



**HAL**  
open science

# Modèles particulières stochastiques pour des problèmes d'évolution adaptative et pour l'approximation de solutions statistiques

Viet Chi Tran

► **To cite this version:**

Viet Chi Tran. Modèles particulières stochastiques pour des problèmes d'évolution adaptative et pour l'approximation de solutions statistiques. Mathématiques [math]. Université de Nanterre - Paris X, 2006. Français. NNT: . tel-00125100

**HAL Id: tel-00125100**

**<https://theses.hal.science/tel-00125100v1>**

Submitted on 17 Jan 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° attribué par la bibliothèque

\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_

**THÈSE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS X**

*Discipline* : MATHÉMATIQUES

**Tran Viet Chí**

13 DÉCEMBRE 2006

---

**Modèles particuliers stochastiques pour des problèmes d'évolution  
adaptative et pour l'approximation de solutions statistiques**

---

JURY :

M. STÉPHAN CLÉMENÇON, EXAMINATEUR  
M. RÉGIS FERRIÈRE, EXAMINATEUR  
M. AMAURY LAMBERT, EXAMINATEUR  
M. CHRISTIAN LÉONARD, EXAMINATEUR  
MME. SYLVIE MÉLÉARD, DIRECTRICE DE THÈSE  
M. DENIS TALAY, RAPPORTEUR

RAPPORTEURS :

MM. DONALD A. DAWSON ET DENIS TALAY



# Remerciements

En tout premier lieu, je tiens de tout cœur à remercier Sylvie Méléard. Elle m'a fait bénéficier durant ces trois années de ses conseils avisés, de son grand savoir mathématique et je lui suis reconnaissant d'avoir toujours été disponible, en toutes circonstances. Je lui suis aussi redevable pour son travail titanesque de relecture et de correction ! J'admire son énergie, son engagement et sa détermination. Je suis très heureux qu'elle ait accepté de guider mes premiers pas en recherche, et qu'elle m'ait permis de travailler avec elle sur des sujets passionnants.

Je remercie Donald Dawson et Denis Talay pour m'avoir accordé l'immense honneur de rapporter ma thèse et pour l'intérêt qu'ils ont lui porté. Leurs travaux ont été pour moi une source d'inspiration constante tout au long de mes recherches. Je remercie également Denis Talay de faire partie de mon jury.

Merci également à Stéphan Cléménçon, Régis Ferrière, Amaury Lambert et Christian Léonard de participer à mon jury de thèse. Merci à eux d'avoir pris le temps de répondre à mes questions lorsque je venais les voir, et de m'avoir initié aux arcanes de leurs domaines. Certaines idées et parties de cette thèse ont été très influencées par les discussions que nous avons pu avoir, par les pistes qu'ils m'ont suggérées ou par le travail que nous avons pu faire ensemble.

Avec Stéphan Cléménçon, Hector De Arazoza et Patrice Bertail, nous espérons bientôt concrétiser nos travaux communs sur la modélisation épidémiologique du SIDA à Cuba. Merci à Hector et à Teresita pour l'accueil chaleureux qu'ils nous ont réservé à la Havane l'année dernière.

Ma thèse a été financée par le projet *ACI Populations structurées* coordonné par Sylvie Méléard. Parmi les membres de cette ACI que je n'ai pas encore cités, je tiens à remercier Laurent Desvilletes et Nicolas Champagnat, avec qui j'ai beaucoup bavardé et échangé.

Merci à l'ensemble de l'équipe MODAL'X de m'avoir accueilli pendant ces trois années de thèse et cette année d'ATER. J'ai énormément apprécié la convivialité de l'équipe et la gentillesse de ses membres, ainsi que leur attention et leur disponibilité vis à vis des "jeunes". Merci à Patrick Cattiaux et Gérard Kerkycharian, pour avoir répondu aux questions que je leur ai posées. Je remercie également le laboratoire d'Ecologie de l'ENS Ulm et le CMAP pour m'avoir accueilli lorsque je suivais Sylvie dans ses pérégrinations.

J'ai une pensée pour les nombreux thésards et camarades que j'ai connus durant ces années. Bien sûr je n'oublierai jamais les (ex- et presque)occupants du bureau E12, dont Mylène, Nathaël, Pierre-André, Yoann, Kaouthar, Aldéric, Sébastien, Stéphanie, Victor, Joaquin, Bénédicte... Je salue aussi mes collègues de l'équipe d'Ecologie d'Ulm, Dominique, Matthias, Virginie, Silvia et Arnaud...

Merci enfin à Ba et Me, Thi, Lam'y, Tam, Bao Quyen, Myriam, Hermann, Pierre, Thibaud, Olivier, Claire, Hélène, Thomas, Vincent, Magali, Laurence et aux très nombreux autres que je n'ai pas cités, mais à qui je pense très fort. Leur présence a été très importante durant ces trois années.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Modélisation probabiliste d'une population structurée en traits et en âges . . . . .	1
1.1.1	Modélisation microscopique de populations structurées en traits et en âges	3
1.1.2	Approximation par des équations aux dérivées partielles en "grande population" . . . . .	5
1.1.3	Comportement en temps grand pour les populations logistiques structurées par âge . . . . .	8
1.1.4	Limites des dynamiques adaptatives . . . . .	9
1.1.5	Perspectives . . . . .	10
1.2	Approximation particulière de l'intensité des solutions statistiques des équations de McKean-Vlasov et Navier-Stokes 2D . . . . .	11
1.2.1	Solutions statistiques pour l'équation de McKean-Vlasov . . . . .	12
1.2.2	Approximation des solutions statistiques pour l'équation de Navier-Stokes 2D . . . . .	16
<b>I</b>	<b>Modélisation probabiliste d'une population structurée par traits et par âges</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Un modèle microscopique de population structurée par traits et par âges</b>	<b>23</b>
2.1	Description des paramètres régissant la dynamique individuelle . . . . .	24
2.1.1	Naissances et mutations . . . . .	24
2.1.2	Le vieillissement . . . . .	25
2.1.3	Morts et interactions . . . . .	27
2.1.4	Suggestions de généralisations possibles . . . . .	30
2.2	Processus microscopique . . . . .	30
2.2.1	Existence et unicité des solutions de (2.2.2) . . . . .	31
2.2.2	Générateur infinitésimal . . . . .	34
2.3	Simulations . . . . .	37
2.3.1	Algorithme de simulations . . . . .	37
2.3.2	Exemples . . . . .	38
2.3.2.1	Exemple 1 : une compétition fondée sur la taille dans un modèle de population structurée par âge . . . . .	38
2.3.2.2	Exemple 2 : une population structurée en deux classes . . . . .	39
2.3.2.3	Exemple 3 : une compétition entre classes d'âge . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Renormalisation du processus microscopique et approximation par une équation aux dérivées partielles</b>	<b>45</b>
3.1	Processus microscopique renormalisé . . . . .	47
3.1.1	Construction d'un processus à valeurs dans $\mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$ . . . . .	48

3.1.2	Propriétés de moments et de martingale . . . . .	49
3.1.2.1	Existence et propriétés de moments . . . . .	50
3.1.2.2	Problème de martingale . . . . .	53
3.2	Convergence vers la solution faible mesure d'une équation aux dérivées partielles dans l'asymptotique des grandes populations . . . . .	54
3.2.1	Tension de la suite $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . . . . .	55
3.2.2	Existence et unicité de la solution de (3.0.1) . . . . .	57
3.2.3	Absolute Continuité des solutions de l'équation d'évolution (3.0.1) . . . . .	59
3.2.3.1	Un premier résultat d'absolute continuité par rapport aux variables de traits . . . . .	59
3.2.3.2	Un résultat d'absolute continuité dans le cas d'un âge scalaire . . . . .	60
3.2.4	Forme classique de l'équation aux dérivées partielles (3.0.1) . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Théorème Central Limite pour l'approximation <i>grande population</i> d'un système de particules structuré en traits et en âges</b> . . . . .	<b>65</b>
4.1	Préliminaires fonctionnels . . . . .	66
4.2	Enoncé du Théorème Central Limite . . . . .	68
4.3	Processus des fluctuations . . . . .	69
4.4	Tension de la séquence des fluctuations . . . . .	72
4.4.1	Critère de relative compacité dans $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1),1})$ . . . . .	72
4.4.2	Estimée préliminaire . . . . .	73
4.4.3	Vérification du critère pour $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . . . . .	77
4.5	Identification des valeurs d'adhérence . . . . .	80
4.6	Applications . . . . .	85
4.6.1	Intervalles de confiance . . . . .	85
4.6.2	Comportement en temps grand pour une population logistique structurée par un âge scalaire . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Déviation exponentielles pour l'approximation <i>grande population</i> d'un système de particules structuré en traits et âges</b> . . . . .	<b>91</b>
5.1	Résultat principal du chapitre . . . . .	92
5.2	Martingales et moments exponentiels . . . . .	95
5.3	Tension exponentielle . . . . .	97
5.3.1	Critère de compacité relative sur $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ . . . . .	97
5.3.2	Construction d'un ensemble satisfaisant le Point 1. du Théorème 5.3.2 . . . . .	98
5.3.3	Construction d'un ensemble satisfaisant le Point 2 du Théorème 5.3.2 . . . . .	101
5.3.3.1	Résultat de la Section 5.3.3 . . . . .	101
5.3.3.2	Preuve du Lemme 5.3.8 . . . . .	103
5.3.4	Tension exponentielle . . . . .	106
5.4	Majoration des grandes déviations . . . . .	107
5.5	Minoration du Théorème 5.1.4 . . . . .	109
5.5.1	Equations perturbées et représentation non variationnelle de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$ . . . . .	109
5.5.1.1	Représentation des trajectoires du domaine de la fonctionnelle d'action . . . . .	109
5.5.1.2	Formulation non variationnelle de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$ . . . . .	112
5.5.2	Minoration locale . . . . .	118
5.5.2.1	Enoncé de la minoration locale . . . . .	118
5.5.2.2	Preuve de la Proposition 5.5.8 . . . . .	118
5.6	Application aux problèmes de sortie de domaine . . . . .	123
5.6.1	Probabilité de sortie d'un puits de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$ . . . . .	124

5.6.2	Temps de sortie d'un tube . . . . .	124
5.6.3	Temps de sortie du voisinage d'un état stationnaire . . . . .	124
5.6.3.1	Majoration du temps de sortie . . . . .	127
5.6.3.2	Minoration du temps de sortie . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Limites des Dynamiques Adaptatives pour une population structurée par âge</b>	<b>139</b>
6.1	Résultats . . . . .	140
6.1.1	Modèle microscopique . . . . .	140
6.1.2	Processus de <i>Trait Substitution Sequence</i> structuré par âge . . . . .	145
6.1.3	Equation Canonique pour une population structurée par âge . . . . .	148
6.1.3.1	L'Equation canonique obtenue à partir du TSS renormalisé . . . . .	148
6.2	Du processus microscopique au TSS . . . . .	149
6.2.1	Preuve du Lemme 6.2.1 . . . . .	150
6.2.2	Preuve du Lemme 6.2.2 . . . . .	153
6.2.2.1	Quelques résultats préliminaires . . . . .	154
6.2.2.2	Preuve du Lemme 6.2.2 . . . . .	156
6.2.3	Preuve du Lemme 6.2.3 . . . . .	159
6.2.4	Preuve du Lemme 6.2.4 . . . . .	161
6.3	Equation canonique dans l'asymptotique des mutations petites et rares . . . . .	167
6.3.1	Tension de la suite $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . . . . .	167
6.3.2	Convergence des générateurs . . . . .	168
6.3.3	Unicité de la valeur d'adhérence de $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et identification de la limite . . . . .	169
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>171</b>
A.1	Preuve de la Proposition 2.1.8 . . . . .	171
A.2	Théorèmes d'approximation et de densité . . . . .	173
A.3	Lemme technique pour les grandes déviations . . . . .	176
A.4	Population Logistique structurée par âge . . . . .	178
A.4.1	Existence et unicité de la solution de (A.4.1)-(A.4.4) . . . . .	179
A.4.2	Caractérisation des solutions stationnaires de (A.4.1, A.4.2, A.4.4) . . . . .	183
A.4.3	Convergence vers une solution stationnaire . . . . .	184
A.4.3.1	Cas où $R_0 = 1$ . . . . .	185
A.4.3.2	Cas où $R_0 > 1$ . . . . .	187
A.4.3.3	Cas où $R_0 < 1$ . . . . .	189
A.4.4	Stabilité des équilibres . . . . .	190
A.4.5	Non-coexistence dans un modèle à deux espèces . . . . .	193
A.4.5.1	Solutions stationnaires de (A.4.86)-(A.4.90) . . . . .	193
A.4.5.2	Stabilité des solutions stationnaires . . . . .	195
A.5	Processus de naissances et de morts structurés par âge . . . . .	201
A.5.1	Calcul de la fonction de fitness . . . . .	201
A.6	Norme en variation totale . . . . .	204
<b>II</b>	<b>Wavelet Particle Approximations for the Intensity of McKean-Vlasov and 2D-Navier-Stokes Statistical Solutions</b>	<b>205</b>
<b>7</b>	<b>A Probabilistic Approach for the Computation of McKean-Vlasov Spatial Statistical Solutions' Intensities</b>	<b>209</b>
7.1	Statistical Solutions of McKean-Vlasov partial differential equations and their Intensities . . . . .	209
7.1.1	Presentation . . . . .	209



7.1.2	Probabilistic Approach of the Problem . . . . .	211
7.2	Particle Approximations . . . . .	216
7.2.1	Existing Particle Approximations and Problematic . . . . .	217
7.2.2	<u>Method 3</u> :The Wavelet Particle Approximation . . . . .	220
7.3	Convergence Rate of the Wavelet Particle Approximation . . . . .	223
7.4	Proof of Lemma 7.3.4 . . . . .	229
7.4.1	Proof of Lemma 7.4.1 . . . . .	231
7.4.2	Proof of Corollary 7.4.2 . . . . .	234
7.4.3	Proof of Lemma 7.4.3 . . . . .	238
7.5	Proof of Lemma 7.3.3 . . . . .	243
7.5.1	Proof of Lemma 7.5.3 . . . . .	244
7.5.2	Proof of Lemma 7.5.4 . . . . .	246
7.6	Proof of Lemma 7.3.5 . . . . .	249
<b>8</b>	<b>Application to the 2D-Navier-Stokes Equation</b>	<b>251</b>
8.1	The 2D-Vortex Equation with Random Initial Condition . . . . .	251
8.1.1	From the 2D-Navier-Stokes Equation to the 2D-Vortex Equation . . . . .	251
8.1.2	Regularized Equation . . . . .	253
8.1.3	Weighted and Signed Initial Measures . . . . .	254
8.2	Existence and Uniqueness for the 2D-Vortex Equation . . . . .	254
8.2.1	Existence and Uniqueness of the Solution of the Regularized Equation . . . . .	254
8.2.2	Existence and Uniqueness for the Vortex Equation (8.1.5) . . . . .	258
8.2.2.1	Proof of Uniqueness . . . . .	258
8.2.2.2	Existence . . . . .	260
8.3	Particle Approximation in the Case where $s$ is Unknown . . . . .	262
8.3.1	Stochastic Interacting Particle System and Main Theorem . . . . .	262
8.3.2	Convergence Rate of the Particle Approximation . . . . .	264
8.3.2.1	Proof of Lemma 8.3.3 . . . . .	269
8.3.3	Approximation of the Mean Velocity Vector Field . . . . .	270
8.4	Particle Approximation in the Case where $s$ is Known . . . . .	271
8.4.1	Stochastic Interacting Particle System and Main Theorem . . . . .	271
8.4.2	Convergence Rate of the Particle Approximation . . . . .	272
8.4.3	Proof of Lemma 8.4.1 . . . . .	273
8.5	Numerical Experiments . . . . .	275
8.5.1	Test Case . . . . .	275
8.5.2	Example 1: An Uncertainty Parameter $\theta$ with Large Variance . . . . .	277
8.5.3	Example 2: An Uncertainty Parameter $\theta$ with a Mixture Law . . . . .	279
<b>B</b>	<b>Appendix</b>	<b>283</b>
B.1	Wavelet Decomposition . . . . .	283
B.2	Presentation of the Warped Wavelet Regression Estimator . . . . .	285
B.3	Some Technical Results on Wavelets . . . . .	286
B.4	Bernstein's Inequality . . . . .	287

# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse se divise en deux parties indépendantes. Dans la première partie, nous considérons un modèle *microscopique* de population structurée discrète dont la dynamique est modélisée au niveau individuel. Les individus diffèrent par des variables héréditaires, appelées *traits*, et par des *âges*, fonctions croissantes du temps. Les problèmes qui motivent cette étude proviennent de considérations *écologiques* (liées à l'évolution de la population structurée) ou tirées de la *théorie des dynamiques adaptatives*, qui est une branche de la théorie de l'*évolution* (regardant l'évolution de la structure en traits sur de grandes échelles de temps). Nous établissons des théorèmes limites pour des renormalisations du modèle microscopique, et obtenons des approximations *macroscopiques* décrivant l'évolution à l'échelle de la population sous différentes asymptotiques : grandes populations, mutations rares, mutations petites. En particulier, concernant les modèles de dynamiques adaptatives, nous établissons de nouvelles équations généralisant les processus de sauts et les équations différentielles ordinaires proposées par Metz *et al.* [95], Dieckmann et Law [35] et étudiées par Champagnat [19, 18, 20]. Ces généralisations sont importantes car de nombreux problèmes biologiques nécessitent la prise en compte d'une structure d'âge. Dans la seconde partie de la thèse, nous considérons des équations aux dérivées partielles de McKean-Vlasov et de Navier-Stokes 2D avec *conditions initiales aléatoires*. La solution d'une telle équation, lorsqu'elle existe et est unique, est aléatoire et sa loi est appelée *solution statistique*. En nous fondant sur une approche probabiliste due à Talay et Vaillant [117, 119], nous construisons une approximation particulière pour les moments d'ordre 1 des solutions statistiques. Le système de particules proposé utilise des estimateurs de régression à ondelettes pour approcher des espérances conditionnelles qui apparaissent lorsque l'on conditionne par rapport à la condition initiale. Les vitesses de convergence et les complexités des algorithmes sont calculées ; elles améliorent celles des méthodes proposées par [117].

### 1.1 Modélisation probabiliste d'une population structurée en traits et en âges

Les modèles de populations structurées décrivent la dynamique de populations dont les individus diffèrent par des variables affectant leurs capacités reproductives et leurs survies. Un premier type de variables, les *traits*, correspond à des caractères morphologiques, physiologiques, génétiques ou comportementaux qui sont supposés être transmis héréditairement en l'absence de mutation à la naissance. Des exemples sont la taille à la naissance, l'agressivité dans la prédation, la virulence pathogène, le taux de croissance. Il existe également d'autres types de structurations, telles que la structuration spatiale ou par âges. Dans ce travail, nous nous intéressons à une population structurée par âges et par traits. Les modèles existants avec structures en traits et en âges sont essentiellement déterministes (cf. Ernande *et al.* [43], Rotenberg [109], Perthame et Ryzhik

[104], Mischler *et al.* [99]). Nous souhaitons étudier un modèle *aléatoire* prenant en compte la dépendance en traits et en âges des taux de naissance et de mort, ainsi que d'éventuelles interactions entre les individus, en particulier des interactions de type *logistique* (pour lesquelles le taux de mort d'un individu dépend de façon linéaire de la taille de la population). Nous introduisons un processus microscopique généralisant l'approche de Fournier et Méléard [49], Champagnat *et al.* [22, 21], pour lequel la dynamique est spécifiée au niveau individuel. Nous établissons des approximations macroscopiques de ce processus. Celles-ci décrivent l'évolution à l'échelle de la population. Les convergence, théorème central limite et grandes déviations associés à l'asymptotique des grandes populations considérée sont étudiés. Nous en déduisons des résultats sur les dynamiques écologiques et évolutionnaires.

**Structure d'âge :** La prise en compte d'une structuration par âges permet d'enrichir la dynamique de la population considérée en soulignant la dimension individuelle. Chaque individu a une *histoire* particulière, qui s'inscrit dans une échelle de temps *a priori* différente de celle décrivant l'évolution de la population. Les variables d'âges permettent de résumer l'histoire passée de l'individu, et il est naturel d'introduire un vecteur d'âges afin de pouvoir tenir compte de plusieurs aspects du passé pour déterminer la dynamique présente. Des exemples souvent considérés sont l'*âge physique* (temps depuis lequel un individu est né), l'*âge biologique* (stade de maturation intrinsèque de l'individu, qui peut croître éventuellement de façon non linéaire), l'*âge d'une maladie* (temps depuis lequel l'individu est contaminé), l'*état d'avancement d'une maladie* (stade clinique de la maladie). A notre connaissance, les modèles avec vecteur d'âges sont peu étudiés dans la littérature, qui considère en général des structurations par l'âge physique.

Les modèles de populations structurées par âge et à temps continu, généralisant les modèles de Malthus [81] et la célèbre *équation logistique* de Verhulst [120], ont fait l'objet d'une abondante littérature fondée sur la théorie des équations aux dérivées partielles (cf. Sharpe et Lotka [111], McKendrick [85], Gurtin et MacCamy [56], Marcati [82], Busenberg et Iannelli [15], Webb [124]. Nous renvoyons au Chapitre 3 pour une présentation détaillée).

Ces modèles sont toujours très étudiés en biologie et font encore l'objet de nombreuses recherches mathématiques (Thieme [118], Murray [100]). Parmi les problèmes biologiques nécessitant une structuration par âge, on peut mentionner les problèmes liés à l'*histoire de vie*, caractérisant des comportements différents au cours de la vie. Calsina et Cuadrado [16, 17] par exemple étudient un modèle dans lequel il existe un âge à maturité (à partir duquel les individus peuvent se reproduire). Plusieurs âges de transition entre différentes phases de la vie sont pris en compte par Henson [58]. L'histoire de vie peut également être étudiée au travers de l'alternance et de la durée des phases de croissance et de reproduction (cf. Taborsky *et al.* [115]).

Concernant les modèles stochastiques, des généralisations du processus de Galton-Watson [52] ont été étudiées par Bellman et Harris [5, 57], puis Athreya et Ney ([4] Chapitre IV). Ceux-ci considèrent des processus non Markoviens, appelés processus de branchement structurés par âge (l'âge physique), dans lesquels la durée de vie d'un individu ne suit pas une loi exponentielle. Chaque particule, à sa mort, est remplacée par des particules filles dont le nombre suit une loi de reproduction indépendante de l'âge de la mère à sa mort et de l'état de la population. Des limites de type superprocessus obtenues en diminuant la durée de vie et la masse des particules, en augmentant leur nombre et en modifiant le taux ou la loi des naissances sont étudiées par Dynkin [41], Kaj et Sagitov [68].

Les hypothèses de naissances au moment de la mort du parent, et d'indépendance entre la loi de reproduction et l'âge du parent sont biologiquement restrictives. Kendall [70], Crump et Mode [26, 27], Jagers [64] puis Doney [36] étudient des processus de naissances et de morts, dans lesquels une particule peut donner naissance à des particules filles plusieurs fois au cours de sa vie, et avec un taux dépendant de son âge. Dawson *et al.* [30] et Bose et Kaj [9, 10] étudient des

limites de type superprocessus de ces modèles.

Dans les modèles précédents, les particules en vie au même moment sont indépendantes entre elles, ce qui est aussi une hypothèse biologiquement restrictive. Wang [123], Solomon [112] considèrent des processus de naissances et de morts dans lesquels les durées de vie des différents individus sont indépendantes, mais où le taux et la loi de reproduction de chaque particule dépendent de l'état de la population. Oelschläger [102] étudie des modèles dans lesquels les taux de naissance et de mort prennent en compte des interactions entre les individus, mais restent bornés. Ces modèles excluent ainsi des interactions de type *logistique* (cf. Section 1.1.3).

**Théorie des Dynamiques Adaptatives :** En théorie de l'évolution, la prise en compte des structures d'âge et de traits soulève des problèmes intéressants, comme le notent Charlesworth [24] ou Stearns [113]. Le phénomène de mutations est la source de la diversité en traits de la population. La sélection naturelle, qui opère par les interactions et compétitions existant entre individus, détermine les traits qui vont rester dans la population. La probabilité de fixation d'un trait mutant dépend de l'âge auquel ce trait s'exprime ainsi que de la structure d'âge de la population. Réciproquement, les traits qui seront fixés vont modifier cette distribution en âge. C'est par exemple pour expliquer la persistance des *phénomènes de sénescence*, décrivant la décroissance des fonctions de survie et de fécondité avec l'âge, que Medawar [86] a suggéré que la pression de sélection et donc la probabilité de fixation d'un trait dépendent des âges d'expression du trait.

Parmi les modèles d'évolution, la théorie des dynamiques adaptatives s'intéresse aux dynamiques correspondant à des asymptotiques de grande population et de *mutations rares*. Ces modèles ont été introduits par Hofbauer et Sigmund [60], Marrow *et al.* [84], Dieckmann et Law [35], Metz *et al.* [95] et décrivent l'évolution des traits de la population lorsqu'il est possible de séparer les échelles de temps de l'écologie (dynamique de la population) et de l'évolution (apparition de nouveaux traits mutants). Une étude rigoureuse des fondements microscopiques des équations proposées par [35, 95] a été réalisée par Champagnat [19, 18, 20], et développée par Champagnat *et al.* [22, 21] pour des populations structurées uniquement par traits.

L'une de nos motivations principales pour l'étude de populations structurées en traits et en âge était de généraliser les modèles de dynamiques adaptatives précédents, afin de pouvoir considérer des problèmes d'évolution pour des traits liés à la structure d'âge. A partir du modèle discret construit précédemment, nous établissons, sous les hypothèses des dynamiques adaptatives, la convergence du processus microscopique vers un processus de *Trait Substitution Sequence structuré par âge*, qui à notre connaissance n'a pas encore été introduit dans la littérature. Dans le cas où les mutations sont petites, c'est à dire lorsque le trait d'un mutant est proche du trait de l'individu l'ayant généré, nous montrons que le processus de *Trait Substitution Sequence structuré par âge* converge vers la solution d'une équation différentielle ordinaire qui généralise au cas structuré par âge l'*Equation Canonique* introduite dans [35], centrale en théorie des dynamiques adaptatives.

### 1.1.1 Modélisation microscopique de populations structurées en traits et en âges

Lorsque l'on considère une population structurée par âges, tous les individus peuvent être différents et soumis à une pression de sélection différente, même dans le cas où la population est monomorphe (c'est à dire, lorsque tous les individus portent les mêmes traits). Il n'est alors pas possible de résumer la population par des quantités de dimension finie (par exemple l'effectif de la population). La modélisation proposée dans ce travail se fonde sur des processus à valeurs mesures qui intègrent de façon naturelle ces contraintes.

Plus précisément, dans le modèle individu-centré que nous étudions, la population est discrète. Chaque individu est représenté par une masse de Dirac en  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^d$ ,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{d_x}$  étant l'espace des traits et  $\mathbb{R}_+^d$  l'espace des âges (plusieurs âges sont considérés lorsque  $d > 1$ ). La population au temps  $t \geq 0$  est décrite par la mesure ponctuelle suivante :

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{(x_i(t), a_i(t))}, \quad (1.1.1)$$

où  $N_t$  est le nombre d'individus vivants au temps  $t$ . Un individu de traits  $x$  et d'âges  $a$  dans une population représentée par  $Z \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  se reproduit de façon asexuée et transmet héréditairement ses traits sauf s'il se produit une mutation, vieillit et meurt :

- il donne naissance à un nouvel individu avec taux  $b(x, a) \in \mathbb{R}_+$ . Avec probabilité  $p(x, a) \in [0, 1]$ , le nouvel individu est un mutant de trait  $x'$  choisi suivant une distribution de probabilité  $k(x, a, x')P(dx')$  (dépendant des caractéristiques du parent) où  $P(dx)$  est une mesure  $\sigma$ -finie de référence sur  $\mathcal{X}$  (par exemple la mesure de Lebesgue),
- il meurt au taux  $d(x, a, ZU(x, a)) \in \mathbb{R}_+$ , où  $ZU(x, a) = \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^d} U((x, a), (y, \alpha))Z(dx, da)$  est un terme d'interaction dans lequel  $U((x, a), (y, \alpha))$  modélise l'action de  $(y, \alpha)$  sur  $(x, a)$ ,
- il vieillit avec la vitesse  $v(x, a) \in \mathbb{R}_+^d$ , dont les composantes sont les vitesses de vieillissement des  $d$  âges considérés.

Une vitesse de vieillissement non constante modélise des âges mesurés sur des critères physiologiques qui évoluent de façon non linéaire en temps. Ceci a, à notre connaissance, rarement été abordé dans la littérature.

Nous supposons que  $b(x, a)$  est continue, bornée, que les composantes de  $v(x, a)$  sont positives et à croissance au plus linéaire en  $|a|$ , et que le taux de mort est minoré par une constante strictement positive et majoré par  $\bar{d}(1 + \langle Z, 1 \rangle)$ , où  $\bar{d}$  est une constante positive.

Au **Chapitre 2**, nous décrivons l'évolution de  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à l'aide d'une équation différentielle stochastique dirigée par une mesure aléatoire de Poisson, en nous inspirant de [49, 22, 21]. Dans notre cas, cette équation fait intervenir le flot  $t \mapsto A_x(t, t_0, a_0)$  d'une équation différentielle ordinaire qui décrit le phénomène de vieillissement.  $A_x(t, t_0, a_0)$  est l'âge au temps  $t$  d'un individu de trait  $x$  et d'âge  $a_0$  au temps  $t_0$ .

Introduisons les applications  $X = (X_1, \dots, X_N, \dots)$  et  $A = (A_1, \dots, A_N, \dots)$  de  $\mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  dans  $(\mathcal{X})^{\mathbb{N}}$  et  $(\mathbb{R}_+^d)^{\mathbb{N}}$  définies par :

$$X \left( \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, a_i)} \right) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0, \dots), \quad A \left( \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, a_i)} \right) = (a_1, \dots, a_N, 0, \dots, 0, \dots),$$

où les particules sont rangées suivant l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{R}^{d_x} \times \mathbb{R}_+^d$ . L'équation différentielle stochastique décrivant l'évolution de  $Z$  est la suivante. Soit  $Z_0 \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{E}(\langle Z_0, 1 \rangle) < +\infty$ , et soit  $Q(ds, di, d\theta, dx')$  une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$  d'intensité  $ds \otimes n(di) \otimes d\theta \otimes P(dx')$  et indépendante de  $Z_0$ .

$$\begin{aligned} Z_t = & \sum_{i=1}^{N_0} \delta_{(X_i(Z_0), A_{X_i(Z_0)}(t, 0, A_i(Z_0)))} + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left[ \delta_{(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(t, s, 0))} \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \\ & + \delta_{(x', A_{x'}(t, s, 0))} \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \\ & \left. - \delta_{(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(t, s, A_i(Z_{s-})))} \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'), \quad (1.1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où : } m_1(s, Z_{s-}, i, x') &= (1 - p(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-})))b(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))k(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), x') \\
m_2(s, Z_{s-}, i, x') &= m_1(s, Z_{s-}, i, x') \\
&+ p(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))b(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))k(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), x') \\
m_3(s, Z_{s-}, i, x') &= m_2(s, Z_{s-}, i, x') \\
&+ d(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), Z_{s-}U(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-})))k(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), x').
\end{aligned}$$

L'interprétation est la suivante. On se place au temps  $t$  et on construit  $Z_t$  en prenant en compte l'ensemble des événements de naissances et de morts ayant eu lieu entre 0 et  $t$ .  $Z_t$  est la somme des masses de Dirac correspondant aux âges au temps  $t$  des particules présentes initialement et des masses de Dirac marquant les âges au temps  $t$  des particules nées en un temps  $s \in [0, t]$ , à laquelle on soustrait les masses de Dirac correspondant aux particules mortes en un temps  $s \in [0, t]$ .

Sous nos hypothèses, si  $\mathbb{E}(\langle Z_0, 1 \rangle) < +\infty$ , alors pour tout  $T > 0$ ,  $\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t, 1 \rangle) < +\infty$ . Ceci nous permet de montrer qu'il n'y a pas d'accumulation de sauts pour  $Z$  et que (1.1.2) admet une unique solution dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}))$ .  $Z$  est un processus de Markov de générateur infinitésimal défini pour  $f$  et  $F$  suffisamment régulières et pour  $Z \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  par :

$$\begin{aligned}
LF_f(Z) &= \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \{v(x, a)\nabla_a f(x, a)F'(\langle Z, f \rangle) + (F_f(Z + \delta_{(x,0)}) - F_f(Z))b(x, a)(1 - p(x, a)) \\
&+ \int_{\mathcal{X}} (F_f(Z + \delta_{(x',0)}) - F_f(Z))b(x, a)p(x, a)k(x, a, x')P(dx') \\
&+ (F_f(Z - \delta_{(x,a)}) - F_f(Z))d(x, a, ZU(x, a))\} Z(dx, da), \tag{1.1.3}
\end{aligned}$$

avec  $F_f(Z) = F(\langle Z, f \rangle)$ . L'étude du comportement et des propriétés des solutions de (1.1.2) est un travail difficile. Nous réalisons des simulations pour mettre en évidence et illustrer certains problèmes biologiques intéressants liés aux structures d'âge (Section 2.3.2). Ces simulations sont issues d'un travail en collaboration avec Régis Ferrière. Nous avons relevé les résultats suivants :

1. Nous observons une différence entre les simulations avec ou sans structure d'âge. C'est le cas par exemple lorsque la force des interactions dépend de la taille, vue comme un trait dans les modèles sans structure d'âge et fonction des traits que sont la taille à la naissance et le taux de croissance, et de l'âge physique dans les modèles avec structure d'âge. On parle alors de *plasticité* : les capacités reproductives et de survie d'un individu dépendent de leur héritage en traits et de leur histoire.

2. Suivant les valeurs numériques des paramètres, on peut voir apparaître des stratégies d'histoires de vie différentes, par exemple des arbitrages entre reproduction et croissance différents.
3. Certains modèles avec classes d'âge font apparaître des interactions entre différentes classes d'âge qui induisent des phénomènes oscillatoires non amortis.

### 1.1.2 Approximation par des équations aux dérivées partielles en "grande population"

Nous obtenons au **Chapitre 3** une approximation déterministe du modèle microscopique, correspondant à une asymptotique en grande population. Cette approximation déterministe est dans certains cas plus facile à étudier que le modèle microscopique (cf. équation logistique, Section 1.1.3). Plus précisément, nous considérons une suite de renormalisations  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  du modèle individu-centré introduit au Chapitre 2 obtenues en augmentant la taille de la population initiale (par multiplication par un facteur d'ordre  $n$ ) tout en diminuant le poids des individus et l'intensité des interactions (par multiplication par un facteur d'ordre  $1/n$ ). Une intuition biologique de cette renormalisation est que l'on considère, à ressources fixées, des populations de plus en plus grandes, de taille  $n$ ; le poids d'un individu, en terme de quantité de ressources consommées, doit alors être d'ordre  $1/n$ .

Nous montrons que si  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$  (muni de la topologie de la convergence étroite) vers une mesure  $\xi_0$  et si la taille et l'âge moyens de la population initiale sont finis, alors la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  vers la solution  $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  de l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \langle \xi_t, f_t \rangle = & \langle \xi_0, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(x, a) + f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') - f_s(x, a) d(x, a, \xi_s U(x, a)) \right] \xi_s(dx, da) ds, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

pour une fonction  $f$  suffisamment régulière. Ce résultat utilise une méthode de tension-unicité et généralise des résultats obtenus par [49, 21]. Le terme de vieillissement fait apparaître un opérateur différentiel, tandis que pour les termes de naissances et de morts, on retrouve des opérateurs de sauts analogues à ceux obtenus pour les populations sans structure d'âge.

Lorsque les mesures  $\xi_t \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ , pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , admettent des densités  $n(x, a, t)$  par rapport à la mesure de référence  $P(dx) \otimes da$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ , la famille de ces densités  $(n(\cdot, \cdot, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une solution faible du système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t}(x, a, t) &= -\nabla_a (v(x, a) n(x, a, t)) \\ &\quad - d \left( x, a, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) n(y, \alpha, t) P(dy) d\alpha \right) n(x, a, t) \quad (1.1.5) \\ v(x, 0) n(x, 0, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} n(x, a, t) b(x, a) (1 - p(x, a)) da \\ &\quad + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x', a) p(x', a) k(x', a, x) n(x', a, t) P(dx') da \\ n(x, a, 0) &= n_0(x, a). \end{aligned}$$

Ces équations généralisent les équations aux dérivées partielles de McKendrick-Von Foerster et décrivent l'écologie à l'échelle de la population (les trajectoires individuelles sont perdues). Les densités  $n(x, a, t)$ , lorsqu'elles existent, correspondent à la notion de *densité de nombre*, qui décrit la distribution en traits et en âges d'une population constituée par un "continuum" d'individus.

L'existence de densités est étudiée à la Section 3.2.3. Dans le cas d'un âge scalaire, les conditions impliquant l'absolue continuité des mesures  $\xi_t(dx, da)$  sont peu restrictives (existence d'une densité au temps  $t = 0$ , cf. Proposition 3.2.6). En revanche, dans le cas où plusieurs âges sont pris en compte, il est intéressant de remarquer que la densité de nombre ne peut pas toujours être définie. Il est alors néanmoins possible d'obtenir des densités pour les marginales en  $x$  de  $\xi_t(dx, da)$  par rapport à la mesure  $P(dx)$ .

Au **Chapitre 4**, nous établissons un théorème central limite associé à la convergence décrite ci-dessus. Nous en déduisons des intervalles de confiance ainsi des résultats sur le comportement en temps grand de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans le cas particulier des populations logistiques structurées par l'âge physique (Section 4.6).

Plus précisément, pour  $T > 0$  fixé, nous introduisons le processus des fluctuations suivant, dont nous étudions la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  :  $\forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\eta_t^n(dx, da) = \sqrt{n} (Z_t^n(dx, da) - \xi_t(dx, da)). \quad (1.1.6)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\eta^n$  est un processus de  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_S(\tilde{\mathcal{X}}))$ . L'espace  $\mathcal{M}_S(\tilde{\mathcal{X}})$  des mesures signées sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  n'étant pas métrisable si on le munit de la topologie de la convergence étroite. En nous

inspirant de travaux de Métivier [94] et Méléard [87], nous considérons  $\eta^n$  comme processus à valeurs dans un espace de distributions, et nous utilisons des suites d'espaces de Sobolev emboîtés pour nous ramener à un cadre hilbertien. Nous utilisons un critère dû à Métivier [94] pour prouver la tension dans ces espaces. La principale difficulté vient de ce que la masse n'est pas *a priori* bornée et qu'il nous faut localiser les fluctuations par un temps d'arrêt.

Nous montrons que pour des coefficients  $b$ ,  $d$ ,  $U$ ,  $v$  suffisamment réguliers, et de bonnes hypothèses de moments sur les conditions initiales, la suite  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par un processus gaussien à valeurs dans l'espace de distributions introduit ci-avant.

Au **Chapitre 5**, nous établissons des déviations exponentielles associées à la renormalisation en grande population. Nous obtenons une majoration de grandes déviations, mais la minoration que nous obtenons n'est que locale. Elle est cependant suffisante pour établir des estimées intéressantes pour les temps de sortie de voisinages de solutions stationnaires de (1.1.4). Ces estimées seront nécessaires pour séparer les échelles de temps dans les limites de dynamiques adaptatives au Chapitre 6.

Soit  $T > 0$ . En nous inspirant des travaux de Léonard [78], Kipnis et Léonard [73], nous introduisons la fonctionnelle d'action suivante : pour  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  et  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ ,

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \begin{cases} \sup_{f \in C_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])} (\ell^T(f, z) - c^T(f, z)), & \text{si } z_0 = \xi_0 \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.1.7)$$

où  $\ell^T(f, z)$  et  $c^T(f, z)$  sont définies pour  $f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)$  suffisamment régulière par :

$$\begin{aligned} \ell^T(f, z) &= \langle z_t, f_t \rangle - \langle z_0, f_0 \rangle - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(x, a) - f(x, 0, s) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathcal{X}} f(x', 0, s) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') + f(x, a, s) d(x, a, z_s U(x, a)) \right] z_s(dx, da) ds \\ c^T(f, z) &= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [\rho(f(x, 0, s)) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \rho(-f(x, a, s)) d(x, a, z_s U(x, a)) \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}} \rho(f(x', 0, s)) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx')] z_s(dx, da) ds. \end{aligned}$$

Sous certaines hypothèses techniques et si :

$$\forall \lambda > 0, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} \right) < +\infty, \exists \eta \in ]0, 1[, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0^n(dx, da) \right]^{1+\eta} \right) < +\infty,$$

on obtient les résultats suivants :

1. Toute trajectoire  $z$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$  est la solution d'une équation d'évolution obtenue par perturbation des taux de naissance et de mort dans (1.1.4).
2. Soit  $\mathfrak{G}$  l'ensemble des trajectoires du domaine de  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$  associées à des perturbations *bornées*. La suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  satisfait les inégalités de déviations suivantes :  $\forall B$  ensemble mesurable de  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ ,

$$\begin{aligned} - \inf_{z \in \tilde{B} \cap \mathfrak{G}} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in B) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in B) \leq - \inf_{z \in \tilde{B}} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z), \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

où par convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .



La majoration de (1.1.8) est obtenue en suivant les idées de Dembo et Zeitouni [32]. L'un des ingrédients est la tension exponentielle de la famille  $(\mathcal{L}(Z^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  que nous établissons en reprenant des techniques utilisées par Graham et Méléard [55] et que nous généralisons à l'étude de processus à valeurs mesures sur des espaces non nécessairement compacts et de masses *a priori* non bornées, en adaptant un argument employé par Dawson et Gärtner [31] et Fontbona [48] pour des systèmes de particules sans branchement et sans saut. Cet argument s'appuie sur des martingales exponentielles. Nous supposons ici l'existence de moments exponentiels pour la condition initiale; ces moments se propagent pour  $t \in [0, T]$ .

Nous cherchons ensuite à établir la minoration locale suivante :

$$\forall O \subset \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})) \text{ ouvert, } \forall z \in O, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in O) \geq -\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z). \quad (1.1.9)$$

Pour ce faire, nous établissons tout d'abord une formule non-variationnelle de  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z)$  et obtenons une représentation de  $z$  appartenant à son domaine comme solution d'une équation perturbée. L'obtention de (1.1.9) repose alors sur un changement de probabilité adéquat lié à la perturbation  $h^z$  intervenant dans l'équation dont  $z$  est solution. L'utilisation du théorème de Girsanov nécessite que  $h^z$  soit suffisamment régulière. Nous considérons alors des trajectoires  $z \in O$  associées à des fonctions  $h^z$  bornées, et nous les approchons par une suite  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de trajectoires associées à des régularisations  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $h^z$  dont l'existence nous est donnée par un lemme de Bishop-Phelps-Israël [8, 62]. Le cas où  $h^z$  n'est pas borné reste ouvert, et c'est pourquoi la minoration que nous obtenons n'est qu'une minoration locale.

### 1.1.3 Comportement en temps grand pour les populations logistiques structurées par âge

Les modèles de populations logistiques structurées par un âge scalaire constituent une classe d'exemples simples, dont l'approximation déterministe en grande population a déjà été très étudiée, et dont le comportement en temps long est connu. Ces modèles satisfont nos hypothèses. Ils correspondent aux choix suivants :

- L'espace  $\mathcal{X}$  est un singleton et la probabilité de mutation est  $p = 0$ . Nous omettrons par la suite la variable de trait afin de simplifier les notations.
- Les individus sont caractérisés par un âge scalaire et vieillissent avec une vitesse 1,
- Un individu d'âge  $a \in \mathbb{R}_+$  donne naissance avec le taux  $b(a)$  où  $b \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  est tel que  $\exists \bar{b} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, 0 \leq b(a) \leq \bar{b}$ ,
- Un individu d'âge  $a \in \mathbb{R}_+$  meurt au taux  $d(a) + \eta N$ , où  $d \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  est le taux de mort naturelle tel que  $\exists \bar{d}, \underline{d} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, \underline{d} \leq d(a) \leq \bar{d}$ , et où  $\eta N$  est le terme de compétition logistique,  $N > 0$  étant la masse de la mesure représentant la population, et  $\eta > 0$  modulant l'intensité des interactions.

Notons :

$$\Pi(a_1, a_2) = \exp\left(-\int_{a_1}^{a_2} d(\alpha) d\alpha\right) \quad R_0 = \int_0^{+\infty} b(a) e^{-\int_0^a d(\alpha) d\alpha} da.$$

$\Pi(a_1, a_2)$  est la probabilité qu'un individu d'âge  $a_1$  vive jusqu'à l'âge  $a_2$ .  $R_0$  est appelé dans la littérature *taux de reproduction net*. C'est l'intégrale du taux de naissance  $b(a)$  pondéré par la probabilité de survivre jusqu'à l'âge  $a$  dans le cas où l'individu est soumis à la seule mort naturelle (pas de compétition).

Il existe une unique solution classique à l'équation aux dérivées partielles décrivant la limite de l'approximation en "grande population" :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(a, t) &= -\frac{\partial m}{\partial a}(a, t) - [d(a) + \eta N_t] m(a, t) \\ m(0, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} m(a, t) b(a) da \quad m(a, 0) = m_0(a), \quad N_t = \int_{\mathbb{R}_+} m(a, t) da, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

et nous disposons d'une forme explicite de cette solution (ces résultats sont dûs à Busenberg et Iannelli [15], Marcati [82] et Gurtin et McCamy [56]; cf. Webb ([124], Chapitres 1 et 5)).

Sous l'hypothèse  $R_0 > 1$ , l'équation (1.1.10) admet de plus un unique équilibre non trivial asymptotiquement exponentiellement stable défini par :

$$\widehat{m}(a) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 a} \Pi(0, a)}{\eta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \Pi(0, \alpha) d\alpha} \quad \text{où } \lambda_1 \text{ satisfait } 1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} b(a) \Pi(0, a) da. \quad (1.1.11)$$

Le comportement en temps long de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est plus compliqué. Nous montrons (Chapitre 4) que :

1. pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a extinction presque-sûre de la population microscopique  $Z^n$ .
2. pour  $T > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  assez grands,  $Z_T^n$  se trouve avec une grande probabilité au voisinage de  $\widehat{m}(a) da$ .

Ces deux assertions signifient que si le comportement du processus microscopique tend à être le même que celui de la solution de (1.1.10) pour des horizons finis, leurs comportements en temps long sont radicalement différents : les trajectoires de  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  finissent par quitter le voisinage de l'approximation déterministe pour mener la population à l'extinction. Ce phénomène a lieu presque sûrement, mais au bout d'un temps qui peut être très long.

Une estimée de ce temps peut être obtenue à partir des déviations exponentielles du Chapitre 5, en généralisant des idées développées par Freidlin et Ventzell [50], Dembo et Zeitouni [32] et Da Prato et Zabczyk [105] à nos processus à valeurs mesures et à sauts (Section 5.6).

#### 1.1.4 Limites des dynamiques adaptatives

Au **Chapitre 6**, nous nous intéressons à des problèmes d'évolution issus de la récente théorie des *dynamiques adaptatives* [60, 84, 35, 95]. Par souci de simplicité, nous considérons une population structurée par l'âge physique, avec une probabilité de mutation constante  $p$  et une densité de mutation  $k(x, h)$  ne dépendant pas de l'âge. Nous obtenons deux approximations macroscopiques du processus microscopique structuré par âge, qui décrivent les changements en traits de la population sous les hypothèses biologiques de grande population, de mutations rares et de non-coexistence à long terme de deux traits différents. Des modèles de dynamiques adaptatives avec structure d'âge ont été abordés par exemple par [43, 34, 103], mais ces modèles sont soit incomplets (dans [43], seule la fonction de *fitness* est discutée), soit se ramènent à la considération de taux de naissance et de mort indépendants de l'âge. A notre connaissance, les équations que nous proposons n'ont pas été introduites dans la littérature.

Les approximations que nous établissons correspondent à une séparation des échelles de temps associées à l'écologie (qui décrit les variations démographiques de la population) et à l'évolution (associée aux mutations). Lorsque l'apparition de nouveaux traits au sein de la population est suffisamment lente, la sélection naturelle a le temps d'agir. Soit la descendance d'un mutant est éliminée, soit elle remplace la population résidente. Entre deux mutations, la population se stabilise alors autour d'un état d'équilibre monomorphique (tous les individus sont de même trait). Dans ce cas, on peut décrire l'évolution de la population par un processus de sauts dont les états sont les équilibres monomorphiques successifs de la population (décrits par un trait et une structure d'âge). Si l'équilibre est entièrement caractérisé par le trait  $x$ , l'évolution

peut être décrite par le processus de sauts à valeurs dans  $\mathcal{X}$  dont les valeurs sont les traits relatifs aux équilibres monomorphiques successifs, et de générateur infinitésimal :

$$L\phi(x) = \int_{\mathcal{X}} (\phi(x+h) - \phi(x)) p \int_{\mathbb{R}_+} b(x,a) \widehat{m}(x,a) da (1 - z_0(x+h,x)) k(x,h) P(dh), \quad (1.1.12)$$

où  $\widehat{m}(x,a)da$  est la distribution d'âge stationnaire pour une population de seul trait  $x$ . C'est ce processus que nous appelons *Processus de Trait Substitution Sequence avec âge* (TSS dans la suite). De façon heuristique, le terme  $pk(x,h) \int_0^{+\infty} b(x,a) \widehat{m}(x,a) da$  est le taux avec lequel la population monomorphique de trait  $x$ , à l'équilibre, génère un mutant de trait  $x+h$ . Le terme  $(1 - z_0(x+h,x))$  est appelé *fitness* du mutant de trait  $x+h$  dans la population de trait  $x$ .  $z_0(y,x)$  est le plus petit point fixe sur  $[0, 1]$  de la fonction génératrice du nombre de descendants pour un processus de naissances et de morts linéaire structuré par âge, de taux de naissance et de mort  $b(y,a)$  et  $d(y,a,x) = d\left(y,a, \int_{\mathbb{R}_+} U((y,a), (x,\alpha)) \widehat{m}(x,\alpha) d\alpha\right)$  :

$$z = \int_0^{+\infty} e^{(z-1) \int_0^w b(y,u) du} d(y,w,x) e^{-\int_0^w d(y,u,x) du} dw, \quad (1.1.13)$$

Cette équation caractérise la probabilité d'extinction d'un tel processus de naissances et de morts. Contrairement au cas sans structure d'âge, nous n'avons pas de solution explicite pour (1.1.13).

La preuve de la convergence du processus microscopique vers le processus de TSS lorsque l'on a une structure d'âge suit les idées de [20]. La population résidente peut-être approchée par son approximation en grande population (1.1.4) et nous utilisons les résultats de sortie de domaine obtenus au Chapitre 5 pour contrôler l'erreur commise. Pour décrire le comportement de la population mutante lors de son apparition, nous nous appuyons sur la comparaison avec des processus de naissances et de morts linéaires structurés par âge.

En nous inspirant des travaux de Champagnat [19, 20], nous étudions ensuite une suite de processus de TSS avec âge, renormalisés, correspondant à l'asymptotique supplémentaire de petites mutations (le trait mutant ne diffère que très peu du trait résident). Les processus convergent vers la solution d'une équation différentielle ordinaire que nous proposons comme généralisation de l'*Equation Canonique* proposée par [35, 18] :

$$\frac{dx}{dt} = p \int_{\mathbb{R}_+} b(x,a) \widehat{m}(x,a) da \int_{\mathcal{X}} h D_h^1 z_0(x,x) k(x,h) P(dh), \quad (1.1.14)$$

$$\text{où : } D_h^1 z_0(x,x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{z_0(x,x) - z_0(x+\varepsilon h,x)}{\varepsilon}. \quad (1.1.15)$$

Une difficulté technique réside dans le fait que la fonction  $z_0$  est définie par une équation implicite. L'application  $\varepsilon \mapsto z_0(x+\varepsilon h,x)$  n'est pas nécessairement dérivable en 0. C'est pourquoi nous avons introduit  $D_h^1 z_0(x,x)$ . Notons que par définition, cette dérivée directionnelle orientée  $D_h^1 z_0(x,x)$  est positive ( $z_0(x,x) = 1$  et  $z_0(x+\varepsilon h,x) \in [0, 1]$ ). De même que dans les modèles sans structure d'âge, l'évolution se fait dans les directions correspondant à des gradients de fitness  $D_h^1 z_0(x,x)$  positifs.

### 1.1.5 Perspectives

Les modèles considérés dans les Chapitres 3 à 6 sont des modèles généraux. Les théorèmes limites établis constituent une boîte à outils qu'il serait intéressant d'exploiter en approfondissant l'étude de cas particuliers, et en poursuivant les discussions entamées avec les biologistes. Un

important travail réside dans la formulation mathématique des phénomènes observés sur les simulations (différentiation par apparition de groupes de traits distincts, apparition de profils de vie différents suivant les paramètres de compétition et de ressources du milieu...) ainsi que dans leur résolution.

Les modèles de populations structurées par âges sont souvent cités comme exemples dans des articles traitant de populations structurées par des traits fonctionnels (cf. Exemple 2.1.3, [43], [34], [103]). En effet, il est naturel de penser à des traits  $x(a)$  qui seraient fonctions de l'âge (par exemple la courbe de croissance, l'intensité de la floraison au cours de l'année, les courbes décrivant les taux de naissance ou de mort...). Dans les travaux existants ([34] ou [103], par exemple), les taux de naissance et de mort sont fonctions du trait fonctionnel, mais pas de l'âge (par exemple,  $b(x) = B(\int_0^{+\infty} x(a)da)$ , où  $B \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ). Il serait intéressant de généraliser nos modèles de façon à prendre en compte le cas de traits fonctionnels.

Enfin, il serait intéressant d'utiliser les résultats de convergence, de théorème central limite ou de grandes déviations obtenus dans cette thèse pour construire des estimateurs des paramètres du modèle (taux de naissance, de mort) et obtenir leurs vitesses de convergence, ou pour établir des tests. Un travail dans cette direction est en cours avec Patrice Bertail, Stéphan Cléménçon et Hector de Arazoza à partir de données cubaines sur l'épidémie du SIDA.

## 1.2 Approximation particulière de l'intensité des solutions statistiques des équations de McKean-Vlasov et Navier-Stokes 2D

Considérer des équations aux dérivées partielles avec conditions initiales aléatoires peut être intéressant pour modéliser des phénomènes complexes ou pour introduire une notion d'incertitude sur la condition initiale. La loi de la solution d'une telle équation, qui est alors une variable aléatoire, est appelée *solution statistique* du problème.

Les équations de Navier-Stokes 2D décrivent l'évolution du champ de vitesse  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  d'un fluide incompressible visqueux dans le plan. Ce sont ces équations qui ont motivé la notion de solutions statistiques. L'introduction d'une condition initiale aléatoire est alors une modélisation possible de la turbulence qui apparaît avec des vitesses élevées et des viscosités faibles. On s'intéresse à l'équation de Navier-Stokes 2D suivante :  $P(d\omega)$ -presque sûrement  $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, x, \omega) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, x, \omega) = \sigma^2/2 \Delta \mathbf{v}(t, x, \omega) - \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(t, x, \omega) = 0 \\ \mathbf{v}(0, x, \omega) = \widehat{\mathbf{v}}_0(x, \omega). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

La condition initiale est une fonction aléatoire  $\widehat{\mathbf{v}}_0(x, \omega)$ , dépendant de  $x \in \mathbb{R}^2$  et d'un aléa  $\omega$  appartenant à l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . La pression,  $p$ , et la viscosité,  $\sigma^2/2$ , sont supposées constantes et positives. Vishik et Fursikov [122], Constantin et Wu [25] ont étudié ces problèmes avec des outils analytiques.

L'approche probabiliste des équations de Navier-Stokes 2D avec condition initiale déterministe développée par Marchioro et Pulvirenti [83] et Méléard [88, 90] s'appuie sur l'équation du tourbillon 2D, obtenue en considérant le rotationnel de la vitesse  $w = \text{rot}(\mathbf{v})$ . Pour une condition initiale aléatoire, l'équation du tourbillon est la suivante :  $P(d\omega)$  - p.s.,  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \omega) = -(K * w \cdot \nabla) w(t, x, \omega) + \sigma^2/2 \Delta w(t, x, \omega), \\ w(0, x, \omega) = \widehat{w}_0(x, \omega) = \text{rot}(\widehat{\mathbf{v}}_0)(x, \omega), \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où  $K$  est le noyau de Biot et Savart :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, K(x) = \frac{1}{2\pi|x|^2} (-x_2, x_1). \quad (1.2.3)$$

L'équation du tourbillon 2D (1.2.2) généralise les équations de McKean-Vlasov (le noyau  $K$  explose en 0). Talay et Vaillant [117] ont étudié des équations de McKean-Vlasov avec des conditions initiales aléatoires qui sont des densités de probabilité. Ils généralisent l'approche probabiliste développée par Sznitman [114] et Méléard [92] et construisent des approximations particulières étendant les travaux de Bossy et Talay [13]. Leur idée consiste à réaliser un conditionnement par rapport à la condition initiale et à introduire des diffusions dont les coefficients sont des espérances conditionnelles. Deux méthodes particulières sont proposées par [117] pour simuler les moments des solutions statistiques, dont une méthode utilisant des estimateurs de régression à noyaux pour approcher les espérances conditionnelles apparaissant dans les diffusions précédentes. Nous cherchons à en améliorer la vitesse de convergence en remplaçant ces estimateurs par des estimateurs à ondelettes. Nous pouvons ainsi également de relâcher certaines hypothèses sur la loi de l'aléa paramétrant la condition initiale.

Nous généralisons nos résultats à l'équation du tourbillon 2D pour laquelle le drift explose en 0. Ceci nous permet d'approcher des quantités physiques d'intérêt pour Navier-Stokes 2D, comme le champs de vecteurs vitesse moyen.

### 1.2.1 Solutions statistiques pour l'équation de McKean-Vlasov

Au **Chapitre 7**, nous considérons l'équation de McKean-Vlasov dans  $\mathbb{R}^d$ , avec condition initiale aléatoire et coefficient de diffusion  $\sigma$  non dégénéré. Afin de simplifier la présentation, nous présentons nos résultats, dans cette intro, pour le cas de la dimension 1.  $P(d\omega) - p.s., \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+,$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(t, x, \omega) &= -\frac{\partial}{\partial x} (u_b(t, x, \omega)p(t, x, \omega)) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta p(t, x, \omega) \\ p(0, x, \omega) &= \widehat{p}_0(x, \omega) \\ u_b(t, x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} b(x, y)p(t, y, \omega)dy, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

où  $b$  est une fonction Lipschitzienne continue bornée de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et où  $\sigma \neq 0$ . Nous reprenons l'hypothèse de Talay et Vaillant [117] et paramétrons la condition initiale par une variable aléatoire réelle  $\theta$  :

**Hypothèse 1.2.1.** *Nous supposons que  $\widehat{p}_0$  a la forme suivante :*

$$P(d\omega) - p.s., \widehat{p}_0(\cdot, \omega) = p_0(\cdot, \theta(\omega)), \quad (1.2.5)$$

1.  $\forall a \in \mathbb{R}, p_0(\cdot, a)$  est une densité de probabilité déterministe sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $\theta$  est une variable aléatoire réelle. Sa loi  $\nu$  est supposée absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , avec un support connexe  $\Theta$ . Nous notons  $G$  sa fonction de répartition, que l'on supposera être une bijection de l'intérieur de  $\Theta$  sur  $]0, 1[$ .

La loi de la condition initiale est donc l'image de la mesure de probabilité  $\nu(da)$  sur  $\mathbb{R}$  par l'application  $a \mapsto p_0(\cdot, a)$ . Cette hypothèse est fondamentale pour la construction de la méthode particulière. Le conditionnement par rapport à la condition initiale se ramène alors à un conditionnement par rapport à des variables aléatoires réelles  $\theta$ , et non par rapport à des variables aléatoires de dimension infinie  $\widehat{p}_0$ .

L'approche probabiliste sur laquelle se basent les développements des Chapitres 7 et 8 s'appuie sur les notions de solutions faibles de l'équation (1.2.4). Une variable aléatoire sur  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ,  $(Q_t(dx, \theta))_{t \in [0, T]}$ , est appelée *solution faible mesure* de (1.2.4) si :  $P(d\omega) - p.s., \forall \varphi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)Q_t(dx, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)p_0(x, \theta)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left( u_b(s, x, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) \right) Q_s(dx, \theta) ds \\ u_b(t, x, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} b(x, y)Q_t(dy, \theta) \\ Q_0(dx, \theta) &= p_0(x, \theta)dx. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Si  $P(d\omega) - p.s.$  et pour tout  $t \in [0, T]$ , les marginales  $Q_t(dx, \theta)$  admettent des densités  $p(t, x, \theta)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , la famille de ces densités est appelée *solution faible fonction* de (1.2.4).

Lorsque (1.2.6) admet une unique solution faible mesure  $(Q_t(dx, \theta))_{t \in [0, T]}$  (à un ensemble mesurable près), sa loi  $m \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R})))$  est appelée *solution statistique* de l'équation de McKean-Vlasov. Elle peut alors se voir comme la mesure image de  $\nu$  par la composition des applications suivantes :

$$a \in \Theta \mapsto p_0(\cdot, a) \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto (Q_t(dx, da))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R})).$$

Les marginales  $Q_t(dx, \theta)$  au temps  $t$  de la solution faible mesure de (1.2.6) sont des mesures de probabilité aléatoires sur  $\mathbb{R}$  dont la loi  $m_t \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$  est la marginale au temps  $t$  de  $m$  et est appelée *solution statistique spatiale* au temps  $t$  de l'équation de McKean-Vlasov.

L'intensité  $I(m_t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  de la solution statistique spatiale  $m_t$  au temps  $t$  est définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \langle I(m_t), f \rangle = \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} \langle Q, f \rangle m_t(dQ) = \int_{\mathbb{R}} \langle (S \circ \Phi(a))_t, f \rangle \nu(da). \quad (1.2.7)$$

Notre but est d'approcher (1.2.7) par une procédure fondée sur des particules en interaction et sur des estimateurs de régression à ondelettes.

L'interprétation probabiliste des équations de McKean-Vlasov avec conditions initiales aléatoires donnée par Talay et Vaillant [117] repose sur des équations différentielles stochastiques avec deux sources d'aléa. La première source d'aléa est celle de la condition initiale, prise en compte par la variable aléatoire  $\theta$ . La seconde source d'aléa est liée à l'approche probabiliste, qui consiste à rechercher des processus markoviens dont les marginales satisfont (1.2.6). Le processus à considérer est le suivant. Soient  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  un mouvement Brownien réel standard,  $(X_0(a))_{a \in \mathbb{R}}$  une famille de variables aléatoires telle que  $a \mapsto X_0(a)$  soit mesurable et telle que  $\mathcal{L}(X_0(a)) = p_0(x, a)dx$  et  $\theta$  une variable aléatoire de loi  $\nu$ . Nous supposons  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ ,  $(X_0(a))_{a \in \mathbb{R}}$  et  $\theta$  indépendants;  $P(d\omega) - a.s.$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} dX_t(\theta) = u_b(t, X_t(\theta), \theta)dt + \sigma dW_t \\ u_b(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}} b(x, y) P^{X_t(\theta)}(dy) \\ \mathcal{L}(\theta, X_0(\theta)) = p_0(x, a)dx \nu(da). \end{cases} \quad (1.2.8)$$

En suivant les idées de Talay et Vaillant [117], nous prouvons l'existence et l'unicité fortes de solutions pour (1.2.8). L'idée est de conditionner par  $\theta$ , et d'utiliser des arguments similaires à ceux développés pour les équations de McKean-Vlasov avec condition initiale déterministe. Nous pouvons reformuler (1.2.7) à l'aide de (1.2.8) par :  $\forall t \in [0, T], \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\langle I(m_t), f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}f(X_t(a)) \nu(da) = \mathbb{E}f(X_t(\theta)). \quad (1.2.9)$$

Talay et Vaillant [117] ont construit deux approximations particulières s'appuyant sur (1.2.8) et (1.2.9). La première procédure est une méthode de simulations imbriquées qui s'appuie sur la première égalité de (1.2.9). Il s'agit d'approcher  $\mathbb{E}f(X_t(a))$  pour différentes valeurs  $\theta = a$  fixées, en reprenant les résultats disponibles pour des conditions initiales déterministes ([114], [92]). Puis on approche l'intégrale par rapport à  $\nu(da)$  par une méthode de Monte-Carlo. La vitesse de convergence *théorique* de cette méthode est très bonne, mais la mise en oeuvre méthode est *numériquement* très lourde.

C'est pourquoi Talay et Vaillant proposent une seconde méthode de simulation directe. Leur idée est de s'appuyer sur la reformulation de  $u_b(t, x, a)$  comme une espérance conditionnelle par rapport à la variable  $\theta$  paramétrant la condition initiale :

$$u_b(t, x, a) = \mathbb{E}(b(x, X_t(\theta)) | \theta = a). \quad (1.2.10)$$

et d'approcher le drift inconnu (1.2.10) par des estimateurs de régression. L'algorithme est :

1. On simule  $N$  variables aléatoires indépendantes  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  de loi  $\nu$ ,
2. A chaque  $i \in [1, N]$ , on associe une (unique) particule de condition initiale  $\bar{X}_0^{i, N}(\theta_i)$  de loi  $p_0(x, \theta_i)dx$ . La trajectoire de cette particule est donnée par un schéma de discrétisation de pas de temps  $\Delta t = T/K : \forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{i, N}(\theta_i) = \bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i) + \hat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i), \theta_i) \Delta t + \sigma \left( W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i \right), \quad (1.2.11)$$

où  $\hat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i), \theta_i)$  est un estimateur de régression construit sur le système de particules en interaction.

3. L'approximation de  $\langle I(m_T), f \rangle$  est donnée par :

$$\langle I(m_T), f \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \left( \bar{X}_T^{i, N}(\theta_i) \right). \quad (1.2.12)$$

Le choix de [117] se porte sur des estimateurs de Nadaraya-Watson :

$$\hat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i), \theta_i) = \sum_{j=1}^N \frac{H_N(\theta_i - \theta_j)}{\sum_{l=1}^N H_N(\theta_i - \theta_l)} b \left( \bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i), \bar{X}_{t_k}^{j, N}(\theta_j) \right), \quad (1.2.13)$$

où  $H_N = H(\cdot/h_N)/h_N$  pour une fenêtre donnée  $h_N$  et un noyau de Parzen-Rosenblatt  $H$  sur  $\mathbb{R}$  (cf. [11]). Les hypothèses faites par [117] pour calculer la vitesse de convergence incluent le fait que l'application  $a \mapsto v(\cdot, a)$  soit Lipschitzienne pour la norme  $L^1$  et que la loi  $\nu$  soit absolument continue avec une densité à support compact dans  $\mathbb{R}$ , Lipschitzienne et strictement positive sur ce compact. Pour  $f$  assez régulière,  $\exists C > 0, \exists N_0, \forall N \geq N_0$ ,

$$\mathbb{E} \left| \langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{i, N}(\theta_i)) \right| \leq C \left( \Delta t + \frac{1}{N^{1/4} h_N^{1/4}} + h_N^{1/4} \right). \quad (1.2.14)$$

Une optimisation du membre de droite en  $h_N$  fournit une vitesse en  $N^{-1/8}$ . La complexité de cet algorithme est en  $O(N^2/\Delta t)$  (cf. [119]).

En utilisant l'algorithme précédent et des estimateurs de régression à ondelettes, nous montrons que nous pouvons obtenir de meilleures vitesses de convergence. Décrivons la procédure que nous proposons. Soit une Analyse Multi-Résolution générée par des ondelettes père et mère  $\phi$  et  $\psi$  Lipschitziennes et à support compact (cf. Annexe B.1 pour une présentation). Pour  $I = (I_1, I_2) \in [-1, +\infty[\times\mathbb{Z}$ , nous définissons  $\psi_I(x) = 2^{I_1/2}\psi(2^{I_1}x - I_2)$ . Toute fonction  $L^2$  est décomposable sur la base  $(\psi_I)_I$ . En suivant la démarche de Kerkyacharian et Picard [72], nous utilisons cette décomposition pour proposer un estimateur de l'application  $a \mapsto u_b(t, x, a)$ . Soit la fonction de seuillage  $thr(x, \vartheta) = x\mathbf{1}_{|x| \geq \vartheta}$ , et soit  $G_N$  la fonction de répartition empirique des  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ . L'estimateur que nous considérons est :  $\forall a \in \Theta, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{u}_b(t_k, x, a, \vartheta_N) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \psi_I(G_N(a)), \quad (1.2.15)$$

$$\text{où : } \hat{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) = thr \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_I(G_N(\theta_j)) b \left( x, \bar{X}_{t_k}^{j, N}(\theta_j) \right), \vartheta_N \right), \quad (1.2.16)$$

$\vartheta_N$  correspond au seuillage et  $I_1^N$  est le niveau de résolution, choisis tels que :

$$\vartheta_N = \kappa \sqrt{\frac{\log N}{N}}, \quad 2^{I_1^N} \sim \vartheta_N^{-1},$$

où  $\kappa$  est une constante déterminée dans les calculs.

L'idée du seuillage est d'éliminer le "bruit". Lorsque l'approximation

$$\sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j)) / N$$

du vrai coefficient de la décomposition de  $u_b(t, x, a)$  sur  $Vect(\psi_I)$  est plus petite que le seuil  $\vartheta_N$ , on considère que ce coefficient n'est pas significatif et on le fixe à zéro.

L'utilisation de  $G_N$  au lieu de  $G$  nous permet de supposer que la fonction de répartition  $G$  de  $\theta$  est inconnue. C'est le cas lorsque les procédures de simulation de  $\theta$  sont compliquées ou lorsque la fonction de répartition est reconstruite à partir de données expérimentales. Enfin, notons que  $G_N(\theta_j) \in \{i/N, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ , ce qui nous ramène à utiliser la grille  $j/N$ ,  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  au lieu des données  $(\theta_j)_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ . Les estimateurs de régression sur la grille  $j/N$ ,  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  sont souvent déjà implémentés dans les logiciels statistiques, ce qui facilite grandement la mise en oeuvre numérique.

Si  $\nu$  est absolument continue de support connexe quelconque dans  $\mathbb{R}$  et satisfait une inégalité de concentration gaussienne, si  $x \mapsto p_0(x, a)$  est à décroissance exponentielle à l'infini, si les applications  $a \mapsto p_0(x, a)dx$  et  $\alpha \in [0, 1] \mapsto p_0(x, G^{-1}(\alpha))dx$  sont respectivement Lipschitzienne et  $s$ -Höldérienne pour la norme de Vasserstein  $L^2$  avec  $s > 1/2$  que nous supposons a priori inconnu, nous établissons le résultat de convergence suivant. Pour  $f$  assez régulière,  $\exists C > 0$ ,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall N \geq N_0$ ,

$$\mathbb{E} | \langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{i,N}(\theta_i)) | \leq C \left( \Delta t + \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} \right). \quad (1.2.17)$$

La vitesse de convergence obtenue est meilleure que celle de la méthode se basant sur les estimateurs de Nadaraya-Watson. On peut cependant noter que le coût numérique de cette méthode est plus important, car les estimateurs de régression doivent être recalculés à chaque étape, du fait du seuillage. Cependant, si l'on utilise l'algorithme de Mallat, de complexité d'ordre  $O(N)$  (cf. [61, 80]), la complexité de la méthode reste en  $O(N^2/\Delta t)$ , ce qui est meilleur que pour la méthode de simulations imbriquées et comparable à la complexité de la méthode avec les estimateurs de Nadaraya-Watson.

Nous avons affaibli certaines hypothèses du résultat de [117], en particulier celles qui portent sur la régularité de la densité de la loi de  $\theta$ , qui caractérise l'aléa de la condition initiale. Le support de  $\nu$  n'est pas nécessairement compact et nous n'avons pas besoin de borne inférieure strictement positive pour sa densité. Une plus grande classe de variables aléatoires est alors accessible pour paramétrer la condition initiale.

Enfin, notons que dans le cas où  $s$  est connu, il est possible de considérer des estimateurs sans seuillage en remplaçant (1.2.16) par :

$$\widehat{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j)), \quad (1.2.18)$$

avec  $I_1^N$  tel que  $2^{I_1^N} \sim N^{1/(2s+1)}$ . L'erreur obtenue en (1.2.17) peut alors être améliorée en :

$$C \left( \Delta t + \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}} \right).$$



Ce résultat est bon. Le terme en  $N^{-s/(2s+1)}$  correspond à la vitesse minimax pour l'estimation d'une espérance conditionnelle en statistique (cf. [61]).

L'idée de la preuve repose sur un couplage entre les particules interagissantes (1.2.11) et les particules indépendantes définies par :  $\forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}}^i(\theta_i) = \bar{X}_{t_k}^i(\theta_i) + u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i(\theta_i), \theta_i)\Delta t + \sigma \left( W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i \right) \\ \bar{X}_0^i = \bar{X}_0^{i,N}. \end{cases} \quad (1.2.19)$$

où  $\theta_i$ ,  $W^i$ , et  $\bar{X}_0^{i,N}$  sont les mêmes que pour les particules (1.2.11). On découpe alors l'erreur (1.2.17), en séparant les termes d'erreurs liés à la discrétisation du temps, au remplacement de l'espérance par une moyenne empirique, et à l'approximation du drift  $u_b$  par un estimateur de régression. La considération de cette dernière source d'erreur nous amène à adapter des résultats dûs à Kerkycharian et Picard [72], et à établir l'estimée suivante :  $\forall \gamma > 0, \exists \kappa, \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(G_N(\theta_i)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}(\psi_I(G(\theta)) b(x, \bar{X}_{t_k}^1(\theta))) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C}{N^\gamma}.$$

Cette inégalité de déviation est difficile à obtenir car du fait de l'utilisation de la fonction de répartition empirique  $G_N$ , nous avons une moyenne de termes dépendants. Ceci nous empêche d'appliquer directement des outils classiques tels que les inégalités de Rosenthal ou de Bernstein. Nous conditionnons par rapport aux variables aléatoires  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  pour appliquer l'inégalité de Bernstein, puis, pour nous affranchir du conditionnement, nous utilisons des inégalités de concentration Sobolev-logarithmiques.

De nombreuses difficultés ont été rencontrées pour calculer la vitesse de convergence de l'estimateur de régression avec ondelettes construit à partir du système de particules interagissantes. Le problème de la vitesse de convergence des approximations utilisant les estimateurs seuillés (1.2.16) n'est pas totalement résolu. En effet, le terme d'erreur que nous obtenons fait apparaître  $N^{1/4}$  là où nous attendions  $N^{1/(2s+1)}$  comme lors de l'utilisation d'estimateurs non seuillés (1.2.18). La raison est que le seuillage des estimateurs construits à partir de (1.2.11) et celui des estimateurs construits à partir de (1.2.19) n'ont aucune raison de coïncider.

## 1.2.2 Approximation des solutions statistiques pour l'équation de Navier-Stokes 2D

L'étude de l'équation du tourbillon 2D (1.2.2) est menée au **Chapitre 8**. Elle correspond à une équation de McKean-Vlasov avec un noyau d'interaction (1.2.3) qui explose en zéro. En suivant l'approche de Marchioro et Pulvirenti [83] et Méléard [88], nous régularisons ce noyau par des techniques de *cut-off* paramétré par  $\varepsilon > 0$ .

Une autre difficulté provient du fait que la condition initiale de (1.2.2) n'est pas nécessairement une densité de probabilité. Nous faisons l'hypothèse que  $w_0(x, a)$  est une fonction bornée et intégrable en  $x \in \mathbb{R}^2$ . Alors, suivant l'approche utilisée par Jourdain [67], nous pouvons définir  $h(x, \theta) = w_0(x, \theta) / \|w_0(\cdot, \theta)\|_1 / |w_0(x, \theta)|$  de sorte que  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, w_0(x, \theta) = h(x, \theta)p_0(x, \theta)$  où  $p_0(x, \theta) = |w_0(x, \theta)| / \|w_0(\cdot, \theta)\|_1$  est une densité de probabilité.

Nous adaptons dans un premier temps l'approche probabiliste de [83, 88, 90] pour prouver l'existence et l'unicité des solutions de (1.2.2). Une fois le conditionnement par  $\theta$  réalisé, les idées

sont les mêmes que dans le cas déterministe. L'équation différentielle stochastique sur laquelle se base l'interprétation probabiliste de l'équation du tourbillon 2D régularisée et à condition initiale aléatoire est la suivante :  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon(\theta) = X_0(\theta) + \sigma W_t + \int_0^t K_\varepsilon * \tilde{Q}_s^\varepsilon(X_s^\varepsilon(\theta), \theta) ds \\ \mathcal{L}(\theta) = \nu, \quad \mathcal{L}(X_0(\theta)) = p_0(x, \theta) dx \\ Q^\varepsilon(dy, \theta) = \mathcal{L}(X^\varepsilon(\theta)), \quad \tilde{Q}^\varepsilon(B, \theta) = \int_{\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)} 1_B(y(t)) h(y(0), \theta) Q^\varepsilon(dy, \theta). \end{cases} \quad (1.2.20)$$

Par construction,  $\tilde{Q}^\varepsilon(\cdot, \theta)$  est une solution faible mesure de l'équation du tourbillon régularisée. Par une application du théorème de Girsanov, nous montrons que les marginales  $\tilde{Q}_t^\varepsilon(\cdot, \theta)$  sont  $\mathbb{P}$ -presque sûrement absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  et il existe une solution faible fonction à l'équation du tourbillon régularisée. L'existence et l'unicité de solutions faibles fonctions à l'équation du tourbillon initiale (1.2.2) sont alors obtenues en introduisant une équation *mild* et en faisant tendre le paramètre de *cut-off* vers 0, de même que dans [88].

La solution de l'équation de Navier-Stokes 2D (1.2.1) se retrouve par :  $\mathbf{v} = K * w$ . En particulier, le champs de vitesses moyennes est

$$\forall i \in \{1, 2\}, \int_{\mathbb{R}} v_i(T, x, a) \nu(da) = \int_{\mathbb{R}} \langle w(T, dy, a), K^i(x - y) \rangle \nu(da) = \langle I(m_T), K^i(x - \cdot) \rangle.$$

Nous pouvons l'approcher en construisant des systèmes de particules analogues à ceux étudiés au Chapitre 7, en incluant une pondération liée à la fonction  $h$  introduite pour définir  $p_0$  à partir de  $w_0$ .

Des simulations sont réalisées à la fin du Chapitre 8 et semblent montrer que les méthodes avec ondelettes sont plus robustes que les méthodes à simulations imbriquées ou que les méthodes utilisant les estimateurs de Nadaraya-Watson, au sens où elles donnent des résultats convenables quelle que soit la situation.

La Partie 2 (Chapitres 7 et 8) a fait l'objet d'un article accepté dans la revue *Stochastic Processes and their Applications*.

Une bibliographie globale est placée en fin de thèse.



## Première partie

# Modélisation probabiliste d'une population structurée par traits et par âges



**Notations :**

Pour deux espaces métriques  $E$  et  $F$ , nous notons  $\mathcal{C}_b(E, F)$  l'ensemble des fonctions continues bornées de  $E$  dans  $F$ , que nous munissons de la norme de la convergence uniforme, et  $\mathbb{D}(E, F)$  l'ensemble des fonctions càdlàg de  $E$  dans  $F$  muni de la distance de Skohorod. lorsque  $F = \mathbb{R}$ , on utilisera parfois la notation  $\mathcal{C}_b(E)$ . On désignera par  $\mathcal{C}_K(E, F)$  (resp.  $\mathcal{C}_0(E, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}_b^1(E, F)$ ,  $\mathcal{C}_b^{0,1}(E \times \mathbb{R}^d, F)$ ,  $\mathcal{B}_b(E, F)$ ) l'ensemble des fonctions continues à support compact (resp. des fonctions réelles continues tendant vers 0 à l'infini, des fonctions différentiables bornées de dérivées partielles bornées, des fonctions continues bornées avec des dérivées partielles bornées par rapport aux variables de  $\mathbb{R}^d$ , des fonctions boréliennes bornées). Le gradient par rapport aux variables  $a \in \mathbb{R}^d$  d'une fonction  $f : (x, a) \in E \times \mathbb{R}^d \mapsto f(x, a) \in \mathbb{R}$  de  $\mathcal{C}^{0,1}(E \times \mathbb{R}^d)$  sera noté  $\nabla_a f$ .

Pour un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ , on note  $\mathcal{M}_F(E)$  l'ensemble des mesures finies sur  $E$ , par  $\mathcal{M}_P(E)$  l'ensemble des mesures ponctuelles sur  $E$ , par  $\mathcal{M}_P^n(E)$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des mesures de la forme :

$$\mathcal{M}_P^n(E) = \left\{ \frac{1}{n} m \mid m \in \mathcal{M}_P(E) \right\}, \quad (1.2.21)$$

par  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $E$  et par  $\mathcal{M}_S(E)$  l'ensemble des mesures signées sur  $E$ .

Pour  $m \in \mathcal{M}_F(E)$  et  $f \in \mathcal{B}_b(E)$ , on note  $\langle m, f \rangle = \int_E f dm$ .

L'espace des mesures finies sur  $E$ ,  $\mathcal{M}_F(E)$ , peut être muni de la topologie de la convergence étroite (la plus petite topologie rendant continues les applications  $m \mapsto \langle m, f \rangle$  avec  $f \in \mathcal{C}_b(E)$ ) ou de la topologie de la convergence vague (la plus petite topologie rendant continues les applications  $m \mapsto \langle m, f \rangle$  avec  $f \in \mathcal{C}_K(E)$ ). Par défaut, on le munit de la topologie de la convergence étroite, et lorsqu'il se présentera une ambiguïté, on écrira  $(\mathcal{M}_F(E), \acute{e})$  (resp.  $(\mathcal{M}_F(E), v)$ ) pour rappeler que l'on considère la topologie de la convergence étroite (resp. de la converge vague) sur  $\mathcal{M}_F(E)$ . La question de la topologie considérée pour l'espace  $\mathcal{M}_S(E)$  sera discutée aux Chapitres 4 et 8. On notera  $\|\cdot\|_{TV}$  la norme en variation totale.

A chaque fonction  $f \in \mathcal{B}_b(E)$  et  $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on peut associer une fonction cylindrique  $F_f \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_F(E))$  définie par :  $\forall m \in \mathcal{M}_F(\mathbb{E}), F_f(m) = F(\langle m, f \rangle)$ . L'ensemble des fonctions de cette forme caractérise la convergence étroite dans  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_F(E))$  au sens où une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_F(E))$  converge étroitement vers  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_F(E))$  si et seulement si pour toutes fonctions  $f \in \mathcal{B}_b(E)$  et  $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{M}_F(E)} F(\langle \mu, f \rangle) P_n(d\mu) = \int_{\mathcal{M}_F(E)} F(\langle \mu, f \rangle) P(d\mu).$$

(cf. Dawson [29], Théorème 3.2.6).

On note  $n(di)$  (resp.  $dx$ ,  $\delta_y(dx)$ ) la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}^*$  (resp la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , la masse de Dirac en  $y \in E$ ).

$C$  est une constante pouvant changer de ligne en ligne.



## Chapitre 2

# Un modèle microscopique de population structurée par traits et par âges

Nous présentons un modèle de système écologique individu-centré. La population est discrète et ce sont les évolutions individuelles qui sont modélisées. Les individus sont caractérisés par leurs *traits* (l'âge à maturité, le type altruiste/tricheur, la concentration d'hormones...) et leurs *âges* (âge physique, âge biologique, âge d'une maladie...). Ils se reproduisent de façon asexuée, vieillissent et meurent. Lors de la reproduction, un individu transmet héréditairement ses traits à ses descendants, sauf s'il se produit une mutation. Les taux de naissance et de mort dépendent des traits et des âges des individus. Nous modélisons les interactions entre les individus (mortalité logistique, altruisme et entraide, cannibalisme d'une classe d'âge par une autre...) en faisant aussi dépendre ces taux d'une mesure représentant l'ensemble de la population. La vitesse de vieillissement peut elle aussi dépendre des traits et des âges des individus. De l'ensemble des phénomènes de naissances, de morts et de vieillissement, il résulte une évolution globale de la population, au niveau macroscopique.

L'espace des traits sera noté  $\mathcal{X}$ . Nous supposons pour simplifier que  $\mathcal{X}$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^d$ . L'espace des âges est  $\mathbb{R}_+^d = \{a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, a_i \geq 0\}$ . Nous notons :

$$\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^d, \quad (2.0.1)$$

que nous munirons de sa tribu borélienne.

Dans notre modèle, un individu est représenté par une masse de Dirac en  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ . La population au temps  $t \geq 0$  peut être décrite par la mesure suivante de  $\mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  :

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{(x_i(t), a_i(t))}, \quad \text{où} \quad N_t = \langle Z_t, 1 \rangle = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} Z_t(dx, da) \quad (2.0.2)$$

est le nombre d'individus vivants au temps  $t$ .

Nous commençons par présenter, à la Section 2.1, les mécanismes individuels régissant la population au niveau microscopique (naissances, vieillissement et morts). Nous présentons les hypothèses qui seront faites pour la suite de l'étude (Chapitres 2 à 5), et donnons des exemples. A la Section 2.2, nous montrons que, sous des hypothèses convenables,  $Z$  défini en (2.0.2) est la solution, dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}))$ , d'une équation différentielle stochastique dirigée par une mesure ponctuelle de Poisson. A la Section 2.3.1, nous donnons un algorithme pour simuler ce processus



et présentons des simulations.

Nos modèles et algorithmes s'inspirent des travaux de Fournier et Méléard [49], Champagnat *et al.* [22, 21], Champagnat [19], concernant des populations sans structure d'âge. Des modèles plus simples, pour des populations structurées par l'âge physique et des taux de naissance et de mort bornés, ont été étudiés par Wang [123], Oelschläger [102].

Dans la suite, il sera utile de pouvoir extraire un individu particulier de la population totale, et c'est la raison pour laquelle nous introduisons les applications suivantes :

**Définition 2.0.2.** *Les applications  $X = (X_1, \dots, X_N, \dots)$  et  $A = (A_1, \dots, A_N, \dots)$ , de  $\mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  dans  $(\mathcal{X})^{\mathbb{N}}$  et  $(\mathbb{R}_+^d)^{\mathbb{N}}$  respectivement, sont définies par :*

$$X \left( \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, a_i)} \right) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0, \dots), \quad A \left( \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, a_i)} \right) = (a_1, \dots, a_N, 0, \dots, 0, \dots),$$

où les particules sont rangées suivant un ordre choisi sur  $\mathcal{X}$  (ordre lexicographique par exemple), et pour les particules de même trait  $x$ , par ordre décroissant du premier âge, du second âge etc.

## 2.1 Description des paramètres régissant la dynamique individuelle

### 2.1.1 Naissances et mutations

Un individu de trait  $x \in \mathcal{X}$  et d'âges  $a \in \mathbb{R}_+^d$  peut donner naissance à un nouvel individu au taux  $b(x, a)$ , où  $b$  est une fonction de  $\tilde{\mathcal{X}}$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Les âges des nouveaux individus sont 0.

1. Avec probabilité  $p(x, a) \in [0, 1]$ , il se produit une mutation et le trait  $x' \in \mathcal{X}$  du nouvel individu est la réalisation d'une variable aléatoire de loi  $K(x, a, dx')$ .
2. Avec probabilité  $1 - p(x, a) \in [0, 1]$ , il n'y a pas de mutation et l'individu  $(x, a)$  produit un clone de même trait  $x \in \mathcal{X}$ .

Les hypothèses suivantes sont faites dans la suite ce travail :

**Hypothèse 2.1.1.** *1. Nous supposons que  $b$  est continue et qu'il existe une constante positive  $\bar{b} > 0$  telle que  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, |b(x, a)| \leq \bar{b}$ .*

*2. Nous supposons qu'il existe une mesure de probabilité de "référence"  $P(dx)$  sur  $\mathcal{X}$  telle que  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, K(x, a, dx')$  soit absolument continue par rapport à  $P(dx')$ , avec une densité bornée par  $\bar{k} > 0$  :*

$$\forall (x, a, x') \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^d \times \mathcal{X}, \quad K(x, a, dx') = k(x, a, x')P(dx') \quad \text{avec} \quad |k(x, a, x')| \leq \bar{k}.$$

**Remarque 2.1.2.** *Lorsque  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{d_x}$  ou  $\mathbb{N}^{d_x}$  est borné, le choix de la loi uniforme sur  $\mathcal{X}$  pour  $P(dx)$  est naturel.*

**Exemple 2.1.3.** *1. Les traits sont l'âge à maturité  $a_M \geq 0$  et le taux de naissance au stade adulte  $b_1 \geq 0$ . Le taux de naissance est  $b(a_M, b_1, a) = b_1 1_{a \geq a_M}$ . Le travail de Henson [58], par exemple, modélise une population d'insectes, *Tribolium*, pour lesquels on peut observer deux comportements bien distincts au cours de la vie. Tant que les insectes sont encore à l'état de larves, ils ne se reproduisent pas. Une fois devenus adultes, ils pondent des oeufs. Le taux de naissance peut-être considéré comme constant du fait de la courte durée de vie des insectes. Remarquons que ces taux ne sont pas continus.*

2. Les traits sont deux paramètres positifs  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ . Webb [124] a étudié des modèles avec des taux de naissance de la forme  $b(b_1, b_2, a) = b_1 e^{-b_2 a}$ , décroissants avec l'âge, ou  $b(b_1, b_2, a) = b_1(1 - e^{-b_2 a})$ , croissants avec l'âge. Ces comportements correspondent par exemple au saumon rose *Oncorhynchus Gorbuscha* qui se reproduit essentiellement en début de vie, avant d'avoir deux ans, ou à la cigale *Magicicada* qui se reproduit en fin de vie, vers 13-17 ans avant de mourir.
3. Notons qu'il existe des modèles avec des espaces de traits plus compliqués. Dans le modèle d'Ernande [43] concernant des réserves de poissons soumises à la pêche, certains traits sont fonctionnels (cas non considéré ici). Les traits sont le taux de croissance  $g > 0$  et une fonction continue  $S : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  définissant la taille à maturité  $x_M$  comme fonction de l'âge à maturité  $a_M : x_M = S(a_M)$ .

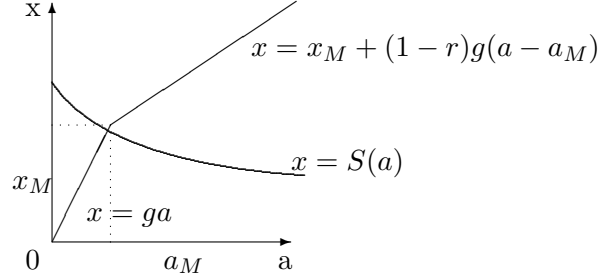


FIG. 2.1 – La taille en fonction de l'âge dans le modèle d'Ernande et al.

La taille d'un individu juvénile est  $x(a) = ga$  et celle d'un individu adulte est  $x(a) = x_M + (1-r)g(a - a_M)$ , où  $r \in [0, 1]$  décrit l'arbitrage entre la reproduction et la croissance, et où l'âge et la taille à maturité,  $a_M$  et  $x_M$ , sont définis par l'intersection de la courbe représentative de  $S$ ,  $x = S(a)$ , et la courbe de croissance juvénile,  $x = ga$ . Le taux de naissance choisi par Ernande et al. [43] est alors proportionnel au volume de l'individu et supposé être de la forme  $b(g, S, a) = b_1 x(a)^3$ , où  $b_1$  est une constante positive.

### 2.1.2 Le vieillissement

Les individus de la population vieillissent. La vitesse de vieillissement d'un individu  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$  est donnée par la fonction  $v(x, a)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^d$  :

$$\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, v(x, a) = (v_1(x, a), \dots, v_d(x, a)), \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, v_i(x, a) \geq 0.$$

Lorsque l'on considère plusieurs âges ( $d > 1$ ), la  $i^{\text{ème}}$  composante  $v_i(x, a)$  de  $v(x, a)$  représente la vitesse de vieillissement du  $i^{\text{ème}}$  âge.

**Hypothèse 2.1.4.** Nous supposons que  $v \in \mathcal{B}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+^d)$  est dérivable par rapport aux variables d'âges, que  $\nabla_a v$  est continue par rapport aux variables d'âges et que :

$$\exists \bar{v} > 0, \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, 0 < v_i(x, a) \leq \bar{v}(1 + a_i). \quad (2.1.1)$$

Le phénomène de vieillissement est déterministe. Les âges d'un individu de trait  $x \in \mathcal{X}$  et d'âges  $a_0 \in \mathbb{R}_+^d$  à l'instant  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  satisfont un système différentiel d'ordre 1 paramétré par  $x$  :  $\forall t \geq t_0$ ,

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = v(x, a(x, t)) \\ a(x, t_0) = a_0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Lorsque l'une des composantes du vecteur  $v(x, a)$  est constante en  $a$ , l'âge correspondant est linéairement croissant en temps. Une vitesse de vieillissement non constante modélise des âges mesurés sur des critères physiologiques qui évoluent de façon non linéaire en temps. La proposition suivante énonce des résultats d'existence et d'unicité pour le système (2.1.2).

**Proposition 2.1.5.** *Supposons que  $v$  satisfait l'Hypothèse 2.1.4.*

(i) *Le système différentiel ordinaire (2.1.2) admet pour tous  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}_+^d$ , et  $x \in \mathcal{X}$  une unique solution, notée  $t \mapsto A_x(t, t_0, a_0)$ . Celle-ci définit un flot paramétré par  $x$  :*

$$A_x : (t, t_0, a_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^d \mapsto A_x(t, t_0, a_0) \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1.3)$$

*de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ce flot est croissant en  $t$  sur chacune de ses composantes.*

(ii)  $\forall t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+^d, \forall x \in \mathcal{X}, A_x(t_3, t_1, a) = A_x(t_3, t_2, A_x(t_2, t_1, a))$ .

(iii) *Pour tous  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$ , l'application  $a \in \mathbb{R}_+^d \mapsto A_x(t_1, t_2, a) \in \mathbb{R}^d$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+^d$  sur son image dans  $\mathbb{R}_+^d$ .*

(iv) *Lorsque  $d = 1$ , pour tous  $a_0 \in \mathbb{R}_+$  et  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , l'application  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto A_x(t, t_0, a_0) \in \mathbb{R}$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+$  sur son image.  $\square$*

*Esquisse de démonstration.* Les différents points de cette Proposition s'appuient sur des résultats classiques concernant les équations différentielles ordinaires (voir par exemple Zuily et Queffélec [126], Chapitre 10, pages 348 à 360).

L'application  $a \in \mathbb{R}_+^d \mapsto v(x, a) \in \mathbb{R}_+^d$  étant de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^d)$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , elle est localement lipschitzienne. L'existence et l'unicité de la solution de (2.1.2) sont les conséquences du théorème de Cauchy Lipschitz. Grâce à (2.1.1), la solution maximale est définie sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier (cf. Th. III.3 [126]). La continuité et la différentiabilité par rapport aux conditions initiales proviennent de l'hypothèse de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport aux variables d'âges (Th. II.9 et II.10 [126]).

Lorsque  $d = 1$ , la solution  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto A_x(t, t_0, a_0)$  est de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  et strictement croissante car  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, v(x, a) > 0$ . Elle définit donc un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+$  sur son image et le point (iv) est prouvé.  $\blacksquare$

**Exemple 2.1.6.** *L'Hypothèse 2.1.4 englobe le cas des vitesses de vieillissement égales à 1. Ce cas est presque toujours considéré dans la littérature des populations structurées par âge.*

1. *L'âge physique au temps  $t$  d'un individu né au temps  $c$  est défini par  $t - c$ .*
2. *Si  $a$  est l'âge d'une maladie, nous pouvons le considérer égal à 0 pour des individus sains et à  $t - c$  pour des individus contaminés au temps  $c$ .*
3. *En épidémiologie, pour l'état d'avancement d'une maladie, l'introduction d'une vitesse d'évolution dépendant des traits de l'individu et de l'état présent de la maladie est importante. Cela permet de prendre en compte certaines résistances des individus.*
4. *Toujours en épidémiologie, nous pouvons modéliser l'avancement de maladies dépendant du temps au travers de la variation de certaines quantités chimiques dans l'organisme, cette évolution pouvant être non-linéaire (vitesse non constante). Pour le SIDA, c'est la quantité de lymphocytes  $CD4+$  dans le sang qui indique le stade de la maladie. A partir d'un taux inférieur à 500 cellules/mm<sup>3</sup>, un patient séropositif entre en phase finale de SIDA. Dans ce cas, l'état d'avancement peut être défini comme la différence entre le taux de lymphocytes  $CD4+$  pour un sujet sain (800 cellules/mm<sup>3</sup>) et le taux mesuré. Cette quantité ne croît pas linéairement en temps ni uniformément suivant les séropositifs, puisque l'on observe des périodes de latence et de recrudescence de durées variables (cf. [59] par exemple).*
5. *Rotenberg [109] s'intéresse à des cellules dont la vitesse de dégénérescence (sénescence) est variable. Le trait  $x > 0$  est la vitesse de vieillissement. Comme Rotenberg permet à cette vitesse de changer ponctuellement au cours du temps, l'âge d'un individu est une fonction du temps croissante affine par morceaux.*

Nous donnons maintenant quelques propriétés du flot (2.1.3) qui seront utiles pour la suite.

**Proposition 2.1.7.** *Soient  $x \in \mathcal{X}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  et  $a_0 \in \mathbb{R}_+^d$ . Sous les Hypothèses 2.1.4,*

$$\forall T > 0, \forall t \in [0, T], |A_x(t, t_0, a_0)| \leq \sqrt{(2|a_0|^2 + 4\bar{v}^2 dT)} \exp(4\bar{v}^2 T). \quad (2.1.4)$$

*Démonstration.* Soit  $T > 0$ . Par les Hypothèses 2.1.4,  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,

$$|v(x, a)|^2 = \sum_{i=1}^d |v_i(x, a)|^2 \leq \bar{v}^2 \sum_{i=1}^d (1 + a_i)^2 \leq 2\bar{v}^2 (d + |a|^2). \quad (2.1.5)$$

Alors, par définition du flot (2.1.3) :  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} A_x(t, t_0, a_0) &= a_0 + \int_0^t v(x, A_x(u, t_0, a_0)) du. \\ |A_x(t, t_0, a_0)|^2 &\leq 2|a_0|^2 + 4\bar{v}^2 \int_0^t (d + |A_x(u, t_0, a_0)|^2) du \leq (2|a_0|^2 + 4\bar{v}^2 dT) e^{4\bar{v}^2 T}, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

par le Lemme de Gronwall. ■

La Proposition 2.1.8 nous fournit un lien entre le flot (2.1.3) et les équations aux dérivées partielles (2.1.7) et (2.1.8) qui apparaîtront souvent dans la suite de ce travail.

**Proposition 2.1.8.** *Soient  $x \in \mathcal{X}$ ,  $v \in \mathcal{C}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}^d)$  satisfaisant l'Hypothèse 2.1.4, et  $A_x$  est le flot défini à la Proposition 2.1.2.*

(i) *Soit  $f_0 \in \mathcal{C}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ . L'équation suivante paramétrée par  $x : \forall a \in \mathbb{R}_+^d, \forall t \in \mathbb{R}_+ :$*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x, a, t) + v(x, a) \nabla_a f(x, a, t) = 0 \\ f(x, a, 0) = f_0(x, a), \end{cases} \quad (2.1.7)$$

*admet une unique solution  $f \in \mathcal{C}^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$  définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, f(x, a, t) = f_0(x, A_x(0, t, a)).$$

(ii) *Soit  $T > 0$  et  $\phi \in \mathcal{C}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ . L'équation avec condition au temps  $T$  paramétrée par  $x : \forall a \in \mathbb{R}_+^d, \forall t \in \mathbb{R}_+ :$*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x, a, t) + v(x, a) \nabla_a f(x, a, t) = 0 \\ f(x, a, T) = \phi(x, a), \end{cases} \quad (2.1.8)$$

*admet une unique solution  $f \in \mathcal{C}^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$  définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, f(x, a, t) = \phi(x, A_x(T, t, a)).$$

*Démonstration.* Les équations aux dérivées partielles (2.1.7) et (2.1.8) sont des équations de transport (cf. [53], [45] par exemple). La démonstration est donnée en Annexe A.1. ■

**Remarque 2.1.9.** *Dans le cas d'un âge scalaire ( $d = 1$ ) et si  $v \equiv 1$ , la solution de (2.1.7) est donnée par :  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall t \in \mathbb{R}_+, f(x, a, t) = f_0(x, a - t)$ , et la solution de (2.1.8) par  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall t \in \mathbb{R}_+, f(x, a, t) = \phi(x, a - (t - T))$ . □*

### 2.1.3 Morts et interactions

Les capacités de survie d'un individu  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$  sont fonctions de  $(x, a)$  et dépendent également des interactions (coopérations et compétitions) de l'individu avec le reste de la population. Nous présentons la modélisation retenue pour le taux de mort d'un individu. Les durées de vie et les probabilités de survie des individus sont ensuite considérées.

Soit un noyau borné  $U : \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}^{d_c}$ , où  $d_c \in \mathbb{N}^*$  est le nombre d'interactions prises en considération. Pour  $(x, a), (y, \alpha) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $U((x, a), (y, \alpha))$  modélise l'action exercée par l'individu

$(y, \alpha)$  sur  $(x, a)$ . Le taux de mortalité d'un individu  $(x, a)$  dans la population  $Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  est  $d(x, a, ZU(x, a))$ , avec  $d : \tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}^{d_c} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et :

$$ZU(x, a) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) Z(dy, d\alpha).$$

Lorsque  $Z = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, a_i}$ , le terme d'interaction s'écrit de la façon suivante :

$$ZU(x, a) = \sum_{i=1}^N U((x, a), (X_i(Z), A_i(Z))),$$

avec les notations de la Définition 2.0.2.

**Hypothèse 2.1.10.** *Les hypothèses suivantes sont faites sur  $U$  et  $d$  :*

1. *Le noyau  $U$  est borné :  $\exists \bar{U} > 0, \forall (x, a), (y, \alpha) \in \mathcal{X}, |U((x, a), (y, \alpha))| \leq \bar{U}$ .*
2. *Le taux  $d$  est continu et uniformément lipschitzien par rapport au terme d'interaction :*

$$\exists L_d > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}^{d_c}, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, |d(x, a, u) - d(x, a, v)| \leq L_d |u - v|.$$

*Nous supposons de plus que  $d$  est au plus linéaire par rapport au terme d'interaction :*

$$\exists \bar{d} > 0, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall u \in \mathbb{R}^{d_c}, d(x, a, u) \leq \bar{d}(1 + |u|).$$

3. *Nous supposons qu'il existe un taux de "mort naturelle"  $\underline{d} : \tilde{\mathcal{X}} \mapsto \mathbb{R}$ , tel que :*

$$\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall u \in \mathbb{R}^{d_c}, d(x, a, u) \geq \underline{d}(x, a),$$

$$\text{et tel que : } \forall x \in \mathcal{X}, \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall a_0 \in \mathbb{R}_+^d, \int_{t_0}^{+\infty} \underline{d}(x, A_x(t, t_0, a_0)) dt = +\infty. \quad (2.1.9)$$

Le troisième point de l'hypothèse 2.1.10 est lié aux notions de durée de vie et de survie :

**Définition 2.1.11.** *La durée de vie d'un individu de trait  $x \in \mathcal{X}$ , né au temps  $c \in \mathbb{R}_+$  et vivant dans une population représentée par  $(m_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , est la durée séparant sa naissance et sa mort, qui se produit au temps  $t > c$  avec taux  $d(x, A_x(t, c, 0), m_{t-} U(x, A_x(t, c, 0)))$ . Il s'agit donc d'une variable aléatoire de densité :*

$$s \in \mathbb{R}_+ \mapsto d(x, A_x(c + s, c, 0), m_{(c+s)} U(x, A_x(c + s, c, 0))) \exp \left( - \int_c^{c+s} d(x, A_x(u, c, 0), m_u U(x, A_x(u, c, 0))) du \right). \quad (2.1.10)$$

On peut remarquer que l'expression (2.1.10) définit bien une densité de probabilité, puisqu'il s'agit d'une application intégrable positive telle que :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} d(x, A_x(c + s, c, 0), m_{c+s} U(x, A_x(c + s, c, 0))) \\ & \times \exp \left( - \int_c^{c+s} d(x, A_x(u, c, 0), m_u U(x, A_x(u, c, 0))) du \right) ds \\ & = \left[ - \exp \left( - \int_c^{c+s} d(x, A_x(u, c, 0), m_u U(x, A_x(u, c, 0))) du \right) \right]_{s=0}^{+\infty} = 1, \end{aligned}$$

par le point 3 de l'hypothèse 2.1.10, qui donne :

$$0 \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\int_c^{c+s} d(x, A_x(u, c, 0), m_u U(x, A_x(u, c, 0))) du} \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\int_c^{c+s} \underline{d}(x, A_x(u, c, 0)) du} = 0.$$

**Définition 2.1.12.** La probabilité de survie est la probabilité  $\Pi(x, t_0, a_0, t)$  qu'un individu de trait  $x \in \mathcal{X}$ , d'âges  $a_0 \in \mathbb{R}_+^d$  au temps  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , et vivant dans une population représentée par  $(m_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , soit toujours vivant au temps  $t > t_0$  :

$$\begin{aligned} \Pi(x, t_0, a_0, t) &= \int_t^{+\infty} d(x, A_x(s, t_0, a_0), m_s U(x, A_x(s, t_0, a_0))) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_{t_0}^s d(x, A_x(u, t_0, a_0), m_u U(x, A_x(u, t_0, a_0))) du\right) ds. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

**Remarque 2.1.13.** Par le point 3 de l'hypothèse 2.1.10, nous avons :

$$\begin{aligned} \Pi(x, t_0, a_0, t) &= \exp\left(-\int_{t_0}^t d(x, A_x(u, t_0, a_0), m_u U(x, A_x(u, t_0, a_0))) du\right), \\ \text{et : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(x, t_0, a_0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Ceci donne une signification biologique au point 3 de l'hypothèse 2.1.10, en exprimant que la probabilité qu'un individu vive éternellement est nulle.

Lorsque la fonction déterministe  $(m_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  est remplacée par le processus aléatoire  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , la probabilité de survie s'écrit :

$$\Pi(x, t_0, a_0, t) = \mathbb{E} \left[ \exp\left(-\int_{t_0}^t d(x, A_x(u, t_0, a_0), Z_u U(x, A_x(u, t_0, a_0))) du\right) \right].$$

**Exemple 2.1.14.** 1. On peut considérer des taux de mort linéaires par rapport au terme de compétition :  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ ,

$$d(x, a, ZU(x, a)) = \underline{d}(x, a) + d'(x, a) \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) Z(dy, d\alpha). \quad (2.1.12)$$

La fonction  $\underline{d} \in C_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  est le taux de mort naturelle (en absence de compétition) tandis que la fonction  $d' \in C_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  module le terme de compétition.

2. Dans le cas où  $U \equiv 1$ , on a :

$$\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), ZU(x, a) = \langle Z, 1 \rangle = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} Z(dx, da),$$

et si  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall u \in \mathbb{R}, d(x, a, u) = \underline{d}(x, a) + \eta u$  avec  $\underline{d}$  comme au Point 1 et  $\eta > 0$ , alors on obtient le taux de mort logistique défini par (cf. [56], [124] Section 5.4) :

$$\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), d(x, a, ZU(x, a)) = \underline{d}(x, a) + \eta \langle Z, 1 \rangle.$$

3. Dans une population avec deux espèces en interaction distinguées par leurs traits  $x \in \{1, 2\}$ , on peut choisir une fonction de compétition  $U$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, ZU(x, a) &= \left( u_{11} \int_0^{+\infty} w(a) Z(\{1\}, da) + u_{12} \int_0^{+\infty} w(a) Z(\{2\}, da) \right) 1_{\{x=1\}} \\ &\quad + \left( u_{21} \int_0^{+\infty} w(a) Z(\{1\}, da) + u_{22} \int_0^{+\infty} w(a) Z(\{2\}, da) \right) 1_{\{x=2\}}, \end{aligned}$$

où  $w$  est un noyau positif,  $w(a)$  mesurant la pression exercée par les individus d'âge  $a$ , et où  $u_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$  sont des constantes positives mesurant la compétition exercée par un individu de type  $j$  sur un individu de type  $i$ .

4. Les traits sont la taille à la naissance  $x_0 \geq 0$  et le taux de croissance  $g \geq 0$ . La taille  $x(x_0, g, a)$  d'un individu de trait  $(x_0, g)$  et d'âge scalaire  $a \geq 0$  est donnée par :

$$x(x_0, g, a) = x_0 + ga.$$

Le noyau suivant, exprimant une compétition asymétrique basée sur la différence de tailles, a été proposé par Kisdi [74] :

$$\forall (x_0, g, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, ZU(x_0, g, a) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U(x_0 + ga - x'_0 - g'\alpha) Z(d(x'_0), dg', d\alpha),$$

$$\text{où : } \forall x \in \mathbb{R}_+, U(x) = U_0 \left( 1 - \frac{1}{1 + c_1 \exp(-c_2 x)} \right),$$

avec  $U_0, c_1$  et  $c_2$  des constantes positives.

5. Considérons un âge scalaire  $a \in \mathbb{R}_+$ . Si l'on souhaite que l'âge d'un individu n'excède pas une valeur positive  $a^\dagger$ , nous pouvons définir  $d$  tel que :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall a \geq a^\dagger, \forall u \in \mathbb{R}^{d_c}, d(x, a, u) = +\infty. \quad (2.1.13)$$

### 2.1.4 Suggestions de généralisations possibles

Le modèle que nous avons retenu peut être enrichi. Nous mentionnons quelques généralisations possibles pour décrire des phénomènes plus complexes ou des exemples biologiques précis.

1. Il est possible de modéliser des phénomènes d'immigration/émigration, des changements de traits au cours de la vie de l'individu (et pas seulement à la naissance lors de mutations) et d'inclure une structuration spatiale avec déplacement en ajoutant les événements correspondants à la dynamique de la population. Les problèmes de structuration spatiale ont été étudiés dans le cas sans structure d'âge par Champagnat et Méléard [23].

2. Des phénomènes tels que la saisonnalité peuvent être modélisés si on laisse les paramètres dépendre du temps.

3. Les âges des individus à la naissance sont égaux à 0. Il pourrait cependant être intéressant (par exemple pour l'avancement d'une maladie) de permettre à cet âge de dépendre de celui du parent. Pour l'épidémie du SIDA, par exemple, on constate empiriquement que les personnes infectées par un séropositif pour lequel la maladie est développée ont un temps d'incubation plus court et atteignent plus rapidement le stade final de la maladie.

4. Les termes de non linéarité n'affectent ici que le taux de mortalité. Les mécanismes régissant les naissances et les mutations sont supposés résulter de phénomènes intrinsèques (mutations pendant la phase de reproduction clonale, absence de compétition sur les naissances dans certaines populations asexuées...) et ne dépendent pas de l'état de la population.

## 2.2 Processus microscopique

Dans cette section, nous commençons par introduire une équation différentielle stochastique dirigée par une mesure ponctuelle de Poisson, et nous étudions l'existence et l'unicité de ses solutions (Section 2.2.1). A la Section 2.2.2, nous montrons que la solution de cette équation différentielle stochastique est un processus de Markov dont le générateur infinitésimal correspond à la dynamique décrite à la Section 2.1.

**Définition 2.2.1.** Sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  :

1. Soit une variable aléatoire  $Z_0 \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  telle que :

$$\mathbb{E}(\langle Z_0, 1 \rangle) < +\infty, \quad (2.2.1)$$

2. Soit  $Q(ds, di, d\theta, dx')$  une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$  d'intensité  $ds \otimes n(di) \otimes d\theta \otimes P(dx')$  et indépendante de  $Z_0$ .

On note  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  la filtration canonique engendrée par  $Z_0$  et  $Q$ . L'évolution du processus  $Z$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  est décrite par :

$$\begin{aligned} Z_t = & \sum_{i=1}^{N_0} \delta_{(X_i(Z_0), A_{X_i(Z_0)}(t, 0, A_i(Z_0)))} + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left[ \delta_{(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(t, s, 0))} \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \\ & + \delta_{(x', A_{x'}(t, s, 0))} \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \\ & \left. - \delta_{(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(t, s, A_i(Z_{s-})))} \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

où pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $N_s$  est défini en (2.0.2), où pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $A_x : (t, s, a_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^d \mapsto A_x(t, s, a_0) \in \mathbb{R}^d$  est le flot de l'équation (2.1.2) défini en (2.1.3), et où :

$$\begin{aligned} m_1(s, Z_{s-}, i, x') &= (1 - p(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-})))b(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))k(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), x') \\ m_2(s, Z_{s-}, i, x') &= m_1(s, Z_{s-}, i, x') \\ &+ p(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))b(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))k(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), x') \\ m_3(s, Z_{s-}, i, x') &= m_2(s, Z_{s-}, i, x') \\ &+ d(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), Z_{s-}U(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-})))k(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}), x'). \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.2.** Comme le flot  $A_x(t, s, a_0)$  (2.1.3) est déterministe et mesurable en  $x$  et  $a_0$ , l'intégrand dans (2.2.2) est  $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible.  $\square$

**Remarque 2.2.3.** L'interprétation de (2.2.2) est la suivante. L'état de la population au temps  $t$  est obtenu en considérant les particules initiales avec leurs âges au temps  $t$ , en ajoutant les particules nées entre  $s = 0$  et  $s = t$  avec leurs âges au temps  $t$ , et en supprimant celles qui sont mortes avant  $t$ .  $\square$

**Remarque 2.2.4.** Soit  $T_0 = 0$ . Supposons qu'au temps  $s \in \mathbb{R}_+$ , l'effectif  $N_s$  de la population soit fini. Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4 et 2.1.10, il existe une constante positive  $\bar{C}$  (par exemple  $\bar{b}(1 + \bar{k}) + \bar{d}$ ) telle que le taux de saut global au temps  $s \in \mathbb{R}_+$  soit majoré par  $\bar{C}N_{s-}(1 + N_{s-})$ , fini. Il est donc possible de définir presque sûrement la suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  des temps de sauts successifs de  $Z$ . Comme il s'agit d'une suite croissante,

$$T_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k. \quad (2.2.3)$$

est également défini presque sûrement. Nous montrerons à la Proposition 2.2.5 que sous l'hypothèse (2.2.1),  $T_\infty = +\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s.  $\square$

Pour  $t \leq T_\infty$ , les quantités  $N_t$  (2.0.2) et  $\int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t(dx, da)$  sont finies, mais non bornées. On introduit donc les temps d'arrêt suivants. Soit  $N \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

$$\tau_N = \inf \{t \geq 0, N_t \geq N\}. \quad (2.2.4)$$

$$\zeta_N = \inf \left\{ t \geq 0, N_t \geq N \text{ ou } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t(dx, da) \geq N \right\}. \quad (2.2.5)$$

### 2.2.1 Existence et unicité des solutions de (2.2.2)

**Proposition 2.2.5.** Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10 et en supposant (2.2.1) satisfaite :  
(i) L'équation différentielle stochastique (2.2.2) admet une solution  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que pour tout  $T > 0$ ,  $N_t$  défini en (2.0.2) satisfait :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} N_t \right) < \mathbb{E}(N_0) e^{\bar{b}T} < +\infty. \quad (2.2.6)$$



(ii) Si de plus le taux de mort vérifie :  $\exists \tilde{d} > 0, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall Z \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}),$

$$d(x, a, ZU(x, a)) \geq \tilde{d}\langle Z, 1 \rangle, \quad (2.2.7)$$

alors  $\forall t \in \mathbb{R}_+,$

$$\mathbb{E}(N_t) \leq \eta(t), \quad \text{ou} \quad \eta(t) = \frac{\mathbb{E}(N_0) e^{\bar{b}t/\tilde{d}}}{\left(\bar{b}/\tilde{d} + \mathbb{E}(N_0)(e^{\bar{b}t} - 1)\right)}. \quad (2.2.8)$$

*Démonstration.* Il est  $\mathbb{P}$ -presque sûrement possible de construire algorithmiquement une solution de (2.2.2) sur  $[0, T_\infty[$ , où  $T_\infty$  est le temps aléatoire défini en (2.2.3) (cette construction sera détaillée à la Section 2.3.1). Nous allons montrer que  $T_\infty = +\infty$   $\mathbb{P}$ -presque sûrement, ce qui montrera l'existence d'une solution dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}))$ .

Soient  $N > 0$  et  $\tau_N$  le temps d'arrêt défini en (2.2.4). Nous avons pour  $t \in \mathbb{R}_+ :$

$$\begin{aligned} \langle Z_{t \wedge \tau_N}, 1 \rangle &= N_0 + \int_0^{t \wedge \tau_N} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left( \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right) Q(ds, di, d\theta, dx') \\ &\leq N_0 + \int_0^{t \wedge \tau_N} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}, 0 \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} Q(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

En prenant l'espérance, et par le Théorème de Fubini (les intégrands sont bornés par l'Hypothèse 2.1.1 et par le choix de  $\tau_N$ ) :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, t \wedge \tau_N]} N_s \right) \leq \mathbb{E}(N_0) + \bar{b} \int_0^t \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, s \wedge \tau_N]} N_u \right) ds \leq \mathbb{E}(N_0) e^{\bar{b}t}, \quad (2.2.10)$$

par le Lemme de Gronwall.

Le membre de droite de (2.2.10) est indépendant de  $N$ . Une première conséquence est que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tau_N = +\infty, \quad \mathbb{P} - \text{presque sûrement.} \quad (2.2.11)$$

Montrons-le par l'absurde. S'il existe  $M < +\infty$  et un ensemble  $A_M \subset \Omega$  de probabilité strictement positive tels que  $\forall \omega \in A_M, \lim_{N \rightarrow +\infty} \tau_N(\omega) < M$ , alors,

$$\forall T > M, \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_N]} N_t \right) \geq \mathbb{P}(A_M) \times N. \quad (2.2.12)$$

Ceci est contradictoire avec (2.2.10) car le membre de droite de (2.2.12) ne peut pas être majoré indépendamment de  $N$ .

Le lemme de Fatou nous permet alors de nous affranchir de  $\tau_N$  dans (2.2.10) :

$$\mathbb{E} \left( \liminf_{N \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_N]} N_t \right) \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_N]} N_t \right) \leq \mathbb{E}(N_0) e^{\bar{b}T} < +\infty, \quad (2.2.13)$$

ce qui prouve (2.2.6).

On en déduit que presque sûrement  $T_\infty = +\infty$ . Raisonnons à nouveau par l'absurde. Supposons qu'il existe  $\tilde{M} < +\infty$  et un ensemble  $A_{\tilde{M}} \subset \Omega$  de probabilité strictement positive tels que  $\forall \omega \in A_{\tilde{M}}, T_\infty(\omega) < \tilde{M}$ . Si :

$$\forall \omega \in A_{\tilde{M}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} N_{T_k}(\omega) = +\infty, \quad (2.2.14)$$

alors, nécessairement,  $\forall N > 0, \forall \omega \in A_{\widetilde{M}}, \tau_N(\omega) \leq \widetilde{M}$ , ce qui contredit (2.2.11). Il nous reste donc à prouver (2.2.14). Supposons que (2.2.14) ne soit pas vérifiée. Il existerait  $N' > 0$  et un ensemble  $B \subset A_{\widetilde{M}}$  de probabilité strictement positive tels que

$$\forall \omega \in B, \forall k \in \mathbb{N}, N_{T_k}(\omega) < N'.$$

Pour tout  $\omega \in B$ , on peut alors construire les instants  $(T_k(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$  comme une sous-suite des points d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\bar{b}N' + \bar{d}N'(1 + N')$  dont la seule valeur d'adhérence est  $+\infty$   $\mathbb{P}$ -presque sûrement, ce qui est absurde car on a supposé que  $\forall \omega \in B, T_\infty(\omega) < \widetilde{M}$ . (Cette construction sera détaillée lors de la construction algorithmique de la Section 2.3.1).

Considérons maintenant le Point (ii). En prenant l'espérance dans (2.2.9) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{t \wedge \tau_N}) &= \mathbb{E}(N_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_N} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (b(x, a) - d(x, a, Z_s U(x, a))) Z_s(dx, da) ds\right) \\ &\leq \mathbb{E}(N_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_N} (\bar{b}N_s - \bar{d}\bar{N}_s^2) ds\right) \\ &\leq \mathbb{E}(N_0) + \int_0^t (\bar{b}\mathbb{E}(N_{s \wedge \tau_N} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}}) - \bar{d}\mathbb{E}(N_{s \wedge \tau_N}^2 \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}})) ds \end{aligned}$$

par le théorème de Fubini. Alors :

$$\mathbb{E}(N_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau_N\}}) \leq \mathbb{E}(N_{t \wedge \tau_N}) \leq \mathbb{E}(N_0) + \int_0^t (\bar{b}\mathbb{E}(N_s \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}}) - \bar{d}\mathbb{E}(N_s \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}})^2) ds$$

De plus, l'application  $t \mapsto \mathbb{E}(N_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau_N\}})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par théorème de dérivation sous le signe somme :

- Soit  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ .  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, l'application suivante est dérivable en  $t_0$  de dérivée continue :

$$t \mapsto \int_0^{t \wedge \tau_N} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (b(x, a) - d(x, a, Z_s U(x, a))) Z_s(dx, da) ds$$

- Cette application est bornée par  $t_0 (\bar{b} + \bar{d}(1 + N)) N$ , et sa dérivée, par  $(\bar{b} + \bar{d}(1 + N)) N$ , qui sont intégrables.

Soit  $\eta$  la solution de l'équation logistique suivante :

$$\frac{d\eta}{dt} = \bar{b}\eta(t) \left(1 - \frac{\eta(t)}{\bar{b}/\bar{d}}\right), \quad \eta(0) = \mathbb{E}(N_0). \quad (2.2.15)$$

L'équation (2.2.15) admet une unique solution dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  par le théorème de Cauchy-Lipschitz global (cf. [126] par exemple) et cette solution est donnée par (2.2.8) (cf. Murray [100] ou Webb [124] par exemple). On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}(N_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau_N\}}) \leq \eta(t).$$

Par un argument similaire à (2.2.13), on peut se débarrasser de  $\tau_N$  en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ . ■

**Proposition 2.2.6.** *On a unicité forte pour l'équation différentielle stochastique (2.2.2).*

*Démonstration.* Soient  $Z_0 \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  une condition initiale et  $Q(ds, di, d\theta, dx')$  une mesure ponctuelle de Poisson satisfaisant les hypothèses de la Définition 2.2.1. Pour  $k = 0$ , la mesure  $Z_0$  est déterminée de façon unique par le couple  $(Z_0, Q)$ . Nous allons montrer par récurrence que les couples  $(T_k, Z_{T_k})_{k \in \mathbb{N}}$  sont déterminés de façon unique par  $(Z_0, Q)$ . Supposons que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(T_k, Z_{T_k})$  soit déterminé de façon unique par  $(Z_0, Q)$ , nous allons montrer que  $(T_{k+1}, Z_{T_{k+1}})$  l'est également. On définit :

$$\forall t \geq T_k, \tilde{Z}_t^k(dx, da) = \sum_{i=1}^{N_{T_k}} \delta_{(X_i(Z_{T_k}), A_{X_i(Z_{T_k})}(t, T_k, A_i(Z_{T_k})))}(dx, da),$$

qui est déterminé de façon unique par  $(T_k, Z_{T_k})$ , donc par  $(Z_0, Q)$ . Comme :

$$T_{k+1} = \inf \left\{ t > T_k, \int_{T_k}^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{T_k}, 0 \leq \theta < m_3(s, \tilde{Z}_{s-}^k, i, x')\}} Q(ds, di, d\theta, dx') > 0 \right\},$$

$T_{k+1}$  est déterminé de façon unique par  $(Z_0, Q)$ . Soit l'atome  $(T_{k+1}, I_{k+1}, \Theta_{k+1}, X'_{k+1})$  correspondant de la mesure de Poisson  $Q$ . Comme :

$$\begin{aligned} Z_{T_{k+1}}(dx, da) &= \tilde{Z}_{T_{k+1}}^k(dx, da) + \delta_{(X_{I_{k+1}}(Z_{T_k}), 0)}(dx, da) \mathbf{1}_{\{0 \leq \Theta_{k+1} < m_1(T_{k+1}, \tilde{Z}_{(T_{k+1})-}^k, I_{k+1}, X'_{k+1})\}} \\ &+ \delta_{(X'_{k+1}, 0)}(dx, da) \mathbf{1}_{\{m_1(T_{k+1}, \tilde{Z}_{(T_{k+1})-}^k, I_{k+1}, X'_{k+1}) \leq \Theta_{k+1} < m_2(T_{k+1}, \tilde{Z}_{(T_{k+1})-}^k, I_{k+1}, X'_{k+1})\}} \\ &- \delta_{(X_{I_{k+1}}(Z_{T_k}), A_{I_{k+1}}(\tilde{Z}_{(T_{k+1})-}^k))}(dx, da) \mathbf{1}_{\{m_2(T_{k+1}, \tilde{Z}_{(T_{k+1})-}^k, I_{k+1}, X'_{k+1}) \leq \Theta_{k+1} < m_3(T_{k+1}, \tilde{Z}_{(T_{k+1})-}^k, I_{k+1}, X'_{k+1})\}}, \end{aligned}$$

$Z_{T_{k+1}}$  dépend de façon unique par  $(T_{k+1}, I_{k+1}, \Theta_{k+1}, X'_{k+1}, \tilde{Z}^k, Z_{T_k})$ , donc de  $(Z_0, Q)$ .  $\blacksquare$

## 2.2.2 Générateur infinitésimal

Nous commençons par un lemme préliminaire.

