrane, which depends on  $h$ . Once the transmission conditions of the new problem are derived, we perform a formal asymptotic expansion of the solution of (I.2.75) in terms of  $h$ . It remains to validate this expansion.

This paper is structured as follows. In Section I.2.1, we make precise our geometric conventions. We perform a change of variables in the membrane, and with the help of some differential geometry results, we write Problem (I.2.75) in the language of differential forms. We refer the reader to the book of Flanders [28] or those of Dubrovin *et al.* [24] (or [23] for the french version) for courses on differential geometry. We derive transmission conditions in the intrinsic language of differential forms, and we have to express these relations in local coordinates: euclidean coordinates in the cytoplasm, and local  $(\eta, \theta)$  coordinates in the membrane, and this is what we do in Section III. In Section I.2.3, we derive formally the first two terms of the asymptotic expansion of the solution of our problem in terms of  $h$ . Section I.2.4 is devoted to a proof of the estimate of the error. In the Appendix, we give some useful differential geometry formulae.

**I.2.1. Geometry.** The boundary of the domain  $\mathcal{O}$  is assumed to be of class  $\mathcal{C}^\infty$ . The orientation of the boundary  $\partial\mathcal{O}$  is the trigonometric orientation and we denote by  $\partial_t$  the tangential derivative along  $\mathcal{O}$ . To simplify, we suppose that the length of  $\partial\mathcal{O}$  is equal to  $2\pi$ . We denote by  $\mathbb{T}$  the flat torus:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Since  $\partial\mathcal{O}$  is of class  $\mathcal{C}^\infty$ , we can parameterize it by a function  $\Psi$  of class  $\mathcal{C}^\infty$  from  $\mathbb{T}$  to  $\mathbb{R}^2$  satisfying:

$$\forall \theta \in \mathbb{T}, \quad |\Psi'(\theta)| = 1.$$

Therefore the following identities holds:

$$\partial\mathcal{O} = \{\Psi(\theta), \theta \in \mathbb{T}\},$$

and

$$\partial\Omega_h = \{\Psi(\theta) + hn(\theta), \theta \in \mathbb{T}\}.$$

Here  $n(\theta)$  is the unitary exterior normal at  $\Psi(\theta)$  to  $\partial\mathcal{O}$ . The boundary  $\partial\Omega_h$  of the cell is parallel to the boundary  $\partial\mathcal{O}$  of the cytoplasm. We parameterize the membrane  $\mathcal{O}_h$  as follows:

$$\mathcal{O}_h = \{\Psi(\theta) + h\eta n(\theta), (\eta, \theta) \in ]0, 1[ \times \mathbb{T}\}.$$

We define now:

$$\Phi(\eta, \theta) = \Psi(\theta) + h\eta n(\theta).$$

Let us denote by  $\kappa$  the curvature of  $\partial\mathcal{O}$ , which depends on the curvilinear variable. Let  $h_0$  belong to  $(0, 1)$  such that:

$$(I.2.76) \quad h_0 < \frac{1}{\|\kappa\|_\infty}.$$

Then, for all  $h$  in  $[0, h_0]$ , there exists an open interval  $I$  containing  $(0, 1)$  such that  $\Phi$  is a diffeomorphism of class  $\mathcal{C}^\infty$  from  $I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  to its image, which is a neighborhood of the membrane. The metric in  $\mathcal{O}_h$  is:

$$(I.2.77) \quad h^2 d\eta^2 + (1 + h\eta\kappa)^2 d\theta^2.$$

Thus, we use two systems of coordinates, depending on the domains  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{O}_h$ : in the interior domain  $\mathcal{O}$ , we use Euclidean coordinates  $(x, y)$  and in the membrane  $\mathcal{O}_h$ , we use local  $(\eta, \theta)$  coordinates with metric (I.2.77). Now, we translate into the language of differential forms Problem (I.2.75). We refer the reader to the book of Dubrovin, Fomenko and Novikov [24] or the book of Flanders [28] for the definition of the exterior derivative denoted by  $d$ , the exterior product denoted by  $\text{ext}$ , the interior derivative denoted by  $\delta$  and the interior product denoted by  $\text{int}$ . In the Appendix, we give the formulae describing these operators in the case of a general 2D metric. Our aim, while rewriting Problem (I.2.75) is to take into account nicely the change of coordinates in the thin membrane.

Let  $\mathbb{V}$  be the 0-form on  $\Omega_h$  such that, in the Euclidean coordinate  $(x, y)$ ,  $\mathbb{V}$  is equal to  $V$ , and let  $F$  be the 0-form, which is equal to  $\phi$  on  $\partial\Omega_h$ . We denote by  $N$  the 1-form corresponding to the inward unit normal on the boundary  $\Omega_h$  (see for example the book Gilkey and *al.* [34] p.33):

$$\begin{aligned} N &= N_x dx + N_y dy, \\ &= N_\eta d\eta. \end{aligned}$$

$N^*$  is the inward unit normal 1-form. Problem (I.2.75) takes now the intrinsic form:

$$(I.2.78a) \quad \delta(q_h d\mathbb{V}) = 0, \text{ in } \Omega_h,$$

$$(I.2.78b) \quad \text{int}(N^*) d\mathbb{V} = F, \text{ on } \partial\Omega_h.$$

According to Green's formula (Lemma 1.5.1 of [34]), we obtain the following transmission conditions for  $\mathbb{V}$  along  $\partial\mathcal{O}$ :

$$(I.2.78c) \quad \begin{aligned} q_c \text{int}(N^*) d\mathbb{V}|_{\partial\mathcal{O}} &= q_m \text{int}(N^*) d\mathbb{V}|_{\partial\mathcal{O}_h \setminus \partial\Omega_h}, \\ \text{ext}(N^*) \mathbb{V}|_{\partial\mathcal{O}} &= \text{ext}(N^*) \mathbb{V}|_{\partial\mathcal{O}_h \setminus \partial\Omega_h}. \end{aligned}$$

**I.2.2. Statement of the problem.** In this section, we write Problem (I.2.78) in local coordinates. It is convenient to write:

$$\forall \theta \in \mathbb{T}, \quad \Phi_0(\theta) = \Phi(0, \theta), \quad \Phi_1(\theta) = \Phi(1, \theta).$$

We denote by  $f$  the function, defined on the torus  $\mathbb{T}$  by

$$\forall \theta \in \mathbb{T}, \quad f(\theta) = \phi \circ \Phi_1(\theta),$$

and  $\mathfrak{K}$  is the curvature of  $\partial\mathcal{O}$  in Euclidean coordinates

$$(I.2.79) \quad \forall x \in \partial\mathcal{O}, \quad \mathfrak{K} = \kappa \circ \Phi_0^{-1}(x),$$

$f$  is the function defined on  $\partial\mathcal{O}$  by

$$(I.2.80) \quad \forall x \in \partial\mathcal{O}, \quad f = f \circ \Phi_0^{-1}(x).$$

Let us denote by  $V^c$  the potential  $V$  in  $\mathcal{O}$ , written in Euclidean coordinates, and by  $V^m$  the potential  $V$  in  $\mathcal{O}_h$  in the local coordinates:

$$\begin{aligned} V^c &= V, \text{ in } \mathcal{O}, \\ V^m &= V \circ \Phi, \text{ in } [0, 1] \times \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Using the expressions of the differential operators  $d$  and  $\delta$ , which are respectively the exterior and the interior derivatives (see the Appendix), applied to the metric (I.2.77), we can see that the Laplacian applied to  $V$  in the membrane is given in the local coordinates  $(\eta, \theta)$  by:

$$(I.2.81) \quad \forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(\Delta V)|_{\Phi(\eta, \theta)} = \frac{1}{h(1+h\eta\kappa)} \partial_\eta \left( \frac{1+h\eta\kappa}{h} \partial_\eta V^m \right) + \frac{1}{1+h\eta\kappa} \partial_\theta \left( \frac{1}{1+h\eta\kappa} \partial_\theta V^m \right).$$

Therefore, we rewrite Problem (I.2.78) as follows:

$$(I.2.82a) \quad \begin{aligned} \Delta V^c &= 0, \text{ in } \mathcal{O}, \\ \forall (\eta, \theta) &\in [0, 1] \times \mathbb{T}, \end{aligned}$$

$$(I.2.82b) \quad \frac{1}{h^2} \partial_\eta ((1+h\eta\kappa) \partial_\eta V^m) + \partial_\theta \left( \frac{1}{1+h\eta\kappa} \partial_\theta V^m \right) = 0,$$

with the following transmission conditions according to (I.2.78c) translated into local coordinates

$$(I.2.82c) \quad q_c \partial_n V^c \circ \Phi_0 = \frac{q_m}{h} \partial_\eta V^m \Big|_{\eta=0},$$

$$(I.2.82d) \quad V^c \circ \Phi_0 = V^m \Big|_{\eta=0},$$

with the boundary condition according to (I.2.78b) translated into local coordinates

$$(I.2.82e) \quad \partial_\eta V^m \Big|_{\eta=1} = hf.$$

To determine completely  $(V^c, V^m)$ , we impose the same gauge condition as in (I.2.75c):

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V \, d\sigma = 0.$$



**I.2.3. Formal asymptotic expansion.** In this section, we derive asymptotic expansions of the potentials  $(V^c, V^m)$  solution of (I.2.82) in terms of the thickness  $h$ . We write the following ansatz:

$$(I.2.83a) \quad V^c = V_0^c + hV_1^c + \dots,$$

$$(I.2.83b) \quad V^m = V_0^m + hV_1^m + \dots.$$

We multiply (I.2.82b) by  $h^2(1 + h\eta\kappa)^2$  and we order the powers of  $h$  to obtain:

$$(I.2.84) \quad \begin{aligned} & \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ & \partial_\eta^2 V^m + h\kappa \{3\eta \partial_\eta^2 V^m + \partial_\eta V^m\} + h^2 \{3\eta^2 \kappa^2 \partial_\eta^2 V^m + 2\eta \kappa^2 \partial_\eta V^m + \partial_\theta^2 V^m\} \\ & + h^3 \{\eta^3 \kappa^3 \partial_\eta^2 V^m + \eta^2 \kappa^3 \partial_\eta V^m + \eta \kappa \partial_\theta^2 V^m - \eta \kappa' \partial_\theta V^m\} = 0 \end{aligned}$$

We are now ready to derive the first two terms of the asymptotic expansions of  $V^c$  and  $V^m$  by identifying the terms of the same power in  $h$ .

- First step.

Substituting in (I.2.84) the potential  $V^m$  by its expansion (I.2.83b), and using the boundary condition (I.2.82e), we obtain:

$$\begin{cases} \partial_\eta^2 V_0^m = 0, \\ \partial_\eta V_0^m|_{\eta=1} = 0. \end{cases}$$

Thus, we obtain:

$$(I.2.85) \quad \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad V_0^m(\eta, \theta) = V_0^m(\theta).$$

We will determine  $V_0^m$  in the following.

- Second step.

Substituting in (I.2.84) potential  $V^m$  by its expansion (I.2.83b), and using boundary condition (I.2.82e) and equality (I.2.85), we obtain:

$$\begin{cases} \partial_\eta^2 V_1^m = 0, \\ \partial_\eta V_1^m|_{\eta=1} = f. \end{cases}$$

Thus, we infer:

$$(I.2.86) \quad \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad \partial_\eta V_1^m(\eta, \theta) = f(\theta).$$

Substituting in (I.2.82a) the potential  $V^c$  by its expansion (I.2.83a), and substituting in the transmission conditions (I.2.82c) expression (I.2.86) of  $\partial_\eta V_1^m$  we obtain:

$$(I.2.87a) \quad \begin{cases} \Delta V_0^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}, \\ \partial_n V_0^c|_{\partial\mathcal{O}} = (q_m/q_c)f, \end{cases}$$

with gauge condition:

$$(I.2.87b) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V_0^c d\sigma = 0.$$

According to the transmission condition (I.2.82d),  $V_0^m$  is equal to:

$$(I.2.88) \quad \forall(\eta, \theta) \in [0, L] \times \mathbb{T}, \quad V_0^m(\eta, \theta) = V_0^c \circ \Phi_0(\theta).$$

We have determined  $V_0^c$  and  $V_0^m$ .

- Third step.

As in the previous paragraph, substituting in (I.2.84) the potential  $V^m$  by its expansion (I.2.83b) and using equalities (I.2.85)–(I.2.86), we obtain:

$$(I.2.89a) \quad \partial_\eta^2 V_2^m + \kappa f + \partial_\theta^2 V_0^m = 0,$$

$$(I.2.89b) \quad \partial_\eta V_2^m|_{\eta=1} = 0,$$

and hence integrating (I.2.89) with respect to  $\eta$  the following equality holds

$$(I.2.90) \quad \partial_\eta V_2^m = (1 - \eta) (\partial_\theta^2 V_0^m + \kappa f).$$

By the transmission condition (I.2.82c) and equality (I.2.88),  $V_1^c$  is the solution of:

$$(I.2.91a) \quad \begin{cases} \Delta V_1^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}, \\ \partial_n V_1^c|_{\partial\mathcal{O}} = (q_m/q_c) (\partial_t^2 V_0^c + \mathfrak{K}f), \end{cases}$$

with gauge condition

$$(I.2.91b) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V_1^c d\sigma = 0.$$

Recall that  $\mathfrak{K}$  and  $f$  are defined by (I.2.79) and (I.2.80).

Integrating (I.2.86) with respect to  $\eta$  we obtain the value of  $V_1^m$ :

$$(I.2.92a) \quad \forall (\eta, \theta) \in [0, L] \times \mathbb{T}, \quad V_1^m(\eta, \theta) = \eta f + V_1^m(0, \theta),$$

with  $V_1^m$  determined by the transmission condition (I.2.82d)

$$(I.2.92b) \quad \forall \theta \in \mathbb{T}, \quad V_1^m(0, \theta) = V_1^c \circ \Phi_0(\theta).$$

We have given the first two terms of the asymptotic expansion of  $V^c$  and  $V^m$ . It remains to prove that the remainder terms are small.

**I.2.4. Error Estimates.** We give an error estimate, which proves that the first two terms found in Section I.2.3 by a formal argument are indeed the first terms, in the sense that the remainder is smaller. We have the following theorem.

**THEOREM I.2.1.** *We remember that  $h_0$  is defined in (I.2.76). Let  $h$  be in  $(0, h_0)$ . Let  $q_c$  and  $q_m$  be two non vanishing complex numbers such that:*

$$(I.2.93) \quad \Re(q_c/q_m) > 0, \text{ or } \left( \Re(q_c/q_m) = 0, \text{ and } \Im(q_c/q_m) \neq 0 \right).$$

*Let  $\phi$  be in  $H^{5/2}(\partial\Omega_h)$ . We remember that  $f$  is defined in (I.2.80). We denote by  $V$  the solution of Problem (I.2.75), and  $V_0^c, V_0^m, V_1^c$ , and  $V_1^m$  are defined in Section I.2.3 respectively by equalities (I.2.87)–(I.2.88)–(I.2.91)–(I.2.92). More precisely  $V_0^c$  is the solution of the following problem:*

$$\begin{cases} \Delta V_0^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}, \\ \partial_n V_0^c|_{\partial\mathcal{O}} = (q_m/q_c)f, \end{cases}$$

$V_1^c$  satisfies

$$\begin{cases} \Delta V_1^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}, \\ \partial_n V_1^c|_{\partial\mathcal{O}} = (q_m/q_c) (\partial_t^2 V_0^c + \mathfrak{K}f), \end{cases}$$

with gauge conditions:

$$\int_{\partial\mathcal{O}} V_0^c d\sigma = 0, \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V_1^c d\sigma = 0.$$

$V_0^m$  and  $V_1^m$  are defined in  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  by:

$$\begin{aligned} \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad V_0^m(\eta, \theta) &= V_0^c \circ \Phi_0(\theta), \\ \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad V_1^m(\eta, \theta) &= \eta f + V_1^c \circ \Phi_0(\theta). \end{aligned}$$

Let  $W$  be the function defined on  $\Omega_h$  by:

$$W = \begin{cases} V - (V_0^c + hV_1^c), & \text{in } \mathcal{O}, \\ V - (V_0^m \circ \Phi^{-1} + hV_1^m \circ \Phi^{-1}), & \text{in } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Then, there exists a constant  $C_{\mathcal{O}} > 0$  depending only on the domain  $\mathcal{O}$  such that

$$\begin{aligned} \|W\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq C_{\mathcal{O}} \frac{1 + |q_m/q_c|}{\max(\Re(q_c/q_m), |\Im(q_c/q_m)|)} h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|W\|_{H^1(\mathcal{O}_h)} &\leq C_{\mathcal{O}} (1 + |q_m/q_c|) h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

PROOF. The proof of Theorem I.2.1 is based on estimates of the tangential and the second tangential derivatives of  $V_0^m|_{\eta=0}$  and  $V_1^m|_{\eta=0}$ .

Denote by  $W^c$  and  $W^m$  the following functions:

$$(I.2.94) \quad W^c = V^c - (V_0^c + hV_1^c), \text{ in } \mathcal{O},$$

$$(I.2.95) \quad W^m = V^m - (V_0^m + hV_1^m), \text{ in } [0, 1] \times \mathbb{T}.$$

In order to simplify the notations, we introduce  $\mathcal{L}_{\eta, \theta}$ , the Laplacian in the local coordinates  $(\eta, \theta)$  given by (I.2.81):

$$\mathcal{L}_{\eta, \theta} = \frac{1}{h(1+h\eta\kappa)} \left( \frac{1}{h} \partial_{\eta} ((1+h\eta\kappa)\partial_{\eta}) + \partial_{\theta} \left( \frac{h}{1+h\eta\kappa} \partial_{\theta} \right) \right).$$

Let us write the problem satisfied by  $(W^c, W^m)$ . We use the expressions of  $V_0^c, V_1^c, V_0^m$  and  $V_1^m$  found in Section I.2.3 to obtain, by a simple calculation:

$$(I.2.96a) \quad \Delta W^c = 0, \text{ in } \mathcal{O},$$

$$\forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(I.2.96b) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\eta, \theta} W^m &= -\frac{1}{h(1+h\eta\kappa)} \left\{ h\kappa f + \frac{h}{1+h\eta\kappa} \partial_{\theta}^2 V_0^m \right. \\ &\quad \left. + h^2 \left( -\frac{\eta\kappa'}{(1+h\eta\kappa)^2} \partial_{\theta} V_0^m + \partial_{\theta} \left( \frac{\partial_{\theta} V_1^m}{1+h\eta\kappa} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

with the transmission conditions coming from (I.2.82c)–(I.2.82d)

$$(I.2.96c) \quad q_c \partial_n W^c \circ \Phi_0 = \frac{q_m}{h} \left( \partial_{\eta} W^m|_{\eta=0} - h^2 (\partial_{\theta}^2 V_0^m + \kappa f) \right),$$

$$(I.2.96d) \quad W^c \circ \Phi_0 = W^m|_{\eta=0},$$

and the boundary condition

$$(I.2.96e) \quad \partial_{\eta} W^m|_{\eta=1} = 0.$$

Let us denote by  $V_2$  the primitive with respect to  $\eta$  of  $\partial_\eta V_2^m$  defined in (I.2.90), which vanishes in  $\eta = 0$ :

$$(I.2.97) \quad \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad V_2(\eta, \theta) = \eta(1 - \eta/2)(\kappa f + \partial_\theta^2 V_0^m).$$

The trick of the proof consists in introducing the function  $A^m$  defined on  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  by:

$$(I.2.98) \quad A^m = W^m - h^2 V_2.$$

It is obvious that  $A^m$  satisfies the following equalities:

$$(I.2.99a) \quad \partial_\eta A^m|_{\eta=0} = \partial_\eta W^m|_{\eta=0} - h^2 \partial_\theta^2 V_0^m,$$

$$(I.2.99b) \quad A^m|_{\eta=0} = W^m|_{\eta=0},$$

$$(I.2.99c) \quad \partial_\eta A^m|_{\eta=1} = 0.$$

According to equalities (I.2.96b)–(I.2.98) a simple calculation shows that for all  $(\eta, \theta)$  in  $[0, 1] \times \mathbb{T}$ :

$$(I.2.99d) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\eta, \theta} A^m = & -\frac{1}{h(1+h\eta\kappa)} \left\{ \frac{-h^2 \eta \kappa \partial_\theta^2 V_0^m}{1+h\eta\kappa} - h^2 \kappa (2\eta - 1) (\partial_\theta^2 V_0^m + \kappa f) \right. \\ & \left. + h^2 \left( -\frac{\eta \kappa' \partial_\theta V_0^m}{(1+h\eta\kappa)^2} + \partial_\theta \left( \frac{\partial_\theta V_1^m + h \partial_\theta V_2}{1+h\eta\kappa} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Let us denote by  $g$  the right-hand side of equality (I.2.99d) multiplied by  $(1+h\eta\kappa)/h$ :

$$\begin{aligned} \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ g(\eta, \theta) = & \left\{ \frac{\eta \kappa \partial_\theta^2 V_0^m}{1+h\eta\kappa} - \kappa (2\eta - 1) (\kappa f + \partial_\theta^2 V_0^m) \right. \\ & \left. + \frac{\eta \kappa' \partial_\theta V_0^m}{(1+h\eta\kappa)^2} - \partial_\theta \left( \frac{\partial_\theta V_1^m + h \partial_\theta V_2}{1+h\eta\kappa} \right) \right\}. \end{aligned}$$

According to (I.2.97) it is obvious that there exists a constant  $C > 0$ , depending only on the geometry of  $\partial\mathcal{O}$  such that:

$$(I.2.100) \quad \begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{T}, \\ \sup_{\eta \in [0, 1]} |g(\eta, \theta)| \leq & C(|f| + |f'| + |f''| + |\partial_\theta V_0^m| + |\partial_\theta^2 V_0^m| + |\partial_\theta^3 V_0^m| \\ & + |\partial_\theta^4 V_0^m| + |\partial_\theta V_1^m|_{\eta=0} + |\partial_\theta^2 V_1^m|_{\eta=0}). \end{aligned}$$

Let us denote by  $D$  the unit disc:

$$D = [0, 1] \times \mathbb{T}.$$

We remember that the  $L^2$  norm of a 0-form  $u$  in the  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  with the metric (I.2.77), denoted by  $\|u\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)}$ , is equal to:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)} &= \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} h(1+h\eta\kappa) |u(\eta, \theta)|^2 d\eta d\theta \right)^{1/2}, \\ &= \|u\|_{L^2(\mathcal{O}_h)}, \end{aligned}$$

and the  $L^2$  norm of its exterior derivative  $du$ , denoted by  $\|du\|_{\Lambda^1 L_m^2}$  is equal to

$$\begin{aligned} \|du\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)} &= \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1+h\eta\kappa}{h} |\partial_\eta u(\eta, \theta)|^2 + \frac{h}{1+h\eta\kappa} |\partial_\theta u(\eta, \theta)|^2 d\eta d\theta \right)^{1/2}, \\ &= \|\text{grad } u\|_{L^2(\mathcal{O}_h)}. \end{aligned}$$

In  $\mathcal{O}$  parameterized by Euclidean coordinates, the  $L^2$  norm of a 0-form  $v$ , denoted by  $\|v\|_{\Lambda^0 L^2}$ , is equal to:

$$\|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{O})} = \|v\|_{L^2(\mathcal{O})},$$

and the  $L^2$  norm of its exterior derivative  $dv$ , denoted by  $\|dv\|_{\Lambda^1 L^2}$  is equal to

$$\|dv\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O})} = \|\text{grad } v\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

According to (I.2.99) and (I.2.96),  $(W^c, A^m)$  is the solution of the following problem:

$$(I.2.101a) \quad \Delta W^c = 0, \text{ in } \mathcal{O},$$

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(I.2.101b) \quad \mathcal{L}_{\eta, \theta} A^m = \frac{hg(\eta, \theta)}{(1+h\eta\kappa)}.$$

with the transmission conditions coming from (I.2.96c)–(I.2.96d) and from equalities (I.2.99)

$$(I.2.101c) \quad q_c \partial_n W^c \circ \Phi_0 = \frac{q_m}{h} \partial_\eta A^m \Big|_{\eta=0},$$

$$(I.2.101d) \quad W^c \circ \Phi_0 = A^m \Big|_{\eta=0},$$

and the boundary condition

$$(I.2.101e) \quad \partial_\eta A^m \Big|_{\eta=1} = 0.$$

and with gauge condition:

$$(I.2.101f) \quad \int_0^{2\pi} A^m(0, \theta) d\theta = 0.$$

We multiply equality (I.2.101a) by  $q_c \overline{W^c}$ , we integrate by parts, and we multiply (I.2.101b) by  $q_m h (1+h\eta\kappa) \overline{A^m}$  and we integrate by parts. Using the transmission conditions (I.2.101c)–(I.2.101d) and the boundary condition (I.2.101e) we obtain:

$$\begin{aligned} & -q_c \int_{\mathcal{O}} |\text{grad } W^c|^2 d\text{vol}_{\mathcal{O}} - q_m \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{1+h\eta\kappa}{h} |\partial_\eta A^m|^2 \right. \\ & \left. + \frac{h}{1+h\eta\kappa} |\partial_\theta A^m|^2 \right) d\eta d\theta = q_m h^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 g(\eta, \theta) \overline{A^m} d\eta d\theta. \end{aligned}$$

Since  $q_m \neq 0$ , and using hypothesis (I.2.93) we infer:

$$\begin{aligned} \Re(q_c/q_m) \|dW^c\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O})}^2 + \|dA^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)}^2 &\leq h^{3/2} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{|g(\eta, \theta)|^2}{1+h\eta\kappa} d\eta d\theta \right)^{1/2} \\ &\quad \times \|A^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)}. \end{aligned}$$

Observe that we also have:

$$(I.2.102) \quad |\Im(q_c/q_m)| \|dW^c\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O})}^2 \leq h^{3/2} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{|g(\eta, \theta)|^2}{1+h\eta\kappa} d\eta d\theta \right)^{1/2} \\ \times \|A^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)}.$$

Since  $\partial\mathcal{O}$  is of class  $\mathcal{C}^\infty$ , using equalities (I.2.88)–(I.2.92b) and problems (I.2.87)–(I.2.91) there exists a constant  $C > 0$  depending only on  $\mathcal{O}$  such that:

$$(I.2.103) \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad \|\partial_\theta^i V_0^m\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})},$$

$$(I.2.104) \quad \forall j \in \{0, 1, 2\}, \quad \|\partial_\theta^j V_1^m|_{\eta=0}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \left| \frac{q_m}{q_c} \right| \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Using (I.2.100) we infer

$$(I.2.105) \quad \Re(q_c/q_m) \|dW^c\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O})}^2 + \|dA^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)}^2 \leq Ch^{3/2} (1 + |q_m/q_c|) \\ \times \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})} \|A^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)}.$$

It remains to use Poincaré-Wirtinger inequality. Actually, according to gauge condition (I.2.101f) and according to (I.2.101d), it is obvious that:

$$\int_{\partial\mathcal{O}} W^c \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Thus, using Poincaré-Wirtinger inequality, there exists a constant  $C$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  such that:

$$(I.2.106) \quad \|W^c\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{O})} \leq C_{\mathcal{O}} \|dW^c\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O})}.$$

We are going to prove the existence of a constant  $C_{\mathcal{O}}$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  such that:

$$(I.2.107) \quad \|A^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)} \leq C_{\mathcal{O}} \|dA^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)}.$$

Suppose that (I.2.107) holds. Thus, according to (I.2.106)–(I.2.107), and according to hypothesis (I.2.93), we deduce from (I.2.105) the existence of a constant  $C > 0$  depending on  $\mathcal{O}$  such that:

$$\|A^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)} + \|dA^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)} \leq C(1 + |q_m/q_c|) h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

According to (I.2.98) and to (I.2.103), it is obvious that there exists a constant  $C$  depending only on  $\mathcal{O}$  such that:

$$(\|A^m - W^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)} + \|dA^m - dW^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)}) \leq Ch^{3/2} (1 + |q_m/q_c|) \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})},$$

thus according to (I.2.93), and since we supposed that  $q_m \neq 0$ , we have proved the existence of  $C_{\mathcal{O}} > 0$  such that:

$$\|W\|_{H^1(\mathcal{O}_h)} \leq C_{\mathcal{O}} (1 + |q_m/q_c|) h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Moreover, we infer

$$\Re(q_c/q_m) \|W^c\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C(1 + |q_m/q_c|) h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})},$$

and

$$|\Im(q_c/q_m)| \|W^c\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C(1 + |q_m/q_c|) h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})},$$

thus

$$\|W^c\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C \frac{1 + |q_m/q_c|}{\max(|\Im(q_c/q_m)|, \Re(q_c/q_m))} h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})},$$

which ends the proof of Theorem I.2.1.

It remains to prove (I.2.107). According to the definition of  $h_0$  in (I.2.76) there exists two constants  $C_{\mathcal{O}}^1$  and  $C_{\mathcal{O}}^2$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  such that the following inequalities hold:

$$(I.2.108a) \quad \|A^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(D)}^2 \leq C_{\mathcal{O}}^1 h \int_0^1 \int_0^{2\pi} |A^m(\eta, \theta)|^2 d\theta d\eta,$$

$$(I.2.108b) \quad \|dA^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(D)}^2 \geq C_{\mathcal{O}}^2 \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\partial_\eta A^m(\eta, \theta)|^2}{h} + h |\partial_\theta A^m|^2 d\theta d\eta \right).$$

Let us denote by  $(\widehat{A^m})_k$  for  $k \in \mathbb{Z}$  the  $k^{\text{th}}$ -Fourier coefficient (with respect to  $\theta$ ) of  $A^m$ :

$$(\widehat{A^m})_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^m(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Since  $(\widehat{\partial_\theta A^m})_k = ik (\widehat{A^m})_k$ , it is easy to see that:

$$\forall k \neq 0, \quad \int_0^1 |(\widehat{A^m})_k(\eta)|^2 d\eta \leq \int_0^1 |(\widehat{\partial_\theta A^m})_k(\eta)|^2 d\eta.$$

According to gauge condition (I.2.101f), we have:

$$(\widehat{A^m})_0(0) = 0,$$

thus, using the equality

$$(\widehat{A^m})_0(\eta) = \int_0^\eta (\widehat{\partial_\eta A^m})_0(s) ds,$$

we infer

$$\int_0^1 |(\widehat{A^m})_0(\eta)|^2 d\eta \leq \int_0^1 |(\widehat{\partial_\eta A^m})_0(\eta)|^2 d\eta.$$

Therefore,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |(\widehat{A^m})_k(\eta, \theta)|^2 d\eta \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \int_0^1 |(\widehat{\partial_\theta A^m})_k(\eta)|^2 d\eta + \int_0^1 |(\widehat{\partial_\eta A^m})_k(\eta)|^2 d\eta \right\}.$$

We end the proof of (I.2.107) by using Parseval inequality and inequalities (I.2.108).  $\square$

**REMARK I.2.2.** *If we suppose that  $q_m = 0$ , which is equivalent to consider a perfectly conducting cytoplasm, from Theorem I.2.1 we infer:*

$$\begin{aligned} V_1^m &= \eta f, \text{ in } [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \|V - hV_1^m \circ \Phi^{-1}\|_{H^1(\mathcal{O}_h)} &\leq C_{\mathcal{O}} h^{3/2} \|f\|_{H^{5/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

**REMARK I.2.3.** *Since  $q_c$  and  $q_m$  are complex permittivities, there are both of the same form (see Balanis and Constantine [12]) :*

$$q_c = a_c - ib_c, \text{ and } q_m = a_m - ib_m,$$

or

$$q_c = a_c + ib_c, \text{ and } q_m = a_m + ib_m,$$

with  $a_c, a_m, b_c$  and  $b_m$  positive. Thus the hypothesis (I.2.93) is always satisfied for dielectric materials.

**Appendix.** Let  $\star$  denote the Hodge star operator, which maps 0-forms to 2-forms, 1-forms to 1-forms and 2-forms to 0-forms (see Flanders [28]). We give explicit formulae for the operators  $d, \delta, \text{ext}$  and  $\text{int}$ . These formulae can be easily obtained from their definitions and from the operators  $\star, d$  and  $\delta = \star^{-1}d\star$ . We refer the reader to Dubrovin, Fomenko and Novikov [24].

We consider the metric given by the following matrix  $G$

$$(I.2.109) \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

We denote by  $|G|$  the determinant of  $G$ . The inverse of  $G$  is denoted by  $G^{-1} = (g^{ij})_{ij}$ , and we suppose that the signature of  $G$  is equal to 1. Thereby, the operator  $\star^2$  is equal to  $\text{Id}$  on the space of 0-forms and 2-forms and it is equal to  $-\text{Id}$  on 1-forms.

I.2.4.a. *Star operator in  $\mathbb{R}^2$ .*

- On 0-forms and on 2-forms.

Let  $T$  be a 0-form and let  $S$  be the 2-form  $\nu dy^1 dy^2$ . Then  $\star T$  is the 2-form  $\mu dy^1 dy^2$  and  $\star S$  is the 0-form  $f$ . Then, we have:

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{|G|}T, \\ f &= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\nu. \end{aligned}$$

- On 1-forms.

Let  $T$  be the 1-form  $T_1 dy^1 + T_2 dy^2$ . Then  $\star T$  is the 1-form  $\mu_1 dy^1 + \mu_2 dy^2$ , and we have:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\sqrt{|G|} (g^{12}T_1 + g^{22}T_2), \\ \mu_2 &= \sqrt{|G|} (g^{11}T_1 + g^{12}T_2). \end{aligned}$$

I.2.4.b. *The action of  $d$  acting on 0-forms in  $\mathbb{R}^2$ .* Let  $\mu$  be a 0 form, then we have :

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial \mu}{\partial y^2} dy^2.$$

I.2.4.c. *The action of  $\delta$  acting on 1-forms on  $\mathbb{R}^2$ .* Let  $\mu$  be the 1-form  $\mu_1 dy^1 + \mu_2 dy^2$ , and define  $\delta\mu = \alpha$ . Then, we have :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{|G|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \sqrt{|G|} (g^{11}\mu_1 + g^{12}\mu_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \sqrt{|G|} (g^{12}\mu_1 + g^{22}\mu_2) \right) \right\}. \end{aligned}$$

I.2.4.d. *The exterior product of a 1-form with a 0-form.* Let  $N$  be the 1-form  $N_1 dy^1 + N_2 dy^2$  and  $f$  be a 0-form. We have :

$$\text{ext}(N)f = fN_1 dy^1 + fN_2 dy^2.$$



I.2.4.e. *The interior product of a 1-form with a 1-form.* Let  $N$  and  $\mu$  be the 1-forms  $N_1 dy^1 + N_2 dy^2$ , and  $\mu_1 dy^1 + \mu_2 dy^2$ . Then, we have :

$$\text{int}(N)\mu = N_1 (\mu_1 g^{11} + \mu_2 g^{12}) + N_2 (\mu_1 g^{12} + \mu_2 g^{22}) .$$

### I.3. Simulations numériques

Les résultats numériques<sup>5</sup> de cette section ont été présentés à la conférence NUMELEC 2006 [56].

Nous illustrons les résultats de la section I.2 par des simulations numériques avec le logiciel Eléments Finis GetDP [25] sur une cellule allongée. Tout d'abord, nous rappelons le problème étudié et les résultats obtenus à la section I.2 et nous précisons la géométrie de notre domaine. Ensuite nous présentons le maillage utilisé. Enfin, nous présentons les résultats numériques qui illustrent la théorie.

Nous utilisons les unités du Système International (S.I.), c'est pourquoi dans la suite, nous ne précisons pas les unités des quantités utilisées. Nous rappelons dans le tableau suivant leurs unités écrites en *MKSA* :

pulsation	$\omega : \text{rad s}^{-1}$
conductivité électrique	$\sigma : \text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}\text{s}^3\text{A}^2$
permittivité électrique absolue	$\epsilon : \text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2$
perméabilité magnétique absolue	$\mu : \text{m kg s}^{-2}\text{A}^{-2}$
champ électrique	$\mathbf{E} : \text{m kg s}^{-3}\text{A}^{-1}$
potentiel électrique	$V : \text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-1}$

**I.3.1. Position du problème.** Nous considérons un matériau électromagnétique constitué d'un milieu intérieur  $\mathcal{O}$  de taille  $L$  entouré d'une fine membrane  $\mathcal{O}_h$  d'épaisseur constante égale à  $h$ . Le milieu intérieur est constitué d'un carré auquel deux demi-cercles sont collés aux extrémités, voir figure 7.

Les caractéristiques électromagnétiques du cytoplasme  $\mathcal{O}$  sont décrites par  $z_c$  et celles de la membrane par  $z_m$ . Nous rappelons les formules pour  $z_c$  et  $z_m$  :

$$z_c = \mu_0 \omega^2 L^2 (\epsilon_c - i\sigma_c/\omega),$$

$$z_m = \mu_0 \omega^2 L^2 (\epsilon_m - i\sigma_m/\omega).$$

Nous notons  $z_h$  la fonction égale à  $z_c$  dans  $\mathcal{O}$  et à  $z_m$  dans  $\mathcal{O}_h$ .

Nous nous choisissons une donnée de Neumann  $\phi$  et nous considérons la solution  $V$  du problème ci-dessous :

$$(I.3.110a) \quad \text{div}(z_h \text{grad } V) = 0 \text{ dans } \Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h,$$

$$(I.3.110b) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \phi \text{ sur } \partial\Omega_h.$$

Nous imposons la jauge sur  $V$  :

$$(I.3.110c) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} V \, d\sigma = 0.$$

Rappelons que les fonctions  $\mathfrak{K}$  et  $f$  sont données par les équations (I.2.79) et (I.2.80). Les asymptotiques (I.2.87) et (I.2.91) nous permettent de connaître le potentiel scalaire dans le milieu intérieur sans avoir à tenir compte de la membrane,

---

<sup>5</sup>Nous voulons remercier chaleureusement P.Dular de l'Université de Liège pour son aide précieuse dans l'utilisation de GetDP.

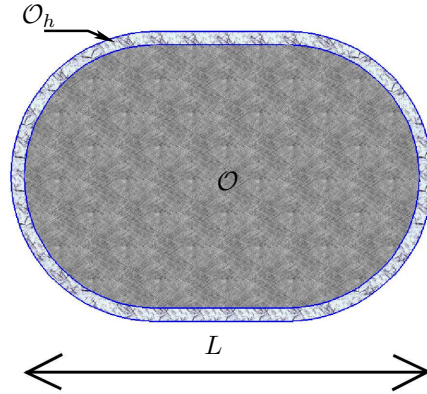


FIG. 7. Cellule allongée de taille  $L$ , constituée d'un cytoplasme  $\mathcal{O}$  entouré d'une membrane  $\mathcal{O}_h$  d'épaisseur  $h$ .

en résolvant deux problèmes successifs uniquement dans le matériau central. Plus précisément,  $V_0$  est solution de :

$$(I.3.111a) \quad \operatorname{div}(z_c \operatorname{grad} V_0) = 0 \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(I.3.111b) \quad \frac{\partial V_0}{\partial n} = \frac{z_m}{z_c} f \text{ sur } \partial \mathcal{O},$$

avec la jauge :

$$(I.3.111c) \quad \int_{\partial \mathcal{O}} V_0 \, d\sigma = 0;$$

et  $V_1$  est solution de :

$$(I.3.112a) \quad \operatorname{div}(z_c \operatorname{grad} V_1) = 0 \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(I.3.112b) \quad \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{z_m}{z_c} (\partial_t^2 V_0 + \mathfrak{R}f) \text{ sur } \partial \mathcal{O},$$

avec la jauge :

$$(I.3.112c) \quad \int_{\partial \mathcal{O}} V_1 \, d\sigma = 0.$$

A l'ordre 0, le potentiel  $V$  est approché par  $V_0$  et à l'ordre 1, il est approché par  $V_0 + hV_1$ .

### I.3.2. Implémentation numérique.

I.3.2.a. *Maillage*. Nous maillons la cellule allongée de la figure 7 à l'aide du mailleur Gmsh [25]. Afin de ne pas avoir de problème de convergence numérique lorsque l'épaisseur de la membrane tend vers 0, et comme nous désirons avoir une couche de deux éléments dans la membrane, nous la maillons par un maillage transfini, voir figure 8.

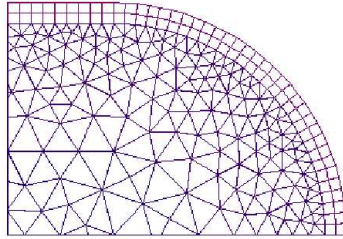


FIG. 8. Maillage utilisé.

I.3.2.b. *Implémentation*. L'implémentation des problèmes (I.3.110) et (I.3.111) ne pose aucun problème. Pour implémenter le problème (I.3.112), il faut changer la dérivée tangentielle seconde de  $V_0$  en une dérivée première car le logiciel GetDP ne gère que les dérivées tangentielles premières. Il suffit de remarquer l'égalité suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \partial_t^2 V_0|_{\mathcal{O}} U \, d\sigma_{\partial\mathcal{O}} = - \int_{\partial\mathcal{O}} \partial_t V_0|_{\mathcal{O}} \partial_t U \, d\sigma_{\partial\mathcal{O}}.$$

A la figure 9, nous présentons le champ statique d'une cellule de taille  $L = 2$  dont l'épaisseur de la membrane est égale à  $2 \cdot 10^{-2}$ . Cette grosse cellule (les cellules biologiques ont un diamètre l'ordre de  $10^{-6}$ ) présente les mêmes caractéristiques électromagnétiques que la cellule biologique :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= 1 & \sigma_m &= 10^{-5} \\ \varepsilon_c &= 80\varepsilon_0 & \varepsilon_m &= 10\varepsilon_0 \end{aligned}$$

Rappelons les valeurs de  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}.$$

Nous nous plaçons à la pulsation  $\omega = 10^4 \text{ rad/S}$ .

Nous pouvons voir que le champ électrique est piégé dans la membrane, alors que dans le cytoplasme, le champ est quasi-nul. Nous retrouvons ici ce que nous avons observé pour les simulations numériques de la section I.1 dans le cas d'une cellule circulaire.

**I.3.3. Illustration des asymptotiques.** Nous prenons  $\phi$  égale à :

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_h, \quad \phi(x, y) = \sin(2\text{Arctan}(y/x)).$$

Ce choix de donnée de Neumann nous donne directement l'expression de  $f$  :

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_h, \quad f(x, y) = \sin(2\text{Arctan}(y/x)),$$

car  $\phi$  ne dépend que de l'angle  $(Ox, OM)$  où  $M$  est le point d'abscisse  $(x, y)$ .

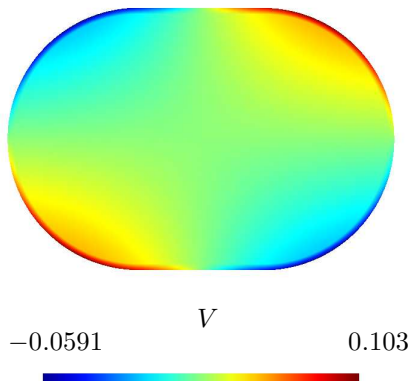


FIG. 9. Ligne d'isovaleurs de  $V$  dans une cellule allongée avec membrane isolante.

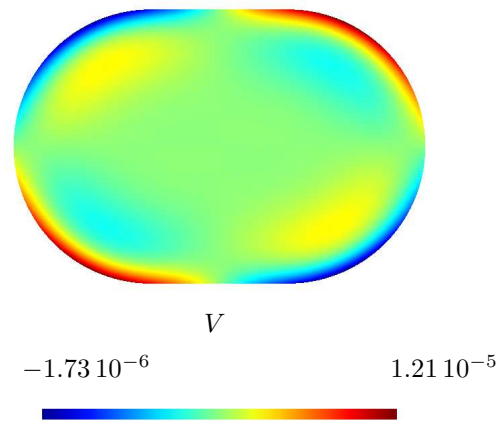
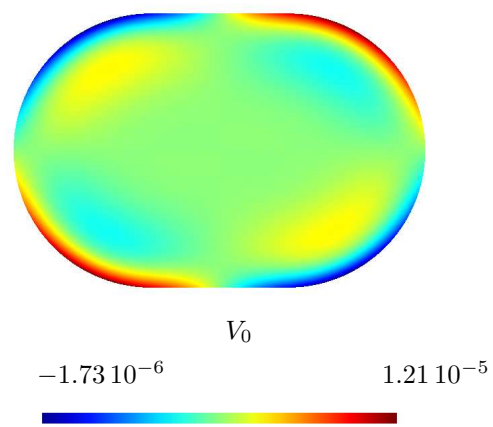
A la figure 10, nous traçons les isovaleurs du potentiel statique  $V$  dans le cytoplasme. Nous comparons le potentiel  $V$  calculé en maillant la membrane au potentiel  $V_0$  du développement asymptotique : nous pouvons voir que les champs sont identiques.

Pour illustrer les ordres de convergence des asymptotiques prouvés à la section I.2, nous choisissons un matériau particulier qui n'a plus rien avoir avec la cellule biologique. En effet, les paramètres biologiques sont tels que le potentiel scalaire total est calculé avec une erreur numérique trop grande, et donc il est impossible d'illustrer l'amélioration qu'apporte le calcul à l'ordre 1 par rapport à l'ordre 0. En fait, dans ce cas la, l'asymptotique  $V_0 + hV_1$  est plus précise que le calcul du potentiel  $V$  calculé en maillant la membrane.

Voici les paramètres que nous avons utilisés :

$$\begin{array}{rcl} \sigma_c = & 0.1 & \sigma_m = 1 \\ \varepsilon_c = & 10^3 \varepsilon_0 & \varepsilon_m = 10^4 \varepsilon_0 \\ L = & 2 & \omega = 10 \end{array}$$

La figure 11 nous donne l'erreur commise en fonction de l'épaisseur  $h$  pour un milieu faiblement conducteur entouré d'une membrane plus conductrice. Remarquons, par exemple, que pour une épaisseur relative de  $5 \cdot 10^{-3}$ , l'erreur relative est de 10% à l'ordre 0 et de 1% à l'ordre 1.

(a) Potentiel  $V$ (b) Potentiel  $V_0$ FIG. 10. Isovaleurs des potentiels scalaires  $V$  et  $V_0$  dans le cytoplasme.

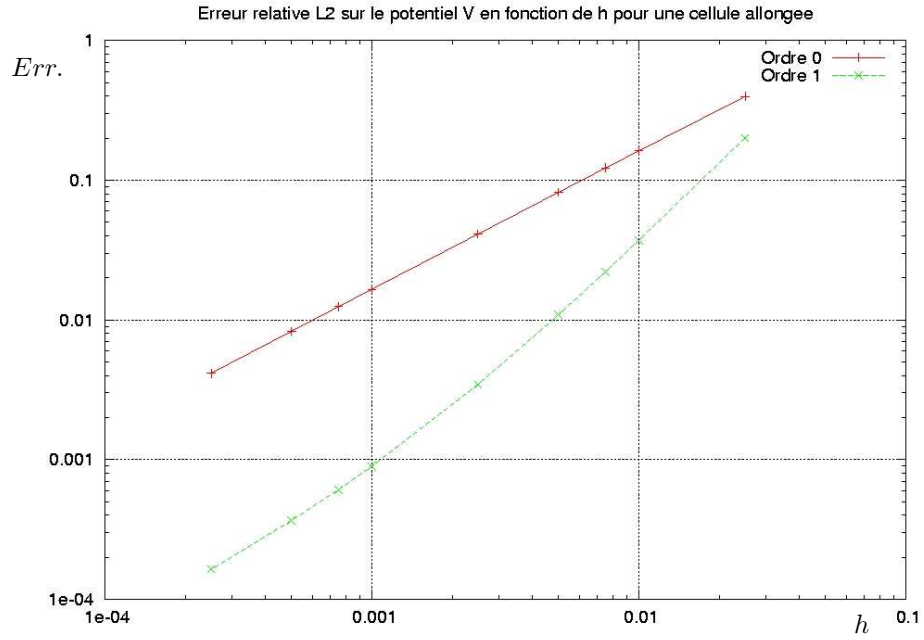


FIG. 11. Erreur sur le potentiel statique en fonction l'épaisseur.  
Résultats numériques obtenus sur la cellule de la figure 9.

### I.4. Appendice

#### Un résultat sur la dérivée tangentielle seconde d'un problème elliptique particulier.

CLAIR POIGNARD

Pour justifier un développement asymptotique par un argument de bootstrap (que nous ne présentons pas dans cette thèse), il nous a fallu estimer la dérivée tangentielle seconde du problème (I.4.115) suivant. Un calcul simple en géométrie circulaire nous a permis d'intuiter le résultat du théorème I.4.2. L'avantage de l'approche utilisée pour démontrer ce théorème est qu'elle peut s'appliquer en dimension d'espace supérieure à 2, bien qu'ici nous nous plaçons dans ce cas.

