



HAL
open science

Sur le groupe de Cremona : aspects algébriques et dynamiques

Julie Déserti

► **To cite this version:**

Julie Déserti. Sur le groupe de Cremona : aspects algébriques et dynamiques. Mathématiques [math].
Université Rennes 1, 2006. Français. NNT: . tel-00125492

HAL Id: tel-00125492

<https://theses.hal.science/tel-00125492v1>

Submitted on 19 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N d'ordre : 3400

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ de RENNES 1**

Mention Mathématiques et Applications

par

JULIE DESERTI

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE

Sur le groupe de Cremona : aspects algébriques et dynamiques

Soutenue le 9 novembre 2006 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY

M. François BERTELOOT	Rapporteur
M. Laurent BONAVERO	Rapporteur
M. Serge CANTAT	Directeur
M. Dominique CERVEAU	Directeur
M. Tien-Cuong DINH	Examinateur
M. Étienne GHYS	Examinateur
M. Paulo SAD	Examinateur

Table des matières

REMERCIEMENTS	7
INTRODUCTION	9
1. DE JONQUIÈRES, CREMONA NETHER	11
2. GROUPES DE CREMONA ET D'AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DE \mathbb{C}^2	18
3. RÉSULTATS PRINCIPAUX	26
RÉFÉRENCES DE L'INTRODUCTION	39
Chapitre 1. SUR LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DU PLAN AFFINE	47
1. DÉFINITIONS ET RAPPELS	49
2. LE GROUPE AFFINE DE LA DROITE	50
3. RIGIDITÉ DU GROUPE DES AUTOMORPHISMES ÉLÉMENTAIRES	51
4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL	53
5. APPLICATIONS	58
Chapitre 2. SUR LES AUTOMORPHISMES DU GROUPE DE CREMONA	61
1. FEUILLETAGES	63
2. LE GROUPE J_0	71
3. SOUS-GROUPES ABÉLIENS MAXIMAUX NON DÉNOMBRABLES DE J	74
4. CLASSIFICATION DES AUTOMORPHISMES	84
5. COMPLÉMENTS	88
6. FORMES NORMALES	89
Chapitre 3. REPRÉSENTATIONS DE CERTAINS RÉSEAUX DE GROUPES DE LIE DANS LE GROUPE DE CREMONA	95
1. PRÉLIMINAIRES	97
2. REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE HEISENBERG	102
3. QUASI-RIGIDITÉ DE $SL_3(\mathbb{Z})$	106
4. APPLICATIONS AUX GROUPES ARITHMÉTIQUES	112

5. GROUPES NILPOTENTS	115
6. AUTOMORPHISMES DU GROUPE DE CREMONA	118
Chapitre 4. TRANSFORMATIONS DE JONQUIÈRES ET DYNAMIQUE	121
1. UNE FAMILLE PARTICULIÈRE DE TRANSFORMATIONS	123
2. PREMIÈRE VARIANTE	139
3. SECONDE VARIANTE	147
4. TROISIÈME VARIANTE	155
Annexe A. THÉORÈME DE NOETHER	157
1. QUELQUES DÉFINITIONS ET RAPPELS	157
2. PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES	158
3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NOETHER	160
Annexe B. PROCÉDURES Maple	163
1. ORBITES	163
2. EXPOSANTS DE LYAPUNOV	163
Annexe. NOTATIONS COMMENTÉES	165
RÉFÉRENCES	169



REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Dominique CERVEAU pour sa générosité, son enthousiasme et pour la confiance qu'il m'a accordée. Merci à Serge CANTAT pour les mathématiques qu'il m'a faites découvrir. Stéphane LAMY a fait preuve d'une gentillesse et d'une patience hors norme au cours de ces deux années, un grand merci !

Je tiens à adresser mes remerciements à François BERTELOOT et Laurent BONAVERO pour avoir accepté la tâche de rapporteur, pour les remarques et suggestions qu'ils m'ont communiquées pendant leur lecture. Je suis très reconnaissante envers Tien-Cuong DINH, Étienne GHYS et Paolo SAD d'avoir accepté de faire partie du jury ; je remercie ce dernier pour son accueil lors de mon séjour à l'IMPA l'année dernière. Je remercie aussi Alcides, Jorge, Jean-François, Emmanuel, Adrien et Stéphane pour m'avoir permis d'exposer mes travaux à l'IMPA, Toulouse, Grenoble et Lyon ainsi que pour leur accueil chaleureux.