**Lemme 2.2.7.** Soient  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et  $(f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{B}_b(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\forall x \in \mathcal{X}, ((a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , avec des dérivées bornées uniformément en  $x \in \mathcal{X}$ . Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} F(\langle Z_t, f_t \rangle) &= F(\langle Z_0, f_0 \rangle) + \int_0^t \left\langle Z_s, v \nabla_a f_s + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right\rangle F'(\langle Z_s, f_s \rangle) ds \tag{2.2.16} \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_t\}} \left[ (F(\langle Z_{s-}, f_s \rangle + f_s(X_i(Z_{s-}), 0)) - F(\langle Z_{s-}, f_s \rangle)) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \\ &+ (F(\langle Z_{s-}, f_s \rangle + f_s(x', 0)) - F(\langle Z_{s-}, f_s \rangle)) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \\ &\left. + (F(\langle Z_{s-}, f_s \rangle - f_s(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))) - F(\langle Z_{s-}, f_s \rangle)) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . En intégrant  $f_t(x, a)$  par rapport à (2.2.2) :

$$\begin{aligned} \langle Z_t, f_t \rangle &= \sum_{i=1}^{N_0} f_t(X_i(Z_0), A_{X_i(Z_0)}(t, 0, A_i(Z_0))) + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left[ f_t(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(t, s, 0)) \right. \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} + f_t(x', A_{x'}(t, s, 0)) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \\ &\quad \left. - f_t(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(t, s, A_i(Z_{s-}))) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned}$$

Comme  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall 0 \leq s \leq t$ ,

$$f_t(x, A_x(t, s, a)) = f_s(x, a) + \int_s^t \left( \frac{\partial f_u}{\partial u}(x, A_x(u, s, a)) + v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a f_u(x, A_x(u, s, a)) \right) du,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \langle Z_t, f_t \rangle &= \sum_{i=1}^{N_0} f_0(X_i(Z_0), A_i(Z_0)) \tag{2.2.17} \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left[ f_s(X_i(Z_{s-}), 0) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} + f_s(x', 0) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \\ &\left. - f_s(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-})) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx') + T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } T_1 &= \int_0^t \sum_{i=1}^{N_0} \left( \frac{\partial f_s}{\partial s}(X_i(Z_0), A_{X_i(Z_0)}(s, 0, A_i(Z_0))) \right. \\ &\quad \left. + v(X_i(Z_0), A_{X_i(Z_0)}(s, 0, A_i(Z_0))) \nabla_a f_s(X_i(Z_0), A_{X_i(Z_0)}(s, 0, A_i(Z_0))) \right) ds \\ T_2 &= \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \int_s^t \left( \frac{\partial f_u}{\partial u}(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(u, s, 0)) \right. \\ &\quad \left. + v(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(u, s, 0)) \nabla_a f_u(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(u, s, 0)) \right) du \\ &\quad \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} Q(ds, di, d\theta, dx') \\ T_3 &= \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \int_s^t \left( \frac{\partial f_u}{\partial u}(x', A_{x'}(u, s, 0)) + v(x', A_{x'}(u, s, 0)) \nabla_a f_u(x', A_{x'}(u, s, 0)) \right) du \\ &\quad \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} Q(ds, di, d\theta, dx') \\ T_4 &= \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \int_s^t \left( \frac{\partial f_u}{\partial u}(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(u, s, A_i(Z_{s-}))) \right. \\ &\quad \left. + v(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(u, s, A_i(Z_{s-}))) \nabla_a f_u(X_i(Z_{s-}), A_{X_i(Z_{s-})}(u, s, A_i(Z_{s-}))) \right) du \\ &\quad \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} Q(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.1.7, les Hypothèses 2.1.4 et le fait que les dérivées de  $f$  par rapport à  $a$  et  $u$  soient bornées, on peut appliquer le théorème de Fubini à  $T_3$  et :

$$\begin{aligned} T_3 &= \int_0^t \int_0^u \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left( \frac{\partial f_u}{\partial u}(x', A_{x'}(u, s, 0)) \right. \\ &\quad \left. + v(x', A_{x'}(u, s, 0)) \nabla_a f_u(x', A_{x'}(u, s, 0)) \right) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} Q(ds, di, d\theta, dx') du. \end{aligned}$$

Il en est de même pour  $T_2$  et  $T_4$ . On reconnaît alors, par (2.2.2) :

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \int_0^t \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( \frac{\partial f_u}{\partial u}(x, a) + v(x, a) \nabla_a f_u(x, a) \right) Z_u(dx, da) \right] du \tag{2.2.18}$$

Par (2.2.17) et (2.2.18) on trouve :

$$\begin{aligned} \langle Z_t, f_t \rangle &= \langle Z_0, f_0 \rangle + \int_0^t \left\langle Z_s, \frac{\partial f_s}{\partial s} + v \nabla_a f_s \right\rangle ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left[ f_s(X_i(Z_{s-}), 0) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} + f_s(x', 0) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \\ &\left. - f_s(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-})) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'). \tag{2.2.19} \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô avec termes de sauts à (2.2.19) et à  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on obtient (2.2.16). ■

Nous pouvons maintenant vérifier que :

**Théorème 2.2.8.** Soit  $Z_0 \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  déterministe telle que :

$$N_0 = \langle Z_0, 1 \rangle < +\infty \text{ et } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0(dx, da) < +\infty. \quad (2.2.20)$$

Le processus  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}))$  introduit à la Définition 2.2.1 et issu de  $Z_0$  est un processus markovien de générateur infinitésimal défini par :  $\forall f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}), \forall F \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} LF_f(Z_0) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}(F_f(Z_t))|_{t=0} = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} v(x, a) \nabla_a f(x, a) F'(\langle Z_0, f \rangle) Z_0(dx, da) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (F_f(Z_0 + \delta_{(x,0)}) - F_f(Z_0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) Z_0(dx, da) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} (F_f(Z_0 + \delta_{(x',0)}) - F_f(Z_0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') Z_0(dx, da) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (F_f(Z_0 - \delta_{(x,a)}) - F_f(Z_0)) d(x, a, Z_0 U(x, a)) Z_0(dx, da). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

*Démonstration.* Par construction,  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus markovien de  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}}))$ . Calculons son générateur infinitésimal. Soient  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  et  $F \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Soient

$$N > \max \left( N_0, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0(dx, da) \right) > 0$$

et  $\zeta_N$  le temps d'arrêt défini en (2.2.5). Par le Lemme 2.2.7 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F_f(Z_{t \wedge \zeta_N})) &= \mathbb{E}(F_f(Z_0)) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N} \langle Z_s, v \nabla_a f \rangle F'(\langle Z_s, f \rangle) ds \right) \\ &+ \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \zeta_N} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}\}} \left[ (F(\langle Z_{s-}, f \rangle + f(X_i(Z_{s-}), 0)) - F_f(Z_{s-})) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right. \right. \\ &+ (F(\langle Z_{s-}, f \rangle + f(x', 0)) - F_f(Z_{s-})) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}, i, x')\}} \\ &\left. \left. + (F(\langle Z_{s-}, f \rangle - f(X_i(Z_{s-}), A_i(Z_{s-}))) - F_f(Z_{s-})) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}, i, x')\}} \right] \right. \\ &\left. Q(ds, di, d\theta, dx') \right\} = \mathbb{E}(F_f(Z_0)) + \mathbb{E}(\Psi(t \wedge \zeta_N, Z)), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \Psi(t, Z) &= \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [v(x, a) \nabla_a f(x, a) F'(\langle Z_s, f \rangle) + (F(\langle Z_s, f \rangle + f(x, 0)) - F_f(Z_s)) b(x, a) (1 - p(x, a)) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} (F(\langle Z_s, f \rangle + f(x', 0)) - F_f(Z_s)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \\ &+ (F(\langle Z_s, f \rangle - f(x, a)) - F_f(Z_s)) d(x, a, Z_s U(x, a))] Z_s(dx, da) ds \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Soit  $T > 0$ . L'application  $t \in [0, T] \mapsto \Psi(t \wedge \zeta_N, Z)$  est :

- dominée  $\mathbb{P}$ -p.s. par

$$TN (\bar{v} 2N \|\nabla_a f\|_{\infty} \|F'\|_{\infty} + \bar{b} 2 \|F\|_{\infty} + 2 \|F\|_{\infty} \bar{d} (1 + N)) < +\infty,$$

- dérivable en  $t = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s. car  $Z$  est càd et  $\zeta_N > 0$   $\mathbb{P}$ -p.s. de dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, Z_0) &= \langle Z_0, v \nabla_a f \rangle F'(\langle Z_0, f \rangle) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (F(\langle Z_0, f \rangle + f(x, 0)) - F_f(Z_0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) Z_0(dx, da) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} (F(\langle Z_0, f \rangle + f(x', 0)) - F_f(Z_0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') Z_0(dx, da) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (F(\langle Z_0, f \rangle - f(x, a)) - F_f(Z_0)) d(x, a, Z_0 U(x, a)) Z_0(dx, da) \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

dominée  $\mathbb{P}$ -p.s. grâce à (2.2.20) par :

$$\bar{v} \left( N_0 + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0(dx, da) \right) \|\nabla_a f\|_\infty \|F'\|_\infty + 2\|F\|_\infty \bar{b} N_0 + 2\|F\|_\infty \bar{d}(1 + N_0) N_0 < +\infty.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe  $\mathbb{E}$ , l'application  $t \mapsto \mathbb{E}(F_f(Z_{t \wedge \zeta_N}))$  est dérivable en  $t = 0$  de dérivée (2.2.21).  $\blacksquare$

## 2.3 Simulations

### 2.3.1 Algorithme de simulations

En nous inspirant des algorithmes proposés par Fournier et Méléard [49] et Champagnat *et al.* [22], il est possible de simuler de façon exacte le processus  $Z$  de la Définition 2.2.1, en tirant des variables aléatoires indépendantes et en mettant en oeuvre des techniques d'acceptation-rejet. Les populations étant discrètes, il n'y a pas de schéma de discrétisation supplémentaire lorsque l'on sait calculer explicitement le flot (2.1.3) et les procédures numériques sont biologiquement interprétables.

Soit  $Z_0 \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$  une condition initiale, éventuellement aléatoire, donnée ou simulée, telle que  $\mathbb{E}(N_0) < +\infty$ . Nous allons simuler une succession d'événements de naissances (avec ou sans mutation) et de morts qui vont modifier l'effectif de la population. Posons par convention  $T_0 = 0$  pour l'événement numéro 0.

Nous procédons par récurrence. Supposons que nous ayons déjà simulé  $k$  événements ( $k \in \mathbb{N}$ ), et que le dernier de ces événements ait eu lieu au temps  $T_k$ . La taille de la population  $N_{T_k} = \langle Z_{T_k}, 1 \rangle$  à l'instant  $T_k$  est finie et le taux de saut global est majoré par  $\bar{b}N_{T_k} + \bar{d}(1 + N_{T_k})N_{T_k}$ , fini. Nous mettons en oeuvre une méthode d'acceptation-rejet pour déterminer l'instant  $T_{k+1}$  du  $k+1$ <sup>ème</sup> événement et la nature de cet événement : à partir du temps  $T_k$ , nous simulons des temps  $(\tau_{k+\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  suivant un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\bar{b}N_{T_k} + \bar{d}(1 + N_{T_k})N_{T_k}$  ; le premier instant  $\tau_{k+\ell}$  accepté par la procédure définit  $T_{k+1}$ .

0. On pose  $\tau_k := T_k$ ,  $N_{\tau_k} := N_{T_k}$  et  $\ell := 0$ .

1. On simule une variable exponentielle  $\varepsilon_{k,\ell}$  indépendante, de paramètre 1 et on définit  $\tau_{k+\ell+1} = \tau_{k+\ell} + \varepsilon_{k,\ell} / [\bar{b}N_{T_k} + \bar{d}(1 + N_{T_k})N_{T_k}]$ .
2. Sur l'intervalle  $[\tau_{k+\ell}, \tau_{k+\ell+1}[$ , seul le phénomène de vieillissement se produit. Pour  $i \in \llbracket 1, N_{T_k} \rrbracket$ , l'âge de l'individu  $i$  de trait  $X_i(Z_{\tau_{k+\ell}})$  devient au temps  $\tau_{(k+\ell+1)}$

$$A_{X_i(Z_{\tau_{k+\ell}})}(\tau_{k+\ell+1}, \tau_{k+\ell}, A_i(Z_{\tau_{k+\ell}})),$$

où  $A_x(t, s, a)$ ,  $X_i(Z)$  et  $A_i(Z)$  ont été définis aux Proposition 2.1.5 et Définition 2.0.2.

3. On simule une variable aléatoire  $I_{k,\ell}$  à valeurs entières, uniformément distribuée sur  $\llbracket 1, N_{T_k} \rrbracket$ , et on définit les quantités suivantes dans  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned} & \bullet \tilde{m}_1(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}, I_{k,\ell}) \\ &= \frac{b(X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-})) \left( 1 - p(X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-})) \right)}{\bar{b}N_{T_k} + \bar{d}(1 + N_{T_k})N_{T_k}} \\ & \bullet \tilde{m}_2(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}, I_{k,\ell}) = \tilde{m}_1(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}, I_{k,\ell}) \\ & + \frac{b(X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-})) p(X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)}_-}))}{\bar{b}N_{T_k} + \bar{d}(1 + N_{T_k})N_{T_k}} \end{aligned}$$

$$\bullet \tilde{m}_3(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell}) = \tilde{m}_2(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell}) \\ + \frac{d \left( X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}), Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}} U(X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}})) \right)}{\bar{b}N_{T_k} + \bar{d}(1 + N_{T_k})N_{T_k}}$$

4. On tire une variable aléatoire  $\Theta_{k,\ell}$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$

- (a) Si  $0 \leq \Theta_{k,\ell} < \tilde{m}_1(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell})$ , alors le  $k + 1^{\text{ème}}$  événement a lieu : l'individu  $I_{k,\ell}$  donne naissance à un clône d'âge  $0 \in \mathbb{R}_+^d$  et on définit  $T_{k+1} = \tau_{k+\ell+1}$ .
- (b) Si  $\tilde{m}_1(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell}) \leq \Theta_{k,\ell} < \tilde{m}_2(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell})$ , alors le  $k + 1^{\text{ème}}$  événement a lieu : l'individu  $I_{k,\ell}$  donne naissance à un mutant de trait tiré dans la loi  $K(X_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{k+\ell+1}}), A_{I_{k,\ell}}(Z_{\tau_{k+\ell+1}}), dx')$  et d'âges  $0 \in \mathbb{R}_+^d$ . On définit  $T_{k+1} = \tau_{k+\ell+1}$ .
- (c) Si  $\tilde{m}_2(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell}) \leq \Theta_{k,\ell} < \tilde{m}_3(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell})$ , alors le  $k + 1^{\text{ème}}$  événement a lieu : l'individu  $I_{k,\ell}$  meurt, et on définit  $T_{k+1} = \tau_{k+\ell+1}$ .
- (d) Si  $\tilde{m}_3(\tau_{k+\ell+1}, Z_{\tau_{(k+\ell+1)-}}, I_{k,\ell}) \leq \Theta_{k,\ell}$  alors rien ne se produit. On reprend l'algorithme en 1. avec  $N_{\tau_{k+\ell+1}} = N_{T_k}$  et  $\ell + 1$  à la place de  $\ell$  jusqu'à obtenir le  $k + 1^{\text{ème}}$  événement.

**Remarque 2.3.1.** *A chaque individu, on peut associer trois horloges déclenchant respectivement les événements de naissance (avec ou sans mutation) et de mort. L'événement qui se produit correspond au minimum de toutes ces durées, pour l'ensemble des individus.*

## 2.3.2 Exemples

Des simulations relatives à des exemples précis, définis en collaboration avec R. Ferrière, sont maintenant présentées. Pour chaque exemple, nous avons relancé plusieurs fois les simulations, et nous présentons à chaque fois une simulation particulière. Les simulations ont été implémentées avec les logiciels **R** (open source<sup>1</sup>) et MATLAB.

### 2.3.2.1 Exemple 1 : une compétition fondée sur la taille dans un modèle de population structurée par âge

Ici, les individus de la population considérée sont caractérisés par :

1. la taille à la naissance  $x_0 \in [0, 4]$  qui est le trait héréditaire soumis aux mutations
2. un âge physique scalaire  $a \in [0, 2]$ , associé à une vitesse de vieillissement  $v \equiv 1$  et ne pouvant pas dépasser un âge maximal égal à 2,
3. une taille  $x$  croissante en fonction de l'âge :

$$x = x_0 + g a, \tag{2.3.1}$$

où  $g$  est le taux de croissance fixé et supposé identique pour tous les individus.

Un individu de trait  $x_0 \in [0, 4]$  et d'âge  $a \in [0, 2]$  donne naissance au taux :

$$b(x_0) = 4 - x_0. \tag{2.3.2}$$

La décroissance en  $x_0$  traduit que le coût pour donner naissance à un nouvel individu est fonction croissante de la taille attendue de cet individu (ce trait étant héréditaire,  $x_0$  est également la taille à la naissance du parent).

Avec probabilité  $p = 0,03$  constante, il se produit une mutation. Le nouveau trait est choisi de la façon suivante :

---

<sup>1</sup><http://www.r-project.org/>

1. On simule une variable gaussienne  $y_{x_0}$  d'espérance 0 et de variance 0,01.
2. Le nouveau trait est :  $x'_0 = \min(\max(0, x_0 + y_{x_0}), 4)$  (loi normale tronquée à  $[0, 4]$ ).

Avec probabilité  $1 - p = 0,07$ , il ne se produit pas de mutation et le descendant de l'individu a le même trait  $x_0$  que son parent.

Le taux de mort d'un individu de trait  $x_0 \in [0, 4]$  et d'âge  $a \in [0, 2]$  vivant dans la population  $Z \in \mathcal{M}_P([0, 4] \times [0, 2])$  est donné par :

$$d(x_0, a, Z) = \int_{\tilde{x}} U(x_0 + g a - x'_0 - g \alpha) Z(dx'_0, d\alpha), \quad (2.3.3)$$

$$\text{où } U(x - y) = \frac{2}{300} \left( 1 - \frac{1}{1 + 1.2 \exp(-4(x - y))} \right) \in \left[ 0, \frac{2}{300} \right], \quad (2.3.4)$$

est le noyau introduit par Kisdi [74]. Ce noyau crée une compétition asymétrique sur les individus et favorise les individus de grandes tailles. Le point important est que les tailles  $x$  sur lesquelles porte la sélection ne sont pas constantes lorsque  $g \neq 0$ , mais varient avec l'âge de l'individu. La taille est alors dite *plastique* : même au sein d'une population monomorphique (où tous les individus ont même trait  $x_0 \in [0, 4]$ ), les tailles sont différentes et la compétition ne s'exerce pas de façon uniforme.

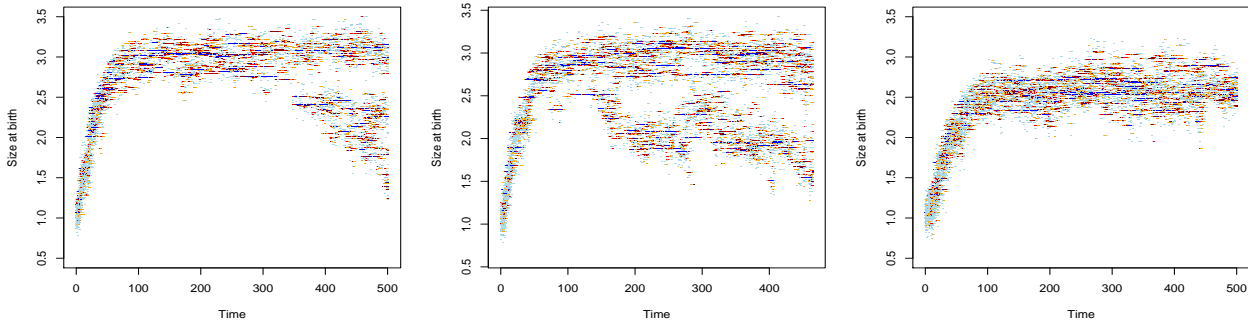


FIG. 2.2 – Exemple 1 :  $g = 0$  (gauche),  $g = 0.3$  (centre),  $g = 1$  (droite)

Dans les simulations correspondant à la Figure 2.2, nous choisissons  $g = 0$ ,  $g = 0.3$  et  $g = 1$ . La population au temps  $t = 0$  est monomorphique, de trait  $x_0 = 1,06$ , et compte  $N_0 = 900$  individus d'âges initiaux tirés uniformément sur  $[0, 2]$ , et de tailles calculées par (2.3.1).

Nous représentons pour chaque  $t$  le support de la mesure  $\sum_{i=1}^{N_t} \delta_{(x_0)_i}$  pour  $N_t$  défini en (2.0.2).

Pour  $g = 0$  (taille constante au cours de la vie), nous observons un phénomène de "branchement" vers  $t = 300$ . Pour  $g = 0.3$ , la population se scinde en deux sous-familles ( $x_0 \simeq 2.7$  et  $x_0 \simeq 2$ ) vers  $t = 100$ . Pour  $g = 1$ , ce phénomène de "branchement" n'est plus observé.

### 2.3.2.2 Exemple 2 : une population structurée en deux classes

Dans l'exemple suivant, nous introduisons un trait supplémentaire, l'âge à maturité. Cet âge va nous amener à distinguer deux phases de la vie d'un individu : une phase de croissance et une phase de reproduction.

Les modèles à plusieurs classes d'âge ont souvent été considérés dans la littérature. Calsina et Cuadrado [16] considèrent une population séparée en deux classes d'âge, juvénile et adulte. En supposant que la durée de la période juvénile suit une loi exponentielle, les auteurs décrivent la dynamique de la population par un système de deux équations différentielles ordinaires. Henson [58] étudie une population d'insectes, *Tribolium*, structurée en trois classes d'âges (oeufs, larves et adultes), à l'aide d'équations aux dérivées partielles qui se ramènent aussi à un système d'équations différentielles ordinaires. Ernande *et al.* [43] décrivent quant à eux une population de



poissons structurée en trois classes d'âge (larves, jeunes, adultes) pour laquelle l'âge à maturité (passage de la période juvénile à la période adulte) est héréditaire mais plastique : il dépend d'un trait fonctionnel  $S$  se transmettant aux descendants (cf. Exemple 2.1.3) mais également du taux de mortalité correspondant au milieu où vivent les poissons.

Chaque individu est maintenant caractérisé par les trois traits suivants :

1. une taille à la naissance  $x_0 \in [0, 4]$ ,
2. un taux de croissance  $g \in [0, 2]$ ,
3. un âge à maturité  $a_M \in [0, 2]$ ,

par un âge physique scalaire  $a \in [0, 2]$  (avec une vitesse de vieillissement de 1) et par une taille, fonction des traits et de l'âge :

$$x(a, x_0, g, a_M) = x_0 + g(a \wedge a_M). \quad (2.3.5)$$

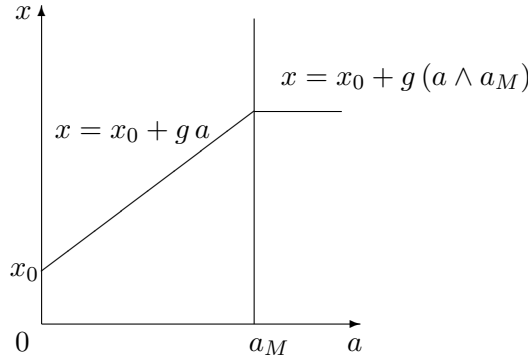


FIG. 2.3 – Taille  $x$  d'un individu de taux de croissance  $g$  et d'âge à maturité  $a_M$  en fonction de son âge.

Avant la maturité, les individus ne se reproduisent pas et leur énergie est consacrée uniquement à leur croissance. Les individus adultes ne changent plus de taille.

Le taux de naissance est choisi nul pour les individus juvéniles et fonction uniquement de  $x_0$  pour les individus adultes :

$$\forall (x_0, a_M, a) \in [0, 4] \times [0, 2] \times [0, 2], b(x_0, a_M, a) = (4 - x_0) \mathbf{1}_{a \geq a_M}. \quad (2.3.6)$$

Les traits  $x_0$ ,  $g$  et  $a_M$  sont héréditaires et soumis à des mutations se produisant à la naissance avec la probabilité  $p = 0,03$ . Les nouveaux traits sont choisis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x'_0 &= \min(\max(0, x_0 + y_{x_0}), 4) \\ g' &= \min(\max(0, g + y_g), 2), \\ a'_M &= \min(\max(0, a_M + y_{a_M}), 2), \end{aligned}$$

où  $y_{x_0}$ ,  $y_g$  et  $y_{a_M}$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes d'espérance 0 et de variances 0,01.

Le taux de mort d'un individu de trait  $(x_0, g, a_M) \in [0, 4] \times [0, 2] \times [0, 2]$  et d'âge  $a \in [0, 2]$  dans la population  $Z \in \mathcal{M}_P([0, 4] \times [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2])$  est donné par :

$$d(x_0, g, a_M, a, Z) = \begin{cases} d_0 \times g + 10^{-5} \int_{\tilde{\chi}} U(x_0 + g a - x'_0 - g'(a' \wedge a'_M)) Z(dx'_0, dg', da'_M, da') & \text{si } a \leq a_M, \\ \int_{\tilde{\chi}} U(x_0 + g a_M - x'_0 - g'(a' \wedge a'_M)) Z(dx'_0, dg', da'_M, da') & \text{si } a_M < a \leq 2, \\ +\infty & \text{si } a > 2, \end{cases}$$

où  $U$  est le noyau introduit en (2.3.4) et où le coefficient  $d_0 \geq 0$  paramètre l'hostilité du milieu : les individus de fort taux de croissance  $g$ , devant chercher davantage de ressources pour survivre, ont un taux de mort naturelle juvénile  $d_0 g$  d'autant plus élevé que  $d_0$  sera grand.

Comme pour l'Exemple 1, nous choisissons pour l'état initial une population monomorphique ( $x_0 = 1,06$ ,  $g = 0,74$  et  $a_M = 0,20$ ) comptant  $N_0 = 900$  individus dont les âges sont tirés uniformément sur  $[0, 2]$ .

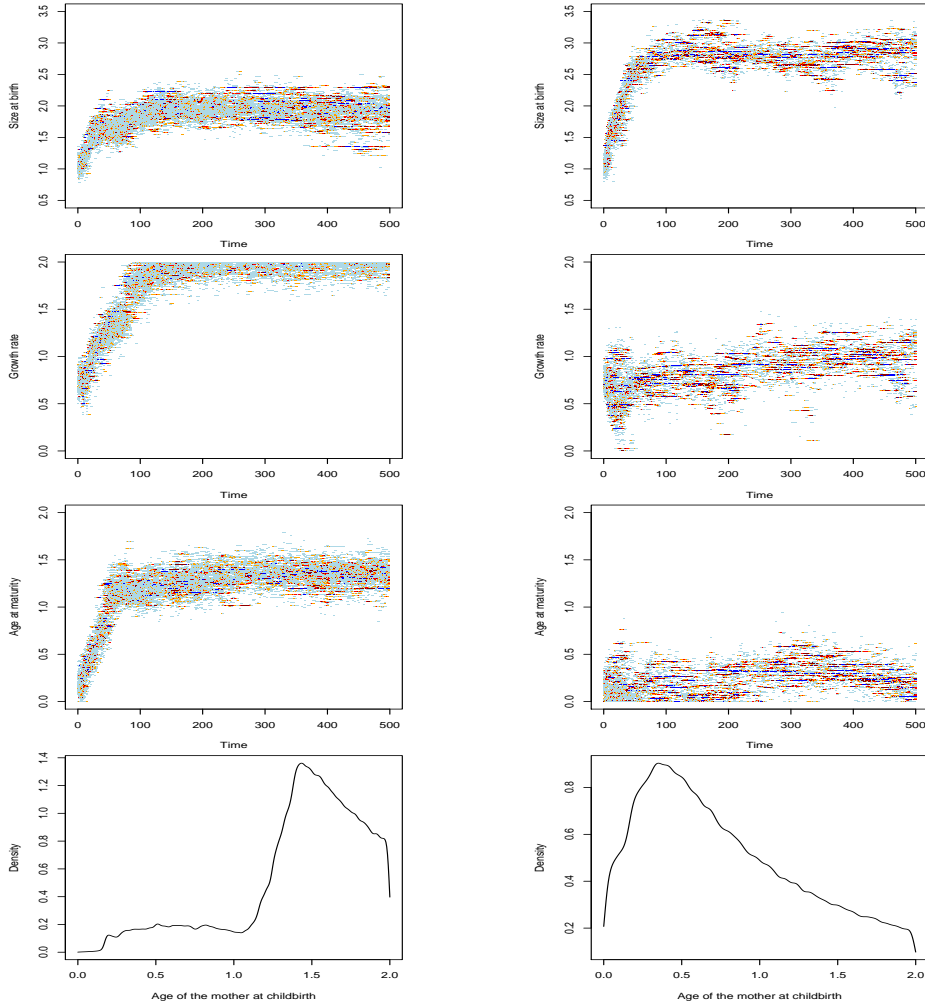


FIG. 2.4 – Exemple 2 :  $d_0 = 3,3 \cdot 10^{-3}$  (gauche),  $d_0 = 0,5$  (droite)

Dans un premier temps, nous choisissons  $d_0 = 3,3 \cdot 10^{-3}$ , puis  $d_0 = 0,5$ . Nous représentons l'évolution des traits  $x_0$ ,  $g$ ,  $a_M$  au cours du temps et la densité de l'âge des individus au moment de la reproduction.

Dans la colonne de gauche de la Figure 2.4,  $d_0 = 3,3 \cdot 10^{-3}$  est très faible. Remarquons que :

- les individus de fort taux de croissance  $g$  sont peu pénalisés durant la période juvénile ( $\forall g \in [0, 2], 0 \leq d_0 g \leq 6,6 \cdot 10^{-3}$ ),
- le taux de mort durant la phase juvénile est faible (de l'ordre de  $10^{-2}$  pour une population de 1000 individus) comparée au taux de mort durant la phase adulte (de l'ordre de l'unité).
- la compétition exercée par un individu de taille  $x$  sur un adulte de taille  $x_0 + ga_M$  est  $U(x_0 + ga_M - x)$ , qui est minimisée lorsque  $x_0 + ga_M$  est grand.

La stratégie observée semble alors naturelle. En raison des deux premiers points, c'est la compétitivité d'un individu à l'âge adulte qui va être déterminante, et sur la simulation présentée, les individus

évoluent vers un trait "d'équilibre"  $(x_0, g, a_M) \simeq (1.8, 2, 1.3)$  pour lequel le taux de croissance est maximal ( $g \simeq 2$ ) et la période de croissance longue ( $a_M \simeq 1, 3$ , le maximum étant 2).

Lorsque  $d_0 = 0.5$  (colonne de droite, Figure 2.4), nous observons un taux de croissance restant autour de 1 et un âge à maturité arrivant tôt au cours de la vie ( $a_M \simeq 0, 3$ ). Par (2.1.11), la probabilité  $\Pi(x_0, g, a_M)$  qu'a un individu de traits  $(x_0, g, a_M)$  de survivre jusqu'à l'âge à maturité  $a_M$  dans une population d'effectif borné par  $M$  est encadrée par :

$$\exp\left(-a_M\left(d_0g + M \cdot 10^{-5} \frac{2}{300}\right)\right) \leq \Pi(x_0, g, a_M) \leq \exp(-d_0ga_M). \quad (2.3.7)$$

Sur les simulations présentées, on observe que la taille de la population reste bornée et se stabilise vers une "valeur d'équilibre" (600 pour  $d_0 = 3, 3 \cdot 10^{-3}$  et 200 pour  $d_0 = 0, 5$ ).

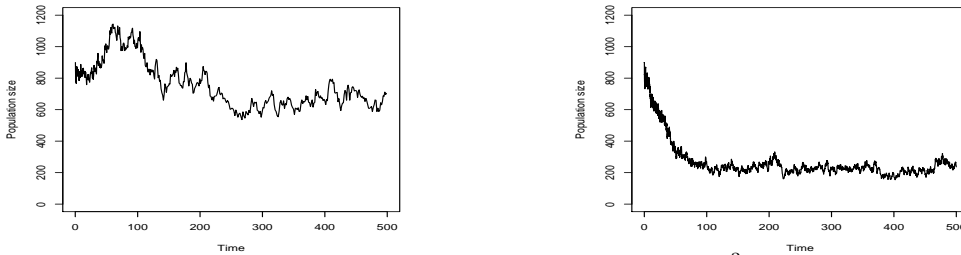


FIG. 2.5 – Evolution de l'effectif de la population :  $d_0 = 3, 3 \cdot 10^{-3}$  (gauche) et  $d_0 = 0.5$  (droite)

Considérons cette probabilité de survie pour les traits "d'équilibre"  $(x_0, g, a_M) = (1.8, 2, 1.3)$  et  $(x_0, g, a_M) = (2.6, 0.8, 0.3)$  obtenus dans les deux simulations de la Figure 2.4. Pour  $d_0 = 0.5$  et  $M = 600$ , on a  $0.27251 \leq \Pi(1.8, 2, 1.3) \leq 0.27254$  (alors que  $\Pi(1.8, 2, 1.3) \simeq 0.99$  lorsque  $d_0 = 3, 3 \cdot 10^{-3}$ ), tandis que  $0.88690 \leq \Pi(2.6, 0.8, 0.3) \leq 0.88692$ . On constate donc que pour  $d_0 = 0.5$ , la combinaison de traits qui va rester,  $(x_0, g, a_M) = (2.6, 0.8, 0.3)$ , correspond aux individus adultes dont la probabilité d'atteindre l'âge de début de reproduction est la plus grande, même si ces individus sont susceptibles d'être exposés à une pression de compétition plus forte que ceux de traits  $(x_0, g, a_M) = (1.8, 2, 1.3)$ .

Nous retrouvons ici un phénomène signalé par Taborsky *et al.* [115]. Dans le cas d'un milieu favorable et riche en ressources ( $d_0$  faible), la phase de croissance est peu coûteuse et une croissance longue ( $a_M$  grand) permet aux individus d'atteindre un refuge de mortalité : c'est à dire un état qui leur permet de moins subir les effets de la compétition. Lorsque  $d_0$  augmente, le refuge de mortalité devient inaccessible : la probabilité d'atteindre l'âge de début de reproduction devient trop petite. Un profil de vie alternatif émerge alors, avec une phase de reproduction débutant rapidement ( $a_M$  petit) et des individus plus petits.

Sur les Figures 2.6, nous présentons les simulations obtenues en faisant varier  $d_0$  entre 0,01 et 0,6. Nous considérons la surface obtenue en considérant les densités des âges des individus au moment d'une reproduction lorsque  $d_0$  varie. Nous procédons de même pour la durée de vie (Figure 2.6, colonne de droite).

Contrairement aux résultats obtenus pour le modèle de [115], l'évolution des âges au moment de la reproduction et l'évolution des durées de vie semblent être des fonctions continues de  $d_0$ . Les surfaces représentées sur la Figure 2.6 ne représentent pas de discontinuités "abruptes" qui s'interpréteraient comme un basculement "brutal" d'une stratégie ( $a_M$  grand) à une autre ( $a_M$  petit) pour une petite variation du paramètre  $d_0$ .

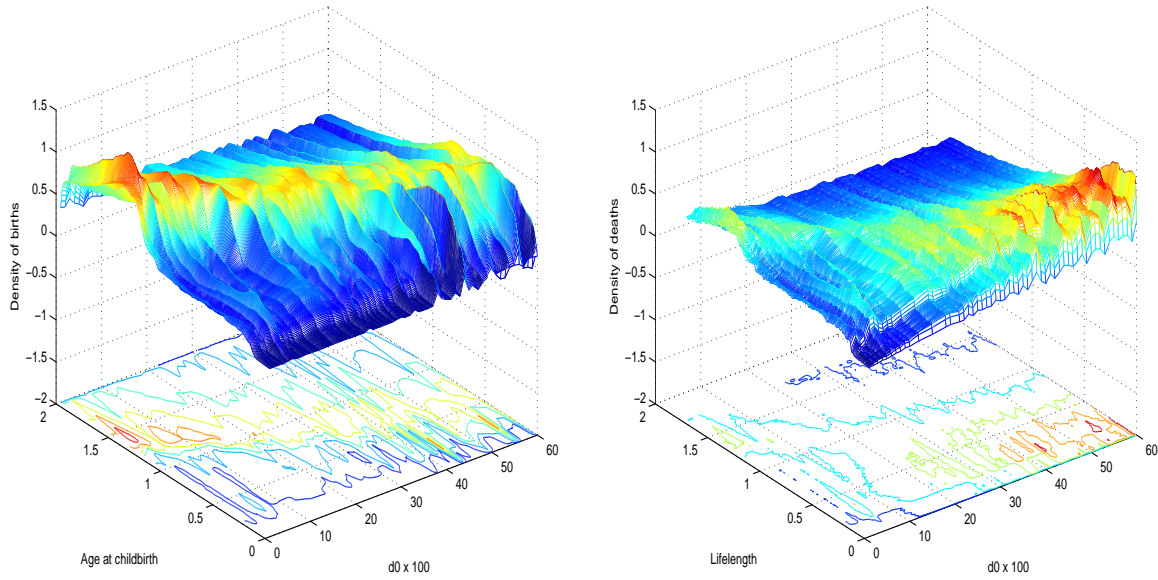


FIG. 2.6 – Ages des individus lors d'une reproduction (gauche) et durée de vie (droite).

### 2.3.2.3 Exemple 3 : une compétition entre classes d'âge

Afin d'illustrer un troisième phénomène lié aux populations structurées par âge, nous reprenons le modèle de l'Exemple 2 en modifiant la fonction de taille et les taux de naissance et de mort, et en considérant une population monomorphique. La valeur du trait est fixé à  $(x_0, g, a_M) = (0, 0.90, 3.72)$ .

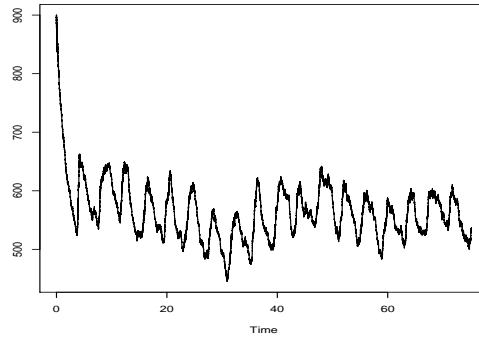


FIG. 2.7 – Evolution de la taille de la population dans le cas d'une population monomorphique issue de 900 individus de traits  $(x_0, g, a_M) = (0, 0.90, 3.72)$ .

La fonction de taille est la suivante :  $\forall a \in [0, 10]$ ,

$$x(x_0, g, a_M, a) = x_0 + g \times a \mathbf{1}_{a \leq a_M} + (g \times a_M + 0,95g \times (a - a_M)) \mathbf{1}_{a > a_M}. \quad (2.3.8)$$

Le taux de naissance est supposé proportionnel à la taille  $x$  :

$$b(x_0, g, a_M, a) = 2x(x_0, g, a_M, a) \mathbf{1}_{a > a_M}. \quad (2.3.9)$$

Le taux de mort d'un individu  $(x_0, g, a_M)$  et d'âge  $a$  dans la population de taille  $N$  est :

$$d(x_0, g, a_M, a, N) = \begin{cases} 3,3 \cdot 10^{-3} gN & \text{si } a \leq a_M \\ 1,6 \cdot 10^{-2} aN & \text{si } a_M < a \leq 10 \\ +\infty & \text{si } a > 10. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Désormais, la croissance peut se poursuivre également pour les individus adultes. Il existe alors un arbitrage entre reproduction et croissance. Les individus sont d'autre part soumis à une compétition logistique, avec des coefficients différents suivant que  $a \leq a_M$  ou  $a > a_M$ .

La taille de la population oscille de façon non amortie. Ce phénomène a été décrit par Thieme [118] Chapitre 11, Mischler *et al.* [99] où Henson [58] pour des modèles d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. L'idée est la suivante :

1. La population adulte est décimée lorsque la taille de la population est trop importante, en particulier, lorsqu'il y a une importante classe de jeunes.
2. Le déficit d'adultes entraîne un déficit de naissances.
3. La classe de jeunes ayant décimé la population adulte, devenue elle même adulte, sera soumise à une compétition plus faible, puisque la nouvelle classe de jeunes est plus restreinte. Il y a alors plus de naissances.

Dans les Chapitres 3 à 5, nous verrons que le processus microscopique que nous avons simulé peut-être approché par les solutions d'équations aux dérivées partielles semblables à celles étudiées par Thieme [118] ou Henson [58].

## Chapitre 3

# Renormalisation du processus microscopique et approximation par une équation aux dérivées partielles

Nous nous intéressons à une suite particulière de renormalisations  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  du modèle individu-centré présenté au Chapitre 2. Nous allons augmenter la taille de la population initiale (qui sera d'ordre  $n$ ) tout en diminuant le poids des individus et l'intensité des interactions (en  $1/n$ ). L'asymptotique en  $n$  de cette suite sera appelée *asymptotique des grandes populations*. Le résultat principal de ce chapitre est la convergence en loi dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  de la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  des processus microscopiques correctement renormalisés vers la solution  $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  de l'équation d'évolution suivante :  $\forall (f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{B}_b(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\forall x \in \mathcal{X}, ((a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+)$  avec des dérivées bornées uniformément en  $x \in \mathcal{X}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \xi_t, f_t \rangle = & \langle \xi_0, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(x, a) + f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') - f_s(x, a) d(x, a, \xi_s U(x, a)) \right] \xi_s(dx, da) ds. \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

Ce résultat est une généralisation des résultats obtenus par Fournier et Méléard [49] et Champagnat *et al.* [21] dans un cadre sans structure d'âge.

Lorsque les mesures  $\xi_t \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ , pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , admettent des densités  $n(x, a, t)$  par rapport à la mesure de référence  $P(dx) \otimes da$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ , la famille de ces densités  $(n(\cdot, \cdot, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une solution faible du système d'équations suivantes :  $P(dx) \otimes da$ -presque partout sur  $\tilde{\mathcal{X}}, \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t}(x, a, t) = & -\nabla_a (v(x, a) n(x, a, t)) \\ & - d \left( x, a, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) n(y, \alpha, t) P(dy) d\alpha \right) n(x, a, t) \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

$$\begin{aligned} v(x, 0) n(x, 0, t) = & \int_{\mathbb{R}_+} n(x, a, t) b(x, a) (1 - p(x, a)) da \\ & + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x', a) p(x', a) k(x', a, x) n(x', a, t) P(dx') da \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

$$n(x, a, 0) = n_0(x, a). \quad (3.0.4)$$

Ces équations généralisent les équations aux dérivées partielles de McKendrick-Von Foerster. Elles décrivent l'écologie à l'échelle de la population (les trajectoires individuelles sont perdues). Les densités  $n(x, a, t)$ , lorsqu'elles existent, correspondent à la notion de *densité de nombre*,

qui décrit la distribution en traits et en âges d'une population constituée par un "continuum" d'individus.

**Définition 3.0.2.** *Un processus  $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  solution de (3.0.1) sera appelé solution faible mesure du système (3.0.2)-(3.0.4). Lorsque les mesures  $\xi_t$ , pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , admettent des densités  $n(x, a, t)$  par rapport à la mesure de référence  $P(dx) \otimes da$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ , la famille de ces densités  $(n(\cdot, \cdot, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est appelée solution faible fonction du système (3.0.2)-(3.0.4).*

Nous pouvons donc approcher le processus microscopique du Chapitre 2 renormalisé par les solutions d'équations aux dérivées partielles qui généralisent les équations classiquement étudiées en démographie pour des modèles à temps continu de populations structurées par un âge scalaire.

Les modèles d'équations aux dérivées partielles utilisés pour décrire les populations structurées uniquement par un âge scalaire ont été introduits par Sharpe and Lotka [111], Lotka [79], McKendrick [85] et Von Foerster [47].

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \forall a \geq 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial n}{\partial a}(a, t) &= -d(a)n(a, t) \\ n(0, t) &= \int_0^{+\infty} b(a)n(a, t)da, \quad n(a, 0) = n_0(a), \end{aligned} \quad (3.0.5)$$

où  $d$ ,  $b$  et  $n_0$  sont des fonctions continues positives (taux de mort, de naissance et distribution d'âge initiale). L'équation (3.0.5) est connue sous le nom d'équation de McKendrick-Von Foerster. Un désavantage majeur est qu'on ne modélise pas les phénomènes régulant la taille de la population, ni les limitations environnementales (absence de terme d'interaction).

Les premiers modèles non linéaires (avec termes d'interaction) pour les populations structurées par âge ont été introduits par Gurtin et MacCamy [56]. Les taux  $b(a)$  et  $d(a)$  de (3.0.5) sont alors remplacés par les fonctions  $b(a, N_t)$  et  $d(a, N_t)$  de la variable scalaire  $a \in \mathbb{R}_+$  et de la taille  $N_t = \int_0^{+\infty} n(a, t)da \in \mathbb{R}_+$  de la population au temps  $t$ . La non linéarité fait intervenir la solution inconnue et introduit un phénomène de rétroaction (*feed back*) qui permet de contrôler la masse de la population et grâce auquel la population peut dans certains cas se stabiliser autour d'un équilibre non trivial (cf. Webb [124] Section 1.3, et cf. Annexe A.4 de la thèse).

Webb [124] a proposé une forme de coefficients avec interactions locales, qui lui permet de plus de diviser la population en un nombre fixé  $s$  de classes (induisant une structuration simple supplémentaire) : les taux considérés sont de la forme  $b(a, n(\cdot, t))$  et  $d(a, n(\cdot, t))$ , où  $n(\cdot, t)$  appartient au Banach  $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^s)$  des fonctions intégrables par rapport à la variable  $a \in \mathbb{R}_+$ .

Pour conclure cette courte présentation des modèles d'équations aux dérivées partielles, mentionnons deux modèles de populations structurées par âge et par traits. Le premier modèle a été introduit par Rotenberg [109] afin de modéliser la sénescence. Le trait considéré est la vitesse de maturation  $x \in \mathcal{X} = ]0, 1]$ , et peut changer à la naissance et ponctuellement au cours de la vie de l'individu. Pour un individu né au temps  $c \in \mathbb{R}$  et de traits  $x_i \in ]0, 1]$  sur  $[t_i, t_{i+1}[$  ( $i \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 = c$  et  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont les instants de changement de trait sur  $[c, +\infty[$ ), l'âge biologique à  $t > c$  est  $a = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i(t_{i+1} \wedge t - t_i \wedge t)$ . La densité  $n(x, a, t)$  de la population est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :  $\forall t \geq 0, \forall a \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t}(x, a, t) + x \frac{\partial n}{\partial a}(x, a, t) &= -d(a, x)n(x, a, t) + \int_0^1 K(x', a, x)n(x', a, t)dx' \\ n(x, 0, t) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b(x', a, x)n(x', a, t)dx' da, \quad n(x, a, 0) = n_0(x, a), \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

Dans cette équation, l'âge biologique  $a$  diffère de l'âge physique  $t - c$  dès que  $\exists i \in \mathbb{N}$ ,  $t_i < t$  et  $x_i \neq 1$ . La fonction  $K(x', a, x)$  décrit le taux auquel un individu de vitesse de maturation  $x'$  et

d'âge  $a$  change sa vitesse de maturation pour une autre,  $x$ . La fonction  $b(x', a, x)$  est le taux auquel un individu de trait  $x'$  et d'âge  $a$  donne naissance à un individu de trait  $x$ .

Une version non linéaire de ce modèle a été obtenue par Mischler *et al.* [99] en changeant les conditions au bord sur les naissances :

$$n(x, 0, t) = h \left( \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} w(x', a) n(x', a, t) dx' da \right) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b(x', a, x) n(x', a, t) dx' da$$

La fonction  $h$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  décrit par exemple la pression sur les naissances induite par une compétition pour les ressources. La pondération  $w$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  représente la pression exercée par chaque valeur de trait et d'âge.

A la Section 3.1, nous étudions le processus microscopique  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  renormalisé par  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous l'exprimons comme solution d'une équation différentielle stochastique dérivée de (2.2.2) et nous étudions ses propriétés de martingale et de moments. A la Section 3.2, nous prouvons la convergence de la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la solution  $\xi$  de (3.0.1). Nous en déduisons, par une méthode probabiliste, l'existence et l'unicité des solutions de (3.0.1).

Ces renormalisations et convergences généralisent les résultats de Fournier et Méléard [49] et Champagnat *et al.* [22, 21] à des populations structurées par âges. Dans [49, 22, 21], les auteurs donnent une représentation trajectorielle du processus microscopique décrivant la population à l'aide de mesures ponctuelles de Poisson, puis utilisent des contrôles de moments pour prouver la convergence des processus renormalisés; nous adaptions ces idées au modèle étudié, où le vieillissement introduit un drift déterministe des particules en âge. Des convergences pour des populations structurées par un âge scalaire croissant avec la vitesse 1 et des taux de naissance et de mort bornés ont été étudiées par Oelschläger [102] (les hypothèses de taux bornés excluent par exemple la modélisation d'une compétition logistique entre les individus). Nous généralisons ces résultats en permettant la prise en compte de plusieurs âges, avec des vitesses de vieillissement satisfaisant les Hypothèses 2.1.4, et en considérant des taux de mort non bornés.

Dans la Section 3.2.3, nous nous intéressons à l'absolue continuité par rapport à une mesure de référence des marginales en temps de la solution  $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de (3.0.1). Nous montrons que dans le cas d'un âge scalaire et si la condition initiale admet une densité, la famille des densités  $(n(\cdot, \cdot, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  existe et est une solution faible fonction de (3.0.2)-(3.0.4). Le lien avec les solutions classiques lorsque cette fonction est régulière est établi à la Section 3.2.4. Il est intéressant de noter que l'équation (3.0.1) n'a pas toujours de solution fonction.

### 3.1 Processus microscopique renormalisé

Nous commençons par définir les processus microscopiques renormalisés. Comme dans le Chapitre 2, les individus sont caractérisés par un trait  $x \in \mathcal{X}$  sous ensemble de  $\mathbb{R}^{d_x}$  et par un vecteur d'âges  $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$ . On note comme précédemment  $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^d$  que l'on muni de sa tribu borélienne.

Nous généralisons la Définition 2.0.2 à des mesures de  $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$  :

**Définition 3.1.1.** *Les applications  $X = (X_1, \dots, X_N, \dots)$  et  $A = (A_1, \dots, A_N, \dots)$ , de  $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$  dans  $(\mathcal{X})^{\mathbb{N}}$  et  $(\mathbb{R}_+^d)^{\mathbb{N}}$  respectivement, sont définies par :*

$$X \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, a_i)} \right) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0, \dots), \quad A \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, a_i)} \right) = (a_1, \dots, a_N, 0, \dots, 0, \dots),$$

où les particules sont rangées suivant un ordre choisi sur  $\mathcal{X}$ , puis, pour les particules de même trait  $x$ , par ordre décroissant du premier âge, du second âge etc.



### 3.1.1 Construction d'un processus à valeurs dans $\mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$

Nous allons étudier les processus renormalisés définis par les équations différentielles stochastiques de la Définition 3.1.2 suivante. Les événements affectant la population sont les naissances, les mutations et les morts. Leurs occurrences sont modélisées à l'aide d'une mesure ponctuelle de Poisson. Entre deux événements, les individus vieillissent continûment avec le temps. Nous introduisons formellement ces équations, puis nous étudions l'existence et l'unicité des solutions.

**Définition 3.1.2.** *Sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  :*

1. Soit une suite  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_0^n \in \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}}), \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\langle Z_0^n, 1 \rangle) < +\infty. \quad (3.1.1)$$

2. Soit  $Q(ds, di, d\theta, dx')$  une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$  d'intensité  $ds \otimes n(di) \otimes d\theta \otimes P(dx')$  et indépendante de  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . (On rappelle que  $n(di)$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}^*$  et  $P(dx)$  une mesure de référence sur  $\mathcal{X}$ ).

On note  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  la filtration canonique engendrée par  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $Q$ .

Soient un taux de naissance  $b \in \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ , une probabilité de mutation  $p \in \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}}, [0, 1])$ , une vitesse de vieillissement  $v \in \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+^d)$ , un taux de mort  $d \in \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}^{d_c}, \mathbb{R})$  et un noyau d'interaction  $U \in \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}}^2, \mathbb{R}^{d_c})$  satisfaisant les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4 et 2.1.10 du Chapitre 1.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'équation différentielle stochastique suivante décrivant l'évolution du processus  $Z^n$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$  :

$$\begin{aligned} Z_t^n = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_0^n} \delta_{(X_i(Z_0^n), A_{X_i(Z_0^n)}(t, 0, A_i(Z_0^n)))} + \frac{1}{n} \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}^n\}} \left[ \delta_{(X_i(Z_{s-}^n), A_{X_i(Z_{s-}^n)}(t, s, 0))} \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ & + \delta_{(x', A_{x'}(t, s, 0))} \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ & \left. - \delta_{(X_i(Z_{s-}^n), A_{X_i(Z_{s-}^n)}(t, s, A_i(Z_{s-}^n)))} \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\text{où : } \forall t \in \mathbb{R}_+, N_t^n = n \langle Z_t^n, 1 \rangle, \quad (3.1.3)$$

où pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $A_x$  est le flot de l'équation (2.1.2) défini en (2.1.3), et où :

$$\begin{aligned} m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') &= (1 - p(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n))) b(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n)) k(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), x') \\ m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') &= m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') \\ &+ p(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n)) b(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n)) k(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), x') \\ m_3(s, Z_{s-}^n, i, x') &= m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') \\ &+ d(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), Z_{s-}^n U(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n))) k(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), x'). \end{aligned}$$

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $T_0^n = 0$  et  $(T_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  désigne la suite des temps de sauts successifs de  $Z^n$ . On définit :

$$T_\infty^n = \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k^n. \quad (3.1.4)$$

**Remarque 3.1.3.** *Le processus  $Z^n$  défini par (3.1.2) correspond à un processus microscopique où les individus ont pour masse  $1/n$ , et où un individu de trait  $x \in \mathcal{X}$  et d'âges  $a \in \mathbb{R}_+^d$  se reproduit au taux  $b(x, a)$ , donnant naissance avec probabilité  $p(x, a)$  à un mutant de trait tiré dans la distribution  $K(x, a, dx')$ , vieillit avec la vitesse  $v(x, a)$  et meurt au taux :*

$$d \left( x, a, \sum_{i=1}^{N_t^n} \frac{U((x, a), (X_i(Z_{t-}^n), A_i(Z_{t-}^n)))}{n} \right).$$

On remarque que le noyau d'interaction est renormalisé en  $1/n$ .

Une intuition biologique possible de cette renormalisation est que si l'on veut considérer, à ressources fixées, des populations plus grandes, il est naturel que les individus qui la composent soient plus petits et interagissent proportionnellement à leur taille. Dans cette optique, on peut considérer le paramètre de renormalisation  $n$  comme un paramètre de la quantité de ressources consommées par un individu.

De même qu'au Chapitre 2, l'une des difficultés à laquelle nous serons confrontés est que la masse et la distribution en âge des processus  $Z^n$  ne sont pas *a priori* bornées.

**Définition 3.1.4.** Soient  $N > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous définissons les temps d'arrêt suivants :

$$\tau_N^n = \inf \{t \geq 0, \langle Z_t^n, 1 \rangle \geq N\} \quad (3.1.5)$$

$$\zeta_N^n = \inf \left\{ t \geq 0, \langle Z_t^n, 1 \rangle \geq N \text{ et } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t^n(dx, da) \geq N \right\}. \quad (3.1.6)$$

**Proposition 3.1.5.** Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tau_N^n = +\infty, \text{ et } T_\infty^n = +\infty \text{ } \mathbb{P} - \text{presque sûrement} \quad (3.1.7)$$

et l'équation (3.1.2) admet une unique solution  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}}))$ .  $\square$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. La preuve de cette Proposition est une généralisation directe des Propositions 2.2.5 et 2.2.6 du Chapitre 2. Sous les Hypothèses 2.1.1 et (3.1.1), nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, t \wedge \tau_N^n]} \langle Z_s^n, 1 \rangle \right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\langle Z_0^n, 1 \rangle) e^{\bar{b}t} < +\infty,$$

et nous en déduisons (3.1.7) de la même façon que pour la preuve du Point (i) de la Proposition 2.2.5. L'existence et l'unicité de la solution de (3.1.2) sur  $\mathbb{R}_+$  sont alors conséquences de la construction algorithmique que l'on peut donner de la solution, comme à la Section 2.3.1.  $\blacksquare$

### 3.1.2 Propriétés de moments et de martingale

Nous énonçons dans cette section des propriétés de moments et de martingales pour les processus  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la Définition 3.1.2 qui seront centrales pour obtenir des théorèmes limites. Nous commençons par énoncer un analogue du Lemme 2.2.7.

**Lemme 3.1.6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et soit  $Z^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}}))$  de la Définition 3.1.2. Soit  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et soit  $(f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{B}_b(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\forall x \in \mathcal{X}, ((a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  avec des dérivées bornées uniformément en  $x \in \mathcal{X}$ . Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} F(\langle Z_t^n, f_t \rangle) &= F(\langle Z_0^n, f_0 \rangle) + \int_0^t \left\langle Z_s^n, v \nabla_a f_s + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right\rangle F'(\langle Z_s^n, f_s \rangle) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_t^n\}} \left[ \left( F \left( \langle Z_{s-}^n, f_s \rangle + \frac{1}{n} f_s(X_i(Z_{s-}^n), 0) \right) - F \left( \langle Z_{s-}^n, f_s \rangle \right) \right) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &+ \left( F \left( \langle Z_{s-}^n, f_s \rangle + \frac{1}{n} f_s(x', 0) \right) - F \left( \langle Z_{s-}^n, f_s \rangle \right) \right) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &+ \left. \left( F \left( \langle Z_{s-}^n, f_s \rangle - \frac{1}{n} f_s(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n)) \right) - F \left( \langle Z_{s-}^n, f_s \rangle \right) \right) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right] \\ &Q(ds, di, d\theta, dx') \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

*Démonstration.* La démonstration est la même que pour le Lemme 2.2.7.  $\blacksquare$

### 3.1.2.1 Existence et propriétés de moments

Nous démontrons dans cette section des propriétés de moments qui nous seront utiles dans la suite de cette partie (Chapitres 3, 4, 5, 6).

**Théorème 3.1.7.** *Considérons la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la Définition 3.1.2.*

(i) *S'il existe  $q \geq 1$  tel que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} (\langle Z_0^n, 1 \rangle^q) < +\infty, \quad (3.1.9)$$

on a :

$$\forall T > 0, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^q \right) < +\infty. \quad (3.1.10)$$

(ii) *S'il existe  $q \geq 1$  et  $m \geq 1$  tels que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} (\langle Z_0^n, 1 \rangle^m) < +\infty \text{ et } \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_0^n(dx, da) \right]^m \right) < +\infty, \quad (3.1.11)$$

alors :

$$\forall T > 0, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_t^n(dx, da) \right]^m \right) < +\infty. \quad (3.1.12)$$

(iii) *Si le taux de mort vérifie  $\exists \underline{d} > 0, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), d(x, a, ZU(x, a)) \geq \underline{d} \langle Z, 1 \rangle$  et si :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} (\langle Z_0^n, 1 \rangle^2) < +\infty, \quad (3.1.13)$$

alors :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} (\langle Z_t^n, 1 \rangle^2) < +\infty. \quad (3.1.14)$$

*Démonstration.* On commence par prouver le Point (i). Soient  $N > 0, n \in \mathbb{N}^*$  et  $\tau_N^n$  le temps d'arrêt introduit en (3.1.5). En utilisant le Lemme 3.1.6 avec  $f \equiv 1$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x^p$ , et en ne prenant en compte que les événements augmentant l'effectif total de la population (c'est à dire les naissances avec ou sans mutation) :

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [0, t \wedge \tau_N^n]} \langle Z_u^n, 1 \rangle^q &\leq \langle Z_0^n, 1 \rangle^q + \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}^n\}} \left( \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right) \left( \left( \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle + \frac{1}{n} \right)^q - \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle^q \right) Q(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned}$$

Comme  $(1 + y)^q - y^q \leq C(q) (1 + y^{q-1})$ , on obtient en prenant l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, t \wedge \tau_N^n]} \langle Z_u, 1 \rangle^q \right) &\leq \mathbb{E} (\langle Z_0^n, 1 \rangle^q) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \tau_N^n} C(q) (1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle^{q-1}) \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( b(x, a)(1 - p(x, a)) + b(x, a)p(x, a) \int_{\mathcal{X}} K(x, a, dx') \right) Z_s^n(dx, da) ds \right) \\ &\leq \mathbb{E} (\langle Z_0^n, 1 \rangle^q) + \bar{b} C(q) \int_0^t \mathbb{E} \left( \langle Z_{s \wedge \tau_N^n}^n, 1 \rangle + \langle Z_{s \wedge \tau_N^n}^n, 1 \rangle^q \right) ds, \end{aligned}$$

par le théorème de Fubini (qui s'applique grâce aux Hypothèses 2.1.1 et par le choix de  $\tau_N^n$ ).

Comme  $\mathbb{E}^\nu (\langle Z_s^n, 1 \rangle + \langle Z_s^n, 1 \rangle^q) \leq 2\mathbb{E}^\nu (1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle^q) \leq 2 \left( 1 + \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, s]} \langle Z_u^n, 1 \rangle^q \right) \right) :$

$$\mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, t \wedge \tau_N^n]} \langle Z_u^n, 1 \rangle^q \right) \leq \mathbb{E} (\langle Z_0^n, 1 \rangle^q) + 2\bar{b}C(q)T + 2\bar{b}C(q) \int_0^t \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, s \wedge \tau_N^n]} \langle Z_u^n, 1 \rangle^q \right) ds.$$

Par l'inégalité de Gronwall, on a alors :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_N^n]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^q \right) \leq (\mathbb{E}(\langle Z_0^n, 1 \rangle^q) + 2\bar{b}C(q)T) \exp(2\bar{b}C(q)T) \leq C(q, T), \quad (3.1.15)$$

où  $C(q, T)$  est une constante indépendante de  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $N > 0$ . Par (3.1.9), (3.1.7) et en utilisant le lemme de Fatou comme en (2.2.13), nous en déduisons que :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^q \right) < C(q, T) < +\infty. \quad (3.1.16)$$

Prouvons maintenant le Point (ii). Soient  $N > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\zeta_N^n$  le temps d'arrêt défini en (3.1.6). Pour cette démonstration, nous allons considérer la norme 1 sur  $\mathbb{R}^d$  : pour  $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$ ,  $|a| = \sum_{i=1}^d a_i$ . Le choix de la norme 1 est fait parce qu'il simplifie les calculs. Il n'est pas restrictif, puisque les normes de  $\mathbb{R}^d$  sont équivalentes. La fonction  $f : a \in \mathbb{R}_+^d \mapsto |a|^q = \left( \sum_{i=1}^d a_i \right)^q \in \mathbb{R}_+$  est différentiable et  $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\partial f / \partial a_i = q|a|^{q-1}$ . La fonction  $F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^m \in \mathbb{R}_+$  est également différentiable et  $F'(x) = mx^{m-1}$ . En appliquant le Lemme 3.1.6 :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, t \wedge \zeta_N^n]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_u^n(dx, da) \right]^m \right) \leq \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_0^n(dx, da) \right]^m \right) \\ & + mq\bar{v} \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (|a|^{q-1}(d + |a|)) Z_s^n(dx, da) \right] \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^{m-1} ds \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_0^n(dx, da) \right]^m \right) + mq\bar{v}d \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{q-1} Z_s^n(dx, da) \right] \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^{m-1} ds \right) \\ & + mq\bar{v} \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^m ds \right), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $0 \leq \sum_{i=1}^d v_i(x, a) \leq \bar{v}(d + |a|)$  (Hypothèse 2.1.4). Comme :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{q-1} Z_s^n(dx, da) & \leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (|a| \vee 1)^{q-1} Z_s^n(dx, da) \\ & \leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (|a| \vee 1)^q Z_s^n(dx, da) \leq \langle Z_s^n, 1 \rangle + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da), \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

alors :

$$\left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{q-1} Z_s^n(dx, da) \right] \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^{m-1} \leq \langle Z_s^n, 1 \rangle \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^{m-1} + \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^m.$$

Pour le premier terme du membre de droite :

$$\langle Z_s^n, 1 \rangle \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^{m-1} \leq \langle Z_s^n, 1 \rangle^m + \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_s^n(dx, da) \right]^m. \quad (3.1.18)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, t \wedge \zeta_N^n]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_u^n(dx, da) \right]^m \right) & \leq \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_0^n(dx, da) \right]^m \right) + mq\bar{v}dT \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \langle Z_u^n, 1 \rangle^m \right) \\ & + mq\bar{v}(2d + 1) \int_0^t \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, s \wedge \zeta_N^n]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_u^n(dx, da) \right]^m \right) ds \end{aligned}$$

(on a utilisé le théorème de Fubini pour intervertir espérance et intégrale). Par (3.1.11), (3.1.16) et par le Lemme de Gronwall :  $\forall t \in [0, T], \forall N > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sup_{u \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_u^n(dx, da) \right]^m \right) \\ & \leq \left( \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_0^n(dx, da) \right]^m \right) + m q \bar{v} d T C(m, T) \right) e^{m q \bar{v} (2d+1) T} =: D(q, T), \end{aligned}$$

où le membre de droite définit une constante ne dépendant pas de  $N$ . On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \zeta_N^n = +\infty, \mathbb{P} - \text{presque sûrement.} \quad (3.1.19)$$

Sinon, pour le choix de  $q = 1$ , il existerait  $M > 0$  et  $A_M \subset \Omega$  de probabilité strictement positive tels que  $\forall \omega \in A_M, \lim_{N \rightarrow +\infty} \zeta_N^n(\omega) < M$  et :

$$\forall T > M, \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t^n(dx, da) \right]^m \right) \geq \mathbb{P}(A_M) N^m,$$

qui ne peut pas être majoré indépendamment de  $N$  et cela serait absurde.

En s'affranchissant de  $\zeta_N^n$  par le Lemme de Fatou comme en (2.2.13), on trouve :

$$\mathbb{E} \left( \left[ \sup_{t \in [0, T]} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^q Z_t^n(dx, da) \right]^m \right) \leq D(q, T) < +\infty \quad (3.1.20)$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé au Point (ii).

Considérons le Point (iii). Par la formule d'Itô, nous avons pour  $t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}^*, N > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, 1 \rangle^2 \right) &= \mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ \left( \langle Z_s^n, 1 \rangle + \frac{1}{n} \right)^2 - \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \right] b(x, a) n Z_s^n(dx, da) ds \right) \\ &+ \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ \left( \langle Z_s^n, 1 \rangle - \frac{1}{n} \right)^2 - \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \right] d(x, a, Z_s^n U(x, a)) n Z_s^n(dx, da) ds \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \bar{b} \langle Z_s^n, 1 \rangle \left[ 2 \langle Z_s^n, 1 \rangle + \frac{1}{n} \right] ds \right) \\ &+ \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ -2 \langle Z_s^n, 1 \rangle + \frac{1}{n} \right] d(x, a, Z_s^n U(x, a)) Z_s^n(dx, da) ds \right) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

$$\leq \mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} 3 \bar{b} \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \left[ -2 \langle Z_s^n, 1 \rangle + \frac{1}{n} \right] \underline{d} \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \right). \quad (3.1.22)$$

En effet, si  $\langle Z_s^n, 1 \rangle < 1/n$ , alors nécessairement  $\langle Z_s^n, 1 \rangle = 0$  (car  $Z_s^n \in \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$ ) et le second terme de (3.1.21) est nul. Nous pouvons donc le majorer par le second terme de (3.1.22). Le terme  $-2 \langle Z_s^n, 1 \rangle + 1/n$  est négatif. Nous pouvons donc majorer le troisième terme de (3.1.21) par le troisième terme de (3.1.22) en minorant  $d(x, a, Z_s^n U(x, a))$ . Alors :

$$\mathbb{E} \left( \langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, 1 \rangle^2 \right) \leq \mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \left[ \left( 3 \bar{b} + \frac{\underline{d}}{n} \right) \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 - 2 \underline{d} \langle Z_s^n, 1 \rangle^3 \right] ds \right).$$

Par convexité de  $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{3/2}$  et par l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E} \left( -2 \underline{d} \langle Z_s^n, 1 \rangle^3 \right) \leq -2 \underline{d} \mathbb{E} \left( \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \right)^{3/2},$$

et par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \mathbf{1}_{t \leq \zeta_N^n} \right) &\leq \mathbb{E} \left( \langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, 1 \rangle^2 \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right) + \int_0^t \left[ \left( 3\bar{b} + \frac{d}{n} \right) \mathbb{E} \left( \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \mathbf{1}_{s \leq \zeta_N^n} \right) - 2\underline{d} \mathbb{E} \left( \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \mathbf{1}_{s \leq \zeta_N^n} \right)^{3/2} \right] ds. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

L'application  $t \mapsto \mathbb{E} \left( \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \mathbf{1}_{t \leq \zeta_N^n} \right)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par les mêmes arguments qu'à la Proposition 2.2.5 et :

$$\mathbb{E} \left( \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \mathbf{1}_{t \leq \zeta_N^n} \right) \leq \eta^n(t), \quad (3.1.24)$$

où  $\eta^n$  est la solution de l'équation de Bernoulli suivante :

$$\frac{d\eta^n}{dt}(t) = \left( 3\bar{b} + \frac{d}{n} \right) \eta^n(t) - 2\underline{d} \eta^n(t)^{3/2}, \quad \eta^n(0) = \mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right). \quad (3.1.25)$$

En utilisant le Lemme de Fatou comme en (2.2.13), on peut s'affranchir de  $\zeta_N^n$  dans (3.1.24).

Résolvons (3.1.25). La fonction nulle étant une solution de (3.1.25) et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'appliquant, aucune solution non nulle de (3.1.25) ne s'annule. Par le changement de variable  $y = (\eta^n)^{-1/2}$  qui définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , (3.1.25) devient :

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \frac{d\eta^n}{dt}(t) (\eta^n(t))^{-3/2} = -\frac{1}{2} \left( \left( 3\bar{b} + \frac{d}{n} \right) y(t) - 2\underline{d} \right) \quad (3.1.26)$$

qui est une équation différentielle ordinaire linéaire, se résolvant en :

$$y(t) = \frac{-2\underline{d}}{3\bar{b} + \frac{d}{n}} \left( e^{-(3\bar{b} + \frac{d}{n})t/2} - 1 \right) + y(0) e^{-(3\bar{b} + \frac{d}{n})t/2}. \quad (3.1.27)$$

On en déduit :

$$\eta^n(t) = \left( \frac{-2\underline{d}}{3\bar{b} + \frac{d}{n}} \left( e^{-(3\bar{b} + \frac{d}{n})t/2} - 1 \right) + \frac{e^{-(3\bar{b} + \frac{d}{n})t/2}}{\sqrt{\mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right)}} \right)^{-2}. \quad (3.1.28)$$

Le membre de droite est bien défini, puisque  $y$  ne s'annule pas, et sa limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$  est  $(3\bar{b})^2 / (2\underline{d})^2$ . Ceci conclut la preuve.  $\blacksquare$

### 3.1.2.2 Problème de martingale

**Théorème 3.1.8.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Supposons que la condition initiale  $Z_0^n \in \mathcal{M}_P^n(\tilde{\mathcal{X}})$  soit telle que  $\mathbb{E} \left( \langle Z_0^n, 1 \rangle^2 \right) < +\infty$  et  $\mathbb{E} \left( \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0^n(dx, da) \right) < +\infty$ . Pour tout  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$ ,*

$$\begin{aligned} M_t^{n,f} &= \langle Z_t^n, f_t \rangle - \langle Z_0^n, f_0 \rangle - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(x, a) + f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') - f_s(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds, \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

est une martingale de carré intégrable càdlàg issue de 0, et de variation quadratique prévisible :

$$\begin{aligned} \langle M^{n,f} \rangle_t &= \frac{1}{n} \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ f_s^2(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} f_s^2(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \right. \\ &\quad \left. + f_s^2(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

*Démonstration.* Considérons le processus

$$\begin{aligned} M_t^{n,f} &= -\frac{1}{n} \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}^n\}} \left( f_s(X_i(Z_{s-}^n), 0) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &\quad + f_s(x', 0) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &\quad \left. - f_s(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n)) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta \leq m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right) \tilde{Q}(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned}$$

où  $\tilde{Q}$  est la mesure compensée de la mesure de Poisson  $Q$  introduite à la Définition 2.2.1.  $(M_t^{n,f})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une martingale locale associée à la suite de temps d'arrêt  $(\zeta_N^n)_{N>0}$ . Pour obtenir son crochet, nous commençons par appliquer la formule d'Itô à (3.1.29) pour obtenir la décomposition de Doob de la semi-martingale  $(\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, f_{t \wedge \zeta_N^n} \rangle^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

$$\begin{aligned} &\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, f_{t \wedge \zeta_N^n} \rangle^2 - \langle Z_0^n, f_0 \rangle^2 - \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ 2 \langle Z_s^n, f_s \rangle \left( v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial t}(x, a) \right) \right. \\ &\quad + 2 \langle Z_s^n, f_s \rangle f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} 2 \langle Z_s^n, f_s \rangle f_s(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \\ &\quad \left. - 2 \langle Z_s^n, f_s \rangle f_s(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds - \langle M^{n,f} \rangle_{t \wedge \zeta_N^n} \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

est une martingale. D'autre part, une autre décomposition de  $(\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, f_{t \wedge \zeta_N^n} \rangle^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est obtenue en appliquant le Lemme 2.2.7 avec  $F(x) = x^2$ . La comparaison de ces deux expressions donne par unicité de la décomposition de Doob de  $(\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, f_{t \wedge \zeta_N^n} \rangle^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$  :

$$\begin{aligned} \langle M^{n,f} \rangle_{t \wedge \zeta_N^n} &= \frac{1}{n} \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ f_s^2(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} f_s^2(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \right. \\ &\quad \left. + f_s^2(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds. \end{aligned}$$

Par les hypothèses du Théorème et par le Point (ii) du Théorème 3.1.7,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \zeta_N^n = +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (3.1.32)$$

Le lemme de Fatou nous fournit alors :

$$\mathbb{E} \left( \langle M^{n,f} \rangle_t \right) \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( \langle M^{n,f} \rangle_{t \wedge \zeta_N^n} \right) \leq \frac{t}{n} \mathbb{E} \left( \left( \bar{b} + \bar{d} \|f\|_\infty^2 \sup_{s \in [0, t]} \langle Z_s^n, 1 \rangle + \bar{d} \|f\|_\infty^2 \sup_{s \in [0, t]} \langle Z_s^n, 1 \rangle^2 \right) \right), \quad (3.1.33)$$

qui est fini, par le Théorème 3.1.7. Alors  $\mathbb{E} \left( |M_t^{n,f}|^2 \right) < +\infty$  et  $M^{n,f}$  est une vraie martingale de carré intégrable et de crochet (3.1.30).  $\blacksquare$

## 3.2 Convergence vers la solution faible mesure d'une équation aux dérivées partielles dans l'asymptotique des grandes populations

Nous étudions la limite de la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , sous les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 3.2.1.** *On suppose que la suite de variables aléatoires  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  converge en loi dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$  vers une mesure  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  (éventuellement aléatoire). On suppose de plus que les conditions de moments suivantes sont satisfaites :  $\exists \eta \in ]0, 1[$ ,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( [\langle Z_0^n, 1 \rangle]^{2+\eta} \right) < +\infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0^n(dx, da) \right]^{1+\eta} \right) < +\infty.$$

Nous commençons par prouver la convergence de la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la solution faible mesure de l'équation aux dérivées partielles non linéaire (3.0.2)-(3.0.4) généralisant les équations de McKendrick-Von Foerster (3.0.5). Ceci prouve, par une méthode probabiliste, l'existence de solutions faibles mesures pour cette équation aux dérivées partielles. L'unicité de la solution faible est également établie.

### 3.2.1 Tension de la suite $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**Théorème 3.2.2.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 3.2.1, la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie à la Définition 3.1.2 est tendue sur  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{\epsilon}))$ . Les valeurs d'adhérence de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont des processus à valeurs mesures continus satisfaisant l'équation d'évolution (3.0.1).  $\square$*

*Démonstration.* Nous nous inspirons de la démonstration du Théorème 5.3 de Fournier et Méléard [49].

Nous commençons par établir la tension des lois de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  considérées comme des mesures de probabilité sur  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), v))$ , où  $\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  est muni de la topologie de la convergence vague. Pour ce faire, nous utilisons un critère établi par Roelly ([108], Théorème 2.1) Il est suffisant de prouver que pour toute fonction  $f : (x, a) \mapsto f(x, a)$  appartenant à un ensemble dense dans l'espace  $\mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  des applications continues de limite 0 lorsque  $|a| \rightarrow +\infty$ , la suite  $(Z^{n,f})_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $Z^{n,f} = \langle Z^n, f \rangle$  est tendue sur  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Nous allons choisir  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ , qui est dense dans  $\mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  (cf. Annexe A.2). Rappelons que la partie martingale  $M^{n,f}$  de  $Z^{n,f}$  a été définie en (3.1.29) et définissons la partie à variations finies de  $Z^{n,f}$  par :

$$\begin{aligned} V_t^{n,f} = Z_t^{n,f} - M_t^{n,f} = Z_0^{n,f} + \int_0^t \langle Z_s^n, v \nabla_a f \rangle ds + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [f(x, 0)b(x, a)(1 - p(x, a)) \\ + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x', 0)b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') - f(x, a)d(x, a, Z_s^n U(x, a))] Z_s^n(dx, da) ds. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Par les critères d'Aldous [2] et de Rebolledo [66], il est suffisant de montrer que :

1.  $\forall t \in \mathcal{T}$  dense dans  $\mathbb{R}_+$ , les lois de  $(\langle M^{n,f} \rangle_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(V_t^{n,f})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont tendues sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $\forall T \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists \delta > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left( |\langle M^{n,f} \rangle_{T_n} - \langle M^{n,f} \rangle_{S_n}| \geq \eta, T_n < S_n + \delta \right) \leq \varepsilon \quad (3.2.2)$$

$$\text{et : } \sup_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left( |V_{T_n}^{n,f} - V_{S_n}^{n,f}| \geq \eta, T_n < S_n + \delta \right) \leq \varepsilon \quad (3.2.3)$$

pour toute suite de couples de temps d'arrêt  $(S_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  (définie à la Définition 3.1.2) tels que  $S_n \leq T_n \leq T$ .

Pour démontrer le premier point il suffit de prouver que

$$\forall T > 0, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |\langle M^{n,f} \rangle_t| \right) < +\infty \text{ et } \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |V_t^{n,f}| \right) < +\infty.$$

En utilisant (3.1.30), on a :

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |\langle M^{n,f} \rangle_t| \right) \leq \|f\|_\infty^2 T \bar{b} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \frac{1}{n} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \right) \right) + \|f\|_\infty^2 T \bar{d} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \frac{1}{n} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \right) \right) \right) \\ + \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \frac{1}{n} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \right) \right), \end{aligned}$$



qui est fini par le Théorème 3.1.7 et l'Hypothèse 3.2.1. De même, à partir de (3.2.1) :

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |V_t^{n, f}| \right) &\leq (\bar{v}d \|\nabla_a f\|_\infty + \|f\|_\infty \bar{b} + \|f\|_\infty \bar{d}) T \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \right) \\ &+ \|f\|_\infty \bar{d} T \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \right) + \|\nabla_a f\|_\infty \bar{v} T \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t^n(dx, da) \right), \end{aligned}$$

qui est également fini grâce aux Hypothèses 3.2.1 et au Théorème 3.1.7.

Afin de prouver (3.2.3), on pose  $T \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$ , et on considère un couple de temps d'arrêt  $S_n$  and  $T_n$  tel que  $0 \leq S_n \leq T_n \leq T$  et  $T_n \leq S_n + \delta$ . En utilisant (3.1.30) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( |\langle M^{n, f} \rangle_{T_n} - \langle M^{n, f} \rangle_{S_n}| \right) &\leq \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \int_{S_n}^{T_n} \|f\|_\infty^2 (\bar{b}(1 + \bar{k}) + \bar{d}(1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle)) \langle Z_s^n, 1 \rangle ds \right) \\ &\leq \frac{C \|f\|_\infty^2 \delta}{n} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} (\langle Z_t^n, 1 \rangle + \langle Z_t^n, 1 \rangle^2) \right) \leq \frac{C(T)\delta}{n}, \end{aligned}$$

grâce aux Hypothèses 3.2.1 et au Théorème 3.1.7. On peut donc trouver  $\delta$  et  $n_0$  satisfaisant (3.2.2). De même, par (3.2.1) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( |V_{T_n}^{n, f} - V_{S_n}^{n, f}| \right) &\leq \delta \left[ (\bar{v}d \|\nabla_a f\|_\infty + \|f\|_\infty \bar{b} + \|f\|_\infty \bar{d}) \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \right) \right. \\ &\left. + \|f\|_\infty \bar{d} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \right) + \bar{v} \|\nabla_a f\|_\infty \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t^n(dx, da) \right) \right], \end{aligned}$$

et grâce aux Hypothèses 3.2.1 et au Théorème 3.1.7, le crochet du membre de droite est une constante ne dépendant que de  $T$ . Il existe donc  $\delta$  tel que (3.2.3) soit satisfait.

Remarquons que le choix particulier de  $f \equiv 1$  fournit la tension de la suite  $(\langle Z^n, 1 \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  par les mêmes raisonnements.

Par le théorème de Prohorov, il est possible d'extraire de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite convergente en loi dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), v))$ . Notons  $(Z^{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  cette sous-suite et  $Z$  un processus de loi la loi limite. Puisque nous avons également prouvé la tension de la suite  $(\langle Z^n, 1 \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , il est possible de choisir la suite extraite de sorte que  $(\langle Z^{\phi(n)}, 1 \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers  $\langle Z, 1 \rangle$  dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . Comme par construction :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})} \left| \langle Z_t^{\phi(n)}, f \rangle - \langle Z_{t-}^{\phi(n)}, f \rangle \right| \leq \frac{C \|f\|_\infty}{\phi(n)}, \quad \mathbb{P} - \text{presque sûrement}$$

le processus limite  $Z$  est presque sûrement continu. En utilisant le Théorème 3 de Méléard et Roelly [91], la sous-suite  $(Z^{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge alors également en loi dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ , où  $\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  est muni cette fois-ci de la topologie de la convergence étroite. En appliquant le Théorème de Prohorov à nouveau, on déduit que la séquence  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ .

Identifions maintenant la limite. Pour prouver que  $Z$  satisfait presque sûrement (3.0.1), nous allons montrer que presque sûrement, pour tout  $f : (x, a, t) \mapsto f_t(x, a)$  dans  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$  et

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la quantité suivante s'annule :

$$\begin{aligned} \Psi_t(Z) = & \langle Z_t, f_t \rangle - \langle Z_0, f_0 \rangle - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(x, a) + f(x, 0, s) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{X}} f(x', 0, s) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') - f(x, a, s) d(x, a, Z_s U(x, a)) \right] Z_s(dx, da) ds. \end{aligned}$$

Grâce au Théorème 3.1.8, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le processus  $M_t^{f, \phi(n)} = \Psi_t(Z^{\phi(n)})$  est une martingale de crochet (3.1.30). Pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , nous avons donc :

$$\mathbb{E} \left( |M_t^{f, \phi(n)}|^2 \right) \leq \mathbb{E} \left( |M_t^{f, \phi(n)}|^2 \right) = \mathbb{E} \left( \langle M^{f, \phi(n)} \rangle_t \right) \leq \frac{tC}{\phi(n)} \mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, t]} \left( \langle Z_s^{\phi(n)}, 1 \rangle + \langle Z_s^{\phi(n)}, 1 \rangle^2 \right) \right).$$

Comme  $\mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, t]} \left( \langle Z_s^{\phi(n)}, 1 \rangle + \langle Z_s^{\phi(n)}, 1 \rangle^2 \right) \right)$  est majoré uniformément en  $n$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( |M_t^{f, \phi(n)}| \right) = 0. \quad (3.2.4)$$

Pour montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s.,  $\Psi_t(Z) = 0$ , il nous suffit donc de prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( |M_t^{f, Z^{\phi(n)}}| \right) = \mathbb{E} (|\Psi_t(Z)|) \quad (3.2.5)$$

Nous savons que  $(Z^{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers  $Z$ . Comme  $Z$  est presque sûrement continu, et comme  $f$  est continue bornée à dérivées continues bornées,  $\Psi_t$  est continue et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_t(Z^{\phi(n)}) = \Psi_t(Z), \text{ en loi.}$$

On a :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ ,

$$|\Psi_t(z)| \leq C(t, f) \sup_{s \in [0, t]} \left( 1 + \int |a| z_s(dx, da) + \langle z_s, 1 \rangle^2 \right) =: \Phi_t(z).$$

Par les Hypothèses 3.2.1 et le Théorème 3.1.7, la suite  $(\Phi_t(Z^{\phi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est uniformément intégrable (cf. Prop. 2.2 p.494 de [44]). Donc  $(|\Psi_t(Z^{\phi(n)})|)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est aussi uniformément intégrable. Il est alors possible de prendre la limite sous l'espérance et de déduire (3.2.5), ce qui conclut la preuve. ■

Pour prouver la convergence de la suite entière  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , montrons qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Ceci nous conduit à étudier l'unicité de la solution de (3.0.1).

### 3.2.2 Existence et unicité de la solution de (3.0.1)

**Théorème 3.2.3.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 3.2.1 et pour une condition initiale  $\xi_0(\omega) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  (éventuellement aléatoire), les solutions de (3.0.1) sont indistinguables dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  : soient deux solutions  $(\xi_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\xi_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de (3.0.1) issues de  $\xi_0$ , alors,*

$$\mathbb{P} - p.s., \forall t \in \mathbb{R}_+, \xi_t^1(dx, da) = \xi_t^2(dx, da).$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que l'aléa des solutions de (3.0.1) provient uniquement de l'aléa qui peut exister pour la condition initiale.

L'existence de solutions à l'équation (3.0.1) est une conséquence du Théorème 3.2.2, puisque les valeurs d'adhérence de la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont solutions.

Les solutions de (3.0.1) sont toutes presque sûrement continues (au sens  $L^1$ -faible) et restent de masse finie en temps fini :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \langle \xi_t, 1 \rangle &= \langle \xi_0, 1 \rangle + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x, a) \xi_s(dx, da) ds - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} d(x, a, \xi_s U(x, a)) \xi_s(dx, da) ds \\ &\leq \langle \xi_0, 1 \rangle + \int_0^t \bar{b} \langle \xi_s, 1 \rangle ds \leq \langle \xi_0, 1 \rangle \exp(\bar{b}t) < +\infty \mathbb{P} - \text{p.s.} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Attachons nous maintenant au problème de l'unicité. Soit  $T > 0$  et soient deux solutions  $(\xi_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\xi_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de (3.0.1) obtenues avec la même condition initiale  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ . Ces solutions restent de masse finie sur  $\mathbb{R}_+$  et nous pouvons définir  $\mathbb{P}$ -presque sûrement :

$$A_T(\omega) := \sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t^1(\omega) + \xi_t^2(\omega), 1 \rangle < +\infty.$$

Soit  $\phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$  telle que  $\|\phi\|_\infty \leq 1$ . Pour  $t \in [0, T]$ , nous pouvons définir :

$$\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall s \in \mathbb{R}_+, f(x, a, s) = \phi(x, A_x(t, s, a)). \quad (3.2.7)$$

Par la Proposition 2.1.8, (2.1.8) est satisfaite et on obtient par (3.0.1) et (3.2.7) que pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \langle \xi_t^i, \phi \rangle &= \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, 0, a)) \xi_0^i(dx, da) + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [\phi(x, A_x(t, s, 0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A_{x'}(t, s, 0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') - \phi(x, A_x(t, s, a)) d(x, a, \xi_s^i U(x, a))] \xi_s^i(dx, da) ds \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$\mathbb{P}$ -presque sûrement, pour tout  $t \in [0, T]$ , on a alors :

$$\begin{aligned} |\langle \xi_t^1 - \xi_t^2, \phi \rangle| &\leq \int_0^t \left| \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, 0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) (\xi_s^1(dx, da) - \xi_s^2(dx, da)) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \left| \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A_{x'}(t, s, 0)) K(x, a, dx') b(x, a) p(x, a) (\xi_s^1(dx, da) - \xi_s^2(dx, da)) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \left| \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, a)) d(x, a, \xi_s^1 U(x, a)) (\xi_s^1(dx, da) - \xi_s^2(dx, da)) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \left| \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, a)) (d(x, a, \xi_s^1 U(x, a)) - d(x, a, \xi_s^2 U(x, a))) \xi_s^2(dx, da) \right| ds \\ &\leq [\bar{b} + \bar{d}(1 + A_T) + A_T L_d \bar{U}] \int_0^t \|\xi_s^1 - \xi_s^2\|_{TV} ds. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

En prenant le sup en  $\phi$  dans le membre de gauche, par l'Annexe A.6, et en remarquant que toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  est limite simple bornée d'une suite de fonctions de  $\mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  (Annexe A.2), on obtient :

$$\mathbb{P} - \text{p.s.}, \forall t \in [0, T], \|\xi_t^1 - \xi_t^2\|_{TV} \leq C(T) \int_0^t \|\xi_s^1 - \xi_s^2\|_{TV} ds,$$

par les Hypothèses 2.1.1, 2.1.10, et où  $C(T) = \bar{b} + \bar{d}(1 + A_T) + A_T L_d \bar{U}$ . Par le lemme de Gronwall, on en déduit  $\forall t \in [0, T], \|\xi_t^1 - \xi_t^2\|_{TV} = 0$ ,  $\mathbb{P} - \text{p.s.}$ .

Le temps  $T$  étant arbitraire, les mesures  $\xi_t^1$  et  $\xi_t^2$  coïncident  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.  $\blacksquare$

**Corollaire 3.2.4.** *Si les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10 et 3.2.1 sont satisfaites :*

- (i) *Pour toute condition initiale  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ , l'équation (3.0.1) admet une unique solution faible mesure  $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ .*
- (ii) *La suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})))^{\mathbb{N}}$  de la Définition 3.1.2 converge en loi vers l'unique solution faible mesure  $\xi$  de (3.0.1).*
- (iii) *Si  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  est une mesure déterministe, la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ , vers  $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  déterministe.  $\square$*

*Démonstration.* Pour le point (iii), lorsque  $\xi_0$  est déterministe, les valeurs d'adhérence de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , solutions de (3.0.1) avec condition initiale  $\xi_0$ , sont déterministes. Alors la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\xi$  dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ .  $\blacksquare$

### 3.2.3 Absolue Continuité des solutions de l'équation d'évolution (3.0.1)

Nous allons étudier dans cette section des critères d'absolue continuité pour les marginales en temps  $\xi_t(dx, da) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  de la solution de (3.0.1). Les densités des mesures  $\xi_t(dx, da) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ , lorsqu'elles existent, correspondent à la notion de *densité de nombre*, qui décrit la distribution des traits et des âges d'une population avec un "continuum" d'individus.

Dans le cas d'un âge scalaire, les conditions impliquant l'absolue continuité des mesures  $\xi_t(dx, da)$  sont peu restrictives (Proposition 3.2.6). En revanche, dans le cas où plusieurs âges sont pris en compte, il est intéressant de remarquer que la densité de nombre ne peut pas être définie. Il est alors néanmoins possible d'obtenir des densités pour les marginales en  $x$  de  $\xi_t(dx, da)$  par rapport à la mesure  $P(dx)$ .

Dans toute cette section, nous allons considérer une condition initiale  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  déterministe. Par un calcul similaire à (3.2.6), nous avons :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \langle \xi_t, 1 \rangle \leq \langle \xi_0, 1 \rangle \exp(\bar{b}t) < +\infty. \quad (3.2.10)$$

#### 3.2.3.1 Un premier résultat d'absolue continuité par rapport aux variables de traits

Nous commençons par montrer un résultat simple d'absolue continuité pour la marginale sur  $\mathcal{X}$  de  $\xi_t(dx, da) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ , obtenu en nous inspirant de Fournier et Méléard [49]. D'une part, ce résultat sera utile pour prouver l'absolue continuité de  $\xi_t(dx, da) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  par rapport à la mesure  $P(dx) \otimes da$  à la Section 3.2.3.2. D'autre part, il peut s'interpréter, d'un point de vue biologique, comme un résultat de persistance de la variabilité phénotypique pour des temps finis : il n'y a pas concentration de la masse de  $\xi_t$  sur certains traits particuliers de  $\mathcal{X}$ .

**Proposition 3.2.5.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10 et sous l'hypothèse que la marginale en  $x$  de  $\xi_0(dx, da) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  soit absolument continue par rapport à la mesure de référence  $P(dx)$  sur  $\mathcal{X}$ , la marginale en  $x$  de la mesure  $\xi_t(dx, da)$  admet, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , une densité  $\tilde{n}_t$  par rapport à  $P(dx)$ .*

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  et soit  $B$  un Borélien  $P(dx)$ -négligeable de  $\mathcal{X}$ . En appliquant (3.0.1) à  $f(x, a, t) = \mathbf{1}_B(x)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_B(x) \xi_t(dx, da) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_B(x) \xi_0(dx, da) + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [\mathbf{1}_B(x) b(x, a)(1 - p(x, a)) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_B(x') b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') - \mathbf{1}_B(x) d(x, a, \xi_s U(x, a))] \xi_s(dx, da) ds \\ &= \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_B(x) [b(x, a)(1 - p(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))] \xi_s(dx, da) ds \leq \bar{b} \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_B(x) \xi_s(dx, da) ds. \end{aligned}$$

La seconde égalité étant obtenue par nullité des intégrales de  $\mathbf{1}_B$  par rapport à  $\xi_0$  et  $k(x, a, x')P(dx')$ . Par le lemme de Gronwall, comme  $\sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t, \mathbf{1} \rangle < +\infty$ ,

$$\forall t \geq 0, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_B(x) \xi_t(dx, da) = 0.$$

Le théorème de Radon-Nikodym conclut alors la preuve. ■

### 3.2.3.2 Un résultat d'absolue continuité dans le cas d'un âge scalaire

Nous prouvons maintenant un résultat d'absolue continuité des mesures  $\xi_t(dx, da)$  par rapport à la mesure de référence  $P(dx) \otimes da$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  dans le cas d'un âge scalaire ( $d = 1$ ) et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . La dimension 1 pour la variable d'âge est nécessaire pour obtenir une densité en traits et en âge. Nous allons utiliser des bijections entre l'espace des temps et l'espace des âges. Ce point sera expliqué plus précisément à la Remarque 3.2.8.

**Proposition 3.2.6.** *On se place dans le cas  $d = 1$ . Sous les hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10 et sous l'hypothèse que  $\xi_0(dx, da) \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  admette une densité  $n_0(x, a)$  par rapport à la mesure de référence  $P(dx) \otimes da$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ , les marginales en temps  $\xi_t(dx, da)$  admettent, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , des densités  $n_t(x, a)$  par rapport à la mesure  $P(dx) \otimes da$  :*

$$\forall f \in \mathcal{B}_b(\tilde{\mathcal{X}}), \langle \xi_t, f \rangle = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x, a) n_t(x, a) P(dx) da.$$

*Démonstration.* Il n'est pas possible de généraliser directement la preuve de la Proposition 3.2.5, car l'équation (3.0.1) ne s'applique que pour des fonctions test dérivables par rapport aux variables d'âges, ce qui exclut les indicatrices d'ensembles Boréliens négligeables quelconques de  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^d$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour une fonction continue positive  $\phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ , nous considérons la fonction définie par  $\forall s \in \mathbb{R}_+, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, f(x, a, s) = \phi(x, A_x(t, s, a))$ , où  $A_x$  a été défini à la Proposition 2.1.5. Pour ce choix :

$$\begin{aligned} \langle \xi_t, \phi \rangle &\leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, 0, a)) \xi_0(dx, da) + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, 0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) \xi_s(dx, da) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A_{x'}(t, s, 0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \xi_s(dx, da) ds \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

car  $\phi$  est positive.

Considérons le terme :

$$\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, 0, a)) \xi_0(dx, da) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, 0, a)) n_0(x, a) P(dx) da. \quad (3.2.12)$$

Par le Point (iii) de la Proposition 2.1.5, l'application  $a \mapsto A_x(t, 0, a)$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[A_x(t, 0, 0), A_\infty[$  où  $A_\infty = \lim_{a \rightarrow +\infty} A_x(t, 0, a)$ . Notons  $A_x^{-1}(t, \alpha)$  le difféomorphisme inverse et  $JA_x^{-1}(t, \alpha)$  sa matrice Jacobienne. En utilisant le théorème de Fubini (l'intégrant est mesurable positif) et en réalisant le changement de variable associé à  $a \mapsto A_x(t, 0, a)$  :

$$\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, 0, a)) n_0(x, a) P(dx) da = \int_{\mathcal{X}} \int_{A_x(t, 0, 0)}^{A_\infty} \phi(x, \alpha) n_0(x, A_x^{-1}(t, \alpha)) |JA_x^{-1}(t, \alpha)| d\alpha P(dx). \quad (3.2.13)$$

Pour le terme de naissance avec mutation, on utilise le théorème de Fubini (l'intégrant est mesurable positif) :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A_{x'}(t, s, 0)) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') \xi_s(dx, da) ds \\ &= \int_{\mathcal{X}} \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x', A_{x'}(t, s, 0)) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') \xi_s(dx, da) ds P(dx'). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Par le Point (iv) de la Proposition 2.1.5, l'application  $s \mapsto A_{x'}(t, s, 0)$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[0, t]$  dans  $[0, A_{x'}(t, 0, 0)]$ . Notons  $\widetilde{JA_{x'}^{-1}}(\alpha)$  le difféomorphisme inverse de matrice Jacobienne  $\widetilde{JA_{x'}^{-1}}(\alpha)$ . Le terme de droite de (3.2.14) se réécrit alors, après le changement de variable :

$$\int_{\mathcal{X}} \int_0^{A_{x'}(t, 0, 0)} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x', \alpha) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') \xi_{\widetilde{A_{x'}^{-1}}(\alpha)}(dx, da) |\widetilde{JA_{x'}^{-1}}(\alpha)| d\alpha P(dx'). \quad (3.2.15)$$

Pour le terme de naissance sans mutation, remarquons que pour tout  $s \in [0, t]$  :

$$\xi_s(dx, da) = \widetilde{\xi}_s(dx) q_s(x, da),$$

où  $\widetilde{\xi}_s(dx)$  est la marginale en  $x$  de  $\xi_s(dx, da)$  et où  $q_s(x, da)$  est une version de la mesure conditionnelle de  $\xi_s(dx, da)$  sachant que la variable de trait est égale à  $x$ . Par la Proposition 3.2.5,  $\widetilde{\xi}_s(dx)$  est absolument continue par rapport à  $P(dx)$  avec pour densité  $\widetilde{n}_s(x)$ . En appliquant le Théorème de Fubini (intégrant mesurable positif) et en réalisant le changement de variable associé au  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $s \mapsto A_x(t, s, 0)$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, 0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) \xi_s(dx, da) ds \\ &= \int_{\mathcal{X}} \int_0^{A_x(t, 0, 0)} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x, \alpha) b(x, a) (1 - p(x, a)) |\widetilde{JA_x^{-1}}(\alpha)| q_{\widetilde{A_x^{-1}}(\alpha)}(x, da) \widetilde{n}_{\widetilde{A_x^{-1}}(\alpha)}(x) d\alpha P(dx). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

On déduit de (3.2.13), (3.2.15) et (3.2.16) que :

$$0 \leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, a) \xi_t(dx, da) \leq \int_{\mathcal{X}} \int_0^{+\infty} \phi(x, \alpha) H(x, \alpha, t) d\alpha P(dx), \quad (3.2.17)$$

où :

$$\begin{aligned} H(x, \alpha, t) &= \mathbf{1}_{A_x(t, 0, 0) \leq \alpha < A_\infty} n_0(x, A_x^{-1}(t, \alpha)) |JA_x^{-1}(t, \alpha)| \\ &+ \mathbf{1}_{\alpha \leq A_x(t, 0, 0)} \left[ |\widetilde{JA_x^{-1}}(\alpha)| \widetilde{n}_{\widetilde{A_x^{-1}}(\alpha)}(x) \int_{\mathbb{R}_+} b(x, a) (1 - p(x, a)) q_{\widetilde{A_x^{-1}}(\alpha)}(x, da) \right. \\ &\left. + |\widetilde{JA_x^{-1}}(\alpha)| \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x', a) p(x', a) k(x', a, x) \xi_{\widetilde{A_x^{-1}}(\alpha)}(dx', da) \right] \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

La fonction  $H$  est positive. Comme le membre de droite de (3.2.17) est égal au membre de droite de (3.2.11), qui est fini, on en déduit que  $H$  est intégrable. Par densité de  $\mathcal{C}_K^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  dans  $L^\infty(\tilde{\mathcal{X}}, \xi_t)$  l'ensemble des fonction mesurables bornées  $\xi_t$ -presque partout (cf. Rudin [110], p. 69,  $\xi_t$  étant une mesure finie), on déduit de (3.2.17) que la mesure  $\xi_t(dx, da)$ , dominée par une mesure absolument continue par rapport à la mesure  $P(dx) \otimes da$  de densité (3.2.18), est absolument continue par rapport à  $P(dx) \otimes da$ .  $\blacksquare$

**Remarque 3.2.7.** Dans le cas où  $v \equiv 1$ , les calculs de la démonstration de la Proposition 3.2.6 sont faciles et nous permettent d'avoir une bonne compréhension des phénomènes en jeu.

Concernant le terme (3.2.12), l'application  $a \mapsto A_x(t, 0, a) = a + t$  (relative au vieillissement des individus présents au temps 0) définit bien un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[t, +\infty[$  de difféomorphisme inverse  $A_x^{-1}(t, \alpha) = \alpha - t$ .

Pour le terme (3.2.14), l'application  $s \mapsto A_{x'}(t, s, 0) = t - s$  (qui donne l'âge des à  $t$  des individus (mutants) nés après le temps 0) définit bien un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[0, t]$  dans  $[0, t]$ , de difféomorphisme inverse :  $A_{x'}^{-1}(\alpha) = t - \alpha$ . Nous avons la même interprétation pour le terme (3.2.16).  $\square$

**Remarque 3.2.8.** Le premier terme dans le membre de droite de l'équation (3.2.11) correspond aux individus présents au temps 0. Les deux derniers termes sont les contributions des individus nés après le temps 0. Ces individus sont nés avec un âge égal à 0 et croissant en fonction de la variable scalaire  $t$ . Dans le cas  $d > 1$ , l'application  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto A_x(t, 0, 0) \in \mathbb{R}_+^d$  ne peut pas être bijective et à l'instant  $t$ , les âges des individus de trait  $x$  nés après  $s = 0$  appartiennent à l'ensemble

$$\{A_x(t, s, 0) \in \mathbb{R}_+^d, s \in [0, t]\},$$

qui est une variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}_+^d$ . Il n'est alors pas possible d'avoir une densité par rapport à la mesure de référence  $P(dx) \otimes da$ .  $\square$

### 3.2.4 Forme classique de l'équation aux dérivées partielles (3.0.1)

L'équation d'évolution (3.0.1) peut s'exprimer comme la version faible mesure d'une équation aux dérivées partielles de type McKendrick-Von Foerster.

**Proposition 3.2.9.** On considère le cas  $d = 1$  et on travaille sous les hypothèses de la Proposition 3.2.6 de sorte que la solution faible fonction  $(x, a, t) \mapsto n(x, a, t) = n_t(x, a)$  de (3.0.1) soit bien définie. On suppose également que  $(x, a, t) \mapsto n(x, a, t)$  est de classe  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$  et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} n(x, a, t) P(dx) da = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \frac{\partial n}{\partial t}(x, a, t) P(dx) da.$$

Alors, la fonction  $(x, a, t) \mapsto n(x, a, t)$  est la solution du système (3.0.2, 3.0.3, 3.0.4).  $\square$

*Démonstration.* Si l'on remplace  $\xi_s(dx, da)$  dans (3.0.1) par  $n(x, a, s)P(dx) da$  et que l'on différencie par rapport au temps, on obtient :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x, a) n(x, a, t) P(dx) da &= \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [v(x, a) \nabla_a (f(x, a)) + f(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} f(x', 0) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx')] \\ &- f(x, a) d \left( x, a, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) n(y, \alpha, t) P(dy) d\alpha \right) \Big] n(x, a, t) P(dx) da. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Considérons tout d'abord des fonctions test  $f \in \mathcal{C}_{b,K}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$  positives bornées à support compact dans  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^*$ . Ce dernier point implique en particulier que  $\forall x \in \mathcal{X}, f(x, 0) = 0$ . Le théorème de Fubini et une intégration par partie pour le terme de vieillissement donnent :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathcal{X}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \nabla_a (f(x, a)) v(x, a) n(x, a, t) da &= [f(x, a) v(x, a) n(x, a, t)]_{a=0}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}_+} f(x, a) \nabla_a (v(x, a) n(x, a, t)) da \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} f(x, a) \nabla_a (v(x, a) n(x, a, t)) da, \end{aligned}$$

car  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(x, a) = 0$ . Ainsi :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} n(x, a, t) + \nabla_a (v(x, a)n(x, a, t)) \right] f(x, a) P(dx) da \\ &= - \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x, a) d \left( x, a, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) n(y, \alpha, t) P(dy) d\alpha \right) n(x, a, t) dx da. \end{aligned}$$

En utilisant la densité de  $\mathcal{C}_K^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  dans  $L^\infty(\tilde{\mathcal{X}}, n(x, a, t) dx da)$ , en identifiant les intégrants, et par la continuité en temps de la solution  $(x, a, t) \mapsto n(x, a, t)$ , on obtient  $P(dx) \otimes da$ -presque partout sur  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^*$ , et  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, a, t) + \nabla_a (v(x, a)n(x, a, t)) = -d \left( x, a, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) n(y, \alpha, t) P(dy) d\alpha \right) n(x, a, t). \quad (3.2.20)$$

Considérons maintenant des fonctions test  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$  de support quelconque et telles que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(x, a) = 0$ . En intégrant par parties le terme de vieillissement dans (3.2.19) :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} n(x, a, t) + \nabla_a (v(x, a)n(x, a, t)) \right] f(x, a) P(dx) da = - \int_{\mathcal{X}} f(x, 0) v(x, 0) n(x, 0, t) P(dx) \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ f(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} f(x', 0) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') \right. \\ &\left. - f(x, a) d \left( x, a, \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) n(y, \alpha, t) P(dy) d\alpha \right) \right] n(x, a, t) P(dx) da. \end{aligned}$$

L'équation (3.2.20) nous permet de simplifier l'expression précédente :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f(x, 0) v(x, 0) n(x, 0, t) P(dx) &= \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) n(x, a, t) P(dx) da \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} f(x', 0) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') n(x, a, t) P(dx) da. \end{aligned}$$

Dans le terme :

$$\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} f(x', 0) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') n(x, a, t) P(dx) da,$$

On peut utiliser le Théorème de Fubini pour échanger les intégrales en  $x$  et  $x'$ . En changeant les notations  $x \leftrightarrow x'$ , on a :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f(x, 0) v(x, 0) n(x, 0, t) P(dx) &= \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) n(x, a, t) P(dx) da \\ &+ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x, 0) \int_{\mathcal{X}} b(x', a) p(x', a) k(x', a, x) n(x', a, t) P(dx') da P(dx). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

L'identification des intégrants de (3.2.21) nous fournit la condition aux bords (3.0.3). ■





## Chapitre 4

# Théorème Central Limite pour l'approximation *grande population* d'un système de particules structuré en traits et en âges

Ici,  $\mathcal{X}$  est un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^{d_x}$  ( $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{d_x} \times \mathbb{R}_+^d$ ). Nous établissons un théorème central limite associé à la convergence obtenue à la Section 3.2. Ce résultat nous fournit une vitesse de convergence de la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la solution de l'Equation (3.0.1). Nous pourrions également en déduire des intervalles de confiance ainsi qu'un résultat sur le comportement en temps grand de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans le cas particulier des populations logistiques structurées par l'âge physique (Section 4.6).

**Définition 4.0.10.** Soit  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des processus microscopiques de la Définition 3.1.2 et soit  $\xi$  la solution de (3.0.1). Soit  $T > 0$ . La séquence des processus de fluctuations dans  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_S(\tilde{\mathcal{X}}))$  est définie par :

$$\forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*, \eta_t^n(dx, da) = \sqrt{n} (Z_t^n(dx, da) - \xi_t(dx, da)). \quad (4.0.1)$$

L'espace  $\mathcal{M}_S(\tilde{\mathcal{X}})$  des mesures signées est non métrisable si on le munit de la topologie de la convergence étroite. Plutôt que de considérer  $\eta^n$  comme processus à valeurs dans  $\mathcal{M}_S(\mathcal{X})$ , nous allons le regarder comme processus à valeurs dans un espace de distributions bien choisi. Bien que le support de  $\eta^n$  soit inclus dans  $\tilde{\mathcal{X}}$ , nous allons considérer des distributions sur  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$ , et il est aussi possible de prolonger  $b, p, d, v$  en des fonctions continues sur  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$ . Nous nous inspirons des travaux de Métivier [94] et Méléard [87] pour relier l'espace de distributions introduit à des espaces de Hilbert et nous utilisons un critère de tension pour les processus à valeurs dans un espace de Hilbert. Puis nous identifions la limite de  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . La principale difficulté réside dans le fait que les masses de  $Z_t^n$  ne sont pas *a priori* bornées. Les estimées de moments que nous allons obtenir concerneront les fluctuations  $\eta^n$  localisées par  $\zeta_N^n$  (introduit en (3.1.6)) et dépendent de  $N$ . Nous nous en sortons en obtenant pour la partie martingale de  $\eta^n$  des estimées non localisées.

Remarquons que Oelschläger [102] a établi un théorème central limite similaire, mais pour des populations structurées par un âge scalaire, et avec des taux de naissance et de mort bornés (excluant le modèle logistique), et le problème mentionné précédemment ne se pose alors pas.

## 4.1 Préliminaires fonctionnels

En suivant les idées développées dans [87], nous introduisons les espace suivants (cf. Adams [1] pour une présentation) : (Rappelons que  $d$  est la dimension de l'espace des âges et  $d_x$  la dimension de l'espace des traits)

**Définition 4.1.1.** Soit  $k = (k_1, \dots, k_{d+d_x}) \in \mathbb{N}^{d+d_x}$ . On note  $|k| = \sum_{i=1}^{d+d_x} k_i$  et :

$$\forall f \in \mathcal{C}^k(\tilde{\mathcal{X}}), \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, D^k f(x, a) = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{d_x}^{k_{d_x}} \partial a_1^{k_{d_x+1}} \dots \partial a_d^{k_{d+d_x}}}(x, a). \quad (4.1.1)$$

Pour  $\beta \in \mathbb{N}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , nous introduisons  $W_0^{\beta, \gamma}$  l'adhérence des fonctions  $f$  infiniment différentiables à supports compacts inclus dans  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$  pour la norme  $\|\cdot\|_{W_0^{\beta, \gamma}}$  définie par :

$$\|f\|_{W_0^{\beta, \gamma}}^2 := \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \sum_{|k| \leq \beta} \frac{|D^k f(x, a)|^2}{1 + |a|^{2\gamma}} dx da, \quad (4.1.2)$$

$P(dx) = dx$  étant ici la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{X}$  borné et étant la mesure apparaissant dans l'Hypothèse 2.1.1. Les espaces  $W_0^{\beta, \gamma}$  sont des espaces de Hilbert. Nous notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_0^{\beta, \gamma}}$  les produits scalaires associés et  $W_0^{-\beta, \gamma}$  leurs espaces duals.

Nous introduisons également l'espace  $C^{\beta, \gamma}$  des fonctions  $f$  de classe  $\beta$  telles que :

$$\forall |k| \leq \beta, \lim_{|a| \rightarrow +\infty} \frac{|D^k f(x, a)|}{1 + |a|^\gamma} = 0$$

lorsque  $|a| \rightarrow +\infty$  ou que  $x$  tend vers le bord de  $\mathcal{X}$ , et nous le munissons de la norme :

$$\|f\|_{C^{\beta, \gamma}} = \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D_a^k f(x, a)|}{1 + |a|^\gamma}. \quad (4.1.3)$$

Les espaces  $C^{\beta, \gamma}$  sont des espaces de Banach. Nous noterons  $C^{-\beta, \gamma}$  les espaces duals.

Nous rappelons maintenant les injections continues reliant les espaces introduits. Notons :

$$D := \left\lfloor \frac{d + d_x}{2} \right\rfloor + 1, \quad (4.1.4)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  dénote la partie entière.

**Proposition 4.1.2.** Nous utiliserons dans ce chapitre les injections continues suivantes, où  $q' \in \mathbb{N}$  sera précisé dans les hypothèses 4.2.1 (Point 3) :

$$W_0^{2D+1, 1} \hookrightarrow C^{D+1, 1} \hookrightarrow C^{D, q'+1} \hookrightarrow W_0^{D, D+q'+1} \hookrightarrow C^{0, D+q'+1} \quad (4.1.5)$$

$$C^{-0, D+q'+1} \hookrightarrow W_0^{-D, D+q'+1} \hookrightarrow C^{-D, q'+1} \hookrightarrow C^{-(D+1), 1} \hookrightarrow W_0^{-(2D+1), 1}. \quad (4.1.6)$$

L'espace  $C^{-(D+1), 1}$  est l'espace dans lequel nous allons considérer  $\eta^n$ . Afin de travailler dans un cadre hilbertien, nous encadrons cet espace de  $W_0^{-(2D+1), 1}$  (dans lequel le critère de tension est prouvé) et de  $W_0^{-D, D+q'+1}$  (sous-espace de  $C^{-(D+1), 1}$  dans lequel la norme de la partie martingale de  $\eta^n$  sera contrôlée). Nous verrons que l'image par l'opérateur différentiel  $v \nabla_a$  de  $C^{(D+1), 1}$  est incluse dans  $C^{D, q'+1}$ , et aussi serons nous amenés à rechercher des estimées dans cet espace. Nous aurons besoin du plongement  $C^{-0, D+q'+1} \hookrightarrow W_0^{-D, D+q'+1}$  afin de contrôler la norme de certains opérateurs de  $W_0^{-D, D+q'+1}$  (cf. Proposition 4.1.4).

*Preuve de la Proposition 4.1.2.* La démonstration des injections  $W_0^{\beta+D,\gamma} \hookrightarrow C^{\beta,\gamma}$ , pour  $\beta \in \mathbb{N}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , est une adaptation aux espaces de Sobolev pondérés du Théorème 5.4 de [1]. Les autres injections de (4.1.5) sont conséquences des inégalités suivantes :  $\forall f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{D,q'+1}} &= \sum_{|k| \leq D} \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D^k f(x,a)|}{1 + |a|^{q'+1}} \\ &\leq \sum_{|k| \leq D} \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D^k f(x,a)|}{1 + |a|} \frac{1 + |a|}{1 + |a|^{q'+1}} \leq C \|f\|_{C^{D+1,1}}. \\ \|f\|_{W_0^{D,D+q'+1}} &= \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \sum_{|k| \leq D} \frac{|D^k f(x,a)|^2}{1 + |a|^{2(D+q'+1)}} dx da \\ &\leq \|f\|_{C^{D,q'+1}} \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{1 + |a|^{2q'+2}}{1 + |a|^{2(D+q'+1)}} dx da < C \|f\|_{C^{D,q'+1}}, \end{aligned}$$

puisque  $2D > d$  implique que :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 + |a|^{2q'+2}}{1 + |a|^{2(D+q'+1)}} da < +\infty.$$

Les injections de (4.1.6) s'en déduisent par dualité. ■

**Proposition 4.1.3. Identité de Parseval**

Soient  $\beta \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \geq 0$  et  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $W_0^{\beta,\gamma}$ . Par l'identité de Parseval :  $\forall f \in W_0^{\beta,\gamma}$ ,  $\forall A \in W_0^{-\beta,\gamma}$ ,

$$\|f\|_{W_0^{\beta,\gamma}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \langle f, \varphi_k \rangle_{W_0^{\beta,\gamma}}^2}, \quad (4.1.7)$$

$$\|A\|_{W_0^{-\beta,\gamma}} = \sup_{\substack{g \in W_0^{\beta,\gamma}(\tilde{\mathcal{X}}) \\ \|g\|_{W_0^{\beta,\gamma}} > 0}} \frac{|A(g)|}{\|g\|_{W_0^{\beta,\gamma}}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |A(\varphi_k)|^2}, \quad (4.1.8)$$

où le membre de droite de (4.1.8) est la définition de la norme de Hilbert-Schmidt de  $A$ .

*Démonstration.* Cette proposition est prouvée au Lemme 6.52 [1]. ■

**Proposition 4.1.4.** Soient  $(x,a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}$  et  $\gamma \geq 0$ . L'application

$$\mathcal{D}_{(x,a)} : f \in W_0^{\beta+D,\gamma} \mapsto f(x,a) \in \mathbb{R},$$

est linéaire continue et :

$$\|\mathcal{D}_{(x,a)}\|_{W_0^{-\beta+D,\gamma}} \leq C(1 + |a|^\gamma). \quad (4.1.9)$$

*Démonstration.* Soit  $f \in W_0^{\beta+D,\gamma}$ . Par (4.1.5),  $f \in C^{\beta,\gamma}$ . On a :

$$|\mathcal{D}_{(x,a)}(f)| \leq (1 + |a|^\gamma) \|f\|_{C^{\beta,\gamma}} \leq C(1 + |a|^\gamma) \|f\|_{W_0^{\beta+D,\gamma}} \quad (4.1.10)$$

en utilisant l'injection continue  $W_0^{\beta+D,\gamma} \hookrightarrow C^{\beta,\gamma}$ . ■

## 4.2 Enoncé du Théorème Central Limite

**Hypothèse 4.2.1.** *Nous supposons que les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10 sont vérifiées.*

1. *La vitesse de vieillissement est telle que :  $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $v_i \in C^{D, q'}$ . Ceci implique que pour tous  $s, t \in [0, T]$ , l'application  $(x, a) \mapsto A_x(t, s, a)$  est dans  $C^D(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  (cf. [126], Chapitre 10). Nous supposons que ses dérivées partielles d'ordre  $1 \leq |k| \leq D$  sont bornées sur  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$ .*
2. *La suite de variables aléatoires  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  est telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_0^n \in \mathcal{M}_F^n(\tilde{\mathcal{X}})$  (défini en 1.2.21), et  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers une mesure  $\xi_0$  dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \epsilon)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.*
3.  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \|\eta_0^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \right) < +\infty$ ,
4.  $\exists \epsilon \in ]0, 1[$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} (\langle Z_t^n, 1 \rangle^{2+\epsilon}) < +\infty$ , et  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{2(D+q'+1)} Z_0^n(dx, da) \right]^2 \right) < +\infty$ .
5. *Les applications  $(x, a) \mapsto b(x, a)(1 - p(x, a))$  et  $(x, a) \mapsto b(x, a)p(x, a)k(x, a, x')$  (où  $x' \in \mathcal{X}$  est un paramètre) sont dans  $C^{D+1, 1}$  et :*

$$\sup_{x' \in \mathcal{X}} \|b(\cdot, \cdot)p(\cdot, \cdot)k(\cdot, \cdot, x')\|_{C^{D+1, 1}} < +\infty.$$

6.  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $U((x, a), \cdot)$  et  $U(\cdot, (x, a)) \in C^{D+1, 1}$  avec :

$$\sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \|U((x, a), (\cdot, \cdot))\|_{C^{D+1, 1}} < +\infty, \quad \text{et} \quad \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \|U((\cdot, \cdot), (x, a))\|_{C^{D+1, 1}} < +\infty,$$

7. *Le taux de mort  $(x, a, u) \mapsto d(x, a, u)$  est dans  $\mathcal{C}_b^{D+2}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}^{d_c}, \mathbb{R}_+)$ . Nous noterons respectivement  $d_a$  et  $d_u$  ses dérivées en  $a$  et  $u$  ( $d_c$  est le nombre d'interactions pris en compte). Nous supposons que :*
  - $d_u$  est Lipschitzienne. Nous notons  $L_{d_u}$  sa constante de Lipschitz :

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{d_c}, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, |d_u(x, a, u_1) - d_u(x, a, u_2)| \leq L_{d_u}|u_1 - u_2|. \quad (4.2.1)$$

- $\exists q \in \mathbb{N}$ ,  $\forall Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ ,

$$\sum_{|k| \leq D+1} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \left( |D^k(d(x, a, ZU(x, a)))| + |D^k(d_u(x, a, ZU(x, a)))| \right) \leq C(1 + \langle Z, 1 \rangle^q). \quad (4.2.2)$$

Notons que les Points 3 et 4 ne sont pas redondants. Le Point 4 assure l'application du Corollaire 3.2.4.

Le Point 1 est satisfait pour des vitesses de vieillissement égales à 1 (dans ce cas  $A_x(t, s, a) = a + (t - s)$ ), et on peut en fait prendre  $q' = 0$  dans les preuves.

Dans le cas général, le fait que les dérivées de  $(x, a) \mapsto A_x(t, s, a)$  soient bornées en  $x \in \mathcal{X}$  est une conséquence de la relative compacité de  $\mathcal{X}$ .

**Exemple 4.2.2.** *Population logistique structurée par un âge scalaire :*

*Cet exemple correspond au choix d'une population structurée uniquement par un âge scalaire (pas de trait), pour laquelle :*

1. *La vitesse de vieillissement est de 1,*
2. *le taux de naissance est de la forme  $b(a)$  ( $b \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ),*
3. *le taux de mort est de la forme  $d(a) + \eta \langle Z, 1 \rangle$  ( $d \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  est le taux de mort naturelle,  $\eta > 0$  mesure l'intensité des interactions et  $Z \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$  représente la population).*

Dans ce cas,  $D = 1$ ,  $q' = 0$ . Le Point 5 est satisfait dès que  $b \in C_b^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . Le taux de compétition associé aux populations logistiques est  $U \equiv 1$  et le Point 6 est satisfait, car  $C^{2,1}$  contient la fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}^d$ . Le Point 7 est satisfait dès que  $d \in C_b^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ , et l'inégalité (4.2.2) est alors satisfaite avec  $q = 1$ .  $\square$

Le résultat de cette Section est le suivant :

**Théorème 4.2.3.** *Sous les Hypothèses 4.2.1,  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi dans  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1),1})$  ( $W_0^{-(2D+1),1}$  étant muni de sa structure hilbertienne), vers la solution de l'équation suivante :*

$$\forall t \in [0, T], \eta_t = \eta_0 + \int_0^t \Upsilon_s^* \eta_s ds + \int_0^t J^* \eta_s ds + W_t, \quad (4.2.3)$$

dont les solutions, sous le Point 3 des Hypothèses 4.2.1, sont dans  $C^{-(D+1),1}$ .  $W$  est un processus Gaussien de  $\mathcal{C}([0, T], C^{-(D+1),1})$  continu, centré, de carré intégrable et de variation quadratique :  $\forall t \in [0, T], \forall f \in C^{D+1,1}$ ,

$$\begin{aligned} \langle W(f) \rangle_t &= \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [f^2(x, 0)b(x, a)(1 - p(x, a)) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} f^2(x', 0)b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') + f^2(x, a)d(x, a, \xi_s U(x, a))] \xi_s(dx, da) ds, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

où  $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$  est la solution de (3.0.1).  $\Upsilon_t$  est l'opérateur de  $W_0^{-(2D+1),1}$  défini par :  $\forall t \in [0, T], \forall f \in W_0^{2D+1,1}, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,

$$\begin{aligned} \Upsilon_t(f)(x, a) &= f(x, 0)b(x, a)(1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} f(x', 0)b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') \\ &- f(x, a)d(x, a, \xi_t U(x, a)) - \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(y, \alpha)d_u(y, \alpha, \xi_t U(y, \alpha))U(y, \alpha, x, a)\xi_t(dy, d\alpha). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$J$  est l'opérateur défini par :  $\forall t \in [0, T], \forall f \in W_0^{2D+1,1} (\hookrightarrow C^{D+1,1}), \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,

$$Jf(x, a) = v(x, a)\nabla_a f(x, a). \quad (4.2.6)$$

Ce théorème nous indique que la vitesse de convergence du processus microscopique  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la solution de l'équation (3.0.1) est en  $\sqrt{n}$ . Nous obtenons une équation d'évolution limite pour le processus de fluctuations dont nous verrons des applications à la Section 4.6.

La démonstration du Théorème 4.2.3 fait l'objet de ce chapitre. Nous commençons par décrire le processus de fluctuations à la Section 4.3, et montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\eta^n$  est à valeurs dans  $W_0^{-D, D+q'+1}$ . Nous donnons la décomposition de Doob du processus de fluctuations, et introduisons le crochet et la trace du processus de Meyer associé à la semi-martingale. A la Section 4.4, nous étudions la tension de la suite  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $W_0^{-(2D+1),1}$  en nous inspirant de [94] et [87]. Puis, nous montrons que les valeurs d'adhérence satisfont une équation d'évolution qui les caractérise (Section 4.5) et implique qu'elles appartiennent à  $C^{-(D+1),1}$ . Nous en déduisons l'unicité de la valeur d'adhérence et la convergence de la suite  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

### 4.3 Processus des fluctuations

Nous commençons par montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le processus  $(\eta_t^n)_{t \in [0, T]}$  est à valeurs dans  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-D, D+q'+1})$ . Il pourra par (4.1.6) aussi être considéré comme un processus à valeurs dans  $C^{-D, q'+1}, C^{-(D+1),1}$  ou  $W_0^{-(2D+1),1}$ .

**Lemme 4.3.1.** *Sous les Points 3 et 4 des Hypothèses 4.2.1,*

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \right) \leq C(n). \quad (4.3.1)$$

*Démonstration.* Soit  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $W_0^{D, D+q'+1}$ . Nous avons :

$$\|\eta_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 = n \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (\langle Z_t^n, \varphi_k \rangle - \langle \xi_t, \varphi_k \rangle)^2 \leq 2n \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (\langle Z_t^n, \varphi_k \rangle^2 + \langle \xi_t, \varphi_k \rangle^2)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 &\leq 2n \left( \langle Z_t^n, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, a) Z_t^n(dx, da) + \langle \xi_t, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, a) \xi_t(dx, da) \right) \\ &\leq 2n \left( \langle Z_t^n, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \|\mathcal{D}_{(x,a)}\|_{D, D+q'+1}^2 Z_t^n(dx, da) + \langle \xi_t, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \|\mathcal{D}_{(x,a)}\|_{D, D+q'+1}^2 \xi_t(dx, da) \right) \\ &\leq Cn \left( \langle Z_t^n, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|^{2(D+q'+1)}) Z_t^n(dx, da) + \langle \xi_t, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|^{2(D+q'+1)}) \xi_t(dx, da) \right). \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \right) &\leq Cn \sqrt{\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 \right)} \sqrt{\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|^{2(D+q'+1)}) Z_t^n(dx, da) \right]^2 \right)} \\ &\quad + Cn \sup_{t \in [0, T]} \left[ \langle \xi_t, 1 \rangle \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|^{2(D+q'+1)}) \xi_t(dx, da) \right]. \end{aligned}$$

On conclut par le Point 4 des Hypothèses 4.2.1 et le Théorème 3.1.7.  $\blacksquare$

Le Lemme 4.3.1 n'est qu'une première estimée. Son intérêt est de fixer  $W_0^{-D, D+q'+1}$  comme espace de référence. Nous allons l'affiner en établissant (Lemme 4.4.3) une estimation en norme  $\|\cdot\|_{W_0^{-(2D+1), 1}}$  ne dépendant plus de  $n$ . Nous pourrions alors montrer la tension de la suite  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Nous introduisons quelques notations. Pour  $t \in [0, T]$ , soit  $[f : (x, a, t) \mapsto f_t(x, a)] \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d \times [0, T]) : \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\langle \eta_t^n, f \rangle = \tilde{V}_t^n(f) + \tilde{M}_t^n(f), \quad (4.3.2)$$

où  $(\tilde{V}_t^n(f))_{t \in [0, T]}$  est le processus à variations finies défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^n(f) &= \langle \eta_0^n, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \left[ f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \right. \\ &\quad \left. - f_s(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] \eta_s^n(dx, da) ds - G_0^n(f, t) + G_1^n(t, \eta^n, f), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$G_0^n(f, t) = \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f_s(x, a) \sqrt{n} (d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))) \xi_s(dx, da) ds \quad (4.3.4)$$

$$G_1^n(t, \eta^n, f) = \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \left( v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right) \eta_s^n(dx, da) ds, \quad (4.3.5)$$

et où  $(\tilde{M}_t^n(f))_{t \in [0, T]}$  est la martingale donnée par :

$$\tilde{M}_t^n(f) = \sqrt{n} M_t^{n, f}, \quad (4.3.6)$$

avec  $(M_t^{n,f})_{t \in [0,T]}$  définie au Théorème 3.1.8. Par (3.1.30), le crochet de  $(\widetilde{M}_t^n(f))_{t \in [0,T]}$  est :

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{M}^n(f) \rangle_t &= \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} (f_s^2(x,0)b(x,a)(1-p(x,a)) \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}} f_s^2(x',0)b(x,a)p(x,a)K(x,a,dx') + f_s^2(x,a)d(x,a,Z_s^n U(x,a))) Z_s^n(dx,da) ds. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

On introduit également la *trace*  $\langle \widetilde{M}^n \rangle_t$  de  $\widetilde{M}_t^n$  vu comme opérateur de  $W_0^{-(2D+1),1}$  (cf. [93, 94]) et définie de sorte que  $(\|\widetilde{M}_t^n\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 - \langle \widetilde{M}^n \rangle_t)_{t \in [0,T]}$  soit une martingale locale. Soit  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $W_0^{2D+1,1}$ . Comme :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\|\widetilde{M}_t^n\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 = \sum_{k \geq 1} \widetilde{M}_t^n(\varphi_k)^2,$$

on en déduit par (4.3.7) que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{M}^n \rangle_t &= \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \left[ \left( \sum_{k \geq 1} \varphi_k^2(x,0) \right) b(x,a)(1-p(x,a)) + \int_{\mathcal{X}} \left( \sum_{k \geq 1} \varphi_k^2(x',0) \right) b(x,a)p(x,a)K(x,a,dx') \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{k \geq 1} \varphi_k^2(x,a) \right) d(x,a,Z_s^n U(x,a)) \right] Z_s^n(dx,da) ds. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Cette quantité est définie  $\mathbb{P}$ -presque sûrement par la Proposition 4.1.4 :  $\forall (x,a) \in \widetilde{\mathcal{X}}$ ,

$$\sum_{k \geq 1} \varphi_k^2(x,0) = \|\mathcal{D}_{(x,0)}\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \leq C \text{ et } \sum_{k \geq 1} \varphi_k^2(x,a) = \|\mathcal{D}_{(x,a)}\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \leq C(1+|a|),$$

par les Points 3 et 4 des Hypothèses 4.2.1 et par le Théorème 3.1.7.

Nous verrons au Lemme 4.4.5 que l'opérateur différentiel  $G_1^n(t, \eta, \cdot)$  n'est pas borné dans les espaces de Sobolev de la forme  $W_0^{-\beta, \gamma}$  pour  $\beta \in \mathbb{N}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ . Introduisons les fonctions test  $f : (x, a, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d \times [0, t] \mapsto f_s(x, a) = \phi(x, A_x(t, s, a)) \in \mathbb{R}$ , pour  $\phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d)$ ,  $t \in [0, T]$  et  $A_x$  défini en (2.1.3).

$$\begin{aligned} \langle \eta_t^n, \phi \rangle &= \langle \eta_0^n, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} [\phi(x, A_x(t, s, 0))b(x,a)(1-p(x,a)) \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A_{x'}(t, s, 0))b(x,a)p(x,a)K(x,a,dx') \\ &\quad - \phi(x, A_x(t, s, a))d(x,a,Z_s^n U(x,a))] \eta_s^n(dx,da) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, a))\sqrt{n} (d(x,a,Z_s^n U(x,a)) - d(x,a,\xi_s U(x,a))) \xi_s(dx,da) ds \\ &\quad + \widetilde{M}_t^n(f). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Enfin, nous serons confrontés au fait que la masse de  $Z^n$  n'est pas *a priori* bornée. Nous considérons pour cela :

$$N > \max \left( \sup_{t \in [0,T]} \langle \xi_t, 1 \rangle, \sup_{t \in [0,T]} \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} |a| \xi_t(dx,da) \right) \quad (4.3.10)$$

et les temps d'arrêt  $\zeta_N^n$  définis en (3.1.6).



**Lemme 4.3.2.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 3.2.1 et pour  $N$  défini en (4.3.10) :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) = 0. \quad (4.3.11)$$

*Démonstration.* Par le Corollaire 3.2.4, les suites

$$\left( (\langle Z_t^n, 1 \rangle)_{t \in [0, T]} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left( \left( \int_{\mathbb{R}_+^d} |a| Z_t^n(dx, da) \right)_{t \in [0, T]} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

convergent en probabilité dans  $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$  vers

$$(\langle \xi_t, 1 \rangle)_{t \in [0, T]} \quad \text{et} \quad \left( \int_{\mathbb{R}_+^d} |a| \xi_t(dx, da) \right)_{t \in [0, T]}.$$

Ces limites étant continues, la convergence est une convergence uniforme (cf. [7]). On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) &= \mathbb{P} \left( \exists t \in [0, T], \langle Z_t^n, 1 \rangle > N \text{ ou } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t^n(dx, da) > N \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} |\langle Z_t^n - \xi_t, 1 \rangle| > N - \sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t, 1 \rangle \right) \\ &+ \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{\mathbb{R}_+^d} |a| (Z_t^n - \xi_t)(dx, da) \right| > N - \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}_+^d} |a| \xi_t(dx, da) \right), \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

les termes  $N - \sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t, 1 \rangle$  et  $N - \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}_+^d} |a| \xi_t(dx, da)$  étant strictement positifs, le terme de droite de (4.3.12) tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  par la convergence en probabilité mentionnée au début de la preuve.  $\blacksquare$

## 4.4 Tension de la séquence des fluctuations

Nous allons prouver la tension de la suite  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vue comme une suite de  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1), 1})$ . Pour cela, nous allons utiliser un résultat de tension dû à Métivier [94]. Nous rappelons ce critère au Paragraphe 4.4.1 et montrons au Paragraphe 4.4.3 qu'il est satisfait.

### 4.4.1 Critère de relative compacité dans $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1), 1})$

Les Paragraphe 2.1.5 et Théorème 2.3.2 de Joffe et Métivier [66] nous fournissent un critère de tension pour les semi-martingales à valeurs dans un espace de Hilbert (voir aussi le Corollaire 1.5 et le Théorème 1.6 de Métivier [94]).

