Modèles particulaires stochastiques pour des problèmes d'évolution adaptative et pour l'approximation de solutions statistiques

Tran Viet Chi

MODAL'X - Université Paris 10 Nanterre

Le 13 décembre 2006

Un modèle microscopique de population logistique structurée par âge

Populations structurées par traits et âge : application aux dynamiques adaptatives

Approximations des solutions statistiques d'EDP à conditions initiales aléatoires

Un modèle microscopique de population logistique structurée par âge

Populations structurées par traits et âge : application aux dynamiques adaptatives

Approximations des solutions statistiques d'EDP à conditions initiales aléatoires

Motivations

- populations structurées : les individus sont caractérisés par des variables qui affectent leurs capacités reproductives et leurs survies (traits, âges...)
- modèle de population discrète, basé sur les dynamiques individuelles,
- âge : modélisation des histoires de vie et applications en *biologie*, en *écologie* (S. Méléard, R. Ferrière), applications en *épidémiologie* (H. De Arazoza, P. Bertail, S. Clémençon)

Motivations

- populations structurées : les individus sont caractérisés par des variables qui affectent leurs capacités reproductives et leurs survies (traits, âges...)
- modèle de population discrète, basé sur les dynamiques individuelles,
- âge : modélisation des histoires de vie et applications en *biologie*, en *écologie* (S. Méléard, R. Ferrière), applications en *épidémiologie* (H. De Arazoza, P. Bertail, S. Clémençon)

But :

- Description d'un modèle simple de population particulaire, stochastique et structurée par âge ; expliquer le comportement en temps "grand" et en grande population.
- Considérer des modèles d'évolution pour des populations structurées en traits et en âge : exemples et approximations obtenues en séparant les échelles de temps de l'écologie et de l'évolution.

Population logistique structurée par âge

Dynamique :

- Chaque individu d'âge $a \in \mathbb{R}_+$ dans la population de taille N :
  1. se reproduit de façon asexuée au taux $b(a)$.
  2. vieillit avec la vitesse 1
  3. meurt au taux $d(a) + \eta N$,

Population logistique structurée par âge

Dynamique :

- Chaque individu d'âge $a \in \mathbb{R}_+$ dans la population de taille N :
  1. se reproduit de façon asexuée au taux $b(a)$.
  2. vieillit avec la vitesse 1
  3. meurt au taux $d(a) + \eta N$,
- Généralisation à des âges vectoriels à croissance non linéaire, à des taux de morts non logistiques,

Population logistique structurée par âge

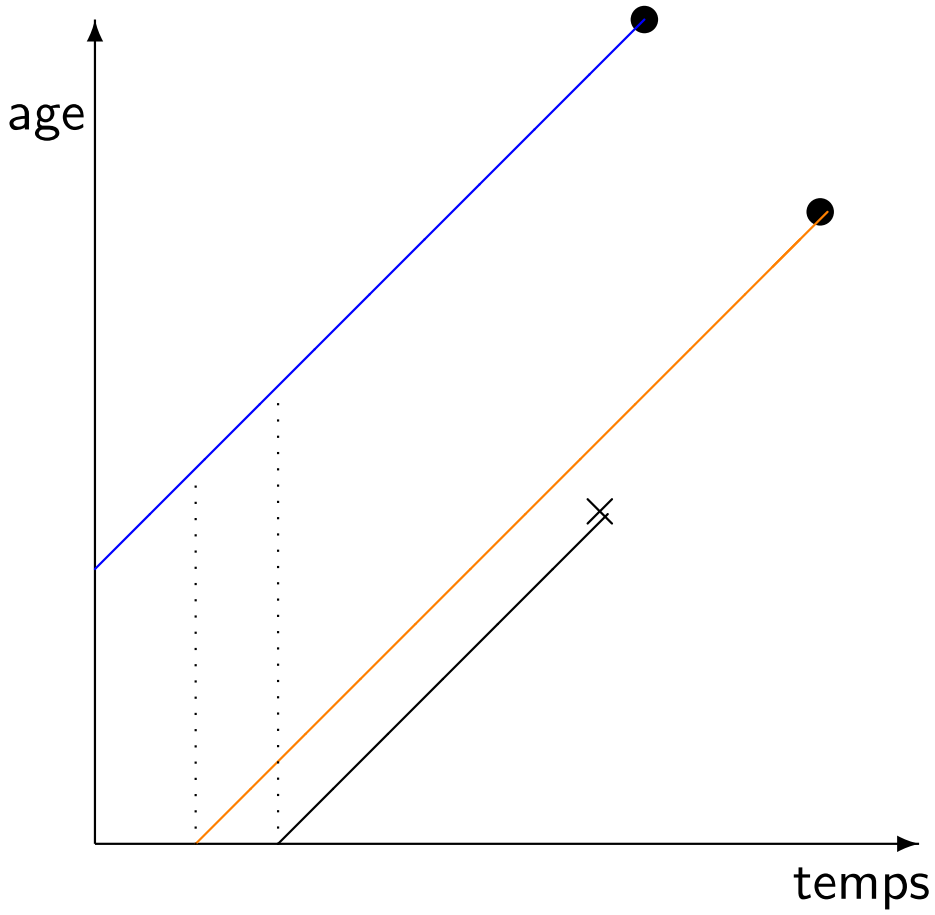
Dynamique :

- Chaque individu d'âge $a \in \mathbb{R}_+$ dans la population de taille N :
  1. se reproduit de façon asexuée au taux $b(a)$.
  2. vieillit avec la vitesse 1
  3. meurt au taux $d(a) + \eta N$,
- Généralisation à des âges vectoriels à croissance non linéaire, à des taux de morts non logistiques,

Historique :

- Processus de branchement structurés par âge : Bellman Harris (1952) Athreya Ney (70)
- Processus de naissances et de morts structuré par âge : Kendall (49), Crump Mode (68-69), Jagers (69), Doney (72)
- Interactions : Wang (77) Solomon (87) Oelschläger (90)

Système de particules



Dynamique de la population globale

$$Z_t(da) = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{a_i(t)}$$

Dynamique de la population globale

$$Z_t(da) = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{a_i(t)}$$

Description par une EDS dirigée par une mesure aléatoire de Poisson (Fournier Méléard (03), Champagnat *et al.* (06))

Dynamique de la population globale

$$Z_t{}^n(da) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_t{}^n} \delta_{a_i(t)}$$

Description par une EDS dirigée par une mesure aléatoire de Poisson (Fournier Méléard (03), Champagnat *et al.* (06))

Renormalisation en grande population

- Populations initiales de tailles proportionnelle à $n \in \mathbb{N}^*$
- Poids des individus renormalisé par $1/n$
- $Z_0^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_0^n} \delta_{a_i(0)} \Rightarrow \xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$ en loi,
- $d(a) + \eta N_t \Longrightarrow d(a) + \eta\langle Z_t^n, 1\rangle$.