Nous avons jugé utile de présenter ce résultat car le lemme I.4.5 nous permet de relier la proposition I.1.8 de la section I.1 au théorème I.2.1 de la section I.2. En effet, en appliquant le lemme I.4.5 au potentiel  $V_0$  du théorème I.2.1, nous obtenons l'expression suivante du terme principal (au sens le moins régulier) de  $\partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}}$  :

$$\partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}} = i\mathcal{H}\partial_t\phi + \text{termes plus réguliers},$$

où  $\phi$  est la condition de Neumann aux bords la cellule du problème initial I.2.75. Ainsi, la condition de Neumann aux bords du cytoplasme à laquelle satisfait  $V_0 + hV_1$  est égale à :

$$\begin{aligned} \partial_n (V_0 + hV_1)|_{\partial\mathcal{O}} &= \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + \frac{q_m}{q_c} h \partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}} \right), \\ &= \frac{q_m}{q_c} \left( \phi + ih \frac{q_m}{q_c} \mathcal{H}\partial_t\phi \right) + \text{termes plus réguliers}, \end{aligned}$$

ce qui est en accord avec les résultats des propositions I.1.7 et I.1.8.

**I.4.1. Position du problème.** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , à bord  $\partial\mathcal{O}$  régulier, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , orienté dans le sens trigonométrique. Nous le supposons de longueur  $2\pi$ . Les notations :

$$\partial_n, \partial_t,$$

désignent respectivement les dérivées normales et tangentielles.

Nous notons  $P(x, y)$  le noyau de Poisson. C'est le noyau de l'opérateur de Laplace avec des conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes. Dans la remarque suivante, nous montrons que pour tout  $y \in \partial\mathcal{O}$ ,  $P(\cdot, y)$  intégrable sur  $\mathcal{O}$ . Ceci découle facilement du Théorème 1.1 de l'article de L.A. Carvalho Dos Santos et J. Hounie [20] que nous redonnons ici :

**THÉORÈME** (Carvalho Dos Santos et Hounie). *Soit  $\Omega$ , un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , à bord régulier  $\Sigma$ . Soit  $P(z, x)$  le noyau de Poisson dans  $\Omega$ , c'est le noyau de l'opérateur de Laplace avec condition aux limites de Dirichlet non-homogènes. Alors, nous avons :*

$$\begin{aligned} &\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^{n-1}, \exists C_{\alpha, \beta}(\Omega) > 0, \text{ tel que :} \\ \text{(I.4.113)} \quad &\forall (z, x) \in \Omega \times \Sigma, \left| \partial_z^\alpha \partial_x^\beta P(z, x) \right| \leq \frac{C_{\alpha, \beta}(\Omega)}{|x - z|^{n-1+|\alpha|+|\beta|}}. \end{aligned}$$



REMARQUE I.4.1 (Intégrabilité du noyau de Poisson). *En appliquant ce théorème à  $\mathcal{O}$ , il existe  $C > 0$  telle que pour presque tout  $(x, y) \in \mathcal{O} \times \partial\mathcal{O}$  :*

$$|P(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|}.$$

Notons pour  $y \in \partial\mathcal{O}$  et  $r > 0$ ,

$$B_y(r) = \{z \in \mathcal{O} : |z - y| < r\}.$$

Soient  $(y, r) \in \partial\mathcal{O} \times ]0, +\infty[$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{|x - y|} dx &= \int_{\mathcal{O} \setminus B_y(r)} \frac{1}{|x - y|} dx + \int_{B_y(r)} \frac{1}{|x - y|} dx, \\ &\leq \int_{\mathcal{O} \setminus B_y(r)} \frac{1}{|x - y|} dx + \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{s} s ds d\theta, \\ &\leq \int_{\mathcal{O} \setminus B_y(r)} \frac{1}{|x - y|} dx + 2\pi r < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'intégrabilité de  $K(\cdot, y)$  sur  $\mathcal{O}$ , pour presque tout  $y \in \partial\mathcal{O}$ .

Ainsi, nous pouvons définir  $\mathcal{P}(y)$  pour presque tout  $y \in \partial\mathcal{O}$  :

$$\mathcal{P}(y) = \int_{\mathcal{O}} P(x, y) d\text{vol}_{\mathcal{O}}(x).$$

Soient  $(g, g_1)$  deux fonctions de  $H^{1/2}(\partial\mathcal{O}) \times H^{3/2}(\partial\mathcal{O})$  telles que :

$$(I.4.114) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} (\mathcal{P}g - g_1) d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Nous nous intéressons aux problèmes :

$$(I.4.115a) \quad \begin{cases} \Delta U = 0, \\ U|_{\partial\mathcal{O}} = g, \end{cases}$$

et

$$(I.4.115b) \quad \begin{cases} \Delta S = -U, \\ \partial_n S|_{\partial\mathcal{O}} = g_1. \end{cases}$$

Remarquons que la condition d'intégrabilité pour que le problème de Neumann (I.4.115b) soit bien posé est vérifiée grâce à la relation (I.4.114) entre les données aux bords. En effet, nous avons les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} U(x) d\text{vol}_{\mathcal{O}}(x) &= \int_{\mathcal{O}} \int_{\partial\mathcal{O}} P(x, y) g(y) d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}(y) d\text{vol}_{\mathcal{O}}(x) \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} P(x, y) d\text{vol}_{\mathcal{O}}(x) g(y) d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}(y) \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} \mathcal{P}g d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}, \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}} g_1 d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

Le but de ce papier est de démontrer le théorème I.4.2 ci-après, qui donne explicitement le terme principal de la dérivée tangentielle seconde  $\partial_t^2 S|_{\partial\mathcal{O}}$  de  $S$  le long

de  $\partial\mathcal{O}$  en fonction des données  $g$  et  $g_1$  ; les termes négligés étant plus réguliers que  $\partial_t^2 S|_{\partial\mathcal{O}}$ .

Nous notons  $\mathcal{H}$  la transformée de Hilbert. Pour les fonctions  $2\pi$ -périodiques, elle est définie (voir les livres de Katznelson [42], Stein [66] et Stein et Weiss [67]) sur les coefficients de Fourier par :

$$\widehat{\mathcal{H}(f)}_k = \operatorname{sgn}(k)\widehat{f}_k.$$

**THÉORÈME I.4.2.** *Soit  $s \geq 0$ . Soient  $(g, g_1)$  dans  $H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O}) \times H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})$  satisfaisant à l'hypothèse (I.4.114) et soit  $S$  la solution du problème (I.4.115).*

*Alors  $\partial_t^2 S|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O})$  et :*

(I.4.116)

$$\partial_t^2 S|_{\partial\mathcal{O}} + \frac{1}{2}g - i\mathcal{H}\partial_t g_1 \in H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O}).$$

*De plus, il existe une constante  $C_{\mathcal{O}} > 0$  dépendant uniquement de  $\mathcal{O}$  telle que :*

(I.4.117)

$$\left\| \partial_t^2 S|_{\partial\mathcal{O}} + \frac{1}{2}g - i\mathcal{H}\partial_t g_1 \right\|_{H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{\mathcal{O}} (\|g\|_{H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O})} + \|g_1\|_{H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})}).$$

**REMARQUE I.4.3.** *Nous définissons sur  $H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O}) \times H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})$  la fonction reg par :*

$$\begin{aligned} \forall (g, g_1) \in H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O}) \times H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O}), \\ \operatorname{reg}(g, g_1) = \partial_t^2 S|_{\partial\mathcal{O}} + \frac{1}{2}g - i\mathcal{H}\partial_t g_1. \end{aligned}$$

*La bilinéarité de reg est évidente, et le théorème I.4.2 implique la continuité de reg de  $H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O}) \times H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})$  dans  $H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})$ .*

Dans un premier temps, nous montrons comment scinder le problème en  $U$  et  $S$  en deux sous-problèmes indépendants. Ensuite, nous traitons chaque sous-problème séparément.

Soient les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ (\gamma_1, \gamma_2) \in H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O}) \times H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O}) : \int_{\partial\mathcal{O}} (\mathcal{P}\gamma_1 - \gamma_2) \operatorname{dvol}_{\partial\mathcal{O}} = 0 \right\}, \\ \mathcal{V}_1 &= \left\{ (\gamma_1, c) \in H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O}) : c = \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \int_{\partial\mathcal{O}} \mathcal{P}(y)\gamma_1(y) \operatorname{dvol}_{\partial\mathcal{O}}(y) \right\} \subset \mathcal{V}. \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{V}_2 = \left\{ (0, \gamma_2), \gamma_2 \in H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O}) : \int_{\partial\mathcal{O}} \gamma_2(y) \operatorname{dvol}_{\partial\mathcal{O}}(y) = 0 \right\} \subset \mathcal{V}.$$

Nous avons l'égalité

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2.$$

Ainsi, le problème (I.4.115a)–(I.4.115b) peut être découpé en deux sous-problèmes. Le problème en  $(U, V)$ ,

$$(I.4.118a) \quad \begin{cases} \Delta U = 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ U|_{\partial\mathcal{O}} = g, \end{cases}$$

et

$$(I.4.118b) \quad \begin{cases} \Delta V = -U, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \partial_n V|_{\partial\mathcal{O}} = \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \int_{\partial\mathcal{O}} \mathcal{P}(y)g(y) \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}(y); \end{cases}$$

et le problème en  $W$  :

$$(I.4.119a) \quad \Delta W = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(I.4.119b) \quad \partial_n W|_{\partial\mathcal{O}} = g_1 - \int_{\partial\mathcal{O}} g_1(y) \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}(y).$$

Il est clair que  $(U, V + W)$  est solution de (I.4.115), ainsi,

$$(I.4.120) \quad S = V + W.$$

Maintenant, nous énonçons deux lemmes qui, via la décomposition (I.4.120) de  $S$ , impliquent directement le théorème I.4.2.

LEMME I.4.4. *Soit  $s \geq 0$ . Soient  $g$  une fonction dans  $H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O})$  et soit  $V$  la solution du problème (I.4.118).*

*Alors  $\partial_t^2 V|_{\partial\mathcal{O}}$  est dans  $H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O})$  et :*

$$(I.4.121) \quad \partial_t^2 V|_{\partial\mathcal{O}} + \frac{1}{2}g \in H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O}).$$

*De plus il existe une constante  $C_{\mathcal{O}} > 0$  dépendant uniquement de  $\mathcal{O}$  telle que :*

$$(I.4.122) \quad \left\| \partial_t^2 V|_{\partial\mathcal{O}} + \frac{1}{2}g \right\|_{H^{3/2+s}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{\mathcal{O}} \|g\|_{H^{1/2+s}(\partial\mathcal{O})}.$$

Pour  $W$ , nous avons le lemme suivant :

LEMME I.4.5. *Soit  $\sigma \geq 0$ . Soient  $g_1$  dans  $H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})$  et soit  $W$  la solution du problème (I.4.119).*

*Alors  $\partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})$  et nous avons :*

$$(I.4.123a) \quad \partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}g_1 \in H^{3/2+\sigma}(\partial\mathcal{O}).$$

*De plus il existe une constante  $C_{2,\mathcal{O}} > 0$  dépendant de  $\mathcal{O}$  uniquement telle que :*

$$(I.4.123b) \quad \|\partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}g_1\|_{H^{3/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{2,\mathcal{O}} \|g_1\|_{H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})}.$$

*La dérivée tangentielle seconde de  $\partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}}$  est dans l'espace  $H^{-1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})$  et :*

$$(I.4.124a) \quad \partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}\partial_t g_1 \in H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O}).$$

*De plus il existe une constante  $C_{2,\mathcal{O}} > 0$  dépendant de  $\mathcal{O}$  uniquement telle que :*

$$(I.4.124b) \quad \|\partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}\partial_t g_1\|_{H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{2,\mathcal{O}} \|g_1\|_{H^{1/2+\sigma}(\partial\mathcal{O})}.$$

REMARQUE I.4.6. *Le théorème I.4.2 découle immédiatement des lemme I.4.4 et lemme I.4.5 en prenant  $\sigma = 1 + s$  dans le lemme I.4.5.*

Pour ne pas alourdir les notations, nous ne démontrons que le cas  $s = 0$ . Le lecteur vérifiera sans mal que la démonstration est la même pour  $s > 0$ .

Dans un premier temps, nous démontrons le lemme I.4.4. Nous montrons un résultat classique d'existence et d'unicité à la section I.4.2. Dans la partie I.4.3, par réductions successives et partition de l'unité, nous nous ramenons à un problème similaire mais plus simple à traiter. Enfin, à l'aide d'opérateurs pseudodifférentiels sur le tore, nous exprimons, dans la partie I.4.4 la dérivée tangentielle seconde de  $V$ , solution du problème (I.4.118) le long de  $\partial\mathcal{O}$ . Enfin, dans la partie I.4.5, nous démontrons le lemme I.4.5.

**I.4.2. Existence et unicité du problème (I.4.118a)–(I.4.118b).** Commençons par un résultat fonctionnel sur le problème (I.4.118). Rappelons que la donnée aux bords,  $g$ , du problème (I.4.118a) est dans  $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ , et posons :

$$c = \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \int_{\partial\mathcal{O}} \mathcal{P}(y)g(y) \, \text{dvol}_{\partial\mathcal{O}}(y).$$

Avec ces notations, le problème (I.4.118) s'écrit :

$$(I.4.125a) \quad \begin{cases} \Delta U = 0, & \text{dans } \mathcal{O}, \\ U|_{\partial\mathcal{O}} = g & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

et

$$(I.4.125b) \quad \begin{cases} \Delta V = -U, & \text{dans } \mathcal{O}, \\ \partial_n V|_{\partial\mathcal{O}} = c & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

Insistons sur le fait que, par définition de  $c$ , le problème (I.4.125) est bien posé.

Une application directe du lemme de Lax-Milgram nous donne l'existence et l'unicité de  $U$  dans  $H^1(\mathcal{O})$ , puis de  $V$  dans  $H^3(\mathcal{O})/\mathbb{R}$  (voir Nečas [51], Gilbarg et Trudinger [33] ou le chapitre IX.6. du livre de Brézis [18]).

**I.4.3. Réductions successives du problème (I.4.125).** Dans cette partie, par partition de l'unité, nous ramenons l'étude de (I.4.125) à un problème réduit plus simple, dont la solution est de même régularité que la solution du problème initial (I.4.125) et telle que la différence entre ces deux solutions est une fonction plus régulière que les précédentes. La solution du problème réduit est alors la partie principale de la solution du problème initial, les termes négligés étant plus réguliers. Mais avant tout, nous donnons une majoration de  $c$  en fonction de  $\|g\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}$ .

**REMARQUE I.4.7.** *Il est classique (voir le livre de Brézis [18] par exemple) de montrer l'existence d'une constante  $C > 0$  dépendant de  $\mathcal{O}$  telle que :*

$$\|U\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
|c| &= \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \left| \int_{\partial\mathcal{O}} \{ \mathcal{P}(y)g(y) \} dy \right|, \\
&= \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \left| \int_{\partial\mathcal{O}} \left\{ g(y) \int_{\mathcal{O}} P(x,y) dx \right\} dy \right|, \\
&= \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \left| \int_{\mathcal{O}} \left\{ \int_{\partial\mathcal{O}} g(y)P(x,y) dy \right\} dx \right|, \\
&= \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \left| \int_{\mathcal{O}} U(x) dx \right|, \\
&\leq \frac{|\mathcal{O}|}{|\partial\mathcal{O}|} \|U\|_{L^2(\mathcal{O})}, \\
&\leq \tilde{C} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})},
\end{aligned}$$

avec  $\tilde{C} = C|\mathcal{O}|/|\partial\mathcal{O}|$ .

I.4.3.a. *Partition de l'unité.* Soit  $h_0$ , un réel strictement positif, que l'on déterminera par la suite. Pour  $\omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , nous notons  $\bar{\omega}$  l'adhérence de  $\omega$ . La distance euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $\text{dist}$ . Soit  $(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1)$  un recouvrement par les ouverts de  $\mathcal{O}$ ,

$$(I.4.126a) \quad \overline{\mathcal{O}_0} \subset \mathcal{O}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}, \partial\mathcal{O}_1 \cap \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{O},$$

$$(I.4.126b) \quad \text{dist}(\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) = h_0,$$

$$(I.4.126c) \quad \text{dist}(\partial\mathcal{O}_0, \partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}) = h_0/2,$$

$$(I.4.126d) \quad \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}.$$

Soient  $\phi_0, \phi_1$  deux fonctions  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  formant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1$  de  $\mathcal{O}$ . Plus précisément (voir figure 12) ,

$$\begin{cases} \text{supp}(\phi_0) \subset \mathcal{O}_0, \\ \phi_0|_{\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_1} \equiv 1, \\ \text{supp}(\phi_1) \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}_1, \\ \phi_1|_{\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_0} \equiv 1, \end{cases}$$

et

$$\phi_0 + \phi_1 \equiv 1, \text{ dans } \mathcal{O}.$$

Pour  $i = 0, 1$ , nous notons  $U_i = U\phi_i$  et  $V_i = V\phi_i$ . Dans  $\mathcal{O}_1$ , il résulte des équations (I.4.125) que les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  vérifient respectivement :

$$(I.4.127a) \quad \begin{cases} \Delta U_1 = U\Delta\phi_1 + 2\nabla U \cdot \nabla\phi_1, \text{ dans } \mathcal{O}_1, \\ U_1|_{\partial\mathcal{O}} = g, U_1|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases}$$

et

$$(I.4.127b) \quad \begin{cases} \Delta V_1 = -U_1 + V\Delta\phi_1 + 2\nabla V \cdot \nabla\phi_1, \text{ dans } \mathcal{O}_1, \\ \partial_n V_1|_{\partial\mathcal{O}} = c, V_1|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases}$$

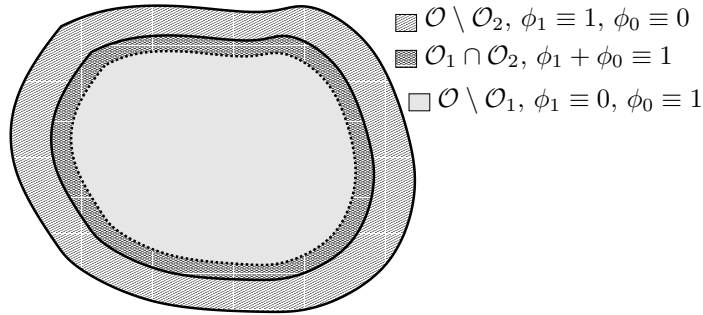


FIG. 12. Partition de l'unité.

Remarquons que le problème vérifié par  $V_1$  est bien posé, grâce à la condition de Dirichlet sur  $\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}$ , ainsi, nous n'avons pas à vérifier de condition de compatibilité sur les données. Comme  $U$  est dans  $H^1(\mathcal{O})$  et  $\phi_1$  dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ , nous avons :

$$(I.4.128) \quad U\Delta\phi_1 + 2\nabla U \cdot \nabla\phi_1 \in L^2(\mathcal{O}_1),$$

et donc comme  $g$  est dans  $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ ,  $U_1$  appartient à  $H^1(\mathcal{O}_1)$  (voir par exemple [33], [48] ou [51]). Par un raisonnement similaire, nous montrons l'appartenance de  $V_1$  à  $H^3(\mathcal{O}_1)$ .

Afin de simplifier le problème (I.4.127), nous considérons uniquement ses termes principaux. Définissons ainsi  $U_2$  et  $V_2$  les solutions de :

$$(I.4.129a) \quad \begin{cases} \Delta U_2 = 0, & \text{dans } \mathcal{O}_1, \\ U_2|_{\partial\mathcal{O}} = g, & U_2|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases}$$

et

$$(I.4.129b) \quad \begin{cases} \Delta V_2 = -U_2, & \text{dans } \mathcal{O}_1, \\ \partial_n V_2|_{\partial\mathcal{O}} = c, & V_2|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions  $U_2$  et  $V_2$  ont la même régularité, respectivement, que les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  du problème (I.4.127), c'est-à-dire  $U_2$  appartient à  $H^1(\mathcal{O}_1)$  et  $V_2$  à  $H^3(\mathcal{O}_1)$ . En fait,  $U_1 - U_2 \in H^2(\mathcal{O}_1)$  et  $V_1 - V_2 \in H^4(\mathcal{O}_1)$ . En effet, posons  $a_0 = U_1 - U_2$  et  $b_0 = V_1 - V_2$ . Les fonctions  $a_0$  et  $b_0$  sont solutions respectives des problèmes :

$$(I.4.130a) \quad \begin{cases} \Delta a_0 = U\Delta\phi_1 + 2\nabla U \cdot \nabla\phi_1, & \text{dans } \mathcal{O}_1, \\ a_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0, & a_0|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases}$$

et

$$(I.4.130b) \quad \begin{cases} \Delta b_0 = -a_0 + V\Delta\phi_1 + 2\nabla V \cdot \nabla\phi_1, & \text{dans } \mathcal{O}_1, \\ \partial_n b_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0, & b_0|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases}$$

Or nous savons, par (I.4.128), que le second membre de (I.4.130a) est dans  $L^2(\mathcal{O}_1)$ . Donc, comme  $a_0$  vérifie des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, nous obtenons, d'après Girault-Raviart [35] § I.1.3-4 (voir aussi [33] ou [48]), que  $a_0$  est

dans  $H^2(\mathcal{O}_1)$ . De même, nous pouvons montrer que  $b_0$  appartient à  $H^4(\mathcal{O}_1)$ . Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 + a_0, \\ V_1 &= V_2 + b_0, \end{aligned}$$

où  $a_0$  et  $b_0$  sont des fonctions plus régulières, respectivement, que les fonctions  $U_2$  et  $V_2$ . De plus, par des estimations classiques, nous obtenons (voir par exemple [35] I § 1.3-4), l'existence d'une constante  $C_{\mathcal{O}_1} > 0$  dépendant uniquement de  $\mathcal{O}_1$  telle que :

$$\begin{aligned} \|a_0\|_{H^2(\mathcal{O}_1)} &\leq C_{\mathcal{O}_1} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|b_0\|_{H^4(\mathcal{O}_1)} &\leq C_{\mathcal{O}_1} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous étudions le problème (I.4.129b) vérifié par  $U_2$  et  $V_2$ .

I.4.3.b. *Le problème près du bord.* Nous récrivons le problème réduit (I.4.129b) en coordonnées locales. Nous ferons alors une ultime réduction du problème (I.4.115) en un problème encore plus simple que nous traiterons par opérateurs pseudo-différentiels dans la partie suivante.

Tout d'abord, choisissons  $h_0$  de manière adéquate. Nous paramétrons le bord  $\partial\mathcal{O}$  (que nous supposons de longueur  $2\pi$ ) comme suit ; comme le bord est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il existe un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , noté  $\psi$ , de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sur  $\partial\mathcal{O}$  tel que :

$$\partial\mathcal{O} = \{\psi(\theta), \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}.$$

Pour alléger les notations, nous posons :

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Nous notons  $\kappa$  la courbure de  $\partial\mathcal{O}$  et  $n$  la normale extérieure à  $\partial\mathcal{O}$ . Nous fixons alors  $h_0$  tel que :

$$0 < h_0 < \inf 1/\|\kappa\|_\infty.$$

D'après les propriétés de l'ouvert  $\mathcal{O}_1$  définies en (I.4.126) celui-ci est assez proche du bord  $\partial\mathcal{O}$  pour être paramétré en coordonnées locales :

$$\mathcal{O}_1 = \{\psi(\theta) + h_0\eta n(\theta), (\eta, \theta) \in ]-1, 0[ \times \mathbb{T}\}.$$

Nous notons  $\Psi$  le difféomorphisme d'un voisinage de  $[-1, 0] \times \mathbb{T}$  sur un voisinage de  $\mathcal{O}_1$  :

$$\forall (\eta, \theta) \in [-1, 0] \times \mathbb{T}, \Psi(\eta, \theta) = \psi(\theta) + h_0\eta n(\theta).$$

De plus, pour  $\lambda \in [-1, 0]$ , la notation  $\Psi_\lambda$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{T}$  par  $\Psi_\lambda = \Psi(\lambda, \cdot)$ .

Nous munissons  $[-1, 0] \times \mathbb{T}$  de la métrique :

$$(I.4.131) \quad \gamma = h_0^2 d\eta^2 + (1 + h_0\eta\kappa)^2 d\theta^2,$$

et, nous définissons sur  $[-1, 0] \times \mathbb{T}$  les fonctions  $U_3$  et  $V_3$  par :

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 \circ \Psi, \\ V_3 &= V_2 \circ \Psi, \end{aligned}$$

et, sur  $\mathbb{T}$  :

$$\gamma = g \circ \Psi_0.$$

Nous récrivons le problème (I.4.129b) dans les coordonnées locales comme suit. Posons, pour  $(\eta, \theta) \in [-1, 0] \times \mathbb{T}$  :

$$(I.4.132) \quad \alpha(\eta, \theta) = \frac{h_0}{1 + h_0\eta\kappa}.$$

Dans  $[-1, 0] \times \mathbb{T}$  nous avons,

$$(I.4.133a) \quad \begin{cases} \frac{1}{h_0} \left\{ \partial_\eta \left( \frac{1}{\alpha} \partial_\eta U_3 \right) + \partial_\theta \left( \alpha \partial_\theta U_3 \right) \right\} = 0, \\ U_3(0, \cdot) = \gamma, \quad U_3(-1, \cdot) = 0, \end{cases}$$

et

$$(I.4.133b) \quad \begin{cases} \frac{1}{h_0} \left\{ \partial_\eta \left( \frac{1}{\alpha} \partial_\eta V_3 \right) + \partial_\theta \left( \alpha \partial_\theta V_3 \right) \right\} = -U_3, \\ \partial_\eta V_3(0, \cdot) = h_0 c, \quad V_3(-1, \cdot) = 0. \end{cases}$$

Nous simplifions ce problème en sortant  $\alpha$  du premier terme du premier membre de gauche de (I.4.133b). Soient alors  $U_4$  et  $V_4$  les solutions respectives des problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 U_4 + \alpha \partial_\theta \left( \alpha \partial_\theta U_4 \right) &= 0, \quad \text{dans } [-1, 0] \times \mathbb{T}, \\ U_4(0, \cdot) &= \gamma, \quad U_4(-1, \cdot) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 V_4 + \alpha \partial_\theta \left( \alpha \partial_\theta V_4 \right) &= -h_0 \alpha U_4, \quad \text{dans } [-1, 0] \times \mathbb{T}, \\ \partial_\eta V_4(0, \cdot) &= h_0 c, \quad V_4(-1, \cdot) = 0. \end{aligned}$$

Nous montrons que  $a_1 = U_3 - U_4$  est plus régulier que  $U_4$  et de même,  $b_1 = V_3 - V_4$  est plus régulier que  $V_4$ . En effet, dans  $[-1, 0] \times \mathbb{T}$ ,  $a_0$  et  $b_0$  vérifient respectivement :

$$(I.4.134a) \quad \partial_\eta^2 a_1 + \alpha \partial_\theta \left( \alpha \partial_\theta a_1 \right) = -\kappa \alpha \partial_\eta U_3,$$

$$(I.4.134b) \quad a_1(0, \cdot) = 0, \quad a_1(-1, \cdot) = 0,$$

et

$$(I.4.134c) \quad \partial_\eta^2 b_1 + \alpha \partial_\theta \left( \alpha \partial_\theta b_1 \right) = -h_0 \alpha a_1 - \kappa \alpha \partial_\eta V_3,$$

$$(I.4.134d) \quad \partial_\eta b_1(0, \cdot) = 0, \quad b_1(-1, \cdot) = 0.$$

Notons  $\mathcal{C}$  le cylindre  $[0, 1] \times \mathbb{T}$ . Pour  $s \in \mathbb{R}$ , nous définissons les espaces de Sobolev sur  $\mathcal{C}$  muni de la métrique (I.4.131) comme suit :

$$H_\gamma^s(\mathcal{C}) = \left\{ f : f \circ \Psi^{-1} \in H^s(\mathcal{O}_1) \right\},$$

et l'espace  $L_\gamma^2$  est défini par

$$L_\gamma^2(\mathcal{C}) = \left\{ f : f \circ \Psi^{-1} \in L^2(\mathcal{O}_1) \right\}.$$



Comme  $U_2$  appartient à  $H^1(\mathcal{O}_1)$  et comme le choix de  $h_0$  implique que la fonction :

$$(\eta, \theta) \mapsto \alpha(\eta, \theta),$$

est dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C})$ , il en découle que  $U_3$  est dans

$$H_\gamma^1(\mathbf{C}).$$

Ainsi, le second membre de (I.4.134b) est dans

$$L_\gamma^2(\mathbf{C}).$$

L'opérateur :

$$P(\eta, \theta, D) = \partial_\eta^2 + (\alpha \partial_\theta)^2,$$

est elliptique, à coefficients dans  $\mathcal{C}$ , donc, (voir Lions-Magenes [48]), la fonction  $a_1$  vérifie :

$$a_1 \in H_\gamma^2(\mathbf{C}),$$

donc elle a un degré de régularité de plus que les fonctions  $U_3$  et  $U_4 = U_3 - a_1$ . Par un raisonnement similaire, nous montrons que  $b_1$  appartient à l'espace de Sobolev suivant :

$$b_1 \in H_\gamma^4(\mathbf{C}),$$

et donc a un degré de régularité de plus que  $V_4$ . Ainsi, nous avons montré que, dans  $[-1, 0] \times \mathbb{T}$  :

$$\begin{aligned} U_1 \circ \Psi &= U_4 + a_0 \circ \Psi + a_1, \\ V_1 \circ \Psi &= V_4 + b_0 \circ \Psi + b_1. \end{aligned}$$

Les fonctions  $(a_1, a_0 \circ \Psi)$  et  $(b_1, b_0 \circ \Psi)$  ont un cran de plus de régularité respectivement que  $U_4$  et que  $V_4$ . Nous obtenons par une méthode classique d'estimations (multiplication par le conjugué puis intégration sur le domaine) les estimations suivantes sur  $a_1$  et  $b_1$  : il existe  $C_{\Psi, \mathcal{O}_1}$  dépendant du domaine  $\mathcal{O}_1$  et du difféomorphisme  $\Psi$  tel que ,

$$\begin{aligned} \|a_1 \circ \Psi^{-1}\|_{H^2(\mathcal{O}_1)} &\leq C_{\Psi, \mathcal{O}_1} \|g\|_{H^{1/2}(\partial \mathcal{O})}, \\ \|b_1 \circ \Psi^{-1}\|_{H^4(\mathcal{O}_1)} &\leq C_{\Psi, \mathcal{O}_1} \|g\|_{H^{1/2}(\partial \mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Dans la partie suivante, nous étudions les fonctions  $U_4$  et  $V_4$ . Rappelons que nous nous intéressons à  $\partial_t^2 v$  ; or le changement de variable a été choisi de telle sorte que :

$$(\partial_t^2 v) \circ \Psi = \partial_\theta^2 (v \circ \Psi),$$

ainsi, nous allons maintenant nous intéresser à  $\partial_\theta^2 V_4$ .

**I.4.4. Etude pseudodifférentielle du problème réduit.** Deux racines évidentes de l'opérateur pseudodifférentiel  $-(\alpha\partial_\theta)^2$  sont  $\pm i\alpha\partial_\theta$ , cependant ces deux opérateurs sur  $\mathbb{T}$  présentent l'inconvénient de ne pas être positifs. Ainsi, l'approche de Trèves [71] Chapitre III devient inutilisable. C'est pourquoi nous faisons une ultime transformation, afin de ne pas considérer l'opérateur  $\partial_\eta^2 + (\alpha\partial_\theta)^2$  mais un opérateur du type :

$$(I.4.135) \quad (\partial_\eta - A(\eta))(\partial_\eta + A(\eta)),$$

où  $A(\eta)$  est un opérateur positif d'ordre 1 sur  $\mathbb{T}$ , lisse par rapport à la variable  $\eta \in [-1, 0]$  et choisi de telle sorte que :

$$\left\{ \partial_\eta^2 + (\alpha\partial_\theta)^2 \right\} - (\partial_\eta - A(\eta))(\partial_\eta + A(\eta)),$$

soit un opérateur d'ordre au plus 1.

I.4.4.a. *Opérateurs pseudodifférentiels sur le tore.* Nous appliquons les méthodes usuelles de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, notamment la construction d'une parametrix pour l'équation de la chaleur (voir les livres de Trèves [71] Chapitre III, P.Gilkey [34] Chapitre 1 pour plus de détails).

Cependant, à la différence de ces auteurs, nous travaillons avec des opérateurs pseudodifférentiels  $2\pi$ -périodiques. En effet, il nous a semblé essentiel d'utiliser la périodicité des quantités exprimées en coordonnées locales.

Le calcul symbolique sur les opérateurs pseudodifférentiels périodiques, introduit par Agranovič [4] est développé dans les articles de Turunen [73], Turunen et Vainikko [74] ou encore Melo [49] ainsi que dans le livre de Saranen et Vainikko [63] Chapitre 7. L'équivalence entre les classes des opérateurs pseudodifférentiels classiques sur le tore et des opérateurs pseudodifférentiels périodiques est démontrée dans l'article de Turunen [73] Théorème 4.2 (voir aussi [63] Theorem 7.2.1). Ce résultat nous permet d'utiliser les résultats connus sur les opérateurs pseudodifférentiels classiques (voir les livres de Trèves [71], ou de Gilkey [34]) et de les transposer aux opérateurs pseudodifférentiels périodiques. Dans ce paragraphe, nous définissons les notations utilisées par la suite.

Nous définissons la classe des symboles discrets (voir l'article de Turunen et Vainikko [74]). Tout d'abord, à toute suite  $(a(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , nous associons la suite :

$$\delta a(k) = a(k+1) - a(k).$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ , nous posons  $\delta^\alpha$  l'opérateur sur les suites défini par récurrence :  $\delta^\alpha a(k) = \delta(\dots(\delta a(k)))$ . L'ensemble des symboles d'ordre  $p \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$  sur  $\mathbb{T}$ , que nous appelons symboles discrets est :

$$\mathcal{S}^p = \left\{ \begin{array}{l} a(\theta, k) : \forall k \in \mathbb{Z}, a(\cdot, k) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \text{ et } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \exists C_{\alpha\beta} > 0, \\ \forall (\theta, k) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}, \left| \partial_\theta^\alpha \delta^\beta a(\theta, k) \right| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |k|)^{p-\beta} \end{array} \right\}.$$

A tout opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{T}$  est associé son symbole discret  $\sigma_P$ , élément de  $\mathcal{S}^p$ , via la formule :

$$(I.4.136) \quad \forall (\theta, k) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}, \sigma_P(\theta, k) = \exp(-ik\theta)P(\exp(ik\theta)).$$

Nous notons  $\Psi\text{DO}^p$  l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{T}$ . Nous notons de plus  $\Psi\text{DO}^{-\infty}$  l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels régularisants sur  $\mathbb{T}$  ou encore :

$$\Psi\text{DO}^{-\infty} = \bigcap_{p \in \mathbb{Z}} \Psi\text{DO}^p.$$

Etant donné un symbole  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}^p$ , nous notons  $\text{Op}(\sigma)$  l'opérateur pseudodifférentiel élément de  $\Psi\text{DO}^p$  associé à  $\sigma$ , défini modulo les opérateurs compacts par :

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}), \text{Op}(\sigma)u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(\theta, k) \hat{u}_k \exp(ik\theta).$$

I.4.4.b. *Détermination de A.* Notons :

$$\mathfrak{L} = \partial_\eta^2 + (\alpha \partial_\theta)^2.$$

Soit  $d$ , le symbole défini par :

$$(I.4.137) \quad \forall (\eta, \theta, k) \in [-1, 0] \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z}, \quad d(\eta, \theta, k) = \alpha(\eta, \theta)|k|,$$

et soit  $D$ , l'opérateur défini par  $D = \text{Op}(d)$ . Il est clair que  $D$  est un opérateur positif elliptique d'ordre 1 sur  $\mathbb{T}$ , lisse par rapport à la variable  $\eta$ , car  $\mathcal{O}$  est à bord lisse. Posons :

$$R = \mathfrak{L} - (\partial_\eta - D)(\partial_\eta + D).$$

Un calcul simple montre :

$$(I.4.138) \quad \sigma_R(\eta, \theta, k) = |k| \left( (\partial_\eta \alpha)(\eta, \theta) + \alpha(\eta, \theta) \left( i \text{sgn}(k) \partial_\theta \alpha + D(\eta) \{ \alpha \} \right) (\eta, \theta) \right),$$

ainsi,  $\sigma_R$  est un symbole élément de  $\mathcal{S}^1$  et donc  $R$  est un opérateur d'ordre 1.

I.4.4.c. *Deux opérateurs pseudodifférentiels utiles.* Soient  $u$  et  $v$  les solutions des problèmes suivants :

$$(I.4.139a) \quad (\partial_\eta - D(\eta))(\partial_\eta + D(\eta))u = 0,$$

$$(I.4.139b) \quad u(0, \cdot) = \gamma, u(-1, \cdot) = 0,$$

et,

$$(I.4.140a) \quad (\partial_\eta - D(\eta))(\partial_\eta + D(\eta))v = -h_0 \alpha u,$$

$$(I.4.140b) \quad \partial_\eta v(0, \cdot) = h_0 c, v(-1, \cdot) = 0.$$

Nous allons montrer que  $\partial_\theta^2 v(0, \cdot) = -\gamma/2 + \text{reg}(\gamma)$  où  $\text{reg}(\gamma)$  est une fonction plus régulière que  $\gamma$ , dépendant linéairement de  $\gamma$ .

Construisons une paramétrix de l'équation de la chaleur (voir par exemple Trèves [71] Chapitre III).

Nous présentons deux opérateurs pseudodifférentiels  $\mathfrak{U}(\eta, \eta')$  et  $\mathfrak{V}(\eta, \eta')$  issus de la factorisation (I.4.135). Ces deux opérateurs sont définis comme étant des opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{T}$ , lisses par rapport à  $(\eta, \eta') \in [-1, 0]$ , et solutions des équations suivantes. Pour  $\eta' \in [-1, 0]$  :

$$(I.4.141a) \quad \frac{d\mathfrak{U}}{d\eta}(\eta, \eta') - D(\eta)\mathfrak{U}(\eta, \eta') = 0, \text{ dans } [-1, \eta'] \times \mathbb{T},$$

$$\mathfrak{U}(\eta', \eta') = \text{Id}, \text{ dans } \mathbb{T},$$

et,

$$(I.4.141b) \quad \frac{d\mathfrak{V}}{d\eta}(\eta, \eta') + D(\eta)\mathfrak{V}(\eta, \eta') = 0, \text{ dans } [\eta', 0] \times \mathbb{T},$$

$$\mathfrak{V}(\eta', \eta') = \text{Id}, \text{ dans } \mathbb{T}.$$

Notons respectivement  $\sigma_{\mathfrak{U}}$  et  $\sigma_{\mathfrak{V}}$  les symboles de  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{V}$ . La définition (I.4.136) nous donne l'équation suivante :

$$\forall(\eta, \theta, k) \in [-1, \eta'] \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z},$$

$$(I.4.142a) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma_{\mathfrak{U}}}{d\eta}(\eta, \eta', \theta, k) - d(\eta, \theta, k)\sigma_{\mathfrak{U}}(\eta, \eta', \theta, k) - D(\eta) \{\sigma_{\mathfrak{U}}\}(\eta, \eta', \theta, k) &= 0, \\ \sigma_{\mathfrak{U}}(\eta', \eta', \theta, k) &= 1, \end{aligned}$$

$$\forall(\eta, \theta, k) \in [-1, \eta'] \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z},$$

$$(I.4.142b) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma_{\mathfrak{V}}}{d\eta}(\eta, \eta', \theta, k) + d(\eta, \theta, k)\sigma_{\mathfrak{V}}(\eta, \eta', \theta, k) + D(\eta) \{\sigma_{\mathfrak{V}}\}(\eta, \eta', \theta, k) &= 0, \\ \sigma_{\mathfrak{V}}(\eta', \eta', \theta, k) &= \text{Id}. \end{aligned}$$

Fixons  $k \in \mathbb{Z}$  et posons :

$$(I.4.143)$$

$$\sigma_{\mathfrak{U}}(\eta, \eta', \theta, k) = \exp\left(-\int_{\eta}^{\eta'} d(s, \theta, k) ds\right) \left(1 + \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-1} + \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-2} + \cdots + \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j} + \cdots\right),$$

Suivant l'approche de Trèves, la preuve du Théorème 1.1 du Chapitre III [71] nous montre que les  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j}$  satisfaisant

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j}|_{\eta=\eta'} = 0,$$

sont dans  $\mathcal{S}^{-j}$ . Remarquons que dès que  $\eta' \neq \eta$ ,  $\exp\left(-\int_{\eta}^{\eta'} d(s, \theta, k) ds\right) \in \mathcal{S}^{-\infty}$ . Comme pour tout  $j \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j} \in \mathcal{S}^{-j}$  et  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j}(\eta', \eta', \theta, k) = 0$ , nous en déduisons :

$$(I.4.144) \quad \sigma_{\mathfrak{U}} = \exp\left(-\int_{\eta}^{\eta'} d(s, \theta, k) ds\right) \pmod{[\mathcal{S}^{-\infty}]}.$$

De manière similaire, nous avons :

$$\sigma_{\mathfrak{V}}(\eta, \eta', \theta, k) = \exp\left(-\int_{\eta'}^{\eta} d(s, \theta, k) ds\right) \pmod{[\mathcal{S}^{-\infty}]}.$$

L'expression (I.4.137) de  $d$  nous donne explicitement :

$$(I.4.145a) \quad \sigma_{\mathfrak{U}}(\eta, \eta', \theta, k) = \exp\left(-\ln\left(\frac{\alpha(\eta)}{\alpha(\eta')}\right) \frac{|k|}{\kappa}\right) \pmod{[\mathcal{S}^{-\infty}]},$$

$$(I.4.145b) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathfrak{V}}(\eta, \eta', \theta, k) &= \exp\left(-\ln\left(\frac{\alpha(\eta')}{\alpha(\eta)}\right) \frac{|k|}{\kappa}\right) \pmod{[\mathcal{S}^{-\infty}]}, \\ &= \sigma_{\mathfrak{U}}(\eta', \eta, \theta, k) \pmod{[\mathcal{S}^{-\infty}]}, \end{aligned}$$

ainsi, nous avons les propriétés suivantes :

$$(I.4.146a) \quad \forall(\eta, \eta', \eta'') \in [-1, 0]^3, \mathfrak{U}(\eta, \eta'') = \mathfrak{U}(\eta, \eta')\mathfrak{U}(\eta', \eta''),$$

$$(I.4.146b) \quad \forall -1 \leq \eta < \eta' \leq 0, \mathfrak{U}(\eta, \eta') \in \Psi\text{DO}^{-\infty}, \mathfrak{V}(\eta', \eta) \in \Psi\text{DO}^{-\infty},$$

$$(I.4.146c) \quad \forall -1 \leq \eta \leq \eta' \leq 0, \mathfrak{U}(\eta, \eta') = \mathfrak{V}(\eta', \eta).$$

I.4.4.d. *Expression de  $u$ .* Nous récrivons le problème (I.4.139) sous la forme :

$$(I.4.147a) \quad \partial_\eta u(\eta, \theta) - D(\eta)u(\eta, \theta) = \mu, \text{ dans } [-1, 0] \times \mathbb{T},$$

$$(I.4.147b) \quad \partial_\eta \mu(\eta, \theta) + D(\eta)\mu(\eta, \theta) = 0, \text{ dans } [-1, 0] \times \mathbb{T},$$

$$(I.4.147c) \quad u(0, \cdot) = \gamma, u(-1, \cdot) = 0.$$

Nous cherchons alors  $(u, \mu)$  sous la forme :

$$(I.4.148a) \quad u(\eta, \cdot) = \mathfrak{U}(\eta, 0)\gamma - \int_\eta^0 \mathfrak{U}(\eta, \eta')\mu(\eta') d\eta',$$

$$(I.4.148b) \quad \mu(\eta, \cdot) = \mathfrak{V}(\eta, -1)\mu(-1).$$

Il est facile de vérifier que sous ces expressions,  $u$  et  $\mu$  vérifient bien (I.4.147a)–(I.4.147b). Déterminons  $\mu(-1)$ . En fait, en appliquant l'égalité (I.4.147a) en  $-1$ , nous obtenons  $\mu(-1) = \partial_\eta u(-1)$ . Nous avons ainsi, via (I.4.148a), l'égalité :

$$\mu(-1) = (\partial_\eta \mathfrak{U})(-1, 0)\gamma - \int_{-1}^0 \left( (\partial_\eta \mathfrak{U})(-1, \eta')\mu(\eta') \right) d\eta' + \mathfrak{U}(-1, -1)\mu(-1).$$

Or,  $\mathfrak{U}(-1, -1) = \text{Id}$ , d'où la condition nécessaire sur  $\mu(-1)$  :

$$(I.4.149) \quad \int_{-1}^0 \left( (\partial_\eta \mathfrak{U})(-1, \eta')\mathfrak{V}(\eta', -1) \right) d\eta' \mu(-1) = (\partial_\eta \mathfrak{U})(-1, 0)\gamma \\ = D(-1)\mathfrak{U}(-1, 0)\gamma.$$

Nous montrons maintenant que  $\mu(-1)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ . Remarquons tout d'abord l'égalité suivante, qui découle de la définition (I.4.137) de  $d$  :

$$(I.4.150) \quad \forall(\eta, \eta') \in [-1, 0], D(\eta) = \frac{1 + h_0 \eta' \kappa}{1 + h_0 \eta \kappa} D(\eta').$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\int_{-1}^0 \left( (\partial_\eta \mathfrak{U})(-1, \eta')\mathfrak{V}(\eta', -1) \right) d\eta' = \int_{-1}^0 \left( D(-1)\mathfrak{U}(-1, \eta')\mathfrak{V}(\eta', -1) \right) d\eta', \\ = \int_{-1}^0 \left( D(-1)\mathfrak{V}^2(\eta, -1) \right) d\eta, \\ = \int_{-1}^0 \left( \frac{1 + h_0 \eta \kappa}{1 - h_0 \kappa} D(\eta)\mathfrak{V}^2(\eta, -1) \right) d\eta, \\ = \int_{-1}^0 \left( \frac{1 + h_0 \eta \kappa}{2(1 - h_0 \kappa)} (\partial_\eta \mathfrak{V}^2)(\eta, -1) \right) d\eta.$$

Une simple intégration par parties nous donne :

$$\int_{-1}^0 \left( \eta (\partial_\eta \mathfrak{V}^2)(\eta, -1) \right) d\eta = \text{Id} - \int_{-1}^0 \mathfrak{V}^2(\eta, -1) d\eta,$$

ce qui implique :

$$\int_{-1}^0 \left( D(-1)\mathfrak{V}^2(\eta, -1) \right) d\eta = -\frac{1}{2} \text{Id} + \frac{1}{2(1 - h_0 \kappa)} \mathfrak{V}(-1, 0) \\ - \frac{h_0 \kappa}{2(1 - h_0 \kappa)} \int_{-1}^0 \mathfrak{V}^2(\eta, -1) d\eta,$$

soit :

$$\left( \frac{h_0\kappa}{2(1-h_0\kappa)} \text{Id} + D(-1) \right) \int_{-1}^0 \mathfrak{Y}^2(\eta, -1) d\eta = -\frac{1}{2} \text{Id} + \frac{1}{2(1-h_0\kappa)} \mathfrak{Y}(-1, 0).$$

Comme l'opérateur  $h_0\kappa \text{Id} / (2(1-h_0\kappa)) + D(-1)$  est elliptique d'ordre 1, il existe une paramétrix elliptique  $B$  à droite et à gauche d'ordre  $-1$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\int_{-1}^0 \mathfrak{Y}^2(\eta, -1) d\eta = B \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \frac{1}{2(1-h_0\kappa)} \mathfrak{Y}(-1, 0) \right) \pmod{[\Psi\text{DO}^{-\infty}]}.$$

Comme  $\mathfrak{Y}(-1, 0)$  est régularisant, nous obtenons que l'opérateur :

$$\int_{-1}^0 \mathfrak{Y}^2(\eta, -1) d\eta,$$

est elliptique d'ordre  $-1$ , et donc il existe une paramétrix  $P$  d'ordre 1. La fonction  $\mu(-1)$  définie par :

$$\mu(-1) = P\mathfrak{U}(-1, 0)\gamma,$$

est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$  car  $\mathfrak{U}(-1, 0)$  est régularisant et  $P$  est d'ordre 1. Nous venons de montrer :

$$(I.4.151) \quad \forall \eta \in [-1, 0], u(\eta, \cdot) - \mathfrak{U}(\eta, 0)\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}).$$

I.4.4.e. *Expression de  $v$ .* Nous opérons de manière similaire pour  $v$ . Nous récrivons le problème (I.4.140) sous la forme :

$$(I.4.152a) \quad \partial_\eta v(\eta, \theta) - D(\eta)v(\eta, \theta) = \nu, \text{ dans } [-1, 0] \times \mathbb{T},$$

$$(I.4.152b) \quad \partial_\eta \nu(\eta, \theta) + D(\eta)\nu(\eta, \theta) = -h_0\alpha u, \text{ dans } [-1, 0] \times \mathbb{T},$$

$$(I.4.152c) \quad \partial_\eta v(0, \cdot) = h_0c, v(-1, \cdot) = 0.$$

Posons  $v_0 = v(0, \cdot)$ . Nous cherchons alors  $(v, \nu)$  sous la forme :

$$(I.4.153a) \quad v(\eta, \cdot) = \mathfrak{U}(\eta, 0)v_0 - \int_\eta^0 \mathfrak{U}(\eta, \eta')\nu(\eta') d\eta',$$

$$(I.4.153b) \quad \nu(\eta, \cdot) = \mathfrak{Y}(\eta, -1)\nu(-1) + \int_{-1}^\eta \left( \mathfrak{Y}(\eta, \eta')(h_0\alpha u(\eta')) \right) d\eta'.$$

Il est facile de vérifier que sous ces expressions,  $v$  et  $\nu$  vérifient bien (I.4.152a)–(I.4.152b). L'égalité (I.4.152a) associée à la condition initiale (I.4.152c) impliquent :

$$(\partial_\eta v)(0, \cdot) = h_0c = (\partial_\eta \mathfrak{U})(0, 0)v_0 + \nu(0, \cdot).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D(0)v_0 &= h_0c - \nu(0, \cdot), \\ &= h_0c - \mathfrak{Y}(0, -1)\nu(-1, \cdot) + \int_{-1}^0 \left( \mathfrak{Y}(0, s)(h_0\alpha u(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

En remarquant que  $h_0c - \mathfrak{Y}(0, -1)\nu(-1, \cdot)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ , et en utilisant la propriété (I.4.151), nous obtenons :

$$D(0)v_0 - h_0 \int_{-1}^0 \left( \mathfrak{Y}(0, s)(\alpha \mathfrak{U}(s, 0)\gamma) \right) ds \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}).$$

I.4.4.f. *Fin de la preuve du résultat.* Nous déterminer  $\partial_\theta^2 v(0, \cdot)$ . Par construction de  $D$ ,  $D^2(0) = -\alpha^2(0)\partial_\theta^2$  et  $\alpha(0) = h_0$ . Ainsi, nous n'avons plus qu'à estimer :

$$D(0) \int_{-1}^0 \left( \mathfrak{B}(0, s) (\alpha \mathfrak{U}(s, 0) \gamma) \right) ds,$$

nous aurons alors  $-h_0^2 \partial_\theta^2 v(0, \cdot)$ .