**Proposition 4.4.1.** *La suite  $(\mathcal{L}(\eta^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1), 1}))$  est relativement compacte si :*

$$1. \quad \forall t \in [0, T], \forall \phi \in W_0^{(2D+1), 1}, \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n > n_0,$$

$$\mathbb{P}(|\langle \eta_t^n, \phi \rangle| > K_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad (4.4.1)$$

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \rho > 0, \forall t \in [0, T], \exists \mathfrak{F} \text{ un sous-espace vectoriel de dimension finie de } W_0^{-(2D+1), 1},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \inf_{\nu \in \mathfrak{F}} \|\eta_t^n - \nu\|_{W_0^{-(2D+1), 1}} > \rho \right) \leq \varepsilon, \quad (4.4.2)$$

3.  $\forall \varepsilon > 0, \forall \varsigma > 0, \exists \delta > 0, \forall (S_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  suite de couples de temps d'arrêt tels que  $S_n < T_n \leq S_n + \delta, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left( \left\| \tilde{V}_{T_n}^n - \tilde{V}_{S_n}^n \right\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq \varsigma \right) \leq \varepsilon, \quad (4.4.3)$$

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left( \left| \langle \tilde{M}^n \rangle_{T_n} - \langle \tilde{M}^n \rangle_{S_n} \right| \geq \varsigma \right) \leq \varepsilon. \quad (4.4.4)$$

Pour montrer que le critère de tension de la Proposition 4.4.1 est satisfait, nous nous appuyons sur des estimées de moments pour  $\eta^n$  que nous établissons à la Section 4.4.2.

#### 4.4.2 Estimée préliminaire

**Proposition 4.4.2.** *Soit  $N$  donné par (4.3.10). Sous les Hypothèses 4.2.1 :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \right) < +\infty. \quad (4.4.5)$$

La fin de cette Section 4.4.2 est dédiée à la démonstration de la Proposition 4.4.2. Par l'injection continue  $C^{-(D+1),1} \hookrightarrow W_0^{-(2D+1),1}$ , il suffit d'établir (4.4.5) avec la norme  $\|\cdot\|_{C^{-(D+1),1}}$  au lieu de la norme  $\|\cdot\|_{W_0^{-(2D+1),1}}$ . Au Lemme 4.4.7, nous majorerons  $\|G_1^n(t, \eta_t^n, \cdot)\|_{C^{-(D+1),1}}$  par une expression faisant intervenir la norme  $\|\eta_t^n\|_{C^{-D, q'+1}}$ , et nous aurons aussi besoin d'une estimée analogue à (4.4.5) pour la norme  $\|\cdot\|_{C^{-D, q'+1}}$ . Ceci justifie la considération de  $(\beta, \gamma) \in \{(D+1, 1), (D, q'+1)\}$  dans le Lemme suivant.

**Lemme 4.4.3.** *Soit  $(\beta, \gamma) \in \{(D+1, 1), (D, q'+1)\}$ . Sous les Hypothèses 4.2.1 :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \right) < +\infty. \quad (4.4.6)$$

Ce Lemme est prouvé en fin de section. Nous commençons par établir des majorations pour les différents termes de (4.3.9).

**Lemme 4.4.4.** *Soit  $(\beta, \gamma) \in \{(D+1, 1), (D, q'+1)\}$ . On suppose les Hypothèses 4.2.1 satisfaites. Soient  $t \in [0, T], n \in \mathbb{N}^*, \phi \in C^{\beta, \gamma}$  et  $f : (x, a, s) \in \tilde{\mathcal{X}} \times [0, t] \mapsto f_s(x, a) = \phi(x, A_x(t, s, a)) \in \mathbb{R}$ . Alors :  $\mathbb{P}$ -presque sûrement,*

$$\|f_s\|_{C^{\beta, \gamma}} \leq C \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} \quad (4.4.7)$$

$$|\langle \eta_0^n, f_0 \rangle| \leq C \|\eta_0^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} \quad (4.4.8)$$

$$\left| \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \eta_s^n(dx, da) ds \right| \leq C \int_0^t \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} ds \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} \quad (4.4.9)$$

$$\left| \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \eta_s^n(dx, da) ds \right| \leq C \int_0^t \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} ds \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} \quad (4.4.10)$$

$$\left| \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} f_s(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \eta_s^n(dx, da) ds \right| \leq C \int_0^t \left( 1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle^{(q+\beta)} \right) \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} ds \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}}. \quad (4.4.11)$$

où les constantes dépendent de  $T$  et  $D$ . □

*Démonstration.* Nous commençons par prouver (4.4.7). Par la dérivation des fonctions composées, pour  $k \in \mathbb{N}^{d+d_x}$  tel que  $|k| \leq \beta$ ,  $D^k f_s(x, a)$  est la somme de produits formés par :

- une dérivée de  $\phi$  d'ordre au plus  $|k|$ , évaluée en  $(x, A_x(t, s, a))$ ,
- des dérivées de  $(x, a) \mapsto A_x^i(t, s, a)$  d'ordre au plus  $|k|$  et au moins 1, pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , et élevées à des puissances inférieures à  $|k|$ ,

le nombre de termes de cette somme dépend de  $k$  et  $D$ . Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_s}{\partial a_1 \partial a_2}(x, a) &= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial a_j}(x, A_x(t, s, a)) \frac{\partial A_x^i}{\partial a_1}(t, s, a) \frac{\partial A_x^j}{\partial a_2}(t, s, a) \\ &+ \sum_{i=1}^d \frac{\partial \phi}{\partial a_i}(x, A_x(t, s, a)) \frac{\partial^2 A_x^i}{\partial a_1 \partial a_2}(t, s, a). \end{aligned}$$

Ainsi, en majorant les produits de dérivées de  $A_x(t, s, a)$  par :

$$\left( \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left( 1 + \max_{1 \leq |k| \leq \beta} \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} |D^k(A_x^i(t, s, a))| \right) \right)^\beta,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \|f_s\|_{C^{\beta, \gamma}} &\leq C(\beta, D) \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D^k \phi(x, A_x(t, s, a))|}{1 + |A_x(t, s, a)|^\gamma} \frac{1 + |A_x(t, s, a)|^\gamma}{1 + |a|^\gamma} \\ &\leq C(\beta, D) \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{1 + |A_x(t, 0, a)|^\gamma}{1 + |a|^\gamma} \leq C(\beta, D, T, \gamma) \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}}, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

car, par la Proposition 2.1.7 :

$$\sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{1 + |A_x(t, 0, a)|^\gamma}{1 + |a|^\gamma} \leq \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{1 + ((2|a|^2 + 4\bar{v}^2 dT) \exp(4\bar{v}^2 T))^{\gamma/2}}{1 + |a|^\gamma} \leq C(T, d, \gamma) < +\infty. \quad (4.4.13)$$

Pour (4.4.8), nous avons par le Point 1 des Hypothèses 4.2.1 et par (4.4.7) :

$$|\langle \eta_0^n, f_0 \rangle| \leq \|\eta_0^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} \|f_0\|_{C^{\beta, \gamma}} \leq C(\beta, D, T, \gamma) \|\eta_0^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}}.$$

Considérons maintenant (4.4.9) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \eta_s^n(dx, da) ds \right| \\ \leq \int_0^t \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} \|f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a))\|_{C^{\beta, \gamma}} ds. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Pour  $|k| \leq \beta$ , le terme  $D^k(f_s(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)))$  est la somme de produits formés d'une dérivée de  $(x, a) \mapsto f_s(x, 0)$  et d'une dérivée de  $(x, a) \mapsto b(x, a) (1 - p(x, a))$ , ces dérivées étant d'ordre au plus  $|k|$  et le nombre de termes dans la somme ne dépendant que de  $k$ . Par la dérivation des fonctions composées, les dérivées  $(x, a) \mapsto f_s(x, 0)$  sont la somme de produits formés d'une dérivée de  $\phi$  et de dérivées de  $(x, a) \mapsto A_x^i(t, s, 0)$ , d'ordre au plus  $|k|$  et au moins 1, pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et élevées à des puissances inférieures à  $|k|$ . Enfin, comme :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{X}} |D^k \phi(x, A_x(t, s, 0))| &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{|D^k \phi(x, A_x(t, s, 0))|}{1 + |A_x(t, s, 0)|^\gamma} \times (1 + |A_x(t, s, 0)|^\gamma) \\ &\leq \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} (1 + |A_x(t, s, 0)|^\gamma) \leq C(T, d, \gamma) \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}}, \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

où  $C(T, d, \gamma)$  est une constante ne dépendant pas de  $x$ , par (2.1.4), on a :

$$\begin{aligned} \|f_s(x, 0)b(x, a)(1 - p(x, a))\|_{C^{\beta, \gamma}} &= \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{D^k(f_s(x, 0)b(x, a)(1 - p(x, a)))}{1 + |a|^\gamma} \\ &\leq C(\beta, D) \|f_s(x, 0)\|_{C^{\beta, 0}} \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D^k(b(x, a)(1 - p(x, a)))|}{1 + |a|^\gamma} \leq C(\beta, D, T, \gamma) \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}}, \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

par le Point 5 des Hypothèses 4.2.1. Nous déduisons (4.4.9) de (4.4.14) et (4.4.16).

Nous procédons de façon similaire pour (4.4.10).

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0)b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx')\eta_s^n(dx, da) ds \right| \\ \leq \int_0^t \left\| \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0)b(x, a)p(x, a)k(x, a, x')dx' \right\|_{C^{\beta, \gamma}} \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} ds. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Comme :

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0)b(x, a)p(x, a)k(x, a, x')dx' \right\|_{C^{\beta, \gamma}} \\ &= \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D^k(\int_{\mathcal{X}} f_s(x', 0)b(x, a)p(x, a)k(x, a, x')dx')|}{1 + |a|^\gamma} \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{|D^k(f_s(x', 0)b(x, a)p(x, a)k(x, a, x'))|}{1 + |a|^\gamma} dx' \\ &\leq C(\beta, D) \int_{\mathcal{X}} \|f_s(x', 0)\|_{C^{\beta, 0}} \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \frac{D^k(b(x, a)p(x, a)k(x, a, x'))}{1 + |a|^\gamma} dx' \\ &\leq C(\beta, D, T, \gamma) \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}}, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

par le Point 5 des Hypothèses 4.2.1, en majorant  $\sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} |D^k \phi(x', A_{x'}(t, s, 0))|$  comme en (4.4.15). On déduit (4.4.10) de (4.4.17), (4.4.18).

Pour le terme (4.4.11) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} f_s(x, a)d(x, a, Z_s^n U(x, a))\eta_s^n(dx, da) ds \right| \\ \leq \int_0^t \|f_s(x, a)d(x, a, Z_s^n U(x, a))\|_{C^{\beta, \gamma}} \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}} ds, \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

avec :

$$\begin{aligned} \|f_s(x, a)d(x, a, Z_s^n U(x, a))\|_{C^{\beta, \gamma}} &\leq C(\beta, D) \|f_s(x, a)\|_{C^{\beta, \gamma}} \sum_{|k| \leq \beta} \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} |D^k(d(x, a, Z_s^n U(x, a)))| \\ &\leq C(\beta, D, T, \gamma) \|\phi\|_{C^{\beta, \gamma}} (1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle)^q. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

par le Point 7 des Hypothèses 4.2.1 et (4.4.7). ■

Pour obtenir les estimées concernant les termes (4.3.4) et (4.3.6) nous allons nous placer dans l'espace de Hilbert  $W_0^{-D, D+q'+1} (\hookrightarrow C^{-(D+1), 1} \hookrightarrow C^{-D, q'+1})$ .

**Lemme 4.4.5.** Soit  $(\beta, \gamma) \in \{(D+1, 1), (D, q'+1)\}$ .  $\exists C_1(T), C_2(T) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\|G_0^n(\cdot, t)\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \leq \|G_0^n(\cdot, t)\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \leq C_2(T) \int_0^t \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 ds \quad (4.4.21)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\widetilde{M}_t^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\widetilde{M}_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \right) < C_1(T) < +\infty. \quad (4.4.22)$$

*Démonstration.* Soit  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une base hilbertienne de  $W_0^{D, D+q'+1}$ . Comme la mesure  $\xi_s(dx, da)$  est positive, on peut écrire par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left( \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \varphi_k(x, a) \sqrt{n} (d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))) \xi_s(dx, da) ds \right)^2 \\ & \leq T \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t, 1 \rangle \right) \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, a) L_d^2 \langle \eta_s^n, U((x, a), \cdot) \rangle^2 \xi_s(dx, da) ds \\ & \leq CT \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t, 1 \rangle \right) \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( \|\mathcal{D}_{(x, a)}\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \sup_{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \|U((x, a), \cdot)\|_{C^{\beta, \gamma}}^2 \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \right) \xi_s(dx, da) ds \\ & \leq C(T, \xi) \int_0^t \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 ds, \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

par la Proposition 4.1.4 et où  $C(T, \xi)$  dépend de  $\sup_{t \in [0, T]} \langle \xi_t, 1 \rangle$  et  $\sup_{t \in [0, T]} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{2(D+q'+1)} \xi_t(dx, da)$  qui existent et sont finies par (3.2.6) et par le Point 4 des Hypothèses 4.2.1.

Considérons maintenant l'estimée (4.4.22). Par la Proposition 4.1.3 :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\|\widetilde{M}_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left( \widetilde{M}_t^n(\varphi_k) \right)^2.$$

Par l'inégalité de Doob :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left( \widetilde{M}_t^n(\varphi_k) \right)^2 \right) \leq 4 \mathbb{E} \left( \left( \widetilde{M}_T^n(\varphi_k) \right)^2 \right) = 4 \mathbb{E} \left( \langle \widetilde{M}^n(\varphi_k) \rangle_T \right).$$

Par (4.3.7) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \langle M^n(\varphi_k) \rangle_T \right) &= \mathbb{E} \left( \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} [\varphi_k^2(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{X}} \varphi_k^2(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') + \varphi_k^2(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a))] Z_s^n(dx, da) ds \right). \end{aligned}$$

En sommant sur  $k$  et en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \langle M^n(\varphi_k) \rangle_T \right) &= \mathbb{E} \left( \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, 0) \right) b(x, a) (1 - p(x, a)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\mathcal{X}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x', 0) \right) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') + \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, a) \right) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds \right) \\ & \leq C \mathbb{E} \left( \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left\{ \|\mathcal{D}_{x, 0}\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 + \int_{\mathcal{X}} \|\mathcal{D}_{x', 0}\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 K(x, a, dx') \right. \right. \\ & \left. \left. + \|\mathcal{D}_{x, a}\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 (1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle) \right\} Z_s^n(dx, da) ds \right), \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

et par la Proposition 4.1.4 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} (\langle M^n(\varphi_k) \rangle_T) &\leq C \mathbb{E} \left( \int_0^T \langle Z_s^n, 1 \rangle ds + \int_0^T (1 + \langle Z_s^n, 1 \rangle) \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|^{2(D+q'+1)}) Z_s^n(dx, da) ds \right) \\
&\leq CT \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle + \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 + \sup_{t \in [0, T]} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{2(D+q'+1)} Z_t^n(dx, da) \right. \\
&\quad \left. + \sup_{t \in [0, T]} \left[ \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a|^{2(D+q'+1)} Z_t^n(dx, da) \right]^2 \right), \tag{4.4.25}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Grâce au Théorème 3.1.7, au Point 4 des Hypothèses 4.2.1, (4.4.22) est satisfaite.  $\blacksquare$

Nous pouvons maintenant prouver le Lemme 4.4.3.

*Preuve du Lemme 4.4.3.* Soient  $\phi \in C^{\beta, \gamma}(\tilde{\mathcal{X}})$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : (x, a, s) \in \tilde{\mathcal{X}} \times [0, t] \mapsto f_s(x, a) = \phi(x, A_x(t, s, a))$ . Par (4.3.9) et par les Lemmes 4.4.4 et 4.4.5,  $\exists C(T, D) > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, t \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_s^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \right) &\leq C \left[ (1 + N^{2q}) \int_0^t \mathbb{E} \left( \sup_{r \in [0, s \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_r^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \right) dr \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E} (\|\eta_0^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2) + 1 \right].
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall et le Point 3 des Hypothèses 4.2.1 :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-\beta, \gamma}}^2 \right) \leq C(N) \left( \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \|\eta_0^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \right) + 1 \right) e^{C(N)T} < +\infty.$$

$\blacksquare$

### 4.4.3 Vérification du critère pour $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**Proposition 4.4.6.** *La suite  $(\mathcal{L}(\eta^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue sur  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1), 1})$ .*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de cette section. Nous allons vérifier que le critère de la Proposition 4.4.1 est satisfait.

Nous considérons tout d'abord de Point 1 de la Proposition 4.4.1. Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $K > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\phi \in W_0^{2D+1, 1}$  non nulle. Comme  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|\langle \eta_t^n, \phi \rangle| \leq \|\eta_t^n\|_{W_0^{-(2D+1), 1}} \|\phi\|_{W_0^{2D+1, 1}}$ , alors, par l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} |\langle \eta_t^n, \phi \rangle| > K \right) &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-(2D+1), 1}} > \frac{K}{\|\phi\|_{W_0^{2D+1, 1}}} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_{t \wedge \zeta_N^n}^n\|_{W_0^{-(2D+1), 1}} > \frac{K}{\|\phi\|_{W_0^{2D+1, 1}}}, \zeta_N^n > T \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\
&\leq \frac{\|\phi\|_{W_0^{2D+1, 1}}^2}{K^2} \left[ \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-(2D+1), 1}}^2 \right) \right] + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\
&\leq \frac{C(N) \|\phi\|_{W_0^{2D+1, 1}}^2}{K^2} + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T), \tag{4.4.26}
\end{aligned}$$

par la Proposition 4.4.2,  $N$  étant défini en (4.3.10). Par (4.3.11),  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \leq \varepsilon/2$ . Alors, pour  $K_\varepsilon = \|\phi\|_{W_0^{2D+1,1}} \sqrt{2C(N)}/\varepsilon$ , le membre de droite de (4.4.26) est majoré par  $\varepsilon$ .

Dans le cas où  $\|\phi\|_{W_0^{2D+1,1}} = 0$ ,  $|\langle \eta_t^n, \phi \rangle| = 0$  et la probabilité dans le membre de gauche de (4.4.26) est nulle pour  $K > 0$ . Ceci achève la démonstration du Point 1.

Considérons une base hilbertienne  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $W_0^{2D+1,1}$ . Nous allons considérer le sous-espace  $\mathfrak{F}_m$  de  $W_0^{2D+1,1}$ , avec  $m \in \mathbb{N}^*$ , engendré par  $(\varphi_k)_{k \in [1,m]}$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\rho > 0$ . Pour montrer le Point 2 du critère de la Proposition 4.4.1, nous souhaitons montrer que :  $\exists m_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall m \geq m_0$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0,T]} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \langle \eta_t^n, \varphi_k \rangle^2} > \rho \right) \leq \varepsilon. \quad (4.4.27)$$

Par l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0,T]} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \langle \eta_t^n, \varphi_k \rangle^2} > \rho \right) &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \langle \eta_t^n, \varphi_k \rangle^2} > \rho, \zeta_N^n > T \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{1}{\rho} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \langle \eta_t^n, \varphi_k \rangle^2} \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T). \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

Par (4.3.11), il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que le second terme du membre de droite soit majoré par  $\varepsilon/2$ . Montrons que l'on peut choisir  $m_0 \in \mathbb{N}^*$  de sorte que le premier terme du membre de droite soit aussi majoré par  $\varepsilon/2$ . La suite  $(\sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \langle \eta_t^n, \varphi_k \rangle^2})_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge presque sûrement vers 0 et est dominée par  $\sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{W_0^{-(2D+1),1}}$  donc uniformément intégrable par la Proposition 4.4.2. On en déduit que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \langle \eta_t^n, \varphi_k \rangle^2} \right) = 0,$$

ce qui achève la preuve de (4.4.27) : on peut choisir  $m_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que (4.4.28) soit majoré par  $\varepsilon$ .

Montrons maintenant (4.4.4). Soient  $\delta > 0$  et  $(S_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille de temps d'arrêt tels que  $S_n \leq T_n \leq S_n + \delta$ . Nous avons :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall \varsigma > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \langle \widetilde{M}^n \rangle_{T_n} - \langle \widetilde{M}^n \rangle_{S_n} \right| \geq \varsigma \right) &\leq \mathbb{P} \left( \left| \langle \widetilde{M}^n \rangle_{T_n \wedge \zeta_N^n} - \langle \widetilde{M}^n \rangle_{S_n \wedge \zeta_N^n} \right| \geq \varsigma, \zeta_N^n > T \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{1}{\varsigma} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left| \langle \widetilde{M}^n \rangle_{T_n} - \langle \widetilde{M}^n \rangle_{S_n} \right| \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T). \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

Par (4.3.11), le second membre de (4.4.29) tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Il nous suffit donc de montrer que le premier terme de (4.4.29) peut être majoré par  $\varepsilon/2$  pour  $\delta$  suffisamment petit. Par (4.3.8) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left| \langle \widetilde{M}^n \rangle_{T_n} - \langle \widetilde{M}^n \rangle_{S_n} \right| \right) &= \mathbb{E} \left( \int_{S_n \wedge \zeta_N^n}^{T_n \wedge \zeta_N^n} \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \left[ \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, 0) \right) b(x, a)(1 - p(x, a)) \right. \right. \\ &+ \left. \int_{\mathcal{X}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x', 0) \right) b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') + \left. \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi_k^2(x, a) \right) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds \right) \\ &\leq C\delta \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle + \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle^2 + \sup_{t \in [0, T]} \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} |a|^2 Z_t^n(dx, da) + \sup_{t \in [0, T]} \left[ \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} |a|^2 Z_t^n(dx, da) \right]^2 \right), \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

en réalisant un calcul similaire à (4.4.24) et (4.4.25). Par le Point 4 des Hypothèses 4.2.1 et par le Théorème 3.1.7,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left| \langle \widetilde{M}^n \rangle_{T_n} - \langle \widetilde{M}^n \rangle_{S_n} \right| \right) \leq C(T)\delta, \quad (4.4.31)$$

ce qui termine la preuve de (4.4.4).

Il nous reste à montrer (4.4.3). Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left\| \widetilde{V}_{T_n}^n - \widetilde{V}_{S_n}^n \right\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq \varsigma \right) &\leq \mathbb{P} \left( \left\| \widetilde{V}_{T_n \wedge \zeta_N^n}^n - \widetilde{V}_{S_n \wedge \zeta_N^n}^n \right\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq \varsigma, \zeta_N^n > T \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{1}{\varsigma^2} \mathbb{E} \left( \left\| \widetilde{V}_{T_n \wedge \zeta_N^n}^n - \widetilde{V}_{S_n \wedge \zeta_N^n}^n \right\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T). \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Le second terme de (4.4.32) se traite avec (4.3.11). Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left\| \widetilde{V}_{T_n \wedge \zeta_N^n}^n - \widetilde{V}_{S_n \wedge \zeta_N^n}^n \right\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \right) &\leq C \mathbb{E} (A_n + B_n + C_n) \quad (4.4.33) \\ A_n &= \|G_0^n(\cdot, T_n \wedge \zeta_N^n) - G_0^n(\cdot, S_n \wedge \zeta_N^n)\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \\ B_n &= \|G_1^n(T_n \wedge \zeta_N^n, \eta^n, \cdot) - G_1^n(S_n \wedge \zeta_N^n, \eta^n, \cdot)\|_{C^{-(D+1),1}}^2 \\ C_n &= \left\| f \mapsto \int_{S_n \wedge \zeta_N^n}^{T_n \wedge \zeta_N^n} \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \left[ f(x, 0)b(x, a)(1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} f(x', 0)b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(x, a)d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] Z_s^n(dx, da) ds \right\|_{C^{-(D+1),1}}^2. \end{aligned}$$

Considérons  $A_n$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= \mathbb{E} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left( \int_{S_n \wedge \zeta_N^n}^{T_n \wedge \zeta_N^n} \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \varphi_k(x, a) \sqrt{n} (d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))) \xi_s(dx, da) ds \right)^2 \right) \\ &\leq \delta C(T, \xi) \mathbb{E} \left( \int_{S_n \wedge \zeta_N^n}^{T_n \wedge \zeta_N^n} \|\eta_s^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2 ds \right) \\ &\leq \delta^2 C(T, \xi) \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2 \right) < C(T, N)\delta^2, \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

où la première majoration est obtenue par un calcul similaire à (4.4.23). Pour la dernière majoration, on a utilisé le Lemme 4.4.3.

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.4.4 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_n) &\leq C(1 + N^{2q}) \mathbb{E} \left( \int_{S_n \wedge \zeta_N^n}^{T_n \wedge \zeta_N^n} \|\eta_s^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2 ds \right) \\ &\leq C(N)\delta \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2 \right) < C(N)\delta, \end{aligned}$$

par le Lemme 4.4.3. Pour majorer  $B_n$ , établissons un contrôle de la norme de l'opérateur différentiel  $G_1^n(t, \eta^n, \cdot)$  (4.3.4).

**Lemme 4.4.7.**  $\forall s, t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in C^{D+1,1}$ ,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$|G_1^n(t, \eta^n, f) - G_1^n(s, \eta^n, f)| \leq C \int_s^t \|\eta_s^n\|_{C^{-D, q'+1}} ds \|f\|_{C^{D+1,1}}. \quad (4.4.35)$$



*Démonstration.* Soit  $f \in C^{D+1,1}$ . Sous le Point 1 des Hypothèses 4.2.1, on a :

$$f \in C^{D+1,1} \Rightarrow \nabla_a f \in C^{D,1} \Rightarrow v \nabla_a f \in C^{D,q'+1}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \|v \nabla_a f\|_{C^{D,q'+1}} &= \sum_{|k| \leq D} \sup_{(x,a) \in \tilde{\mathcal{X}}} \frac{|D^k(v(x,a) \nabla_a f(x,a))|}{1 + |a|^{q'+1}} \\ &\leq C(\beta, D) \|\nabla_a f\|_{C^{D,0}} \sum_{|k| \leq D} \sup_{(x,a) \in \tilde{\mathcal{X}}} \frac{|D^k v(x,a)|}{1 + |a|^{q'+1}} (1 + |a|) \leq C(\beta, D) \|f\|_{C^{D+1,1}}, \end{aligned}$$

en utilisant le Point 1 des Hypothèses 4.2.1. On en déduit, pour tout  $f \in C^{D+1,1}$  :

$$\begin{aligned} |G_1^n(t, \eta^n, f) - G_1^n(s, \eta^n, f)| &\leq \int_s^t \left| \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} v(x,a) \nabla_a f(x,a) \eta_s^n(dx, da) \right| ds \\ &\leq \int_s^t \|\eta_s^n\|_{C^{-D,q'+1}} \|v \nabla_a f\|_{C^{D,q'+1}} ds \\ &\leq C \int_s^t \|\eta_s^n\|_{C^{-D,q'+1}} \|f\|_{C^{D+1,1}} ds. \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

Ceci prouve le Lemme. ■

Nous déduisons des Lemmes 4.4.3 et 4.4.7 :

$$\mathbb{E}(B_n) \leq C\delta \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-D,q'+1}} \right) < C(N)\delta. \quad (4.4.37)$$

Nous pouvons donc majorer le membre de droite de (4.4.33) par  $C(N)\delta$ , ce qui conclut la vérification de (4.4.3). Chacun des points du critère de la Proposition 4.4.1 a été vérifié, et la suite  $(\mathcal{L}(\eta^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue dans  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1),1})$ . Nous allons maintenant montrer l'unicité de la valeur d'adhérence de cette suite et identifier sa limite.

## 4.5 Identification des valeurs d'adhérence

La suite  $(\mathcal{L}(\eta^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , tendue, est relativement compacte dans  $\mathcal{P}(\mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1),1}))$  muni de la topologie de la convergence étroite, par le théorème de Prohorov. Soit  $\eta \in \mathbb{D}([0, T], W_0^{-(2D+1),1})$  telle que  $\mathcal{L}(\eta)$  soit une valeur d'adhérence de cette suite. Pour simplifier les notations, nous noterons à nouveau  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite convergeant en loi vers  $\eta$ .

Tout d'abord, notons que les valeurs d'adhérence  $\eta$  sont nécessairement continues, puisque :

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d)} \left| \langle \eta_t^n, f \rangle - \langle \eta_{t-}^n, f \rangle \right| \leq \frac{C \|f\|_\infty}{\sqrt{n}}, \quad \mathbb{P} - \text{presque sûrement.} \quad (4.5.1)$$

Une difficulté vient du fait que le Lemme 4.4.3 ne nous fournit qu'un contrôle des moments des fluctuations  $\eta^n$  localisées par les temps d'arrêt  $\zeta_N^n$ , et que ce contrôle dépend de  $N$ . Grâce au Point 4 des Hypothèses 4.2.1, nous avons cependant une estimée non localisée pour les moments des martingales  $(\tilde{M}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (Lemme 4.4.5). Nous commençons par étudier la tension et la convergence en loi de ces martingales (Proposition 4.5.1). Nous en déduisons un problème de martingale vérifié par  $\eta$  (Proposition 4.5.2).

**Proposition 4.5.1.** *La suite des martingales  $(\widetilde{M}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies en (4.3.6) converge en loi dans  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-D, D+q'+1})$  vers un processus  $W \in \mathcal{C}([0, T], C^{-(D+1), 1})$  tel que  $\forall \phi \in C^{D+1, 1}$ ,  $W(\phi)$  soit une martingale gaussienne réelle continue, issue de 0, de carré intégrable et de variation quadratique définie par (4.2.4).*

*Démonstration.* Par le Lemme 4.4.5 :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\widetilde{M}_t^n\|_{W_0^{-D, D+q'+1}}^2 \right) < +\infty. \quad (4.5.2)$$

On en déduit par le critère de tension de la Proposition 4.4.1 et par des calculs analogues à ceux de la Section 4.4.3 que  $(\widetilde{M}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue dans  $\mathbb{D}([0, T], W_0^{-D, D+q'+1})$ . Soit  $W$  une valeur d'adhérence. Nous noterons encore  $(\widetilde{M}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la sous-suite convergeant vers  $W$ .

Les discontinuités de  $\widetilde{M}^n$  étant celles de  $\eta^n : \forall \phi \in W_0^{D, D+q'+1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} |\Delta \widetilde{M}_t^n(\phi)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C}{\sqrt{n}} = 0, \quad (4.5.3)$$

et les valeurs d'adhérence  $W$  de  $(\widetilde{M}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont continues.

Soit  $\phi \in C^{D+1, 1} (\hookrightarrow W_0^{D, D+q'+1})$ . Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{C}_b(C^{-(D+1), 1}, \mathbb{R}_+)$  et  $0 \leq s_1 < \dots < s_k \leq s \leq t \leq T$ . Pour  $M \in \mathbb{D}([0, T], W_0^{-D, D+q'+1})$  nous introduisons :

$$\Phi(M, \phi) = \prod_{i=1}^k \varphi_k(M_{s_k}) (M_t(\phi) - M_s(\phi)). \quad (4.5.4)$$

Comme  $\widetilde{M}^n$  est une martingale,

$$\mathbb{E} \left( \Phi(\widetilde{M}^n, \phi) \right) = 0.$$

De plus, la limite en loi  $W$  de  $(\widetilde{M}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant continue, nous avons la limite en loi suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(\widetilde{M}^n, \phi) = \Phi(W, \phi).$$

Enfin, par (4.5.2),  $\Phi(\widetilde{M}^n, \phi)$  est uniformément intégrable et

$$\mathbb{E}(\Phi(W, \phi)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( \Phi(\widetilde{M}^n, \phi) \right) = 0. \quad (4.5.5)$$

Ceci prouve que  $W(\phi)$  est une martingale. Calculons son crochet. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\phi \in C^{D+1, 1}$ .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \langle \widetilde{M}^n(\phi) \rangle_t - \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \left[ \phi^2(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} \phi^2(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \phi^2(x, a) d(x, a, \xi_s U(x, a)) \right] \xi_s(dx, da) ds \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \left[ \phi^2(x, 0) b(x, a) (1 - p(x, a)) + \int_{\mathcal{X}} \phi^2(x', 0) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \phi^2(x, a) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] \eta_s^n(dx, da) ds \right| \right) \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \phi^2(x, a) (d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))) \xi_s(dx, da) ds \right| \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ & \leq \frac{C(T, N)}{\varepsilon \sqrt{n}} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-(D+1), 1}} \right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T), \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

en adaptant les résultats des Lemmes 4.4.4 et 4.4.5 (terme (4.4.21)). Par le Lemme 4.4.3, le premier terme du membre de droite est majoré par  $C(T, N)/(\varepsilon\sqrt{n})$ . On en déduit que  $(\langle \widetilde{M}^n(\phi) \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\langle W(\phi) \rangle$  définie en (4.2.4) uniformément en  $t \in [0, T]$ .

Par (4.5.3) et comme on a de plus  $\sup_{t \in [0, T]} |\Delta \widetilde{M}_t^n(\phi)|$  uniformément intégrable, puisque majoré par  $C/\sqrt{n}$ , alors, par le Théorème 3.12 page 432 de Jacod et Shiryaev [63],  $(\widetilde{M}^n(\phi))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la martingale gaussienne  $W(\phi)$  issue de 0, continue, de carré intégrable, et de variation quadratique (4.2.4).  $\blacksquare$

Nous pouvons maintenant caractériser la valeur d'adhérence  $\eta$ .

**Proposition 4.5.2.** *Sous les Hypothèses 4.2.1, le processus  $(\widetilde{M}_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{C}([0, T], C^{-(D+1), 1})$  défini pour tout  $\phi \in C^{D+1, 1}$  et  $t \in [0, T]$  par :*

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{M}_t, \phi \rangle &= \langle \eta_t, \phi \rangle - \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \phi(x, A_x(t, 0, a)) \eta_0(dx, da) - \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} [\phi(x, A_x(t, s, 0))b(x, a)(1 - p(x, a)) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A'_x(t, s, 0))b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') - \phi(x, A_x(t, s, a))d(x, a, \xi_s U(x, a))] \eta_s(dx, da) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, a))d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s U(x, a) \xi_s(dx, da) ds, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

a même loi que le processus  $W$  défini à la Proposition 4.5.1.  $\square$

*Démonstration.* Définissons pour  $\nu \in \mathbb{D}([0, T], C^{-(D+1), 1})$ ,  $\phi \in C^{D+1, 1}$  et  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \Psi(\nu, \phi, t) &= \langle \nu_t, \phi \rangle - \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \phi(x, A_x(t, 0, a)) \nu_0(dx, da) - \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} [\phi(x, A_x(t, s, 0))b(x, a)(1 - p(x, a)) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} \phi(x', A'_x(t, s, 0))b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') - \phi(x, A_x(t, s, a))d(x, a, \xi_s U(x, a))] \nu_s(dx, da) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, a))d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \nu_s U(x, a) \xi_s(dx, da) ds. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Notons que dans la définition de  $\Psi$ , la densité-dépendance est "gelée" : on considère le terme de mort  $d(x, a, \xi_t U(x, a))$  où  $\xi$  est la solution déterministe de (3.0.1). Notre objectif est de montrer que le processus  $\widetilde{M} = (\Psi(\eta, \phi, t))_{t \in [0, T]}$  est une martingale réelle continue, de carré intégrable, issue de 0, et de variation quadratique définie par (4.2.4).

Comme  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers le processus continu  $\eta$ , alors nous avons la limite en loi suivante :  $\forall \phi \in C^{D+1, 1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(\eta^n, \phi, \cdot) = \Psi(\eta, \phi, \cdot). \quad (4.5.9)$$

Nous allons montrer que  $\Psi(\eta^n, \phi, \cdot)$  a la même limite en loi que  $\widetilde{M}^n(\phi)$ . Par l'unicité de la limite en loi et par la Proposition 4.5.1, on en déduira le résultat annoncé.

Par (4.3.9) et (4.5.8) :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall \phi \in C^{D+1, 1}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\Psi(\eta^n, \phi, t) - \widetilde{M}_t^n(\phi) = -B(n, \phi, t) - C(n, \phi, t), \quad (4.5.10)$$

$$\begin{aligned} B(n, \phi, t) &:= \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} \phi(x, A_x(t, s, a)) [\sqrt{n} (d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))) \\ &\quad - d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s^n U(x, a)] Z_s^n(dx, da) ds \end{aligned}$$

$$C(n, \phi, t) := \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \phi(x, A_x(t, s, a)) d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s^n U(x, a) [Z_s^n - \xi_s](dx, da) ds.$$

Considérons  $B_n(n, \phi, \cdot)$ . Par le Point 7 des Hypothèses 4.2.1 :  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a)) &= d\left(x, a, \xi_s U(x, a) + \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_s^n U(x, a)\right) - d(x, a, \xi_s U(x, a)) \\ &= \int_0^1 d_u\left(x, a, \xi_s U(x, a) + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \eta_s^n U(x, a)\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_s^n U(x, a) d\alpha. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{n} (d(x, a, Z_s^n U(x, a)) - d(x, a, \xi_s U(x, a))) - d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s^n U(x, a) \right| \\ &= \left| \int_0^1 d_u\left(x, a, \xi_s U(x, a) + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \eta_s^n U(x, a)\right) \eta_s^n U(x, a) d\alpha - d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s^n U(x, a) \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| d_u\left(x, a, \xi_s U(x, a) + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \eta_s^n U(x, a)\right) - d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \right| |\eta_s^n U(x, a)| d\alpha \\ &\leq \int_0^1 L_{d_u} \frac{\alpha}{\sqrt{n}} |\eta_s^n U(x, a)|^2 d\alpha \leq \frac{L_{d_u}}{2\sqrt{n}} \|\eta_s^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2 \sup_{(x,a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \|U(x, a, \cdot, \cdot)\|_{C^{(D+1),1}}^2, \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

et on en déduit, pour  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |B(n, \phi, t)| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |B(n, \phi, t \wedge \zeta_N^n)| > \varepsilon, \zeta_N^n > T\right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{C}{2\varepsilon\sqrt{n}} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T]} \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \|\eta_s^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2 \langle Z_s^n, 1 \rangle ds\right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{CTN}{2\varepsilon\sqrt{n}} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2\right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \leq \frac{C(T, N)}{\varepsilon\sqrt{n}} + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T), \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

par le Lemme 4.4.3. On en déduit que  $B(n, \phi, \cdot)$  converge en probabilité vers 0 uniformément en  $t \in [0, T]$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Considérons maintenant le terme  $C(n, \phi, t)$ .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |C(n, \phi, t)| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |C(n, \phi, t \wedge \zeta_N^n)| > \varepsilon, \zeta_N^n > T\right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T]} \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \|\eta_s^n\|_{C^{-(D+1),1}} \|f_s(x, a) d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s^n U(x, a)\|_{C^{(D+1),0}} ds\right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \end{aligned}$$

En adaptant les preuves de (4.4.11) (en notant que la densité dépendance dans  $d_u$  est gelée et fixée à  $\xi_s U(x, a)$ , avec  $\xi$  la solution de (3.0.1)), on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |C(n, \phi, t)| > \varepsilon\right) \leq \frac{C(T, \xi) \|\phi\|_{C^{D+1,1}}}{\varepsilon\sqrt{n}} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t^n\|_{C^{-(D+1),1}}^2\right) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \\ &\leq \frac{C(T, \xi, N)}{\varepsilon\sqrt{n}} + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T), \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

par le Point 7 des Hypothèses 4.2.1 et par le Lemme 4.4.3. Donc  $C(n, \phi, \cdot)$  converge en probabilité vers 0 uniformément sur  $[0, T]$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On en déduit :  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |\Psi(\eta^n, \phi, t) - \widetilde{M}_t^n(\phi)| > 2\varepsilon\right) = 0. \quad (4.5.15)$$

et  $(\Psi(\eta^n, \phi, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\widetilde{M}^n(\phi))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ont la même limite en loi  $W$ . ■

**Lemme 4.5.3.** *Sous les Hypothèses 4.2.1, toute solution  $\eta$  de (4.5.7) est à valeurs dans  $C^{-(D+1),1}$ .*

*Démonstration.* Par le Point 3 des Hypothèses 4.2.1, la condition initiale  $\eta_0$  est dans  $W_0^{-D,D+q'+1}$ , donc également dans  $C^{-(D+1),1}$ . Par une adaptation des calculs des Lemmes 4.4.4 (avec pour (4.4.11) une densité dépendance dans le taux de mort "gelée" en  $\xi_s U(x, a)$ ) et 4.4.5, on a alors :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, t \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_s\|_{C^{-(D+1),1}} \right) \leq \mathbb{E} (\|\eta_0\|_{C^{-(D+1),1}}) + C(T, \xi) \int_0^t \mathbb{E} \left( \sup_{s \in [0, u \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_s\|_{C^{-(D+1),1}} \right) du + C(T).$$

Notons que le fait que la densité dépendance dans le terme de mort soit "gelée" implique que les constantes  $C(T, \xi)$  et  $C(T)$  ne dépendent pas de  $N$ . Par le Lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T \wedge \zeta_N^n]} \|\eta_t\|_{C^{-(D+1),1}} \right) \leq C(T, \xi) \mathbb{E} (\|\eta_0\|_{C^{-(D+1),1}} + 1) < +\infty. \quad (4.5.16)$$

Comme le membre de droite ne dépend pas de  $N$ , on peut s'affranchir de  $\zeta_N^n$  dans le membre de gauche, par (3.1.19), par le Lemme de Fatou et par un argument similaire à (2.2.13). ■

Nous montrons maintenant l'unicité de la solution forte de (4.5.7) dans  $\mathcal{C}([0, T], C^{-(D+1),1})$ .

**Proposition 4.5.4.** *Soit  $W \in \mathcal{C}([0, T], C^{-(D+1),1})$  un processus gaussien continu, centré, de carré intégrable et de variation quadratique définie par (4.2.4). Soit  $\eta_0 \in C^{-(D+1),1}$  une condition initiale satisfaisant les Hypothèses 4.2.1. Alors l'équation (4.5.7) admet à plus une unique solution forte associée à  $W$  et  $\eta_0$ . Nous avons donc unicité en loi de la solution de (4.5.7). □*

*Démonstration.* Soient  $\eta^1$  et  $\eta^2 \in \mathcal{C}([0, T], C^{-(D+1),1})$  deux solutions de (4.5.7) associées à  $W$  et à  $\eta_0$ . Soient  $t \in [0, T]$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_K^\infty(\tilde{\mathcal{X}})$ , et  $f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a) = \phi(x, A_x(t, s, a))$ . Nous avons :

$$\langle \eta_t^1 - \eta_t^2, \phi \rangle = \int_0^t \langle \eta_s^1 - \eta_s^2, \Upsilon f_s \rangle ds, \quad (4.5.17)$$

avec  $\Upsilon f$  défini en (4.2.5). En adaptant les majorations du Lemme 4.4.4, nous obtenons :

$$\|\eta_t^1 - \eta_t^2\|_{C^{-(D+1),1}} \leq C(T) \int_0^t \|\eta_s^1 - \eta_s^2\|_{C^{-(D+1),1}} ds, \quad (4.5.18)$$

et par le Lemme de Gronwall,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\|\eta_t^1 - \eta_t^2\|_{C^{-(D+1),1}} = 0$   $\mathbb{P}$  – presque sûrement. ■

**Corollaire 4.5.5.** *La suite  $(\mathcal{L}(\eta^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une unique valeur d'adhérence. La suite  $(\eta^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge donc en loi donc vers l'unique solution faible de (4.5.7).*

**Proposition 4.5.6.** *L'équation (4.5.7) peut se reformuler par :  $\forall f \in C^{D+1,1}, \forall t \in [0, T]$ ,*

$$\langle \eta_t, f \rangle = \langle \eta_0, f \rangle + \int_0^t \langle \eta_s, \Upsilon f \rangle ds + \int_0^t \langle \eta_s, Jf \rangle ds + W_t(f), \quad (4.5.19)$$

où  $\Upsilon$  est l'opérateur défini en (4.2.5) et où  $W$  est donné par la Proposition 4.5.1.

*Démonstration.* Soient  $t \in [0, T]$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d)$  et  $f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a) = \phi(x, A_x(t, s, a))$ . Par (2.1.7),  $\forall (x, a, s) \in \tilde{\mathcal{X}} \times [0, T]$ ,

$$f_s(x, a) = \phi(x, a) + \int_s^t v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) du, \quad (4.5.20)$$

(4.5.7) se réécrit :

$$\begin{aligned}
\langle \eta_t, \phi \rangle &= \langle \eta_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \eta_s, \Upsilon \phi \rangle ds + W_t(\phi) + \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \int_0^t v(x, A_x(u, 0, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, 0, a)) du \eta_0(dx, da) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \left[ \left( \int_s^t v(x, A_x(u, s, 0)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, 0)) du \right) b(x, a)(1 - p(x, a)) \right. \\
&+ \int_{\mathcal{X}} \left( \int_s^t v(x', A_{x'}(u, s, 0)) \nabla_a \phi(x', A_{x'}(u, s, 0)) du \right) b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') \\
&- \left. \left( \int_s^t v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) du \right) d(x, a, \xi_s U(x, a)) \right] \eta_s(dx, da) ds \\
&- \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} \left( \int_s^t v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) du \right) d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s U(x, a) \xi_s(dx, da) ds \\
&+ W_t \left( \int_s^t v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) du \right).
\end{aligned}$$

$\|\eta_s\|_{C^{-(D+1),1}} < +\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s., et les intégrants sont bornés. Par le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_t, \phi \rangle &= \langle \eta_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \eta_s, \Upsilon \phi \rangle ds + W_t(\phi) + \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} v(x, A_x(u, 0, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, 0, a)) \eta_0(dx, da) du \\
&+ \int_0^t \int_0^u \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} [v(x, A_x(u, s, 0)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, 0)) b(x, a)(1 - p(x, a)) \\
&+ \int_{\mathcal{X}} v(x', A_{x'}(u, s, 0)) \nabla_a \phi(x', A_{x'}(u, s, 0)) b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') \\
&- v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) d(x, a, \xi_s U(x, a))] \eta_s(dx, da) ds du \\
&- \int_0^t \int_0^u \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) d_u(x, a, \xi_s U(x, a)) \eta_s U(x, a) \xi_s(dx, da) ds du \\
&+ \int_0^t \int_0^u \langle dW_t, v(x, A_x(u, s, a)) \nabla_a \phi(x, A_x(u, s, a)) \rangle du \\
&= \langle \eta_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \eta_s, \Upsilon \phi \rangle ds + W_t(\phi) + \int_0^t \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d} v(x, a) \nabla_a \phi(x, a) \eta_u(dx, da) du,
\end{aligned}$$

par (4.5.7), avec  $v \nabla_a \phi$  jouant le rôle de  $\phi$ . ■

**Corollaire 4.5.7.** *L'équation (4.2.3) a bien un sens dans  $C^{-(D+1),1}$  (donc dans  $W_0^{-(2D+1),1}$ ).*

*Démonstration.* Par Yosida [125] (p.123), l'intégrale de Bochner  $\int_0^t \Upsilon^* \eta_s ds$  est bien définie dans  $C^{-(D+1),1}$  dès que :

1. Pour tout fonction  $F$  dans le dual de  $C^{-(D+1),1}$ , l'application  $s \mapsto F(\Upsilon^* \eta_s)$  est mesurable,
2.  $\int_0^T \|\Upsilon^* \eta_s\|_{C^{-(D+1),1}} ds < +\infty$ .

Ces deux points sont vérifiés, par continuité, par les Lemmes 4.4.4 et 4.4.5 et par la Proposition 4.4.2. L'équation (4.2.3) est alors obtenue à partir de (4.5.19), chacun des termes étant bien défini dans  $W_0^{-(2D+1),1}$ . ■

## 4.6 Applications

### 4.6.1 Intervalles de confiance

**Proposition 4.6.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.3 :*

(i)  $\forall \alpha > 0, \exists q_\alpha > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0,$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|Z_t^n - \xi_t\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq \frac{q_\alpha}{\sqrt{n}} \right) \leq \alpha.$$

(ii)  $\forall C > 0, \forall \phi \in W_0^{2D+1,1}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0,$

$$\mathbb{P} \left( |\langle Z_T^n, \phi \rangle - \langle \xi_T, \phi \rangle| > \frac{C}{\sqrt{n}} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{C^2}{2\langle W(f) \rangle_T} \right) + \frac{C(T)}{C^2} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t\|_{C^{-(D+1),1}}^2 \right) + \varepsilon$$

où  $\langle W(f) \rangle_T$  est défini en (4.2.4).

*Démonstration.* Considérons le Point (i). Par (4.5.16), on obtient :  $\forall \alpha > 0, \exists q_\alpha > 0,$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta\|_{W_0^{-(2D+1),1}} > q_\alpha \right) \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (4.6.1)$$

Par la convergence en loi du Théorème 4.2.3, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{n} \|Z_t^n - \xi_t\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq q_\alpha \right) = \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq q_\alpha \right).$$

Ainsi,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{n} \|Z_t^n - \xi_t\|_{W_0^{-(2D+1),1}} \geq q_\alpha \right) \leq \alpha,$  ce qui fournit l'intervalle de confiance souhaité.

Considérons le Point (ii). Soit  $f(x, a, t) \in \tilde{\mathcal{X}} \times [0, T] \mapsto f_t(x, a) = \phi(x, A_x(T, t, a)) \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} (|\langle \eta_T, \phi \rangle| > C) &\leq \mathbb{P} \left( |W_T(f)| > \frac{C}{2} \right) + \frac{1}{C^2} \mathbb{E} \left( \left| \langle \eta_0, f_0 \rangle + \int_0^T \langle \eta_s, \Upsilon_s f_s \rangle ds \right|^2 \right) \\ &\leq 2 \exp \left( -\frac{C^2}{2\langle W(f) \rangle_T} \right) + \frac{C(T)}{C^2} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t\|_{W_0^{-(2D+1),1}}^2 \right), \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

ce qui termine la preuve. ■

#### 4.6.2 Comportement en temps grand pour une population logistique structurée par un âge scalaire

Nous nous intéressons au comportement du processus microscopique au voisinage d'une solution stationnaire de l'équation (3.0.1). L'existence d'une solution stationnaire est un problème difficile. Aussi nous restreignons nous dans cette section à un exemple "simple" : celui d'une *population logistique structurée par un âge scalaire.*

**Définition 4.6.2.** *Nous expliquons comment ce modèle rentre dans le formalisme précédent :*

1. *L'espace  $\mathcal{X}$  est un singleton et la probabilité de mutation est  $p = 0$ . Nous omettons par la suite la variable de trait afin de simplifier les notations.*
2. *Les individus sont caractérisés par un âge scalaire et vieillissent avec une vitesse 1,*
3. *Un individu d'âge  $a \in \mathbb{R}_+$  donne naissance avec le taux  $b(a)$  où  $b \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  est tel que  $\exists \bar{b} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, 0 \leq b(a) \leq \bar{b},$*
4. *Un individu d'âge  $a \in \mathbb{R}_+$  dans la population  $Z \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$  meurt au taux  $d(a) + \eta \langle Z, 1 \rangle,$  où  $d \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+)$  est le taux de mort naturelle tel que  $\exists \bar{d}, \underline{d} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, \underline{d} \leq d(a) \leq \bar{d},$  où  $\eta \langle Z, 1 \rangle$  est le terme de compétition logistique, avec  $\eta > 0$  modulant l'intensité des interactions.*

Les notations suivantes seront utiles pour la suite de cette section :

$$\Pi(a_1, a_2) = \exp \left( -\int_{a_1}^{a_2} d(\alpha) d\alpha \right) \quad \text{et} \quad R_0 = \int_0^{+\infty} b(a) e^{-\int_0^a d(\alpha) d\alpha} da. \quad (4.6.3)$$

$\Pi(a_1, a_2)$  est la probabilité qu'un individu d'âge  $a_1$  vive jusqu'à l'âge  $a_2$  (cf. (2.1.11)).  $R_0$  est appelé dans la littérature *taux de reproduction net*. Il s'agit de l'intégrale du taux de naissance  $b(a)$  pondéré par la probabilité de survivre jusqu'à l'âge  $a$  dans le cas où l'individu est soumis à la seule mort naturelle (pas de compétition).

Pour la population logistique étudiée, il existe une unique solution classique à l'équation aux dérivées partielles décrivant la limite de l'approximation en "grande population". Nous disposons de plus d'une forme explicite de cette solution :

**Proposition 4.6.3.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 3.2.1, et si :  $\exists m_0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\xi_0(da) = m_0(a)da$ , où  $\xi_0(da)$  est la limite en probabilité de  $(Z_0^n(da))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , alors :*

(i) *la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la Définition 3.1.2 converge en probabilité dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+), \acute{e}))$  vers la solution faible mesure  $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(a, t) &= - \frac{\partial m}{\partial a}(a, t) - (d(a) + \eta M_t) m(a, t) \\ m(0, t) &= \int_0^{+\infty} b(a)m(a, t)da, \quad m(a, 0) = m_0(a), \quad M_t = \int_0^{+\infty} m(a, t)da. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

(ii) *Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\xi_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . La famille des densités  $(m(\cdot, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est l'unique solution classique de (4.6.4) et nous disposons de son expression explicite :  $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$m(a, t) = \frac{M_0}{1 + M_0 \int_0^t \int_0^{+\infty} \nu(\alpha, s) d\alpha ds} \nu(a, t), \quad (4.6.5)$$

$$\text{avec : } \nu(a, t) = \begin{cases} \frac{m_0(a-t)}{M_0} \Pi(a-t, a) & \text{si } a \geq t, \\ B(t-a) \Pi(a, 0) & \text{si } a < t, \end{cases} \quad (4.6.6)$$

$\Pi$  étant défini en (4.6.3) et :

$$B(t) = B_0 * \left( \sum_{n=0}^{+\infty} g^{*n}(t) \right), \quad (4.6.7)$$

$g^{*n}$  étant la fonction  $g$  convolée  $n$  fois avec elle-même. □

*Démonstration.* L'existence et l'unicité d'une solution faible fonction de (4.6.4) vers laquelle converge  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont un cas particulier du Corollaire 3.2.4 et de la Proposition 3.2.6. Il y a donc au plus une solution classique de (4.6.4) dans  $\mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . En reprenant les calculs de [15, 56, 82, 124], nous pouvons exhiber une solution classique du système (4.6.4), donnée par (4.6.5) (cf. Proposition A.4.1, en annexe), et de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport aux variables  $t$  et  $a$ . C'est donc l'unique solution classique de (4.6.4). ■

Nous rappelons quelques résultats sur le comportement en temps long de la solution de (4.6.4).

**Hypothèse 4.6.4.** *Dans la suite de cette section, nous nous placerons sous l'hypothèse  $R_0 > 1$  impliquant que  $\bar{b} > \underline{d}$  puisque :*

$$\frac{\bar{b}}{\underline{d}} = \int_0^{+\infty} \bar{b} e^{-da} da \geq R_0 > 1. \quad (4.6.8)$$

**Proposition 4.6.5.** *Pour le modèle étudié dans cette section et sous l'Hypothèse 4.6.4 :*

(i) *L'équation suivante en  $\lambda_1$  :*

$$1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} b(a) \Pi(0, a) da,$$



admet une unique solution  $\lambda_1 > 0$ .

(ii) On a le comportement asymptotique suivant pour la solution  $m(a, t)$  de (4.6.4) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} m(a, t) = \frac{K e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \Pi(0, \alpha) d\alpha} =: \widehat{m}(a). \quad (4.6.9)$$

uniformément en âge sur les intervalles bornés de  $\mathbb{R}_+$ , où

$$K := \frac{\lambda_1}{\eta} = \int_0^{+\infty} \widehat{m}(a) da. \quad (4.6.10)$$

est appelé capacité de charge environnementale.

(iii)  $\widehat{m}$  est asymptotiquement exponentiellement stable :  $\exists d_0 > 0, \exists \lambda > 0, \forall C > 0, \exists T_1 > 0$ ,

$$\forall t \geq T_1, (\|m_0 - \widehat{m}\|_1 < d_0) \Rightarrow (\|m(\cdot, t) - \widehat{m}\|_1 < C e^{-\lambda t}). \quad (4.6.11)$$

*Démonstration.* Ces assertions sont montrées en Annexe A.4. ■

La Proposition 4.6.5 nous indique que sous l'Hypothèse 4.6.4, l'approximation (4.6.4) en "grande population" du processus microscopique admet une solution stationnaire  $\widehat{m}$  vers laquelle converge toute solution issue de  $m_0$  non nulle. La question naturelle qui se pose est de savoir ce qu'il en est pour le processus microscopique.

**Proposition 4.6.6.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 3.2.1, 4.2.1 et 4.6.4 et si :  $\exists m_0 \in C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\xi_0(da) = m_0(a)da$ , où  $\xi_0(da)$  est la limite en probabilité de  $(Z_0^n(da))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , alors :*

(i) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\mathbb{P}$ -presque sûrement,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle Z_t^n, 1 \rangle = 0$ .

(ii)  $\forall f \in C^{(D+1),1}, \forall \varepsilon > 0, \forall \varsigma > 0, \exists T_1 = T_1(\varepsilon, \varsigma, f) > 0, \exists n_1 = n_1(\varepsilon, T_1(\varepsilon, \varsigma, f)) \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left| \langle Z_{T_1}^n, f \rangle - \int_0^{+\infty} f(a) \widehat{m}(a) da \right| > \varsigma \right) \leq \varepsilon. \quad (4.6.12)$$

où  $\widehat{m}$  a été défini en (4.6.9).

(iii) On en déduit qu'il existe deux suites  $(T_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  et  $(n_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{N}^*$ , tendant vers  $+\infty$  lorsque  $q \rightarrow +\infty$ , et telles que la suite  $(Z_{T_q}^{n_q})_{q \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\widehat{m}(a)da$  dans  $C^{-(D+1),1}$  muni de sa topologie faible.

Heuristiquement, l'équation (4.6.12) nous indique que pour  $T > 0$  suffisamment grand, et pour  $n$  également grand,  $Z_T^n$  se trouve "avec une grande probabilité" dans un voisinage de la solution stationnaire  $\widehat{m}(a)da$  de (4.6.4). Cependant, le comportement de  $Z^n$  est plus compliqué que celui de la solution de (4.6.4). Si  $T > 0$  n'est plus fixé, et qu'on le fait tendre vers l'infini, le Point (i) nous indique que la suite  $(Z_T^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas vers  $\widehat{m}(a)da$ , mais vers la mesure nulle. Les réalisations de  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  finissent presque sûrement par quitter le voisinage de  $\widehat{m}(a)da$  pour amener la population à l'extinction.

Pour espérer obtenir une convergence de  $Z_T^n$  vers une limite non triviale, lorsque  $T \rightarrow +\infty$ , il faut faire tendre simultanément  $T$  et  $n$  vers  $+\infty$ . C'est le résultat du Point (iii).

Enfin notons qu'au Chapitre 5, nous reviendrons sur le problème du comportement des trajectoires de  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  au voisinage de  $\widehat{m}(a)da$ . Nous étudierons les temps de sortie d'un voisinage de  $\widehat{m}(a)da$  pour ces trajectoires.

*Preuve de la Proposition 4.6.6.* Nous divisons la preuve du Point (i) en plusieurs étapes.

Étape 1 : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Nous montrons que le processus  $(\langle Z_t^n, 1 \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est stochastiquement dominé par un processus récurrent positif.

Soit  $(Y_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le processus à valeurs dans  $(1/n)\mathbb{N}$  suivant :

$$Y_t^n = \langle Z_0^n, 1 \rangle + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq n Y_{s-}^n\}} \frac{1}{n} \left( \mathbf{1}_{0 \leq \theta < b(A_i(Z_{s-}^n))} - \mathbf{1}_{b(A_i(Z_{s-}^n)) \leq \theta < b(A_i(Z_{s-}^n)) + \underline{d} + \eta Y_{s-}^n} \right) Q(ds, di, d\theta) \\ + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{n} \left[ \mathbf{1}_{\{Y_{s-}^n = 0, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta \in [0, 1]\}} + \mathbf{1}_{\{i \leq n Y_{s-}^n\}} \mathbf{1}_{0 \leq \theta < \bar{b} - b(A_i(Z_{s-}^n))} \right] Q'(ds, di, d\theta). \quad (4.6.13)$$

avec les notations de la Définition 3.1.1.  $Q$  est la mesure ponctuelle de Poisson introduite à la Définition 2.2.1 et  $Q'$  en est une copie indépendante. Le second terme de (4.6.13) implique que 0 n'est pas un état absorbant pour  $Y^n$  et, lorsque  $Y_t^n > 0$ , complète les naissances de façon à ce que le taux de naissance soit  $\bar{b}$ . Par construction,  $(Y_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  domine  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Nous allons montrer que  $Y^n$  est exponentiellement ergodique.

Soient  $(T_k^n)_{k \in \mathbb{N}^*}$  les instants de sauts de  $(Y_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Considérons la chaîne de Markov à temps discret  $(Y_{T_k^n}^n)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et à valeurs dans  $(1/n)\mathbb{N}$ . Pour  $i \in \mathbb{N}$ ,

– la chaîne saute de  $i/n$  à  $i + 1/n$  avec probabilité

$$p_{i, i+1}^n = \frac{\bar{b}i}{(\bar{b} + \underline{d} + \eta i/n)i} \mathbf{1}_{i>0} + \mathbf{1}_{i=0},$$

– elle saute de  $i/n$  à  $i - 1/n$  avec probabilité

$$p_{i, i-1}^n = \frac{(\underline{d} + \eta i/n)i}{(\bar{b} + \underline{d} + \eta i/n)i} \mathbf{1}_{i>0}.$$

La chaîne  $(Y_{T_k^n}^n)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est irréductible. Ceci implique que la chaîne  $(Y_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  l'est également.

Nous allons utiliser un critère de Meyn et Tweedie ([97], Théorèmes 6.1 et 7.1) pour montrer que  $(Y_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est exponentiellement ergodique, donc récurrent positif. Le générateur de  $Y^n$  est l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini par :  $\forall F \in \mathcal{C}((1/n)\mathbb{N}, \mathbb{R}_+)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}F(i/n) = \mathbf{1}_{i>0} \left\{ \left( F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right) \right) \bar{b} \frac{i}{n} + \left( F\left(\frac{i-1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right) \right) \left( \tilde{d} + \eta \frac{i}{n} \right) \frac{i}{n} \right\} \\ + \left( F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0) \right) \mathbf{1}_{i=0} \quad (4.6.14)$$

Choisissons pour fonction  $F$  la fonction de Lyapounov  $V^n : i/n \mapsto i/n$  (identité), positive, mesurable, finie partout et tendant vers  $+\infty$  lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$ .  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}V^n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n^2} \left[ \bar{b} - \underline{d} - \eta \frac{i}{n} \right] \mathbf{1}_{i>0} + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{i=0} \leq -\frac{1}{n} V^n\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{(\bar{b} - \underline{d})^2}{4n^3 \eta} \vee \frac{1}{n}, \quad (4.6.15)$$

car  $\bar{b} - \underline{d} - \eta i/n < -1$  pour  $i > n(\bar{b} + 1 - \underline{d})/\eta$ , et

$$\sup_{0 < i \leq \frac{n(\bar{b} + 1 - \underline{d})}{\eta}} \left\{ \frac{i}{n^2} \left[ \bar{b} - \underline{d} - \eta \frac{i}{n} \right] \right\} \leq \frac{(\bar{b} - \underline{d})^2}{4n^3 \eta}.$$

L'inégalité (4.6.15) est de la forme  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}V^n\left(\frac{i}{n}\right) \leq -cV^n\left(\frac{i}{n}\right) + c'$  (où  $n$  est fixé). Le critère de Meyn et Tweedie est alors vérifié.

Etape 2 : Une condition suffisante pour que le Point (i) soit prouvé est que

$$\mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}_+, Y_t^n = 0) = 1.$$

Soit  $C > 1$  et  $\tau_C = \inf \{t > 0, Y_t^n = 0 \text{ ou } Y_t^n = C/n\}$ . Comme  $(Y_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est récurrent positif,  $\mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = 0) > 0$  (où  $Y^n$  est issu de  $C/n$  sous  $\mathbb{P}_{C/n}$ ).

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}_+, Y_t^n = 0) = \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = C/n \text{ et } \exists t \in \mathbb{R}_+, Y_{t+\tau_C}^n = 0) \\
& = \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = C/n) \mathbb{P}_{C/n}(\exists t \in \mathbb{R}_+, Y_t^n = 0), \text{ par la propriété de Markov fort} \\
& = \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = C/n) [\mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = C/n \text{ et } \exists t \in \mathbb{R}_+, Y_{t+\tau_C}^n = 0)] \\
& = \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = C/n) \left[ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = 0) \mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = C/n)^\ell \right], \text{ par réitération} \\
& = \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = C/n) \frac{\mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = 0)}{1 - \mathbb{P}_{C/n}(Y_{\tau_C}^n = C/n)} = \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = 0) + \mathbb{P}(Y_{\tau_C}^n = C/n) = 1.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du Point (i).

Considérons maintenant le Point (ii).

$$\mathbb{P} \left( \left| \langle Z_T^n, f \rangle - \int_0^{+\infty} f(a) \widehat{m}(a) da \right| > \varsigma \right) \leq A(T, n, \varsigma) + B(T, \varsigma) \quad (4.6.16)$$

$$\text{avec : } A(T, n, \varsigma) = \mathbb{P} \left( \left| \langle Z_T^n, f \rangle - \langle \xi_T, f \rangle \right| > \frac{\varsigma}{2} \right)$$

$$B(T, \varsigma) = \mathbb{P} \left( \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} |m(a, T) - \widehat{m}(a)| da > \frac{\varsigma}{2} \right). \quad (4.6.17)$$

Comme  $\widehat{m}$  est une solution exponentiellement stable de (4.6.4), alors, par le Point (iii) de la Proposition 4.6.5,  $\exists T_1 = T_1(\varsigma) > 0$ ,  $B(T_1, \varsigma) = 0$ . Par le Point (ii) de la Proposition 4.6.1 :  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,

$$A(T_1, n, \varsigma) \leq 2 \exp \left( -\frac{n\varsigma^2}{8\langle W(f) \rangle_{T_1}} \right) + \frac{C(T_1)}{n\varsigma^2} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T_1]} \|\eta_t\|_{C^{-(D+1), 1}}^2 \right) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.6.18)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_1 = n_1(\varepsilon, \varsigma, T_1(\varsigma))$ ,  $A(T_1, n_1, \varsigma) \leq \varepsilon$ , et le Point (ii) est prouvé.

Pour le choix de  $(T_q, n_q) = (T_1(1/q), n_1(1/q, 1/q, T_1(1/q)))$ , on a :  $\forall \varsigma > 0$ ,  $\forall q > 1/\varsigma$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left| \langle Z_{T_q}^{n_q}, f \rangle - \int_0^{+\infty} f(a) \widehat{m}(a) da \right| > \varsigma \right) \leq \mathbb{P} \left( \left| \langle Z_{T_q}^{n_q}, f \rangle - \int_0^{+\infty} f(a) \widehat{m}(a) da \right| > \frac{1}{q} \right) \leq \frac{1}{q}.$$

On en déduit que

$$\forall \varsigma > 0, \lim_{q \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \left| \langle Z_{T_q}^{n_q}, f \rangle - \int_0^{+\infty} f(a) \widehat{m}(a) da \right| > \varsigma \right) = 0$$

et  $(\langle Z_{T_q}^{n_q}, f \rangle)_{q \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\int_0^{+\infty} f(a) \widehat{m}(a) da$ , pour tout  $f \in W_0^{2D+1, 1}$ . Ceci termine la démonstration du Point (iii).  $\blacksquare$

Au chapitre suivant, nous compléterons ce résultat (Section 5.6.3) en établissant des estimées pour le temps de sortie du voisinage de l'équilibre  $\widehat{m}(a) da$ , en nous inspirant des travaux de Freidlin et Wentzell [50] (cf. également [32], [105]).

## Chapitre 5

# Déviations exponentielles pour l'approximation *grande population* d'un système de particules structuré en traits et âges

Dans ce chapitre, nous fixons  $T > 0$  et nous étudions les déviations exponentielles associées à la convergence de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la solution  $\xi$  de l'équation (3.0.1) dans  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  (Corollaire 3.2.4). Plus précisément, nous cherchons des estimées de

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in B),$$

pour un borélien  $B \subset \mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Les déviations que nous allons établir nous fourniront des précisions sur la vitesse de convergence et les temps de sortie de domaine par exemple. Celles-ci seront utiles pour les approximations du Chapitre 6 où nous considérons des problèmes tirés de la théorie de l'évolution.

Une première difficulté est liée à la non-compacité de l'ensemble des mesures finies sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ . La masse du processus microscopique n'est pas nécessairement bornée et aucune hypothèse de compacité n'est faite sur l'espace  $\tilde{\mathcal{X}}$ . Une seconde difficulté est liée au fait que les événements décrivant la dynamique de la population sont de natures différentes (naissances avec ou sans mutations, morts) et que les taux associés sont non-linéaires.

Nous introduisons la fonctionnelle d'action et notre résultat de déviations à la Section 5.1. Nous considérons ensuite des martingales exponentielles associées à  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et étudions l'existence de moments exponentiels (Section 5.2). Nous montrons une majoration de grandes déviations (Section 5.4) en suivant les idées de Dembo et Zeitouni [32]. L'un des ingrédients est la tension exponentielle de la famille des lois de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ . Nous reprenons à la Section 5.3 des techniques utilisées par Graham et Méléard [55]. Nous généralisons ces idées à l'étude de processus à valeurs mesures sur des espaces non nécessairement compacts et de masses *a priori* non bornées, en adaptant un argument employé par Dawson et Gärtner [31] et Fontbona [48] pour des systèmes de particules sans branchement et sans saut. Le problème de la borne inférieure est étudié à la Section 5.5 et s'appuie sur une formulation non-variationnelle de la fonctionnelle d'action. Nous utilisons pour cela un théorème de Riesz sur les espaces d'Orlicz en nous inspirant de la démarche de Léonard [78], Kipnis et Léonard [73]. Dans la preuve, nous serons amenés à utiliser un théorème de densité de Bishop-Phelps-Israel [8, 62].

**Notations :** Les notations suivantes serviront à simplifier les futures expressions. Soit l'espace  $E = \tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \times \{0, 1, 2\}$ . A chaque fonction  $f \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])$ , on peut associer une application  $\psi(f)$  définie sur  $E \times [0, T]$  par :  $\forall (x, a, x', u, t) \in E \times [0, T]$ ,

$$\psi(f)(x, a, x', u, t) = \begin{cases} f(x, 0, t) & \text{si } u = 0, \\ f(x', 0, t) & \text{si } u = 1, \\ -f(x, a, t) & \text{si } u = 2. \end{cases} \quad (5.0.1)$$

Pour  $t \in [0, T]$  et  $z = (z_t)_{t \in [0, T]} \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , soit la mesure positive suivante sur  $E$  :

$$m_t^{z, T}(dx, da, dx', du) = [b(x, a)(1 - p(x, a))\delta_0(du) + b(x, a)p(x, a)\delta_1(du) + d(x, a, z_{t-}U(x, a))\delta_2(du)] K(x, a, dx') z_{t-}(dx, da). \quad (5.0.2)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera  $dm_t^{z, T}$  au lieu de  $m_t^{z, T}(dx, da, dx', du)$ .

**Rappel sur les espaces d'Orlicz :** Pour obtenir une minoration des déviations exponentielles, nous allons nous appuyer sur un théorème de Riesz sur les espaces d'Orlicz.

On note  $\rho$  la transformée de Laplace de la loi de Poisson standard centrée : si  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre 1,

$$\rho(x) = \mathbb{E} \left( e^{x(Y-1)} \right) = e^x - x - 1. \quad (5.0.3)$$

Sa transformée de Legendre est :

$$\rho^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{yx + 1 + x - e^x\} = \begin{cases} (y+1) \log(y+1) - y & \text{si } y > -1, \\ 1 & \text{si } y = -1, \\ +\infty & \text{si } y < -1, \end{cases} \quad (5.0.4)$$

qui est positive et ne s'annule qu'en  $y = 0$ . Les fonctions  $\rho$  et  $\rho^*$  sont convexes conjuguées.

Pour  $\alpha \in \{\rho, \rho^*\}$ ,  $T > 0$  et  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , on définit les normes d'Orlicz suivantes sur l'ensemble des fonctions boréliennes de  $E \times \mathbb{R}_+$  :

$$\|g\|_{\alpha, z} = \inf \left\{ \kappa > 0, \int_0^T \int_E \alpha \left( \frac{|g(x, a, x', u, s)|}{\kappa} \right) m_s^{z, T}(dx, da, dx', du) ds \leq 1 \right\}. \quad (5.0.5)$$

Les ensembles des fonctions de normes d'Orlicz finies sont notés  $L^{\rho, z}$  et  $L^{\rho^*, z}$ . La fermeture  $E^{\rho, z}(E \times \mathbb{R}_+)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\rho, z}$  de l'espace des fonctions boréliennes bornées  $\mathcal{B}_b(E \times \mathbb{R}_+)$  est strictement incluse dans  $L^{\rho, z}$  (cf. [73] Section 3, par exemple) et admet un dual topologique qui peut-être identifié avec  $L^{\rho^*, z}$  grâce au théorème de représentation suivant :

**Théorème 5.0.7. Théorème de représentation de Riesz dans les espaces d'Orlicz** (cf. Rao et Ren [107], pages 93 et suivantes ou Kipnis et Léonard [73]) *Pour toute forme linéaire continue  $\ell$  sur  $E^{\rho, z}(E \times \mathbb{R}_+)$ , il existe une fonction  $h \in L^{\rho^*, z}$  telle que :*

$$\forall g \in E^{\rho, z}(E \times \mathbb{R}_+), \ell(g) = \int_0^T \int_E g(x, a, x', u, s) h(x, a, x', u, s) dm_s^{z, T}(dx, da, dx', du) ds.$$

## 5.1 Résultat principal du chapitre

Notre résultat principal est énoncé au Théorème 5.1.4.

**Hypothèse 5.1.1.** *Les hypothèses suivantes reprennent et renforcent les Hypothèses 3.2.1 :*

1.  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{d_x}$ .
2. La suite  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est déterministe et converge dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$  vers une mesure  $\xi_0$ .
3.  $\exists C_0 > 0$ ,  $\int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|) \xi_0(dx, da) \leq C_0$  and  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sup_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|) Z_0^n(dx, da) \leq C_0$
4.  $\forall \lambda > 0$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} < +\infty$ , et  $\exists \eta \in ]0, 1[$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} [\int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0^n(dx, da)]^{1+\eta} < +\infty$ .
5.  $\exists i_0 \in \llbracket 1, d_c \rrbracket$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists U_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^{d_c}$ ,  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\forall \lambda > 0$ ,

$$[u_{i_0} \geq U_0] \Rightarrow [(e^{\lambda/n} - 1)b(x, a) + (e^{-\lambda/n} - 1)d(x, a, u) < 0], \quad (5.1.1)$$

où l'on rappelle que  $d_c$  est le nombre d'interactions pris en compte (cf. Section 2.1.3).

6.  $\exists \underline{U} > 0$ ,  $\forall (x, a), (y, \alpha) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $U_{i_0}((x, a), (y, \alpha)) > \underline{U}$ , pour l'indice  $i_0$  du Point 5.

Le Point 2 est une hypothèse simplificatrice. On peut affaiblir en supposant que  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$  vers  $\xi_0$ . Dans ce cas, nous demandons que l'inégalité du Point 3 soit satisfaite  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, et nous considérons le Point 4 avec des espérances. Nous signalerons les modifications que cela entraîne pour la fonctionnelle d'action.

Le Point 3 est par exemple satisfait lorsqu'il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  strictement positives telles que  $\int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|) \xi_0(dx, da) < C_1$  et  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} (1 + |a|) Z_0^n(dx, da) < C_2$ .

Comme  $b$  est majoré par une constante  $\bar{b}$ , l'équation (5.1.1) est satisfaite si par exemple  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} d(x, a, u) = +\infty$  (ceci se produit dans le modèle logistique, cf. Exemple 2.1.14). Définissons, pour les constantes  $U_0$  et  $\underline{U}$  apparaissant aux Points 4 et 5 :

$$M := \frac{U_0}{\underline{U}}. \quad (5.1.2)$$

Alors, si  $Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  satisfait  $\langle Z, 1 \rangle > M$ , ceci implique que  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $ZU_{i_0}(x, a) \geq \underline{U}U_0/\underline{U} = U_0$  et :

$$\forall n \geq n_0, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall \lambda > 0, (e^{\lambda/n} - 1)b(x, a) + (e^{-\lambda/n} - 1)d(x, a, ZU(x, a)) < 0. \quad (5.1.3)$$

Nous définissons maintenant la fonctionnelle d'action qui apparaît dans le résultat de déviations du Théorème 5.1.4.

**Définition 5.1.2.** Pour  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  et  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , on définit  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z)$  par :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \begin{cases} \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])} \mathcal{I}^{f,T}(z), & \text{si } z_0 = \xi_0 \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

avec :

$$\mathcal{I}^{f,T}(z) = \ell^T(f, z) - c^T(f, z) \quad (5.1.5)$$

où  $\ell^T(f, z)$  et  $c^T(f, z)$  sont définies pour  $(f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  par :

$$\begin{aligned} \ell^T(f, z) &= \langle z_t, f_t \rangle - \langle z_0, f_0 \rangle - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( v(x, a) \nabla_a f_s(x, a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(x, a) \right) z_s(dx, da) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_E \psi(f)(x, a, x', u, s) m_s^{z,T}(dx, da, dx', du) ds, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

et :

$$c^T(f, z) = \int_0^T \int_E \rho(\psi(f)(x, a, x', u, s)) m_s^{z,T}(dx, da, dx', du) ds. \quad (5.1.7)$$

**Remarque 5.1.3.** Dans le cas où la suite  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas déterministe, mais est une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers  $\xi_0 \in (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{\epsilon})$  :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = J(z_0, \xi_0) + \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])} \mathcal{I}^{f, T}(z),$$

$$\text{où : } J(z_0, \xi_0) = \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \mathbb{R})} \left[ F(z_0) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E} \left( e^{nF(Z_0^n)} \right) \right].$$

**Théorème 5.1.4.** On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1.

(i) Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$ . Il existe  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  telle que  $z$  soit la solution de l'équation d'évolution suivante :  $\forall (f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$ ,

$$\langle z_t, f_t \rangle = \langle z_0, f_0 \rangle + \int_0^t \left\langle z_s, v \nabla_a f_s + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right\rangle ds + \int_0^T \int_E (1 + h^z) \psi(f) dm_s^{z, T} ds. \quad (5.1.8)$$

On a alors la représentation non variationnelle suivante de la fonctionnelle d'action :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \int_0^T \int_E \rho^*(h^z(x, a, x', u, s)) m_s^{z, T}(dx, da, dx', du) ds. \quad (5.1.9)$$

(ii) Soit :

$$\mathfrak{G} = \left\{ z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})) \mid \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty, \text{ et } h^z \in L^\infty(E \times [0, T], \mathbb{R}) \right\} \quad (5.1.10)$$

La suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  satisfait les inégalités de déviations suivantes :  $\forall B$  ensemble mesurable de  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{\epsilon}))$ ,

$$\begin{aligned} - \inf_{z \in \mathring{B} \cap \mathfrak{G}} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in B) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in B) \leq - \inf_{z \in \mathring{B}} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z), \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

où par convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .

Ce résultat de déviations exponentielles sera utilisé à la Section 5.6 pour obtenir des résultats sur les problèmes de sortie de domaine. En particulier, le comportement au voisinage des solutions stationnaires asymptotiquement stables de l'équation logistique avec structure d'âge sera étudié (Section 5.6.3). Des applications à la théorie de l'évolution feront l'objet du Chapitre 6.

La majoration dans (5.1.11) est une majoration de grandes déviations. La minoration quant à elle n'est qu'une minoration locale, l'infimum étant pris sur  $\mathring{B} \cap \mathfrak{G}$  et non  $\mathring{B}$ . Lors de la démonstration de la borne inférieure, nous allons être amenés à régulariser  $h^z$  en l'approchant par une suite  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de perturbations de formes particulières, continues et bornées. A chaque  $h_m$ , nous associons la solution  $z^m$  de l'équation d'évolution (5.1.8) perturbée par  $h_m$ . La convergence de  $z^m$  vers  $z$  lorsque  $h^z$  est bornée est prouvée à la Proposition 5.5.10, mais nous ne l'avons pas montrée dans le cas général. Les travaux dont nous nous sommes inspirés [78, 73, 48] se heurtent également à cette difficulté, mais sous une forme différente : le problème est un problème d'unicité de la solution de l'équation perturbée (5.1.8) et non un problème de convergence.

La minoration locale que nous obtenons est toutefois un résultat utile, que nous utiliserons à la Section 5.6. Cette minoration nous fournit une information dès que  $\mathring{B} \cap \mathfrak{G} \neq \emptyset$ , auquel cas le minorant n'est pas  $-\infty$ . C'est le cas dès que  $\mathring{B}$  contient la solution de l'équation (3.0.1), correspondant à une perturbation nulle. Plus généralement, les trajectoires de  $\mathring{B}$  correspondent à des évolutions de populations pour lesquelles les taux de naissance et de mort individuels restent finis.

## 5.2 Martingales et moments exponentiels

Sous le Point 4 des Hypothèses 5.1.1, supposant l'existence de moments exponentiels pour la condition initiale, on a propagation des moments exponentiels pour  $t \in [0, T]$ .

**Proposition 5.2.1.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1 :  $\forall \lambda > 0, \forall t \in [0, T]$ ,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( e^{\lambda \langle Z_t^n, 1 \rangle} \right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + \lambda \bar{b} M T e^{\lambda M} < +\infty, \quad (5.2.1)$$

où  $M$  est définie en (5.1.2). □

*Démonstration.* Soient  $N > 0$  et  $(\tau_N^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définis (3.1.5). Soit  $\lambda > 0$ . En utilisant les propriétés de martingales du Théorème 3.1.8 et la formule d'Itô :  $\forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} e^{\lambda \langle Z_{t \wedge \tau_N^n}^n, 1 \rangle} &= e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle + \lambda/n} - e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle} \right) b(x, a) n Z_s^n(dx, da) ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle - \lambda/n} - e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle} \right) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) n Z_s^n(dx, da) ds + M_{t \wedge \tau_N^n}^n \\ &= e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + \int_0^{t \wedge \tau_N^n} m(Z_s^n) e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle} ds + M_{t \wedge \tau_N^n}^n, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

où :

$$m(Z_s^n) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left[ \left( e^{\lambda/n} - 1 \right) b(x, a) + \left( e^{-\lambda/n} - 1 \right) d(x, a, Z_s^n U(x, a)) \right] n Z_s^n(dx, da),$$

et où  $(M_t^n)_{t \in [0, T]}$  est une martingale  $L^2$  càdlàg issue de 0, définie par :  $\forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$M_t^n = \int_0^t \int_E \sigma(Z_{s-}^n, i, \theta, x') \tilde{Q}(ds, di, d\theta, dx'),$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma(Z_{s-}^n, i, \theta, x') &= \left( e^{\lambda \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle + \lambda/n} - e^{\lambda \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle} \right) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta \leq m_2(s, Z_s^n, i, x')\}} \\ &+ \left( e^{\lambda \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle - \lambda/n} - e^{\lambda \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle} \right) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_s^n, i, x') \leq \theta \leq m_3(s, Z_s^n, i, x')\}}, \end{aligned}$$

et avec  $\tilde{Q}$  la mesure compensée de la mesure de Poisson  $Q$  introduite à la Définition 3.1.2.

En prenant l'espérance : (rappelons que  $Z_0^n$  est déterministe)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{\lambda \langle Z_{t \wedge \tau_N^n}^n, 1 \rangle} \right) &\leq e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \tau_N^n} m(Z_s^n) \mathbf{1}_{m(Z_s^n) \geq 0} e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle} ds \right) \\ &\leq e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + \int_0^t \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N^n\}} m(Z_s^n) \mathbf{1}_{m(Z_s^n) \geq 0} e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle} \right) ds, \end{aligned}$$



en utilisant le théorème de Fubini (l'intégrant est borné en  $(s, \omega)$  par choix de  $\tau_N^n$ ). Par les Hypothèses 5.1.1,  $\{m(Z_s^n) \geq 0\} \subset \{\langle Z_s^n, 1 \rangle \leq M\}$  et  $\exists n_0 > 0, \forall n > n_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{\lambda \langle Z_{t \wedge \tau_N^n}^n, 1 \rangle} \right) &\leq e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + \int_0^t \mathbb{E} \left( m(Z_s^n) \mathbf{1}_{m(Z_s^n) \geq 0} \mathbf{1}_{\langle Z_s^n, 1 \rangle \leq M \wedge N} e^{\lambda \langle Z_s^n, 1 \rangle} \right) ds \\ &\leq e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + n(e^{\lambda/n} - 1) \bar{b}(M \wedge N) T e^{\lambda(N \wedge M)} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left( e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} + n(e^{\lambda/n} - 1) \bar{b} M T e^{\lambda M} \right), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

qui est fini par le Point 4 des Hypothèses 5.1.1 et par le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\lambda/n} - 1) = \lambda$ . Comme (5.2.3) ne dépend pas de  $N$  et comme  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \tau_N^n = +\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s. (Point 4 des Hypothèses 5.1.1 et Théorème 3.1.7), on obtient (5.2.1) en faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$  dans (5.2.3) et en utilisant le lemme de Fatou comme en (2.2.13).  $\blacksquare$

**Théorème 5.2.2.** *Soit  $f \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ . Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1, le processus défini pour  $t \in [0, T]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  par :*

$$\Lambda_t^{n,f} = \exp \left( M_t^{n,f} - \int_0^t \int_E n \rho \left( \frac{\psi(f)(x, a, x', u, s)}{n} \right) m_s^{Z^n, T}(dx, da, dx', du) ds \right), \quad (5.2.4)$$

où  $(M_t^{n,f})_{t \in \mathbb{R}_+}$  a été défini en (3.1.29), est une martingale.

*Démonstration.* Introduisons :

$$\Xi_t^{n,f} = \int_0^t \int_E n \rho \left( \frac{\psi(f)(x, a, x', u, s)}{n} \right) m_s^{Z^n, T}(dx, da, dx', du) ds. \quad (5.2.5)$$

Il s'agit d'un processus à variations finies. En appliquant la formule d'Itô au processus  $\Lambda_t^{n,f} = \exp \left( M_t^{n,f} - \Xi_t^{n,f} \right)$  localisé par les temps d'arrêt  $\tau_N^n$  (3.1.6) :

$$\begin{aligned} \Lambda_{t \wedge \tau_N^n}^{n,f} &= \Lambda_0^{n,f} + \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \Lambda_{s-}^{n,f} dM_s^{n,f} - \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \Lambda_s^{n,f} d\Xi_s^{n,f} \\ &\quad + \sum_{s \leq t \wedge \tau_N^n} \left[ \left( e^{M_s^{n,f}} - e^{M_{s-}^{n,f}} \right) e^{-\Xi_s^{n,f}} - \Lambda_{s-}^{n,f} \Delta M_s^{n,f} \right] \\ &= \Lambda_0^{n,f} + \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \Lambda_{s-}^{n,f} dM_s^{n,f} - \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \Lambda_s^{n,f} d\Xi_s^{n,f} + \sum_{s \leq t \wedge \tau_N^n} \Lambda_{s-}^{n,f} \rho(\Delta M_s^{n,f}). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Comme :  $\Delta M_t^{n,f} = \langle Z_t^n, f \rangle - \langle Z_{t-}^n, f \rangle$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{s \leq t \wedge \tau_N^n} \Lambda_{s-}^{n,f} \rho(\Delta M_s^{n,f}) &= \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \int_{\mathcal{E}} \Lambda_{s-}^{n,f} \mathbf{1}_{\{i \leq N_{s-}^n\}} \left[ \rho \left( \frac{f(X_i(Z_{s-}^n), 0)}{n} \right) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta < m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &\quad + \rho \left( \frac{f(x', 0)}{n} \right) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &\quad \left. + \rho \left( -\frac{f(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n))}{n} \right) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') \leq \theta < m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right] Q(ds, di, d\theta, dx'). \end{aligned}$$

La partie à variations finies de (5.2.6) est donc :

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \Lambda_s^{n,f} d\Xi_s^{n,f} + \int_0^{t \wedge \tau_N^n} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \Lambda_s^{n,f} n \left( \rho \left( \frac{f(x, 0)}{n} \right) b(x, a)(1 - p(x, a)) \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{X}} \rho \left( \frac{f(x', 0)}{n} \right) b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') + \rho \left( -\frac{f(x, a)}{n} \right) d(x, a, Z_{s-}^n U(x, a)) \right) Z_{s-}^n(dx, da) ds = 0, \end{aligned}$$

par définition de  $\Xi^{n,f}$ . Ceci montre que  $\Lambda^{n,f}$  est une martingale locale.

Montrons que  $\Lambda^{n,f}$  est une vraie martingale. Sous le Point 4 des Hypothèses 5.1.1,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \tau_N^n = +\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s. Alors par le Lemme de Fatou :

$$0 \leq \mathbb{E} \left( \Lambda_t^{n,f} \right) = \mathbb{E} \left( \liminf_{N \rightarrow +\infty} \Lambda_{t \wedge \tau_N^n}^{n,f} \right) \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( \Lambda_{t \wedge \tau_N^n}^{n,f} \right) = 1. \quad (5.2.7)$$

Donc  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\Lambda_t^{n,f}$  est intégrable et ceci conclut la preuve.  $\blacksquare$

### 5.3 Tension exponentielle

La tension exponentielle de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est centrale pour montrer le Théorème 5.1.4.

**Définition 5.3.1.** *La suite des lois de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  est exponentiellement tendue si :  $\forall L > 0$ ,  $\exists K_L \subset \mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  compact,*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} (Z^n \notin K_L) \leq -L.$$

#### 5.3.1 Critère de compacité relative sur $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$

Afin de construire un compact satisfaisant la Définition 5.3.1, nous commençons par rappeler une caractérisation des ensembles relativement compacts de  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  qui apparaît dans Kurtz [76] (page 9, cf. également Jakubowski [65] Theorem 1.7 and Lemma 3.3) et qui généralise le théorème d'Arzela-Ascoli.

**Théorème 5.3.2.** *Le module de continuité pour  $y \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R})$  et  $\delta \in ]0, 1[$  est défini par :*

$$w'(y, \delta) = \inf_{\{t_l\}} \left( \max_{1 < i \leq \text{card}\{t_l\}} w(y, [t_{i-1}, t_i]) \right)$$

où l'infimum est considéré sur toutes les subdivisions  $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_{\text{card}\{t_l\}} = T$  telles que  $\forall i \in [1, \text{card}\{t_l\}]$ ,  $t_i - t_{i-1} > \delta$  et où :

$$w(y, [t_{i-1}, t_i]) = \sup_{s, t \in [t_{i-1}, t_i[} |y_s - y_t|.$$

Soient  $(\phi_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  une famille dénombrable dense dans  $\mathcal{C}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  ( $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{d_x} \times \mathbb{R}_+^d$  et il existe une suite dense dans  $\mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ ). On peut supposer ces fonctions de classe  $\mathcal{C}^{0,1}$  par la Proposition A.2.1). On pose par convention  $\phi_0 \equiv 1$ . Un ensemble  $A \subset \mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  est relativement compact pour la topologie de Skorohod si et seulement si :

1.  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{z \in A} w'(\langle z, \phi_r \rangle, \delta) = 0$ .
2. L'ensemble  $\{z_t \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), z \in A, t \in [0, T]\}$  est relativement compact dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$ .

Les mesures  $Z_t^n$  pour  $t \in [0, T]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  ne sont pas nécessairement de masses bornées et l'espace  $\tilde{\mathcal{X}}$  n'est pas supposé compact. Dans la Section 5.3.2, nous commençons par considérer la suite  $(Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  localisée par  $\zeta_N^n$  (3.1.6), pour  $N > 0$ . Nous nous inspirons de Graham et Méléard [55] pour contrôler le module de continuité de ces processus (Section 5.3.2). Le Point 2. du Théorème 5.3.2 ainsi que le problème de la localisation par  $\zeta_N^n$  sont étudiés à la Section 5.3.3. Nous généralisons un argument utilisé par Dawson Gärtner [31], Fontbona [48] dans le cas de processus continus à valeurs probabilités. Nous montrons qu'il existe un choix de  $N$  tel que la probabilité que  $\zeta_N^n \leq T$  soit exponentiellement petite. Alors la tension exponentielle des lois de  $((Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n)_{t \in [0, T]})_{n \in \mathbb{N}^*}$  implique la tension exponentielle des lois de  $((Z_t^n)_{t \in [0, T]})_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

### 5.3.2 Construction d'un ensemble satisfaisant le Point 1. du Théorème 5.3.2

**Proposition 5.3.3.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1,  $\forall L > 0, \forall N > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists \mathcal{K}_{L,N}^1$  fermé de  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ ,  $\forall n \geq n_0$  :*

$$\mathbb{P} \left( Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{L,N}^1 \right) \leq \frac{e^{-nL}(2 - e^{-L})}{(1 - e^{-L})^2} \quad (5.3.1)$$

et tel que le Point 1 du Théorème 5.3.2 soit satisfait :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{z \in \mathcal{K}_{L,N}^1} w'(\langle z, \phi_r \rangle, \delta) = 0. \quad (5.3.2)$$

Soit  $\phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ . Nous commençons par montrer que pour toute constante positive  $\eta > 0$ , la probabilité  $\mathbb{P} \left( \sup_{|t-s| < \delta} |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > \eta \right)$  est exponentiellement petite pour un bon choix de  $\delta > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  (Proposition 5.3.5). Ceci nous permet de construire l'ensemble  $\mathcal{K}_{L,N}^1$  et de prouver la Proposition 5.3.3 en fin de section.

**Lemme 5.3.4.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1 :  $\forall \varepsilon > 0, \forall N > 0, \forall c > 0, \forall \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{|t-s| \leq \delta} |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 4\varepsilon \right) \leq 8 \left( \frac{T}{\delta} + 1 \right) e^{-nc\varepsilon + 2\delta n S_c(N, \phi)} \quad (5.3.3)$$

où  $S_c(N, \phi) = [\rho(c\|\phi\|_\infty)N(\bar{b} + \bar{d}(1 + N))] \vee [c(\bar{v}2N\|\nabla_a \phi\|_\infty + N\|\phi\|_\infty(\bar{b} + \bar{d}(1 + N)))]$ .  $\square$

*Démonstration.* Le supremum dans (5.3.3) est considéré sur les couples de temps  $(s, t)$ . Nous allons les dissocier en introduisant la subdivision de pas  $\delta$ ,  $\Sigma = (i\delta)_{0 \leq i \leq [T/\delta]}$ . On note  $\sigma(s)$  le point de la subdivision de  $\Sigma$  tel que  $\sigma(s) \leq s < \sigma(s) + \delta$ . Alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \sup_{|t-s| \leq \delta} |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 4\varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \exists s, t \in [0, T], s \leq t < s + \delta, |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 4\varepsilon \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \exists s, t \in [0, T], s \leq t < s + \delta, |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{\sigma(s) \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| + |\langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{\sigma(s) \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 4\varepsilon \right) \\ &\leq 2\mathbb{P} \left( \exists t \in [0, T], \exists \sigma \in \Sigma, \sigma \leq t < \sigma + \delta, |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{\sigma \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 2\varepsilon \right) \\ &\leq 2 \left( \frac{T}{\delta} + 1 \right) \sup_{s \in [0, T]} \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 2\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

On a :

$$\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle = (M_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) + (V_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - V_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}),$$

où  $M^{n, \phi}$  et  $V^{n, \phi}$  ont été définis en (3.1.29) et (3.2.1).

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > 2\varepsilon \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |M_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}| > \varepsilon \right) + \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |V_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - V_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}| > \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Par l'inégalité de Doob, on a pour tout réel positif  $c$  :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |M_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}| > \varepsilon \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} nc(M_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) > nc\varepsilon \right) + \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} -nc(M_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) > nc\varepsilon \right) \\
& \leq e^{-nc\varepsilon} \left( \mathbb{E} \left( \exp \left( nc(M_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \right) + \mathbb{E} \left( \exp \left( -nc(M_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \right) \right). \tag{5.3.6}
\end{aligned}$$

On a :

$$A = \mathbb{E} \left( \exp \left( nc(M_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \right) = \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \exp \left( nc(M_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \mid \mathcal{F}_{s \wedge \zeta_N^n} \right) \right).$$

Par la propriété de Markov fort, et avec  $m_1, m_2$  et  $m_3$  introduits à la Définition 3.1.2 :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left( \exp \left( nc(M_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \mid \mathcal{F}_{s \wedge \zeta_N^n} \right) \\
& = \mathbb{E}_{Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n} \left( \exp \left( nc \int_0^{(2\delta) \wedge \zeta_N^n} \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{n} [ \phi(X_i(Z_{u-}^n), 0) \mathbf{1}_{0 \leq \theta < m_1} + \phi(x', 0) \mathbf{1}_{m_1 \leq \theta < m_2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \phi(X_i(Z_{u-}^n), A_i(Z_{u-}^n)) \mathbf{1}_{m_2 \leq \theta < m_3} ] \tilde{Q}(du, di, d\theta, dx') \right) \right) \\
& = \mathbb{E}_{Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n} \left( e^{ncM_{(2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}} \right) = \mathbb{E}_{Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n} \left( e^{M_{(2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, nc\phi}} \right) = \mathbb{E}_{Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n} \left( \Lambda_{(2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, nc\phi} \exp \left( \Xi_{(2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, nc\phi} \right) \right), \tag{5.3.7}
\end{aligned}$$

pour  $\Lambda^{n, nc\phi}, \Xi^{n, nc\phi}$  définis en (5.2.4) et (5.2.5). Par choix de  $\zeta_N^n$  et par croissance de  $\rho$  sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$\Xi_{(2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, nc\phi} \leq n\rho(c\|\phi\|_\infty)N(\bar{b} + \bar{d}(1+N))2\delta. \tag{5.3.8}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
A & \leq \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}_{Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n} \left( \Lambda_{(2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, nc\phi} \exp \left( n\rho(c\|\phi\|_\infty)N(\bar{b} + \bar{d}(1+N))2\delta \right) \right) \right] \\
& \leq \exp \left( n\rho(c\|\phi\|_\infty)N(\bar{b} + \bar{d}(1+N))2\delta \right) \tag{5.3.9}
\end{aligned}$$

car  $\Lambda^{n, nc\phi}$  est une martingale issue de 1.

Par (5.3.6) et (5.3.9) :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |M_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - M_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}| > \varepsilon \right) \leq 2 \exp \left( -nc\varepsilon + 2\delta n\rho(c\|\phi\|_\infty)N(\bar{b} + \bar{d}(1+N)) \right). \tag{5.3.10}$$

Pour la partie à variations finies :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [s, s+2\delta[} |V_{t \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - V_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}| > \varepsilon \right) \\
& \leq e^{-nc\varepsilon} \left( \mathbb{E} \left( \exp \left( nc(V_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - V_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \right) + \mathbb{E} \left( \exp \left( -nc(V_{(s+2\delta) \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi} - V_{s \wedge \zeta_N^n}^{n, \phi}) \right) \right) \right) \\
& \leq 2 \exp \left( -nc\varepsilon + 2\delta nc[2N\bar{v}\|\nabla_a \phi\|_\infty + N\|\phi\|_\infty(\bar{b} + \bar{d}(1+N))] \right), \tag{5.3.11}
\end{aligned}$$

par choix de  $\zeta_N^n$ . Le résultat annoncé est obtenu par (5.3.4), (5.3.5), (5.3.10) et (5.3.11).  $\blacksquare$

On déduit du Lemme 5.3.4 le résultat de déviations suivant :

**Proposition 5.3.5.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1 :  $\forall \phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ ,  $\forall L > 0$ ,  $\forall N > 0$ ,  $\forall \eta > 0$ ,  $\exists \delta(L, N, \eta, T, \phi) > 0$ ,  $\exists n(L, N, \eta, T, \phi) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n(L, N, \eta, T, \phi)$ ,  $\forall \delta \leq \delta(L, N, \eta, T, \phi)$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{|t-s| < \delta} |\langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle| > \eta \right) \leq e^{-nL}.$$

*Démonstration.* On applique le Lemme 5.3.4 avec le choix de  $\varepsilon = \eta/4$ ,  $c = 12L/\eta$ ,  $\delta(L, N, \eta, T, \phi) = L/(2S_c(N, \phi))$  et  $n(L, N, \eta, T) = 1/L \times \log(8((T/\delta(L, N, \eta, T, \phi)) + 1))$ . Le membre de droite de (5.3.3) étant décroissant lorsque  $\delta$  décroît vers 0 et lorsque  $n$  croît vers l'infini, pour  $\delta < c\varepsilon/(2S_c(N, \phi))$ , la Proposition est prouvée. ■

*Preuve de la Proposition 5.3.3.* Soit  $(\phi_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $\mathcal{C}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  dense dans  $\mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  (cf. Proposition A.2.1) et soit  $\phi_0 \equiv 1$ . On définit :

$$L_r = \begin{cases} rL & \text{si } r > 0 \\ L & \text{si } r = 0. \end{cases} \quad (5.3.12)$$

On introduit :

$$\mathcal{K}_\phi(\eta, \delta) = \left\{ z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})), |w'(\langle z, \phi \rangle, \delta) \leq \eta \right\}.$$

Comme :

$$w'(\langle z, \phi \rangle, \delta) \leq \sup_{|s-t| \leq \delta} (|\langle z_s, \phi \rangle - \langle z_t, \phi \rangle|),$$

on obtient pour  $n(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)$  et  $\delta(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)$  donnés par la Proposition 5.3.5 :  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)$ ,  $\forall \delta \leq \delta(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)$ ,

$$\mathbb{P} \left( Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{\phi_r}(1/k, \delta) \right) \leq e^{-nkL_r}.$$

On souhaite maintenant obtenir une borne valable pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})), \lim_{\delta \rightarrow 0} w'(\langle z, \phi_r \rangle, \delta) = 0,$$

alors, par les propriétés de moment de  $Z^n$  :  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P} \left( Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{\phi_r}(1/k, \delta) \right) = 0.$$

Ainsi, il existe pour tout  $n \in \llbracket 1, n(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r) \rrbracket$ , une constante strictement positive  $\delta^{(n)}(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)$  telle que :  $\forall \delta < \delta^{(n)}(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)$ ,

$$\mathbb{P} \left( Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{\phi_r}(1/k, \delta) \right) \leq e^{-nkL_r}.$$

En choisissant :

$$\delta_{k,r}(L, N, T) = \min \left( \delta^{(1)}(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r), \dots, \delta^{(n(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r)-1)}(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r), \delta(kL_r, N, 1/k, T, \phi_r) \right), \quad (5.3.13)$$

on trouve :  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall \delta < \delta_{k,r}(L, N, T)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P} \left( Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{\phi_r}(1/k, \delta) \right) \leq e^{-nkL_r}.$$

En posant :

$$\mathcal{K}_{L,N}^1 = \text{adh} \left[ \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{K}_{\phi_r}(1/k, \delta_{k,r}(L, N, T)) \right] \quad (5.3.14)$$

on a :

$$\mathbb{P} \left( Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{L,N}^1 \right) \leq \sum_{r \in \mathbb{N}^*} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} e^{-nkrL} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} e^{-nkL} \leq \frac{e^{-nL}(2 - e^{-L})}{(1 - e^{-L})^2},$$

et par construction, (5.3.2) est satisfait.  $\blacksquare$

### 5.3.3 Construction d'un ensemble satisfaisant le Point 2 du Théorème 5.3.2

#### 5.3.3.1 Résultat de la Section 5.3.3

Dans cette section, nous construisons un ensemble compact de  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{\epsilon})$  tel que le Point 2 du Théorème 5.3.2 soit satisfait. Nous obtenons également des inégalités de déviations exponentielles pour les temps d'arrêt  $\tau_N^n$  et  $\zeta_N^n$  définis en (3.1.5) et (3.1.6).

**Proposition 5.3.6.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1,  $\forall L > 0, \exists \mathcal{K}_L^2$  compact de  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{\epsilon})$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \mathbb{P}(\exists t \in [0, T], Z_t^n \notin \mathcal{K}_L^2) \right) \leq -L. \quad (5.3.15)$$

Pour la démonstration de la Proposition 5.3.6, nous allons être amenés à considérer la classe de fonctions  $\mathfrak{K}$  suivante (5.3.16). L'existence d'une telle classe de fonctions est démontrée en Annexe (Proposition A.2.3). Soient :

1.  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\mathcal{C}_b(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$  telle que :
  - $\forall m \in \mathbb{N}, \exists c_m > 0, \forall x \in \mathcal{X}, c_m \leq \varphi_m(x) \leq \|\varphi_m\|_\infty < +\infty$ .
  - pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$ , il existe une sous-suite  $(\varphi_{\psi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  de  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\varphi$ .
2.  $(\vartheta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$  telle que :
  - pour tout  $p \in \mathbb{N}, \vartheta_p$  est polynômiale sur un compact de  $\mathbb{R}_+^d$  et constante en dehors de ce compact,
  - $\forall p \in \mathbb{N}, \exists c_p > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+^d, c_p \leq \vartheta_p(a) \leq \|\vartheta_p\|_\infty < +\infty$ .
  - pour tout  $\vartheta \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ , il existe une sous-suite  $(\vartheta_{\psi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  de  $(\vartheta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\vartheta$ .

on définit :

$$\mathfrak{K} = \left\{ \phi(x, a) = \sum_{(i_1, i_2) \in I} \alpha_{i_1 i_2} \varphi_{i_1}(x) \vartheta_{i_2}(a), \quad I \subset \mathbb{N}^2 \text{ finie, } (\alpha_{i_1 i_2})_{(i_1 i_2) \in I} \in \mathbb{Q}_+^I \right\}, \quad (5.3.16)$$

**Lemme 5.3.7.** *La classe  $\mathfrak{K}$  est une famille dénombrable de fonctions strictement positives et pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$ , il existe une suite  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathfrak{K}$  convergeant uniformément vers  $\phi$ . De plus,  $\forall \mu \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \langle \mu, \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mu, \phi_k \rangle$ .*

Ce résultat est prouvé à la Proposition A.2.3 en annexe. Afin d'établir l'estimée (5.3.15), nous aurons besoin du Lemme suivant, prouvé à la Section 5.3.3.2 :

**Lemme 5.3.8.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1.*

(i)  $\forall L > 0, \exists N = N(T, L, C_0) > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n > n_0,$

$$\mathbb{P}(\tau_N^n > T) \leq e^{-nL}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\zeta_N^n > T) \leq e^{-nL}, \quad (5.3.17)$$

$C_0$  étant définie au Point 3 des Hypothèses 5.1.1.

(ii)  $\forall \phi \in \mathfrak{K}, \forall L > 0, \exists C = C(\phi, T, L, C_0) > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n > n_0,$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, \phi \rangle > C \right) \leq e^{-nL}. \quad (5.3.18)$$

Nous démontrons maintenant la Proposition 5.3.6.

*Preuve de la Proposition 5.3.6.* Introduisons les ensembles suivants pour  $C > 0$  et  $\phi \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  :

$$\mathcal{K}_\phi(C) = \left\{ z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}) \mid \langle z, \phi \rangle \leq C \right\}.$$

Soit  $(\phi_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  une indexation de  $\mathfrak{K}$  (5.3.16). Posons par convention  $\phi_0 \equiv 1$ . On définit  $L_r$  comme en (5.3.12). Nous allons montrer que l'ensemble :

$$\mathcal{K}_L^2 = \text{adh} \left[ \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_{\phi_r}(C(\phi_r, T, L_r, C_0)) \right], \quad (5.3.19)$$

où  $C(\phi_r, T, L_r, C_0)$  est déterminée par le Lemme 5.3.8, est compact dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$  et que (5.3.15) est satisfait.

Soit  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $\bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_{\phi_r}(C(\phi_r, T, L_r, C_0))$ . Pour chaque  $r \in \mathbb{N}$  fixé, la suite  $(\langle z_m, \phi_r \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*}$  est, par définition de  $\mathcal{K}_{\phi_r}(C(\phi_r, T, L_r, C_0))$ , une suite réelle positive (les fonctions  $(\phi_r)_{r \in \mathbb{N}}$  sont positives) majorée par  $C(\phi_r, T, L_r, C_0)$ . Elle est donc relativement compacte.

Par procédé diagonal, on peut extraire de  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite, encore notée  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  par abus de notation, telle que pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , la suite  $(\langle z_m, \phi_r \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite,  $\ell(\phi_r)$ .

Soit  $g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$ . Par le Lemme 5.3.7, il existe une sous-suite  $(\phi_{\psi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$  de la famille  $(\phi_r)_{r \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $g$  et qui est donc une suite de Cauchy pour  $\|\cdot\|_\infty$ . La suite  $(\ell(\phi_{\psi(r)}))_{r \in \mathbb{N}}$  est alors aussi une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  puisque :

$$\begin{aligned} |\ell(\phi_{\psi(r_1)}) - \ell(\phi_{\psi(r_2)})| &= \lim_{m \rightarrow +\infty} |\langle z_m, \phi_{\psi(r_1)} - \phi_{\psi(r_2)} \rangle| \\ &\leq \|\phi_{\psi(r_1)} - \phi_{\psi(r_2)}\|_\infty \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle z_m, 1 \rangle = \|\phi_{\psi(r_1)} - \phi_{\psi(r_2)}\|_\infty \ell(1). \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

On peut donc définir la limite  $\ell(g) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \ell(\phi_{\psi(r)})$ . La définition de la limite ne dépend pas du choix de la sous-suite  $(\phi_{\psi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $g$ .

Soient  $g, f \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Soient  $(\phi_{\psi_1(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ ,  $(\phi_{\psi_2(r)})_{r \in \mathbb{N}}$  et  $(\phi_{\psi_3(r)})_{r \in \mathbb{N}}$  trois sous-suites de  $(\phi_r)_{r \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $g, f$  et  $\lambda g + f$ . On a :

$$\begin{aligned} |\ell(\lambda g + f) - (\lambda \ell(g) + \ell(f))| &= \lim_{r \rightarrow +\infty} |\ell(\phi_{\psi_3(r)}) - \lambda \ell(\phi_{\psi_1(r)}) - \ell(\phi_{\psi_2(r)})| \\ &\leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \ell(1) \|\phi_{\psi_3(r)} - \lambda \phi_{\psi_1(r)} - \phi_{\psi_2(r)}\|_\infty \\ &\leq \ell(1) \left( \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\phi_{\psi_3(r)} - \lambda g - f\|_\infty + \lim_{r \rightarrow +\infty} \|\lambda g - \phi_{\psi_1(r)} + (f - \phi_{\psi_2(r)})\|_\infty \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Pour une fonction  $g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_-)$  négative, on pose  $\ell(g) := -\ell(-g)$ . Pour  $g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ , on pose  $\ell(g) = \ell([g]_+) - \ell([g]_-)$ , où  $[.]_+$  et  $[.]_-$  dénotent les parties positive et négative.

Soient  $f, g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  :

$$|\ell(f) - \ell(g)| \leq \|f - g\|_\infty \ell(1).$$

Si  $\ell(1) \neq 0$ , l'application

$$g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}) \mapsto \frac{\ell(g)}{\ell(1)} \in \mathbb{R} \quad (5.3.22)$$

est donc bien définie, linéaire, continue, positive. Par le Théorème de représentation de Riesz (cf. Rudin [110], Theorem 6.19 page 130), il existe alors une unique mesure de probabilité  $\nu \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}})$ , telle que  $\forall g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ ,

$$\ell(g) = \ell(1) \int_{\tilde{\mathcal{X}}} g(x, a) \nu(dx, da). \quad (5.3.23)$$

Par construction, pour tout  $g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ ,  $(\langle z_m, g \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\langle \ell(1)\nu, g \rangle$ . Comme  $(\langle z_m, 1 \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell(1) = \langle \ell(1)\nu, 1 \rangle$ , la suite  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge étroitement vers  $\ell(1)\nu$  (cf. [91]). Si  $\ell(1) = 0$ , alors  $\forall g \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ ,  $(\langle z_m, g \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 et  $(\langle z_m, 1 \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge aussi vers 0, impliquant que  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge étroitement vers la mesure nulle.

L'ensemble  $\bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_{\phi_r}(C(\phi_r, T, L_r, C_0))$  est donc relativement compact dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$ , et son adhérence  $\mathcal{K}_L^2$  est compacte dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e})$ . Enfin :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists t \in [0, T], Z_t^n \notin \mathcal{K}_L^2) &\leq \sum_{r \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\exists t \in [0, T], Z_t^n \notin \mathcal{K}_{\phi_r}(C(\phi_r, T, L_r, C_0))) \\ &\leq \sum_{r \in \mathbb{N}^*} e^{-nrL} + e^{-nL} \leq \frac{e^{-nL}(2 - e^{-nL})}{1 - e^{-nL}} \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

par le Lemme 5.3.8. Nous en déduisons (5.3.15). ■

### 5.3.3.2 Preuve du Lemme 5.3.8

La démonstration du Lemme 5.3.8 s'appuie sur le Lemme 5.3.9 suivant, où nous établissons une condition suffisante pour obtenir les majorations (5.3.17) et (5.3.18).

**Lemme 5.3.9.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1. Soit  $\phi \in \mathcal{C}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$  telle que  $\exists C(\phi) > 0$ ,  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $|\phi(x, a)| \leq C(\phi)(1 + |a|)$ . S'il existe  $\gamma = \gamma(\phi, T, C_0) > 0$  (avec  $C_0$  défini au Point 3 des Hypothèses 5.1.1) tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall n > N_0$  (défini au Point 3 des Hypothèses 5.1.1),  $\mathbb{P}$ -presque sûrement :*

$$\int_E \psi(\phi) dm_t^{Z^n, T} + \langle Z_t^n, v \nabla_a \phi \rangle - \gamma \langle Z_t^n, \phi \rangle \leq - \int_E e^{\gamma t} \rho(\psi(\phi) e^{-\gamma t}) dm_t^{Z^n, T}, \quad (5.3.25)$$

alors :  $\forall L > 0$ ,  $\exists C = C(\phi, T, L, C_0) > 0$ ,  $\forall n > N_0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, \phi \rangle > C \right) \leq e^{-nL}. \quad (5.3.26)$$

*Preuve du Lemme 5.3.9.* Nous nous inspirons de techniques utilisées par [31] et [48] pour des processus continus à valeurs probabilités, et faisons apparaître la semi-martingale  $(e^{-\gamma t} \langle Z_t^n, \phi \rangle)_{t \in [0, T]}$ . Par le Point 2 des Hypothèses 5.1.1,  $2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0 - Z_0^n, \phi \rangle \geq 0$  pour  $n$  assez grand. Alors :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, \phi \rangle > e^{\gamma T} (L + 2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0, \phi \rangle) \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \exists t \in [0, T], e^{-\gamma t} \langle Z_t^n, \phi \rangle > e^{\gamma(T-t)} (L + 2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0, \phi \rangle) \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} e^{-\gamma t} \langle Z_t^n, \phi \rangle - \langle Z_0^n, \phi \rangle > L + 2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0 - Z_0^n, \phi \rangle \right) \quad \text{car } e^{\gamma(T-t)} \geq 1 \\ &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} M_t^{n, \gamma, \phi} + \int_0^t e^{-\gamma s} \langle Z_s^n, v \nabla_a \phi - \gamma \phi \rangle ds + \int_0^t \int_E e^{-\gamma s} \psi(\phi) dm_s^{Z^n, T} ds > L \right), \end{aligned} \quad (5.3.27)$$



où dans (5.3.27) :

$$M_t^{n,\gamma,\phi} := e^{-\gamma t} \langle Z_t^n, \phi \rangle - \langle Z_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle Z_s^n, v \nabla_a \phi - \gamma \phi \rangle e^{-\gamma s} ds - \int_0^t \int_E \psi(\phi) e^{-\gamma s} dm_s^{Z^n, T} ds,$$

est une martingale locale issue de 0 (Théorème 3.1.8). Définissons  $\Xi_t^{n,\gamma,\phi} := \Xi_t^{n,\Psi}$  avec les notations de (5.2.5). Par l'hypothèse (5.3.25) :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle Z_s^n, v \nabla_a \phi - \gamma \phi \rangle e^{-\gamma s} ds + \int_0^t \int_E \psi(\phi) e^{-\gamma s} dm_s^{Z^n, T} ds \\ & \leq - \int_0^t e^{-\gamma s} \left[ \int_E e^{\gamma s} \rho(\psi(\phi) e^{-\gamma s}) dm_s^{Z^n, T} \right] ds \\ & = - \int_0^t \int_E \rho(\psi(\phi) e^{-\gamma s}) dm_s^{Z^n, T} ds = - \frac{1}{n} \Xi_t^{n,\gamma,n\phi}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, \phi \rangle > e^{\gamma T} (L + 2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0, \phi \rangle) \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} M_t^{n,\gamma,n\phi} - \Xi_t^{n,\gamma,n\phi} > nL \right) \leq e^{-nL}, \quad (5.3.28) \end{aligned}$$

par l'inégalité de Doob et par le fait que  $\exp(M_t^{n,\gamma,n\phi} - \Xi_t^{n,\gamma,n\phi})$  est une martingale issue de 1 (Théorème 5.2.2). ■

*Preuve du Lemme 5.3.8.* Nous commençons par établir une condition suffisante (Inégalité (5.3.29)) pour que (5.3.25) soit satisfaite. Nous obtenons alors les résultats annoncés au Lemme 5.3.8 par le Lemme 5.3.9, en montrant que cette condition suffisante est satisfaite pour les choix de fonctions  $\phi$  qui nous intéressent.

Soient  $t \in [0, T]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans le cas où  $\langle Z_t^n, 1 \rangle = 0$ , les deux membres de (5.3.25) sont nuls. Supposons  $\langle Z_t^n, 1 \rangle > 0$ .

Soient  $\phi \in C^{0,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+) \cup \{1\}$  positive, et  $\gamma > 0$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \rho(\psi(\phi) e^{-\gamma t}) + \psi(\phi) &= e^{\gamma t} (\exp(\psi(\phi) e^{-\gamma t}) - \psi(\phi) e^{-\gamma t} - 1) + \psi(\phi) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} [\psi(\phi)]^k \frac{e^{-(k-1)\gamma t}}{k!} = \psi(\phi) \sum_{k=0}^{+\infty} [\psi(\phi)]^k \frac{e^{-k\gamma t}}{k!(k+1)} \end{aligned}$$

Comme pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1/2^k \leq 1/(k+1) \leq 1$ , on a :

$$\frac{1}{k!} \left[ \frac{e^{-\gamma t}}{2} \psi(\phi) \right]^k \leq [\psi(\phi)]^k \frac{e^{-k\gamma t}}{k!(k+1)} \leq \frac{1}{k!} [e^{-\gamma t} \psi(\phi)]^k,$$

et en sommant sur  $k$  :

$$\psi(\phi) \exp\left(\frac{e^{-\gamma t}}{2} \psi(\phi)\right) \leq e^{\gamma t} \rho(\psi(\phi) e^{-\gamma t}) + \psi(\phi) \leq \psi(\phi) \exp(e^{-\gamma t} \psi(\phi)).$$

On en déduit par positivité de  $\phi$  :

$$\begin{aligned} & \int_E [e^{\gamma t} \rho(\psi(\phi) e^{-\gamma t}) + \psi(\phi)] dm_t^{Z^n, T} \\ & \leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, 0) \exp(e^{-\gamma t} \phi(x, 0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) Z_t^n(dx, da) \\ & + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \phi(x', 0) \exp(e^{-\gamma t} \phi(x', 0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') Z_t^n(dx, da) \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que (5.3.25) soit satisfaite est qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} & \langle Z_t^n, v \nabla_a \phi - \gamma \phi \rangle + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi(x, 0) \exp(e^{-\gamma t} \phi(x, 0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) Z_t^n(dx, da) \\ & + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \phi(x', 0) \exp(e^{-\gamma t} \phi(x', 0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') Z_t^n(dx, da) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Nous pouvons maintenant prouver le Point (i) du Lemme 5.3.8. En remarquant que :

$$\mathbb{P}(\tau_N^n \leq T) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \geq N\right),$$

il nous suffit, par le Lemme 5.3.9, de montrer que (5.3.25) est satisfaite pour  $\phi \equiv 1$ . Pour  $\phi \equiv 1$ , (5.3.29) devient :

$$\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \exp(e^{-\gamma t}) b(x, a) Z_t^n(dx, da) - \gamma \langle Z_t^n, 1 \rangle \leq 0$$

satisfaite dès que :  $\gamma > e\bar{b}$ . Par le Lemme 5.3.9, pour  $N(L, T, C_0) = e^{(e\bar{b}+1)T}(L + 2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0, 1 \rangle)$  :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\tau_N^n \leq T) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \geq N\right) \leq -L.$$

On procède de même pour l'inégalité de déviation concernant  $\zeta_N^n$ . Pour  $\phi$  définie par :  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \phi(x, a) = 1 + |a| = 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2}$ , (5.3.29) devient :

$$\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( \exp(e^{-\gamma t}) b(x, a) + \sum_{i=1}^d \frac{2v_i(x, a)a_i}{|a|} - \gamma - \gamma|a| \right) Z_t^n(dx, da) \leq 0, \quad (5.3.30)$$

et comme par les Hypothèses 2.1.4,  $(\sum_{i=1}^d a_i)^2 \leq C(d) \sum_{i=1}^d a_i^2$ , on a :

$$\sum_{i=1}^d \frac{2v_i(x, a)a_i}{|a|} \leq \sum_{i=1}^d \frac{2\bar{v}(1 + a_i)a_i}{|a|} = 2\bar{v} \left( \frac{\sum_{i=1}^d a_i}{|a|} + |a| \right) \leq 2\bar{v} \left( \sqrt{C(d)} + |a| \right). \quad (5.3.31)$$

Une condition suffisante pour que (5.3.29) soit satisfaite est que :  $\gamma > e\bar{b} + \sqrt{C(d)}2\bar{v}$ . Par le Lemme 5.3.9, on a alors pour  $N(T, L, C_0) = e^{(e\bar{b} + \sqrt{C(d)}2\bar{v} + 1)T}(L + 2C(\phi)C_0 + \langle \xi_0, 1 \rangle)$  :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 \rangle \geq N \quad \text{ou} \quad \sup_{t \in [0, T]} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_t^n(dx, da) \geq N\right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, 1 + |a| \rangle \geq N\right) \leq -L. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration du Point (i).

Considérons maintenant le Point (ii). Une condition suffisante pour que (5.3.29) soit satisfaite est que :  $\forall(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,

$$\begin{aligned} & \varphi(x)v(x, a)\nabla_a \vartheta(a) - \gamma \varphi(x)\vartheta(a) + \varphi(x)\vartheta(0) \exp(\varphi(x)\vartheta(0)) b(x, a) (1 - p(x, a)) \\ & + \int_{\mathcal{X}} \varphi(x')\vartheta(0) \exp(\varphi(x')\vartheta(0)) b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') \leq 0, \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

qui est satisfaite dès que :

$$\begin{aligned} \gamma > \sup_{(x,a) \in \tilde{\mathcal{X}}} \left[ \frac{1}{\varphi(x)\vartheta(a)} (\varphi(x)v(x,a)\nabla_a\vartheta(a) + \varphi(x)\vartheta(0) \exp(\varphi(x)\vartheta(0)) b(x,a)(1-p(x,a)) \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{X}} \varphi(x')\vartheta(0) \exp(\varphi(x')\vartheta(0)) b(x,a)p(x,a)K(x,a,dx') \right]. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Le membre de droite de (5.3.33) est majoré par :

$$\sup_{(x,a) \in \tilde{\mathcal{X}}} \left[ \frac{\|\varphi\|_\infty}{\varphi} \left( \frac{\vartheta(0) \exp(\|\varphi\|_\infty \vartheta(0))}{\vartheta(a)} + \bar{v} \frac{\sum_{i=1}^d (1+|a_i|) \frac{\partial \vartheta}{\partial a_i}(a)}{\vartheta(a)} \right) \right]. \quad (5.3.34)$$

La fonction  $\vartheta$  étant polynômiale sur un compact et constante en dehors de ce compact, (5.3.34) est borné par une constante indépendante de  $(x,a) \in \tilde{\mathcal{X}}$  car :

$$\lim_{|a| \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^d (1+a_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial a_i}(a)}{\vartheta(a)} \leq C < +\infty.$$

Si on choisit  $\gamma$  un majorant de (5.3.34), le Lemme 5.3.9 s'applique et conclut la preuve.  $\blacksquare$

### 5.3.4 Tension exponentielle

Grâce aux Propositions 5.3.3, 5.3.6 et au Point (i) du Lemme 5.3.8, il est maintenant possible d'établir la tension exponentielle de  $(\mathcal{L}(Z^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Proposition 5.3.10.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1, la famille des lois de  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est exponentiellement tendue.*  $\square$

*Démonstration.* Soit  $N = N(T, L, C_0)$  la constante positive donnée par le Point (i) du Lemme 5.3.8;  $N$  est fixé. Considérons les ensembles  $\mathcal{K}_{L,N}^1$  et  $\mathcal{K}_L^2$  donnés par les Propositions 5.3.3 et 5.3.6, et définissons :

$$\mathcal{K}_L = \mathcal{K}_{L,N}^1 \cap \left\{ z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})), \text{ tel que } \forall t \in [0, T], z_t \in \mathcal{K}_L^2 \right\} \quad (5.3.35)$$

L'ensemble  $\mathcal{K}_L$  satisfait par construction les points 1 et 2 du Théorème 5.3.2 et est donc relativement compact dans  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ . Comme :

$$\mathbb{P}(Z^n \notin \mathcal{K}_L) \leq \mathbb{P}(Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{L,N}^1) + \mathbb{P}(\exists t \in [0, T], Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_L^2) + \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T)$$

on a par le Lemme 1.2.15 [32] (cf. Lemme A.3.1) :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \notin \mathcal{K}_L) &\leq \max \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_{\cdot \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_{L,N}^1), \right. \\ &\left. \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\exists t \in [0, T], Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n \notin \mathcal{K}_L^2), \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\zeta_N^n \leq T) \right) \leq -L, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\blacksquare$

## 5.4 Majoration des grandes déviations

Une fois la tension exponentielle obtenue, la majoration des grandes déviations est une généralisation des Théorème 4.4.2 et Lemme 4.4.5 de Dembo et Zeitouni [32], obtenue en remplaçant les limites par  $\limsup$ .

Soit  $F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))$ . Notons :

$$H(F) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\exp(nF(Z^n))), \quad (5.4.1)$$

éventuellement infini.

**Lemme 5.4.1.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1, on a  $\forall A \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  mesurable :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in A) \leq - \inf_{z \in \tilde{A}} \left( \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \right). \quad (5.4.2)$$

*Démonstration.* Nous allons tout d'abord montrer que (5.4.2) est satisfaite pour tout ensemble  $A$  compact. Sous les hypothèses, la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est exponentiellement tendue, et nous pourrons généraliser ce résultat à un ensemble  $A$  fermé.

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ . Soit  $\delta > 0$ , pour tout  $z \in K$ , il existe  $G_z \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))$  tel que :

$$G_z(z) - H(G_z) \geq \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) - \delta \geq \mathcal{I}_{\xi_0}^{T, \delta}(z)$$

où :  $\mathcal{I}_{\xi_0}^{T, \delta}(z) := \min \left( \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} ((F(z) - H(F)) - \delta), \frac{1}{\delta} \right)$ .

$G_z$  étant continue, il existe un voisinage  $O_z$  de  $z$  dans  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  tel que :

$$\inf_{y \in O_z} G_z(y) - G_z(z) > -\delta.$$

Par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(Z^n \in O_z) \leq \mathbb{P}(G_z(Z^n) - G_z(z) > -\delta) \leq e^{n\delta} \mathbb{E}(\exp(nG_z(Z^n) - nG_z(z))),$$

d'où :

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in O_z) \leq \delta + \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\exp(nG_z(Z^n))) - G_z(z),$$

et en prenant la limite supérieure :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in O_z) \leq \delta - (G_z(z) - H(G_z)).$$

Comme  $K$  est compact, il est possible d'extraire du recouvrement :  $K \subset \bigcup_{z \in K} O_z$  un recouvrement fini. Il existe donc  $N_K \in \mathbb{N}^*$  tel que  $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_K} O_{z_i}$ . En utilisant le lemme A.3.1 :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in K) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left[ \sum_{i=1}^{N_K} \mathbb{P}(Z^n \in O_{z_i}) \right] \\ &\leq \max_{i \in [1, N_K]} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in O_{z_i}) \right) \leq \delta - \min_{i \in [1, N_K]} (G_{z_i}(z_i) - H(G_{z_i})) \\ &\leq 2\delta - \min_{i \in [1, N_K]} \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z_i) - H(F)) \leq 2\delta - \inf_{z \in K} \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \end{aligned}$$

La majoration de grandes déviations pour les ensembles compacts est alors obtenue en laissant  $\delta$  tendre vers 0.

Nous pouvons maintenant utiliser la tension exponentielle pour obtenir (5.4.2). Soit  $A$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ , et soit  $\bar{A}$  son adhérence. Soit également  $M > 0$  et un compact  $K_M$  tel que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \notin K_M) \leq -M.$$

Nous avons :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log [\mathbb{P}(Z^n \in \bar{A} \cap K_M) + \mathbb{P}(Z^n \notin K_M)].$$

En utilisant à nouveau le lemme technique A.3.1, nous obtenons :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in A) \leq \max \left\{ - \inf_{z \in \bar{A} \cap K_M} \left[ \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \right], -M \right\}.$$

Pour  $M > \inf_{z \in \bar{A}} \left[ \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \right]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in A) &\leq - \inf_{z \in \bar{A} \cap K_M} \left[ \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \right] \\ &\leq - \inf_{z \in \bar{A}} \left[ \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \right], \end{aligned}$$

car le terme entre crochet est une quantité positive, ce qui nous permet de minorer l'infimum sur  $\bar{A} \cap K_M$  par l'infimum sur l'ensemble plus large  $\bar{A}$ .  $\blacksquare$

Le résultat (5.4.2) est intéressant lorsque  $H(F)$  n'est pas toujours infinie. Comme on a établi la tension exponentielle, il est suffisant, par le Théorème 4.4.10 de Dembo et Zeitouni [32] de considérer un ensemble de fonctions dense dans  $\mathcal{C}_b(\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))$  pour obtenir la même majoration. Nous allons restreindre la classe de fonctions  $F$  sur laquelle le supremum est considéré aux fonctions cylindriques pour lesquelles  $H(F)$  peut-être calculé plus facilement en faisant intervenir des martingales.