Propriétés de moments et de martingales

Sous de bonnes conditions de moment pour Z_0^n, il existe une unique solution forte $(Z_t^n)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour l'EDS renormalisée par $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés de moments et de martingales

Sous de bonnes conditions de moment pour Z_0^n, il existe une unique solution forte $(Z_t^n)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour l'EDS renormalisée par $n \in \mathbb{N}^*$.

et $\forall f \ : \ (a,s) \mapsto f_s(a)$ de $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$,

$$\langle Z_t^n, f_t\rangle = \langle Z_0^n, f_0\rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Big[\frac{\partial f_s}{\partial a}(a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(a) + f_s(0)b(a) - f_s(a)\left(d(a) + \eta\langle Z_s^n, 1\rangle\right)\Big] Z_s^n(da)\, ds + M_t^{n,f}$$

où $M^{n,f}$ définit une martingale de carré intégrable issue de 0,

Propriétés de moments et de martingales

Sous de bonnes conditions de moment pour Z_0^n, il existe une unique solution forte $(Z_t^n)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour l'EDS renormalisée par $n \in \mathbb{N}^*$.

et $\forall f \ : \ (a,s) \mapsto f_s(a)$ de $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$,

$$\langle Z_t^n, f_t\rangle = \langle Z_0^n, f_0\rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Big[\frac{\partial f_s}{\partial a}(a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(a) + f_s(0)b(a) - f_s(a)\left(d(a) + \eta\langle Z_s^n, 1\rangle\right)\Big] Z_s^n(da)\, ds + M_t^{n,f}$$

où $M^{n,f}$ définit une martingale de carré intégrable issue de 0, et de variation quadratique prévisible :

$$\langle M^{n,f}\rangle_t = \frac{1}{n}\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \left[f_s^2(0)b(a) + f_s^2(a)\left(d(a) + \eta\langle Z_s^n, 1\rangle\right)\right] Z_s^n(da)\, ds.$$

Limite en grande population

Sous de bonnes hypothèses de moments pour $(Z_0^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et si $(Z_0^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement en loi vers $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$

$(Z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+))$ vers $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+))$ tel que : $\forall f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$,

$$\langle \xi_t, f_t \rangle = \langle \xi_0, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \left[\frac{\partial f_s}{\partial a}(a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(a) \right.$$
$$\left. + \, f_s(0) b(a) - f_s(a) \left(d(a) + \eta \langle \xi_s, 1 \rangle \right) \right] \xi_s(da) \, ds.$$

Limite en grande population

Sous de bonnes hypothèses de moments pour $(Z_0^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et si $(Z_0^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement en loi vers $\xi_0 \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+)$

$(Z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+))$ vers $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+))$ tel que : $\forall f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$,

$$\langle \xi_t, f_t \rangle = \langle \xi_0, f_0 \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \left[\frac{\partial f_s}{\partial a}(a) + \frac{\partial f_s}{\partial s}(a) \right.$$
$$\left. + \, f_s(0) b(a) - f_s(a) \left(d(a) + \eta \langle \xi_s, 1 \rangle \right) \right] \xi_s(da) \, ds.$$

Il existe une unique solution à cette équation.

Equation de Gurtin-McCamy

Lorsque ξ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, les marginales ξ_t pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Equation de Gurtin-McCamy

Lorsque ξ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, les marginales ξ_t pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

La famille des densités vérifie :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m}{\partial t}(a,t)+\frac{\partial m}{\partial a}(a,t) = -m(a,t)\left(d(a)+\eta M_t\right)\\
&m(0,t) = \int_{\mathbb{R}_+} m(a,t)b(a)da, \quad M_t = \int_{\mathbb{R}_+} m(a,t)da,\\
&m(a,0) = m_0(a).
\end{aligned}$$

McKendrick (26) Von Foerster (59), Gurtin-MacCamy (74)

Equation de Gurtin-McCamy

Lorsque ξ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, les marginales ξ_t pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

La famille des densités vérifie :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m}{\partial t}(a,t)+\frac{\partial m}{\partial a}(a,t) = -m(a,t)\left(d(a)+\eta M_t\right)\\
&m(0,t) = \int_{\mathbb{R}_+} m(a,t)b(a)da, \quad M_t = \int_{\mathbb{R}_+} m(a,t)da,\\
&m(a,0) = m_0(a).
\end{aligned}$$

McKendrick (26) Von Foerster (59), Gurtin-MacCamy (74)

Il existe une unique solution classique à cette équation si $m_0(a) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ (expression explicite).

Equation de Gurtin-McCamy

Lorsque ξ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, les marginales ξ_t pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

La famille des densités vérifie :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m}{\partial t}(a,t)+\frac{\partial m}{\partial a}(a,t) = -m(a,t)\left(d(a)+\eta M_t\right)\\
&m(0,t) = \int_{\mathbb{R}_+} m(a,t)b(a)da, \quad M_t = \int_{\mathbb{R}_+} m(a,t)da,\\
&m(a,0) = m_0(a).
\end{aligned}$$

McKendrick (26) Von Foerster (59), Gurtin-MacCamy (74)

Il existe une unique solution classique à cette équation si $m_0(a) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ (expression explicite).

Comportement en temps long : Marcati (82) Busenberg Ianelli (83) Webb (85).

Comportement en temps long dans le cas sur-critique

Cas sur-critique : $\int_{\mathbb{R}_+} b(a) \exp\left(-\int_0^a d(\alpha) d\alpha\right) da > 1$, alors :

$$\lim_{t \to +\infty} m(a,t) =: \widehat{m}(a).$$

Comportement en temps long dans le cas sur-critique

Cas sur-critique : $\int_{\mathbb{R}_+} b(a) \exp\left(-\int_0^a d(\alpha) d\alpha\right) da > 1$, alors :

$$\lim_{t \to +\infty} m(a,t) =: \widehat{m}(a).$$

Théorème Central Limite : sur $[0, T]$

Comportement en temps long dans le cas sur-critique

Cas sur-critique : $\int_{\mathbb{R}_+} b(a) \exp\left(-\int_0^a d(\alpha) d\alpha\right) da > 1$, alors :

$$\lim_{t \to +\infty} m(a,t) =: \widehat{m}(a).$$

Théorème Central Limite : sur $[0, T]$

En particulier, Z^n "entre" dans un voisinage de $\widehat{m}(a)da$ au bout d'un temps en $\log n$.

Comportement en temps long dans le cas sur-critique

Cas sur-critique : $\int_{\mathbb{R}_+} b(a) \exp\left(-\int_0^a d(\alpha) d\alpha\right) da > 1$, alors :

$$\lim_{t \to +\infty} m(a,t) =: \widehat{m}(a).$$

Théorème Central Limite : sur $[0, T]$

En particulier, Z^n "entre" dans un voisinage de $\widehat{m}(a)da$ au bout d'un temps en $\log n$. Mais :

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in \mathbb{R}_+, \langle Z_t^n, 1 \rangle = 0\right) = 1.$$

Déviations exponentielles

$T > 0$. Pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{D}([0,T],(\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+),w))$,

$$\begin{aligned} -\inf_{z\in\mathring{B}\cap\mathfrak{G}} \mathcal{I}^T_{\xi_0}(z) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\mathbb{P}(Z^n\in B) \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\mathbb{P}(Z^n\in B) \leq -\inf_{z\in\bar{B}} \mathcal{I}^T_{\xi_0}(z). \end{aligned}$$

La minoration est locale, mais $\mathfrak{G}$ contient ξ.

Déviations exponentielles

$T > 0$. Pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{D}([0,T],(\mathcal{M}_F(\mathbb{R}_+),w))$,

$$\begin{aligned} -\inf_{z\in \mathring{B}\cap\mathfrak{G}} \mathcal{I}^T_{\xi_0}(z) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(Z^n \in B) \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(Z^n \in B) \leq -\inf_{z\in \bar{B}} \mathcal{I}^T_{\xi_0}(z). \end{aligned}$$

La minoration est locale, mais $\mathfrak{G}$ contient ξ.

Adaptation des résultats de Freidlin et Ventzell (84) sur les temps de sortie de domaine.

Plan de la preuve

Tension exponentielle + majoration des grandes déviations :

- Dembo et Zeitouni (93),
- Difficulté liée aux masses non bornées :
  $\zeta_N^n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+, \quad \langle Z_t^n, 1 + |a| \rangle > N\}$
- Tension exponentielle du processus localisé $(Z^n_{\cdot \wedge \zeta_N^n})$: Dawson et Gärtner (87), Graham et Méléard (97),
- adaptation d'un argument de martingales exponentielles de DG (87) pour s'affranchir de la localisation, $\mathbb{P}(\zeta_N^n > T) \leq e^{-nL}$

Plan de la preuve

Tension exponentielle + majoration des grandes déviations :

- Dembo et Zeitouni (93),
- Difficulté liée aux masses non bornées :
  $\zeta_N^n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+, \quad \langle Z_t^n, 1 + |a| \rangle > N\}$
- Tension exponentielle du processus localisé $(Z^n_{\cdot \wedge \zeta_N^n})$: Dawson et Gärtner (87), Graham et Méléard (97),
- adaptation d'un argument de martingales exponentielles de DG (87) pour s'affranchir de la localisation, $\mathbb{P}(\zeta_N^n > T) \leq e^{-nL}$

Minoration des grandes déviations :

- Léonard (95), Kipnis Léonard (95).
- Par un théorème de Riesz sur les espaces d'Orlicz : Lien entre les trajectoires du domaine de $\mathcal{I}_{\xi_0}^T$ et des équations perturbées.
- Difficultés : Prendre en compte des événements différents, régulariser les perturbations pour appliquer un théorème de Girsanov (Lemme de Bishop-Phelps-Israel).