Chaque fois que je me suis aventurée à traverser le couloir, Frank a été d'une extrême gentillesse, ce qui a eu pour effet de multiplier mes incursions ; merci ! Merci à Fred d'être Fred ! Depuis qu'il est arrivé, Luc n'a pas été avare de conseils, je l'en remercie. Merci à Ferran et Corentin. Je remercie Antoine CHAMBERT LOIR de m'avoir écoutée et conseillée dans un moment difficile. Merci à Bert d'avoir supporté mon caractère. Il a été aidé par l'ambiance de la bibliothèque instaurée par un trio aussi aimable qu'efficace ; ceci m'a conduit à en faire mon deuxième (premier ?) bureau. En parlant d'efficacité, je ne peux m'empêcher de penser à Chantal, encore merci pour l'organisation des rencontres doctorales. Mes arrivées matinales à la tour ont souvent été accompagnées d'un bonjour et d'une petite discussion avec Léone et Jeannick, j'ai apprécié leur bonne humeur et leur sens de l'humour ! Merci aux occupantes du rez de chaussée et du troisième étage pour leur amabilité et sans qui nous aurions un peu moins de temps pour faire ce que nous aimons.

Merci à Pierre-Yves, Mélanie, Marc et Thomas pour leur soutien, leurs railleries... Enfin je remercie ceux qui m'ont épaulée au jour le jour, l'importance inouïe de ces petits riens... *À toi, qui me manque tant.*

INTRODUCTION

Cette introduction se divise en trois parties. Dans un premier temps nous nous sommes intéressés, via l'œuvre de DE JONQUIÈRES, CREMONA et une partie de la correspondance entre CREMONA et NÆTHER, à la « naissance » de la théorie des transformations birationnelles du plan projectif complexe. Nous nous sommes essentiellement appuyés sur deux articles de LORIA¹ ([103, 104]) et un de MENGhini ([112]). Cette démarche un peu singulière d'aborder les origines de cette théorie via la biographie sommaire de quelques mathématiciens nous amène à mentionner de nombreuses références bibliographiques pour le lecteur intéressé ; bien entendu nous ne prétendons ni avoir étudié profondément, ni même avoir consulté tous les articles cités. Les formules et résultats mathématiques sont donnés tels qu'ils ont été énoncés à l'époque ; nous savons depuis qu'ils ne s'appliquent souvent que dans un cadre générique. Dans une seconde partie, nous introduisons le groupe de CREMONA, celui des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 et évoquons certains énoncés bien connus. Pour finir nous présentons les résultats principaux de cette thèse ; le lecteur souhaitant commencer à cet endroit (page 26) trouvera, entre autres, les notations introduites dans les deux premiers paragraphes en fin de mémoire.

¹ « [...] LORIA was arguably the preeminent historian of mathematics in Italy. A full professor of higher geometry at the University of Genoa beginning in 1891, LORIA wrote the history of mathematics as a mathematician writing for other mathematicians » ([59]).

1. DE JONQUIÈRES, CREMONA NETHER

La première partie de cette introduction expose les prémices de la théorie des transformations birationnelles et revêt un caractère aussi bien historique que mathématique. Commençons par parler d'ERNEST DE JONQUIÈRES ; né en 1820, il entre dans la marine française à l'âge de quinze ans et y reste jusqu'en 1885, date à laquelle il occupe depuis six ans le poste de vice-amiral. Il est successivement directeur de l'école des torpilles à Boyardville, préfet maritime à Rochefort, directeur de la Commission permanente de la défense maritime, chef du service hydrographique de France... Ses bonnes traductions des Epîtres d'HORACE (publiées en 1879) lui valent une place dans l'histoire littéraire. Le résultat de son activité scientifique, qui s'étale sur une quarantaine d'années, est un recueil de plus de cent mémoires mathématiques. La jeunesse de DE JONQUIÈRES coïncide avec la période où CHASLES reprend le sceptre de la géométrie pure, voie ouverte par PONCELET ; ses premiers travaux se rapportent donc à la géométrie supérieure au sens de CHASLES. Il contribue ensuite au développement de la théorie des courbes algébriques planes et des systèmes formés par celles-ci ; cette étude le conduit à considérer les systèmes relatifs aux courbes gauches et aux surfaces. Parmi les richesses de ce recueil, on trouve aussi des résultats, certains historiques d'autres non, sur les transformations géométriques et les polyèdres ([67, 68]) ; enfin il se passionne pour la « géométrie algébrique » et la théorie des nombres. Ici nous nous consacrons essentiellement aux « fruits qu'il recueillit dans un champ dont CREMONA est le maître incontesté » ([103]) : voulant perfectionner la théorie des courbes gauches algébriques, DE JONQUIÈRES participe au développement d'une théorie qui semble l'avoir attirée dès le début de sa carrière, celle des transformations géométriques. Il pense qu'il n'est pas vain de généraliser la méthode par laquelle SEYDEWITZ a engendré et étudié les courbes gauches ([136]). Ce projet nécessite l'existence d'une correspondance biunivoque, différente de l'homographie, entre les points de deux plans ; DE JONQUIÈRES établit celle-ci qui, par suite, porte son nom. Remarquons que la première partie du mémoire dans lequel il donne cette correspondance paraît en 1884 (*voir* [62]) ; un texte complet est publié seulement vingt et un ans après par les soins de GUCCIA ([87]). Cet écrit débute par la remarque suivante : l'ensemble des courbes de degré n d'un plan ayant un point de multiplicité $n - 1$ et $2(n - 1)$ points simples communs forment un réseau homaloïdal. Rappelons ce qu'est un tel réseau. Considérons l'ensemble \mathcal{D} des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et f une transformation birationnelle ; l'ensemble des points base du pinceau de courbes de $f(\mathcal{D})$ passant par un point générique p , privé de p , est contenu dans le lieu d'indétermination de f^{-1} . Une famille de courbes à 2 paramètres qui vérifie des propriétés analogues est appelée **réseau homaloïdal**. DE JONQUIÈRES dispose donc d'une application biunivoque