**Proposition 5.4.2.** *Supposons que les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1 satisfaites. Pour tout ensemble fermé  $\Gamma \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$ , nous avons :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in \Gamma) \leq - \inf_{z \in \Gamma} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z). \quad (5.4.3)$$

*Démonstration.* En restreignant la classe de fonctions sur laquelle porte le supremum dans (5.4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in \Gamma) &\leq - \inf_{z \in \Gamma} \sup_{F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})))} (F(z) - H(F)) \\ &\leq - \inf_{z \in \Gamma} \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)} (\mathcal{I}^{f,T}(z) - H(\mathcal{I}^{f,T})). \end{aligned}$$

Évaluons maintenant  $H(\mathcal{I}^{f,T})$ . Par définition :

$$H(\mathcal{I}^{f,T}) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E} \left( \exp \left( n \mathcal{I}^{f,T}(Z^n) \right) \right), \text{ avec : } n \mathcal{I}^{f,T}(Z^n) = M_T^{n,nf} - \Xi_T^{n,nf},$$

où  $M^{n,f}$  et  $\Xi^{n,f}$  ont été définis en (3.1.29) et (5.2.6). Comme  $\left(e^{M_t^{n,nf} - \Xi_t^{n,nf}}\right)_{t \in [0,T]}$  est une martingale issue de 1 par le Théorème 5.2.2 :

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( n \mathcal{I}_{\xi_0}^{f,T}(Z^n) \right) \right) = \mathbb{E} \left( \exp \left( M_T^{n,nf} - \Xi_T^{n,nf} \right) \right) = 1.$$

Ainsi  $H(\mathcal{I}^{f,T}) = 0$ . ■

Ceci conclut la majoration du Point (ii) du Théorème 5.1.4.

## 5.5 Minoration du Théorème 5.1.4

Nous souhaitons maintenant établir une minoration correspondant à la majoration obtenue à la Proposition 5.4.2. L'idée repose sur un changement de probabilité adéquat et sur l'utilisation du théorème de Girsanov. Pour cela, nous nous inspirons des travaux de Léonard [78], Kipnis Léonard [73]. Nous nous appuyons sur le lien entre les trajectoires du domaine de la fonctionnelle d'action et certaines équations d'évolution obtenues par perturbation de (3.0.1), ainsi que sur une formulation non variationnelle de la fonctionnelle d'action. Nous montrons à la Section 5.5.2.2 une minoration locale pour les voisinages de trajectoires associées à des perturbations bornées.

### 5.5.1 Equations perturbées et représentation non variationnelle de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$

Nous montrons que les trajectoires  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telles que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$  sont les solutions d'équations d'évolution obtenues par perturbation de (3.0.1) (Proposition 5.5.1). Nous en déduisons une représentation non variationnelle de  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$  (Proposition 5.5.5). Nous utilisons un théorème de représentation de Riesz (Théorème 5.0.7) ainsi qu'un théorème dû à Ekeland [42], Bishop et Phelps [8] et Israel [62] (rappelé à la Section 5.5.1.2).

#### 5.5.1.1 Représentation des trajectoires du domaine de la fonctionnelle d'action

**Proposition 5.5.1.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10. Pour  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$ , il existe une application  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  telle que  $\forall (f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  :*

$$\ell^T(f, z) = \int_0^T \int_E \psi(f)(x, a, x', u, s) h^z(x, a, x', u, s) m_s^{z,T}(dx, da, dx', du) ds, \quad (5.5.1)$$

où  $\ell^T(f, z)$  a été définie en (5.1.6). On en déduit que :

$$\mathcal{I}^{f,T}(z) = \int_0^T \int_E [h^z \psi(f) - \rho(\psi(f))] dm_s^{z,T} ds, \quad (5.5.2)$$

et que  $z$  est la solution de l'équation suivante :  $\forall (f : (x, a, s) \mapsto f_s(x, a)) \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\langle z_t, f_t \rangle = \langle z_0, f_0 \rangle + \int_0^t \left\langle z_s, v \nabla_a f_s + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right\rangle ds + \int_0^t \int_E (1 + h^z) \psi(f) dm_s^{z,T} ds. \quad (5.5.3)$$

*Démonstration.* Par définition de  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$ , nous avons pour tout  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])$  et  $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  :

$$\mathcal{I}^{f/\kappa, T}(z) = \frac{1}{\kappa} \ell^T(f, z) - c^T \left( \frac{f}{\kappa}, z \right) \leq \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty.$$

Nous en déduisons que pour tout  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  et  $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \ell^T(f, z) &\leq \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) + \int_0^T \int_E \rho \left( \frac{\psi(f)(x, a, x', u, s)}{\kappa} \right) m_s^{z, T}(dx, da, dx', du) ds \\ &\leq \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) + \int_0^T \int_E \tau \left( \frac{\psi(f)(x, a, x', u, s)}{\kappa} \right) m_s^{z, T}(dx, da, dx', du) ds, \end{aligned}$$

où  $\tau(x) = \max(\rho(x), \rho(-x)) = \rho(|x|)$ . En choisissant  $\kappa = \|\psi(f)\|_{\rho, z}$  et  $\kappa = -\|\psi(f)\|_{\rho, z}$  :

$$|\ell^T(f, z)| \leq (1 + \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z)) \|\psi(f)\|_{\rho, z}, \quad (5.5.4)$$

par la définition (5.0.5) de la norme de jauge  $\|\psi(f)\|_{\rho, z}$ . L'application  $\psi(f) \mapsto \ell^T(f, z)$  est donc linéaire continue pour la norme  $\|\cdot\|_{\rho, z}$  sur  $\psi \left( \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T]) \right) \subset \mathcal{B}_b(E \times [0, T])$ . Par le théorème de Hahn-Banach, il est possible d'étendre cette forme linéaire continue en une forme linéaire continue sur  $E^{\rho, z}(E \times [0, T])$ . Par le Théorème 5.0.7, il existe alors une fonction  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  telle que (5.5.1) soit satisfaite. En utilisant (5.5.1) et (5.1.5), on en déduit alors (5.5.2). (5.5.3) est une conséquence de (5.5.1) et (5.1.6).  $\blacksquare$

On peut remarquer que dans (5.5.3), on a perturbé séparément chacun des trois phénomènes affectant la taille et la structure en traits de la population (naissances sans mutation, naissances avec mutations, morts). Les taux correspondants sont multipliés par les facteurs  $(1 + h^z(x, a, x', 0, s))$ ,  $(1 + h^z(x, a, x', 1, s))$  et  $(1 + h^z(x, a, x', 2, s))$ . Nous montrerons à la Proposition 5.5.5 (Point 4) que ces facteurs sont positifs.

La fonction  $h^z$  de la Proposition 5.5.1 n'est pas unique, car elle n'est caractérisée que par les fonctions de  $\psi \left( \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T]) \right)$ . Le lemme suivant indique un choix possible de  $h^z$ .

**Lemme 5.5.2.** *On note pour  $s \in [0, T]$ ,  $z_s(dx, da) = q_s^z(x, da) \bar{z}_s(dx)$ ,  $\bar{z}_s(dx)$  étant la mesure marginale de  $z_s(dx, da)$  en  $x$  et  $q_s^z(x, da)$  étant une version de la mesure conditionnelle de  $z_s(dx, da)$  sachant  $x$ . Il est possible de choisir  $h^z$  telle que pour tout  $(x, a, x', u, s) \in E \times [0, T]$  :*

- $h^z(x, a, x', 0, s)$  et  $h^z(x, a, x', 1, s)$  ne dépendent que de  $x$  et  $s$ ,
- $h^z(x, a, x', 2, s)$  ne dépende que de  $x, a$  et  $s$ ,
- si  $\bar{z}_s(dx)$  est absolument continue par rapport à  $P(dx)$  alors  $\forall x, y \in \mathcal{X}$ ,  $h^z(x, a, y, 0, s) = h^z(y, a, x, 1, s)$ ,

*Démonstration.* Soit  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  la perturbation donnée par la Proposition 5.5.1. Nous commençons par modifier  $h^z$  de façon à ce que les deux premières conditions du lemme soient satisfaites. Pour cela, définissons  $\bar{h}^z$  par :

$$\begin{aligned} \bar{h}^z(x, 0, s) &= \frac{\int_{\mathbb{R}_+^d} \int_{\mathcal{X}} h^z(x, a, x', 0, s) b(x, a) (1 - p(x, a)) K(x, a, dx') q_s^z(x, da)}{\int_{\mathbb{R}_+^d} \int_{\mathcal{X}} b(x, a) (1 - p(x, a)) K(x, a, dx') q_s^z(x, da)} \\ \bar{h}^z(x', 1, s) &= \frac{\int_{\tilde{\mathcal{X}}} h^z(x, a, x', 1, s) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') z_s(dx, da)}{\int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') z_s(dx, da)} \\ \bar{h}^z(x, a, 2, s) &= \int_{\mathcal{X}} h^z(x, a, x', 2, s) K(x, a, dx'), \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

(dans le cas où l'un des dénominateurs des deux premières lignes de (5.5.5) est nul, le choix du  $\bar{h}^z$  correspondant est arbitraire). On vérifie que pour  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\int_0^T \int_E \psi(f) h^z dm_s^{z, T} ds = \int_0^T \int_E \psi(f) \bar{h}^z dm_s^{z, T} ds. \quad (5.5.6)$$

Pour le terme de naissance avec mutation, par exemple, le théorème de Fubini nous donne :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} f(x', 0, s) \bar{h}^z(x', 1, s) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') z_s(dx, da) ds \\
&= \int_0^T \int_{\mathcal{X}} f(x', 0, s) \left( \int_{\tilde{\mathcal{X}}} h^z(x, a, x', 1, s) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') z_s(dx, da) \right) P(dx') ds \\
&= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} f(x', 0, s) h^z(x, a, x', 1, s) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') z_s(dx, da) ds.
\end{aligned}$$

Nous vérifions maintenant que  $\bar{h}^z$  définit toujours une fonction de  $L^{\rho^*, z}$ . Soit  $\kappa > 0$ .

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_E \rho^* \left( \frac{\bar{h}^z}{\kappa} \right) dm_s^{z, T} ds = A + B + C, \text{ où :} \\
A &= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \rho^* \left( \frac{\bar{h}^z(x, 0, s)}{\kappa} \right) b(x, a) (1 - p(x, a)) z_s(dx, da) ds \\
B &= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \rho^* \left( \frac{\bar{h}^z(x', 0, s)}{\kappa} \right) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') z_s(dx, da) ds \\
C &= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \rho^* \left( \frac{\bar{h}^z(x, a, 2, s)}{\kappa} \right) d(x, a, z_s U(x, a)) z_s(dx, da) ds. \tag{5.5.7}
\end{aligned}$$

Par convexité de  $\rho^*$ , par l'inégalité de Jensen et par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
B &\leq \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \frac{\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \rho^* \left( \frac{h^z(x, a, x', 1, s)}{\kappa} \right) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') z_s(dx, da)}{\int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') z_s(dx, da)} \\
&\quad \times b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') P(dx') z_s(dx, da) ds \\
&= \int_0^T \int_{\mathcal{X}} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \rho^* \left( \frac{h^z(x, a, x', 1, s)}{\kappa} \right) b(x, a) p(x, a) k(x, a, x') z_s(dx, da) P(dx') ds. \tag{5.5.8}
\end{aligned}$$

Il en est de même pour  $A$  et  $C$ . Comme  $h^z \in L^{\rho^*, z}$ , nous en déduisons que  $\bar{h}^z \in L^{\rho^*, z}$ .

Enfin, supposons que  $\tilde{z}_s(dx)$  soit absolument continue par rapport à  $P(dx)$  de densité  $\tilde{m}_s^z$ . Montrons qu'il est alors possible de choisir  $h^z$  telle que le troisième point du Lemme 5.5.2 soit satisfait. Définissons  $\tilde{h}^z$  par :

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}^z(x, 0, s) \times \left[ \int_{\mathbb{R}_+^d} b(x, a) (1 - p(x, a)) \tilde{m}_s^z(x) q_s^z(x, da) + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x', a) p(x', a) k(x', a, x) z_s(dx', da) \right] \\
&= \left[ \int_{\mathbb{R}_+^d} \int_{\mathcal{X}} h^z(x, a, x', 0, s) b(x, a) (1 - p(x, a)) \tilde{m}_s^z(x) K(x, a, dx') q_s^z(x, da) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} h^z(x', a, x, 1, s) b(x', a) p(x', a) k(x', a, x) z_s(dx', da) \right]. \tag{5.5.9}
\end{aligned}$$

En multipliant par  $f(x, 0, s)$ , pour  $f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ , et en intégrant par rapport à  $P(dx) ds$  :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} [f(x, 0, s) h^z(x, a, x', 0, s) b(x, a) (1 - p(x, a)) \\
&\quad + f(x', 0, s) h^z(x, a, x', 1, s) b(x, a) p(x, a)] K(x, a, dx') z_s(dx, da) ds \\
&= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} [f(x, 0, s) \tilde{h}^z(x, 0, s) b(x, a) (1 - p(x, a)) \\
&\quad + f(x', 0, s) \tilde{h}^z(x', 0, s) b(x, a) p(x, a)] K(x, a, dx') z_s(dx, da) ds,
\end{aligned}$$



et en utilisant l'inégalité de Jensen comme précédemment, on montre qu'en remplaçant  $h^z$  par  $\tilde{h}^z$  sur  $\tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\} \times [0, T]$ , on obtient à nouveau une fonction de  $L^{\rho^*, z}$ . ■

Jusqu'à la fin de cette section, nous supposons que  $h^z$  a la forme particulière donnée par le Lemme 5.5.2.

### 5.5.1.2 Formulation non variationnelle de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$

Pour obtenir une forme non variationnelle de la fonctionnelle d'action, nous allons utiliser (5.5.2) et approcher  $h^z$  par des perturbations de la forme  $h_m = e^{\psi(f_m)} - 1$  avec  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ . Le résultat annoncé est donné à la Proposition 5.5.5. Pour l'établir, nous allons utiliser le lemme suivant, qui est un cas particulier d'un résultat dû à Ekeland [42], Bishop et Phelps [8] et Israel [62] :

**Lemme 5.5.3.** *Soit  $\mathfrak{F}$  un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach  $\mathfrak{E}$ . On note  $\mathfrak{E}'$  son dual topologique. Soient  $\Lambda$  une fonction convexe continue de  $\mathfrak{E}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\partial\Lambda(x)$  son sous-différentiel en  $x \in \mathfrak{E}$  défini par :*

$$\partial\Lambda(x) = \{ \ell \in \mathfrak{E}' \mid \forall y \in \mathfrak{E}, \Lambda(x) + \ell(y) \leq \Lambda(x + y) \}.$$

Soit  $\ell_0 \in \mathfrak{E}'$  satisfaisant :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathfrak{E}, \Lambda(x) \geq \ell_0(x) + c, \quad (5.5.10)$$

alors :  $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in \mathfrak{F}, \exists \ell' \in \partial\Lambda(x'), \forall x \in \mathfrak{F},$

$$|\ell_0(x) - \ell'(x)| \leq \varepsilon \|x\|_{\mathfrak{E}}, \quad (5.5.11)$$

**Définition 5.5.4.** *Nous notons :  $\forall z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})), \forall g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R}), \forall h \in \mathcal{B}(E \times [0, T], \mathbb{R}), \forall \nu \in (L^\infty(E \times [0, T], \mathbb{R}))'$ ,*

$$\Gamma_{\rho, z}(g) := \int_0^T \int_E \rho(g(x, a, x', u, s)) m_s^{z, T}(dx, da, dx', du) ds \quad (5.5.12)$$

$$\Gamma_{\rho, z}^*(h) := \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})} \left\{ \int_0^T \int_E h\psi(f) dm_s^{z, T} ds - \int_0^T \int_E \rho(\psi(f)) dm_s^{z, T} ds \right\} \quad (5.5.13)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\rho, z}^*(\nu) := \sup_{g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})} \{ \langle \nu, g \rangle - \Gamma_{\rho, z}(g) \}. \quad (5.5.14)$$

Par (5.1.4) et (5.5.2), nous avons :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \Gamma_{\rho, z}^*(h^z). \quad (5.5.15)$$

La Proposition suivante nous fournit une représentation non-variationnelle de la fonctionnelle d'action  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \Gamma_{\rho, z}^*(h^z)$ , ainsi qu'un résultat d'approximation lorsque l'on régularise  $h^z$  :

**Proposition 5.5.5.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10. Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$ , et soit  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  la perturbation associée (Proposition 5.5.1). Il existe une suite  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$  telle que :*

1.  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists f_m \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R}), h_m = e^{\psi(f_m)} - 1,$
2. *la suite  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $h^z$   $dm_s^{z, T}$  ds-presque partout.*
3.  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \Gamma_{\rho, z}^*(h_m) = \Gamma_{\rho^*, z}(h_m).$

4.  $h^z \in [-1, +\infty[$   $dm_s^{z,T}$ -presque partout et il existe  $f^z \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  telle que  $dm_s^{z,T}$ -presque partout sur  $\{h^z > -1\}$  :

$$h^z(x, a, x', u, s) = e^{\psi(f^z)(x, a, x', u, s)} - 1. \quad (5.5.16)$$

5. Nous avons la représentation non-variationnelle suivante de la fonctionnelle d'action :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) &= \Gamma_{\rho^*, z}(h^z) = \int_0^T \int_E \rho^*(h^z) dm_s^{z,T} ds \\ &= \int_0^T \int_E \mathbf{1}_{\{h^z > -1\}} (h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))) dm_s^{z,T} ds + \int_0^T \int_E \mathbf{1}_{\{h^z = -1\}} dm_s^{z,T} ds. \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Une difficulté résulte de ce que  $\Gamma_{\rho, z}^*(h^z)$  et  $\tilde{\Gamma}_{\rho, z}^*(h^z dm_s^{z,T} ds)$  ne coïncident pas *a priori*, les sup dans (5.5.13) et (5.5.14) étant pris sur des ensembles différents ( $\psi(\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})) \subset \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$ ). Ceci est une conséquence du fait que nous traitons plusieurs types de sauts (naissances avec ou sans mutations, morts).

Avant d'énoncer la Proposition 5.5.5, nous rappelons quelques propriétés des fonctions introduites à la Définition 5.5.4.

**Lemme 5.5.6.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10. Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ .*

- (i)  $\Gamma_{\rho, z}$  est convexe et continue.  
(ii) Soit  $f \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ . Le sous-différentiel de  $\Gamma_{\rho, z}$  en  $\psi(f)$  est un singleton  $\{\nu\}$  où  $\nu \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  est caractérisée par :  $\forall g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\langle \nu, g \rangle = \int_0^T \int_E g \left( e^{\psi(f)} - 1 \right) dm_s^{z,T} ds. \quad (5.5.18)$$

- (iii) On a :  $\forall h \in \mathcal{B}(E \times [0, T], \mathbb{R})$ , telle que  $h \geq -1$   $dm_s^{z,T}$ -presque partout,

$$\Gamma_{\rho, z}^*(h) \leq \tilde{\Gamma}_{\rho, z}^*(h dm_s^{z,T} ds) \leq \Gamma_{\rho^*, z}(h). \quad (5.5.19)$$

*Démonstration.* La convexité de  $\Gamma_{\rho, z}$  est une conséquence directe de la convexité de  $\rho$  (5.0.3). Pour la continuité, considérons  $g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$  et une suite  $(g_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$  convergeant vers  $g$  pour la norme uniforme.  $\exists q_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall q \geq q_0$ ,  $\|g_q\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 1$ . Alors, par convergence dominée, la mesure  $dm_s^{z,T} ds$  étant finie sur  $E \times [0, T]$  :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \Gamma_{\rho, z}(g_q) = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_E \rho(g_q) dm_s^{z,T} ds = \int_0^T \int_E \rho(g) dm_s^{z,T} ds = \Gamma_{\rho, z}(g).$$

Ceci prouve (i).

Caractérisons  $\partial \Gamma_{\rho, z}(\psi(f))$ . Soit  $g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\rho, z}(\psi(f) + \varepsilon g) - \Gamma_{\rho, z}(\psi(f))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_E \left( \frac{\rho(\psi(f) + \varepsilon g) - \rho(\psi(f))}{\varepsilon} \right) dm_s^{z,T} ds. \quad (5.5.20)$$

Comme  $\rho$  est différentiable sur  $\mathbb{R}$ ,  $\forall (x, a, x', u, s) \in E \times [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho(\psi(f)(x, a, x', u, s) + \varepsilon g(x, a, x', u, s)) - \rho(\psi(f)(x, a, x', u, s))}{\varepsilon} \\ &= g(x, a, x', u, s) \left( \exp(\psi(f)(x, a, x', u, s)) - 1 \right), \end{aligned}$$

qui est bornée donc  $dm_s^{z,T} ds$ -intégrable. On peut dériver sous le signe somme dans (5.5.20) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\rho,z}(\psi(f) + \varepsilon g) - \Gamma_{\rho,z}(\psi(f))}{\varepsilon} = \int_0^T \int_E g [e^{\psi(f)} - 1] dm_s^{z,T} ds. \quad (5.5.21)$$

$\Gamma_{\rho,z}$  est donc Gâteaux-différentiable en  $\psi(f)$  et son sous-différentiel en  $\psi(f)$  existe (Ekeland et Temam [42], Proposition 5.3 Chapitre I) et est le singleton caractérisé par (5.5.18).

La première inégalité de (5.5.19) est une conséquence de l'inclusion  $\psi(\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})) \subset \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$ . Pour la seconde inégalité, on a, par définition de  $\rho^* : \forall (x, a, x', u, s) \in E \times [0, T], \forall g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R}), h(x, a, x', u, s)g(x, a, x', u, s) - \rho(g(x, a, x', u, s)) \leq \rho^*(h(x, a, x', u, s))$ . Ceci implique :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\rho,z}^*(h dm_s^{z,T} ds) &= \sup_{g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})} \int_0^T \int_E [hg - \rho(g)] dm_s^{z,T} ds \\ &\leq \sup_{g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})} \int_0^T \int_E \rho^*(h) dm_s^{z,T} ds = \int_0^T \int_E \rho^*(h) dm_s^{z,T} ds = \Gamma_{\rho^*,z}(h), \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

ce qui termine la preuve. ■

Nous pouvons maintenant prouver la Proposition 5.5.5.

*Preuve de la Proposition 5.5.5.* Nous avons  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \Gamma_{\rho,z}^*(h^z) < +\infty$ , mais nous ne savons pas si  $\tilde{\Gamma}_{\rho,z}^*(h^z dm_s^{z,T} ds) < +\infty$ . Cependant, comme  $h^z \in L^{\rho^*,z}$ , on a par (5.5.19) et par définition de la norme d'Orlicz  $\|\cdot\|_{\rho^*,z}$  (5.0.5) :

$$\tilde{\Gamma}_{\rho,z}^* \left( \frac{h^z}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} dm_s^{z,T} ds \right) \leq \Gamma_{\rho^*,z} \left( \frac{h^z}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} \right) \leq 1. \quad (5.5.23)$$

Par définition de  $\tilde{\Gamma}_{\rho,z}^*$ , et par (5.5.23), on peut écrire :  $\forall g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\Gamma_{\rho,z}(g) \geq \int_0^T \int_E \frac{h^z}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} g dm_s^{z,T} ds - \tilde{\Gamma}_{\rho,z}^* \left( \frac{h^z}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} dm_s^{z,T} ds \right),$$

et la condition (5.5.10) est bien satisfaite. Nous pouvons appliquer le Lemme 5.5.3 avec  $\mathfrak{F} = \text{adh} \left( \psi \left( \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R}) \right) \right)$ , sous-espace vectoriel fermé de  $L^\infty(E \times [0, T], \mathbb{R}) : \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists \tilde{f}_m \in \text{adh} \left( \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R}) \right), \exists \tilde{\nu}_m \in \partial \Gamma_{\rho,z}(\psi(\tilde{f}_m)), \forall g \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\left| \int_0^T \int_E \psi(g) \frac{h^z}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} dm_s^{z,T} ds - \langle \tilde{\nu}_m, \psi(g) \rangle \right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{2m \|h^z\|_{\rho^*,z}} \quad (5.5.24)$$

Par le Point (ii) du Lemme 5.5.6 et en posant  $\tilde{h}_m := \|h^z\|_{\rho^*,z} (e^{\psi(\tilde{f}_m)} - 1)$ , nous avons :

$$\langle \tilde{\nu}_m, \psi(g) \rangle = \int_0^T \int_E \psi(g) \frac{\tilde{h}_m}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} dm_s^{z,T} ds, \quad (5.5.25)$$

et par (5.5.24) :

$$\left| \int_0^T \int_E \psi(g) \left( \frac{h^z}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} - \frac{\tilde{h}_m}{\|h^z\|_{\rho^*,z}} \right) dm_s^{z,T} ds \right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{2m \|h^z\|_{\rho^*,z}}. \quad (5.5.26)$$

Comme  $\tilde{f}_m \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ , et comme  $dm_s^{z,T} ds$  est une mesure finie sur  $E \times [0, T]$ ,  $\Gamma_{\rho^*, z}(\tilde{h}_m) < +\infty$ , et par (5.5.19),  $\tilde{\Gamma}_{\rho, z}^*(\tilde{h}_m dm_s^{z,T} ds) < +\infty$ . En utilisant à nouveau la définition de  $\tilde{\Gamma}_{\rho, z}^* : \forall g \in \mathcal{B}_b(E \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\Gamma_{\rho, z}(g) \geq \int_0^T \int_E \tilde{h}_m g dm_s^{z,T} ds - \tilde{\Gamma}_{\rho, z}^* \left( \tilde{h}_m dm_s^{z,T} ds \right).$$

En appliquant à nouveau le Lemme 5.5.3 et le Point (ii) du Lemme 5.5.6, il existe une suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $\text{adh}(\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R}))$ , et une suite de perturbations continues bornées  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  définies par  $h_m := e^{\psi(f_m)} - 1$  telles que :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall g \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\left| \int_0^T \int_E \psi(g) (h_m - \tilde{h}_m) dm_s^{z,T} ds \right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{4m}.$$

Comme chaque fonction  $f_m$  est limite uniforme d'une suite  $(f_{m,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ ,  $h_m$  est limite uniforme et dans  $L^1(dm_s^{z,T} ds)$  (car la mesure  $dm_s^{z,T} ds$  est finie) de la suite  $h_{m,p} = e^{\psi(f_{m,p})} - 1$ . Quitte à remplacer  $h_m$  par  $h_{m,p}$  avec  $p$  assez grand, il existe une suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  telle que :

$$\left| \int_0^T \int_E \psi(g) (h_m - \tilde{h}_m) dm_s^{z,T} ds \right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{2m}. \quad (5.5.27)$$

Par (5.5.26) et (5.5.27) :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall g \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ ,

$$\left| \int_0^T \int_E \psi(g) (h_m - h^z) dm_s^{z,T} ds \right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{m}, \quad (5.5.28)$$

avec, en utilisant les notations du Lemme 5.5.2 :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_E \psi(g) (h_m - h^z) dm_s^{z,T} ds \\ &= \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} g(x, 0, s) \left( e^{f_m(x, 0, s)} - 1 - \bar{h}^z(x, 0, s) \right) b(x, a)(1 - p(x, a)) z_s(dx, da) ds \\ &+ \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} g(x', 0, s) \left( e^{f_m(x', 0, s)} - 1 - \bar{h}^z(x', 1, s) \right) b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx') z_s(dx, da) ds \\ &- \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} g(x, a, s) \left( e^{-f_m(x, a, s)} - 1 - \bar{h}^z(x, a, 2, s) \right) d(x, a, z_s U(x, a)) z_s(dx, da) ds. \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

Pour une fonction test  $g \in \mathcal{C}_K^{0,1,1}(\mathcal{X} \times (\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}) \times [0, T], \mathbb{R})$  satisfaisant  $\forall x \in \mathcal{X}, \forall s \in [0, T], g(x, 0, s) = 0$ , seul le dernier terme de (5.5.29) est non nul. On obtient alors par (5.5.28) la convergence vague de la suite  $(h_m dm_s^{z,T} ds)_{m \in \mathbb{N}^*}$  vers  $h^z dm_s^{z,T} ds$  sur  $\{a \neq 0\}$ . Il existe donc une sous-suite de  $(e^{-f_m} - 1)_{m \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $\bar{h}^z(\cdot, \cdot, 2, \cdot) z_s(dx, da) ds$ -presque partout sur  $\mathcal{X} \times (\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}) \times [0, T]$ . Pour  $g \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ , pour la sous-suite précédente de  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  et pour  $m$  assez grand, on obtient par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\mathcal{X}} g(x, 0, s) \left( e^{f_m(x, 0, s)} - 1 - \bar{h}^z(x, 0, s) \right) \int_{\mathbb{R}_+^d} b(x, a)(1 - p(x, a)) q_s^z(x, da) \bar{z}_s(dx) ds \right. \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{X}} g(x', 0, s) \left( e^{f_m(x', 0, s)} - 1 - \bar{h}^z(x', 1, s) \right) \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x, a)p(x, a)k(x, a, x') z_s(dx, da) P(dx') ds \\ &\left. - \int_0^T \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_{a=0} g(x, a, s) \left( e^{-f_m(x, a, s)} - 1 - \bar{h}^z(x, a, 2, s) \right) d(x, a, z_s U(x, a)) z_s(dx, da) ds \right| \leq \frac{2\|g\|_\infty}{m}. \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

Montrons que :

$$\forall t \in [0, T], \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_{a=0} z_t(dx, da) = 0, \quad (5.5.31)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  une fonction positive bornée par 1 telle que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\phi_\varepsilon(x, 0) = 1$  et  $\phi_\varepsilon(x, a) = 0$  pour  $|a| \geq \varepsilon$ . Pour  $t \in [0, T]$  et pour la fonction  $f(x, a, s) = \phi_\varepsilon(x, A_x(t, s, a))$  :

$$\begin{aligned} \langle z_t, \phi_\varepsilon \rangle &= \langle z_t, f_t \rangle = \langle \xi_0, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi_\varepsilon(x, A_x(t, s, 0))(1 + \bar{h}^z(x, 0, s))b(x, a)(1 - p(x, a))z_s(dx, da) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} \phi_\varepsilon(x', A_{x'}(t, s, 0))(1 + \bar{h}^z(x', 1, s))b(x, a)p(x, a)K(x, a, dx')z_s(dx, da) ds \\ &- \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \phi_\varepsilon(x, A_x(t, s, a))(1 + \bar{h}^z(x, a, 2, s))d(x, a, z_s U(x, a))z_s(dx, da) ds. \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

Pour  $s < t$  et  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,  $A_x(t, s, a) > 0$  et  $\phi_\varepsilon(x, A_x(t, s, a))$  converge vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Comme les intégrands dans (5.5.32) sont dominés par  $(1 + \bar{h}^z(x, 0, s))b(x, a)(1 - p(x, a))$ ,  $(1 + \bar{h}^z(x', 1, s))b(x, a)p(x, a)k(x, a, x')$  et  $(1 + \bar{h}^z(x, a, 2, s))d(x, a, z_s U(x, a))$  intégrables par rapport à  $P(dx')z_s(dx, da)ds$ , alors le membre de droite de (5.5.32) converge vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Comme le membre de gauche de (5.5.32) tend vers  $\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_{a=0} z_t(dx, da)$ , on en déduit (5.5.31).

Dans le cas où  $\bar{z}_s(dx)$  est absolument continue par rapport à  $P(dx)$  pour tout  $s \in [0, T]$ , (5.5.30) peut se reformuler par (5.5.31) et par le Lemme 5.5.2 en :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathcal{X}} g(x, 0, s) \left( e^{f_m(x, 0, s)} - 1 - \tilde{h}^z(x, 0, s) \right) \left[ \int_{\mathbb{R}_+^d} b(x, a)(1 - p(x, a))q_s^z(x, da)\tilde{m}_s^z(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} b(x', a)p(x', a)k(x', a, x)z_s(dx', da) \right] P(dx) ds \right| \leq \frac{C\|g\|_\infty}{m}. \end{aligned} \quad (5.5.33)$$

Alors, sur l'ensemble où le crochet de (5.5.33) n'est pas nul,  $\tilde{h}^z(x, 0, s)$  est la limite  $P(dx)ds$ -presque partout de  $(e^{f_m(x, 0, s)} - 1)_{m \in \mathbb{N}^*}$ . Ceci implique que  $h^z$  est la limite  $dm_s^{z, T} ds$ -presque partout d'une sous-suite de  $(e^{\psi(f_m)} - 1)_{m \in \mathbb{N}^*}$ .

Dans le cas où  $\bar{z}_s(dx)$  n'est pas absolument continue par rapport à  $P(dx)$ , nous pouvons décomposer  $\bar{z}_s(dx)$  en une mesure absolument continue par rapport à  $P(dx)$  et une mesure qui lui est singulière. Dans (5.5.30) l'intégrale par rapport à cette dernière mesure converge nécessairement vers 0 et la partie absolument continue par rapport à  $P(dx)$  se traite de la même façon que précédemment. Nous obtenons à nouveau que  $h^z$  est la limite  $dm_s^{z, T} ds$ -presque partout d'une sous-suite de  $(e^{\psi(f_m)} - 1)_{m \in \mathbb{N}^*}$ .

Nous avons prouvé les Points 1 et 2. Dans la suite, nous noterons à nouveau  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  la sous-suite ainsi exhibée et c'est elle que nous considérerons.

Comme  $h_m = e^{\psi(f_m)} - 1$ ,

$$\rho^*(h_m) = e^{\psi(f_m)}\psi(f_m) - e^{\psi(f_m)} + 1 = h_m\psi(f_m) - \left( e^{\psi(f_m)} - \psi(f_m) - 1 \right),$$

et on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho^*, z}(h_m) &= \int_0^T \int_E [h_m\psi(f_m) - \rho(\psi(f_m))] dm_s^{z, T} ds \\ &\leq \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])} \left[ \int_0^T \int_E h_m\psi(f) dm_s^{z, T} ds - \Gamma_{\rho, z}(\psi(f)) \right] = \Gamma_{\rho^*, z}^*(h_m). \end{aligned} \quad (5.5.34)$$

Par (5.5.19) et (5.5.34) :

$$\Gamma_{\rho^*,z}^*(h_m) = \widetilde{\Gamma}_{\rho^*,z}(h_m dm_s^{z,T} ds) = \Gamma_{\rho^*,z}(h_m). \quad (5.5.35)$$

Ceci prouve le Point 3.

Comme  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge  $dm_s^{z,T} ds$ -presque partout vers  $h^z$  et comme  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_m > -1$ , alors  $h^z \geq -1$   $dm_s^{z,T} ds$ -presque partout. D'autre part, comme  $h^z \in L^{\rho^*,z} \subset L^1(E \times [0, T], dm_s^{z,T} ds)$ ,  $h^z < +\infty$   $dm_s^{z,T} ds$ -presque partout.

La convergence  $dm_s^{z,T} ds$ -presque partout de  $h_m$  vers  $h^z$  implique que  $dm_s^{z,T} ds$  presque partout sur  $\{h^z > -1\}$ ,  $\psi(f_m)(x, a, x', u, s) = \log(h_m(x, a, x', u, s) + 1)$  converge vers

$$\psi(f^z)(x, a, x', u, s) := \log(h^z(x, a, x', u, s) + 1). \quad (5.5.36)$$

Ceci prouve le Point 4. Sur  $\{h^z = -1\}$ , la suite  $(\psi(f_m))_{m \in \mathbb{N}^*}$  diverge vers  $-\infty$ .

Sur l'ensemble  $\{h^z > -1\}$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho^*(h^z) &= e^{\psi(f^z)} \psi(f^z) - e^{\psi(f^z)} + 1 \\ &= \left( e^{\psi(f^z)} + 1 \right) \psi(f^z) - \left( e^{\psi(f^z)} - \psi(f^z) - 1 \right) = h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z)), \end{aligned} \quad (5.5.37)$$

et l'application  $h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))$  est positive et limite de la suite de fonctions  $h^z \psi(f_m) - \rho(\psi(f_m))$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Sur  $\{h^z = -1\}$ , on a :  $h^z \psi(f_m) - \rho(\psi(f_m)) = -e^{\psi(f_m)} + 1$  qui converge  $dm_s^{z,T} ds$ -presque partout vers 1. En définissant la suite de fonctions  $(\check{f}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\{h^z > -1\}$  par :

$$\psi(\check{f}_m) = \psi(f_m) \mathbf{1}_{\{h \psi(f_m) - \rho(\psi(f_m)) \geq 0\}} \quad (5.5.38)$$

et sur  $\{h^z = -1\}$  par :

$$\psi(\check{f}_m) = \psi(f_m) \mathbf{1}_{\{\psi(f_m) \leq 0\}} \quad (5.5.39)$$

on définit une suite de fonctions *positives*,  $(h^z \psi(\check{f}_m) - \rho(\psi(\check{f}_m)))_{m \in \mathbb{N}^*}$ , convergeant vers

$$[h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))] \mathbf{1}_{\{h^z > -1\}} + \mathbf{1}_{\{h^z = -1\}}.$$

On en déduit que nécessairement  $\Gamma_{\rho^*,z}(h^z) < +\infty$ . Sinon, par le lemme de Fatou et (5.5.37) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho^*,z}^*(h^z) &= \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})} \left\{ \int_0^T \int_E (h^z \psi(f) - \rho(\psi(f))) dm_s^{z,T} ds \right\} \\ &\geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_E \left( h^z \psi(\check{f}_m) - \rho(\psi(\check{f}_m)) \right) dm_s^{z,T} ds \geq \int_0^T \int_E \liminf_{m \rightarrow +\infty} \left( h^z \psi(\check{f}_m) - \rho(\psi(\check{f}_m)) \right) dm_s^{z,T} ds \\ &= \int_0^T \int_E [(h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))) \mathbf{1}_{\{h^z > -1\}} + \mathbf{1}_{\{h^z = -1\}}] dm_s^{z,T} ds \\ &= \int_0^T \int_E \rho^*(h^z) dm_s^{z,T} ds = \Gamma_{\rho^*,z}(h^z) = +\infty, \end{aligned} \quad (5.5.40)$$

ce qui contredirait l'hypothèse  $\Gamma_{\rho^*,z}^*(h^z) < +\infty$ . On en déduit la dernière égalité de (5.5.17) en intégrant (5.5.37) par rapport à  $dm_s^{z,T} ds$ . Le Point (iii) du Lemme 5.5.6 et (5.5.40) nous donnent la première égalité de (5.5.17).  $\blacksquare$

**Remarque 5.5.7.** Lorsque  $h^z$  est bornée, on peut choisir les fonctions  $h_m$  bornées par  $\|h^z\|_\infty$ . En effet, en régularisant les fonctions  $f_m$  au voisinage des points où  $\psi(f_m) \geq \log(\|h^z\|_\infty + 1)$ , on obtient une nouvelle suite  $(\widehat{h}_m = e^{\psi(\check{f}_m)} - 1)_{m \in \mathbb{N}^*}$  bornée par  $\|h^z\|_\infty$  telle que :

$$|h^z - \widehat{h}_m| = \left| e^{\psi(f^z)} - e^{\psi(\check{f}_m)} \right| \leq \left| e^{\psi(f^z)} - e^{\psi(f_m)} \right| = |h^z - h_m|.$$

## 5.5.2 Minoration locale

### 5.5.2.1 Enoncé de la minoration locale

La preuve de la borne inférieure énoncée au Théorème 5.1.4 repose sur un changement de probabilité adéquat et sur l'utilisation du théorème de Girsanov. On note  $P^n = \mathcal{L}(Z^n)$ , loi de probabilité sur  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ . Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$ . Notre but est de construire une suite de mesures de probabilité  $(P^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  absolument continues par rapport à  $(P^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et pouvant s'interpréter comme un recentrage sur  $z$ . Pour cela, nous allons utiliser l'équation d'évolution perturbée (5.5.3) satisfaite par  $z$ . L'utilisation du théorème de Girsanov suppose que  $h^z$  a une forme et des régularités particulières. Comme  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  n'est *a priori* ni bornée ni dérivable par rapport aux variables d'âges, nous allons utiliser les perturbations régularisées  $h_m$  de la forme donnée au Point 1 de la Proposition 5.5.5. Il est alors naturel d'introduire la suite  $(z^m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  des solutions de l'équation (5.5.3) perturbées par les  $h_m$  et nous appliquons un recentrage associé à ces  $z^m$ . Malheureusement, nous ne savons montrer la convergence de  $(z^m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  vers  $z$  que dans le cas où  $h^z$  est bornée. Le cas où  $h^z$  est non bornée reste ouvert. Nous serons donc amené à introduire l'hypothèse supplémentaire  $h^z \in L^\infty(E \times [0, T], \mathbb{R})$  et obtenons une minoration locale.

Le résultat de cette section est le suivant. Sa démonstration fait l'objet de la Section 5.5.2.2 :

**Proposition 5.5.8.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1. Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$  et  $h^z \in L^\infty(E \times [0, T], \mathbb{R})$ . Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{e}))$  contenant  $z$ . Alors :*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in O) \geq -\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z). \quad (5.5.41)$$

(dans le cas où,  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = +\infty$ , le résultat est automatiquement satisfait).  $\square$

Nous en déduisons la minoration annoncée au Théorème 5.1.4 :

**Corollaire 5.5.9.** *Sous les hypothèses de la Proposition 5.5.8 :*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in O) \geq - \inf_{z \in O \cap \mathfrak{G}} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z), \quad (5.5.42)$$

où  $\mathfrak{G}$  a été défini en (5.1.10), et avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .

### 5.5.2.2 Preuve de la Proposition 5.5.8

Nous commençons par compléter le résultat d'approximation de la Proposition 5.5.5 en montrant que toute trajectoire  $z$  du domaine de la fonctionnelle d'action  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$  associée à  $h^z$  bornée peut être approchée par une suite de trajectoires  $(z^m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  associées à des perturbations  $h_m$  de la forme  $h_m = e^{f_m} - 1$  avec  $f_m \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$ .

**Proposition 5.5.10.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10. Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$  et soit  $h^z \in L^{\rho^*, z} \cap L^\infty(E \times [0, T], \mathbb{R})$  la perturbation associée. Alors, il existe une suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  telle que la suite de perturbations associée,  $(h_m = e^{\psi(f_m)} - 1)_{m \in \mathbb{N}^*}$ , satisfasse :*

- (i)  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $h^z$   $dm_s^{z, T}$ -presque partout.
- (ii) Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , l'équation d'évolution :  $\forall f \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$ ,

$$\langle y_t, f_t \rangle = \langle \xi_0, f_0 \rangle + \int_0^t \left\langle y_s, v \nabla_a f_s + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right\rangle ds + \int_0^t \int_E \exp(\psi(f_m)) \psi(f) dm_s^{y_s, T} ds \quad (5.5.43)$$

admet une unique solution en  $y$ , que l'on note  $z^m \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$ .

(iii) La suite  $(z^m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $z$  dans  $\mathcal{C}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \|\cdot\|_{TV}))$  muni de la norme uniforme.

(iv) On a :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z^m) = \int_0^T \int_E (h_m \psi(f_m) - \rho(\psi(f_m))) dm_s^{z^m, T} ds = \int_0^T \int_E \rho^*(h_m) dm_s^{z^m, T} ds. \quad (5.5.44)$$

et :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z^m) = \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z). \quad (5.5.45)$$

*Démonstration.* En appliquant la Proposition 5.5.5, il existe une suite  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  telle que la suite  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  associée converge vers  $h^z$   $dm_s^{z, T}$ -presque partout. Par la Remarque 5.5.7, les fonctions  $h_m$  peuvent être choisies bornées par une constante  $\|h^z\|_\infty$ . Par un argument similaire à (3.2.6) :

$$\begin{aligned} \langle z_t^m, 1 \rangle &\leq \langle \xi_0, 1 \rangle + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} e^{f_m(x, 0, s)} b(x, a) (1 - p(x, a)) z_s^m(dx, da) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \int_{\mathcal{X}} e^{f_m(x', 0, s)} b(x, a) p(x, a) K(x, a, dx') z_s^m(dx, da) ds \leq \langle \xi_0, 1 \rangle e^{(\|h^z\|_\infty + 1)\bar{b}t}. \end{aligned}$$

On peut alors définir :

$$A_T = \max \left( \sup_{t \in [0, T]} \langle z_t, 1 \rangle, \sup_{t \in [0, T]} \langle z_t^m, 1 \rangle, m \in \mathbb{N}^* \right)$$

qui existe, est fini et indépendant de  $m$ .

L'existence et l'unicité de la solution  $z^m \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  de (5.5.43) est une adaptation des résultats de la Section 3.2.2 (les taux de naissance et de mort sont perturbés par des facteurs continus bornés, et les Hypothèses 2.1.1 et 2.1.10 sont toujours vérifiées).

Soient  $t \in [0, T]$  et  $\phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  telle que  $\|\phi\|_\infty \leq 1$ . Soit  $f : (x, a, s) \in \tilde{\mathcal{X}} \times [0, T] \mapsto f(x, a, s) = \phi(x, A_x(t, s, a)) \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} |\langle z_t - z_t^m, \phi \rangle| &= \left| \int_0^t \int_E (1 + h^z) \psi(f) dm_s^{z, T} ds - \int_0^t \int_E (1 + h_m) \psi(f) dm_s^{z^m, T} ds \right| \\ &\leq A + B, \end{aligned} \quad (5.5.46)$$

$$\begin{aligned} \text{où : } A &= \left| \int_0^t \int_E (h^z - h_m) \psi(f) dm_s^{z, T} ds \right| \\ B &= \left| \int_0^t \int_E (1 + h_m) \psi(f) [dm_s^{z, T} - dm_s^{z^m, T}] ds \right|. \end{aligned}$$

Par (5.5.28), le terme  $A$  est majoré par  $1/m$ . Pour le terme  $B$ , on obtient, par un calcul similaire à (3.2.9) et par la Remarque 5.5.7 :

$$\begin{aligned} B &\leq ((1 + \|h_m\|_\infty) (\bar{b} + \bar{d}(1 + A_T) + A_T L_d \bar{U})) \int_0^t \|z_s - z_s^m\|_{TV} ds \\ &\leq C(\|h^z\|_\infty, T) \int_0^t \|z_s - z_s^m\|_{TV} ds. \end{aligned} \quad (5.5.47)$$



On en déduit :

$$|\langle z_t - z_t^m, \phi \rangle| \leq \frac{1}{m} + C(\|h^z\|_\infty, T) \int_0^t \|z_s - z_s^m\|_{TV} ds,$$

Ceci est valable pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  telle que  $\|\phi\|_\infty \leq 1$ . Comme  $\mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  est dense dans  $\mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  pour la convergence simple dominée (pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ , il existe une suite  $(\phi_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  convergeant simplement vers  $\phi$  et telle que  $\forall q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|\phi_q\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty$ , cf. Lemme A.2.1) alors :

$$\sup_{u \in [0, t]} \|z_u - z_u^m\|_{TV} \leq \frac{1}{m} + C(\|h^z\|_\infty, T) \int_0^t \sup_{u \in [0, s]} \|z_u - z_u^m\|_{TV} ds, \quad (5.5.48)$$

et par le Lemme de Gronwall :  $\sup_{t \in [0, T]} \|z_t - z_t^m\|_{TV} \leq C(\|h^z\|_\infty, T)/m$ . Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 = m_0(\varepsilon, T) \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq m_0, \sup_{t \in [0, T]} \|z_t - z_t^m\|_{TV} \leq \varepsilon, \quad (5.5.49)$$

et  $(z^m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $z$  dans  $\mathcal{C}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \|\cdot\|_{TV}))$  uniformément en  $t \in [0, T]$ .

Par une adaptation de la preuve du Point 3 de la Proposition 5.5.5, on a :

$$\Gamma_{\rho^*, z^m}(h_m) = \Gamma_{\rho, z^m}^*(h_m). \quad (5.5.50)$$

Par (5.1.4), (5.5.2), (5.5.19) et (5.5.50) :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z^m) = \Gamma_{\rho, z^m}^*(h_m) = \Gamma_{\rho^*, z^m}(h_m),$$

ce qui prouve (5.5.44). Enfin, montrons (5.5.45).

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z^m) - \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z)| \leq A + B \\ A &= \left| \int_0^T \int_E \rho^*(h_m) dm_s^{z, T} ds - \int_0^T \int_E \rho^*(h^z) dm_s^{z, T} ds \right| \\ B &= \left| \int_0^T \int_E \rho^*(h_m) dm_s^{z^m, T} ds - \int_0^T \int_E \rho^*(h_m) dm_s^{z, T} ds \right| \end{aligned} \quad (5.5.51)$$

Par (5.5.49) :  $\forall m \geq m_0$ ,

$$B \leq \int_0^T \rho^*(\|h_m\|_\infty) (\bar{b} + \bar{d}(1 + A_T) + L_d \bar{U} A_T) \|z_s - z_s^m\|_{TV} ds \leq C(\|h^z\|_\infty, T) \varepsilon.$$

Comme  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge  $dm_s^{z, T} ds$ -presque partout vers  $h^z$ , et comme ces fonctions sont bornées, on a par convergence dominée :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Gamma_{\rho^*, z}(h_m) = \Gamma_{\rho^*, z}(h^z) = \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z),$$

et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} A = 0$ . Ceci conclut la démonstration de (5.5.45). ■

Grâce aux Propositions 5.5.5 et 5.5.10 et sous les hypothèses de la Proposition 5.5.8, nous pouvons restreindre l'étude de la minoration locale aux trajectoires  $z$  du domaine de la fonctionnelle d'action telles que  $h^z = e^{f^z} - 1$  avec  $f^z \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T], \mathbb{R})$  et :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = \int_0^T \int_E (h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))) dm_s^{z, T} ds.$$

Jusqu'à la fin de cette section, nous considérerons une telle trajectoire  $z$ . Nous construisons maintenant le changement de probabilité correspondant à un recentrage sur une telle trajectoire.

**Proposition 5.5.11.** *L'équation différentielle stochastique suivante sur  $[0, T]$  :*

$$\begin{aligned} D_t^n &= 1 + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} D_{s-}^n \mathbf{1}_{\{i \leq N_t^n\}} \left[ \left( e^{f^z(X_i(Z_{s-}^n), 0, s)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta \leq m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &+ \left( e^{f^z(x', 0, s)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &\left. + \left( e^{f^z(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), s)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right] \tilde{Q}(ds, di, d\theta, dx') \end{aligned} \quad (5.5.52)$$

admet une unique solution  $(D_t^n)_{t \in [0, T]}$  qui est une  $P^n$ -martingale exponentielle :

$$\begin{aligned} D_t^n &= \exp \left( n \left[ \langle Z_t^n, f_t^z \rangle - \langle Z_0^n, f_0^z \rangle - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( v(x, a) \nabla_a f_s^z(x, a) + \frac{\partial f_s^z}{\partial s}(x, a) \right) Z_s^n(dx, da) ds \right. \right. \\ &\left. \left. - \int_0^t \int_E \psi(f^z) dm_s^{Z^n, T} ds - \int_0^t \int_E \rho(\psi(f^z)) dm_s^{Z^n, T} ds \right] \right), \end{aligned} \quad (5.5.53)$$

Sous la probabilité  $P^n$  définie par  $P^n = D_T^n \cdot P^n$ , le compensateur de la mesure aléatoire  $Q$  est :

$$\begin{aligned} \hat{q}(ds, di, d\theta, dx) &= \mathbf{1}_{\{i \leq N_t^n\}} \left[ e^{f^z(X_i(Z_{s-}^n), 0, s)} \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta \leq m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &+ e^{f^z(x', 0, s)} \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &\left. + e^{f^z(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), s)} \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right] ds n(di) d\theta P(dx'). \end{aligned} \quad (5.5.54)$$

*Démonstration.* Nous souhaitons perturber les taux de naissance, mutation et mort des particules de sorte que les nouveaux taux soient multipliés par  $1 + h^z(x, a, x', u, s) = e^{\psi(f^z)(x, a, x', u, s)}$ . Ceci explique l'introduction de l'équation différentielle stochastique (5.5.52) (cf. Jacod et Shiryaev [63], Théorème 3.24 page 159).

L'existence et l'unicité d'une solution à cette équation différentielle stochastique est donnée par Jacod ([63] Théorème 5.19 page 181). Si l'on note :

$$\begin{aligned} Y_t^n &= \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_t^n\}} \left[ \left( e^{f^z(X_i(Z_{s-}^n), 0, s)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta \leq m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \\ &+ \left( e^{f^z(x', 0, s)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &\left. + \left( e^{f^z(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), s)} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right] \tilde{Q}(ds, di, d\theta, dx'), \end{aligned}$$

alors le processus  $(D_t^n)_{t \geq 0}$  donné par :

$$\begin{aligned} D_t^n &= \exp \left( Y_t^n + \sum_{s \leq t} (\ln(1 + \Delta Y_s^n) - \Delta Y_s^n) \right) \\ &= \exp \left( \int_0^t \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_t^n\}} \left[ f^z(X_i(Z_{s-}^n), 0, s) \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta \leq m_1(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \right. \right. \\ &+ f^z(x', 0, s) \mathbf{1}_{\{m_1(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_2(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \\ &+ f^z(X_i(Z_{s-}^n), A_i(Z_{s-}^n), s) \mathbf{1}_{\{m_2(s, Z_{s-}^n, i, x') < \theta \leq m_3(s, Z_{s-}^n, i, x')\}} \left. \left. \right] \tilde{Q}(ds, di, d\theta, dx') \right. \\ &\left. - \int_0^t \int_E \rho(\psi(f^z)(x, a, x', u, s)) m_s^{Z^n, T}(dx, da, dx', du) ds \right) \end{aligned} \quad (5.5.55)$$

est bien défini. En appliquant la formule d'Itô, il satisfait (5.5.52). L'unicité de la solution de (5.5.52) s'obtient par une démonstration analogue à celle de la Proposition 2.2.6. On montre (5.5.53) en utilisant la représentation trajectorielle (3.1.29) pour remplacer l'intégrale stochastique dans (5.5.55). ■

**Proposition 5.5.12.** *Plaçons nous sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1. Soit  $z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  telle que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < \infty$  et  $h^z = e^{\psi(f^z)} - 1$  avec  $f^z \in \mathcal{C}_b^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times [0, T])$ . Alors, sous  $(P^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $z$ .  $\square$*

*Démonstration.* Sous  $P^n$ , on peut obtenir, en utilisant le nouveau compensateur de la mesure  $Q$  donné en (5.5.54), des résultats similaires à ceux du Chapitre 3 et correspondant aux remplacements suivants :

$$\begin{aligned} b(x, a)(1 - p(x, a)) &\leftrightarrow \exp(f^z(x, 0, s))b(x, a)(1 - p(x, a)) \\ b(x, a)p(x, a)k(x, a, x') &\leftrightarrow \exp(f^z(x', 0, s))b(x, a)p(x, a)k(x, a, x') \\ d(x, a, Z_s^n U(x, a)) &\leftrightarrow \exp(-f^z(x, a, s))d(x, a, Z_s^n U(x, a)). \end{aligned} \quad (5.5.56)$$

Ceci revient à considérer un système microscopique analogue à celui étudié au Chapitre 2, avec des taux de naissances et de morts perturbés par une fonction continue et bornée. Les hypothèses 2.1.1, 2.1.10 sont toujours satisfaites. On peut alors montrer, de façon analogue à la Section 3.2 (Corollaire 3.2.4), que  $Z^n$  converge étroitement vers  $z$  en  $P^n$ -probabilité.  $\blacksquare$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la minoration annoncée en (5.5.41).

*Preuve de la Proposition 5.5.8.* Nous avons :

$$P^n(O) = P^n(O) \mathbb{E}^{P^n} \left( \frac{\mathbf{1}_O}{P^n(O)} \frac{dP^n}{dP^n} \right) = P^n(O) \mathbb{E}^{P^n} \left( \frac{dP^n}{dP^n} \mid O \right),$$

où les termes des égalités précédentes sont éventuellement tous nuls. Par l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P^n(O) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P^n(O) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}^{P^n} \left( \frac{\mathbf{1}_O}{P^n(O)} \log \frac{dP^n}{dP^n} \right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P^n(O) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{P^n} \left( -\frac{\mathbf{1}_O}{P^n(O)} \frac{1}{n} \log D_T^n \right). \end{aligned}$$

Par la Proposition 5.5.12,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log P^n(O) \rightarrow 0$ , ce qui implique  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P^n(O) = 0$ . L'expression (5.5.53), la Proposition 5.5.12, le fait que  $z$  soit continue et le fait que  $h^z$  et  $f^z$  soient continues et bornées impliquent la convergence en probabilité suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_T^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \langle Z_t^n, f_t^z \rangle - \langle Z_0^n, f_0^z \rangle - \int_0^t \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \left( v(x, a) \nabla_a f_s^z(x, a) + \frac{\partial f_s^z}{\partial s} \right) Z_s^n(dx, da) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \int_E \psi(f^z) dm_s^{Z^n, T} ds - \int_0^t \int_E \rho(\psi(f^z)) dm_s^{Z^n, T} ds \right] \\ &= \int_0^t \int_E h^z \psi(f^z) dm_s^{z, T} ds - \int_0^t \int_E \rho(\psi(f^z)) dm_s^{z, T} ds = \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z), \end{aligned}$$

par (5.5.1) et (5.5.17). Comme :

$$\frac{1}{n} \log D_T^n \leq C(T, \|h^z\|_\infty, \|f^z\|_\infty) \left( 1 + \sup_{t \in [0, T]} \langle Z_t^n, \mathbf{1} \rangle^2 \right),$$

alors, par le Point 4 des Hypothèses 5.1.1 et par le Théorème 3.1.7 :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{P^n} \left( \frac{\mathbf{1}_O}{P^n(O)} \frac{1}{n} \log D_T^n \right) \leq \int_0^t \int_E [h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))] dm_s^{z, T} ds = \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z),$$

d'où :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P^n(O) \geq -\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z).$$

Ceci conclut la preuve du Théorème 5.1.4.  $\blacksquare$

## 5.6 Application aux problèmes de sortie de domaine

Nous déduisons du Théorème 5.1.4 des estimées sur les temps de sortie de domaine. Les calculs que nous présentons sont inspirés de résultats obtenus par Freidlin et Ventzell [50], Dembo et Zeitouni [32] (Section 5) en dimension finie, et Da Prato et Zabczyk [105] (Chapitre 12). Nous adaptons ces travaux dans le cas de nos processus à valeurs mesures. Nous commençons par établir des estimées pour les probabilités de sortie de certains domaines particuliers (Sections 5.6.1 et 5.6.2). Les contrôles du temps de sortie du voisinage d'un équilibre stationnaire sont envisagés dans le cas particulier des populations logistiques structurées par un âge scalaire, et considérés à la Section 5.6.3. Ces résultats nous serviront au Chapitre 6 lorsque nous séparerons les échelles de temps liées à l'écologie et à l'évolution. Pour cela, nous serons amenés à considérer des mutations rares, mais de taux suffisamment important pour que la probabilité que la population sorte de son état d'équilibre avant l'occurrence d'une nouvelle mutation soit petite. Les estimées de la Section 5.6.3.2 nous indiqueront que ce taux doit être supérieur à  $e^{-n\underline{V}}$  où  $\underline{V}$  est une constante précisée dans la suite.

Nous allons considérer deux distances sur  $\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ . La distance en variation totale est définie par :  $\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ ,

$$\begin{aligned} \|\mu - \nu\|_{TV} &= \sup \left\{ |\langle \mu, f \rangle - \langle \nu, f \rangle|, f \in \mathcal{B}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle \mu, f \rangle - \langle \nu, f \rangle|, f \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

(cf. Annexe A.6). Nous considérons aussi la distance de Vasserstein  $L^1$  :  $\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$ ,

$$\mathcal{W}_1(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int_{\tilde{\mathcal{X}}^2} [(|x - y| + |a - \alpha|) \wedge 1] d\pi((x, a), (y, \alpha)) \right\} \quad (5.6.1)$$

l'infimum étant pris sur toutes les mesures  $\pi \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}^2)$  ayant pour marginales  $\mu$  et  $\nu$ . Cette distance métrise la topologie de la convergence étroite (cf. Rachev [106], Villani [121] Théorème 7.12 page 212). Nous avons également la caractérisation suivante :

$$\mathcal{W}_1(\mu, \nu) = \sup_{f \text{ 1-Lip}(\tilde{\mathcal{X}})} \left| \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f d\mu - \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f d\nu \right|. \quad (5.6.2)$$

Par choix de la distance  $(|x - y| + |a - \alpha|) \wedge 1$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$  dans (5.6.1), nous pouvons prendre le supremum dans (5.6.2) sur les fonctions  $f$  1-Lipschitziennes positives bornées par 1 (cf. Remarque 7.5 de [121]).

La distance  $\mathcal{W}_1$  nous permettra de simplifier certains problèmes, car elle se caractérise à l'aide de fonctions Lipschitziennes, propriété utile pour traiter certains problèmes issus de la structure d'âge (cf. Preuve du Lemme 5.6.14 par exemple). En particulier, lorsque  $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ ,  $f$  1-Lipschitzienne implique que  $\|\nabla_a f\|_\infty \leq 1$ .

La difficulté sera de jongler entre ces deux distances (cf. Section 5.6.3 par exemple). Remarquons que

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \mathcal{W}_1(\mu, \nu) \leq \|\mu - \nu\|_{TV}. \quad (5.6.3)$$

On notera  $B_{TV}(\mu, r)$  (resp.  $B_{\mathcal{W}_1}(\mu, r)$ ) la  $\|\cdot\|_{TV}$ -boule (resp. la  $\mathcal{W}_1$ -boule) de centre  $\mu \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  et de rayon  $r > 0$ .

Soit  $d_{\mathbb{D}, T}$  la distance de Skorohod sur  $\mathbb{D}_T := \mathbb{D}([0, T], (\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \acute{e}))$  (cf. [7, 63]).

### 5.6.1 Probabilité de sortie d'un puits de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$

Soient  $R > 0$ ,  $\delta > 0$  et soient  $K(R)$  et  $B_{\mathcal{W}_1}(K(R), \delta)$  les ensembles définis par :

$$K(R) = \{z \in \mathbb{D}_T, \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) \leq R\} \quad \text{et} \quad K(R)_\delta = \{z \in \mathbb{D}_T, \exists z' \in K(R), d_{\mathbb{D},T}(z, z') < \delta\}. \quad (5.6.4)$$

**Proposition 5.6.1.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1 :  $\forall R > 0, \forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,*

$$\mathbb{P}(Z^n \in K(R)_\delta) \geq 1 - e^{-n(R-\varepsilon)}. \quad (5.6.5)$$

*Démonstration.* Soient  $R > 0$ ,  $\delta > 0$ . L'ensemble  $K(R)_\delta^c$  est fermé dans  $\mathbb{D}_T$ . Par définition de la lim sup dans la majoration des grandes déviations (Théorème 5.1.4),  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in K(R)_\delta^c) \leq - \inf_{z \in K(R)_\delta^c} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) + \varepsilon.$$

Par définition,  $\forall z \in K(R)_\delta^c, \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) > R$ . On en déduit :  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}(Z^n \in K(R)_\delta^c) \leq \exp(n(-R + \varepsilon)),$$

et (5.6.5) est satisfait. ■

### 5.6.2 Temps de sortie d'un tube

**Proposition 5.6.2.** *On se place sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.4, 2.1.10, 5.1.1.  $\forall z \in \mathfrak{G}$  (défini en (5.1.10)),  $\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,*

$$\mathbb{P}(d_{\mathbb{D},T}(Z^n, z) < \delta) \geq \exp(-n[\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) + \varepsilon]). \quad (5.6.6)$$

*Démonstration.* L'ensemble  $\{y \in \mathbb{D}_T \mid d_{\mathbb{D},T}(z, y) < \delta\}$  est ouvert. En appliquant la minoration obtenue au Théorème 5.1.4, on a par définition de la lim inf :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$-\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) - \varepsilon \leq - \inf_{\substack{y \in \mathfrak{G} \\ d_{\mathbb{D},T}(y, z) < \delta}} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(y) - \varepsilon \leq \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(d_{\mathbb{D},T}(Z^n, z) < \delta),$$

ce qui termine la preuve. ■

**Remarque 5.6.3.** *Comme  $\{y \mid d_{\mathbb{D},T}(y, \xi) < \delta\} \cap \mathfrak{G} \neq \emptyset$ , la minoration de (5.1.11) nous fournit en particulier des informations pour les temps de sortie de tubes centrés sur la solution  $\xi$  de (3.0.1).*

### 5.6.3 Temps de sortie du voisinage d'un état stationnaire

Dans cette section, nous reprenons le problème des populations logistiques structurées par un âge scalaire, considéré à la Section 4.6.

**Hypothèse 5.6.4.** *Nous supposons que les fonctions  $a \mapsto b(a)$  et  $a \mapsto d(a)$  sont Lipschitziennes de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , de constantes  $L_b$  et  $L_d$ .*

*Nous supposons que la limite  $\xi_0$  de  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $(\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+), \acute{e})$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité  $m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ .*

$T$  n'est plus fixe. Rappelons que dans ce cadre, l'approximation en grande population est décrite par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(a, t) &= -\frac{\partial m}{\partial a}(a, t) - (d(a) + \eta N_t) m(a, t) \\ m(0, t) &= \int_0^{+\infty} b(a)m(a, t)da, \quad m(a, 0) = m_0(a), \quad N_t = \int_0^{+\infty} m(a, t)da. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Nous avons vu à la Section 4.6 que les trajectoires du processus microscopique  $Z^n$ , proches de la solution stationnaire  $\widehat{\xi}(da) = \widehat{m}(a)da$  de (5.6.7) (définie en (4.6.9)) "avec une grande probabilité" pour  $t$  et  $n$  assez grands, quittaient le voisinage de cette solution  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Nous cherchons à établir des estimées du temps de sortie d'un voisinage de  $\widehat{\xi}$  en utilisant les déviations exponentielles obtenues au Théorème 5.1.4. La minoration du temps de sortie sera utilisée au Chapitre 6.

Le résultat suivant concerne le comportement en temps long de la solution de (5.6.7) :

**Proposition 5.6.5.** *Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.10, 5.6.4 et si  $\int_{\mathbb{R}_+} b(a)e^{-\int_0^a d(\alpha)d\alpha}da > 1$  :*

- i)  $\widehat{m}$  défini en (4.6.9) est un équilibre asymptotiquement exponentiellement stable et :  $\forall m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\exists \lambda > 0$ ,  $\forall C > 0$ ,  $\exists T = T(m_0) \geq 0$ ,  $\forall t \geq T$ ,  $\|m(\cdot, t) - \widehat{m}\|_1 < Ce^{-\lambda t}$ .
- ii)  $\forall \xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ ,  $\forall R > 0$ ,  $\exists T_1 = T_1(R, \xi_0) \geq 0$ ,  $\forall t \geq T_1$ ,  $\mathcal{W}_1(\xi_t, \widehat{\xi}) < R$ .

L'hypothèse  $\int_{\mathbb{R}_+} b(a)e^{-\int_0^a d(\alpha)d\alpha}da > 1$  est classique pour assurer l'existence d'une solution stationnaire stable non triviale à l'équation (5.6.7) (cf. Annexe A.4). Elle signifie que l'intégrale du taux de reproduction  $b(a)$  pondéré par la survie en l'absence de compétition  $e^{-\int_0^a d(\alpha)d\alpha}$  est supérieure à 1, ce qui assure intuitivement le renouvellement des générations en l'absence de compétition.

Notons que la démonstration du Point (ii) utilise la caractérisation de  $\mathcal{W}_1$  par les fonctions Lipschitziennes.

*Preuve de la Proposition 5.6.5.* Il est démontré en Annexe (Proposition A.4.10) que  $\widehat{m}$  (4.6.9) est l'unique équilibre non trivial de (5.6.7) et que cet équilibre est exponentiellement stable au sens (4.6.11). Soit  $m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  non nulle, et soit  $(m(\cdot, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  la solution de (5.6.7) issue de  $m_0$  et définie en (4.6.5). Cette solution converge vers  $\widehat{m}$  en norme  $L^1$  (conséquence du Point (i) de la Proposition 4.6.5). Alors  $\exists d_0 > 0$  (définie en (4.6.11)),  $\exists T_1 = T_1(m_0, d_0) \geq 0$ ,  $\|m(\cdot, T_1) - \widehat{m}\|_1 \leq d_0$ . Par (4.6.11),  $\exists \lambda > 0$ ,  $\forall C' > 0$ ,  $\exists T_2 = T_2(C')$ ,  $\forall t \geq T_2$ ,  $\|m(\cdot, T_1 + t) - \widehat{m}\|_1 \leq C'e^{-\lambda t}$ . Le Point (i) est donc satisfait pour  $T = T_1(m_0, d_0) + T_2(C'e^{-\lambda T_1})$ .

Remarquons que si  $m_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\mu, \delta)$ , il est possible de choisir  $T = T(\mu, \delta)$  au lieu de  $T(m_0)$ .

Considérons maintenant le Point (ii), dont nous découpons la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1 : Nous montrons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \mathcal{W}_1(\xi_0, m_0(a)da) < \varepsilon. \quad (5.6.8)$$

Le fait que nous considérons des mesures à supports inclus dans  $\mathbb{R}_+$  nous amène à modifier la régularisation classique. Nous introduisons les mesures  $(\xi_0^q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$\xi_0^q(da) = \mathbf{1}_{a \geq 0} \left( \int_{\mathbb{R}_+} \frac{G_q(a - \alpha)}{\int_{\mathbb{R}_+} G_q(u - \alpha)du} \xi_0(d\alpha) \right) da, \quad (5.6.9)$$

où  $G_q$  est la densité de la normale  $\mathcal{N}(0, 1/q)$ . Notons que :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{G_q(a - \alpha)}{\int_{\mathbb{R}_+} G_q(u - \alpha) du} da &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}_+} |a - \alpha| G_q(a - \alpha) da &\leq \int_{\mathbb{R}} |u| G_q(u) du \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ \int_{\mathbb{R}_+} G_q(a - \alpha) da &= \int_{-\alpha}^{+\infty} G_q(u) du \geq \int_0^{+\infty} G_q(u) du = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soit  $\phi$  1-Lipschitzienne bornée par 1.

$$\begin{aligned} |\langle \xi_0 - \xi_0^q, \phi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a) \xi_0(da) - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a) \frac{G_q(a - \alpha)}{\int_{\mathbb{R}_+} G_q(u - \alpha) du} da \right) \xi_0(d\alpha) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} |\phi(\alpha) - \phi(a)| \frac{G_q(a - \alpha)}{\int_{\mathbb{R}_+} G_q(u - \alpha) du} da \xi_0(d\alpha) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} |a - \alpha| \frac{G_q(a - \alpha)}{\int_{\mathbb{R}_+} G_q(u - \alpha) du} da \xi_0(d\alpha) \leq \frac{2\langle \xi_0, 1 \rangle}{\sqrt{q}}. \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

On en déduit que  $\lim_{q \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_1(\xi_0, \xi_0^q) = 0$ . Les mesures  $(\xi_0^q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  sont par construction absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . Par les hypothèses de moments sur  $\xi_0$ , elles admettent des densités dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . Nous avons bien montré (5.6.8).

Etape 2 : Soient  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ ,  $R > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  telle que  $\mathcal{W}_1(\xi_0, m_0(a)da) < \varepsilon$  (l'existence de  $m_0$  est donnée par l'Etape 1).

Soient  $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$  la solution faible mesure et  $(m(a, t))_{t \in [0, T]}$  la solution classique de (5.6.7) correspondant aux conditions initiales  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$  et  $m_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  (l'existence et l'unicité découlent du Corollaire 3.2.4 et des résultats de l'Annexe A.4).

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{W}_1(\xi_t, \widehat{\xi}) \leq \mathcal{W}_1(\xi_t, m(a, t)da) + \|m(\cdot, t) - \widehat{m}\|_1, \quad (5.6.11)$$

par (5.6.3). Par le Point (i),  $\exists T_1 = T_1(R, m_0) > 0$ ,  $\forall t \geq T_1$ ,  $\|m(\cdot, t) - \widehat{m}\|_1 < R/2$ . Par choix de  $m_0$ , il est possible de choisir  $T_1 = T_1(R, \xi_0)$ .

Considérons le premier terme du membre de droite de (5.6.11). Soit  $T > T_1$ . De même que pour (3.2.6) :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( \langle \xi_t, 1 \rangle + \int_{\mathbb{R}_+} m(a, t) da \right) \leq A_T := (2\langle \xi_0, 1 \rangle + \varepsilon) e^{\bar{b}T}.$$

Soient  $\phi$  1-Lip( $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+$ )  $\cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  telle que  $\|\phi\|_\infty \leq 1$ ,  $t \in [0, T]$  et  $(f : (a, s) \mapsto \phi(a+t-s)) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ . On a :

$$\begin{aligned} |\langle \xi_t, \phi \rangle - \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a) m(a, t) da| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a+t) [\xi_0(da) - m_0(a) da] \right. \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} (\phi(t-s)b(a) - \phi(a+t-s)(d(a) + \eta\langle \xi_s, 1 \rangle)) [\xi_s(da) - m(a, s) da] ds \\ &\left. - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a+t-s) \eta \left( \langle \xi_s, 1 \rangle - \int_{\mathbb{R}_+} m(a, s) da \right) m(a, s) da ds \right| \\ &\leq \mathcal{W}_1(\xi_0, m_0(a) da) + \int_0^t (L_b + \bar{b} + L_d + \bar{d} + 2\eta A_T) \mathcal{W}_1(\xi_s, m(a, s) da) ds. \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

Le membre de droite de (5.6.12) ne dépend plus de  $\phi$ . Comme toute fonction  $\phi$  1-Lip( $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+$ ) telle que  $\|\phi\|_\infty \leq 1$  est la limite uniforme des fonctions :

$$\phi_p(a) = \int_{\mathbb{R}} \phi(a-u) G_p(u) du, \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*,$$

1-Lipschitziennes, de classe  $\mathcal{C}^1$  et bornées par 1, on obtient par densité en prenant le sup en  $\phi$  dans le membre de gauche de (5.6.12) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1(\xi_t, m(a, t)da) &\leq \mathcal{W}_1(\xi_0, m_0(a)da) + \int_0^t (L_b + \bar{b} + L_d + \bar{d} + 2\eta A_T) \mathcal{W}_1(\xi_s, m(a, s)da) ds \\ &\leq \varepsilon e^{(L_b + \bar{b} + L_d + \bar{d} + 2\eta A_T)T}, \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

par le Lemme de Gronwall et le choix de  $m_0$ . Ce terme est majoré par  $R/2$  pour le choix de :

$$\varepsilon(T, R) = \frac{R}{2} e^{-(L_b + \bar{b} + L_d + \bar{d} + 2\eta A_T)T}.$$

$T > T_1$  étant arbitraire, nous avons prouvé le Point (ii). ■

Soit  $0 < \gamma < \langle \hat{\xi}, 1 \rangle$ . Nous allons nous intéresser au problème de sortie du domaine  $B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$ . Remarquons que par choix de  $\gamma$ , ce voisinage ne contient pas la mesure nulle. On définit le temps de sortie de  $B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$  par :

$$\mathcal{T}^n = \inf \left\{ t \geq 0, \mid Z_t^n \notin B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma) \right\}. \quad (5.6.14)$$

On pose, pour  $R > 0$  :

$$\bar{V} = \inf \left\{ \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) \mid T > 0, z \in \mathbb{D}_T \cap \mathfrak{G}, z_0 = \hat{\xi}, z_T \notin B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma) \right\}, \quad (5.6.15)$$

$$\underline{V}(R) = \inf \left\{ \mathcal{I}_{z_0}^T(z) \mid T > 0, z \in \mathbb{D}_T, \mathcal{W}_1(z_0, \hat{\xi}) < R, z_T \notin B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma) \right\}, \quad (5.6.16)$$

$$\underline{V} = \lim_{R \rightarrow 0} \underline{V}(R), \quad (5.6.17)$$

où l'on rappelle que  $\mathfrak{G}$  a été défini en (5.1.10).

Lorsque l'ensemble de (5.6.15) (resp. (5.6.16)) est vide,  $\bar{V}$  (resp.  $\underline{V}(R)$ ) est infini. Remarquons que les estimées données dans les sections suivantes (Propositions 5.6.6 et 5.6.11) sont alors automatiquement satisfaites. Notons que  $\underline{V}$  est bien définie dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  : la suite  $(\underline{V}(R))_{R>0}$  est croissante lorsque  $R \downarrow 0$  et on a :

$$\underline{V} := \lim_{R \rightarrow 0} \underline{V}(R) \leq \bar{V}. \quad (5.6.18)$$

### Notations :

Rappelons que nous notons  $\xi$  la solution faible mesure de (5.6.7) dont la condition initiale est  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ . Dans la fin de ce chapitre (Sections 5.6.3.1 et 5.6.3.2), nous considérons  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$ . Rappelons aussi que  $Z_0^n$  converge étroitement vers  $\xi_0$ .

Nous noterons  $\xi^{\mu_0} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+))$  la solution de (5.6.7) de condition initiale  $\mu_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ .

Pour  $z \in \mathbb{D}_T$  tel que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) < +\infty$  avec  $T > 0$ , il existe  $h^z \in L^{\rho^*, z}$  tel que  $z$  soit solution de (5.5.3) perturbée par  $h^z$ . On note  $z^{\mu_0}$  la solution de cette équation perturbée par  $h^z$  et issue de  $\mu_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ .

### 5.6.3.1 Majoration du temps de sortie

**Proposition 5.6.6.** *Soit  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$ . Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.10, 5.1.1, 5.6.4 :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\mathcal{T}^n) \leq \bar{V}. \quad (5.6.19)$$



Le corollaire suivant nous donne une interprétation de ce résultat : le temps de sortie  $\mathcal{T}^n$  peut être majoré par  $e^{n\bar{V}}$  à un ensemble de probabilité exponentiellement petite près.

**Corollaire 5.6.7.** *Soit  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$ . Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.10, 5.1.1, 5.6.4 :  $\forall \delta > 0, \exists C > 0$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( \mathcal{T}^n \geq e^{n(\bar{V} + \delta)} \right) \leq -C. \quad (5.6.20)$$

*Démonstration.* Soit  $\delta > 0$ . Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P} \left( \mathcal{T}^n \geq e^{n(\bar{V} + \delta)} \right) \leq e^{-n(\bar{V} + \delta)} \mathbb{E}(\mathcal{T}^n).$$

Par la Proposition 5.6.6 :  $\forall \varepsilon \in ]0, \delta[$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\mathcal{T}^n) \leq \bar{V} + \varepsilon$ , et :

$$\mathbb{P} \left( \mathcal{T}^n \geq e^{n(\bar{V} + \delta)} \right) \leq e^{-n\bar{V} - n\delta + n\bar{V} + n\varepsilon} = e^{-n(\delta - \varepsilon)}.$$

■

La démonstration de la Proposition 5.6.6 s'appuie sur les lemmes suivants, démontrés en fin de section. Le Lemme 5.6.8 établit un résultat de continuité par rapport à la condition initiale. Le Lemme 5.6.9 montre que  $z \mapsto \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z)$  ne s'annule qu'en  $\xi$ . Notons que les résultats donnés par ces lemmes utilisent la norme en variation totale. En effet, nous ne savons pas si les perturbations  $h^z$  sont Lipschitziennes. En revanche, sous la contrainte  $z \in \mathfrak{G}$  dans la définition de  $\bar{V}$  (5.6.15) et dans la minoration du Théorème 5.1.4, ces perturbations sont bornées.

**Lemme 5.6.8.** *Soit  $T > 0$ . Soit  $z \in \mathbb{D}_T \cap \mathfrak{G}$ , de condition initiale  $z_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ .*

(i)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mu_0 \in B_{TV}(z_0, \delta), \sup_{t \in [0, T]} \|z_t^{\mu_0} - z_t\|_{TV} < \varepsilon$ ,

(ii) *L'application  $\mu_0 \mapsto \mathcal{I}_{\mu_0}^T(z^{\mu_0})$  de  $(\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+), \|\cdot\|_{TV})$  dans  $\mathbb{R}_+$  est continue au point  $\mu_0 = z_0$ .*

**Lemme 5.6.9.** *Soit  $T \in \mathbb{R}_+$ . On a  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = 0$  si et seulement si  $z = \xi$ , l'unique solution faible mesure de (5.6.7) issue de  $\xi_0$ . □*

*Preuve de la Proposition 5.6.6.* Soit  $z \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+))$  telle que :

- $z_0 = \hat{\xi}$ ,
- $\exists T > 0, z_T \notin B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$ ,
- $(z_t)_{t \in [0, T]} \in \mathfrak{G}$ . Nous faisons cette hypothèse car la majoration (5.6.19) se fonde sur la minoration de (5.1.11).

Pour établir la Proposition 5.6.6, il suffit de montrer que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\mathcal{T}^n) \leq \mathcal{I}_{\hat{\xi}}^T(z). \quad (5.6.21)$$

Le membre de gauche ne dépendant pas de  $z$ , nous pouvons alors prendre l'infimum en  $z$  dans le membre de droite, ce qui donne (5.6.19) par (5.6.15).

Pour obtenir (5.6.21), nous allons établir une majoration de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathcal{T}^n > kC(z, T)) \leq (p(z, T))^k, \quad (5.6.22)$$

où  $C(z, T)$  est une constante positive. Pour cela, nous minorons la probabilité  $\mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq kC(z, T))$  par la probabilité que  $(Z_t^n)_{t \in [0, kC(z, T)]}$  passe par un voisinage de  $z_T \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$  situé hors de  $B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma)$ .

Etape 1 : Nous commençons par minorer la probabilité de sortie de  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  lorsque la condition initiale est "proche" de  $\widehat{\xi}$ , en utilisant la trajectoire  $z$ .

Soit  $\delta := \inf\{\mathcal{W}_1(z_T, y), y \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)\}$ . Comme  $z_T \notin B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ ,  $\delta > 0$ . Considérons l'équation d'évolution perturbée (5.5.3) dont  $z$  est la solution issue de  $\widehat{\xi}$  et soit  $\mu_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ .

Par le Point (i) du Lemme 5.6.8,  $\forall \delta_1 \in ]0, \delta[, \exists \delta_2 > 0$ ,

$$\left[ \|\mu_0 - \widehat{\xi}\|_{TV} < \delta_2 \right] \Rightarrow \left[ \|z_T^{\mu_0} - z_T\|_{TV} < \delta - \delta_1 \right].$$

On en déduit :  $\forall \mu_0 \in B_{TV}(\widehat{\xi}, \delta_2)$ ,

$$\begin{aligned} \inf_{y \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)} \mathcal{W}_1(z_T^{\mu_0}, y) &\geq \inf_{y \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)} \mathcal{W}_1(z_T, y) - \mathcal{W}_1(z_T^{\mu_0}, z_T) \\ &\geq \inf_{y \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)} \mathcal{W}_1(z_T, y) - \|z_T^{\mu_0} - z_T\|_{TV} \geq \delta - (\delta - \delta_1) = \delta_1 > 0, \end{aligned}$$

et  $z_T^{\mu_0} \notin B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ .

Par le Point (ii) du Lemme 5.6.8 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \mu_0 \in B_{TV}(\widehat{\xi}, \delta_0), |\mathcal{I}_{\mu_0}^T(z^{\mu_0}) - \mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z)| \leq \varepsilon. \quad (5.6.23)$$

Supposons que  $\xi_0 \in B_{TV}(\widehat{\xi}, \delta_0 \wedge \delta_2)$ . Nous pouvons minorer la probabilité de sortie de  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  par la probabilité que la trajectoire reste dans le tube de rayon  $\delta_1$  autour de  $z^{\xi_0}$  :

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq T) \geq \mathbb{P}\left(d_{\mathbb{D}, T}(Z^n, z^{\xi_0}) < \delta_1\right).$$

Par la Proposition 5.6.2, on en déduit :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq T) \geq e^{-n(\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z^{\xi_0}) + \varepsilon)} \geq e^{-n(\mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z) + 2\varepsilon)}, \quad (5.6.24)$$

par (5.6.23).

Etape 2 : Nous considérons maintenant une condition initiale  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  satisfaisant l'Hypothèse 5.6.4. Par la Proposition 3.2.6, les marginales  $\xi_t$  de la solution faible mesure de (5.6.7) sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Par le Point (i) de la Proposition 5.6.5,

$$\exists T_1 = T_1(\delta_0 \wedge \delta_2, \widehat{\xi}, \gamma) \geq 0, \|\xi_{T_1} - \widehat{\xi}\|_{TV} < \delta_0 \wedge \delta_2. \quad (5.6.25)$$

Soit  $\delta_3 = \inf_{t \in [0, T_1]} \left(\gamma - \mathcal{W}_1(\xi_t, \widehat{\xi})\right) > 0$  (la trajectoire déterministe  $\xi$  reste dans  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ ).

Comme  $(Z_{T_1}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\xi_{T_1} \in B_{TV}(\widehat{\xi}, \delta_0 \wedge \delta_2)$ , nous avons par (5.6.24), en utilisant la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq T + T_1) &\geq \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{T}^n > T_1} \mathbb{P}^{Z_{T_1}^n}(\mathcal{T}^n \leq T)\right) \\ &\geq \mathbb{P}(d_{\mathbb{D}, T_1}(Z^n, \xi) \leq \delta_3) e^{-n(\mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z) + 2\varepsilon)} \geq e^{-n(\mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z) + 3\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (5.6.26)$$

où la minoration de  $\mathbb{P}(d_{\mathbb{D}, T_1}(Z^n, \xi) \leq \delta_3)$  est obtenue par la Proposition 5.6.2 et le Lemme 5.6.9.

Etape 3 : Nous établissons maintenant (5.6.22). Posons :

$$p := 1 - e^{-n(\mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z) + 3\varepsilon)}. \quad (5.6.27)$$

Supposons que pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous ayons montré pour  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  :

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^n > k(T + T_1)) \leq p^k. \quad (5.6.28)$$

Par la propriété de Markov forte, comme sur  $\{\mathcal{T}^n > k(T + T_1)\}$ ,  $Z_{k(T+T_1)}^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  et converge vers  $\xi_{k(T+T_1)} \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  (en utilisant à nouveau le fait que la trajectoire déterministe  $\xi$  reste dans  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{T}^n > (k+1)(T + T_1)) &\leq \mathbb{E} \left( \mathbb{P}_{Z_{k(T+T_1)}^n}(\mathcal{T}^n > T + T_1) \mathbf{1}_{\mathcal{T}^n > k(T+T_1)} \right) \\ &\leq p \mathbb{P}(\mathcal{T}^n \geq k(T + T_1)) \leq p^{k+1}. \end{aligned} \quad (5.6.29)$$

Par récurrence, nous avons donc (5.6.28) pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Etape 4 : Nous en déduisons pour  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\mathcal{T}^n}{T + T_1} \right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{P} \left( \frac{\mathcal{T}^n}{T + T_1} > t \right) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{T}^n > k(T + T_1)) \leq \frac{1}{1-p} = e^{n(\mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z) + 3\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

par définition de  $p$ . Alors :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\mathcal{T}^n) \leq \mathcal{I}_{\widehat{\xi}}^T(z) + 3\varepsilon. \quad (5.6.31)$$

Le choix de  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, la Proposition est démontrée.  $\blacksquare$

**Remarque 5.6.10.** Pour l'obtention des inégalités (5.6.24) et (5.6.26), le fait de n'avoir qu'une minoration locale dans (5.1.11) n'est pas restrictif, car nous considérons des déviations par rapport à la trajectoire  $\xi$ , qui appartient à  $\mathfrak{G}$  (5.1.10).

*Preuve du Lemme 5.6.8.* Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta \in ]0, 1]$  et  $\mu_0 \in B_{TV}(\xi_0, \delta)$ . Par une adaptation de (3.2.6),  $\sup_{t \in [0, T]} \langle z_t + z_t^{\mu_0}, 1 \rangle \leq (2\langle \xi_0, 1 \rangle + 1)e^{\delta T} =: A_T$  indépendant de  $\mu_0$  et  $\delta$ .

Soit  $\phi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  telle que  $\|\phi\|_\infty \leq 1$ . Soient  $t \in [0, T]$  et  $(f : (a, s) \mapsto \phi(a + t - s)) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Nous avons par un calcul similaire à (3.2.9) :

$$\begin{aligned} |\langle z_t - z_t^{\mu_0}, \phi \rangle| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a+t) z_0(da) - \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a+t) \mu_0(da) \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \int_E \psi(f)(h^z + 1) dm_s^{z, T} ds - \int_0^t \int_E \psi(f)(h^z + 1) dm_s^{z^{\mu_0}, T} ds \right| \\ &\leq \|z_0 - \mu_0\|_{TV} + (\|h^z\|_\infty + 1) [\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T] \int_0^t \|z_s - z_s^{\mu_0}\|_{TV} ds \end{aligned} \quad (5.6.32)$$

(rappelons que  $z \in \mathfrak{G}$  implique que  $h^z$  est borné). Comme toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  bornée par 1 peut s'écrire comme limite simple d'une suite de fonctions de  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  bornées par 1, on obtient en prenant le sup en  $\phi$  dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \|z_t - z_t^{\mu_0}\|_{TV} &\leq \|z_0 - \mu_0\|_{TV} + (\|h^z\|_\infty + 1) [\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T] \int_0^t \|z_s - z_s^{\mu_0}\|_{TV} ds \\ &\leq \delta \exp((\|h^z\|_\infty + 1) [\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T] T), \end{aligned} \quad (5.6.33)$$

par le Lemme de Gronwall et le choix de  $\mu_0$ . En choisissant

$$\delta = \min \left( 1, \varepsilon e^{-(\|h^z\|_\infty + 1)[\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T]T} \right),$$

on a bien  $\delta \in ]0, 1]$  et on majore le membre de droite de (5.6.33) par  $\varepsilon$ , ce qui termine la preuve du Point (i).

Montrons maintenant le Point (ii). Pour  $f^z$  est défini en (5.5.16) :

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{I}_{\mu_0}^T(z^{\mu_0}) - \mathcal{I}_{z_0}^T(z) \right| \\ &= \left| \int_0^T \int_E (h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))) dm_s^{z^{\mu_0}, T} ds - \int_0^T \int_E (h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))) dm_s^{z, T} ds \right| \\ &\leq \|h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))\|_\infty T (\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T) \sup_{t \in [0, T]} \|z_t - z_t^{\mu_0}\|_{TV}. \end{aligned}$$

Grâce au Point (i),  $\exists \delta > 0, \forall \mu_0 \in B(z_0, \delta)$ ,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|z_t - z_t^{\mu_0}\|_{TV} < \frac{\varepsilon}{\|h^z \psi(f^z) - \rho(\psi(f^z))\|_\infty T (\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T)}.$$

Ceci conclut la démonstration du Point (ii). ■

*Preuve du Lemme 5.6.9.* Nous allons prouver que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = 0$  si et seulement si  $z$  est la solution faible mesure dans  $\mathbb{D}_T$  de (5.6.7) issue de  $\xi_0$ .

En choisissant  $f = 0$  dans (5.1.5), on obtient par (5.1.4) que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) \geq 0$ . Comme  $\forall f \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T], \mathbb{R})$ ,  $\ell_T(f, \xi) = 0$ , alors :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(\xi) = \sup_{f \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T], \mathbb{R})} \left\{ - \int_0^T \int_E \rho(\psi(f)) dm_s^{\xi, T} ds \right\} \leq 0$$

et ainsi  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(\xi) = 0$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = 0$  et que  $z$  ne résout pas (5.6.7). Alors, il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  telle que  $\ell^T(g, z) > 0$ . Pour  $\varepsilon > 0$  nous avons :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) = 0 \geq \mathcal{I}_{\xi_0}^{\varepsilon g, T}(z) = \varepsilon \ell^T(g, z) - c^T(\varepsilon g, z), \quad (5.6.34)$$

où  $\ell^T$  et  $c^T$  sont définis en (5.1.6) et (5.1.7). Comme  $\rho(x)$  est équivalent à  $x^2/2$  lorsque  $x$  tend vers zéro, le membre de droite de (5.6.34) est strictement positif pour  $\varepsilon$  assez petit, ce qui est absurde. Donc  $z$  est solution de l'équation (5.6.7) pour laquelle on a établi l'unicité de la solution (Théorème 3.2.3). ■

### 5.6.3.2 Minoration du temps de sortie

Nous complétons maintenant le résultat de la Proposition 5.6.6 en considérant la probabilité  $\mathbb{P}(\mathcal{T}^n > e^{n(\underline{V} - \delta)})$ , pour  $\delta > 0$ . Nous nous inspirons ici de la démarche de Dembo et Zeitouni en dimension finie ([32], Section 5). L'estimée que nous allons établir sera utile pour les séparations des échelles de temps du Chapitre 6. Sa preuve s'appuie sur la majoration des grandes déviations (5.1.11). Une difficulté provient du fait que  $\underline{V}$  peut-être infini.

Rappelons que nous notons  $\xi_0$  la limite de  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et que  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ .

**Proposition 5.6.11.** Soit  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ . Sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.10, 5.1.1, 5.6.4 :

1. Si  $\underline{V} < +\infty$ , alors  $\forall \delta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \mathcal{T}^n > e^{n(\underline{V}-\delta)} \right) = 1. \quad (5.6.35)$$

2. Si  $\underline{V} = +\infty$ , alors  $\forall V > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \mathcal{T}^n > e^{nV} \right) = 1. \quad (5.6.36)$$

Soit  $\rho \in ]0, \gamma/2[$ . Pour de tels  $\rho$ , nous définissons les temps d'arrêt suivants :

$$\sigma_\rho = \inf \left\{ t \geq 0, Z_t^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho) \cup B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma) \right\}. \quad (5.6.37)$$

$\sigma_\rho$  est le premier instant où  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  entre dans  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$  ou sort de  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ . La démonstration de la Proposition 5.6.11 s'appuie sur les lemmes suivants, prouvés en fin de section. Remarquons que pour  $\rho \leq \mathcal{W}_1(\xi_0, \widehat{\xi})$ ,  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$ . Les estimées des Lemmes 5.6.12, 5.6.13 et 5.6.14 sont valables pour tout  $\rho \in ]0, \gamma/2[$ , mais sont automatiques si  $\rho > \mathcal{W}_1(\xi_0, \widehat{\xi})$ .

**Lemme 5.6.12.** Soit  $\rho \in ]0, \gamma/2[$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\sigma_\rho > t) = -\infty. \quad (5.6.38)$$

**Lemme 5.6.13.** (i) On a :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma) \right) \leq -\underline{V}. \quad (5.6.39)$$

(où  $\underline{V}$  est éventuellement égal à  $+\infty$ ).

(ii) On en déduit pour  $\rho \in ]0, \gamma/2[$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho) \right) = 1. \quad (5.6.40)$$

**Lemme 5.6.14.** Soit  $\rho \in ]0, \gamma/2[$ .  $\forall c > 0$ ,  $\exists T(c, \rho) > 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T(c, \rho)]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, Z_0^n) \geq \rho \right) < -c. \quad (5.6.41)$$

Les Lemmes 5.6.12, 5.6.13 et 5.6.14 nous indiquent que les probabilités suivantes sont exponentiellement petites :

- la probabilité que la trajectoire  $(Z_s^n)_{s \in [0, t]}$  reste dans la couronne  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,
- la probabilité que  $Z^n$  sorte de cette couronne en sortant de  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ ,
- la probabilité que  $Z^n$  s'écarte "fortement" de sa condition initiale  $Z_0^n$  en temps court.

Remarquons que l'utilisation de  $\mathcal{W}_1$  est fondamentale dans la preuve du Lemme 5.6.14.

*Preuve de la Proposition 5.6.11.* Soit  $\delta > 0$ . Soit :

$$\tilde{V} = \begin{cases} \underline{V} & \text{si } \underline{V} < +\infty, \\ V + \delta & \text{si } \underline{V} = +\infty, \end{cases} \quad (5.6.42)$$

avec  $V > 0$  quelconque comme dans l'énoncé. Par le Lemme 5.6.13, il existe  $\rho \in ]0, \gamma/2[$  tel que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma) \right) < -\tilde{V} + \frac{\delta}{4}.$$

et :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) < e^{-n(\tilde{V}-\delta/2)}. \quad (5.6.43)$$

Nous définissons les temps d'arrêt suivants :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\theta_0 = 0 \quad (5.6.44)$$

$$\tau_k = \inf \left\{ t \geq \theta_k, Z_t^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho) \cup B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma) \right\}, \quad (5.6.45)$$

$$\theta_{k+1} = \inf \left\{ t \geq \tau_k, Z_t^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, 2\rho) \right\}, \quad (5.6.46)$$

avec la convention  $\theta_{k+1} = +\infty$  si  $Z_{\tau_k}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)$ .  $\tau_k$  est le premier temps de sortie de la couronne  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$  après  $\theta_k$ , et si  $Z_{\tau_k}^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$ ,  $\theta_{k+1}$  est le premier temps de sortie de  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, 2\rho)$ . Remarquons que le temps de sortie  $\mathcal{T}^n$  est l'un des  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Soient  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $T_0 = T(\tilde{V}, \rho)$  donné par le Lemme 5.6.14. L'événement  $\{\mathcal{T}^n \leq qT_0\}$  entraîne qu'il existe  $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$  tel que  $\mathcal{T}^n = \tau_k$  ou que l'une des  $q$  premières "excursions"  $[\tau_{k-1}, \tau_k]$  pour  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$  est de durée majorée par  $T_0$ . Dans ce dernier cas, l'une des trajectoires  $[\tau_{k-1}, \theta_k[$  est parcourue en moins de  $T_0$ . Ainsi :

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq qT_0) \leq \sum_{k=1}^q \left[ \mathbb{P}(\mathcal{T}^n = \tau_k) + \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq k \leq q} (\theta_k - \tau_{k-1}) \leq T_0\right) \right] + \mathbb{P}(\mathcal{T}^n = \tau_0) \quad (5.6.47)$$

Par la propriété de Markov forte et par (5.6.43),  $\exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{T}^n = \tau_k) &= \mathbb{P}\left(\mathbb{P}_{Z_{\theta_k}^n}(\mathcal{T}^n = \tau_0) \mathbf{1}_{\mathcal{T}^n > \tau_{k-1}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\mathbb{P}_{Z_{\theta_k}^n}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{T}^n > \tau_{k-1}}\right) \leq e^{-n(\tilde{V}-\delta/2)}, \end{aligned} \quad (5.6.48)$$

en remarquant que pour  $n$  assez grand,  $Z_{\theta_k}^n$  est dans  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$ .

Par le choix de  $T_0$ , la propriété de Markov forte et quitte à modifier  $n_0 : \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(\theta_k - \tau_{k-1} \leq T_0) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T_0]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, Z_0^n) \geq \rho\right) \leq e^{-n(\tilde{V}-\delta/2)}. \quad (5.6.49)$$

Par (5.6.47), (5.6.48), (5.6.49) :  $\forall q \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq qT_0) \leq \mathbb{P}(\mathcal{T}^n = \tau_0) + 2qe^{-n(\tilde{V}-\delta/2)}. \quad (5.6.50)$$

Comme  $\{\mathcal{T}^n = \tau_0\} = \{Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\}$ , alors, pour le choix de  $q = \lceil e^{n(\tilde{V}-\delta)}/T_0 \rceil + 1$  :

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{T}^n \leq e^{n(\tilde{V}-\delta)}\right) \leq \mathbb{P}(\mathcal{T}^n \leq qT_0) \leq \mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) + \frac{4}{T_0} e^{-n\delta/2}. \quad (5.6.51)$$

Le membre de droite de (5.6.51) tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) = 0, \quad (5.6.52)$$

par le Lemme 5.6.13. ■

*Preuve du Lemme 5.6.12.* Si  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$ , alors le membre de gauche de (5.6.38) vaut  $-\infty$ . Supposons que  $\rho \leq \mathcal{W}_1(\widehat{\xi}, \xi_0)$ . Alors,  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$ . Soit  $L > 0$ . Il suffit de montrer qu'il existe  $T = T(L) > 0$  tel que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\sigma_\rho > T) < -L.$$

Par le Point (ii) de la Proposition 5.6.5 :

$$\forall \xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma), \exists T_1 = T_1(\rho, \widehat{\xi}, \gamma) > 0, \forall t \geq T_1, \mathcal{W}_1(\xi_t^{\xi_0}, \widehat{\xi}) < \rho/2.$$

Soit  $T \geq T_1$ . Si la trajectoire  $(Z_t^n)_{t \in [0, T]}$  reste dans  $B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$ , on a nécessairement  $\mathcal{W}_1(Z_T^n, \xi_T^{\xi_0}) > \rho/2$ .

La suite  $(\mathcal{L}(Z^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant exponentiellement tendue,  $\exists K(L, T) \subset \mathbb{D}_T$  compact,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\mathbb{P}(Z^n \notin K(L, T)) \leq e^{-nL}$ .

Soit :

$$\mathcal{A}(T) = \text{adh} \left\{ z \in \mathbb{D}_T, \forall t \in [0, T], z_t \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho) \right\} \cap K(L, T). \quad (5.6.53)$$

$\mathcal{A}(T)$  est un ensemble compact ne contenant pas  $\xi$  par choix de  $T$  et  $\forall z \in \mathcal{A}(T)$ ,  $\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) > 0$  (Lemme 5.6.9). Alors :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\sigma_\rho > T) &\leq \max \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in \mathcal{A}(T)), \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \notin K(L, T)) \right) \\ &\leq \max \left( - \inf_{z \in \mathcal{A}(T)} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z), -L \right) < 0. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que pour  $T$  suffisamment grand,

$$\inf_{z \in \mathcal{A}(T)} \mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) > L. \quad (5.6.54)$$

Soit  $z \in \mathcal{A}(T)$  issu de  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)$  avec  $T \geq T_1$ . Soient  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée par 1,  $t \in [0, T]$  et  $f : (a, s) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto f_s(a) = \phi(a + t - s) \in \mathbb{R}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle z_t - \xi_t, \phi \rangle &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} (b(a)\phi(t-s) - \phi(a+t-s)(d(a) - \eta \langle z_s, 1 \rangle)) (z_s - \xi_s)(da) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a+t-s) \eta (\langle z_s - \xi_s, 1 \rangle) \xi_s(da) ds + \int_0^t \int_E \psi(f) h^z dm_s^{z, T} ds. \end{aligned}$$

Pour  $z \in \mathcal{A}(T)$  et par choix de  $\gamma$ ,  $\sup_{t \in [0, T]} (\langle \xi_t, 1 \rangle + \langle z_t, 1 \rangle) \leq 4 \langle \widehat{\xi}, 1 \rangle e^{\bar{b}T} := A_T$ , fini et ne dépendant pas de  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma)$  ni de  $z \in \mathcal{A}(T)$ . On en déduit :

$$|\langle z_t - \xi_t, \phi \rangle| \leq (\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T) \int_0^t \sup_{u \in [0, s]} \|z_u - \xi_u\|_{TV} ds + \int_0^t \int_E |h^z| dm_s^{z, T} ds$$

Comme toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée par 1 peut s'écrire comme limite simple d'une suite de fonctions  $(\phi_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornées par 1, on en déduit :

$$\sup_{u \in [0, t]} \|z_u - \xi_u\|_{TV} \leq (\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T) \int_0^t \sup_{u \in [0, s]} \|z_u - \xi_u\|_{TV} ds + \int_0^T \int_E |h^z| dm_s^{z, T} ds,$$

Par l'inégalité de Gronwall et (5.6.3) :

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{W}_1(z_t, \xi_t) \leq \sup_{t \in [0, T]} \|z_t - \xi_t\|_{TV} \leq \left( \int_0^T \int_E |h^z| dm_s^{z, T} ds \right) e^{(\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T)T}. \quad (5.6.55)$$

Comme  $\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{W}_1(z_t, \xi_t) \geq \rho/2$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_E |h^z| \frac{dm_s^{z, T} ds}{\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds} &\geq \frac{\rho}{2} \frac{1}{\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds} e^{-(\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T)T} \\ \rho^* \left( \int_0^T \int_E |h^z| \frac{dm_s^{z, T} ds}{\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds} \right) &\geq \rho^* \left( \frac{\rho}{2} \frac{1}{(\bar{b} + \bar{d} + \eta A_T) A_T T} e^{-(\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_T)T} \right), \end{aligned} \quad (5.6.56)$$

$\rho^*$  étant une fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'autre part, par l'inégalité de Jensen,  $\rho^*$  étant convexe et  $dm_s^{z, T} ds / (\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds)$  étant une mesure de probabilité,

$$\rho^* \left( \int_0^T \int_E |h^z| \frac{dm_s^{z, T} ds}{\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds} \right) \leq \int_0^T \int_E \rho^*(|h^z|) \frac{dm_s^{z, T} ds}{\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds} = \frac{\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z)}{\int_0^T \int_E dm_s^{z, T} ds}. \quad (5.6.57)$$

Par (5.6.56) et (5.6.57), et pour  $T = T_1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \int_E \rho^*(h^z) dm_s^{z, T_1} ds &= \mathcal{I}_{\xi_0}^{T_1}(z) \\ &\geq \left( \int_0^{T_1} \int_E dm_s^{z, T_1} ds \right) \rho^* \left( \frac{\rho}{2} \frac{1}{(\bar{b} + \bar{d} + \eta A_{T_1}) A_{T_1} T_1} e^{-(\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_{T_1})T_1} \right) \\ &\geq \left( \inf_{z \in \mathcal{A}(T_1)} \int_0^{T_1} \int_E dm_s^{z, T_1} ds \right) \rho^* \left( \frac{\rho}{2} \frac{e^{-(\bar{b} + \bar{d} + 2\eta A_{T_1})T_1}}{(\bar{b} + \bar{d} + \eta A_{T_1}) A_{T_1} T_1} \right) := C_2 > 0, \end{aligned} \quad (5.6.58)$$

par compacité de  $\mathcal{A}(T_1)$  dont les trajectoires ne s'annulent pas (par choix de  $\gamma$  et puisqu'elles restent dans  $\text{adh}(B_{\mathcal{W}_1}(\xi, \gamma))$ ). Notons que la constante  $C_2$  ne dépend pas du choix particulier de la condition initiale  $\xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \rho)$  ni de la trajectoire  $z \in \mathcal{A}(T)$ .

Soit maintenant  $T > 0$  tel que  $T > J T_1$  avec  $J \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) \geq \sum_{j=1}^J \int_{(j-1)T_1}^{jT_1} \int_E \rho^*(h^z) dm_s^{z, T} ds = \sum_{j=1}^J \int_0^{T_1} \int_E \rho^*(h^{z^j}) dm_s^{z^j, T} ds, \quad (5.6.59)$$

où  $\forall t \in [0, T_1]$ ,  $z_t^j = z_{(j-1)T_1+t}$  est une trajectoire de  $\mathcal{A}(T_1)$  solution de :  $\forall (f : (a, s) \mapsto f_s(a)) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T_1], \mathbb{R})$ ,

$$\langle z_t^j, f_t \rangle = \langle z_{(j-1)T_1}, f_0 \rangle + \int_0^t \left\langle z_s^j, \frac{\partial}{\partial a} f_s + \frac{\partial f_s}{\partial s} \right\rangle ds + \int_0^t \int_E (1 + h^{z^j}) \psi(f) dm_s^{z^j, T} ds,$$

qui est une équation perturbée de (3.0.1) associée à la perturbation  $h^{z^j}(a, u, s) = h^z(a, u, (j-1)T_1 + s)$  pour  $s \in [0, T_1]$ . Par (5.6.58) et par réitération :

$$\mathcal{I}_{\xi_0}^T(z) \geq J C_2. \quad (5.6.60)$$

Ceci prouve (5.6.54). ■

*Preuve du Lemme 5.6.13.* Montrons le Point (i). Soit  $\rho \in ]0, \gamma/2[$ . Soit  $R > 0$  tel que  $\underline{V}(R) < +\infty$ . Par le Lemme 5.6.12 :

$$\exists T_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}(\sigma_\rho > T_2) < e^{-n \underline{V}(R)}, \quad (5.6.61)$$

où  $\underline{V}(R)$  est défini en (5.6.16). Pour  $T > 0$ , on définit :

$$\mathcal{A}(T) := \left\{ z \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)) \mid \exists t \in [0, T], z_t \notin B_{\mathcal{W}_1}(\hat{\xi}, \gamma) \right\} \quad (5.6.62)$$



qui est fermé car  $z \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{W}_1(z_t, \widehat{\xi})$  est continue. Par (5.6.16) :  $\forall \xi_0 \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, 2\rho)$ ,

$$\inf_{z \in A(T_2)} \mathcal{I}_{\xi_0}^{T_2}(z) \geq \underline{V}(2\rho).$$

En utilisant la majoration des grandes déviations (Théorème 5.1.4) :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{Z_0^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \gamma) \setminus B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)}(Z^n \in A(T_2)) \leq - \inf_{z \in A(T_2)} \mathcal{I}_{\xi_0}^{T_2}(z) \leq -\underline{V}(2\rho). \quad (5.6.63)$$

Par (5.6.61) et (5.6.63) :

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) \\ & \leq \max\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\sigma_\rho > T_2), \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z^n \in A(T_2))\right) \\ & \leq \max(-\underline{V}(R), -\underline{V}(2\rho)). \end{aligned}$$

Par (5.6.17),  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) \leq -\underline{V}(R)$ , et en faisant tendre  $R$  vers 0, comme le membre de gauche ne dépend pas de  $R$ , nous obtenons (5.6.39).

Considérons le Point (ii). Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho \in ]0, \gamma/2[$  et  $R > 0$  tel que  $\underline{V}(R) < +\infty$  et :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)) \leq -\underline{V}(R) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(son existence est donnée par le Point (i)). Alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) \leq e^{-n\underline{V}(R) + n\varepsilon}$ , et :

$$\mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}(\widehat{\xi}, \rho)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z_{\sigma_\rho}^n \in B_{\mathcal{W}_1}^c(\widehat{\xi}, \gamma)\right) \geq 1 - e^{-n(\underline{V}(R) - \varepsilon)}.$$

Alors pour le choix de  $\varepsilon < \underline{V}(R)$ , et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient (5.6.40).  $\blacksquare$

*Preuve du Lemme 5.6.14.* Soient  $T > 0$  et  $c > 0$ . Par le Point (i) du Lemme 5.3.8, il existe  $N = N(c, T) > 0$  tel que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\zeta_N^n < T) < -c. \quad (5.6.64)$$

Soient  $\phi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  1-Lipschitzienne bornée par 1,  $t \in [0, T]$ , et  $f(a, s) = \phi(a + t - s) \in \mathcal{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . On a, avec les notations de la Définition 3.1.2 :

$$\begin{aligned} & \left| \langle Z_{t \wedge \zeta_N^n}^n, \phi \rangle - \langle Z_0^n, \phi \rangle \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{R}_+} (\phi(a + t) - \phi(a)) Z_0^n(da) \right| + \left| \frac{1}{n} \int_0^{t \wedge \zeta_N^n} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_{\{i \leq N_s^n\}} \left[ f(0, s) \mathbf{1}_{0 \leq b(A_i(Z_{s-}^n))} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - f(A_i(Z_{s-}^n), s) \mathbf{1}_{b(A_i(Z_{s-}^n)) \leq \theta < b(A_i(Z_{s-}^n)) + d(A_i(Z_{s-}^n)) + \eta \langle Z_{s-}^n, 1 \rangle} \right] Q(ds, di, d\theta, dx') \right| \\ & \leq t \langle Z_0^n, 1 \rangle + \frac{\mathcal{N}(t)}{n}, \end{aligned} \quad (5.6.65)$$

où  $\mathcal{N}(t)$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $tN(\bar{b} + \bar{d} + \eta N)$ . On en déduit :

$$\sup_{s \in [0, t]} \mathcal{W}_1(Z_{s \wedge \zeta_N^n}^n, Z_0^n) \leq t \langle Z_0^n, 1 \rangle + \frac{\mathcal{N}(t)}{n}$$

et :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{s \in [0, t]} \mathcal{W}_1(Z_{s \wedge \zeta_N}^n, Z_0^n) \geq \rho \right) \leq \mathbb{P} \left( t \langle Z_0^n, 1 \rangle \geq \frac{\rho}{2} \right) + \mathbb{P} \left( \frac{\mathcal{N}(t)}{n} \geq \frac{\rho}{2} \right). \quad (5.6.66)$$

Comme :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( \mathcal{N}(t) \geq \frac{n\rho}{2} \right) \leq \frac{\rho}{2} \log(tN(\bar{b} + \bar{d} + \eta N)),$$

qui tend vers  $-\infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , alors :  $\exists T_3 \in ]0, T[$ ,  $\forall t \in [0, T_3]$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( \mathcal{N}(t) \geq \frac{n\rho}{2} \right) < -c. \quad (5.6.67)$$

Par le Point 3 des Hypothèses 5.1.1,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\langle Z_0^n, 1 \rangle < C_0 + \langle \xi_0, 1 \rangle$ . Alors pour  $T_4 < \rho/(2(C_0 + \langle \xi_0, 1 \rangle))$ , on a :  $\forall t \in [0, T_4]$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P} \left( t \langle Z_0^n, 1 \rangle > \frac{\rho}{2} \right) = 0.$$

Donc pour  $t \in [0, T_3 \wedge T_4 \wedge T]$  :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( \sup_{s \in [0, t]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, Z_0^n) \geq \rho \right) &\leq \max \left[ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\zeta_N^n < T), \right. \\ &\left. \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( t \langle Z_0^n, 1 \rangle \geq \frac{\rho}{2} \right), \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left( \mathcal{N}(t) \geq \frac{n\rho}{2} \right) \right] < -c. \end{aligned} \quad (5.6.68)$$

■

Ceci termine la preuve de la Proposition 5.6.11.



## Chapitre 6

# Limites des Dynamiques Adaptatives pour une population structurée par âge

Nous nous intéressons dans ce chapitre à des problèmes issus de la récente *théorie des dynamiques adaptatives* [60, 84, 35, 95], qui considère l'évolution des traits présents dans la population sur des "grandes" échelles de temps. Comme l'a souligné Charlesworth [24], la structuration en âges est une dimension qu'il est important de prendre en compte dans la théorie de l'évolution, par exemple pour l'étude des *traits d'histoire de vie* tels que l'âge à maturité, ou celle des *phénomènes de sénescence*, qui décrivent la fixation de gènes délétères. L'expression d'un trait au cours de la vie d'un individu va influencer la probabilité que ce trait se fixe dans la population ou qu'il disparaisse par sélection naturelle. La structure par âge de la population dans laquelle apparaît un mutant va également jouer sur la pression sélective qui va s'exercer sur celui-ci. Réciproquement, les traits qui seront fixés vont eux-mêmes modifier la distribution en âge de la population.

Nous cherchons à établir deux approximations macroscopiques du processus microscopique présenté aux chapitres précédents et décrivant les changements en traits de la population sous les hypothèses biologiques de grandes populations, de *mutations rares* et de *non-coexistence à long terme de deux traits différents*. Ces approximations correspondent à une *séparation des échelles de temps* associées à l'écologie (qui décrit les variations démographiques de la population) et à l'évolution (liée aux mutations). Lorsque l'apparition de nouveaux traits au sein de la population est suffisamment lente, la sélection naturelle a le temps d'agir. Soit la descendance d'un mutant est éliminée, soit elle remplace la population résidente (on parle alors d'*invasion*). Entre deux mutations, la population se stabilise autour d'un état d'équilibre monomorphique (où tous les individus portent le même trait).

Nous décrivons brièvement les modèles qui nous intéressent. Des descriptions plus précises seront données à la Section 6.1.

Le modèle de *Trait Substitution Sequence* (TSS dans la suite) a été introduit, pour les populations sans structure d'âge, par Metz *et al.* [95] et a été obtenu rigoureusement à partir du modèle microscopique par Champagnat [20, 19], Champagnat *et al.* [22, 21]. L'idée est que l'on peut modéliser l'évolution par un processus de sauts, en négligeant les transitions que sont les invasions et en ne considérant que les successions d'équilibres monomorphiques.

L'*Equation Canonique*, proposée par Dieckmann et Law [35] est une approximation du processus de TSS sous l'hypothèse supplémentaire de petites mutations, (*i.e.* lorsque le trait mutant ne diffère que très peu du trait résident). L'aléatoire disparaît et le processus de TSS peut-être

approché par la solution d'une équation différentielle ordinaire appelée Equation Canonique. L'étude mathématique de la convergence du processus de TSS vers la solution de l'Equation canonique a été menée dans le cadre de populations sans structure d'âge par Champagnat [18, 19].

Notre but est de donner une généralisation du processus de TSS et de l'Equation canonique pour des populations structurées par traits et par âge. A notre connaissance, les équations que nous proposons à la Section 6.1 n'existent pas dans la littérature sur le sujet, bien que des modèles de dynamiques adaptatives aient été déjà considérés pour des populations structurées par âge, par exemple par [103, 34, 43]. Dans [43], seule la fonction de *fitness* (liée à la probabilité de fixation d'un nouveau trait mutant) est discutée. Dans [103, 34], Dieckmann *et al.* proposent des modèles de traits fonctionnels, en particulier, des modèles dans lesquels le trait est une fonction de l'âge. Cependant, les taux de naissance et de mort qu'ils considèrent ne dépendent pas de l'âge (mais de quantités telles que  $\int_{\mathbb{R}_+} x(a)da$  où  $x$  est le trait fonctionnel, par exemple. Ceci implique que les taux de naissance et de mort ne varient pas au cours du temps pour un individu donné). Dans ce chapitre, nous nous restreignons aux traits à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_x}$ , mais nous considérons des taux de naissance et de mort dépendant de l'âge. Même au sein d'une population monomorphique, les individus ont alors des capacités reproductives et des survies différentes. Nous retrouvons, sous les asymptotiques considérées, les mêmes successions d'invasions et d'installations d'équilibres monomorphiques que dans le cas sans âge, mais avec une différence importante. Tandis que dans le cas de populations sans structure d'âge cette dynamique pouvait se décrire à partir de seules quantités de dimension finie (les traits et l'effectif de la population à l'équilibre), elle dépend ici de l'ensemble de la distribution en traits et en âge de la population.

A la Section 6.1, nous présentons les trois modèles qui nous intéressent dans ce chapitre (modèle microscopique, modèle de *Trait Substitution Sequence* et Equation canonique) et énonçons les théorèmes limites qui les relient (Théorèmes 6.1.13 et 6.1.20). Les démonstrations de ces théorèmes font l'objet des Sections 6.2 et 6.3.

### Notations :

Si  $X^1$  et  $X^2$  sont deux processus aléatoires, nous dirons que  $X^2$  domine stochastiquement  $X^1$  s'il est possible de construire un processus  $\widehat{X}^2$  sur le même espace de probabilité  $\Omega$  que  $X^1$ , tel que  $\mathcal{L}(\widehat{X}^2) = \mathcal{L}(X^2)$  et  $\forall \omega \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+, X_t^1(\omega) \leq \widehat{X}_t^2(\omega)$ .

## 6.1 Résultats

### 6.1.1 Modèle microscopique

Nous reprenons une version simplifiée du modèle renormalisé étudié aux Chapitres 3 à 5 (Définition 3.1.2). La différence est que l'on souhaite considérer en plus de l'asymptotique des grandes populations, celle des mutations rares. La probabilité de mutation va s'écrire de la forme  $pu_n$  où  $p \in [0, 1]$  et  $u_n \in ]0, 1]$ . Le paramètre  $u_n$  va tendre vers 0 lorsque le paramètre  $n$ , lié à la renormalisation des grandes populations, tend vers l'infini. Remarquons que nous augmentons la taille de la population et diminuons la probabilité de mutation simultanément (prendre les limites successivement conduirait à des limites déterministes de la forme (3.0.1) sans mutations).

Les individus sont caractérisés par un trait  $x \in \mathcal{X}$  compact de  $\mathbb{R}^{d_x}$  et par leur âge physique scalaire  $a \in \mathbb{R}_+$ . La dynamique est la suivante :

1. un individu  $(x, a) \in \widetilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{d_x} \times \mathbb{R}_+$  donne naissance à un nouvel individu au taux  $b(x, a)$ .
  - avec probabilité  $u_n p \in [0, 1]$  le nouvel individu est un mutant, où  $u_n$  est tel que :

$$\forall V > 0, \exp(-Vn) = o(u_n) \quad \text{and} \quad u_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right). \quad (6.1.1)$$

Le trait du mutant est  $x' = x + h \in \mathcal{X}$ , où  $h$  est tiré dans la distribution de probabilité  $K(x, dh) = k(x, h) P(dh)$  à support dans  $\mathcal{X}$ ,  $P(dh)$  étant une mesure de probabilité "de référence" sur  $\mathcal{X}$  telle que  $\int_{\mathcal{X}} |h|^2 P(dh) < +\infty$  (par exemple la loi uniforme sur  $\mathcal{X}$ ).

– avec la probabilité  $1 - u_n p \in [0, 1]$ , le nouvel individu est un clône de son parent.

2. un individu  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$  dans la population  $Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  meurt au taux  $d(x, a, ZU(x, a))$  :

$$\text{où } ZU(x, a) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U((x, a), (y, \alpha)) Z(dy, d\alpha),$$

$U : \tilde{\mathcal{X}}^2 \mapsto \mathbb{R}$  étant le noyau d'interaction (à valeurs réelles),

3. les individus sont soumis au vieillissement, et l'âge biologique au temps  $t \in \mathbb{R}_+$  d'un individu né au temps  $c \leq t$  est  $a = t - c$ . (Notons que la date de naissance  $c$  est variable d'un individu à l'autre).

Nous considérons la suite de processus microscopiques renormalisés :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$Z_t^n(dx, da) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_t^n} \delta_{(x_i, a_i(t))} \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}) \quad (6.1.2)$$

où  $N_t^n$  est le nombre d'individus vivant au temps  $t$ .

Nous faisons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 6.1.1.**  $\exists \bar{b}, \underline{d}, \bar{d}, \bar{U}, \underline{U}$  et  $\bar{k} > 0, \forall (x, a), (y, \alpha) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall h \in \mathcal{X}, \forall Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq b(x, a) \leq \bar{b} \\ \underline{d}\langle Z, 1 \rangle &\leq d(x, a, ZU(x, a)) \leq \bar{d} \times (1 + \langle Z, 1 \rangle) \\ 0 &\leq k(x, h) \leq \bar{k} \\ \underline{U} &\leq U((x, a), (y, \alpha)) \leq \bar{U}. \end{aligned}$$

On suppose que  $d$  est continûment différentiable par rapport au terme d'interaction, avec une dérivée  $d_u$  bornée et strictement positive :

$$\exists \bar{d}_u > 0, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall u \in \mathbb{R}, 0 < d_u(x, a, u) < \bar{d}_u.$$

Les hypothèses sur le taux de mort signifient que l'on considère un modèle proche du modèle logistique. La stricte positivité de  $d_u$  signifie que le taux de mort est une fonction croissante du terme d'interaction. On parlera alors de terme de compétition.

Rappelons l'exemple fondamental des :

**Exemple 6.1.2. Populations logistiques structurées par traits et âge :** Cet exemple correspond au choix de taux de mort suivant. Un individu de traits  $x \in \mathcal{X}$ , d'âge  $a \in \mathbb{R}_+$ , dans la population représentée par  $Z \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  meurt au taux :

$$d(x, a) + \int_{\tilde{\mathcal{X}}} U(x, y) Z(dy, d\alpha), \quad (6.1.3)$$

où le noyau de compétition  $U$  n'est fonction que des variables de traits.

Dans une population monomorphe de trait  $x \in \mathcal{X}$ , le taux (6.1.3) devient  $d(x, a) + U(x, x)\langle Z, 1 \rangle$ .

Pour une population dimorphique, dans laquelle les individus portent les traits  $x \in \mathcal{X}$  ou  $y \in \mathcal{X}$ , (6.1.3) devient  $d(x, a) + U(x, x)\langle Z, \mathbf{1}_x \rangle + U(x, y)\langle Z, \mathbf{1}_y \rangle$ .

Au cours de ce chapitre, nous considérerons des populations initiales monomorphiques ou dimorphiques. Nous précisons ci-dessous les hypothèses dans chacun de ces cas.

**Hypothèse 6.1.3.** (*Condition initiale monomorphique*) Soit  $x_0 \in \mathcal{X}$ .

(i) Nous supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_0^n$  est de la forme :

$$Z_0^n(dx, da) = \delta_{x_0}(dx)q_0^n(x_0, da), \quad (6.1.4)$$

où  $q_0^n(x_0, da) \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ , et converge en probabilité dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{e})$  vers :

$$\xi_0(dx, da) := \delta_{x_0}(dx)q_0(x_0, da) \quad \text{déterministe} \quad (6.1.5)$$

(ii) Les conditions de moments suivantes sont supposées satisfaites :

$$\forall \lambda > 0, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( e^{\lambda \langle Z_0^n, 1 \rangle} \right) < +\infty, \quad \exists \varepsilon > 0, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left( \left( \int_{\tilde{\mathcal{X}}} |a| Z_0^n(dx, da) \right)^{1+\varepsilon} \right) < +\infty, \quad (6.1.6)$$

**Hypothèse 6.1.4.** (*Condition initiale dimorphique*) Soient  $x_0, y \in \mathcal{X}$  (on pensera  $x_0 \in \mathcal{X}$  comme étant le trait de la population résidente, et  $y$  comme étant le trait mutant).

Nous supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_0^n$  est de la forme :

$$Z_0^n(dx, da) = \delta_{x_0}(dx)q_0^n(x_0, da) + \delta_y(dx)\tilde{q}_0^n(y, da), \quad (6.1.7)$$

et converge étroitement, en probabilité, vers la mesure déterministe :

$$\xi_0(dx, da) := \delta_{x_0}(dx)q_0(x_0, da) + \delta_y(dx)\tilde{q}_0(y, da). \quad (6.1.8)$$

Nous supposons aussi que les conditions de moments (6.1.6) sont satisfaites.  $\square$

Nous introduisons les notations suivantes :

**Définition 6.1.5.** Soient  $x_0, y \in \mathcal{X}$  et  $q_0^n, \tilde{q}_0^n \in \mathcal{M}_P^n(\mathbb{R}_+)$ . Nous noterons :

1.  $\mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n$  la loi du processus microscopique  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  issu de  $Z_0^n(dx, da) = \delta_{x_0}(dx)q_0^n(x_0, da)$ , et  $\mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n$  l'espérance sous cette loi,
2.  $\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y}^n$  la loi du processus microscopique  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  issu de  $Z_0^n(dx, da) = \delta_{x_0}(dx)q_0^n(x_0, da) + \frac{1}{n}\delta_{(y,0)}(dx, da)$ , et  $\mathbb{E}_{x_0, q_0^n, y}^n$  l'espérance sous cette loi.
3.  $\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y, \tilde{q}_0^n}^n$  la loi du processus microscopique  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  issu de  $Z_0^n(dx, da) = \delta_{x_0}(dx)q_0^n(x_0, da) + \delta_y(dx)\tilde{q}_0^n(y, da)$ , et  $\mathbb{E}_{x_0, q_0^n, y, \tilde{q}_0^n}^n$  l'espérance sous cette loi.

Nous collectons quelques résultats sur l'asymptotique du processus (6.1.2) lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (asymptotique des grandes populations). Ces résultats seront utiles pour décrire le modèle de TSS, l'Equation canonique, ainsi que pour les démonstrations des Sections 6.2 et 6.3.

En adaptant le Théorème 3.2.2, le Corollaire 3.2.4 et la Proposition 3.2.6 (ici, le taux de mutation  $pu_n$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et il n'y a plus de mutation à la limite), nous avons :

**Proposition 6.1.6.** Sous les Hypothèses 6.1.1,

(i) Lorsque les Hypothèses 6.1.3 sont satisfaites, la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  vers le processus  $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \xi_t(dx, da) := \delta_{x_0}(dx)q_t(x_0, da), \quad (6.1.9)$$

où  $q_t(x_0, da)$  est l'unique solution faible mesure de l'équation suivante paramétrée par  $x_0 \in \mathcal{X}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(x_0, a, t) + \frac{\partial m}{\partial a}(x_0, a, t) &= d\left(x_0, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0, a), (x_0, \alpha))m(x_0, \alpha, t)d\alpha\right) m(x_0, a, t) \\ m(x_0, 0, t) &= \int_0^{+\infty} b(x_0, a)m(x_0, a, t)da \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

issue de  $q_0(x_0, da)$  définie en (6.1.5).

(ii) Lorsque les Hypothèses 6.1.4 sont satisfaites, la suite  $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  vers le processus  $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \xi_t(dx, da) := \delta_{x_0}(dx)q_t(x_0, da) + \delta_y(dx)\tilde{q}_t(y, da), \quad (6.1.11)$$

où  $(q_t(x_0, da), \tilde{q}_t(y, da))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est l'unique solution faible mesure de l'équation paramétrée par  $x_0$  et  $y \in \mathcal{X}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(x_0, a, t) + \frac{\partial m}{\partial a}(x_0, a, t) &= d\left(x_0, a, \int_{\mathbb{R}_+} (U((x_0, a), (x_0, \alpha))m(x_0, \alpha, t) + U((x_0, a), (y, \alpha))m(y, \alpha, t))d\alpha\right) m(x_0, a, t) \\ \frac{\partial m}{\partial t}(y, a, t) + \frac{\partial m}{\partial a}(y, a, t) &= d\left(y, a, \int_{\mathbb{R}_+} (U((y, a), (x_0, \alpha))m(x_0, \alpha, t) + U((y, a), (y, \alpha))m(y, \alpha, t))d\alpha\right) m(y, a, t) \\ m(x_0, 0, t) &= \int_0^{+\infty} b(x_0, a)m(x_0, a, t)da, \quad m(y, 0, t) = \int_0^{+\infty} b(y, a)m(y, a, t)da, \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

et issue de  $(q_0(x_0, da), \tilde{q}_0(y, da))$ . □

Dans la suite, nous ferons les hypothèses suivantes concernant le comportement en temps long des solutions de (6.1.10) et (6.1.12) :

**Hypothèse 6.1.7.** Soient  $x_0, y \in \mathcal{X}$ .

1. Nous supposons que l'équation (6.1.10) paramétrée par  $x_0$  admet une unique solution stationnaire stable non triviale  $\hat{m}(x_0, a)$ , et que toute solution faible mesure issue d'une condition initiale  $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}})$  non nulle de la forme (6.1.5) converge dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{e})$  vers :

$$\hat{\xi}_{x_0}(dx, da) = \delta_{x_0}(dx)\hat{m}(x_0, a)da. \quad (6.1.13)$$

Nous noterons :

$$\hat{N}_{x_0} = \int_0^{+\infty} \hat{m}(x_0, a)da. \quad (6.1.14)$$

2. Nous supposons que l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} b(x_0, a)e^{-\int_0^a d(x_0, \alpha, \hat{\xi}_y U(x_0, \alpha))d\alpha}da > 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} b(y, a)e^{-\int_0^a d(y, \alpha, \hat{\xi}_{x_0} U(y, \alpha))d\alpha}da < 1 \quad (6.1.15)$$

$$\int_0^{+\infty} b(x_0, a)e^{-\int_0^a d(x_0, \alpha, \hat{\xi}_y U(x_0, \alpha))d\alpha}da < 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} b(y, a)e^{-\int_0^a d(y, \alpha, \hat{\xi}_{x_0} U(y, \alpha))d\alpha}da > 1. \quad (6.1.16)$$

3. Nous supposons que l'équation (6.1.12) paramétrée par  $x_0$  et  $y$  admet une unique solution stationnaire stable non triviale,  $(\hat{m}(x_0, \cdot), 0)$  si (6.1.15) est satisfaite, et  $(0, \hat{m}(y, \cdot))$  si (6.1.16) est satisfaite, où  $\hat{m}(x_0, a)$  et  $\hat{m}(y, a)$  sont les solutions stationnaires de (6.1.10) paramétrée par  $x_0$  et  $y$  et définies au Point 1. Toute solution faible mesure issue d'une condition initiale non nulle de la forme (6.1.11) converge vers  $\hat{\xi}_{x_0}$  ou  $\hat{\xi}_y$  dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{e})$ .