Un modèle microscopique de population logistique structurée par âge

Populations structurées par traits et âge : application aux dynamiques adaptatives

Approximations des solutions statistiques d'EDP à conditions initiales aléatoires

Populations structurées par traits et âge

On considère maintenant une population structurée par un âge $a \in \mathbb{R}_+$ et par un trait $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ qui se transmet héréditairement, sauf s'il se produit une mutation.

Applications en théorie de l'évolution :

- comment l'âge influence-t-il l'évolution du trait ?
- quelles *stratégies d'histoires de vie* vont se dégager ?
- Quelles sont les structures d'âge qui vont apparaître à l'équilibre pour un trait donné ?

Dynamique d'une population avec traits et âge

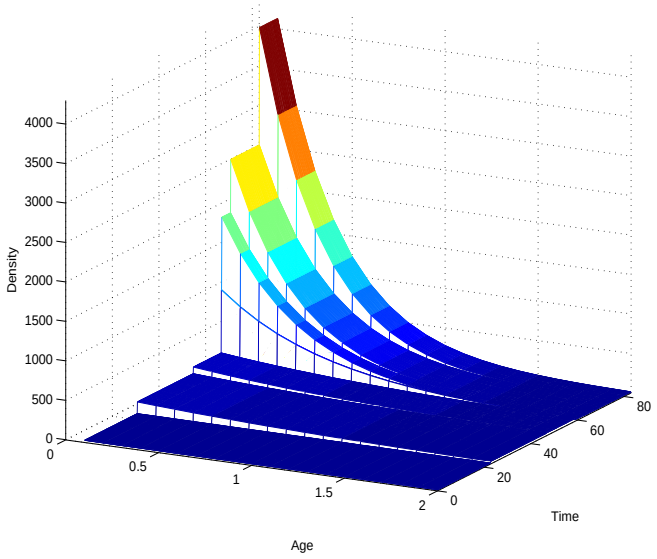
1. reproduction asexuée : taux $b(x, a)$
   - avec probabilité $p \in [0, 1]$: mutation et le nouveau trait est tiré dans une distribution $k(x, h)dh$,
   - avec probabilité $1 - p \in [0, 1]$: transmission héréditaire du trait du parent à ses descendants.
2. vieillissement avec vitesse 1,
3. mort au taux $d(x, a) + \int_{\mathcal{X} \times \mathbb{R}_+} U(x, y) Z(dy, da)$, où U est un noyau de compétition ne dépendant que des traits.

Exemple 1 :

- trait 1 : taille $x \in [0, 4]$,
- age $a \in \mathbb{R}_+$,
- $b(x, a) = x(4 - x)e^{-a}$,
- mutations gaussiennes avec $p \in [0, 1]$,
- taux de mort logistique : $d(x, a, N_t) = \frac{1}{4} + 0.001(4 - x)N_t$

Application aux dynamiques adaptatives

- Metz *et al.* (96), Champagnat (06)
- Hypothèses :
  1. Mutations rares : probabilité de mutation $u_n p$, $e^{-nV} << u_n << 1/(n \log n)$,
  2. Grandes populations,
  3. Non coexistence à long terme de deux traits différents,
- Séparation des échelles de temps.



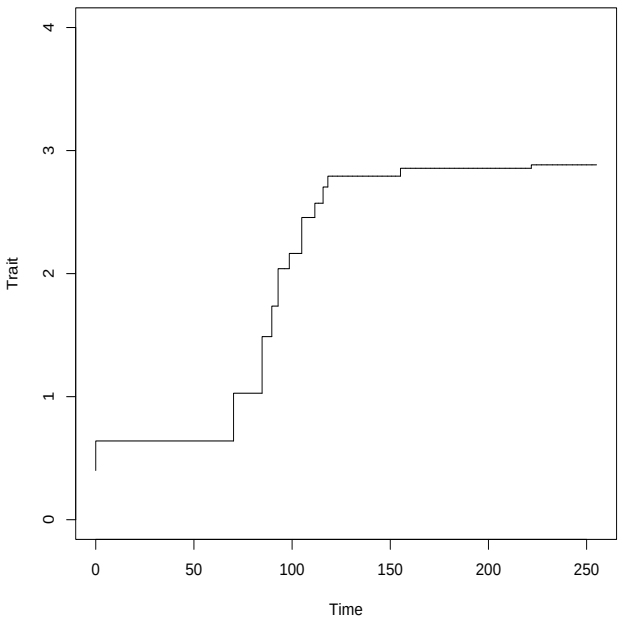
Processus de Trait Substitution Sequence structuré par âge

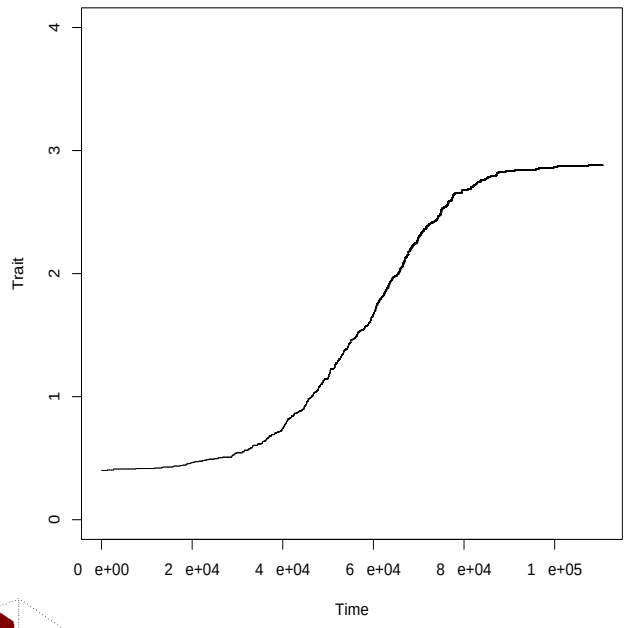
Générateur infinitésimal :

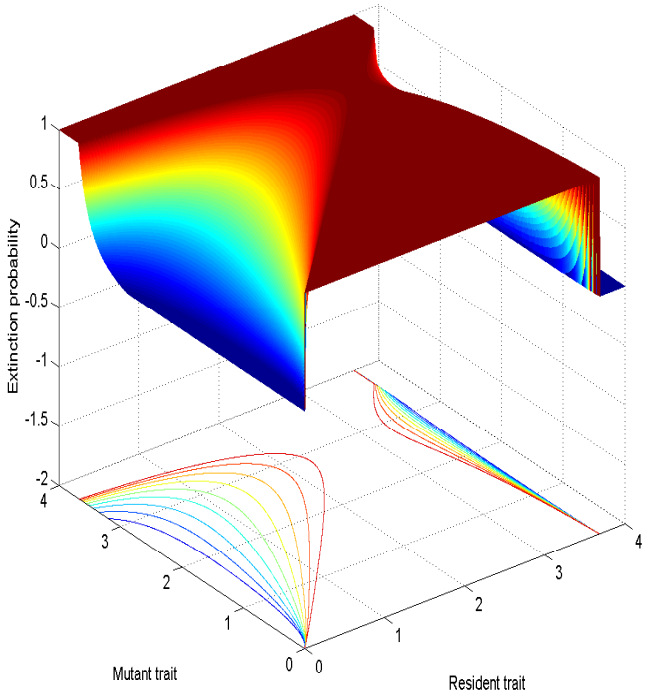
$$L\phi(x) = \int_{\mathcal{X}} (\phi(x+h) - \phi(x))$$
$$(1 - z_0(x+h, x))p \int_{\mathbb{R}_+} b(x,a)\widehat{m}(x,a)da\, k(x,h)P(dh).$$