Définissons, pour  $s \in [-1, 0]$ , l'opérateur  $\Xi(s)$  par :

$$\Xi(s) = h_0 D(s) \mathfrak{U}^2(s, 0),$$

et posons, pour  $s \in [-1, 0]$ ,  $Q(s) = D(0) \mathfrak{B}(0, s) (\alpha \mathfrak{U}(0, s))$ . La propriété (I.4.146c) implique :

$$Q(s) = D(0) \mathfrak{U}(s, 0) (\alpha \mathfrak{U}(s, 0)).$$

Ainsi, le symbole principal  $\sigma_Q$  de  $Q$  vaut :

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \alpha \sigma_{D(0)} \sigma_{\mathfrak{U}^2(s, 0)}, \\ &= h_0 \sigma_{D(s)} \sigma_{\mathfrak{B}^2(s, 0)}, \\ &= \sigma_\Xi \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur  $R = Q - \Xi$  est dans  $\Psi\text{DO}^{-1}$ . Ceci implique :

$$\int_{-1}^0 Q(s) ds = \int_{-1}^0 \Xi(s) ds \quad \text{mod } [\Psi\text{DO}^{-1}].$$

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \Xi(s) \gamma ds &= h_0 \int_{-1}^0 \partial_s \mathfrak{U}(s, 0) \mathfrak{U}(s, 0) \gamma ds, \\ &= \frac{h_0}{2} \gamma - h_0 \mathfrak{U}(-1, 0) \gamma. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur  $\mathfrak{U}(-1, 0)$  est régularisant, nous déduisons pour  $\gamma \in H^{1/2}(\mathbb{T})$ ,

$$\partial_\theta^2 v(0, \cdot) + \frac{1}{2} \gamma \in H^{3/2}(\mathbb{T}).$$

De plus, il existe  $C_{\mathcal{O}_1} > 0$  :

$$\left\| \partial_\theta^2 v(0, \cdot) + \frac{1}{2} \gamma \right\|_{H^{3/2}(\mathbb{T})} \leq C_{\mathcal{O}_1} \|\gamma\|_{H^{3/2}(\mathbb{T})}.$$

Ainsi, nous avons montré qu'il existe  $C_{\mathcal{O}_1, \Psi}$  :

$$(I.4.154) \quad \left\| \partial_t^2 V|_{\partial\mathcal{O}} + \frac{1}{2} g \right\|_{H^{3/2}(\partial\mathcal{O})} \leq C_{\mathcal{O}_1, \Psi} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Le lemme I.4.4 est ainsi démontré.  $\square$

**I.4.5. Etude du problème (I.4.119).** Maintenant, nous donnons la dérivée tangentielle seconde de  $W$ , solution de (I.4.119), le long de  $\partial\mathcal{O}$ . Il est clair que ce problème admet une unique solution, qui est dans  $H^2(\mathcal{O})$  car  $g_1 \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$  (voir Girault-Raviart [35]). Posons  $W_1 = \phi_1 W$ , où  $\phi_1$  est définie dans la partie I.4.3.a. Alors,  $W_1$  est solution, dans  $\mathcal{O}_1$  du problème :

$$(I.4.155a) \quad \Delta W_1 = W \Delta \phi_1 + 2\nabla W \nabla \phi_1,$$

$$(I.4.155b) \quad \partial_n W_1|_{\partial\mathcal{O}} = g_1 - \int_{\partial\mathcal{O}} g_1 \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}, \text{ et } W_1|_{\partial\mathcal{O}_1 \setminus \partial\mathcal{O}} = 0.$$

Comme  $\mathcal{O}_1$  est assez près du bord pour utiliser les coordonnées locales (voir les parties I.4.3.a et I.4.3.b), en notant :

$$\begin{aligned} w &= W_1 \circ \Psi, \\ \lambda &= (W \Delta \phi_1 + 2\nabla W \nabla \phi_1) \circ \Psi, \\ \gamma_1 &= g_1 \circ \Psi - \int_{\partial\mathcal{O}} g_1 \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}}, \\ L \cdot &= \partial_\eta^2 \cdot + (\alpha \partial_\theta)^2 \cdot - \frac{\partial_\eta \alpha}{\alpha^2} \partial_\eta \cdot. \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$(I.4.156a) \quad \forall (\eta, \theta) \in [-1, 0] \times \mathbb{T}, L w = \alpha \lambda,$$

$$(I.4.156b) \quad \partial_\eta w(0, \cdot) = h_0 \gamma_1, w(-1, \cdot) = 0.$$

Maintenant, contrairement à ce que nous avons fait précédemment, nous allons garder le terme de degré 1 de l'opérateur  $L$ . En suivant l'approche de Trèves (voir le livre de Trèves [71] Chapitre III ou l'article de Carvalho Dos Santos [20] Théorème I), appliquée aux symboles discrets (voir la partie I.4.4.a), nous aboutissons à une factorisation de  $L$ , modulo les opérateurs compacts, sous la forme

$$L = (\partial_\eta + A_1) (\partial_\eta - A_1) \quad \text{mod} [\Psi\text{DO}^{-\infty}],$$

où l'opérateur  $A_1$  est elliptique d'ordre 1 sur  $\mathbb{T}$  et lisse par rapport à  $\eta$ . Pour construire cet opérateur, nous définissons :

$$(I.4.157) \quad d_1 = \alpha |k|,$$

et par récurrence, supposons construits  $d_1, d_0, \dots, d_{-j}$ . Posons  $D_{-i} = \text{Op}(d_{-i})$ , pour  $i = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , et définissons :

$$\forall i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, R_{-i} = L - (\partial_\eta + (D_1 + \dots + D_{-i})) (\partial_\eta - (D_1 + \dots + D_{-i})).$$

En notant  $r_i$  le symbole discret de  $R_i$ , nous définissons

$$\forall i \in \mathbb{N}, d_{-i} = -\frac{1}{2} \frac{r_{1-i}}{d_1 + \dots + d_{1-i}}.$$

Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il est clair que  $d_{-i}$  est un élément de  $\mathcal{S}^{-i}$ . Posons

$$a_1(\eta, \theta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{1-i} \quad \text{mod} [\mathcal{S}^{-\infty}],$$

alors nous obtenons :

$$A_1 - \text{Op}(a_1) = 0 \quad \text{mod} [\Psi\text{DO}^{-\infty}].$$

De manière analogue à la partie I.4.4.c, nous définissons les opérateurs  $\mathfrak{U}_1$  et  $\mathfrak{V}_1$  par :



Pour  $\eta' \in [-1, 0]$  :

$$(I.4.158a) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{U}_1}{d\eta}(\eta, \eta') - A_1(\eta)\mathfrak{U}_1(\eta, \eta') &= 0, \text{ dans } [-1, \eta'] \times \mathbb{T}, \\ \mathfrak{U}_1(\eta', \eta') &= \text{Id}, \text{ dans } \mathbb{T}, \end{aligned}$$

et,

$$(I.4.158b) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{V}_1}{d\eta}(\eta, \eta') + A_1(\eta)\mathfrak{V}_1(\eta, \eta') &= 0, \text{ dans } [\eta', 0] \times \mathbb{T}, \\ \mathfrak{V}_1(\eta', \eta') &= \text{Id}, \text{ dans } \mathbb{T}. \end{aligned}$$

De manière analogue au paragraphe I.4.4.e, nous récrivons le problème vérifié par  $w$  sous la forme :

$$(I.4.159a) \quad \partial_\eta w(\eta, \theta) - A_1(\eta)w(\eta, \theta) = \omega, \text{ dans } [-1, 0] \times \mathbb{T},$$

$$(I.4.159b) \quad \partial_\eta \omega(\eta, \theta) + A_1(\eta)\omega(\eta, \theta) = \alpha\lambda, \text{ dans } [-1, 0] \times \mathbb{T},$$

$$(I.4.159c) \quad \partial_\eta w(0, \cdot) = h_0\gamma_1, \quad w(-1, \cdot) = 0.$$

Posons  $w_0 = w(0, \cdot)$ . Nous cherchons alors  $(w, \omega)$  sous la forme :

$$(I.4.160a) \quad w(\eta, \cdot) = \mathfrak{U}_1(\eta, 0)w_0 - \int_\eta^0 \mathfrak{U}_1(\eta, \eta')\omega(\eta') d\eta',$$

$$(I.4.160b) \quad \omega(\eta, \cdot) = \mathfrak{V}_1(\eta, -1)\omega(-1) + \int_{-1}^\eta \left( \mathfrak{V}_1(\eta, \eta')(\alpha(\eta', \cdot)\lambda(\eta', \cdot)) \right) d\eta'.$$

L'égalité (I.4.159a) appliquée en  $\eta = 0$  implique :

$$h_0\gamma_1 - A_1(0)w_0 = \omega(0, \cdot).$$

Remarquons que  $\lambda$  est nulle au voisinage du bord, car  $\phi_1$  est égale à 1 sur le domaine

$$\mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_1).$$

Ainsi, il existe une constante  $h_1 \in ]0, h_0[$  dépendant de  $\mathcal{O}$  telle que :

$$\omega(0, \cdot) = \mathfrak{V}_1(0, -1)\omega(-1) + \int_{-1}^{h_1} \left( \mathfrak{V}_1(0, \eta')(\alpha(\eta', \cdot)\lambda(\eta', \cdot)) \right) d\eta'.$$

Comme  $\mathfrak{V}_1(\eta, \eta') \in \Psi\text{DO}^{-\infty}$  pour  $\eta \in [-1, \eta']$ , nous obtenons :

$$\omega(0, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}),$$

ainsi,

$$h_0\gamma_1 - A_1(0)w_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}).$$

Comme  $d_1 = \alpha|k|$ , nous obtenons modulo les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 sur le tore  $\mathbb{T}$  l'expression suivante de  $A_1(0)$  :

$$A_1(0) = -ih_0\mathcal{H}\partial_\theta \quad \text{mod } [\Psi\text{DO}^0].$$

Or nous avons

$$\partial_\theta \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \partial_\theta,$$

et

$$\mathcal{H}^2 = \text{Id}.$$

Ainsi, comme  $g_1 \in H^{1/2}(\mathcal{O})$ , nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}\partial_\theta w_0 - i\mathcal{H}\gamma_1 &\in H^{3/2}(\mathbb{T}), \\ \partial_\theta^2 w_0 - i\mathcal{H}\partial_\theta\gamma_1 &\in H^{1/2}(\mathbb{T}).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé les égalités (I.4.123) et (I.4.124) du lemme I.4.5 :

$$\begin{aligned}\partial_t W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}g_1 &\in H^{3/2}(\mathcal{O}), \\ \partial_t^2 W|_{\partial\mathcal{O}} - i\mathcal{H}\partial_t g_1 &\in H^{1/2}(\mathcal{O}).\end{aligned}$$

Ceci clos la preuve du lemme I.4.5.

□



## Asymptotiques M.F. du champ électrique en mode TM

Le but de ce chapitre est d'établir les deux premiers termes du développement asymptotique du champ électrique à moyenne fréquence. Nous utilisons le terme moyenne fréquence pour indiquer que le paramètre sans dimension  $z_c$  du cytoplasme n'est plus négligeable devant 1, contrairement au chapitre I. Afin de travailler avec un champ scalaire, nous nous plaçons en mode transverse magnétique (TM). Le champ électrique scalaire satisfait alors à l'équation de Helmholtz (II.1.2).

A la différence des résultats du chapitre I, nous considérons une cellule plongée dans un milieu ambiant. Ceci va nous amener à des conditions de transmission particulière à l'interface milieu intérieur/milieu extérieur, alors qu'au théorème I.2 du chapitre I, nous avons obtenu des conditions aux limites spéciales aux bords de la cellule. De plus, la membrane n'est plus supposée d'épaisseur constante.

L'heuristique de ce papier est la même que celle de la section I.2 : la membrane est supposée assez fine afin qu'elle puisse-t-être paramétrée par les coordonnées locales. Dans ces coordonnées, nous faisons un changement d'échelle en la variable normale, afin de travailler avec des domaines de taille 1. En écrivant l'opérateur de Laplace dans ces nouvelles coordonnées, nous faisons apparaître explicitement le paramètre  $h$ . Tout est alors mis en place pour appliquer la technique des asymptotiques. A la différence de la preuve du théorème I.2.1, nous avons besoin d'un résultat de régularité que nous donnons à la section II.1.4 pour prouver notre résultat principal (voir théorème II.1.1).

A la remarque II.1.8, nous supposons que la condition de Neumann est imposée aux bords la cellule. Remarquons que dans le cas d'une épaisseur constante et en supposant  $z_c$  et  $z_m$  nuls, nous retrouvons les résultats de la section I.2 du chapitre I.

A la section II.1.6, nous appliquons les résultats à une cellule biologique placée dans un milieu ambiant, et soumise à un champ à moyenne fréquence, c'est-à-dire, au vu des paramètres électromagnétiques, que la pulsation est supérieure à  $10^{13}$ rad/s.

La section II.2 illustre les résultats théoriques de la section II.1 par des simulations numériques.



## II.1. Asymptotiques pour l'équation de Helmholtz dans un milieu à couche mince

### Rigorous Asymptotics For The Electric Field in TM mode at Mid-Frequency in a Bidimensional Medium With a Thin Layer

*Submitted to SIAM J. APPL. MATH. in september 2006, [60].*

CLAIR POIGNARD

ABSTRACT : *Consider an ambient medium and a heterogeneous entity composed of a bidimensional material surrounded by a thin membrane. The electromagnetic constants of these three materials are different. By analogy with biological cells, we call this entity a cell. We study the asymptotic behavior of the electric field in the transverse magnetic (TM) mode, when the thickness of the membrane tends to zero. The membrane is of thickness of  $hf(\theta)$ , with  $\theta$  a curvilinear coordinate. We provide a rigorous derivation of the first two terms of the asymptotic expansion for  $h$  tending to zero. In the membrane, these terms are given explicitly in local coordinates in terms of the boundary data and of the function  $f$ , while outside the membrane they are the solutions of a scalar Helmholtz equation with appropriate boundary and transmissions conditions given explicitly in terms of the boundary data and of the above function  $f$ . We prove that the remainder terms are of order  $O(h^{3/2})$ . In addition, if the complex dielectric permittivity in the membrane, denoted by  $z_m$ , tends to zero faster than  $h$ , we give the difference between the exact solution and the above asymptotic with  $z_m = 0$ ; it is of order  $O(h^{3/2} + |z_m|)$ .*

**Introduction.** We study in this paper the behavior of the solution of Helmholtz equation in a bidimensional medium in transverse magnetic (TM) mode (see Balanis and Constantine [12]). The medium is made out of three materials: a central region surrounded by a thin membrane of thickness  $h$ , with  $\theta$  a curvilinear coordinate, and a third material, which is not assumed to be thin; see Fig. 1. This assemblage is submitted to a field of pulsation  $\omega$ ; after proper scalings,  $\omega$  is included in the complex dielectric permittivity, which may be different in the three materials. By analogy with the biological cell, we call this entity a cell in an environment. In this article, we show that as the thickness of the membrane tends to zero, *i.e* as  $h$  tends to zero, the electric field tends to the solution of a Helmholtz equation with an appropriate transmission condition at the boundary between the cell and the ambient medium. This work is a sequel to the author's former article on the static case [59].

Let us give now precise notations. Let  $\Omega$  be a bidimensional bounded domain composed of three subdomains: a bounded domain  $\mathcal{O}_c$  surrounded by a thin membrane  $\mathcal{O}_h$  with small thickness  $h$ , and an exterior domain  $\mathcal{O}_{e,h}$ :

$$\Omega = \mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_h \cup \mathcal{O}_{e,h}.$$

We suppose that the cell is strictly embedded in the ambient domain, that is:

$$\overline{(\mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_h)} \cap \partial\Omega = \emptyset.$$

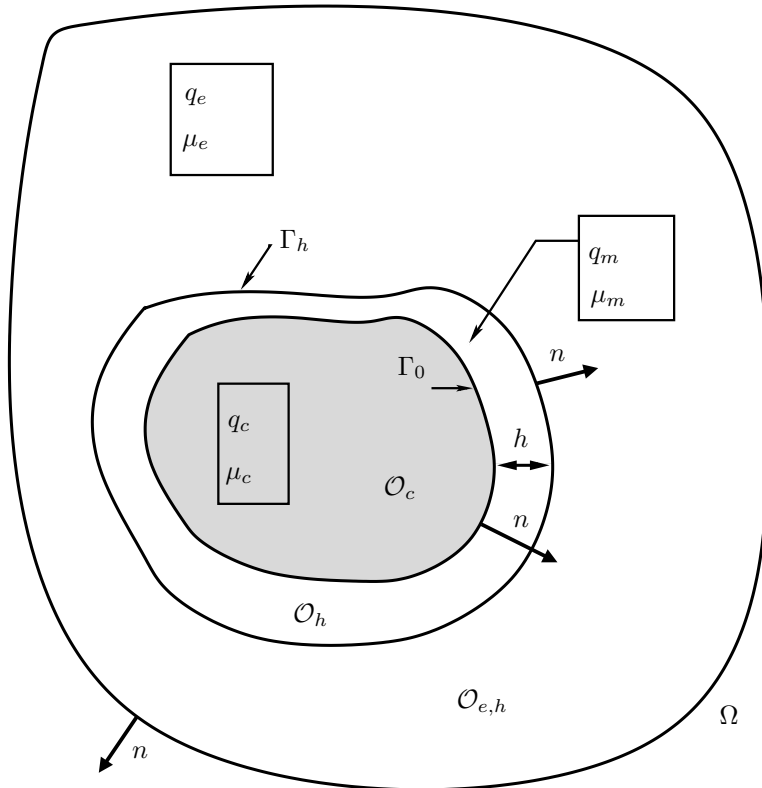


FIGURE 1. Geometric and dielectric data.

The closed curves  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_h$  are supposed to be of class  $\mathcal{C}^\infty$ . We denote by  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_h$  respectively the boundaries of  $\partial\mathcal{O}_c$  and of  $\partial\mathcal{O}_h \cap \partial\mathcal{O}_{e,h}$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \partial\mathcal{O}_c, \\ \Gamma_h &= \partial\mathcal{O}_h \cap \partial\mathcal{O}_{e,h}.\end{aligned}$$

Let  $\mu_e$ ,  $\mu_m$  and  $\mu_c$  be the magnetic permittivities: they are constant and strictly positive. Let  $q_e$ ,  $q_m$  and  $q_c$  be three complex numbers with strictly negative imaginary part and strictly positive real part; they are non dimensionalized complex permittivities. We define piecewise constant functions  $\mu$  and  $q$  on  $\Omega$  as follows:

$$\mu = \begin{cases} \mu_e, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ \mu_m, & \text{in } \mathcal{O}_h, \\ \mu_c, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases} \quad q = \begin{cases} q_e, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ q_m, & \text{in } \mathcal{O}_h, \\ q_c, & \text{in } \mathcal{O}_c. \end{cases}$$

To simplify, we denote by  $z$  the product  $\mu q$ , and  $z_e$ ,  $z_m$  and  $z_c$  designate the restrictions of  $z$  respectively to the domains  $\mathcal{O}_{e,h}$ ,  $\mathcal{O}_h$  and  $\mathcal{O}_c$ . We summarize our hypotheses in Fig 1.

Let  $\phi$  be a given function on  $\partial\Omega$ . Its regularity will be chosen later on. We consider the electric field  $u$ , which solves the following Helmholtz equation with

Neumann boundary condition:

$$(II.1.2a) \quad \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla u \right) + qu = 0, \text{ in } \Omega,$$

$$(II.1.2b) \quad \partial_n u|_{\partial\Omega} = \phi, \text{ on } \partial\Omega.$$

Here  $\partial_n$  denotes the derivative in the direction of the vector  $n$ :  $n$  is the exterior normal to  $\Gamma_0$ , and is oriented by continuity on  $\Gamma_h$  and also on  $\partial\Omega$  (see Fig. 1). Let us denote by  $u^e$ ,  $u^h$  and  $u^c$  the restrictions of  $u$  respectively to the domains  $\mathcal{O}_{e,h}$ ,  $\mathcal{O}_h$  and  $\mathcal{O}_c$ . These restrictions satisfy the following transmission conditions:

$$(II.1.3a) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u^c|_{\Gamma_0} = \frac{1}{\mu_m} \partial_n u^h|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.3b) \quad \frac{1}{\mu_e} \partial_n u^e|_{\Gamma_h} = \frac{1}{\mu_m} \partial_n u^h|_{\Gamma_h},$$

$$(II.1.3c) \quad u^c|_{\Gamma_0} = u^h|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.3d) \quad u^e|_{\Gamma_h} = u^h|_{\Gamma_h}.$$

We would like to understand the behavior for  $h$  tending to zero of the solution  $u$  of Problem (II.1.2).

In our proof, we assume that  $\mu_m$  and  $q_m$  are given constants;  $\mu_c$ ,  $\mu_e$ ,  $q_c$  and  $q_e$  could be continuous functions of the spatial coordinates with the imaginary part of  $q_c$  and  $q_e$  bounded away from zero, without changing the argument.

Beretta and Francini have worked on a similar problem in [13]. They considered a thin dielectric material  $\mathcal{O}_h$  in an ambient medium, and they studied a Helmholtz equation with Dirichlet boundary condition. They compared on the boundary of the domain  $\partial\Omega$  the exact solution to the so-called background solution defined by replacing the material of the membrane by the interior material. The difference between these two solutions restricted to the boundary  $\partial\Omega$  is then given through an integral involving the polarization tensor, plus some remainder terms. This polarization tensor is defined for instance in [8], [9], [14], [15], [19]. In this paper, we do not use this approach since we are interested in the transmembranar potential (see Fear and Stuchly [26]), and in the behavior of the field in the whole domain. We work with bidimensional domains and we expect that the same analysis could be performed in higher dimensions.

The heuristics of this work are the same as in [59]. We parameterize  $\mathcal{O}_h$  by local coordinates  $(\eta, \theta)$  varying in the  $h$ -independent domain  $[0, 1] \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ . Here  $L$  is simply the length of the curve  $\partial\mathcal{O}_c$ .

A change of coordinates in the membrane  $\mathcal{O}_h$  is performed, so as to parameterize it by local coordinates  $(\eta, \theta)$ , which vary in a domain independently of  $h$ ; in particular, if we denote by  $L$  the length of  $\partial\mathcal{O}_c$ , the variables  $(\eta, \theta)$  belong to  $[0, 1] \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ . This change of coordinates leads to  $h$ -independent expression of the Laplacian in the membrane. Once the transmission conditions of the new problem are derived, we perform a formal asymptotic expansion of the solution of (II.1.2) in terms of  $h$ . It remains to validate this expansion.

This paper is structured as follows. First, we suppose that the parameters  $q_c$ ,  $q_m$ ,  $q_e$ ,  $\mu_c$ ,  $\mu_m$  and  $\mu_e$  are constant with respect to space and to  $h$  and do not vanish. Moreover we assume that the imaginary parts of  $z_c$ ,  $z_m$  and  $z_e$ , which always have the same sign for physical reasons are negative and bounded away from 0.



In Section II.1.1, we define our geometric conventions. We perform the above described change of variables in the membrane. We refer the reader to [59] for more information on the local coordinates. In Section II.1.3, we derive formally the first two terms of the asymptotic expansion of the solution of our problem in terms of  $h$ . Section II.1.4 contains regularity result, which is necessary for estimating the error, and Section II.1.5 is devoted to estimating the error.

In addition, in Remark II.1.8, we give the first two terms of the asymptotic expansion of the electric field for a thin membrane on the boundary of  $\mathcal{O}_c$ , and in Remark II.1.10, we consider the case  $z_m = 0$ . The proofs of these asymptotics are very close to the proof performed in Section II.1.5 and therefore, they are omitted.

In the case of a biological cell,  $\mu$  is identically equal to 1,  $z_c$  and  $z_e$  are constants as above and  $z_m$  is very small. In Section II.1.6, we show that if  $|z_m|$  is small compared to  $h$ , we just have to replace  $z_m$  by 0 in the asymptotics found in Section II.1.3 to obtain the electric field in all of the domain  $\Omega$  with an error in  $O(h^{3/2} + |z_m|)$ .

Let us present now our main result.

**Main result.** We give the first two terms of the asymptotic expansion of the above function  $u$  for  $h$  tending to zero, and we estimate rigourously the error made by this approximation.

- *The 0<sup>th</sup> order terms.* The electric fields  $u_0^e$  and  $u_0^c$  are solution of the following problem in  $\Omega$ :

$$(II.1.4a) \quad \begin{cases} \Delta u_0^e + z_e u_0^e = 0, & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases}$$

with transmission conditions

$$(II.1.4b) \quad u_0^c|_{\Gamma_0} = u_0^e|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.4c) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0} = \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0},$$

and with Neumann boundary condition

$$(II.1.4d) \quad \partial_n u_0^e|_{\partial\Omega} = \phi.$$

- *The first order terms.* The fields  $u_1^e$  and  $u_1^c$  are solution of the following problem in  $\Omega$ :

$$(II.1.5a) \quad \begin{cases} \Delta u_1^e + z_e u_1^e = 0, & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

with the transmission conditions

$$(II.1.5b) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_1^e|_{\Gamma_0} = \left( \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0} + (q_m - q_e) u_0^c|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.5c) \quad u_1^c|_{\Gamma_0} - u_1^e|_{\Gamma_0} = \frac{\mu_e - \mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0}.$$

We have the following theorem.

**THEOREM II.1.1.** *Let  $\mathcal{O}_c$  be a bounded domain with smooth boundary, and denote by  $\kappa$  the curvature of  $\partial\mathcal{O}$  in local coordinates. Let  $h_0$  be such that:*

$$0 < h_0 < \frac{1}{\|\kappa\|_\infty}.$$

*Let  $h$  belong to  $(0, h_0)$  and  $\phi$  to  $H^s(\partial\Omega)$ ,  $s > 7/2$ .*

*We denote by  $u$  the solution of Problem (II.1.2). Define  $(v^e, v^c)$  in  $\Omega$  by:*

$$\begin{aligned} v^e &= u_0^e + hu_1^e, \text{ in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ v^c &= u_0^c + hu_1^c, \text{ in } \mathcal{O}_c. \end{aligned}$$

*Then there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that*

$$\begin{aligned} \|u - v^c\|_{H^1(\mathcal{O}_c)} &\leq Ch^{3/2}\|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}, \\ \|u - v^e\|_{L^2(\mathcal{O}_h)} + \left\| \frac{1}{\mu_m} \nabla u - \frac{1}{\mu_e} \nabla v^e \right\|_{L^2(\mathcal{O}_h)} &\leq Ch^{3/2}\|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}, \\ \|u - v^e\|_{H^1(\mathcal{O}_{e,h})} &\leq Ch^{3/2}\|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

**II.1.1. Geometry of the problem.** The boundary of the domain  $\mathcal{O}_c$  is assumed to be smooth. The boundary  $\Gamma_0$  is counterclockwise oriented, and we denote by  $\partial_t$  the tangential derivative along  $\mathcal{O}_c$ . Thanks to a change of units of length, we may suppose that the length of  $\Gamma_0$  is equal to  $2\pi$ . We denote by  $\mathbb{T}$  the flat torus:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Since  $\Gamma_0$  is of class  $\mathcal{C}^\infty$ , we can parameterize it by a smooth function  $\Psi$  from  $\mathbb{T}$  to  $\mathbb{R}^2$  satisfying:

$$\forall \theta \in \mathbb{T}, \quad |\Psi'(\theta)| = 1.$$

The following identities hold:

$$\Gamma_0 = \{\Psi(\theta), \theta \in \mathbb{T}\},$$

and

$$\Gamma_h = \{\Psi(\theta) + hn(\theta), \theta \in \mathbb{T}\}.$$

Here  $n(\theta)$  is the unitary exterior normal at  $\Psi(\theta)$  to  $\Gamma_0$ . We parameterize the membrane  $\mathcal{O}_h$  as follows:

$$\mathcal{O}_h = \{\Psi(\theta) + h\eta n(\theta), (\eta, \theta) \in ]0, 1[ \times \mathbb{T}\}.$$

We define now:

$$\Phi(\eta, \theta) = \Psi(\theta) + h\eta n(\theta).$$

We denote by  $\kappa$  the curvature of the  $\Gamma_0$  in curvilinear coordinate, and by  $\mathfrak{K}$  the curvature in Euclidean coordinates:

$$(II.1.6) \quad \forall x \in \partial\mathcal{O}, \quad \mathfrak{K} = \kappa \circ \Phi_0^{-1}(x).$$

Let  $h_0$  satisfy:

$$(II.1.7) \quad 0 < h_0 < \frac{1}{\|\kappa\|_\infty}.$$

Then, for all  $h$  in  $[0, h_0]$ , there exists an open interval  $I$  containing  $(0, 1)$  such that  $\Phi$  is a diffeomorphism of class  $\mathcal{C}^\infty$  from  $I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  to its image, which is a neighborhood of the membrane. The metric in  $\mathcal{O}_h$  is given by:

$$(II.1.8) \quad h^2 d\eta^2 + (1 + h\eta\kappa(\theta))^2 d\theta^2.$$

We use two systems of coordinates, depending on the domains  $\mathcal{O}_{e,h}$ ,  $\mathcal{O}_c$  and  $\mathcal{O}_h$ : in the interior and exterior domains  $\mathcal{O}_{e,h}$  and  $\mathcal{O}_c$ , we use Euclidean coordinates  $(x, y)$  and in the membrane  $\mathcal{O}_h$ , we use local coordinates with metric (II.1.8).

**II.1.2. Statement of the problem.** In this section, we express our Problem (II.1.2) in local coordinates. It is convenient to write:

$$\forall \theta \in \mathbb{T}, \quad \Phi_0(\theta) = \Phi(0, \theta), \quad \Phi_1(\theta) = \Phi(1, \theta).$$

Let us denote by  $u^e$  and  $u^c$  respectively the electric field in  $\mathcal{O}_{e,h}$  and in  $\mathcal{O}_c$ , written in Euclidean coordinates, and by  $u^m$  the electric field in  $\mathcal{O}_h$  in the local coordinates:

$$\begin{aligned} u^e &= u, \text{ in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ u^c &= u, \text{ in } \mathcal{O}_c, \\ u^m &= u \circ \Phi, \text{ in } [0, 1] \times \mathbb{T}. \end{aligned}$$

We have shown in [59] that the Laplacian in the local coordinates is given by:

$$(II.1.9) \quad \Delta|_{\Phi(\eta, \theta)} = \frac{1}{h(1 + h\eta\kappa)} \left( \partial_\eta \left( \frac{1 + h\eta\kappa}{h} \partial_\eta \right) + \partial_\theta \left( \frac{h}{1 + h\eta\kappa} \partial_\theta \right) \right).$$

Therefore, we rewrite Problem (II.1.2) as follows:

$$(II.1.10a) \quad \Delta u^e + z_e u^e = 0, \text{ in } \mathcal{O}_{e,h},$$

$$(II.1.10b) \quad \Delta u^c + z_c u^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}_c,$$

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(II.1.10c) \quad \partial_\eta \left( \frac{1 + h\eta\kappa}{h} \partial_\eta u^m \right) + \partial_\theta \left( \frac{h}{1 + h\eta\kappa} \partial_\theta u^m \right) + z_m h f(1 + h\eta\kappa) u^m = 0,$$

with transmission conditions (II.1.3) expressed in local coordinates at  $\eta = 0$ :

$$(II.1.10d) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u^c \circ \Phi_0 = \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta u^m \Big|_{\eta=0},$$

$$(II.1.10e) \quad u^c \circ \Phi_0 = u^m|_{\eta=0},$$

at  $\eta = 1$ :

$$(II.1.10f) \quad \frac{1}{\mu_e} \partial_n u^e \circ \Phi_1 = \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta u^m \Big|_{\eta=1},$$

$$(II.1.10g) \quad u^e \circ \Phi_1 = u^m|_{\eta=1},$$

and with boundary condition

$$(II.1.10h) \quad \partial_n u^e|_{\partial\Omega} = \phi.$$

**II.1.3. Formal asymptotic expansion.** In this section, we derive asymptotic expansions of the electric field  $(u^e, u^c, u^m)$  solution of (II.1.10) in terms of the parameter  $h$ . In the limit, we want to be able to replace the membrane by transmission conditions.

We multiply (II.1.10c) by  $h(1 + h\eta\kappa)^2$  and we order the result in powers of  $h$ , in order to obtain the partial differential equation (PDE) satisfied by  $u^m$ :

$$\begin{aligned}
 & \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\
 & \partial_\eta^2 u^m + h\kappa \{3\eta \partial_\eta^2 u^m + \partial_\eta u^m\} + h^2 \left\{ 3\eta^2 \kappa^2 \partial_\eta^2 u^m \right. \\
 & \quad \left. + 2\eta \kappa^2 \partial_\eta u^m + \partial_\theta^2 u^m + z_m u^m \right\} \\
 & \quad + h^3 \{ \eta^3 \kappa^3 \partial_\eta^2 u^m + \eta^2 \kappa^3 \partial_\eta u^m + \eta \kappa \partial_\theta^2 u^m \\
 & \quad - \eta \kappa' \partial_\theta u^m + 3z_m \eta \kappa u^m \} + 3h^4 z_m \eta^2 \kappa^2 u^m + h^5 \eta^3 \kappa^3 z_m u^m = 0
 \end{aligned}
 \tag{II.1.11}$$

We assume the following ansatz:

$$u^e = u_0^e + hu_1^e + \dots, \tag{II.1.12a}$$

$$u^c = u_0^c + hu_1^c + \dots, \tag{II.1.12b}$$

$$u^m = u_0^m + hu_1^m + \dots. \tag{II.1.12c}$$

We will to derive the first two terms of the asymptotic expansions of  $u^e$ ,  $u^c$  and  $u^m$  by identifying the terms of coefficients of a given power of  $h$ .

We extend formally  $u^e$  to  $\Omega \setminus \mathcal{O}_c$ , by extending a finite number of coefficients of the powers of  $h$ . Moreover, we suppose that  $\phi$  is as regular as needed. We will also need the first two terms of

$$u^e \circ \Phi(\eta, \theta) = u^e \circ (\Psi(\theta) + h\eta n(\theta))$$

and  $\partial_n u^e \circ \Phi(\eta, \theta)$ . This amounts to composing two asymptotics series. We remember that we introduced  $\Phi_0 = \Psi$  and  $\Phi_1 = \Phi(1, \cdot)$  to homogeneize our notations. A simple calculation gives:

$$u^e \circ \Phi = u^e \circ \Phi_0 + h(u_1^e \circ \Phi_0 + \eta \partial_n u_0^e \circ \Phi_0) + \dots,$$

and similarly

$$\partial_n u^e \circ \Phi = \partial_n u^e \circ \Phi_0 + h(\partial_n u_1^e \circ \Phi_0 + \eta \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0) + \dots.$$

These expansions enable us to rewrite transmission condition (II.1.10f) as:

$$\begin{aligned}
 & \frac{h\mu_m}{\mu_e} \left( \partial_n u_0^e \circ \Phi_0 + h(\partial_n u_1^e \circ \Phi_0 + \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0) + \dots \right) \\
 & = \partial_\eta u_0^m|_{\eta=1} + h \partial_\eta u_1^m|_{\eta=1} + h^2 \partial_\eta u_2^m|_{\eta=1} + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{II.1.13a}$$

and transmission condition (II.1.10g) as

$$u_0^c \circ \Phi_0 + h(u_1^c \circ \Phi_0 + \partial_n u_0^c \circ \Phi_0) + \dots = u_0^m|_{\eta=1} + hu_1^m|_{\eta=1} + \dots. \tag{II.1.13b}$$

Observe that we have chosen to limit the order of explicit asymptotic expansions to what will be needed below.

We systematically substitute the fields  $u^e$ ,  $u^c$  and  $u^m$  by their asymptotic expansion (II.1.12) in (II.1.10). For transmission condition, at  $\eta = 1$ , it is more convenient to use transmission conditions (II.1.13) instead of (II.1.10f)–(II.1.10g).

We are going to select all terms of an appropriate order in these expanded equations in order to get the conditions satisfied by  $u_0^m$ ,  $u_i^e$ ,  $u_i^c$  and  $u_{i+1}^m$  ( $i = 0, 1$ ).

**First step : identification of  $0^{th}$  order terms.** Substituting into (II.1.11) the field  $u^m$  by its expansion (II.1.12c) we obtain:

$$(II.1.14) \quad \partial_\eta^2 u_0^m = 0, \forall (\eta, \theta) \in (0, 1) \times \mathbb{T}.$$

Moreover, we obtain easily:

$$(II.1.15a) \quad \Delta u_0^e + z_e u_0^e = 0, \text{ in } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}_c},$$

$$(II.1.15b) \quad \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}_c,$$

and the boundary condition

$$(II.1.15c) \quad \partial_n u_0^e|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Equality (II.1.10d) implies:

$$\partial_\eta u_0^m|_{\eta=0} = 0,$$

and equality (II.1.13a) implies:

$$\partial_\eta u_0^m|_{\eta=1} = 0.$$

Therefore,  $u_0^m$  depends only on  $\theta$ . By identifying  $0^{th}$  order term in (II.1.10d)–(II.1.13a), we infer:

$$(II.1.16) \quad u_0^c \circ \Phi_0 = u_0^m = u_0^e \circ \Phi_0,$$

thus we obtain the following transmission condition:

$$(II.1.17) \quad u_0^c \circ \Phi_0 = u_0^e \circ \Phi_0.$$

We will determine  $u_0^m$  later on.

**Second step : identification of first order terms.** Substituting into equality (II.1.11) the field  $u^m$  by its expansion (II.1.12c), and using that in  $(0, 1) \times \mathbb{T}$ , we have

$$\partial_\eta^2 u_0^m = \partial_\eta u_0^m = 0,$$

we obtain:

$$(II.1.18) \quad \partial_\eta^2 u_1^m = 0.$$

Moreover, we obtain easily:

$$(II.1.19a) \quad \Delta u_1^e + z_e u_1^e = 0, \text{ in } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}_c},$$

$$(II.1.19b) \quad \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}_c,$$

and the boundary condition

$$(II.1.19c) \quad \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0.$$

Equality (II.1.10d) implies:

$$(II.1.20a) \quad \partial_\eta u_1^m|_{\eta=0} = \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c \circ \Phi_0,$$

and equality (II.1.13a) implies:

$$(II.1.20b) \quad \partial_\eta u_1^m|_{\eta=1} = \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n u_0^e \circ \Phi_0.$$

We infer the following transmission condition between  $\partial_n u_0^e$  and  $\partial_n u_0^c$ :

$$(II.1.21) \quad \frac{1}{\mu_c} u_0^c \circ \Phi_0 = \frac{1}{\mu_e} u_0^e \circ \Phi_0.$$

Therefore, with (II.1.15), (II.1.17) and (II.1.21) we infer that  $(u_0^e, u_0^c)$  satisfies the following PDE in  $\Omega$ :

$$(II.1.22a) \quad \begin{cases} \Delta u_0^e + z_e u_0^e = 0, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases}$$

with the transmission conditions

$$(II.1.22b) \quad u_0^c|_{\Gamma_0} = u_0^e|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.22c) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0} = \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0},$$

and with Neumann boundary condition:

$$(II.1.22d) \quad \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0.$$

According to (II.1.16),  $u_0^m$  is equal to:

$$(II.1.23) \quad \forall (\eta, \theta) \in [0, L] \times \mathbb{T}, \quad u_0^m(\eta, \theta) = u_0^c \circ \Phi_0(\theta).$$

We have determined  $u_0^e$ ,  $u_0^c$  and  $u_0^m$ .

Observe that the identification of the first order term in (II.1.10e) implies:

$$(II.1.24) \quad u_1^m|_{\eta=0} = u_1^c \circ \Phi_0,$$

and  $u_1^c$  will be determine later.

**Third step : identification of second order terms.** According to (II.1.18) and (II.1.23), we have

$$\partial_\eta u_0^m \equiv \partial_\eta^2 u_1^m \equiv 0.$$

Therefore, by identifying the second order term in  $h$  of (II.1.11), we obtain:

$$(II.1.25) \quad \partial_\eta^2 u_2^m + m_1 = 0,$$

with

$$(II.1.26) \quad m_1 = \kappa \partial_\eta u_1^m + \partial_\theta^2 u_0^m + z_m u_0^m.$$

Observe that  $m_1$  depends only on  $\theta$ .

The identification of second order terms of (II.1.10d) implies

$$\partial_\eta u_2^m|_{\eta=0} = \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_1^c \circ \Phi_0,$$

and those of (II.1.13a) implies

$$(II.1.27) \quad \partial_\eta u_2^m|_{\eta=1} = \frac{\mu_m}{\mu_e} (\partial_n u_1^e \circ \Phi_0 + \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0).$$

Observe that  $\partial_\eta u_1^m$  depends only on  $\theta$  thanks to (II.1.18). Thereby integrating (II.1.25) with respect to  $\eta$  we obtain:

$$(II.1.28) \quad \partial_\eta u_2^m(\eta, \cdot) = -\eta m_1 + \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_1^c \circ \Phi_0.$$

From (II.1.27) and (II.1.28) we will obtain a transmission condition for  $(u_1^e, u_1^c)$ . More precisely, taking  $\eta = 1$  in (II.1.28), with the help of (II.1.27) we obtain:

$$(II.1.29) \quad \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_1^c \circ \Phi_0 - \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_0 = m_1 + \mu_m \frac{1}{\mu_e} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0,$$

and the right-hand side of (II.1.29) is entirely determined.

By identifying the terms of order 1 in (II.1.13b) we obtain:

$$(II.1.30) \quad u_1^c \circ \Phi_0 - u_1^e \circ \Phi_0 = \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_c}\right) \partial_n u_0^e \circ \Phi_0.$$

For convenience we write equations satisfied by  $(u_1^e, u_1^c)$  in Euclidean coordinates. Thanks to (II.1.15), (II.1.29) and (II.1.30) we infer that  $(u_1^e, u_1^c)$  solves:

$$(II.1.31a) \quad \begin{cases} \Delta u_1^e + z_e u_1^e = 0, & \text{in } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}_c}, \\ \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

with transmission conditions

$$(II.1.31b) \quad \begin{aligned} \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} - \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n u_1^e|_{\Gamma_0} &= \partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0} + z_m u_0^c|_{\Gamma_0} \\ &+ \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n^2 u_0^e|_{\Gamma_0} + \frac{\mu_m}{\mu_c} \mathfrak{K} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0}, \end{aligned}$$

$$(II.1.31c) \quad u_1^c|_{\Gamma_0} - u_1^e|_{\Gamma_0} = \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_e}\right) \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0}.$$

In Section II.1.4, we prove the existence and uniqueness of  $(u_1^e, u_1^c)$  defined by (II.1.31). Remark that  $u_1^m$  given by equality (II.1.24) is entirely determined and  $\partial_\eta u_2^m$  is entirely determined by (II.1.28).

Observe that (II.1.31b) contains a second normal derivative; this is a feature of the asymptotics of a cell in an ambient medium; no second derivative appeared in [59], where there is a cell with boundary condition on the exterior of the membrane. Let us summarize the first two terms of the asymptotics we obtained formally.

- *The 0<sup>th</sup> order terms.* The electric fields  $u_0^e$  and  $u_0^c$  are solution of the following problem in  $\Omega$ :

$$(II.1.32a) \quad \begin{cases} \Delta u_0^e + z_e u_0^e = 0, & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases}$$

with transmission conditions

$$(II.1.32b) \quad u_0^c|_{\Gamma_0} = u_0^e|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.32c) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0} = \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0},$$

and with Neumann boundary condition

$$(II.1.32d) \quad \partial_n u_0^e|_{\partial\Omega} = \phi.$$

In the membrane, the field  $u_0^m$  is equal to:

$$(II.1.33) \quad \forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_0^m = u_0^c \circ \Phi_0(\theta).$$

- *The first order terms.* The fields  $u_1^e$  and  $u_1^c$  are solution of the following problem in  $\Omega$ :

$$(II.1.34a) \quad \begin{cases} \Delta u_1^e + z_e u_1^e = 0, & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \\ \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

with the transmission conditions

$$(II.1.34b) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_1^e|_{\Gamma_0} = \frac{1}{\mu_m} (\partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0} + z_m u_0^c|_{\Gamma_0}) + \frac{1}{\mu_e} \partial_n^2 u_0^e|_{\Gamma_0} + \frac{1}{\mu_c} \mathfrak{K} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.34c) \quad u_1^c|_{\Gamma_0} - u_1^e|_{\Gamma_0} = \frac{\mu_e - \mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0}.$$

In the membrane, we have:

$$(II.1.35) \quad \forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_1^m = \eta \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c \circ \Phi_0 + u_1^c \circ \Phi_0.$$

REMARK II.1.2. *We may write  $\partial_n^2 u_0^e|_{\Gamma_0}$  in terms of  $\partial_n u_0^e|_{\Gamma_0}$ , of  $u_0^e|_{\Gamma_0}$  and of its tangential derivatives. Actually, we perform the change in local coordinates in a neighborhood of  $\partial\mathcal{O}_c$ . According to (II.1.32), the following identity holds along  $\Gamma_0$ :*

$$\partial_n^2 u_0^e|_{\Gamma_0} = -\mathfrak{K} \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0} - \partial_t^2 u_0^e|_{\Gamma_0} - z_e u_0^e|_{\Gamma_0},$$

thus we may rewrite transmission conditions (II.1.34b)–(II.1.32c) as follows:

$$\frac{1}{\mu_c} \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_1^e|_{\Gamma_0} = \left( \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0} + (q_m - q_e) u_0^c|_{\Gamma_0},$$

hence (II.1.32)–(II.1.34) are equivalent to (II.1.4)–(II.1.5).

We have given the first two terms of the asymptotic expansion of  $u^e$ ,  $u^c$  and  $u^m$ . It remains to prove that the remainder terms are small. First we need to study the regularity of  $u_0^e$  and  $u_1^e$  in a neighborhood of  $\Gamma_0$ .

**II.1.4. Regularity Result.** In this section, we study the regularity of the solution of Helmholtz equation with our transmission condition, which is non usual. This result is required to prove Theorem II.1.1 of Section II.1.5, which estimates the errors between the asymptotics and the exact solution. The following result is natural and expected; it is very close to a result of [47] (Appendix, page 147) by Li and Vogelius, but different enough to require a proof. We thank very warmly Michael Vogelius for his suggestions on the reflection principle.