**Remarque 6.1.8.** Dans le cas des populations logistiques structurées par âge (cf. Annexe A.4 pour les preuves) ces hypothèses sont satisfaites dès que :  $\forall x, y \in \mathcal{X}$ ,

$$U(x, x)U(y, y) - U(x, y)U(y, x) < 0, \quad (6.1.17)$$

et :

$$\begin{aligned} U(x, x)\widehat{N}_x - U(x, y)\widehat{N}_y < 0 \quad \text{et} \quad U(y, y)\widehat{N}_y - U(y, x)\widehat{N}_x > 0, \\ \text{ou } U(x, x)\widehat{N}_x - U(x, y)\widehat{N}_y > 0 \quad \text{et} \quad U(y, y)\widehat{N}_y - U(y, x)\widehat{N}_x < 0. \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

(cf. Webb [124] Section 4.4 page 192 et suivantes par exemple pour d'autres modèles).

**Lemme 6.1.9.** On considère l'équation (6.1.10). Sous le Point 1 des Hypothèses 6.1.7, la condition de balance suivante est satisfaite par la solution stationnaire non triviale  $\widehat{m}(x_0, a)$  :

$$1 = \int_0^{+\infty} b(x_0, a) \exp\left(-\int_0^a d\left(x_0, \alpha, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0, \alpha), (x_0, u))\widehat{m}(x_0, u)du\right) d\alpha\right) da. \quad (6.1.19)$$

*Démonstration.* En remarquant que  $\widehat{m}(x_0, a)$  satisfait :

$$\widehat{m}(x_0, a) = \widehat{m}(x_0, 0) \exp\left(-\int_0^a d\left(x_0, \alpha, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0, \alpha), (x_0, u))\widehat{m}(x_0, u)du\right) d\alpha\right) \quad (6.1.20)$$

$$\widehat{m}(x_0, 0) = \int_0^{+\infty} b(x_0, a)\widehat{m}(x_0, a)da. \quad (6.1.21)$$

En remplaçant  $\widehat{m}(x, a)$  dans (6.1.21) par son expression obtenue dans (6.1.20), nous obtenons la condition de balance (6.1.19) si  $\widehat{m}(x, 0) \neq 0$ . Si  $\widehat{m}(x, 0) = 0$ , alors  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\widehat{m}(x, a) = 0$  et  $\widehat{m}$  est la solution constante égale à 0, ce qui est écarté par hypothèse. ■

Nous énonçons enfin un résultat de déviations qui sera utile lorsque nous voudrons approcher le processus microscopique par son approximation en "grande population" donnée par (6.1.10) :

**Proposition 6.1.10.** (i) Soient  $\varepsilon > 0$  et  $T > 0$ . Soient  $x_0, y \in \widetilde{\mathcal{X}}$ ,  $q_0^n$  (resp.  $\widetilde{q}_0^n$ )  $\in \mathcal{M}_P^n(\mathbb{R}_+)$  convergeant dans  $(\mathcal{M}_F(\widetilde{\mathcal{X}}), \hat{\epsilon})$  en probabilité, vers  $q_0(x_0, da)$  (resp.  $\widetilde{q}_0(y, da)$ ). Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.3 et 6.1.4 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n} \left( \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \xi_t) \geq \varepsilon \right) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y, \widetilde{q}_0^n} \left( \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \xi_t) \geq \varepsilon \right) &= 0, \end{aligned}$$

où  $\xi$  est défini en (6.1.9) ou (6.1.11) suivant que la condition initiale est monomorphique ou dimorphique.

(ii) Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.3, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, pour  $x_0 \in \mathcal{X}$  et pour  $(q_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers  $q_0$  tel que  $\mathcal{W}_1(q_0(da), \widehat{m}(x_0, a)da) < \varepsilon$ , on a :

$$\exists V(\varepsilon) > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n} \left( \inf \left\{ t \geq 0 \mid \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) \geq \varepsilon \right\} < e^{nV(\varepsilon)} \right) = 0,$$

(iii) Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.4, et si (6.1.15) est satisfaite :

$$\exists V(\varepsilon) > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y, \widetilde{q}_0^n} \left( \inf \left\{ t \geq 0 \mid \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) > \varepsilon \right\} < e^{nV(\varepsilon)} \right) = 0,$$

pour  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers  $\xi_0$  tel que  $\mathcal{W}_1(\xi_0, \widehat{\xi}_{x_0}) < \varepsilon$ .

(iv) Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.4, et si (6.1.16) est satisfaite :

$$\exists V(\varepsilon) > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y, \widehat{q}_0^n}^n \left( \inf \left\{ t \geq 0 \mid \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_y \right) > \varepsilon \right\} < e^{nV(\varepsilon)} \right) = 0,$$

pour  $(Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers  $\xi_0$  tel que  $\mathcal{W}_1(\xi_0, \widehat{\xi}_y) < \varepsilon$ .  $\square$

*Démonstration.* Le Point (i) est une conséquence de la convergence en probabilité montrée au Corollaire 3.2.4 et du fait que la convergence de  $((Z_t^n)_{t \in [0, T]})_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers  $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$  est uniforme par continuité de la limite. La démonstration du Point (ii) reprend des arguments similaires à ceux de la Proposition 5.6.11.  $\blacksquare$

### 6.1.2 Processus de *Trait Substitution Sequence* structuré par âge

L'heuristique du modèle de TSS est de décrire l'évolution dans le cas de mutations rares et de grandes populations, lorsque la population reste monomorphique. Deux traits ne peuvent pas coexister et nous avons une succession de périodes d'invasions et de monomorphie. Dans ce cas, on peut décrire l'évolution de la population par un processus de sauts dont les valeurs sont les équilibres monomorphiques successifs de la population, c'est à dire un processus à valeurs mesures qui saute d'un équilibre de la forme (6.1.13) à un autre. Si  $\widehat{\xi}_x$  est fonction uniquement de  $x$  (ce qui est le cas pour les populations logistiques structurées par âge, cf. (A.4.61), Section A.4), l'évolution est entièrement déterminée par le processus de sauts à valeurs dans  $\mathcal{X}$ , décrivant les traits relatifs aux équilibres monomorphiques successifs de la population, et dont le générateur infinitésimal est :

$$L\phi(x) = \int_{\mathcal{X}} \left[ (\phi(x+h) - \phi(x)) pk(x, h) \left( \int_{\mathbb{R}_+} b(x, a) \widehat{m}(x, a) da \right) (1 - z_0(x+h, x)) \right] P(dh). \quad (6.1.22)$$

C'est ce processus qui est appelé *Processus de Trait Substitution Sequence* structuré par âge. Nous décrivons maintenant les termes qui constituent le générateur (6.1.22). De façon heuristique, le terme  $pk(x, h) \int_0^{+\infty} b(x, a) \widehat{m}(x, a) da$  est le taux avec lequel la population monomorphique de trait  $x$ , à l'équilibre, génère un mutant de trait  $x+h$  (il correspond au terme  $pb(x) \widehat{N}_x k(x, h)$  en l'absence de structure d'âge). Le terme  $(1 - z_0(x+h, x))$  est appelé *fitness* du mutant de trait  $x+h$  dans la population de trait  $x$  et représente la probabilité d'invasion de ce mutant.  $z_0(y, x)$  est le plus petit point fixe sur  $[0, 1]$  de la fonction génératrice du nombre de descendants pour un processus de naissances et de morts linéaire, structuré par âge, de taux de naissance et de mort  $b(y, a)$  et :

$$d(y, a, x) = d \left( y, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((y, a), (x, \alpha)) \widehat{m}(x, \alpha) d\alpha \right). \quad (6.1.23)$$

Ainsi,  $z_0(y, x)$  est la solution de l'équation suivante en  $z$  :

$$z = \int_0^{+\infty} e^{(z-1) \int_0^w b(y, u) du} d(y, w, x) e^{-\int_0^w d(y, u, x) du} dw \quad (6.1.24)$$

$$= 1 + \int_0^{+\infty} (z-1) b(y, w) e^{(z-1) \int_0^w b(y, u) du - \int_0^w d(y, u, x) du} dw, \quad (6.1.25)$$

Cette équation caractérise la probabilité d'extinction d'un tel processus de naissances et de morts (cf. Annexe A.5 pour une présentation ; l'équation (6.1.25) est obtenue à partir de (6.1.24) par intégration par partie). Heuristiquement, cette équation provient du fait qu'on peut dans un premier temps négliger la population mutante ainsi que les écarts de la population résidente à

son équilibre. Les individus évoluent en première approximation dans une population décrite par la mesure  $\delta_x(dh)\widehat{m}(x, a)da$ . Une difficulté provient du fait que nous n'avons pas de solution explicite pour (6.1.24), contrairement au cas sans structure d'âge (cf. Remarque 6.1.15 en fin de Section).

Nous pouvons donner une description trajectorielle du de TSS structuré par âge :

**Définition 6.1.11.** Soit  $Q(ds, d\theta, dh)$  une mesure de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$  d'intensité  $ds \otimes d\theta \otimes P(dh)$ , et soit  $x_0 \in \mathcal{X}$ . Le processus de TSS est solution de l'équation :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} H(s_-, h, \theta) Q(ds, d\theta, dh), \quad (6.1.26)$$

$$\text{où : } H(s_-, h, \theta) = h \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta \leq p \int_{\mathbb{R}_+} b(X_{s_-}, a) \widehat{m}(X_{s_-}(\omega), a) da (1 - z_0(X_{s_-} + h, X_{s_-})) k(X_{s_-}, h)\}} \quad (6.1.27)$$

et où  $z_0(y, x)$  est la plus petite solution de (6.1.24). On note  $\mathbb{P}_{x_0}$  la loi du processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .  $\square$

Il est possible de réécrire le générateur infinitésimal (6.1.22) en faisant apparaître une chaîne de Markov discrète et un Processus de Poisson (cf. Ethier et Kurtz [44], Section 4.2 p. 162) :

$$L\phi(x) = \int_{\mathcal{X}} (\phi(x+h) - \phi(x)) \beta(x) \kappa(x, dh), \quad (6.1.28)$$

où :

$$\kappa(x, dh) = (1 - z_0(x+h, x)) k(x, h) P(dh) + \left( \int_{\mathcal{X}} z_0(x+g, x) k(x, g) P(dg) \right) \delta_0(dh). \quad (6.1.29)$$

$$\beta(x) = \int_{\mathbb{R}_+} p b(x, a) \widehat{m}(x, a) da. \quad (6.1.30)$$

Cette reformulation nous permet de donner une seconde caractérisation du TSS :

**Définition 6.1.12.** Le processus de TSS  $(X_t)_{t \geq 0}$  peut se définir à l'aide d'une chaîne de Markov à temps discret  $(Y(k))_{k \in \mathbb{N}}$  issue de  $X_0$  et de transition  $\kappa(x, dh)$ , et à l'aide d'un processus de Poisson standard  $(R(t))_{t \geq 0}$  :

$$X_t = Y \left( R \left( \int_0^t \beta(X_s) ds \right) \right). \quad (6.1.31)$$

Soit  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des temps de sauts de  $(R(t))_{t \geq 0}$ , et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des temps de sauts de  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Alors :

$$T_k = \int_0^{S_k} \beta(X_s) ds. \quad (6.1.32)$$

$\square$

Les deux caractérisations précédentes du TSS seront utilisées dans la suite.

La convergence du processus microscopique vers le processus de TSS est présenté à la Section 6.2. Nous nous inspirons des travaux de Champagnat [19, 20] pour les populations structurées uniquement par traits. Le premier résultat important de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 6.1.13.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle satisfaisant (6.1.1). Nous nous plaçons sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.3 et 6.1.7. Nous supposons que  $q_0^n(x_0, da)$  converge en probabilité dans  $(\mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}), \hat{e})$  vers  $\widehat{m}(x_0, a)da$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la suite des mesures  $(Z_{t/(nu_n)}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi, pour la topologie de la convergence étroite, vers la marginale au temps  $t$  du processus  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, Z_t(dx, da) = \delta_{X_t}(dx) \widehat{m}(X_t, a) da,$$

où  $X$  a été introduit aux Définitions 6.1.11 et 6.1.12, et où  $\widehat{m}$  est défini en (6.1.13).

**Corollaire 6.1.14.** *La suite  $(Z^n_{/(nu_n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $Z$  dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\tilde{\mathcal{X}}))$  au sens des distributions fini-dimensionnelles.*

Le Corollaire 6.1.14 provient du fait que la preuve du Théorème 6.1.13 peut se généraliser à un nombre fini d'instants  $t_1, \dots, t_n$ . A cause des périodes de transition que sont les phases d'invasion de la population résidente par la population mutante, nous n'avons pas de convergence au sens de la topologie de Skorohod.

Ce théorème nous indique que pour une population structurée par âge, il est possible de réaliser une séparation des échelles de temps en diminuant la probabilité d'occurrence de nouveaux mutants et en augmentant la taille de la population avec la même vitesse que pour les populations sans structure d'âge (la condition (6.1.1) est la même que dans [20]). Les ingrédients de la preuve (Section 6.2) sont les suivantes :

- Toute population monomorphique de trait  $x$  va se "stabiliser" au voisinage de son équilibre donné par le Point 1 des Hypothèses 6.1.7, et y rester pendant une durée d'ordre  $e^{nV}$  ( $V > 0$ ) (résultat des grandes déviations du Chapitre 5 et Proposition 6.1.10). Ce temps est suffisamment grand pour que lorsqu'un mutant apparaisse, on puisse approcher la dynamique initiale de la population mutante par celle d'un processus de naissances et de morts linéaire et structuré par âge, évoluant dans une population décrite par  $\delta_x(dy)\hat{m}(x, a)da$  (Lemme 6.2.7).
- Lorsque la population mutante atteint un certain seuil, il se produit un remplacement de la population résidente par la population mutante, suivant l'évolution déterministe décrite aux Points 2 et 3 des Hypothèses 6.1.7.

**Remarque 6.1.15.** *Pour une population sans structure d'âge (c'est à dire lorsque  $b$ ,  $d$  et  $U$  ne dépendent pas de  $a$ ) nous retrouvons le générateur infinitésimal introduit par Metz et al. [95] et expliqué par Champagnat [18, 20] :*

$$L\phi(x) = \int_{\mathcal{X}} (\phi(x+h) - \phi(x)) pb(x)\hat{N}_x \left[ \frac{b(x+h) - d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)}{b(x+h)} \right]_+ K(x, dh),$$

où  $[u]_+$  dénote la partie positive de  $u$ . Dans ce cas, nous avons une expression explicite pour  $z_0(x+h, x)$ .

*Démonstration de la Remarque.* Le terme  $z_0(x+h, x)$  est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} z &= \int_0^{+\infty} e^{(z-1)b(x+h)w} d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x) e^{-d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)w} dw \\ &= \left[ \frac{d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)}{(z-1)b(x+h) - d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)} e^{-((1-z)b(x+h) + d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x))w} \right]_{w=0}^{w=+\infty}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$z^2 - \frac{b(x+h) + d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)}{b(x+h)} z + \frac{d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)}{b(x+h)} = 0$$

Cette équation admet deux racines :  $z_0 = 1$  et  $z_0 = d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)/b(x+h)$ . Nous retrouvons ainsi la fitness considérée par [95, 18] :

$$z_0(x+h, x) = \left[ \frac{b(x+h) - d(x+h, U(x+h, x)\hat{N}_x)}{b(x+h)} \right]_+. \quad (6.1.33)$$

■

Nous terminons par une dernière remarque qui sera utile par la suite :

**Remarque 6.1.16.** *Considérons une population monomorphique de trait  $x$  à l'équilibre. Alors  $z_0(x, x) = 1$ .*

*Démonstration.* Par la condition de balance (Lemme 6.1.9),

$$1 = \int_0^{+\infty} b(x, a) \exp\left(-\int_0^a d\left(x, \alpha, \int_0^{+\infty} U((x, \alpha), (x, u)) \widehat{m}(x, u) du\right) d\alpha\right) da.$$

On en déduit par la Proposition A.5.5 que la seule solution de (6.1.24) est 1. ■

### 6.1.3 Equation Canonique pour une population structurée par âge

#### 6.1.3.1 L'Equation canonique obtenue à partir du TSS renormalisé

Nous considérons maintenant la limite du TSS structuré par âge dans l'asymptotique des petites mutations. Nous faisons tendre le pas de mutation vers 0 et accélérons le temps.

**Définition 6.1.17.** *Nous considérons le processus de TSS structuré par âge de la Définition 6.1.11 renormalisé de la façon suivante :  $\forall \varepsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$X_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathcal{X}} H^\varepsilon(s_-, h, \theta) Q\left(\frac{ds}{\varepsilon^2}, d\theta, dh\right), \quad (6.1.34)$$

où :

$$H^\varepsilon(s_-, h, \theta) = \varepsilon h \mathbf{1}_{\left\{\theta \leq p \int_{\mathbb{R}_+} b(X_{s_-}^\varepsilon, a) \widehat{m}(X_{s_-}^\varepsilon(\omega), a) da (1 - z_0(X_{s_-}^\varepsilon + \varepsilon h, X_{s_-}^\varepsilon)) k(X_{s_-}^\varepsilon, h)\right\}}.$$

Le générateur infinitésimal  $L^\varepsilon$  de ce processus est défini par :  $\forall \phi \in \mathcal{B}_b(\mathcal{X}), \forall x \in \mathcal{X}$ ,

$$L^\varepsilon \phi(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{X}} (\phi(x + \varepsilon h) - \phi(x)) p \left( \int_{\mathbb{R}_+} b(x, a) \widehat{m}(x, a) da \right) (1 - z_0(x + \varepsilon h, x)) k(x, h) P(dh). \quad (6.1.35)$$

Nous considérons la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Comme nous le montre par exemple (6.1.33) dans le cas sans âge, une difficulté provient de ce que la fonction  $\varepsilon \mapsto z_0(x + \varepsilon h, x)$  est continue mais pas nécessairement dérivable en 0.

**Hypothèse 6.1.18.** *Nous supposons que :*

- les applications  $b, d$  et  $U$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  de dérivées bornées,
- L'application  $x \mapsto k(x, h)$  est Lipschitzienne uniformément en  $h$ ,
- L'application  $x \mapsto \widehat{m}(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$  est Lipschitzienne,
- Pour tout  $x, h \in \mathcal{X}$ , l'application  $\varepsilon \mapsto z_0(x + \varepsilon h, x)$  admet des dérivées à gauche et à droite en 0, et ces dérivées sont Lipschitziennes uniformément en  $x$ .

**Définition 6.1.19.** *Equation canonique structurée par âge*

$$\frac{dx}{dt} = p \int_{\mathbb{R}_+} b(x, a) \widehat{m}(x, a) da \int_{\mathcal{X}} h D_h^1 z_0(x, x) k(x, h) P(dh) \quad (6.1.36)$$

$$\text{où : } D_h^1 z_0(x, x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1 - z_0(x + \varepsilon h, x)}{\varepsilon}. \quad (6.1.37)$$

Le générateur  $L^0$  sous-jacent à l'Equation canonique (6.1.36) est :

$$L^0 \phi(x) = \int_{\bar{\mathcal{X}}} p b(x, a) D_h^1 z_0(x, x) k(x, h) (h \cdot \nabla \phi(x)) P(dh) \widehat{m}(x, a) da. \quad (6.1.38)$$

Nous notons  $\mathcal{D}(L^0)$  le domaine de ce générateur.

La convergence annoncée, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  est donnée par le second résultat du chapitre :

**Théorème 6.1.20.** *Sous les Hypothèses 6.1.1 et 6.1.18, la suite de processus  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge en loi pour la topologie de Skorohod sur  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$  vers la solution de l'Equation canonique (6.1.36).*

*Comme la limite et la condition initiale sont déterministes, et comme la limite est continue, la convergence est une convergence uniforme et en probabilité.*

## 6.2 Du processus microscopique au TSS

Cette Section est dédiée à la preuve du Théorème 6.1.13. Nous nous inspirons de la démarche de Champagnat [20], pour des populations sans structure d'âge. Nous ne pouvons pas nous ramener à des quantités de dimensions finies (effectif...) comme dans le cas sans structure d'âge, et il nous faudra :

- définir une notion de "proximité" entre une population et son équilibre, donné par la solution stationnaire de (6.1.10), autrement que par la simple comparaison des traits et des effectifs. La façon naturelle sera de considérer la distance de Vaserstein entre  $Z^n$  et  $\hat{\xi}$  (5.6.1).
- utiliser des processus de naissances et de morts linéaires structurés par âge. Ceci nous conduit à travailler avec des probabilités d'extinction par toujours explicites.

Nous commençons par définir la suite  $(\bar{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathcal{X}))$  par :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$ ,

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) \bar{Z}_t^n(dx) = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} f(x) Z_t^n(dx, da). \quad (6.2.1)$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}_+$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathcal{X}$  on définit également l'événement suivant :

$$A^n(I, \varepsilon, x) = \left\{ \sup_{t \in I} \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \hat{\xi}_x \right) < \varepsilon \right\}, \quad (6.2.2)$$

où  $\hat{\xi}_x$  est défini en (6.1.13). Sur l'événement  $A^n(I, \varepsilon, x)$ , la distance entre le processus microscopique et la mesure d'équilibre monomorphique de trait  $x$  est contrôlée par  $\varepsilon$  pour tout  $t \in I$ . La démonstration du Théorème 6.1.13 se base sur le Lemme suivant, prouvé à la Section 6.2.1, et dont l'heuristique est que sous la renormalisation choisie, on va isoler les périodes de monomorphie avec des distributions en âge proches de celles données par les solutions stationnaires de (6.1.10).

**Lemme 6.2.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.1.13,  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \Gamma \subset \mathcal{X}$  mesurable,  $\forall \varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{y\}, y \in \Gamma, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, y) \right) = \mathbb{P}_{x_0} (X_t \in \Gamma), \quad (6.2.3)$$

où  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  a été défini en (6.1.26).

*Preuve du Théorème 6.1.13.* Soient  $f \in \mathcal{C}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Nous allons montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left( \langle Z_{t/nu_n}^n, f \rangle \right) = \mathbb{E}_{x_0} \left( \int_{\mathbb{R}_+} f(X_t, a) \hat{m}(X_t, a) da \right). \quad (6.2.4)$$

Nous commençons par établir une estimée de la masse de  $\hat{m}(x, a) da$  pour  $x \in \mathcal{X}$ . Par les Hypothèses 6.1.1 sur  $b$  et  $d$ ,

$$\int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a d(x, \alpha, \int_{\mathbb{R}_+} U((x, \alpha), (x, u)) \hat{m}(x, u) du)} d\alpha da \leq \int_0^{+\infty} \bar{b} e^{-a \underline{d} \hat{N}_x} da \leq \frac{\bar{b}}{\underline{d} \hat{N}_x}, \quad (6.2.5)$$

où  $\widehat{N}_x$  a été définie en (6.1.14). Par la condition de balance (6.1.19) caractérisant  $\widehat{m}(x, a)da$ , nous avons alors nécessairement

$$\widehat{N}_x \leq \frac{\bar{b}}{\underline{d}} =: N. \quad (6.2.6)$$

Alors :

$$\forall x \in \mathcal{X}, 0 \leq \int_{\mathbb{R}_+} f(x, a) \widehat{m}(x, a) da < \|f\|_\infty N.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $L = (\|f\|_\infty N + 1)/\varepsilon$ . Nous notons pour  $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$  :

$$\Gamma_\ell^f = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \int_{\mathbb{R}_+} f(x, a) \widehat{m}(x, a) da \in ](\ell - 1)\varepsilon, \ell\varepsilon] \right\},$$

et  $\mathcal{X} = \bigcup_{\ell=1}^L \Gamma_\ell^f$ .

Nous pouvons maintenant établir (6.2.4). Par (6.2.3) nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \mathcal{X}, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{X}) = 1,$$

ce qui implique la première égalité suivante, en utilisant le Point (iii) du Théorème 3.1.7 :

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left( \langle Z_{t/nu_n}^n, f \rangle \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left( \langle Z_{t/nu_n}^n, f \rangle \mathbf{1} \left\{ \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \mathcal{X}, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right\} \right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left( \langle Z_{t/nu_n}^n, f \rangle \mathbf{1} \left\{ \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \Gamma_\ell^f, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right\} \right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ell\varepsilon + \varepsilon) \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \Gamma_\ell^f, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^L (\ell\varepsilon + \varepsilon) \mathbb{P}_{x_0} \left( X_t \in \Gamma_\ell^f \right), \text{ par le Lemme 6.2.1} \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \mathbb{E}_{x_0} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}_+} f(X_t, a) \widehat{m}(X_t, a) da + 2\varepsilon \right) \mathbf{1} \left\{ X_t \in \Gamma_\ell^f \right\} \right] = \mathbb{E}_{x_0} \left[ \int_{\mathbb{R}_+} f(X_t, a) \widehat{m}(X_t, a) da \right] + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

De façon similaire, on peut établir la minoration :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left( \langle Z_{t/nu_n}^n, f \rangle \right) \geq \mathbb{E}_{x_0} \left[ \int_{\mathbb{R}_+} f(X_t, a) \widehat{m}(X_t, a) da \right] - 2\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve du Théorème. ■

### 6.2.1 Preuve du Lemme 6.2.1

Nous généralisons au cas des populations structurées par âge les idées de [20]. Nous introduisons les temps d'arrêt suivants :

1. Les instants de mutations sont notés par :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \tau_k &= \inf\{t > \tau_{k-1}, \text{ une mutation se produit}\}. \end{aligned}$$

Nous notons  $U_k$  le trait mutant apparaissant au temps  $\tau_k$ ,  $k > 0$ .

2. Les temps de monomorphicit e sont les temps d'arrˆet auxquels la population redevient monomorphique :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 \text{ si la population initiale est monomorphique,} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \theta_k &= \inf\{t > \tau_k, \text{ le support de } \bar{Z}_t^n \text{ est un singleton}\}. \end{aligned}$$

Nous notons  $V_k$  le trait survivant au temps  $\theta_k$ , *i.e.* le trait tel que  $\text{supp}(\bar{Z}_{\theta_k}^n) = \{V_k\}$ . Remarquons que  $\theta_0$  a un int erˆet mˆeme si le processus  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est issu d'un état monomorphique, car nous serons par la suite amenés à considérer des conditions initiales monomorphiques et dimorphiques.

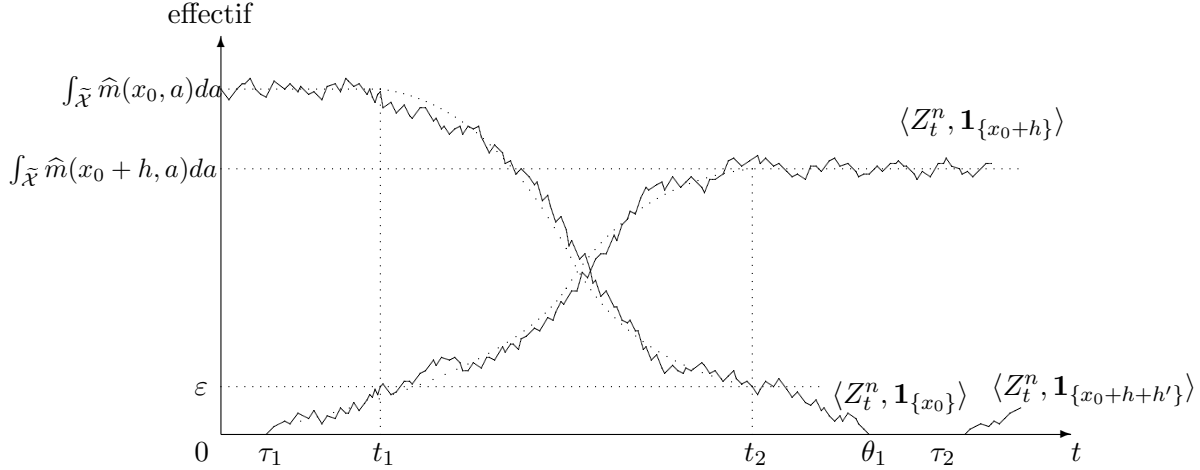


FIG. 6.1 – Les trois phases successives de l'invasion réussie et de la fixation du 1<sup>er</sup> mutant de trait  $x_0 + h$  dans la population résidente monomorphique  $V_0 = x_0$ . Au temps  $\tau_1$ , un mutant de trait  $U_1 = x_0 + h$  apparaˆıt. Au temps  $\theta_1$  l'invasion est accomplie et seuls les individus de trait  $V_1 = x_0 + h$  ont surv ec. Au temps  $\tau_2$  un nouveau mutant de trait  $U_2 = x_0 + h + h'$  apparaˆıt.

Première étape : Nous allons établir une relation de récurrence pour le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et montrer que cette relation est presque satisfaite par le processus microscopique.

Nous reprenons les notations de la Définition 6.1.12. Sous  $\mathbb{P}_{x_0}$ , les variables aléatoires  $S_1$  et  $X_{S_1}$  sont indépendantes,  $S_1$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\beta(x_0)$  et  $X_{S_1} - x_0$  a pour loi  $\kappa(x_0, dh)$ . Soient  $t > 0$ ,  $x_0 \in \mathcal{X}$  et  $\Gamma$  un ensemble mesurable de  $\mathcal{X}$ . Par la propriéte de Markov forte :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_0}(S_k \leq t < S_{k+1}, X_t \in \Gamma) &= \mathbb{E}_{x_0}(\mathbb{P}_{x_0}(S_k \leq t < S_{k+1}, X_t \in \Gamma \mid S_1 = s, X_{S_1} = x_0 + h)) \\ &= \int_0^t ds \beta(x_0) e^{-\beta(x_0)s} \int_{\mathcal{X}} \kappa(x_0, dh) \mathbb{P}_{x_0+h}(S_{k-1} \leq t - s < S_k, X_{t-s} \in \Gamma) \\ \mathbb{P}_{x_0}(0 \leq t < S_1, X_t \in \Gamma) &= \mathbf{1}\{x_0 \in \Gamma\} e^{-\beta(x_0)t}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Seconde étape : Si nous nous donnons en plus  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_0^n \in \mathcal{M}_P^n(\mathcal{X})$ ,  $\varepsilon > 0$ , nous définissons :

$$p_k^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) := \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \theta_k \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_{k+1}, V_k \in \Gamma, A^n([\theta_k, \tau_{k+1}], \varepsilon, V_k) \right). \quad (6.2.8)$$

La quantité  $p_k^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma)$  représente la probabilité qu'au temps  $t/nu_n$  le processus microscopique se trouve dans sa  $k^{\text{eme}}$  p eriod e de monomorphicit e, avec un trait appartenant à  $\Gamma$  et une distribution d'âge proche de la distribution d'équilibre de (6.1.10).



Intuitivement, dans une grande population, lorsque le temps est accéléré d'un facteur  $1/nu_n$ , les transitions entre deux états d'équilibre monomorphiques peuvent être négligées. Cette idée est formalisée par le Lemme suivant, qui sera prouvé à la Section 6.2.2.2 :

**Lemme 6.2.2.** *i) Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_0 \in \mathcal{X}$ ,  $q_0^n \in \mathcal{M}_P(\tilde{\mathcal{X}})$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\Gamma$  un ensemble mesurable de  $\mathcal{X}$ . Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.3 et 6.1.7, la limite définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k(x_0, t, \Gamma) := \lim_{n \rightarrow +\infty} p_k^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma). \quad (6.2.9)$$

*existe et est indépendante de  $q_0^n(da)$ ,  $q_0(da)$ , et  $\varepsilon$ .*

*ii) Les applications  $p_k(t, x, \Gamma)$  sont continues en  $t$ , mesurables en  $x$  et satisfont :*

$$\begin{aligned} p_0(x, t, \Gamma) &= 1\{x \in \Gamma\}e^{-\beta(x)t} \\ p_{k+1}(x, t, \Gamma) &= \int_0^t ds \beta(x)e^{-\beta(x)s} \int_{\mathcal{X}} \kappa(x, dh) p_k(x+h, t-s, \Gamma). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Troisième étape : En utilisant (6.2.10) et (6.2.7), nous pouvons maintenant prouver le Lemme 6.2.1. En effet, la relation de récurrence obtenue étant la même, nous avons

$$\forall k \geq 0, p_k(t, x_0, \Gamma) = \mathbb{P}_{x_0}(S_k \leq t < S_{k+1}, X_t \in \Gamma). \quad (6.2.11)$$

Comme :

$$\left\{ \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \Gamma, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma),$$

où :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma) = \left\{ \theta_k \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_{k+1}, V_k \in \Gamma, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, V_k) \right\},$$

sont disjoints, nous avons :

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left\{ \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \Gamma, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right\} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)).$$

Par les inégalités suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) \leq \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) \leq p_k^n(x_0, q_0^n, +\infty, t, \Gamma), \quad (6.2.12)$$

et le Lemme 6.2.2, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) = p_k(x_0, t, \Gamma). \quad (6.2.13)$$

Montrons maintenant que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) = \sum_{k \geq 0} p_k(x_0, t, \Gamma). \quad (6.2.14)$$

Soit  $K_0 \in \mathbb{N}^*$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) - \sum_{k \geq 0} p_k(x_0, t, \Gamma) \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{K_0} \left( \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) - p_k(x_0, t, \Gamma) \right) \right| \\ &+ \sum_{k > K_0} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) + \sum_{k > K} p_k(x_0, t, \Gamma). \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Soit  $\eta > 0$ . Comme  $\sum_{k \geq 0} (p_k(x_0, t, \Gamma) + p_k(x_0, t, \Gamma^c)) = 1$ , alors  $\exists K_0 \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k > K_0} p_k(x_0, t, \Gamma) \leq \sum_{k > K_0} (p_k(x_0, t, \Gamma) + p_k(x_0, t, \Gamma^c)) \leq \frac{\eta}{4}. \quad (6.2.16)$$

On a ainsi majoré le troisième terme du membre de droite de (6.2.15). Par (6.2.13) :  $\exists n_0 = n_0(K_0) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\sum_{k=0}^{K_0} \left[ \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) + \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma^c)) \right] \geq 1 - \frac{\eta}{2}. \quad (6.2.17)$$

On en déduit, pour le second terme de (6.2.15) :

$$\begin{aligned} \sum_{k > K_0} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) &\leq \sum_{k > K_0} \left[ \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) + \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma^c)) \right] \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \left[ \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) + \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma^c)) \right] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{K_0} \left[ \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) + \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma^c)) \right] \\ &\leq 1 - (1 - \eta/2) = \eta/2. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Enfin, par (6.2.13), le premier terme du membre de droite de (6.2.15) converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et quitte à augmenter  $n_0$  :  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^{K_0} \left( \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (B_k^n(\varepsilon, t, \Gamma)) - p_k(x_0, t, \Gamma) \right) \right| \leq \frac{\eta}{4}. \quad (6.2.19)$$

En réunissant (6.2.16), (6.2.18) et (6.2.19), (6.2.14) est démontré et :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left\{ \text{supp}(\bar{Z}_{t/nu_n}^n) = \{x\}, x \in \Gamma, A^n(\{t/nu_n\}, \varepsilon, x) \right\} \\ &= \sum_{k \geq 0} p_k(x_0, t, \Gamma) = \mathbb{P}_{x_0}(X_t \in \Gamma), \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

la dernière inégalité provenant de (6.2.11). ■

## 6.2.2 Preuve du Lemme 6.2.2

Le Lemme 6.2.2 nous indique que l'évolution peut être approchée par une succession de périodes d'équilibres monomorphiques.

Pour cela, nous aurons besoin d'estimées sur les temps de mutation. C'est la relation (6.1.1) qui va nous assurer que les échelles de temps (mutations et fixations) peuvent bien être séparées. La condition  $u_n = o(1/(n \log n))$  implique que les mutations sont suffisamment rares et que la population est retournée à un équilibre monomorphique approché par (6.1.13) lorsque la mutation suivante se produit. La condition  $\exp(-Vn) = o(u_n)$  indique que les mutations sont suffisamment fréquentes pour avoir lieu avant l'occurrence d'événements rares qui laisseraient la population résidente s'échapper hors du voisinage de son état d'équilibre. Ces idées sont formalisées dans le Lemme 6.2.3 (Section 6.2.2.1 et prouvé à la Section 6.2.3).

Nous aurons également besoin d'estimées sur le temps de retour à la monomorphie et d'évaluations des probabilités de fixation. Ceci sera donné par le Lemme 6.2.4 (Section 6.2.2.1 et prouvé à la Section 6.2.4).

### 6.2.2.1 Quelques résultats préliminaires

Le premier lemme nous fournit des estimées concernant l'instant  $\tau_1$  de la première mutation et l'état de la population lorsque cette première mutation se produit.

**Lemme 6.2.3.** *Soient  $x_0 \in \mathcal{X}$ , et  $(q_0^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de mesures de  $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ . Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.3, 6.1.7 et si (6.1.1) est vérifiée :*

i)  $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall t > 0,$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \exists k \geq 0, \frac{t}{nu_n} \leq \tau_k < \frac{t + \varepsilon}{nu_n} \right) < 1 - e^{-C\varepsilon}.$$

ii) *Nous en déduisons :*

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \exists k \geq 0, \frac{t}{nu_n} \leq \tau_k < \frac{t + 1/2^\ell}{nu_n} \right) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (\tau_1 < \log n) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

iii) *Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit (cf. (6.2.40) pour la condition exacte). Nous avons :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \tau_1 \geq \log n, \sup_{s \in [\log n, \tau_1]} \mathcal{W}_1(Z_s^n(dx, da), \delta_{V_0}(dx) \widehat{m}(V_0, a) da) > \varepsilon \right) = 0.$$

iv)  $\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \tau_1 > \frac{t}{nu_n} \right) = e^{-\beta(x_0)t}$ , où  $\beta$  a été défini en (6.1.30). □

Le Point (iii) implique la convergence en probabilité de  $Z_{\tau_1^-}^n(dx, da)$  vers  $\delta_{V_0}(dy) \widehat{m}(V_0, a) da$  pour la topologie de la convergence étroite. Le Point (iv) implique la convergence en loi de  $(nu_n \tau_1)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers une variable exponentielle de paramètre  $\beta(V_0)$ .

Le second Lemme concerne l'instant de premier retour à l'état monomorphique après l'apparition d'un mutant, et l'état de la population à cet instant.

**Lemme 6.2.4.** *Soient  $x_0, y \in \mathcal{X}$ . Sous les Hypothèses 6.1.1, 6.1.7, et si (6.1.1) est vérifiée :*

i)  $\forall \eta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y}^n \left( \theta_0 > \frac{\eta}{nu_n} \wedge \tau_1 \right) = 0.$

ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y}^n (\theta_0 < \tau_1, V_0 = y) = 1 - z_0(y, x_0)$ , où  $z_0(y, x_0)$  est la plus petite solution de (6.1.24).

iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y}^n (\theta_0 < \tau_1, V_0 = x_0) = z_0(y, x_0),$

iv)  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, y}^n (\theta_0 < \tau_1, A^n(\{\theta_0\}, \varepsilon, V_0)) = 1.$  □

Le Point (i) indique que le phénomène de sélection est plus rapide que la génération de nouveaux mutants. Les Points (ii) et (iii) donnent les probabilités de fixation du mutant dans la population, au sens où la descendance de celui-ci remplace la population résidente. Le Point (iv) indique qu'au moment de la fixation (la population résidente est complètement remplacée), la population mutante est proche de son état d'équilibre.

Ces lemmes sont prouvés aux Sections 6.2.3 et 6.2.4.

Dans la suite, nous aurons besoin d'estimées pour la probabilité d'extinction de la descendance d'un mutant lorsque le taux de mort est perturbé par  $\varepsilon$ .

**Proposition 6.2.5.** *Considérons la probabilité de survie  $z_0(y, x_0, \varepsilon)$  d'un processus de naissances et de morts structuré par âge, de taux de naissance  $b(y, a)$  et de taux de mort*

$$d(y, a, x_0, \varepsilon) = d \left( y, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((y, a), (x_0, \alpha)) \widehat{m}(x_0, \alpha) d\alpha + \varepsilon \right).$$

(i) Si  $\int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a d(y, \alpha, x_0, 0) d\alpha} da > 1$ , alors  $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$$z_0(y, x_0) - \eta \leq z_0(y, x_0, \varepsilon) \leq z_0(y, x_0) \leq z_0(y, x_0, -\varepsilon) \leq z_0(y, x_0) + \eta,$$

où  $z_0(y, x_0)$  est la plus petite solution de (6.1.24).

(ii) Si  $\int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a d(y, \alpha, x_0, 0) d\alpha} da < 1$ , alors  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0, z_0(y, x_0, \pm \varepsilon) = z_0(y, x_0) = 1$ .

(iii) Si  $\int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a d(y, \alpha, x_0, 0) d\alpha} da = 1$ , alors  $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$$1 - \eta \leq z_0(y, x_0, \varepsilon) \leq 1 = z_0(y, x_0) = z_0(y, x_0, -\varepsilon).$$

*Démonstration.* Considérons le Point (i).  $z_0(y, x_0, \varepsilon)$  résout l'équation suivante en  $z$  (cf (6.1.25)) :

$$z = 1 + \int_0^{+\infty} (z - 1) b(y, w) e^{(z-1) \int_0^w b(y, v) dv - \int_0^w d(y, v, x_0, \varepsilon) dv} dw.$$

Introduisons la fonction :

$$\Psi(z, \varepsilon) = z - 1 - \int_0^{+\infty} (z - 1) b(y, w) e^{(z-1) \int_0^w b(y, v) dv - \int_0^w d(y, v, x_0, \varepsilon) dv} dw.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi(z_0(y, x_0), 0) &= 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}(z_0(y, x_0), 0) &= - \int_0^{+\infty} (z_0(y, x_0) - 1) b(y, w) e^{(z_0(y, x_0) - 1) \int_0^w b(y, v) dv - \int_0^w d(y, v, x_0, 0) dv} \\ &\quad \times \left( - \int_0^w d_u \left( y, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((y, a), (x_0, \alpha)) \widehat{m}(x_0, \alpha) d\alpha \right) \right) dw < 0, \end{aligned}$$

dès que  $z_0(y, x) < 1$  et que  $d_u$  est une fonction positive. Par le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction continûment différentiable décroissante  $\varepsilon \mapsto z_0(y, x_0, \varepsilon)$  définie sur l'intervalle ouvert  $I$  contenant 0 telle que  $z_0(y, x_0, 0) = z_0(y, x_0)$ , et  $\Psi(z_0(y, x_0, \varepsilon), \varepsilon) = 0$  pour tout  $\varepsilon \in I$ .

Considérons maintenant le Point (ii). L'application :

$$\Phi : \varepsilon \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a d(y, \alpha, x_0, \varepsilon) d\alpha} da \quad (6.2.22)$$

est continue en 0. Il existe donc  $\varepsilon_0 > 0$  telle que  $\Phi$  soit strictement plus petite que 1 sur  $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ . On conclut par la Proposition A.5.5 (en annexe).

Par les Hypothèses 6.1.1,  $d_u > 0$  et l'application  $\Phi$  est strictement décroissante. Si

$$\int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a d(y, \alpha, x_0, 0) d\alpha} da = 1,$$

alors  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*, \Phi(\varepsilon) \neq 1$ . Soit  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite convergente de réels non nuls, de limite 0, et soit  $(z^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  la suite des plus petites solutions de (6.1.25) associée. Cette suite de  $[0, 1]$  admet

une sous-suite convergente. Soit  $\bar{z}$  une valeur d'adhérence. Nous notons à nouveau  $(z^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite convergeant vers  $\bar{z}$ .

Si  $(z^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est la suite constante égale à 1 à partir d'un certain rang, alors  $\bar{z} = 1$ .

Supposons que la suite  $(z^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas constante égale à 1 à partir d'un certain rang. Quitte à en extraire une sous-suite que nous appellerons encore  $(z^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , nous pouvons supposer que c'est une suite de  $[0, 1[$ . Par (6.1.25), chacun des  $z^k$  est solution de :

$$1 = \int_0^{+\infty} b(y, w) e^{(z^k-1) \int_0^w b(y, u) du - \int_0^w d(y, u, x, \varepsilon_k) du} dw. \quad (6.2.23)$$

En faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on obtient que  $\bar{z}$  satisfait :

$$1 = \int_0^{+\infty} b(y, w) e^{(\bar{z}-1) \int_0^w b(y, u) du - \int_0^w d(y, u, x, 0) du} dw \geq \Phi(0) = 1. \quad (6.2.24)$$

Donc nécessairement  $\bar{z} = 1$ . Ceci prouve que  $\varepsilon \mapsto z_0(y, x, \varepsilon)$  est continue en 0, et en utilisant les Points (i) et (ii), on en déduit le Point (iii).  $\blacksquare$

### 6.2.2.2 Preuve du Lemme 6.2.2

Nous raisonnons par récurrence sur  $k$ .

Première étape : Considérons tout d'abord le cas  $k = 0$ . Nous allons montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_0^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) = 1_{\{x_0 \in \Gamma\}} e^{-\beta(x_0)t}, \quad (6.2.25)$$

où  $p_0^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma)$  a été défini en (6.2.8). La condition initiale étant monomorphique,

$$\begin{aligned} & \left\{ 0 \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_1, V_0 \in \Gamma, A^n([\log n, \tau_1], \varepsilon, V_0) \right\} \\ &= \left\{ 0 \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_1, V_0 \in \Gamma \right\} \setminus \left\{ 0 \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_1, V_0 \in \Gamma, {}^c A^n([\log n, \tau_1], \varepsilon, V_0) \right\}, \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( 0 \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_1, V_0 \in \Gamma, {}^c A^n([\log n, \tau_1], \varepsilon, V_0) \right) = 0,$$

par le Point (iii) du Lemme 6.2.3, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} p_0^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( 0 \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_1, V_0 \in \Gamma, A^n([\log n, \tau_1], \varepsilon, V_0) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( 0 \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_1, V_0 \in \Gamma \right) = 1_{\{x_0 \in \Gamma\}} e^{-\beta(x_0)t}, \end{aligned}$$

par le Point (iv) du Lemme 6.2.3.

Deuxième étape : Supposons que les Points *i*) et *ii*) du Lemme 6.2.2 aient été prouvés pour  $k \geq 0$ . Nous allons maintenant montrer que  $p_{k+1}(x_0, t, \Gamma)$  défini en (6.2.9) satisfait :

$$p_{k+1}(x_0, t, \Gamma) = \int_0^t \beta(x_0) e^{-\beta(x_0)s} \int_{\mathcal{X}} p_k(x_0 + h, t - s, \Gamma) \kappa(x_0, dh) ds, \quad (6.2.26)$$

où  $\beta(x_0)$ ,  $\kappa(x_0, dh)$  et  $p_k(x_0 + h, t - s, \Gamma)$  ont été définis en (6.1.30), (6.1.29) et (6.2.9). Ceci prouvera les Points *i*) et *ii*) du Lemme 6.2.2 pour  $k + 1$ . Afin d'utiliser l'hypothèse de récurrence,

nous allons utiliser la propriété de Markov pour exprimer la  $(k+1)^{\text{ème}}$  période de monomorphie comme une  $k^{\text{ème}}$  période de monomorphie avec un processus issu de  $(\theta_1, V_1)$  (le premier retour à un état monomorphe après la première mutation). Pour cela, nous allons appliquer deux fois la propriété de Markov forte, en  $\tau_1$  puis en  $\theta_1$ . Soit  $\ell \in \mathbb{N}^*$ . Nous notons  $[u]$  le plus petit entier strictement supérieur à  $u \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
p_{k+1}^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) &= \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \theta_{k+1} \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_{k+2}, V_{k+1} \in \Gamma, A^n([\theta_{k+1}, \tau_{k+2}], \varepsilon, V_{k+1}) \right) \\
&= \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \tau_1 \leq \frac{t}{nu_n}, \theta_{k+1} \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_{k+2}, V_{k+1} \in \Gamma, A^n([\theta_{k+1}, \tau_{k+2}], \varepsilon, V_{k+1}) \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{\lceil t2^\ell \rceil - 1} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \frac{i}{2^\ell nu_n} \leq \tau_1 < \frac{i+1}{2^\ell nu_n}, \theta_{k+1} \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_{k+2}, V_{k+1} \in \Gamma, \right. \\
&\quad \left. A^n([\theta_{k+1}, \tau_{k+2}], \varepsilon, V_{k+1}) \right), \\
&\leq \sum_{i=0}^{\lceil t2^\ell \rceil - 1} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left[ \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \frac{i}{2^\ell nu_n} \leq \tau_1 < \frac{i+1}{2^\ell nu_n}, \theta_{k+1} \leq \frac{t}{nu_n} < \tau_{k+2}, V_{k+1} \in \Gamma, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. A^n([\theta_{k+1}, \tau_{k+2}], \varepsilon, V_{k+1}) \mid \tau_1, U_1 \right) \right] \\
&\leq \sum_{i=0}^{\lceil t2^\ell \rceil - 1} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \frac{i}{2^\ell nu_n} \leq \tau_1 < \frac{i+1}{2^\ell nu_n} \right\}} \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1-}, x_0+h}^n \left( \theta_k \leq \frac{t-i/2^\ell}{nu_n}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{t-(i+1)/2^\ell}{nu_n} < \tau_{k+1}, V_k \in \Gamma, A^n([\theta_k, \tau_{k+1}], \varepsilon, V_k) \right) k(x_0, h) P(dh) \right], \tag{6.2.27}
\end{aligned}$$

où  $Z_{\tau_1-}^n(dx, da) = \delta_{x_0}(dx) q_{\tau_1-}^n(x_0, da)$ . En appliquant la propriété de Markov forte en  $\theta_0$  nous obtenons pour l'intégrant :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1-}, x_0+h}^n \left( \theta_k \leq \frac{t-i/2^\ell}{nu_n}, \frac{t-(i+1)/2^\ell}{nu_n} < \tau_{k+1}, V_k \in \Gamma, A^n([\theta_k, \tau_{k+1}], \varepsilon, V_k) \right) \\
&\leq \mathbb{E}_{x_0, q_{\tau_1-}, x_0+h}^n \left( \mathbf{1}_{\{\theta_0 > \tau_1 \wedge \frac{1}{2^\ell nu_n}\}} + \mathbf{1}_{\{\theta_0 \leq \tau_1 \wedge \frac{1}{2^\ell nu_n}\}} \left[ \mathbb{P}_{V_0, q_{\theta_0}^n}^n \left( \theta_k \leq \frac{t-i/2^\ell}{nu_n} < \tau_{k+1}, \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. V_k \in \Gamma, A^n([\theta_k, \tau_{k+1}], \varepsilon, V_k) \right) + \mathbb{P}_{V_0, q_{\theta_0}^n}^n \left( \frac{t-(i+1)/2^\ell}{nu_n} \leq \tau_{k+1} < \frac{t-i/2^\ell}{nu_n} \right) \right] \right) \\
&\leq \mathbb{E}_{x_0, q_{\tau_1-}, x_0+h}^n \left( \mathbf{1}_{\{\theta_0 > \tau_1 \wedge \frac{1}{2^\ell nu_n}\}} + \mathbf{1}_{\{\theta_0 \leq \tau_1 \wedge \frac{1}{2^\ell nu_n}\}} p_k^n \left( V_0, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t-i/2^\ell, \Gamma \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{1}_{\{\theta_0 \leq \tau_1 \wedge \frac{1}{2^\ell nu_n}\}} \mathbb{P}_{V_0, q_{\theta_0}^n}^n \left( \frac{t-(i+1)/2^\ell}{nu_n} \leq \tau_{k+1} < \frac{t-i/2^\ell}{nu_n} \right) \right). \tag{6.2.28}
\end{aligned}$$

Le premier terme  $\mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1-}, x_0+h}^n \left( \theta_0 > \frac{1}{2^\ell nu_n} \wedge \tau_1 \right)$  de (6.2.28) converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  par le Point i) du Lemme 6.2.4.

Considérons maintenant le second terme de (6.2.28). Sous  $\mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1-}, x_0+h}^n$  et sur l'ensemble  $\{\theta_0 \leq \tau_1\}$  nous avons :

$$\begin{aligned}
p_k^n \left( V_0, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t-i/2^\ell, \Gamma \right) &= \mathbf{1}_{\{V_0 = x_0\}} p_k^n \left( x_0, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t-i/2^\ell, \Gamma \right) \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{V_0 = x_0+h\}} p_k^n \left( x_0+h, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t-i/2^\ell, \Gamma \right). \tag{6.2.29}
\end{aligned}$$

Par les hypothèses de récurrence :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} p_k^n(x_0, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t - i/2^\ell, \Gamma) &= p_k(x_0, t - i/2^\ell, \Gamma) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} p_k^n(x_0 + h, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t - i/2^\ell, \Gamma) &= p_k(x_0 + h, t - i/2^\ell, \Gamma).\end{aligned}$$

Par convergence dominée, le second terme de (6.2.28) devient :

$$\begin{aligned}& \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_{\tau_1}^n, x_0+h} \left[ 1 \left\{ \theta_0 < \frac{1/2^\ell}{nu_n} \wedge \tau_1 \right\} p_k^n(V_0, Z_{\theta_0}^n, \varepsilon, t - i/2^\ell, \Gamma) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1}^n, x_0+h}^n(\theta_0 < \tau_1, V_0 = x_0) p_k(x_0, t - i/2^\ell, \Gamma) \\ &+ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1}^n, x_0+h}^n(\theta_0 < \tau_1, V_0 = x_0 + h) p_k(x_0 + h, t - i/2^\ell, \Gamma) \\ &= (1 - z_0(x_0 + h, x_0)) p_k(x_0 + h, t - i/2^\ell, \Gamma) + z_0(x_0 + h, x_0) p_k(x_0, t - i/2^\ell, \Gamma),\end{aligned}\quad (6.2.30)$$

par les Points (ii) et (iii) du Lemme 6.2.4.

Pour le troisième terme de (6.2.28), on a par le Point (i) du Lemme 6.2.3 :

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\{\theta_0 \leq \tau_1 \wedge \frac{1}{2^\ell nu_n}\}} \mathbb{P}_{V_0, q_{\theta_0}^n}^n \left( \frac{t - (i+1)/2^\ell}{nu_n} \leq \tau_{k+1} < \frac{t - i/2^\ell}{nu_n} \right) \right) \leq 1 - e^{-C/2^\ell}.\quad (6.2.31)$$

Par (6.2.30) et (6.2.31), la limite de l'espérance dans (6.2.27) est :

$$\begin{aligned}& \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left[ \mathbf{1}_{\{\frac{i}{2^\ell nu_n} \leq \tau_1 < \frac{i+1}{2^\ell nu_n}\}} \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}_{x_0, q_{\tau_1}^n, x_0+h}^n \left( \theta_k \leq \frac{t - i/2^\ell}{nu_n}, \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{t - (i+1)/2^\ell}{nu_n} < \tau_{k+1}, V_k \in \Gamma, A^n([\theta_k, \tau_{k+1}], \varepsilon, V_k) \right) k(x_0, h) P(dh) \right] \\ & \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left[ \frac{i}{2^\ell nu_n} \leq \tau_1 < \frac{i+1}{2^\ell nu_n} \right] \left\{ \int_{\mathcal{X}} \left( (1 - z_0(x_0 + h, x_0)) p_k(x_0 + h, t - i/2^\ell, \Gamma) \right. \right. \\ & \left. \left. + z_0(x_0 + h, x_0) p_k(x_0, t - i/2^\ell, \Gamma) \right) k(x_0, h) P(dh) + (1 - e^{-C/2^\ell}) \right\} \\ & \leq \left( e^{-\beta(x_0)i/2^\ell} - e^{-\beta(x_0)(i+1)/2^\ell} \right) \left\{ \int_{\mathcal{X}} p_k(x_0 + h, t - i/2^\ell, \Gamma) \kappa(x_0, dh) + (1 - e^{-C/2^\ell}) \right\},\end{aligned}\quad (6.2.32)$$

par le Point (iv) du Lemme 6.2.3 et où la loi  $\kappa$  a été définie en (6.1.29). Comme  $\exists \varsigma_i \in ]0, 1[$ ,

$$\left( e^{-\beta(x_0)i/2^\ell} - e^{-\beta(x_0)(i+1)/2^\ell} \right) = \frac{\beta(x_0)}{2^\ell} e^{-\beta(x_0)(i+\varsigma_i)/2^\ell} \leq \frac{\beta(x_0)}{2^\ell} e^{-\beta(x_0)i/2^\ell},$$

nous avons par (6.2.27) et (6.2.32) :

$$\begin{aligned}& \lim_{n \rightarrow +\infty} p_k^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) \\ & \leq \frac{1}{2^\ell} \sum_{i=0}^{\lceil t2^\ell \rceil - 1} \beta(x_0) e^{-\beta(x_0)i/2^\ell} \left\{ \int_{\mathcal{X}} p_k(x_0 + h, t - i/2^\ell, \Gamma) \kappa(x_0, dh) + (1 - e^{-C/2^\ell}) \right\}\end{aligned}\quad (6.2.33)$$

En faisant  $\ell \rightarrow +\infty$  dans le membre de droite, on a, par convergence de la somme de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_k^n(x_0, q_0^n, \varepsilon, t, \Gamma) \leq \int_0^t \beta(x_0) e^{-\beta(x_0)s} \int_{\mathcal{X}} p_k(x_0 + h, t - s, \Gamma) \kappa(x_0, dh) ds.\quad (6.2.34)$$

En procédant de façon similaire, on peut établir une borne inférieure de la forme (6.2.34), ce qui achève la démonstration.  $\blacksquare$

### 6.2.3 Preuve du Lemme 6.2.3

*Preuve des Points (i) et (ii).* Sous les Hypothèses 6.1.7 et par (6.2.6), il existe une constante  $N > 0$  suffisamment grande telle que  $N > \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \langle \xi_t, 1 \rangle$ . Définissons :

$$\zeta_N^n = \inf \{ t \geq 0 \mid \langle Z_t^n, 1 \rangle \geq N \}.$$

Par la Proposition 6.1.10,  $\exists V > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (\zeta_N^n < e^{nV}) = 0$ . Alors :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (\zeta_N^n > \log n) = 1, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \zeta_N^n > \frac{t + \varepsilon}{nu_n} \right) = 1, \quad (6.2.35)$$

par (6.1.1).

Soient  $t_1, t_2 > 0$ . Définissons par  $U^n(t_1, t_2)$  le nombre de mutations dans le processus  $(Z_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$  se produisant entre  $t_1$  et  $t_2$ . Sur  $[0, \zeta_N^n]$ , le taux d'apparition des mutations est majoré par  $\bar{b} p u_n n N$ . Ainsi, nous pouvons dominer stochastiquement  $(U^n(t_1 \wedge \zeta_N^n, t \wedge \zeta_N^n))_{t > t_1}$  par un processus de comptage d'intensité  $\bar{b} p u_n n N$  :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( U^n \left( \frac{t}{nu_n}, \frac{t + \varepsilon}{nu_n} \right) > 1 \right) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( U^n \left( \frac{t}{nu_n}, \frac{t + \varepsilon}{nu_n} \right) > 1, \zeta_N^n > \frac{t + \varepsilon}{nu_n} \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \exp \left( -\bar{b} p u_n n N \frac{\varepsilon}{nu_n} \right) \right) = 1 - e^{-N p \bar{b} \varepsilon}, \end{aligned}$$

la première égalité étant une conséquence de (6.2.35). Le Point (i) est prouvé. De même,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (\tau_1 < \log n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (U^n(0, \log n) > 1, \zeta_N^n > \log n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - e^{-N p \bar{b} nu_n \log n} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

par (6.1.1). Ceci prouve le Point (ii). ■

*Preuve du Point (iii).* On considère la solution faible mesure  $(\xi_t(dx, da) = \delta_{x_0}(dx) q_t(x, da))_{t \in \mathbb{R}_+}$  de (6.1.10) issue de  $\delta_{x_0}(dx) q_0(x_0, da)$  non nulle et satisfaisant les Hypothèses 6.1.3. Par les Hypothèses 6.1.7,  $\xi_t$  converge étroitement vers une mesure stationnaire  $\hat{\xi}_{x_0}$  indépendante de la condition initiale, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous définissons :

$$t_\varepsilon = \inf \{ t \geq 0 \mid \mathcal{W}_1(q_t(x_0, da), \hat{m}(x_0, a) da) < \varepsilon \} \quad (\text{déterministe})$$

Nous allons montrer qu'à partir de  $t_\varepsilon$ , le processus microscopique  $Z^n$  reste dans un tube de rayon  $3\varepsilon$  autour de  $\delta_{x_0}(dx) \hat{m}(x_0, a) da$  pendant un temps suffisamment long pour que lorsque qu'une mutation se produit en  $\tau_1$ , la structure en âge de la population décrite par  $Z^n$  soit proche de  $\hat{m}(x_0, a) da$ .

Etape 1 : Par la Proposition 6.1.10 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \sup_{0 \leq t \leq t_\varepsilon \wedge \tau_1} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \xi_t) \geq \varepsilon \right) = 0,$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \mathcal{W}_1 \left( Z_{t_\varepsilon}^n, \hat{\xi}_{x_0} \right) < 2\varepsilon, \tau_1 \geq t_\varepsilon \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n (\tau_1 \geq t_\varepsilon) = 1, \quad (6.2.37)$$



par le Point (ii) du Lemme 6.2.3. Au temps  $t_\varepsilon$ , le processus  $Z^n$  se trouve donc dans le tube mentionné précédemment.

Par (6.2.37), par la Propriété de Markov forte et par la Proposition 6.1.10,

$$\begin{aligned} \exists V > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0}^n \left( \sup_{t \in [t_\varepsilon, e^{nV} + t_\varepsilon]} \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) < 3\varepsilon \right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0}^n \left( \mathbf{1} \left\{ \tau_1 \geq t_\varepsilon, \mathcal{W}_1 \left( Z_{t_\varepsilon}^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) < 2\varepsilon \right\} \right. \\ \left. \mathbb{P}_{x_0, q_{t_\varepsilon}^n}^n \left( \inf \{ t \geq 0, \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) \geq 3\varepsilon \} > e^{nV} \right) \right) = 1. \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

Etape 2 : Il nous reste à montrer que la première mutation se produit avant  $e^{nV} + t_\varepsilon$ . Sur l'ensemble :

$$B = \left\{ \tau_1 \geq t_\varepsilon, \mathcal{W}_1 \left( Z_{t_\varepsilon}^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) < 2\varepsilon, \sup_{t \in [t_\varepsilon, e^{nV} + t_\varepsilon]} \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) < 3\varepsilon \right\},$$

le nombre de mutations  $(U^n(t_\varepsilon, t))_{t \in [t_\varepsilon, t_\varepsilon + e^{nV}]}$  est minoré stochastiquement par un processus de Poisson d'intensité :

$$\int_{\mathbb{R}_+} nu_n pb(x_0, a) \widehat{m}(x_0, a) da - Cnu_n \varepsilon,$$

avec  $C$  une constante strictement positive ( $b$  étant Lipschitzienne et  $\sup_{t \in [t_\varepsilon, e^{nV} + t_\varepsilon]} \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_0 \right)$  étant majorée par  $3\varepsilon$ ). Par la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0}^n \left( \tau_1 < e^{nV} + t_\varepsilon \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0}^n \left( \mathbf{1}_{B^c} \mathbb{P}_{x_0, q_{t_\varepsilon}^n}^n \left( \tau_1 < e^{nV} \right) \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \exp \left( -e^{nV} \times \left[ \int_{\mathbb{R}_+} nu_n pb(x_0, a) \widehat{m}(x_0, a) da - Cnu_n \varepsilon \right] \right) \right] = 1, \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

pour un choix de  $\varepsilon$  tel que

$$C\varepsilon < \int_{\mathbb{R}_+} pb(x_0, a) \widehat{m}(x_0, a) da, \quad (6.2.40)$$

puisque par (6.1.1),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n e^{nV} = +\infty$ .

Etape 3 : On déduit de (6.2.21), (6.2.38) et (6.2.39) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0}^n \left( \log n < \tau_1 < t_\varepsilon + e^{nV}, \sup_{t \in [t_\varepsilon, t_\varepsilon + e^{nV}[} \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) < 3\varepsilon \right) = 1,$$

ce qui prouve le Point (iii). ■

*Preuve du Point (iv).* Soit  $t > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous considérons  $n$  suffisamment grand tel que  $\log n \leq t/(nu_n)$ . Par les Points (ii) et (iii) du Lemme 6.2.3 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0}^n \left( \tau_1 \geq \log n \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0}^n \left( \sup_{t \in [\log n, \tau_1]} \mathcal{W}_1 \left( Z_t^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) \leq 3\varepsilon \right) = 1.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \tau_1 > \frac{t}{nu_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \tau_1 > \frac{t}{nu_n} > \log n, \sup_{t \in [\log n, \tau_1]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \hat{\xi}_{x_0}) \leq 3\varepsilon \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0, q_0^n}^n \left( \mathbf{1}_{\tau_1 \geq \log n, \mathcal{W}_1(q_{\log n}^n, \hat{m}(x_0, a) da) \leq 3\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{P}_{x_0, q_{\log n}^n}^n \left( \tau_1 > \frac{t}{nu_n} - \log n, \sup_{t \in [0, \tau_1]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \hat{\xi}_{x_0}) \leq 3\varepsilon \right) \right), \tag{6.2.41}
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov au temps  $\log n$ . Sur l'ensemble

$$B = \left\{ \sup_{t \in [0, \tau_1]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \hat{\xi}_{x_0}) \leq 3\varepsilon \right\}$$

tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_{\log n}^n}^n(B) = 1$ , l'intensité du processus de mutation est bornée supérieurement et inférieurement par :

$$\int_{\mathbb{R}_+} nu_n pb(x_0, a) \hat{m}(x_0, a) da \pm C nu_n \varepsilon,$$

avec  $C > 0$  une constante positive. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( -(t - nu_n \log n) \left( \int_{\mathbb{R}_+} pb(x_0, a) \hat{m}(x_0, a) da + C\varepsilon \right) \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_{\log n}^n}^n \left( \tau_1 > \frac{t}{nu_n} - \log n, \sup_{t \in [0, \tau_1]} \mathcal{W}_1(Z_t^n, \hat{\xi}_{x_0}) \leq 3\varepsilon \right) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( -(t - nu_n \log n) \left( \int_{\mathbb{R}_+} pb(x_0, a) \hat{m}(x_0, a) da - C\varepsilon \right) \right). \tag{6.2.42}
\end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n \log n = 0$ , nous en déduisons de (6.2.41) et de (6.2.42) :

$$\exp(-t(\beta(V_0) + C\varepsilon)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n}^n \left( \tau_1 > \frac{t}{nu_n} \right) \leq \exp(-t(\beta(V_0) - C\varepsilon)),$$

où  $\beta(\cdot)$  a été défini en (6.1.30). Comme ceci reste vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , la preuve du Point (iv) du Lemme 6.2.3 est achevée.  $\blacksquare$

**Remarque 6.2.6.** (i) Les démonstrations des Points (i) et (ii) du Lemme 6.2.3 ne font en fait pas intervenir le fait que la population est monomorphique.

(ii) Les résultats du Lemme 6.2.3 restent valables pour toute suite de conditions initiales convergent vers une mesure de la forme  $\delta_{x_0}(dx)q(x_0, da)$ .

## 6.2.4 Preuve du Lemme 6.2.4

Nous commençons par donner une *description heuristique* du phénomène. Reprenons la Figure 6.1. L'invasion réussie d'un mutant peut-être décomposée en plusieurs phases. Soit  $\varepsilon > 0$ .

1. Dans un premier temps, entre les instants  $\tau_1$  et  $t_1$  sur la Figure 6.1, la masse de la mesure représentant la population mutante ne dépasse pas un seuil  $\varepsilon > 0$  et a un effet négligeable dans les termes d'interaction. En première approximation, sur cet intervalle de temps, nous pouvons négliger la population mutante. Les individus évoluent dans une population décrite par une mesure proche de la mesure  $\delta_{x_0}(dx) \hat{m}(x_0, a) da$ . L'évolution de la population

mutante peut alors être décrite par un processus de naissances et de morts linéaire et structuré par âge, de taux de naissance  $b(x_0 + h, a)$  et de taux de mort

$$d \left( x_0 + h, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0 + h, a), (x_0, \alpha)) \widehat{m}(x_0, \alpha) d\alpha \right).$$

La population résidente n'est pas affectée par la présence négligeable de mutants. (Des résultats sur les processus de naissances et de morts linéaires structurés par âge et qui seront utiles dans la suite sont rappelés en Annexe A.5).

2. Dans une seconde phase, entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , les deux populations, mutante et résidente, sont de tailles non-négligeables. Comme nous sommes dans une asymptotique de grandes populations, ces deux populations peuvent être approchées par les solutions de (6.1.12).
3. Dans une dernière période, entre les instants  $t_2$  et  $\theta_1$ , la population résidente devient négligeable, tandis que la population mutante atteint sa taille d'équilibre. La population résidente a une dynamique proche d'un processus de naissances et de morts linéaire et structuré par âge, de taux de naissance  $b(x_0, a)$  et de taux de mort

$$d \left( x_0, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0, a), (x_0 + h, \alpha)) \widehat{m}(x_0 + h, \alpha) d\alpha \right).$$

Etape 1 : Considérons la première période décrite au Point 1. Soit les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon^n &= \inf \left\{ t \geq 0 \mid \mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0\}}(x) Z_t^n(dx, da), \widehat{\xi}_{x_0}(dx, da) \right) \geq \varepsilon \right\} \\ S_\varepsilon^n &= \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_t^n(dx, da) \geq \varepsilon \right\} \\ S_0^n &= \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_t^n(dx, da) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

La première période est définie par  $[0, \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_\varepsilon^n \wedge S_0^n]$ . Donnons des estimées pour les temps d'arrêt la définissant. Notre but est de montrer qu'avec une forte probabilité,  $\tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_\varepsilon^n \wedge S_0^n = S_\varepsilon^n \wedge S_0^n$ , c'est à dire que la population mutante atteint la masse  $\varepsilon$  ou s'éteint avant l'occurrence d'une nouvelle mutation, et avant que la population résidente ne s'écarte significativement de son équilibre.

Par le Lemme 6.2.3 (iv) et la Remarque 6.2.6,  $\exists \rho > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( \tau_1 < \frac{\rho}{nu_n} \right) < \varepsilon.$$

Par la Proposition 6.1.10,  $\exists V > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n'_0$ ,

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( R_\varepsilon^n < e^{nV} \right) < \varepsilon.$$

Ainsi,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( \frac{\rho}{nu_n} < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \right) \geq 1 - 2\varepsilon. \quad (6.2.43)$$

Le processus à valeurs mesures décrivant la population mutante sur  $[0, \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_\varepsilon^n \wedge S_0^n]$  peut-être dominé et minoré stochastiquement à l'aide de deux processus de naissances et de morts structurés par âge (non renormalisés) pour  $n \in \mathbb{N}^*$  assez grand (tel que  $1 - u_n p > 1 - \varepsilon$ ) :  $\forall t \in [0, \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_\varepsilon^n], \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,

$$\frac{1}{n} \langle Z_t^{1,\varepsilon}, f \rangle \leq \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0+h\}}(x) f(a) Z_t^n(dx, da) \leq \frac{1}{n} \langle Z_t^{2,\varepsilon}, f \rangle,$$

où  $Z^{1,\varepsilon}$  et  $Z^{2,\varepsilon}$  sont les processus de  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_P(\mathbb{R}_+))$  suivants :

1.  $(Z_t^{1,\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est défini par le taux de naissance  $b_1(a) = (1 - \varepsilon)b(x_0 + h, a)$  et le taux de mort

$$d_1(a) = d \left( x_0 + h, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0 + h, a), (x_0, \alpha)) \widehat{m}(x_0, \alpha) d\alpha + C\varepsilon \right),$$

2.  $(Z_t^{2,\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est défini par le taux de naissance  $b_2(a) = \bar{b}$  et le taux de mort

$$d_2(a) = d \left( x_0 + h, a, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0 + h, a), (x_0, \alpha)) \widehat{m}(x_0, \alpha) d\alpha - C\varepsilon \right),$$

où  $C$  est une constante positive. Définissons pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$S_{\varepsilon n}^i = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \langle Z_t^{i,\varepsilon}, 1 \rangle \geq \varepsilon n \right\}, \quad S_0^i = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \langle Z_t^{i,\varepsilon}, 1 \rangle = 0 \right\}.$$

Le Lemme suivant, prouvé en fin de section, nous fournit des informations sur l'extinction ou le temps d'atteinte du seuil  $\varepsilon n$  pour les processus  $Z^{1,\varepsilon}$  et  $Z^{2,\varepsilon}$ .

**Lemme 6.2.7.** *Soit  $\varepsilon > 0$ , et soit  $i \in \{1, 2\}$ . Considérons le processus  $(Z_t^{i,\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}_+}$  de naissances et de morts linéaire et structuré par âge, introduit ci-dessus et issu de  $Z_0^{i,\varepsilon}(da) = \delta_0(da)$ . Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n / \log n = +\infty$ .*

1. Si  $\int_0^{+\infty} b_i(a) e^{-\int_0^a d_i(\alpha) d\alpha} da \leq 1$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( S_0^i \leq t_n \wedge S_{\varepsilon n}^i \right) = 1 \quad (6.2.44)$$

2. Si  $\int_0^{+\infty} b_i(a) e^{-\int_0^a d_i(\alpha) d\alpha} da > 1$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( S_0^i \leq t_n \wedge S_{\varepsilon n}^i \right) = z_0^i(x + h, x) \quad (6.2.45)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( S_{\varepsilon n}^i \leq t_n \leq S_0^i \right) = 1 - z_0^i(x + h, x), \quad (6.2.46)$$

où  $z_0^i(x + h, x)$  est la plus petite solution dans  $[0, 1]$  de l'équation analogue à (6.1.24), où les taux de naissance et de mort sont remplacés par  $b_i(a)$  et  $d_i(a)$ .  $\square$

La probabilité que la population mutante s'éteigne avant d'atteindre la masse  $\varepsilon$ , avant l'occurrence d'une nouvelle mutation, et avant que la population résidente ne s'écarte de son équilibre est minorée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_0^n < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_\varepsilon^n \right) &\geq \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_0^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge S_\varepsilon^n, \frac{\rho}{nu_n} < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \right) \\ &\geq \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_0^2 < \frac{\rho}{nu_n} \wedge S_{\varepsilon n}^2, \frac{\rho}{nu_n} < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \right) \geq z_0(x_0 + h, x_0) - C\varepsilon, \end{aligned} \quad (6.2.47)$$

par (6.2.43), par le Lemme 6.2.7 et en remarquant que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $z^i(x + h, x)$  tend vers  $z_0(x + h, x)$  par une démonstration analogue à celle de la Proposition 6.2.5. De façon analogue la probabilité pour que la population mutante atteigne la masse  $\varepsilon$  avant l'extinction, l'apparition d'un autre mutant ou l'écart de la population résidente à l'équilibre est minorée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_\varepsilon^n < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n \right) &\geq \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0}^n \left( S_\varepsilon^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge S_0^n, \frac{\rho}{nu_n} < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \right) \\ &\geq \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0}^n \left( S_{\varepsilon n}^1 < \frac{\rho}{nu_n} \wedge S_0^1, \frac{\rho}{nu_n} < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \right) \geq 1 - z_0(x_0 + h, x_0) - C\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.2.48)$$

Cas où  $z_0(x_0 + h, x_0) = 1$  : Par (6.2.47) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n (S_0^n < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_\varepsilon^n) &= \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n (\theta_0 < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n, V_0 = x_0, A^n(\{\theta_0\}, \varepsilon, V_0)) \\ &\geq 1 - C\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.2.49)$$

Comme ceci est valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , le Lemme 6.2.4 est prouvé dans ce cas.

Cas où  $z_0(x_0 + h, x_0) \in ]0, 1[$  : Par définition, sur l'ensemble  $\{S_\varepsilon^n < \tau_1 \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n\}$ , nous avons :

$$\mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0\}} Z_{S_\varepsilon^n}^n, \widehat{\xi}_{x_0} \right) < \varepsilon, \text{ et } \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_{S_\varepsilon^n}^n(dx, da) \geq \varepsilon.$$

Nous allons montrer que l'évolution de la population microscopique va alors suivre, avec une grande probabilité, celle de son approximation déterministe : la population mutante va remplacer la population résidente.

Etape 2 : Une fois que la population mutante a atteint la taille  $\varepsilon$ , nous entamons la seconde période. Comme  $z_0(x_0 + h, x_0) < 1$ , nous avons nécessairement (Proposition A.5.6) :

$$\int_0^{+\infty} b(x_0 + h, a) \exp \left( - \int_0^a d \left( x_0 + h, \alpha, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0 + h, \alpha), (x_0, u)) \widehat{m}(x_0, u) du \right) du \right) da > 1, \quad (6.2.50)$$

et par l'Hypothèse 6.1.7 (ii) :

$$\int_0^{+\infty} b(x_0, a) \exp \left( - \int_0^a d \left( x_0, \alpha, \int_{\mathbb{R}_+} U((x_0, \alpha), (x_0 + h, u)) \widehat{m}(x_0 + h, u) du \right) du \right) da < 1. \quad (6.2.51)$$

Alors par l'Hypothèse 6.1.7 (iii), toute solution faible mesure de (6.1.12) de condition initiale non nulle de la forme (6.1.8) converge vers  $\delta_{x_0+h}(dx) \widehat{m}(x_0 + h, a) da$  défini en (6.1.13). Soit  $\delta < \varepsilon$  une constante positive. Définissons :

$$\begin{aligned} t_\delta &= \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_{\widetilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(x) \xi_t(dx, da) < \varepsilon - \delta \right. \\ &\quad \left. \text{et } \mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0+h\}}(x) \xi_t(dx, da), \widehat{\xi}_{x_0+h}(dx, da) \right) < \varepsilon - \delta \right\}, \end{aligned}$$

où  $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est la solution faible de (6.1.12) avec condition initiale (6.1.8). Nous noterons  $t_\delta$  pour  $t_\delta(0)$ . Par la propriété de Markov et le Point (i) du Lemme 6.2.3,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( \tau_1 < \frac{\rho}{nu_n} + t_\delta \right) = \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( \mathbf{1}_{\tau_1 < t_\delta} \mathbb{P}_{Z_{t_\delta}^n}^n \left( \tau_1 < \frac{\rho}{nu_n} \right) \right) < \varepsilon.$$

La Proposition 6.1.10 nous fournit :

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h, \widetilde{q}_0^n}^n \left( \sup_{t \leq t_\delta} \mathcal{W}_1 (Z_t^n, \xi_t) > \delta \right) < \varepsilon.$$

Nous allons minorer la probabilité de l'événement suivant :

- la population mutante atteint la masse  $\varepsilon$  avant l'apparition d'un autre mutant et avant que la population résidente ne quitte le voisinage de son équilibre,
- la population mutante remplace la population résidente : la première entre dans un voisinage de son équilibre, la seconde devient de masse inférieure à  $\varepsilon$ ,
- il n'y a pas de mutation pendant cette transition.

En utilisant la propriété de Markov forte pour  $S_\varepsilon^n$  :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_\varepsilon^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n, \tau_1 > t_\delta + S_\varepsilon^n, \mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n(dx, da), \widehat{\xi}_{x_0+h} \right) < \varepsilon, \right. \\
& \quad \left. \text{et } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(y) Z_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n(dx, da) < \varepsilon. \right) \\
& \geq \mathbb{E}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left[ 1_{\{S_\varepsilon^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n\}} \mathbb{P}_{S_\varepsilon^n}^n \left( \tau_1 > t_\delta, \mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_{t_\delta}^n(dx, da), \xi_{t_\delta}(dx, da) \right) < \delta, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{et } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(x) \xi_{t_\delta}(dx, da) < \delta. \right) \right] \\
& \geq \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_\varepsilon^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n \right) (1 - 2\varepsilon) \geq 1 - z_0(x_0 + h, x_0) - C\varepsilon. \tag{6.2.52}
\end{aligned}$$

Etape 3 : Une fois que la population résidente a atteint un seuil inférieur à  $\varepsilon$  et que la population mutante a atteint un voisinage de son équilibre, nous entrons dans la phase finale de l'invasion.

Comme  $z_0(x_0 + h, x_0) < 1$ , nous avons nécessairement (6.2.50) et (6.2.51), ce qui implique que  $z_0(x_0, x_0 + h) = 1$ . Nous sommes donc dans une situation similaire à celle de la période 1, du début de la preuve. Introduisons

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_\varepsilon^n(t_0) &= \inf \left\{ t \geq t_0 \mid \mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_t^n(dx, da), \widehat{\xi}_{x_0+h}(dx, da) \right) \geq \varepsilon \right\} \\
\tilde{S}_\varepsilon^n(t_0) &= \inf \left\{ t \geq t_0 \mid \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(x) Z_t^n(dx, da) \geq \varepsilon \right\} \\
\tilde{S}_0^n(t_0) &= \inf \left\{ t \geq t_0 \mid \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(x) Z_t^n(dx, da) = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov forte en  $S_\varepsilon^n + t_\delta$  et avec les mêmes idées que pour la première période :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( S_\varepsilon^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n, \tau_1 > t_\delta + S_\varepsilon^n + \tilde{S}_0^n(S_\varepsilon^n + t_\delta), \right. \\
& \quad \left. \mathcal{W}_1 \left( 1_{\{x_0+h\}}(x) Z_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n(dx, da), \widehat{\xi}_{x_0+h} \right) < \varepsilon, \text{ et } \int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(x) Z_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n(dx, da) < \varepsilon, \right. \\
& \quad \left. \tilde{S}_0^n(S_\varepsilon^n + t_\delta) < \left( S_\varepsilon^n + t_\delta + \frac{\rho}{nu_n} \right) \wedge \tilde{R}_\varepsilon^n(S_\varepsilon^n + t_\delta) \wedge \tilde{S}_\varepsilon^n(S_\varepsilon^n + t_\delta) \right) \\
& = \mathbb{E}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n \left( 1_{\{S_\varepsilon^n < \frac{\rho}{nu_n} \wedge R_\varepsilon^n \wedge S_0^n, \tau_1 > t_\delta + S_\varepsilon^n\}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{W}_1(1_{\{x_0+h\}}(x) Z_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n(dx, da), \widehat{\xi}_{x_0+h}) < \varepsilon\}} \right. \\
& \quad \left. \mathbf{1}_{\{\int_{\tilde{\mathcal{X}}} 1_{\{x_0\}}(x) Z_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n(dy, da) < \varepsilon\}} \mathbb{P}_{S_\varepsilon^n+t_\delta}^n \left( \tilde{S}_0^n(0) < \frac{\rho}{nu_n} \wedge \tilde{R}_\varepsilon^n(0) \wedge \tilde{S}_\varepsilon^n(0) \right) \right) \\
& \geq (1 - z_0(x_0 + h, x_0)) - C\varepsilon, \tag{6.2.53}
\end{aligned}$$

par (6.2.52) et (6.2.49).

Ainsi, dans le cas où  $z_0(x_0 + h, x_0) \in ]0, 1[$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n (\theta_0 \leq \tau_1, V_0 = x_0) \geq z_0(x_0 + h, x_0) - C\varepsilon,$$

par (6.2.47) et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n (\theta_0 \leq \tau_1, V_0 = x_0 + h) \geq 1 - z_0(x_0 + h, x_0) - C\varepsilon,$$

par (6.2.53). Comme :

$$\mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n (\theta_0 \leq \tau_1, V_0 = x_0) + \mathbb{P}_{x_0, q_0^n, x_0+h}^n (\theta_0 \leq \tau_1, V_0 = x_0 + h) = 1,$$

les Points (ii) et (iii) du Lemme 6.2.4 sont nécessairement satisfaits et le Point (i) l'est alors également. Le Point (iv) est une conséquence de (6.2.47), (6.2.52) et du Point (i).

*Preuve du Lemme 6.2.7.* Pour les processus de naissances et de morts linéaires considéré, il n'y a pas d'accumulation d'événements de naissances et de morts et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n \wedge S_{\varepsilon n}^i = +\infty, \mathbb{P} - p.s.$$

Par convergence dominée, les membres de gauche de (6.2.44) et (6.2.45) convergent vers  $\mathbb{P}(S_0 < +\infty)$ , qui est donné dans les Propositions A.5.2 et A.5.5.

Considérons maintenant (6.2.46) :

$$\mathbb{P}(S_{\varepsilon n}^i \leq t_n \leq S_0^i) = \mathbb{P}(S_{\varepsilon n}^i \leq t_n \text{ et } S_0^i = +\infty) + \mathbb{P}(S_{\varepsilon n}^i \leq t_n \leq S_0^i < +\infty). \quad (6.2.54)$$

Le second terme de (6.2.54) est majoré par  $\mathbb{P}(t_n \leq S_0^i < +\infty)$ , qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  par choix de  $t_n$ .

Considérons maintenant le premier terme. Sous les hypothèses du Point 2, il existe un unique  $\lambda > 0$  tel que :

$$\int_0^{+\infty} b_i(a) e^{-\lambda a - \int_0^a d_i(\alpha) d\alpha} da = 1.$$

Une condition suffisante suivante pour que  $(e^{-\lambda t} \langle Z_t^{i,\varepsilon}, 1 \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $W$  strictement positive sur  $\{S_0^i = +\infty\}$  a été donnée par Doney [36] :

$$\mathbb{E}(Y_1^2) < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left( \left( \int_0^W e^{-\lambda a} b(x, a) da \right) \log \left( \left| \int_0^W e^{-\lambda a} b(x, a) da \right| \right) \right),$$

où l'effectif de la première génération  $Y_1$  et la durée de vie  $W$  sont définis en (A.5.6) et à la Proposition A.5.3 (cf. Annexe A.5 ; rappelons que la densité de la loi de  $W$  est  $d_i(a) \exp(\int_0^a d_i(\alpha) d\alpha)$ ). Ces conditions sont satisfaites ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_1^2) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^w b(y, a) da \right) d(w) e^{-\int_0^w d(y, a, x) da} dw \\ &\leq \bar{b} \bar{d} \left( 1 + \int_0^{+\infty} \hat{q}(x, da) \right) \int_0^{+\infty} w e^{-dw} dw < +\infty. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left( \left( \int_0^W e^{-\lambda a} b(x, a) da \right) \log \left( \left| \int_0^W e^{-\lambda a} b(x, a) da \right| \right) \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left( \bar{b} W \left[ \log(\bar{b} W) + \left| \log \left( \frac{\bar{b}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda W}) \right) \right| \right] \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Alors on a la convergence presque sûre suivante sur  $\{S_0^i = +\infty\}$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \langle Z_t^{i,\varepsilon}, 1 \rangle}{t} = \lambda > 0. \quad (6.2.55)$$

Alors, pour  $n > 1/\varepsilon$ , on a  $\log(\varepsilon n) > 0$  et :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_{\varepsilon n}^i \leq t_n, S_0^i = +\infty) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_{\varepsilon n}^i}{\log(\varepsilon n)} \leq \frac{t_n}{\log(\varepsilon n)}, S_0^i = +\infty \right) \\ &= \mathbb{P}(S_0^i = +\infty) = 1 - z_0^i(x + h, x). \end{aligned} \quad (6.2.56)$$

En effet, par choix de  $t_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n / (\log \varepsilon n) = +\infty$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\varepsilon n}^i = +\infty$  presque sûrement, on a la convergence presque sûre suivante sur  $\{S_0 = +\infty\}$  par (6.2.55) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \varepsilon n}{S_{\varepsilon n}^i} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \langle Z_{S_{\varepsilon n}^i -}, 1 \rangle}{S_{\varepsilon n}^i} = \lambda > 0. \quad (6.2.57)$$

■

### 6.3 Equation canonique dans l'asymptotique des mutations petites et rares

La démonstration du Théorème 6.1.20 est une adaptation de la preuve de Champagnat [18]. Nous considérons la suite des processus de TSS renormalisés  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  définis en (6.1.34). Nous montrons que cette séquence est tendue dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$  (Paragraphe 6.3.1), puis, nous prouvons la convergence des générateurs (Paragraphe 6.3.2), ce qui nous permet d'identifier les valeurs d'adhérence comme solutions de (6.1.36). L'unicité de la solution de (6.1.36) implique la convergence de la suite  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  (Paragraphe 6.3.3).

#### 6.3.1 Tension de la suite $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$

Nous considérons les processus  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  définis en (6.1.34).

**Proposition 6.3.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.1.20, la suite  $(\mathcal{L}(X^\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  est tendue sur  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ .* □

*Démonstration.* Soient  $T > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , et soient  $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}, (\tau_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ , deux familles de temps d'arrêt tels que  $\sigma_\varepsilon < \tau_\varepsilon < T$  et  $\tau_\varepsilon < \sigma_\varepsilon + \delta$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon - X_{\sigma_\varepsilon}^\varepsilon|) &\leq \mathbb{E}\left(\int_{\sigma_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \int_0^1 \int_{\mathcal{X}} H^\varepsilon(\omega; s_-, h, \theta) Q\left(\frac{ds}{\varepsilon^2}, d\theta, dh\right)\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\int_{\sigma_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_+} b(X_{s_-}^\varepsilon, a) \widehat{m}(X_{s_-}^\varepsilon, a) da p \int_{\mathcal{X}} |h| \frac{1 - z_0(X_{s_-}^\varepsilon + \varepsilon h, X_{s_-}^\varepsilon)}{\varepsilon} k(X_{s_-}^\varepsilon, h) P(dh) ds\right) \\ &\leq \delta \bar{b} \bar{k} \mathbb{E}\left(\sup_{s \in [\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]} \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{m}(X_{s_-}^\varepsilon, a) da \int_{\mathcal{X}} |h| \frac{1 - z_0(X_{s_-}^\varepsilon + \varepsilon h, X_{s_-}^\varepsilon)}{\varepsilon} P(dh)\right), \end{aligned}$$

Comme  $1 - z_0(X_{s_-}^\varepsilon + \varepsilon h, X_{s_-}^\varepsilon) = z_0(X_{s_-}^\varepsilon, X_{s_-}^\varepsilon) - z_0(X_{s_-}^\varepsilon + \varepsilon h, X_{s_-}^\varepsilon)$  est majoré par  $C|h|\varepsilon$  (car  $y \mapsto z_0(y, x)$  est Lipschitzien uniformément en  $x$ ), nous avons :

$$\mathbb{E}(|X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon - X_{\sigma_\varepsilon}^\varepsilon|) \leq \delta C \bar{b} \bar{k} \mathbb{E}\left(\sup_{s \in [\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]} \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{m}(X_{s_-}^\varepsilon, a) da\right) \int_{\mathcal{X}} |h|^2 P(dh) \leq \frac{C \delta \bar{b}^2 \bar{k}}{\underline{d}},$$

par (6.2.6). Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|X_{\sigma_\varepsilon}^\varepsilon - X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon| \geq \eta, \tau_\varepsilon < \sigma_\varepsilon + \delta) \leq \frac{\delta C \bar{b}^2 \bar{k} \int_{\mathcal{X}} |h|^2 P(dh)}{\underline{d} \eta},$$

qui converge vers 0 lorsque  $\delta$  tend vers 0. La condition d'Aldous est satisfaite.

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Par (6.2.6) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t^\varepsilon|) &\leq |x_0| + \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_0^1 \int_{\mathcal{X}} |H^\varepsilon(\omega; s_-, h, \theta)| Q\left(\omega; \frac{ds}{\varepsilon^2}, d\theta, dh\right)\right) \\ &\leq |x_0| + \frac{C \bar{b}^2 \bar{k}}{\underline{d}} \int_{\mathcal{X}} |h|^2 P(dh) < +\infty, \end{aligned}$$



par l'hypothèse sur les moments de  $P(dh)$  du Théorème 6.1.20 et par (6.2.6). La suite des lois de  $(|X_t^\varepsilon|)_{\varepsilon>0}$  est tendue sur  $\mathbb{R}$ , par l'inégalité de Markov. Ceci achève la preuve de la proposition. ■

### 6.3.2 Convergence des générateurs

**Proposition 6.3.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.1.20 :*

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathcal{X}), L^\varepsilon \phi \rightarrow L^0 \phi \text{ uniformément sur } \mathcal{X}, \quad (6.3.1)$$

où  $L^\varepsilon$  et  $L^0$  ont été définis en (6.1.35) et (6.1.38).

Remarquons que  $\mathcal{C}_b^2(\mathcal{X}) \subset \mathcal{D}(L^0) \subset \mathcal{D}(L^\varepsilon)$ .

*Démonstration.* Soient  $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathcal{X})$  et  $x \in \mathcal{X}$  :

$$|L^\varepsilon \phi(x) - L^0 \phi(x)| \leq \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathbb{R}_+} A(x, \varepsilon, h, \phi) p b(x, a) k(x, a, h) \widehat{m}(x, a) da P(dh),$$

où :

$$A(x, \varepsilon, h, \phi) = \left| \frac{(\phi(x + \varepsilon h) - \phi(x))(1 - z_0(x + \varepsilon h, x))}{\varepsilon^2} - D_h^1 z_0(x + \varepsilon h, x) (h \cdot \nabla \phi(x)) \right|.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} A(x, \varepsilon, h, \phi) &\leq \left| \frac{\phi(x + \varepsilon h) - \phi(x)}{\varepsilon} \right| \left| \frac{1 - z_0(x + \varepsilon h, x)}{\varepsilon} - D_h^1 z_0(x, x) \right| \\ &\quad + |D_h^1 z_0(x, x)| \left| \frac{\phi(x + \varepsilon h) - \phi(x)}{\varepsilon} - h \cdot \nabla \phi(x) \right|. \end{aligned}$$

Par hypothèse, les applications  $\phi$  et  $y \mapsto z_0(y, x)$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\exists \theta_1, \theta_2 \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \phi(x + \varepsilon h) - \phi(x) &= \varepsilon h \cdot \nabla \phi(x + \theta_1 \varepsilon h) \\ 0 \leq 1 - z_0(x + \varepsilon h, x) &= z_0(x, x) - z_0(x + \varepsilon h, x) = \varepsilon D_h^1 z_0(x + \theta_2 \varepsilon h, x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A(x, \varepsilon, h, \phi) &\leq |h| |\nabla \phi(x + \varepsilon \theta_1 h)| |D_h^1 z_0(x + \varepsilon \theta_2 h, x) - D_h^1 z_0(x, x)| \\ &\quad + |h| |D_h^1 z_0(x, x)| |\nabla \phi(x + \varepsilon \theta_1 h) - \nabla \phi(x)|. \end{aligned}$$

Par les Hypothèses 6.1.18,  $\varepsilon \mapsto D_h^1 z_0(x + \varepsilon h, x)$  est Lipschitzienne de constante indépendante de  $x$  et par l'hypothèse  $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ ,  $x \mapsto \nabla \phi(x)$  est Lipschitzienne. Alors :

$$A(x, \varepsilon, h, \phi) \leq C|h|^2 \varepsilon,$$

et :

$$|L^\varepsilon \phi(x) - L^0 \phi(x)| \leq \frac{C \bar{b}^2 \bar{k} \varepsilon}{\underline{d}} \int_{\mathcal{X}} |h|^2 P(dh) < C \varepsilon,$$

par (6.2.6) et par l'hypothèse  $\int_{\mathcal{X}} |h|^2 k(x, a, h) P(dh) < +\infty$ . Ceci prouve (6.3.1). ■

### 6.3.3 Unicité de la valeur d'adhérence de $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et identification de la limite

Comme la famille  $(\mathcal{L}(X^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  est tendue, elle est relativement compacte dans  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$  et nous pouvons extraire de  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une sous-suite  $(X^{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant en loi vers une variable aléatoire  $X^0$ , dont la loi est une valeur d'adhérence de  $(\mathcal{L}(X^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ .

Notre but est de caractériser cette valeur d'adhérence comme solution de l'Equation canonique (6.1.36), ce qui nous permettra d'identifier la limite et de prouver la convergence en loi de la suite entière  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  en montrant que l'Equation canonique admet une unique solution.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , soit une suite de temps  $0 \leq t_1 < \dots < t_p \leq s < t$ , soit une fonction continue bornée  $\Phi$  de  $\mathcal{X}^p$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $\phi \in \mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  :

$$\left| \mathbb{E} \left( \Phi(X_{t_1}^0, \dots, X_{t_p}^0) \left[ \phi(X_t^0) - \phi(X_s^0) - \int_s^t L^0 \phi(X_r^0) dr \right] \right) \right| \leq A + B + C, \quad (6.3.2)$$

où :

$$\begin{aligned} A &= \left| \mathbb{E} \left( \Phi(X_{t_1}^0, \dots, X_{t_p}^0) \left[ \phi(X_t^0) - \phi(X_s^0) - \int_s^t L^0 \phi(X_r^0) dr \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left( \Phi(X_{t_1}^{\varepsilon_k}, \dots, X_{t_p}^{\varepsilon_k}) \left[ \phi(X_t^{\varepsilon_k}) - \phi(X_s^{\varepsilon_k}) - \int_s^t L^0 \phi(X_r^{\varepsilon_k}) dr \right] \right) \right| \\ B &= \left| \mathbb{E} \left( \Phi(X_{t_1}^{\varepsilon_k}, \dots, X_{t_p}^{\varepsilon_k}) \left[ \phi(X_t^{\varepsilon_k}) - \phi(X_s^{\varepsilon_k}) - \int_s^t L^{\varepsilon_k} \phi(X_r^{\varepsilon_k}) dr \right] \right) \right| \\ C &= \left| \mathbb{E} \left( \Phi(X_{t_1}^{\varepsilon_k}, \dots, X_{t_p}^{\varepsilon_k}) \int_s^t [L^0 \phi(X_r^{\varepsilon_k}) - L^{\varepsilon_k} \phi(X_r^{\varepsilon_k})] dr \right) \right|. \end{aligned}$$

Par continuité de l'application  $y \in \mathbb{D}([0, T], \mathcal{X}) \mapsto \Phi(y_{t_1}, \dots, y_{t_p}) \left[ \phi(y_t) - \phi(y_0) - \int_s^t L^0 \phi(y_r) dr \right] \in \mathbb{R}$  est continue dès que  $(t_1, \dots, t_p, s, t)$  n'intersecte pas une ensemble dénombrable de points de  $\mathbb{R}_+$  en lesquels le processus canonique n'est pas continu sous  $\mathcal{L}(X^0)$  (cf. Théorème 15.1, page 124 de Billingsley [7]). La convergence étroite de  $\mathcal{L}(X^{\varepsilon_k})$  vers  $\mathcal{L}(X^0)$  implique que  $A$  converge vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Les propriétés de martingale de  $X^{\varepsilon_k}$  nous assurent que  $B = 0$ . Finalement, considérons le terme  $C$ . La convergence des générateurs (6.3.1) implique que le terme  $C$  converge uniformément vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

Donc, le membre de droite de (6.3.2) converge vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Comme le membre de droite ne dépend pas de  $k$ , il est nécessairement nul. Ainsi  $\mathcal{L}(X^0)$  résout le problème de martingale (3.1.29).

Toute solution du problème de martingale (3.1.29) est la solution de l'Equation Canonique (6.1.36). Par les hypothèses de Lipschitzianité du Théorème 6.1.20, et le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution à l'Equation canonique (6.1.36).

Ceci termine la démonstration du Théorème 6.1.20. ■



# Annexe A

## Annexes

### A.1 Preuve de la Proposition 2.1.8

L'équation (2.1.7) est une équation de transport à coefficient non constant. Ce type d'équations a été étudié dans Golse [53] ou Evans [45] (Sections 2.1 et 3.2) par exemple, et met en oeuvre une généralisation de la méthode des caractéristiques (cf. [45]). Nous commençons par établir deux lemmes, puis nous démontrons la Proposition 2.1.8.

**Lemme A.1.1.** *Nous nous plaçons sous les Hypothèses 2.1.4. Soient  $f \in \mathcal{C}^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}_+^d$ ,  $x \in \mathcal{X}$  et  $A_x$  le flot défini à la Proposition 2.1.5. L'application  $F_{x,t_0,a_0} : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x, A_x(t, t_0, a_0), t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et :*

$$\frac{dF_{x,t_0,a_0}}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, A_x(t, t_0, a_0), t) + v(x, A_x(t, t_0, a_0)) \cdot \nabla_a f(x, A_x(t, t_0, a_0), t). \quad (\text{A.1.1})$$

*Démonstration.* Par la Proposition 2.1.5, l'application  $t \mapsto A_x(t, t_0, a_0)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Par composition, l'application  $F_{x,t_0,a_0}$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$ . En utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \frac{dF_{x,t_0,a_0}}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, A_x(t, t_0, a_0), t) + \frac{\partial A_x}{\partial t}(t, t_0, a_0) \cdot \nabla_a f(x, A_x(t, t_0, a_0), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, A_x(t, t_0, a_0), t) + v(x, A_x(t, t_0, a_0)) \cdot \nabla_a f(x, A_x(t, t_0, a_0), t), \end{aligned}$$

puisque  $t \mapsto A_x(t, t_0, a_0)$  est solution de (2.1.2). ■

**Lemme A.1.2.** *Nous nous plaçons sous les Hypothèses 2.1.4. Soient  $x \in \mathcal{X}$  et  $A_x$  le flot défini à la Proposition 2.1.5. Nous avons :  $\forall 0 < s < t, \forall a \in \mathbb{R}_+^d, \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,*

$$\frac{\partial A_x^i}{\partial t_0}(s, t, a) + \sum_{j=1}^d v_j(x, a) \frac{\partial A_x^i}{\partial a_j}(s, t, a) = 0, \quad (\text{A.1.2})$$

où  $v_j(x, a)$  est la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée de  $v(x, a)$  et où  $A_x^i(0, t, a)$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $A_x(0, t, a)$ .

*Démonstration.* Par la Proposition (2.1.5), le flot (2.1.3) est de classe  $\mathcal{C}^1$ . En dérivant la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'identité :

$$A_x(t_1, t_3, a) = A_x(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a))$$

par rapport à  $t_2 \in \mathbb{R}_+$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial A_x^i}{\partial t_0}(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a)) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial A_x^i}{\partial a_j}(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a)) \frac{\partial A_x^j(\cdot, t_3, a)}{\partial t}(t_2) \\
&= \frac{\partial A_x^i}{\partial t_0}(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a)) + \sum_{j=1}^d v_j(x, A_x(t_2, t_3, a)) \frac{\partial A_x^i}{\partial a_j}(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a)) \\
&= \frac{\partial A_x^i}{\partial t_0}(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a)) + v(x, A_x(t_2, t_3, a)) \nabla_a A_x^i(t_1, t_2, A_x(t_2, t_3, a)),
\end{aligned}$$

en utilisant que  $t \mapsto A_x(t, t_0, a_0)$  est solution de (2.1.2). En choisissant  $t_1 = s$  et  $t_2 = t_3 = t$ , on obtient (A.1.2).  $\blacksquare$

*Preuve de la Proposition 2.1.5.* Nous nous plaçons sous les hypothèses de la Proposition 2.1.8 et nous considérons tout d'abord le problème avec condition initiale du Point (i). Soient  $x \in \mathcal{X}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^d$  et  $f \in \mathcal{C}^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$  une solution de (2.1.7) sous réserve d'existence. La fonction  $t \mapsto f(x, A_x(t, 0, a), t)$  est constante d'après le Lemme A.1.1 et par définition de  $f$ . On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(x, A_x(t, 0, a), t) = f(x, A_x(0, 0, a), 0) = f_0(x, a).$$

Comme  $\forall a \in \mathbb{R}_+^d, \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$a = A_x(t, 0, A_x(0, t, a)),$$

toute solution  $f$  de (2.1.7) vérifie nécessairement :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+^d, f(x, a, t) = f_0(x, A_x(0, t, a)). \quad (\text{A.1.3})$$

Réciproquement, montrons que (A.1.3) définit une solution de (2.1.7). Comme  $(t, a) \mapsto A_x(0, t, a)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (Proposition 2.1.8) et comme  $f_0 \in \mathcal{C}^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}})$ , l'application  $G_{x,0} : (t, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^d \mapsto f_0(x, A_x(0, t, a))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par composition. Par le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_{x,0}}{\partial t}(t, a) + v(x, a) \cdot \nabla_a G_{x,0}(t, a) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_0}{\partial a_i}(x, A_x(0, t, a)) \frac{\partial A_x^i}{\partial t}(0, t, a) \\
&+ \sum_{i=1}^d v_i(x, a) \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_0}{\partial a_j}(x, A_x(0, t, a)) \frac{\partial A_x^j}{\partial a_i}(0, t, a) = 0,
\end{aligned}$$

par le Lemme A.1.2. Ceci conclut la preuve du Point (i).

Le Point (ii) se prouve de façon similaire. Soient  $x \in \mathcal{X}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^d$  et  $f \in \mathcal{C}^{0,1,1}(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}_+)$  une solution de (2.1.8) sous réserve d'existence. La fonction  $t \mapsto f(x, A_x(t, T, a), t)$  est constante d'après le Lemme A.1.1 et par définition de  $f$ . On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(x, A_x(t, T, a), t) = f(x, A_x(T, T, a), T) = \phi(x, a),$$

et comme  $\forall a \in \mathbb{R}_+^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, a = A_x(t, T, A_x(T, t, a))$ , toute solution  $f$  de (2.1.8) vérifie nécessairement :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall a \in \mathbb{R}_+^d, f(x, a, t) = \phi(x, A_x(T, t, a)). \quad (\text{A.1.4})$$

Réciproquement, (A.1.4) vérifie (2.1.8) par application du Lemme A.1.2, comme au Point (i).  $\blacksquare$

## A.2 Théorèmes d'approximation et de densité

**Proposition A.2.1.** *L'ensemble  $\mathcal{C}_0^{0,1}(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  est dense dans  $\mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  muni de la norme de la convergence uniforme.*  $\square$

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ . On définit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  la suite :

$$\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{f}_n(x, a) = G_n * f(x, a) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \alpha) G_n(a - \alpha) d\alpha, \quad (\text{A.2.1})$$

où

$$G_n(\alpha) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{n|a - \alpha|^2}{2}\right),$$

$|\cdot|$  étant la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^d$ .

Les fonctions  $\tilde{f}_n$  sont bornées par  $\|f\|_\infty$ .  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ ,

$$|\tilde{f}_n(x, a)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x, \alpha)| G_n(a - \alpha) d\alpha \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} G_n(a - \alpha) d\alpha = \|f\|_\infty \quad (\text{A.2.2})$$

Montrons maintenant la continuité des fonctions  $\tilde{f}_n$ .

- Les applications  $(x, a, \alpha) \mapsto f(x, \alpha) G_n(a - \alpha)$  sont continues,
- Soit  $M > 0$ . Comme par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a - \alpha|^2 = \sum_{i=1}^d (a_i - \alpha_i)^2 = |a|^2 + |\alpha|^2 - 2 \sum_{i=1}^d a_i \alpha_i \geq |a|^2 - 2|\alpha| |a|,$$

les applications  $\tilde{f}_n$  sont dominées sur  $\mathcal{X} \times \{|a| \leq M\}$  par les fonctions

$$\alpha \in \mathbb{R}_+^d \mapsto \|f\|_\infty \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{n(|\alpha|^2 - 2M|\alpha|)}{2}\right),$$

qui sont intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  et qui ne dépendent pas du paramètre  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ .

Comme  $M$  est arbitraire, on a, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la continuité des applications  $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

Comme de plus :

- Les applications  $(x, a, \alpha) \mapsto f(x, \alpha) G_n(a - \alpha)$  sont dérivables en  $a$  de gradients par rapport à  $a$ ,  $f(x, a) G_n(a - \alpha) n(a - \alpha)$ , continus et dominés sur  $\mathcal{X} \times \{|a| \leq M\}$  par  $\alpha \in \mathbb{R}^d \mapsto \|f\|_\infty n(M + |\alpha|) \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{n(|\alpha|^2 - 2M|\alpha|)}{2}\right)$  qui sont intégrables et indépendants du paramètre  $(x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}$ .

Comme  $M$  est arbitraire, on a, par théorème de dérivation sous le signe somme, la classe  $\mathcal{C}^{0,1}$  des fonctions  $\tilde{f}_n$ , et on montre de même qu'en (A.2.2) que les dérivées sont bornées.

Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\tilde{f}_n \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ . Par changement de variable :

$$\tilde{f}_n(x, a) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \alpha) G_n(a - \alpha) d\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, a - u) G_n(u) du.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé,

- $\lim_{|x|+|a| \rightarrow +\infty} |f(x, a - u) G_n(u)| = 0$ , car  $f \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$  et  $G_n$  est bornée,

–  $\forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall u \in \mathbb{R}_+^d, |f(x, a - u)G_n(u)| \leq \|f\|_\infty G_n(u)$ , qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^d$ .

On en déduit :

$$\lim_{|x|+|a| \rightarrow +\infty} |\tilde{f}_n(x, a)| = 0. \quad (\text{A.2.3})$$

Nous démontrons maintenant la convergence uniforme de  $(\tilde{f}_n)$  vers  $f$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathcal{X}$  fixés. Comme  $f \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R})$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  un compact de  $\mathbb{R}_+^d$  tel que

$$\exists \eta_1 > 0, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, (d(a, K_\varepsilon^c) \leq \eta_1) \Rightarrow (|f(x, a)| \leq \varepsilon/4). \quad (\text{A.2.4})$$

Sur  $K_\varepsilon$ ,  $f(x, \cdot)$  est uniformément continue, et

$$\exists \eta > 0, \forall a_1, a_2 \in K_\varepsilon, (|a_1 - a_2| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x, a_1) - f(x, a_2)| \leq \varepsilon/2). \quad (\text{A.2.5})$$

On peut choisir sans restriction  $\eta < \eta_1$ . On en déduit :  $\exists \eta > 0, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^d$ ,

$$(|a_1 - a_2| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x, a_1) - f(x, a_2)| \leq \varepsilon) \quad (\text{A.2.6})$$

En effet, si  $a_1, a_2 \in K_\varepsilon$ ,  $|f(x, a_1) - f(x, a_2)| \leq \varepsilon/2$ . Si  $a_2 \in K_\varepsilon^c$ ,  $|a_1 - a_2| \leq \eta$  implique que  $a_1$  est tel que  $d(a_1, K_\varepsilon^c) \leq \eta$ , et  $|f(x, a_1) - f(x, a_2)| \leq |f(x, a_1)| + |f(x, a_2)| \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$ . Alors :

$$\begin{aligned} |f(x, a) - \tilde{f}_n(x, a)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x, \alpha) - f(x, a)| G_n(a - \alpha) d\alpha \\ &\leq \int_{|a-\alpha| \leq \eta} |f(x, \alpha) - f(x, a)| G_n(a - \alpha) d\alpha + \int_{|a-\alpha| > \eta} |f(x, \alpha) - f(x, a)| G_n(a - \alpha) d\alpha \\ &\leq \varepsilon/2 + 2\|f\|_\infty \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{n\eta^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

qui est majoré par  $\varepsilon$  pour  $n \geq n_0$  tel que le second membre (A.2.7) soit majoré par  $\varepsilon/2$ . Ceci est possible car ce terme tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall (x, a) \in \tilde{\mathcal{X}}, \forall n \geq n_0, |f(x, a) - \tilde{f}_n(x, a)| \leq \varepsilon$ , et la Proposition est démontrée. ■

**Proposition A.2.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ . Il existe une suite de fonctions  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que :

- Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\hat{f}_n$  est polynômiale sur un compact et constante en dehors de ce compact,
- la suite  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ , il existe un compact  $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+^d$  tel que  $\forall a \notin K_\varepsilon, |f(a)| \leq \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Par le Théorème de Bernstein ([54] page 230),  $f$  est la limite uniforme sur  $K_{1/(2n)}$  d'une suite de polynômes  $(\hat{f}_{n,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ . Alors :

$$\exists P_{0,n} \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq P_{0,n}, \sup_{a \in K_{1/(2n)}} |f(a) - \hat{f}_{n,p}(a)| \leq \frac{1}{2n}.$$

En définissant pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^d$  :

$$\hat{f}_n(a) = \begin{cases} \hat{f}_{n,P_{0,n}}(a) \vee \frac{1}{n} & \text{si } a \in K_{1/(2n)} \\ 1/n & \text{si } a \notin K_{1/(2n)} \end{cases} \quad (\text{A.2.8})$$

on a une suite  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions continues (sur  $\partial K_{1/(2n)}$ , on a  $|\hat{f}_{n,P_{0,n}}(a)| \leq |f(a)| + 1/(2n) \leq 1/n$ ), minorées pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $1/n > 0$  et telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in K_{1/(2n)}$ ,

$$|f(a) - \hat{f}_n(a)| \leq |f(a) - \hat{f}_{n,P_{0,n}}(a)| + |\hat{f}_{n,P_{0,n}}(a) - \hat{f}_n(a)| \leq 3/(2n), \quad (\text{A.2.9})$$

et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \notin K_{1/(2n)}$ ,

$$|f(a) - \widehat{f}_n(a)| \leq 1/n. \quad (\text{A.2.10})$$

La suite  $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge donc uniformément vers  $f$ . ■

**Proposition A.2.3.** (i) Il existe une famille de fonctions  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}_b(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$  telle que :

- pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_m$  est minorée par une constante strictement positive,
- pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$ , il existe une sous-suite de  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\varphi$ .

(ii) Il existe une famille de fonctions  $(\vartheta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$  telle que :

- pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\vartheta_p$  est minorée par une constante strictement positive,
- pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\vartheta_p$  est polynômiale sur un compact de  $\mathbb{R}_+^d$  et constante en dehors de ce compact,
- pour tout  $\vartheta \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ , il existe une sous-suite de  $(\vartheta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\vartheta$ .

(iii) La classe de fonctions :

$$\mathfrak{K} = \left\{ \phi(x, a) = \sum_{(i_1, i_2) \in I} \alpha_{i_1 i_2} \varphi_{i_1}(x) \vartheta_{i_2}(a), \quad I \subset \mathbb{N}^2 \text{ finie, } (\alpha_{i_1 i_2})_{(i_1, i_2) \in I} \in \mathbb{Q}_+^I \right\}, \quad (\text{A.2.11})$$

est dense dans  $\mathcal{C}_0(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}_+)$  pour la topologie de la convergence uniforme.

*Démonstration.* Nous commençons par la preuve de (i). Comme  $\mathcal{X}$  est localement compact, il existe une suite  $(\widetilde{\varphi}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  dense dans  $\mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$ . Introduisons la suite  $(\widetilde{\varphi}_{m,p})_{m,p \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall x \in \mathcal{X}, \forall m, p \in \mathbb{N}$ ,

$$\widetilde{\varphi}_{m,p}(x) = \widetilde{\varphi}_m(x) \vee \frac{1}{p}. \quad (\text{A.2.12})$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ . Il existe par définition une sous-suite  $(\widetilde{\varphi}_{\psi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  de  $(\widetilde{\varphi}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0, \|\varphi - \widetilde{\varphi}_m\|_\infty \leq \varepsilon$ . On en déduit :

$$\forall m \geq \max(m_0, 1/\varepsilon), \|\varphi - \widetilde{\varphi}_{m,m}\|_\infty \leq \|\varphi - \widetilde{\varphi}_m\|_\infty + \|\widetilde{\varphi}_m - \widetilde{\varphi}_{m,m}\|_\infty \leq 2\varepsilon,$$

et  $(\widetilde{\varphi}_{m,m})_{m \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $(\varphi_{m,p})_{m,p \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\varphi$ . En réindexant  $(\varphi_{m,p})_{m,p \in \mathbb{N}}$  nous obtenons une suite satisfaisant le Point (i).

Considérons maintenant le Point (ii). Comme  $\mathbb{R}_+^d$  est localement compact, il existe une suite  $(\widetilde{\vartheta}_p)_{p \in \mathbb{N}}$  dense dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ . Par la Proposition A.2.2, il existe pour chaque  $p \in \mathbb{N}$  une suite  $(\vartheta_{p,k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

- $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_+^d, \vartheta_{p,k}(a) \geq 1/k$ ,
- $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \vartheta_{p,k}$  est polynômiale sur un compact et constante à l'extérieur de ce compact,
- $(\vartheta_{p,k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\widetilde{\vartheta}_p$  :  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0^p \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0^p$ ,

$$\|\vartheta_{p,k} - \widetilde{\vartheta}_p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Soit  $\vartheta \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}_+)$ . Par définition, il existe une sous suite  $(\widetilde{\vartheta}_{\psi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  de  $(\widetilde{\vartheta}_p)_{p \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\vartheta$  :  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0$ ,

$$\|\vartheta - \widetilde{\vartheta}_{\psi(p)}\|_\infty \leq \varepsilon.$$



Alors

$$\forall p \geq p_0, \|\vartheta - \vartheta_{\psi(p), k_0^p}\|_\infty \leq 2\varepsilon,$$

et la suite  $(\vartheta_{\psi(p), k_0^p})_{p \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\vartheta$ .

Comme on considère l'ensemble des fonctions de limite nulle à l'infini, et comme l'espace  $\tilde{\mathcal{X}}$  est localement compact, il suffit d'étudier le problème pour l'espace  $\mathcal{C}(K_1 \times K_2, \mathbb{R})$ , où  $K_1$  est un compact de  $\mathcal{X}$  et  $K_2$  un compact de  $\mathbb{R}_+^d$ . La famille

$$\tilde{\mathfrak{K}} = \left\{ \phi(x, a) = \sum_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2} \alpha_{i_1 i_2} f_{i_1}(x) g_{i_2}(a), \quad I_1 \times I_2 \subset \mathbb{N}^2 \text{ finie}, (\alpha_{i_1 i_2})_{i_1 i_2 \in I_1 \times I_2} \in \mathbb{Q}^{I_1 \times I_2} \right. \\ \left. f_{i_1} \in \mathcal{C}(K_1, \mathbb{R}), g_{i_2} \in \mathcal{C}(K_2, \mathbb{R}) \right\}$$

est une sous algèbre de  $\mathcal{C}(K_1 \times K_2, \mathbb{R})$  qui sépare les points : pour  $(x, a), (y, \alpha) \in \tilde{\mathcal{X}}$  tels que  $(x, a) \neq (y, \alpha)$ , et pour  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction  $\phi$  de  $\tilde{\mathfrak{K}}$  telle que  $\phi(x, a) = c_1$  et  $\phi(y, \alpha) = c_2$ . De plus,  $\tilde{\mathfrak{K}}$  contient l'application constante égale à 1. Par le Théorème de Stone-Weierstrass, cet ensemble est dense dans  $\mathcal{C}(K_1 \times K_2, \mathbb{R})$ .

Comme la restriction à  $K_1 \times K_2$  des fonctions de  $\tilde{\mathfrak{K}}$  est dense dans  $\{\phi \in \tilde{\mathfrak{K}}, \phi \geq 0\}$ , ceci conclut la preuve.  $\blacksquare$

### A.3 Lemme technique pour les grandes déviations

**Lemme A.3.1.** (i) Soit  $(a_i^n)_{i \in [1, N], n \in \mathbb{N}^*}$  une famille de réels positifs strictement, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \sum_{i=1}^N a_i^n \right) = \max_{i \in [1, N]} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right). \quad (\text{A.3.1})$$

(ii) Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux familles de réels positifs strictement. On a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \max \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log b_n \right). \quad (\text{A.3.2})$$

*Démonstration.* Commençons par le point (i).

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_i^n \leq \sum_{i=1}^N a_i^n$ , nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \sum_{i=1}^N a_i^n \right) \geq \max_{i \in [1, N]} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right).$$

Intéressons nous à l'inégalité réciproque. Si  $\max_{i \in [1, N]} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right) = +\infty$ , il n'y a rien à prouver. Considérons le cas où  $\max_{i \in [1, N]} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right) < +\infty$ .

Soit  $\delta > 0$ . Il existe pour chaque  $i \in [1, N]$ ,  $n_0(i) \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq n_0(i)$ ,

$$\frac{1}{n} \log a_i^n < \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \log a_i^n \right) + \delta$$

Notons  $n_0 = \min(n_0(i), i \in [1, N])$ . Nous avons pour tout  $n \geq n_0$

$$a_i^n \leq \exp \left( n \left[ \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right) + \delta \right] \right) \leq \exp \left( n \max_{i \in [1, N]} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right) + n\delta \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \sup_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} a_i^n \right) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( N \exp \left( n \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n \right) + n\delta \right) \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N + \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n + \delta \right) \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_i^n + \delta. \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre  $\delta$  vers 0.

Considérons maintenant le point (ii). Nous étudions d'abord le cas où

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log b_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n =: l.$$

Nous allons alors prouver que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq l. \quad (\text{A.3.3})$$

Par définition des limites supérieure et inférieure, pour tout  $\delta > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \log b_n \leq l + \delta, \text{ et } \frac{1}{n} \log a_n \leq l - \delta.$$

On en déduit que pour tout  $n \geq n_0$  :

$$b_n \leq e^{n(l+\delta)} \quad a_n \geq e^{n(l-\delta)}$$

d'où :

$$b_n \leq a_n e^{2n\delta} \quad \text{et} \quad (a_n + b_n) \leq a_n(1 + e^{2n\delta}) \leq 2a_n e^{2n\delta}.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \frac{1}{n} \log a_n + 2\delta + \frac{1}{n} \log 2,$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq l + 2\delta.$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient (A.3.3).

Considérons maintenant le cas

$$l := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log b_n \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n,$$

et montrons que (A.3.3) est à nouveau satisfaite, avec le nouveau choix de  $l$ . Il est possible de trouver une suite extractrice  $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\phi(n)} \log a_{\phi(n)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n \leq l, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\phi(n)} \log b_{\phi(n)} \leq l.$$

Soit  $\delta > 0$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{1}{\phi(n)} \log a_{\phi(n)} \leq l + \delta, \quad \frac{1}{\phi(n)} \log b_{\phi(n)} \leq l + \delta.$$

Alors :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(a_{\phi(n)} + b_{\phi(n)}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( 2e^{n(l+\delta)} \right) = l + \delta.$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(a_{\phi(n)} + b_{\phi(n)})$ , qui est une valeur d'adhérence de la suite  $(1/n \log(a_n + b_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est inférieure à  $l$ . Donc, la plus petite valeur d'adhérence de  $(1/n \log(a_n + b_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} 1/n \log(a_n + b_n)$ , est plus petite que  $l$ . ■

## A.4 Population Logistique structurée par âge

- Nous considérons une population structurée par un âge scalaire  $a \in \mathbb{R}_+$ , où les individus :
- vieillissent avec une vitesse 1,
  - donnent naissance avec le taux  $b(a)$  où  $b \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  est tel que  $\exists \bar{b} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, 0 \leq b(a) \leq \bar{b}$ ,
  - meurent au taux  $d(a) + \eta N$ , où  $d \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  est le taux de mort naturelle tel que  $\exists \bar{d}, \underline{d} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, \underline{d} \leq d(a) \leq \bar{d}$ , et où  $\eta N$  est le terme de compétition logistique,  $N$  étant la masse de la mesure représentant la population et  $\eta > 0$  étant un coefficient mesurant l'intensité des interactions.

Soient les équations suivantes, décrivant la dynamique en grande population (cf. Chapitre 3) :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(a, t) = -\frac{\partial n}{\partial a}(a, t) - (d(a) + \eta N_t) n(a, t) \quad (\text{A.4.1})$$

$$n(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a) n(a, t) da \quad (\text{A.4.2})$$

$$n(a, 0) = n_0(a) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \quad (\text{A.4.3})$$

$$N_t = \int_0^{+\infty} n(a, t) da. \quad (\text{A.4.4})$$

Dans une première section (Section A.4.1), nous allons étudier l'existence et l'unicité d'une solution aux équations (A.4.1)-(A.4.4), en suivant les résultats de Webb [124], Busenberg et Iannelli [15], Marcati [82] et Gurtin et McCamy [56]. Dans une seconde section (Section A.4.3), nous caractérisons les solutions stationnaires de (A.4.1)-(A.4.4) et nous étudions la limite de  $n(a, t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous utilisons des résultats de la théorie du renouvellement (cf. Feller [46] Chapitre XI, Athreya et Ney [4] Chapitre IV) et retrouvons des résultats obtenus par Webb avec des méthodes d'analyse spectrale ([124], Chapitre 4). Nous étudions enfin le spectre de l'opérateur associé à la linéarisation de (A.4.1)-(A.4.4) autour des équilibres non-triviaux lorsqu'ils existent, afin d'obtenir des résultats de stabilité et de vitesse de convergence vers les états stationnaires.

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\Pi(a_1, a_2) = \exp\left(-\int_{a_1}^{a_2} d(\alpha) d\alpha\right), \text{ pour } 0 \leq a_1 \leq a_2 \quad (\text{A.4.5})$$

$$R_0 = \int_0^{+\infty} b(a) e^{-\int_0^a d(\alpha) d\alpha} da \quad (\text{A.4.6})$$

$$\mu = \int_0^{+\infty} ab(a) \Pi(0, a) da. \quad (\text{A.4.7})$$

$\Pi(a_1, a_2)$  est la probabilité qu'un individu d'âge  $a_1$  vive jusqu'à l'âge  $a_2 \geq a_1$  dans le cas où l'individu est soumis à la seule mort naturelle (pas de compétition).  $R_0$  est appelé dans la littérature *taux de reproduction net*. Il est bien défini :

$$0 < R_0 \leq \int_0^{+\infty} \bar{b} e^{-\underline{d}a} da = \bar{b}/\underline{d}. \quad (\text{A.4.8})$$

Il s'agit de l'intégrale du taux de naissance  $b(a)$  pondéré par la probabilité de survivre jusqu'à l'âge  $a$  en l'absence de compétition.

La quantité  $\mu$  s'interprète comme l'âge moyen de reproduction, toujours dans le cas où les individus sont soumis à la seule mort naturelle. Elle est aussi bien définie :

$$0 \leq \mu \leq \bar{b} \int_0^{+\infty} a e^{-\underline{d}a} da < +\infty. \quad (\text{A.4.9})$$

### A.4.1 Existence et unicité de la solution de (A.4.1)-(A.4.4)

Le résultat principal de cette section est donné par la Proposition suivante. Le système (A.4.1)-(A.4.4) étant une équation de transport avec un terme de source, nous allons pour le résoudre faire intervenir une équation de renouvellement décrivant l'évolution des naissances (cf. Webb [124], Sections 1.3 et 5.4). Les solutions de (A.4.1)-(A.4.4) s'obtiennent alors par des techniques liées aux équations de transport.

**Proposition A.4.1.** (i) L'équation de renouvellement suivante :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$B(t) = \int_0^t g(a)B(t-a)da + B_0(t) \quad (\text{A.4.10})$$

$$\text{avec : } B_0(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} b(a+t) \frac{n_0(a)}{N_0} \Pi(a, a+t) da \quad (\text{A.4.11})$$

$$g(a) = b(a)\Pi(0, a)\mathbf{1}_{a \geq 0}. \quad (\text{A.4.12})$$

admet pour unique solution bornée sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$  :

$$B(t) = B_0 * U(t) \quad (\text{A.4.13})$$

$$\text{où : } U(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g^{*n}(t) \quad (\text{A.4.14})$$

$g^{*n}$  étant la fonction  $g$  convolée  $n$  fois avec elle-même, avec par convention  $g^{*0}$  tel que  $\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ,  $f * g^{*0} = f$ .

(ii) Les équations (A.4.1)-(A.4.4) admettent une unique solution :  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$n(a, t) = \frac{N_0}{1 + N_0 \int_0^t \int_0^{+\infty} v(\alpha, s) d\alpha ds} v(a, t), \quad (\text{A.4.15})$$

avec :

$$v(a, t) = \begin{cases} \frac{n_0(a-t)}{N_0} \Pi(a-t, a) & \text{si } a \geq t, \\ B(t-a)\Pi(a, 0) & \text{si } a < t, \end{cases} \quad (\text{A.4.16})$$

$\Pi$  étant défini en (A.4.5) et  $B$  étant la solution de (A.4.10) donnée en (A.4.13).

La solution  $B(t)$  de l'équation (A.4.10) est la quantité de naissances qui ont lieu au temps  $t \in \mathbb{R}_+$ . Le premier terme correspond aux naissances venant d'individus nés après  $t = 0$ , tandis que le second terme décrit les naissances venant d'individus présents à  $t = 0$ .

*Preuve de la Proposition A.4.1.* Nous commençons par prouver le Point (i), en nous appuyant sur les travaux de Feller [46] (Chapitre XI) et Athreya et Ney [4] (Chapitre IV.4).

Première étape :

Nous allons tout d'abord montrer que la fonction  $U$  définie en (A.4.14) est bien définie. Notons que par (A.4.6) et (A.4.12),  $g/R_0$  est une densité de probabilité. Soient  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi de densité  $g/R_0$  par rapport à

la mesure de Lebesgue. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t g^{*n}(s)ds &= R_0^n \int_0^t \left(\frac{g}{R_0}\right)^{*n}(s)ds = R_0^n \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i \leq t\right) \\
&= R_0^n \mathbb{P}\left(e^{-c(Y_1+\dots+Y_n)} \geq e^{-ct}\right), \text{ pour une constante positive } c, \\
&\leq R_0^n e^{ct} \mathbb{E}\left(e^{-c(Y_1+\dots+Y_n)}\right) = e^{ct} [\mathbb{E}(R_0 e^{-cY_1})]^n, \text{ par indépendance} \\
&= e^{ct} \left[\int_0^{+\infty} e^{-ca} g(a) da\right]^n. \tag{A.4.17}
\end{aligned}$$

Soit :

$$F : c \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-ca} g(a) da \in \mathbb{R}_+$$

L'intégrant du membre de droite est continu en  $c \in \mathbb{R}_+$ , converge simplement vers  $g(0)\mathbf{1}_{a=0}$  lorsque  $c \rightarrow +\infty$  et est dominé par  $g$ , qui est une fonction intégrable d'intégrale  $R_0 < +\infty$ . On en déduit que  $F$  est une application bien définie, continue, avec  $F(0) = R_0$  et  $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = 0$ . Donc  $\exists c_0 \in \mathbb{R}_+$ , (indépendant de  $n$ ),  $\forall c > c_0$ ,  $F(c) < 1$ . Soit  $c > c_0$ ,  $\forall t \geq 0$  :

$$\int_0^t U(s)ds \leq e^{ct} \sum_{n=0}^{+\infty} (F(c))^n = \frac{e^{ct}}{1 - F(c)} < +\infty. \tag{A.4.18}$$

Ceci implique que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} g^{*n}(t)$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+$  sauf éventuellement sur un ensemble de mesure Lebesgue-nulle.