- $p\, k(x,h) \int_0^{+\infty} b(x,a)\widehat{m}(x,a)da$: taux de génération d'un mutant de trait $x+h$ par une population de trait x à l'équilibre
- $(1 - z_0(x+h, x))$: *fitness* d'un mutant de trait $x+h$ dans la population de trait x. $z_0(x+h, x)$ est solution de l'équation suivante :

$$z = \int_0^{+\infty} e^{(z-1)\int_0^a b(y,\alpha)d\alpha} d(y,a,x) e^{-\int_0^a d(y,\alpha,x)d\alpha} da.$$


Trait
Time
0
1
2
3
4
0
50
100
150
200
250


Trait
Time
0
1
2
3
4
0 e+00
2 e+04
4 e+04
6 e+04
8 e+04
1 e+05


Extinction probability
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Mutant trait
Resident trait
0
1
2
3
4

Exemple 2

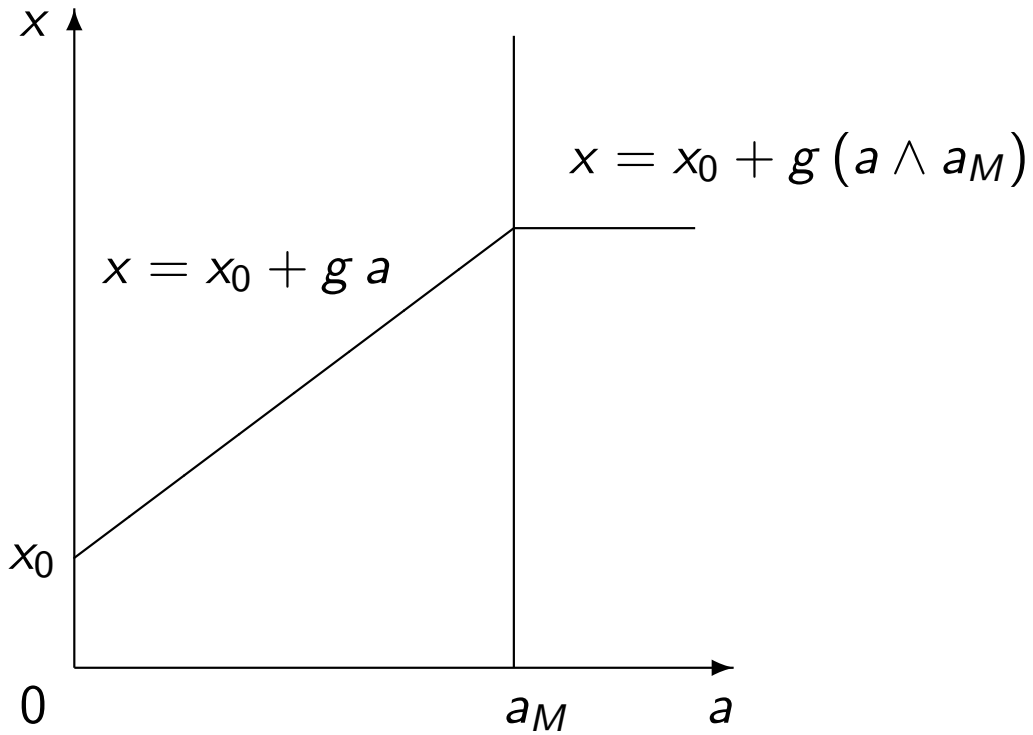
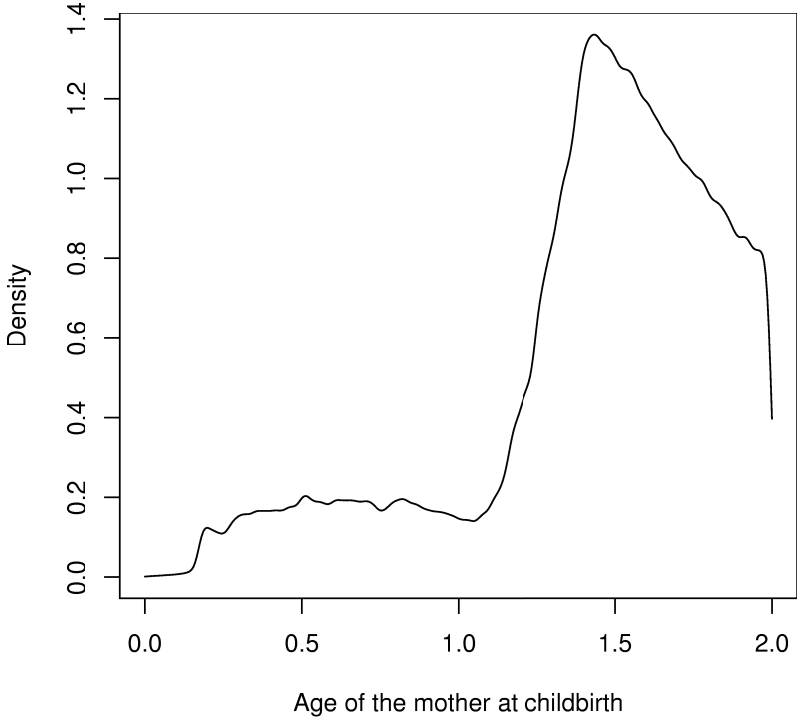
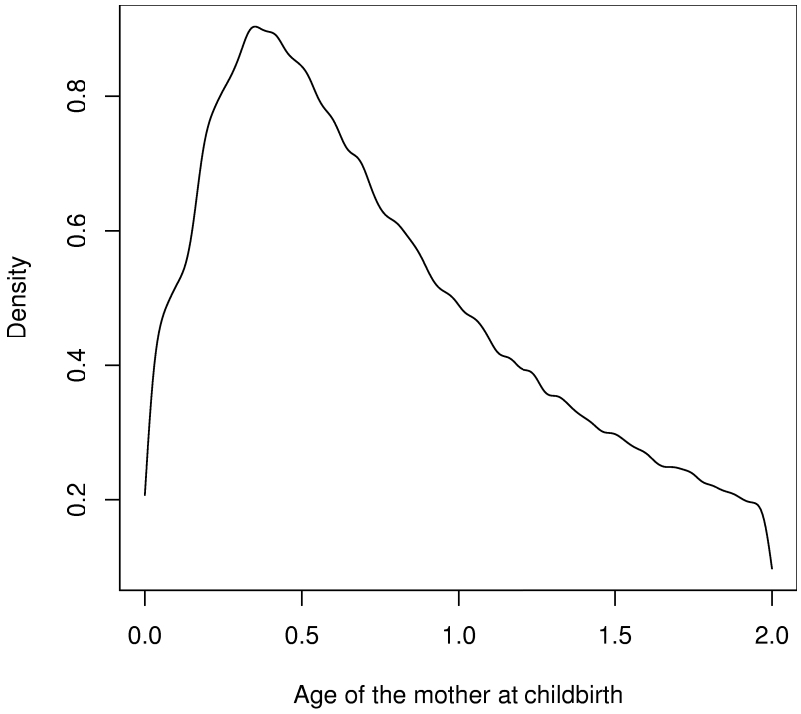