THEOREM II.1.3. *Let  $G$  belong to  $H^s(\Gamma_0)$ ,  $s \geq -1/2$ . Let  $(U^e, U^c)$  be the solution of the following problem:*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_c} \nabla U^c \right) + q_c U^c &= 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_e} \nabla U^e \right) + q_e U^e &= 0, & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c, \end{aligned}$$



with the following transmission condition:

$$\begin{aligned} U^e|_{\Gamma_0} &= U^c|_{\Gamma_0}, \\ \frac{1}{\mu_e}\partial_n U^e|_{\Gamma_0} - \frac{1}{\mu_c}\partial_n U^c|_{\Gamma_0} &= G, \end{aligned}$$

and with the Neumann boundary condition on  $\partial\Omega$

$$\partial_n U^e|_{\partial\Omega} = 0.$$

Then we have:

$$U^e \in H^{s+3/2}(\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}_c}), \quad U^c \in H^{s+3/2}(\mathcal{O}_c).$$

Moreover let  $m$  be a non negative integer, and  $s > m + 1/2$ . Then,

$$U^e \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega \setminus \mathcal{O}_c}), \quad U^c \in \mathcal{C}^m(\overline{\mathcal{O}_c}).$$

PROOF. Since  $\Gamma_0$  is smooth, we use local coordinates in a neighborhood of  $\Gamma_0$ . Actually, as in Section II.1.1, there exists  $h_1$  such that:

$$\mathcal{V}_1 = \{\Psi(\theta) + h_1\eta n(\theta), (\eta, \theta) \in (-1, 1) \times \mathbb{T}\},$$

is an open neighborhood of  $\Gamma_0$  and

$$(\eta, \theta) \mapsto \Psi(\theta) + h_1\eta n(\theta)$$

is a diffeomorphism from  $(-1, 1) \times \mathbb{T}$  to  $\mathcal{V}_1$ . We denote by  $g$  the function  $G$  written in local coordinates:

$$\forall \theta \in \mathbb{T}, \quad g(\theta) = G \circ \Psi(\theta).$$

We denote by  $\mathcal{C}$  the cylinder  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  and by  $H_m^1(\mathcal{C})$  the space of the functions  $\alpha$  defined on  $\mathcal{C}$  such that:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{H_m^1(\mathcal{C})} &= \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} h_1(1 + h_1\eta\kappa) |\alpha(\eta, \theta)|^2 d\eta d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + h_1\eta\kappa}{h_1} |\partial_\eta \alpha(\eta, \theta)|^2 + \frac{h_1}{1 + h_1\eta\kappa} |\partial_\theta \alpha(\eta, \theta)|^2 \right) d\eta d\theta \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

is finite. We equip  $H_m^1(\mathcal{C})$  with such a norm, which is equivalent to the ordinary norm

$$\left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} (|\alpha|^2 + |\partial_\eta \alpha|^2 + |\partial_\theta \alpha|^2) d\theta d\eta \right)^{1/2},$$

because we have the following equality:

$$\|v \circ \Phi^{-1}\|_{H^1(\mathcal{V}_1)} = \|v\|_{H_m^1(\mathcal{C})}.$$

We use a partition of unity and classical elliptic regularity to reduce our problem to establishing the regularity of the solutions  $(V^e, V^c)$  of the following problem:

$$\begin{aligned} \forall(\eta, \theta) \in [-1, 0] \times \mathbb{T}, \\ \partial_\eta \left( \frac{1 + h_1 \eta \kappa}{h_1 \mu_c} \partial_\eta V^c \right) + \partial_\theta \left( \frac{h_1}{(1 + h_1 \eta \kappa) \mu_c} \partial_\theta V^c \right) + q_c h_1 (1 + h_1 \eta \kappa) V^c = 0, \\ \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \partial_\eta \left( \frac{1 + h_1 \eta \kappa}{h_1 \mu_e} \partial_\eta V^e \right) + \partial_\theta \left( \frac{h_1}{(1 + h_1 \eta \kappa) \mu_e} \partial_\theta V^e \right) + q_e h_1 (1 + h_1 \eta \kappa) V^e = 0, \end{aligned}$$

with Dirichlet boundary conditions

$$V^c|_{\eta=-1} = 0, \quad V^e|_{\eta=1} = 0$$

and with transmission conditions

$$\begin{aligned} V^c|_{\eta=0} &= V^e|_{\eta=0}, \\ \frac{1}{\mu_e} \partial_\eta V^e|_{\eta=0} - \frac{1}{\mu_c} \partial_\eta V^c|_{\eta=0} &= g, \end{aligned}$$

We use the reflection principle, suggested by Vogelius and coming from an idea of Nirenberg (see [47], page 147 or [2] and [3]). With the help of this principle, we transform transmission conditions into boundary conditions. We define  $V^r$  on  $[0, 1] \times \mathbb{T}$  by:

$$\forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad V^r(\eta, \theta) = V^c(-\eta, \theta).$$

The functions  $V^e, V^r$  satisfy the following problem in  $(0, 1) \times \mathbb{T}$ :

$$\forall(\eta, \theta) \in (0, 1) \times \mathbb{T},$$

(II.1.36a)

$$\partial_\eta \left( \frac{1 + h_1 \eta \kappa}{h_1 \mu_e} \partial_\eta V^e \right) + \partial_\theta \left( \frac{h_1}{(1 + h_1 \eta \kappa) \mu_e} \partial_\theta V^e \right) + q_e h_1 (1 + h_1 \eta \kappa) V^e = 0,$$

(II.1.36b)

$$\partial_\eta \left( \frac{1 - h_1 \eta \kappa}{h_1 \mu_c} \partial_\eta V^r \right) + \partial_\theta \left( \frac{h_1}{(1 - h_1 \eta \kappa) \mu_c} \partial_\theta V^r \right) + q_c h_1 (1 - h_1 \eta \kappa) V^r = 0,$$

with Dirichlet boundary conditions in  $\eta = 1$

(II.1.36c)

$$V^r|_{\eta=1} = 0, \quad V^e|_{\eta=1} = 0,$$

with boundary conditions in  $\eta = 0$ :

(II.1.36d)

$$V^r|_{\eta=0} - V^e|_{\eta=0} = 0,$$

(II.1.36e)

$$\frac{1}{\mu_c} \partial_\eta V^r|_{\eta=0} + \frac{1}{\mu_e} \partial_\eta V^e|_{\eta=0} = g,$$

Multiplying (II.1.36a) by  $\overline{V^e}$  and (II.1.36b) by  $\overline{V^r}$ , integrating by parts and summing, we obtain:

$$(II.1.37a) \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1+h_1\eta\kappa}{h_1\mu_e} |\partial_\eta V^e|^2 + \frac{1-h_1\eta\kappa}{h_1\mu_c} |\partial_\eta V^r|^2 \right. \\ \left. + \frac{h_1}{(1+h_1\eta\kappa)\mu_e} |\partial_\theta V^e|^2 + \frac{h_1}{(1-h_1\eta\kappa)\mu_c} |\partial_\theta V^r|^2 - q_c h_1 (1-h_1\eta\kappa) |V^r|^2 \right. \\ \left. - q_e h_1 (1+h_1\eta\kappa) |V^e|^2 \right) d\eta d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{h_1\mu_e} \partial_\eta V^e|_{\eta=0} \overline{V^e}|_{\eta=0} \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1\mu_c} \partial_\eta V^r|_{\eta=0} \overline{V^r}|_{\eta=0} \right)$$

Using boundary conditions (II.1.36d)–(II.1.36e), we obtain:

$$(II.1.37b) \quad \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\mu_e} \partial_\eta V^e|_{\eta=0} \overline{V^e}|_{\eta=0} + \frac{1}{\mu_c} \partial_\eta V^r|_{\eta=0} \overline{V^r}|_{\eta=0} \right) = \int_0^{2\pi} g \overline{V^e} d\theta.$$

We argue as in [51] or in [9], and the reader will verify that (II.1.37a) and (II.1.37b) suffice to give existence and uniqueness of solutions of (II.1.36) in  $H_m^1(\mathcal{C})$ .

To obtain the regularity result, we just have to apply the method of frozen coefficients. Let  $\theta_0 \in \mathbb{T}$ , and denote by  $\kappa_0$  the value of  $\kappa$  at  $\theta_0$ . A classical argument (see for instance [2], [3], [22], [48] or [51]) shows that  $(V^e, V^r)$  have the same respective regularity as  $(V', V'')$  solution of:

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \frac{1}{h_1} \partial_\eta^2 V' + \frac{\kappa_0}{1+h_1\eta\kappa_0} \partial_\eta V' + \frac{h_1 \partial_\theta^2 V'}{(1+h_1\eta\kappa_0)^2} = 0, \\ \frac{1}{h_1} \partial_\eta^2 V'' - \frac{\kappa_0}{1-h_1\eta\kappa_0} \partial_\eta V'' + \frac{h_1 \partial_\theta^2 V''}{(1-h_1\eta\kappa_0)^2} = 0,$$

with Dirichlet boundary conditions

$$V'|_{\eta=1} = 0, \quad V''|_{\eta=1} = 0,$$

with transmission conditions

$$V'|_{\eta=0} = V''|_{\eta=0}, \\ \frac{1}{\mu_e} \partial_\eta V'|_{\eta=0} + \frac{1}{\mu_c} \partial_\eta V''|_{\eta=0} = g.$$

The regularity results of this last problem is obtained directly by working in Fourier coefficients, hence the regularity result, in  $\mathcal{V}_1$ . The end of the proof follows by classical regularity theorems (see [51] for instance).  $\square$

**II.1.5. Error Estimates.** We give an error estimate, which proves that the first two terms obtained in Section II.1.3 through a formal argument are indeed the first terms, *i.e.* the remainder is smaller.

REMARK II.1.4. Recall that the  $L^2$  norm of a 0-form  $\alpha$  in  $\mathcal{C}$  with the metric (II.1.8), denoted by  $\|\alpha\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})}$ , is equal to:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})}^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} h(1+h\eta\kappa)|\alpha(\eta, \theta)|^2 d\eta d\theta, \\ &= \|\alpha \circ \Phi^{-1}\|_{L^2(\mathcal{O}_h)}^2, \end{aligned}$$

and that the  $L^2$  norm of the exterior derivative  $d\alpha$  of  $\alpha$ , denoted by  $\|d\alpha\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})}$  is equal to

$$\begin{aligned} \|d\alpha\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})}^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1+h\eta\kappa}{h} |\partial_\eta \alpha(\eta, \theta)|^2 + \frac{h}{1+h\eta\kappa} |\partial_\theta \alpha(\eta, \theta)|^2 d\eta \right) d\theta, \\ &= \|\nabla(\alpha \circ \Phi^{-1})\|_{L^2(\mathcal{O}_h)}^2. \end{aligned}$$

Let us prove now Theorem II.1.1. We remember that  $u$  is the solution to Problem (II.1.2) and that  $(v^e, v^c)$  are defined in  $\Omega$  by:

$$(II.1.38a) \quad v^e = u_0^e + hu_1^e, \text{ in } \Omega \setminus \mathcal{O}_c,$$

$$(II.1.38b) \quad v^c = u_0^c + hu_1^c, \text{ in } \mathcal{O}_c.$$

We have to prove that there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that

$$(II.1.39a) \quad \|u - v^c\|_{H^1(\mathcal{O}_c)} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)},$$

$$(II.1.39b) \quad \|u - v^e\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})} + \left\| \frac{1}{\mu_m} du - \frac{1}{\mu_e} dv^e \right\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)},$$

$$(II.1.39c) \quad \|u - v^e\|_{H^1(\mathcal{O}_{e,h})} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}.$$

REMARK II.1.5. The estimates of Theorem II.1.1 are piecewise  $H^1$  estimates since estimate (II.1.39b) involves

$$\left\| \frac{1}{\mu_m} du - \frac{1}{\mu_e} dv^e \right\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})},$$

which is not the norm of a difference of gradients. However, we could have global estimate with an appropriate norm involving the permeabilities  $\mu_c$ ,  $\mu_m$  and  $\mu_e$  and by defining an appropriately modified  $\mu$ ; details are left to the reader.

Since  $\phi$  belongs to  $H^s(\partial\Omega)$ ,  $s > 7/2$  and Theorem II.1.3 holds,  $u_0^e$  belongs to  $\mathcal{C}^3(\overline{\mathcal{O}_h})$  and  $u_1^e$  to  $\mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{O}_h})$ . To prove Theorem II.1.1, we need the following lemma.

LEMMA II.1.6. Let  $h$  belong to  $(0, h_0)$ .

Let  $u_0^e$ ,  $u_1^e$ ,  $u_0^m$  and  $u_1^m$  be defined by (II.1.32) and (II.1.34). We denote by  $\tilde{v}$  the following function:

$$(II.1.40) \quad \forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad \tilde{v}(\eta, \theta) = u_0^m + hu_1^m.$$

Then, there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that

$$(II.1.41) \quad \|v^e \circ \Phi - \tilde{v}\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)},$$

$$(II.1.42) \quad \left\| \frac{1}{\mu_e} d(v^e \circ \Phi) - \frac{1}{\mu_m} d\tilde{v} \right\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{C})} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}$$

and

$$(II.1.43) \quad \begin{cases} \|v^e \circ \Phi_1 - \tilde{v}|_{\eta=1}\|_{\Lambda^0 L^2(\mathbb{T})} \leq Ch^2 \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}, \\ \|\partial_\theta v^e \circ \Phi_1 - \partial_\theta \tilde{v}|_{\eta=1}\|_{\Lambda^0 L^2(\mathbb{T})} \leq Ch^2 \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}, \\ \|\partial_\theta^2 v^e \circ \Phi_1 - \partial_\theta^2 \tilde{v}|_{\eta=1}\|_{\Lambda^0 L^2(\mathbb{T})} \leq Ch^2 \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}. \end{cases}$$

REMARK II.1.7. *A priori, one would have expected that the statement of Theorem II.1.1 would have given a comparison of the exact solution with its asymptotics in the three regions  $\mathcal{O}_{e,h}$ ,  $\mathcal{O}_h$  and  $\mathcal{O}_c$ . Actually, Lemma II.1.6 shows that we may dispense with the asymptotics in  $\mathcal{O}_h$ , provided that  $v^e$  defined by (II.1.38) has been extended up to the inner boundary of the membrane, and this is precisely how  $v^e$  has been constructed.*

PROOF OF LEMMA II.1.6. Since  $u_0^e \circ \Phi$  belongs to  $\mathcal{C}^3([0, 1] \times \mathbb{T})$  and since the function  $u_1^e \circ \Phi$  belongs to  $\mathcal{C}^2([0, 1] \times \mathbb{T})$ , using Taylor formula with integral remainder, we obtain for all  $(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} v^e \circ \Phi|_{(\eta,\theta)} &= u_0^e \circ \Phi|_{(0,\theta)} + h\eta \partial_n u_0^e \circ \Phi|_{(0,\theta)} + hu_1^e \circ \Phi|_{(0,\theta)} \\ &\quad + h^2 \eta^2 \int_0^1 (1-t) \left( \partial_n u_1^e \circ \Phi(t\eta, \theta) + \frac{(1-t)}{2} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi(t\eta, \theta) \right) dt, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \partial_\eta (v^e \circ \Phi)|_{(\eta,\theta)} &= h \partial_n u_0^e \circ \Phi|_{(0,\theta)} + h^2 \left( \partial_n u_1^e \circ \Phi|_{(\eta,\theta)} \right. \\ &\quad \left. + \eta \int_0^1 (1-t) \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi(t, \theta) dt \right). \end{aligned}$$

Since we have:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\eta, \theta) &= u_0^c \circ \Phi_0(\theta) + h\eta \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c \circ \Phi_0(\theta) + hu_1^c \circ \Phi_0(\theta), \\ \partial_\eta \tilde{v}(\eta, \theta) &= h \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c \circ \Phi_0(\theta), \end{aligned}$$

using transmission condition (II.1.32b), we obtain for all  $(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} (v^e \circ \Phi - \tilde{v})|_{\eta,\theta} &= h \left( \eta \left( 1 - \frac{\mu_m}{\mu_e} \right) \partial_n u_0^e \circ \Phi_0 + u_1^e \circ \Phi_0 - u_1^c \circ \Phi_0 \right. \\ &\quad \left. + h\eta \int_0^1 (1-t) \left( \partial_n u_1^e \circ \Phi(t\eta, \theta) + \eta \frac{(1-t)}{2} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi(t\eta, \theta) \right) dt \right). \end{aligned}$$

This equality implies directly estimate (II.1.41). Moreover, using transmission conditions (II.1.32b) and (II.1.34c), we obtain for all  $\theta \in \mathbb{T}$ :

$$v^e \circ \Phi_1(\theta) - \tilde{v}(1, \theta) = h^2 \int_0^1 (1-t) \left( \partial_n u_1^e \circ \Phi(t, \theta) + \frac{(1-t)}{2} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi(t, \theta) \right) dt,$$

which implies the first estimate of (II.1.43). Applying the same reasoning to  $\partial_\theta v^e \circ \Phi$  and to  $\partial_\theta^2 v^e \circ \Phi$ , we obtain the two last estimates of (II.1.43).

Observe that:

$$\frac{1}{\mu_e} \partial_\eta (v^e \circ \Phi)(\eta, \theta) - \frac{1}{\mu_m} \partial_\eta \tilde{v}(\eta, \theta) = \frac{h^2 f}{\mu_e}(\theta) \left( \eta f \int_0^1 (1-t) \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi(t\eta, \theta) dt + \partial_n u_1^e \circ \Phi(\eta, \theta) \right),$$

hence estimate (II.1.42). This ends the proof of Lemma II.1.6 □

Let us prove now Theorem II.1.1.

PROOF OF THEOREM II.1.1. Define  $m_0$  by

$$m_0 = \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_0^c \circ \Phi_0,$$

and  $\bar{u}_2^m$  by

$$\bar{u}_2^m(\eta, \cdot) = -\frac{\eta^2}{2} m_1 + \eta m_0,$$

where  $m_1$  is defined by (II.1.26).

Let

$$(II.1.44a) \quad W^e = u^e - (u_0^e + h u_1^e), \text{ in } \mathcal{O}_{e,h},$$

$$(II.1.44b) \quad W^c = u^c - (u_0^c + h u_1^c) - h^2 B^c, \text{ in } \mathcal{O}_c,$$

$$(II.1.44c) \quad W^m = u^m - (u_0^m + h u_1^m) - h^2 B^m, \text{ in } [0, 1] \times \mathbb{T},$$

where

$$(II.1.45) \quad B^m(\eta, \theta) = \bar{u}_2^m + a^m(\theta) + \eta b^m(\eta),$$

and  $B^c$ ,  $a^m$  and  $b^m$  are allowed to depend on  $h$  and will be chosen later, so that yield the easiest estimates of  $W^e$ ,  $W^c$  and  $W^m$ .

Let us write the problem satisfied by  $(W^e, W^c, W^m)$ . In order to simplify the notations, we introduce  $\mathcal{L}$ , the Helmholtz operator written in the local coordinates  $(\eta, \theta)$  given by

$$\mathcal{L} = \partial_\eta \left( \frac{1 + h\eta\kappa}{h} \partial_\eta \right) + \partial_\theta \left( \frac{h}{1 + h\eta\kappa} \partial_\theta \right) + z_m h(1 + h\eta\kappa).$$

We obtain

$$(II.1.46a) \quad \Delta W^e + z_e W^e = 0, \text{ in } \mathcal{O}_{e,h},$$

$$(II.1.46b) \quad \Delta W^c + z_c W^c = -h^2 (\Delta B^c + z_c B^c), \text{ in } \mathcal{O}_c,$$

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$\mathcal{L} W^m = -\mathcal{L} (u_0^m + h u_1^m + h^2 B^m),$$

with transmission conditions coming from (II.1.3)

$$(II.1.46c) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n W^c \circ \Phi_0 = \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta W^m|_{\eta=0} + h \left( \frac{1}{\mu_m} \partial_\eta B^m|_{\eta=0} - \frac{1}{\mu_c} \partial_n u_1^c \circ \Phi_0 \right) - h^2 \partial_n B^c \circ \Phi_0,$$

$$(II.1.46d) \quad W^c \circ \Phi_0 = W^m|_{\eta=0} + h^2 (B^m|_{\eta=0} - B^c \circ \Phi_0),$$

$$(II.1.46e) \quad \frac{1}{\mu_e} \partial_n W^e \circ \Phi_1 = \frac{1}{h\mu_m} \left( \partial_\eta W^m|_{\eta=1} + h \partial_\eta u_1^m + h^2 \partial_\eta B^m|_{\eta=1} \right)$$

$$(II.1.46f) \quad - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e \circ \Phi_1 - \frac{h}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_1,$$

$$(II.1.46g) \quad W^e \circ \Phi_1 = W^m|_{\eta=1} + h^2 B^m|_{\eta=1} + u_0^m|_{\eta=1} + h u_1^m|_{\eta=1} - u_0^e \circ \Phi_1 - h u_1^e \circ \Phi_1,$$

and the boundary condition

$$(II.1.46h) \quad \partial_n W^e|_{\partial\Omega} = 0.$$

We calculate  $\mathcal{L}W^m$ , knowing that  $\partial_\eta u_0^m$  and  $\partial_\eta^2 u_1^m$  vanish and we obtain:

$$(II.1.47) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}W^m = & -h\kappa \partial_\eta u_1^m - h \partial_\eta ((1 + h\eta\kappa) \partial_\eta B^m) - h \partial_\theta \left( \frac{1}{1 + h\eta\kappa} \partial_\theta \right) (u_0^m \\ & + h u_1^m + h^2 B^m) - z_m h (1 + h\eta\kappa) (u_0^m + h u_1^m + h^2 B^m), \end{aligned}$$

and we find that in the above expression, the coefficient of terms of order 1 in  $h$  is:

$$(II.1.48) \quad -\partial_\eta^2 B^m - \kappa \partial_\eta u_1^m - \partial_\theta^2 u_0^m - z_m u_0^m.$$

By definition (II.1.45) of  $B^m$ , the first term of (II.1.48) is  $m_1$ , and according to the definition (II.1.26) of  $m_1$ , the expression (II.1.48) vanishes.

We will determine  $a^m$  and  $b^m$  so as to have nice transmission conditions. Observe that if  $y$  satisfies, in the weak sense:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla y \right) + qy = 0, \text{ in } \mathcal{O}_{e,h} \cup \mathcal{O}_h,$$

with discontinuous  $\mu$  on the outer boundary of the membrane  $\mathcal{O}_h$ , then the transmission conditions on this boundary are:

$$\begin{aligned} y^e \circ \Phi_1 &= y^m|_{\eta=1}, \\ \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n y^e \circ \Phi_1 &= \frac{1}{h} \partial_\eta y^m|_{\eta=1}. \end{aligned}$$

Therefore, it is natural to write transmission conditions of this form on the outer boundary of  $\mathcal{O}_h$ . The continuity condition (II.1.46g) may be rewritten :

$$W^e \circ \Phi_1 - W^m|_{\eta=1} = h^2 B^m|_{\eta=1} - \tilde{v}|_{\eta=1} - v^e \circ \Phi_1,$$

where  $\tilde{v}$  and  $v^e$  are respectively defined by (II.1.40) and (II.1.38). We choose  $B^m$  so that the right-hand side of the above equality vanishes:

$$(II.1.49) \quad a^m + b^m = \frac{\tilde{v}|_{\eta=1} - v^e \circ \Phi_1}{h^2} - \bar{u}_2^m|_{\eta=1},$$

and thanks to Lemma II.1.6 estimate (II.1.43), the right-hand side of (II.1.49) is bounded in  $H^2(\mathbb{T})$ .

The condition (II.1.46f) is rewritten into:

$$(II.1.50) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu_e} \partial_n W^e \circ \Phi_1 - \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta W^m|_{\eta=1} &= \frac{1}{\mu_m} (\partial_\eta u_1^m + h\partial_\eta B^m|_{\eta=1}) \\ &- \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e \circ \Phi_1 - \frac{h}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_1, \end{aligned}$$

Observe that:

$$\begin{aligned} \partial_n u_0^e \circ \Phi_1 &= \partial_n u_0^e \circ \Phi_0 + h\partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0 + h^2 \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \partial_n^3 u_0^e \circ \Phi dt, \\ \partial_n u_1^e \circ \Phi_1 &= \partial_n u_1^e \circ \Phi_0 + h \int_0^1 (1-t) \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi dt, \end{aligned}$$

and recall that

$$\partial_\eta u_1^m = \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n u_0^e \circ \Phi_0.$$

Therefore, in order for the right-hand side of (II.1.50) to be of order 2, we impose:

$$\frac{1}{\mu_m} \partial_\eta B^m|_{\eta=1} - \frac{1}{\mu_e} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0 - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_0 = 0,$$

which implies

$$(II.1.51) \quad b_m = m_1 - m_0 + \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0 + \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_0,$$

thanks to (II.1.45). We infer from (II.1.49) and (II.1.51) that  $a_m$  and  $b_m$  are bounded in  $H^2(\mathbb{T})$  independently of  $h$ , and therefore, since  $B^m$  is polynomial in  $\eta$ , it belongs to  $\mathcal{C}^\infty([0, 1]; H^2(\mathbb{T}))$ , the space of functions, which are  $\mathcal{C}^\infty$  in  $\eta \in [0, 1]$  with values in  $H^2(\mathbb{T})$ . Particularly, there exists  $C > 0$  independent of  $h$  such that

$$(II.1.52) \quad \forall \eta \in [0, 1], \quad \|B^m(\eta, \cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{T})} \leq C \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}.$$

Observe that with such  $B^m$ , we have:

$$\begin{aligned} \partial_\eta B^m|_{\eta=0} &= b_m + m_0, \\ &= m_1 + \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n^2 u_0^e \circ \Phi_0 + \frac{\mu_m}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_0, \end{aligned}$$

thanks to (II.1.51). Transmission condition (II.1.29) with definition (II.1.26) of  $m_1$  imply:

$$\partial_\eta B^m|_{\eta=0} = \frac{\mu_m}{\mu_c} \partial_n u_1^c \circ \Phi_0.$$

Therefore, transmission condition (II.1.46c) is simplified into:

$$(II.1.53) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n W^c \circ \Phi_0 = \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta W^m|_{\eta=0} - h^2 \partial_n B^c \circ \Phi_0,$$

It remains to define  $B^c$ . It is simply define by

$$\begin{aligned} \Delta B^c + z_c B^c &= 0, \quad \text{in } \mathcal{O}_c, \\ B_c|_{\partial\mathcal{O}_c} &= B^m \circ \Phi_0^{-1}. \end{aligned}$$



Since  $B^m \in H^2(\mathbb{T})$ , a classical argument and estimate (II.1.52) imply that there exists  $C > 0$  independent on  $h$  such that:

$$(II.1.54a) \quad \|\partial_n B^c|_{\partial \mathcal{O}_c}\|_{H^1(\partial \mathcal{O}_c)} \leq C \|\phi\|_{H^s(\partial \Omega)},$$

$$(II.1.54b) \quad \|B^c\|_{H^{2+1/2}(\mathcal{O}_c)} \leq C \|\phi\|_{H^s(\partial \Omega)}.$$

To simplify our notations, we define

$$g(\eta, \theta) = \frac{1}{h^2} \mathcal{L} (u_0^m + h u_1^m + h^2 B^m),$$

$$g_1(\theta) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{\mu_m} (\partial_\eta u_1^m + h \partial_\eta B^m|_{\eta=1}) - \frac{1}{\mu_e} \partial_n u_0^e \circ \Phi_1 - \frac{h}{\mu_e} \partial_n u_1^e \circ \Phi_1 \right).$$

We equip  $L^2(\mathcal{C})$  with the ordinary norm

$$\|\alpha\|_{L^2(\mathcal{C})} = \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\alpha|^2 d\theta d\eta \right)^{1/2},$$

and  $L^2(\mathbb{T})$  with the ordinary norm

$$\|\gamma\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left( \int_0^{2\pi} |\gamma|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

We have chosen  $B^m$  and  $B^c$  such that there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that

$$(II.1.55a) \quad \|g\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq C \|\phi\|_{H^s(\partial \Omega)},$$

and

$$(II.1.55b) \quad \|g_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \|\phi\|_{H^s(\partial \Omega)}.$$

We rewrite Problem (II.1.46) as follows:

$$(II.1.56a) \quad \Delta W^e + z_e W^e = 0, \text{ in } \mathcal{O}_{e,h},$$

$$(II.1.56b) \quad \Delta W^c + z_c W^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}_c,$$

$$\forall (\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(II.1.56c) \quad \mathcal{L} W^m = -h^2 g,$$

with transmission conditions

$$(II.1.56d) \quad \frac{1}{\mu_c} \partial_n W^c \circ \Phi_0 = \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta W^m|_{\eta=0} - h^2 \partial_n B^c \circ \Phi_0,$$

$$(II.1.56e) \quad W^c \circ \Phi_0 = W^m|_{\eta=0},$$

$$(II.1.56f) \quad \frac{1}{\mu_e} \partial_n W^e \circ \Phi_1 = \frac{1}{h\mu_m} \partial_\eta W^m|_{\eta=1} + h^2 g_1,$$

$$(II.1.56g) \quad W^e \circ \Phi_1 = W^m|_{\eta=1}$$

and the boundary condition

$$(II.1.56h) \quad \partial_n W^e|_{\partial \Omega} = 0.$$

Now we are ready to perform  $L^2$  estimates as it has been performed in [59]. In  $\mathcal{O}_c$  parameterized by Euclidean coordinates, the  $L^2$  norm of a 0-form  $\beta$ , denoted by  $\|\beta\|_{L^2(\mathcal{O}_c)}$ , is equal to:

$$\|\beta\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{O}_c)} = \|\beta\|_{L^2(\mathcal{O}_c)},$$

and the  $L^2$  norm of its exterior derivative  $d\beta$ , denoted by  $\|du\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O}_c)}$  is equal to

$$\|d\beta\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O}_c)} = \|\nabla\beta\|_{L^2(\mathcal{O}_c)}.$$

In  $\mathcal{O}_{e,h}$  parameterized by Euclidean coordinates, the  $L^2$  norm of a 0-form  $\gamma$ , denoted by  $\|\gamma\|_{L^2(\mathcal{O}_{e,h})}$ , is equal to:

$$\|\gamma\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{O}_{e,h})} = \|\gamma\|_{L^2(\mathcal{O}_{e,h})},$$

and the  $L^2$  norm of its exterior derivative  $d\gamma$ , denoted by  $\|du\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O}_{e,h})}$  is equal to

$$\|d\gamma\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O}_{e,h})} = \|\nabla\gamma\|_{L^2(\mathcal{O}_{e,h})}.$$

We multiply equalities (II.1.56a), (II.1.56b) and (II.1.56c) respectively by the conjugates of  $W^e$ ,  $W^c$  and  $W^m$ . Using transmission conditions (II.1.56d)–(II.1.56g), we integrate by parts and we take the imaginary part of the result. To simplify the notations, we define  $\|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)}^2$  and  $\|dW\|_{\Lambda^1 L^2(\Omega)}^2$  as follows:

$$\begin{aligned} \|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)}^2 &= \|W^e\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{O}_{e,h})}^2 + \|W^m\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})}^2 + \|W^c\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{O}_c)}^2, \\ \|dW\|_{\Lambda^1 L^2(\Omega)}^2 &= \|dW^e\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O}_{e,h})}^2 + \|dW^m\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})}^2 + \|dW^c\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{O}_c)}^2, \end{aligned}$$

Defining

$$\sigma = \min(\Im(z_e), \Im(z_m), \Im(z_c)),$$

we obtain:

$$\begin{aligned} \sigma \|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{h^2}{\mu_c} \left| \int_{\Gamma_0} \partial_n B^c \overline{W^c} \, d\text{vol}_{\Gamma_0} \right| \\ &\quad + \frac{h^2}{\mu_m} \left| \int_0^{2\pi} (1 + h\kappa) g_1 \overline{W^e} \circ \Phi_1 \, d\theta \right| \\ &\quad + h^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} g \overline{W^m} \, d\eta \, d\theta \right|. \end{aligned}$$

Therefore, there exists an  $h$ -independent constant  $C$  such that:

$$\begin{aligned} (II.1.57) \quad \|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)}^2 &\leq Ch^{3/2} \left( \sqrt{h} \left( \|\partial_n B^c\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|g_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} |g|^2 \, d\eta \, d\theta \right)^{1/2} \right) (\|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)} + \|dW\|_{\Lambda^1 L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Observe that  $C$  depends on the dielectric parameters and on the geometry of the domains. One more time, we multiply equalities (II.1.56a)–(II.1.56b)–(II.1.56c) respectively by the conjugates of  $W^e$ ,  $W^c$  and  $W^m$ . Using transmission conditions we integrate by parts and we take the real part of the result. Defining

$$a = \max\{\Re(z_e), \Re(z_m), \Re(z_c)\},$$

We infer:

$$\begin{aligned} \|dW\|_{\Lambda^1 L^2(\Omega)}^2 &\leq a \|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)}^2 + \frac{h^2}{\mu_c} \left| \int_{\Gamma_0} \partial_n B^c \overline{W}^c \, d\text{vol}_{\Gamma_0} \right| \\ &\quad + \frac{h^2}{\mu_m} \left| \int_0^{2\pi} g_1 \overline{W}^e \circ \Phi_1 \, d\theta \right| + h^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} g \overline{W}^m \, d\eta \, d\theta \right|. \end{aligned}$$

Using (II.1.57) we infer that there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that:

$$(II.1.58) \quad \begin{aligned} \|W\|_{\Lambda^0 L^2(\Omega)} + \|dW\|_{\Lambda^1 L^2(\Omega)} &\leq Ch^{3/2} \left( \sqrt{h} \left( \|\partial_n B^c\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|g_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} |g|^2 \, d\eta \, d\theta \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Therefore, estimating the right-hand side of (II.1.58) with estimates (II.1.54) and (II.1.55), we infer that there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that:

$$\|W\|_{\Lambda^0 H^1(\Omega)} \leq Ch^{3/2} \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}.$$

Since we have respectively in the cylinder  $\mathcal{C}$

$$u^m - u_0^m - hu_1^m = W^m - h^2 B^m,$$

in  $\mathcal{O}_c$

$$u^c - u_0^c - hu_1^c = W^c - h^2 B^c,$$

and in  $\mathcal{O}_e$

$$u^e - u_0^e - hu_1^e = W^e,$$

we have proved Theorem II.1.1.  $\square$

REMARK II.1.8 (Neumann boundary condition imposed on the cell). *Consider the domain  $\Omega_h$  defined by:*

$$\Omega_h = \mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_h.$$

Let  $\gamma$  be in  $H^s(\partial\Omega_h)$ ,  $s > 7/2$ , and we denote by  $g$  and  $\mathfrak{g}$  the following function defined on the torus:

$$(II.1.59) \quad \forall \theta \in \mathbb{T}, \quad g(\theta) = \gamma \circ \Phi_1(\theta),$$

$$(II.1.60) \quad \forall x \in \partial\mathcal{O}, \quad \mathfrak{g}(x) = g \circ \Phi_0^{-1}(x).$$

Let  $u$  be the solution of the following problem:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla u \right) + qu &= 0, \text{ in } \Omega_h, \\ \partial_n u|_{\partial\Omega_h} &= \gamma, \text{ in } \Omega_h, \end{aligned}$$

Then, we have the following theorem:

THEOREM II.1.9. *We remember that  $h_0$  is defined in Theorem II.1.1. Let  $\gamma$  be in  $H^s(\partial\Omega_h)$ . We denote by  $u_0^c$ ,  $u_0^m$ ,  $u_1^c$ , and  $u_1^m$  the functions defined as follows:*

$$\begin{cases} \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, \text{ in } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0} = (\mu_c/\mu_m) \mathfrak{g}, \text{ on } \Gamma_0. \end{cases}$$

In the membrane, the field  $u_0^m$  is equal to:

$$\forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_0^m = u_0^c \circ \Phi_0(\theta).$$

The field  $u_1^c$  is the solution of the following problem in  $\mathcal{O}_c$ :

$$\begin{cases} \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ (\mu_m/\mu_c) \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} = (\mathfrak{K}\mathfrak{g} + \partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0}) + z_m u_0^c|_{\Gamma_0}, & \text{on } \Gamma_0. \end{cases}$$

In the membrane, we have:

$$\forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_1^m = \eta\gamma + u_1^c \circ \Phi_0.$$

Let  $W$  be the function defined on  $\Omega_h$  by:

$$W = \begin{cases} u - (u_0^c + h u_1^c), & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ u - (u_0^m \circ \Phi^{-1} + h u_1^m \circ \Phi^{-1}), & \text{in } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Then, there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that

$$\|W\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch^{3/2} \|\mathfrak{g}\|_{H^s(\partial\mathcal{O}_c)}.$$

REMARK II.1.10 (The case  $z_m = 0$  in  $\mathcal{O}_h$ ). In Theorem II.1.1, we can replace  $z_m$  by zero. The proof is then very similar, except that we need the following inequality.

PROPERTY II.1.11. Let  $h$  be as in Theorem II.1.1. Let  $u$  be a function of class  $C^1([0, 1] \times \mathbb{T})$ . In the cylinder  $[0, 1] \times \mathbb{T}$ , we use Euclidean metric (II.1.8) written in local coordinates defined at Section II.1.1, that is

$$h^2 d\eta + (1 + h\eta\kappa) d\theta.$$

Then, there exists an  $h$ -independent constant  $C$  such that

$$(II.1.61) \quad \|u\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})}^2 \leq C \left( \|du\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})}^2 + \int_0^{2\pi} |u(0, \theta)|^2 d\theta \right).$$

PROOF. Actually, according to the definition of  $h_0$  in (II.1.7) there exists two constants  $C_1$  and  $C_2$  depending on the domain  $\mathcal{O}$  such that the following inequalities hold:

$$(II.1.62a) \quad \|u\|_{\Lambda^0 L_m^2(\mathcal{C})}^2 \leq C_1 h \int_0^1 \int_0^{2\pi} |u(\eta, \theta)|^2 d\theta d\eta,$$

$$(II.1.62b) \quad \|du\|_{\Lambda^1 L_m^2(\mathcal{C})}^2 \geq C_2 \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\partial_\eta u(\eta, \theta)|^2}{h} + h |\partial_\theta u|^2 d\theta d\eta \right).$$

Let us denote by  $(\widehat{u})_k$  for  $k \in \mathbb{Z}$  the  $k^{\text{th}}$ -Fourier coefficient (with respect to  $\theta$ ) of  $u$ :

$$\widehat{u}_k = \int_0^\pi u(\theta) e^{-2i\pi k/L} d\theta.$$

Since  $(\widehat{\partial_\theta u})_k = 2i\pi k \widehat{u}_k$ , it is easy to see that:

$$\forall k \neq 0, \quad \int_0^1 |\widehat{u}_k(\eta)|^2 d\eta \leq 4\pi^2 \int_0^1 \left| (\widehat{\partial_\theta u})_k(\eta) \right|^2 d\eta.$$

Using the following equality

$$\widehat{u}_0(\eta) = \int_0^\eta (\widehat{\partial_\eta u})_0(s) ds + \widehat{u}_0(0),$$

we infer

$$\int_0^1 |\widehat{u}_0(\eta)|^2 d\eta \leq 2 \int_0^1 \left| \left( \widehat{\partial_\eta A^m} \right)_0(\eta) \right|^2 + 2|\widehat{u}_0(0)|^2 d\eta.$$

We deduce directly inequality (II.1.61).  $\square$

**II.1.6. Application to the biological cell.** In biological cells, the membrane is insulating (see Fear and Stuchly [26] or Sebastián *al.* [64]). This means that at mid frequencies, the ratio  $|z_m|/|z_c|$  and  $|z_m|/|z_e|$  are small compared to  $h$ . Actually, the thickness is of order  $10^{-3}$ , while  $|z_m|/|z_c|$  is about  $10^{-5}$  (see [59]). We say that we work at mid frequency since we suppose that  $z_c$  and  $z_e$  are of order 1. Moreover, the relative permeability is constant equal to 1, thus in the following, we suppose:

$$\mu_c = \mu_m = \mu_e = 1.$$

The following results show that the asymptotics obtained by replacing  $z_m$  by zero in the expansions of Theorem II.1.1 give a good approximation of the electric field in the biological cell. We have the following proposition.

PROPERTY II.1.12. *Let  $z_c$  and  $z_e$  be complex constants with strictly negative imaginary part.*

*We suppose that  $|z_m|$  tends to zero and that there exists a constant  $c > 0$  such that:*

$$(II.1.63) \quad 0 < -\frac{|z_m|}{\Im(z_m)} < c.$$

*Let  $z$  and  $\tilde{z}$  be such that:*

$$z = \begin{cases} z_e, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ z_m, & \text{in } \mathcal{O}_h, \\ z_c, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases} \quad \tilde{z} = \begin{cases} z_e, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ 0, & \text{in } \mathcal{O}_h, \\ z_c, & \text{in } \mathcal{O}_c. \end{cases}$$

*Let  $\phi$  in  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Let  $u$  the solution of the following problem:*

$$(II.1.64a) \quad \Delta u + zu = 0, \text{ in } \Omega,$$

$$(II.1.64b) \quad \partial_n u|_{\partial\Omega} = \phi, \text{ in } \Omega,$$

*and let  $v$  be such that*

$$(II.1.64c) \quad \Delta v + \tilde{z}v = 0, \text{ in } \Omega,$$

$$(II.1.64d) \quad \partial_n v|_{\partial\Omega} = \phi, \text{ in } \Omega.$$

*Then, there exists a constant  $C$  such that:*

$$\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq C|z_m| \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

PROOF. First, using hypothesis (II.1.63), we prove by classical argument that there exists an  $h$ -independent constant  $C$  such that:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Then, we just have to write the problem satisfies by  $u - v$  in local coordinates in the membrane. As usual, we multiply in by  $\overline{u - v}$  and we integrate by parts. Then, according to inequality (II.1.61) the following inequality holds:

$$\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq C|z_m| \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

which ends the proof of the theorem.  $\square$

Using Proposition II.1.12 and Remark II.1.10, we infer the following theorem.

**THEOREM II.1.13.** *Let  $h_0$  be in  $(0, 1)$  such that*

$$h_0 < \frac{1}{\|f\kappa\|_\infty}.$$

*Let  $h$  be in  $(0, h_0)$ .*

*Let  $z_c$  and  $z_e$  be complex constants with strictly negative imaginary part.*

*We suppose that  $|z_m| = o(h)$  and that there exists a constant  $c > 0$  such that:*

$$0 < -\frac{|z_m|}{\Im(z_m)} < c.$$

*Let  $\phi$  be in  $H^s(\partial\Omega)$ ,  $s > 7/2$ .*

*We denote by  $u$  the solution of the following problem:*

$$\begin{cases} \Delta u + zu = 0, & \text{in } \Omega, \\ \partial_n u = \phi, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

*We define  $(u_0^e, u_0^c)$ ,  $u_0^m$ ,  $(u_1^e, u_1^c)$ , and  $u_1^m$  are defined as follows.*

- *The 0<sup>th</sup> order terms. The electric fields  $u_0^e$  and  $u_0^c$  are solution of the following problem in  $\mathcal{O}_{e,h} \cup \mathcal{O}_c$ :*

$$(II.1.65a) \quad \begin{cases} \Delta u_0^e + z_e u_0^e = 0, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ \Delta u_0^c + z_c u_0^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases}$$

*with transmission conditions*

$$(II.1.65b) \quad u_0^c|_{\Gamma_0} = u_0^e|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.65c) \quad \partial_n u_0^e|_{\Gamma_0} = \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0},$$

*with Neumann boundary condition:*

$$(II.1.65d) \quad \partial_n u_0^e|_{\partial\Omega} = \phi.$$

*In the membrane, the field  $u_0^m$  is equal to:*

$$(II.1.66) \quad \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_0^m = u_0^c \circ \Phi_0(\theta).$$

- *The first order terms. The fields  $u_1^e$  and  $u_1^c$  are solution of the following problem in  $\mathcal{O}_{e,h} \cup \mathcal{O}_c$ :*

$$(II.1.67a) \quad \begin{cases} \Delta u_1^e + z_e u_1^e = 0, & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ \Delta u_1^c + z_c u_1^c = 0, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n u_1^e|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

*with the following transmission conditions*

$$(II.1.67b) \quad \partial_n u_1^c|_{\Gamma_0} - \partial_n u_1^e|_{\Gamma_0} = \partial_t^2 u_0^c|_{\Gamma_0} + \partial_n^2 u_0^e|_{\Gamma_0} + \mathfrak{K} \partial_n u_0^c|_{\Gamma_0},$$

$$(II.1.67c) \quad u_1^e|_{\Gamma_0} - u_1^c|_{\Gamma_0} = 0.$$

*Recall that  $\mathfrak{K}$  is the curvature of  $\partial\mathcal{O}_c$  defined by (II.1.6). In the membrane, we have:*

$$(II.1.68) \quad \forall(\eta, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad u_1^m = \eta \partial_n u_0^c \circ \Phi_0 + u_1^c \circ \Phi_0.$$

Let  $W$  be the function defined in  $\Omega$  by:

$$W = \begin{cases} u - (u_0^e + hu_1^e), & \text{in } \mathcal{O}_{e,h}, \\ u - (u_0^c + hu_1^c), & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ u - (u_0^m \circ \Phi^{-1} + hu_1^m \circ \Phi^{-1}), & \text{in } \mathcal{O}_h. \end{cases}$$

Then, there exists an  $h$ -independent constant  $C > 0$  such that

$$\|W\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( h^{3/2} + |z_m| \right) \|\phi\|_{H^s(\partial\Omega)}.$$

**Acknowledgments.** The author thanks very warmly Michelle Schatzman for reading carefully the manuscript and Michael Vogelius for his advice on the regularity result of Section II.1.4.

## II.2. Simulations numériques

Nous considérons un matériau électromagnétique constitué d'un milieu intérieur  $\mathcal{O}$  de taille  $L$  entouré d'une fine membrane  $\mathcal{O}_h$  d'épaisseur  $h$ . Bien qu'au théorème II.1.1, l'épaisseur de la membrane puisse varier en fonction de la coordonnée curviligne le long du bord du cytoplasme, dans les applications numériques nous ne considérons que des membranes d'épaisseur constantes.

Deux types de simulations sont présentées. Tout d'abord, nous supposons, que la condition aux limites est imposée sur le bord extérieur de la cellule. A l'aide du logiciel GetDP, nous calculons le champ électrique  $E$  dans une cellule allongée et nous le comparons aux asymptotiques.

Ensuite, nous plaçons la cellule dans un milieu ambiant. Dans le cas de la géométrie circulaire, des calculs en série de Fourier ont été effectués grâce au logiciel Scilab. Ils illustrent la convergence des asymptotiques pour la formulation diélectrique. Mais, en raison des conditions de transmission peu usuelles, les simulations numériques avec GetDP n'ont pas encore abouties et sont en cours. En particulier, des difficultés interviennent pour le calcul de  $E_1$ , en raison de la présence de saut de continuité à la fois sur les dérivées normales et sur le champ lui-même. Nous espérons obtenir des résultats rapidement. Notons que ce travail est effectué en collaboration avec Patrick Dular de l'Université de Liège.

### II.2.1. Condition de Neumann aux bords extérieurs de la cellule.

Dans un premier temps, nous illustrons le théorème II.1.8 par des simulations numériques avec le logiciel éléments finis GetDP [25] sur une cellule allongée (voir figure 2) identique à celle de la section I.3. Une description précise du maillage utilisé est faite dans cette précédente section.

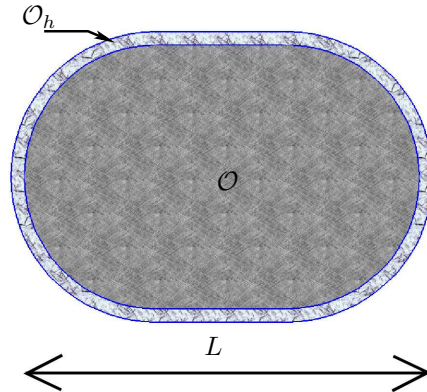


FIG. 2. Cellule allongée de taille  $L$ , constituée d'un cytoplasme  $\mathcal{O}$  entouré d'une membrane  $\mathcal{O}_h$  d'épaisseur  $h$ .



Comme au chapitre I, nous imposons une condition de Neumann sur le bord extérieur de la cellule. Plus précisément, nous nous donnons une donnée de Neumann  $\phi$  et nous considérons la solution  $E$  du problème ci-dessous :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_h} \operatorname{grad} E \right) + q_h E = 0 \text{ dans } \Omega_h = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_h,,$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \phi \text{ sur } \partial\Omega_h.$$

Rappelons que les fonctions  $\mathfrak{K}$  et  $\mathfrak{g}$  sont données par les équations (II.1.6) et (II.1.60). Les asymptotiques du théorème II.1.8 nous permettent de connaître le champ électrique dans le milieu intérieur sans avoir à tenir compte de la membrane, en résolvant deux problèmes successifs similaires uniquement dans le matériau central, à savoir :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_c} \operatorname{grad} E_0 \right) + q_c E_0 = 0 \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial n} = \frac{\mu_c}{\mu_m} \mathfrak{g} \text{ sur } \partial\mathcal{O},$$

pour  $E_0$  et, pour  $E_1$  :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_c} \operatorname{grad} E_1 \right) + q_c E_1 = 0 \text{ dans } \mathcal{O},,$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial n} = \frac{\mu_c}{\mu_m} (\partial_t^2 E_0|_{\partial\mathcal{O}} + \mathfrak{K}\mathfrak{g}) + \mu_c q_m E_0|_{\partial\mathcal{O}} \text{ sur } \partial\mathcal{O},$$

Nous rappelons que  $q_c$  et  $q_m$  sont définis par :

$$q_c = \omega^2 L^2 (\varepsilon_c - i\sigma_c/\omega),$$

$$q_m = \omega^2 L^2 (\varepsilon_m - i\sigma_m/\omega).$$

La fonction  $q_h$  est égale à  $q_c$  dans  $\mathcal{O}$  et à  $q_m$  dans  $\mathcal{O}_h$ . Etant donnés deux réels strictement positifs,  $\mu_c$  et  $\mu_m$ , nous définissons de manière analogue à  $q_h$  la fonction  $\mu_h$ . Elle est égale à  $\mu_c$  dans  $\mathcal{O}$  et à  $\mu_m$  dans  $\mathcal{O}_h$ .