entre ces courbes et les droites d'un autre plan \mathcal{P}' ; si on impose que le point d'intersection de deux droites quelconques dans \mathcal{P}' corresponde au point d'intersection des deux courbes associées de \mathcal{P} , on obtient une correspondance biunivoque entre \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Ces deux plans sont alors appelés **plans isographiques**. Un grand nombre des raisonnements de DE JONQUIÈRES se généralisent aux transformations birationnelles; notons toutefois qu'il semble que DE JONQUIÈRES ne connaissait pas les travaux de CREMONA et inversement, ce qui n'est guère étonnant étant donné le temps que DE JONQUIÈRES passait en mer. Dans la dernière période de sa vie, après avoir eu vent de la théorie des transformations birationnelles, il s'intéresse à une classe bien particulière de ces transformations : celles dont le degré n'est pas premier ([63]). Son cheminement l'amène à la résolution, dans \mathbb{N} , des deux équations (en les α_i) suivantes² :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \alpha_i = n^2 - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n-1} i \alpha_i = 3(n - 1)$$

dont il donne des éléments de réponse dans [64, 65, 66]; mentionnons que RUFFINI avait évoqué dès 1871 l'existence d'un lien entre la théorie des nombres et celle des transformations birationnelles ([127, 128, 129]).

Nous nous sommes ensuite intéressés à un personnage tout aussi haut en couleur qui a donné son nom au groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe, dont il est largement question ici : LUIGI CREMONA. En 1848, âgé d'à peine dix huit ans, il lutte pour l'indépendance de son pays; épargné, il sera directeur du polytechnicum de Rome, sénateur, vice-président du sénat, ministre de l'instruction publique... mais avant tout mathématicien comme en témoignent ses multiples publications qui couvrent de nombreux domaines de la géométrie (de la trigonométrie jusqu'à la théorie des espaces à plusieurs dimensions) mais aussi de l'analyse (de la théorie des invariants jusqu'à celle des fonctions abéliennes). Nous n'évoquerons pas tous ses travaux! Nous renvoyons à [104] pour un exposé plus complet; ici nous nous limiterons à parler de certains de ses mémoires sur les cubiques gauches et sur la théorie des transformations birationnelles. Le début de la carrière de CREMONA est quelque peu tumultueux : le gouvernement autrichien n'est pas enclin à donner une place à un fervent défenseur de Venise; finalement il obtient, en novembre 1855, un poste au lycée de Pavie. Il inaugure, à cette époque, son œuvre mathématique; ses premiers travaux s'inscrivent dans la lignée de ceux de ses deux maîtres BORDONI et BRIOSCHI : ils se rapportent à la géométrie analytique élémentaire et à l'analyse

² La première équation traduit le fait que deux courbes homaloïdales génériques se coupent transversalement en les points base et un unique autre point; la seconde exprime que les courbes homaloïdales sont rationnelles.

pure ou bien appliquée à la géométrie ([33, 34, 35, 36, 37, 38]). La qualité de son travail lui vaut une place au gymnase de Cremona dès le 17 janvier 1857.

L'étude des courbes gauches occupe une place importante dans la carrière mathématique de CREMONA : la série de ses mémoires sur ce sujet débute en 1858 par [39] et finit une vingtaine d'années plus tard avec [57]. L'article [39] est consacré à des théorèmes énoncés par CHASLES dans [24, 25]. La méthode exposée par CREMONA repose sur la remarque suivante ; étant données quatre fonctions linéaires indépendantes A, B, C, D , deux cônes quadratiques ayant une génératrice commune peuvent se représenter par les deux équations du type suivant :

$$BD - C^2 = 0, \quad AC - B^2 = 0 \quad \text{et} \quad AD - BC = 0.$$

Leur intersection, qu'on appelle **cubique gauche**, est paramétrée par :