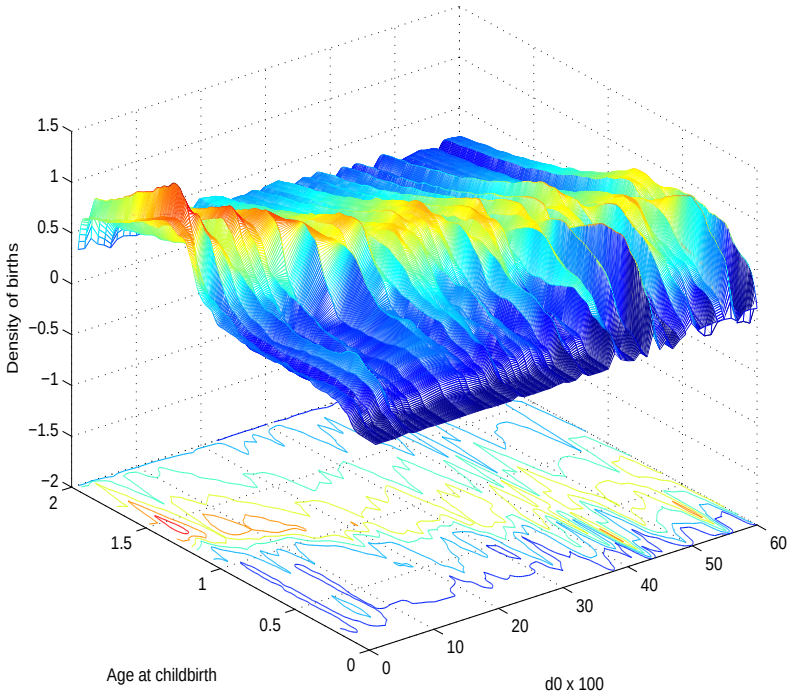
Fig.: *Taille x d'un individu de taux de croissance g et d'âge à maturité a_M en fonction de son âge.*

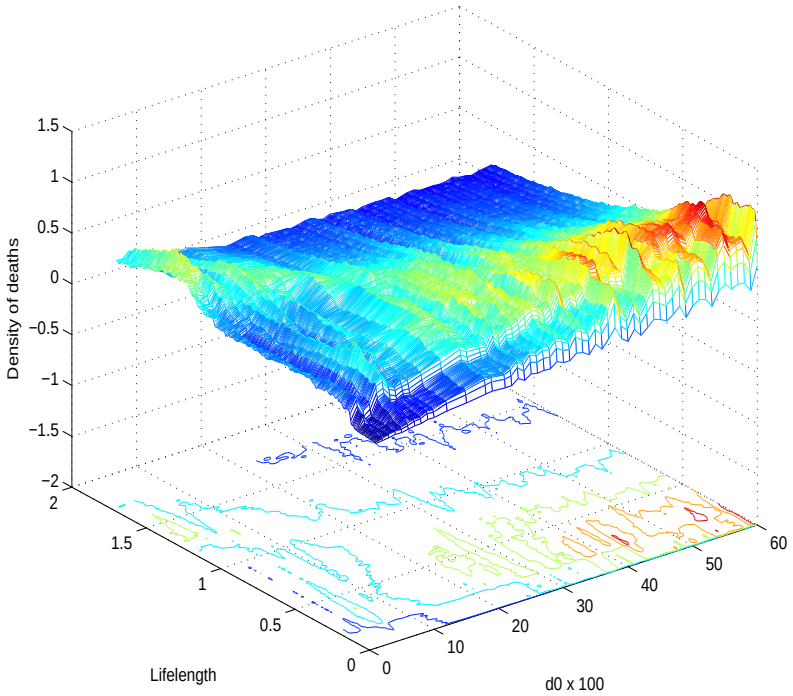
- taux de mort naturelle juvénile en $d_0 \times g$ où d_0 paramètre l'"hostilité" de l'environnement,
- compétition non logistique faisant intervenir un noyau privilégiant les individus de grande taille.

$d_0 = 3, 3.10^{-3}$, $d_0 = 1$


Density
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Age of the mother at childbirth


Density
0.2
0.4
0.6
0.8
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Age of the mother at childbirth


Density of births
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
2
1.5
1
0.5
0
Age at childbirth
0
10
20
30
40
50
60
d0 x 100


Density of deaths
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
2
1.5
1
0.5
0
Lifelength
0
10
20
30
40
50
60
d0 x 100

Un modèle microscopique de population logistique structurée par âge

Populations structurées par traits et âge : application aux dynamiques adaptatives

Approximations des solutions statistiques d'EDP à conditions initiales aléatoires

Solutions statistiques d'EDP

- EDP avec conditions initiales aléatoires,

Solutions statistiques d'EDP

- EDP avec conditions initiales aléatoires,
- flot aléatoire : sa loi est appelée solution statistique de l'EDP

Solutions statistiques d'EDP

- EDP avec conditions initiales aléatoires,
- flot aléatoire : sa loi est appelée solution statistique de l'EDP
- modélisation de phénomènes complexes, introduction de la notion d'incertitude sur la C.I.

Solutions statistiques d'EDP

- EDP avec conditions initiales aléatoires,
- flot aléatoire : sa loi est appelée solution statistique de l'EDP
- modélisation de phénomènes complexes, introduction de la notion d'incertitude sur la C.I.
- Vishik et Fursikov (1980) Constantin et Wu (1997) : Navier-Stokes 2D, outils analytiques

Solutions statistiques d'EDP

- EDP avec conditions initiales aléatoires,
- flot aléatoire : sa loi est appelée solution statistique de l'EDP
- modélisation de phénomènes complexes, introduction de la notion d'incertitude sur la C.I.
- Vishik et Fursikov (1980) Constantin et Wu (1997) : Navier-Stokes 2D, outils analytiques
- Marchioro-Pulvirenti (1982), Méléard (2000) : interprétation probabiliste avec CI déterministe, équation des vortex,

Solutions statistiques d'EDP

- EDP avec conditions initiales aléatoires,
- flot aléatoire : sa loi est appelée solution statistique de l'EDP
- modélisation de phénomènes complexes, introduction de la notion d'incertitude sur la C.I.
- Vishik et Fursikov (1980) Constantin et Wu (1997) : Navier-Stokes 2D, outils analytiques
- Marchioro-Pulvirenti (1982), Méléard (2000) : interprétation probabiliste avec CI déterministe, équation des vortex,
- Talay et Vaillant (2003) : McKean-Vlasov CI aléatoire, approche probabiliste.

Une EDP de McKean-Vlasov "simple"

1. $\theta(\omega)$ est une variable aléatoire réelle de loi ν absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et :
   $P(d\omega) - a.s.$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(t,x,\theta) & = & -\frac{\partial}{\partial x}\left(u_b(t,x,\theta)p(t,x,\theta)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta p(t,x,\theta) \\ p(0,x,\theta) & = & p_0(x,\theta) \\ u_b(t,x,\theta) & = & \int_{\mathbb{R}} b(x,y)p(t,y,\theta)dy \\ \mathcal{L}(\theta) = \nu. & & \end{cases}$$

   Exemple :

$$p_0(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$$

   où la loi de θ est un mélange de lois normales

Une EDP de McKean-Vlasov "simple"

1. $\theta(\omega)$ est une variable aléatoire réelle de loi ν absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et :
   $P(d\omega) - a.s., \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p(t,x,\theta) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(u_b(t,x,\theta)p(t,x,\theta)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta p(t,x,\theta) \\ p(0,x,\theta) &= p_0(x,\theta) \\ u_b(t,x,\theta) &= \int_{\mathbb{R}} b(x,y)p(t,y,\theta)dy \\ \mathcal{L}(\theta) = \nu. \end{cases}$$

2. Solutions faibles mesures : $P(d\omega) - a.s., \forall \phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall t \in [0, T],$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) Q_t(dx,\theta) = &\int_{\mathbb{R}} \phi(x) p_0(x,\theta)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_b(s,x,\theta)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x) Q_s(dx,\theta)\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma^2}{2}\Delta\phi(x) Q_s(dx,\theta)\, ds \\ u_b(t,x,\theta) = &\int_{\mathbb{R}} b(x,y) Q_t(dy,\theta) \\ Q_0(dx,\theta) = &p_0(x,\theta)dx, \quad \mathcal{L}(\theta) = \nu. \end{aligned}$$