Nous prenons  $\phi$  égale à :

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_h, \quad \phi(x, y) = \frac{2}{\mu_0} \sin(2\operatorname{Arctan}(y/x));$$

ainsi,

$$\forall (x, y) \in \partial\mathcal{O}, \quad \mathfrak{g}(x, y) = \frac{2}{\mu_0} \sin(2\operatorname{Arctan}(y/x)).$$

A la figure 3, nous présentons le champ électrique TM d'une cellule de taille  $L = 2$  dont l'épaisseur de la membrane est égale à  $2 \cdot 10^{-2}$ . Cette grosse cellule possède les caractéristiques électromagnétiques suivantes :

$$\begin{array}{ll} \sigma_c = 1 & \sigma_m = 10^{-5} \\ \varepsilon_c = 80\varepsilon_0 & \varepsilon_m = 10\varepsilon_0 \\ \mu_c = \mu_0 & \mu_m = \mu_0 \\ L = 2 & \omega = 10^8 \end{array}$$

Rappelons les valeurs de  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}.$$

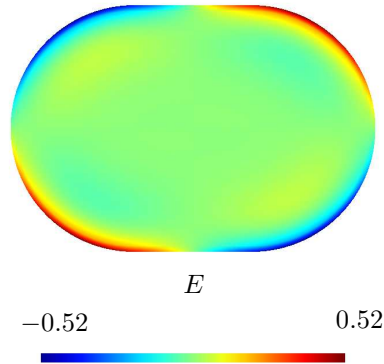


FIG. 3. Ligne d'isovaleurs du champ électrique dans une cellule allongée avec membrane isolante.

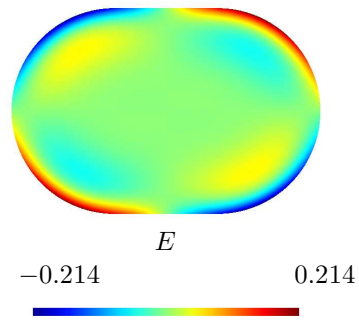
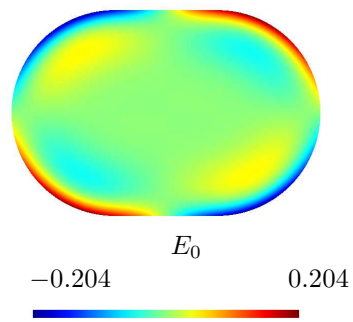
A la figure 4, nous traçons les isovaleurs du champ électrique Transverse Magnétique (TM)  $E$  dans le cytoplasme. Nous comparons le champ  $E$  calculé en maillant la membrane au champ  $E_0$  du développement asymptotique. Du fait des paramètres électromagnétiques, l'erreur commise n'est pas visible.

Comme à la section I.3, nous pouvons remarquer que le champ est piégé dans la membrane.

Pour illustrer les ordres de convergence des asymptotiques prouvés à la section II.1, nous choisissons un matériau particulier qui possède les caractéristiques suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_c = & 0.1 & \sigma_m = & 1 \\
 L = & 2 & \omega = & 10 \\
 \varepsilon_c = & 10^3 \varepsilon_0 & \varepsilon_m = & 10^4 \varepsilon_0 \\
 \mu_c = & \mu_0 & \mu_m = & 3\mu_0
 \end{array}$$

La figure 5 nous donne l'erreur commise en fonction de l'épaisseur  $h$  pour un milieu faiblement conducteur entouré d'une membrane plus conductrice. Remarquons, par exemple, que pour une épaisseur relative de  $5 \cdot 10^{-3}$ , l'erreur relative est de 10% à l'ordre 0 et de 1% à l'ordre 1.

(a) Champ TM  $E$ (b) Champ TM  $E_0$ FIG. 4. Isovaleurs des champs scalaires TM  $E$  et  $E_0$  dans le cytoplasme

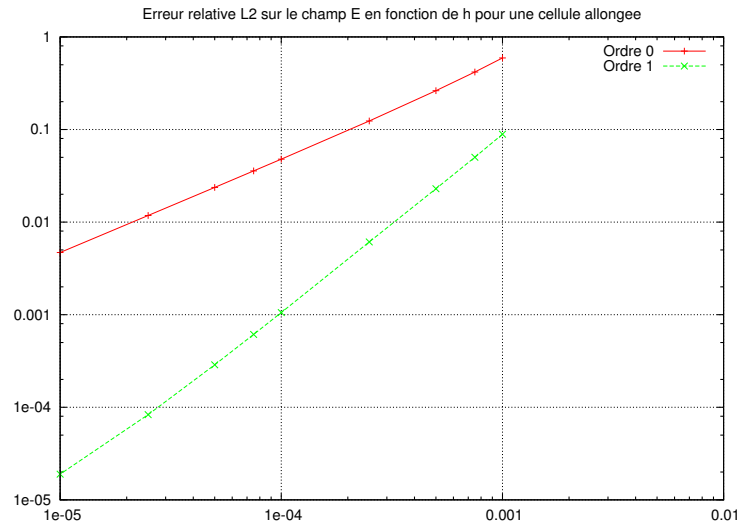


FIG. 5. Erreur sur le champ électrique en fonction l'épaisseur. Résultats numériques obtenus sur la cellule de la figure 3 par rapport à la solution avec maillage de la membrane.

**II.2.2. Cellule plongée dans un milieu ambiant.** Dans cette partie, nous considérons une cellule circulaire placée dans un milieu ambiant concentrique à cette cellule. Les paramètres électromagnétiques et géométriques sont donnés à la figure 6.

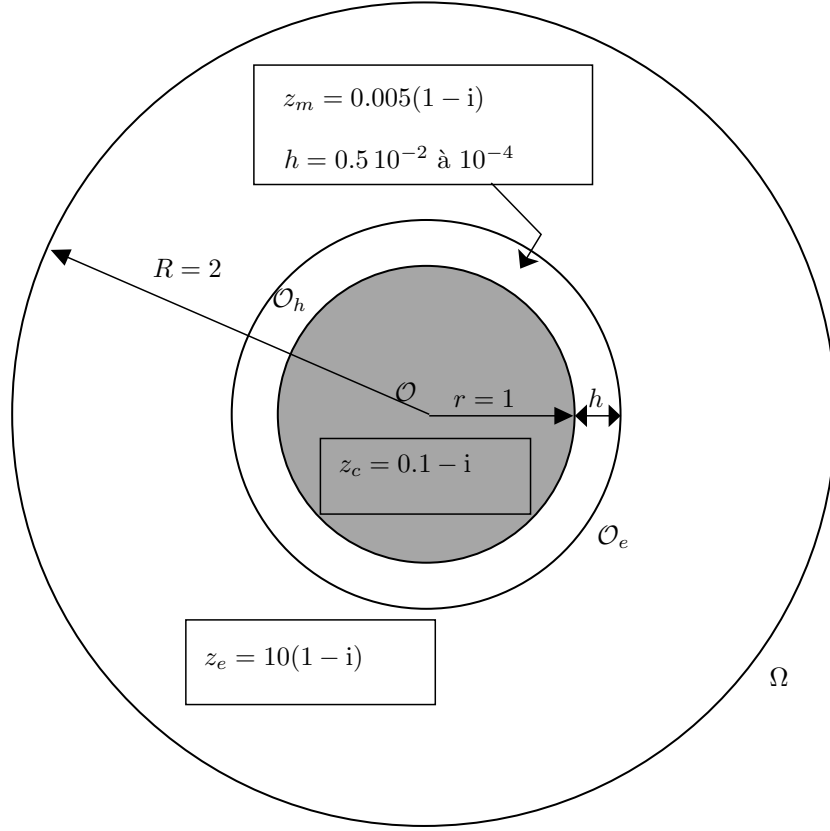


FIG. 6. Cellule circulaire placée dans un milieu ambiant.

Nous définissons les fonctions  $z$  et  $\tilde{z}$  comme suit :

$$z = \begin{cases} z_c, & \text{dans } \mathcal{O}, \\ z_m, & \text{dans } \mathcal{O}_h, \\ z_e, & \text{dans } \mathcal{O}_e \end{cases}$$

$$\tilde{z} = \begin{cases} z_c, & \text{dans } \mathcal{O}, \\ z_e, & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{O}. \end{cases}$$

Soit  $\phi$  une donnée aux bords du milieu extérieur à la cellule. Nous considérons le potentiel scalaire  $V$  solution du problème suivant :

$$\operatorname{div}(z \operatorname{grad} V) = 0, \text{ au sens faible,}$$

$$\partial_n V|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Le potentiel  $V_0$  est solution de :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\tilde{z} \operatorname{grad} V_0) &= 0, \\ \partial_n V|_{\partial\Omega} &= \phi.\end{aligned}$$

Le potentiel  $V_1$  est solution de :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\tilde{z} \operatorname{grad} V_1) &= 0, \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n V_1|_{\partial\Omega} &= 0,\end{aligned}$$

avec les conditions de transmissions suivantes :

$$\begin{aligned}z_c \partial V_1|_{\partial\mathcal{O}^-} - z_e \partial V_1|_{\partial\mathcal{O}^+} &= z_m \partial_t^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}^-} + z_e \partial_n^2 V_0|_{\partial\mathcal{O}^+} + z_c \partial_n V_0|_{\partial\mathcal{O}^-}, \\ V_1|_{\partial\mathcal{O}^-} - V_1|_{\partial\mathcal{O}^+} &= \left(1 - \frac{z_e}{z_m}\right) \partial_n V_0|_{\partial\mathcal{O}^+}.\end{aligned}$$

Nous avons effectué des simulations avec le logiciel Scilab. Nous avons pris comme condition aux limites de Neumann un polynôme trigonométrique de degré 4 généré aléatoirement (voir figure 7).

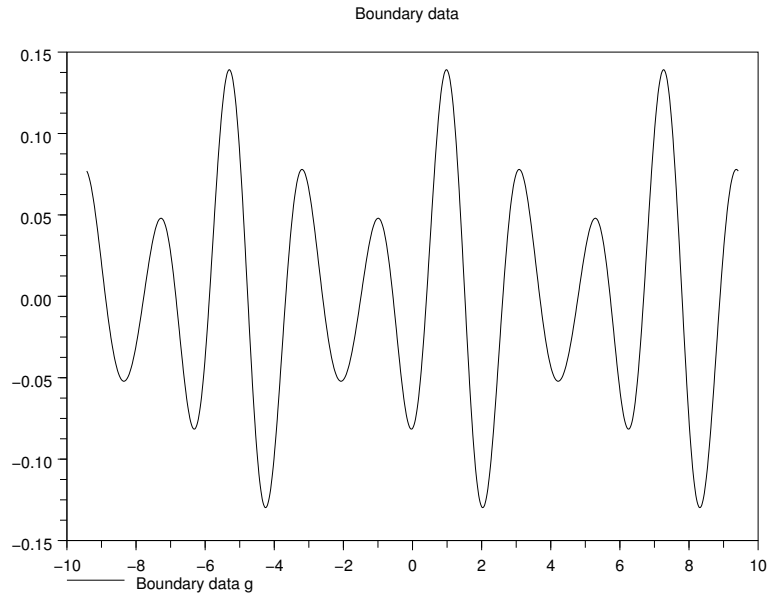


FIG. 7. Donnée de Neumann imposée sur  $\partial\Omega$ .

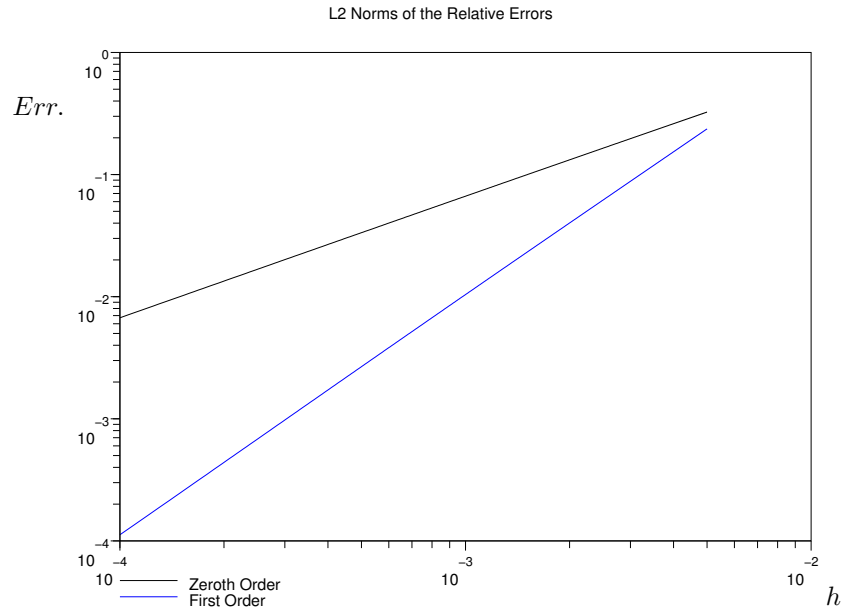


FIG. 8. Erreur sur le potentiel statique en fonction l'épaisseur. Résultats numériques obtenus sur la cellule de la figure 6.

## Méthode asymptotiques hautes fréquences

Ce dernier chapitre porte sur les méthodes asymptotiques hautes fréquences.

Dans une première partie, nous considérons un domaine semblable à notre cellule biologique. Nous supposons que les conductivités des milieux sont de la forme  $\sigma\omega^{1-\gamma}$ , pour  $\gamma \in [0, 1]$ , de telle sorte que lorsque  $\gamma = 1$ , nous nous placions dans le cas de milieu diélectrique classique et lorsque  $\gamma = 0$ , nous nous placions dans le cadre théorique de Barucq, Lafitte *et al.* [11], [43], [44]. Nous remplaçons la fine membrane par une condition d'impédance généralisée pseudodifférentielle sur le bord du milieu intérieur. A l'aide d'un calcul dans la variable de Fourier dans le cas du plan, nous explicitons le symbole des opérateurs pseudodifférentiels intervenant dans la condition d'impédance généralisée. Puis nous nous replaçons dans le cas d'une géométrie semblable à la cellule. Dans la membrane, nous faisons une factorisation formelle de l'opérateur de Helmholtz sous la forme

$$\left(\partial_x + \tilde{D}\right) \left(\partial_x - D\right),$$

où  $x$  est la variable normale. Dans le cas des ondes non-évanescents, le calcul symbolique est identique à celui de Lafitte [43]. La factorisation de l'opérateur de Helmholtz nous permet d'obtenir une condition d'impédance généralisée équivalente à la membrane. Nous énonçons un résultat d'existence et d'unicité, puis nous estimons l'erreur commise par cette approximation. Nous traitons les ondes évanescentes dans une géométrie circulaire. Nous construisons explicitement la condition d'impédance généralisée de la même manière que précédemment.

Les résultats de cette première partie sont difficilement implémentable. Il est nécessaire de simplifier et d'approcher les symboles des opérateurs obtenus pour travailler avec des opérateurs différentiels. Ce travail reste à effectuer.

La deuxième partie de ce chapitre est un travail effectué en collaboration avec Michael Vogelius, et qui traite de la diffraction à la pulsation  $\omega$  d'une onde par un disque de rayon  $\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\omega$  tend vers  $+\infty$  et  $\varepsilon\omega$  tend vers  $+\infty$ . L'objectif est de borné la trace du champ sur tout cercle de rayon  $R > 0$ . A l'aide d'une approche pseudo-différentielle, nous remplaçons l'inhomogénéité par une condition d'impédance généralisée sur le bord, puis nous bornons la trace du champ approché sur le bord de l'inhomogénéité. En estimant l'erreur commise entre l'approximation pseudodifférentielle et le champ réel, nous en déduisons le résultat. Des simulations illustrent les résultats obtenus.





### III.1. Condition d'impédance généralisée hautes fréquences dans un matériau à couche mince

CLAIR POIGNARD <sup>1</sup>

**Introduction.** Nous considérons un matériau hétérogène (voir Fig.1) composé d'un matériau diélectrique dénoté  $\mathcal{O}$ , de diamètre 1, représenté par un ouvert à bord lisse, auquel est collée une fine membrane dénotée  $\mathcal{O}_\delta$  d'épaisseur constante notée  $\delta$ . Les paramètres diélectriques de  $\mathcal{O}$  sont  $\varepsilon_c$ ,  $\sigma_c$  et  $\mu_c$ , respectivement pour la permittivité, la perméabilité et la conductivité. De manière similaire, nous munissons  $\mathcal{O}_\delta$  des paramètres diélectriques  $\varepsilon_m$ ,  $\sigma_m$  et  $\mu_m$ . Soit  $\gamma \in [0, 1]$ . Les permittivités complexes des deux matériaux sont égales respectivement pour  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_\delta$  à :

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_c(\omega) &= \varepsilon_c + i\sigma_c/\omega^\gamma, \\ \tilde{\varepsilon}_m(\omega) &= \varepsilon_m + i\sigma_m/\omega^\gamma,\end{aligned}$$

et nous définissons la fonction  $\tilde{\varepsilon}_\delta$  par :

$$\tilde{\varepsilon}_\delta(x, \omega) = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_c(\omega), & \text{si } x \in \mathcal{O}, \\ \tilde{\varepsilon}_m(\omega), & \text{si } x \in \mathcal{O}_\delta. \end{cases}$$

L'ensemble de la cellule est noté  $\Omega_\delta$ .

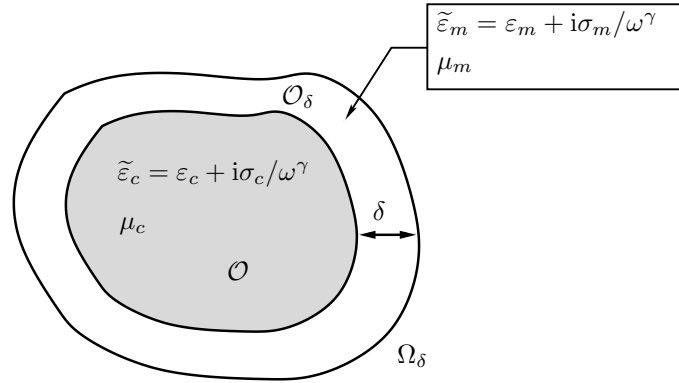


FIG. 1. Cellule bidimensionnelle.

Pour alléger les notations, lorsque que ce sera évident nous omettrons les variables dont dépendent les quantités étudiées.

Nous notons  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  les champs électrique et magnétique. Comme nous sommes en dimension 2,  $\mathcal{E}$  est un champ de vecteurs à deux composantes alors que  $\mathcal{H}$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Soit  $\mathcal{G}$  une fonction aussi régulière que nécessaire. Les équations de Maxwell considérées sont :

$$(III.1.69a) \quad \text{rot } \mathcal{E} = -i\omega\mu\mathcal{H},$$

$$(III.1.69b) \quad \text{rot } \mathcal{H} = i\omega\tilde{\varepsilon}_\delta\mathcal{E},$$

$$(III.1.69c) \quad \mathcal{H}|_{\partial\Omega_\delta} = \mathcal{G}.$$

<sup>1</sup>Je tiens à remercier Olivier Lafitte pour ses conseils avisés.

Le but de ce papier est de trouver une condition aux limites de  $\mathcal{O}$  satisfaite par  $\mathcal{H}$  (ou  $\mathcal{E}$  suivant le champ que l'on veut) qui nous permette de résoudre l'équation de Helmholtz découlant des équations de Maxwell (III.1.69) précédentes uniquement dans le domaine homogène intérieur. Cela revient à dire que nous voulons "concentrer" l'effet de la membrane sur le bord de  $\mathcal{O}$ , ce, lorsque la fréquence  $\omega$  tend vers  $+\infty$ .

A l'aide du  $\omega$ -calcul pseudodifférentiel, nous donnons une condition d'impédance généralisée aux bords du cytoplasme. De nombreux articles sur les conditions d'impédance généralisées ont traité de tels problèmes, notamment ceux d'Olivier Lafitte [43], [44]. Cependant, à notre connaissance, ils traitaient uniquement le cas d'un matériau fortement conducteur :  $\gamma = 0$ . Dans les applications physiques que nous avons rencontrées, les matériaux avaient un  $\gamma$  égal à 1, c'est pourquoi nous avons jugé utile d'étudier le cas  $\gamma \in [0, 1]$ . La décroissance de  $\tilde{\varepsilon}$  en  $\omega^\gamma$  complique le  $\omega$ -calcul de manière significative, faisant apparaître des ondes évanescentes, si la pulsation est "mal choisie".

L'article suivant est composé de deux parties. Dans une première partie, nous considérons une cellule plate infinie, ce qui nous permet de faire des calculs explicites et de déterminer l'opérateur pseudodifférentiel entrant en jeu dans la condition d'impédance généralisée. Dans la seconde partie, nous traitons du cas bidimensionnel, pour un ouvert simplement connexe  $\mathcal{O}$  de forme quelconque. Nous commençons par omettre les ondes évanescentes : le calcul  $\omega$ -pseudodifférentiel est semblable à [43] et [44]. Après avoir construit les opérateurs pseudodifférentiels apparaissant dans la condition d'impédance généralisée, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz avec la condition d'impédance généralisée imposée sur le bord du cytoplasme. Par des estimations d'énergie, nous majorons l'erreur commise en remplaçant la membrane par cette condition pseudodifférentielle.

Nous concluons en donnant la condition d'impédance généralisée dans le cas des ondes évanescentes pour une géométrie circulaire. En troisième partie, nous donnons un formulaire sur les formes différentielles qui nous permet d'écrire directement les équations considérées en coordonnées locales. Ces formules ne sont pas démontrées ici ; ce sont des applications directes des résultats de Doubrovine *et al.* [23].

**III.1.1. Heuristique : le cas plan.** Dans cette partie, le domaine  $\Omega_\delta$  est le demi-plan  $] -\infty, \delta] \times \mathbb{R}$ .

Nous notons  $(e_x, e_y)$  les composantes du champ électrique  $e$  et  $h$  le champ magnétique. Les champs  $e$  et  $h$  sont reliés par les équations de Maxwell en régime harmonique, écrites simplement en les variables  $(x, y)$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, \omega) \in \Omega_\delta \times [1, +\infty[, \\ \text{(III.1.70a)} \quad & \partial_x e_y - \partial_y e_x = -i\omega\mu h, \\ \text{(III.1.70b)} \quad & \partial_y h = i\omega\tilde{\varepsilon}_\delta e_x, \\ \text{(III.1.70c)} \quad & \partial_x h = -i\omega\tilde{\varepsilon}_\delta e_y. \end{aligned}$$

Nous prenons comme condition aux limites en  $x = \delta$ , c'est-à-dire aux bords de la membrane, la condition de Dirichlet sur le champ  $h$  :

$$h|_{x=\delta} = g, \text{ sur } \mathbb{R},$$

et pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , nous prenons une condition de radiation classique notée *CRC* :

pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $h$  satisfait *CRC*( $h$ ).

Nous notons *CRC*( $e$ ) la condition de radiation classique vérifiée par  $e$  qui découle de *CRC*( $h$ ) et des équations de Maxwell. Nous ne donnons pas explicitement cette condition de radiation, car notre objectif principal est de considérer un domaine borné, et donc la condition de radiation est remplacée par une condition aux bords.

Le but du calcul suivant est de trouver une condition d'impédance généralisée qui remplacerait l'effet de la membrane lorsque la fréquence  $\omega$  tend vers  $+\infty$  et l'épaisseur de la membrane  $\delta$  tend vers 0. Ce calcul explicite permet de comprendre l'approche à suivre dans le cas d'un matériau de forme quelconque.

III.1.1.a. *Dans la membrane.* Supposons connu  $h$  en  $x = 0$ . Nous posons

$$h|_{x=0} = h_0.$$

Nous donnons la relation liant la dérivée normale de  $h$  en  $x = 0$  et  $h_0$ . Des équations de Maxwell (III.1.70), nous dérivons l'équation de Helmholtz suivante, vérifiée par  $h$  :

$$\partial_x^2 h + \partial_y^2 h + \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m h = 0.$$

Notons  $\hat{h}$  la transformée de Fourier en  $y$ . Elle vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(III.1.71a) \quad d_x^2 \hat{h} + (\omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m - \eta^2) \hat{h} = 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$(III.1.71b) \quad \hat{h}|_{x=\delta} = \hat{g}, \quad \hat{h}|_{x=0} = \hat{h}_0.$$

Soit  $\nu$  la racine carrée complexe de  $(\eta/\omega)^2 - \mu \tilde{\varepsilon}_m$  avec partie réelle positive :

$$\nu(\eta, \omega) = \sqrt{(\eta/\omega)^2 - \mu \tilde{\varepsilon}_m}, \quad \Re(\nu(\eta, \omega)) > 0.$$

Nous obtenons, pour  $0 \leq x \leq \delta$  :

$$(III.1.72) \quad \hat{h} = B^+ \sinh(x\omega\nu(\eta, \omega)) + B^- \cosh(x\omega\nu(\eta, \omega)).$$

Notons que  $B^+$  et  $B^-$  dépendent des variables  $y, \eta$  et  $\omega$ , mais nous omettons de le noter pour alléger les formules. Les conditions aux limites (III.1.71b) impliquent :

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \left( \hat{g} - \hat{h}_0 \cosh(\delta\omega\nu(\eta, \omega)) \right) \frac{\sinh(x\omega\nu(\eta, \omega))}{\sinh(\delta\omega\nu(\eta, \omega))} + \hat{h}_0 \cosh(x\omega\nu(\eta, \omega)), \\ &= \hat{g} \frac{\sinh(x\omega\nu(\eta, \omega))}{\sinh(\delta\omega\nu(\eta, \omega))} - \hat{h}_0 \frac{\sinh((x-\delta)\omega\nu(\eta, \omega))}{\sinh(\delta\omega\nu(\eta, \omega))}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la relation suivante en  $x = 0^+$  :

$$d_x \hat{h}|_{x=0^+} + \frac{\omega\nu(\eta, \omega)}{\tanh(\delta\omega\nu(\eta, \omega))} \hat{h}_0 = \frac{\omega\nu(\eta, \omega)}{\sinh(\delta\omega\nu(\eta, \omega))} \hat{g}.$$

Notons  $c_0$  le produit  $\delta\omega$  ; les continuités en  $x = 0$  de  $h$  et  $\partial_x h$  impliquent alors :

$$(III.1.73) \quad \delta d_x \hat{h}|_{x=0} + c_0 \frac{\nu(\eta, \omega)}{\tanh(c_0\nu(\eta, \omega))} \hat{h}|_{x=0} = \frac{c_0\nu(\eta, \omega)}{\sinh(c_0\nu(\eta, \omega))} \hat{g}.$$

Des équations de Maxwell (III.1.70) et de la condition (III.1.73) en  $x = 0$  sur  $\widehat{h}$ , nous déduisons la condition en  $x = 0$  sur le champ électrique  $(e_x, e_y)$ . Nous notons  $\mathcal{F}(\partial_x e_y - \partial_y e_x)$  la transformée de Fourier de  $\partial_x e_y - \partial_y e_x$ . Nous obtenons :

(III.1.74)

$$\delta \mathcal{F}(\partial_x e_y - \partial_y e_x)|_{x=0} - \mu \widetilde{\varepsilon}_m \frac{c_0 \tanh(c_0 \nu(\eta, \omega))}{\nu(\eta, \omega)} \widehat{e}_y|_{x=0} = -i \frac{c_0 \mu}{\cosh(c_0 \nu(\eta, \omega))} \widehat{g}.$$

III.1.1.b. *Equations de Helmholtz à résoudre dans le milieu intérieur  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ .*

Nous définissons les opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}_m$ ,  $\mathfrak{A}_m$ ,  $\mathcal{B}_m$  et  $\mathfrak{B}_m$  à l'aide de leur symbole respectif  $\sigma_{\mathcal{A}_m}$ ,  $\sigma_{\mathfrak{A}_m}$ ,  $\sigma_{\mathcal{B}_m}$  et  $\sigma_{\mathfrak{B}_m}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}_m}(y, \eta, \omega) &= c_0 \frac{\nu(\eta, \omega)}{\tanh(c_0 \nu(\eta, \omega))}, \\ \sigma_{\mathfrak{A}_m}(y, \eta, \omega) &= \frac{c_0 \nu(\eta, \omega)}{\sinh(c_0 \nu(\eta, \omega))}, \\ \sigma_{\mathcal{B}_m}(y, \eta, \omega) &= \frac{c_0 \tanh(c_0 \nu(\eta, \omega))}{\nu(\eta, \omega)}, \\ \sigma_{\mathfrak{B}_m}(y, \eta, \omega) &= \frac{c_0}{\cosh(c_0 \nu(\eta, \omega))}. \end{aligned}$$

Nous rappelons que l'action d'un opérateur pseudodifférentiel  $\mathcal{P}$  de symbole  $\sigma_P$  sur une fonction  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  est donnée par la formule :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}(\phi)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sigma_P(y, \eta) \phi(s) e^{i\eta(y-s)} ds d\eta.$$

La conditions aux bords de  $\partial\mathcal{O}$  (III.1.73) nous permet de déterminer entièrement le champ magnétique dans le milieu intérieur sans tenir compte de la membrane. En effet,  $h$  satisfait à l'équation de Helmholtz

$$(III.1.75a) \quad \Delta h + \mu \widetilde{\varepsilon}_c \omega^2 h = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(III.1.75b) \quad \frac{c_0}{\omega} \partial_x h|_{x=0} + \mathcal{A}_m(h|_{x=0}) = \mathfrak{A}_m(g),$$

$$(III.1.75c) \quad h \text{ satisfait } CRC(h) \text{ en } -\infty.$$

Quant au champ électrique, il est solution dans  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  de l'équation suivante :

$$(III.1.76a) \quad \Delta e + \mu \widetilde{\varepsilon}_c \omega^2 e = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(III.1.76b) \quad \frac{c_0}{\omega} (\partial_x e_y - \partial_y e_x)|_{x=0} + \mu \widetilde{\varepsilon}_m \mathcal{B}_m(e_y|_{x=0}) = -i\mu \mathfrak{B}_m(g),$$

$$(III.1.76c) \quad e \text{ satisfait } CRC(e) \text{ en } -\infty.$$

**III.1.2. Le cas bidimensionnel.** Dans cette partie, nous considérons un matériau plat de forme quelconque (voir Fig. 2), à bord lisse. Nous suivons la même approche que la section III.1.1. Ainsi, en supposant le champ magnétique connu sur le bord du milieu intérieur, nous déduisons une relation d'impédance généralisée entre la dérivée normale de  $H$  et  $H$  sur le bord intérieur, nous obtenons ainsi une condition d'impédance généralisée équivalente à la membrane sur le bord du milieu intérieur  $\mathcal{O}$ . Nous allons utiliser le  $\omega$ -calcul développé dans [43]. Cependant avant toute chose, il nous faut écrire les équations de Maxwell en les coordonnées locales dans la membrane et faire une remise à l'échelle, afin d'obtenir une forme simple

des équations considérées et de travailler avec des coordonnées qui sont dans un domaine indépendant de  $\delta$ .

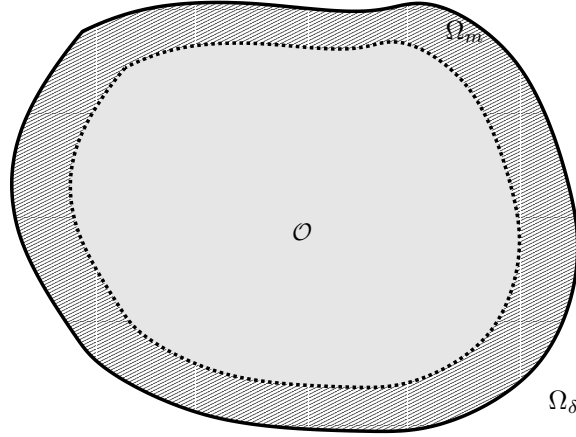


FIG. 2. La cellule 2D de géométrie quelconque.

Soit  $G$  une 1-forme définie sur  $\partial\Omega_h$ , aussi régulière que nécessaire. Le champ électrique est représenté par la 1-forme  $E$  tandis que le champ magnétique est la 2-forme  $H$ . Nous considérons les équations de Maxwell écrites à l'aide des opérateurs  $d$  et  $\delta$  (voir les livres de Doubrovine *et al.* [23] ou Flanders [28], ainsi que l'article de Warnick et Arnold [75]), à savoir :

$$(III.1.77) \quad dE = -i\omega\mu H, \quad \delta H = i\omega\tilde{\varepsilon}E,$$

avec la donnée aux bords de la cellule :

$$\text{int}(N)H = G.$$

Nous obtenons l'équation de Helmholtz sur  $H$  :

$$(III.1.78a) \quad d\left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\delta H\right) + \omega^2\mu H = 0,$$

$$(III.1.78b) \quad \text{int}(N)H = G.$$

III.1.2.a. *Des équations de Maxwell aux équations de Helmholtz considérées dans la membrane.* Nous supposons la 1-forme  $H$  connue sur le bord intérieur de la membrane. Quitte à effectuer une remise à l'échelle, nous supposons la longueur du bord du milieu intérieur égale à 1. Nous avons choisi de travailler avec des coordonnées locales et des opérateurs pseudodifférentiels sur le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Puisque  $\partial\mathcal{O}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , il existe  $\Psi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\Psi$  paramétrise  $\partial\mathcal{O}$

$$\forall y \in \mathbb{T}, \quad |\Psi'(y)| = 1.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\partial\mathcal{O} = \{\Psi(y), y \in \mathbb{T}\},$$

et

$$\partial\Omega_h = \{\Psi(y) + \delta n(y), y \in \mathbb{T}\},$$

où  $n(y)$  est la normale unitaire extérieure à  $\partial\mathcal{O}$ . Puisque la membrane est d'épaisseur constante  $\delta$ , nous la paramétrisons comme suit :

$$\mathcal{O}_\delta = \{\Psi(y) + \delta x n(y), (x, y) \in ]0, 1[ \times \mathbb{T}\}.$$

Posons

$$(III.1.79) \quad \Phi(\eta, \theta) = \Psi(\theta) + \delta \eta n(\theta).$$

Nous notons

$$(III.1.80) \quad \Phi_0 = \Phi|_{x=0}, \quad \Phi_1 = \Phi|_{x=1}.$$

La courbure du bord de la cellule est noté  $\kappa$ . Nous supposons que l'épaisseur  $\delta$  de la membrane est assez petite afin que l'on puisse utiliser les coordonnées locales, c'est-à-dire que nous supposons que  $\delta$  vérifie l'inégalité suivante :

$$0 < \delta < \frac{1}{\sup_{y \in \partial\Omega_\delta} |\kappa(y)|}.$$

Pour  $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$ , la métrique issue de la métrique euclidienne considérée est :

$$(III.1.81) \quad \delta^2 dx^2 + (1 + \delta\kappa(y)x)^2 dy^2,$$

et nous notons, pour  $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}$  :

$$(III.1.82) \quad \sqrt{\mathcal{G}(x, y)} = \delta(1 + \delta\kappa(y)x), \quad \alpha(x, y) = \delta/(1 + \delta\kappa(y)x)$$

Le champ électrique est représenté par la 1-forme  $E$  tandis que le champ magnétique est la 2-forme  $H$  :

$$\begin{aligned} E &= e_x dx + e_y dy, \\ H &= h\sqrt{\mathcal{G}} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

La normale extérieure  $N$  est :

$$N = dx.$$

Nous posons de plus :

$$G = g \alpha|_{x=1} dy, \quad \text{et } \text{int}(N)H|_{x=0} = h_0 dy.$$

Les équations de Maxwell (III.1.77) se récrivent sous la forme :

$$(III.1.83a) \quad \partial_x e_y - \partial_y e_x = -i\omega\mu h \sqrt{\mathcal{G}(x, y)},$$

$$(III.1.83b) \quad \alpha \partial_y h = i\omega \tilde{\varepsilon}_m e_x,$$

$$(III.1.83c) \quad \frac{1}{\alpha} \partial_x h = -i\omega \tilde{\varepsilon}_m e_y,$$

avec les conditions aux bords :

$$(III.1.83d) \quad h|_{x=0} = h_0, \quad h|_{x=1} = g.$$

Il suffit d'appliquer directement les égalités données dans le formulaire à la Section III.1.4 dans le cas de la métrique (III.1.81).

Le système d'équations (III.1.83) conduit directement à l'équation aux dérivées partielles en  $h$  suivante, pour  $(x, y) \in (0, 1) \times \mathbb{T}$  :

$$(III.1.84a) \quad \partial_x \left( \frac{1}{\alpha} \partial_x h \right) + \partial_y (\alpha \partial_y h) + \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m \sqrt{\mathcal{G}} h = 0,$$

avec les conditions aux bords de la membrane :

$$(III.1.84b) \quad h|_{x=0} = h_0, \quad h|_{x=1} = g.$$

qui est l'équation de Helmholtz écrite dans les coordonnées locales. La connaissance du champ  $H$  entraîne directement celle de  $E$ , via les égalités (III.1.83b)–(III.1.83c).

En supposant connu le champ  $h$  en  $x = 0$ , nous allons exprimer la dérivée normale  $\partial_x h|_{x=0}$  de  $h$  en  $x = 0$ , afin d'obtenir une condition aux limites du milieu intérieur similaire à la condition aux limites (III.1.75b). L'outil analytique est le calcul pseudodifférentiel, cependant, comme nous nous intéressons à l'asymptotique  $\omega \rightarrow +\infty$ , nous ne pouvons faire du calcul pseudodifférentiel classique, car alors l'opérateur  $\omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m \text{Id}$  bien que d'ordre 0 dans le calcul pseudodifférentiel classique ne peut être négligé. Nous allons devoir considérer la multiplication par  $\omega^s$  comme un opérateur d'ordre  $s$ . C'est le  $\omega$ -calcul (voir l'article de O. Lafitte [43]). Cependant, nous voulons garder la périodicité des symboles. Nous allons donc utiliser la théorie des opérateurs pseudodifférentiels sur le tore, introduits par Agranovič [4] puis développée par Melo, Saranen, Turunen et Vainniko (voir les articles [63], [74], [73] et [49]). La difficulté de l'analyse qui suit provient du fait que la partie imaginaire de  $\tilde{\varepsilon}_m$  est égale à  $\sigma_m/\omega^\gamma$ , avec  $\gamma \in [0, 1]$ .

III.1.2.b. *Factorisation formelle de l'opérateur de Helmholtz.* Dans cette section, nous factorisons formellement l'opérateur de Helmholtz. L'équation (III.1.84a) se réécrit, pour  $(x, y) \in (0, 1) \times \mathbb{T}$  :

$$(III.1.85) \quad \frac{1}{\alpha^2} \partial_x^2 h + \partial_y^2 h + (1 + \delta \kappa x)^2 \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m h + \frac{\kappa}{\alpha} \partial_x h - \alpha \kappa' x \partial_y h = 0.$$

Posons :

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad \beta(x, y) = 1 + \delta \kappa(y)x.$$

Nous rappelons la formule suivante :

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad \alpha(x, y) = \delta / \beta(x, y).$$

REMARQUE III.1.1. *Si nous posons :*

$$\tilde{h} = \sqrt{\beta} h,$$

nous obtenons :

$$\frac{1}{\delta^2} \partial_x^2 \tilde{h} + \Psi \tilde{h} = 0,$$

où  $\Psi$  est défini par

$$\Psi u = \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \partial_y \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^2 u + \left( \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m \sqrt{\beta} + \frac{\kappa^2}{4\beta^2} \right) u.$$

Cependant cette transformation ne simplifie les calculs ultérieurs c'est pourquoi nous avons préféré utiliser (III.1.85).



Nous notons  $\mathcal{L}$  l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{\delta^2} \partial_x^2 + \frac{1}{\beta^2} (\partial_y^2 + \omega^2 \beta^2 \mu \tilde{\varepsilon}_m) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\kappa}{\delta} \partial_x - \frac{\delta \kappa' x}{\beta} \partial_y \right). \end{aligned}$$

Nous allons chercher deux opérateurs pseudodifférentiels  $D$  et  $\tilde{D}$  tels que  $\mathcal{L}$  se factorise sous la forme :

$$\mathcal{L} = \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + \tilde{D} \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x - D \right) + R_0,$$

où  $R_0$  sera un opérateur d'ordre supposé strictement inférieur à 1, de norme bornée indépendamment de  $\omega$ .

Le symbole  $\sigma_{\mathcal{L}}$  de  $\mathcal{L}$  vaut :

$$\begin{aligned} \forall \omega \geq 1, \forall (x, \tau, y, k) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z}, \\ \sigma_{\mathcal{L}}(\omega, x, \tau, y, k) &= -\frac{\tau^2}{\delta^2} - \frac{k^2}{\beta^2} (1 - \mu \tilde{\varepsilon}_m \beta^2 \omega^2 / k^2) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \left( i\tau \frac{\kappa}{\delta} - ik \frac{\delta \kappa' x}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous posons :

$$\begin{aligned} q_m &= \mu \tilde{\varepsilon}_m, \\ &= a + ib/\omega^\gamma. \end{aligned}$$

Nous construisons les opérateurs  $D$  et  $\tilde{D}$  de la factorisation de  $\mathcal{L}$  de manière inductive.

Pour  $k = 0$ , nous avons la factorisation exacte suivante de  $\sigma_{\mathcal{L}}|_{k=0}$  :

$$\begin{aligned} \forall \omega \geq 1, \forall (x, \tau, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ \sigma_{\mathcal{L}}|_{k=0} &= \left( \frac{i\tau}{\delta} + \frac{1}{2\beta} \left( \kappa + \sqrt{\kappa - 4q_m \beta^2 \omega^2} \right) \right) \left( \frac{i\tau}{\delta} \right. \\ \text{(III.1.86)} \quad &\quad \left. - \frac{1}{2\beta} \left( -\kappa + \sqrt{\kappa - 4q_m \beta^2 \omega^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Notons  $\nu$  la racine carrée, de partie réelle positive, du nombre complexe  $1 - q_m \omega^2 / k^2$  :

$$\begin{aligned} \forall \omega \geq 1, \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \\ \nu(\omega, x, y, k) &= \sqrt{1 - q_m \beta^2 \omega^2 / k^2}, \quad \Re(\nu) \geq 0. \end{aligned}$$

pour  $k = 0$ , nous posons

$$\nu(\omega, x, y, 0) = \sqrt{\kappa - 4q_m \beta^2 \omega^2}.$$

En observant que :

$$\frac{\tau^2}{\delta^2} + \frac{k^2}{\beta^2} (1 - \mu \tilde{\varepsilon}_m \beta^2 \omega^2 / k^2) = \left( \frac{i\tau}{\delta} + \frac{|k|}{\beta} \nu \right) \left( \frac{i\tau}{\delta} - \frac{|k|}{\beta} \nu \right),$$

nous définissons  $d_1$  comme suit,

$$\text{(III.1.87)} \quad d_1(\omega, x, y, k) = \begin{cases} \nu(\omega, x, y, 0)/(2\beta), & \text{si } k = 0, \\ (|k|/\beta)\nu(\omega, x, y, k), & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Nous notons  $D_1 = \text{Op}(d_1)$ , l'opérateur associé à  $d_1$ .

- Factorisation du premier ordre.

Soit  $R_1$  l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathcal{L} - \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + D_1 \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x - D_1 \right), \\ &= \mathcal{L} - \left( \frac{1}{\delta^2} \partial_x^2 - \frac{1}{\delta} [\partial_x, D_1] - D_1^2 \right). \end{aligned}$$

Calculons le symbole  $\sigma_{D_1^2}$  de l'opérateur  $D_1^2$  en  $(x, \omega)$ . Soit  $m \in \mathbb{Z}^*$ , et  $y \in \mathbb{T}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{D_1^2}(x, y, m, \omega) &= e^{-imy} D_1(D_1 e^{imy}), \\ &= \frac{1}{4\pi^2} e^{-imy} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d_1(x, y, l, \omega) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d_1(x, s, k, \omega) \right. \\ &\quad \left. e^{imt} e^{ik(s-t)} dt \right) e^{il(y-s)} ds. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre :

$$\begin{aligned} \sigma_{D_1^2} &= d_1^2(x, y, m, \omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \left( d_1(x, y, l + m, \omega) \right. \\ &\quad \left. - d_1(x, y, m, \omega) \right) \int_0^{2\pi} d_1(x, s, m, \omega) e^{il(y-s)} ds. \end{aligned}$$

Posons

$$(III.1.88) \quad r_1(x, y, m, \omega) = \sigma_{D_1^2} - d_1^2.$$

Le symbole de  $R_1$  est égal à :

$$(III.1.89) \quad \sigma_{R_1} = \frac{1}{\beta} \left( i\tau \frac{\kappa}{\delta} - ik \frac{\delta \kappa' x}{\beta} \right) - \frac{\kappa(y) d_1}{\beta} + r_1.$$

- Factorisation du second ordre.

Définissons le symbole  $s_1$  par :

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_{R_1} - i\tau \frac{\kappa}{\delta\beta}, \\ (III.1.90) \quad &= -ik \frac{\delta\kappa'x}{\beta^2} - \frac{\kappa(y)d_1}{\beta} + r_1. \end{aligned}$$

Maintenant, nous cherchons à construire deux opérateurs  $D_0$  et  $\tilde{D}_0$  (nous notons  $d_0$  et  $\tilde{d}_0$  leur symbole respectif) tels que l'opérateur  $R_0$  défini par :

$$\begin{aligned} R_0 &= \mathcal{L} - \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + (D_1 + \tilde{D}_0) \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x - (D_1 + D_0) \right), \\ (III.1.91) \quad &= R_1 + (D_0 + \tilde{D}_0) D_1 + \frac{1}{\delta} (D_0 - \tilde{D}_0) \partial_x + [D_1, D_0] \\ &+ \frac{1}{\delta} [\partial_x, D_0] + \tilde{D}_0 D_0, \end{aligned}$$

soit un opérateur que nous espérons d'ordre strictement inférieur à  $R_1$ . Pour ce faire, nous imposons, pour  $k \neq 0$  :

$$\begin{aligned} d_0|_{k \neq 0} - \tilde{d}_0|_{k \neq 0} &= -\frac{\kappa}{\beta}, \\ d_0|_{k \neq 0} + \tilde{d}_0|_{k \neq 0} &= -\frac{s_1}{d_1}, \end{aligned}$$

où  $s_1$  est défini en (III.1.90). En  $k = 0$ , la factorisation (III.1.86) nous donne directement :

$$\begin{aligned} d_0|_{k=0} &= -\kappa, \\ \tilde{d}_0|_{k=0} &= \kappa, \end{aligned}$$

et pour  $k \neq 0$ , nous obtenons :

$$(III.1.92a) \quad \tilde{d}_0|_{k \neq 0} = -\frac{s_1}{2d_1} + \frac{\kappa}{2\beta},$$

$$(III.1.92b) \quad d_0|_{k \neq 0} = -\frac{s_1}{2d_1} - \frac{\kappa}{2\beta}.$$

Définissons les symboles  $d$  et  $\tilde{d}$  comme suit :

$$(III.1.93a) \quad d(x, y, k, \omega) = d_1(x, y, k, \omega) + d_0(x, y, k, \omega),$$

$$(III.1.93b) \quad \tilde{d}(x, y, k, \omega) = d_1(x, y, k, \omega) + \tilde{d}_0(x, y, k, \omega),$$

et posons :

$$(III.1.93c) \quad D = \text{Op}(d), \quad \tilde{D} = \text{Op}(\tilde{d}).$$

Nous avons ainsi factorisé l'opérateur  $\mathcal{L}$  sous la forme voulue :

$$(III.1.94) \quad \mathcal{L} = \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + D_1 + D_0 \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x - D_1 - \tilde{D}_0 \right) + R_0,$$

En vertu de (III.1.91) et de la définition des symboles  $d_1$ ,  $d_0$  et  $\tilde{d}_0$  donnés respectivement en (III.1.87) et (III.1.92), le symbole de  $R_0$  est égal à :

$$(III.1.95) \quad \sigma_{R_0} = \sigma_{(D_0 + \tilde{D}_0)D_1} + s_1 + \sigma_{[D_1, D_0]} + \frac{1}{\delta} \partial_x d_0 + \sigma_{\tilde{D}_0 D_0}.$$

Les opérateurs  $D$  et  $\tilde{D}$  sont des opérateurs pseudodifférentiels qui satisfont à l'égalité (III.1.94). Dans le cas d'un matériau fortement conducteur, où la partie imaginaire de  $q_m$  ne décroît pas, il a été démontré que l'opérateur  $R_0$  est d'ordre 0 dans le  $\omega$ -calcul (voir [43]). Cependant, dans ce papier, nous considérons  $q_m$  de la forme

$$q_m = a + ib/\omega^\gamma.$$

Cette décroissance de la partie imaginaire complique le  $\omega$ -calcul pseudodifférentiel car il fait apparaître des puissances non entières de  $k$  et  $\omega$  dans les symboles. C'est pourquoi nous avons choisi, dans un premier temps, de présenter une factorisation formelle de l'opérateur de Helmholtz, sans estimation sur les symboles.