$$(A : B : C : D) = (\omega^3 : \omega^2 : \omega : 1).$$

La tangente au point (ω) de la courbe est alors donnée par

$$A - 2\omega B + \omega^2 C = 0, \quad B - 2\omega C + \omega^2 D = 0$$

et le plan osculateur par

$$A - 3\omega B + 3\omega^2 C - \omega^3 D = 0.$$

En 1859, il complète son étude avec [40] et [41]. L'année suivante, CREMONA prend connaissance des recherches sur le sujet faites par MÖBIUS, SEYDEWITZ et SCHRÖTER ([131, 132]) ; il est alors convaincu que l'approche de ce dernier est la plus adaptée. Cela l'amène à publier [42] puis [45] dans lequel il expose un historique détaillé et complet des travaux de MÖBIUS, CHASLES, CAYLEY, SALMON, SEYDEWITZ, SCHRÖTER ainsi que des résultats originaux ; en découle une série d'articles ([46, 47, 48, 49, 50, 51]) où il reste fidèle au point de vue que lui a inspiré la lecture des mémoires de SCHRÖTER. Dans son dernier travail sur les cubiques gauches ([57]), il étend à tous les espaces linéaires l'étude, faite par WEYR ([143]) et DARBOUX ([58]), de certaines courbes planes.

Durant un séjour à Bologne, CREMONA établit les bases de la théorie des transformations birationnelles du plan. Le mémoire [130] de l'astronome SCHIAPARELLI lui suggère d'étudier les transformations planes pour lesquelles à chaque droite correspond une droite ou une conique inscrite dans un triangle fixe. Il affirme, dans [44], que chacune de ces transformations est, à homographie près, l'une des deux transformations suivantes :

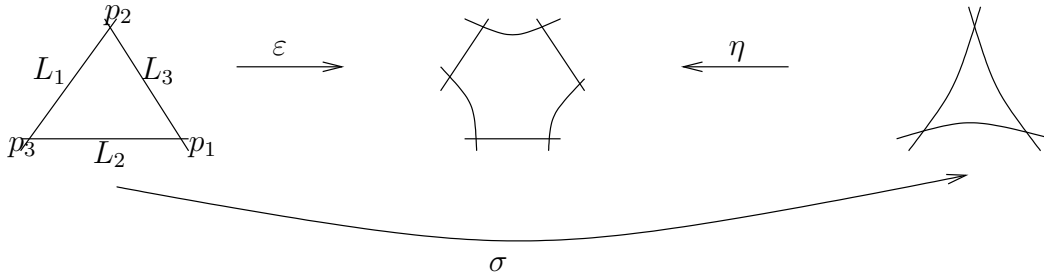
$$(\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right) \quad \text{ou} \quad (\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\xi} \right).$$

Attardons nous un instant sur une involution qui ressemble fort à la seconde et qui porte le nom **d'involution de CREMONA** ; en carte affine elle s'écrit $\sigma : (x, y) \mapsto$

$(1/x, 1/y)$ et en coordonnées homogènes :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ (x : y : z) & \mapsto (yz : xz : xy). \end{aligned}$$

Cette transformation est bien définie en dehors des points $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$ et $p_3 = (0 : 0 : 1)$. L'image de la droite L_1 (resp. L_2 , resp. L_3) d'équation $x = 0$ (resp. $y = 0$, resp. $z = 0$) est le point p_1 (resp. p_2 , resp. p_3); comme σ est une involution, le point p_i est « envoyé » sur la droite L_i . La transformation σ induit donc un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{L_1, L_2, L_3\}$. Nous pouvons écrire³ σ comme une composée d'éclatements :



L'image par σ d'une droite passant par l'un des p_i est encore une droite passant par p_i (l'image d'une courbe \mathcal{C} par une transformation birationnelle f de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est l'adhérence de $f(\mathcal{C} \setminus \text{Ind}(f))$) : considérons par exemple une droite passant par p_1 ; elle est de la forme $ax + by = 0$ et son image par σ du type $ay + bx = 0$. Enfin remarquons que l'image d'une droite générique \mathcal{D} d'équation $ax + by + cz = 0$ est une conique passant par les p_i ; en effet $\sigma(\mathcal{D})$ s'écrit $ayz + bxz + cxy = 0$. On peut montrer, et nous y reviendrons par la suite, que toute transformation birationnelle quadratique s'écrit à l'aide de l'involution de CREMONA et d'éléments de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ (voir [4, 89]).

Dans ce même article SCHIAPARELLI affirme que les seules transformations univoques entre les points de deux plans sont celles où aux droites du plan correspondent des droites ou des coniques circonscrites à un triangle fixe; or MAGNUS ([105]) et DE JONQUIÈRES ([61, 62, 87]) en ont exhibé d'autres. Il semble que CREMONA ignorait l'existence de ces travaux mais il informe SCHIAPARELLI que la composée de transformations linéaires ou quadratiques est en général plus compliquée que les transformations intervenant dans cette composition; cette remarque le conduit à chercher toutes les transformations birationnelles entre deux plans. Pour

³ Notons que cette décomposition en suites d'éclatements n'est pas spécifique à σ mais valable pour toute transformation birationnelle propre, c'est le théorème de ZARISKI.