Solutions statistiques

Résumé :

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi} & L^1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{S} & \mathcal{C}\left([0,\ T],\ \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\right) \\ \omega & \mapsto & a & \mapsto & p_0(.,\ a) & \mapsto & \left(Q_t(dx,\ a)\right)_{t\in[0,T]} \\ P & & \nu & & \mu = \nu \circ \Phi^{-1} & & m = \nu \circ (S \circ \Phi)^{-1} \end{array}$$

Solutions statistiques :

$$m = \mathcal{L}(Q) \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,T],\mathcal{P}(\mathbb{R}))).$$

Solutions statistiques spatiales :

$$m_t = \mathcal{L}(Q_t) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})).$$

Intensité de m_t :

$$\langle I(m_t), f\rangle = \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R})} \langle Q, f\rangle m_t(dQ) = \int_{\mathbb{R}} \langle [S \circ \Phi(a)]_t, f\rangle \nu(da).$$

Première approche (Talay et Vaillant 2003)

Talay et Vaillant (2003) : Simulations imbriquées,

$\langle I(m_t), f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle [S \circ \Phi(a)]_t, f\rangle \nu(da) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(f(X_t(a))\right) \nu(da).$

Sznitman (1991), Méléard (1996) : $Q_t(dx, a) = \mathcal{L}(X_t(a))$

$$\begin{cases} dX_t(a) = u_b(t, X_t(a), a)dt + \sigma dW_t \\ u_b(t, x, a) = \mathbb{E}\left(b(x, X_t(a))\right) \\ \mathcal{L}\left(X_0(a)\right) = p_0(x, a)dx. \end{cases}$$

Première approche (Talay et Vaillant 2003)

Talay et Vaillant (2003) : Simulations imbriquées, Simulations directes.

$\langle I(m_t), f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle [S \circ \Phi(a)]_t, f\rangle \nu(da) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(f(X_t(a))\right) \nu(da).$

Sznitman (1991), Méléard (1996) : $Q_t(dx, a) = \mathcal{L}(X_t(a))$

$$\begin{cases} dX_t(a) = u_b(t, X_t(a), a)dt + \sigma dW_t \\ u_b(t, x, a) = \mathbb{E}\left(b(x, X_t(a))\right) \\ \mathcal{L}\left(X_0(a)\right) = p_0(x, a)dx. \end{cases}$$

Approximation directe de $\langle I(m_t), f \rangle$

$$\langle I(m_t), f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(f(X_t(a))\right) \nu(da) = \mathbb{E}\left(f(X_t(\theta))\right)$$

$$\begin{aligned} X_t(\theta) =& X_0(\theta) + \sigma W_t + \int_0^t u_b(s, X_s(\theta), \theta) ds \\ \mathcal{L}(X_0(\theta), \theta) =& p_0(x, a) dx\, \nu(da), \quad u_b(s, X_s(\theta), \theta) = \quad \mathbb{E}\left(b(x, X_s(\theta)) \mid \theta\right)|_{x = X_s(\theta)}. \end{aligned}$$

Approximation directe de $\langle I(m_t), f\rangle$

$$\langle I(m_t), f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(f(X_t(a))\right)\nu(da) = \mathbb{E}\left(f(X_t(\theta))\right)$$

$$X_t(\theta) = X_0(\theta) + \sigma W_t + \int_0^t u_b(s, X_s(\theta), \theta)ds$$

$$\mathcal{L}(X_0(\theta), \theta) = p_0(x, a)dx\,\nu(da), \quad u_b(s, X_s(\theta), \theta) = \mathbb{E}\left(b(x, X_s(\theta)) \mid \theta\right)|_{x=X_s(\theta)}.$$

Approximation :

$$\langle I(m_t), f\rangle \sim \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(\bar{X}_T^{j,N}(\theta_j)\right).$$

On simule N réalisations $(\theta_i)_{i\in[1,N]}$ de θ,
On associe à chaque θ_i une particule de CI de loi $p_0(x, \theta_i)dx$ et telle que :

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N} = \bar{X}_{t_k}^{i,N} + \widehat{u}_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}, \theta_i)\Delta t + \sigma(W_{t_k}^i - W_{t_{k-1}}^i),$$

où $\widehat{u}_b(t, x, a)$ est un estimateur de $\mathbb{E}\left(b\left(x, X_0(\theta)\right) \mid \theta = a\right)$

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,
2. $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 \in \mathbb{Z}$,
   $\psi_{l_1 l_2}(x) = 2^{l_1/2}\psi_{0,0}(2^{l_1}x - l_2)$
   $\psi_{-1,l_2}(x) = \psi_{-1,0}(x - l_2)$.

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,
2. $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 \in \mathbb{Z}$,
   $\psi_{l_1 l_2}(x) = 2^{l_1/2}\psi_{0,0}(2^{l_1}x - l_2)$
   $\psi_{-1,l_2}(x) = \psi_{-1,0}(x - l_2)$.
3. $(\psi_{l_1 l_2})_{l_1 \geq -1, l_2 \in \mathbb{Z}}$ Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,
2. $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 \in \mathbb{Z}$,
   $\psi_{l_1 l_2}(x) = 2^{l_1/2}\psi_{0,0}(2^{l_1}x - l_2)$
   $\psi_{-1,l_2}(x) = \psi_{-1,0}(x - l_2)$.
3. $(\psi_{l_1 l_2})_{l_1 \geq -1, l_2 \in \mathbb{Z}}$ Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
4. Kerkyacharian et Picard (2003) :
   $\alpha \in [0,1] \mapsto u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \mathbb{E}\left(b(x, X_{t_k}(\theta)) \mid \theta = G^{-1}(\alpha)\right) \in L^2([0,1])$

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,
2. $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 \in \mathbb{Z}$,
   $\psi_{l_1 l_2}(x) = 2^{l_1/2}\psi_{0,0}(2^{l_1}x - l_2)$
   $\psi_{-1,l_2}(x) = \psi_{-1,0}(x - l_2)$.
3. $(\psi_{l_1 l_2})_{l_1 \geq -1, l_2 \in \mathbb{Z}}$ Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
4. Kerkyacharian et Picard (2003) :
   $\alpha \in [0,1] \mapsto u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \mathbb{E}\left(b(x, X_{t_k}(\theta)) \mid \theta = G^{-1}(\alpha)\right) \in L^2([0,1])$
5. $\forall \alpha \in [0,1], u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \sum_{l_1, l_2} \beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x)\psi_{l_1 l_2}(\alpha)$.

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,
2. $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 \in \mathbb{Z}$,
   $\psi_{l_1 l_2}(x) = 2^{l_1/2}\psi_{0,0}(2^{l_1}x - l_2)$
   $\psi_{-1,l_2}(x) = \psi_{-1,0}(x - l_2)$.
3. $(\psi_{l_1 l_2})_{l_1 \geq -1, l_2 \in \mathbb{Z}}$ Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
4. Kerkyacharian et Picard (2003) :
   $\alpha \in [0,1] \mapsto u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \mathbb{E}\left(b(x, X_{t_k}(\theta)) \mid \theta = G^{-1}(\alpha)\right) \in L^2([0,1])$
5. $\forall \alpha \in [0,1], u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \sum_{l_1,l_2} \beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x)\psi_{l_1 l_2}(\alpha)$.
6. Equivalent à : $\forall a \in \Theta$, $u_b(t_k, x, a) = \sum_{l_1 l_2} \beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x)\psi_{l_1 l_2}(G(a))$. où :

$$\beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{l_1 l_2}(G(a)) u_b(t_k, x, a)\nu(da).$$

$$\widehat{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_{l_1 l_2}(G_N(\theta_i))\, b\left(x, \bar{X}^{i,N}_{t_k}(\theta_i)\right)$$