Dans la section suivante, nous nous plaçons dans un cadre particulier qui nous permet d'éviter les ondes évanescentes. Nous donnons les estimations sur les symboles, et nous prouvons que l'opérateur  $R_0$  de la factorisation (III.1.94) est bien d'ordre 0. Enfin, nous obtenons une condition d'impédance généralisée.

Dans le cas où la pulsation  $\omega$  ne satisfait plus à l'hypothèse III.1.3 qui suit, le  $\omega$ -calcul n'est plus utilisable tel quel, comme nous l'expliquerons par la suite : nous nous plaçons alors dans le cas d'un cercle et nous faisons des calculs explicites par transformation de Fourier. Le cas de la géométrie quelconque pour de telles pulsation n'est pas traité ici.

*REMARQUE III.1.2. Lorsque  $\gamma$  est égal à 0, nous pouvons construire une factorisation de la forme de l'égalité (III.1.94) modulo des opérateurs aussi réguliers que nécessaire, de manière inductive. Pour cela, nous définissons la suite de symboles  $(d_{-j})_{j \geq 1}$  par :*

$$(III.1.96a) \quad d_{-1} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{R_0}}{d_1 + (d_0 + \tilde{d}_0)/2},$$

nous posons

$$(III.1.96b) \quad D_{-1} = \text{Op}(d_{-1}).$$

Pour  $j \geq 2$ , nous définissons

$$(III.1.96c) \quad \mathcal{Q}_{1-j} = D_1 + D_0 + D_{-1} + \cdots + D_{1-j},$$

$$(III.1.96d) \quad \tilde{\mathcal{Q}}_{1-j} = D_1 + \tilde{D}_0 + D_{-1} + \cdots + D_{1-j},$$

$$(III.1.96e) \quad R_{1-j} = \mathcal{L} - \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + \mathcal{Q}_{1-j} \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + \tilde{\mathcal{Q}}_{1-j} \right),$$

et nous posons :

$$(III.1.96f) \quad d_{-j} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{R_{1-j}}}{d_1 + (d_0 + \tilde{d}_0)/2 + d_{-1} + \cdots + d_{1-j}},$$

et :

$$(III.1.96g) \quad D_{-j} = \text{Op}(d_{-j}).$$

Nous avons  $d_1$  d'ordre 1,  $d_0$  et  $\tilde{d}_0$  d'ordre strictement inférieur à 1 et par récurrence, des formules (III.1.96), nous obtenons que pour chaque entier  $j \geq 1$ , le symbole  $d_{-j}$

est d'ordre strictement inférieur à  $-2j+2$ . Nous définissons  $d_\infty$  et  $\tilde{d}_\infty$  comme suit :

$$(III.1.97a) \quad d_\infty(x, y, k, \omega) \sim d_1(x, y, k, \omega) + d_0(x, y, k, \omega) + \sum_{j \geq 1} d_{-j}(x, y, k, \omega),$$

$$(III.1.97b) \quad \tilde{d}_\infty(x, y, k, \omega) \sim d_1(x, y, k, \omega) + \tilde{d}_0(x, y, k, \omega) + \sum_{j \geq 1} d_{-j}(x, y, k, \omega).$$

Les opérateurs  $D_\infty = \text{Op}(d_\infty)$  et  $\tilde{D}_\infty = \text{Op}(\tilde{d}_\infty)$  sont des opérateurs pseudo-différentiels agissant sur le tore qui satisfont à l'égalité (III.1.94) modulo les régularisants, dans le  $\omega$ -calcul.

### III.1.2.c. Cas des ondes non évanescentes.

**HYPOTHÈSE III.1.3** (Omission des modes évanescents). *Dans ce paragraphe, nous supposons que la pulsation  $\omega$  tend vers l'infini en évitant certaines valeurs. Plus précisément, nous supposons qu'il existe une constante  $C > 0$  et une pulsation  $\omega_0$  telles que :*

$$(III.1.98a) \quad \begin{aligned} & \forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, 1), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ & \left| 1 - \frac{a\beta^2\omega^2}{k^2} \right| \geq C. \end{aligned}$$

Observons que l'inégalité (III.1.98a) implique l'existence de  $\delta_0 \in (0, 1)$  et d'une constante  $\tilde{C} > 0$  tels que

$$(III.1.98b) \quad \begin{aligned} & \forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ & \left| 1 - \frac{k^2}{a\beta^2\omega^2} \right| \geq \tilde{C}. \end{aligned}$$

- Estimations symboliques.

Nous allons donner des estimations sur les symboles de la factorisation formelle (III.1.94) en supposant l'hypothèse III.1.3 vérifiée.

Soit  $k \neq 0$ . De l'expression (III.1.87), nous tirons les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{|k|}{\beta} \sqrt{1 - \frac{a\omega^2\beta^2}{k^2} - i \frac{b\beta^2\omega^{2-\gamma}}{k^2}}, \\ &= \omega\sqrt{a} \sqrt{\frac{k^2}{a\omega^2\beta^2} - 1 - i \frac{b}{a\omega^\gamma}}, \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse III.1.3, il existe deux constantes strictement positives  $C > 0$  et  $c > 0$  telles que

$$(III.1.99a) \quad \forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(III.1.99b) \quad c(1 + |k| + \omega) \leq |d_1(x, y, k, \omega)| \leq C(1 + |k| + \omega),$$

$$(III.1.99c) \quad c(1 + |k| + \omega) \leq \Re(d_1)(x, y, k, \omega) \leq C(1 + |k| + \omega),$$

$$(III.1.99c) \quad c(1 + |k| + \omega) \leq \Im(d_1)(x, y, k, \omega) \leq C(1 + |k| + \omega),$$

Ainsi, la division par  $d_1$  diminuera l'ordre d'un symbole de 1. Estimons maintenant le symbole  $r_1$  défini par l'expression (III.1.88).

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \left( d_1(x, y, l + m, \omega) - d_1(x, y, m, \omega) \right) \int_0^{2\pi} d_1(x, s, m, \omega) e^{il(y-s)} ds.$$

Par intégration par parties successives, nous obtenons :

$$(III.1.100) \quad r_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \left( d_1(x, y, l + m, \omega) - d_1(x, y, m, \omega) \right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial_y^3 d_1(x, s, m, \omega)}{(-il)^3} e^{il(y-s)} ds.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} d_1|_{l+m} - d_1|_m &= \frac{m\nu|_m}{\beta} \left( \sqrt{1 + \frac{2l}{m\nu^2|_m} + \frac{l^2}{m^2\nu^2|_m}} - 1 \right), \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{l^2 + 2ml}{|(l+m)\nu|_{l+m} + m\nu|_m}. \end{aligned}$$

A l'aide des deux égalités précédentes et de l'hypothèse III.1.3, nous montrons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(III.1.101) \quad \forall \omega \geq \omega_0, \forall (l, m) \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad \left| d_1(x, y, l + m, \omega) - d_1(x, y, m, \omega) \right| \leq C(1 + |l| + \omega).$$

Remarquons de plus l'égalité suivante :

$$(III.1.102) \quad \forall \omega \geq \omega_0, \forall m \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad \partial_y d_1(x, y, m, \omega) = -\frac{m^2 \delta x \kappa'}{\beta^3 d_1}.$$

En dérivant 3 fois (III.1.102) et en utilisant l'hypothèse (III.1.98), nous prouvons l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$(III.1.103) \quad \left| \partial_y^3 d_1(x, y, m, \omega) \right| \leq C\delta(1 + |m| + \omega).$$

A l'aide des estimations (III.1.101)–(III.1.103) et de l'expression (III.1.100) nous tirons l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad |r_1(x, y, k, \omega)| \leq C\delta(1 + |k| + \omega).$$

De plus, des expressions (III.1.89) et (III.1.90) nous obtenons directement les estimations suivantes sur  $\sigma_{R_1}$  et  $s_1$

$$(III.1.104) \quad \exists C > 0, \forall \tau \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \quad |\sigma_{R_1}(x, y, k, \omega)| \leq C(1 + |k| + \omega + |\tau|),$$

$$(III.1.105) \quad |s_1(x, y, k, \omega)| \leq C(1 + |k| + \omega).$$

Ainsi les symboles  $R_1$  et  $s_1$  sont bien d'ordre 1 dans le  $\omega$ -calcul. De plus, les estimations précédentes et les expressions de  $d_0$  et  $\tilde{d}_0$  données en (III.1.92) impliquent l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \text{(III.1.106a)} \quad |d_0(x, y, k, \omega)| \leq C, \end{aligned}$$

$$\text{(III.1.106b)} \quad \left| \tilde{d}_0(x, y, k, \omega) \right| \leq C.$$

Nous avons la même estimation pour le symbole  $\sigma_{R_0}$  défini en (III.1.95) :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \text{(III.1.107)} \quad |\sigma_{R_0}(x, y, k, \omega)| \leq C. \end{aligned}$$

De (III.1.99), nous déduisons alors l'existence de deux constantes  $C > 0$  et  $c > 0$  telles que :

$$\forall \omega \geq \omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$\text{(III.1.108a)} \quad c(1 + |k| + \omega) \leq |d(x, y, k, \omega)| \leq C(1 + |k| + \omega),$$

$$\text{(III.1.108b)} \quad c(1 + |k| + \omega) \leq \Re(d)(x, y, k, \omega) \leq C(1 + |k| + \omega),$$

$$\text{(III.1.108c)} \quad c(1 + |k| + \omega) \leq \Im(d)(x, y, k, \omega) \leq C(1 + |k| + \omega),$$

III.1.2.d. *Paramétrix de  $\partial_x/\delta - D$  et  $\partial_x/\delta + \tilde{D}$ .* Nous construisons maintenant une paramétrix de l'opérateur  $\partial_x/\delta - D$ , c'est-à-dire que nous construisons un opérateur sur  $\mathbb{T}$  noté  $\mathfrak{U}(x, x')$  et vérifiant, pour tout  $(x, x') \in (0, 1)$ , tels que  $0 \leq x < x' \leq 1$ , l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta} \partial_x \mathfrak{U}(x, x') - D(x) \mathfrak{U}(x, x') = 0, \\ \mathfrak{U}(x', x') = \text{Id}. \end{cases}$$

Nous suivons l'approche de Trèves [71] Chapitre III. Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs pseudodifférentiels, nous utilisons la notation de [71] :

$$\sigma_A \odot \sigma_B$$

pour désigner le symbole de l'opérateur composé  $A \circ B$ . Notons  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}$  le symbole de  $\mathfrak{U}$ . L'équation vérifiée par  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}$  est :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta} \partial_x \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}(x, x') - d(x) \odot \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}(x, x') = 0, \\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}(x', x') = 1. \end{cases}$$

Nous nous proposons de chercher  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}$  sous la forme suivante :

$$\forall (x', x) \in [0, 1] \times [0, x'],$$

$$\text{(III.1.109)}$$

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}(x, x', y, k, \omega) = \exp \left( - \int_x^{x'} \delta d(s, y, k, \omega) ds \right) (1 + \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-1} + \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-2} + \dots),$$

$$\forall j \geq 0, \quad \mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j}(x', x', y, k, \omega) = 0,$$

avec les  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j}$  des symboles d'ordre  $-j$ . En fait, la preuve de Trèves du théorème 1.1 Chapitre III montre que les symboles  $\mathfrak{s}_{\mathfrak{U}}^{-j}$  peuvent être construits inductivement de

manière similaire au symbole  $d$  et sont d'ordre  $-j$  dans le calcul pseudodifférentiel classique mais aussi dans le  $\omega$ -calcul pseudodifférentiel (voir [43]).

De la même façon, nous construisons une paramétrix  $\mathfrak{V}$  de  $\partial_x/\delta + \tilde{D}$ . Un raisonnement similaire nous mène à une construction inductive du symbole  $\mathfrak{s}_V$  de  $\mathfrak{V}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} & \forall (x', x) \in [0, 1] \times [x', 1], \\ \text{(III.1.110)} \quad \mathfrak{s}_V(x, x', y, k, \omega) &= \exp\left(\int_x^{x'} \delta \tilde{d}(s, y, k, \omega) ds\right) (1 + \mathfrak{s}_V^{-1} + \mathfrak{s}_V^{-2} + \dots), \\ & \forall j \geq 0, \quad \mathfrak{s}_V^{-j}(x', x', y, k, \omega) = 0. \end{aligned}$$

La construction de Trèves implique aussi l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , pour tout  $\omega \geq 1$  et pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} & \forall (x', x) \in [0, 1] \times [x', 1], \\ \text{(III.1.111a)} \quad \left| \mathfrak{s}_U(x, x', y, k, \omega) - \exp\left(\int_{x'}^x \delta d(s, y, k, \omega) ds\right) \right| &\leq \frac{C\delta}{(1 + |k| + \omega)}, \\ \text{(III.1.111b)} \quad \left| \mathfrak{s}_V(x, x', y, k, \omega) - \exp\left(\int_x^{x'} \delta \tilde{d}(s, y, k, \omega) ds\right) \right| &\leq \frac{C\delta}{(1 + |k| + \omega)}. \end{aligned}$$

Nous notons  $\sigma_{\mathfrak{U}_0}$  et  $\sigma_{\mathfrak{V}_0}$  les symboles suivants :

$$\begin{aligned} \text{(III.1.112a)} \quad \sigma_{\mathfrak{U}_0} &= \exp\left(\int_{x'}^x \delta d(s, y, k, \omega) ds\right), \\ \sigma_{\mathfrak{V}_0} &= \exp\left(\int_{x'}^x \delta \tilde{d}(s, y, k, \omega) ds\right), \end{aligned}$$

et  $\mathfrak{U}_0$  et  $\mathfrak{V}_0$  les opérateurs associés :

$$\begin{aligned} \text{(III.1.112b)} \quad \mathfrak{U}_0 &= \text{Op}\left(\exp\left(\int_{x'}^x \delta d(s, y, k, \omega) ds\right)\right), \\ \mathfrak{V}_0 &= \text{Op}\left(\exp\left(\int_{x'}^x \delta \tilde{d}(s, y, k, \omega) ds\right)\right). \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{C}$  le cylindre  $[0, 1] \times \mathbb{T}$ . L'estimation (III.1.111) implique que pour tout  $u \in H^s(\mathbb{T})$ ,  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0)u\|_{H^{s+1}(\mathcal{C})} &\leq \frac{C\delta}{\omega} \|u\|_{H^s(\mathbb{T})}, \\ \|(\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0)u\|_{H^{s+1}(\mathcal{C})} &\leq \frac{C\delta}{\omega} \|u\|_{H^s(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

III.1.2.e. *Condition d'impédance généralisée le long de  $\partial\mathcal{O}$* . Nous supposons  $h$  connu en  $x = 0$  et nous le notons  $h_0$ . Nous rappelons que  $h$  satisfait à l'équation de Helmholtz suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}h = 0, \\ h(0, \cdot) = h_0, \quad h(1, \cdot) = g. \end{cases}$$



Grâce à la factorisation (III.1.94) de  $\mathcal{L}$ , nous approchons ce problème par le problème factorisé suivant :

$$\begin{aligned} \text{(III.1.113a)} \quad & \frac{1}{\delta} \partial_x v(x, y) - D(x)v(x, y) = \gamma, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \text{(III.1.113b)} \quad & \frac{1}{\delta} \partial_x \gamma(x, y) + \tilde{D}(x)\gamma(x, y) = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{T}, \\ \text{(III.1.113c)} \quad & v(0, \cdot) = h_0, v(1, \cdot) = g. \end{aligned}$$

Nous cherchons alors  $(v, \gamma)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{(III.1.114a)} \quad & v(x, \cdot) = \mathfrak{U}(x, 1)g - \int_x^1 \mathfrak{U}(x, x')\gamma(x') dx', \\ \text{(III.1.114b)} \quad & \gamma(x, \cdot) = \mathfrak{V}(x, 0)\gamma(0). \end{aligned}$$

Sous ces expressions,  $v$  et  $\gamma$  vérifient bien (III.1.113a)–(III.1.113b).

– *Déterminons*  $\gamma(0)$ . En appliquant l'identité (III.1.113a) en  $x = 0$  puis en utilisant les expressions (III.1.114) de  $v$  et de  $\gamma$ , nous aboutissons à l'égalité :

$$\text{(III.1.115)} \quad \int_0^1 \mathfrak{U}(0, s)\mathfrak{V}(s, 0) ds \gamma(0) = \mathfrak{U}(0, 1)g - h_0.$$

Il nous faut prouver que l'opérateur suivant :

$$\int_0^1 \mathfrak{U}(0, s)\mathfrak{V}(s, 0) ds,$$

est elliptique d'ordre  $-1$ . Montrons d'abord que l'opérateur

$$\int_0^1 \mathfrak{U}_0(0, s)\mathfrak{V}_0(s, 0) ds,$$

est elliptique. En vertu de la définition (III.1.112a) des symboles  $\sigma_{\mathfrak{U}_0}$  et  $\sigma_{\mathfrak{V}_0}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma_{\mathfrak{U}_0}(0, s)\sigma_{\mathfrak{V}_0}(s, 0) ds &= \frac{1}{\delta \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=0} \right)} \left( 1 - \frac{\left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=0} \right)}{\left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=1} \right)} e^{-\delta \int_0^1 \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=t} \right) dt} \right) \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\partial_x \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=s} \right)}{\delta \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=s} \right)^2} e^{-\delta \int_0^s \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=t} \right) dt} ds. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Rolle, il existe  $\xi_0 \in (0, 1)$  tel que

$$\left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=0} \right) = \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=1} \right) - \partial_x \left( (d + \tilde{d}) \Big|_{x=\xi_0} \right),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma_{\mathfrak{M}_0}(0, s) \sigma_{\mathfrak{M}_0}(s, 0) ds &= \frac{1}{\delta (d + \tilde{d})|_{x=0}} \left( 1 - e^{-\delta \int_0^1 ((d + \tilde{d})|_{x=t}) dt} \right) \\ &+ \frac{\partial_x (d + \tilde{d})|_{x=\xi_0} e^{-\delta \int_0^1 ((d + \tilde{d})|_{x=t}) dt}}{\delta (d + \tilde{d})|_{x=0} (d + \tilde{d})|_{x=1}} \\ &- \int_0^1 \frac{\partial_x (d + \tilde{d})|_{x=s}}{\delta (d + \tilde{d})^2|_{x=s}} e^{-\delta \int_0^s ((d + \tilde{d})|_{x=t}) dt} ds. \end{aligned}$$

Remarquons l'égalité suivante, pour  $(s, t) \in [0, 1]$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  :

$$\frac{\partial_x d_1|_{x=t}}{\delta (d + \tilde{d})|_{x=s}} = - \frac{m^2 \kappa(t)}{\beta^3(t) d_1|_{x=t} (d + \tilde{d})|_{x=s}}.$$

Ainsi, nous obtenons,

$$\left| \frac{\partial_x d_1|_{x=t}}{\delta (d + \tilde{d})|_{x=s}} \right| \leq C \frac{m^2}{(1 + |m| + \omega)^2}.$$

De plus, en vertu de la définition de  $d_0$ , nous obtenons :

$$\partial_x d_0 = - \frac{\partial_x s_1}{2d_1} + \frac{s_1 \partial_x d_1}{2d_1^2} - \frac{\delta \kappa^2}{2\beta^2}$$

Un calcul simple nous montre qu'il existe  $C > 0$  indépendant de  $m \in \mathbb{Z}^*$  et de  $\omega$  tel que :

$$|\partial_x s_1| \leq C\delta,$$

d'où

$$\frac{\partial_x (d + \tilde{d})|_{x=t}}{\delta (d + \tilde{d})|_{x=s}} \leq C.$$

Ainsi, il existe  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \forall \omega \geq \omega_0, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall m \in \mathbb{Z}^*, \\ \left| \frac{\partial_x (d + \tilde{d})|_{x=\xi_0} e^{-\delta \int_0^1 ((d + \tilde{d})|_{x=t}) dt}}{\delta (d + \tilde{d})|_{x=0} (d + \tilde{d})|_{x=1}} \right| &\leq \frac{C}{(1 + |k| + \omega)}, \\ \left| \int_0^1 \frac{\partial_x (d + \tilde{d})|_{x=s}}{\delta (d + \tilde{d})^2|_{x=s}} e^{-\delta \int_0^s ((d + \tilde{d})|_{x=t}) dt} ds \right| &\leq \frac{C}{(1 + |k| + \omega)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe  $c > 0$  telle que

$$\forall \omega \geq \omega_0, \forall \delta \in (0, \delta_0), \quad \omega \delta \geq c > 0,$$

donc il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  indépendantes de  $\delta$ ,  $\omega$  et  $m$  telles que :

$$(III.1.116) \quad \forall \omega \geq \omega_0, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall m \in \mathbb{Z}^*,$$

$$\frac{C_1}{\delta(1 + |m| + \omega)} \leq \left| \int_0^1 \sigma_{\mathfrak{U}_0}(0, s) \sigma_{\mathfrak{V}_0}(s, 0) ds \right| \leq \frac{C_2}{\delta(1 + |m| + \omega)},$$

Ainsi, nous avons montré que l'opérateur

$$\int_0^1 \mathfrak{U}_0(0, s) \mathfrak{V}_0(s, 0) ds,$$

est elliptique d'ordre  $-1$ . Les estimations (III.1.111) montrent qu'il en est de même pour

$$\int_0^1 \mathfrak{U}(0, s) \mathfrak{V}(s, 0) ds.$$

Nous notons

$$B = \left( \int_0^1 \mathfrak{U}(0, s) \mathfrak{V}(s, 0) ds \right)^{-1}.$$

L'estimation (III.1.116) implique l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$(III.1.117) \quad \forall y \in \mathbb{T}, \forall \omega \geq \omega_0, \forall \delta \in (0, \delta_0), \forall m \in \mathbb{Z}^*,$$

$$\frac{\delta(1 + |m| + \omega)}{C} \leq |\sigma_B(y, m, \omega)| \leq C\delta(1 + |m| + \omega).$$

Ainsi,  $\gamma(0)$  est entièrement déterminée par l'égalité (III.1.115).

– *Estimation de  $\|v\|_{L^2(\mathcal{C})}$ .* Rappelons l'expression de  $v$  :

$$v(x, \cdot) = \mathfrak{U}(x, 1)g - \int_x^1 \mathfrak{U}(x, x') \gamma(x') dx',$$

$$\gamma(x, \cdot) = \mathfrak{V}(x, 0) \gamma(0).$$

En utilisant l'expression (III.1.109) du symbole de  $\mathfrak{U}$ , nous déduisons l'estimation suivante :

$$\|v\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq C|g|_{L^2(\mathbb{T})} + \left\| \int_x^1 \mathfrak{U}(x, x') \mathfrak{V}(x', 0) dx' \gamma(0) \right\|_{L^2(\mathcal{C})},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\omega$  et de  $\delta$ . De plus, par simple intégration par parties, en utilisant (III.1.109), (III.1.110) et l'estimation (III.1.116), nous montrons l'existence d'une constante  $C$  strictement positive et indépendante de  $\delta$  et de  $\omega$  telle que :

$$\left\| \int_x^1 \mathfrak{U}(x, x') \mathfrak{V}(x', 0) dx' \gamma(0) \right\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq C\delta\omega |v|_{x=0}|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}.$$

Nous en déduisons qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$(III.1.118) \quad \|v\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq C|g|_{L^2(\mathbb{T})} + \delta\omega |v|_{x=0}|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}.$$

– *Condition d'impédance généralisée.* Nous posons :

$$(III.1.119) \quad \gamma(0) = B \left( \mathfrak{U}(1, 0)g \right) - B(h_0).$$

Ainsi, à l'aide de l'identité (III.1.113a) appliquée en  $x = 0$ , nous obtenons la relation entre  $\partial_x v|_{x=0}$  et  $v|_{x=0}$  :

$$(III.1.120) \quad \frac{1}{\delta} \partial_x v|_{x=0} - \left\{ D(0) - B \right\} v|_{x=0} = B \circ \mathfrak{A}(1, 0)(g),$$

où  $D(0) = \text{Op}(d|_{x=0})$ , le symbole  $d$  étant donné par l'égalité (III.1.93a). Notons  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{V}$  respectivement les opérateurs  $D(0)$ ,  $B$  et  $B \circ \mathfrak{A}(1, 0)$  écrit dans les coordonnées euclidiennes. C'est-à-dire que pour toute fonction  $u$  définie sur  $\partial\mathcal{O}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}u &= D(0)(u \circ \Phi_0^{-1}), \\ \mathcal{B}u &= B(u \circ \Phi_0^{-1}), \\ \mathcal{V}u &= (B \circ \mathfrak{A}(1, 0))(u \circ \Phi_0^{-1}), \end{aligned}$$

où  $\Phi_0$  est défini en (III.1.80).

Soit

$$\mathbf{g} = g \circ \Phi_0.$$

En utilisant les conditions de transmission aux bords de  $\mathcal{O}$  issues de (III.1.78), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v \circ \Phi_0 &= \frac{1}{\delta \tilde{\varepsilon}_m} \partial_x v|_{x=0}, \\ v \circ \Phi_0 &= v|_{x=0}, \end{aligned}$$

la condition d'impédance généralisée (III.1.120) nous donne la condition d'impédance équivalente à la membrane sur le bord de  $\mathcal{O}$  :

$$(III.1.121) \quad \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v|_{\partial\mathcal{O}} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} = \mathcal{V} \mathbf{g}.$$

Ainsi, le champ  $v$  approché par la condition d'impédance (III.1.121) satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante dans  $\mathcal{O}$  :

$$\begin{aligned} \text{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \text{grad } v \right) + \omega^2 \mu_c v &= 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v|_{\partial\mathcal{O}} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} &= \mathcal{V} \mathbf{g}, \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{aligned}$$

#### III.1.2.f. Existence, unicité et estimations.

LEMME III.1.4. Soit  $\mathbf{g} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ .

Alors il existe un unique  $v$  dans  $H^1(\mathcal{O})$  satisfaisant à l'équation suivante :

$$(III.1.122a) \quad \text{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \text{grad } v \right) + \omega^2 \mu_c v = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(III.1.122b) \quad \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v|_{\partial\mathcal{O}} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} = \mathbf{g}, \text{ sur } \partial\mathcal{O}.$$

De plus  $v$  satisfait aux inégalités suivantes :

$$(III.1.123a) \quad |v|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} \leq \frac{C}{\omega} |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})},$$

$$(III.1.123b) \quad \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \frac{C}{\omega^{(3-\gamma)/2}} |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})},$$

$$(III.1.123c) \quad \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \frac{C}{\omega^{(1-\gamma)/2}} |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

DÉMONSTRATION. *Unicité et Existence.* Supposons  $\mathfrak{g}$  nul.

Notons  $b_c = \mu_c \sigma_c$ . En multipliant (III.1.122a) par  $\tilde{\varepsilon}_c \bar{v}$  et en intégrant par parties, nous obtenons :

$$(III.1.124) \quad b_c \omega^{2-\gamma} \int_{\mathcal{O}} |v|^2 \, d\text{vol}_{\mathcal{O}} + \Im \left( \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\tilde{\varepsilon}_c}{\tilde{\varepsilon}_m} \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} \bar{v}|_{\partial\mathcal{O}} \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}} \right) = 0.$$

Posons

$$\forall y \in \mathbb{T}, \quad u(y) = v|_{\partial\mathcal{O}} \circ \Phi_0.$$

Par définition, nous avons :

$$\left( \mathcal{D}v|_{\partial\mathcal{O}} \right) \circ \Phi_0 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} d|_{x=0}(y, l, \omega) \hat{u}_l e^{ily}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\{ \left( \mathcal{D}v|_{\partial\mathcal{O}} \right) \bar{v}|_{\partial\mathcal{O}} \right\} \circ \Phi_0 &= \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} d|_{x=0}(y, l, \omega) \hat{u}_l e^{ily} \right) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\hat{u}}_k e^{-iky} \right), \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} d|_{x=0}(y, l, \omega) |\hat{u}_l|^2 + \sum_{k \neq l} d|_{x=0}(y, l, \omega) \hat{u}_l \bar{\hat{u}}_k e^{i(l-k)y} \end{aligned}$$

Par intégrations par parties, nous obtenons, pour  $k \neq l$  :

$$\int_0^{2\pi} d|_{x=0}(y, l, \omega) e^{i(l-k)y} \, dy = \int_0^{2\pi} \frac{\partial_y^3 d|_{x=0}(y, l, \omega)}{i(l-k)^3} e^{i(l-k)y} \, dy.$$

De l'estimation (III.1.103), nous déduisons l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\partial_y^3 d|_{x=0}(y, l, \omega)}{i(l-k)^3} e^{i(l-k)y} \, dy \right| \leq C \delta \frac{1 + |l| + \omega}{|l-k|^3}.$$

Ainsi, pour  $u \in H^s(\mathbb{T})$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$\left| \int_0^{2\pi} \sum_{k \neq l} (1 + |l|)^{2s-1} d|_{x=0}(y, l, \omega) \hat{u}_l \bar{\hat{u}}_k e^{i(l-k)y} \, dy \right| \leq C \delta \omega |u|_{H^s(\mathbb{T})}^2.$$

De même, l'estimation (III.1.117) implique l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} (1 + |l|)^{2s-1} \sigma_B(y, l, \omega) \hat{u}_l e^{ily} \right) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\hat{u}}_k e^{-iky} \right) \, dy \right| \leq C \delta \omega |u|_{H^s(\mathbb{T})}^2.$$

Comme l'estimation (III.1.108c) implique l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} (1 + |l|)^{2s-1} \Im(d)|_{x=0}(y, l, \omega) |\widehat{u}_l|^2 \geq C\omega |v|_{H^s(\partial\mathcal{O})}^2,$$

nous en déduisons qu'il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ ,

$$(III.1.125) \quad \Im \left( \left\{ \left( (\mathcal{D} - \mathcal{B}) v|_{\partial\mathcal{O}} \right) \bar{v}|_{\partial\mathcal{O}} \right\} \right) \geq C\omega |v|_{H^s(\partial\mathcal{O})}^2 \geq 0.$$

Nous montrons de même

$$(III.1.126) \quad \Re \left( \left\{ \left( (\mathcal{D} - \mathcal{B}) v|_{\partial\mathcal{O}} \right) \bar{v}|_{\partial\mathcal{O}} \right\} \right) \geq C\omega |v|_{H^s(\partial\mathcal{O})}^2 \geq 0.$$

Posons  $\tilde{\varepsilon}_c = a_c + ib_c\omega^{-\gamma}$  et  $\tilde{\varepsilon}_m = a_m + ib_m\omega^{-\gamma}$ . Nous avons :

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_c}{\tilde{\varepsilon}_m} = \frac{a_c a_m - b_c b_m \omega^{-2\gamma} + i\omega^{-\gamma} (a_m b_c - a_c b_m)}{a_m^2 + b_m^2 \omega^{-2\gamma}}.$$

En utilisant (III.1.125) et (III.1.126), nous en déduisons qu'il existe  $C > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  et  $\omega_0$  tels que pour tous  $\omega \geq \omega_0$ ,  $\delta \in (0, \delta_0)$ , pour tout  $u \in H^{1/2}(\mathbb{T})$ ,

$$(III.1.127) \quad \Im \left( \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\tilde{\varepsilon}_c}{\tilde{\varepsilon}_m} \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial\mathcal{O}} \bar{v}|_{\partial\mathcal{O}} \, d\text{vol}_{\partial\mathcal{O}} \right) \geq C\omega |v|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}^2 \geq 0.$$

Nous déduisons immédiatement de (III.1.124), l'unicité du problème (III.1.122), puis l'existence, par le théorème de Lax-Milgram [51].

*Estimations.* Soient  $\omega_0$  et  $\delta_0$  comme ci-dessus, et soient  $\omega \geq \omega_0$  et  $\delta \in (0, \delta_0)$ . En multipliant (III.1.122a) par  $\tilde{\varepsilon}_c \bar{v}$ , en intégrant par parties et en prenant la partie imaginaire du résultat, il existe, d'après (III.1.127), une constante  $C > 0$  telle que

$$b_c \omega^{2-\gamma} \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + C\omega |v|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}^2 \leq |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})} |v|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Nous en déduisons successivement qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} |v|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} &\leq \frac{C}{\omega} |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq \frac{C}{\omega^{(3-\gamma)/2}} |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq \frac{C}{\omega^{(1-\gamma)/2}} |\mathfrak{g}|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

□

III.1.2.g. *Estimation de l'erreur.* Il s'agit maintenant de montrer que l'erreur commise en remplaçant l'opérateur de Helmholtz par sa factorisation à l'ordre 0 donnée à l'égalité (III.1.94) est bien négligeable. Rappelons que le cylindre  $\mathcal{C}$  est muni de la métrique (III.1.81). Pour une fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{C}$ , nous posons, quand cela a un sens :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} &= \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} \delta (1 + \delta x \kappa(y)) |f(x, y)|^2 \, dy dx \right)^{1/2}, \\ \|df\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} &= \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \delta x \kappa(y)}{\delta} |\partial_x f|^2 + \frac{\delta}{1 + \delta x \kappa(y)} |\partial_y f|^2 \, dy dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous avons le lemme suivant :

LEMME III.1.5 (Erreur dans la cellule). Soient  $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega_\delta)$ . Soit  $\Phi$  le difféomorphisme défini en (III.1.79) et  $\Phi_1$  et  $\Phi_0$  sont définis en (III.1.80). Nous notons :

$$g = \mathbf{g} \circ \Phi_1.$$

Soient  $\mu$  et  $\tilde{\varepsilon}$  les deux fonctions suivantes :

$$\mu = \begin{cases} \mu_c, & \text{dans } \mathcal{O}, \\ \mu_m, & \text{dans } \mathcal{O}_\delta, \end{cases} \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_c, & \text{dans } \mathcal{O}, \\ \tilde{\varepsilon}_m, & \text{dans } \mathcal{O}_\delta. \end{cases}$$

$H$  est la solution de l'équation de Helmholtz suivante :

$$(III.1.128a) \quad \operatorname{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \operatorname{grad} H \right) + \omega^2 \mu H = 0, \text{ dans } \Omega_\delta = \overline{\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_\delta},$$

$$(III.1.128b) \quad H|_{\partial\Omega_\delta} = \mathbf{g}, \text{ sur } \partial\Omega_\delta.$$

Soit  $v$  la solution du problème suivant :

$$(III.1.129a) \quad \left( \partial_x + \delta \tilde{D} \right) \left( \partial_x - \delta D \right) v = 0, \text{ pour } (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(III.1.129b) \quad \operatorname{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \operatorname{grad} v \right) + \omega^2 \mu_c v = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

avec les conditions de transmission :

$$(III.1.129c) \quad \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v \circ \Phi_0 = \frac{1}{\delta \tilde{\varepsilon}_m} \partial_x v|_{x=0},$$

$$(III.1.129d) \quad v \circ \Phi_0 = v|_{x=0},$$

et la condition aux limites

$$(III.1.129e) \quad v|_{x=1} = g.$$

Alors il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $\omega$  telle que,

$$(III.1.130) \quad \|H \circ \Phi - v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} \leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})},$$

$$(III.1.131) \quad \|H \circ \Phi - v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} + \|d(H \circ \Phi - v)\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{C})} \leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})},$$

et dans  $\mathcal{O}$

$$(III.1.132) \quad \|H - v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})},$$

$$(III.1.133) \quad \|H - v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})}.$$

Nous en déduisons les erreurs globales suivantes :

$$(III.1.134) \quad \|H \circ \Phi - v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} \leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} |g|_{H^{1/2}(\partial\Omega_\delta)},$$

$$(III.1.135) \quad \|H \circ \Phi - v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} + \|d(H \circ \Phi - v)\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{C})} \leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} |g|_{H^{1/2}(\partial\Omega_\delta)},$$

et dans  $\mathcal{O}$

$$(III.1.136) \quad \|H - v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} |g|_{H^{1/2}(\partial\Omega_\delta)},$$

$$(III.1.137) \quad \|H - v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} |g|_{H^{1/2}(\partial\Omega_\delta)}.$$

DÉMONSTRATION. Posons :

$$h = H \circ \Phi^{-1}.$$

Nous notons

$$\mathcal{L}_0 = \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + D \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x - \tilde{D} \right),$$

et nous rappelons que  $\mathcal{L}$  est l'opérateur

$$(III.1.138) \quad \mathcal{L} = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_m} \operatorname{grad} \right) + \omega^2 q_m,$$

écrit dans les coordonnées locales  $(x, y)$ . Soit

$$w = \begin{cases} h - v, & \text{dans } \mathcal{O}_\delta, \\ H - v, & \text{dans } \mathcal{O}. \end{cases}$$

La fonction  $w$  satisfait au problème homogène suivant :

$$(III.1.139a) \quad \mathcal{L}w = -(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)v, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(III.1.139b) \quad \operatorname{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \operatorname{grad} w \right) + \omega^2 \mu_c w = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

avec les conditions de transmission :

$$(III.1.140a) \quad \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n w \circ \Phi_0 = \frac{1}{\delta \tilde{\varepsilon}_m} \partial_x w|_{x=0},$$

$$(III.1.140b) \quad w \circ \Phi_0 = w|_{x=0},$$

et la condition aux limites

$$(III.1.140c) \quad w|_{x=1} = 0.$$

L'estimation (III.1.107) du symbole de  $R_0 = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0$  défini en (III.1.91) prouve qu'il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $\omega$ ,

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} \leq c \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})}.$$

Multiplions (III.1.139) par  $\bar{w}$  et intégrons par parties, en utilisant les conditions de transmission et la condition aux limites données en (III.1.140). Comme la membrane a un coefficient de conductivité non-nul,  $\Im(\mu \tilde{\varepsilon}_m) = b/\omega^\gamma$ , nous aboutissons aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|w\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} &\leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})}, \\ \|w\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} + \|dw\|_{\Lambda^1 L^2(\mathcal{C})} &\leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})}, \end{aligned}$$

et dans le cytoplasme :

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq \frac{c}{\omega^{2-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})}, \\ \|w\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq \frac{c}{\omega^{1-\gamma}} \|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})}. \end{aligned}$$



Pour obtenir les erreurs globales, il suffit d'observer que  $v$  satisfait dans le cytoplasme au problème suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_c} \operatorname{grad} v \right) + \omega^2 \mu_c v &= 0, \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\tilde{\varepsilon}_c} \partial_n v|_{\partial \mathcal{O}} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{\partial \mathcal{O}} &= \mathcal{V} \mathbf{g}, \text{ sur } \partial \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout  $u \in H^s(\partial \mathcal{O})$ ,

$$|\mathcal{V} \mathbf{g}|_{H^s(\partial \mathcal{O})} \leq |\mathbf{g}|_{H^s(\partial \mathcal{O})}.$$

La première estimation du Lemme III.1.4 et l'inégalité (III.1.118) impliquent immédiatement l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|v\|_{\Lambda^0 L^2(\mathcal{C})} \leq C \left( |g|_{L^2(\mathbb{T})} + \delta |g|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \right),$$

ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

**III.1.3. Cas des ondes évanescentes.** Dans le cas des ondes évanescentes, l'hypothèse III.1.3 n'est plus vérifiée.

**HYPOTHÈSE III.1.6 (Modes évanescents).** *Nous supposons que*

$$\left| \frac{1}{\beta^2} - \frac{a\omega^2}{k^2} \right|$$

tend vers 0 lorsque  $\omega$  et  $k$  tendent vers  $+\infty$ , pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ . Cela signifie que  $\omega$  et  $k$  ont le même comportement asymptotique. Ainsi, nous pouvons noter indifféremment :

$$(III.1.141) \quad \left| \frac{1}{\beta^2} - \frac{a\omega^2}{k^2} \right| = \iota(k),$$

$$(III.1.142) \quad \left| \frac{1}{\beta^2} - \frac{a\omega^2}{k^2} \right| = \xi(\omega),$$

où  $\iota$  et  $\xi$  sont des fonctions tendant vers 0 en  $+\infty$ .

Nous notons  $(\omega, k) \in \mathcal{E}_{\text{va}}$  les  $(\omega, k)$  vérifiant l'hypothèse précédente.

L'analyse pseudodifférentielle dans une membrane de géométrie quelconque semble difficile à mener. En effet, l'expression de  $\partial_y d_1$  (III.1.102) nous montre que dans le cas des ondes évanescentes, les dérivations successives de  $d_1$  intervenant dans les intégrations par parties augmentent l'ordre du symbole. Ainsi, par exemple, le symbole principal de  $D_1^2$  ne sera plus égal à  $d_1^2$  : il est nécessaire de rajouter des termes. C'est pourquoi, dans ce papier, nous traitons le cas des ondes évanescentes uniquement dans le cas du cercle.

*Cas du cercle.* Nous nous plaçons dans le cas du cercle : la courbure  $\kappa$  est constante, indépendante de  $y$ . Ainsi, la paramètre

$$\beta = 1 + \delta x \kappa$$

est indépendant de  $y$ . L'opérateur de Helmholtz  $\mathcal{L}$  écrit dans les coordonnées locales est alors :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\delta^2} \partial_x^2 + \frac{1}{\beta^2} (\partial_y^2 + \omega^2 \beta^2 q_m) + \frac{\kappa}{\delta \beta} \partial_x.$$

Comme dans la Section III.1.2.b, nous allons factoriser  $\mathcal{L}$  sous la forme :

$$\mathcal{L} = \left( \frac{1}{\delta} \partial_x + \tilde{D} \right) \left( \frac{1}{\delta} \partial_x - D \right) + R_0,$$

où  $R_0$  sera un opérateur d'ordre supposé inférieur à 1, de norme bornée indépendamment de  $\omega$ .

Le symbole  $\sigma_{\mathcal{L}}$  de  $\mathcal{L}$  vaut :

$$\begin{aligned} \forall \omega \geq 1, \forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{Z}^*, \\ \sigma_{\mathcal{L}}(\omega, x, \tau, k) = -\frac{\tau^2}{\delta^2} - \frac{k^2}{\beta^2} \left( 1 - a\omega^2 \beta^2 \omega^2 / k^2 \right) + ib\omega^{2-\gamma} + i\tau \frac{\kappa}{\delta\beta}. \end{aligned}$$

Nous construisons les opérateurs  $D$  et  $\tilde{D}$  de la factorisation de  $\mathcal{L}$  de manière inductive, comme cela a été fait dans la Section III.1.2.b. Du fait de la constance de la courbure, la factorisation est plus facile. En effet, par exemple, le symbole de  $D_1^2$  est exactement donné par  $d_1^2$ , ainsi, le symbole  $r_1$  défini en (III.1.88) est nul. Nous donnons juste les symboles et leur estimations, car la démarche est exactement la même que celle présentée en Section III.1.2.b, seules les estimations changent.

$$\forall(\omega, k) \in \mathcal{E}_{\text{va}}, \forall x \in [0, 1],$$

$$(III.1.143) \quad d_1(x, k, \omega) = \sqrt{k^2 \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{a\omega^2}{k^2} \right) + ib\omega^{2-\gamma}},$$

$$(III.1.144) \quad r_1 \equiv 0,$$

$$(III.1.145) \quad \sigma_{R_1} = i\tau \frac{\kappa}{\delta\beta} - \frac{\kappa}{\beta} d_1,$$

$$(III.1.146) \quad s_1 = -\frac{\kappa}{\beta} d_1,$$

$$(III.1.147) \quad d_0 = -\frac{s_1}{2d_1} + \frac{\kappa}{2\beta}$$

$$(III.1.148) \quad \tilde{d}_0 = -\frac{s_1}{2d_1} - \frac{\kappa}{2\beta},$$

$$(III.1.149) \quad \sigma_{R_0} = \frac{1}{\delta} \partial_x d_0 + d_0 \tilde{d}_0.$$

En remarquant les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{3\kappa}{2\beta} \\ \tilde{d}_0 &= \frac{\kappa}{2\beta}, \end{aligned}$$

nous obtenons immédiatement l'estimation suivante sur  $\sigma_{R_0}$  :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall \omega \geq \omega_0, \forall x \in [0, 1], \forall |k| \geq k_0, \\ |\sigma_{R_0}| \leq C. \end{aligned}$$

De plus, d'après l'hypothèse III.1.6, il est facile de montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \\ \frac{1}{C}|k|\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)} \leq |d(x, k, \omega)| \leq C|k|\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)}, \\ \frac{1}{C}|k|\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)} \leq |\tilde{d}(x, k, \omega)| \leq C|k|\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'en vertu de l'Hypothèse III.1.6, quitte à changer la constante  $C$ , nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}|k|\sqrt{\max(\iota(k), 1/k^\gamma)} \leq |d(x, k, \omega)| \leq C|k|\sqrt{\max(\iota(k), 1/k^\gamma)}, \\ \frac{1}{C}|k|\sqrt{\max(\iota(k), 1/k^\gamma)} \leq |\tilde{d}(x, k, \omega)| \leq C|k|\sqrt{\max(\iota(k), 1/k^\gamma)}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\omega\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)} \leq |d(x, k, \omega)| \leq C\omega\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)}, \\ \frac{1}{C}\omega\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)} \leq |\tilde{d}(x, k, \omega)| \leq C\omega\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)}. \end{aligned}$$

Pour  $(\omega, k) \in \mathcal{E}_{\text{va}}$ , nous considérons alors la solution  $(\hat{v}_k, \hat{\gamma})$  du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}\partial_x \hat{v}(x, k) - d(x, k, \omega)\hat{v}(x, k) &= \hat{\gamma}(x, k), \\ \frac{1}{\delta}\partial_x \hat{\gamma}(x, k) + \tilde{d}(x, k, \omega)\hat{\gamma}(x, k) &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\hat{v}(0, k) = \hat{h}_0(k), \quad \hat{v}(1, k) = \hat{g}.$$

Une application directe de la règle de Duhamel implique, formellement,

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, k) &= \hat{g}(k)e^{-\delta \int_x^1 d(s, \omega, k) ds} - \int_x^1 e^{-\delta \int_x^{x'} (d+\tilde{d})(s, \omega, k) ds} \hat{\gamma}(x', k) dx', \\ \hat{\gamma}(x, k) &= \hat{\gamma}(0, k)e^{-\delta \int_0^x d(s, \omega, k) ds}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons l'égalité suivante :

$$(III.1.150) \quad \left( \int_0^1 e^{-\delta \int_0^{x'} (d+\tilde{d})(s, \omega, k) ds} dx' \right) \hat{\gamma}(0, k) = \hat{g}(k)e^{-\delta \int_0^1 d(s, \omega, k) ds} - \hat{h}_0(k).$$

Il faut montrer :

$$\int_0^1 e^{-\delta \int_0^{x'} (d+\tilde{d})(s, \omega, k) ds} dx' \neq 0,$$

pour déterminer  $\hat{\gamma}(0, k)$ .

Deux cas se présentent.

– Soit  $\delta\omega\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)}$  tend vers 0.

Dans ce cas,  $\delta(d + \tilde{d})$  tend aussi vers 0 et donc il est clair qu'il existe  $\delta_0 > 0$  tel que pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ ,

$$\int_0^1 e^{-2\delta \int_0^{x'} (d+\tilde{d})(s, \omega, k) ds} dx' \geq \frac{1}{2},$$

et donc  $\gamma|_{x_0}$  est bien déterminé par (III.1.150).

– Soit il existe  $c > 0$  tel que  $\delta\omega\sqrt{\max(\xi(\omega), 1/\omega^\gamma)} \geq c > 0$ . Alors il existe deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$0 < c_1 \leq \left| e^{-\delta \int_0^1 ((d+\tilde{d})|_{x=t}) dt} \right| \leq c_2.$$

Dans ce cas là, nous faisons le même calcul que  $\int_0^1 \sigma_{\mathfrak{M}_0}(0, s) \sigma_{\mathfrak{W}_0}(s, 0) ds$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\delta \int_0^s (d+\tilde{d})(s, \omega, k) ds} ds &= \frac{1}{\delta (d+\tilde{d})|_{x=0}} \left( 1 - e^{-\delta \int_0^1 ((d+\tilde{d})|_{x=t}) dt} \right) \\ &+ \frac{\partial_x (d+\tilde{d})|_{x=\xi_0} e^{-\delta \int_0^1 ((d+\tilde{d})|_{x=t}) dt}}{\delta (d+\tilde{d})|_{x=0} (d+\tilde{d})|_{x=1}} \\ &- \int_0^1 \frac{\partial_x (d+\tilde{d})|_{x=s}}{\delta (d+\tilde{d})^2|_{x=s}} e^{-\delta \int_0^s ((d+\tilde{d})|_{x=t}) dt} ds. \end{aligned}$$

Comme nous avons pour  $(s, t) \in [0, 1]$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  :

$$\frac{\partial_x d_1|_{x=t}}{\delta (d+\tilde{d})|_{x=s}} = - \frac{m^2 \kappa(t)}{\beta^3(t) d_1|_{x=t} (d+\tilde{d})|_{x=s}},$$

de plus, en vertu de la définition de  $d_0$  et  $\tilde{d}_0$ , nous obtenons :

$$\partial_x (d_0 + \tilde{d}_0) = - \frac{\delta \kappa^2}{\beta^2},$$

ainsi

$$\left| \frac{\partial_x (d+\tilde{d})|_{x=t}}{\delta (d+\tilde{d})|_{x=s}} \right| \leq C \frac{1}{\max(\iota(m), 1/|m|^\gamma)}.$$

Nous en déduisons qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \forall (\omega, m) \in \mathcal{E}_{\text{va}}, \forall \delta \in (0, \delta_0), \\ \left| \frac{\partial_x (d+\tilde{d})|_{x=\xi_0} e^{-\delta \int_0^1 ((d+\tilde{d})|_{x=t}) dt}}{\delta (d+\tilde{d})|_{x=0} (d+\tilde{d})|_{x=1}} \right| &\leq \frac{C}{|m| (\max(\iota(m), 1/|m|^\gamma))^{3/2}}, \\ \left| \int_0^1 \frac{\partial_x (d+\tilde{d})|_{x=s}}{\delta (d+\tilde{d})^2|_{x=s}} e^{-\delta \int_0^s ((d+\tilde{d})|_{x=t}) dt} ds \right| &\leq \frac{C}{|m| (\max(\iota(m), 1/|m|^\gamma))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  indépendantes de  $\delta$ ,  $\omega$  et  $m$  telles que :

$$\forall (\omega, m) \in \mathcal{E}_{\text{va}},$$

$$C_1 \delta \frac{|m|}{\sqrt{\max(\iota(m), 1/|m|^\gamma)}} \leq \left| \int_0^1 e^{-\delta \int_0^s (d+\tilde{d})(s, \omega, k) ds} \right| \leq C_2 \delta \frac{|m|}{\sqrt{\max(\iota(m), 1/|m|^\gamma)}},$$

ce qui prouve que (III.1.150) détermine entièrement  $\hat{\gamma}(0, k)$ .