mener à bien cette étude il s'appuie sur le fait suivant : pour une telle transformation, aux droites d'un des plans considérés correspond dans l'autre une famille à deux paramètres de courbes rationnelles de degré n , formant un réseau tel que deux quelconques de ces courbes n'aient qu'un point d'intersection « mobile » (*i.e.* n'appartenant pas à toutes). Par conséquent si ces courbes comptent x_i points communs à toutes, de multiplicité i , les deux relations suivantes sont satisfaites⁴ :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n-1} i^2 x_i = n^2 - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i-1)}{2} x_i = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

À toute transformation birationnelle du plan correspond une solution de (1). CREMONA remarque que pour toute valeur n il existe au moins une transformation birationnelle de degré n satisfaisant (1) ; il s'agit d'une transformation de JONQUIÈRES, celle associée à :

$$x_1 = 2(n-1), \quad x_2 = \dots = x_{n-2} = 0 \quad \text{et} \quad x_{n-1} = 1.$$

Quelques années plus tard, après avoir approfondi certaines questions relatives aux courbes du plan ([52]), CREMONA propose d'autres idées originales ([53, 54, 55]) ; en particulier il généralise la méthode que DE JONQUIÈRES avait donnée, pour engendrer des courbes gauches d'ordre quelconque.

Parmi les pionniers de la théorie des transformations birationnelles, on compte aussi MAX NETHER ; en effet l'un des théorèmes incontournables concernant le groupe de CREMONA porte son nom :

THÉORÈME 1 (NETHER). *Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est engendré par l'involution de CREMONA $\sigma : (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$ et $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$.*

Nous n'allons pas, ici, évoquer la vie et l'œuvre de cet illustre mathématicien mais donner une partie de la correspondance qu'il entretenait avec CREMONA (*voir* [112]). Il semble que NETHER remarque le premier les similitudes entre ses travaux et ceux de CREMONA dans une lettre retrouvée au CASTELNUOVO Institute of Mathematics (Rome) :

“Obviously I couldn't be less surprised than you at the remarkable coincidence of the most recent geometric works of both of us in relation not only to the subject but also to the smaller details of the explanations. I can only say how happy I am that my ideas coincide with those of a recognized authority, whom I esteem much.”

⁴ Ces deux équations sont les mêmes que celles considérées par DE JONQUIÈRES (*voir* page 12).

CREMONA souligne aussi le fait que ses idées et celles de NÆTHER sont très proches :

“I would like to take this opportunity to add another quotation to those given at the beginning of my first Note. It is from a new paper by Mr. NÆTHER entitled “Ueber die eindeutigen Raumtransformationen” [Mathematische Annalen 3 (1871), 547], of which I received a copy on 7 May. In Mr. NÆTHER’s paper and in my Note “Ueber die Abbildung algebraischer Flächen” [Göttingische Nachrichten (May 3, 1871)], which deal with the same subject (the application of third level transformations to representations of algebraic surfaces), which were published practically on the same day, the reader will find the most singular coincidences, even in the minutest details. This should not come as a surprise to anyone, and it is a source of great satisfaction to me: particularly since it was the excellent research work conducted by Mr. NÆTHER, and set out in his previous works, that led me to take up these studies again, and which taken together with the results I had already obtained for plane figures, eventually led me to complete the general transformations in space, the purpose of this and the First Note (4 May) communicated to R. Istituto.”

De nombreuses lettres concernant l’article dont il est question ici sont échangées par NÆTHER et CREMONA. Dans l’une d’elles, datée du 16 juin 1871, NÆTHER émet une première objection à la preuve d’un des résultats de CREMONA : la liste d’exemples, sur laquelle s’appuie la démonstration, est incomplète.

“If this note pretends to give a complete list with respect to the omaloidal systems which originate from the general surfaces of the 3rd order, I miss a transformation that sometimes I met, but that probably you have noted yourself in the meantime.”

Il semble toutefois que CREMONA ne prétend pas que sa liste soit exhaustive puisqu’après avoir donné celle-ci il écrit :

“I think that these examples are now sufficient to prove my assumption.”

Dans les deux plis suivants, NÆTHER explique à CREMONA ses doutes quant à sa démonstration et lui demande des explications :

“You would perhaps be so kind as to give me an explanation, if I correctly understood your conclusion, if you motivated more precisely this coincidence, or if you undertook a direct determination. Also

the statement at the end of your note, that a line R lies $4r$ times in the Jacobian, I cannot motivate completely (if not in the way of the analogous results in paragraph 1 of my treatise on spatial transf.)”

Le 12 septembre 1871, NETHER remercie CREMONA pour sa réponse du 20 août mais semble toujours insatisfait des arguments avancés par celui-ci :

“Perhaps it is only a personal fact that I am in this case not completely satisfied with the indirect way in which you deduce the facts about the behavior of the Jacobian, a way which is actually completely sufficient for explaining the result and which can often be considered also as satisfying just as it is; for at the time I posed my question I hoped to find a direct insight into the behavior of the surface which corresponds to a higher contact point with respect to the Jacobian, without reaching my aim.”