Utilisation d'estimateurs à ondelettes

1. $\psi_{-1,0}$ $\psi_{0,0}$ ondelettes père et mère,
2. $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 \in \mathbb{Z}$,
   $\psi_{l_1 l_2}(x) = 2^{l_1/2}\psi_{0,0}(2^{l_1}x - l_2)$
   $\psi_{-1,l_2}(x) = \psi_{-1,0}(x - l_2)$.
3. $(\psi_{l_1 l_2})_{l_1 \geq -1, l_2 \in \mathbb{Z}}$ Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
4. Kerkyacharian et Picard (2003) :
   $\alpha \in [0,1] \mapsto u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \mathbb{E}\left(b(x, X_{t_k}(\theta)) \mid \theta = G^{-1}(\alpha)\right) \in L^2([0,1])$
5. $\forall \alpha \in [0,1], u_b(t_k, x, G^{-1}(\alpha)) = \sum_{l_1,l_2} \beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x)\psi_{l_1 l_2}(\alpha)$.
6. Equivalent à : $\forall a \in \Theta$, $u_b(t_k, x, a) = \sum_{l_1 l_2} \beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x)\psi_{l_1 l_2}(G(a))$. où :

$$\beta^{(k)}_{l_1 l_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{l_1 l_2}(G(a)) u_b(t_k, x, a)\nu(da).$$

$$\widehat{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_{l_1 l_2}(G_N(\theta_i))\, b\left(x, \bar{X}^{i,N}_{t_k}(\theta_i)\right)$$

7. $\widehat{u}_b(t_k, \bar{X}^{i,N}_{t_k}, \theta_i) = \sum_{l_1=-1}^{l_1^N} \sum_{l_2} \widehat{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(\bar{X}^{i,N}_{t_k})\psi_{l_1 l_2}(G(\theta_i))$
   Si $W_1(p_0(x, G^{-1}(\alpha_1))dx, p_0(x, G^{-1}(\alpha_2))dx) \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|^s$ alors
   $2^{l_1^N} = N^{\frac{1}{2s+1}}$.

Vitesse de convergence

$$\mathbb{E}\left|\langle I(m_T), f\rangle - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\bar{X}_T^{i,N}(\theta_i))\right| \leq C\left(\Delta t + \sqrt{\log N} N^{-\frac{s}{2s+1}}\right).$$

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{t_{k+1}}^{i}(\theta_i) =& \bar{X}_{t_k}^{i}(\theta_i) + u_b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i}(\theta_i), \theta_i)\Delta t + \sigma(W_{t_{k+1}}^{i} - W_{t_k}^{i}) \\
\bar{X}_{t_{k+1}}^{i,N}(\theta_i) =& \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i) + \widehat{u}_b\left(t_k, \bar{X}_{t_k}^{i,N}(\theta_i), \theta_i\right)\Delta t + \sigma\left(W_{t_{k+1}}^{i} - W_{t_k}^{i}\right)
\end{aligned}$$

Clé pour le calcul de l'erreur de régression

Il suffit de prouver une inégalité de déviation de la forme :
$\forall \gamma > 0$, $\exists \kappa = \kappa(\gamma, b, \sigma, \psi, \nu)$,

$$\mathbb{P}\left(|\bar{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(\bar{X}^i_{t_k}) - \breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(\bar{X}^i_{t_k})| > \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{\log N}{N}} \right) \leq \frac{C}{N^\gamma}$$

$$\breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \psi_{l_1 l_2}\left(G_N(\theta_i)\right) b(x, \bar{X}^i_{t_k})$$

$$\bar{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \psi_{l_1 l_2}(G(\theta_j)) b(x, \bar{X}^j_{t_k}(\theta_j)) \right)$$

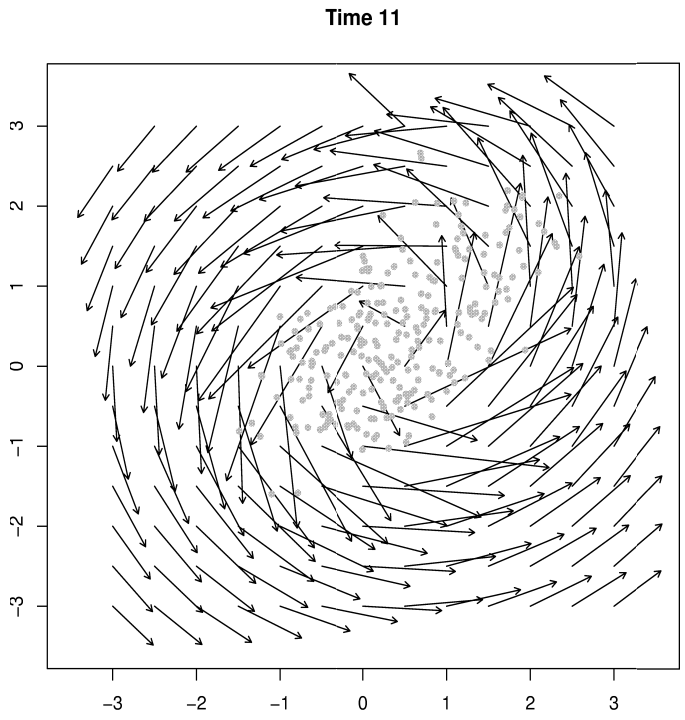
$$B_1 = |\breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) - \mathbb{E}\left(\breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) \mid \theta_1, \cdots, \theta_N\right)|$$

$$B_2 = |\mathbb{E}\left(\breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x) \mid \theta_1, \cdots, \theta_N\right) - \mathbb{E}\left(\breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(x)\right)|$$

$$B_3 = |\mathbb{E}\left(\breve{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(\bar{X}^i_{t_k})\right) - \bar{\beta}^{(k)}_{l_1 l_2}(\bar{X}^i_{t_k})|.$$

Généralisations

- Estimateurs seuillés adaptatifs, lorsque s est inconnu.
- Généralisation à l'équation de Navier-Stokes 2D et à l'équation des vortex 2D qui décrivent l'évolution d'un fluide visqueux incompressible dans le plan :
  - Condition initiale signée et de norme L^1 différente de 1,
  - noyau d'interaction de Biot et Savart : $K(x_1 - x_2) = b(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi|x|^2}(-x_2, x_1)$
- $\mathbb{E}(\mathbf{v}(t, x, \theta)) = \mathbb{E}(K * w(t, x, \theta)) = \langle I(m_t), K(x - .)\rangle$,



Tests numériques

Dans le cas où $P(d\omega) - a.s.$, $w_0(.,\theta)$ est une densité de probabilité :

$$\langle I_t(dx), |x|^2 \rangle = \langle I_0(dx), |x|^2 \rangle + 2t\sigma^2.$$

Erreur relative :

$$e(t) = \frac{\left| A(t) - A(0) - 2t\sigma^2 \right|}{|A(t)|}$$

$$A(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\bar{X}_t^{i,N}(\theta_i)|^2$$

Exemple 1 : mélange de lois normales

- la loi de θ est un mélange de lois normales

$$\theta = 1_{Y=1}\theta^{(1)} + 1_{Y=0}\theta^{(2)},$$

  où Y, $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$ sont indépendantes, Y est une variable de Bernoulli de paramètre $p = 0.3$, $\theta^{(1)}$ et $\theta^{(2)}$ sont deux variables normales d'espérances 1.3 et 0, et d'écart-type 0.2.
- $\mathcal{L}(X_0(\theta)) = \mathcal{N}(U(\theta), 0.6)$, où U est 1-Lipschitzienne et bornée par $\underline{U}$ et $\bar{U}$.