Deuxième étape :

La fonction  $B$  introduite en (A.4.13) est bien définie pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , car  $B_0$  étant bornée par  $\bar{b}$ , on a par (A.4.18) :

$$0 \leq B(t) = B_0 * U(t) = \int_0^t B_0(t-s)U(s)ds \leq \bar{b} \int_0^t U(s)ds < +\infty.$$

Montrons que  $B$  est solution de (A.4.10). Posons

$$A(t) = B_0(t) + \int_0^t B_0 * U(t-a)g(a)da. \tag{A.4.19}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
A(t) &= B_0(t) + \int_0^t \int_0^{t-a} B_0(t-a-\alpha)U(\alpha)d\alpha g(a)da \\
&= B_0(t) + \int_0^t \int_0^{t-a} B_0(u)U(t-a-u)du g(a)da.
\end{aligned}$$

L'intégrant étant positif et mesurable, nous avons par le Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
A(t) &= B_0(t) + \int_0^t \int_0^{t-u} B_0(u)U(t-u-a)g(a)da du \\
&= B_0(t) + \int_0^t B_0(u)(U * g)(t-u)du = B_0(t) + B_0 * (U * g)(t) = B_0 * U(t), \tag{A.4.20}
\end{aligned}$$

par définition de  $U$  (A.4.14). Par (A.4.19) et (A.4.20),  $B$  est solution de (A.4.10).

Troisième étape :

Montrons que cette solution est unique. Soient  $B^1$  et  $B^2$  deux solutions bornées sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$ . Nous avons :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \Delta B(t) &:= |B^1(t) - B^2(t)| \leq \int_0^t |B^1(t-a) - B^2(t-a)| g(a) da = \Delta B * g(t) \\ &\leq \Delta B * g^{*n}(t), \text{ par itération, pour } n \in \mathbb{N}^* \\ &= \int_0^t \Delta B(t-u) g^{*n}(u) du \leq (\|B^1\|_\infty + \|B^2\|_\infty) \int_0^t g^{*n}(u) du. \end{aligned} \tag{A.4.21}$$

Par (A.4.17) et avec un choix de  $c$  comme en (A.4.18),  $\forall s \in [0, t]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^s g^{*n}(u) du = 0$ . Nous avons donc  $\forall s \in [0, t]$ ,  $\Delta B(s) = 0$ .  $t$  étant arbitraire, l'unicité est prouvée.

Nous considérons maintenant le Point (ii). La preuve suit les arguments de la Section 5.4 de Webb [124].

L'existence et l'unicité d'une solution faible fonction est un cas particulier du Corollaire 3.2.4 et de la Proposition 3.2.6. Il y a donc au plus une solution classique de (A.4.1)-(A.4.4) dans  $\mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . Nous allons exhiber, en reprenant les calculs de [15, 56, 82, 124], une solution du système (A.4.1)-(A.4.4), qui est donc l'unique solution de ce système. L'idée est d'étudier une équation aux dérivées partielles auxiliaire linéaire obtenue à partir de (A.4.1)-(A.4.4) par changement de variable.

Première étape :

Nous commençons par établir une équation non fermée pour la norme  $L^1$  de la solution de (A.4.1)-(A.4.4). Cette équation sera utile dans la suite.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_t &= \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} n(a, t) da = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} n(a, t) da \\ &= \int_0^{+\infty} \left( -\frac{\partial}{\partial a} n(a, t) - d(a)n(a, t) - \eta N_t n(a, t) \right) da \\ &= -[n(a, t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} d(a)n(a, t) da - \eta N_t^2 \\ &= \int_0^{+\infty} (b(a) - d(a)) n(a, t) da - \eta N_t^2, \end{aligned} \tag{A.4.22}$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant (A.4.2).

Deuxième étape :

Nous renormalisons les solutions de (A.4.1)-(A.4.4) par rapport à  $N_t$ . Pour  $t \in \mathbb{R}_+$ , nous définissons :

$$w(a, t) = \frac{n(a, t)}{N_t}. \tag{A.4.23}$$

Si  $N_t = 0$ , nous avons nécessairement  $\forall a \geq 0$ ,  $n(a, t) = 0$ , par continuité puisque nous cherchons une solution classique, et par la convention  $0/0 := 0$ ,  $w(a, t) = 0$ . La fonction auxiliaire  $w(a, t)$

satisfait les équations suivantes :  $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial w}{\partial a}(a, t) &= \frac{1}{N_t} \left( \frac{\partial n}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial n}{\partial a}(a, t) \right) - \frac{n(a, t)}{N_t^2} \frac{d}{dt} N_t \\ &= - (d(a) + \eta N_t) w(a, t) - w(a, t) \left( \int_0^{+\infty} (b(\alpha) - d(\alpha)) w(\alpha, t) d\alpha - \eta N_t \right) \\ &= - \left( d(a) + \int_0^{+\infty} (b(\alpha) - d(\alpha)) w(\alpha, t) d\alpha \right) w(a, t) \end{aligned} \quad (\text{A.4.24})$$

$$w(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a) w(a, t) da \quad (\text{A.4.25})$$

$$w(a, 0) = \frac{n_0(a)}{N_0} \quad (\text{A.4.26})$$

$$\int_0^{+\infty} w(a, t) da = 1. \quad (\text{A.4.27})$$

Troisième étape :

Nous définissons maintenant une seconde fonction auxiliaire  $v(a, t)$ , obtenue en renormalisant  $w(a, t)$  par le *taux de croissance naturel*  $k(t)$  défini par :

$$k(t) = - \int_0^{+\infty} (b(a) - d(a)) w(a, t) da \quad (\text{A.4.28})$$

$$v(a, t) = \exp \left( - \int_0^t k(s) ds \right) w(a, t). \quad (\text{A.4.29})$$

Remarquons que par (A.4.27) :

$$\int_{\mathbb{R}_+} v(a, t) da = \exp \left( - \int_0^t k(s) ds \right).$$

Les équations satisfaites par cette seconde fonction auxiliaire sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial v}{\partial a}(a, t) &= \exp \left( - \int_0^t k(s) ds \right) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial w}{\partial a}(a, t) \right) - k(t) v(a, t) \\ &= - \left( d(a) + \int_0^{+\infty} (b(\alpha) - d(\alpha)) w(\alpha, t) d\alpha + k(t) \right) v(a, t) = -d(a) v(a, t) \end{aligned} \quad (\text{A.4.30})$$

$$v(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a) v(a, t) da \quad (\text{A.4.31})$$

$$v(a, 0) = \frac{n_0(a)}{N_0}. \quad (\text{A.4.32})$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires. Nous allons montrer à l'Étape 4 que son unique solution est donnée par (A.4.16).

Quatrième étape : Résolution du système (A.4.30)-(A.4.32).

Nous avons une équation de transport, avec un terme de source pour décrire le phénomène de naissances. Nous introduisons la *fonction de cohorte* liée aux *courbes caractéristiques* de (A.4.30)-(A.4.32). Soit  $c \in \mathbb{R}$ .  $\forall t \geq t_c = \max(0, -c)$ ,

$$\ell_c(t) = v(t + c, t), \quad (\text{A.4.33})$$

où  $v$  est la solution de (A.4.30)-(A.4.32). Pour  $c \geq 0$ ,  $\ell_c$  décrit l'évolution au cours du temps des individus d'âge  $c$  à  $t = 0$ , et pour  $c < 0$ ,  $\ell_c$  décrit l'évolution au cours du temps des individus nés à  $-c > 0$ . La fonction auxiliaire  $\ell_c$  satisfait l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\ell_c = -d(t+c)\ell_c(t). \quad (\text{A.4.34})$$

Cette équation différentielle du premier ordre se résout en :  $\forall t \geq t_c$ ,

$$\ell_c(t) = \ell_c(t_c) \exp\left(-\int_{t_c}^t d(s+c)ds\right). \quad (\text{A.4.35})$$

En posant  $c = a - t$ , on obtient (A.4.16) pour  $a \geq t$  et pour  $a < t$  :

$$v(a, t) = v(0, t - a)\Pi(0, a). \quad (\text{A.4.36})$$

Il nous reste donc à caractériser la fonction  $B : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto v(0, t) \in \mathbb{R}_+$ . En remplaçant (A.4.16) et (A.4.36) dans (A.4.31), on obtient l'équation de renouvellement suivante :

$$B(t) = \int_0^t b(t-a)\Pi(0, t-a)B(a)da + \int_0^{+\infty} b(a+t)\frac{n_0(a)}{N_0}\Pi(a, a+t)da, \quad (\text{A.4.37})$$

qui n'est autre que l'équation (A.4.10) étudiée au Point (i).

Cinquième étape :

Une fois que nous avons résolu (A.4.30)-(A.4.32), nous souhaitons remonter aux solutions des équations (A.4.1)-(A.4.4). Nous avons :

$$n(a, t) = N_t \exp\left(\int_0^t k(s)ds\right)v(a, t) = \frac{N_t v(a, t)}{\int_0^{+\infty} v(a, t)da}, \quad (\text{A.4.38})$$

par (A.4.27) et (A.4.29).  $N_t$ , qui est la seule inconnue restante, satisfait par (A.4.22) et (A.4.23) :

$$\frac{d}{dt}N_t = -k(t)N_t - \eta N_t^2. \quad (\text{A.4.39})$$

Cette équation est une équation de Bernoulli qui peut se résoudre explicitement (cf. [127]) :

$$N_t = \frac{N_0 \exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right)}{1 + N_0 \eta \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r)dr\right) ds}. \quad (\text{A.4.40})$$

Par (A.4.38) et (A.4.40) :

$$n(a, t) = \frac{N_0 v(a, t)}{1 + N_0 \eta \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r)dr\right) ds} = \frac{N_0 v(a, t)}{1 + N_0 \eta \int_0^t \int_0^{+\infty} v(\alpha, s)d\alpha ds}, \quad (\text{A.4.41})$$

où la dernière égalité est due à (A.4.27) et (A.4.29). La Proposition est prouvée.  $\blacksquare$

## A.4.2 Caractérisation des solutions stationnaires de (A.4.1, A.4.2, A.4.4)

Nous étudions l'existence d'une solution stationnaire non triviale du système (A.4.1)-(A.4.4). La convergence de la solution de (A.4.1)-(A.4.4) issue de  $n_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  sera étudiée à la Section A.4.3. Les problèmes de stabilité des solutions stationnaires non triviales seront étudiés à la Section A.4.4.



**Proposition A.4.2.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que (A.4.1)-(A.4.4) admette une solution stationnaire non triviale est que l'équation suivante d'inconnue  $\widehat{N} \in \mathbb{R}_+$  admette une solution non nulle :*

$$1 = \int_0^{+\infty} b(a) e^{-\int_0^a d(\alpha) d\alpha - \eta \widehat{N} a} da. \quad (\text{A.4.42})$$

*Cette équation est appelée Equation caractéristique. Dans le cas où elle admet une solution (qui est alors unique), l'unique solution stationnaire non triviale de (A.4.1)-(A.4.4) est :*

$$\widehat{n}(a) = \frac{\widehat{N} \exp\left(-\int_0^a (d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha\right)}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^a (d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha\right) da}. \quad (\text{A.4.43})$$

*Démonstration.* Les solutions stationnaires  $\widehat{n} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  de (A.4.1)-(A.4.4) satisfont :

$$\frac{d\widehat{n}}{da}(a) = -\left(d(a) + \eta \widehat{N}\right) \widehat{n}(a) \quad (\text{A.4.44})$$

$$\widehat{n}(0) = \int_0^{+\infty} b(a) \widehat{n}(a) da \quad (\text{A.4.45})$$

$$\widehat{N} = \int_0^{+\infty} \widehat{n}(a) da. \quad (\text{A.4.46})$$

La solution de (A.4.44) a la forme suivante :  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\widehat{n}(a) = \widehat{n}(0) \exp\left(-\int_0^a (d(\alpha) + \eta(\widehat{N})) d\alpha\right). \quad (\text{A.4.47})$$

Si  $\widehat{n}(0) = 0$ , on trouve la solution nulle. Supposons que  $\widehat{n}(0) \neq 0$ . En remplaçant (A.4.47) dans (A.4.45) et (A.4.46), on trouve :

$$1 = \int_0^{+\infty} b(a) \exp\left(-\int_0^a (d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha\right) da,$$

$$\widehat{N} = \widehat{n}(0) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^a (d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha\right) da.$$

Une condition nécessaire pour que les équations (A.4.44)-(A.4.46) admettent une solution est que l'équation (A.4.42) d'inconnue  $\widehat{N}$  admette une solution non nulle. Cette condition est également suffisante. Si elle est satisfaite, alors (A.4.43) est l'unique solution de (A.4.44)-(A.4.46). ■

### A.4.3 Convergence vers une solution stationnaire

Nous nous intéressons dans cette partie à la convergence de  $n(a, t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . On sépare classiquement l'étude de la solution de (A.4.1)-(A.4.4) (cf. [124], Section 5.4) et de la solution de (A.4.10) (cf. [4] Chapitre IV) en plusieurs parties, suivant la valeur de  $R_0$ .

**Lemme A.4.3. Paramètre de Malthus :** *Supposons  $R_0 \geq 1$ . Il existe une unique solution  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  à l'équation :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} b(a) \Pi(0, a) da = 1, \quad (\text{A.4.48})$$

*que l'on appelle paramètre de Malthus. ( $\Pi$  étant défini en (A.4.5)).*

*Si  $R_0 = 1$ , alors  $\lambda_1 = 0$ , et si  $R_0 > 1$ ,  $\lambda_1 > 0$ .* □

**Remarque A.4.4.** Lorsque  $b$  et  $d$  ne dépendent pas de l'âge, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} b e^{-da} da = b \left[ -\frac{e^{-(\lambda_1+d)a}}{\lambda_1 + d} \right]_0^{+\infty} = \frac{b}{\lambda_1 + d}. \quad (\text{A.4.49})$$

Alors (A.4.48) se résout en :  $\lambda_1 = b - d$ , qui est le paramètre de Malthus classique (cf. Athreya et Ney [4], Chapitre III).

*Preuve du Lemme A.4.3.* Considérons la fonction :

$$F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda a} b(a) \Pi(0, a) da$$

L'intégrand est continu en  $\lambda$ , converge simplement vers  $b(0)\mathbf{1}_{a=0}$  lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , et est dominé par  $b(a)\Pi(0, a)$  intégrable d'intégrale  $R_0$ . On en déduit que  $F$  est continue et que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0.$$

Comme  $R_0 = F(0) \geq 1$ , il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires et par stricte décroissance de  $F$ , une unique solution à l'équation  $F(\lambda) = 1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . ■

#### A.4.3.1 Cas où $R_0 = 1$

Nous allons étudier le comportement asymptotique de la solution  $v$  des équations linéaires (A.4.30)-(A.4.32). Par (A.4.16), il nous suffit d'étudier le comportement asymptotique de  $B$ .

**Proposition A.4.5.** Dans le cas  $R_0 = 1$ , nous avons, avec  $\mu$  défini en (A.4.7)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} B_0(t) dt, \quad (\text{A.4.50})$$

où  $B_0$  est défini en (A.4.11).

*Démonstration.* Ce résultat est une application d'un résultat de Feller [46] (Théorème 2 Chapitre XI.1 page 349), qui s'applique si  $B_0$  est *directement Riemann intégrable*, c'est-à-dire si :

- les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} h \bar{m}_n(h)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} h \underline{m}_n(h)$  sont absolument convergentes pour  $h > 0$  suffisamment petit, avec :

$$\bar{m}_n(h) = \sup_{nh \leq t < (n+1)h} B_0(t), \quad \underline{m}_n(h) = \inf_{nh \leq t < (n+1)h} B_0(t).$$

- $\lim_{h \rightarrow 0} h (\sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{m}_n(h) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \underline{m}_n(h)) = 0$ .

Une condition suffisante pour que  $B_0$  soit directement Riemann intégrable est que cette fonction soit positive, bornée, continue, et telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \bar{m}_n(1) < +\infty$  (cf. Athreya et Ney [4], page 146). Montrons que cette condition suffisante est satisfaite :

- par définition,  $B_0$  est positive,
- $B_0$  est bornée :

$$|B_0(t)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\bar{b}}{N_0} n_0(a) da = \bar{b}. \quad (\text{A.4.51})$$

- l'intégrand dans (A.4.11) est une fonction continue de  $t$ , dominée par  $a \mapsto \bar{b} n_0(a)/N_0$  intégrable. On en déduit que  $B_0$  est continue.

– On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{m}_n(1) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{\bar{b}}{N_0} \int_0^{+\infty} n_0(a) \exp\left(-\int_a^{a+n} d(\alpha) d\alpha\right) da \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{b}e^{-dn}}{N_0} \int_0^{+\infty} n_0(a) da = \frac{\bar{b}}{1-e^{-d}} < +\infty. \end{aligned} \quad (\text{A.4.52})$$

Ainsi le théorème de Feller s'applique et nous obtenons le résultat annoncé.  $\blacksquare$

**Corollaire A.4.6.** *Dans le cas  $R_0 = 1$  :*

(i) On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(a, t) = \frac{\Pi(0, a) \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} b(\alpha) n_0(u) \Pi(u, \alpha) d\alpha du}{N_0 \int_0^{+\infty} ub(u) \Pi(0, u) du} \quad (\text{A.4.53})$$

uniformément en âge sur les intervalles bornés de  $\mathbb{R}_+$ .

(ii) On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(a, t) = 0, \quad (\text{A.4.54})$$

uniformément en âge sur les intervalles bornés de  $\mathbb{R}_+$ .

*Démonstration.* Le Point (i) est l'application de (A.4.16) et de la Proposition A.4.5. Montrons maintenant le Point (ii). Par (A.4.40) :

$$0 \leq N_t = \frac{\left[ \exp\left(-\int_0^t k(s) ds\right) / \left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r) dr\right) ds\right) \right]}{1 / \left(N_0 \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r) dr\right) ds\right) + \eta} \leq \frac{1}{\eta} \frac{\exp\left(-\int_0^t k(s) ds\right)}{\int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r) dr\right) ds}. \quad (\text{A.4.55})$$

En remarquant que :

$$\frac{\exp\left(-\int_0^t k(s) ds\right)}{\int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r) dr\right) ds} = \frac{d}{dt} \left( \log \exp\left(-\int_0^t k(s) ds\right) \right) = -\frac{d}{dt} \left( \int_0^t k(s) ds \right) = -k(t), \quad (\text{A.4.56})$$

il nous suffit, pour conclure, de montrer que  $k(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Par (A.4.28) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (d(a) - b(a)) w(a, t) da. \quad (\text{A.4.57})$$

Par (A.4.27), (A.4.29), (A.4.53) :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} w(a, t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( v(a, t) \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{v(a, t)}{\int_0^{+\infty} v(\alpha, t) d\alpha} \right) = \frac{\Pi(0, a)}{\int_0^{+\infty} \Pi(0, \alpha) d\alpha} \end{aligned}$$

uniformément en  $a$  sur les intervalles bornés. Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(a, t)$  est intégrable en  $a$  et que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall t \geq t_0, \int_A^{+\infty} v(a, t) da \leq \varepsilon,$$

alors on peut passer à la limite sous le signe somme dans :

$$\int_0^{+\infty} (d(a) - b(a)) v(a, t) da \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} v(a, t) da. \quad (\text{A.4.58})$$

On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \frac{\int_0^{+\infty} d(a) \Pi(0, a) da}{\int_0^{+\infty} \Pi(0, \alpha) d\alpha} - \frac{\int_0^{+\infty} b(a) \Pi(0, a) da}{\int_0^{+\infty} \Pi(0, \alpha) d\alpha} = 0, \quad (\text{A.4.59})$$

car  $d(a) \Pi(0, a) = -\frac{d}{da} \Pi(0, a)$ , et  $\int_0^{+\infty} b(a) \Pi(0, a) da = R_0 = 1$ . On déduit de (A.4.55), (A.4.56) et (A.4.59) que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t = 0$ , ce qui conclut la preuve du Point (ii).  $\blacksquare$

#### A.4.3.2 Cas où $R_0 > 1$

Dans le cas  $R_0 > 1$ , il existe par le Lemme A.4.3 une unique solution à (A.4.48) sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

**Proposition A.4.7.** *Supposons que  $R_0 > 1$ . Alors :*

(i) On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_1 t} v(a, t) = \frac{e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a) \left( \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} b(u + \alpha) n_0(u) \Pi(u, u + \alpha) du d\alpha \right)}{N_0 \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\lambda_1 \alpha} b(\alpha) \Pi(0, \alpha) d\alpha}, \quad (\text{A.4.60})$$

uniformément en âge sur les intervalles bornés.

(ii) On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(a, t) = \frac{K e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \Pi(0, \alpha) d\alpha} =: \hat{n}(a). \quad (\text{A.4.61})$$

uniformément en âge sur les intervalles bornés de  $\mathbb{R}_+$ , où

$$K := \frac{\lambda_1}{\eta} = \int_0^{+\infty} \hat{n}(a) da \quad (\text{A.4.62})$$

est appelé capacité de charge environnementale.

*Démonstration.* Pour prouver (i), nous allons montrer que nous pouvons nous ramener au cas  $R_0 = 1$ . En définissant :

$$B_{\lambda_1}(t) := e^{-\lambda_1 t} B(t) \quad \text{et} \quad B_{0, \lambda_1}(t) := e^{-\lambda_1 t} B_0(t), \quad (\text{A.4.63})$$

l'équation (A.4.10) multipliée par  $e^{-\lambda_1 t}$  se réécrit :

$$\begin{aligned} B_{\lambda_1}(t) &= B_{0, \lambda_1}(t) + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\alpha)} B(t-\alpha) e^{-\lambda_1 \alpha} b(\alpha) \Pi(0, \alpha) d\alpha \\ &= B_{0, \lambda_1}(t) + \int_0^t B_{\lambda_1}(t-\alpha) e^{-\lambda_1 \alpha} b(\alpha) \Pi(0, \alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.4.64})$$

où par définition de  $\lambda_1$  (A.4.48) :  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} b(\alpha) \Pi(0, \alpha) d\alpha = 1$ . On peut alors appliquer le résultat de la Proposition A.4.5 à  $B_{\lambda_1}$ , ce qui nous donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_1 t} B(t) = \frac{\int_0^{+\infty} B_0(\alpha) e^{-\lambda_1 \alpha} d\alpha}{\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\lambda_1 \alpha} b(\alpha) \Pi(0, \alpha) d\alpha},$$

d'où l'on déduit (A.4.60) par (A.4.16).

Considérons maintenant le Point (ii). Nous allons utiliser la relation (A.4.23) et obtenir la limite de  $n(a, t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  en établissant la limite de  $N_t$  d'une part et celle de  $w(a, t)$  d'autre part.

Pour établir la limite de  $w(a, t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , remarquons que par (A.4.27) et (A.4.60) :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right) e^{-\lambda_1 t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right) e^{-\lambda_1 t} w(a, t) da \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} v(a, t) e^{-\lambda_1 t} da \\ &= \frac{\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a) da\right) \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} b(u + \alpha) n_0(u) \Pi(u, u + \alpha) du d\alpha\right)}{N_0 \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\lambda_1 \alpha} b(\alpha) \Pi(0, \alpha) d\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.65})$$

Pour obtenir la dernière égalité, on remarque que l'on peut passer à la limite sous le signe somme, grâce à la convergence uniforme sur les intervalles bornés obtenue en (A.4.60), au fait que la limite dans (A.4.60) est intégrable et que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall t \geq t_0, \int_A^{+\infty} e^{-\lambda_1 t} v(a, t) da \leq \varepsilon.$$

Par (A.4.29) :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} w(a, t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e^{-\lambda_1 t} v(a, t) \right) \times \left( e^{\lambda_1 t} \exp\left(\int_0^t k(s)ds\right) \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \Pi(0, \alpha) d\alpha} =: w_\infty(a), \end{aligned} \quad (\text{A.4.66})$$

uniformément en âge sur les intervalles bornés.

Pour la limite de  $N_t$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , nous allons utiliser l'expression (A.4.40). Nous avons :

$$N_t = \left[ \frac{1}{N_0 \exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right)} + \eta \frac{\int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(r)dr\right) ds}{\exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right)} \right]^{-1}. \quad (\text{A.4.67})$$

Nous allons établir la limite des deux termes apparaissant au dénominateur.

Comme  $\lambda_1 > 0$ , (A.4.65) implique nécessairement :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right) = +\infty. \quad (\text{A.4.68})$$

Le premier terme du dénominateur de (A.4.67) converge donc vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Par (A.4.56), la limite du second terme du dénominateur de (A.4.67) peut se ramener au calcul de la limite de  $k(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Par (A.4.28) et (A.4.66), par la convergence étant uniforme en âge sur les intervalles bornés, par le fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_0^{+\infty} w(a, t) da = 1$  et que  $\int_0^{+\infty} w_\infty(a) da = 1$  :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) &= \int_0^{+\infty} (d(a) - b(a)) w_\infty(a) da \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_1 a} d(a) \Pi(0, a)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \Pi(0, \alpha) d\alpha} da - \int_0^{+\infty} b(a) w_\infty(a) da. \end{aligned} \quad (\text{A.4.69})$$

Comme  $d(a)\Pi(0, a) = -\frac{d}{da}\Pi(0, a)$ , nous avons par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} d(a)\Pi(0, a)e^{-\lambda_1 a} da &= \left[-\Pi(0, a)e^{-\lambda_1 a}\right]_0^{+\infty} - \lambda_1 \int_0^{+\infty} \Pi(0, a)e^{-\lambda_1 a} da \\ &= 1 - \lambda_1 \int_0^{+\infty} \Pi(0, a)e^{-\lambda_1 a} da.\end{aligned}\quad (\text{A.4.70})$$

Par (A.4.48) :

$$\int_0^{+\infty} b(a)w_\infty(a)da = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} b(a)\Pi(0, a) da}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a) da} = \frac{1}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a) da} \quad (\text{A.4.71})$$

En remplaçant (7.4.17) et (A.4.71) dans (A.4.69), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = -\lambda_1. \quad (\text{A.4.72})$$

Nous déduisons donc de (A.4.67), (A.4.68), (A.4.56) et (A.4.72) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t = \frac{1}{\eta/\lambda_1} = K. \quad (\text{A.4.73})$$

En réunissant (A.4.66) et (A.4.73) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(a, t) = \frac{Ke^{-\lambda_1 a} \Pi(0, a)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \Pi(0, \alpha) d\alpha}.$$

■

### A.4.3.3 Cas où $R_0 < 1$

**Proposition A.4.8.** *Si  $R_0 < 1$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} n(a, t) = 0$ .* □

*Démonstration.* Par la Proposition A.4.10, la seule solution stationnaire est la solution triviale. Nous avons :

$$\|g\|_\infty < \bar{b}, \quad \|g^{*2}\|_\infty \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^t g(t-s)g(s)ds \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}_+} g(s)ds \leq \bar{b}R_0, \quad \text{et} \quad \|g^{*n}\|_\infty \leq \bar{b}R_0^n$$

par réitération pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit :

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g^{*n} \right\|_\infty \leq \frac{\bar{b}}{1 - R_0}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) B_0(t-s) U(s) ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) B_0(s) U(t-s) ds \\ &\leq \bar{b} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) B_0(s) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g^{*n}(t-s) ds.\end{aligned}$$

L'intégrand est borné par  $\bar{b}e^{-ds}/(1 - R_0)$  intégrable et converge simplement vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . On en déduit par convergence dominée que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0$ . Par (A.4.36),  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(a, t) = 0$ , et par (A.4.41),  $\lim_{t \rightarrow +\infty} n(a, t) = 0$ . ■

#### A.4.4 Stabilité des équilibres

Pour les applications du Chapitre 6, il est important de savoir si les équilibres exhibés à la Section A.4.3 sont stables, et si oui, de connaître la vitesse de convergence vers ces équilibres.

**Définition A.4.9.** Une solution stationnaire  $\hat{n}$  des équations (A.4.1)-(A.4.4) est dite asymptotiquement exponentiellement stable si et seulement si  $\exists \delta, \lambda, C > 0, \forall n_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  tel que  $\|n_0 - \hat{n}\|_1 < \delta, \forall t \in \mathbb{R}_+, \|n(\cdot, t) - \hat{n}\|_1 < Ce^{-\lambda t} \|n_0 - \hat{n}\|_1$ .

**Proposition A.4.10.** Dans le cas  $R_0 > 1$ , l'équilibre non trivial déterminé à la Proposition A.4.7 est asymptotiquement exponentiellement stable.

Pour démontrer A.4.10, nous suivons la démarche de [124]. Nous considérons l'opérateur linéaire associé à la linéarisation des équations (A.4.1)-(A.4.4) autour de  $\hat{n}$  et nous étudions son spectre. L'opérateur linéaire  $\hat{B}$  à considérer est donné par le domaine :

$$D(\hat{B}) = \left\{ m \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \mid m(0) = \int_0^{+\infty} b(a)m(a)da \right\}$$

et par :  $\forall m \in D(\hat{B}), \forall a \in \mathbb{R}_+,$

$$\hat{B}m(a) = -\nabla_a m(a) - \left( d(a) + \eta \hat{N} \right) m(a) - \eta \int_0^{+\infty} m(\alpha) d\alpha \hat{n}(a). \quad (\text{A.4.74})$$

On définit :

$$\begin{aligned} \rho(\hat{B}) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda \text{Id} - \hat{B})^{-1} \text{ existe, est défini partout, est un opérateur linéaire borné sur } L^1 \right\} \\ \sigma(\hat{B}) &= \rho(\hat{B})^c \\ P\sigma(\hat{B}) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \exists m \in L^1 \setminus \{0\}, \hat{B}m = \lambda m \right\} \\ E\sigma(\hat{B}) &= \left\{ \lambda \in \sigma(\hat{B}) \text{ tel qu'au moins une des assertions suivantes soit satisfaite :} \right. \\ &\quad (i) \text{ Im}(\lambda \text{Id} - \hat{B}) \text{ n'est pas fermé} \\ &\quad (ii) \lambda \text{ est un point d'accumulation de } \sigma(\hat{B}) \\ &\quad \left. (iii) N_\lambda(\hat{B}) \text{ est un ev de dimension finie} \right\}, \end{aligned}$$

où  $N_\lambda(\hat{B})$  est le plus petit sous espace fermé de  $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  contenant  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} \text{Ker}((\lambda \text{Id} - \hat{B})^k)$ . L'espace  $\rho(\hat{B})$  est l'espace résolvant de  $\hat{B}$ ,  $\sigma(\hat{B})$  est appelé spectre de  $\hat{B}$ , et  $P\sigma(\hat{B})$  est le spectre ponctuel de  $\hat{B}$ . Les éléments de  $P\sigma(\hat{B})$  sont appelés valeurs propres de l'opérateur  $\hat{B}$  et les éléments  $m \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  tels que  $\hat{B}m = \lambda m$  sont les vecteurs propres associés. L'espace  $E\sigma(\hat{B})$  est le spectre essentiel de  $\hat{B}$ .

Par le Théorème 4.12 page 207 de Webb [124] :

**Proposition A.4.11.** On a :

- si  $\sup_{\lambda \in \sigma(\hat{B}) \setminus E\sigma(\hat{B})} \text{Re} \lambda < 0$ , alors  $\hat{n}$  est une solution localement asymptotiquement exponentiellement stable de (A.4.1)-(A.4.4),
- s'il existe  $\lambda_0 \in \sigma(\hat{B})$  tel que  $\text{Re}(\lambda_0) > 0$  et

$$\sup_{\substack{\lambda \in \sigma(\hat{B}) \setminus E\sigma(\hat{B}) \\ \lambda \neq \lambda_0}} \text{Re} \lambda < \text{Re}(\lambda_0),$$

alors  $\hat{n}$  est un équilibre instable de (A.4.1)-(A.4.4).

Par la Proposition 4.11 page 166 de [124] :

$$\left[ \lambda \in \sigma(\widehat{B}) \setminus E\sigma(\widehat{B}) \right] \Rightarrow \left[ \lambda \in P\sigma(\widehat{B}) \right]. \quad (\text{A.4.75})$$

Nous commençons par déterminer le spectre ponctuel  $P\sigma(\widehat{B})$ . En utilisant le théorème de Webb [124] (Proposition A.4.11), nous en déduirons des résultats concernant la stabilité de l'équilibre non trivial exhibé à la Proposition A.4.7.

*Preuve de la Proposition A.4.10.* Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $m \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$  tels que  $\widehat{B}m = \lambda m$ . Cette équation se résout en :

$$\begin{aligned} m(a) = & m(0) \exp \left( - \int_0^a (\lambda + d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha \right) \\ & - \int_0^a \left[ \exp \left( - \int_\alpha^a (\lambda + d(u) + \eta \widehat{N}) du \right) \eta \int_0^{+\infty} m(u) du \widehat{n}(\alpha) \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.4.76})$$

On peut en effet vérifier que :

$$\begin{aligned} \nabla_a m(a) = & - \left( \lambda + d(a) + \eta \widehat{N} \right) m(0) \exp \left( - \int_0^a (\lambda + d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha \right) - \eta \int_0^{+\infty} m(u) du \widehat{n}(a) \\ & + \int_0^a \left[ (\lambda + d(a) + \eta \widehat{N}) \exp \left( - \int_\alpha^a (\lambda + d(u) + \eta \widehat{N}) du \right) \eta \int_0^{+\infty} m(u) du \widehat{n}(\alpha) \right] d\alpha \\ = & \left( \lambda + d(a) + \eta \widehat{N} \right) m(a) + \eta \int_0^{+\infty} m(u) du \widehat{n}(a). \end{aligned}$$

**Cas  $\lambda = 0$  :** Dans ce cas :

$$\begin{aligned} m(a) = & m(0) \exp \left( - \int_0^a (d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha \right) \\ & - \eta \int_0^{+\infty} m(u) du \int_0^a \exp \left( - \int_\alpha^a (d(u) + \eta \widehat{N}) du \right) \widehat{n}(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

et la condition au bord (A.4.74) implique que :

$$\begin{aligned} m(0) = & m(0) \int_0^{+\infty} b(a) \exp \left( - \int_0^a (d(\alpha) + \eta \widehat{N}) d\alpha \right) da \\ & - m(0) \eta \left( \int_0^{+\infty} m(u) du \right) \int_0^{+\infty} \left[ b(a) \int_0^a \exp \left( - \int_\alpha^a (d(u) + \eta \widehat{N}) du \right) \widehat{n}(\alpha) d\alpha \right] da. \end{aligned}$$

Par (A.4.42) et comme  $m$  n'est pas la fonction nulle :

$$0 = \int_0^{+\infty} \left[ b(a) \int_0^a \exp \left( - \int_\alpha^a (d(u) + \eta \widehat{N}) du \right) \widehat{n}(\alpha) d\alpha \right] da,$$

ce qui est impossible, car le membre de droite est strictement positif. 0 n'est donc pas valeur propre de  $\widehat{B}$ .



Cas  $\lambda \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
m(a) &= m(0)e^{-(\lambda+\eta\widehat{N})a} \exp\left(-\int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \\
&\quad - \eta \int_0^{+\infty} m(u)du \int_0^a \left[ e^{-(\lambda+\eta\widehat{N})(a-\alpha)} e^{-\int_\alpha^a d(u)du} \widehat{n}(0) e^{-\int_0^\alpha (d(u)+\eta\widehat{N})du} \right] d\alpha \\
&= \exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \left[ m(0)e^{-\lambda a} - \eta\widehat{n}(0) \int_0^{+\infty} m(u)du \int_0^a e^{-\lambda(a-\alpha)} d\alpha \right] \\
&= \exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \left[ m(0)e^{-\lambda a} - \frac{\eta\widehat{n}(0)}{\lambda} \int_0^{+\infty} m(u)du (1 - e^{-\lambda a}) \right]. \quad (\text{A.4.77})
\end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans la condition au bord  $m(0) = \int_0^{+\infty} b(a)m(a)da$ , on obtient :

$$0 = \int_0^{+\infty} \left\{ b(a) \exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) (1 - e^{-\lambda a}) \left[ m(0) + \frac{\eta\widehat{n}(0)}{\lambda} \int_0^{+\infty} m(u)du \right] \right\} da, \quad (\text{A.4.78})$$

donc nécessairement :

$$m(0) = -\frac{\eta\widehat{n}(0)}{\lambda} \int_0^{+\infty} m(u)du. \quad (\text{A.4.79})$$

Alors (A.4.77) devient :

$$m(a) = -\exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \frac{\eta\widehat{n}(0)}{\lambda} \int_0^{+\infty} m(u)du, \quad (\text{A.4.80})$$

et par intégration :

$$\int_0^{+\infty} m(a)da \left( 1 + \frac{\eta\widehat{n}(0)}{\lambda} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \right\} da \right) = 0. \quad (\text{A.4.81})$$

Si  $\int_0^{+\infty} m(a)da = 0$ , alors  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,  $m(a) = 0$  par (A.4.80). Ceci est impossible car  $m$ , vecteur propre, n'est pas la fonction nulle. Donc nécessairement (A.4.81) implique :

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\eta\widehat{n}(0)}{\lambda} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \right\} da &= 0, \\
\text{et : } \lambda &= -\eta\widehat{n}(0) \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\eta\widehat{N}a - \int_0^a d(\alpha)d\alpha\right) \right\} da,
\end{aligned}$$

qui est strictement négatif. Nous venons de montrer que  $P\sigma(\widehat{B})$ , qui contient  $\sigma(\widehat{B}) \setminus E\sigma(\widehat{B})$  est un singleton strictement négatif (ici  $P\sigma(\widehat{B}) = \sigma(\widehat{B}) \setminus E\sigma(\widehat{B})$ ) et la solution stationnaire non triviale obtenue à la Proposition A.4.7 est asymptotiquement exponentiellement stable. ■

**Proposition A.4.12.** *Dans le cas  $R_0 > 1$ , la solution nulle est instable.*

*Démonstration.* Nous procédons comme pour la preuve de la Proposition A.4.10. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $m \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$  tels que  $\widehat{B}m = \lambda m$ . Cette équation se résout en :

$$m(a) = m(0) \exp\left(-\int_0^a (\lambda + d(\alpha))d\alpha\right). \quad (\text{A.4.82})$$

La condition au bord nous fournit :

$$m(0) = m(0) \int_0^{+\infty} b(a) e^{-\int_0^a (\lambda + d(\alpha))d\alpha} da. \quad (\text{A.4.83})$$

Comme  $m$  n'est pas la fonction nulle, par (A.4.82),  $m(0) \neq 0$  et par (A.4.83) et la Proposition A.4.3  $\lambda > 0$ . La Proposition A.4.11 implique que la solution nulle est instable. ■

### A.4.5 Non-coexistence dans un modèle à deux espèces

Nous considérons maintenant le modèle à deux espèces suivant, où les individus sont décrits par un trait  $x$  ou  $y \in \mathcal{X}$ , et par un âge scalaire  $a \in \mathbb{R}_+$ . On appelle  $N^x$  la masse de la mesure représentant la population de trait  $x$ , et  $N^y$  la masse de la mesure représentant la population de trait  $y$ . La dynamique est la suivante :

- Les individus vieillissent avec vitesse 1,
- Ils donnent naissance avec le taux  $b(x, a)$  ou  $b(y, a)$ ; la probabilité de mutation est  $p = 0$ .
- Les individus de trait  $x$  meurent au taux  $d(x, a) + \eta_{xx}N^x + \eta_{xy}N^y$ ; les individus de trait  $y$  meurent au taux  $d(y, a) + \eta_{yx}N^x + \eta_{yy}N^y$ ,

où  $\eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yx}, \eta_{yy}$  sont des constantes strictement positives et où  $b(x, \cdot), b(y, \cdot), d(x, \cdot)$  et  $d(y, \cdot)$  sont des fonctions continues bornées de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  telles que :  $\exists \bar{b}, \bar{d}, \underline{d} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$0 \leq b(x, a) \leq \bar{b}, \quad \text{et } 0 \leq b(y, a) \leq \bar{b}, \quad \underline{d} \leq d(x, a) \leq \bar{d}, \quad \text{et } \underline{d} \leq d(y, a) \leq \bar{d}. \quad (\text{A.4.84})$$

**Hypothèse A.4.13.** *Nous supposons que :*

$$\int_0^{+\infty} b(x, a) e^{\int_0^a d(x, \alpha) d\alpha} da > 1, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{\int_0^a d(y, \alpha) d\alpha} da > 1. \quad (\text{A.4.85})$$

Cette hypothèse nous assure que les traits, pris séparément, sont *viabiles* au sens où les populations associées ne s'éteignent pas (Proposition A.4.7).

Soient les équations suivantes :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, a, t) = -\frac{\partial n}{\partial a}(x, a, t) - (d(x, a) + \eta_{xx}N_t^x + \eta_{xy}N_t^y) n(x, a, t) \quad (\text{A.4.86})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}(y, a, t) = -\frac{\partial n}{\partial a}(y, a, t) - (d(y, a) + \eta_{yx}N_t^x + \eta_{yy}N_t^y) n(y, a, t) \quad (\text{A.4.87})$$

$$n(x, 0, t) = \int_0^{+\infty} b(x, a) n(x, a, t) da, \quad n(y, 0, t) = \int_0^{+\infty} b(y, a) n(y, a, t) da \quad (\text{A.4.88})$$

$$n(x, a, 0) = n_0(x, a), \quad \text{et } n(y, a, 0) = n_0(y, a) \quad (\text{A.4.89})$$

$$N_t^x = \int_0^{+\infty} n(x, a, t) da, \quad \text{et } N_t^y = \int_0^{+\infty} n(y, a, t) da. \quad (\text{A.4.90})$$

La proposition suivante est une adaptation des résultats du Corollaire 3.2.4 et des résultats de Webb (cf. Section 5 [124]).

**Proposition A.4.14.** *Il existe une unique solution au système (A.4.86)-(A.4.90).*

#### A.4.5.1 Solutions stationnaires de (A.4.86)-(A.4.90)

Nous recherchons les solutions stationnaires de (A.4.86)-(A.4.90).

**Proposition A.4.15.** *Les solutions stationnaires de (A.4.86)-(A.4.90) sont les suivantes :*

(i) *La solution nulle*  $\forall a \in \mathbb{R}_+, \hat{n}(x, a) = 0$  et  $\hat{n}(y, a) = 0$ .

(ii) *La solution :*

$$\hat{n}(y, a) = 0, \quad \hat{n}(x, a) = \hat{n}(x, 0) \exp\left(-\int_0^a [d(x, \alpha) + \eta_{xx}\hat{N}^x] d\alpha\right), \quad (\text{A.4.91})$$

avec :

$$\hat{N}^x = \lambda_1^x / \eta_{xx}, \quad \hat{n}(x, 0) = \frac{\hat{N}^x}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^a [d(x, \alpha) + \eta_{xx}\hat{N}^x] d\alpha\right) da}, \quad (\text{A.4.92})$$

où  $\lambda_1^x$  est la solution de (A.4.48) avec  $b(x, \cdot)$  et  $d(x, \cdot)$ ,

(iii) La solution :

$$\hat{n}(x, a) = 0, \quad \hat{n}(y, a) = \hat{n}(y, 0) \exp \left( - \int_0^a \left[ d(y, \alpha) + \eta_{yy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right), \quad (\text{A.4.93})$$

avec :

$$\hat{N}^y = \lambda_1^y / \eta_{yy}, \quad \hat{n}(y, 0) = \frac{\hat{N}^y}{\int_0^{+\infty} \exp \left( - \int_0^a \left[ d(y, \alpha) + \eta_{yy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right) da}, \quad (\text{A.4.94})$$

où  $\lambda_1^y$  est la solution de (A.4.48) avec  $b(y, \cdot)$  et  $d(y, \cdot)$ ,

(iv) La solution :

$$\hat{n}(x, a) = \hat{n}(x, 0) \exp \left( - \int_0^a \left[ d(x, \alpha) + \eta_{xx} \hat{N}^x + \eta_{xy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right) \quad (\text{A.4.95})$$

$$\hat{n}(y, a) = \hat{n}(y, 0) \exp \left( - \int_0^a \left[ d(y, \alpha) + \eta_{yx} \hat{N}^x + \eta_{yy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right). \quad (\text{A.4.96})$$

avec :

$$\hat{N}^x = \frac{\eta_{yy} \lambda_1^x - \eta_{xy} \lambda_1^y}{\eta_{xx} \eta_{yy} - \eta_{xy} \eta_{yx}}, \quad \hat{N}^y = \frac{\eta_{xx} \lambda_1^y - \eta_{yx} \lambda_1^x}{\eta_{xx} \eta_{yy} - \eta_{xy} \eta_{yx}}, \quad (\text{A.4.97})$$

et :

$$\hat{n}(x, 0) = \frac{\hat{N}^x}{\int_0^{+\infty} \exp \left( - \int_0^a \left[ d(x, \alpha) + \eta_{xx} \hat{N}^x + \eta_{xy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right) da} \quad (\text{A.4.98})$$

$$\hat{n}(y, 0) = \frac{\hat{N}^y}{\int_0^{+\infty} \exp \left( - \int_0^a \left[ d(y, \alpha) + \eta_{yx} \hat{N}^x + \eta_{yy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right) da}, \quad (\text{A.4.99})$$

avec  $\lambda_1^x$  et  $\lambda_1^y$  définis aux Points (ii) et (iii).

*Démonstration.* Les solutions recherchées satisfont :

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial a}(x, a) = - \left( d(x, a) + \eta_{xx} \hat{N}^x + \eta_{xy} \hat{N}^y \right) \hat{n}(x, a) \quad (\text{A.4.100})$$

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial a}(y, a) = - \left( d(y, a) + \eta_{yx} \hat{N}^x + \eta_{yy} \hat{N}^y \right) \hat{n}(y, a) \quad (\text{A.4.101})$$

$$\hat{n}(x, 0) = \int_0^{+\infty} b(x, a) \hat{n}(x, a) da, \quad \text{et} \quad \hat{n}(y, 0) = \int_0^{+\infty} b(y, a) \hat{n}(y, a) da \quad (\text{A.4.102})$$

$$\hat{N}^x = \int_0^{+\infty} \hat{n}(x, a) da, \quad \text{et} \quad \hat{N}^y = \int_0^{+\infty} \hat{n}(y, a) da. \quad (\text{A.4.103})$$

L'équation (A.4.100) se résout en :

$$\hat{n}(x, a) = \hat{n}(x, 0) \exp \left( - \int_0^a \left[ d(x, \alpha) + \eta_{xx} \hat{N}^x + \eta_{xy} \hat{N}^y \right] d\alpha \right) \quad (\text{A.4.104})$$

En remplaçant cette solution dans (A.4.102) on obtient :

$$\hat{n}(x, 0) = \hat{n}(x, 0) \int_0^{+\infty} b(x, a) \exp \left( - \int_0^a d(x, \alpha) d\alpha - (\eta_{xx} \hat{N}^x + \eta_{xy} \hat{N}^y) a \right) da. \quad (\text{A.4.105})$$

On établit des formules analogues pour  $\widehat{n}(y, a)$ .

La solution  $\widehat{n} \equiv 0$  est la solution stationnaire correspondant à  $\widehat{n}(x, 0) = 0$  et  $\widehat{n}(y, 0) = 0$ . Les solutions stationnaires correspondant à  $\widehat{n}(x, 0) \neq 0$  et  $\widehat{n}(y, 0) = 0$  sont celles annoncées au Point (ii). Nous allons montrer que la solution au bord (A.4.102) et l'équation (A.4.103) définissent une unique solution. L'équation (A.4.91) devient :

$$1 = \int_0^{+\infty} b(x, a) \exp\left(-\int_0^a d(x, \alpha) d\alpha - \eta_{xx} \widehat{N}^x a\right) da. \quad (\text{A.4.106})$$

Par définition de (A.4.48), on a alors nécessairement :

$$\widehat{N}^x = \lambda_1^x / \eta_{xx}, \quad (\text{A.4.107})$$

et  $\widehat{N}^x$  est défini de façon unique. L'équation (A.4.103) nous fournit :

$$\widehat{n}(x, 0) = \frac{\widehat{N}^x}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^a [d(x, \alpha) + \eta_{xx} \widehat{N}^x] d\alpha\right) da}, \quad (\text{A.4.108})$$

qui est donc également unique. On retrouve les résultats obtenus pour la population logistique simple des Sections A.4.1, A.4.3 et A.4.4. Le résultat est analogue pour les solutions stationnaires correspondant à  $\widehat{n}(y, 0) \neq 0$  et  $\widehat{n}(x, 0) = 0$ .

Examinons maintenant le cas d'une solution stationnaire pour laquelle  $\widehat{n}(x, 0) \neq 0$  et  $\widehat{n}(y, 0) \neq 0$ . Les équations (A.4.102) deviennent :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a d(x, \alpha) d\alpha - (\eta_{xx} \widehat{N}^x + \eta_{xy} \widehat{N}^y) a} da \\ 1 &= \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a d(y, \alpha) d\alpha - (\eta_{yx} \widehat{N}^x + \eta_{yy} \widehat{N}^y) a} da. \end{aligned}$$

Pour  $\lambda_1^x$  et  $\lambda_1^y$  définis aux Points (ii) et (iii) de la Proposition A.4.15, on a :

$$\eta_{xx} \widehat{N}^x + \eta_{xy} \widehat{N}^y = \lambda_1^x \quad (\text{A.4.109})$$

$$\eta_{yx} \widehat{N}^x + \eta_{yy} \widehat{N}^y = \lambda_1^y, \quad (\text{A.4.110})$$

qui se résout en (A.4.97). Les équations (A.4.103) fournissent alors (A.4.99). ■

#### A.4.5.2 Stabilité des solutions stationnaires

**Proposition A.4.16.** *Sous les Hypothèses de la Section A.4.5 :*

(i) *La solution (ii) de la Proposition A.4.15 est localement stable si et seulement si :*

$$\eta_{yx} \widehat{N}^x - \eta_{yy} \widehat{N}^y > 0, \quad (\text{A.4.111})$$

où  $\widehat{N}^x$  et  $\widehat{N}^y$  sont définis en (A.4.92) et (A.4.94).

(ii) *La solution (iii) de la Proposition A.4.15 est localement stable si et seulement si :*

$$\eta_{xy} \widehat{N}^y - \eta_{xx} \widehat{N}^x > 0. \quad (\text{A.4.112})$$

(iii) *La solution nulle est instable.*

(iv) *La solution (iv) de la Proposition A.4.15 est instable si :*

$$\eta_{xx} \eta_{yy} - \eta_{xy} \eta_{yx} < 0. \quad (\text{A.4.113})$$

**Remarque A.4.17.** Dans le cas où les individus de traits  $x$  et les individus de traits  $y$  n'interagissent pas ( $\eta_{xy} = 0, \eta_{yx} = 0$ ), la solution (iv) est stable et il peut y avoir coexistence des deux traits. La non coexistence des deux traits est un effet des interactions.

*Preuve de la Proposition A.4.16.* Nous allons étudier la stabilité des solutions stationnaires exhibées à la section précédente en utilisant le Théorème 4.12 de Webb [124] (rappelé à la Proposition A.4.11), comme à la Section A.4.4. Nous linéarisons les équations (A.4.86)-(A.4.90) au voisinage des solutions stationnaires et nous étudions le spectre des opérateurs linéarisés.

Pour étudier la stabilité des solutions stationnaires de la Proposition A.4.15, linéarisons le système (A.4.86)-(A.4.90). En posant  $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, m(x, a, t) = n(x, a, t) - \widehat{n}(x, a)$  et  $m(y, a, t) = n(y, a, t) - \widehat{n}(y, a)$  :

$$\frac{\partial m}{\partial t}(x, a, t) = -\frac{\partial m}{\partial a}(x, a, t) - \left(d(x, a) + \eta_{xx}\widehat{N}^x + \eta_{xy}\widehat{N}^y\right) m(x, a, t) - (\eta_{xx}M_t^x + \eta_{xy}M_t^y) \widehat{n}^x(a) \quad (\text{A.4.114})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(y, a, t) &= -\frac{\partial m}{\partial a}(y, a, t) - \left(d(y, a) + \eta_{yx}\widehat{N}^x + \eta_{yy}\widehat{N}^y\right) m(y, a, t) - (\eta_{yx}M_t^x + \eta_{yy}M_t^y) \widehat{n}^y(a) \\ m(x, 0, t) &= \int_0^{+\infty} b(x, a)m(x, a, t)da, \quad \text{et} \quad m(y, 0, t) = \int_0^{+\infty} b(y, a)m(y, a, t)da \\ m(x, a, 0) &= n_0(x, a) - \widehat{n}(x, a), \quad \text{et} \quad m(y, a, 0) = n_0(y, a) - \widehat{n}(y, a) \\ M_t^x &= \int_0^{+\infty} m(x, a, t)da, \quad \text{et} \quad M_t^y = \int_0^{+\infty} m(y, a, t)da. \end{aligned} \quad (\text{A.4.115})$$

#### Stabilité de la solution (i) de la Proposition A.4.15

Le système (A.4.114)-(A.4.115) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(x, a, t) &= -\frac{\partial m}{\partial a}(x, a, t) - d(x, a)m(x, a, t), & \frac{\partial m}{\partial t}(y, a, t) &= -\frac{\partial m}{\partial a}(y, a, t) - d(y, a)m(y, a, t) \\ m(x, 0, t) &= \int_0^{+\infty} b(x, a)m(x, a, t)da, & \text{et} \quad m(y, 0, t) &= \int_0^{+\infty} b(y, a)m(y, a, t)da \\ m(x, a, 0) &= n_0(x, a), & \text{et} \quad m(y, a, 0) &= n_0(y, a). \end{aligned}$$

Ce système est linéaire et il apparaît que l'on peut séparer l'étude des solutions relatives à chacun des traits  $x$  et  $y$ . On est ramené à l'étude de deux systèmes indépendants de la forme (A.4.30)-(A.4.32). Par l'Hypothèse (A.4.85) et les résultats de la Section A.4.3.2, la solution nulle n'est pas une solution stable de ce système.

#### Stabilité de la solution (iv) de la Proposition A.4.15

Considérons ce système au voisinage de la solution (iv) de la Proposition A.4.15. Posons :

$$\widehat{d}_x(x, y, a) = d(x, a) + \eta_{xx}\widehat{N}^x + \eta_{xy}\widehat{N}^y \quad (\text{A.4.116})$$

$$\widehat{d}_y(x, y, a) = d(y, a) + \eta_{yx}\widehat{N}^x + \eta_{yy}\widehat{N}^y \quad (\text{A.4.117})$$

$$\widetilde{d}_x(x, y, m) = \eta_{xx}M^x + \eta_{xy}M^y \quad (\text{A.4.118})$$

$$\widetilde{d}_y(x, y, m) = \eta_{yx}M^x + \eta_{yy}M^y. \quad (\text{A.4.119})$$

Nous allons rechercher les solutions de

$$-\frac{\partial m}{\partial a}(x, a) - \widehat{d}_x(x, y, a)m(x, a) - \widetilde{d}_x(x, y, t, m)\widehat{n}(x, a) = \lambda m(x, a) \quad (\text{A.4.120})$$

$$-\frac{\partial m}{\partial a}(y, a) - \widehat{d}_y(x, y, a)m(y, a) - \widetilde{d}_y(x, y, t, m)\widehat{n}(y, a) = \lambda m(y, a) \quad (\text{A.4.121})$$

$$m(x, 0) = \int_0^{+\infty} b(x, a)m(x, a)da, \quad m(y, 0) = \int_0^{+\infty} b(y, a)m(y, a)da \quad (\text{A.4.122})$$

$$M^x = \int_0^{+\infty} m(x, a)da, \quad M^y = \int_0^{+\infty} m(y, a)da. \quad (\text{A.4.123})$$

La solution de (A.4.120) est donnée par :

$$m(x, a) = \exp\left(-\int_0^a [\lambda + \widehat{d}_x(x, y, \alpha)] d\alpha\right) m(x, 0) - \int_0^a e^{-\int_\alpha^a [\lambda + \widehat{d}_x(x, y, u)] du} \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, \alpha) d\alpha. \quad (\text{A.4.124})$$

**Cas  $\lambda = 0$  :** L'équation (A.4.124) devient :

$$\begin{aligned} m(x, a) &= e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} m(x, 0) - \int_0^a e^{-\int_\alpha^a \widehat{d}_x(x, y, u) du} \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, \alpha) d\alpha \\ &= e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} m(x, 0) - \int_0^a e^{-\int_\alpha^a \widehat{d}_x(x, y, u) du} \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, 0) e^{\int_0^\alpha \widehat{d}_x(x, y, u) du} d\alpha \\ &= e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} \left( m(x, 0) - \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, 0)a \right), \end{aligned}$$

où la seconde égalité est obtenue en utilisant (A.4.104). Les conditions au bord (A.4.122) fournissent alors :

$$m(x, 0) = \int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} \left[ m(x, 0) - \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, 0)a \right] da.$$

En utilisant (A.4.42),  $1 = \int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} da$ , et :

$$m(x, 0) = m(x, 0) - \int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, 0) a da,$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} \widetilde{d}_x(x, y, m)\widehat{n}(x, 0) a da = 0. \quad (\text{A.4.125})$$

Comme  $\int_0^{+\infty} b(x, a) e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, \alpha) d\alpha} a da > 0$  et  $\widehat{n}(x, 0) > 0$ , nous avons nécessairement  $\widetilde{d}_x(x, y, m) = 0$ , c'est à dire :

$$\eta_{xx}M^x + \eta_{xy}M^y = 0 \quad \text{et} \quad \eta_{yx}M^x + \eta_{yy}M^y = 0 \quad (\text{A.4.126})$$

Comme nous cherchons  $m$  non nul,  $M^x$  et  $M^y$  ne sont pas tous les deux nuls et 0 est valeur propre si :

$$\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}\eta_{yx} = 0. \quad (\text{A.4.127})$$

**Cas  $\lambda \neq 0$  :** L'équation (A.4.124) devient :

$$\begin{aligned} m(x, a) &= e^{-\int_0^a (\lambda + \widehat{d}_x(x, y, \alpha)) d\alpha} m(x, 0) - \int_0^a e^{-\lambda(a-\alpha)} e^{-\int_0^\alpha \widehat{d}_x(x, y, u) du} \widehat{n}(x, 0) \widetilde{d}_x(x, y, m) d\alpha \\ &= e^{-\int_0^a (\lambda + \widehat{d}_x(x, y, \alpha)) d\alpha} m(x, 0) - e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u) du} \widehat{n}(x, 0) \widetilde{d}_x(x, y, m) \int_0^a e^{-\lambda(a-\alpha)} d\alpha \\ &= m(x, 0) e^{-\int_0^a (\lambda + \widehat{d}_x(x, y, \alpha)) d\alpha} - \widehat{n}(x, 0) \widetilde{d}_x(x, y, m) e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u) du} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda a}). \quad (\text{A.4.128}) \end{aligned}$$

La condition au bord (A.4.122) devient alors :

$$m(x, 0) = \int_0^{+\infty} \left[ m(x, 0)e^{-\lambda a} - \widehat{n}(x, 0)\widetilde{d}_x(x, y, m)\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda a}) \right] b(x, a)e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da \quad (\text{A.4.129})$$

Donc :

$$0 = \int_0^{+\infty} \left[ -m(x, 0) - \frac{\widehat{n}(x, 0)\widetilde{d}_x(x, y, m)}{\lambda} \right] (1 - e^{-\lambda a})b(x, a)e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da. \quad (\text{A.4.130})$$

Nécessairement :

$$\lambda m(x, 0) = -\widehat{n}(x, 0)\widetilde{d}_x(x, y, m). \quad (\text{A.4.131})$$

Alors, par (A.4.115) et (A.4.131) :

$$\begin{aligned} M^x &= \int_0^{+\infty} m(x, a)da \\ &= \int_0^{+\infty} m(x, 0)e^{-\int_0^a (\lambda + \widehat{d}_x(x, y, u))du} da - \int_0^{+\infty} \widehat{n}(x, 0)\widetilde{d}_x(x, y, m)e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda a})da \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} \left( m(x, 0)e^{-\lambda a} + m(x, 0)(1 - e^{-\lambda a}) \right) da \\ &= m(x, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da = -\frac{\widehat{n}(x, 0)\widetilde{d}_x(x, y, m)}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da. \end{aligned} \quad (\text{A.4.132})$$

En remplaçant  $\widetilde{d}_x(x, y, m)$  par sa valeur (A.4.118), nous avons :

$$0 = \left( \lambda + \eta_{xx}\widehat{n}(x, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da \right) M^x + \left( \eta_{xy}\widehat{n}(x, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da \right) M^y \quad (\text{A.4.133})$$

$$0 = \left( \eta_{yx}\widehat{n}(y, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_y(y, x, u)du} da \right) M^x + \left( \lambda + \eta_{yy}\widehat{n}(y, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_y(y, x, u)du} da \right) M^y, \quad (\text{A.4.134})$$

la seconde égalité étant établie de façon analogue à la première. Comme nous cherchons un vecteur propre,  $(M^x, M^y) \neq (0, 0)$  et le déterminant de ce système linéaire est nul.  $\lambda$  est donc solution de l'équation du second degré suivante :

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (\text{A.4.135})$$

où :

$$\begin{aligned} B &= \left( \eta_{xx}\widehat{n}(x, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da \right) + \left( \eta_{yy}\widehat{n}(y, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_y(y, x, u)du} da \right) \\ C &= \widehat{n}(x, 0)\widehat{n}(y, 0) \left( \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_y(y, x, u)du} da \right) (\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}\eta_{yx}) \end{aligned} \quad (\text{A.4.136})$$

Le déterminant de (A.4.135) est :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left( \eta_{xx}\widehat{n}(x, 0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da - \widehat{n}(y, 0)\eta_{yy} \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_y(y, x, u)du} da \right)^2 \\ &\quad + 4\widehat{n}(x, 0)\widehat{n}(y, 0)\eta_{xy}\eta_{yx} \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_x(x, y, u)du} da \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a \widehat{d}_y(y, x, u)du} da > 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4.137})$$

et l'équation admet donc deux racines réelles. Comme  $B > 0$ , la somme de ces deux racines est négative. Si  $C < 0$ , ce qui est équivalent à :

$$\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}\eta_{yx} < 0, \quad (\text{A.4.138})$$

les deux racines sont de signe opposé, et l'une des racines est donc strictement positive. La solution (iv) de la Proposition A.4.15 est alors instable par la Proposition A.4.11. Si  $C > 0$ , ce qui équivaut à :

$$\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}\eta_{yx} > 0, \quad (\text{A.4.139})$$

les deux racines sont de même signe et donc toutes les deux négatives, et la solution (iv) de la Proposition A.4.15 est stable.

#### Stabilité des solutions (ii) et (iii) de la Proposition A.4.15

L'étude de ces solutions étant symétrique, nous nous intéressons uniquement à la solution (ii) pour laquelle  $\forall a \in \mathbb{R}_+, \hat{n}(y, a) = 0$ .

Cas  $\lambda = 0$  : Des calculs similaires à ceux réalisés pour l'étude de la stabilité de la solution (iv) nous fournissent (avec les mêmes notations) :

$$\eta_{xx}M^x + \eta_{xy}M^y = 0. \quad (\text{A.4.140})$$

On n'a pas la seconde équation de (A.4.126) qui utilise l'hypothèse  $\hat{n}(y, 0) > 0$ . La résolution de (A.4.121) nous donne :  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$m(y, a) = \exp\left(-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yx}\hat{N}^x)d\alpha\right) m(y, 0),$$

qui nous fournit dans (A.4.122) :

$$m(y, 0) = m(y, 0) \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yx}\hat{N}^x)d\alpha} da.$$

Cette équation n'admet de solution  $m(y, 0)$  non nulle que si :

$$\int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yx}\hat{N}^x)d\alpha} da = 1. \quad (\text{A.4.141})$$

Soit  $\hat{N}^y$  défini en (A.4.94) (correspondant à un équilibre monomorphe de trait  $y$ ). Comme :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yy}\hat{N}^y)d\alpha} da \\ &= \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yx}\hat{N}^x)d\alpha} e^{\alpha(\eta_{yx}\hat{N}^x - \eta_{yy}\hat{N}^y)} da, \end{aligned} \quad (\text{A.4.142})$$

une condition nécessaire pour que (A.4.141) soit satisfaite est que :

$$\eta_{yx}\hat{N}^x - \eta_{yy}\hat{N}^y = 0. \quad (\text{A.4.143})$$

Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite,  $m(y, 0) = 0$  et  $\forall a \in \mathbb{R}_+, m(y, a) = 0$ . On est alors ramené aux calculs de la Section A.4.4 et le système (A.4.120)-(A.4.123) n'admet pas de solution non nulle pour  $\lambda = 0$ .



Cas  $\lambda \neq 0$  : De même que dans le cas  $\lambda = 0$ , on obtient :

$$\eta_{xx}M^x + \eta_{xy}M^y = 0, \quad (\text{A.4.144})$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} m(y, 0) &= m(y, 0) \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yx} \widehat{N}^x) d\alpha} e^{-\lambda a} da \\ &= m(y, 0) \int_0^{+\infty} b(y, a) e^{-\int_0^a (d(y, \alpha) + \eta_{yy} \widehat{N}^{y, (2)}) d\alpha} e^{-(\lambda + \eta_{yx} \widehat{N}^x - \eta_{yy} \widehat{N}^{y, (2)}) a} da. \end{aligned} \quad (\text{A.4.145})$$

Par (A.4.142), une condition nécessaire pour que (A.4.145) admette une solution une solution  $m(y, 0)$  non nulle est que :

$$\lambda + \eta_{yx} \widehat{N}^x - \eta_{yy} \widehat{N}^y = 0. \quad (\text{A.4.146})$$

Donc :

- Si  $\eta_{yx} \widehat{N}^x - \eta_{yy} \widehat{N}^y > 0$ , il ne peut pas exister de solution non nulle à l'équation (A.4.145) associée à  $\lambda > 0$ . Donc  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ ,  $m(y, a) = 0$ . Nous sommes ramenés aux calculs de la Section A.4.4 et la solution (ii) de la Proposition A.4.15 est localement stable.
- Si  $\eta_{yx} \widehat{N}^x - \eta_{yy} \widehat{N}^y < 0$ , il existe  $\lambda > 0$  tel qu'il existe une solution  $m(y, a)$  non nulle de (A.4.121, A.4.122, A.4.123). On déduit alors de (A.4.144) et de (A.4.123) :

$$M^x = \frac{\eta_{xy}}{\eta_{xx}} \int_{\mathbb{R}_+} m(y, a) da, \quad (\text{A.4.147})$$

et  $m(x, a)$  définie par (A.4.128) est bien définie. On a donc une valeur propre  $\lambda > 0$  et par la Proposition A.4.11, la solution (ii) de la Proposition A.4.15 est instable.

La Proposition est démontrée, et la condition d'instabilité annoncée est obtenue en réunissant (A.4.127) et (A.4.138). ■

**Corollaire A.4.18.** *Supposons que :*

$$\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}\eta_{yx} \leq 0. \quad (\text{A.4.148})$$

*Un au moins des équilibres (ii) ou (iii) de la Proposition A.4.15 est stable.*

*Démonstration du Corollaire A.4.18.* Nous notons ici  $\widehat{N}^x$  et  $\widehat{N}^y$  les solutions d'équilibres monomorphiques non triviales associées à  $x$  et  $y$ .

Supposons que :

$$\eta_{yx} \widehat{N}^x - \eta_{yy} \widehat{N}^y < 0. \quad (\text{A.4.149})$$

Par la Proposition A.4.16, la solution (ii) de la Proposition A.4.15 est instable. De plus, comme  $\widehat{N}^y \neq 0$ ,  $\eta_{yy} > \eta_{yx} \widehat{N}^x / \widehat{N}^y$ . Alors par (A.4.148), on a  $0 > [\eta_{xx}\eta_{yx} \widehat{N}^x / \widehat{N}^y] - \eta_{xy}\eta_{yx}$ . En multipliant par  $\widehat{N}^y / \eta_{yx}$  non nul :

$$0 > \eta_{xx} \widehat{N}^x - \eta_{xy} \widehat{N}^y, \quad (\text{A.4.150})$$

impliquant que la solution (iii) de la Proposition A.4.15 est stable. Nous venons de montrer qu'il y a au moins une solution non triviale stable sous (A.4.148). ■

## A.5 Processus de naissances et de morts structurés par âge

**Définition A.5.1.** Soit  $Z_t(da)$  le processus de naissances et de morts structuré par âge dont les individus :

- donnent naissance à un individu d'âge 0 au taux  $b(a) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . Nous supposons  $\exists \underline{b}, \bar{b} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, \underline{b} \leq b(a) < \bar{b}$ .
- meurent au taux  $d(a) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . Nous supposons  $\exists \underline{d}, \bar{d} > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, \underline{d} \leq d(a) \leq \bar{d}$ .
- vieillissent à la vitesse 1.

Les résultats présentés ici ont été obtenus par Doney [36].

### A.5.1 Calcul de la fonction de fitness

Le résultat principal de cette Section est le suivant :

**Proposition A.5.2.** La fitness ou probabilité de survie du processus de naissances et de morts structuré par âge de la Définition A.5.1 est  $1 - z_0(y, x)$ , où  $z_0(y, x) \in [0, 1]$  résout l'équation :

$$z = 1 + \int_0^{+\infty} \left[ (z - 1)b(w)e^{z \int_0^w b(u)du} e^{-\int_0^w (b(u)+d(u))du} \right] dw. \quad (\text{A.5.1})$$

Notons que le membre de droite de (A.5.1) est la fonction génératrice du nombre de descendants d'un individu.

Nous découpons la preuve en plusieurs parties. A la Proposition A.5.6, nous montrons que la probabilité que la population ne s'éteigne pas est  $1 - z_0(y, x)$ , où  $z_0(y, x)$  est la plus petite solution de l'équation (A.5.1).

#### Descendance d'un mutant :

Nous commençons par étudier la durée de vie et le nombre de descendants d'un mutant.

**Proposition A.5.3.** (i) L'âge à la mort  $W$  d'un mutant de trait  $y$  est une variable aléatoire réelle de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité

$$w \in \mathbb{R}_+ \mapsto d(w) \exp\left(-\int_0^w d(u)du\right) \in \mathbb{R}_+.$$

(ii) La loi du nombre  $X$  de descendants est donnée pour  $k \in \mathbb{N}$  par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_{[0, w]^k} \prod_{u_1 < \dots < u_k} b(u_j) du_j e^{-\int_0^w b(u)du} \right] d(w) e^{-\int_0^w d(u)du} dw. \quad (\text{A.5.2})$$

*Démonstration.* Les événements de morts et de naissances sont indépendants, et pendant sa vie, un mutant donne naissance suivant un processus ponctuel d'intensité  $b(y, a)\mathbf{1}_{a \leq w}$ . ■

**Remarque A.5.4.** Lorsque  $b$  est constant, nous retrouvons que le nombre de naissances conditionnellement à la durée de vie  $w$  suit une loi de Poisson :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k | W = w) = \left[ \int_{[0, w]^k} \prod_{u_1 < \dots < u_k} b du_j e^{-\int_0^w b(u)du} \right] = \frac{(bw)^k}{k!} e^{-bw}.$$

Soit :

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \mathbb{P}(X = i), \quad (\text{A.5.3})$$

la transformée de Laplace de la loi de  $X$ . Rappelons quelques propriétés de cette fonction  $G$  qui nous seront utiles dans la suite.

**Proposition A.5.5.** La fonction  $G$  (A.5.3) est convexe et strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

(i) Si

$$\int_0^{+\infty} b(w)e^{-\int_0^w d(u)du}dw \leq 1, \quad (\text{A.5.4})$$

le graphe de  $G$  ne coupe la première bissectrice qu'en  $(1, 1)$ . Dans ce cas, on pose :  $z_0 = 1$ .

(ii) Dans le cas contraire, il existe un second point d'intersection du graphe de  $G$  et de la première bissectrice, d'abscisse  $z_0 \in [0, 1[$  telle que  $G(z_0) = z_0$ .  $\square$

*Démonstration.* La stricte croissance et la convexité de  $G$  sont obtenues en calculant ses dérivées :

$$\begin{aligned} G(0) &= \mathbb{P}(X = 0), \text{ probabilité de mourir sans descendant, } > 0 \\ G(1) &= 1, \\ G'(1) &= \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $\mathbb{E}(X) \leq 1$ , le seul point fixe de  $G$  sur  $[0, 1]$  est  $z_0(y, x) = 1$ . Lorsque  $\mathbb{E}(X) > 1$ , le graphe de  $z \mapsto G(z)$  intersecte la première bissectrice en deux points d'abscisse 1 et  $z_0(y, x) \in [0, 1[$ .

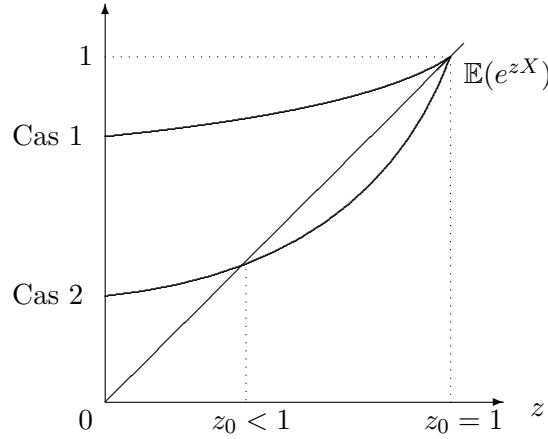


FIG. A.1 – Points fixes de  $z \mapsto G(z) = \mathbb{E}(e^{zX})$  lorsque  $G'(1) = \mathbb{E}(X) \leq 1$  (Cas 1) et  $G'(1) > 1$  (Cas 2).

Pour retrouver la condition (A.5.4), calculons  $\mathbb{E}(X)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid W)) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^w b(u)du \right) d(w)e^{-\int_0^w d(u)du}dw \\ &= \left[ - \left( \int_0^w b(u)du \right) e^{-\int_0^w d(u)du} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} b(w)e^{-\int_0^w d(u)du}dw. \end{aligned} \quad (\text{A.5.5})$$

Comme :

$$0 \leq \int_0^w b(u)du e^{-\int_0^w d(u)du} \leq \bar{b}we^{-\underline{d}w},$$

le crochet dans (A.5.5) est nul.  $\blacksquare$

Survie du mutant :

**Proposition A.5.6.** Lorsque  $\int_0^{+\infty} b(w)e^{-\int_0^w d(u)du} dw \leq 1$ , alors nous avons extinction presque sûre de la descendance du mutant. Dans le cas contraire, la probabilité de survie de la descendance du mutant est  $1 - z_0(y, x) > 0$ .

Dans chaque cas, la probabilité de survie du mutant peut s'écrire  $1 - z_0(y, x) \geq 0$ , où  $z_0$  a été définie à la Proposition A.5.5.  $\square$

Nous commençons par introduire quelques notations.

La probabilité de survie du processus de naissances et de morts de la Définition A.5.1 est la probabilité de non-extinction de ce processus. Si nous considérons la chaîne de Markov à temps discret  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sous-jacente à l'arbre phylogénétique du processus et définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Y^k \text{ est le nombre de descendants de la } k^{\text{ième}} \text{ génération,} \quad (\text{A.5.6})$$

la survie du processus de la Définition A.5.1 est équivalente à la non-extinction du processus  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (cf. Athreya et Ney [4]).

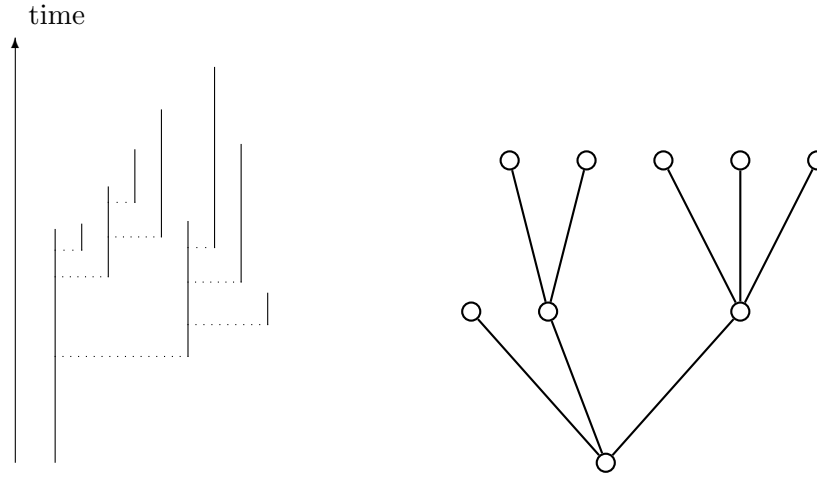


FIG. A.2 – Arbre à temps discret (droite) sous-jacent à l'arbre âge-dépendant à temps continu (gauche). Ici,  $Y_1 = 3$ ,  $X_1^{(1)} = 0$ ,  $X_2^{(1)} = 2$ ,  $X_3^{(1)} = 3$  et  $Y_2 = 5$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, Y_k \rrbracket$ , nous appelons  $X_i^{(k)}$  le nombre de filles du  $i^{\text{ième}}$  descendant de la  $k^{\text{ième}}$  génération. Les variables aléatoires  $X_i^{(k)}$  sont indépendantes et identiquement distribuées pour tout  $k$  et  $i$ , de même loi que la variable aléatoire  $X$  définie en (A.5.2). Nous avons :

$$Y_{k+1} = \sum_{i=1}^{Y_k} X_i^{(k)}.$$

*Preuve de la Proposition A.5.6.* Nous nous intéressons à la loi du nombre de descendants de la  $k^{\text{ième}}$  génération. Considérons la transformée de Laplace de  $Y_k$ ,  $G_k(z) = \mathbb{E}(z^{Y_k})$ . Comme :

$$G_k(0) = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \mathbb{P}(\exists l \leq k, Y_l = 0), \quad (\text{A.5.7})$$

la probabilité d'extinction de la descendance du mutant est donnée par  $\lim_{k \rightarrow +\infty} G_k(0)$ .

Nous avons  $Y_0 = 1$ , et pour  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E}(z^{Y_k} \mid \sigma(Y_{k-1})) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{Y_{k-1}} z^{X_i^{(k)}} \mid \sigma(Y_{k-1})\right) = \prod_{i=1}^{Y_{k-1}} \mathbb{E}(z^X) = G(z)^{Y_{k-1}},$$

par indépendance. En intégrant :

$$G_k(z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^{Y_k} \mid \sigma(Y_{k-1}))) = \mathbb{E}(G(z)^{Y_{k-1}}) = G_{k-1}(G(z)) = G^{\circ k}(z),$$

avec  $G^{\circ k}(z) = G^{\circ k-1} \circ G(z)$ . Comme  $G$  est une fonction strictement croissante de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ ,  $(G_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante majorée par 1, et sa limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$  est bien définie.

Lorsque  $\mathbb{E}(X) \geq 1$ , la suite converge presque sûrement vers l'unique point fixe, 1, de  $G$  sur  $[0, 1]$ , et nous avons une extinction presque sûre.

Lorsque  $\mathbb{E}(X) < 1$ , comme  $G(0) < z_0(y, x)$  et comme  $G$  stabilise l'intervalle  $[0, z_0(y, x)]$  la suite converge vers l'unique point fixe de  $G$  sur  $[0, z_0(y, x)]$  i.e.  $z_0(y, x)$ . ■

### Equation satisfaite par $z_0$

$z_0$  est la solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} z = \mathbb{E}(z^X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^X \mid W)) = \int_0^{+\infty} e^{(z-1) \int_0^w b(u) du} d(w) e^{-\int_0^w d(u) du} dw & (A.5.8) \\ &= \left[ -e^{(z-1) \int_0^w b(u) du - \int_0^w d(u) du} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (z-1) b(w) e^{(z-1) \int_0^w b(u) du - \int_0^w d(u) du} dw \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} (z-1) b(w) e^{(z-1) \int_0^w b(u) du - \int_0^w d(u) du} dw. \end{aligned}$$

où (A.5.8) est obtenue en remarquant que conditionnellement à la durée de vie, le nombre de descendants est le nombre de points d'un processus ponctuel d'intensité  $b(u)$  sur  $u \in [0, w]$ .

## A.6 Norme en variation totale

Soit  $E$  un espace métrique polonais, muni de sa tribu borélienne. La norme en variation totale sur  $\mathcal{M}_F(E)$  est définie pour  $\mu$  et  $\nu$  par :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup \{ |\langle \mu, f \rangle - \langle \nu, f \rangle|, f \in \mathcal{B}_b(E, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \} \quad (A.6.1)$$

(cf. Rachev [106]). Nous allons montrer qu'on a également :

**Proposition A.6.1.**  $\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup \{ |\langle \mu, f \rangle - \langle \nu, f \rangle|, f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \}$ .

*Démonstration.* Nous avons :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \geq \sup \{ |\langle \mu, f \rangle - \langle \nu, f \rangle|, f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

Nous allons montrer l'égalité. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition du sup dans (A.6.1),  $\exists f_\varepsilon \in \mathcal{B}_b(E, \mathbb{R})$ ,  $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ , et :

$$|\langle \mu, f_\varepsilon \rangle - \langle \nu, f_\varepsilon \rangle| \geq \|\mu - \nu\|_{TV} - \varepsilon.$$

Comme  $E$  est un espace métrique polonais et  $\mu + \nu$  une mesure finie (donc régulière, cf. Proposition 6.5 page 83 [14]), alors, en munissant  $E$  de sa tribu complétée pour  $\mu + \nu$ ,  $\mathcal{C}_K(E, \mathbb{R})$  est dense dans l'ensemble des fonctions intégrables pour  $\mu + \nu$  pour la norme  $L^1$  (cf. Rudin [110], Theorem 3.14 page 69).  $\mu + \nu$  étant une mesure finie, l'ensemble des fonctions intégrables pour  $\mu + \nu$  contient l'ensemble des fonctions mesurables bornées par 1. Alors, il existe une suite  $(f_\varepsilon^q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}_K(E, \mathbb{R})$  convergeant en norme  $L^1$  pour  $\mu + \nu$  vers  $f_\varepsilon$  et :  $\exists q_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall q \geq q_\varepsilon$ ,

$$|\langle \mu, f_\varepsilon^q \rangle - \langle \nu, f_\varepsilon^q \rangle| \geq \|\mu - \nu\|_{TV} - 2\varepsilon,$$

ceci achève la preuve. ■

## Part II

# Wavelet Particle Approximations for the Intensity of McKean-Vlasov and 2D-Navier-Stokes Statistical Solutions



*The results of Chapters 7 and 8 have made the subject of an article accepted in the journal **Stochastic Processes and their Applications**.*

We are interested in partial differential equations with random initial conditions. The flow of such partial differential equation is therefore random, and its law is called *statistical solution* of the problem.

Statistical solutions are particularly interesting when modelling complex phenomena or when introducing the notion of uncertainty in the initial state. The 2D-vortex equation we study in Chapter 8 has been one of the equations motivating these developments. It is obtained from the famous 2D-Navier-Stokes equation, which models the velocity of a viscous incompressible fluid in the plane. In the case of this equation, the theory of statistical solutions is for instance an attempt to take into account the turbulence arising with high velocities and low viscosities. Vishik and Fursikov [122] or Constantin and Wu [25] have studied such problems with analytical tools.

Talay and Vaillant [117, 119] generalized the probabilistic approach of McKean-Vlasov equations developed by Sznitman [114] and Méléard [92] to the case of a random initial condition. They left however the case of the 2D-vortex equation open. In their work, Talay and Vaillant [117] propose two particle approximations to compute numerically the moments of the statistical solutions. The first one is a "naïve" imbricated simulation procedure, while the second is an original stochastic particle method with random weights.

We consider here the McKean-Vlasov and 2D-vortex equations with random initial conditions, and our aim is to provide a new numerical method for the computation of the intensities of the associated spatial statistical solutions, which are the time marginals of the statistical solutions. We follow the probabilistic approach in Talay and Vaillant [117]. The new approximation we propose is based on wavelet regression estimators. This allows us to extend the method of Talay and Vaillant [117] to a larger class of initial conditions and to obtain better asymptotic convergence rates. The procedure uses thresholded wavelet estimators and does not require any *a priori* knowledge of regularities for the parameters which govern the randomness of the initial condition to achieve the given convergence rate. Our main result is presented as Theorem 7.2.1, for McKean-Vlasov equations, and is used to obtain Theorems 8.3.1 for the 2D-vortex equation.

When the regularity of the initial condition with respect to the alea is known, it is possible to use linear wavelet regression estimators instead of thresholded ones. We obtain in this case a convergence rate that involves a term that is known to be optimal in a certain sense in statistics. This is done for the 2D-vortex equation, Theorem 8.4.1.

In Chapter 7, we work in the quite general frame of McKean-Vlasov equations. In Section 7.1, we recall the probabilistic setting we will consider and define the statistical solutions and their intensities. We then introduce our new particle system and explain the advantages of using the nonlinear wavelet regression estimators inspired by the work of Kerkycharian and Picard [72]. The end of the Chapter is devoted to the proof of our main result, Theorem 7.2.1, concerning the rate of convergence of our wavelet particle approximation. The major difficulty is linked to the fact that the laws of the  $N$  particles that we consider are parameterized by random variables  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  and hence differ. Since we will deal with scalar parameters  $\theta_i$ , it is natural to introduce their distribution function and then to order them. Complications arise since the ranked  $(\theta_{(i)})_{i \in [1, N]}$  are not independent, even if the  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  are.

In Chapter 8, we adapt our numerical method to the case of the 2D-vortex equation. Additional difficulties arise since the interaction kernel is not bounded and since the initial conditions



may have a weight and a sign. We use a cut-off equation, and a trick due to Jourdain [67] to overcome these problems. The main results for the vortex equation are given in Theorems 8.3.1, 8.3.2 and 8.4.1.

We conclude with some simulations which seem to confirm the robustness of the algorithm that we propose compared with the procedures given by Talay and Vaillant [117], in particular, when the initial condition has large variance or when it is a mixing law.

### Notations:

We denote by  $\mathcal{C}(E, F)$  the set of continuous maps from  $E$  to  $F$ . The space  $\mathcal{C}_b^k(E, F)$  is the set of functions of class  $\mathcal{C}^k$ , bounded, and whose successive partial derivatives are continuous and bounded to the order  $k \in \mathbb{N}$ . The space  $\mathcal{C}_b^{k+\varepsilon}(E, F)$  is the set of functions of  $\mathcal{C}_b^k(E, F)$  whose derivatives of order  $k$  are  $\varepsilon$ -Hölder continuous. The space  $\mathcal{B}_b(E, F)$  denotes the set of bounded measurable functions from  $E$  to  $F$ . We denote by  $L^p(E, F)$  the usual space of measurable functions  $f$  from  $E$  to  $F$  such that  $\int |f|^p < \infty$ , and we denote by  $\|f\|_p$  the  $L^p$ -norm. We use  $\mathcal{D}(E)$  for the set of probability density functions on  $E$ . Finally, for a Lipschitz-continuous function  $f$ , we denote by  $\|f\|_{Lip}$  its Lipschitz norm.

For any random variable  $X$ , we write  $\mathcal{L}(X)$  or  $P^X$  for its law.

For a measurable space  $E$ , we denote by  $\mathcal{P}(E)$  the set of probabilities on  $E$ , which is embedded with the topology of weak convergence (the smaller topology for which mappings  $m \mapsto \langle m, f \rangle$  for  $f \in \mathcal{C}_b(E)$  are continuous). For  $Q \in \mathcal{P}(E)$  and  $f \in \mathcal{B}_b(E, \mathbb{R})$ , we use the notation  $\langle Q, f \rangle := \int_E f dQ$ .

We denote by  $(\Omega, P)$  the probability space which will characterize the randomness of the initial condition.

We introduce the probability space  $(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n), \mathbb{P}_W)$ , where  $\mathbb{P}_W$  is the Wiener probability measure. The canonical process is thus a Brownian motion in  $\mathbb{R}^n$ , which we will write  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ .  $\mathbb{E}$  is the expectation operator under the Wiener law.  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  denotes the natural filtration associated with  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ .

We will be lead to consider the space  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ , on which we will define a reference measure  $\mathbb{P}^\nu := \mathbb{P}_W \otimes \nu$ , with  $\nu$  a probability measure on  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{E}^\nu$  is the expectation operator under this measure.

Finally,  $C$  is a positive real constant that can change from line to line.

## Chapter 7

# A Probabilistic Approach for the Computation of McKean-Vlasov Spatial Statistical Solutions' Intensities

In this first chapter, we study McKean-Vlasov partial differential equations with random initial conditions. We begin with some definitions (Section 7.1), and then present three particle methods (Section 7.2). The two first particle methods are studied by Talay and Vaillant [117]. We introduce an original third particle method based on wavelet regression estimators and inspired by the works of Talay and Vaillant [117] and Kerkycharian and Picard [72], and explain its advantages compared with the two other particle approximations. The last sections are devoted to the proof of the convergence rate of this wavelet particle approximation.

### 7.1 Statistical Solutions of McKean-Vlasov partial differential equations and their Intensities

#### 7.1.1 Presentation

Let us consider a random function  $\widehat{p}_0(x, \omega)$  depending on  $x \in \mathbb{R}^n$  and on an alea  $\omega \in \Omega$ , such that  $P(d\omega)$ -almost surely ( $P(d\omega)$ -a.s. in the following)  $\widehat{p}_0(\cdot, \omega)$  is a probability density function. The law  $\mathcal{L}(\widehat{p}_0)$  of  $\widehat{p}_0$ , considered as a  $L^1(\mathbb{R}^n)$ -valued random variable with support in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  is a probability measure on the infinite dimensional space  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

The simplification that we make, in all this work, is that the randomness of  $\widehat{p}_0$  arises through its dependence on a scalar random variable  $\theta \in \mathbb{R}$  of law  $\nu$ :

$$P(d\omega) - a.s., \widehat{p}_0(\cdot, \omega) = p_0(\cdot, \theta(\omega)),$$

where  $p_0$  is a deterministic measurable function on  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . In this case,  $\mathcal{L}(\widehat{p}_0)$  is the image measure of  $\nu$  through the mapping:

$$\Phi : a \in \mathbb{R} \mapsto p_0(\cdot, a) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (7.1.1)$$

Let  $T$  be an arbitrary positive number. We consider the following *McKean-Vlasov equation*

with random initial condition  $\widehat{p}_0: P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(t, x, \theta) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{b,i}(t, x, \theta) p(t, x, \theta)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ((u_\sigma(t, x, \theta) u_\sigma^*(t, x, \theta))_{ij} p(t, x, \theta)) \\ p(0, x, \theta) &= p_0(x, \theta) \\ u_b(t, x, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) p(t, y, \theta) dy, \quad u_\sigma(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, y) p(t, y, \theta) dy, \end{cases} \quad (7.1.2)$$

where  $b$  and  $\sigma$  are functions respectively defined from  $(\mathbb{R}^n)^2$  to  $\mathbb{R}^n$  and from  $(\mathbb{R}^n)^2$  to  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , the set of  $n \times n$  real matrices.

The probabilistic approach which constitutes the frame of our study relies on the *weak form* of the partial differential equation (7.1.2).

**Definition 7.1.1.** *We say that the random variable in  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$ ,  $(Q_t(dx, \theta))_{t \in [0, T]}$ , is a weak measure-solution of the McKean-Vlasov equation if it satisfies:  $P(d\omega) - a.s., \forall \varphi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \forall t \in [0, T]$ ,*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) Q_t(dx, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) p_0(x, \theta) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^n u_{b,i}(s, x, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (u_\sigma(s, x, \theta) u_\sigma^*(s, x, \theta))_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) Q_s(dx, \theta) ds \\ u_b(t, x, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) Q_t(dy, \theta), \quad u_\sigma(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, y) Q_t(dy, \theta) \\ Q_0(dx, \theta) &= p_0(x, \theta) dx. \end{cases} \quad (7.1.3)$$

We will say that a random probability measure  $Q(\theta)$  on  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$  is a weak measure-solution of (7.1.2) or (7.1.3) when its time marginals solve (7.1.3).

**Remark 7.1.2.** *When  $P(d\omega) - a.s.$  and for all  $t \in [0, T]$ , the time marginals  $Q_t(dx, \theta)$  of the solution of (7.1.3) admit densities  $p(t, x, \theta)$  with respect to the Lebesgue measure  $dx$  on  $\mathbb{R}^n$ , the family of these densities is called weak function-solution of the partial differential equation. It can be viewed as a random function in  $\mathcal{C}([0, T], L^1(\mathbb{R}^n))$ , the continuity being a  $L^1$ -weak continuity.*

Let us now define the *statistical solutions* of the McKean-Vlasov problem:

**Definition 7.1.3.** *When the evolution problem (7.1.3) admits a unique weak measure-solution  $(Q_t(dx, \theta))_{t \in [0, T]}$  (up to a null-set), then the following map is  $\nu$ -a.s. well defined:*

$$\begin{aligned} S : \quad L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)) \\ p = p_0(\cdot, a) &\mapsto (Q_t(dx, a))_{t \in [0, T]}. \end{aligned}$$

The law  $m \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)))$  of the weak measure-solution of (7.1.3) can thus be written as the image measure of  $\mathcal{L}(\widehat{p}_0)$  through the mapping  $S$ , and is called *statistical solution* of the McKean-Vlasov problem:

$$m = \mathcal{L}(\widehat{p}_0) \circ S^{-1} = \nu \circ (S \circ \Phi)^{-1}, \quad (7.1.4)$$

where  $\Phi$  is defined in (7.1.1). The marginal  $Q_t(dx, \theta)$  at time  $t$  of the weak measure-solution of (7.1.3) is a random probability measure on  $\mathbb{R}^n$  whose law  $m_t \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$  is the  $t$ -time marginal of  $m$ . The probability measure  $m_t$  is called *spatial statistical solution* at time  $t$  of the McKean-Vlasov equation.

The setting of the problem can be summed up in the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{S} & \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)) \\ \omega & \mapsto & a & \mapsto & p_0(\cdot, a) & \mapsto & (Q_t(dx, a))_{t \in [0, T]} \\ P & & \nu & & \nu \circ \Phi^{-1} & & m = \nu \circ (S \circ \Phi)^{-1} \end{array}$$

When dealing with statistical solutions, only mean quantities can be computed. Since we consider random probabilities, interesting mean quantities are their intensities (see Sznitman [114]). The intensity  $I(m_t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  of  $m_t$  at time  $t$  is defined by:

$$\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \langle I(m_t), f \rangle = \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} \langle Q, f \rangle m_t(dQ) = \int_{\mathbb{R}} \langle (S \circ \Phi(a))_t, f \rangle \nu(da). \quad (7.1.5)$$

The aim of this work is to approximate (7.1.5) by using a wavelet stochastic particle method.

**Remark 7.1.4.** *When there exists a unique weak function-solution to (7.1.3), and when the initial mean energy is finite ( $\int_{\mathbb{R}} \|p_0(\cdot, a)\|_{L^2} \nu(da) < \infty$ ), the intensity  $I(m_t)$  can be linked to the first moment of the statistical solution as defined in Talay and Vaillant [117]:  $\forall t \in [0, T], \exists! M_1(t) \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \langle I(m_t), f \rangle = \langle M_1(t), f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .*

## 7.1.2 Probabilistic Approach of the Problem

We now recall the probabilistic interpretation of (7.1.2) given in Talay and Vaillant [117].

We deal here with two different sources of randomness. The first one comes from the initial condition and will be considered through the random variable  $\theta$ . The second one is related to the probabilistic approach, which consists in looking for Markovian processes whose time marginals satisfy the weak partial differential equation (7.1.3). Here, the process of interest is given by the nonlinear stochastic differential equation introduced in Theorem 7.1.1.

We state existence and uniqueness results for this stochastic differential equation, then we enounce existence and uniqueness results for the evolution equation (7.1.3).

**Assumption 7.1.5.** *The following assumptions will be made for  $b, \sigma$  and  $p_0$ :*

- (A<sub>1</sub>) *The functions  $b$  and  $\sigma$  are Lipschitz continuous functions*
- (A<sub>2</sub>) *The functions  $b$  and  $\sigma$  are bounded,*
- (A<sub>3</sub>)  *$P(d\omega) - a.s., p_0(\cdot, \theta)$  is a probability density function,*
- (A<sub>4</sub>)  *$P(d\omega) - a.s., \int x^2 p_0(x, \theta) dx < \infty$ .*

**Remark 7.1.6.** *Notice that we do not need any non-degeneracy assumption on the function  $\sigma$ .*

**Theorem 7.1.1.** *Suppose that Assumptions (A<sub>1</sub>) to (A<sub>4</sub>) are satisfied. Let  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  be a Brownian motion on  $\mathbb{R}^n$ , let  $\theta$  be a random variable of law  $\nu$  and let  $(X_0(a))_{a \in \mathbb{R}}$  be a family of random variables such that  $a \mapsto X_0(a)$  is measurable and such that  $P(d\omega) - a.s., \mathcal{L}(X_0(\theta)) = \int_{\mathbb{R}^n} p_0(x, \theta) dx$ . We assume that  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ ,  $\theta$  and  $(X_0(a))_{a \in \mathbb{R}}$  are independent. Then, pathwise existence and uniqueness are available for the following SDE:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,*

$$\begin{cases} dX_t(\theta) = u_b(t, X_t(\theta), \theta)dt + u_\sigma(t, X_t(\theta), \theta)dW_t \\ u_b(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) P^{X_t(\theta)}(dy), \quad u_\sigma(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, y) P^{X_t(\theta)}(dy) \\ \mathcal{L}(X_0(\theta)) = p_0(x, \theta)dx. \end{cases} \quad (7.1.6)$$

*Proof.* The idea of the proof is that considering the conditioned diffusion knowing  $\theta$  leads us to the study of a diffusion with an initial condition of deterministic law.

Notice first that the law of  $X_t(\theta)$  depends continuously on the initial condition  $X_0(\theta)$  (see Kunita [75]), which is itself measurable in  $\theta$ . The conditional law of  $X_t(\theta)$  knowing  $\theta$  is therefore well defined.

Since the random variable  $\theta$  is independent from the Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  and of the family of random variables  $(X_0(a))_{a \in \mathbb{R}}$ , looking at the conditional version of the stochastic differential equation (7.1.6) knowing  $\theta$  amounts to considering this equation for every realization

$a$  of  $\theta$ . Hence, we are lead to study existence and pathwise properties for the following stochastic differential equation:

$$\begin{cases} dX_t(a) = u_b(t, X_t(a), a)dt + u_\sigma(t, X_t(a), a)dW_t \\ u_b(t, x, a) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y)P^{X_t(a)}(dy), \quad u_\sigma(t, x, a) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, y)P^{X_t(a)}(dy) \\ \mathcal{L}(X_0(a)) = p_0(x, a)dx. \end{cases} \quad (7.1.7)$$

The solution  $(X_t(\theta))_{t \in [0, T]}$  of the stochastic differential equation (7.1.6) is then linked to the solution  $(X_t(a))_{t \in [0, T]}$  of the stochastic differential equation (7.1.7) by:

$$\mathcal{L}(X_t(\theta) | \theta = a) = \mathcal{L}(X_t(a)). \quad (7.1.8)$$

For a given realization  $a$  of  $\theta$ , we can use the proofs in Sznitman [114] and Méléard [92], which we recall here for completeness.

Let  $\mu = (\mu_t(dx))_{t \in [0, T]}$  be a given family of probabilities in  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$ . Let us define:

$$u_b^\mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y)\mu_t(dy), \quad u_\sigma^\mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, y)\mu_t(dy). \quad (7.1.9)$$

We can associate with the nonlinear stochastic differential equation (7.1.7) a linear stochastic differential equation by replacing  $u_b(t, x, a)$  and  $u_\sigma(t, x, a)$  with  $u_b^\mu(t, x)$  and  $u_\sigma^\mu(t, x)$ :

$$X_t^\mu(a) = X_0(a) + \int_0^t u_b^\mu(s, X_s^\mu(a))ds + \int_0^t u_\sigma^\mu(s, X_s^\mu(a))dW_s, \quad \text{for } t \in [0, T]. \quad (7.1.10)$$

The drift and diffusion coefficients  $u_b^\mu$  and  $u_\sigma^\mu$  are bounded Lipschitz continuous functions in  $x$  thanks to Assumptions (A1) and (A2). Thus, pathwise existence and uniqueness of the solution of the linear stochastic differential equation (7.1.10) hold thanks to Theorems 2.5 and 2.9 (pages 287 and 289) in Karatzas and Shreve [69].

To deduce the existence and uniqueness of a weak solution for Equation (7.1.7), we use a fixed point theorem.

First, notice that for any solution of the auxiliary stochastic differential equation (7.1.10):

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t^\mu|^2 \right) < +\infty,$$

by use of the Cauchy-Schwarz and Doob inequalities, since the coefficients  $u_b^\mu$  and  $u_\sigma^\mu$  are bounded and since the initial condition has moments of order 2 (Assumption A4). This allows us to restrict our study to the set of probability measures belonging to  $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n))$  defined as:  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^n)) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)) \mid \mu(\sup_{s \leq t} |x_s|^2) < \infty \right. \\ \left. \text{where } x_s \text{ is the canonical process on } \mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^n) \right\}.$$

The spaces  $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^n))$  for  $t \in [0, T]$ , endowed with the weak convergence, are metrisable with the Vaserstein complete metrics  $\mathcal{W}_{2,t}$ , defined for  $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^n))$  by (see [106]):

$$(\mathcal{W}_{2,t}(\mu^1, \mu^2))^2 = \inf \left( \int_{\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^n)^2} \sup_{s \leq t} |x_s - y_s|^2 \pi(dx, dy) \right),$$

the infimum being taken on all  $\pi \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)^2)$  with marginals  $\mu^1$  and  $\mu^2$ .

Weak Existence and uniqueness for Equation (7.1.7) are equivalent to the existence and uniqueness of a fixed point for the mapping:

$$\begin{aligned} \zeta_a & : \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)) & \rightarrow & \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)) \\ & \mu & \mapsto & \mathcal{L}(X^\mu(a)), \end{aligned}$$

where  $X^\mu(a)$  solves Equation (7.1.10). The latter result is obtained thanks to the completeness of  $(\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)), \mathcal{W}_{2,T})$  and to the following Lemma (proved in the sequel):

**Lemma 7.1.7.** *Let us consider the map  $\zeta_a$  defined in (7.1.11).  $\exists C_T > 0, \forall t \in [0, T]$ ,*

$$\forall \mu^1, \mu^2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)), \mathcal{W}_{2,t}(\zeta_a(\mu^1), \zeta_a(\mu^2)) \leq C_T \int_0^t \mathcal{W}_{2,u}(\mu^1, \mu^2) du. \quad (7.1.11)$$

[End of the proof of Theorem 7.1.1] Thanks to (7.1.11) we are going to prove the existence of a weak solution to Equation (7.1.7). Let  $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n))$ . We have:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{W}_{2,T}(\zeta_a^{k+1}(\mu), \zeta_a^k(\mu)) \leq \mathcal{W}_{2,T}(\zeta_a(\mu), \mu) C_T^k \frac{T^k}{k!}.$$

Thus the sequence  $(\zeta_a^k(\mu))_{k \in \mathbb{N}}$  is a Cauchy sequence in the complete space  $(\mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)), \mathcal{W}_{2,T})$ . It is therefore convergent when  $k \rightarrow \infty$  and its limit is denoted by  $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n))$ . Since Lemma 7.1.7 ensures that  $\zeta_a$  is continuous,  $\bar{\mu}$  satisfies:

$$\zeta(\bar{\mu}) = \bar{\mu}.$$

Let us show that the choice of  $T$  is not restrictive for the construction of  $\bar{\mu}$  in that the compatibility condition is satisfied. If we consider  $T' \leq T$ , we can find with the same arguments a fixed point  $\bar{\mu}'$ . Since  $\bar{\mu}|_{\mathcal{C}([0, T'], \mathbb{R}^n)}$  (restricted to the continuous functions from  $[0, T']$  in  $\mathbb{R}^n$ ) is also solution, we have by uniqueness of the fixed point of  $\zeta_a$  that  $\bar{\mu}|_{\mathcal{C}([0, T'], \mathbb{R}^n)} = \bar{\mu}'$ . Hence, the compatibility condition of Kolmogorov's Theorem is satisfied. This achieves the proof of the existence of a weak solution for Equation (7.1.7).

The uniqueness of the weak solution of Equation (7.1.7) is a consequence of the uniqueness of the fixed point of  $\zeta_a$ , since any weak solution of (7.1.7) is a fixed point of  $\zeta_a$ . Indeed, let  $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n))$  be two fixed points of  $\zeta_a$ . Then we have by (7.1.11):  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{W}_{2,t}(\zeta_a(\mu^1), \zeta_a(\mu^2)) = \mathcal{W}_{2,t}(\mu^1, \mu^2) \leq C_T \int_0^t \mathcal{W}_{2,u}(\mu^1, \mu^2) du.$$

Using Gronwall's Lemma, we obtain  $\forall t \in [0, T], \mathcal{W}_{2,t}(\mu^1, \mu^2) = 0$ .

From the weak existence and uniqueness properties, we now deduce pathwise results.

The unique weak solution  $\bar{\mu}$  of the nonlinear stochastic differential equation (7.1.7) also solves the linear stochastic differential equation (7.1.10) with  $\mu = \bar{\mu}$ . Since we have a pathwise existence result for the linear stochastic differential equation (7.1.10), we deduce pathwise existence for stochastic differential equation (7.1.7).

Let us now turn to the pathwise uniqueness of the solution of (7.1.7). For a given initial condition  $X_0(a)$  of law  $p_0(x, a)dx$  and  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  a given Brownian motion, consider two pathwise solutions  $(X_t^1(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^2(a))_{t \in [0, T]}$  of (7.1.7). Since we have uniqueness of the weak solution, these two processes have the same law  $\bar{\mu} = \mathcal{L}((X_t^1(a))_{t \in [0, T]}) = \mathcal{L}((X_t^2(a))_{t \in [0, T]})$ . Thus, these two processes also solve the same auxiliary linear stochastic differential equation (7.1.10) with  $\mu = \bar{\mu}$ . As pathwise uniqueness is available for (7.1.10), we deduce that  $(X_t^1(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^2(a))_{t \in [0, T]}$  are indistinguishable. Hence, pathwise uniqueness also holds for the nonlinear stochastic differential equation (7.1.7). ■

*Proof of Lemma 7.1.7.* Let  $a \in \mathbb{R}$  be a realization of  $\theta$ . For a random variable  $X_0(a)$  of law  $p_0(x, a)dx$ , a Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  and  $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n))$ , let  $(X_t^{\mu^1}(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^{\mu^2}(a))_{t \in [0, T]}$  be two pathwise solutions of (7.1.10) with  $\mu = \mu^1$  and  $\mu = \mu^2$ . Let  $t \in [0, T]$ . Since  $\mathcal{L}((X^{\mu^1}, X^{\mu^2}))$  is a particular coupling of  $\mu^1$  and  $\mu^2$ .

$$\begin{aligned}
(\mathcal{W}_{2,t}(\zeta_a(\mu^1), \zeta_a(\mu^2)))^2 &\leq \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{\mu^1} - X_s^{\mu^2}|^2) \\
&= \mathbb{E} \left( \sup_{s \leq t} \sum_{i=1}^n \left( \int_0^s \sum_{j=1}^n \left( (u_\sigma^{\mu^1})_{ij}(u, X_u^{\mu^1}) - (u_\sigma^{\mu^2})_{ij}(u, X_u^{\mu^2}) \right) dW_u^j \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^s \left( (u_b^{\mu^1})_i(u, X_u^{\mu^1}) - (u_b^{\mu^2})_i(u, X_u^{\mu^2}) \right) du \right)^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \sup_{s \leq t} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \int_0^s \left( (u_\sigma^{\mu^1})_{ij}(u, X_u^{\mu^1}) - (u_\sigma^{\mu^2})_{ij}(u, X_u^{\mu^2}) \right) dW_u^j \right)^2 \right) \\
&\quad + \mathbb{E} \left( \sup_{s \leq t} \sum_{i=1}^n \left( \int_0^s \left( (u_b^{\mu^1})_i(u, X_u^{\mu^1}) - (u_b^{\mu^2})_i(u, X_u^{\mu^2}) \right) du \right)^2 \right), \tag{7.1.12}
\end{aligned}$$

since the components of the Brownian motion are independent terms with non zero expectations. Using Doob and Cauchy-Schwarz inequalities,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{\mu^1} - X_s^{\mu^2}|^2) &\leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left( \int_0^t \left( (u_\sigma^{\mu^1})_{ij}(u, X_u^{\mu^1}) - (u_\sigma^{\mu^2})_{ij}(u, X_u^{\mu^2}) \right)^2 du \right) \\
&\quad + C t \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( \int_0^t \left( (u_b^{\mu^1})_i(u, X_u^{\mu^1}) - (u_b^{\mu^2})_i(u, X_u^{\mu^2}) \right)^2 du \right) \\
&\leq C \mathbb{E} \left( \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( (u_\sigma^{\mu^1})_{ij}(u, X_u^{\mu^1}) - (u_\sigma^{\mu^2})_{ij}(u, X_u^{\mu^2}) \right)^2 du \right) \\
&\quad + C T \mathbb{E} \left( \int_0^t |u_b^{\mu^1}(u, X_u^{\mu^1}) - u_b^{\mu^2}(u, X_u^{\mu^2})|^2 du \right).
\end{aligned}$$

Let us upper bound the difference  $|(u_\sigma^{\mu^1})_{ij}(u, X_u^{\mu^1}) - (u_\sigma^{\mu^2})_{ij}(u, X_u^{\mu^2})|^2$ :

$$\begin{aligned}
&\left| \int \sigma_{ij}(X_u^{\mu^1}, x) \mu_u^1(dx) - \int \sigma_{ij}(X_u^{\mu^2}, y) \mu_u^2(dy) \right|^2 \\
&\leq 2 \left| \int \sigma_{ij}(X_u^{\mu^1}, x) \mu_u^1(dx) - \int \sigma_{ij}(X_u^{\mu^2}, x) \mu_u^1(dx) \right|^2 + 2 \left| \int \sigma_{ij}(X_u^{\mu^2}, x) \mu_u^1(dx) - \int \sigma_{ij}(X_u^{\mu^2}, y) \mu_u^2(dy) \right|^2 \\
&\leq 2 \|\sigma\|_{Lip}^2 |X_u^{\mu^1} - X_u^{\mu^2}|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (\sigma_{ij}(X_u^{\mu^2}, x) - \sigma_{ij}(X_u^{\mu^2}, y))^2 \pi_u(dx, dy) \\
&\quad \text{where } \pi \text{ is a coupling of } \mu^1 \text{ and } \mu^2 \\
&\leq 2 \|\sigma\|_{Lip}^2 |X_u^{\mu^1} - X_u^{\mu^2}|^2 + 2 \|\sigma\|_{Lip}^2 \int_{\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)^2} |x_u - y_u|^2 \pi(dx, dy) \\
&\leq 2 \|\sigma\|_{Lip}^2 \left( \sup_{r \leq u} |X_r^{\mu^1} - X_r^{\mu^2}|^2 + \int_{\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)^2} \sup_{r \leq u} |x_r - y_r|^2 \pi(dx, dy) \right).
\end{aligned}$$

Using the same arguments:

$$|u_{b,i}^{\mu^1}(u, X_u^{\mu^1}) - u_{b,i}^{\mu^2}(u, X_u^{\mu^2})|^2 \leq \|b\|_{Lip}^2 \left( \sup_{r \leq u} |X_r^{\mu^1} - X_r^{\mu^2}|^2 + \int_{\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)^2} \sup_{r \leq u} |x_r - y_r|^2 \pi(dx, dy) \right)$$

where  $\pi$  is a coupling of  $\mu^1$  and  $\mu^2$ . We therefore deduce that:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{\mu^1} - X_s^{\mu^2}|^2) &\leq C_T \left( \int_0^t \mathbb{E}(\sup_{r \leq u} |X_r^{\mu^1} - X_r^{\mu^2}|^2) du + \int_0^t \int_{(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^n))^2} \sup_{r \leq u} |x_r - y_r|^2 \pi(dx, dy) du \right) \\ &\leq C_T \left( \int_0^t \mathbb{E}(\sup_{r \leq u} |X_r^{\mu^1} - X_r^{\mu^2}|^2) du + \int_0^t (\mathcal{W}_{2,u}(\mu^1, \mu^2))^2 du \right) \end{aligned}$$

by taking the infimum on all the couplings  $\pi$  of  $\mu^1$  and  $\mu^2$ . By Gronwall's Lemma:

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{\mu^1} - X_s^{\mu^2}|^2) \leq C_T \exp(C_T t) \int_0^t (\mathcal{W}_{2,u}(\mu^1, \mu^2))^2 du. \quad (7.1.13)$$

The conclusion is a consequence of (7.1.12) and (7.1.13).  $\blacksquare$

**Proposition 7.1.8.** *Under Assumptions (A<sub>1</sub>) to (A<sub>4</sub>), there exists a weak measure-solution to the partial differential equation (7.1.3).*

*Proof.* This can be seen by using Itô's formula to compute  $\mathbb{E}^\nu(\varphi(X_t(\theta)))$ , where  $\varphi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  and  $(X_t(\theta))_{t \in [0, T]}$  is the solution of (7.1.6).  $\blacksquare$

For the uniqueness result, we will use a result from Bhatt and Karandikar [6] applying to linear partial differential equations.

**Theorem 7.1.2.** *(see Bhatt and Karandikar [6], Theorem 5.2)*

*Let  $(E, d)$  be a complete separable metric space. Let  $(A_t)_{t \geq 0}$  be linear operators on  $\mathcal{C}_b(E)$  with a common domain  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_b(E)$ , and let  $\mu_0 \in \mathcal{P}(E)$ .*

*Denote  $E^0 = \mathbb{R}_+ \times E$  and define:*

$$\mathcal{D}' = \left\{ g \in \mathcal{C}_b(E^0) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, (h_i)_{i \in [1, k]} \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+), (f_i)_{i \in [1, k]} \in \mathcal{D}, \right. \\ \left. \forall t \geq 0, \forall x \in E, g(t, x) = \sum_{i=1}^k h_i(t) f_i(x) \right\}.$$

*Let  $A^0$  be the operator on  $\mathcal{C}_b(E^0)$  with domain  $\mathcal{D}'$  defined by:*

$$A^0 g(t, x) = \sum_{i=1}^k (f_i(x) h_i'(t) + h_i(t) A_t f_i(x)).$$

*Suppose that the operator  $A^0$  satisfies the following assumptions:*

*(BK<sub>1</sub>)  $\mathcal{D}'$  is an algebra that separates points*

*(BK<sub>2</sub>) There exists a countable subset of bounded functions  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ , such that  $\forall g \in \mathcal{D}'$ ,  $(g, A^0 g)$  is the pointwise limit of a sequence from  $(g_k, A^0 g_k)_{k \in \mathbb{N}}$*

*(BK<sub>3</sub>) Every progressively measurable solution to the martingale problem associated with  $A^0$  admits a càdlàg modification,*

*then, if  $(\mu_t^1)_{t \geq 0}$  and  $(\mu_t^2)_{t \geq 0} \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(E))$  satisfy:*

*(BK<sub>4</sub>) For all Borel set  $U \subset E$ ,  $t \mapsto \mu_t^1(U)$  and  $t \mapsto \mu_t^2(U)$  are measurable,*

*(BK<sub>5</sub>)  $\forall f \in \mathcal{D}$ ,  $\int_E f d\mu_t^i = \int_E f d\mu_0 + \int_0^t (\int_E A_s f d\mu_s^i) ds$  for  $i \in \{1, 2\}$ ,*

*then, we have:  $\forall t \geq 0$ ,  $\mu_t^1 = \mu_t^2$ .*

**Proposition 7.1.9.** *Suppose that Assumptions (A<sub>1</sub>) to (A<sub>4</sub>) are satisfied. Then if  $\mu^1(\theta) = (\mu_t^1(dx, \theta))_{t \in [0, T]}$  and  $\mu^2(\theta) = (\mu_t^2(dx, \theta))_{t \in [0, T]}$  are two weak measure-solutions of (7.1.3):*

$$P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T], \mu_t^1(dx, \theta) = \mu_t^2(dx, \theta).$$



*Proof.* As in the proof of Theorem 7.1.1, we work conditionally to a realization  $a$  of  $\theta$  such that Assumptions  $(A_1)$  to  $(A_4)$  are satisfied. Let us introduce the linear evolution equation associated to (7.1.3):  $\forall t \in [0, T], \forall \varphi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) Q_t(dx) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) p_0(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^n u_{b,i}^\mu(s, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (u_\sigma^\mu(s, x) u_{\sigma^*}^{\mu,*}(s, x))_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) Q_s(dx) ds \\ u_b^\mu(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) \mu_t(dy), \quad u_\sigma^\mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, y) \mu_t(dy). \end{cases} \quad (7.1.14)$$

where  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n))$ .

Consider the solutions  $(X_t^1(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^2(a))_{t \in [0, T]}$  of the linear stochastic differential equations (7.1.10) with respectively  $\mu = \mu^1(a)$  and  $\mu = \mu^2(a)$ . Using Itô's formula, we see that  $\mathcal{L}((X_t^1(a))_{t \in [0, T]})$  and  $\mathcal{L}((X_t^2(a))_{t \in [0, T]})$  are solutions of (7.1.14) with  $\mu = \mu^1(a)$  and  $\mu = \mu^2(a)$ .

Since  $\mu^1(a)$  and  $\mu^2(a)$  solve the nonlinear McKean-Vlasov partial differential equation (7.1.3), they also solve (7.1.14) with  $\mu = \mu^1(a)$  and  $\mu = \mu^2(a)$ .

The assumptions of Theorem 7.1.2 are fulfilled. In our case,  $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , and Assumptions  $(BK_1)$  is satisfied. Since  $A^0$  is a second order differential operator with smooth coefficients, it is closable and Assumption  $(BK_2)$  is satisfied. Assumption  $(BK_3)$  is also satisfied for second order differential operators with bounded coefficients (see Remark 3.1 in Bhatt and Karandikar [6]). Assumption  $(BK_4)$  is a consequence of the  $L^1$ -weak continuity implied by (7.1.3).

Thanks to Theorem 7.1.2, we have uniqueness of the solution of (7.1.14) with  $\mu = \mu^1(a)$  and  $\mu = \mu^2(a)$ , and thus:  $\forall t \in [0, T], \mathcal{L}(X_t^1(a)) = \mu_t^1(a)$ , and  $\mathcal{L}(X_t^2(a)) = \mu_t^2(a)$ .

Consequently,  $(X_t^1(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^2(a))_{t \in [0, T]}$  also solve the nonlinear stochastic differential equation (7.1.7) (Notice that the nonlinearity in Equation (7.1.7) only plays through the solutions' time marginals). Thanks to Theorem 7.1.1, uniqueness implies:  $\mathcal{L}(X^1) = \mathcal{L}(X^2)$ .

Thus:  $\forall t \in [0, T], \mu_t^1 = \mu_t^2$ . ■

## 7.2 Particle Approximations

Using the probabilistic approach of Section 7.1.2, we can now reformulate the intensity of the spatial statistical solutions defined in (7.1.5) with the diffusions (7.1.6) and (7.1.7):

**Corollary 7.2.1.** *We have  $\forall t \in [0, T], \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,*

$$\langle I(m_t), f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} f(X_t(a)) \nu(da) \quad (7.2.1)$$

$$= \mathbb{E}' f(X_t(\theta)). \quad (7.2.2)$$

**Remark 7.2.2.** *Until Chapter 8, we will assume, for the sake of simplicity, that  $n = 1$ .*

In this Section, we review three approximations for the computation of the intensity  $I(m_T)$  applied to a test function  $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  based on the probabilistic reformulations (7.2.1) and (7.2.2). This allows us to explain our purpose. The first approximation relies on the formulation (7.2.1), while the second and third ones use the expression (7.2.2). The two first approximations have been studied by Talay and Vaillant [117, 119]. The third one is an original approximation.

Here, we are interested in the case where the law  $\nu$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}$ . We refer to Talay and Vaillant [117] for the discrete case.

For numerical purposes, we will introduce Euler schemes. We will write  $\Delta t$  for the discretization step, which will be assumed constant and less than 1 for the sake of simplicity. On the interval  $[0, T]$ , we can choose for instance  $\Delta t = \frac{T}{K}$ , for  $K$  large enough, which defines  $K + 1$  discretization times  $t_k = k \Delta t$  for  $k = 0$  to  $K$ .

### 7.2.1 Existing Particle Approximations and Problematic

**Method 1:** The first "naive" idea is to return to the standard McKean-Vlasov case, using (7.2.1). This first method has been mentioned by Talay and Vaillant [117].

We set  $\theta$  to  $a$  and approximate the expectation  $\mathbb{E}f(X_T(a))$  under the integral in (7.2.1) by computing a mean over interacting particles. The latter are simulated by replacing the unknown law  $\mathcal{L}(X_t(a))$  appearing in the coefficients  $u_b(t, x, a)$  and  $u_\sigma(t, x, a)$  by the empirical law of the particle system. The convergence of the empirical law to  $\mathcal{L}(X_t(a))$  is known as *propagation of chaos* and has been described in Méléard [92] or Sznitman [114]. Once we have done this, we evaluate in turn the integral in  $a$  with a Monte-Carlo approximation.

The algorithm is thus the following:

1. We simulate  $N_1$  random variables  $(\theta_l)_{l \in [1, N_1]}$  i.i.d. of law  $\nu$ .
2. For each  $\theta_l$ , we simulate  $N_2$  particles,  $(\bar{Y}^{i, l, N_2}(\theta_l))_{i \in [1, N_2]}$ . To this purpose, we simulate  $N_2$  random initial conditions  $(\bar{Y}_0^{i, l, N_2}(\theta_l))_{i \in [1, N_2]}$  i.i.d. of law  $p_0(x, \theta_l) dx$ . Then, we define the paths of the particle system with an Euler scheme of discretization step  $\Delta t$  and of discretization times  $t_k = k \Delta t$ :  $\forall l \in [1, N_1], \forall i \in [1, N_2], \forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{t_{k+1}}^{i, l, N_2}(\theta_l) &= \bar{Y}_{t_k}^{i, l, N_2}(\theta_l) + \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} b \left( \bar{Y}_{t_k}^{i, l, N_2}(\theta_l), \bar{Y}_{t_k}^{j, l, N_2}(\theta_l) \right) \Delta t \\ &+ \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \sigma \left( \bar{Y}_{t_k}^{i, l, N_2}(\theta_l), \bar{Y}_{t_k}^{j, l, N_2}(\theta_l) \right) (W_{t_{k+1}}^{i, l} - W_{t_k}^{i, l}), \end{aligned}$$

where  $(W^{i, l})_{i \in [1, N_2], l \in [1, N_1]}$  is a  $N_1 \times N_2$ -dimensional Brownian motion, independent from the random variables  $(\theta_l)_{l \in [1, N_1]}$  and from the initial conditions  $(\bar{Y}_0^{i, l, N_2}(\theta_l))_{i \in [1, N_2], l \in [1, N_1]}$ .

3. An approximation of  $\langle I(m_T), f \rangle$  is given by:

$$\langle I(m_T), f \rangle \simeq \frac{1}{N_1} \sum_{l=1}^{N_1} \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} f \left( \bar{Y}_T^{i, l, N_2}(\theta_l) \right).$$

The corresponding approximation error, though not given by Talay and Vaillant [117], can be fairly obtained:

**Proposition 7.2.3.** *If  $b, \sigma \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , with  $\varepsilon > 0$ , and if the initial condition  $p_0$  satisfies  $(A_3)$  and  $(A_4)$ , then:  $\forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\exists C = C(T, f, b, \sigma) > 0$ ,*

$$\mathbb{E} |\langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N_1} \sum_{l=1}^{N_1} \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} f(\bar{Y}_T^{i, l, N_2}(\theta_l))| \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{N_1}} + \frac{1}{\sqrt{N_2}} + \Delta t \right).$$

The asymptotic rate of convergence here is the one of the Central Limit Theorem, which is the best we can hope with stochastic methods.

However, as pointed out by Talay and Vaillant, this method is numerically very expensive, since it uses a two-steps imbricated simulation procedure. The number of simulations at each stage has to be high. The total number of simulations,  $N_1 \times N_2$ , with  $N_1$  and  $N_2$  high, is

therefore very large: Vaillant ([119], section 3.7 page 79) showed that the complexity of this method is of order  $O(N_1 N_2^2 / \Delta t)$ .

Notice however that the assumptions required to obtain the asymptotic convergence rate of Method 1 are more general than those of the following Proposition 7.2.4 and Theorem 7.2.1.

**Methods 2 and 3:** The aim is to find numerically more efficient methods. In order to avoid imbricated simulations, we follow Talay and Vaillant [117] and consider particle approximations based on Expression (7.2.2) and Equation (7.1.6).

We approximate directly the expectation  $\mathbb{E}^\nu f(X_T(\theta))$  in (7.2.2) by computing a mean over interacting particles  $(\bar{X}_T^{i,N}(\theta_i))_{i \in [1,N]}$  whose laws are expected to be close to  $\mathcal{L}(X_T(\theta))$ .

To simulate these particles, we have to replace the unknown coefficients  $u_b(t, x, \theta)$  and  $u_\sigma(t, x, \theta)$  by quantities depending on the empirical measure of the system. Since Equation (7.1.6) can be rewritten as:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t(\theta) = \mathbb{E}^\nu (b(x, X_t(\theta)) | \theta) |_{x=X_t(\theta)} dt + \mathbb{E}^\nu (\sigma(x, X_t(\theta)) | \theta) |_{x=X_t(\theta)} dW_t \\ \mathcal{L}(X_0(\theta), \theta) = p_0(x, a) dx \nu(da) \\ W \text{ is a Brownian motion independent of the random variable } \theta \text{ and of } X_0(\theta), \end{array} \right. \quad (7.2.3)$$

(we will choose for  $(t, x) \mapsto \mathbb{E}^\nu (b(x, X_t(\theta)) | \theta)$  and  $(t, x) \mapsto \mathbb{E}^\nu (\sigma(x, X_t(\theta)) | \theta)$  continuous modifications of the conditional expectation processes), this amounts to approximating the expectations in the law of  $X_t(\theta)$  conditionally to  $\theta$ . To this purpose, we will use regression estimators.

The particle approximations which are considered here are based on the following algorithm:

1. Simulate  $N$  independent random variables  $(\theta_i)_{i \in [1,N]}$  of law  $\nu$ ,
2. For all  $i \in [1, N]$ , associate a (single) particle, defined by its initial condition  $\bar{X}_0^{i,N}(\theta_i)$  of law  $p_0(x, \theta_i) dx$  and by its trajectory described by the following Euler scheme:  $\forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K]$ ,

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N}(\theta_i) = \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i) + \widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i) \Delta t + \widehat{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i) (W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i), \quad (7.2.4)$$

where  $\widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i)$  and  $\widehat{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i)$  are regression estimators constructed on our particle system: we compute the regression of the observations  $(b(\bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j)))_{j \in [1,N]}$  on  $(\theta_j)_{j \in [1,N]}$  to approximate  $a \mapsto u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), a) = \mathbb{E}^\nu (b(x, X_{t_k}(\theta)) | \theta = a) |_{x=\bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i)}$ . The value of the regression function at point  $\theta_i$  gives us  $\widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i)$ . The same goes for  $\widehat{u}_\sigma$ .

3. The approximation of  $\langle I(m_T), f \rangle$  is then:

$$\langle I(m_T), f \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{i,N}(\theta_i)). \quad (7.2.5)$$

The two following methods use this approach, but with different regression estimators.

### **Method 2: The Particle Method with Random Weights.**

This method has been introduced by Talay and Vaillant [117]. It is based on the use of Nadaraya-Watson regression estimators to compute  $\widehat{u}_b$  and  $\widehat{u}_\sigma$ :  $\forall i \in [1, N]$ ,  $\forall k \in [0, K]$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{u}_b\left(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i\right) &= \sum_{j=1}^N \frac{H_N(\theta_i - \theta_j)}{\sum_{l=1}^N H_N(\theta_i - \theta_l)} b\left(\bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j)\right) \\ \widehat{u}_\sigma\left(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i\right) &= \sum_{j=1}^N \frac{H_N(\theta_i - \theta_j)}{\sum_{l=1}^N H_N(\theta_i - \theta_l)} \sigma\left(\bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j)\right),\end{aligned}\quad (7.2.6)$$

where  $H_N = H(\cdot/h_N)/h_N$  for a given window  $h_N$  and a given Parzen-Rosenblatt kernel  $H$  on  $\mathbb{R}$  (see Bosq and Lecoutre [11] for more information. A possible choice for  $H$  is the Gaussian density function for instance).

Talay and Vaillant [117] and Vaillant [119] computed the accuracy of this second method:

**Proposition 7.2.4.** *(Talay and Vaillant [117]) Under the following assumptions:*

1. *The functions  $b$  and  $\sigma$  are in  $\mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,*
2. *The law  $\nu$  of  $\theta$  is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure and has a strictly positive Lipschitz continuous density  $g$  supported by a compact interval  $\Theta \subset \mathbb{R}$ ,*
3. *The function  $\Phi : a \mapsto p_0(\cdot, a)$  is Lipschitz continuous for the norm in  $L^1(\mathbb{R})$ ,*
4.  *$\forall a \in \Theta$ ,  $p_0(\cdot, a)$  is a probability density function,*
5.  *$\sup_{a \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} x^4 p_0(x, a) dx < \infty$ ,*
6.  *$\lim_{N \rightarrow \infty} h_N \rightarrow 0$  and  $\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)/(Nh_N^2) = 0$ ,*
7. *The kernel  $H$  used in the weights is a Parzen-Rosenblatt kernel.*

*Consider the particle system (7.2.4) constructed with the estimators defined in (7.2.6), then:  $\forall 0 < \varepsilon < 1$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\exists C = C(T, f, b, \sigma) > 0$ ,  $\exists N_0$ ,  $\forall N \geq N_0$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu |\langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{i,N}(\theta_i))| \leq C \left( \Delta t + \frac{1}{N^{1/4} h_N^{1/4}} + h_N^{1/4} \right). \quad (7.2.7)$$

The asymptotic rate is not as accurate as for Method 1 because convergence rates of non-parametric regression estimators are slower than the ones of empirical means.

An optimisation of the right hand side in  $h_N$  tells us that a window  $h_N \sim 1/\sqrt{N}$  gives a convergence rate in  $N^{-1/8}$ . This rate is however never attained, since the condition on the window constrains us to choose  $h_N$  such that  $\log N/(Nh_N^2) \rightarrow 0$ .