Ces dernières lettres suggèrent un certain désaccord entre les deux protagonistes... Tout au long de sa carrière, CREMONA a cultivé son mode de pensée atypique : dans un de ses articles, afin de ne pas masquer le phénomène géométrique qu’il examine, il décrit et « compte » les intersections des courbes et surfaces algébriques au lieu de résoudre un système d’équations. L’intuition géométrique des résultats prime parfois sur la rigueur ce que n’approuvent pas ses confrères ; bon nombre d’entre eux ressentent le besoin de redémontrer certains de ses théorèmes. Ce sentiment transparait très bien lorsque, lors d’un hommage à CREMONA en 1904, NETHER commente [43] :

“From today’s point of view we note the algebraic foundation, which does not correspond to the purity of the method of synthetic geometry. And in the same way one misses the rigor, which we have now the right to pretend from the definitions and demonstrations, especially for the configuration theorems, both from the algebraic and the geometric point of view; but CREMONA, who had had this intention for a long time, could not decide on a second draft of the book, for it would have meant exactly a completely new reorganization; and a further try for a substitution has not been made. Nevertheless, contemporary Italian science would especially be able to give to geometry analogous work, which would take account of the great progress of the last 40 years on sure bases, which alone could guarantee it an everlasting utility. For CREMONA’s work has the historical merit of having established, with his methods and conceptions, the contact of pure geometry with the analytical-geometrical development which had emerged through the work

of PLÜCKLER, HESSE *and* CLEBSCH, of SALMON *and* CAYLEY” ([120]).

Bien que cette réflexion fasse référence à un travail bien précis de CREMONA, il reflète ce que pense NÆTHER de l’ensemble de son œuvre ; il ne partage pas son approche et considère que la sienne, plus algébrique, est plus rigoureuse. Néanmoins il reconnaît que le point de vue géométrique de CREMONA est très riche ; il dit à propos de [56] :

“Here again CREMONA’s observations obviously are lacking in purity and foundational rigor; but they are also stimulating at a higher level because they can be translated into algebraic form, generally without any effort. Only a few deeper studies result in more difficult consequences through analytical means” ([120]).

2. GROUPES DE CREMONA ET D’AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DE \mathbb{C}^2

2.1. Groupe de CREMONA. Revenons quelques instants sur le Théorème 1 qui affirme que toute transformation birationnelle s’écrit comme la composée d’éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ et de l’involution de CREMONA ; ce résultat peut aussi s’énoncer de la manière suivante : *toute transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se décompose en un produit de transformations quadratiques modulo un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.*

La possibilité d’écrire toute transformation birationnelle comme composée de transformations quadratiques est d’abord évoquée par CLIFFORD ([27]) en 1869 ; il propose une démonstration pour toute transformation de degré inférieur ou égal à 8. En 1870, NÆTHER prouve que si f est une transformation birationnelle de degré n qui admet au moins trois points d’indétermination p_1, p_2, p_3 de multiplicité respectivement ν_1, ν_2, ν_3 , alors $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > n$ (inégalité de NÆTHER). Il considère la transformation quadratique q admettant pour points base p_1, p_2, p_3 et constate que $f \circ q^{-1}$ est de degré strictement inférieur au degré de f (voir [117, 118]). Sa preuve est correcte lorsque les p_i sont en position générale ; mais, en 1872, il s’aperçoit qu’elle est incorrecte lorsque p_2 et p_3 sont dans le premier mais pas tous deux dans le second voisinage infinitésimal⁵ de p_1 . Il réussit à traiter ce dernier cas dans [119]. En 1901, SEGRE exhibe un exemple où la méthode de NÆTHER ne s’applique pas : la transformation $(xy^2 : y^3 : y^2z + x^3)$ (voir [89], chapitres VI. II. 16 et VIII, [133]) ;

⁵ Soient S une surface et p un point de S . Le diviseur exceptionnel E obtenu en éclatant p est appelé **premier voisinage infinitésimal** de p et les points de E sont dits **infiniment proches** de p . Le n -ième **voisinage infinitésimal** de p est l’ensemble des points contenus dans le premier voisinage d’un certain point du $(n - 1)$ -ième voisinage infinitésimal de p . Lorsque qu’on souhaite distinguer les points de S des points infiniment proches on appelle **points propres** les points de S .