Exemple 1 : mélange de lois normales

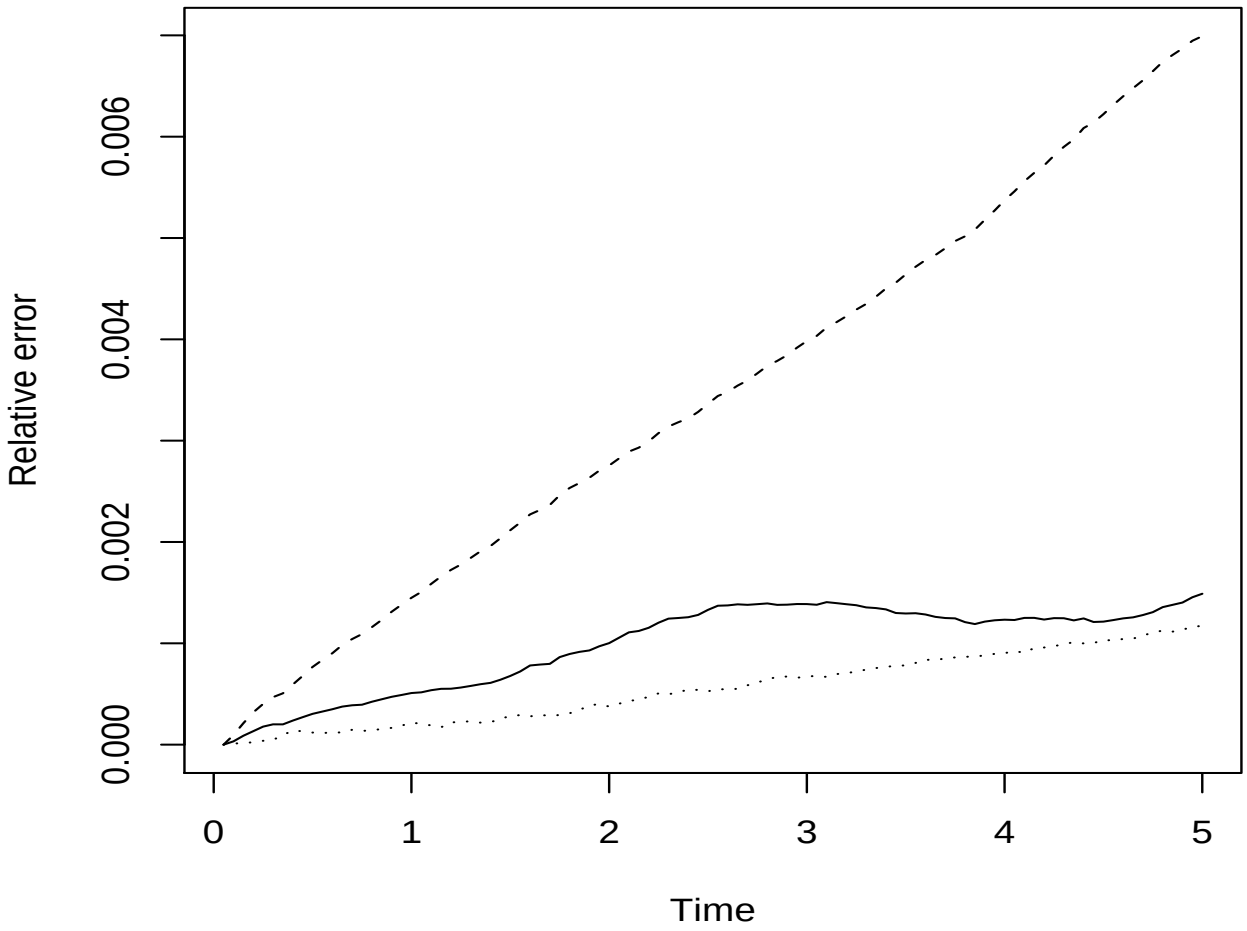


Fig.: *Evolution de l'erreur relative.*

Exemple 2 : gaussienne à large variance

- θ est une variable gaussienne de "grande" variance $\mathcal{N}(0,5)$,
- $\mathcal{L}(X_0(\theta)) = \mathcal{N}(U(\theta), 0.6)$, où U est 1-Lipschitzienne et bornée par $\underline{U}$ et $\bar{U}$.

Exemple 2 : gaussienne à large variance

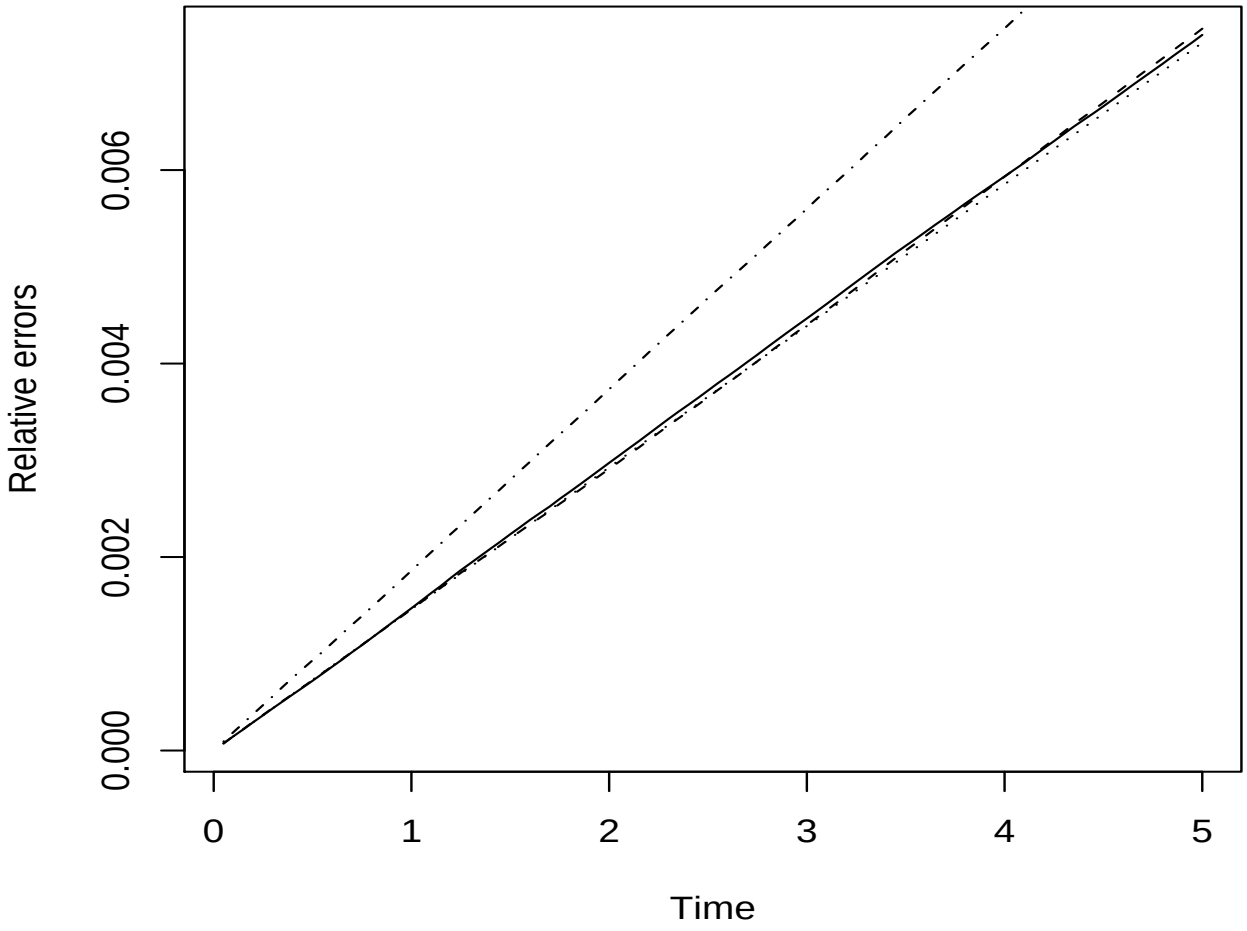


Fig.: *Evolution de l'erreur relative pour la méthode 1 (avec 1 024 particules en -.-, avec 32 768 particules en ...), 2 (en tiret, 1 024 particules) et 3 (ligne continue, 1 024 particules).*