Nous en déduisons la condition d'impédance sur les coefficients de  $v$  en  $x = 0$  :

$$\frac{1}{\delta} \partial_x \widehat{v}_k - d(0, k) \widehat{v}_k = \widehat{\gamma}(0, k).$$

Soient  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{V}$  les opérateurs pseudo-différentiels sur le tore dont les symboles respectifs sont, pour  $(\omega, k) \in \mathcal{E}_{\text{va}}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{D}} &= d(0, k, \omega), \\ \sigma_{\mathcal{B}} &= \left( \int_0^1 e^{-\delta \int_0^s (d+\bar{d})(s, \omega, k) ds} ds \right)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\sigma_{\mathcal{V}} = \frac{e^{-\delta \int_0^1 d(s, \omega, k) ds}}{\int_0^1 e^{-\delta \int_0^s (d+\bar{d})(s, \omega, k) ds} ds}.$$

Nous en déduisons le problème satisfait par  $v$  dans  $\mathcal{O}$  :

$$(III.1.151a) \quad \operatorname{div} \left( \frac{1}{\widetilde{\varepsilon}_c} \operatorname{grad} v \right) + \omega^2 \mu_c v = 0, \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$(III.1.151b) \quad \frac{\widetilde{\varepsilon}_m}{\widetilde{\varepsilon}_c} \partial_R v|_{R=1} - \left\{ \mathcal{D} - \mathcal{B} \right\} v|_{R=1} = \mathcal{V} g, \text{ en } R = 1.$$

**Remerciements.** Nous tenons à remercier chaleureusement O.Lafitte pour ses conseils avisés sur ce travail.

**III.1.4. Formulaire.** Nous donnons les formules des opérateurs  $d$  et  $\delta$  qui apparaissent dans la formulation des équations de Maxwell à l'aide des formes différentielles. Ces formules découlent directement des définitions des opérateurs  $\star$ ,  $d$  et  $\delta = \star^{-1}d\star$ . Nous nous referons essentiellement au livre de Doubrovine, Fomenko et Novikov [23]. Nous nous plaçons dans le cas du plan.

Nous considérons une métrique donnée par la matrice symétrique  $G$  suivante

$$(III.1.152) \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

de déterminant noté  $g'$ . L'inverse de  $G$  est notée  $G^{-1} = (g^{ij})_{ij}$ , et nous suppose  $G$  de signature égale à 1. De sorte que l'opérateur  $\star^2$  soit égal à l'identité  $\text{Id}$  sur les 0-formes et les 2-formes et soit égal à  $-\text{Id}$  sur les 1-formes.

**Etoile de Hodge sur  $\mathbb{R}^2$ .**

*Sur les 0-formes et les 2-formes.* Soit  $T$  une 0-forme et  $S$  une 2-forme. Alors  $\star T$  est une 2-forme et  $\star S$  est une 0-forme notée  $f$ . Posons  $\star T = \mu dy^1 dy^2$  et  $S = \nu dy^1 dy^2$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{g'} T, \\ f &= \frac{1}{\sqrt{g'}} \nu. \end{aligned}$$

III.1.4.a. *Sur les 1-formes.* Soit  $T$  une 1-forme,  $T = T_1 dy^1 + T_2 dy^2$ . Alors  $\star T$  est une 1-forme, que nous notons  $\mu_1 dy^1 + \mu_2 dy^2$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\sqrt{g'} (g^{12} T_1 + g^{22} T_2), \\ \mu_2 &= \sqrt{g'} (g^{11} T_1 + g^{12} T_2). \end{aligned}$$

**Formule du  $d$  pour une 1-forme sur  $\mathbb{R}^2$ .** Soit  $\mu = \sum_{i=1}^2 \mu_i dy^i$ , posons  $d\mu = \lambda_{12} dy^1 dy^2$ .

Alors :

$$\lambda_{12} = \frac{\partial \mu_2}{\partial y^1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial y^2}.$$

**Formule du  $\delta$  pour une 2-forme sur  $\mathbb{R}^2$ .** Soit  $\lambda = \lambda_{12} dy^1 dy^2$ , posons  $\delta\lambda = \alpha_1 dy^1 + \alpha_2 dy^2$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{g'} \left\{ g^{12} \left( \frac{\partial}{\partial y^1} \left( \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{g'}} \right) \right) + g^{22} \left( \frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{g'}} \right) \right) \right\}, \\ \alpha_2 &= -\sqrt{g'} \left\{ g^{11} \left( \frac{\partial}{\partial y^1} \left( \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{g'}} \right) \right) + g^{12} \left( \frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{g'}} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

**Formule du  $\delta$  pour une 1-forme sur  $\mathbb{R}^2$ .** Soit  $\mu = \mu_1 dy^1 + \mu_2 dy^2$ , posons  $\delta\mu = \alpha$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{g'}} \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \sqrt{g'} (g^{11} \mu_1 + g^{12} \mu_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \sqrt{g'} (g^{12} \mu_1 + g^{22} \mu_2) \right) \right). \end{aligned}$$

**Formule du produit intérieur d'une 1-forme sur une 2-forme.** Soient

$$N = N_1 dy^1 + N_2 dy^2,$$

$$\lambda = \lambda_{12} dy^1 dy^2.$$

Nous avons :

$$\text{int}(N)\lambda = \frac{1}{g'}(\lambda_{12}(g_{12}N_1 - g_{11}N_2))dy^1 + \frac{1}{g'}(\lambda_{12}(g_{22}N_1 - g_{12}N_2))dy^2.$$

### III.2. Estimation du champ diffracté à hautes fréquences par un petit objet circulaire

#### Rigorous Norm Estimates of High Frequency Scattering from a Small Circular Inhomogeneity

Derek J. Hansen, Clair Poignard and Michael S. Vogelius <sup>2</sup>

*The following section is lifted from [39].*

**III.2.1. Introduction.** In this paper we shall rigorously estimate the size of the electromagnetic scattering caused by a single small inhomogeneity at all frequencies. For simplicity we restrict our attention to the “transverse magnetic” situation, in which case the scalar electric field satisfies a two dimensional Helmholtz equation. We take the inhomogeneity (or to be quite precise, the cross-section of the inhomogeneity) to be a disk of radius  $\varepsilon$ , but we do believe similar estimates hold for rather arbitrary convex inhomogeneities. The coordinate system is chosen so that the inhomogeneity is centered at the origin. For simplicity we assume that the magnetic permeability equals 1 inside as well as outside the inhomogeneity. The electric permittivity,  $q_\varepsilon$ , equals  $q$  inside the inhomogeneity and  $q_0$  outside, in other words

$$q_\varepsilon(y) = \begin{cases} q & \text{for } r = |y| < \varepsilon \\ q_0 & \text{for } r = |y| > \varepsilon \end{cases} .$$

We shall assume that  $q_0$  is real and positive. The coefficient  $q$ , the electric permittivity of the inhomogeneity, may be complex, but must have a positive real part and a non-negative imaginary part. At certain points we shall require that the inhomogeneity is electrically conducting, i.e., we shall suppose that  $\Im(q) > 0$ . The object of study is the solution,  $u_\varepsilon$ , to the equation

$$(III.2.153) \quad \Delta u_\varepsilon + \omega^2 q_\varepsilon u_\varepsilon = \text{in } \mathbb{R}^2 ,$$

for which the “backscattered” part  $u_\varepsilon^{(s)}(y) = u_\varepsilon(y) - u^{(inc)}(y)$  satisfies the “outgoing” radiation condition

$$(III.2.154) \quad \frac{\partial}{\partial r} u_\varepsilon^{(s)} - i\omega\sqrt{q_0}u_\varepsilon^{(s)} = o(r^{-1/2}) \text{ as } r \rightarrow \infty .$$

The incident wave,  $u^{(inc)}$ , is prescribed and satisfies  $\Delta u^{(inc)} + \omega^2 q_0 u^{(inc)} = 0$  in  $\mathbb{R}^2$ . We shall always assume it has the form

$$(III.2.155) \quad u^{(inc)}(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k J_k(\sqrt{q_0}\omega r) e^{ik\theta} ,$$

with  $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l^\infty$ . Here  $J_k(\cdot)$  denotes the Bessel function of the first kind of order  $k$ . This assumption does allow a “plane wave”, of incident direction  $\eta = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ :

$$(III.2.156) \quad u^{(inc)}(y) = e^{i\omega\sqrt{q_0}\eta \cdot y} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\sqrt{q_0}\omega r) e^{-ik(\theta_0 - \frac{\pi}{2})} e^{ik\theta} .$$

---

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903, USA, and Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208, Université Claude Bernard Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France.



The identity (III.2.156) follows directly from symmetry considerations and the integral representation formula

$$J_k(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - k\theta) d\theta \quad ,$$

valid for  $\Re(z) > 0$ , and any integer  $k$ . The main focus of this paper is to give rigorous norm estimates for the scattered part of the solution (the component  $u_\varepsilon^{(s)}$ ) at a fixed distance from the inhomogeneity.

In the present paper we shall provide estimates that largely explain the behaviour of these graphs for  $\omega$  of magnitude  $\varepsilon^{-1}$ , and greater, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In particular, with varying assumptions about the incident wave, we shall show that  $\|u_\varepsilon^{(s)}\|_{L^2(\{r=2\})}$ , is bounded by  $C\sqrt{\varepsilon}$ . This bound is also consistent with the asymptotic formulas for  $u_\varepsilon^{(s)}|_{r=2}$  obtained by (formal) techniques of geometric optics in [38].

**III.2.2. Some simple estimates for the scattered solution.** The problem (III.2.153) with its associated outgoing radiation condition may also be written

$$(III.2.157a) \quad \Delta u_\varepsilon^{(t)} + \omega^2 q u_\varepsilon^{(t)} = 0, \quad \text{for } r = |y| < \varepsilon \quad ,$$

$$(III.2.157b) \quad \Delta u_\varepsilon^{(s)} + \omega^2 q_0 u_\varepsilon^{(s)} = 0, \quad \text{for } r = |y| > \varepsilon \quad ,$$

with the following transmission conditions at  $r = \varepsilon$ :

$$(III.2.157c) \quad \partial_r u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} = \partial_r u_\varepsilon^{(t)} \Big|_{r=\varepsilon} - \partial_r u^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon} \quad ,$$

$$(III.2.157d) \quad u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} = u_\varepsilon^{(t)} \Big|_{r=\varepsilon} - u^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon} \quad ,$$

and the asymptotic relationship:

$$(III.2.157e) \quad \partial_r u_\varepsilon^{(s)} - i\omega\sqrt{q_0} u_\varepsilon^{(s)} = o(r^{-1/2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad .$$

Here we have used the notation  $u_\varepsilon^{(t)}$  for solution  $u_\varepsilon$  inside  $r < \varepsilon$ , and we have decomposed the solution in  $r > \varepsilon$  as

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^{(s)} + u^{(inc)} \quad .$$

For a  $2\pi$ -periodic function  $g$ , we denote by  $\widehat{g}_k$  the  $k^{\text{th}}$  Fourier coefficient of  $g$ , defined by

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad .$$

In terms of the Fourier coefficients the equations (III.2.157a)-(III.2.157e) translate into

$$(III.2.158a) \quad \frac{d^2}{dr^2} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)} + (\omega^2 q - k^2/r^2) \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)} = 0, \quad r < \varepsilon \quad ,$$

$$(III.2.158b) \quad \frac{d^2}{dr^2} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} + (\omega^2 q_0 - k^2/r^2) \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} = 0, \quad r > \varepsilon \quad ,$$

with the transmission conditions

$$(III.2.158c) \quad \frac{d}{dr} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{d}{dr} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)} \Big|_{r=\varepsilon} - \frac{d}{dr} \widehat{u}_k^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon} ,$$

$$(III.2.158d) \quad \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} = \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)} \Big|_{r=\varepsilon} - \widehat{u}_k^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon} ,$$

and the radiation condition

$$(III.2.158e) \quad \frac{d}{dr} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} - i\omega \sqrt{q_0} \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)} = o(r^{-1/2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty .$$

The differential equations in (III.2.158a)-(III.2.158b) are so-called Bessel's equations – the outgoing radiation condition at infinity, (III.2.158e), and the fact that  $\widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)}$  stays bounded as  $r \rightarrow 0$  now imply that

$$\widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(s)}(r) = \alpha_k H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega r) , \quad r > \varepsilon , \quad \text{and} \quad \widehat{u}_{\varepsilon,k}^{(t)}(r) = \beta_k J_k(\sqrt{q} \omega r) , \quad r < \varepsilon .$$

$H_k^{(1)}$  is a Hankel function of order  $k$ . The transmission conditions (III.2.158c) and (III.2.158d) yield the following identities for the coefficients  $\alpha_k$  and  $\beta_k$

$$\begin{aligned} & \alpha_k \left\{ \sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) J_k(\sqrt{q} \omega \varepsilon) - \sqrt{q} J_k'(\sqrt{q} \omega \varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) \right\} \\ & = a_k \left\{ \sqrt{q} J_k'(\sqrt{q} \omega \varepsilon) J_k(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) - \sqrt{q_0} J_k'(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) J_k(\sqrt{q} \omega \varepsilon) \right\} , \\ & \beta_k \left\{ \sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) J_k(\sqrt{q} \omega \varepsilon) - \sqrt{q} J_k'(\sqrt{q} \omega \varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) \right\} \\ & = a_k \left\{ \sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) J_k(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) - \sqrt{q_0} J_k'(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) \right\} , \end{aligned}$$

where  $a_k$  and  $b_k$  are the coefficients from the incident wave expression (III.2.155). We observe that

LEMMA III.2.1. *For any  $q_0 > 0$ ,  $q \in \mathbb{C}$ , with  $\Im(q) \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , and  $r > 0$*

$$\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0} r) J_k(\sqrt{q} r) - \sqrt{q} J_k'(\sqrt{q} r) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} r) \neq 0 .$$

PROOF. This non-degeneracy may be deduced from a general uniqueness and existence result for the Helmholtz equation (III.2.153) with a prescribed incident wave, and an outgoing radiation condition. However, it also has a very direct and simple proof: if for some  $k$  and  $r_0 > 0$

$$\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0} r_0) J_k(\sqrt{q} r_0) - \sqrt{q} J_k'(\sqrt{q} r_0) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} r_0) = 0 ,$$

then, either  $J_k(\sqrt{q} r_0) \neq 0$ , and

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} r_0)}{J_k(\sqrt{q} r_0)} J_k(\sqrt{q} r) e^{ik\theta} & r < r_0 , \\ H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} r) e^{ik\theta} & r > r_0 , \end{cases}$$

or  $J_k'(\sqrt{q} r_0) \neq 0$ , and

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0} r_0)}{\sqrt{q} J_k'(\sqrt{q} r_0)} J_k(\sqrt{q} r) e^{ik\theta} & r < r_0 , \\ H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} r) e^{ik\theta} & r > r_0 , \end{cases}$$

is a solution to

$$(III.2.159) \quad \Delta U + q^* U = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 ,$$

with

$$(III.2.160) \quad \partial_r U - i\sqrt{q_0} U = o(r^{-1/2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty .$$

Here  $q^*$  is given by

$$q^*(y) = \begin{cases} q & \text{for } r = |y| < r_0 \\ q_0 & \text{for } r = |y| > r_0 \end{cases} .$$

Multiplication of (III.2.159) by  $\bar{U}$  and integration by parts, using (III.2.160), now gives

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ - \int_{|y| < R} |\nabla U|^2 dy + \int_{|y| < R} q^* |U|^2 dy + i\sqrt{q_0} \int_{|y|=R} |U|^2 d\sigma_y \right] = 0 ,$$

and so

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |U|^2 d\sigma_y = - \frac{\Im(q)}{\sqrt{q_0}} \int_{|y| < r_0} |U|^2 dy \leq 0 .$$

On the other hand, based on the asymptotics of the Hankel function  $H_k^{(1)}$ , namely

$$H_k^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + O(r^{-3/2}) , \quad \text{as } r \rightarrow \infty ,$$

we easily calculate that

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |U|^2 d\sigma_y = \frac{4}{\sqrt{q_0}} ,$$

and so we have obviously reached a contradiction. We conclude that the nondegeneracy statement of this lemma must hold.  $\square$

Based on this non-degeneracy lemma and the previous formulas for  $\alpha_k$  and  $\beta_k$  we conclude that

(III.2.161)

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_k \frac{\sqrt{q} J'_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) - \sqrt{q_0} J'_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon)}{\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) - \sqrt{q} J'_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} , \\ \beta_k &= a_k \frac{\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) - \sqrt{q_0} J'_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)}{\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) - \sqrt{q} J'_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \\ &= \frac{2ia_k}{\pi\omega\varepsilon} \frac{1}{\left[ \sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) - \sqrt{q} J'_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) \right]} , \end{aligned}$$

where we have used a well-known formula for the Wronskian of the functions  $J_k$  and  $H_k^{(1)}$  to obtain the last identity. In order to rigorously estimate the size of the scattered part,  $u_\varepsilon^{(s)}$ , for small  $\omega\varepsilon$ , the following observations about the asymptotic behaviour of Bessel (and Hankel) functions are essential.

LEMMA III.2.2. *For any integer  $k \geq 0$*

$$\sqrt{q_0} (H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0}r) J_k(\sqrt{q}r) - \sqrt{q} J'_k(\sqrt{q}r) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}r) = \frac{2i}{\pi} \left( \frac{q}{q_0} \right)^{\frac{k}{2}} r^{-1} + o(r^{-1}) ,$$

and

$\sqrt{q}J'_k(\sqrt{qr})J_k(\sqrt{q_0r}) - \sqrt{q_0}J'_k(\sqrt{q_0r})J_k(\sqrt{qr}) = C_k(qq_0)^{\frac{k}{2}}(q_0 - q)r^{2k+1} + o(r^{2k+1})$  ,  
as  $r \rightarrow 0_+$ . The constant  $C_k$  is given by

$$C_k = \frac{k+2}{k!(k+1)!} 2^{-(2k+2)}.$$

PROOF. The identities are straightforward consequences of the well known asymptotic properties of Bessel functions and their derivatives, as found for instance in [76]. We omit the details of the derivation.  $\square$

From the identities in the above lemma, and the formulas for the  $\alpha_k$ , and the  $\beta_k$  we immediately conclude that, for any integer  $k \geq 0$

$$(III.2.162) \quad \alpha_{\pm k} = -a_{\pm k} \frac{i\pi}{2} C_k q_0^k (q_0 - q) (\omega\varepsilon)^{2k+2} + o((\omega\varepsilon)^{2k+2}) \quad \text{as } \omega\varepsilon \rightarrow 0_+ ,$$

and

$$\beta_{\pm k} = a_{\pm k} \left( \frac{q_0}{q} \right)^{k/2} + o(1) \quad \text{as } \omega\varepsilon \rightarrow 0_+ .$$

Here we have also used the fact that  $J_{-k} = (-1)^k J_k$  and  $H_{-k}^{(1)} = (-1)^k H_k^{(1)}$  for any integer  $k \geq 0$ . In order to rigorously estimate the size of the scattered part,  $u_\varepsilon^{(s)}$ , for large  $\omega\varepsilon$  we shall require that the inhomogeneity be electrically conducting (*i.e.*, that  $\Im(q) > 0$ ). This assumption implies the following result, which will prove essential.

LEMMA III.2.3. *Let  $c = a + ib$  be a complex constant with  $b > 0$ . Then, for any integer  $k \geq 0$*

$$\begin{aligned} (H_k^{(1)})'(r)J_k(cr) &= i \frac{e^{br} e^{i(1-a)r}}{\pi r \sqrt{c}} (1 + O(r^{-1})) , \\ J'_k(cr)H_k^{(1)}(r) &= -i \frac{e^{br} e^{i(1-a)r}}{\pi r \sqrt{c}} (1 + O(r^{-1})) , \end{aligned}$$

as  $r \rightarrow \infty$ . Furthermore, there exist constants  $C_{k,c}$  such that

$$\begin{aligned} |J'_k(r)J_k(cr)| &\leq C_{k,c} \frac{e^{br}}{r} , \quad \text{and} \\ |J'_k(cr)J_k(r)| &\leq C_{k,c} \frac{e^{br}}{r} , \end{aligned}$$

for all  $r > 0$ .

PROOF. These identities and bounds follow immediately from well known asymptotic behaviour of Bessel functions. For brevity we provide only the details of the derivation of the first identity, and the first bound. We leave the (similar) derivation for the two remaining statements to the reader. We have

$$(III.2.163) \quad (H_k^{(1)})'(r)J_k(cr) = \frac{1}{2} \left( H_{k-1}^{(1)}(r) - H_{k+1}^{(1)}(r) \right) J_k(cr) ,$$

for  $k > 0$ , and

$$(III.2.164) \quad (H_0^{(1)})'(r)J_0(cr) = -H_1^{(1)}(r)J_0(cr) .$$

As  $r \rightarrow \infty$  we also have

$$(III.2.165) \quad H_k^{(1)}(r) = \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} e^{i(r - \frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{4})} (1 + O(r^{-1})) \quad ,$$

see [45] page 122, or [76] page 198. Insertion of (III.2.165) into (III.2.163) and (III.2.164) gives

$$(III.2.166) \quad \begin{aligned} (H_k^{(1)})'(r)J_k(cr) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} e^{i(r - \frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{4})} \left( e^{i\frac{\pi}{2}} (1 + O(r^{-1})) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\frac{\pi}{2}} (1 + O(r^{-1})) \right) J_k(cr) \\ &= i \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} e^{i(r - \frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{4})} (1 + O(r^{-1})) J_k(cr) \quad , \end{aligned}$$

for  $k > 0$ , and

$$(III.2.167) \quad \begin{aligned} (H_0^{(1)})'(r)J_0(cr) &= - \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} e^{i(r - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} (1 + O(r^{-1})) J_0(cr) \\ &= i \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} e^{i(r - \frac{\pi}{4})} (1 + O(r^{-1})) J_0(cr) \quad . \end{aligned}$$

Due to the fact that  $c = a + ib$  has a positive imaginary part

$$J_k(cr) = \left(\frac{2}{\pi cr}\right)^{1/2} \frac{e^{-i(cr - \frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{4})}}{2} (1 + O(r^{-1})) \quad ,$$

and upon insertion of this into (III.2.166) and (III.2.167) we now get

$$\begin{aligned} (H_k^{(1)})'(r)J_k(cr) &= i \frac{1}{\pi r \sqrt{c}} e^{i(1-c)r} (1 + O(r^{-1})) \\ &= i \frac{e^{br} e^{i(1-a)r}}{\pi r \sqrt{c}} (1 + O(r^{-1})) \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad , \end{aligned}$$

for any  $k \geq 0$ . This verifies the first of the asymptotic identities. We now proceed to verify the first of the inequalities. To this end we have

$$(III.2.168) \quad J'_k(r)J_k(cr) = \frac{1}{2} (J_{k-1}(r) - J_{k+1}(r)) J_k(cr) \quad ,$$

for  $k > 0$ , and

$$(III.2.169) \quad J'_0(r)J_0(cr) = -J_1(r)J_0(cr) \quad .$$

From [45] page 122, or [76] page 198 we get

$$|J_k(z)| \leq C_k \left(\frac{2}{\pi|z|}\right)^{1/2} e^{|\Im(z)|} \quad .$$

Insertion of this estimate into (III.2.168) and (III.2.169) immediately yields

$$\begin{aligned} |J'_k(r)J_k(cr)| &\leq C_k \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\pi|c|r}\right)^{1/2} e^{|\Im(cr)|} \\ &\leq C_{k,c} \frac{e^{br}}{r} \quad , \end{aligned}$$

as desired. □

The formula (III.2.162) for the coefficients  $\alpha_k$ , and Lemma III.2.2 and Lemma III.2.3 enable us to prove the following result.

PROPOSITION III.2.4. *Suppose  $0 < \omega\varepsilon$ , and suppose the incident wave  $u^{inc}$  is given by*

$$u^{inc}(r, \theta) = \sum_{|k| \leq k_0} a_k J_k(\sqrt{q_0} \omega r) e^{ik\theta},$$

for some integer  $k_0 \geq 0$ , and some coefficients  $a_k$ ,  $-k_0 \leq k \leq k_0$ . We denote by  $|a|_\infty$  the maximum of the moduli of the coefficients  $a_k$ . Let  $u_\varepsilon^{(t)}$  and  $u_\varepsilon^{(s)}$  be the solutions to the following two dimensional scattering problem

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon^{(t)} + q\omega^2 u_\varepsilon^{(t)} &= 0 \quad \text{for } r = |y| < \varepsilon, \\ \Delta u_\varepsilon^{(s)} + q_0\omega^2 u_\varepsilon^{(s)} &= 0 \quad \text{for } r = |y| > \varepsilon, \end{aligned}$$

with the transmission conditions

$$\begin{aligned} \partial_r u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} &= \partial_r u_\varepsilon^{(t)} \Big|_{r=\varepsilon} - \partial_r u^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon}, \\ u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} &= u_\varepsilon^{(t)} \Big|_{r=\varepsilon} - u^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon}, \end{aligned}$$

and the outgoing radiation condition

$$\partial_r u_\varepsilon^{(s)} - i\omega\sqrt{q_0} u_\varepsilon^{(s)} = o(r^{-1/2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty.$$

Suppose  $\Im(q) > 0$ . There exists a constant  $C = C_{k_0}$ , depending only on  $k_0$  (and  $q$ ,  $q_0$ ) but independent of  $\omega$ ,  $\varepsilon$ , and  $R$ , such that, for any  $R \geq \varepsilon$

$$(III.2.170) \quad \left\| u^{(s)} \Big|_{r=R} \right\|_{L^2(0, 2\pi)} \leq C_{k_0} |a|_\infty \begin{cases} (\omega\varepsilon)^2 |H_0^{(1)}(\omega R)| & \text{for } 0 < \omega\varepsilon < 1, \\ 1/\sqrt{\omega R} & \text{for } 1 \leq \omega\varepsilon. \end{cases}$$

PROOF. The function  $u_\varepsilon^{(s)}(y)$ ,  $|y| = r > \varepsilon$ , is given by

$$(III.2.171) \quad u_\varepsilon^{(s)}(r, \theta) = \sum_{|k| \leq k_0} \alpha_k H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega r) e^{ik\theta},$$

where the coefficients  $\alpha_k$  are as before. Due to (III.2.162) and the asymptotics of the Hankel function  $H_k^{(1)}$  we get for any integer  $k \neq 0$

$$\left| \alpha_k H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) \right| \leq D_k |a_k| (\omega\varepsilon)^{|k|+2}, \quad \text{as } \omega\varepsilon \rightarrow 0.$$

For  $k = 0$  we have

$$|\alpha_0| \leq D_0 |a_0| (\omega\varepsilon)^2, \quad \text{as } \omega\varepsilon \rightarrow 0.$$

Here  $D_k$  is a constant that depends only on  $k$ ,  $q$  and  $q_0$ , but is independent of  $\omega$  and  $\varepsilon$ . Due to the fact that  $\alpha_k$  depends smoothly on  $\omega\varepsilon \in (0, 1]$ , it immediately follows that

$$\left| \alpha_k H_k^{(1)}(\sqrt{q_0} \omega \varepsilon) \right| \leq C_{k_0} |a|_\infty (\omega\varepsilon)^3 \quad \text{for all } 0 < |k| \leq k_0, \quad \text{and all } 0 < \omega\varepsilon < 1.$$

It also follows that

$$|\alpha_0| \leq C |a|_\infty (\omega\varepsilon)^2 \quad \text{for all } 0 < \omega\varepsilon < 1.$$

We may thus estimate

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon^{(s)}\|_{r=R}^2 \Big|_{L^2(0,2\pi)} &= 2\pi |\alpha_0|^2 \left| H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R) \right|^2 \\
&\quad + 2\pi \sum_{0 < |k| \leq k_0} |\alpha_k H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 \left| \frac{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)}{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \right|^2 \\
&\leq C_{k_0} |a|_\infty^2 (\omega\varepsilon)^4 \left( \left| H_0^{(1)}(\omega R) \right|^2 + (\omega\varepsilon)^2 \frac{\varepsilon}{R} \right) \\
&\leq C_{k_0} |a|_\infty^2 (\omega\varepsilon)^4 \left| H_0^{(1)}(\omega R) \right|^2, \quad 0 < \omega\varepsilon < 1.
\end{aligned}$$

For this estimate we have used a well known fact about Hankel functions, namely that

$$(III.2.172) \quad \frac{|H_k^{(1)}(r)|^2}{|H_k^{(1)}(s)|^2} \leq \frac{s}{r}, \quad \text{for } 0 < s \leq r, \quad k \neq 0.$$

The estimate (III.2.172) follows from the fact that the function  $r \rightarrow r \left| H_k^{(1)}(r) \right|^2$  is a *decreasing* function on  $(0, \infty)$  (cf. [76] pg. 446) for any integer  $k \neq 0$ . Altogether we have now proven the estimate (III.2.170) for  $\omega\varepsilon \in (0, 1)$ . In order to complete the proof of this lemma it thus remains to prove that

$$(III.2.173) \quad \|u_\varepsilon^{(s)}\|_{r=R}^2 \Big|_{L^2(0,2\pi)} \leq C_{k_0} \frac{|a|_\infty^2}{\omega R}, \quad \omega\varepsilon \in [1, \infty).$$

Lemma III.2.3, with  $c = \sqrt{q}/\sqrt{q_0}$  and  $r = \sqrt{q_0}\omega\varepsilon$ , implies that

$$\begin{aligned}
&\sqrt{q_0}(H_k^{(1)})'(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon) - \sqrt{q}J_k'(\sqrt{q}\omega\varepsilon) H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) \\
&= \frac{i}{\pi\omega\varepsilon} \frac{\sqrt{q_0} + \sqrt{q}}{(q_0q)^{1/4}} e^{\omega\varepsilon\Im(\sqrt{q})} e^{i(\sqrt{q_0} - \Re(\sqrt{q}))\omega\varepsilon} (1 + O((\omega\varepsilon)^{-1})),
\end{aligned}$$

as  $\omega\varepsilon \rightarrow \infty$ , and

$$|\sqrt{q}J_k'(\sqrt{q}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) - \sqrt{q_0}J_k'(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) J_k(\sqrt{q}\omega\varepsilon)| \leq C_k e^{\omega\varepsilon\Im(\sqrt{q})} (\omega\varepsilon)^{-1},$$

with  $C_k$  depending only on  $k$  (and  $q_0$  and  $q$ ). As a consequence of these two estimates, the formula (III.2.161) (and the fact that  $\alpha_k$  depends smoothly on  $\omega\varepsilon \in [1, \infty)$ ) we now get

$$|\alpha_k| \leq C_k |a_k|, \quad \text{for } 1 \leq \omega\varepsilon,$$

with  $C_k$  only dependent on  $k$  (and  $q_0$  and  $q$ ) but independent of  $\omega$  and  $\varepsilon$ . A combination of this and the representation formula (III.2.171) yields

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon^{(s)}\|_{r=R}^2 \Big|_{L^2(0,2\pi)} &= 2\pi \sum_{|k| \leq k_0} |\alpha_k|^2 |H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)|^2 \\
&\leq C_{k_0} |a|_\infty^2 (\omega R)^{-1},
\end{aligned}$$

for  $\omega\varepsilon \geq 1$ . Here we have used the well known fact that  $|H_k^{(1)}(r)|^2 \leq C_k r^{-1}$  for  $r > r_0 > 0$ . This completes the proof of (III.2.173) and thus the proof of the lemma.  $\square$

We call an inhomogeneity a hard scatterer if there is no transmitted wave, and the boundary conditions (III.2.157c)-(III.2.157d) on the boundary of the inhomogeneity are replaced by

$$u_\varepsilon^{(s)} + u^{(inc)} = 0 \quad \text{on } r = |y| = \varepsilon .$$

PROPOSITION III.2.5. *Suppose  $0 < \omega\varepsilon$ , and suppose the incident wave  $u^{inc}$  is given by*

$$u^{inc}(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k J_k(\sqrt{q_0}\omega r) e^{ik\theta} ,$$

for some coefficients  $a_k$ . We denote by  $|a|_\infty$  the maximum of the moduli of the coefficients  $a_k$ . Let  $u_\varepsilon^{(s)}$  be the solution to the following two dimensional scattering problem

$$\Delta u_\varepsilon^{(s)} + q_0\omega^2 u_\varepsilon^{(s)} = 0 \quad \text{for } r = |y| > \varepsilon ,$$

with the boundary condition

$$u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=\varepsilon} = - u^{(inc)} \Big|_{r=\varepsilon} ,$$

and the outgoing radiation condition

$$\partial_r u_\varepsilon^{(s)} - i\omega\sqrt{q_0}u_\varepsilon^{(s)} = o(r^{-1/2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty .$$

Then there exists a constant  $C$ , depending only on  $q_0$ , such that for any  $R \geq \varepsilon$

$$\left\| u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=R} \right\|_{L^2(0,2\pi)} \leq C|a|_\infty \begin{cases} (|\log(\omega\varepsilon)| + 1)^{-1} \left| H_0^{(1)}(\omega R) \right| & \text{for } 0 < \omega\varepsilon < 1 , \\ \sqrt{\varepsilon}/\sqrt{R} & \text{for } 1 \leq \omega\varepsilon . \end{cases}$$

PROOF. The function  $u_\varepsilon^{(s)}$  has the representation

$$u_\varepsilon^{(s)}(r, \theta) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon) \frac{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega r)}{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} e^{ik\theta} ,$$

from which it immediately follows that

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon^{(s)} \Big|_{r=R} \right\|_{L^2(0,2\pi)}^2 &= 2\pi|a_0|^2 |J_0(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 \left| \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)}{H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \right|^2 \\ &\quad + 2\pi \sum_{k \geq 1} (|a_{-k}|^2 + |a_k|^2) |J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 \left| \frac{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)}{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \right|^2 \\ \text{(III.2.174)} \quad &\leq 2\pi|a_0|^2 |J_0(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 \left| \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)}{H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \right|^2 + 2\pi|a|_\infty^2 \frac{\varepsilon}{R} . \end{aligned}$$

For the last inequality we have used that

$$\text{(III.2.175)} \quad \sum_{k \geq 1} |J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |J_k(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 = \frac{1}{2} ,$$



and that

$$(III.2.176) \quad \left| \frac{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)}{H_k^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \right|^2 \leq \varepsilon/R \quad ,$$

for any  $k \geq 1$  and any  $R \geq \varepsilon > 0$ . The estimate (III.2.175) follows immediately from the representation formula for a plane wave, (III.2.156), and Parseval's identity. The derivation of (III.2.176) was already explained in the proof of Proposition III.2.4. The  $L^2$  estimate of this lemma follows from (III.2.174), by observing that, due to the well known asymptotic behaviour of Bessel functions

$$|J_0(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)|^2 \left| \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega R)}{H_0^{(1)}(\sqrt{q_0}\omega\varepsilon)} \right|^2 \leq C \begin{cases} \frac{|H_0^{(1)}(\omega R)|^2}{(|\log(\omega\varepsilon)| + 1)^2} & \text{for } 0 < \omega\varepsilon < 1 \quad , \\ 1/(\omega R) \leq \varepsilon/R & \text{for } 1 \leq \omega\varepsilon \quad , \end{cases}$$

and by observing that

$$\frac{\varepsilon}{R} = \frac{\omega\varepsilon}{\omega R} \leq C \frac{|H_0^{(1)}(\omega R)|^2}{(|\log(\omega\varepsilon)| + 1)^2} \quad , \quad \text{for } 0 < \omega\varepsilon < 1 \quad , \quad \varepsilon \leq R \quad .$$

□

**REMARK III.2.6.** *In Proposition III.2.4 and Proposition III.2.5 the two different cases of the estimate are distinguished according to whether  $0 < \omega\varepsilon < 1$ , or  $1 \leq \omega\varepsilon$ . There is of course nothing "sacred" about the number 1 in this dichotomy. Due to the continuous dependence of the solution  $u_\varepsilon$  on  $\omega\varepsilon$ , we could distinguish according to whether  $0 < \omega\varepsilon < M$ , or  $M \leq \omega\varepsilon$  for any fixed  $M > 0$ .*

In the following we shall outline an approach using pseudodifferential operators, which establishes an estimate of the same nature as the bottom estimate of Proposition III.2.5 for the case of a (soft and) conducting inhomogeneity. This may also be viewed as a generalization of the bottom estimate of Proposition III.2.4 to the case when the incident wave has an infinite Fourier Series, for instance is a plane wave. Even though we only perform the analysis for a circular inhomogeneity, we expect that a very similar approach may be applied to any smooth, convex inhomogeneity of the form  $\varepsilon D$ .

**III.2.3. Pseudodifferential approach when  $\omega\varepsilon$  tends to  $+\infty$ .** We consider a problem more general than (III.2.157) in the sense that the permeability  $\mu$  is supposed piecewise constant (instead of constant). Let  $\epsilon_e$  be the real permittivity of the background. We denote by  $\epsilon$  the complex permittivity of the inhomogeneity and by  $\mu$  and  $\mu_e$  the real permeabilities respectively of the inhomogeneity and the background. We consider a highly conducting inhomogeneity. Specifically, we impose that  $\epsilon$  has a constant imaginary part:

$$\epsilon = a + ib, \quad a > 0, b > 0,$$

and we denote by  $q_e$  and  $q$  the following constants:

$$q_e = \mu_e \epsilon_e, \quad q = \mu \epsilon.$$

We study the following problem, which represents the magnetic field scattered by a small inhomogeneity:

$$(III.2.177a) \quad \begin{cases} \Delta u^t + q\omega^2 u^t = 0, & (r, \theta) \in [0, \varepsilon[ \times \mathbb{T}, \\ \Delta u^s + q_e \omega^2 u^s = 0, & (r, \theta) \in ]\varepsilon, +\infty[ \times \mathbb{T}, \end{cases}$$

with the following transmission conditions in  $r = \varepsilon$ :

$$(III.2.177b) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mu} \partial_r u^t|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\mu_e} (\partial_r u^s|_{r=\varepsilon} + \partial_r u^i|_{r=\varepsilon}), \\ u^t|_{r=\varepsilon} = u^s|_{r=\varepsilon} + u^i|_{r=\varepsilon}, \end{cases}$$

at the infinity,  $u^s$  satisfies the usual outgoing radiation condition:

$$(III.2.177c) \quad \partial_r u^s - i\sqrt{q_e} \omega u^s = O(r^{-3/2}).$$

In order to work in a fixed domain, we make the rescaling  $R = r/\varepsilon$ . We write the functions depending on the new variable  $R$  in capital letters. We therefore have

$$(III.2.178a) \quad \Delta U^t + q(\omega\varepsilon)^2 U^t = 0, \quad \forall (R, \theta) \in [0, 1[ \times \mathbb{T},$$

$$(III.2.178b) \quad \Delta U^s + q_e(\omega\varepsilon)^2 U^s = 0, \quad \forall (R, \theta) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{T},$$

with the following transmission conditions

$$(III.2.178c) \quad \frac{1}{\mu} \partial_R U^t|_{R=1} = \frac{1}{\mu_e} (\partial_R U^s|_{R=1} + \partial_R U^i|_{R=1}),$$

$$(III.2.178d) \quad U^t|_{R=1} = U^s|_{R=1} + U^i|_{R=1},$$

and with the radiation condition for  $U^s$  corresponding to that of  $u^s$ :

$$(III.2.178e) \quad \partial_R U^s - i\sqrt{q_e} \omega \varepsilon U^s = O(R^{-3/2}).$$

We suppose that  $\omega$ ,  $1/\varepsilon$  and  $\omega\varepsilon$  tend to infinity. We denote by  $\lambda$  the rescaled frequency:

$$\lambda = \omega\varepsilon.$$

The analysis we present here is made in the case of a circular inhomogeneity. The authors expect that it might be extended to an inhomogeneity under the form  $\varepsilon D$ , where  $D$  is a smooth domain of size 1, using the tools of pseudodifferential operators on the flat torus. We chose to present the circular case in a heuristic goal, but the reader with a background in microlocal analysis will be able to see the pseudodifferential calculus hidden behind our explicit calculations. Such a calculus has already been performed by Poignard in a bidimensionnal domain of arbitrary shape in [54] to obtain an impedance boundary condition, which translates the effect of the thin membrane of a biological cell on its cytoplasm into a special boundary condition on the boundary of the cytoplasm.

The main idea consists in replacing the inhomogeneity by a boundary condition: we concentrate the effect of the ball on its boundary. To obtain such a condition, since we are in a circular geometry, we use Fourier analysis, which leads us to a kind of Dirichlet-to-Neumann (also called Steklov-Poincaré) operator on the boundary of the ball. This calculus leads to a relation between the transmitted field and its normal derivative on the boundary of the inhomogeneity, so called impedance boundary condition. Then, using the transmission conditions we obtain a boundary

condition for the scattered field on the boundary of the conducting inhomogeneity. It remains to obtain the  $L^2$  estimates, using the classical Fourier analysis.

III.2.3.a. *Factorization of Helmholtz operator in the unit ball.* Here we suppose

$$(III.2.179) \quad q = a + ib, \text{ with both } a \text{ and } b \text{ strictly positive.}$$

Let us denote by  $\mathcal{L}$  the Helmholtz operator written in polar coordinates:

$$\mathcal{L} = \Delta + q\lambda^2.$$

In this section we find two operators, denoted by  $D_q$  and  $\tilde{D}_q$ , such that the Helmholtz operator  $\mathcal{L}$  can be factorized as

$$\mathcal{L} = \left( \partial_R + \tilde{D}_q \right) \left( \partial_R - D_q \right) + R_q^0,$$

where the operator  $R_q^0$  is of order 0.

Our first step will be to find an operator  $D_q^1$  such that

$$\mathcal{L} = \left( \partial_R + D_q^1 \right) \left( \partial_R - D_q^1 \right) + R_q^1,$$

with  $R_q^1$  an operator of order 1. Then using the expression of the symbol of  $R_q^1$ , we will find two operators  $D_q^0$  and  $\tilde{D}_q^0$  such that

$$\mathcal{L} = \left( \partial_R + D_q^1 + \tilde{D}_q^0 \right) \left( \partial_R - D_q^1 - D_q^0 \right) + R_q^0.$$

Denote by  $\mathbf{C}$  the annulus:

$$\mathbf{C} = \{(r, \theta) : 1/2 \leq r \leq 1, \theta \in \mathbb{T}\}.$$

The symbol  $\sigma_{\mathcal{L}}$  of  $\mathcal{L}$  in  $\mathbf{C}$  is:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \geq 1, \forall (l, R, \xi) \in \mathbb{Z} \times [1/2, 1] \times \mathbb{R}, \\ \sigma_{\mathcal{L}}(l, R, \xi, \lambda) = -\xi^2 - \frac{l^2}{R^2} + q\lambda^2 + \frac{i\xi}{R}. \end{aligned}$$

If  $l = 0$ , we easily find the following factorization:

$$(III.2.180) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathcal{L}}|_{l=0} = & \left( i\xi + \frac{1}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2} \right) \right) \left( i\xi - \frac{1}{2R} \left( -1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Here, and throughout this paper,  $\sqrt{\cdot}$  is the principal square root:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{(\text{Arg } z)/2}, \quad -\pi < \text{Arg } z \leq \pi.$$

Accordingly,  $\Re \left( \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2} \right) \geq 0$ . We define

$$(III.2.181a) \quad d_q(0, R, \lambda) = \frac{1}{2R} \left( -1 + \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2} \right),$$

$$(III.2.181b) \quad \tilde{d}_q(0, R, \lambda) = \frac{1}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2} \right).$$

Now suppose  $l \neq 0$ . The factorization analogous to (III.2.180), namely

$$\sigma_{\mathcal{L}}|_{l=0} = \left( i\xi + \frac{1}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + 4(l^2 - qR^2\lambda^2)} \right) \right) \left( i\xi - \frac{1}{2R} \left( -1 + \sqrt{1 + 4(l^2 - qR^2\lambda^2)} \right) \right),$$

will not meet our needs. Instead, define

$$(III.2.182) \quad \nu_q(l, R, \lambda) = \sqrt{1 - qR^2\lambda^2/l^2},$$

and denote by  $d_q^1$  the symbol

$$\begin{aligned} d_q^1(0, R, \lambda) &= \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2}, \\ d_q^1(l, R, \lambda) &= \frac{|l|}{R} \sqrt{1 - \frac{qR^2\lambda^2}{l^2}} \quad \text{for } l \neq 0. \end{aligned}$$

We have the following factorization of  $\sigma_{\mathcal{L}}$ :

$$\sigma_{\mathcal{L}} = (i\xi + d_q^1) (i\xi - d_q^1) + \frac{i\xi}{R}.$$

Denote by  $D_q^1$  the operator whose symbol is  $d_q^1$  and by  $R_q^1$  the operator of order 1 defined by

$$\begin{aligned} R_q^1 &= \mathcal{L} - \left( \partial_R + D_q^1 \right) \left( \partial_R - D_q^1 \right) \\ &= \mathcal{L} - \left( \partial_R^2 - D_q^1 D_q^1 - [\partial_R, D_q^1] \right). \end{aligned}$$

Thus the symbol of  $R_q^1$  is

$$\begin{aligned} \sigma_{R_q^1} &= \frac{i\xi}{R} - \frac{|l|}{R^2 \nu_q(l, R)} \\ &= \frac{i\xi}{R} - \frac{d_1}{R \nu_q^2(l, R)}. \end{aligned}$$

Now we seek two operators  $D_q^0 = \text{Op}(d_q^0)$  and  $\widetilde{D}_q^0 = \text{Op}(\widetilde{d}_q^0)$  such that

$$R_q^0 = \mathcal{L} - \left( \partial_R + D_q^1 + \widetilde{D}_q^0 \right) \left( \partial_R - D_q^1 - D_q^0 \right)$$

is of order 0, with its symbol  $r_q^0$  independent of  $\xi$  and well controlled in its dependence on  $l$ ,  $R$  and  $\lambda \geq 1$ . A simple computation leads to

$$R_q^0 = R_q^1 - \left( -D_q^1 (\widetilde{D}_q^0 + D_q^0) + (\widetilde{D}_q^0 - D_q^0) \partial_R - [\partial_R, D_q^0] - \widetilde{D}_q^0 D_q^0 \right),$$

thus,

$$r_q^0 = \sigma_{R_q^1} - \left( -d_q^1 (\widetilde{d}_q^0 + d_q^0) + i\xi (\widetilde{d}_q^0 - d_q^0) - \frac{d}{dR} d_q^0 - \widetilde{d}_q^0 d_q^0 \right).$$

We define  $d_q^0$  and  $\widetilde{d}_q^0$  by the following system:

$$\widetilde{d}_q^0|_{l=0} = 1, \quad d_q^0|_{l=0} = -1,$$

for  $l \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{d}_q^0 - d_q^0 &= 1/R, \\ \tilde{d}_q^0 + d_q^0 &= \frac{1}{R\nu_q^2(l, R)}.\end{aligned}$$

Solving, we find

$$\begin{aligned}d_q^0 &= -\frac{1}{2R} (1 - 1/\nu_q^2), \\ \tilde{d}_q^0 &= \frac{1}{2R} (1 + 1/\nu_q^2).\end{aligned}$$

We now define the symbols  $d_q$  and  $\tilde{d}_q$  by

$$\begin{aligned}d_q &= d_q^1 + d_q^0, \\ \tilde{d}_q &= d_q^1 + \tilde{d}_q^0.\end{aligned}$$

More precisely, we have

$$\forall l \in \mathbb{Z}^*, \forall R \in [1/2, 1], \forall \lambda \geq 1,$$

$$(III.2.183a) \quad d_q(l, R, \lambda) = \frac{|l|}{R} \nu_q - \frac{1}{2R} (1 - 1/\nu_q^2),$$

$$(III.2.183b) \quad \tilde{d}_q(l, R, \lambda) = \frac{|l|}{R} \nu_q + \frac{1}{2R} (1 + 1/\nu_q^2),$$

and for  $l = 0$ ,

$$\forall R \in [1/2, 1], \forall \lambda \geq 1,$$

$$(III.2.183c) \quad d_q(0, R, \lambda) = \frac{1}{2R} (-1 + \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2}),$$

$$(III.2.183d) \quad \tilde{d}_q(0, R, \lambda) = \frac{1}{2R} (1 + \sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2}).$$

We set  $D_q = \text{Op}(d_q)$  and  $\tilde{D}_q = \text{Op}(\tilde{d}_q)$ . These operators act on the functions defined on the torus  $\mathbb{T}$ . Let us define  $\mathcal{L}_0$  by

$$(III.2.184) \quad \mathcal{L}_0 = (\partial_R + \tilde{D}_q)(\partial_R - D_q).$$

If  $l = 0$ , according to (III.2.183c) we have

$$(III.2.185a) \quad \begin{aligned}\sigma_{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}|_{l=0} &= \frac{d}{dR} d_q|_{l=0} \\ &= \frac{1}{2R^2} \frac{\sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2} - 1}{\sqrt{1 - 4qR^2\lambda^2}},\end{aligned}$$

and for all  $l \in \mathbb{Z}^*$  we have

$$(III.2.185b) \quad \begin{aligned}\sigma_{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0} &= \frac{d}{dR} d_q^0 + \tilde{d}_q^0 d_q^0 \\ &= \frac{q\lambda^2(l^2 + qR^2\lambda^2)}{2(l^2 - qR^2\lambda^2)^2} + \frac{q\lambda^2(l^2 - qR^2\lambda^2/2)}{2(l^2 - qR^2\lambda^2)^2} \\ &= \frac{q(l^2/\lambda^2 + qR^2/4)}{(l^2/\lambda^2 - qR^2)^2}.\end{aligned}$$

As a result, we have the following bounds: there exists a  $C$  depending only on  $q$  such that for all  $R \in [1/2, 1]$  and  $\lambda \geq 1$ , we have

$$(III.2.186a) \quad |\sigma_{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}|_{l=0} \leq C,$$

and for  $l \neq 0$ ,

$$(III.2.186b) \quad |\sigma_{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}| \leq C.$$

Therefore there exists  $C$  such that for all  $v \in L^2(\mathbf{C})$ ,

$$(III.2.187) \quad \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)v\|_{L^2(\mathbf{C})} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbf{C})}.$$

III.2.3.b. *Properties of  $d_q$ .* In this section, we give some useful properties of  $d_q$ . We recall

$$q = a + ib, \quad a > 0, b > 0.$$

- Upper bound for  $|d_q|$ .