However, simulations are faster than in Method 1 and less demanding in memory. The random weights  $H_N(\theta_i - \theta_j) / \left( \sum_{l=1}^N H_N(\theta_i - \theta_l) \right)$  depend only on the realizations of  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  and neither on the function being regressed, nor on  $t_k$ . These weights are thus computed once and for all at the beginning of the algorithm, when the  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  are simulated, and are then used for the computation of  $\widehat{u}_b$  and  $\widehat{u}_\sigma$  at each date  $t_k$ .

From the computations of Vaillant ([119], section 3.7 page 79), we know that the complexity of this method is of order  $O(N^2/\Delta t)$ .

### 7.2.2 Method 3: The Wavelet Particle Approximation

We now propose a third method. It is based on the algorithm (7.2.4) with the choice of truncated warped wavelet regression estimators for the computation of  $\widehat{u}_b$  and  $\widehat{u}_\sigma$ . These estimators are inspired by the work of Kerkycharian and Picard [72]. A short review on the wavelet theory and on wavelet regression in random design is given in Appendices B.1 and B.2.

Until the end of this Chapter, we will consider the following Assumptions:

**Assumption 7.2.5.** 1. The functions  $b, \sigma \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,

2. The law  $\nu$  of  $\theta$  admits a density  $g$  with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}$ . The support  $\Theta$  of  $g$  is assumed to be connected,

3. The law  $\nu$  satisfies a Logarithmic Sobolev Inequality on  $\mathbb{R}$ :

$$\exists c_0 > 0, \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \langle \nu, f^2 \log f^2 \rangle - \langle \nu, f^2 \rangle \log(\langle \nu, f^2 \rangle) \leq c_0 \langle \nu, |\nabla f|^2 \rangle.$$

4.  $P(d\omega) - a.s., p_0(\cdot, \theta)$  is a probability density function with exponential tails:

$$\exists \varsigma_0 > 0, \exists C_1, C_2 > 0, \forall \varsigma > \varsigma_0, \forall a \in \Theta, \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x| > \varsigma} p_0(x, a) dx \leq C_1 e^{-C_2 \varsigma}.$$

5. The probability law  $p_0(x, \theta) dx$  has second order moments in the sense of Assumption (A4).

6. The functions  $\Phi : a \in \Theta \mapsto p_0(\cdot, a)$  and  $\Phi \circ G^{-1}$  are respectively  $L_0$ -Lipschitz continuous and  $s$ -Hölder continuous, with  $s > 1/2$ , for the  $L^2$ -Vaserstein metric (we identify the probability functions  $p_0(\cdot, a)$  with the associated probability measure  $p_0(x, a) dx$ ):

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{W}_2(\mu_1, \mu_2) = \inf \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^2 \pi(dx, dy)},$$

the infimum being taken on the probability measures  $\pi$  of  $\mathbb{R}^2$  with  $\mu_1$  and  $\mu_2$  as first and second marginals.

7. We consider a father wavelet  $\phi$  and a mother wavelet  $\psi$  which are assumed to be Lipschitz continuous, with compact support (and hence belonging to  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ). Notice that the following moment properties are then satisfied:

$$\int (1 + |\alpha|) |\phi(\alpha)| d\alpha < \infty, \quad \text{and} \quad \int (1 + |\alpha|) |\psi(\alpha)| d\alpha < \infty \quad (7.2.8)$$

**Definition 7.2.6.** We introduce the following definitions which will be used to define the particle approximation:

1. In the following, we denote by  $G$  the distribution function of  $\theta$ . Because of the assumptions on  $g$ ,  $G$  defines a bijection from the interior of  $\Theta$  into  $]0, 1[$ .

We also define  $G_N$  the empirical equivalent of  $G$ :

$$\forall a \in \mathbb{R}, G_N(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\theta_i \leq a}. \quad (7.2.9)$$

2. We introduce the following threshold level that will be used in the approximation:

$$\vartheta_N = \kappa \sqrt{\frac{\log N}{N}} \quad (7.2.10)$$

where  $\kappa$  is a positive constant that depends only on  $b, \sigma, c_0, L_0, \phi$  and  $\psi$  (see (7.4.23) in the proof for a precise condition on  $\kappa$  and (7.4.25) and (7.4.26) for more simple sufficient conditions).

3. We also define the resolution level  $I_N$  satisfying:

$$2^{I_1^N} \sim \vartheta_N^{-1}. \quad (7.2.11)$$

Let us consider a Multi-Resolution Analysis generated by the father wavelet  $\phi$  and the mother wavelet  $\psi$  defined in Point 7 of Assumptions 7.2.5 (see Appendix B.1 for more details). We define the descendants of  $\psi$  by

$$\psi_I(\alpha) = 2^{I_1/2} \psi(2^{I_1} \alpha - I_2) \quad (7.2.12)$$

where  $I = (I_1, I_2)$  is a double index with  $I_1 \geq 0$  and  $I_2 \in \mathbb{Z}$ . To simplify notations,  $\phi$  is often written  $\psi_{-1,0}$ , and we define for any  $I_2 \in \mathbb{Z}$ ,

$$\psi_{-1I_2}(\alpha) = \phi(\alpha - I_2). \quad (7.2.13)$$

A wavelet decomposition on the Multi-Resolution Analysis  $(\psi_I)_{I_1 \geq -1, I_2 \in \mathbb{Z}}$  is available for any function of  $L^2$  (see Appendix B.1).

The following properties concerning wavelet bases  $(\psi_I)_{I_1 \geq -1, I_2 \in \mathbb{Z}}$  will be very useful (see Appendix B.3 for proofs).

**Proposition 7.2.7.** *Let  $(\psi_I)_I$  be a Multi-Resolution Analysis on  $\mathbb{R}$  generated by compactly supported wavelets.*

- (i)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall I_1 \geq -1, \text{card}\{I_2 \in \mathbb{Z} \mid \alpha \in \text{supp}(\psi_{I_1, I_2})\} < \infty$  and does not depend on  $I_1$ .
- (ii) Let  $\mathcal{I}$  be a compact interval of  $\mathbb{R}$ .  $\forall I_1 \geq -1, \text{card}\{I_2 \in \mathbb{Z} \mid \text{supp}(\psi_{I_1, I_2}) \cap \mathcal{I} \neq \emptyset\} \leq C 2^{I_1}$  where  $C$  does not depend on  $I_1$ .

Recall that our aim is to approximate the conditional expectation:

$$u_b(t_k, x, a) = \mathbb{E}^\nu (b(x, X_{t_k}(\theta)) \mid \theta = a).$$

Since the same holds with  $u_\sigma$ , we will only consider  $u_b$  in the sequel.

The map  $\alpha \in [0, 1] \mapsto u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  is a bounded function, which we can consider as a bounded function on  $\mathbb{R}$  with support in  $[0, 1]$ . It belongs to  $L^2([0, 1])$  and a wavelet expansion on the Multi-Resolution Analysis  $(\psi_I)_I$  is thus available for this function:

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \beta_I^{(b, t_k)}(x) \psi_I(\alpha).$$

This is equivalent to the expansion of  $a \in \mathbb{R} \mapsto u_b(t, x, a)$  on the warped wavelet basis  $(\psi_I \circ G)_I$ :

$$\forall a \in \Theta, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, u_b(t_k, x, a) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \beta_I^{(b, t_k)}(x) \psi_I(G(a)). \quad (7.2.14)$$

The coefficients  $\beta_I^{(b,t_k)}(x)$  can be expressed with respect to these two equivalent expansions:

$$\beta_I^{(b,t_k)}(x) = \int_{[0,1]} \psi_I(\alpha) u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha = \int_{\mathbb{R}} \psi_I(G(a)) u_b(t_k, x, a) \nu(da). \quad (7.2.15)$$

Using (7.2.14) and (7.2.15), we propose the following regression estimator  $\widehat{u}_b$  to approximate  $u_b$  (To see how this estimator has been built, refer to Appendix B.2):

$$\forall a \in \Theta, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{u}_b(t_k, x, a, \vartheta_N) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \widetilde{\beta}_I^{(b,t_k,\vartheta_N)}(x) \psi_I(G_N(a)) \quad (7.2.16)$$

$$\text{with: } \widehat{\beta}_I^{(b,t_k)}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_I(G_N(\theta_j)) b\left(x, \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j)\right), \text{ and } \widetilde{\beta}_I^{(b,t_k,\vartheta_N)}(x) = \text{thr}\left(\widehat{\beta}_I^{(b,t_k)}(x), \vartheta_N\right), \quad (7.2.17)$$

where  $\vartheta_N$  is the threshold level defined in (7.2.10),  $I_1^N$ , the resolution level (7.2.11) and  $\text{thr}(x, \lambda)$  the thresholding function. It is possible to choose a soft thresholding or a hard thresholding function as below:

$$\text{thr}(x, \vartheta) = [|x| - \vartheta]_+ \text{sign}(x), \quad \text{thr}(x, \vartheta) = x \mathbf{1}_{|x| \geq \vartheta}$$

where  $[x]_+$  denotes the positive part of  $x$ . In the sequel, we will focus on hard thresholded estimators, but all results also hold if we use a soft thresholding function.

The expression of estimators (7.2.17) is simpler when we rank the couples  $(\theta_j, \bar{X}_{t_k}^{j,N}(\theta_j))_{j \in [1,N]}$  in increasing order of  $(\theta_j)_{j \in [1,N]}$ . The ranked sequence of  $(\theta_j)_{j \in [1,N]}$  is denoted by  $(\theta_{(j)})_{j \in [1,N]}$ . The ranked couples are denoted by  $(\theta_{(j)}, \bar{X}_{t_k}^{(j),N}(\theta_{(j)}))_{j \in [1,N]}$  (with the index  $j$  between parenthesis). The estimators (7.2.17) can then be rewritten as:

$$\widehat{\beta}_I^{(b,t_k)}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_I\left(\frac{j}{N}\right) b\left(x, \bar{X}_{t_k}^{(j),N}(\theta_{(j)})\right). \quad (7.2.18)$$

**Remark 7.2.8.** *In the proofs, it will sometimes be crucial to work with the regular grid  $(j/N)_{j \in \mathbb{N}^*}$  (see Lemmas 7.4.4, 7.4.5 or 7.6.1 for instance). This grid naturally appears when using the empirical distribution function  $G_N$  instead of  $G$ .*

*This has other advantages. Notice that Expression (7.2.18) corresponds to the wavelet coefficient estimator of a regression computed on an equi-spaced design (i.e. the family  $(\theta_i)_{i \in [1,N]}$  is replaced by the deterministic sequence  $(i/N)_{i \in [1,N]}$ ). This type of estimator has often been already implemented in statistical softwares, which makes implementations a lot easier.*

*The estimators (7.2.17) and (7.2.18) can be computed even if the distribution function  $G$  is unknown. This can happen when the simulation procedure for the  $\theta_i$  is complicated, or when the initial condition is obtained from data.*

*In counterpart, the use of  $G_N$  instead of  $G$  introduces technical difficulties in the proofs, that we could unfortunately not avoid.*  $\square$

When we plug the regression estimators (7.2.16) in the particle system defined in (7.2.4), with  $x = \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i)$  and  $a = \theta_i$ , we obtain the particle system on which Method 3 is based:

**Definition 7.2.9.** *Let  $(\theta_i)_{i \in [1,N]}$  be i.i.d. variables of law  $\nu$ , let  $(\bar{X}_0^{i,N}(\theta_i))_{i \in [1,N]}$  be independent random variables of laws  $p_0(x, \theta_i) dx$ , and let  $W = (W^1, \dots, W^N)$  be a  $N$ -dimensional Brownian*

motion independent of the variables  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  and of  $(\bar{X}_0^{i, N}(\theta_i))_{i \in [1, N]}$ . Introduce the coefficients  $\tilde{\beta}_I^{(b, t_k, \vartheta_N)}(x)$  and  $\tilde{\beta}_I^{(\sigma, t_k, \vartheta_N)}(x)$  as in (7.2.17). We can define the following particle system:  $\forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K]$ ,

$$\begin{aligned} \bar{X}_{t_{k+1}}^{i, N}(\theta_i) &= \bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i) + \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}_I^{(b, t_k, \vartheta_N)}(\bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i)) \psi_I(G_N(\theta_i)) \Delta t \\ &+ \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}_I^{(\sigma, t_k, \vartheta_N)}(\bar{X}_{t_k}^{i, N}(\theta_i)) \psi_I(G_N(\theta_i)) \left( W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i \right). \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

Our main result deals with the convergence rate of this method:

**Theorem 7.2.1.** *Under Assumptions 7.2.5, and considering the Definitions 7.2.6, the particle system of Definition 7.2.9 is well defined and satisfies:  $\forall 0 < \varepsilon < 1, \forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}, \exists C > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*, \forall N \geq N_0, \forall \Delta t \leq 1$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu \left| \langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{i, N}(\theta_i)) \right| \leq C \left( \Delta t + \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} \right). \quad (7.2.20)$$

The asymptotic convergence rate of this method, still slower than the one of Method 1, is better than the one of Method 2, given by Proposition 7.2.4,  $N^{-1/4}$  being more accurate than the preceding  $N^{-1/8}$ .

Compared with Proposition 7.2.4, Theorem 7.2.1 allows weaker assumptions for the law of  $\theta$  which characterizes the alea of the initial condition. The support of the law  $\nu$  does not need to be a compact interval of  $\mathbb{R}$  and the density  $g$  of  $\nu$  is not necessarily bounded below by a positive constant. A much larger class of probability laws is then available to parameterize the randomness of the initial condition  $\hat{p}_0$ .

Notice moreover that the optimal choice of the window  $h_N$  in Method 2 (see Proposition 7.2.4) usually depends on the regularities of  $\Phi$  and  $g$ , which may be unknown or hard to obtain (see Bosq and Lecoutre [11]). Here, the parameters  $\vartheta_N$  and  $I_N^1$  only depend on the number of particles and on basic bounds for  $c_0, b$  and  $\sigma$  (not on the regularity  $s$  of  $\Phi \circ G^{-1}$ ). In Chapter 8, we will consider, under the assumption that the regularity  $s$  is known, a non-thresholded version of the estimators (7.2.16). In this case, the choice of the resolution level  $I_1^N$  depends on  $s$ , but the convergence rates will be better.

Numerically, this method is more demanding than Method 2, since the regression estimators have to be recomputed entirely at each date because of the thresholding procedure. Still, if we use the Mallat cascade algorithm, which complexity is of order  $O(N)$  (see Härdle *et al.* [61], Chapter 12, page 223, or Mallat [80] Chapter VII, sections 7.3 and 7.5), the complexity of Method 3 remains in  $O(N^2/\Delta t)$ , which is better than Method 1 and equivalent to the complexity of Method 2.

Simulations carried in Chapter 8 for the Navier-Stokes Equation seem to show that Method 3 is more robust than Methods 1 or 2.

### 7.3 Convergence Rate of the Wavelet Particle Approximation

In this section, we will prove Theorem 7.2.1, which gives the asymptotic convergence rate of the wavelet approximation (7.2.5) constructed on the particle system (7.2.19). We work under the assumptions of this theorem.



Let us first introduce some objects we will use for the proof. The Euler scheme associated with the stochastic differential equation (7.1.6) is given by:  $\forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}}(\theta) = \bar{X}_{t_k}(\theta) + u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(\theta), \theta)\Delta t + u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(\theta), \theta) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\ \bar{X}_0 = X_0. \end{cases} \quad (7.3.1)$$

We consider as well i.i.d. copies of this Euler scheme coupled with the particles defined in (7.2.19) (same parameters  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ , same initial conditions  $(\bar{X}_0^{i, N}(\theta_i))_{i \in [1, N]}$  and same Brownian motions  $(W^i)_{i \in [1, N]}$ ):  $\forall i \in [1, N]$ ,  $\forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}}^i(\theta_i) = \bar{X}_{t_k}^i(\theta_i) + u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i(\theta_i), \theta_i)\Delta t + u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^i(\theta_i), \theta_i) (W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i) \\ \bar{X}_0^i = \bar{X}_0^{i, N}. \end{cases} \quad (7.3.2)$$

We introduce the analogue of the coefficient estimator  $\hat{\beta}_I^{(b, t_k)}(x)$  defined in (7.2.18) that is computed on the nonlinear independent particles (7.3.2):

$$\forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \forall I \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})), \quad (7.3.3)$$

and the associated analogue of the regression estimator (7.2.16):

$$\forall a \in \Theta, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \check{u}_b(t_k, x, a, \vartheta_N) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x), \vartheta_N \right) \psi_I(G_N(a)). \quad (7.3.4)$$

In the sequel, we will also need the wavelet decomposition of the function  $a \in \Theta \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, a) := \mathbb{E}^\nu (b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) | \theta = a)$  on the warped wavelet basis  $(\psi_I \circ G)_I$ :

$$\forall a \in \Theta, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \bar{u}_b(t_k, x, a) = \sum_I \bar{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \psi_I(G(a)), \quad (7.3.5)$$

with:

$$\bar{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) = \int \psi_I(G(a)) \mathbb{E}^\nu (b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) | \theta = a) \nu(da) = \mathbb{E}^\nu (\psi_I(G(\theta)) b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta))). \quad (7.3.6)$$

**Lemma 7.3.1.** *i) For  $x \in \mathbb{R}$  and  $t \in [0, T]$ , the functions  $a \in \Theta \mapsto u_b(t, x, a)$  and  $a \in \Theta \mapsto u_\sigma(t, x, a)$  are Lipschitz-continuous and the functions  $\alpha \in [0, 1] \mapsto u_b(t, x, G^{-1}(\alpha))$  and  $\alpha \in [0, 1] \mapsto u_\sigma(t, x, G^{-1}(\alpha))$  are  $s$ -Hölder continuous, where  $s$  is the regularity of the function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto p_0(\cdot, G^{-1}(\alpha))$  that appears in Point 6 of Assumptions 7.2.5.*

*ii) For  $x \in \mathbb{R}$  and  $k \in [0, K]$  with  $K = \lceil T/\Delta t \rceil$ , the functions  $a \in \Theta \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, a)$  and  $a \in \Theta \mapsto \bar{u}_\sigma(t_k, x, a)$  are Lipschitz-continuous and the functions  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  and  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \bar{u}_\sigma(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  are  $s$ -Hölder continuous.*

*Proof.* Let us prove Point (i). Let  $a_1, a_2 \in \Theta$ ,  $(X_t(a_1))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t(a_2))_{t \in [0, T]}$  be two nonlinear diffusions satisfying (7.1.7) defined with the same Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ , and with the initial conditions  $X_0(a_1)$  and  $X_0(a_2)$  of laws  $p_0(y, a_1)dy$  and  $p_0(y, a_2)dy$ . For  $t \in [0, T]$  and  $x \in \mathbb{R}$ :

$$|u_b(t, x, a_1) - u_b(t, x, a_2)| \leq |\mathbb{E}^\nu (b(x, X_t(a_1)) - b(x, X_t(a_2)))| \leq \|b\|_{Lip} \sqrt{\mathbb{E}^\nu (|X_t(a_1) - X_t(a_2)|^2)}. \quad (7.3.7)$$

Using Itô's formula:

$$\begin{aligned}
& |X_t(a_1) - X_t(a_2)|^2 = |X_0(a_1) - X_0(a_2)|^2 \\
& + \int_0^t 2(X_s(a_1) - X_s(a_2))(u_b(s, X_s(a_1), a_1) - u_b(s, X_s(a_2), a_2)) ds \\
& + \int_0^t 2(X_s(a_1) - X_s(a_2))(u_\sigma(s, X_s(a_1), a_1) - u_\sigma(s, X_s(a_2), a_2)) dW_s \\
& + \int_0^t (u_\sigma(s, X_s(a_1), a_1) - u_\sigma(s, X_s(a_2), a_2))^2 ds.
\end{aligned}$$

Since:

$$\begin{aligned}
& |u_b(s, X_s(a_1), a_1) - u_b(s, X_s(a_2), a_2)| \leq |u_b(s, X_s(a_1), a_1) - u_b(s, X_s(a_1), a_2)| \\
& + |u_b(s, X_s(a_1), a_2) - u_b(s, X_s(a_2), a_2)| \\
& \leq \|b\|_{Lip} \mathbb{E}^\nu (|X_s(a_1) - X_s(a_2)|) + \left| \int_{\mathbb{R}} (b(X_s(a_1), y) - b(X_s(a_2), y)) P^{X_s(a_2)}(dy) \right| \\
& \leq \|b\|_{Lip} \mathbb{E}^\nu (|X_s(a_1) - X_s(a_2)|) + \|b\|_{Lip} |X_s(a_1) - X_s(a_2)|
\end{aligned}$$

and similarly:

$$|u_\sigma(s, X_s(a_1), a_1) - u_\sigma(s, X_s(a_2), a_2)| \leq \|\sigma\|_{Lip} \mathbb{E}^\nu (|X_s(a_1) - X_s(a_2)|) + \|\sigma\|_{Lip} |X_s(a_1) - X_s(a_2)|,$$

we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\nu (|X_t(a_1) - X_t(a_2)|^2) &= \mathbb{E}^\nu (|X_0(a_1) - X_0(a_2)|^2) + \int_0^t (2 + 4\|b\|_{Lip}^2 + 8\|\sigma\|_{Lip}^2) \mathbb{E}^\nu (|X_s(a_1) - X_s(a_2)|^2) ds \\
&\leq e^{(2+4\|b\|_{Lip}^2+8\|\sigma\|_{Lip}^2)T} \mathbb{E}^\nu (|X_0(a_1) - X_0(a_2)|^2),
\end{aligned}$$

by Gronwall's Inequality. Hence:

$$|u_b(t, x, a_1) - u_b(t, x, a_2)| \leq C(T) \sqrt{\mathbb{E}^\nu (|X_0(a_1) - X_0(a_2)|^2)}.$$

Notice that no assumption has been made on the joint law of  $(X_0(a_1), X_0(a_2))$ . Taking the infimum on every possible joint laws with marginals  $p_0(y, a_1)dy$  and  $p_0(y, a_2)dy$  gives:

$$|u_b(t, x, a_1) - u_b(t, x, a_2)| \leq C(T) \mathcal{W}_2(p_0(y, a_1)dy, p_0(y, a_2)dy) \leq C(T) |a_1 - a_2|, \quad (7.3.8)$$

thanks to Point 6 of Assumptions 7.2.5. Replacing  $a_1$  and  $a_2$  with  $G^{-1}(\alpha_1)$  and  $G^{-1}(\alpha_2)$  for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2 \in [0, 1]$  gives in the same manner the  $s$ -Hölder continuity of  $\alpha \mapsto u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$ . The proofs for  $u_\sigma$  are similar.

Let us now prove (ii). Let  $(\bar{X}_t(a_1))_{t \in [0, T]}$  and  $(\bar{X}_t(a_2))_{t \in [0, T]}$  be the two Euler Schemes defined as in (7.3.1) and associated with  $(X_t(a_1))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t(a_2))_{t \in [0, T]}$  (same Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ , and same initial conditions  $X_0(a_1)$  and  $X_0(a_2)$ ). As in (7.3.7):  $\forall k \in [0, K-1]$ ,

$$|\bar{u}_b(t_{k+1}, x, a_1) - \bar{u}_b(t_{k+1}, x, a_2)| \leq \|b\|_{Lip} \sqrt{\mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2)|^2)}. \quad (7.3.9)$$

From the definition, for any  $k \in [0, K-1]$ :

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2) &= \bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2) + (u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)) \Delta t \\
&+ (u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).
\end{aligned}$$

Taking the square, then the expectation:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2)|^2 \right) = \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)|^2 \right) \\
& + \mathbb{E}^\nu \left( |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right) \Delta t^2 \\
& + \mathbb{E}^\nu \left( |u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right) \Delta t \\
& + 2\Delta t \mathbb{E}^\nu \left( (\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)) (u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)) \right) \\
& + 2\mathbb{E}^\nu \left( (\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)) (u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right) \quad (7.3.10) \\
& + 2\Delta t \mathbb{E}^\nu \left( (u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)) \right. \\
& \times \left. (u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right).
\end{aligned}$$

The last two terms are zero. This can be seen if we condition by the  $\sigma$ -field  $\sigma(\bar{X}_0(a_1), \bar{X}_0(a_2), (W_t)_{t \leq t_k})$ . Given that  $2ab \leq a^2 + b^2$ , an upper bound of the fourth term in (7.3.10) is:

$$\Delta t \left[ \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)|^2) + \mathbb{E}^\nu \left( |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right) \right].$$

Hence for  $\Delta t \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2)|^2 \right) & \leq (1 + \Delta t) \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)|^2 \right) \\
& + 2\Delta t \mathbb{E}^\nu \left( |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right) \\
& + \Delta t \mathbb{E}^\nu \left( |u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Using the triangular inequality and Point (i):

$$\begin{aligned}
& |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)| \\
& \leq |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_2)| + |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_2) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)| \\
& \leq \|u_b\|_{Lip} |a_1 - a_2| + \|b\|_{Lip} |\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)|,
\end{aligned}$$

and hence:

$$\mathbb{E}^\nu \left( |u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right) \leq 2\|u_b\|_{Lip}^2 |a_1 - a_2|^2 + 2\|b\|_{Lip}^2 \mathbb{E} \left( |\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)|^2 \right).$$

The same inequality holds for  $\mathbb{E}^\nu \left( |\bar{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_1), a_1) - \bar{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}(a_2), a_2)|^2 \right)$  and thus there exists two constants  $C, C' > 0$  such that:

$$\mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2)|^2 \right) \leq C' \Delta t |a_1 - a_2|^2 + (1 + C\Delta t) \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}(a_1) - \bar{X}_{t_k}(a_2)|^2 \right),$$

and by induction:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2)|^2 \right) \\
& \leq C' \Delta t |a_1 - a_2|^2 \sum_{l=0}^k (1 + C\Delta t)^l + (1 + C\Delta t)^{k+1} \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_0(a_1) - \bar{X}_0(a_2)|^2 \right) \\
& \leq C' |a_1 - a_2|^2 \frac{(1 + C\Delta t)^{k+1} - 1}{C} + (1 + C\Delta t)^{k+1} \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_0(a_1) - \bar{X}_0(a_2)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Using that  $k + 1 \leq K = [T/\Delta t]$ , and that for all  $x > -1$ ,  $\log(1 + x) \leq x$  we obtain:

$$(1 + C\Delta t)^{k+1} = \exp((k + 1) \log(1 + C\Delta t)) \leq \exp\left(\frac{T}{\Delta t} C\Delta t\right) = e^{CT}. \quad (7.3.11)$$

Hence there exists a positive constant  $C(T)$  that depends only on  $T$  such that:

$$\mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_{t_{k+1}}(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}(a_2)|^2 \right) \leq C(T) \left( |a_1 - a_2|^2 + \mathbb{E}^\nu \left( |\bar{X}_0(a_1) - \bar{X}_0(a_2)|^2 \right) \right) \leq C(T) |a_1 - a_2|^2,$$

thanks to the same argument as in (7.3.8) and Point 6 of Assumptions 7.2.5. Replacing  $a_1$  and  $a_2$  with  $G^{-1}(\alpha_1)$  and  $G^{-1}(\alpha_2)$  for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2 \in [0, 1]$  gives in the same manner the  $s$ -Hölder continuity of  $\alpha \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$ . The proofs for  $\bar{u}_\sigma$  are similar.  $\blacksquare$

**Remark 7.3.2.** From now on, we will write with a notational abuse  $\bar{X}_{t_k}^i$ ,  $\bar{X}_{t_k}^{i,N}$ ,  $\bar{X}_{t_k}^{(i)}$  and  $\bar{X}_{t_k}^{(i),N}$  instead of  $\bar{X}_{t_k}^i(\theta_i)$ ,  $\bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i)$ ,  $\bar{X}_{t_k}^{(i)}(\theta_{(i)})$  and  $\bar{X}_{t_k}^{(i),N}(\theta_{(i)})$  respectively.

*Proof of Theorem 7.2.1.* We can decompose the approximation error at time  $T$  in three sources:

$$\langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \left( \bar{X}_T^{i,N} \right) = T_1 + T_2 + T_3, \quad (7.3.12)$$

$$\text{where: } T_1 = \langle I(m_T), f \rangle - \mathbb{E}^\nu \left( f(\bar{X}_T(\theta)) \right)$$

$$T_2 = \mathbb{E}^\nu \left( f(\bar{X}_T(\theta)) \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \left( \bar{X}_T^i \right)$$

$$T_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \left( \bar{X}_T^i \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \left( \bar{X}_T^{i,N} \right).$$

The discretization error  $T_1$  can be upper bounded thanks to the following result due to Talay and Vaillant ([117], Proposition 5.1), which generalizes a result from Talay and Tubaro [116]:

**Theorem 7.3.1.** (Talay and Vaillant [117]) For  $b$  and  $\sigma$  in  $\mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists C = C(T, f, b, \sigma) > 0, \forall a \in \Theta, |\mathbb{E}f(X_T(a)) - \mathbb{E}f(\bar{X}_T(a))| \leq C \Delta t. \quad (7.3.13)$$

The constant  $C = C(T, f, b, \sigma)$  can be upper bounded uniformly in  $a$  by a sum of terms of type  $\|\partial_x^{(i)} b\|_\infty \|\partial_x^{(j)} \sigma\|_\infty \|f^{(k)}\|_\infty$  for  $0 \leq i, j, k \leq 4$ . Integrating over  $a$ , we obtain:

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\varepsilon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists C = C(T, f, b, \sigma) > 0, |\mathbb{E}^\nu \left( f(X_T(\theta)) \right) - \mathbb{E}^\nu \left( f(\bar{X}_T(\theta)) \right)| \leq C \Delta t. \quad (7.3.14)$$

We use the Central Limit Theorem to upper bound the  $L^1$ -norm of the statistical error  $T_2$ :

$$\exists C > 0, \mathbb{E}^\nu \left| \mathbb{E}^\nu \left( f(\bar{X}_T(\theta)) \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \left( \bar{X}_T^i \right) \right| \leq \frac{C \|f\|_\infty}{\sqrt{N}}. \quad (7.3.15)$$

Now let us focus on the Term  $T_3$ . The difficulty here is that the classical propagation of chaos is not available since the particles  $\bar{X}^{i,N}$  are not in mean-field interactions.

From the definition, for any  $i \in [1, N]$  and any  $k \in [0, K - 1]$ :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{t_{k+1}}^i - \bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N} &= \bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_{t_k}^{i,N} + \left( u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right) \Delta t \\ &\quad + \left( u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \widehat{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right) \left( W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i \right). \end{aligned}$$

We proceed as in the proof of Lemma 7.3.1 and use the same arguments as in (7.3.10). This leads us to:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{X}_{t_{k+1}}^i - \bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N} \right|^2 \right) &\leq (1 + \Delta t) \mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_{t_k}^{i,N} \right|^2 \right) \\ &\quad + (\Delta t + (\Delta t)^2) \mathbb{E}^\nu \left( \left| u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \\ &\quad + \Delta t \mathbb{E}^\nu \left( \left| u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \widehat{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Let us introduce the notation:

$$S_N(t_{k+1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu |\bar{X}_{t_{k+1}}^i - \bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N}|^2.$$

By summation, and for  $\Delta t \leq 1, \forall k \in [0, K-1]$ :

$$S_N(t_{k+1}) \leq (1 + \Delta t)S_N(t_k) + C \Delta t (A_1(k, N) + A_2(k, N)), \quad (7.3.16)$$

where  $A_1(k, N)$  and  $A_2(k, N)$  are given by:  $\forall k \in [0, K]$ ,

$$\begin{aligned} A_1(k, N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \\ A_2(k, N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| u_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \widehat{u}_\sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

Our purpose is now to upper bound  $A_1(k, N)$  and  $A_2(k, N)$ . Since the terms in  $b$  and in  $\sigma$  are similar, we do the computations only for  $A_1(k, N)$ . We have:

$$A_1(k, N) \leq 3(B_1(k, N) + B_2(k, N) + B_3(k, N)),$$

$$\begin{aligned} \text{where: } B_1(k, N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) \right|^2 \right) \\ B_2(k, N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \\ B_3(k, N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i, \vartheta_N) - \widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

The term  $B_1(k, N)$  results from the discretization step and can be handled with arguments similar to those used to obtain (7.3.13). We replace  $T$  with  $t_k$ ,  $f$  with  $b(x, \cdot)$ , and choose  $\theta_i$  as  $a$ . Taking the expectation and summing over the particles gives:  $B_1(k, N) \leq C(\Delta t)^2$ .

The term  $B_2(k, N)$  looks like a regression error except that the function being regressed,  $a \mapsto \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, a)$  depends on a random parameter  $\bar{X}_{t_k}^i$ .

**Lemma 7.3.3.** *Under Assumptions 7.2.5, there exists  $\kappa > 0$  such that for*

$$\vartheta_N = \kappa \sqrt{\frac{\log N}{N}},$$

*we have:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \leq C(\log N)^2 \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}. \quad (7.3.17)$$

The proof of Lemma 7.3.3 stands in Section 7.5 and it is based on the following Lemma, which is proved in Section 7.4.

**Lemma 7.3.4.** *Under Assumptions 7.2.5, the coefficients  $\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(x)$  and  $\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(x)$ , defined in (7.3.3) and (7.3.6) respectively, satisfy:  $\forall \gamma > 0, \exists \kappa = \kappa(\gamma, c_0, L_0, b, \sigma, \phi, \psi), \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C}{N\gamma}. \quad (7.3.18)$$

In the proof of Lemma 7.3.3, we will use the result of Lemma 7.5.1 with  $\gamma > 7/2$ . Then the constant  $\kappa$  that should be chosen in Lemma 7.3.3 is given by  $\kappa(7/2, c_0, L_0, b, \sigma, \phi, \psi)$  found in Lemma 7.5.1 (see Equation (7.4.23) in the proof for the accurate expression of  $\kappa$ ).

Finally, we upper bound  $B_3(k, N)$  with the following lemma, proved in Section 7.6:

**Lemma 7.3.5.** *Under Assumptions 7.2.5, we have:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \left[ \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) - \text{thr} \left( \widehat{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^{i, N}), \vartheta_N \right) \right] \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \right| \\ & \leq C \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_{t_k}^{i, N} \right|^2 \right) + \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.19)$$

Let us come back to the proof of Theorem 7.2.1. Gathering the upper bounds of  $A_1(k, N)$  and  $A_2(k, N)$  in (7.3.16), we deduce:

$$\begin{aligned} S_N(t_{k+1}) & \leq (1 + C \Delta t) S_N(t_k) + C \Delta t \left( (\Delta t)^2 + (\log N)^2 \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}} + \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\ & \leq (1 + C \Delta t)^{k+1} S_N(0) + \frac{(1 + C \Delta t)^{k+1} - 1}{C \Delta t} C \Delta t \left( (\Delta t)^2 + (\log N)^2 \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}} + \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right), \end{aligned}$$

since  $s > 1/2$  implies that

$$\frac{2s}{1+2s} > \frac{1}{2}$$

(equality being achieved with the limiting case  $s = 1/2$ ), we have for sufficiently large  $N$ :

$$(\log N)^2 \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}} < \sqrt{\frac{\log N}{N}}.$$

Hence, using the same argument as in (7.3.11), and since  $S_N(0) = 0$  and  $\Delta t \leq 1$ :

$$S_N(t_{k+1}) \leq C(T) \left( (\Delta t)^2 + \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right). \quad (7.3.20)$$

We can now conclude the computation of an upper bound for the  $L^1$ -norm of Term  $T_3$  in (7.3.12). Using the fact that  $f$  is Lipschitz continuous with constant  $\|f'\|_\infty$  and the Cauchy-Schwarz inequality, we have:

$$\sup_{k \in [1, T/\Delta t]} \mathbb{E}^\nu \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_{t_k}^i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_{t_k}^{i, N}) \right| \leq C(T) \|f'\|_\infty \left( \Delta t + \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} \right). \quad (7.3.21)$$

The result announced in Theorem 7.2.1 is obtained from (7.3.14), (7.3.15), (7.3.21).  $\blacksquare$

## 7.4 Proof of Lemma 7.3.4

Let  $N, K \in \mathbb{N}^*$ . We have for all  $k \in [0, K], i \in [1, N]$ , and  $I \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}$ :

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \widehat{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right| > \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq C_1(I, k, i) + C_2(I, k, i) \quad (7.4.1)$$

where

$$\begin{aligned} C_1(I, k, i) &= \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > \frac{\kappa}{4} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\ C_2(I, k, i) &= \mathbb{P}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} - \bar{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right| > \frac{\kappa}{4} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right). \end{aligned}$$

One difficulty to upper bound  $C_1(I, k, i)$  lies in the fact that we deal with the wavelet coefficients of a function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha))$  which depends on a random parameter  $x = \bar{X}_{t_k}^i$ . We first fix  $x \in \mathbb{R}$  and prove the following Lemma 7.4.1 (Section 7.4.1). Then, we use a localization argument to obtain an upper bound of  $C_1(I, k, i)$  announced in Corollary 7.4.2 (proved in Section 7.4.2).

**Lemma 7.4.1.** *Under Assumptions 7.2.5,  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0,$*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \right| > r \right) \\ & \leq 2 \exp \left( - \frac{r^2}{8 \left( \frac{4 \|b\|_\infty^2 C'^2}{N} + \frac{\|b\|_\infty \|\psi\|_\infty 2^{I_1/2r}}{3N} \right)} \right) + C \exp \left( - \frac{Nr^2}{8 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 C'^2 c_0} \right) \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

where  $C'$  is a positive constant such that

$$\forall N \geq N_0, \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I^2 \left( \frac{j}{N} \right)} < C' \quad (7.4.3)$$

(see Lemma B.3.3 in Appendix for a proof of the existence of  $C'$ ).

**Corollary 7.4.2.** *Under Assumptions 7.2.5:  $\forall \gamma > 0, \exists \kappa = \kappa(\gamma, b, \sigma, c_0, L_0, \phi, \psi) > 0, \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K],$*

$$C_1(I, k, i) \leq \frac{C}{N\gamma}. \quad (7.4.4)$$

A condition for choosing  $\kappa$  is given in (7.4.23).  $\square$

To upper bound  $C_2(I, k, i)$ , we study the difference:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} - \bar{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \\ & = \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i}. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

**Lemma 7.4.3.** *Under Assumptions 7.2.5:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K],$*

$$\left| \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} - \bar{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{N}} \text{ implying } C_2(I, k, i) = 0, \quad (7.4.6)$$

The difficulty in proving Lemma 7.4.3 is that the intuitive idea of using the Lipschitz continuity of  $\psi_I$  does not lead to the result we are looking for, because the Lipschitz constant  $2^{3I_1/2}L_\psi$  is not counterbalanced by  $\mathbb{E}^\nu \|G_N - G\|_\infty \leq C\sqrt{(\log \log N)/N}$  (see Van der Vaart [33], Chapter 19, page 268). We thus follow in Section 7.4.3 some ideas in Kerkyacharian and Picard [72] and use more deeply the structure of wavelets.

The result announced in Lemma 7.3.4 is obtained from (7.4.1), Lemmas 7.4.1 and 7.4.3.

#### 7.4.1 Proof of Lemma 7.4.1

A difficulty comes from the fact that even if the particles  $(\theta_i, \bar{X}_{t_k}^i)_{i \in [1, N]}$  are independent, the particles  $(\theta_{(i)}, \bar{X}_{t_k}^{(i)})_{i \in [1, N]}$  ranked in increasing order with respect to the values of  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  are not independent any more. However, the particles  $(\bar{X}_{t_k}^{(i)})_{i \in [1, N]}$  are independent conditionally to  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ . We consider the following decomposition:

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \right| \geq r \right) \leq D_1(I, k, x, r) + D_2(I, k, x, r),$$

where:

$$D_1(I, k, x, r) = \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) \right| \geq \frac{r}{2} \right) \quad (7.4.7)$$

$$D_2(I, k, x, r) = \mathbb{P}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \right| \geq \frac{r}{2} \right) \quad (7.4.8)$$

Upper bounds for the terms  $D_1(I, k, x)$  and  $D_2(I, k, x)$  are given by the following Lemmas 7.4.4 and 7.4.5.

**Lemma 7.4.4.** *Under Assumptions 7.2.5:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0,$*

$$D_1(I, k, x, r) \leq 2 \exp \left( - \frac{r^2}{8 \left( \frac{4C'^2 \|b\|_\infty^2}{N} + \frac{\|b\|_\infty \|\psi\|_\infty 2^{I_1/2} r}{3N} \right)} \right). \quad (7.4.9)$$

*Proof.* Since:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \mathbb{E}^\nu \left( b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \mathbb{E}^\nu \left( b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})) \mid \theta_{(j)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \mathbb{E}^\nu \left( b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) \mid \theta = \theta_{(j)} \right), \end{aligned}$$

we have:

$$\begin{aligned} &\check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \left( b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})) - \mathbb{E}^\nu \left( b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) \mid \theta = \theta_{(j)} \right) \right) \end{aligned}$$



with  $\forall j \in [1, N]$ :

$$\mathbb{E}^\nu \left[ \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \left( b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})) - \mathbb{E}^\nu (b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) \mid \theta = \theta_{(j)}) \right) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right] = 0,$$

$$\text{and } \left| \frac{1}{N} \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \left( b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})) - \mathbb{E}^\nu (b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) \mid \theta = \theta_{(j)}) \right) \right| \leq \frac{2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty \times 2 \|b\|_\infty}{N}$$

using that  $\psi_I$  is upper bounded by  $2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty$  (see (7.2.12)). For sufficiently large  $N$ :

$$\sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \left( b(x, \bar{X}_{t_k}^{(j)}(\theta_{(j)})) - \mathbb{E}^\nu (b(x, \bar{X}_{t_k}(\theta)) \mid \theta = \theta_{(j)}) \right) \right|^2 \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right)$$

$$\leq \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_I^2 \left( \frac{j}{N} \right) \right) 4 \|b\|_\infty^2 \leq \frac{4C'^2 \|b\|_\infty^2}{N},$$

where  $C'$  is defined in (7.4.3).

It is thus possible to apply Bernstein's inequality (see Proposition B.4.2 and Inequality (B.4.4) in Appendix):

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) \right| \geq \frac{r}{2} \right) \leq 2 \exp \left( - \frac{(r/2)^2}{2 \left( \frac{4C'^2 \|b\|_\infty^2}{N} + \frac{1}{3} \frac{r}{2} \frac{2 \times 2^{I_1/2} \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty}{N} \right)} \right),$$

and this gives (7.4.9).  $\blacksquare$

**Lemma 7.4.5.** *Under Assumption 7.2.5:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0,$*

$$D_2(I, k, x, r) \leq C \exp \left( - \frac{Nr^2}{8 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 C'^2 c_0} \right). \quad (7.4.10)$$

Before proving Lemma 7.4.5 we establish the following Lemma:

**Lemma 7.4.6.** *For  $I \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, k \in [0, K]$  and  $x \in \mathbb{R}$ , let us define the following function:*

$$F_{I, k, x} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, \dots, a_N) \mapsto \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \bar{u}_b(t_k, x, a_{(j)}), \quad (7.4.11)$$

where  $(a_{(j)})_{j \in [1, N]}$  are the terms  $(a_i)_{i \in [1, N]}$  ranked in increasing order.

Then, there exists  $N_0 \in \mathbb{N}^*$ , such that  $\forall N \geq N_0, \forall I \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}$ , the function  $F_{I, k, x}$  defined in (7.4.11) is  $C' \|\bar{u}_b\|_{Lip} / \sqrt{N}$ -Lipschitz continuous, where  $C'$  is defined in (7.4.3).

*Proof of Lemma 7.4.6.* By Lemma 7.3.1, the function  $a \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, a)$  is Lipschitz continuous for any  $k \in [0, K]$  and  $x \in \mathbb{R}$ . We have for  $(a_1, \dots, a_N), (a'_1, \dots, a'_N) \in \mathbb{R}^N$ :

$$\begin{aligned} |F(a_1, \dots, a_N) - F(a'_1, \dots, a'_N)| &\leq \frac{\|\bar{u}_b\|_{Lip}}{N} \sum_{j=1}^N \left| \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \right| |a_{(j)} - a'_{(j)}| \\ &\leq \frac{\|\bar{u}_b\|_{Lip}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I^2 \left( \frac{j}{N} \right)} \sqrt{\sum_{j=1}^N |a_{(j)} - a'_{(j)}|^2} \\ &\leq \frac{\|\bar{u}_b\|_{Lip} C'}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{j=1}^N |a_{(j)} - a'_{(j)}|^2}. \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Let us now show that:

$$\sum_{j=1}^N |a_{(j)} - a'_{(j)}|^2 \leq \sum_{j=1}^N |a_j - a'_j|^2. \quad (7.4.13)$$

Since every permutation of  $[1, N]$  can be decomposed into transpositions, it is sufficient to prove (7.4.13) for  $N = 2$ . Let  $(a_1, a_2)$  and  $(a'_1, a'_2)$  be two couples in  $\Theta^2$ . There are three cases.

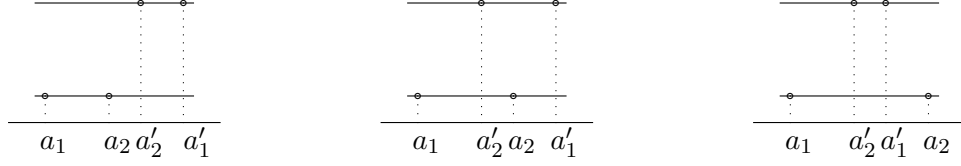


Figure 7.1: Cases 1, 2 and 3 from left to right.

Case 1: We have

$$\begin{aligned} |a'_1 - a_1|^2 + |a'_2 - a_2|^2 &= (|a'_1 - a_2|^2 + |a_2 - a_1|^2 + 2|a'_1 - a_2||a_2 - a_1|) + |a'_2 - a_2|^2 \\ &= |a'_1 - a_2|^2 + (|a_2 - a_1|^2 + |a'_2 - a_2|^2 + 2|a'_2 - a_2||a_2 - a_1|) + 2|a'_2 - a_2||a_2 - a_1| \\ &\geq |a'_1 - a_2|^2 + |a'_2 - a_1|^2 = |a'_{(2)} - a_{(2)}|^2 + |a'_{(1)} - a_{(1)}|^2. \end{aligned}$$

Case 2: We have

$$|a'_1 - a_1|^2 \geq (|a'_1 - a_2| + |a'_2 - a_1|)^2 \geq |a'_{(1)} - a_{(1)}|^2 + |a'_{(2)} - a_{(2)}|^2$$

Case 3: We have

$$|a'_1 - a_1|^2 + |a'_2 - a_2|^2 \geq |a'_2 - a_1|^2 + |a'_1 - a_2|^2 = |a'_{(1)} - a_{(1)}|^2 + |a'_{(2)} - a_{(2)}|^2.$$

This shows (7.4.13) and ends the proof. ■

*Proof of Lemma 7.4.5.* Recall that:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \left( \bar{u}_b(t_k, x, \theta_{(j)}) - \mathbb{E}^\nu \left( \bar{u}_b(t_k, x, \theta_{(j)}) \right) \right), \end{aligned}$$

By Point 3 of Assumptions 7.2.5, the common law  $\nu(da)$  of the random variables  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  satisfies a Logarithmic-Sobolev inequality with constant  $c_0$ . By independent tensorization (see Ané *et al.* [3], Theorem 3.2.3 p.31), the law  $\nu^{\otimes N}$  of  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  also satisfies a Logarithmic-Sobolev inequality with the same constant  $c_0$ .

An interest in Logarithmic Sobolev inequalities is that they entail Gaussian deviation inequalities as stated by Ledoux [77]:

**Proposition 7.4.7. Concentration Phenomenon** (Ledoux, [77])

Let  $\mu$  be a probability measure that satisfies a Logarithmic Sobolev inequality with constant  $c_0 > 0$ . For every  $r \geq 0$ , for every Lipschitz continuous function  $f$ :

$$\exists C > 0, \mu(|f - \langle \mu, f \rangle| \geq r) \leq C \exp \left( -\frac{r^2}{2\|f\|_{Lip}^2 c_0} \right).$$

The constant  $C$  does not depend on  $f$  nor on  $\mu$ .

Applying this inequality to  $\nu^{\otimes N}$  and to the function  $F_{I,k,x}$  defined in (7.4.11) gives for  $D_2(I, k, x)$  defined in (7.4.8):  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall I \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0,$

$$D_2(I, k, x, r) = \mathbb{P}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(x) \right) \right| \geq \frac{r}{2} \right) \leq C e^{-\frac{N(r/2)^2}{2\|u_b\|_{L^1}^2 C'^2 e_0}},$$

which is the result announced in (7.4.10).  $\blacksquare$

## 7.4.2 Proof of Corollary 7.4.2

Our purpose is to prove (7.4.4) by replacing in Inequality (7.4.2) the fixed parameter  $x$  with the random position  $\bar{X}_{t_k}^i$  and by choosing  $r = \kappa/4 \sqrt{\log N/N}$  with a good choice of  $\kappa$ . To achieve this, we will use a localization argument, and thus need some tail bounds for the law of  $\bar{X}_{t_k}^i$ . We begin with establishing these bounds in the following lemma.

**Lemma 7.4.8.** *Under Point 4 of Assumptions 7.2.5, there exists  $\exists \varsigma_0 > 0, \exists C_1, C_2 > 0, \forall \varsigma \geq \varsigma_0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [1, N], \forall K \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, K],$*

$$\mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}^i| > \varsigma \right) \leq C_1 \exp(-C_2 \varsigma/2) + \exp\left(-\frac{(\varsigma/2 - \|b\|_\infty T)^2}{2\|\sigma\|_\infty^2 T}\right). \quad (7.4.14)$$

*Proof.* We have:

$$\mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}^i| > \varsigma \right) \leq \mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_0^i| > \frac{\varsigma}{2} \right) + \mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_0^i| \leq \frac{\varsigma}{2}, |\bar{X}_{t_k}^{i,N}| > \varsigma \right) \leq C_1 e^{-\frac{C_2 \varsigma}{2}} + \mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_0^i| > \frac{\varsigma}{2} \right).$$

Let  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Since  $u_b$  and  $u_\sigma$  are bounded by  $\|b\|_\infty$  and  $\|\sigma\|_\infty$  respectively:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu \left( e^{\lambda(\bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_0^i)} \right) &= \mathbb{E}^\nu \left[ e^{\lambda(\bar{X}_{t_{k-1}}^i - \bar{X}_0^i)} \mathbb{E}^\nu \left( e^{\lambda(u_b(t_{k-1}, \bar{X}_{t_{k-1}}^i, \theta_i)\Delta t + u_\sigma(t_{k-1}, \bar{X}_{t_{k-1}}^i, \theta_i)\sqrt{\Delta t} B_k)} \mid \bar{X}_{t_{k-1}}^i \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E}^\nu \left[ e^{\lambda(\bar{X}_{t_{k-1}}^i - \bar{X}_0^i)} e^{\lambda\|b\|_\infty \Delta t} \mathbb{E}^\nu \left( \exp\left(\lambda u_\sigma(t_{k-1}, \bar{X}_{t_{k-1}}^i, \theta_i)\sqrt{\Delta t} B_k\right) \mid \bar{X}_{t_{k-1}}^i \right) \right]. \end{aligned}$$

As the Laplace transform of a centered Gaussian random variable  $Y$  of variance  $s^2$  is  $\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) = e^{\lambda^2 s^2/2}$ , we obtain:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu \left( e^{\lambda(\bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_0^i)} \right) &\leq \mathbb{E}^\nu \left( e^{\lambda(\bar{X}_{t_{k-1}}^i - \bar{X}_0^i)} e^{\lambda\|b\|_\infty \Delta t} \exp\left(\frac{\lambda^2 u_\sigma^2(t_{k-1}, \bar{X}_{t_{k-1}}^i, \theta_i)\Delta t}{2}\right) \right) \\ &\leq e^{\lambda\|b\|_\infty \Delta t + \frac{\lambda^2 \|\sigma\|_\infty^2 \Delta t}{2}} \mathbb{E}^\nu \left( e^{\lambda(\bar{X}_{t_{k-1}}^i - \bar{X}_0^i)} \right) \leq e^{\lambda\|b\|_\infty T + \frac{\lambda^2 \|\sigma\|_\infty^2 T}{2}}, \end{aligned}$$

by induction and since  $k \in [0, K]$  with  $K = \lceil T/\Delta t \rceil$ . As a consequence,

$$\mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_0^i| > \frac{\varsigma}{2} \right) \leq e^{-\frac{\lambda \varsigma}{2}} \exp\left(\lambda\|b\|_\infty T + \frac{\lambda^2 \|\sigma\|_\infty^2 T}{2}\right).$$

Optimizing the right hand side in  $\lambda$  gives for  $\varsigma > 2\|b\|_\infty T$ :

$$\mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_0^i| > \frac{\varsigma}{2} \right) \leq \exp\left(-\frac{(\varsigma/2 - \|b\|_\infty T)^2}{2\|\sigma\|_\infty^2 T}\right).$$

$\blacksquare$

**Remark 7.4.9.** *Notice that in case  $\sigma \equiv 0$ , the particles move deterministically and:*

$$\mathbb{P}^\nu \left( |\bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_0^i| > \|b\|_\infty T \right) = 0.$$

We are now ready to prove Corollary 7.4.2.

*Proof of Corollary 7.4.2.* Let  $r > 0$ , and let us define the interval  $\mathcal{K} = [-\varsigma, \varsigma]$  with  $\varsigma > 2\|b\|_\infty T$ . Since  $\mathcal{K}$  is a compact interval, it can be covered by a finite number of balls  $]x_l - \varrho, x_l + \varrho[$ , with  $(x_l)_{l \in [1, \bar{\ell}]}$  a finite sequence of  $\mathcal{K}$  and  $\varrho > 0$ . It is possible to choose  $\bar{\ell} = \lceil \varsigma/\varrho \rceil + 1$ , where  $\lceil \cdot \rceil$  stands for the integer part. Then:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > r \right) \\
& \leq \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > r \\
& \quad \text{and } \bar{X}_{t_k}^i \in \mathcal{K} \right) + \mathbb{P}^\nu(\bar{X}_{t_k}^i \notin \mathcal{K}) \\
& \leq \sum_{l=1}^{\bar{\ell}} \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > r \\
& \quad \text{and } |\bar{X}_{t_k}^i - x_l| \leq \varrho \right) + \mathbb{P}^\nu(\bar{X}_{t_k}^i \notin \mathcal{K}). \tag{7.4.15}
\end{aligned}$$

For a given  $l \in [1, \bar{\ell}]$ , we have:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \\
& \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) \left( b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right| \\
& + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right| \\
& + \left| \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) \right) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \\
& \leq 2C' \|b\|_{Lip} |x_l - \bar{X}_{t_k}^i| \\
& + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|, \tag{7.4.16}
\end{aligned}$$

where  $C'$  is defined in (7.4.3). Thus, using Lemma 7.4.1:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > r \\
& \quad \text{and } |\bar{X}_{t_k}^i - x_l| \leq \varrho \right) \\
& \leq \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x_l, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right| > r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho \right) \\
& = \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x_l) - \mathbb{E} \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x_l) \right) \right| > r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho \right) \\
& \leq 2 \exp \left( - \frac{N(r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho)^2}{8(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + (r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho) \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty 2^{I_1/2}/3)} \right) + C \exp \left( - \frac{N(r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho)^2}{8C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} \right),
\end{aligned}$$

and from (7.4.15):

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > r \right) \\
& \leq \left( \left\lceil \frac{\varsigma}{\varrho} \right\rceil + 1 \right) \left( 2 \exp \left( - \frac{N(r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho)^2}{8(4\|b\|_\infty^2 C' + (r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho) \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty 2^{I_1/2}/3)} \right) \right. \\
& \left. + C \exp \left( - \frac{N(r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho)^2}{8C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} \right) \right) + C_1 \exp(-C_2 \varsigma/2) + \exp \left( - \frac{(\varsigma/2 - \|b\|_\infty T)^2}{2\|\sigma\|_\infty^2 T} \right). \tag{7.4.17}
\end{aligned}$$

We now choose  $\varrho = r/(4C' \|b\|_{Lip})$ ,  $r = \kappa/4 \sqrt{\log N/N}$  and  $\varsigma > 2(\|b\|_\infty^2 T + 1)$  (the constant  $\varrho$  has been chosen such that  $r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho = r/2$ ). Let us upper bound the different terms in the right hand side of (7.4.17).

$$\left\lceil \frac{\varsigma}{\varrho} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{16\varsigma C' \|b\|_{Lip}}{\kappa} \sqrt{\frac{N}{\log N}} \right\rceil + 1 \leq C_3 \varsigma \sqrt{\frac{N}{\log N}}. \tag{7.4.18}$$

With our choice of  $r$  and of  $I_1^N$  (see (7.2.11))

$$r 2^{I_1/2} \leq r 2^{I_1^N/2} \leq \frac{\kappa}{4} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \times 2^{I_1^N/2} \leq \frac{\sqrt{\kappa}}{4} \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} \leq \frac{\sqrt{\kappa}}{4}.$$

Hence:

$$\begin{aligned}
& \exp \left( - \frac{N(r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho)^2}{8(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + (r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho) \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty 2^{I_1/2}/3)} \right) \\
& = \exp \left( - \frac{N(r/2)^2}{8(4\|b\|_\infty^2 C' + \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty 2^{I_1/2} r/6)} \right) \leq \exp \left( - \frac{N(\kappa/8 \times \sqrt{\log N/N})^2}{8(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \sqrt{\kappa} \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty /24)} \right) \\
& \leq \exp \left( - \frac{\kappa^2 \log N}{512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \sqrt{\kappa} \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty /24)} \right). \tag{7.4.19}
\end{aligned}$$

We also have:

$$\exp \left( - \frac{N(r - 2C' \|b\|_{Lip} \varrho)^2}{8C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} \right) \leq \exp \left( - \frac{\kappa^2 \log N}{512 C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} \right). \tag{7.4.20}$$

When  $\varsigma > 2(\|b\|_\infty^2 T + 1)$ ,

$$\begin{aligned}
& C_1 \exp(-C_2 \varsigma/2) + \exp \left( - \frac{(\varsigma/2 - \|b\|_\infty T)^2}{2\|\sigma\|_\infty^2 T} \right) \\
& \leq C_1 \exp(-C_2 \varsigma/2) + \exp \left( - \frac{\varsigma/2 - \|b\|_\infty T}{2\|\sigma\|_\infty^2 T} \right) \\
& \leq \left( C_1 + \exp \left( \frac{\|b\|_\infty T}{2\|\sigma\|_\infty^2 T} \right) \right) \exp \left( -\varsigma/2 \min \left( C_2, \frac{1}{2\|\sigma\|_\infty^2 T} \right) \right) \leq C_4 e^{-C_5 \varsigma/2} \tag{7.4.21}
\end{aligned}$$

From (7.4.17), (7.4.18), (7.4.19), (7.4.20) and (7.4.21):

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(\bar{X}_{t_k}^i, \bar{X}_{t_k}^j) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) b(x, \bar{X}_{t_k}^j) \right) \right|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \right| > r \right) \\
& \leq C_3 \varsigma \sqrt{\frac{N}{\log N}} \left( 2N^{-\frac{\kappa^2}{512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \sqrt{\kappa} \|b\|_\infty \|\psi\|_\infty /24)}} + CN^{-\frac{\kappa^2}{512 C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0}} \right) + C_4 \exp(-C_5 \varsigma/2) \\
& \leq C_6 \varsigma N^{-\beta(\kappa)} + C_4 \exp(-C_5 \varsigma/2). \tag{7.4.22}
\end{aligned}$$

with

$$\beta(\kappa) = \left( \frac{\kappa^2}{512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \sqrt{\kappa}\|b\|_\infty\|\psi\|_\infty/24)} \wedge \frac{\kappa^2}{512 C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} \right) - \frac{1}{2}.$$

Our purpose is now to prove that the right hand side of (7.4.22) can be upper bounded by a term in  $1/N^\gamma$ .

Let us introduce

$$f(\varsigma) = C_6 \varsigma N^{-\beta(\kappa)} + C_4 \exp(-C_5 \varsigma/2).$$

The derivative in  $\varsigma$  vanishes for

$$\varsigma_0 = \frac{2}{C_5} \ln \left( \frac{C_4 C_5}{2C_6} N^{\beta(\kappa)} \right),$$

which is equivalent to  $(2\beta(\kappa)/C_5) \log N$  when  $N$  grows to infinity, and is thus greater than  $2(\|b\|_\infty^2 T + 1)$  for sufficiently large  $N$ . We have:

$$f(\varsigma_0) \leq \left( \frac{2C_6}{C_5} \ln \left( \frac{C_4 C_5}{2C_6} \right) + \frac{2C_6 \beta(\kappa)}{C_5} \ln(N) + \frac{2C_6}{C_5} \right) N^{-\beta(\kappa)}.$$

If we choose  $\gamma$  such that  $\beta(\kappa) > \gamma$ , *i.e.*, if we choose  $\gamma$  such that:

$$\left( \frac{\kappa^2}{512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \sqrt{\kappa}\|b\|_\infty\|\psi\|_\infty/24)} \wedge \frac{\kappa^2}{512 C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} \right) > \gamma + \frac{1}{2} \quad (7.4.23)$$

then, there exists  $C_7 > 0$  and  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  such that  $\forall N \geq N_0, : f(\varsigma_0) \leq C_7/N^\gamma$ , and the lemma will be proved.

The condition (7.4.23) is satisfied if and only if:

$$\frac{\kappa^2}{512 C'^2 \|\bar{u}_b\|_{Lip}^2 c_0} > \gamma + \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad \frac{\kappa^2}{512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \sqrt{\kappa}\|b\|_\infty\|\psi\|_\infty/24)} > \gamma + \frac{1}{2} \quad (7.4.24)$$

A sufficient condition is that the following (7.4.25) and (7.4.26) are fulfilled. The first assertion in (7.4.24) is satisfied if

$$\kappa > 16C' \|\bar{u}_b\|_{Lip} \sqrt{2c_0 \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)}. \quad (7.4.25)$$

A sufficient condition for the second assertion of (7.4.24) to be satisfied is that:

$$\frac{\kappa^2}{512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \|b\|_\infty\|\psi\|_\infty/24)\sqrt{\kappa}} > \gamma + \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \kappa \geq 1,$$

thus, if :

$$\kappa > \left[ \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) 512(4\|b\|_\infty^2 C'^2 + \|b\|_\infty\|\psi\|_\infty/24) \right]^{2/3} \vee 1. \quad (7.4.26)$$

■

### 7.4.3 Proof of Lemma 7.4.3

To prove Lemma 7.4.3, we can not use Lipschitz continuity of the function  $\psi_I$ . We rather take advantage of the regularity of  $\alpha \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  by an integration by part-like formula.

To this purpose, let us recall that if  $\psi$  is a wavelet with compact support that satisfies (7.2.8), then, there exists a compactly supported Lipschitz continuous function  $\Psi$  such that:  $\psi = \Delta_{-h}(\Psi) = \Psi(\cdot - h) - \Psi(\cdot)$ , with  $h = 2^{-1}$  (see [72]). Thus:

$$\psi_I = \Delta_{-h_I}(\Psi_I), \quad \text{with } h_I = 2^{-I_1-1} \quad \text{and } \Psi_I(y) = 2^{I_1/2} \Psi(2^{I_1} y - I_2).$$

Let us introduce the following notations: for  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} U_N(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{] -\infty, \alpha]}(G(\theta_i)) (= G_N(G^{-1}(\alpha)).) \\ U_N^{(-j)}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1, i \neq j}^N 1_{] -\infty, \alpha]}(G(\theta_i)) = U_N(\alpha) - \frac{1_{\{G(\theta_j) \leq \alpha \leq 1\}}}{N}. \end{aligned}$$

Recall the Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz inequality (see [40]):

$$\exists C > 0, \forall r > 0, \mathbb{P}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} |U_N(\alpha) - \alpha| \geq r \right) \leq C e^{-2Nr^2}. \quad (7.4.27)$$

Integrating this inequality in  $r$  gives:

$$\exists C > 0, \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} |U_N(\alpha) - \alpha| \right) \leq C \sqrt{\frac{\pi}{2N}}. \quad (7.4.28)$$

We are now ready to prove Lemma 7.4.3. Let us define:

$$E := \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(b, t_k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} - \bar{\beta}_I^{(b, t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)$$

We have:

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\psi_I(G_N(\theta_j)) - \psi_I(G(\theta_j))] b(x, \bar{X}_{t_k}^j(\theta_j)) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \\ &= \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\Delta_{-h_I}(\Psi_I)(U_N(G(\theta_j))) - \Delta_{-h_I}(\Psi_I)(G(\theta_j))] b(x, \bar{X}_{t_k}^j(\theta_j)) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i}. \end{aligned}$$

Let us consider the term  $\Delta_{-h_I}(\Psi_I)(U_N(G(\theta_j))) - \Delta_{-h_I}(\Psi_I)(G(\theta_j))$ :

$$\begin{aligned} &\Delta_{-h_I}(\Psi_I)(U_N(G(\theta_j))) - \Delta_{-h_I}(\Psi_I)(G(\theta_j)) \\ &= \Psi_I(U_N(G(\theta_j)) - h_I) - \Psi_I(U_N(G(\theta_j))) - \Psi_I(G(\theta_j) - h_I) + \Psi_I(G(\theta_j)). \end{aligned} \quad (7.4.29)$$

We add and subtract from  $E$  the terms  $\Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j)))$  and:

$$\Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j) - h_I)) \mathbf{1}_{h_I \leq G(\theta_j) \leq 1} + \Psi_I(G(\theta_j) - h_I) \mathbf{1}_{0 \leq G(\theta_j) \leq h_I}. \quad (7.4.30)$$

By convention, let us define

$$U_N^{(-j)}(\alpha) = \alpha \text{ for } \alpha < 0. \quad (7.4.31)$$

The term (7.4.30) can then be rewritten as  $\Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j) - h_I))$ . (7.4.29) then becomes:

$$\begin{aligned} & \Delta_{-h_I}(\Psi_I(U_N(G(\theta_j)))) - \Delta_{-h_I}(\Psi_I(G(\theta_j))) \\ &= \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j) - h_I)) - \Psi_I(G(\theta_j) - h_I) \right) - \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j))) - \Psi_I(G(\theta_j)) \right) \\ &+ \Psi_I(U_N(G(\theta_j)) - h_I) - \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j) - h_I)) + \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j))) - \Psi_I(U_N(G(\theta_j))) \\ &= \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j) - h_I)) - \Psi_I(G(\theta_j) - h_I) \right) - \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j))) - \Psi_I(G(\theta_j)) \right) \\ &+ \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(G(\theta_j)) + \frac{1}{N} - h_I \right) - \Psi_I(U_N^{-j}(G(\theta_j) - h_I)) \\ &+ \Psi_I(U_N^{(-j)}(G(\theta_j))) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(G(\theta_j)) + \frac{1}{N} \right) \end{aligned}$$

by using that  $U_N(G(\theta_j)) = U_N^{(-j)}(G(\theta_j)) + 1/N$ . Thus:

$$E = E_1(I, k, i) + E_2(I, k, i),$$

with:  $E_1(I, k, i)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \mathbb{E}^\nu \left( \Delta_{-h_I} \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\cdot)) - \Psi_I(\cdot) \right) (G(\theta_j)) \bar{u}_b(t_k, x, \theta_j) \mid \theta_i, i \neq j \right) \right) \Bigg|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \Delta_{-h_I} \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\cdot)) - \Psi_I(\cdot) \right) (\alpha) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha \right) \Bigg|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \end{aligned} \quad (7.4.32)$$

by independence of the  $(\theta_j)_{j \in [1, N]}$ , and:

$$\begin{aligned} & E_2(I, k, i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left( \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} - h_I \right) - \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha - h_I)) \right) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha \right) \Bigg|_{x=\bar{X}_{t_k}^i} \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left( \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} \right) \right) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha \right) \Bigg|_{x=\bar{X}_{t_k}^i}. \end{aligned} \quad (7.4.33)$$

The term  $E_1(I, k, i)$  allows us to carry out the integration by parts mentioned previously. The second term,  $E_2(I, k, i)$ , is a residual term.

We first upper bound  $E_1(I, k, i)$  defined in (7.4.32). As:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Delta_{-h_I} \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\cdot)) - \Psi_I(\cdot) \right) (\alpha) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[ \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha - h_I)) - \Psi_I(\alpha - h_I) \right) - \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right) \right] \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_{-h_I}^{1-h_I} \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha + h_I)) d\alpha \\ &- \int_0^1 \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha. \end{aligned} \quad (7.4.34)$$



With the convention (7.4.31), we have for  $\alpha \in [-h_I, 0]$ ,

$$\Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) = \Psi_I(\alpha) - \Psi_I(\alpha) = 0,$$

and for  $\alpha \in [1 - h_I, 1]$ ,

$$\bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\cdot))(\alpha + h_I) = 0,$$

since the function  $\bar{u}_b$  has a compact support in  $[0, 1]$ . Hence, (7.4.34) can be rewritten as:

$$\int_0^1 \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha + h_I)) d\alpha.$$

This gives:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Delta_{-h_I} \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\cdot)) - \Psi_I(\cdot) \right) (\alpha) \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right) \left( \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha + h_I)) - \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) \right) d\alpha. \end{aligned}$$

and:

$$E_1(I, k, i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left( \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right) \Delta_{h_I} \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\cdot))(\alpha) d\alpha \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^i}$$

Thanks to Lemma 7.3.1, the function  $\alpha \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  is  $s$ -Hölder continuous for every  $x \in \mathbb{R}$  with  $s > 1/2$ . We thus have:

$$|E_1(I, k, i)| \leq \frac{C\sqrt{h_I}}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left| \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right| d\alpha \right). \quad (7.4.35)$$

Let us introduce the following set:

$$B_N(\varsigma) = \left\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} |U_N(\alpha) - \alpha| \geq \varsigma \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right\}, \quad (7.4.36)$$

where the constant  $\varsigma$  has to be properly chosen (in the sequel, we will be lead to choose  $\varsigma > \sqrt{3/8}$ ). Using (7.4.27) yields:

$$\mathbb{P}^\nu (B_N(\varsigma)) \leq \frac{C}{N^{2\varsigma^2}}. \quad (7.4.37)$$

Then:

$$\mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left| \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right| d\alpha \right) \leq E_{11}^{(j)} + E_{12}^{(j)}, \quad (7.4.38)$$

where:

$$\begin{aligned} E_{11}^{(j)} &= \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left| \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right| d\alpha 1_{B_N(\varsigma)} \right) \\ E_{12}^{(j)} &= \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left| \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(\alpha) \right| d\alpha 1_{B_N^c(\varsigma)} \right). \end{aligned}$$

Using (7.4.37), we obtain the following bound for  $E_{11}^{(j)}$ :

$$E_{11}^{(j)} \leq 2 \times 2^{I_1/2} \|\Psi\|_\infty \mathbb{P}^\nu (B_N(\varsigma)) \leq \frac{2 \times 2^{I_1/2} \|\Psi\|_\infty C}{N^{2\varsigma^2}}. \quad (7.4.39)$$

Now consider the term  $E_{12}^{(j)}$ . On the set  $B_N^c(\varsigma)$ , we have:

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} |U_N^{(-j)}(\alpha) - \alpha| \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} |U_N(\alpha) - \alpha| + \frac{1}{N} \leq \varsigma \sqrt{\frac{\log N}{N}} + \frac{1}{N}.$$

In this case, the support of  $\alpha \mapsto \Psi(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi(\alpha)$  is in

$$\left[ \text{supp} \left( \Psi(U_N^{(-j)}) \right) \cup \text{supp}(\Psi) \right] \subset \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists \alpha' \in \text{supp}(\Psi), |\alpha - \alpha'| < \varsigma \sqrt{\frac{\log N}{N}} + \frac{1}{N} \right\}$$

which is itself included in a compact interval of length  $C(\varsigma, \Psi)$  depending only on  $\varsigma$  and  $\Psi$ . For any double index  $I \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}$ , there exists an interval  $\mathcal{I}_I$  of length  $C(\varsigma, \Psi)2^{-I_1}$  such that:

$$\int_0^1 \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) \right) - \Psi_I(\alpha) \right| d\alpha 1_{B_N^c(\varsigma)} = \int_{\mathcal{I}_I} \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) \right) - \Psi_I(\alpha) \right| d\alpha 1_{B_N^c(\varsigma)}. \quad (7.4.40)$$

Thus:

$$\begin{aligned} E_{12}^{(j)} &\leq 2^{3I_1/2} L_\Psi \mathbb{E}^\nu \left( \int_{\mathcal{I}_I} \left| U_N^{(-j)}(\alpha) - \alpha \right| d\alpha 1_{B_N^c(\varsigma)} \right) \\ &\leq 2^{3I_1/2} L_\Psi \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha} \left| U_N^{(-j)}(\alpha) - \alpha \right| \right) C(\varsigma, \Psi) 2^{-I_1} \leq 2^{I_1/2} L_\Psi C(\varsigma, \Psi) C \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \end{aligned} \quad (7.4.41)$$

where the third inequality has been obtained thanks to (7.4.28).

Therefore, from (7.4.35), (7.4.38), (7.4.39) and (7.4.41) we deduce, with  $\varsigma > 1/2$ , that there exists a constant  $C > 0$  such that:

$$|E_1(I, k, i)| \leq C \left( \frac{1}{N^{2\varsigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}. \quad (7.4.42)$$

Now turn to the residual term  $E_2(I, k, i)$  defined in (7.4.33). We consider as above the set  $B_N(\varsigma)$  defined in (7.4.36):

$$\begin{aligned} |E_2(I, k)| &\leq \frac{\|b\|_\infty}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} - h_I \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) \right) \right| d\alpha \right) \\ &+ \frac{\|b\|_\infty}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} \right) \right| d\alpha \right) \\ &\leq \frac{\|b\|_\infty}{N} \sum_{j=1}^N \left[ E_{21}^{(j)} + E_{22}^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (7.4.43)$$

$$\begin{aligned} \text{where: } E_{21}^{(j)} &= \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left( \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} - h_I \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) \right) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} \right) \right| \right) d\alpha 1_{B_N(\varsigma)} \right) \\ E_{22}^{(j)} &= \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^1 \left( \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} - h_I \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) \right) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) \right) - \Psi_I \left( U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} \right) \right| \right) d\alpha 1_{B_N^c(\varsigma)} \right). \end{aligned}$$

We have for  $E_{21}^{(j)}$ :

$$E_{21}^{(j)} \leq 4 \times 2^{I_1/2} \|\Psi\|_\infty \mathbb{P}^\nu (B_N(\varsigma)) \leq \frac{4 \times 2^{I_1/2} \|\Psi\|_\infty C}{N^{2\varsigma^2}}. \quad (7.4.44)$$

Now let us study the term  $E_{22}^{(j)}$ . Since on  $B_N^c(\varsigma)$ :

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} - h_I - U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| U_N^{(-j)}(\alpha) - \alpha \right| + \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \alpha - h_I - U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) \right| + \frac{1}{N} \leq 2\varsigma \sqrt{\frac{\log N}{N}} + \frac{3}{N} \end{aligned}$$

there exists, similarly to (7.4.40), a positive constant  $C'(\varsigma, \Psi)$  such that:

$$\begin{aligned} E_{22}^{(j)} &= \mathbb{E}^\nu \left( \int_{\mathcal{I}_I} \left( \left| \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N} - h_I) - \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha - h_I)) \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha)) - \Psi_I(U_N^{(-j)}(\alpha) + \frac{1}{N}) \right| \right) d\alpha 1_{B_N^c(\varsigma)} \right) \\ &\leq 2^{3I_1/2} L_\Psi C'(\varsigma, \Psi) 2^{-I_1} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left( \mathbb{E}^\nu \left| U_N^{(-j)}(\alpha) - U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) - \frac{N-1}{N} h_I \right| + \frac{h_I + 2}{N} \right). \end{aligned}$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality then the independence of  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu \left| U_N^{(-j)}(\alpha) - U_N^{(-j)}(\alpha - h_I) - \frac{N-1}{N} h_I \right| &\leq \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1, i \neq j}^N (1_{] \alpha - h_I, \alpha]}(G(\theta_i)) - h_I) \right)^2 \right]} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{N} \text{Var}(1_{] \alpha - h_I, \alpha]}(G(\theta)))} \leq \sqrt{\frac{h_I(1-h_I)}{N}}. \end{aligned}$$

Then, we finally have:

$$E_{22}^{(j)} \leq 2^{I_1/2} L_\Psi C'(\varsigma, \Psi) \left( \sqrt{\frac{h_I(1-h_I)}{N}} + \frac{h_I + 2}{N} \right) \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{2^{I_1/2}}{N} \right). \quad (7.4.45)$$

From (7.4.43), (7.4.44), (7.4.45), with  $I_1 \in [1, I_1^N]$  and  $I_1^N$  as in Assumptions 7.2.5:

$$\begin{aligned} |E_2(I, k, i)| &\leq C \left( \frac{2^{I_1^N/2}}{N^{2\varsigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{2^{I_1^N/2}}{N} \right) \\ &\leq C \left( \frac{1}{N^{2\varsigma^2-1/4}(\log N)^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N^{3/4}(\log N)^{1/4}} \right) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (7.4.46)$$

if we choose  $\varsigma$  such that  $\varsigma > \sqrt{3/8}$ .

From (7.4.42), (7.4.46), and if we choose  $\varsigma > \sqrt{3/8}$ , we conclude that:

$$|E| \leq \frac{C}{\sqrt{N}},$$

and Lemma 7.4.3 is proved. ■

With this Section, we have concluded the proof of Lemma 7.3.4. We now have all the tools to prove Lemma 7.3.3.

## 7.5 Proof of Lemma 7.3.3

Recall the definitions of  $\check{u}_b$  and  $\bar{u}_b$  given in (7.3.4) and (7.3.5). Since:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left( \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i, \vartheta_N) - \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) \right|^2 \right) \\
& \leq \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha), \vartheta_N) - \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha)) \right|^2 \right), \\
& \leq 2\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha), \vartheta_N) - \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(\alpha) \right|^2 \right) \\
& + 2\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(\alpha) - \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha)) \right|^2 \right), \quad (7.5.1)
\end{aligned}$$

We first give a lemma allowing us to control some moments, then we upper bound the first term in (7.5.1) thanks to Lemma 7.5.3 and the second term thanks to Lemma 7.5.4.

**Lemma 7.5.1.** *Under Assumptions 7.2.5, there exists for any  $\gamma > 0$  a positive constant  $\kappa$  as in Lemma 7.3.4, such that  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K],$*

$$\mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C2^{I_1}}{N^\gamma} \leq \frac{C}{\sqrt{\log NN^{\gamma-1/2}}}. \quad (7.5.2)$$

As a consequence, for a choice of  $\gamma > 7/2$ , we obtain for every  $p \in [1, 6]: \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K],$

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^p \right) \leq \frac{C(\log N)^{p/2}}{N^{p/2}}. \quad (7.5.3)$$

*Proof.* The tail upper bound of Lemma 7.3.4 implies that:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\
& \leq \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}^\nu \left( |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\
& \leq C2^{I_1} \mathbb{P}^\nu \left( |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\
& \leq \frac{C2^{I_1}}{N^\gamma} \leq \frac{C2^{I_1^N}}{N^\gamma} \leq \frac{C}{\sqrt{\log NN^{\gamma-1/2}}}, \quad (7.5.4)
\end{aligned}$$

since the number of non nul coefficients for a given level  $I_1$  is of order  $2^{I_1}$  when we expand a compactly supported function on a Multi-Resolution Analysis generated by compactly supported wavelets (see Proposition B.3.1 in Appendice). From the preceding inequality, we have for  $p \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^p \right) \\
& \leq \frac{\vartheta_N^p}{2^p} P^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| < \frac{\vartheta_N}{2} \right) \\
& + (2C')^p \|b\|_\infty^p \mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \frac{\vartheta_N}{2} \right) \quad (7.5.5)
\end{aligned}$$

since  $\sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|$  is bounded by  $2C' \|b\|_\infty$ , where  $C'$  has been defined in (7.4.3). Using (7.5.4) we obtain:

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^p \right) \leq \frac{\vartheta_N^p}{2^p} + \frac{C(2C')^p \|b\|_\infty^p}{\sqrt{\log N} N^{\gamma-1/2}} \leq \frac{\kappa^p (\log N)^{p/2}}{2^p N^{p/2}} + \frac{C(2C')^p \|b\|_\infty^p}{\sqrt{\log N} N^{\gamma-1/2}}, \quad (7.5.6)$$

by choice of  $\vartheta_N$  (see (7.2.10)). If  $p \in [1, 6]$  and if we choose  $\gamma > 7/2$ , the dominant term in (7.5.6) is in  $(\log N)^{p/2} / N^{p/2}$ .  $\blacksquare$

**Remark 7.5.2.** *In the sequel, the choice of  $\gamma > 7/2$  will be assumed.*

**Lemma 7.5.3.** *Under Assumptions 7.2.5, and with the choice of  $\kappa$  for the threshold  $\vartheta_N$  as in Lemma 7.3.4:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha), \vartheta_N) - \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(\alpha) \right|^2 \right) \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}.$$

**Lemma 7.5.4.** *Under Assumptions 7.2.5, and with the choice of  $\kappa$  for the threshold  $\vartheta_N$  as in Lemma 7.3.4:  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(\alpha) - \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha)) \right|^2 \right) \leq C (\log N)^2 \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}.$$

Let us notice that the convergence rates depend on the regularity  $s$  of  $\alpha \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  (see Lemma 7.3.1). This was to be expected, since this regularity can be translated in terms of properties of the wavelet coefficients  $\check{\beta}_I^{(b,t_k)}$ . Indeed, when  $\phi$  and  $\psi$  satisfy Assumption (7.2.8), the wavelet coefficients  $\beta_I$  of any  $s$ -Hölder continuous function  $f$  satisfy (see Härdle *et al.* [61], Theorem 9.4 page 119):

$$\exists C > 0, \forall I_1 \geq -1, \sup_{I_2} |\beta_{I_1 I_2}| \leq C 2^{-I_1(s+\frac{1}{2})}. \quad (7.5.7)$$

### 7.5.1 Proof of Lemma 7.5.3

Let us define

$$\Delta_{I,N}(a) = \psi_I(G(a)) - \psi_I(G_N(a)). \quad (7.5.8)$$

Since  $\psi_I$  is Lipschitz continuous with constant  $L_\psi 2^{3I_1/2}$ :

$$\forall p \geq 1, \mathbb{E}^\nu (\|\Delta_{I,N}\|_\infty^p) \leq 2^{3I_1 p/2} L_\psi^p \mathbb{E}^\nu (\|G - G_N\|_\infty^p) \quad (7.5.9)$$

From the law of the iterated logarithm (see Van der Vaart [33], Chapter 19, page 268):

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{N}{2 \log \log N}} \|G - G_N\|_\infty \leq \frac{1}{2} \text{ almost surely.} \quad (7.5.10)$$

Hence for sufficiently large  $N$  and for every  $p \geq 1$ :

$$\mathbb{E}^\nu (\|\Delta_{I,N}\|_\infty^p) \leq 2^{3I_1 p/2} L_\psi^p \left( \frac{\log \log N}{N} \right)^{p/2}. \quad (7.5.11)$$

We are now ready to start the proof of Lemma 7.5.3:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha), \vartheta_N) - \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(G(G^{-1}(\alpha))) \right\|_\infty^2 \right) \\
&= \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \left[ \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(G_N(G^{-1}(\alpha))) - \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \psi_I(G(G^{-1}(\alpha))) \right] \right\|_\infty^2 \right) \\
&\leq I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \mathbb{E} \left( \left\| \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \Delta_{I,N} \right\|_\infty^2 \right),
\end{aligned}$$

by convexity inequality. Notice that since we deal with compact supported wavelets, for any given  $I_1$ , the number  $C$  of index  $I_2$  such that  $\Delta_{I,N}(a)$  does not vanish is finite and does not depend on  $I_1$ . Thus:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{I_2} \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \Delta_{I,N}(a) \right\|_\infty^2 &\leq C \sup_{I_2} \left| \text{thr} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i), \vartheta_N \right) \right|^2 \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2 \\
&\leq C(A_1 + A_2 + A_3),
\end{aligned}$$

where :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^2 \mathbf{1}_{\{|\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \leq \vartheta_N/2\}} \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2 \\
A_2 &= \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^2 \mathbf{1}_{\{|\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| > \vartheta_N/2\}} \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2 \\
A_3 &\leq \sup_{I_2} \left| \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^2 \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

Let us work on Term  $A_1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\nu(A_1) &= \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^2 \mathbf{1}_{\{|\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \leq \vartheta_N/2\}} \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2 \right) \\
&\leq \left( \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^6 \right) \right)^{1/3} \left( P \left( \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right| \geq \frac{\vartheta_N}{2} \right) \right)^{1/3} \\
&\times \left( \mathbb{E}^\nu (\|\Delta_{I,N}\|_\infty^6) \right)^{1/3}.
\end{aligned}$$

Using Lemma 7.5.1 and (7.5.11), we obtain that:

$$\mathbb{E}^\nu(A_1) \leq C \frac{\log N}{N} \frac{2^{I_1/3}}{N^{\gamma/3}} \frac{2^{3I_1} \log \log N}{N} \leq C \frac{(\log N)(\log \log N) 2^{10I_1/3}}{N^{\gamma/3+2}}.$$

Hence:

$$I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \mathbb{E}^\nu(A_1) \leq C I_1^N \frac{(\log N)(\log \log N) 2^{10I_1^N/3}}{N^{\gamma/3+2}} \leq C \frac{(\log N)^{1/3} \log \log N}{N^{\gamma/3+1/3}}, \quad (7.5.12)$$

if we choose  $\gamma$  such that  $1/3 + \gamma/3 > 2s/(1+2s)$  i.e.  $\gamma > (4s-1)/(1+2s)$ , the right member of (7.5.12) will be bounded by  $CN^{-2s/(1+2s)}$ . This is the case if we choose  $\gamma > 7/2$  as in Lemma 7.5.1, since  $\forall s > 1/2$ ,  $(4s-1)/(1+2s) < 2$ .

Now, consider Term  $A_2$ :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^2 \mathbf{1}_{\{|\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| > \vartheta_N/2\}} \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2 \right) \\
& \leq \left( \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \left| \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^6 \right) \right)^{1/3} \left( \mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| > \vartheta_N/2 \right) \right)^{1/3} \\
& \times \left( \mathbb{E}^\nu (\|\Delta_{I,N}\|_\infty^6) \right)^{1/3} \leq C \frac{\log N}{N} \left( \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \frac{2^6 (\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i))^6}{\vartheta_N^6} \right) \right)^{1/3} \frac{2^{3I_1} \log \log N}{N}.
\end{aligned}$$

Since  $\alpha \mapsto \bar{u}_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  is  $s$ -Hölder continuous for all  $x \in \mathbb{R}$ , we can use (7.5.7) and:

$$\left( \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \frac{2^6 (\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i))^6}{\vartheta_N^6} \right) \right)^{1/3} \leq C \frac{N}{\log N} 2^{-2I_1(s+1/2)}.$$

Thus, if  $1/2 < s < 1$ , since  $2/(1+2s) < 1$ :

$$I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \mathbb{E}^\nu(A_2) \leq C \frac{(\log N)(\log \log N) 2^{2I_1^N(1-s)}}{N} \leq C(\log \log N) \left( \frac{\log N}{N} \right)^s \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}.$$

If  $s \geq 1$ , we have since  $2s/(1+2s) < 1$ :

$$I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \mathbb{E}^\nu(A_2) \leq C \frac{\log N}{N} \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}.$$

Let us finally work on the expectation of term  $A_3$ :

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \left| \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^2 \|\Delta_{I,N}\|_\infty^2 \right) \leq C \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \left| \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right|^4 \right)} \frac{2^{3I_1} \log \log N}{N} \leq \frac{2^{2I_1(1-s)}}{N}.$$

If  $1/2 < s < 1$ , then  $1-s > 0$  and since  $2/(1+2s) < 1$ :

$$I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \mathbb{E}^\nu(A_3) \leq C \frac{\log N 2^{2I_1^N(1-s)}}{N} = C \left( \frac{\log N}{N} \right)^s \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}.$$

If  $s \geq 1$ :

$$I_1^N \sum_{I_1^N} \mathbb{E}^\nu(A_3) \leq C \frac{\log N}{N} \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}},$$

by using that  $2s/(1+2s) < 1$ . ■

## 7.5.2 Proof of Lemma 7.5.4

The proof of Lemma 7.5.4 is very similar to the usual computation of the uniform convergence rate for wavelet regression estimators (see Donoho *et al.* [38]). We upper bound the difference between the particle approximation  $\alpha \mapsto \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha), \vartheta_N)$  and the function

$\alpha \mapsto \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, G^{-1}(\alpha))$ , which is random (as the second argument  $x$  is taken at the random position  $\bar{X}_{t_k}^i$ ):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \mathbf{1}_{\{|\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \psi_I(G(a)) - \bar{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, a) \right\|_\infty^2 \right) \\ & \leq C [B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5], \end{aligned}$$

where:

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \leq \vartheta_N/2, |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| < \vartheta_N\}} \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \psi_I \right\|_\infty^2 \right) \\ B_2 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| > \vartheta_N/2, |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| < \vartheta_N\}} \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \psi_I \right\|_\infty^2 \right) \\ B_3 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \leq \vartheta_N/2, |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right) \psi_I \right\|_\infty^2 \right) \\ B_4 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| > \vartheta_N/2, |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N\}} \left( \check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \right) \psi_I \right\|_\infty^2 \right) \\ B_5 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left\| \sum_{I_1 \geq I_1^N} \sum_{I_2} \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) \psi_I \right\|_\infty^2 \right). \end{aligned}$$

We now upper bound each of these terms. The terms  $B_1$  and  $B_4$  determine the convergence rate at speed  $2s/(1+2s)$ .

Using (7.5.7), we deduce that:

$$B_5 \leq C 2^{-2I_1^N(s+1/2)} 2^{I_1^N} \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^s \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}, \quad (7.5.13)$$

since  $2/(1+2s) < 1$  for  $s > 1/2$ .

Now, let us consider Term  $B_1$ .

$$B_1 \leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} 2^{I_1} \|\psi\|_\infty^2 \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} \mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \leq \vartheta_N/2\}} |\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^2 \right).$$

For  $0 < r < 2$ , we have:

$$\mathbf{1}_{\{|\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \leq \vartheta_N/2\}} |\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^2 \leq \left( \frac{\vartheta_N}{2} \right)^{2-r} |\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^r \leq C \vartheta_N^{2-r} 2^{-I_1 r (s + \frac{1}{2})}.$$

We deduce, with  $r = 2/(2s+1)$ :

$$B_1 \leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \vartheta_N^{2-r} 2^{-I_1 r (s + 1/2 - 1/r)} \leq C (\log N)^2 \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{2s+1}}.$$



Now turn to Term  $B_2$ . Using Lemma 7.5.1 and (7.5.7) again:

$$\begin{aligned}
B_2 &\leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sqrt{\mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \frac{\vartheta_N}{2} \right)} \\
&\quad \times \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^4 \right)} \|\psi_I\|_\infty^2 \\
&\leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \frac{2^{I_1/2}}{N^{\gamma/2}} 2^{-2I_1(s+1/2)} 2^{I_1} \leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \frac{2^{I_1(1/2-2s)}}{N^{\gamma/2}} \leq \frac{C \log N}{N^{\gamma/2}},
\end{aligned}$$

since  $1/2 - 2s < -1/2$ . Choosing  $\gamma$  such that  $\gamma/2 > 2s/(1+2s)$ , *i.e.*  $\gamma > 4s/(1+2s)$  (and this is the case with  $\gamma > 7/2$ , as  $\forall s > 1/2$ ,  $4s/(1+2s) < 2$ ) implies that this term decreases faster than the rate announced in Lemma 7.5.4.

Let us consider Term  $B_3$ . From Lemma 7.5.1:

$$\begin{aligned}
B_3 &\leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^4 \right)} \\
&\quad \times \sqrt{\mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N/2 \right)} \|\psi_I\|_\infty^2 \\
&\leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \frac{\log N}{N} \frac{2^{I_1/2}}{N^{\gamma/2}} 2^{I_1} \leq C I_1^N \frac{\log N}{N^{\gamma/2+1}} 2^{3I_1^N/2} \leq \frac{C(\log N)^{5/4}}{N^{\gamma/2+1/4}}.
\end{aligned}$$

Again, choosing  $\gamma$  such that  $\gamma/2 + 1/4 > 2s/(1+2s)$ , *i.e.*  $\gamma > (3s-1/2)/(1+2s)$  (this is the case when we choose  $\gamma > 7/2$ , since  $\forall s > 1/2$ ,  $(3s-1/2)/(1+2s) < 3/2$ ) allows us to neglect this term.

Let us finally consider Term  $B_4$ :

$$\begin{aligned}
B_4 &\leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sqrt{\mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)| \geq \vartheta_N/2 \right)} \\
&\quad \times \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^4 \right)} \|\psi_I\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

Thanks to (7.5.7), we know that all the wavelet coefficient  $\bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)$  vanish for  $I_1$  such that  $2^{-I_1(s+1/2)} < \vartheta_N/2$ . Thus the sum in  $I_1$  is in fact a sum from  $-1$  to  $I_1^{(4)}$  only, where  $I_1^{(4)}$  is such that  $2^{-I_1^{(4)}(s+1/2)} = \vartheta_N/2$ . Thus:

$$\begin{aligned}
B_4 &\leq C I_1^N \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(4)}} \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i) - \bar{\beta}_I^{(b,t_k)}(\bar{X}_{t_k}^i)|^4 \right)} 2^{I_1} \|\psi\|_\infty^2 \\
&\leq C \frac{(\log N)^2}{N} 2^{I_1^{(4)}} \leq C \log N \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{2s}{1+2s}}.
\end{aligned}$$

■

The proof of Lemma 7.3.3 is now achieved and the term  $B_2(k, N)$  of (7.3.12) in the proof of Theorem 7.2.1 is upper bounded.

## 7.6 Proof of Lemma 7.3.5

We first provide a technical lemma, which will be useful in the sequel. The difficulty lies in the fact that wavelets can not be uniformly upper bounded: their suprema  $2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty$  tend to  $+\infty$  when the resolution level  $I_1$  increases.

**Lemma 7.6.1.** *Assume that the father and mother wavelets  $\phi$  and  $\psi$  are Lipschitz continuous functions with compact support. Then, for the choice of  $\vartheta_N = \kappa \sqrt{\log N/N}$  and of  $I_1^N$  such that  $2^{I_1^N} \sim \vartheta_N^{-1}$ :  $\exists C > 0$ ,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall N \geq N_0$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,*

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_I(\alpha) \psi_I\left(\frac{j}{N}\right) \right| \leq C.$$

*Proof.* We can write:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_I(\alpha) \psi_I\left(\frac{j}{N}\right) \right| \leq T_1 + T_2,$$

$$\text{with: } T_1 = \int_0^1 \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_I(\alpha) \psi_I(y) \right| dy, \quad T_2 = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)/N}^{j/N} \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_I(\alpha) \left[ \psi_I(y) - \psi_I\left(\frac{j}{N}\right) \right] \right| dy.$$

Let us consider  $T_1$ . For  $I_2 \in \mathbb{Z}$ , let us denote by  $\phi_{I_1^N I_2}(x) = 2^{I_1^N} \phi(2^{I_1^N/2}x - I_2)$ , the descendants of the father wavelet  $\phi$  (given in Point 7 of Assumptions 7.2.5). By using the facts that the orthogonal projection kernels associated with  $(\psi_I)_{I_1 \in [-1, I_1^N], I_2 \in \mathbb{Z}}$  and  $(\phi_{I_1^N, I_2})_{I_2 \in \mathbb{Z}}$  coincide (see Härdle *et al.* [61], p.117-118):

$$T_1 = \int_0^1 \left| \sum_{I_2} \phi_{I_1^N I_2}(\alpha) \phi_{I_1^N I_2}(y) \right| dy \leq \int_0^{2^{I_1^N}} \sum_{I_2} |\phi(2^{I_1^N} \alpha - I_2) \phi(x - I_2)| dx \leq C,$$

since the chosen wavelets have compact support. Let us now work on  $T_2$ . Using that  $\psi_{I_1, I_2}$  is  $2^{3I_1/2} L_\psi$ -Lipschitz continuous:

$$\begin{aligned} T_2 &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{I_1=0}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} |\psi_{I_1, I_2}(\alpha)| 2^{3I_1/2} L_\psi \left| \int_{(j-1)/N}^{j/N} \left( \frac{j}{N} - y \right) dy \right| + \sum_{j=1}^N \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} |\phi(\alpha - I_2)| L_\phi \left| \int_{(j-1)/N}^{j/N} \left( \frac{j}{N} - y \right) dy \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left( \sum_{I_1=0}^{I_1^N} \frac{C \|\psi\|_\infty L_\psi 2^{2I_1}}{2N^2} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{C \|\phi\|_\infty L_\phi}{2N^2} \leq \frac{C \|\psi\|_\infty L_\psi 2^{2I_1^N}}{2N} + \frac{C \|\phi\|_\infty L_\phi}{2N}. \end{aligned}$$

From the choice of  $I_1^N$  such that  $2^{I_1^N} \sim \sqrt{N/\log N}$ , we have  $2^{2I_1^N}/N \rightarrow 0$ , and hence  $T_2 \rightarrow 0$ .  $\blacksquare$

Let us now prove Lemma 7.3.5.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i, \vartheta_N) - \hat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left( \text{thr} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I\left(\frac{j}{N}\right) b\left(\bar{X}_{t_k}^{(i)}, \bar{X}_{t_k}^{(j)}\right), \vartheta_N \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \text{thr} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I\left(\frac{j}{N}\right) b\left(\bar{X}_{t_k}^{(i),N}, \bar{X}_{t_k}^{(j),N}\right), \vartheta_N \right) \right) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_I \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \left( b \left( \bar{X}_{t_k}^{(i)}, \bar{X}_{t_k}^{(j)} \right) - b \left( \bar{X}_{t_k}^{(i),N}, \bar{X}_{t_k}^{(j),N} \right) \right) \right|^2 \right) \\
&+ \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_I 2\vartheta_N \left| \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \right| \right)^2. \tag{7.6.1}
\end{aligned}$$

The second term of (7.6.1) upper bounds the sum of absolute values of thresholded terms. Applying the Cauchy-Schwarz inequality for the first term in the right hand side of (7.6.1) and using the result of Lemma 7.6.1, we obtain:

$$\begin{aligned}
&2\mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_I \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \left( b \left( \bar{X}_{t_k}^{(i)}, \bar{X}_{t_k}^{(j)} \right) - b \left( \bar{X}_{t_k}^{(i),N}, \bar{X}_{t_k}^{(j),N} \right) \right) \right|^2 \right) \\
&\leq 2\mathbb{E}^\nu \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \sum_I \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \right| \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \sum_I \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \right| \right) \right. \\
&\quad \left. 2\|b\|_{Lip}^2 \left( \left| \bar{X}_{t_k}^{(i)} - \bar{X}_{t_k}^{(i),N} \right|^2 + \left| \bar{X}_{t_k}^{(j)} - \bar{X}_{t_k}^{(j),N} \right|^2 \right) \right] \\
&\leq 4C^2 \|b\|_{Lip}^2 \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \bar{X}_{t_k}^{(i)} - \bar{X}_{t_k}^{(i),N} \right|^2 \right) \\
&+ 4\|b\|_{Lip}^2 C \mathbb{E}^\nu \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \sum_I \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \right| \right) \left| \bar{X}_{t_k}^{(j)} - \bar{X}_{t_k}^{(j),N} \right|^2 \right) \\
&\leq \frac{8C^2 \|b\|_{Lip}^2}{N} \mathbb{E}^\nu \left( \sum_{j=1}^N \left| \bar{X}_{t_k}^j - \bar{X}_{t_k}^{j,N} \right|^2 \right) \tag{7.6.2}
\end{aligned}$$

Let us now consider the second term in the right hand side of (7.6.1).

$$\begin{aligned}
\frac{8\vartheta_N^2}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \right| \right)^2 &\leq 2\kappa^2 \frac{\log N}{N^2} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} C 2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty \right)^2 \\
&\leq 2\kappa^2 C^2 \|\psi\|_\infty^2 \frac{\log N}{N} 2^{I_1^N} \leq C \sqrt{\frac{\log N}{N}}. \tag{7.6.3}
\end{aligned}$$

From (7.6.1), (7.6.2) and (7.6.3) we obtain:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left( \left| \check{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i, \vartheta_N) - \hat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i, \vartheta_N) \right|^2 \right) \leq C \left( \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \bar{X}_{t_k}^i - \bar{X}_{t_k}^{i,N} \right|^2 \right) + \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right).$$

With this last result, the proofs of all ingredients needed for the computation of the convergence rate of our stochastic wavelet particle system are achieved.

## Chapter 8

# Application to the 2D-Navier-Stokes Equation

We consider the 2D-Navier Stokes equation with random initial condition and, in analogy with Chapter 7, design a stochastic wavelet particle approximation to compute the intensity of its spatial statistical solutions. The latter are related to physical quantities of interest like the mean velocity vector field.

In Sections 8.1 and 8.2, we study the 2D-Navier Stokes equation with random initial conditions. Existence and Uniqueness of weak function solutions for the 2D-vortex equation are obtained by following the probabilistic approach of Marchioro and Pulvirenti [83] and Méléard [88, 90]. We then study wavelet particle approximations in the case where the regularity  $s$  of the initial condition with respect to its alea is unknown by adapting the results of Chapter 7 (Section 8.3). In the case  $s$  is known, we introduce a wavelet particle approximation using linear regression estimators (Section 8.4). This leads us to a convergence rate involving a term in  $N^{-s/(2s+1)}$ , which is linked to the minimax rate for the estimation of a  $s$ -Hölder continuous conditional expectation.

## 8.1 The 2D-Vortex Equation with Random Initial Condition

### 8.1.1 From the 2D-Navier-Stokes Equation to the 2D-Vortex Equation

The statistical two-dimensional Navier-Stokes equation models the velocity  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  of a homogeneous viscous incompressible fluid in the plane:  $P(d\omega) - a.s., \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, x, \theta) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, x, \theta) = (\sigma^2/2) \Delta \mathbf{v}(t, x, \theta) - \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(t, x, \theta) = 0 \\ \mathbf{v}(0, x, \theta) = \mathbf{v}_0(x, \theta) \\ \mathcal{L}(\theta) = \nu. \end{cases} \quad (8.1.1)$$

In the above equation,  $p$  is the pressure and  $\sigma^2/2$  the viscosity ( $\sigma > 0$ ), which we consider to be constant. We assume that the random initial condition  $\mathbf{v}_0$  is parameterized by a random variable  $\theta$  defined on a probability space  $(\Omega, P)$  and with values in  $\Theta \subset \mathbb{R}$  (possibly  $\mathbb{R}$  itself). Detailed studies of the probabilistic approach for the 2D-Navier-Stokes equation with deterministic initial condition have been carried by Marchioro and Pulvirenti [83] and by Méléard in [88, 89, 90].

The probabilistic approach relies on the vortex equation which can be deduced from the Navier-Stokes equation by considering the *curl* of the velocity:  $w = \text{curl}(\mathbf{v})$ . Let us derive formally this equation.  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \theta) + \text{curl}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})(t, x, \theta) = \sigma^2/2 \Delta w(t, x, \theta). \quad (8.1.2)$$

This equation is not closed, and we need a formula giving  $\mathbf{v}$  as a function of the vortex  $w$ .

Since  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  (meaning that the fluid is incompressible):

$$\operatorname{curl}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \operatorname{curl} \mathbf{v}$$

and moreover,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  implies that there exists a *courant* function  $\Upsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  such that:  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T], \mathbf{v}(t, x, \theta) = \nabla^\perp \Upsilon(t, x, \theta)$ . Then,

$$P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T], w(t, x, \theta) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t, x, \theta) = -\Delta \Upsilon(t, x, \theta).$$

This last equation is a Poisson equation in  $\Upsilon$ , which solves in:

$$P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T], \Upsilon(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}(|x - y|) w(t, y, \theta) dy,$$

where  $\mathcal{G}$  is the 2D-Poisson kernel  $\forall r > 0, \mathcal{G}(r) = -(\ln r)/(2\pi)$ . Hence:  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\mathbf{v}(t, x, \theta) = \nabla^\perp \Upsilon(t, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^\perp \mathcal{G}(|x - y|) w(t, y, \theta) dy = K * w(t, x, \theta), \quad (8.1.3)$$

where  $K$  is the Biot and Savart kernel:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, K(x) = \frac{1}{2\pi|x|^2} (-x_2, x_1) \quad (8.1.4)$$

From (8.1.2) and (8.1.3), we obtain the 2D-vortex equation:  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \theta) = -(K * w \cdot \nabla) w(t, x, \theta) + (\sigma^2/2) \Delta w(t, x, \theta), \\ w(0, x, \theta) = w_0(x, \theta), \quad \mathcal{L}(\theta) = \nu. \end{cases} \quad (8.1.5)$$

The kernel  $K$  explodes at 0. To overcome this problem, we make the following assumptions and present in Section 8.1.2 a cut-off approximation to adapt the results of Chapter 7.

**Assumption 8.1.1.** *We assume that*

$$P(d\omega) - a.s., w_0(x, \theta) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (8.1.6)$$

*We will also need the following assumption:*

$$\exists A > 0, P(d\omega) - a.s. (\|w_0(\cdot, \theta)\|_1 + \|w_0(\cdot, \theta)\|_\infty) \leq A. \quad (8.1.7)$$

The assumption (8.1.6) is inspired by the works of Marchioro-Pulvirenti [83] and Méléard [90], and can be understood with the following Lemma, which tells that the term  $K * w$  in (8.1.5) is defined as long as  $w(\cdot, \cdot, \theta) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

**Lemma 8.1.2.** *The function  $K$  is bounded an  $\infty$  and integrable near 0. Let us introduce:*

$$K_1 = \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} |K(y)| dy, \quad \text{and} \quad K_\infty = \sup_{|y| \geq 1} |K(y)|.$$

*Then, for every function  $w \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , and for all  $x \in \mathbb{R}^2$ :*

$$|K * w(x)| \leq K_1 \|w\|_\infty + K_\infty \|w\|_1. \quad (8.1.8)$$

*Proof.* We have:

$$\begin{aligned} |K * w(x)| &\leq \int_{\{|x-y|<1\}} |K(x-y)w(y)| dy + \int_{\{|x-y|\geq 1\}} |K(x-y)w(y)| dy \\ &\leq K_1 \|w\|_\infty + K_\infty \|w\|_1 < C < \infty, \end{aligned}$$

where  $C$  is a constant that does not depend on  $x$ . ■

The assumption (8.1.7) corresponds to the assumption made in [83] to prove existence and uniqueness of a weak function-solution for the vortex equation with deterministic initial condition. It is satisfied as soon as  $\theta$  is a position parameter for instance (the case where  $\theta$  is the expectation of a gaussian law being a case in point, see Examples 1 and 2 in Section 8.5).

Once the vortex has been studied, it is possible to recover the velocity  $\mathbf{v}$  from  $\mathbf{v} = K * w$ . Then, the mean velocity vector field associated with the Navier-Stokes equation with random initial condition (8.1.1) at point  $x \in \mathbb{R}^2$  and time  $T > 0$  expresses as:  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} v_i(T, x, a) \nu(da) = \int_{\mathbb{R}} \langle w(T, dy, a), K^i(x-y) \rangle \nu(da) = \langle I(m_T), K^i(x-\cdot) \rangle. \quad (8.1.9)$$

Our purpose is now to adapt the results of Chapter 7 to the special case of the vortex equation (8.1.5). This allows us to compute approximations of the mean velocity vector field (8.1.9).

### 8.1.2 Regularized Equation

The vortex equation (8.1.5) looks like a McKean-Vlasov equation with:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \Theta$ ,

$$\begin{aligned} b(x, y) &= K(x-y) = \frac{1}{2\pi|x-y|^2} \begin{pmatrix} y_2 - x_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} \\ u_b(t, x, a) &= K * w(t, x, a), \quad u_\sigma(t, x, a) = \sigma. \end{aligned}$$

The assumptions  $(A_1)$  and  $(A_2)$  of Chapter 7 are not satisfied, since  $K$  explodes at 0. Following [83] we regularize the kernel  $K$ . Take  $\varepsilon > 0$ , and consider the cut-off equation:  $\forall t \in [0, T], P(dw) - a.s.$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(t, x, \theta) = -((K_\varepsilon * w^\varepsilon) \cdot \nabla) w^\varepsilon(t, x, \theta) + (\sigma^2/2) \Delta w^\varepsilon(t, x, \theta) \\ w^\varepsilon(0, x, \theta) = w_0(x, \theta), \quad \mathcal{L}(\theta) = \nu, \end{cases} \quad (8.1.10)$$

where the function  $K_\varepsilon$  is defined by:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(x) &= \nabla^\perp \mathcal{G}_\varepsilon(|x|) = \left( -\mathcal{G}'_\varepsilon(|x|) \frac{x_2}{|x|}, \mathcal{G}'_\varepsilon(|x|) \frac{x_1}{|x|} \right), \\ \text{with: } \mathcal{G}_\varepsilon(|x|) &= \begin{cases} \mathcal{G}(|x|), & \text{if } |x| \geq \varepsilon, \\ \text{extended in a } \mathcal{C}_b^\infty \text{ way on } \mathcal{B}(0, \varepsilon). \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

It is possible to choose  $\mathcal{G}_\varepsilon$  such that its derivatives vanish at the origin and satisfy :

$$\forall r \geq 0, |\mathcal{G}_\varepsilon^{(k)}(r)| \leq \sup_{u \geq \varepsilon} |\mathcal{G}^{(k)}(u)| \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon^k}, \quad k \in \{0, 1, 2\}. \quad (8.1.12)$$

In particular,  $K_\varepsilon$  is bounded by  $1/2\pi\varepsilon$  and Lipschitz continuous with constant  $1/2\pi\varepsilon^2$ .

### 8.1.3 Weighted and Signed Initial Measures

Another difficulty lies in the fact that the vortex initial condition  $w_0$  is not necessarily a probability density function. Hence, Assumption  $(A_3)$  of Chapter 7 also fails. We use a trick due to Jourdain [67] to pass from  $w_0 \in L^1 \cap L^\infty$  to any density function  $p_0$ . We introduce the bounded random function  $h$  defined by:  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$h(x, \theta) = w_0(x, \theta) \|w_0(\cdot, \theta)\|_1 / |w_0(x, \theta)| = \text{sign}(w_0(x, \theta)) \times \|w_0(\cdot, \theta)\|_1 \text{ or } 0, \quad (8.1.13)$$

with the convention  $0/0 = 0$ . Then  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2$ ,  $w_0(x, \theta) = h(x, \theta)p_0(x, \theta)$  where

$$p_0(x, \theta) = \frac{|w_0(x, \theta)|}{\|w_0(\cdot, \theta)\|_1} \quad (8.1.14)$$

is a probability density function.

Let us also define, for a probability transition measure  $Q(dy, a)$  on  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$  measurable in  $a \in \mathbb{R}$ , the family  $(\tilde{Q}_t(dy, a))_{t \geq 0}$  of weighted signed transition measures on  $\mathbb{R}^2$  measurable in  $a$  by:  $P(d\omega) - a.s., \forall B$  Borel subset of  $\mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\tilde{Q}_t(B, \theta) = \int_{\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)} 1_B(y(t)) h(y(0), \theta) Q(dy, \theta), \quad (8.1.15)$$

where  $(y_t)_{t \in [0, T]}$  denotes the canonical process on  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$ .

**Proposition 8.1.3.** *If  $P(d\omega) - a.s.$  the marginals  $Q_t(dx, \theta)$  at time  $t$  of  $Q(dx, \theta)$  are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ , then  $\tilde{Q}_t(dx, \theta)$  is also  $P(d\omega) - a.s.$  absolutely continuous.  $\square$*

## 8.2 Existence and Uniqueness for the 2D-Vortex Equation

Our approach follows the works of Marchioro and Pulvirenti [83] and Méléard [90] for a deterministic initial condition. We first study the regularized equation (8.1.10) for which we generalize the result of Chapter 7 to the case of a weighted and signed initial condition. As in Chapter 7, we introduce a stochastic differential equation for which pathwise existence and uniqueness are obtained. Then, existence and uniqueness of a weak function solution of the original vortex equation (8.1.5) are established by mean of a mild equation and by letting the cut-off parameter tend to zero.

### 8.2.1 Existence and Uniqueness of the Solution of the Regularized Equation

The diffusion process  $(X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$  whose time-marginal laws are a weak measure solution of the regularized vortex equation (8.1.10) is given in Proposition 8.2.1. We show that the laws of the  $X_t^\varepsilon(\theta)$  for  $t \in [0, T]$  are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$  (Proposition 8.2.3), which implies the existence of a weak function-solution of (8.1.10). Finally, the uniqueness of the weak function-solution of (8.1.10) is given by Proposition 8.2.4.

**Proposition 8.2.1.** *The nonlinear stochastic differential equation:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t^\varepsilon(\theta) = X_0(\theta) + \sigma W_t + \int_0^t K_\varepsilon * \tilde{Q}_s^\varepsilon(X_s^\varepsilon(\theta), \theta) ds \\ \mathcal{L}(\theta) = \nu, \quad \mathcal{L}(X_0(\theta)) = \frac{|w_0(x, \theta)| dx}{\|w_0(\cdot, \theta)\|_1} = p_0(x, \theta) dx \\ W \text{ is a Brownian motion independent of } \theta \text{ and of the initial condition } X_0(\theta) \\ Q^\varepsilon(dx, \theta) = \mathcal{L}(X^\varepsilon(\theta)), \quad \tilde{Q}^\varepsilon(dx, \theta) \text{ is associated with } Q^\varepsilon(dx, \theta) \text{ as in (8.1.15).} \end{array} \right. \quad (8.2.1)$$

admits a unique solution for a given Brownian motion  $W$ , a given random parameter  $\theta$  and a given initial condition  $X_0(\theta)$ .

*Proof.* The proof is a direct generalization of the work of Marchioro and Pulvirenti ([83], Section 2). As in the proof of Theorem 7.1.1, let us work conditionally to a realization  $a$  of  $\theta$  and prove existence and uniqueness of a pathwise solution for the nonlinear stochastic differential equation (8.2.1) with a fixed point argument.

Let  $\mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2)$  be the space of signed measures on  $\mathbb{R}^2$ . For all  $\mu \in \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2)$ , we denote by  $\mu^+$  and  $\mu^-$  the positive and negative parts of  $\mu$ . Define

$$A_a^+ = \|(w_0(x, a)dx)^+\|_{TV}, \quad \text{and} \quad A_a^- = \|(w_0(x, a)dx)^-\|_{TV}, \quad (8.2.2)$$

$\|\cdot\|_{TV}$  being the total variation norm. We introduce the space  $\mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-)$  of signed measures on  $\mathbb{R}^2$  such that

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A^+, A^-), \quad \|\mu^+\|_{TV} = A_a^+, \quad \text{and} \quad \|\mu^-\|_{TV} = A_a^-.$$

The space  $\mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-)$  can be embedded with the following metric:

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-), \quad \widetilde{\mathcal{W}}_1(\mu_1, \mu_2) = \mathcal{W}_1\left(\frac{\mu_1^+}{A_a^+}, \frac{\mu_2^+}{A_a^+}\right) + \mathcal{W}_1\left(\frac{\mu_1^-}{A_a^-}, \frac{\mu_2^-}{A_a^-}\right), \quad (8.2.3)$$

where  $\mathcal{W}_1$  is the following Vaserstein metric:

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \quad \mathcal{W}_1(\eta_1, \eta_2) = \inf \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |x - y| \pi(dx, dy),$$

the infimum being taken on all probability measures  $\pi$  on  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  with marginals  $\eta_1$  and  $\eta_2$ . The topology induced by the metric (8.2.3) is equivalent to the weak convergence topology on  $\mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-)$  and makes it separable and complete.

For a given  $t \in [0, T]$ , the space  $\mathcal{C}([0, t], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-))$ , the continuity being in a  $L^1$ -weak sense, embedded with the metric

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}([0, t], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-)), \quad \widetilde{\mathcal{W}}_{1,t}(\mu_1, \mu_2) = \sup_{s \in [0, t]} \widetilde{\mathcal{W}}_1(\mu_{1,s}, \mu_{2,s}), \quad (8.2.4)$$

is a complete metric space.

Let  $\mu \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-))$  and let us associate with  $\mu$  the following diffusion, which is obtained from (8.2.1) by replacing the drift coefficient as in the proof of Theorem 7.1.1:

$$\begin{cases} X_t^{\varepsilon, \mu}(a) = X_0(a) + \sigma W_t + \int_0^t u_b^{\varepsilon, \mu}(s, X_s^{\varepsilon, \mu}(a), a) ds \\ u_b^{\varepsilon, \mu}(s, x, a) = \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(x - y) \mu_s(dy) \\ \mathcal{L}(X_0(a)) = \frac{|w_0(x, a)| dx}{\|w_0(\cdot, a)\|_1} = p_0(x, a) dx \\ W \text{ is a Brownian motion independent of } \theta \text{ and of the initial condition } X_0(a). \end{cases} \quad (8.2.5)$$

The function  $u_b^{\varepsilon, \mu}$  is bounded and Lipschitz-continuous with respect to the variables  $x \in \mathbb{R}^2$ . Hence, pathwise existence and uniqueness hold for Equation (8.2.5).

We define the following map:

$$\zeta_a : \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-)) \rightarrow \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A_a^+, A_a^-)) \quad (8.2.6)$$

$$\mu \quad \mapsto \quad \zeta_a(\mu),$$



where  $\zeta_a(\mu)$  is defined by:

$$\forall t \in [0, T], \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2), \langle \zeta_a(\mu)_t, f \rangle = \mathbb{E}(h(X_0(a), a)f(X_t^{\varepsilon, \mu}(a))),$$

$(X_t^{\varepsilon, \mu}(a))_{t \in [0, T]}$  being the pathwise solution of (8.2.5). The map  $\zeta_a$  is well defined. Let us write:

$$\forall t \in [0, T], \zeta_a(\mu)_t = \zeta_a(\mu)_t^+ - \zeta_a(\mu)_t^-,$$

where  $\zeta_a(\mu)_t^+$  and  $\zeta_a(\mu)_t^-$  are nonnegative measures defined for all  $f$  in  $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)$  by:

$$\langle \zeta_a(\mu)_t^\pm, f \rangle = \mathbb{E}([h(X_0(a), a)]_\pm f(X_t^{\varepsilon, \mu}(a))),$$

$[h]_\pm$  being the positive or negative part of  $h$ . Thus,

$$\forall t \in [0, T], \|\zeta_a(\mu)_t^\pm\|_{TV} = \langle \zeta_a(\mu)_t^\pm, 1 \rangle = \mathbb{E}([h(X_0(a), a)]_\pm) = A_a^\pm,$$

and  $\zeta_a$  is  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^n, A_a^+, A_a^-))$ -valued. The continuity of  $\zeta_a$  is a consequence of the following Lemma 8.2.2, proved in the sequel.

As in the proof of Theorem 7.1.1, existence and uniqueness of a weak solution for the nonlinear stochastic differential equation (8.2.1) is equivalent to the existence and uniqueness of a fixed point for the map  $\zeta_a$ , which is a consequence of the following result :

**Lemma 8.2.2.** *For  $\zeta_a$  defined in (8.2.6) :  $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A^+, A^-))$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{1,t}(\zeta_a(\mu^1), \zeta_a(\mu^2)) \leq A\|K_\varepsilon\|_{Lip} \exp(A\|K_\varepsilon\|_{Lip}T) \left( \int_0^t \widetilde{\mathcal{W}}_{1,s}(\mu^1, \mu^2) ds \right). \quad (8.2.7)$$

Indeed, for  $\mu \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A^+, A^-))$  and for the sequence of  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A^+, A^-))$ :

$$\eta^k = \begin{cases} \mu & \text{if } k = 0 \\ \zeta_a(\eta^{k-1}) & \text{if } k > 0, \end{cases} \quad (8.2.8)$$

we have for all  $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{1,T}(\eta^{k+1}, \eta^k) \leq \frac{C'(T)^k t^k}{k!} \widetilde{\mathcal{W}}_{1,t}(\zeta_a(\mu), \mu).$$

Hence  $(\eta^k)_{k \in \mathbb{N}}$  is a Cauchy sequence in the complete space  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A^+, A^-))$ , and converges to a limit  $\bar{\mu}$ , which is the unique fixed point of  $\zeta_a$  (see the proof of Theorem 7.1.1).

Hence, there exists a unique weak solution to stochastic differential equation (8.2.1).

Let us consider the pathwise solution  $(X_t^{\varepsilon, \bar{\mu}}(a))_{t \in [0, T]}$  of the linear stochastic differential equation (8.2.5) with  $\mu = \bar{\mu}$ , for a given initial condition  $X_0(a)$  and a given Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ . By definition of  $\zeta_a$  we have:

$$\forall t \in [0, T], \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2), \mathbb{E}(h(X_0(a), a)f(X_t^{\varepsilon, \bar{\mu}}(a))) = \langle \zeta_a(\bar{\mu})_t, f \rangle = \langle \bar{\mu}_t, f \rangle,$$

since  $\bar{\mu}$  is a fixed point of  $\zeta_a$ . Hence,  $(X_t^{\varepsilon, \bar{\mu}}(a))_{t \in [0, T]}$  is also a solution of the nonlinear equation (8.2.1). This proves the strong existence of a solution for (8.2.1).

Let us now turn to the pathwise uniqueness of the solution of (8.2.1). For a given initial condition  $X_0(a)$  of law  $p_0(x, a)dx$  and a given Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ , consider two pathwise solutions  $(X_t^{\varepsilon, 1}(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^{\varepsilon, 2}(a))_{t \in [0, T]}$  of (8.2.1). Since we have uniqueness of the weak solution, these two processes have the same law  $\bar{\mu} = \mathcal{L}((X_t^{\varepsilon, 1}(a))_{t \in [0, T]}) = \mathcal{L}((X_t^{\varepsilon, 2}(a))_{t \in [0, T]})$ . Thus, these two processes also solve the same auxiliary linear stochastic differential equation (8.2.5) with  $\mu = \bar{\mu}$ . As pathwise uniqueness result is available for (8.2.5), we deduce that  $(X_t^{\varepsilon, 1}(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^{\varepsilon, 2}(a))_{t \in [0, T]}$  have the same trajectories. Hence, pathwise uniqueness also holds for the nonlinear stochastic differential equation (8.2.1).  $\blacksquare$

*Proof of Lemma 8.2.2.* Let  $a \in \Theta$  be a realization of  $\theta$  and let  $\mu^1$  and  $\mu^2$  be two elements of  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_S(\mathbb{R}^2, A^+, A^-))$  and let  $(X_t^{\varepsilon, \mu^1}(a))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^{\varepsilon, \mu^2}(a))_{t \in [0, T]}$  be the associated diffusions, as in (8.2.5), defined with the same Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  and the same initial condition  $X_0(a)$  of law  $p_0(x, a)dx$ . Let us define:

$$L_\varepsilon = \max(\|K_\varepsilon\|_{Lip}, 2 \max K_\varepsilon), \quad \text{and} \quad A = \max(A^+, A^-). \quad (8.2.9)$$

We have:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu \left( \left| X_t^{\varepsilon, \mu^1}(a) - X_t^{\varepsilon, \mu^2}(a) \right| \right) \\ &= \mathbb{E}^\nu \left( \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^1}(a) - y) \mu_s^1(dy) ds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y) \mu_s^2(dy) ds \right| \right) \\ &\leq \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left| K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^1}(a) - y) - K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y) \right| \mu_s^1(dy) \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y) \mu_s^1(dy) ds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y) \mu_s^2(dy) ds \right| \right) \\ &\leq A \|K_\varepsilon\|_{Lip} \left[ \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^t \left| X_s^{\varepsilon, \mu^1}(a) - X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) \right| ds \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^2)^2} \left| K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y_1) - K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y_2) \right| \pi_s^+(dy_1, dy_2) ds \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}^\nu \left( \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^2)^2} \left| K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y_1) - K_\varepsilon(X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) - y_2) \right| \pi_s^-(dy_1, dy_2) ds \right) \right], \end{aligned}$$

for any product measures  $\pi^\pm$  with marginals  $(\mu^1)^\pm$  and  $(\mu^2)^\pm$ . Taking the infimum with respect to  $\pi$ :

$$\mathbb{E}^\nu \left( \left| X_t^{\varepsilon, \mu^1}(a) - X_t^{\varepsilon, \mu^2}(a) \right| \right) \leq A \|K_\varepsilon\|_{Lip} \int_0^t \mathbb{E}^\nu \left( \left| X_s^{\varepsilon, \mu^1}(a) - X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) \right| \right) ds + A \|K_\varepsilon\|_{Lip} \int_0^t \widetilde{\mathcal{W}}_1(\mu_s^1, \mu_s^2) ds.$$

By Gronwall's Lemma, we obtain:

$$\sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E}^\nu \left( \left| X_s^{\varepsilon, \mu^1}(a) - X_s^{\varepsilon, \mu^2}(a) \right| \right) \leq A \|K_\varepsilon\|_{Lip} \left( \int_0^t \widetilde{\mathcal{W}}_1(\mu_s^1, \mu_s^2) ds \right) \exp(A \|K_\varepsilon\|_{Lip} T).$$

This yields (8.2.7). ■

**Proposition 8.2.3.** *There exists a weak function-solution of (8.1.10), which we denote by  $(w^\varepsilon(t, \cdot, \theta))_{t \in [0, T]}$ .*

*Proof.* Let  $\varepsilon > 0$ . Let us consider the unique pathwise solution  $(X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]} = (X_t^{\varepsilon, 1}(\theta), X_t^{\varepsilon, 2}(\theta))_{t \in [0, T]}$  of the stochastic differential equation (8.2.1). By construction,  $\widetilde{Q}^\varepsilon(dx, \theta)$  associated with  $\mathcal{L}(X^\varepsilon(\theta))$  by (8.1.15) is a weak measure-solution of (8.1.10). Our purpose is to prove that for every  $t \in [0, T]$ , the law of  $X_t^\varepsilon(\theta)$  admits a density with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ .

Recall that  $K^\varepsilon$  is bounded and hence that the drift coefficient

$$u_b^\varepsilon(t, x, a) = K_\varepsilon * \widetilde{Q}_t^\varepsilon(x, a)$$

is a bounded function. Let us define the following continuous martingale process for  $t \in [0, T]$ :

$$L_t = -\frac{1}{\sigma} \int_0^t u_b^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon(\theta), \theta) \cdot dW_s \quad (8.2.10)$$

Applying Girsanov's Theorem, we obtain that the diffusion  $(X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]}$  is a continuous local martingale under the probability law  $\mathbb{Q}^\nu := \mathbb{Q}_W \times \nu$  where  $\mathbb{Q}_W$  is the probability measure on  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$  such that for all  $t \in [0, T]$ ,

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}_W}{d\mathbb{P}_W} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t} = \exp \left( -\frac{1}{\sigma} \int_0^t u_b^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon(\theta), \theta) \cdot dW_s - \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^t \|u_b^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon(\theta), \theta)\|^2 ds \right). \quad (8.2.11)$$

We have moreover:

$$\langle X^{\varepsilon, i}(\theta), X^{\varepsilon, j}(\theta) \rangle_t = \sigma^2 t \mathbf{1}_{i=j}. \quad (8.2.12)$$

The process  $(X_{t/\sigma^2}^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, \sigma^2 T]}$  is a  $\mathbb{Q}^\nu$ -2D-Brownian motion. Since the time marginals of the 2D-Brownian motion are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ , we deduce that the law of  $X_t^\varepsilon$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ , under  $\mathbb{Q}^\nu$  and  $\mathbb{P}^\nu$ , which are equivalent by construction.  $\blacksquare$

**Proposition 8.2.4.** *There exists a unique weak function-solution to Equation (8.1.10).*

*Proof.* The proof is the same as the proof of the Theorem 8.2.1 in the sequel, and we do not give it here to avoid repetition. It is based on the fact that every function-solution of (8.1.10) also solves a mild equation for which the uniqueness of the solution is easier to obtain.  $\blacksquare$

## 8.2.2 Existence and Uniqueness for the Vortex Equation (8.1.5)

Under Assumption (8.1.7) we can obtain existence and uniqueness results for the original vortex equation (8.1.5) by following the approach of Méléard [88, 89, 90] in the case of a deterministic initial condition. We prove uniqueness thanks to a mild equation, then, existence is proved with completeness results by letting  $\varepsilon$  tend to zero.

**Proposition 8.2.5.** *Let  $w_0(\cdot, \theta)$  be a random initial condition on  $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  such that Assumption (8.1.7) is satisfied with a constant  $A > 0$ . There exists a unique weak function-solution  $(w(t, \cdot, \theta))_{t \in [0, T]}$  of (8.1.5) in the space:*

$$\mathcal{H} = \left\{ (q_t(x))_{t \in [0, T]} \mid \forall t \in [0, T], q_t \in L^1 \cap L^\infty, \sup_t \|q_t\|_1 \leq A, \sup_t \|q_t\|_\infty \leq A \right\},$$

endowed with the complete norm  $\|q\| = \sup_{t \in [0, T]} (\|q_t\|_1 + \|q_t\|_\infty)$ .  $\square$

The proof of this Proposition makes the end of Section 8.2.2.

### 8.2.2.1 Proof of Uniqueness

Let us introduce the mild equation associated with (8.1.5). Let  $G_t^{\sigma^2}$  be the heat kernel on  $\mathbb{R}^2$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in ]0, T], G_t^{\sigma^2}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 t} \exp \left( -\frac{|x|^2}{2\sigma^2 t} \right). \quad (8.2.13)$$

By convention,  $G_0^{\sigma^2}$  is such that  $\forall \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $G_0^{\sigma^2} * \phi = \phi$ . Some estimates for this kernel will be needed in the sequel:

**Lemma 8.2.6.** *We have for all  $x \in \mathbb{R}^2$  and for all  $t \in ]0, T]$ :*

$$\|\nabla G_t^{\sigma^2}(x)\|_1 \leq \frac{C}{\sqrt{\sigma^2 t}} \quad (8.2.14)$$

and hence:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T], \int_0^t \|\nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(x)\|_1 ds < +\infty.$$

**Theorem 8.2.1.** *Every solution  $(w(t, \cdot, \theta))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{H}$  of (8.1.5) is also the unique weak solution of the following mild equation:  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,*

$$w(t, x, \theta) = G_t^{\sigma^2} * w_0(x, \theta) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(x-y) \cdot K * w(s, y, \theta) w(s, y, \theta) dy ds. \quad (8.2.15)$$

As a consequence, there exists a unique weak function-solution to Equation (8.1.5).