il semble qu'à l'annonce de cette nouvelle, NETHER éclata en sanglots ([30], livre IV, chapitre VI). Dans [134], SEGRE propose une autre démonstration du théorème de NETHER. La même année CASTELNUOVO démontre d'une part que toute application birationnelle s'écrit, à transformation linéaire près, comme la composée de transformations de JONQUIÈRES et d'autre part que toute transformation de JONQUIÈRES se décompose en transformations quadratiques ([21]). En 1916, ALEXANDER émet des objections vis à vis de la démarche de CASTELNUOVO et propose, dans [5], une preuve du théorème sensiblement différente : à toute transformation birationnelle f on peut associer un couple d'invariants $c(f)$ et trouver une transformation quadratique q telle que $c(f \circ q) < c(f)$; cette stratégie est reprise en 1965 (voir [1]). HUDSON donne, en 1927, une variante de la démonstration de SEGRE qui consiste à composer une transformation de JONQUIÈRES avec quatre transformations quadratiques bien choisies ([89]); le degré de la transformation obtenue est alors strictement inférieur au degré de f . Cette méthode comporte une erreur, courante à cette époque : la confusion entre r points au voisinage d'un point d'indétermination propre et un point de multiplicité r infiniment proche d'un point d'indétermination propre. En 1939 JUNG propose une preuve ([94]) que NAGATA précise et améliore dans les années 60 (voir [114]). En 2002 ALBERICH-CARRAMIÑANA redémontre ce résultat en utilisant aussi une décomposition faisant intervenir les transformations de JONQUIÈRES ([4]); sa démonstration est beaucoup plus compacte que celle de CASTELNUOVO en partie parce qu'elle réussit à déterminer les conditions pour que le système linéaire formé de toutes les courbes d'un degré fixé passant par un « weighted cluster »⁶ donné définisse une transformation birationnelle du plan projectif complexe ([4], théorème 8.1.2). Sa démarche permet aussi de réfuter les objections d'ALEXANDER vis à vis de la preuve de CASTELNUOVO.

On retrouve le théorème de NETHER en appliquant le programme de SARKISOV aux surfaces rationnelles ([28, 32, 109]). Cette dernière approche semble très intéressante ; elle permet, entre autres, à RONGA et VUST d'obtenir le résultat suivant : *le groupe des transformations birationnelles du plan projectif réel qui sont des difféomorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est engendré par $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ et certaines transformations de degré 5 ayant pour points base trois paires de points complexes conjugués ([126]).*

Remarquons que le théorème de NETHER est particulier à la dimension 2. En 1999, PAN démontre le résultat suivant : *soit $n \geq 3$; tout ensemble de générateurs de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ doit contenir un nombre infini et non dénombrable de transformations*

⁶ Soient S une surface et p, q deux points de S propres ou infiniment proches. On dit que p **précède** q si q est infiniment proche de p . Un « **cluster** » sur une surface S est un ensemble K de points propres et infiniment proches tel que pour tout point p de K donné K contienne les points précédents p . Un « **weighted cluster** » est un couple (K, μ) où K désigne un « cluster » et $\mu : K \rightarrow \mathbb{Z}$ une application.

de degré strictement supérieur à 1 (voir [121]). HUDSON avait énoncé dans [89] un résultat qui allait dans ce sens pour $n = 3$.

Le Théorème de NØTHER est valable seulement pour un corps algébriquement clos. KANTOR donne, en 1889, un système de générateurs lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ (voir [97, 98]); en 1992, ISKOVSKIKH simplifie le résultat de KANTOR : le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}))$ est engendré par $\text{PGL}_3(\mathbb{Q})$ et seize transformations birationnelles ad-hoc ([91]). L'année suivante, ISKOVSKIKH, KABDYKAIROV et TREGUB donnent, dans [92] et [93], un système de générateurs et de relations du groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{k}))$ pour un corps parfait \mathbb{k} .

Presque un siècle après l'énoncé du théorème de génération du groupe de CREMONA, deux auteurs en particulier se sont intéressés à ses relations. En 1982 GIZATULLIN montre, en s'appuyant sur le fait que $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ et les transformations quadratiques engendrent $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, que toute relation entre transformations quadratiques se déduit d'une relation de la forme $g_1g_2g_3 = \text{id}$; il obtient ce résultat via l'étude des propriétés topologiques de certains graphes associés aux surfaces rationnelles ([85]). Un an plus tard ISKOVSKIKH adopte un point de vue différent : il considère le groupe de CREMONA comme le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et prend pour système de générateurs des applications dites élémentaires et les automorphismes biréguliers; cela lui permet d'obtenir un système de relations simple. Tout groupe maximal de transformations birationnelles qui préservent une fibration rationnelle donnée est birationnellement conjugué au **groupe de JONQUIÈRES**, groupe des transformations birationnelles qui laissent la fibration $y = \text{cte}$ invariante. Notons J le groupe de JONQUIÈRES; remarquons qu'il est isomorphe au produit semi-direct $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

THÉOREME 2 ([90]). *Le groupe de CREMONA est engendré par le groupe de JONQUIÈRES et l'involution $\eta : (u, v) \mapsto (v, u)$. Un système de relations est donné par :*

- $\eta^2 = \text{id}$;
- $\eta(f, g)\eta = (g, f)$ pour tout (f, g) dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$;
- la relation $(e\eta)^3 = (\frac{1}{u}, \frac{1}{v})$ où $e : (u, v) \mapsto (\frac{v}{u}, v)$.