Since  $\Im(q) \neq 0$ , it is clear that there exists a constant  $C > 0$  depending on  $q$  such that for all integer  $l$ , for all  $\lambda \geq 1$  and for all  $R$  in  $[1/2, 1]$  we have

$$(III.2.188) \quad |d_q| \leq C(|l| + \lambda).$$

Similarly, we have:

$$(III.2.189) \quad |\tilde{d}_q| \leq C(|l| + \lambda).$$

- Lower bound for  $\Re(d_q)$  and  $\Re(\tilde{d}_q)$

Now we give a lower bound on the real part of  $d_q$ .

PROPERTY III.2.7. *Let  $q = a + ib$  with  $a$  and  $b$  be strictly positive.*

*There exists a constant  $C > 0$  and  $\lambda_0 \geq 1$  both depending on  $q$  such that for all  $R \in [1/2, 1]$  we have*

$$(III.2.190) \quad \forall \lambda \geq \lambda_0, \forall l \in \mathbb{Z}, \quad \Re(d_q(l, R, \lambda)) \geq C(\lambda + |l|),$$

$$(III.2.191) \quad \Re(\tilde{d}_q(l, R, \lambda)) \geq C(\lambda + |l|).$$

PROOF. We just prove (III.2.190).

Since

$$d_q|_{l=0} = \lambda \left( \sqrt{-4(a+ib) + \frac{1}{\lambda^2 R^2}} - \frac{1}{\lambda R} \right),$$

the result is obvious for  $l = 0$ .

Suppose  $l \neq 0$ .

$$d_q = \frac{|l|}{R} \sqrt{1 - q\lambda^2 R^2/l^2} + \frac{q\lambda^2 R/l^2}{2(1 - q\lambda^2 R^2/l^2)}.$$

With  $x = \sqrt{a}R\lambda/|l|$ ,

$$d_q = \lambda\sqrt{a} \left\{ \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1 - ib/a} + \frac{1 + ib/a}{2\sqrt{a}R\lambda(1/x^2 - 1 - ib/a)} \right\}.$$

Since

$$\frac{1 + ib/a}{(1/x^2 - 1 - ib/a)},$$

is bounded independently of  $x \geq 0$ , and since there exists  $C > 0$  such that

$$\Re \left( \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1 - ib/a} \right) > C,$$

the end of the proof is clear.  $\square$

- Lower bound for  $\Im(d_q)$ .

We denote by  $d$  and  $\nu$  the following functions:

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad \nu(t) &= \sqrt{1 - qt^2}, \\ \forall l \in \mathbb{Z}^*, \forall t > 0, \quad d(l, t) &= |l|\nu(t) - (1 - 1/\nu^2(t)) / 2. \end{aligned}$$

PROPERTY III.2.8. *Let  $q = a + ib$  with  $a$  and  $b$  strictly positive. There exists a constant  $C_q > 0$  and a  $\lambda_0 \geq 1$  depending on  $q$  such that for  $R = 1$ ,*

$$(III.2.192) \quad \forall \lambda \geq 1, \quad \Im(d_q(0, 1, \lambda)) \leq -C_q \lambda,$$

$$(III.2.193) \quad \forall \lambda \geq \lambda_0, \forall l \in \mathbb{Z}^*, \quad \Im(d_q(l, 1, \lambda)) \leq -C_q \lambda \min(1, \lambda/|l|).$$

PROOF. The case  $l = 0$  is simple, so we leave it to the reader and assume  $l \neq 0$ . Since  $\Im(\nu(t)) > 0$  for all  $t > 0$ , we may write

$$\nu(t) = \rho e^{i\theta}, \quad -\pi/2 < \theta < 0,$$

so that

$$\begin{aligned} \Im(d(l, t)) &= |l|\rho \sin(\theta) - \frac{\sin(2\theta)}{2\rho^2} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\rho^2} (|l|\rho^3 - \cos(\theta)). \end{aligned}$$

To prove  $\Im(d_q(l, 1, \lambda)) = \Im(d(l, \lambda/|l|)) < 0$ , it suffices to prove there exists a  $\lambda_0 \geq 1$  such that for every integer  $l \neq 0$  and all  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$(III.2.194) \quad |l|\rho^3 \geq 2.$$

Since

$$|\nu(t)|^2 = (1 - at^2)^2 + b^2 t^4,$$

there exists a  $t_0 > 0$  depending only on  $q$  such that for all  $t \geq t_0$ ,  $|\nu(t)|^3 \geq 2$ . Moreover, a simple calculation shows that

$$\forall t \geq 0, \quad |\nu(t)| \geq \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

Therefore, if  $|l| \geq 2(a^2 + b^2)^3/(ab)^3$  then  $\Im(d(l, \lambda/|l|)) < 0$  for all  $\lambda$ . Otherwise, we simply choose  $\lambda_0$  such that

$$\lambda_0 \geq t_0(a^2 + b^2)^3/(ab)^3.$$

We now have that  $\Im(d_q(l, 1, \lambda)) < 0$ .

To finish the proof, we let  $t = \lambda/|l|$  observe that for  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \Im(d(l, t)) &\leq \frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\theta)}{\rho^2} \frac{|l|\rho^3}{2} \\ &= \frac{1}{2t} \Im(\nu(t)). \end{aligned}$$

Since

$$\Im(\nu(t)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(1-at^2)^2 + b^2t^4} - (1-at^2)},$$

the continuous and strictly negative function

$$f(t) := \max\{1, 1/t\} \frac{1}{2t} \Im(\nu(t)), \quad t \in ]0, \infty[ ,$$

satisfies

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow \text{const}(q) < 0 \text{ as } t \rightarrow 0, \\ f(t) &\rightarrow \text{const}(q) < 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

and therefore has a negative maximum on  $[0, \infty[$ .  $\square$

III.2.3.c. *Study of the factorized problem.* In this section we suppose we know  $U^t$  on  $\partial B$  and we study the solution  $U$  of the following Cauchy problem:

$$(III.2.195a) \quad \partial_R U - D_q(R)U = 0, \text{ in } (1/2, 1] \times \mathbb{T},$$

$$(III.2.195b) \quad U(1, \theta) = U_1^t.$$

In Fourier space, we obtain for all  $l \in \mathbb{Z}$ :

$$(III.2.196a) \quad d_R \widehat{U}_l - d_q \widehat{U}_l = 0, \text{ in } (1/2, 1),$$

$$(III.2.196b) \quad \widehat{U}_l \Big|_{R=1} = \widehat{U}_{1,l}^t$$

Therefore, for all  $l$  we have:

$$(III.2.197) \quad \widehat{U}_l = \widehat{U}_{1,l}^t e^{-\int_R^1 d_q(s) ds},$$

and we infer easily the relation between  $\partial_R U^t$  and  $U^t$  at  $R = 1$  in terms of Fourier coefficients. Actually, we have

$$(III.2.198) \quad d_R \widehat{U}_l \Big|_{R=1} - d_q \widehat{U}_l \Big|_{R=1} = 0.$$

LEMMA III.2.9. *Let  $U_1^t$  be in  $L^2(\mathbb{T})$ .*

*Then the solution  $U$  of (III.2.195) is in  $H^1(\mathcal{C})$ . And the following estimates hold, for a constant  $C > 0$  depending only on  $q$ .*

$$(III.2.199) \quad \frac{1}{C} |U_1^t|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|U\|_{H^1(\mathcal{C})} \leq C\sqrt{\lambda} |U_1^t|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}.$$

*We have also:*

$$(III.2.200) \quad \frac{1}{C} |U_1^t|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\lambda} \|U\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq C |U_1^t|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

*Moreover, for all  $\sigma \in \mathbb{R}$ , there exists two constants  $C_\sigma > 0$  and  $c_\sigma$ , which also depend on  $q$ , such that:*

$$(III.2.201) \quad |U_l|_{R=1/2} \Big|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C_\sigma e^{-c_\sigma \lambda} |U_1^t|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

PROOF. The first inequality of (III.2.199) is a direct consequence of the continuity of the trace Theorem from  $H^1(\mathcal{C})$  unto  $L^2(\mathbb{T})$ .

The second inequality is a direct consequence of expression (III.2.197) of Fourier coefficients of  $U$ , and Property III.2.7.



Actually, we have:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 |\widehat{U}_l|^2 dR &= |\widehat{U}_{1,l}^t|^2 \int_{1/2}^1 e^{-2 \int_R^1 \Re(d_q)(s) ds} dR, \\ \int_{1/2}^1 |l\widehat{U}_l|^2 dR &= |\widehat{U}_{1,l}^t|^2 \int_{1/2}^1 l^2 e^{-2 \int_R^1 \Re(d_q)(s) ds} dR, \\ \int_{1/2}^1 |\partial_R \widehat{U}_l|^2 dR &= |\widehat{U}_{1,l}^t|^2 \int_{1/2}^1 |d_q(R)|^2 e^{-2 \int_R^1 \Re(d_q)(s) ds} dR.\end{aligned}$$

By Property III.2.7, there exists  $C > 0$  such that:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 e^{-2 \int_R^1 \Re(d_q)(s) ds} dR &\leq \frac{C}{|l| + \lambda}, \\ \int_{1/2}^1 l^2 e^{-2 \int_R^1 \Re(d_q)(s) ds} dR &\leq \frac{Cl^2}{|l| + \lambda}, \\ \int_{1/2}^1 |d_q(R)|^2 e^{-2 \int_R^1 \Re(d_q)(s) ds} dR &\leq C(|l| + \lambda).\end{aligned}$$

Therefore, we have proved:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 |\widehat{U}_l|^2 dR &\leq \frac{C}{|l| + \lambda} |\widehat{U}_{1,l}^t|^2, \\ \int_{1/2}^1 |l\widehat{U}_l|^2 dR &\leq \frac{Cl^2}{|l| + \lambda} |\widehat{U}_{1,l}^t|^2, \\ \int_{1/2}^1 |\partial_R \widehat{U}_l|^2 dR &\leq C(|l| + \lambda) |\widehat{U}_{1,l}^t|^2,\end{aligned}$$

hence estimates (III.2.199).

According to (III.2.188), there exists  $C > 0$  and  $c > 0$  such that

$$\frac{1}{c} |\widehat{U}_{1,l}^t| e^{-C(|l|+\lambda)(R-1)} \leq |\widehat{U}_l| \leq c |\widehat{U}_{1,l}^t| e^{-C(|l|+\lambda)(R-1)},$$

hence there exists  $C > 0$  depending on  $q$  such that

$$\frac{|\widehat{U}_{1,l}^t|^2}{C(1 + |l| + \lambda)} \leq \int_{1/2}^1 |\widehat{U}_l(R)|^2 R dR \leq \frac{C}{(1 + |l| + \lambda)} |\widehat{U}_{1,l}^t|^2,$$

Therefore, we infer that there exists a constant  $C > 0$  depending on  $q$  such that

$$(III.2.202) \quad \frac{1}{C\lambda^{1/2}} |U_1^t|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \leq \|U\|_{L^2(C)} \leq \frac{C}{\lambda^{1/2}} |U_1^t|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

To prove estimate (III.2.201), we just have to observe that:

$$\widehat{U}_l \Big|_{R=1/2} = \widehat{U}_{1,l}^t e^{-\int_{1/2}^1 d_q(s) ds},$$

and according to Property III.2.7, there exists  $C > 0$  such that

$$\left| e^{-\int_{1/2}^1 d_q(s) ds} \right| \leq e^{-C(|l|+\lambda)}.$$

For all  $\sigma > 0$  there exists  $C_\sigma > 0$  such that:

$$l^\sigma e^{-C|l|} \leq C_\sigma,$$

hence estimate (III.2.201).  $\square$

III.2.3.d. *Approximation of  $U^s$ .* Now we come back to the exterior problem. Using the impedance boundary condition found in (III.2.198) and the transmission conditions (III.2.178c)–(III.2.178d), we replace the ball by an impedance boundary condition in  $R = 1$  and we study this approximate solution of  $U^s$ .

Specifically, if we let  $(V^t, V^s)$  be the approximation of  $(U^t, U^t)$  that solves the following analogue of problem (III.2.178):

$$(III.2.203a) \quad \Delta V^s + q_e \lambda^2 V^s = 0, \quad (R, \theta) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{T},$$

$$(III.2.203b) \quad \partial_R V^t - D_q V^t = 0, \quad (R, \theta) \in (1/2, 1) \times \mathbb{T},$$

with the transmission conditions

$$(III.2.203c) \quad \frac{1}{\mu} \partial_R V^t|_{R=1} = \frac{1}{\mu_e} (\partial_R V^s|_{R=1} + \partial_R V^i|_{R=1}),$$

$$(III.2.203d) \quad V^t|_{R=1} = V^s|_{R=1} + V^i|_{R=1},$$

and the radiation condition

$$(III.2.203e) \quad (\partial_R - i\sqrt{q_e}\lambda)V^s = O(R^{-3/2}).$$

Then (III.2.203c) and (III.2.203d), along with the impedance relation

$$\partial_R V^t|_{R=1} - D_q V^t|_{R=1} = 0,$$

yield the following boundary condition for  $V^s$ :

$$(III.2.204) \quad \partial_R V^s|_{R=1} - \frac{\mu_e}{\mu} D_q V^s|_{R=1} = \frac{\mu_e}{\mu} D_q U^i|_{R=1} - \partial_R U^i|_{R=1}.$$

We will now demonstrate that the approximation  $V^s$  of  $U^s$  satisfies the  $H^{-1/2}$  bound we seek for  $U^s$ .

For convenience, we extend  $V^t$  by continuity up to  $R = 0$  by defining it as follows:

$$(III.2.205) \quad \Delta V^t + q \lambda^2 V^t = 0, \quad \text{for } (R, \theta) \in (0, 1/2) \times \mathbb{T},$$

$$(III.2.206) \quad V^t|_{R=1/2^-} = V^t|_{R=1/2^+}.$$

Observe that according to (III.2.201), if we prove that  $V^t|_{R=1}$  belongs to  $H^s(\mathbb{T})$  for some  $s \in \mathbb{R}$ , we infer that for all  $\sigma \in \mathbb{R}$  there exists two constants  $C_\sigma > 0$  and  $c_\sigma > 0$ , which depend on  $d$ , such that

$$\|V^t\|_{H^\sigma(B_{1/2})} \leq C_\sigma e^{-C_\sigma \lambda} |V_1^t|_{H^s(\mathbb{T})},$$

where  $B_{1/2}$  is the ball of radius  $1/2$  around 0. In particular, we infer that for all  $\sigma > 0$ , there exists  $C_\sigma > 0$  and  $c_\sigma > 0$  such that:

$$(III.2.207) \quad |\partial_R V^t|_{r=1/2^+} - \partial_R V^t|_{r=1/2^-}|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C_\sigma e^{-c_\sigma \lambda} |V_1^t|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

LEMMA III.2.10. *Let  $g$  be a given function in  $H^\sigma(\mathbb{T})$ ,  $\sigma \geq -1/2$ . Let  $V^s$  be the solution of the following problem:*

$$\begin{cases} \Delta V^s + q_e \lambda^2 V^s = 0, & \forall (R, \theta) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{T}, \\ \partial_R V^s|_{R=1} - (\mu_e/\mu) D_q V^s|_{R=1} = g, \end{cases}$$

with the radiation condition

$$(III.2.208) \quad (\partial_R - i\sqrt{q_e}\lambda)V^s = O(R^{-3/2}).$$

Then there exists a constant  $C = \text{const}(q, \mu/\mu_e) > 0$  and a  $\lambda_0 \geq 1$  depending on  $q$  such that for all  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$(III.2.209) \quad \|V^s|_{R=1}\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} \|g\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} + \frac{1}{\lambda^2} \|g\|_{H^{\sigma+1}(\mathbb{T})} \right).$$

PROOF. The  $l^{\text{th}}$  Fourier coefficient  $\widehat{V}_l^s$  of  $V^s$  satisfies the following ordinary differential equation:

$$(III.2.210a) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{d}{dR} \widehat{V}_l^s \right) + \lambda^2 \left( q_e - \frac{l^2}{(R\lambda)^2} \right) \widehat{V}_l^s = 0, \quad 1 < R < \infty,$$

$$(III.2.210b) \quad d_R \widehat{V}_l^s \Big|_{R=1} - \frac{\mu_e}{\mu} d_q \widehat{V}_l^s \Big|_{R=1} = \widehat{g}_l,$$

with the radiation condition as written in Fourier mode,

$$(III.2.210c) \quad \partial_R \widehat{V}_l^s - i\sqrt{q_e} \lambda \widehat{V}_l^s = O(R^{-3/2}).$$

We multiply (III.2.210a) by the conjugate of  $R\widehat{V}_l^s$  and then integrate over  $R \in [1, +\infty[$ . Using the boundary condition (III.2.210b) and the radiation condition and then taking the imaginary part, we obtain

$$\lambda\sqrt{q_e} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( R \left| \widehat{V}_l^s \right|^2 \right) - \frac{\mu_e}{\mu} \Im(d_q) \left| \widehat{V}_l^s \Big|_{R=1} \right|^2 = \Im \left( \widehat{g}_l \overline{\widehat{V}_l^s} \Big|_{R=1} \right).$$

Then since  $\Im(d_q) < 0$ ,

$$\left| \widehat{V}_l^s \Big|_{R=1} \right| \leq -\frac{\mu/\mu_e}{\Im(d_q)} |\widehat{g}_l|.$$

By Property III.2.8, there exists a constant  $C$  and a  $\lambda_0 \geq 1$ , both depending on  $q$ , such that for all  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\frac{1}{[\Im(d_q)]^2} \leq \frac{C}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{|l|^2}{\lambda^2} \right),$$

and therefore

$$|l|^{2\sigma} \left| \widehat{V}_l^s \Big|_{R=1} \right|^2 \leq C_{q, \mu/\mu_e} \left( \frac{|l|^{2\sigma}}{\lambda^2} + \frac{|l|^{2\sigma+2}}{\lambda^4} \right) |\widehat{g}_l|^2.$$

□

In the context of problem (III.2.203),

$$g = \frac{\mu_e}{\mu} D_q U^i \Big|_{R=1} - \partial_R U^i \Big|_{R=1}.$$

By (III.2.188),  $d_q|_{R=1} \leq C(\lambda + |l|)$ , and therefore

$$\|g\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C \left( \lambda \|U^i\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} + \|U^i\|_{H^{\sigma+1}(\mathbb{T})} \right) + \|\partial_R U^i\|_{H^\sigma(\mathbb{T})},$$

where  $C$  depends only on  $q$  and  $\mu_e/\mu$ .

In the case where  $U^i$  has the form

$$U^i(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l J_l(\sqrt{q_e} \lambda R) e^{il\theta},$$

which includes the case of a plane wave,

$$U^i(x) = e^{i\lambda\sqrt{q_e}x \cdot \eta}, \quad |\eta| = 1,$$

$U^i$  satisfies for all  $\sigma \geq 0$ ,

$$(III.2.211a) \quad \|U^i\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C_{q_e, \sigma} \lambda^\sigma \|a\|_\infty,$$

$$(III.2.211b) \quad \|\partial_R U^i\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C_{q_e, \sigma} \lambda^{\sigma+1} \|a\|_\infty.$$

PROOF. The second inequality is an easy consequence of the first (resp. third) inequality and the identity

$$zJ_l'(z) = lJ_l(z) - zJ_{l+1}(z).$$

The first inequality will be a consequence of the identity

$$(III.2.212) \quad lJ_l(z) = \frac{z}{2}(J_{l-1}(z) + J_{l+1}(z)).$$

By repeatedly applying (III.2.212), we find that for any positive integer  $m$ ,

$$|l|^m |J_l(z)| \leq \frac{|z|^m}{2^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |J_{l-m+2j}(z)|,$$

which implies

$$|l|^{2m} |J_l(z)|^2 \leq C_m |z|^{2m} \sum_{j=0}^m |J_{l-m+2j}(z)|^2,$$

which in turn implies (III.2.211a) for  $\sigma = m$ . The case of non-integral  $\sigma > 0$  follows by choosing any  $m > \sigma$  and using the interpolation inequality

$$\|U^i\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq \|U^i\|_{L^2(\mathbb{T})}^{1-\sigma/m} \|U^i\|_{H^m(\mathbb{T})}^{\sigma/m}.$$

□

Consequently, for  $\sigma \geq 0$ ,

$$\|g\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C_{(q, q_e, \sigma, \mu/\mu_e)} \lambda^{\sigma+1} \|a\|_\infty,$$

and thus

$$\begin{aligned} \|V^s|_{R=1}\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} &\leq C_q \left( \frac{1}{\lambda} \|g\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} + \frac{1}{\lambda^2} \|g\|_{H^{\sigma+1}(\mathbb{T})} \right) \\ &\leq C_{(q, q_e, \sigma, \mu/\mu_e)} \lambda^\sigma \|a\|_\infty. \end{aligned}$$

We have therefore proved

PROPOSITION III.2.11. *Let  $(V^t, V^s)$  solve problem (III.2.203) with the incoming wave  $U^i$  satisfying*

$$U^i(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l J_l(\sqrt{q_e} \lambda R) e^{il\theta},$$

for some sequence  $a = (a_l) \in L^\infty(\mathbb{Z})$ . Then for all  $\sigma \in \mathbb{R}$ , there exists a constant  $C$  depending only on  $q, q_e, \sigma$  and  $\mu/\mu_e$  and a  $\lambda_0$  depending only on  $q$  such that for all  $\lambda \geq \lambda_0$ , for  $\sigma \geq 0$

$$\|V^s|_{R=1}\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \leq C \lambda^\sigma \|a\|_\infty.$$

Particularly, we have

$$(III.2.213) \quad \|V^s|_{R=1}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \|a\|_\infty.$$

III.2.3.e. *Final estimate.* Before proving our main theorem, we need the following lemma.

LEMMA III.2.12. *Let  $\lambda$  be greater than 1 and let  $q = a + ib$  with  $a, b > 0$ . Let  $u$  be in  $L^2(B)$ , such that*

$$\Delta u + \lambda^2 q u = 0, \text{ in } B.$$

*Then there exists a constant  $C > 0$  and a  $\lambda_0 \geq 1$ , both depending on  $q$ , such that*

$$(III.2.214) \quad \forall \lambda \geq \lambda_0, \quad \|u|_{R=1}\|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \leq C \lambda^{1/2} \|u\|_{L^2(B)}.$$

PROOF. Let us denote by  $g$  the trace of  $u$  on the boundary  $R = 1$ . Let  $v$  be the solution of the factorized problem:

$$\begin{aligned} \partial_R v - D_q(R)v &= 0, \text{ in } \mathbf{C}, \\ v|_{R=1} &= g, \end{aligned}$$

and in  $B_{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda^2 q v &= 0 \text{ in } B_{1/2}, \\ v|_{R=1/2^-} &= v|_{R=1/2^+}. \end{aligned}$$

Recall that  $\mathcal{L}$  is Helmholtz operator while  $\mathcal{L}_0$  is its factorization (III.2.184) at the order 0. We denote by  $w$  the difference  $u - v$ .  $w$  satisfies

$$\begin{aligned} \Delta w + \lambda^2 q w &= -(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)v, \text{ in } \mathbf{C}, \\ \Delta w + \lambda^2 q w &= 0, \text{ in } B_{1/2}, \end{aligned}$$

with transmission conditions

$$\begin{aligned} w|_{R=1/2^-} &= w|_{R=1/2^+}, \\ \partial_R w|_{R=1/2^-} &= \partial_R w|_{R=1/2^+} + \partial_R v|_{R=1/2^-} - \partial_R v|_{R=1/2^+}. \end{aligned}$$

and with boundary condition

$$w|_{R=1} = 0.$$

Observe that by applying (III.2.202) with  $U = v$  the proof is finished if we can show

$$(III.2.215) \quad \|v\|_{L^2(B)} \leq C \|u\|_{L^2(B)}$$

for  $\lambda$  sufficiently large. According to  $\mathcal{L} - \mathcal{L}_0$  is an operator from  $L^2(\mathbf{C})$  unto  $L^2(\mathbf{C})$ , bounded independently of  $\lambda$ , and using inequality (III.2.207), we obtain by classical energy estimates:

$$\|w\|_{H^1(B)} \leq C \|v\|_{L^2(B)},$$

and then

$$\|w\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\lambda^2} \|v\|_{L^2(B)},$$

hence (III.2.215), and the proof is finished.  $\square$

COROLLARY III.2.13. *Let  $\lambda$  be greater than 1 and  $q = a + ib$  with  $a, b > 0$ . Let  $f$  and  $u$  be in  $L^2(B)$  such that*

$$\Delta u + \lambda^2 q u = f \quad \text{in } B.$$

*Then there exists a constant  $C > 0$  and a  $\lambda_0 \geq 1$ , both depending on  $q$ , such that*

$$(III.2.216) \quad \forall \lambda \geq \lambda_0, \quad \|u\|_{R=1} \|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \leq C \lambda^{1/2} \left( \|u\|_{L^2(B)} + \frac{1}{b \lambda^2} \|f\|_{L^2(B)} \right).$$

PROOF. Let  $u^0 \in H_0^1(B)$  solve  $\mathcal{L}u^0 = f$ . We write this equation in the Fourier mode:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{d}{dR} \widehat{u^0}_l \right) + (\lambda^2 q - l^2/R^2) \widehat{u^0}_l &= \widehat{f}_l \quad \text{in } [0, 1], \\ \widehat{u^0}_l|_{R=1} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplying by  $R \overline{\widehat{u^0}_l}$ , integrating and then taking imaginary parts, we find

$$b \lambda^2 \left( \int_0^1 |\widehat{u^0}_l|^2 R dR \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^1 |\widehat{f}_l|^2 R dR \right)^{1/2},$$

and therefore,

$$\|u^0\|_{L^2(B)} \leq \frac{1}{b \lambda^2} \|f\|_{L^2(B)}.$$

The corollary follows by applying Lemma III.2.12 to  $u - u^0$ .  $\square$

It remains to show that  $V^s$  is a nice approximation of  $U^s$ . This will be proved in the following result.

PROPOSITION III.2.14. *Let  $U^i$  be an incident wave of the form*

$$(III.2.217) \quad U^i(R, \theta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l J_l(\sqrt{q_e} \lambda R) e^{il\theta},$$

*where  $(a_l) \in L^\infty(\mathbb{Z})$ . Let  $q = a + ib$  with  $a, b > 0$ . Let  $(U^t, U^s)$  be the solution of problem (III.2.178) and let  $(V^t, V^s)$  be that of problem (III.2.203). Then there exists a constant  $C > 0$  depending on  $q$  and a  $\lambda_0$  depending only on  $q$  such that for all  $\lambda \geq \lambda_0$ ,*

$$\|U^t\|_{L^2(B)} \leq C \|V^t\|_{L^2(C)}.$$

PROOF. Denote by  $W^s$  and  $W^t$  the following fields:

$$W^s = U^s - V^s, \quad W^t = U^t - V^t.$$

They satisfy

$$\begin{aligned} \Delta W^t + q \lambda^2 W^t &= -(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) V^t, & (R, \theta) \in (1/2, 1) \times \mathbb{T}, \\ \Delta W^t + q \lambda^2 W^t &= 0, & (R, \theta) \in (0, 1/2) \times \mathbb{T}, \\ \Delta W^s + q_e \lambda^2 W^s &= 0, & (R, \theta) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{T}, \end{aligned}$$

with the following transmission conditions at  $R = 1/2$ :

$$\begin{aligned} \partial_R W^t \Big|_{R=1/2^+} &= \partial_R W^t \Big|_{R=1/2^-} + \partial_R V^t \Big|_{R=1/2^+} - \partial_R V^t \Big|_{R=1/2^-}, \\ W^t \Big|_{R=1/2^+} &= W^t \Big|_{R=1/2^-}, \end{aligned}$$

with the following transmission conditions across  $\partial B$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \partial_R W^t \Big|_{R=1} &= \frac{1}{\mu_e} \partial_R W^s \Big|_{R=1}, \\ W^t \Big|_{R=1} &= W^s \Big|_{R=1}, \end{aligned}$$

and the radiation condition

$$(\partial_R - i\sqrt{q_e}\lambda)V^s = O(R^{-3/2}).$$

*Claim:*

There exists  $C > 0$  such that

$$\lambda^2 b \|W^t\|_{L^2(B)} \leq C \|V^t\|_{H^1(C)}.$$

To prove this, note that because  $W^t$  and  $W^s$  solve the above transmission problem, we have

(III.2.218)

$$\begin{aligned} - \int_B |\nabla W^t|^2 + q\lambda^2 \int_B |W^t|^2 &= - \int_C [(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)V^t] \overline{W^t} \, \text{dvol}_C - \int_{\partial B} \partial_\nu W^t \overline{W^t} \, \text{d}\sigma \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \left( \partial_R V^t \Big|_{R=1/2^+} - \partial_R V^t \Big|_{R=1/2^-} \right) \overline{W^t} \Big|_{R=1/2} \, \text{d}\theta, \end{aligned}$$

and for any  $R > 1$ ,

$$\begin{aligned} - \int_A |\nabla W^s|^2 + q_e \lambda^2 \int_A |W^s|^2 &= - \int_{\partial A} \partial_\nu W^s \overline{W^s} \, \text{d}\sigma \\ &= - \int_{\partial B_R} \partial_\nu W^s \overline{W^s} \, \text{d}\sigma + \int_{\partial B} \partial_\nu W^s \overline{W^s} \, \text{d}\sigma \\ &= -i\sqrt{q_e}\lambda \int_{\partial B_R} |W^s|^2 \, \text{d}\sigma + \int_{\partial B_R} O(R^{-3/2})W^s \, \text{d}\sigma \\ &\quad + \frac{\mu_e}{\mu} \int_{\partial B} \partial_\nu W^t \overline{W^t} \, \text{d}\sigma, \end{aligned} \tag{III.2.219}$$

where  $A = B_R \setminus B$ . Taking the imaginary part of (III.2.218) yields

$$\begin{aligned} b\lambda^2 \|W^t\|_{L^2(B)}^2 &= -\Im \left\{ \int_C [(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)V^t] \overline{W^t} \right\} - \Im \left\{ \int_{\partial B} \partial_\nu W^t \overline{W^t} \, \text{d}\sigma \right\} \\ &\quad + \Im \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \partial_R V^t \Big|_{R=1/2^+} - \partial_R V^t \Big|_{R=1/2^-} \right) \overline{W^t} \Big|_{R=1/2} \, \text{d}\theta \right\}, \end{aligned}$$

and taking the imaginary part of (III.2.219) yields

$$0 = -\sqrt{q_e}\lambda \|W^s\|_{L^2(\partial B_R)}^2 + \frac{\mu_e}{\mu} \Im \left\{ \int_{\partial B} \partial_\nu W^t \overline{W^t} \, \text{d}\sigma \right\} + o(1)_{R \rightarrow \infty},$$

which implies

$$\Im \left\{ \int_{\partial B} \partial_\nu W^t \overline{W^t} \, \text{d}\sigma \right\} \geq 0.$$

Combining, we get

$$\begin{aligned} \lambda^2 b \|W^t\|_{L^2(B)}^2 &\leq \left| \int_{\mathcal{C}} [(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)V^t] \overline{W^t} \right| \\ &\quad + \left| \int_0^{2\pi} \left( \partial_R V^t|_{R=1/2^+} - \partial_R V^t|_{R=1/2^-} \right) \overline{W^t}|_{R=1/2} d\theta \right| \end{aligned}$$

thus, for any  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^2 b \|W^t\|_{L^2(B)}^2 &\leq \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)V^t\|_{L^2(\mathcal{C})} \|W^t\|_{L^2(B)} + \\ &\quad + \left( \left| \partial_R V^t|_{R=1/2^+} - \partial_R V^t|_{R=1/2^-} \right|_{H^s(\mathbb{T})} \right) \|W^t|_{R=1/2}|_{H^{-s}(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

According to estimate (III.2.187) we have

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)V^t\|_{L^2(\mathcal{C})} \leq C_q \|V^t\|_{L^2(\mathcal{C})},$$

and by (III.2.207) with Lemma III.2.9, for any  $s \geq 0$ , there exists  $C_{q,s} > 0$  such that

$$\left| \partial_R V^t|_{R=1/2^+} - \partial_R V^t|_{R=1/2^-} \right|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C_{q,s} e^{-C\lambda} \|V^t\|_{L^2(\mathcal{C})}.$$

Moreover, according to lemma III.2.12, we have:

$$\|W^t|_{R=1/2}|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\lambda} \|W^t\|_{L^2(B_{1/2})},$$

the *claim* follows from the three last estimates.

Thus, for some constant  $C$  depending on  $q$ , we have

$$\|W^t\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\lambda^2} \|V^t\|_{L^2(\mathcal{C})},$$

hence the theorem.  $\square$

Therefore, by Lemma III.2.9, we have:

$$\|V^t\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|V^t|_{R=1}|_{L^2(\mathbb{T})},$$

hence by (III.2.213) (Proposition III.2.11 with  $\sigma = 0$ ), we have:

$$\|V^t|_{R=1}|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{Z})}.$$

By Lemma III.2.12, we have:

$$\frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|U^t|_{R=1}|_{H^{-1/2}(\mathbb{T})} \leq \|U^t\|_{L^2(B)}.$$

Thanks to Proposition III.2.14, we infer

$$\|U^t|_{R=1}|_{H^{-1/2}(\partial B)} \leq C \|a\|_{L^\infty(\mathbb{Z})}.$$

We are now in a position to state and prove the main theorem.

**THEOREM III.2.15.** *Let  $(u^t, u^s)$  solve problem (III.2.177), with the incident wave  $u^i$  of the form*

$$u^i(r, \theta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l J_l(\sqrt{q_e} \omega r) e^{il\theta}.$$



Then there exists a constant  $C = \text{const}(q, q_e, \mu/\mu_e)$  and a  $\lambda_0 \geq 1$  depending only on  $q$  such that for any  $r \geq 1$  and for any  $\varepsilon > 0$  and  $\omega > 0$  such that  $\varepsilon\omega \geq \lambda_0$ ,

$$\|u^s\|_{H^{-1/2}(\partial B_r)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\|a\|_\infty.$$

PROOF.

$$\begin{aligned} \|u^s\|_{H^{-1/2}(\partial B_r)}^2 &= r \sum_l \left| \widehat{(u^s|_{r=\varepsilon})}_l \frac{H_l(\sqrt{q_e}\omega r)}{H_l(\sqrt{q_e}\omega\varepsilon)} \right|^2 / (1 + |l|) \\ &\leq C_{q_e} \|u^s\|_{H^{-1/2}(\partial B_\varepsilon)}^2 \\ &= C_{q_e}\varepsilon \|U^s\|_{H^{-1/2}(\partial B)}^2, \end{aligned}$$

where the inequality follows from the fact that for  $l \neq 0$

$$\left| \frac{H_l(\sqrt{q_e}\omega r)}{H_l(\sqrt{q_e}\omega\varepsilon)} \right|^2 \leq \frac{\varepsilon}{r},$$

as well as from the fact that for  $l = 0$

$$\begin{aligned} r \left| \frac{H_0(\sqrt{q_e}\omega r)}{H_0(\sqrt{q_e}\omega\varepsilon)} \right|^2 &= \varepsilon \frac{\sqrt{q_e}\omega r |H_0(\sqrt{q_e}\omega r)|^2}{\sqrt{q_e}\omega\varepsilon |H_0(\sqrt{q_e}\omega\varepsilon)|^2} \\ &\leq \frac{2/\pi}{\sqrt{q_e} |H_0(\sqrt{q_e})|^2} \end{aligned}$$

since  $t \mapsto t |H_0(t)|^2$  is increasing for  $t > 0$  (to the limit  $2/\pi$ ) and since we are assuming  $\lambda = \varepsilon\omega \geq 1$  [76]. The theorem follows from proposition III.2.14 and proposition III.2.11.  $\square$

**Acknowledgments.** This research was partially supported by NSF grants DMS-0307119, and DMS-0604999. C.P. was partially supported by Région Rhône-Alpes, with EURODC scholarship.

## Bibliographie

- [1] Toufic Abboud and Jean-Claude Nédélec. Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium. *J. Math. Anal. Appl.*, 164(1) :40–58, 1992.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 12 :623–727, 1959.
- [3] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 :35–92, 1964.
- [4] M. S. Agranovič. Spectral properties of elliptic pseudodifferential operators on a closed curve. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 13(4) :54–56, 1979.
- [5] Alberts, Johnson, Lewis, Raff, Roberts, and Walter. *Molecular Biology of the Cell*. Garland Science, NY, 2002. Fourth Edition.
- [6] H. Ammari and S. Moskow. Asymptotic expansions for eigenvalues in the presence of small inhomogeneities. *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(1) :67–75, 2003.
- [7] Habib Ammari, Elena Beretta, and Elisa Francini. Reconstruction of thin conductivity imperfections. II. The case of multiple segments. *Appl. Anal.*, 85(1-3) :87–105, 2006.
- [8] Habib Ammari and Hyeonbae Kang. Properties of the generalized polarization tensors. *Multiscale Model. Simul.*, 1(2) :335–348 (electronic), 2003.
- [9] Habib Ammari and Hyeonbae Kang. Reconstruction of conductivity inhomogeneities of small diameter via boundary measurements. In *Inverse problems and spectral theory*, volume 348 of *Contemp. Math.*, pages 23–32. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [10] Habib Ammari and Fadil Santosa. Guided waves in a photonic bandgap structure with a line defect. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(6) :2018–2033 (electronic), 2004.
- [11] X. Antoine, H. Barucq, and A. Bendali. Bayliss-Turkel-like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *J. Math. Anal. Appl.*, 229(1) :184–211, 1999.
- [12] Balanis and Constantine. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley and Sons Ltd, 1989.
- [13] Elena Beretta and Elisa Francini. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of thin inhomogeneities. In *Inverse problems : theory and applications (Cortona/Pisa, 2002)*, volume 333 of *Contemp. Math.*, pages 49–62. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [14] Elena Beretta, Elisa Francini, and Michael S. Vogelius. Asymptotic formulas for steady state voltage potentials in the presence of thin inhomogeneities. A rigorous error analysis. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(10) :1277–1301, 2003.
- [15] Elena Beretta, Arup Mukherjee, and Michael Vogelius. Asymptotic formulas for steady state voltage potentials in the presence of conductivity imperfections of small area. *Z. Angew. Math. Phys.*, 52(4) :543–572, 2001.
- [16] Essex J. Bond, Xu. Li, Susan C. Hagness, and D. Van Veen Barry. Microwave imaging via space-time beamforming for early detection of breast cancer. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(8), 2003.
- [17] Alain Bossavit. *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, volume 14 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1993.

- [18] Haim Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [19] Yves Capdeboscq and Michael S. Vogelius. A general representation formula for boundary voltage perturbations caused by internal conductivity inhomogeneities of low volume fraction. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(1) :159–173, 2003.
- [20] L. A. Carvalho dos Santos and J. Hounie. Estimates for the Poisson kernel and Hardy spaces on compact manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, 299(2) :465–493, 2004.
- [21] Michel Cessenat. *Mathematical methods in electromagnetism*, volume 41 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996. Linear theory and applications.
- [22] David Colton and Rainer Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [23] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. I*. “Mir”, Moscow, 1982. Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. [Geometry of surfaces, groups of transformations and fields], Translated from the Russian by Vladimir Kotliar.
- [24] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern geometry—methods and applications. Part I*, volume 93 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields, Translated from the Russian by Robert G. Burns.
- [25] P. Dular, C. Geuzaine, F. Henrotte, and W. Legros. A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method. *IEEE TRMAG*, 34(5) :3395–3398, September 1998.
- [26] E.C. Fear and M.A. Stuchly. Modeling assemblies of biological cells exposed to electric fields. *IEEE Trans.Bio.Eng.*, 45(1) :1259–1271 (electronic), 1998.
- [27] E.C. Fear and M.A. Stuchly. A novel equivalent circuit model for gap-connected cells. *Phys. Med. Biol.*, 43 :1439–1448 (electronic), 1998.
- [28] Harley Flanders. *Differential forms with applications to the physical sciences*. Academic Press, New York, 1963.
- [29] K.R. Foster and H.P. Schwan. Dielectric properties of tissues and biological materials : a critical review. *CRC in Biomedical Engineering*, 17(1) :25–104, 1989.
- [30] S Gabriel, R.W Lau, and E Corthout. The dielectric properties of biological tissues : I. literature survey. *Phys. Med. Biol.*, 41 :2231–2249 (electronic), 1996.
- [31] S Gabriel, R.W Lau, and C Gabriel. The dielectric properties of biological tissues : II. measurements in the frequency range 10hz to 20ghz. *Phys. Med. Biol.*, 41 :2251–2269 (electronic), 1996.
- [32] S Gabriel, R.W Lau, and C Gabriel. The dielectric properties of biological tissues : III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Phys. Med. Biol.*, 41 :2271–2293 (electronic), 1996.
- [33] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- [34] Peter B. Gilkey, John V. Leahy, and Jeonghyeong Park. *Spectral geometry, Riemannian submersions, and the Gromov-Lawson conjecture*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [35] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [36] L. Halpern and J. Rauch. Absorbing boundary conditions for diffusion equations. *Numer. Math.*, 71(2) :185–224, 1995.
- [37] Laurence Halpern and Jeffrey Rauch. Error analysis for absorbing boundary conditions. *Numer. Math.*, 51(4) :459–467, 1987.

- [38] D. Hansen and M. Vogelius. High frequency perturbation formulas for the effect of small inhomogeneities. Submitted, January 2006.
- [39] D.J. Hansen, C. Poinard, and M.S. Vogelius. Asymptotically precise norm estimates of scattering from a small circular inhomogeneity. Submitted, November 2006.
- [40] Einar Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1997. Reprint of the 1976 original.
- [41] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Pseudodifferential operators.
- [42] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.
- [43] Olivier D. Lafitte. Diffraction in the high frequency regime by a thin layer of dielectric material. I. The equivalent impedance boundary condition. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(3) :1028–1052 (electronic), 1999.
- [44] Olivier D. Lafitte. Diffraction in the high frequency regime by a thin layer of dielectric material. II. The trace of the wave in the shadow of the obstacle. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(3) :1053–1079 (electronic), 1999.
- [45] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications Inc., New York, 1972. Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Unabridged and corrected republication.
- [46] Xu. Li and Susan C. Hagness. A conformal microwave imaging algorithm for breast cancer detection. *IEEE Microwave and wireless components letters*, 11(3), 2001.
- [47] Yan Yan Li and Michael Vogelius. Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 153(2) :91–151, 2000.
- [48] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [49] Severino T. Melo. Characterizations of pseudodifferential operators on the circle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(5) :1407–1412, 1997.
- [50] S. Muñoz, J.L. Sebastián, M. Sancho, and J.M. Miranda. Transmembrane voltage induced on altered erythrocyte shapes exposed to rf fields. *Bioelectromagnetics*, 25(1) :631–633 (electronic), 2004.
- [51] Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [52] L. Nicolas, N. Burais, F. Buret, O. Fabrègue, L. Krähenbühl, A. Nicolas, C. Poinard, R. Scotretti, N. Siauve, and C Vollaire. Interactions between electromagnetic field and biological tissues : Questions, some answers and future trends. *International Compumag Society Newsletter*, 10(2), 2003.
- [53] A. Nikiforov and V. Ouvarov. *Éléments de la théorie des fonctions spéciales*. Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Vladimir Kotliar.
- [54] C. Poinard. Impedance boundary condition in a biological cell submitted to a high frequency field. In preparation.
- [55] C. Poinard. Asymptotic estimates of the electric field in a biological cell at low frequencies. In *The 7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (WAVES'05)*, 20-24 June 2005. Brown University, Providence R.I, U.S.A.
- [56] C. Poinard, P. Dular, L. Krähenbühl, L. Nicolas, and M Schatzman. Méthodes asymptotiques pour le calcul de champs. In *5ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2006)*, 29-30 Nov. 1 Dec. 2006. Lille, FRANCE.
- [57] C. Poinard, M. Schatzman, L. Nicolas, L. Krähenbühl, F. Musy, and R. Perrussel. Asymptotic estimates of the electric field in a circular biological cell at low frequencies. In *The 15th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag'2005)*, 26-30 June 2005. Shenyang, Liaoning, CHINA.
- [58] Clair Poinard. Asymptotics expansions of the electric field in the biological cell at low frequencies : the circular case. Preprint.

- [59] Clair Poinard. Rigorous asymptotics for steady state voltage potentials in a bidimensional highly contrasted medium. Submitted to M2AN. <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00083670>, May 2006.
- [60] Clair Poinard. Rigorous asymptotics for the electric field in tm mode at mid-frequency in a bidimensional medium with a thin layer. Submitted to SIAM J. APPL. MATH. <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00085930>, sept 2006.
- [61] G Pucihar, T Kotnik, B Valič, and D Miklavčič. Numerical determination of transmembrane voltage induced on irregularly shaped cells. *Annals of Biomedical Engineering*, 34(4) :642–652 (electronic), 2006.
- [62] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [63] Jukka Saranen and Gennadi Vainikko. *Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [64] J.L. Sebastián, S. Muñoz, M. Sancho, and J.M. Miranda. Analysis of the influence of the cell geometry and cell proximity effects on the electric field distribution from direct rf exposure. *Phys. Med. Biol.*, 46 :213–225 (electronic), 2001.
- [65] D. Sel, D. Cukjati, D. Batiuskaite, T. Slivnik, L.M. Mir, and D. Miklavcic. Sequential finite element model of tissue electroporation. *IEEE Trans. Bio. Eng.*, (52(5)) :816–827, 2005.
- [66] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [67] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.
- [68] M.A. Stuchly and S.S. Stuchly. Electrical properties of biological substances. *Biological Effects and Medical Applications of Electromagnetic Energy*, 1990.
- [69] S.I. Sukharev, V.A Klenchin, S.M. nad Chernomordik L.V. Serov, and Chizmadzhev Y.A. Electroporation and electrophoretic dna transfer into cells : The effect of dna interaction with electropores. *Biophys J.*, (63) :1320–1327, 1992.
- [70] Michael E. Taylor and Lars Hormander. *Reviews : The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vols I & II*, volume 92. 1985.
- [71] François Trèves. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1*. Plenum Press, New York, 1980. Pseudodifferential operators, The University Series in Mathematics.
- [72] T.Y. Tsong. Electroporation of cell membranes. *Biophys J.*, (60) :297–306, 1991.
- [73] V. Turunen. Commutator characterization of periodic pseudodifferential operators. *Journal for Analysis and its Appl.*, 19(1) :95–108, 2000.
- [74] V. Turunen and G. Vainikko. On symbol analysis of periodic pseudodifferential operators. *Journal for Analysis and its Appl.*, 17(1) :9–22, 1998.
- [75] Karl F. Warnick and David V. Arnold. Electromagnetic green functions using differential forms. *Journal of. Electromagnetic Waves and Applications*, 10(3) :427–438, 1996.
- [76] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1944.