*Proof.* Let  $\phi \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ . We have:  $P(d\omega) - a.s.$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t, x) w(t, x, \theta) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(0, x) w_0(x, \theta) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial s} \phi(s, x) w(s, x, \theta) dx ds \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \phi(s, x) w(s, x, \theta) dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (K * w(s, x, \theta) \cdot \nabla) \phi(s, x) w(s, x, \theta) dx ds. \end{aligned}$$

If we choose:  $\forall t \in [0, T], \forall s \in [0, t], \forall x \in \mathbb{R}^2, \phi(s, x) = G_{t-s}^{\sigma^2} * \varphi(x)$ , with  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ , then,

$$\forall s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial}{\partial s} \phi(s, x) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta \phi(s, x) = 0,$$

and  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} G_0^{\sigma^2} * \varphi(x) w(t, x, \theta) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} G_t^{\sigma^2} * \varphi(x) w_0(x, \theta) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (K * w(s, x, \theta) \cdot \nabla) (G_{t-s}^{\sigma^2} * \varphi)(x) w(s, x, \theta) dx ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\mathbb{R}^2} dy G_t^{\sigma^2}(x-y) \varphi(y) w_0(x, \theta) + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\mathbb{R}^2} dy \varphi(y) \nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(x-y) (K * w(s, x, \theta)) w(s, x, \theta). \end{aligned}$$

Lemmas 8.1.2 and 8.2.6 allow to use Fubini's Theorem and:  $P(d\omega) - a.s.$  and  $\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) w(t, x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}^2} (G_t^{\sigma^2} * w_0(\cdot, \theta))(y) \varphi(y) dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \varphi(y) \nabla G_{t-s}^{\sigma^2} * (K * w(s, \cdot, \theta) w(s, \cdot, \theta))(y),$$

which is the announced mild equation.

Let us prove that the solution of (8.2.15) in  $\mathcal{H}$  is unique. Let  $w^1$  and  $w^2$  be two solutions in  $\mathcal{H}$ . We have  $P(d\omega) - a.s.$  and  $\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} &w^1(t, x, \theta) - w^2(t, x, \theta) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(x-y) \cdot (K * w^1(s, y, \theta) w^1(s, y, \theta) - K * w^2(s, y, \theta) w^2(s, y, \theta)) dy ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(x-y) \cdot (K * w^1(s, y, \theta) (w^1(s, y, \theta) - w^2(s, y, \theta)) \\ &+ K * (w^1(s, y, \theta) - w^2(s, y, \theta)) \cdot w^2(s, y, \theta)) dy ds. \end{aligned}$$

Fubini's Theorem was allowed by Lemmas 8.1.2 and 8.2.6.  $P(d\omega) - a.s.$  and  $\forall t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} &|||w^1(t, \cdot, \theta) - w^2(t, \cdot, \theta)||| \leq \int_0^t ||| \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(\cdot - y) (K * w^1(s, y, \theta) (w^1(s, y, \theta) - w^2(s, y, \theta)) \\ &+ K * (w^1(s, y, \theta) - w^2(s, y, \theta)) w^2(s, y, \theta)) dy ||| ds \\ &\leq C (K_1 + K_\infty) (|||w_0(\cdot, \theta)|||_{L^1} + |||w_0(\cdot, \theta)|||_{L^\infty}) \int_0^t |||\nabla G_{t-s}^{\sigma^2}|||_1 |||w^1(s, \cdot, \theta) - w^2(s, \cdot, \theta)||| ds \\ &\leq C (K_1 + K_\infty) (|||w_0(\cdot, \theta)|||_{L^1} + |||w_0(\cdot, \theta)|||_{L^\infty}) \int_0^t \frac{|||w^1(s, \cdot, \theta) - w^2(s, \cdot, \theta)|||}{\sqrt{t-s}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_0^s \frac{\|w^1(u, \cdot, \theta) - w^2(u, \cdot, \theta)\|}{\sqrt{s-u}} du ds \\
&\leq C \int_0^t \|w^1(u, \cdot, \theta) - w^2(u, \cdot, \theta)\| \int_u^t \frac{1}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-u}} ds du \leq C \int_0^t \|w^1(u, \cdot, \theta) - w^2(u, \cdot, \theta)\| du.
\end{aligned}$$

By Gronwall's Lemma:

$$P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T], \|w^1(t, \cdot, \theta) - w^2(t, \cdot, \theta)\| = 0,$$

which proves uniqueness.  $\blacksquare$

**Remark 8.2.7.** *With computations similar to the proof of Theorem 8.2.1, it is possible to prove that the solution  $w^\varepsilon$  of (8.1.10) also solves a mild equation:*

$$w^\varepsilon(t, y, \theta) = G_t^{\sigma^2} * w_0(y) + \int_0^t \nabla G_{t-s}^{\sigma^2} * (K^\varepsilon * w^\varepsilon(s, \cdot, \theta) w^\varepsilon(s, \cdot, \theta))(y) ds \quad (8.2.16)$$

### 8.2.2.2 Existence

Let us now prove existence. The ingredients are the completeness of the space  $\mathcal{H}$ , the existence of a solution for the regularized vortex equation and the mild expression for the original and regularized vortex equations (8.1.5) and (8.1.10).

**Theorem 8.2.2.** (i) *Let  $((w^\varepsilon(t, \cdot, \theta))_{t \in [0, T]})_{\varepsilon > 0}$  be the weak function-solutions of Equations (8.1.10). This family forms  $P(d\omega) - a.s.$  a Cauchy sequence when  $\varepsilon$  decreases to zero.*

(ii) *As a consequence, there exists a unique weak function solution  $(w(t, \cdot, \theta))_{t \in [0, T]}$  to Equation (8.1.5) in  $\mathcal{H}$ , such that:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T], \forall \varepsilon > 0,$*

$$\|w^\varepsilon(t, \cdot, \theta) - w(t, \cdot, \theta)\| \leq C(T) \varepsilon. \quad (8.2.17)$$

*Proof.* We know from Remark 8.2.7 that the regularized partial differential equation (8.1.10) admits a unique weak function solution  $w^\varepsilon(\cdot, \cdot, \theta)$  that is  $P(d\omega)$ -a.s. linked by (8.1.15) to the density process  $(p^\varepsilon(t, \cdot, \theta))_{t \in [0, T]}$  of the unique solution  $(X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]}$  of (8.1.10):  $P(d\omega) - a.s., \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \forall t \in [0, T],$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) w^\varepsilon(t, x, \theta) dx = \int_{(\mathbb{R}^2)^2} f(x) h(y, \theta) P^{(X_0(\theta), X_t^\varepsilon(\theta))}(dy, dx).$$

Let us show that  $w^\varepsilon(\cdot, \cdot, \theta)$  belongs to  $\mathcal{H}$ . We have indeed  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T],$

$$\|w^\varepsilon(t, \cdot, \theta)\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |h(y, \theta)| P^{(X_0(\theta))}(dy) \leq A.$$

This implies that  $P(d\omega) - a.s.,$  the drift coefficient  $K_\varepsilon * w^\varepsilon(t, x, \theta)$  is bounded uniformly in  $t \in [0, T]$  and  $x \in \mathbb{R}^2$ . Applying analysis results due to Friedman [51], it is possible to show that  $P(d\omega) - a.s., w^\varepsilon(\cdot, \cdot, \theta) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  and that it is a strong solution of (8.1.10). Then, applying the Feynman-Kac formula, we have the following representation for  $w^\varepsilon(\cdot, \cdot, \theta)$ :

$$P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^2, w^\varepsilon(t, x, \theta) = \mathbb{E}(w_0(Y_t^{x, \varepsilon}(\theta), \theta) \mid \theta),$$

$$\text{where: } Y_t^{x, \varepsilon}(\theta) = x + \int_0^t (K_\varepsilon * w^\varepsilon(s, \cdot, \theta))(Y_s^{x, \varepsilon}(\theta)) ds + \sigma W_t.$$

Using this representation, we obtain:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T],$

$$\|w^\varepsilon(t, \cdot, \theta)\|_\infty \leq \|w_0(\cdot, \theta)\|_\infty \leq A.$$

Using (8.2.16) we will prove that  $(w^\varepsilon(\cdot, \cdot, \theta))_{\varepsilon>0}$  is  $P(d\omega) - a.s.$  a Cauchy sequence in  $\mathcal{H}$ . Let  $\varepsilon < \varepsilon'$  be two positive constants.

$$\begin{aligned}
& w^\varepsilon(t, x, \theta) - w^{\varepsilon'}(t, x, \theta) \\
&= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \nabla G_{t-s}^{\sigma^2}(x-y) \left( K_\varepsilon * w^\varepsilon(t, y, \theta) w^\varepsilon(t, y, \theta) - K_{\varepsilon'} * w^{\varepsilon'}(t, y, \theta) w^{\varepsilon'}(t, y, \theta) \right) \\
&= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \left[ \nabla_x G_{t-s}^{\sigma^2}(x-y) \left( K_\varepsilon * \left( w^\varepsilon(s, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(s, \cdot, \theta) \right) \right) (y) w^\varepsilon(s, y, \theta) \right. \\
&\quad \left. + (K_\varepsilon - K_{\varepsilon'}) * w^{\varepsilon'}(s, y, \theta) w^\varepsilon(s, y, \theta) + K_{\varepsilon'} * w^{\varepsilon'}(s, y, \theta) \left( w^\varepsilon(s, y, \theta) - w^{\varepsilon'}(s, y, \theta) \right) \right]. \quad (8.2.18)
\end{aligned}$$

Thanks to Lemmas 8.1.2 and 8.2.6, the first and third terms in (8.2.18) can be upper bounded in norm  $L^1$  and  $L^\infty$  by:

$$C \int_0^t \frac{\|w^\varepsilon(s, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(s, \cdot, \theta)\|}{\sqrt{t-s}} ds,$$

with a constant  $C$  that can be chosen independent from  $\theta$ .

The second term in (8.2.18) can also be upper bounded:  $P(d\omega) - a.s., \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
| (K_\varepsilon - K_{\varepsilon'}) * w^{\varepsilon'}(t, x, \theta) | &= \int_{\mathbb{R}^2} (K_\varepsilon(x-y) - K_{\varepsilon'}(x-y)) w^{\varepsilon'}(t, y, \theta) |dy| \\
&\leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon'} (K_\varepsilon(x-y) - K_{\varepsilon'}(x-y)) w^{\varepsilon'}(t, y, \theta) |dy| \\
&\leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon'} (|K_\varepsilon(x-y)| + |K_{\varepsilon'}(x-y)|) |w^{\varepsilon'}(t, y, \theta)| |dy| \\
&\leq 2 \int_{|x-y| \leq \varepsilon'} |K(x-y)| |w^{\varepsilon'}(t, y, \theta)| |dy| \leq 2A \int_{|z| \leq \varepsilon'} |K(z)| |dz| \\
&\leq C \int_{|z| \leq \varepsilon'} \frac{1}{|z|} |dz| \leq C \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon'} \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\eta \leq C\varepsilon'.
\end{aligned}$$

We deduce:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
& \|w^\varepsilon(t, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(t, \cdot, \theta)\| \leq C \int_0^t \frac{\|w^\varepsilon(s, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(s, \cdot, \theta)\|}{\sqrt{t-s}} ds + C\varepsilon' \\
&\leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_0^s \frac{\|w^\varepsilon(u, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(u, \cdot, \theta)\|}{\sqrt{s-u}} du ds + C\sqrt{t}\varepsilon' + C\varepsilon' \\
&\leq C \int_0^t du \|w^\varepsilon(u, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(u, \cdot, \theta)\| \int_u^s \frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-u}} + C(T)\varepsilon' \\
&\leq C \int_0^t \|w^\varepsilon(u, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(u, \cdot, \theta)\| du + CT\varepsilon'
\end{aligned}$$

Applying Gronwall's Lemma:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,

$$\|w^\varepsilon(t, \cdot, \theta) - w^{\varepsilon'}(t, \cdot, \theta)\| \leq C(T)\varepsilon' \exp(CT). \quad (8.2.19)$$

As a consequence,  $(w^\varepsilon(\cdot, \cdot, \theta))_{\varepsilon>0}$  is  $P(d\omega) - a.s.$  a Cauchy sequence in  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  which is complete, and it hence converges  $P(d\omega)$ -a.s. in  $\mathcal{H}$  to a limit  $w(\cdot, \cdot, \theta)$  such that  $P(d\omega)$ -a.s.

$$\sup_{t \in [0, T]} \|w(t, \cdot, \theta)\| \leq A. \quad (8.2.20)$$

By letting  $\varepsilon$  decrease to zero in (8.2.19) and in the mild equation (8.2.16), and by using (8.2.20), we obtain that  $w$  satisfies (8.2.17) and that it is a solution of the mild equation (8.2.15).  $\blacksquare$

### 8.3 Particle Approximation in the Case where $s$ is Unknown

In this section, we are interested in the case where the regularity of the map  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \Phi \circ G^{-1}(\alpha) \in L^1(\mathbb{R})$  (see Condition 6 of Assumptions 8.3.1 below) is unknown. This can be the case when the law of  $\theta$  is in fact unknown (for instance when the initial condition is determined from data or from simulations).

We propose a particle approximation based on thresholded wavelet regression estimators that can be computed without the exact knowledge of the law of  $\theta$ .

#### 8.3.1 Stochastic Interacting Particle System and Main Theorem

We consider the regularized equation (8.1.10) and the associated stochastic differential equation (8.2.1), and recall the probabilistic interpretation of the intensity of the spatial statistical solutions. Then, we define a stochastic interacting particle approximation whose rate of convergence is given in Theorem 8.3.1:  $\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2), \forall T > 0$ ,

$$\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \tilde{Q}_T^\varepsilon(dx, \theta) = \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(\theta), \theta) f(X_T^\varepsilon(\theta))). \quad (8.3.1)$$

We hence look for an approximation of  $\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle$  of the form:

$$\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle \sim \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h\left(X_0^{j,N,\varepsilon}(\theta_j), \theta\right) f\left(\bar{X}_T^{j,N,\varepsilon}(\theta_j)\right),$$

where  $N \in \mathbb{N}^*$  is the number of particles  $(\theta_j, \bar{X}_t^{j,N,\varepsilon}(\theta_j))_{t \in [0, T], j \in [1, N]}$  that are simulated and whose laws are expected to be close of the law of  $(\theta, X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]}$ . To perform simulations, we discretize time, and since the drift coefficient in (8.2.1) is unknown, we replace it by an approximation. To this purpose, we will need, as in Chapter 7, to reexpress it as a conditional expectation. We will then use a wavelet regression estimator to approximate the unknown drift coefficient.

We have  $P(d\omega) - a.s.$ ,

$$K_\varepsilon * \tilde{Q}_s^\varepsilon(X_s^\varepsilon(\theta), \theta) = \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(\theta), \theta) K_\varepsilon(x - X_s^\varepsilon(\theta)) | \theta) |_{x=X_s^\varepsilon(\theta)},$$

where the function  $h$  has been defined in (8.1.15). Thus, the stochastic differential equation (8.2.1) can be rewritten as:  $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon(\theta) = X_0^\varepsilon(\theta) + \sigma W_t + \int_0^t \mathbb{E}^\nu (h(X_s^\varepsilon(\theta), \theta) K_\varepsilon(x - X_s^\varepsilon(\theta)) | \theta) |_{x=X_s^\varepsilon(\theta)} ds \\ \mathcal{L}(\theta) = \nu, \quad \mathcal{L}(X_0^\varepsilon(\theta)) = p_0(x, \theta) dx, \text{ where } p_0 \text{ has been defined in (8.1.14),} \\ W \text{ is a Brownian motion independent of } \theta \text{ and of the initial condition } X_0(\theta). \end{cases} \quad (8.3.2)$$

We simulate  $N$  realizations  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  of  $\theta$  and associate with each of them a particle with initial condition of law  $p_0(x, \theta_i) dx$  defined in (8.1.14). We then introduce a wavelet basis  $(\psi_{I_1 I_2})_{I_1 \geq -1, I_2 \in \mathbb{Z}}$  as in Chapter 7 and compute the regressions component by component:  $\forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K-1]$ ,

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N,\varepsilon} = \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon} + \hat{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) \Delta t + \sigma(W_{t_k}^i - W_{t_{k-1}}^i), \quad (8.3.3)$$

where:  $\hat{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N)$

$$= \left[ \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_{I_1 I_2}(G_N(\theta_i)) \left( \begin{array}{c} thr \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{I_1}(G_N(\theta_j)) h\left(\bar{X}_0^{j,N,\varepsilon}, \theta_j\right) K_\varepsilon^1\left(\bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,N,\varepsilon}\right), \vartheta_N \right) \\ thr \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_{I_1}(G_N(\theta_j)) h\left(\bar{X}_0^{j,N,\varepsilon}, \theta_j\right) K_\varepsilon^2\left(\bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,N,\varepsilon}\right), \vartheta_N \right) \end{array} \right) \right]. \quad (8.3.4)$$

with  $\varepsilon > 0$  and where  $K_\varepsilon^1(x)$  and  $K_\varepsilon^2(x)$  are the first and second components of  $K_\varepsilon(x)$ .  $thr$  is the thresholding function,  $I_1^N$  is the resolution level and  $\vartheta_N$  is the threshold level, where :

$$\vartheta_N = \kappa \sqrt{\log N/N}, \quad 2^{I_1^N} \sim \vartheta_N^{-1}, \quad (8.3.5)$$

with  $\kappa$  a positive constant that depends on  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $c_0$ ,  $L_0$ ,  $\phi$  and  $\psi$ .

Let us introduce the assumptions under which we will compute the convergence rate:

**Assumption 8.3.1.** 1. The law  $\nu$  of  $\theta$  admits a density  $g$  on  $\mathbb{R}$  w.r.t. the Lebesgue measure. The support  $\Theta$  of  $g$  is assumed to be connected,

2. The law  $\nu$  satisfies a Logarithmic Sobolev Inequality on  $\mathbb{R}$ :

$$\exists c_0 > 0, \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \langle \nu, f^2 \log f^2 \rangle - \langle \nu, f^2 \rangle \log(\langle \nu, f^2 \rangle) \leq c_0 \langle \nu, |\nabla f|^2 \rangle.$$

3.  $P(d\omega) - a.s.$ ,  $w_0(\cdot, \theta) \in L^1 \cap L^\infty$  and satisfies Assumption 8.1.7.

4. The function  $a \in \Theta \mapsto \|w_0(\cdot, a)\|_1 \in \mathbb{R}$  is  $L_0$ -Lipschitz continuous.

5.  $\exists L_1 > 0, \forall a_1, a_2 \in \Theta, \mathbb{P}(\{w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) \geq 0\} \Delta \{w_0(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) \geq 0\}) \leq L_1 |a_1 - a_2|$  where  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

6. The probability density  $p_0$  is defined as in (8.1.15). The map  $\Phi : a \in \Theta \mapsto p_0(\cdot, a)$  is  $L_2$ -Lipschitz continuous with respect to the  $L^1$  Vaserstein metrics (we identify the probability densities  $p_0(\cdot, a)$  with the probability measure  $p_0(x, a)dx$ ). The map  $\Phi \circ G^{-1} : \alpha \in [0, 1] \mapsto p_0(\cdot, G^{-1}(\alpha))$  is  $s$ -Hölder continuous, with  $s > 1/2$ , for the  $L^1$  Vaserstein metrics.

7.  $P(d\omega) - a.s.$ , the probability density  $p_0(x, \theta)$  has exponential tails:

$$\exists \varsigma_0 > 0, \exists C_1, C_2 > 0, \forall \varsigma > \varsigma_0, \forall a \in \Theta, \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x| > \varsigma} p_0(x, a) dx \leq C_1 e^{-C_2 \varsigma}.$$

8. The father and mother wavelets  $\phi$  and  $\psi$  are compactly supported (and thus belong to  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ), Lipschitz continuous, and satisfy Assumptions (7.2.8),

Points 4, 5 and 6 of Assumption 8.3.1 state that the initial measure  $w_0(x, a)dx$  varies regularly with the parametrization  $a \in \Theta$ , in term of total variation norm, sign repartition and support. Point 4 is trivially satisfied when  $\|w_0(\cdot, a)\|_1$  is independent of  $a$  (all possible initial measures have the same total variation norm). Point 5 is straightforward when  $P(d\omega) - a.s.$ ,  $w_0(\cdot, \theta)$  is a nonnegative function.

**Theorem 8.3.1.** Under the Assumptions 8.3.1,  $\forall \varepsilon > 0, \forall 0 < \eta < 1, \forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\eta}(\mathbb{R}), \exists N_0, \forall N \geq N_0, \forall K > 0, \exists C > 0,$

$$\mathbb{E}^\nu |\langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,N,\varepsilon}, \theta_i) f(\bar{X}_T^{i,N,\varepsilon})| \leq C \left( \Delta t + \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} + \varepsilon \right), \quad (8.3.6)$$

where  $h$  is defined as in (8.1.13).

Notice that it does not seem possible to set  $\varepsilon = \varepsilon_N$  and let  $\varepsilon_N \rightarrow 0$  when  $N \rightarrow \infty$  with our proof, since changing  $\varepsilon$  obliges us to change the threshold  $\vartheta_N$ , which then also grows to  $\infty$ .



### 8.3.2 Convergence Rate of the Particle Approximation

The proof is an adaptation of the proof of Theorem 7.2.1 to the case of a weighted and signed initial condition. Let us first introduce some objects and results that will be useful in the sequel.

We associate to the diffusion  $(X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]}$  its Euler Scheme  $(\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(\theta))_{k \in [0, K]}$  as in (7.3.1):  $\forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}}^\varepsilon(\theta) = \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(\theta) + u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(\theta), \theta) \Delta t + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\ \bar{X}_0^\varepsilon(\theta) = X_0^\varepsilon(\theta). \end{cases} \quad (8.3.7)$$

We consider as well i.i.d. copies of this Euler scheme coupled with the particles defined in (8.3.3) (same parameters  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ , same initial conditions  $(\bar{X}_0^{i, N, \varepsilon}(\theta_i))_{i \in [1, N]}$  and same Brownian motions  $(W^i)_{i \in [1, N]}$ ):  $\forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K - 1]$ ,

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}}^{i, \varepsilon}(\theta_i) = \bar{X}_{t_k}^{i, \varepsilon}(\theta_i) + u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i, \varepsilon}(\theta_i), \theta_i) \Delta t + \sigma(W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i) \\ \bar{X}_0^{i, \varepsilon} = \bar{X}_0^{i, N, \varepsilon}. \end{cases} \quad (8.3.8)$$

We also define the analogue of (8.3.4) computed of the independent copies (8.3.8) of the Euler Scheme

$$\begin{aligned} & \check{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i, \varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) \\ &= \left[ \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_I(G_N(\theta_i)) \left( \begin{array}{l} \text{thr} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) h(\bar{X}_0^{j, \varepsilon}, \theta_j) K_\varepsilon^1(\bar{X}_{t_k}^{i, \varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j, \varepsilon}), \vartheta_N \right) \\ \text{thr} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I(G_N(\theta_j)) h(\bar{X}_0^{j, \varepsilon}, \theta_j) K_\varepsilon^2(\bar{X}_{t_k}^{i, \varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j, \varepsilon}), \vartheta_N \right) \end{array} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Finally, we define:

$$\forall a \in \Theta, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}^2, \bar{u}_b^\varepsilon(t, x, a) = \mathbb{E}^\nu(h(\bar{X}_0^\varepsilon(\theta), \theta) K(x - \bar{X}_t^\varepsilon(\theta)) \mid \theta = a). \quad (8.3.10)$$

**Proposition 8.3.2.** *i) The function  $a \in \Theta \mapsto u_b^\varepsilon(t_k, x, a)$  is Lipschitz-continuous and the function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto u_b^\varepsilon(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  is  $s$ -Hölder continuous, where  $s > 1/2$  is the regularity of the map  $\alpha \in [0, 1] \mapsto p_0(\cdot, G^{-1}(\alpha))$  given by Point 6 of Assumptions 8.3.1.*

*ii) The function  $a \in \Theta \mapsto \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, a)$  is Lipschitz-continuous and the function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$  is  $s$ -Hölder continuous.*

*Proof.* Let us first consider Point (i). Let  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  and  $a_1, a_2 \in \Theta$ . Let  $(X_t^\varepsilon(a_1))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^\varepsilon(a_2))_{t \in [0, T]}$  be two nonlinear diffusions as in (8.2.1), defined with the same Brownian motion  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  and with the initial conditions  $X_0^\varepsilon(a_1)$  and  $X_0^\varepsilon(a_2)$  of laws  $p_0(y, a_1)dy$  and  $p_0(y, a_2)dy$  respectively, where  $p_0$  has been defined in (8.1.14).

$$\begin{aligned} |u_b^\varepsilon(t, x, a_1) - u_b^\varepsilon(t, x, a_2)| &\leq \mathbb{E}^\nu(|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K_\varepsilon(x - X_t^\varepsilon(a_1)) - h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) K_\varepsilon(x - X_t^\varepsilon(a_2))|) \\ &\leq \mathbb{E}^\nu(|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1)| |K_\varepsilon(x - X_t^\varepsilon(a_1)) - K_\varepsilon(x - X_t^\varepsilon(a_2))|) \\ &\quad + \mathbb{E}^\nu(|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) - h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2)| |K_\varepsilon(x - X_t^\varepsilon(a_2))|) \\ &\leq \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \mathbb{E}^\nu(|X_t^\varepsilon(a_1) - X_t^\varepsilon(a_2)|) + \frac{1}{2\pi\varepsilon} \mathbb{E}^\nu(|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) - h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2)|) \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

by using (8.1.12). For the second term, we have:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu (|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) - h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2)|) \\ &= \mathbb{E}^\nu (|\text{sign}(w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1)) \|w_0(\cdot, a_1)\|_1 - \text{sign}(w_0(X_0^\varepsilon(a_2), a_2)) \|w_0(\cdot, a_2)\|_1|) \\ &\leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{where: } A_1 &= \mathbb{E}^\nu \left( \mathbf{1}_{w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) \geq 0} \left| \|w_0(\cdot, a_1)\|_1 - \|w_0(\cdot, a_2)\|_1 \right| \right) \\ A_2 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left| \mathbf{1}_{w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) \geq 0} - \mathbf{1}_{w_0(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) \geq 0} \right| \|w_0(\cdot, a_2)\|_1 \right) \\ A_3 &= \mathbb{E}^\nu \left( \mathbf{1}_{w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) < 0} \left| \|w_0(\cdot, a_1)\|_1 - \|w_0(\cdot, a_2)\|_1 \right| \right) \\ A_4 &= \mathbb{E}^\nu \left( \left| \mathbf{1}_{w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) < 0} - \mathbf{1}_{w_0(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) < 0} \right| \|w_0(\cdot, a_2)\|_1 \right) \end{aligned}$$

By Point 4 of Assumptions 8.3.1  $A_1$  and  $A_3$  are upper bounded by  $L_0|a_1 - a_2|$ . By Point 5 of Assumptions 8.3.1:

$$A_2 = A_4 = \mathbb{P}^\nu (\{w_0(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) > 0\} \Delta \{w_0(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) > 0\}) \|w_0(\cdot, a_2)\|_1 \leq L_1 A |a_1 - a_2|.$$

This gives finally:

$$\mathbb{E}^\nu (|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) - h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2)|) \leq 2(L_0 + L_1 A) |a_1 - a_2|. \quad (8.3.12)$$

From (8.3.11) and (8.3.12) :

$$|u_b^\varepsilon(t, x, a_1) - u_b^\varepsilon(t, x, a_2)| \leq \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \mathbb{E}^\nu (|X_t^\varepsilon(a_1) - X_t^\varepsilon(a_2)|) + \frac{L_0 + L_1 A}{\pi\varepsilon} |a_1 - a_2|. \quad (8.3.13)$$

In order to obtain the Lipschitz continuity of  $a \mapsto u_b^\varepsilon(t, x, a)$  let us now upper bound:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu (|X_t^\varepsilon(a_1) - X_t^\varepsilon(a_2)|) &\leq \mathbb{E}^\nu (|X_0^\varepsilon(a_1) - X_0^\varepsilon(a_2)|) + \int_0^t (B_1(s) + B_2(s) + B_3(s)) ds \\ B_1(s) &= \mathbb{E}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K(x - X_s^\varepsilon(a_1))) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_1)} - \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K(x - X_s^\varepsilon(a_1))) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_2)} \right| \right) \\ B_2(s) &= \mathbb{E}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K(x - X_s^\varepsilon(a_1))) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_2)} - \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K(x - X_s^\varepsilon(a_2))) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_2)} \right| \right) \\ B_3(s) &= \mathbb{E}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K(x - X_s^\varepsilon(a_2))) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_2)} - \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) K(x - X_s^\varepsilon(a_2))) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_2)} \right| \right) \end{aligned}$$

We have:

$$\begin{aligned} B_1(s) &\leq A \mathbb{E}^\nu \left( \int_{\mathbb{R}^2} |K(X_s^\varepsilon(a_1) - y) - K(X_s^\varepsilon(a_2), y)| P^{X_s^\varepsilon(a_1)}(dy) \right) \leq \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \mathbb{E}^\nu (|X_s^\varepsilon(a_1) - X_s^\varepsilon(a_2)|) \\ B_2(s) &\leq A \mathbb{E}^\nu \left( \mathbb{E}^\nu (|K(x - X_s^\varepsilon(a_1)) - K(x - X_s^\varepsilon(a_2))|) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(a_2)} \right) \leq \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \mathbb{E}^\nu (|X_s^\varepsilon(a_1) - X_s^\varepsilon(a_2)|) \\ B_3(s) &\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \mathbb{E}^\nu (|h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) - h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2)|) \leq \frac{L_0 + L_1 A}{\pi\varepsilon} |a_1 - a_2|, \end{aligned}$$

by using (8.3.12). It follows that:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu (|X_t^\varepsilon(a_1) - X_t^\varepsilon(a_2)|) &\leq \mathbb{E}^\nu (|X_0^\varepsilon(a_1) - X_0^\varepsilon(a_2)|) + \frac{(L_0 + L_1 A)T}{\pi\varepsilon} |a_1 - a_2| \\ &+ \frac{A}{\pi\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E}^\nu (|X_s^\varepsilon(a_1) - X_s^\varepsilon(a_2)|) ds \\ &\leq \left( \mathbb{E}^\nu (|X_0^\varepsilon(a_1) - X_0^\varepsilon(a_2)|) + \frac{(L_0 + L_1 A)T}{\pi\varepsilon} |a_1 - a_2| \right) \exp \left( \frac{AT}{\pi\varepsilon^2} \right), \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

by Gronwall's Lemma. From (8.3.13) and (8.3.14) we deduce:

$$|u_b^\varepsilon(t, x, a_1) - u_b^\varepsilon(t, x, a_2)| \leq C_1(A, T, \varepsilon) \mathbb{E}^\nu (|X_0^\varepsilon(a_1) - X_0^\varepsilon(a_2)|) + C_2(A, T, \varepsilon) |a_1 - a_2|.$$

No assumption has been made on the joint law of  $(X_0^\varepsilon(a_1), X_0^\varepsilon(a_2))$  yet. Taking the infimum on every possible joint laws with marginals  $p_0(y, a_1)dy$  and  $p_0(y, a_2)dy$  gives:

$$\begin{aligned} |u_b^\varepsilon(t, x, a_1) - u_b^\varepsilon(t, x, a_2)| &\leq C_1(A, T, \varepsilon) \mathcal{W}_1(p_0(y, a_1)dy, p_0(y, a_2)dy) + C_2(A, T, \varepsilon) |a_1 - a_2| \\ &\leq C(A, T, \varepsilon) |a_1 - a_2| \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

thanks to Point 6 of Assumptions 8.3.1 where :

$$C(A, T, \varepsilon) = \frac{L_2 A e^{AT/(\pi\varepsilon^2)}}{2\pi\varepsilon^2} + \left( \frac{A e^{AT/(\pi\varepsilon^2)}}{2\pi\varepsilon^2} + 1 \right) \frac{L_0 + L_1 A}{\pi\varepsilon} \quad (8.3.16)$$

does not depend on  $x$ . Replacing  $a_1$  and  $a_2$  with  $G^{-1}(\alpha_1)$  and  $G^{-1}(\alpha_2)$  for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2 \in [0, 1]$  gives in the same manner the  $s$ -Hölder continuity of  $\alpha \in [0, 1] \mapsto u_b^\varepsilon(t, x, G^{-1}(\alpha))$ .

Let us now turn to the proof of (ii). Let  $a_1, a_2 \in \Theta$ . We consider the two preceding diffusions  $(X_t^\varepsilon(a_1))_{t \in [0, T]}$  and  $(X_t^\varepsilon(a_2))_{t \in [0, T]}$ , and the Euler schemes  $(\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1))_{k \in [0, K]}$  and  $(\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2))_{k \in [0, K]}$  defined as in (8.3.7) with the same Brownian motion and the same initial conditions.

Let  $k \in [0, K]$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Proceeding as in (8.3.11) and using (8.3.12), we are lead to an upper bound similar to (8.3.13):

$$\begin{aligned} |\bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, a_1) - \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, a_2)| &= |\mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_1), a_1) K_\varepsilon(x, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1))) - \mathbb{E}^\nu (h(X_0^\varepsilon(a_2), a_2) K_\varepsilon(x, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)))| \\ &\leq \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)|) + \frac{L_0 + L_1 A}{\pi\varepsilon} |a_1 - a_2|. \end{aligned}$$

Since :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{X}_{t_{k+1}}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_{k+1}}^\varepsilon(a_2) \right| \right) \\ &\leq \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)|) + \mathbb{E}^\nu (|u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1), a_1) - u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2), a_2)|) \Delta t \\ &\leq \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)|) + \mathbb{E}^\nu (|u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1), a_1) - u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1), a_2)|) \Delta t \\ &\quad + \mathbb{E}^\nu (|u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1), a_2) - u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2), a_2)|) \Delta t \\ &\leq \left( 1 + \Delta t \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \right) \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)|) + \Delta t \|u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1), \cdot)\|_{Lip} |a_1 - a_2|. \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

The second term of (8.3.17) has been upper bounded thanks to Point (i), and the Lipschitz constant  $\|u_b^\varepsilon(t, x, \cdot)\|_{Lip}$  does not depend on  $x$  as can be seen in (8.3.15). The third term of (8.3.17) has been upper bounded by using the Lipschitz continuity of  $K_\varepsilon$ . By induction:  $\forall k \in [0, K]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)|) &\leq \left( 1 + \Delta t \frac{A}{2\pi\varepsilon^2} \right)^k \mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_0^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_0^\varepsilon(a_2)|) \\ &\quad + \Delta t \frac{(1 + \Delta t \frac{A}{2\pi\varepsilon^2})^k - 1}{\Delta t \frac{A}{2\pi\varepsilon^2}} \|u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1), \cdot)\|_{Lip} |a_1 - a_2| \end{aligned}$$

Taking the infimum on every possible joint laws for  $(X_0^\varepsilon(a_1), X_0^\varepsilon(a_2))$  with marginals  $p_0(y, a_1)dy$  and  $p_0(y, a_2)dy$ , using Point 6 of Assumptions 8.3.1, and (7.3.11), we obtain:

$$\mathbb{E}^\nu (|\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_1) - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(a_2)|) \leq C'(T, A, \varepsilon) |a_1 - a_2|$$

and:

$$|\bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, a_1) - \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, a_2)| \leq C''(A, T, \varepsilon)|a_1 - a_2|.$$

Replacing  $a_1$  and  $a_2$  with  $G^{-1}(\alpha_1)$  and  $G^{-1}(\alpha_2)$  for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2 \in [0, 1]$  gives in the same manner the  $s$ -Hölder continuity of  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, x, G^{-1}(\alpha))$ .  $\blacksquare$

*Proof of Theorem 8.3.1.* We have:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu |\langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,N,\varepsilon}, \theta_i) f(\bar{X}_T^{i,N,\varepsilon})| \\ & \leq \mathbb{E}^\nu |\langle I(m_T), f \rangle - \langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle| + \mathbb{E}^\nu |\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,N,\varepsilon}, \theta_i) f(\bar{X}_T^{i,N,\varepsilon})|. \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

Let us consider the first term in the right hand side of (8.3.18) and introduce the solution  $(X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]}$  of stochastic differential equation (8.3.2). Then thanks to (8.2.19):

$$\begin{aligned} |\langle I(m_T), f \rangle - \langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle| & \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| |w(T, x, a) - \tilde{w}^\varepsilon(T, x, a)| dx \nu(da) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \|f\|_\infty \|w(T, \cdot, a) - \tilde{w}^\varepsilon(T, \cdot, a)\| \nu(da) \leq C(T, A) \|f\|_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

The second term of (8.3.18) is dealt in the way similar as in the proof of Theorem 7.2.1.

$$\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,N,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i) f(\bar{X}_T^{i,N,\varepsilon}) = T_1 + T_2 + T_3, \quad (8.3.19)$$

where:  $T_1 = \langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle - \mathbb{E}^\nu (h(\bar{X}_0^\varepsilon(\theta), \theta) f(\bar{X}_T^\varepsilon(\theta)))$

$$T_2 = \mathbb{E}^\nu (h(\bar{X}_0^\varepsilon(\theta), \theta) f(\bar{X}_T^\varepsilon(\theta))) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i) f(\bar{X}_T^{i,\varepsilon}(\theta_i))$$

$$T_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i) \left[ f(\bar{X}_T^{i,\varepsilon}) - f(\bar{X}_T^{i,N,\varepsilon}) \right]. \quad (8.3.20)$$

As in the proof of Theorem 7.2.1, the error  $T_1$  is in  $\Delta t A / \varepsilon^5$  and the statistical error  $T_2$  is in  $CA \|f\|_\infty / \sqrt{N}$ . For the term  $T_3$ , since  $h$  is bounded by  $A$  and since  $\bar{X}^{i,\varepsilon}$  and  $\bar{X}^{i,N,\varepsilon}$  have the same initial conditions:

$$\mathbb{E}^\nu (|T_3|) \leq \frac{A \|f'\|_\infty}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| \bar{X}_T^{i,\varepsilon} - \bar{X}_T^{i,N,\varepsilon} \right|. \quad (8.3.21)$$

Proceeding as in the proof of Theorem 7.2.1 :

$$\begin{aligned} S_N(t_{k+1}) & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu |\bar{X}_{t_{k+1}}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N,\varepsilon}| \leq S_N(t_k) + \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \widehat{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) \right| \\ & \leq S_N(t_k) + \Delta t (B_1(k, N) + B_2(k, N) + B_3(k, N)), \end{aligned} \quad (8.3.22)$$

where :

$$\begin{aligned}
B_1(k, N, \varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) \right| \\
B_2(k, N, \varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \check{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) \right| \\
B_3(k, N, \varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| \check{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) - \widehat{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) \right|.
\end{aligned}$$

The term  $B_1(k, N, \varepsilon)$  can be upper bounded by  $C_1 \Delta t$ , where the constant  $C_1$  is upper bounded by  $CA \|\partial_y K_\varepsilon^{(4)}\|_\infty \|\partial_x K_\varepsilon^{(4)}\|_\infty \leq CA/\varepsilon^{10}$ , using (8.1.12). For the term  $B_3(k, N, \varepsilon)$ , we follow the computations of Section 7.6

$$\begin{aligned}
B_3(k, N, \varepsilon) &\leq \\
\mathbb{E}^\nu &\left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) h \left( \bar{X}_0^{i,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i \right) \left( K_\varepsilon \left( \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon} \right) - K_\varepsilon \left( \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,N,\varepsilon} \right) \right) \right| \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} 2\vartheta_N \left| \psi_{I_1 I_2} \left( \frac{i}{N} \right) \right| \right). \quad (8.3.23)
\end{aligned}$$

For the first term in (8.3.23), we use (8.1.12) and obtain:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^\nu \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) h \left( \bar{X}_0^{i,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i \right) \left( K_\varepsilon \left( \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon} \right) - K_\varepsilon \left( \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,N,\varepsilon} \right) \right) \right| \\
&\leq \mathbb{E}^\nu \left( \frac{A}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \right| \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \left( \left| \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{i,N,\varepsilon} \right| + \left| \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,N,\varepsilon} \right| \right) \right) \\
&\leq \frac{2AC}{2\pi\varepsilon^2} S_N(t_k), \quad (8.3.24)
\end{aligned}$$

thanks to Lemma 7.6.1. To upper bound the second term of (8.3.23) let us write:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} 2\vartheta_N \left| \psi_{I_1 I_2} \left( \frac{i}{N} \right) \right| \right) &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} C 2\vartheta_N 2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty \right) \\
&\leq 2C \|\psi\|_\infty \vartheta_N 2^{I_1^N/2} \leq C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4}, \quad (8.3.25)
\end{aligned}$$

by choice of  $I_1^N$  and  $\vartheta_N$ . Hence:

$$B_3(k, N, \varepsilon) \leq \frac{2AC}{2\pi\varepsilon^2} S_N(t_k) + C \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4}. \quad (8.3.26)$$

To upper bound  $B_2(k, N, \varepsilon)$  we proceed as in the proof of Theorem 7.2.1. Let us define:

$$\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) h \left( \bar{X}_0^{j,\varepsilon}(\theta_j), \theta_j \right) K_\varepsilon \left( x - \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon}(\theta_j) \right) \quad (8.3.27)$$

$$\bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_I(G(a)) \mathbb{E}^\nu \left( h \left( \bar{X}_0^\varepsilon(\theta), \theta \right) K_\varepsilon \left( x - \bar{X}_{t_k}^\varepsilon(\theta_j) \right) \mid \theta = a \right) \nu(da) \quad (8.3.28)$$

The following Lemma is proved in Section 8.3.2.1.

**Lemma 8.3.3.** *Under Assumptions 8.3.1, the coefficients  $\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x)$  and  $\bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x)$  defined in (8.3.27) and (8.3.28) satisfy:  $\forall \gamma > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \kappa = \kappa(\gamma, c_0, L_0, L_1, L_2, \varepsilon, \sigma, \phi, \psi), \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K],$*

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C}{N^\gamma}. \quad (8.3.29)$$

Once the result of Lemma 8.3.3 is established, the proof of an upper bound of  $B_2(k)$  follows the proof of Lemma 7.3.3 in Chapter 7 and relies only on the regularity of the function  $\alpha \mapsto \bar{u}_b^\varepsilon(t, x, G^{-1}(\alpha))$  and on the law of the random variables  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ :

**Lemma 8.3.4.** *We work under the Assumptions 8.3.1. For  $\varepsilon > 0$  and  $\gamma = 7/2$ , let  $\kappa$  be the constant given in Lemma 8.3.3. For the threshold level (8.3.5),  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall K > 0, \forall k \in [0, K],$*

$$\mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \check{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i, \vartheta_N) \right| \right) \leq C(\log N) \left( \frac{\log N}{N} \right)^{\frac{s}{1+2s}}. \quad (8.3.30)$$

The proof of this Lemma follows exactly the proof of Lemma 7.3.3 in Section 7.5.

The end of the proof of Theorem 8.3.1 is the same as for (7.3.20). ■

### 8.3.2.1 Proof of Lemma 8.3.3

As in Section 7.4, we can write:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| > \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\ & \leq \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \mathbb{E} \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}} \right| > \frac{\kappa}{4} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \\ & + \mathbb{P}^\nu \left( \left| \mathbb{E} \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) \right) \Big|_{x=\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}} - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| > \frac{\kappa}{4} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \end{aligned} \quad (8.3.31)$$

The second term of (8.3.31) is upper bounded with the same proof as for Lemma 7.4.3. For the first term of (8.3.31), we first study the quantity:

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) - \mathbb{E} \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) \right) \right| > r \right),$$

for  $x \in \mathbb{R}^2$  and  $r > 0$ . As in Chapter 7:

**Lemma 8.3.5.** *Under Assumptions 8.3.1, we have  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^N] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K], \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0, \forall \varepsilon > 0,$*

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x) \right) \right| > r \right) \leq 2 \exp \left( - \frac{r^2}{8 \left( \frac{A^2 C'^2}{\pi^2 \varepsilon^2 N} + \frac{\|\psi\|_\infty 2^{I_1/2} r A}{6\pi \varepsilon N} \right)} \right) + C e^{-\frac{Nr^2}{8\|\bar{u}_b^\varepsilon\|_{Lip}^2 C'^2 c_0}} \quad (8.3.32)$$

where  $C'$  is defined in (7.4.3).

Once Lemma 8.3.5 has been established, we can use a localization argument similar to the one used to prove Corollary 7.4.2 in Section 7.4.2. This ends the proof of Lemma 8.3.3. ■

*Proof of Lemma 8.3.5.* We have:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) \right) \right| > r \right) &\leq \mathbb{P}^\nu \left( \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) \right| > r \right) \\ &\quad + \mathbb{P}^\nu \left( \left| \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) - \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) \right) \right| > r \right) \end{aligned} \quad (8.3.33)$$

By independence of the particles  $(X_t^{j, \varepsilon})_{t \in [0, T]}$  defined in (8.3.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu \left( \check{\beta}_I^{(\varepsilon, k)}(x) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \mathbb{E}^\nu \left( h \left( \bar{X}_0^{(j), \varepsilon}(\theta_{(j)}), \theta_{(j)} \right) K_\varepsilon \left( x - \bar{X}_{t_k}^{(j), \varepsilon}(\theta_{(j)}) \right) \mid \theta_1, \dots, \theta_N \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) \mathbb{E}^\nu \left( h \left( \bar{X}_0^{(j), \varepsilon}(\theta_{(j)}), \theta_{(j)} \right) K_\varepsilon \left( x - \bar{X}_{t_k}^{(j), \varepsilon}(\theta_{(j)}) \right) \mid \theta_{(j)} \right). \end{aligned}$$

Hence, the first term in (8.3.33) can be upper bounded by the use of Bernstein's Lemma as in Lemma 7.4.4, and the second term can be upper bounded thanks to Point 2 of Assumptions 8.3.1 as in Lemma 7.4.5.  $\blacksquare$

### 8.3.3 Approximation of the Mean Velocity Vector Field

Recall that the mean velocity vector field associated to the statistical solution of (8.1.1) at point  $x \in \mathbb{R}^2$  and time  $T > 0$  has been defined in (8.1.9). This computation corresponds to the following particular choice for  $f$  in (8.1.9):  $\forall y \in \mathbb{R}^2, f(y) = K(x - y)$ .

Since  $K(x - \cdot)$  and its derivatives are not bounded at 0, we use a cut-off technique again and cut-off the test function with  $\delta > 0$  as in (8.1.11). The approximation we will consider for  $\langle I(m_T), K(x - \cdot) \rangle$  is:  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h \left( \bar{X}_0^{i, N, \varepsilon}, \theta_i \right) K_\delta(x - \bar{X}_T^{i, N, \varepsilon})$ .

**Theorem 8.3.2.** *Under the assumptions of Theorem 8.3.1:  $\forall \varepsilon, \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2, \exists N_0, \forall N \geq N_0, \exists \kappa = \kappa(\varepsilon), C > 0,$*

$$\mathbb{E}^\nu \left| \langle I(m_T), K(x - \cdot) \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h \left( \bar{X}_0^{i, N, \varepsilon}, \theta_i \right) K_\delta(x - \bar{X}_T^{i, N, \varepsilon}) \right| \leq C \left( \Delta t + \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} + \varepsilon + \delta \right).$$

*Proof.* We first decompose the error:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^\nu \left| \langle I(m_T), K(x - \cdot) \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h \left( \bar{X}_0^{i, N, \varepsilon}, \theta_i \right) K_\delta(x - \bar{X}_T^{i, N, \varepsilon}) \right| \\ &\leq \left| \langle I(m_T), K(x - \cdot) \rangle - \langle I(m_T), K_\delta(x - \cdot) \rangle \right| + \mathbb{E}^\nu \left| \langle I(m_T), K_\delta(x - \cdot) \rangle - \langle I^\varepsilon(m_T), K_\delta(x - \cdot) \rangle \right| \\ &\quad + \mathbb{E}^\nu \left| \langle I^\varepsilon(m_T), K_\delta(x - \cdot) \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h \left( \bar{X}_0^{i, N, \varepsilon}, \theta_i \right) K_\delta(x - \bar{X}_T^{i, N, \varepsilon}) \right|. \end{aligned} \quad (8.3.34)$$

The two last terms in (8.3.34) can be dealt with Theorem 8.3.1. For the first term:

$$\begin{aligned} &\left| \langle I(m_T), K(x - \cdot) \rangle - \langle I(m_T), K_\delta(x - \cdot) \rangle \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E}^\nu \left( h(X_0(\theta), \theta) K(x - X_T(\theta)) \right) - \mathbb{E}^\nu \left( h(X_0(\theta), \theta) K_\delta(x - X_T(\theta)) \right) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |K(x - y) - K_\delta(x - y)| |w(T, y, a)| dy \nu(da) \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq \delta} |K(x - y)| |w(T, y, a)| dy \nu(da) \leq 2 \int_{|x-y| \leq \delta} |K(x - y)| dy \int_{\mathbb{R}} |||w(T, \cdot, a)||| \nu(da) \leq C(T, A) \delta. \end{aligned}$$

The rate of convergence obtained in Theorem 8.3.2 does not depend on the point  $x \in \mathbb{R}^2$  where we approximate the mean velocity vector field.  $\blacksquare$

## 8.4 Particle Approximation in the Case where $s$ is Known

Now we are interested in the case where the regularity  $s$  of the function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \Phi \circ G^{-1}(\alpha) \in L^1(\mathbb{R})$  is known. We propose a particle approximation based on linear wavelet regression estimators and obtain a convergence rate that involves the term  $N^{s/(2s+1)}$  that is known to be the minimax convergence rate for a regression estimator of a  $s$ -Hölder continuous function (see Kerkycharian and Picard [71]).

### 8.4.1 Stochastic Interacting Particle System and Main Theorem

As in Section 8.3, we are looking for an approximation of  $\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle$  of the form:

$$\langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle \sim \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h \left( X_0^{(\ell),j,N,\varepsilon}(\theta_j), \theta \right) f \left( \bar{X}_T^{(\ell),j,N,\varepsilon}(\theta_j) \right),$$

where  $N \in \mathbb{N}^*$  is the number of particles  $(\theta_j, \bar{X}_t^{(\ell),j,N,\varepsilon}(\theta_j))_{t \in [0, T], j \in [1, N]}$  that are simulated and whose laws are expected to be close of the law of  $(\theta, X_t^\varepsilon(\theta))_{t \in [0, T]}$  that solves the stochastic differential equation (8.3.2). As in Section 8.3, we discretize time and replace the drift coefficient

$$K_\varepsilon * \tilde{Q}_s^\varepsilon(X_s^\varepsilon(\theta), \theta) = \mathbb{E} \left( h(X_0^\varepsilon(\theta), \theta) K_\varepsilon(x - X_s^\varepsilon(\theta)) \right) \Big|_{x=X_s^\varepsilon(\theta)}$$

with a regression estimator.

In the case where the regularity  $s$  of the function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \Phi \circ G^{-1}(\alpha)$  is known, so is the regularity of the function  $\alpha \in [0, 1] \mapsto \bar{u}_b^\varepsilon(t, x, G^{-1}(\alpha))$ . Proposition 8.3.2 tells us indeed that the latter function is  $s$ -Hölder continuous. Instead of using a nonlinear wavelet regression estimator, we then simply use a linear regression estimator, with a different resolution level,  $I_1^{(\ell),N}$  that depends on the regularity  $s$ .

We simulate  $N$  realizations  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$  of  $\theta$  and associate with each of them a particle with initial condition of law  $p_0(x, \theta_i) dx$  defined in (8.1.14). We then introduce a wavelet basis  $(\psi_{I_1 I_2})_{I_1 \geq -1, I_2 \in \mathbb{Z}}$  as in Chapter 7 and compute the regressions component by component:  $\forall i \in [1, N], \forall k \in [0, K-1]$ ,

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{(\ell),i,N,\varepsilon} = \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon} + \hat{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon}, \theta_i) \Delta t + \sigma(W_{t_k}^i - W_{t_{k-1}}^i), \quad (8.4.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{where } \hat{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon}, \theta_i) \\ &= \left[ \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} \sum_{I_2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_{I_1}(G_N(\theta_i)) \psi_{I_2}(G_N(\theta_j)) h \left( \bar{X}_0^{(\ell),j,N,\varepsilon}, \theta_j \right) \begin{pmatrix} K_\varepsilon^1 \left( \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{(\ell),j,N,\varepsilon} \right) \\ K_\varepsilon^2 \left( \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{(\ell),j,N,\varepsilon} \right) \end{pmatrix} \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

with  $\varepsilon > 0$  and where  $K_\varepsilon^1(x)$  and  $K_\varepsilon^2(x)$  are the first and second components of  $K_\varepsilon(x)$ .  $I_1^{(\ell),N}$  is the new resolution level chosen such that :

$$2^{I_1^{(\ell),N}} \sim N^{1/(2s+1)}. \quad (8.4.3)$$

The estimator (8.4.2) is linear in the sense that we do not use thresholding functions any more.

**Theorem 8.4.1.** *Under the Assumptions 8.3.1,  $\forall \varepsilon > 0, \forall 0 < \eta < 1, \forall f \in \mathcal{C}_b^{4+\eta}(\mathbb{R}), \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall K > 0,$*

$$\mathbb{E}^\nu |\langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h \left( \bar{X}_0^{(\ell),i,N,\varepsilon}, \theta_i \right) f(\bar{X}_T^{(\ell),i,N,\varepsilon})| \leq C \left( \Delta t + \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}} + \varepsilon \right), \quad (8.4.4)$$

where  $h$  is defined as in (8.1.13).



The term  $\sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}}$  is up to a factor  $\sqrt{\log N}$  the minimax rate for the convergence of a regression estimator to a  $s$ -Hölder continuous conditional expectation (see Härdle *et al.* [61] section 10.4, Donoho *et al.* [38, 39] or Kerkycharian and Picard [71]). It comes from the approximation of the unknown drift  $u_b^\varepsilon$  by the wavelet regression estimator  $\hat{u}_b^{(\ell),\varepsilon}$ .

#### 8.4.2 Convergence Rate of the Particle Approximation

In the proof, we will use the Euler Scheme  $(\bar{X}_{t_k}^\varepsilon(\theta))_{k \in [0, K]}$  defined in (8.3.7) and its i.i.d. copies defined in (8.3.8). Let us also define the analogue of (8.4.2) computed on the independent copies (8.3.8) of the Euler Scheme

$$\begin{aligned} & \check{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) \\ = & \left[ \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} \sum_{I_2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \psi_I(G_N(\theta_i)) \psi_I(G_N(\theta_j)) h(\bar{X}_0^{j,\varepsilon}, \theta_j) \begin{pmatrix} K_\varepsilon^1 \left( \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon} \right) \\ K_\varepsilon^2 \left( \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon} \right) \end{pmatrix} \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Recall that  $\bar{u}_b^\varepsilon(t, x, a)$ ,  $\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x)$ ,  $\bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(x)$  have been defined in (8.3.10), (8.3.27), (8.3.28).

*Proof of Theorem 8.4.1.* We have by a computation similar to (8.3.18):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^\nu | \langle I(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{(\ell),i,N,\varepsilon}, \theta_i) f(\bar{X}_T^{(\ell),i,N,\varepsilon}) | \\ \leq & C(T, A) \|f\|_\infty \varepsilon + \mathbb{E}^\nu | \langle I^\varepsilon(m_T), f \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{(\ell),i,N,\varepsilon}, \theta_i) f(\bar{X}_T^{(\ell),i,N,\varepsilon}) |, \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

The second term in the right hand side is dealt with in a way similar as in the proof of Theorem 8.3.1. We can do the same decomposition as in (8.3.19) where we define this time:

$$T_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_0^{i,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i) \left[ f(\bar{X}_T^{i,\varepsilon}) - f(\bar{X}_T^{(\ell),i,N,\varepsilon}) \right].$$

As in (8.3.21), we have:

$$\mathbb{E}^\nu (|T_3|) \leq \frac{A \|f'\|_\infty}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| \bar{X}_T^{i,\varepsilon} - \bar{X}_T^{(\ell),i,N,\varepsilon} \right|.$$

We define, similarly to (8.3.22), but with the  $L^1$ -norm:

$$S_N(t_{k+1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu | \bar{X}_{t_{k+1}}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_{k+1}}^{(\ell),i,N,\varepsilon} | \leq S_N(t_k) + \Delta t (B_1(k, N, \varepsilon) + B_2(k, N, \varepsilon) + B_3(k, N, \varepsilon)),$$

$$\begin{aligned} \text{with: } B_1(k, N, \varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| u_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) \right| \\ B_2(k, N, \varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \check{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) \right| \\ B_3(k, N, \varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^\nu \left| \check{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, \theta_i) - \hat{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon}, \theta_i) \right|. \end{aligned}$$

The term  $B_1(k, N, \varepsilon)$  can be upper bounded by  $C_1 \Delta t$ , where the constant  $C_1$  is upper bounded by  $CA \|\partial_y K_\varepsilon^{(4)}\|_\infty \|\partial_x K_\varepsilon^{(4)}\|_\infty \leq CA/\varepsilon^{10}$ , using (8.1.12). For the term  $B_3(k, N, \varepsilon)$ , we follow the computations of (8.3.24) and use the results of Lemma 7.6.1:

$$B_3(k, N, \varepsilon) \leq \mathbb{E}^\nu \left[ \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} \sum_{I_2} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{i}{N} \right) \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) h \left( \bar{X}_0^{i,\varepsilon}(\theta_i), \theta_i \right) \right. \\ \left. \times \left( K_\varepsilon \left( \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{j,\varepsilon} \right) - K_\varepsilon \left( \bar{X}_{t_k}^{(\ell),i,N,\varepsilon} - \bar{X}_{t_k}^{(\ell),j,N,\varepsilon} \right) \right) \right] \leq \frac{2AC}{2\pi\varepsilon^2} S_N(t_k).$$

The term  $B_2(k, N, \varepsilon)$  is upper bounded by the following Lemma, proved in Section 8.4.3.

**Lemma 8.4.1.** *We work under the Assumptions 8.3.1. Then,  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu \left( \left| \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) - \check{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^i, \theta_i) \right| \right) \leq C \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}}. \quad (8.4.7)$$

We can now conclude the upper bound of  $T_3$  with computations similar to (7.3.20):

$$S_N(t_{k+1}) \leq (1 + C\Delta t) S_N(t_k) + C \Delta t \left( \Delta t + \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}} \right) \leq C(T) \left( \Delta t + \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}} \right). \quad (8.4.8)$$

Thus:

$$T_3 \leq A \|f'\|_\infty C(T) \left( \Delta t + \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}} \right).$$

This achieves the upper bound of the last term  $T_3$  of (8.3.19). ■

### 8.4.3 Proof of Lemma 8.4.1

As in the proof of Lemma 7.3.3, in Chapter 7, we begin with establishing a moment upper bound. Then, we prove Lemma 8.4.1.

**Lemma 8.4.2.** *Under Assumptions 8.3.1,  $\forall \gamma > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \kappa > 0$  (as in Lemma 8.3.3),  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^{(\ell),N}] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon})| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C 2^{I_1}}{N^\gamma} \leq \frac{C}{N^{\gamma-1/(2s+1)}}. \quad (8.4.9)$$

As a consequence, for a choice of  $\gamma > 2$ , we obtain for every  $p \in [1, 2]$ :  $\exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall I = (I_1, I_2) \in [-1, I_1^{(\ell),N}] \times \mathbb{Z}, \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon})|^p \right) \leq \frac{C(\log N)^{p/2}}{N^{p/2}}. \quad (8.4.10)$$

*Proof.* From the tail upper bound of Lemma 8.3.3, and with computations similar to (7.5.4) :

$$\mathbb{P}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon})| \geq \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C 2^{I_1^{(\ell),N}}}{N^\gamma} \leq \frac{C}{N^{\gamma-1/(2s+1)}}. \quad (8.4.11)$$

Contrary to Lemma 7.5.1, we have this time  $I_1^{(\ell),N}$  instead of  $I_1^N$ . From the preceding inequality, we have for  $p \geq 1$ , and with the same computations as in (7.5.5):

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2} |\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon})|^p \right) \leq \frac{\kappa^p (\log N)^{p/2}}{2^p N^{p/2}} + \frac{C^p}{\pi^p \varepsilon^p N^{\gamma-1/(2s+1)}}. \quad (8.4.12)$$

If we choose  $\gamma > 2$ , then

$$\gamma - \frac{1}{2s+1} > \gamma - 1 > 1.$$

Then, if  $p \in [1, 2]$  and , the dominant term in (8.4.12) is in  $(\log N)^{p/2}/N^{p/2}$ . ■

**Remark 8.4.3.** *In the sequel, the choice of  $\gamma > 2$  will be assumed.*

**Lemma 8.4.4.** *Under Assumptions 8.3.1,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, C > 0, \forall N \geq N_0, \forall i \in [1, N], \forall K > 0, \forall k \in [0, K]$ ,*

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \check{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, G^{-1}(\alpha)) - \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, G^{-1}(\alpha)) \right| \right) \leq C \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}}.$$

*Proof.* We can decompose:

$$\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \check{u}_b^{(\ell),\varepsilon}(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, G^{-1}(\alpha)) - \bar{u}_b^\varepsilon(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}, G^{-1}(\alpha)) \right| \right) \leq C_1 + C_2 + C_3, \quad (8.4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{where: } C_1 &= \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \sum_{I_1 > I_1^{(\ell),N}} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \psi_I(\alpha) \right| \right) \\ C_2 &= \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{a \in \Theta} \left| \sum_{I_1 = -1}^{I_1^{(\ell),N}} \sum_{I_2} \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) (\psi_I(G(a)) - \psi_I(G_N(a))) \right| \right) \\ C_3 &= \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{a \in \Theta} \left| \sum_{I_1 = -1}^{I_1^{(\ell),N}} \sum_{I_2} (\check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon})) \psi_I(G(a)) \right| \right). \end{aligned}$$

Let us upper bound the term  $C_1$ . Since we deal with compactly supported wavelets,

$$C_1 \leq C \sum_{I_1 > I_1^{(\ell),N}} \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| \right) 2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty.$$

Using (7.5.7), we deduce that:

$$C_1 \leq C \sum_{I_1 > I_1^{(\ell),N}} 2^{I_1(\frac{1}{2}-s-\frac{1}{2})} \leq CN^{-\frac{s}{2s+1}}. \quad (8.4.14)$$

Let us now consider the term  $C_2$ . Recall the definition of  $\Delta_{I,N}(a)$  given in (7.5.8). Since the chosen wavelets have compact support, we have:

$$\begin{aligned} C_2 &\leq \mathbb{E}^\nu \left( C \sum_{I_1 = -1}^{I_1^{(\ell),N}} \sup_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| \|\Delta_{I,N}\|_\infty \right) \leq D_1 + D_2, \\ \text{with } D_1 &= \mathbb{E}^\nu \left( C \sum_{I_1 = -1}^{I_1^{(\ell),N}} \sup_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| \|\Delta_{I,N}\|_\infty \right) \\ D_2 &= \mathbb{E}^\nu \left( C \sum_{I_1 = -1}^{I_1^{(\ell),N}} \sup_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| \|\Delta_{I,N}\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Let us upper bound  $D_1$ . From (8.4.10) and (7.5.10):

$$\begin{aligned}
D_1 &\leq C \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right|^2 \right)} \sqrt{\mathbb{E}^\nu (\|\Delta_{I,N}\|_\infty^2)} \\
&\leq C \sqrt{\frac{\log N}{N}} \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} 2^{3I_1/2} \sqrt{\frac{\log \log N}{N}} \leq C \sqrt{\log N \log \log N} N^{-\frac{4s-1}{2(1+2s)}} \leq CN^{-\frac{s}{2s+1}}, \\
&\text{since : } \left[ \frac{4s-1}{2(1+2s)} > \frac{s}{2s+1} \right] \Leftrightarrow s > \frac{1}{2}. \tag{8.4.15}
\end{aligned}$$

Let us now upper bound  $D_2$ . Using (7.5.7) and (7.5.10):

$$D_2 \leq C \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} 2^{-I_1(s+\frac{1}{2})} \mathbb{E}^\nu (\|\Delta_{I,N}\|_\infty) \leq C \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} 2^{I_1(\frac{3}{2}-s-\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\log \log N}{N}}$$

If  $1/2 < s < 1$ , then  $1-s > 0$  and using (8.4.15):

$$D_2 \leq C \sqrt{\log \log N} N^{-\frac{4s-1}{2(2s+1)}} \leq CN^{-\frac{s}{2s+1}},$$

If  $s \geq 1$ , then using  $1/2 > s/(2s+1)$ :

$$D_2 \leq I_1^{(\ell),N} \sqrt{\frac{\log \log N}{N}} \leq CN^{-\frac{s}{2s+1}}.$$

Let us consider the term  $C_3$ . Since our wavelets have compact support, and from (8.4.10):

$$\begin{aligned}
C_3 &\leq C \sum_{I_1=-1}^{I_1^{(\ell),N}} \mathbb{E}^\nu \left( \sup_{I_2 \in \mathbb{Z}} \left| \check{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) - \bar{\beta}_I^{(\varepsilon,k)}(\bar{X}_{t_k}^{i,\varepsilon}) \right| \right) 2^{I_1/2} \|\psi\|_\infty \leq C \sqrt{\frac{\log N}{N}} 2^{I_1^{(\ell),N}/2} \\
&\leq C \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}}.
\end{aligned}$$

■

## 8.5 Numerical Experiments

### 8.5.1 Test Case

Following Milinazzo and Saffman [98] and Bossy[12], we consider the vortex equation (8.1.5) and focus on the following quantity:

$$\forall t \in [0, T], \forall a \in \Theta, L(t, a) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \tilde{w}(t, x, a) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}(t, x, a) dx}.$$

**Proposition 8.5.1.** *The quantity  $L(t, a)$  satisfies the following equation:*

$$\forall t \in [0, T], \forall a \in \Theta, L(t, a) = L(0, a) + 2t\sigma^2.$$

*Proof.* We consider the weak form of the vortex equation (8.1.5), and choose  $f : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x|^2$  as test function. We have:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Delta f(x) = 4.$$

By integration by parts, we have for all  $a \in \Theta$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \tilde{w}(t, x, a) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w_0(x, a) dx + 2\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}(s, x, a) dx ds \\ & - \int_0^t \left( (K^1 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) \frac{\partial \tilde{w}(s, \cdot, a)}{\partial x_1}(x) + (K^2 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) \frac{\partial \tilde{w}(s, \cdot, a)}{\partial x_2}(x) \right) |x|^2 dx ds \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w_0(x, a) dx + 2\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}(s, x, a) dx ds \\ & + \int_0^t \left\langle \tilde{w}(s, x, a) dx, \left( \frac{\partial}{\partial x_1} ((K^1 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) |x|^2) + \frac{\partial}{\partial x_2} ((K^2 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) |x|^2) \right) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Recalling that for incompressible fluids  $\operatorname{div}(v) = 0$ , and that  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}(t, x, a) dx = \int_{\mathbb{R}^2} w_0(x, a) dx$ , we obtain:

$$\begin{aligned} \forall a \in \Theta, \quad & \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \tilde{w}(t, x, a) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w_0(x, a) dx + 2t\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} w_0(x, a) dx \\ & + 2 \int_0^t \left\langle \tilde{w}(s, x, a) dx, (K^1 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) x_1 + (K^2 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) x_2 \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Finally the following identity:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \left( (K^1 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) x_1 + (K^2 * \tilde{w}(s, \cdot, a))(x) x_2 \right) \tilde{w}(s, x, a) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}(s, x, a) dx \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}(s, y, a) dy \left( \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{2\pi((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

yields the desired result. ■

In case  $P(d\omega) - a.s.$ ,  $w_0(\cdot, \theta)$  is a density function, we have:

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\mathbb{R}} L(t, a) \nu(da) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w(t, x, a) dx \nu(da) = \langle I(m_t)(dx), |x|^2 \rangle.$$

The idea is then to compute the approximations of  $t \mapsto \langle I(m_t)(dx), |x|^2 \rangle$  given by the three particle methods introduced in Chapter 7, and to see how they fit the theoretical line  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} L(0, a) \nu(da) + 2t\sigma^2$ . Since the map  $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x|^2$  is not bounded, we replace it with  $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x|^2 1_{\{|x| \leq M\}}$  (with  $M > 0$ ).

Let us mention the convergence theorem for the wavelet particle method:

**Theorem 8.5.1.** *Under the assumptions of Theorem 8.3.1, and if :*

1.  $P(d\omega) - a.s.$ ,  $w_0(\cdot, \theta)$  is a density function,
2.  $P(d\omega) - a.s.$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^4 w_0(x, \theta) dx < \infty$ ,

then:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, \forall N \geq N_0, \forall K > 0, \exists \kappa > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T]$ ,

$$\mathbb{E}^\nu \left| \langle I(m_t)(dx), |x|^2 \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \bar{X}_t^{i, N, \varepsilon} \right|^2 1_{\{|\bar{X}_t^{i, N, \varepsilon}| \leq M\}} \right| \leq C \left( \Delta t + \left( \frac{\log N}{N} \right)^{1/4} + \varepsilon + \frac{1}{M} \right).$$

*Proof.* As previously, we decompose the error:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\nu \left| \langle I(m_t)(dx), |x|^2 \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \bar{X}_t^{i,N,\varepsilon} \right|^2 1_{\{|\bar{X}_t^{i,N,\varepsilon}| \leq M\}} \right| \\
& \leq |\langle I(m_t)(dx), |x|^2 \rangle - \langle I(m_t)(dx), |x|^2 1_{\{|x| \leq M\}} \rangle| \\
& + \mathbb{E}^\nu |\langle I(m_t)(dx), |x|^2 1_{\{|x| \leq M\}} \rangle - \langle I^\varepsilon(m_t)(dx), |x|^2 1_{\{|x| \leq M\}} \rangle| \\
& + \mathbb{E}^\nu \left| \langle I^\varepsilon(m_t), |x|^2 1_{\{|x| \leq M\}} \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \bar{X}_t^{i,N,\varepsilon} \right|^2 1_{\{|\bar{X}_t^{i,N,\varepsilon}| \leq M\}} \right|. \tag{8.5.1}
\end{aligned}$$

The two last terms in the right hand side of (8.5.1) can be dealt with Theorem 8.3.1. Let us now consider the first term:

$$\begin{aligned}
|\langle I(m_t), |x|^2 \rangle - \langle I(m_t)(dx), |x|^2 1_{\{|x| \leq M\}} \rangle| &= |\langle I(m_t), |x|^2 1_{\{|x| > M\}} \rangle| \\
&= \left| \mathbb{E}^\nu \left( |X_t(\theta)|^2 1_{\{|X_t(\theta)| > M\}} \right) \right| \leq \sqrt{\mathbb{E}^\nu \left( |X_t(\theta)|^4 \right)} \sqrt{\mathbb{P}^\nu \left( |X_t(\theta)| > M \right)}.
\end{aligned}$$

Our assumptions imply that:  $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}^\nu \left( |X_t(\theta)|^4 \right) < \infty$  and  $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{P}^\nu \left( |X_t(\theta)| > M \right) \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}^\nu \left( |X_t(\theta)|^2 \right) / M^2$ , which concludes the proof.  $\blacksquare$

A criterium to compare how well the particle approximations of  $t \mapsto \langle I(m_t)(dx), |x|^2 \rangle$  fit to the theoretical line  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} L(0, a) \nu(da) + 2t\sigma^2$  is given by the relative error. If we denote by  $A(t)$  the particle approximation of  $\int_{\mathbb{R}} L(t, a) \nu(da)$ , the relative error can be defined by:

$$e(t) = \frac{|A(t) - A(0) - 2t\sigma^2|}{|A(t)|}.$$

## 8.5.2 Example 1: An Uncertainty Parameter $\theta$ with Large Variance

Our purpose is now to compare the three methods presented in Chapter 7, Section 7.2, on numerical examples.

We consider first the 2D-Navier-Stokes equation with  $\sigma = 10^{-3}$  and  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ . The initial condition is given by:  $\mathcal{L}(X_0(\theta)) = \mathcal{N}(U(\theta), 0.6)$ , where the distribution of  $\theta$  is a gaussian of large variance,  $\mathcal{N}(0, 5)$ , and where  $U$  is the following 1-Lipschitz function :

$$\forall a \in \mathbb{R}, U(a) = (\underline{U} \vee a) \wedge \bar{U},$$

where  $\underline{U}$  and  $\bar{U}$  are positive constants.

Let us show that Assumptions 8.3.1 are satisfied.

Assumptions 1, 3, 4, 5 and 7 are satisfied. Notice that since we start here with a probability initial condition, we have  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}, h(x, a) = 1$  in (8.1.15) and  $\forall a \in \Theta, \forall x \in \mathbb{R}^2, p_0(x, a) = w_0(x, a)$ .

From Theorem 1.5.2 in Ané *et al.* [3], the gaussian law satisfies a Logarithmic Sobolev Inequality and Assumption 2 is also fulfilled.

Let  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Let  $X_1$  be a random variable of law  $\mu_1 := \mathcal{N}(U(a_1), 0.6)$ . The random variable  $X_2 := X_1 + U(a_2) - U(a_1)$  is a gaussian variable of law  $\mu_2 := \mathcal{N}(U(a_2), 0.6)$  and:

$$\mathcal{W}_1(\mu_1, \mu_2) \leq \mathbb{E}(|X_2 - X_1|) = |U(a_2) - U(a_1)| \leq |a_2 - a_1|.$$

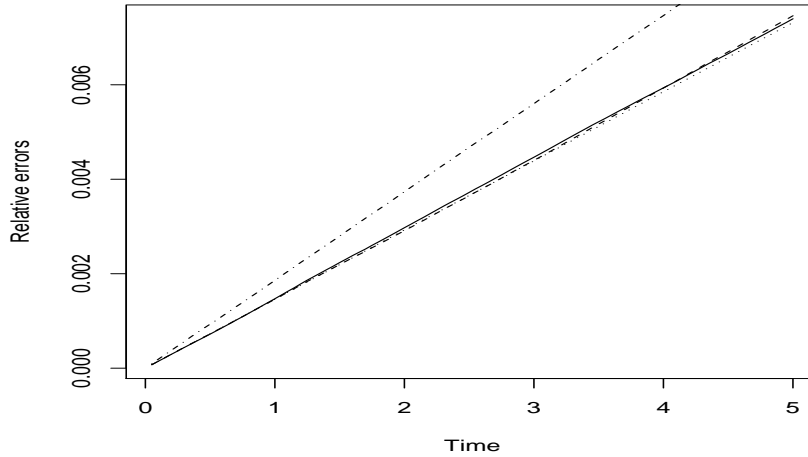


Figure 8.1: Evolution of the relative error for the particle methods 1 (with 1 024 particles in dash-dots, with 32 768 particles in dots), 2 (dashed, 1 024 particles) and 3 (plain, 1 024 particles).

Moreover, the distribution function  $G$  of  $\theta$  is such that  $G^{-1}$  is Lipschitz continuous on  $[G^{-1}(\underline{U}), G^{-1}(\bar{U})]$ . Assumption 6 of Theorem 8.3.1 is satisfied.

All the simulations presented here are performed with the **R** open source software<sup>1</sup> and the *wavethresh* package developed by Nason, Kovac and Maechler [101].

We ran the simulations with  $\Delta t = 0.05$ ,  $T = 5$  and a fixed number of 1024 particles ( $N_1 = 32$  and  $N_2 = 32$  for the first method). The number of particles is a power of 2 because we use a Mallat algorithm to handle the wavelet expansions.

The wavelet regression estimators are computed with the Daubechies orthonormal compactly supported wavelets  $N = 8$  that are implemented in the software. The resolution level and the threshold are chosen with respect to (7.2.11), (7.2.10), (7.4.25) and (7.4.26).

We use a gaussian kernel for the Method 2, with a window  $h_N$  that was suggested by the software using a plug-in methodology (the idea is to replace the unknown functionals that appear in expressions for the asymptotically optimal windows by kernel estimates).

Notice that the asymptotic theoretical results of Theorems 8.3.1 and 8.4.1 do not depend on the particular choices of kernels and wavelet bases that are made, provided Assumptions 8.3.1 are satisfied. Since we deal with gaussian laws for  $\theta$  and  $X_0(a)$ , it is natural to choose smooth kernels and wavelet fathers and mothers. The numerical results are robust to the choice of kernels and wavelets, and we present the better-looking simulations.

The random numbers generator has been seeded such that in each of the three methods, the same simulations are used for  $\theta$  and for the Brownian motions underlying the particles' diffusions.

On Figure 8.1, we can see that Method 1 (dash-dots) works very badly, while Method 2 and 3 are equivalent. The poor performance of Method 1 is due to the fact that there are not enough simulations of  $\theta$  given the large variance that we have chosen for this random variable. If we want to obtain results comparable with Methods 2 and 3, we have to increase the number  $N_1$  of simulations for  $\theta$ , which implies that we do more simulations than with direct methods. If we simulate 1024 realizations of  $\theta$  and 32 particles for each of these realizations (*i.e.* 32 768 particles, in dots on Figure 8.1) we obtain results similar to those of Methods 2 and 3 in term of relative errors.

<sup>1</sup><http://www.r-project.org/>

### 8.5.3 Example 2: An Uncertainty Parameter $\theta$ with a Mixture Law

Let us now give an example of case where the wavelet particle method (Method 3) proves more robust than the random weights particle method (Method 2).

We study the Navier-Stokes equation (8.1.5) with  $\sigma = 10^{-4}$  and in which the drift function is cut-off as in Paragraph 8.1.2, with  $\varepsilon = 10^{-2}$ . The diffusions are simulated by using Euler Schemes with  $\Delta t = 0.5$ .

The initial condition  $\mathcal{L}(X_0(\theta)) = \mathcal{N}(U(\theta), 0.3)$ , where the distribution of  $\theta$  is a mixing of two gaussian laws with same standard deviation 0.2 and with respective expectations 1.3 and 0. There are two ways of simulating such a variable.

The first one is to consider :

$$\theta = 1_{Y=1}\theta^{(1)} + 1_{Y=0}\theta^{(2)},$$

where  $Y$ ,  $\theta^{(1)}$  and  $\theta^{(2)}$  are three independent random variables, with  $Y$  a Bernoulli random variable that takes the value 1 with probability  $p = 0.3$ , and with  $\theta^{(1)}$  and  $\theta^{(2)}$  two gaussian random variables with respective expectations 1.3 and 0, and with standard deviation 0.2.

The second one is to consider :

$$\theta = Y + 1.3T,$$

where  $Y$  is a gaussian variable of expectation 0 and standard deviation 0.2, and where  $T$  is a Bernoulli random variable that takes the value 1 with probability 0.3.

Let us prove that the Assumptions of Theorem 8.3.1 are satisfied. As in Example 1, Assumptions 1, 3, 4, 5 and 7 are fulfilled. Assumption 6 is satisfied with the same argument as in Example 1. Assumption 2 is harder to obtain. Looking at the proof of Lemma 7.4.5, we see that the important fact is that the following concentration inequality holds for every Lipschitz continuous function  $f$ , for all  $r > 0$  and all sufficiently large  $N$ :

$$\mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) f(\theta_j) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) f(\theta_j) \right) \right| > r \right) \leq C e^{-CNr^2}.$$

This is achieved by writing :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) f(\theta_j) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) f(\theta_j) \right) \right| > r \right) \\ & \leq \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) Y_{(j)} f(\theta_{(j)}) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) Y_{(j)} f(\theta_{(j)}) \right) \right| > \frac{r}{2} \right) \\ & + \mathbb{P}^\nu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) (1 - Y_{(j)}) f(\theta_{(j)}) - \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I \left( \frac{j}{N} \right) (1 - Y_{(j)}) f(\theta_{(j)}) \right) \right| > \frac{r}{2} \right). \end{aligned}$$

Since Gaussian and Bernoulli laws satisfy logarithmic Sobolev inequalities (see Ané *et al.* [3], Chapitre 1), we obtain the desired result.

In Figure 8.2, we are interested in the mean velocity vector field and use formula (8.1.9), to simulate its time evolution. We apply our particle approximations to:  $f_\delta = K_\delta(x - \cdot)$ , with  $x = (x_1, x_2)$  varying on a grid of  $0.5 \times 0.5$  on  $[-3, 3] \times [-3, 3]$  and with  $\delta = 10^{-1}$ . We compare the results provided by each of the three preceding methods for a given number of  $2^8 = 256$  particles. The evolutions of the mean velocity vector fields on Figure 8.2 look similar in every



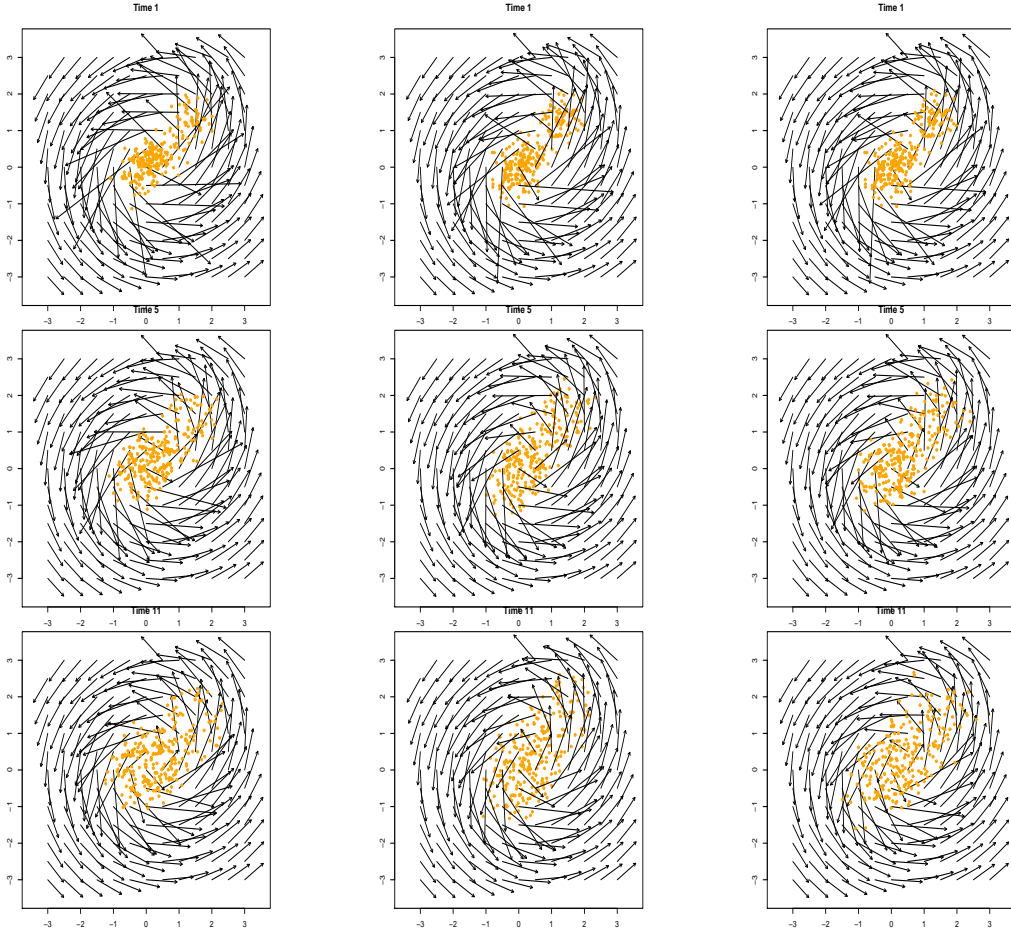


Figure 8.2: Approximation of the mean velocity vector field given by the first particle method (left), the second particle method with Nadaraya-Watson estimators (center) and with Kerkyacharian-Picard estimators (right). The first line corresponds to the initialization, then the two other lines represent the approximation of the mean velocity vector field after respectively 5 and 11 discretization steps.

case of our example. This was to be expected, since the example has good regularity properties. We can verify here that the three methods are concordant.

To have a look at the quality of the regression estimators, we plotted in Figure 8.3, the points  $\left(\theta^{(i)}, K_\varepsilon^1 \left( \bar{X}_{t_1}^{(128),256,\varepsilon} - \bar{X}_{t_1}^{(i),256,\varepsilon} \right)\right)_{i \in [1,N]}$  with bullets and the first component of the regression estimator  $a \mapsto \hat{u}_{K_\varepsilon}(t_1, \bar{X}_{t_1}^{(128),256,\varepsilon}, a)$  in continuous line. We choose the particle number 128 as it corresponds to the median realization of  $\theta$ . Results are only presented for the first components of  $K$  and  $\hat{u}_{K_\varepsilon}(t_1, \bar{X}_{t_1}^{(128),256,\varepsilon}, \cdot)$ .

When looking at Figure 8.3, it seems that the wavelet estimator fits better to the data. In particular, in the gap between the two peaks of our gaussian mixing, where fewer observations are available, the Nadaraya-Watson estimator is not robust at all. In contrary, in the "crowded" regions, where many realizations of  $\theta$  can be found, the Nadaraya-Watson estimator seems to average more than the Kerkyacharian-Picard estimator and thus, it misses some aggregation features. This can give an intuition to understand why the method based on wavelet regression estimators is more accurate than the method based on Nadaraya-Watson estimators, and why it extends to less regular initial conditions.

Finally, we use the test case of Paragraph 8.5.1 to compare the performances of the three methods in the case of this mixture initial condition (Figure 8.4). We ran this time the algorithm with 1024 particles.

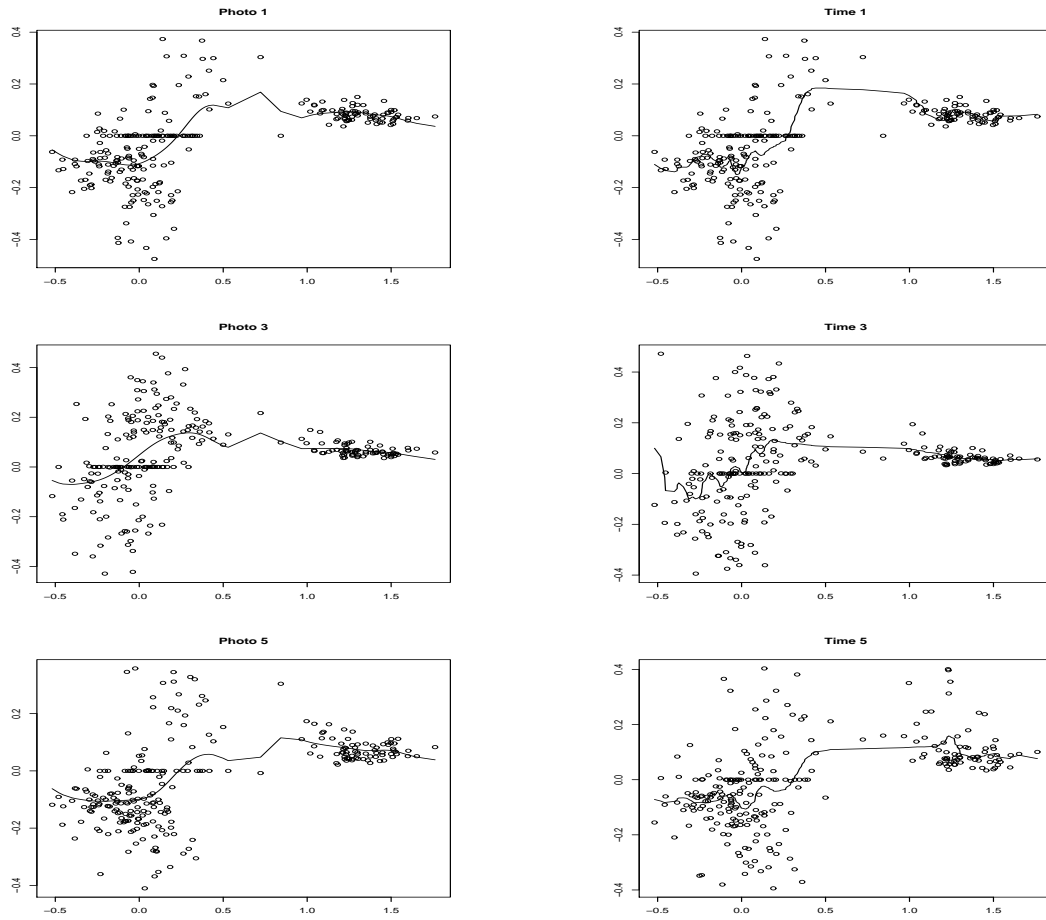


Figure 8.3: On the  $x$ -axis are the values of  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ . The circles correspond to the points  $\left(\theta_{(i)}, K_{\varepsilon}^1 \left( \bar{X}_t^{(128), 256, \varepsilon} - \bar{X}_t^{(i), 256, \varepsilon} \right) \right)_{i \in [1, N]}$  and in continuous line is the first component of the regression estimator  $a \mapsto \hat{u}_{K_{\varepsilon}}(t, \bar{X}_t^{(128), 256, \varepsilon}, a)$ . Left is the Nadaraya-Watson estimator with bandwidth 0.1, whereas right is the Kerkyacharian-Picard estimator with threshold 0.1 and level 4 resolution. The results are presented for the first, third and fifth discretization time.

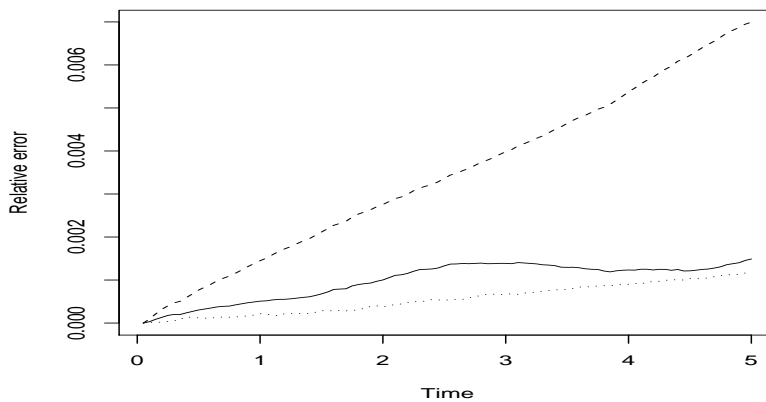


Figure 8.4: Evolution of the relative error for the particle methods 1 (dotted), 2 (dashed) and 3 (plain).

In term of relative error (Figure 8.4), it clearly appears on this set of simulations that Method

1 (dotted line) gives the best performance. Our particle method with wavelets (Method 3, in plain line) is a little less accurate, but remarkably better than Method 2 (dashed line). In term of simulation time, Method 3 is longer than Method 2 but avoids the imbricated simulation procedure of Method 1.

# Appendix B

## Appendix

We recall here some facts about wavelet decomposition and about the wavelet regression in random design. For further details, there is an abundant literature on the subject (see for instance Daubechies [28], Härdle and al. [61] or Meyer [96] for the wavelet theory, Kerkyacharian and Picard [71], Donoho and Johnstone [37] or Donoho and al. [38] for wavelet regression).

### B.1 Wavelet Decomposition

**Notation:** In this paragraph, we denote by  $\widehat{f}$  the Fourier-transform of  $f \in L^2$  endowed with its canonical euclidian structure:  $\widehat{f}(\omega) = \int e^{-it\omega} f(t) dt$ .

Take  $\phi \in L^2$ . One defines the descendants of this function by  $\phi_{I_1 I_2} = 2^{I_1/2} \phi(2^{I_1} a - I_2)$ , for  $I_1 \in \mathbb{N}$ ,  $I_2 \in \mathbb{Z}$ .

**Assumption B.1.1.**  $\phi$  is said to be a scale function if it satisfies the following properties ( $HO_1$ ):

1.  $\sum_{I_2=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2I_2\pi)|^2 = 1$  almost everywhere. This condition is equivalent to the orthogonality in  $L^2$  of the translated functions  $(\phi(\cdot - I_2))_{I_2 \in \mathbb{Z}}$ .
2. There exists a  $2\pi$ -periodic function  $m_0 \in L^2[0, 2\pi]$  such that:  $\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{m}_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  which is equivalent to the increase in the inclusion sense of the spaces  $V_{I_1}$  defined by:

$$\begin{aligned} V_0 &= \overline{sp\{\phi_{0I_2}, I_2 \in \mathbb{Z}\}} = \{f = \sum_{I_2} c_{I_2} \phi_{0I_2} \mid \sum |c_{I_2}|^2 < \infty\} \\ V_{I_1} &= \{h(a) = f(2^{I_1} a) = \sum_{I_2} c_{I_2} \phi_{I_1 I_2}(a) \mid f \in V_0, \sum |c_{I_2}|^2 < \infty\}, \quad I_1 \geq 1. \end{aligned}$$

**Assumption B.1.2.** We also assume that there exists a map  $\psi \in L^2$  which satisfies the following properties ( $HO_2$ ), where the functions  $(\psi_{I_1 I_2})$  are defined by the same way as the  $(\phi_{I_1 I_2})$  were:

1.  $\sum_{I_2=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(\omega + 2I_2\pi)|^2 = 1$  a.e.
2. There exists a  $2\pi$ -periodic function  $m_1 \in L^2[0, 2\pi]$  verifying:  $\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{m}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\psi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  which means that  $\psi \in V_1$ .
3.  $\sum_{I_2} \widehat{\phi}(\omega + 2I_2\pi) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2I_2\pi)} = 0$ , which tells us that  $V_0$  and  $W_0$  are orthogonal, where we have defined:

$$\begin{aligned} W_0 &= \{f = \sum_{I_2} c_{I_2} \psi_{0, I_2} \mid \sum |c_{I_2}|^2 < \infty\} \\ W_{I_1} &= \{h(a) = f(2^{I_1} a) = \sum_{I_2} c_{I_2} \psi_{I_1 I_2}(a) \mid f \in W_0, \sum |c_{I_2}|^2 < \infty\}, \quad I_1 \geq 1. \end{aligned}$$

4.  $m_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)} \mu(\omega)$ , where  $\mu$  is  $2\pi$ -periodic with  $|\mu(\omega)| = 1$  a.e. This implies that  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ .

These conditions are sufficient to prove that, more generally, for a given  $I_1 \geq 0$ , the functions  $(\psi_{I_1 I_2})_{I_2}$  form an orthonormal basis of  $W_{I_1}$ , and that  $V_{I_1+1} = V_{I_1} \oplus W_{I_1}$ .

The function  $\phi$  is called father wavelet, whereas  $\psi$  is the mother wavelet.

**Assumption B.1.3.** Hypothesis (HO<sub>3</sub>) :  $\phi \in L^1 \cap L^2$ . This assumption implies the continuity of the Fourier transform and the fact that  $\overline{\left(\bigcup_{I_1 \geq 0} V_{I_1}\right)}^{L^2} = L^2$ . Notice that this assumption is implied by the concentration property (H) enounced in section 7.2.2.

When all the previous properties are satisfied, the sequence of spaces  $(V_{I_1})_{I_1 \geq 0}$  generated by  $\phi$  is called MultiResolution Analysis (Multi-Resolution Analysis) of  $L^2$ . The sets  $(W_{I_1})_{I_1 \geq 0}$  are then the resolution levels of the Multi-Resolution Analysis.

Then, a wavelet decomposition is available for every  $f \in L^2$ :

$$\forall f \in L^2, \forall a \in \mathbb{R}, f(a) = \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \alpha_{I_2} \phi_{0I_2}(a) + \sum_{I_1=0}^{+\infty} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \beta_{I_1 I_2} \psi_{I_1 I_2}(a) = \sum_{I_1=-1}^{+\infty} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \beta_{I_1 I_2} \psi_{I_1 I_2}(a), \quad (\text{B.1.1})$$

where we have written  $\phi_{0I_2} := \psi_{-1I_2}$  and  $\beta_{-1I_2} = \alpha_{I_2}$  in order to simplify the formulas.

The coefficients of the wavelet expansion are:

$$\beta_{-1I_2} = \alpha_{I_2} = \int f(a) \phi_{0I_2}(a) da \quad \text{and} \quad \beta_{I_1 I_2} = \int f(a) \psi_{I_1 I_2}(a) da. \quad (\text{B.1.2})$$

Heuristically, we may consider  $I_1$  as a degree of liberty in the frequency scale. The coefficients  $\alpha$  thus sum up general shape of  $f$  whereas the coefficients  $\beta$  correspond to "details". The index  $I_2$  corresponds to a translation parameter and can be viewed as a degree of liberty in the time or spatial scale.

Using Expansion (B.1.1), we can approximate any  $f \in L^2$ , by its sequence of projections on  $V_{I_1^N}$ :

$$P_{V_{I_1^N}} f(a) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \beta_{I_1 I_2} \psi_{I_1 I_2}(a).$$

We can show that the projection operator  $P_{V_{I_1^N}}$  on  $V_{I_1^N}$ , for  $I_1^N \geq 0$  is associated with the kernel  $K_{I_1^N}(x, y) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N-1} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \psi_{I_1 I_2}(x) \psi_{I_1 I_2}(y)$ :  $\forall f \in L^2, P_{V_{I_1^N}} f(x) = \int K_{I_1^N}(x, y) f(y) dy$ . It can also be proved that under Assumption (H),  $\int |K_{I_1^N}(x, y)| dy$  is bounded uniformly in  $N$  by the positive constant  $C$  appearing in (H).

Finally, let us notice that when  $\phi$  and  $\psi$  satisfy Assumptions (H) and (M), the wavelet coefficients of any function  $f \in B_{s, \infty, \infty}$ , the Besov space of  $s$ -Hölder continuous functions, satisfy:

$$\exists C > 0, \sup_{I_2} |\beta_{I_1 I_2}| \leq C 2^{-I_1(s+\frac{1}{2})} \quad (\text{B.1.3})$$

In fact, this inequality characterizes the functions of the Besov space  $B_{s, \infty, \infty}$ .

## B.2 Presentation of the Warped Wavelet Regression Estimator

We now present the warped wavelet regression estimator inspired by the work of Kerkyacharian and Picard [72]. Then, we give a theorem dealing with its  $L^2$ -error.

Suppose we are trying to estimate the regression function  $f$  in:

$$Y_i = f(\theta_i) + \varepsilon_i, \quad i \in [1, N], \quad (\text{B.2.1})$$

with independent identically distributed observations  $(Y_i, \theta_i)_{i \in [1, N]} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^N$ , with the same law as  $(Y, \theta)$ , and unobserved  $(\varepsilon_i)_{i \in [1, N]}$ , which are assumed to be centered and orthogonal to the sigma-field  $\sigma(\theta)$  generated by the  $(\theta_i)_{i \in [1, N]}$ .

The theoretical solution, which minimizes the variance of the residuals  $\varepsilon_i$ , is the conditional expectation:  $\mathbb{E}(Y|\theta = a) = \arg \min_f \mathbb{E}(Y - f(\theta))^2$ .

In the following, we also suppose that the law  $\mathcal{L}(\theta)$  of  $\theta_i$  has an unknown density which we will call  $g$ . We denote by  $G$  its distribution function, by  $G^{-1}$  the usual generalized inverse of  $G$  and by  $G_N$  the empirical equivalent of  $G$  as we did in (7.2.9).

The supports of  $f$  and  $g$  are also assumed to be imbedded in a compact interval  $\mathcal{I}$ .

We look for estimators  $\hat{f}$  for  $f$  of the form:

$$\hat{f}(a) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2} \hat{\beta}_I \psi_I(a) 1_{|\hat{\beta}_I| \geq \vartheta_N}, \quad (\text{B.2.2})$$

where  $\hat{\beta}_I$  are estimators of  $\beta_I$  appearing in (B.1.1) and where  $I_1^N$  corresponds to the truncation of the serie (B.1.1). Small terms corresponding to estimated coefficients  $\hat{\beta}_I$  with absolute values under the threshold  $\vartheta_N$  are eliminated.

When dealing with deterministic and equi-spaced data  $\theta_i$  ( $\theta_i = i/N$ ), one classically uses the following estimator for  $\beta_I$  (see Donoho and Johnstone [37] or Donoho and al. [38]):

$$\hat{\beta}_I^{\boxtimes} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_I\left(\frac{i}{N}\right) Y_i. \quad (\text{B.2.3})$$

When the explicatives  $\theta_i$  are random, the estimator (B.2.3) is no more valid.

Instead of looking for a complicated estimator, whose choice would be conditioned on the chosen wavelet base, Kerkyacharian and Picard [72] tried to stay close to the statistical data and therefore used warped wavelets to construct natural estimators. One can indeed reduce the problem to the case of uniformly distributed data on  $[0, 1]$  since  $G(\theta_i)$  are uniformly distributed on  $[0, 1]$ . A natural extension of (B.2.3) is then:

$$\hat{\beta}_I^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_I(G(\theta_i)) Y_i. \quad (\text{B.2.4})$$

This is an unbiased estimator of the coefficient  $\beta_I$  appearing in the following expansion of  $f \circ G^{-1}$  on the wavelet base  $(\psi_I)$  or equivalently of the expansion of  $f$  on warped wavelets  $(\psi_I \circ G)$ :

$$f(a) = \sum_{I_1 \geq -1} \sum_{I_2} \beta_I \psi_I(G(a)).$$

A natural estimator of  $f$  would then be:

$$\hat{f}^*(a) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_I^* \psi_I(G(a)) 1_{|\hat{\beta}_I^*| \geq \vartheta_N}, \quad (\text{B.2.5})$$

with  $\vartheta_N$  and  $I_1^N$  appropriately chosen.

Since this transformation relies on  $G$ , which is in fact unknown, we replace it by  $G_N(a)$ .

The new estimators of the coefficients are then:

$$\hat{\beta}_I' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_I(G_N(\theta_i)) Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_I\left(\frac{i}{N}\right) Y_{(i)}, \quad (\text{B.2.6})$$

where the  $Y_{(i)}$  correspond to the observations ranked by increasing values of  $\theta_i$ . The ranking is made here to simplify notation: we have just re-indexed the sum.

A generalization of the estimator (B.2.5) is therefore:

$$\hat{f}'(a) = \sum_{I_1=-1}^{I_1^N} \sum_{I_2 \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_I' \psi_I(G_N(a)) 1_{|\hat{\beta}_I'| \geq \vartheta_N}, \quad (\text{B.2.7})$$

with  $\vartheta_N$  and  $I_1^N$  appropriately chosen.

Notice that the expression (B.2.6) is very similar to (B.2.3), which is nice, since the computation of (B.2.3) is often already implemented in statistical softwares.

### B.3 Some Technical Results on Wavelets

**Proposition B.3.1.** *Let  $(\psi_{I_1, I_2})_{I_1 \geq -1, I_2 \in \mathbb{Z}}$  be a Multi-Resolution Analysis on  $\mathbb{R}$  generated by compactly supported wavelets. Let  $a \in \mathbb{R}$ . For any given  $I_1 \geq -1$ , the number of wavelets  $\psi_{I_1, I_2}$  such that  $a$  belongs to their support is finite, and this number does not depend on  $I_1$ .  $\square$*

*Proof.* Let  $I_1 \geq -1$ . From (7.2.12) and (7.2.13), the number of wavelets  $\psi_{I_1, I_2}$  such that  $a$  belongs to their support is the number of  $I_2 \in \mathbb{Z}$  such that  $2^{I_1}a - I_2 \in \text{supp}(\psi) \cup \text{supp}(\phi)$ . Since  $\psi$  and  $\phi$  have compact support by assumption, there exists  $K > 0$ , such that the  $I_2 \in \mathbb{Z}$  we are interested in are such that

$$-K < 2^{I_1}a - I_2 < K,$$

*i.e.*

$$2^{I_1}a - K < I_2 < 2^{I_1}a + K.$$

There are at most  $[2K]$  such index  $I_2$ .  $\blacksquare$

**Proposition B.3.2.** *Let  $(\psi_{I_1, I_2})_{I_1 \geq -1, I_2 \in \mathbb{Z}}$  be a Multi-Resolution Analysis on  $\mathbb{R}$  generated by compactly supported wavelets. Let  $\mathcal{I} = [a, b]$  be a compact interval of  $\mathbb{R}$ . For any given  $I_1 \geq -1$ , the number of  $I_2 \in \mathbb{Z}$  such that the support of  $\psi_{I_1, I_2}$  intersect  $\mathcal{I}$  is of order  $2^{I_1}$ .*

*Proof.* Let  $I_1 \geq -1$ . Since  $\psi$  and  $\phi$  have compact support by assumption, there exists  $K > 0$ , such that  $\text{supp}(\phi) \cup \text{supp}(\psi) \subset [-K, K]$ . The number of  $I_2 \in \mathbb{Z}$  such that the support of  $\psi_{I_1, I_2}$  intersect  $\mathcal{I}$  is the number of  $I_2 \in \mathbb{Z}$  such that

$$2^{I_1}a - I_2 \leq K, \quad \text{and} \quad 2^{I_1}b - I_2 \geq -K$$

i.e. it is the number of  $I_2 \in \mathbb{Z}$  such that

$$2^{I_1}a - K \leq I_2 \leq 2^{I_1}b + K.$$

There are less than  $2^{I_1}(b - a) + 2K$  such index  $I_2$ . ■

**Proposition B.3.3.** *Let us consider an index  $I = (I_1, I_2) \in [-1, \infty[ \times \mathbb{Z}$  and a wavelet  $\psi$ .*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I^2\left(\frac{j}{N}\right)} = \sqrt{\int_0^1 \psi_I(x)^2 dx} \leq 1. \quad (\text{B.3.1})$$

As a consequence, there exists a positive constant  $C' > 0$  and an integer  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  such that

$$\forall N \geq N_0, \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I^2\left(\frac{j}{N}\right)} \leq C'.$$

*Proof.* The term  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_I^2(j/N)$  is a Riemann sum, and by construction, any wavelet  $\psi_I$  of the Multi-Resolution Analysis satisfies  $\int_{\mathbb{R}} \psi_I^2(x) dx = 1$ . ■

## B.4 Bernstein's Inequality

The aim of this appendix is to give a simple proof of Bernstein's inequality (see Härdle *et al.* [61] p. 241). The proof is based on the following lemma which is a special case of concentration of measure results.

**Lemma B.4.1.** *Let  $(X_i)_{i \in [1, N]}$  be a sequence of independent random variables such that  $\forall i \in [1, N]$ ,  $X_i \leq M$  and  $\mathbb{E}(X_i) \leq 0$ . We define  $b_N^2 = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i^2)$ . Then for any  $\lambda \geq 0$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N X_i \geq \lambda\right) \leq \exp\left(-\frac{b_N^2}{M^2} \theta\left(\frac{\lambda N}{b_N^2}\right)\right) \quad (\text{B.4.1})$$

where  $\theta(x) = (1 + x) \log(1 + x) - x$ .

*Proof.* Let us consider the function

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

We have:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) \geq 0,$$

and  $\Phi$  is non-decreasing. The derivative of  $\Phi$  is:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \Phi'(x) = \frac{e^x(x - 2) + x + 2}{x^3},$$

and the numerator has the same sign as  $x$ .

Using the Markov inequality and independence of the  $X_i$ , we get that, for arbitrary  $t > 0$  and  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N X_i > \lambda\right) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N t X_i\right)\right) \leq \exp\left(-\lambda t + \sum_{i=1}^N \log \mathbb{E}(e^{t X_i})\right).$$



Since:

$$\begin{aligned}\log \mathbb{E} (e^{tX_i}) &= \log (\mathbb{E} (e^{tX_i} - 1 - tX_i + 1 + tX_i)) \\ &\leq \log (\mathbb{E} (e^{tX_i} - 1 - tX_i) + 1) \\ &= \log (1 + \mathbb{E} (\Phi(tX_i)t^2X_i^2))\end{aligned}$$

as  $\mathbb{E}(X_i) \leq 0$ . Since  $\forall u > -1$ ,  $\log(1 + u) \leq u$ ,

$$\log \mathbb{E} (e^{tX_i}) \leq \mathbb{E} (\Phi(tX_i)t^2X_i^2) \leq \Phi(tM)t^2\mathbb{E}(X_i^2),$$

by using the monotonicity of the function  $\Phi$ . It follows that:

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^N X_i > \lambda \right) \leq \exp(-\lambda t + b_N^2 t^2 \Phi(tM)) = \exp \left( -\frac{b_N^2}{M^2} \left( \frac{\lambda M^2 t}{b_N^2} - (e^{tM} - 1 - tM) \right) \right) \quad (\text{B.4.2})$$

We optimize the right hand side of (B.4.2) in  $t$ . For

$$t = \frac{1}{M} \log \left( 1 + \frac{\lambda M}{b_N^2} \right),$$

we obtain the result. ■

We now prove Bernstein's inequality

**Proposition B.4.2.** *Let  $(X_i)_{i \in [1, N]}$  be a sequence of independent random variables such that  $\forall i \in [1, N]$ ,  $X_i \leq M$  and  $\mathbb{E}(X_i) \leq 0$ . We define  $b_N^2 = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i^2)$ . Then for any  $\lambda \geq 0$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^N X_i \geq \lambda \right) \leq \exp \left( -\frac{\lambda^2}{2(b_N^2 + \frac{\lambda M}{3})} \right). \quad (\text{B.4.3})$$

*Proof.* It suffices to show that in inequality (B.4.1) one can replace the function  $\theta$  by the function

$$h(x) = \frac{3x^2}{2(x+3)}.$$

Hence, we have to prove that

$$\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) - h(x) \geq 0.$$

This is easily done by observing that  $\theta(0) = h(0)$ ,  $\theta'(0) = h'(0)$  and  $\theta''(0) = h''(0)$ . ■

The following Corollary is a direct consequence of Proposition B.4.2.

**Corollary B.4.3.** *(i) If  $(X_i)_{i \in [1, N]}$  are independent random variables such that  $\forall i \in [1, N]$ ,  $|X_i| \leq M$  and  $\mathbb{E}(X_i) = 0$ , then*

$$\mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^N X_i \right| > \lambda \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{\lambda^2}{2(b_N^2 + \frac{\lambda M}{3})} \right) \quad (\text{B.4.4})$$

*(ii) If  $(X_i)_{i \in [1, N]}$  are independent and identically distributed random variables such that  $\forall i \in [1, N]$ ,  $|X_i| \leq M$ ,  $\mathbb{E}(X_i) = 0$  and  $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$ , then*

$$\mathbb{P} \left( \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N X_i \right| > \lambda \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{N\lambda^2}{2(\sigma^2 + \frac{\lambda M}{3})} \right). \quad (\text{B.4.5})$$

# Bibliographie

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] D. Aldous. Stopping times and tightness. *Annals of Probability*, 6 :335–340, 1978.
- [3] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.
- [4] K.B. Athreya and P.E. Ney. *Branching Processes*. Springer edition, 1970.
- [5] R. Bellman and T.E. Harris. On age-dependent binary branching processes. *Annals of Mathematics*, 55 :280–295, 1952.
- [6] A.G. Bhatt and R.L. Karandikar. Invariant measures and evolution equations for Markov processes characterized via martingale problems. *The Annals of Probability*, 21(4) :2246–2268, 1993.
- [7] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, 1968.
- [8] E. Bishop and R.R. Phelps. The support functionals of a convex set. In Amer. Math. Soc., editor, *Proc. Sympos. Pure Math.*, volume 7, pages 27–35, Providence, 1963.
- [9] A. Bose and I. Kaj. Diffusion approximation for an age-structured population. *Annals of Applied Probabilities*, 5(1) :140–157, 1995.
- [10] A. Bose and I. Kaj. A scaling limit process for the age-reproduction structure in a markov population. *Markov Processes and Related Fields*, 6(3) :397–428, 2000.
- [11] D. Bosq and J.-P. Lecoutre. *Théorie de l'estimation fonctionnelle*. Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique et Centre d'Etudes des Programmes Economiques. Economica, 1987.
- [12] M. Bossy. *Vitesse de convergence d'algorithmes particulières stochastiques et application à l'équation de Burgers*. PhD thesis, Aix-en-Provence 1, 1995.
- [13] M. Bossy and D. Talay. A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Mathematics of Computation*, 66(217) :157–192, 1997.
- [14] M. Briane and G. Pagès. *Théorie de l'intégration*. Les grands cours Vuibert. Vuibert, 2 edition, 2000. Le livre avec lequel j'ai fait mes premiers pas en théorie de la mesure!
- [15] S. Busenberg and M. Iannelli. A class of nonlinear diffusion problems in age-dependent population dynamics. *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, 7(5) :501–529, 1983.
- [16] A. Calsina and S. Cuadrado. A model for the adaptive dynamics of the maturation age. *Ecological Modelling*, 133 :33–43, 2000.
- [17] A. Calsina and S. Cuadrado. Small mutation rate and evolutionarily stable strategies in infinite dimensional adaptive dynamics. *Journal of Mathematical Biology*, 48 :135–159, 2004.
- [18] N. Champagnat. Convergence and existence for polymorphic adaptive dynamics jump and degenerate diffusion models. Preprint Laboratoire MODAL'X 03/7, 03 2003.
- [19] N. Champagnat. *Etude mathématique de modèles stochastiques d'évolution issus de la théorie écologique des dynamiques adaptatives*. PhD thesis, Université Paris X - Nanterre, 2004.
- [20] N. Champagnat. A microscopic interpretation for adaptative dynamics trait substitution sequence models. *Stochastic Processes and their Applications*, 2006.
- [21] N. Champagnat, R. Ferrière, and S. Méléard. Individual-based probabilistic models of adaptative evolution and various scaling approximations. In *Proceedings of the 5th seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, Probability in Progress Series, Ascona, Suisse, 2006. Birkhauser.

- [22] N. Champagnat, R. Ferrière, and S. Méléard. Unifying evolutionary dynamics : from individual stochastic processes to macroscopic models via timescale separation. *Theoretical Population Biology*, 2006.
- [23] N. Champagnat and S. Méléard. Invasion and adaptive evolution for individual-based spatially structured populations. Prepublication 1118 du WIAS.
- [24] B. Charlesworth. *Evolution in Age structured Population*. Cambridge University Press, 2 edition, 1994.
- [25] P. Constantin and J. Wu. Statistical solutions of the Navier-Stokes equations on the phase space of vorticity and the inviscid limit. *Journal of Mathematical Physics*, 38(6) :3031–3045, 06 1997.
- [26] K.S. Crump and C.J. Mode. A general age-dependent branching process i. *J. Math. Anal. Appl.*, 24 :494–508, 1968.
- [27] K.S. Crump and C.J. Mode. A general age-dependent branching process ii. *J. Math. Anal. Appl.*, 25 :8–17, 1969.
- [28] I. Daubechies. *Ten lectures on Wavelets*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [29] D. A. Dawson. Measure-valued markov processes. In Springer, editor, *Ecole d’Eté de probabilités de Saint-Flour XXI*, volume 1541 of *Lectures Notes in Math.*, pages 1–260, New York, 1993.
- [30] D.A. Dawson, L.G. Gorostiza, and Z. Li. Nonlocal branching superprocesses and some related models. *Acta Applicandae Mathematicae*, 74 :93–112, 2002.
- [31] D.A. Dawson and J. Gärtner. Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions. *Stochastics*, 20 :247–308, 1987.
- [32] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviation Techniques and Applications*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1993.
- [33] A. Van der Vaart. *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, 1998.
- [34] U. Dieckmann, M. Heino, and K. Parvinen. The adaptive dynamics of function-valued traits. *Journal of Theoretical Biology*. in press.
- [35] U. Dieckmann and R. Law. The dynamical theory of coevolution : a derivation from stochastic ecological processes. *Journal of Mathematical Biology*, 34 :579–612, 1996.
- [36] R.A. Doney. Age-dependent birth and death processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, 22 :69–90, 1972.
- [37] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, 1994.
- [38] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard. Wavelet shrinkage : Asymptopia ? *Journal of the Royal Statistical Society B*, 57 :301–369, 1995. with discussion.
- [39] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard. Density estimation by wavelet thresholding. *The Annals of Statistics*, 24(2) :508–539, 1996.
- [40] A. Dvoretzky, J. Kiefer, and J. Wolfowitz. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *Annals of Mathematical Statistics*, 27 :642–669, 1956.
- [41] E.B. Dynkin. Branching particle systems and superprocesses. *Annals of Probability*, month=, year=1991, volume=19, number=, pages=1157-1194, note=.
- [42] I. Ekeland and R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [43] B. Ernande, U. Dieckman, and M. Heino. Adaptive changes in harvested populations : plasticity and evolution of age and size at maturation. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 271 :415–423, 2004.
- [44] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processus, Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [45] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.
- [46] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 1 and 2. Wiley, 1971.

- [47] H. Von Foerster. Some remarks on changing populations. In Grune & Stratton, editor, *The Kinetics of Cellular Proliferation*, pages 382–407, New York 1959.
- [48] J. Fontbona. Uniqueness for a weak non linear evolution equation and large deviations for diffusing particles with electrostatic repulsion. *Stoch. Proc. Appl.*, 112 :119–144, 2004.
- [49] N. Fournier and S. Méléard. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4) :1880–1919, 2004.
- [50] M.I. Freidlin and A. Ventzell. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1984.
- [51] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall INC., 1975.
- [52] F. Galton and H.W. Watson. On the probability of the extinction of families. *J. Anthropol. Inst. Great B. and Ireland*, 4 :138–144, 1874.
- [53] F. Golse. Polycopié de cours sur les edp. <http://www.dma.ens.fr/~golse/Cours/cours.html>, 2003.
- [54] X. Gourdon. *Les maths en tête*. Ellipse, 1994.
- [55] C. Graham and S. Méléard. An upper bound of large deviations for a generalized star-shaped loss network. *Markov Processes and Related Fields*, 3(2) :199–224, 1997.
- [56] M.E. Gurtin and R.C. MacCamy. Nonlinear age-dependent population dynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 54 :281–300, 1974.
- [57] T.E. Harris. *The Theory of Branching Processes*. Springer, Berlin, 1963.
- [58] S.M. Henson. A continuous age-structured insect population model. *Journal of Mathematical Biology*, 39 :217–243, 1999.
- [59] D.D. Ho, A.U. Neumann, A.S. Perelson, W. Chen, J.M. Leonard, and M. Markowitz. Rapid turnover of plasma virions and CD4 lymphocytes in HIV-1 infection. *Nature*, (373) :123–126, 01 1995.
- [60] J. Hofbauer and R. Sigmund. Adaptive dynamics and evolutionary stability. *Appl. Math. Letters*, 3 :75–79, 1990.
- [61] W. Härdle, G. Kerkycharian, D. Picard, and A. Tsybakov. *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*, volume 129 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer, New York, 1987.
- [62] R.B. Israel. Existence of phase transitions for long-range interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 43 :59–68, 1975.
- [63] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [64] P. Jagers. A general stochastic model for population development. *Skand. Aktuarietidskr*, 52 :84–103, 1969.
- [65] A. Jakubowski. On the skorokhod topology. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 22(3) :263–285, 1986.
- [66] A. Joffe and M. Métivier. Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching processes. *Advances in Applied Probability*, 18 :20–65, 1986.
- [67] B. Jourdain. Diffusion processes associated with nonlinear evolution equations for signed initial measures. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 2(1) :69–91, 2000.
- [68] I. Kaj and S. Sagitov. Limit processes for age-dependent branching particle systems. *Journal of Theoretical Probability*, 11(1) :225–257, 1998.
- [69] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1991.
- [70] D.G. Kendall. Stochastic processes and population growth. *J. Roy. Statist. Sec., Ser. B*, 11 :230–264, 1949.
- [71] G. Kerkycharian and D. Picard. Thresholding algorithms, maxisets and well-concentrated bases. *Test - Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, 9(2) :283–344, 2000.
- [72] G. Kerkycharian and D. Picard. Regression in random design and warped wavelets. *Bernoulli*, 10(6) :1053–1105, 2004.
- [73] C. Kipnis and C. Léonard. Grandes déviations pour un système hydrodynamique asymétrique de particules indépendantes. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 31 :223–248, 1995.

- [74] E. Kisdi. Evolutionary branching under asymmetric competition. *J. Theor. Biol.*, 3(197) :149–162, 1999.
- [75] H. Kunita. Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. In Springer, editor, *Ecole d’Eté de probabilités de Saint-Flour XII*, volume 1097 of *Lectures Notes in Math.*, pages 143–303, 1982.
- [76] T.G. Kurtz. Approximation of population processes. *Soc. for Ind. and Appl. Math.*, 1981.
- [77] M. Ledoux. *The Concentration of Measure Phenomenon*, volume 89 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2001.
- [78] C. Léonard. On large deviations for particle systems associated with spatially homogeneous boltzmann type equations. *Probability Theory and Related Fields*, 101 :1–44, 1995.
- [79] A. J. Lotka. The stability of the normal age distribution. *Proc. Nat. Acad. Science*, 8 :339–345, 1922.
- [80] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 2 edition, 1999.
- [81] T.R. Malthus. *An Essay on the Principle of Population*. J. Johnson St. Paul’s Churchyard, 1798.
- [82] P. Marcati. On the global stability of the logistic age dependent population growth. *Journal of Mathematical Biology*, 15(2) :215–226, 1982.
- [83] C. Marchioro and M. Pulvirenti. Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory. *Commun. Math. Phys.*, 84 :483–503, 1982.
- [84] P. Marrow, R. Law, and C. Cannings. The coevolution of predator-prey interactions : Esss and red queen dynamics. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 250 :133–141, 1992.
- [85] A.G. McKendrick. Applications of mathematics to medical problems. *Proc. Edin. Math.Soc.*, 54 :98–130, 1926.
- [86] P.B. Medawar. Old age and natural death. *Mod. Q.*, 1 :30–56, 1946. Reprinted in *The Uniqueness of the Individual* (1957), pp. 17-43. London : Methuen.
- [87] S. Méléard. Convergence of the fluctuations for interacting diffusions with jumps associated with boltzmann equations. *Stochastics and Stochastics Reports*, 63 :195–225, 1998.
- [88] S. Méléard. A trajectorial proof of the vortex method for the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Annals of Applied Probability*, 10(4) :1197–1211, 2000.
- [89] S. Méléard. Monte-Carlo approximations of the solution of two-dimensional Navier-Stokes equations with finite measure initial data. *P.T.R.F.*, 121(3) :367–388, 2001.
- [90] S. Méléard. Stochastic particle approximations for two-dimensional Navier-Stokes equations. Preprint Modal’X, II Workshop on Dynamics and Randomness, 12 2002.
- [91] S. Méléard and S. Roelly. Sur les convergences étroite ou vague de processus à valeurs mesures. *C.R.Acad.Sci.Paris, Serie I*, 317 :785–788, 1993.
- [92] S. Méléard. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems, McKean-Vlasov and Boltzmann models. In *CIME Lectures*, volume 1627 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 45–95. Springer, 1996.
- [93] M. Métivier. *Semimartingales*. de Gruyter, Berlin, New-York, 1982.
- [94] M. Métivier. Convergence faible et principe d’invariance pour des martingales à valeurs dans des espaces de sobolev. *Annales de l’IHP*, 20(4) :329–348, 1984.
- [95] J.A.J. Metz, S.A.H. Geritz, G. Meszéna, F.A.J. Jacobs, and J.S. Van Heerwaarden. Adaptive dynamics, a geometrical study of the consequences of nearly faithful reproduction. *S.J. Van Strien & S.M. Verduyn Lunel (ed.), Stochastic and Spatial Structures of Dynamical Systems*, 45 :183–231, 1996.
- [96] Y. Meyer. *Ondelettes*, volume 1 to 3. Hermann, 1990.
- [97] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. Stability of markovian processes iii : Foster-lyapunov criteria for continuous-time processes. *Advances in Applied Probability*, 25(3) :518–548, 1993.
- [98] F. Milinazzo and P.G. Saffman. The calculation of large Reynolds number two-dimensional flow using discrete vortices with random walk. *Journal of Computational Physics*, 23 :380–392, 04 1977.

- [99] S. Mischler, B. Perthame, and L. Ryzhik. Stability in a nonlinear population maturation model. *Mathematical Models & Methods in Applied Science*, 12 :1–22, 2002.
- [100] J.D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 19 of *Biomathematics*. Springer, 1993. Third Edition.
- [101] G. Nason, A. Kovac, and M. Maechler. `wavethresh` R-package. <http://cran.r-project.org/src/contrib/Descriptions/wavethresh.html>.
- [102] K. Oelschläger. Limit theorem for age-structured populations. *The Annals of Probability*, 1990.
- [103] K. Parvinen, U. Dieckmann, and M. Heino. Function-valued adaptive dynamics and the calculus of variations. *Journal of Mathematical Biology*, 52 :1–26, 2006.
- [104] B. Perthame and L. Ryzhik. Exponential decay for the fragmentation or cell-division equation. *Journal of the Differential Equations*, 210 :155–177, 2005.
- [105] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, 1992.
- [106] S.T. Rachev. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. John Wiley & Sons, 1991.
- [107] M.M. Rao and Z.D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*. M. Dekker New York, 1991.
- [108] S. Roelly. A criterion of convergence of measure-valued processes : Application to measure branching processes. *Stochastics*, 17 :43–65, 1986.
- [109] M. Rotenberg. Transport theory for growing cell populations. *Journal of Theoretical Biology*, 103 :181–199, 1983.
- [110] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, third edition edition, 1987.
- [111] F.R. Sharpe and A.J. Lotka. A problem in age distribution. *Philos. Mag.*, 21 :435–438, 1911.
- [112] W. Solomon. Representation and approximation of large population age distributions using poisson random measures. *Stochastic Processes and their Applications*, 26 :237–255, 1987.
- [113] S.C. Stearns. *The Evolution of Life Histories*. Oxford University Press, 1993.
- [114] A.S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *Ecole d’Ete de Probabilités de Saint-Flour XIX*, volume 1464 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 165–251, Berlin, 1991. Springer.
- [115] B. Taborsky, U. Dieckmann, and M. Heino. Unexpected discontinuities in life-history evolution under size-dependent mortality. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 270 :713–721, 2003.
- [116] D. Talay and L. Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 8(4) :94–120, 1990.
- [117] D. Talay and O. Vaillant. A stochastic particle method with random weights for the computation of statistical solutions of McKean-Vlasov equations. *The Annals of Applied Probability*, 13(1) :140–180, 2003.
- [118] H.R. Thieme. *Mathematics in Population Biology*. Princeton Series in Theoretical and Computational Biology. Princeton University Press, Simon A. Levin edition, 2003.
- [119] O. Vaillant. *Une méthode particulaire stochastique à poids aléatoires pour l’approximation de solutions statistiques d’équations de McKean-Vlasov-Fokker-Planck*. PhD thesis, Université de Provence, Marseille, France, 2000.
- [120] P.F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10 :113–121, 1838.
- [121] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, 2003.
- [122] M.J. Vishik and A.V. Fursikov. *Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics*. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1980.
- [123] F.J.S. Wang. A central limit theorem for age- and density-dependent population processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 5 :173–193, 1977.
- [124] G.F. Webb. *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, volume 89 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied mathematics*. Marcel Dekker, inc., New York - Basel, 1985.
- [125] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1966.
- [126] C. Zuily and H. Queffélec. *Eléments d’analyse pour l’agrégation*. Masson, 1995.
- [127] D. Zwillinger. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, 3 edition, 1997.

**TITRE : Modèles particuliers stochastiques pour des problèmes d'évolution adaptative et pour l'approximation de solutions statistiques**

---

**RÉSUMÉ :** Cette thèse se divise en deux parties indépendantes. Dans la première, nous considérons un modèle microscopique individu-centré pour décrire une population structurée par traits et âges. Nous étudions l'écologie de ce système (problèmes de dynamique de populations) dans une asymptotique de grandes populations. Sous certaines renormalisations, le processus microscopique converge vers la solution à valeurs mesures d'une équation d'évolution déterministe. Un théorème central limite et les déviations exponentielles associées à cette convergence sont étudiés. Nous appliquons ensuite ces résultats pour établir des généralisations aux populations structurées par âge de modèles d'évolution tirés de la récente théorie des dynamiques adaptatives. Ces derniers modélisent l'évolution de la structure en traits sur des grandes échelles de temps et sous les hypothèses de mutations rares (éventuellement petites) et de grande populations. Dans la seconde partie de la thèse, nous considérons des équations aux dérivées partielles de McKean-Vlasov et de Navier-Stokes 2D avec conditions initiales aléatoires. La loi des solutions, qui sont alors des variables aléatoires, est appelée solution statistique. En nous basant sur une approche probabiliste de ces équations aux dérivées partielles, nous proposons de nouvelles approximations particulières stochastiques avec ondelettes pour les moments d'ordre 1 des solutions statistiques. Nous étudions leurs vitesses de convergence et montrons qu'elles améliorent les vitesses des méthodes existantes.

---

**MOTS CLÉS :** Processus de naissances et de morts, systèmes de particules en interaction, dynamique des populations, structure d'âge, asymptotique des grandes populations, théorème central limite, grandes déviations, dynamiques adaptatives, solutions statistiques, Navier-Stokes 2D, McKean-Vlasov, ondelettes, schéma de discrétisation numérique.

---

**TITLE : Stochastic Particle Models for Problems of Adaptive Evolution and for the Approximations of Statistical Solutions**

---

**SUMMARY :** This thesis is divided into two independent parts. In the first one, we are interested in a microscopic individual-based model for the description of a population structured by traits and ages. We study the ecology of the system (population dynamics problems) in a large population asymptotics. Under appropriate renormalizations, the microscopic process converges to the measure solution of a deterministic evolution equation. A Central Limit Theorem and the exponential deviations of this convergence are studied. These results are used to generalize some evolution models from the recent theory of adaptive dynamics to age-structured populations. These models describe the evolution of the trait structure of the population on large time scales and under the assumptions of rare (and possibly small) mutations and large populations. In the second part of this thesis, we consider McKean-Vlasov and 2D Navier-Stokes partial differential equations with random initial conditions. The law of the solutions, which are then random variables, is called statistical solution. Using a probabilistic approach for these equations, we propose original stochastic wavelet particle approximations for the moments of order 1 of the statistical solutions. We study the convergence rates of the proposed procedures, and show that they improve the ones of existing methods.

---

**KEYWORDS :** Birth and death processes, interacting particle systems, population dynamics, age structure, large population asymptotics, central limit theorem, large deviations, adaptive dynamics, statistical solutions, 2D Navier-Stokes, McKean-Vlasov, wavelets, numerical discretization scheme.

---

**DISCIPLINE :** Mathématiques appliquées et applications des mathématiques.

---

Ecole doctorale CONNAISSANCES, LANGAGES, MODÉLISATIONS,  
EQUIPE MODAL'X, UNIVERSITÉ PARIS 10, 200, AV. DE LA RÉPUBLIQUE, 92001 NANTERRE CEDEX.