Une autre part importante de la compréhension du groupe de CREMONA repose sur la classification, à conjugaison près, des éléments d'ordre premier dans ce groupe. Cette étude commence en 1877 avec les travaux de BERTINI sur les involutions birationnelles ([13]); introduisons **l'involution de BERTINI** : considérons l'ensemble Σ des sextiques ayant huit points doubles O_1, \dots, O_8 donnés. Fixons un point m ; le pinceau des sextiques de Σ ayant un point double en m contient un dixième point base double m' . L'involution de BERTINI est la transformation qui à m associe m' .

Dans le même esprit, définissons aussi **l'involution de GEIZER** : considérons l'ensemble Σ des cubiques passant par sept points donnés O_1, \dots, O_7 . Fixons un point m ; le pinceau de cubiques de Σ passant par m possède un neuvième point base noté m' . L'involution de GEIZER est la transformation qui à m associe le point m' ainsi construit. Une liste complète d'environ soixante représentants des classes de conjugaison de tous les sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est donnée par KANTOR en 1895 (voir [96]) et corrigée par WIMAN l'année d'après ([145]) ; à partir de cette classification il constate que *toute transformation d'ordre premier $p \geq 7$ est conjuguée à un élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$* . Néanmoins cette liste est redondante : elle comporte de nombreux groupes conjugués. L'étude des sous-groupes finis du groupe de CREMONA est intimement liée à la détermination des groupes d'automorphismes des surfaces rationnelles. En effet, chaque sous-groupe fini G de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ peut être réalisé comme groupe d'automorphismes biréguliers d'une surface rationnelle X ; deux groupes G et G' sont conjugués si et seulement si (X, G) et (X', G') sont birationnellement équivalents. En 1967, MANIN classe à conjugaison près les G -surfaces rationnelles minimales (X, G) , le groupe G étant fini : il y a le plan, les fibrés en coniques, les surfaces X de DEL PEZZO⁷ telles que $\text{Pic}(X)^G$ soit isomorphe à \mathbb{Z} (voir [107]). En suivant une suggestion de MORI ([26]), BAYLE et BEAUVILLE redémontrent, en 2000, que *toute involution non triviale est conjuguée à une involution de JONQUIÈRES de degré $d \geq 2$, une involution de BERTINI ou une involution de GEIZER ([10])*. En 2001 ZHANG reprend leur démarche pour les automorphismes birationnels d'ordre premier $p \geq 3$; il obtient qu'un tel élément est non linéaire uniquement si $p = 3$ ou 5 et donne une description de ceux-ci ([148]). Dans [60] DE FERNEX montre aussi que *tout élément d'ordre 3 (resp. 5) est conjugué à un automorphisme linéaire ou à un automorphisme d'une surface de DEL PEZZO G -minimale de degré 1 ou 3 (resp. 1 ou 5)*. Il donne quatre exemples explicites de G -surfaces minimales de DEL PEZZO (X, G) de degré 1 et 3 (resp. 1 et 5) où G est un groupe cyclique d'ordre 3 (resp. 5) ; enfin il prouve que tout élément d'ordre 3 ou 5 non conjugué à une transformation linéaire est réalisé sur « cette » surface. En 2005 BEAUVILLE et BLANC complètent la classification, à conjugaison près, des éléments d'ordre premier dans le groupe de CREMONA ([11]) : *tout automorphisme d'ordre 5 d'une surface S de DEL PEZZO de degré 5 est conjugué, via une transformation birationnelle de S dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, à un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$* . Récemment BEAUVILLE a donné une liste non redondante des sous-groupes de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ isomorphes à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ pour p premier ([12]).

⁷ Une **surface de DEL PEZZO** est une surface lisse dont le fibré anticanonique est ample.

2.2. Groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Après avoir considéré le groupe de CREMONA, introduisons le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan complexe. Notons

$$\mathbf{A} := \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$$

le groupe des automorphismes affines de \mathbb{C}^2 et

$$\mathbf{E} := \{(x, y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[y]\}$$

le groupe constitué des automorphismes qui préservent le pinceau des droites $y = \text{cte}$; le groupe \mathbf{E} est le **groupe élémentaire** et ses éléments sont appelés **automorphismes élémentaires**. Posons $\mathbf{S} := \mathbf{A} \cap \mathbf{E}$. En 1942, JUNG démontre un théorème de structure pour le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$:

THÉORÈME 3 (JUNG, [95]). *Le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 est engendré par les automorphismes élémentaires et affines.*

En 1953, VAN DER KULK précise ce résultat :

THÉORÈME 4 (VAN DER KULK, [39]). *Soit \mathbb{K} un corps. Le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{K}^2 est engendré par les automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans \mathbb{K} ; de plus, $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ est le produit amalgamé de ces deux groupes.*

Depuis de nombreuses preuves ont été proposées; la plupart reposent sur l'idée suivante : étant donné un automorphisme g , on peut faire baisser le degré de g en le composant par un automorphisme affine puis un automorphisme élémentaire bien choisis. En 1958, ENGEL suit la démarche suivante : il prolonge g en une transformation birationnelle et considère la courbe \mathcal{C} préimage par g d'une droite générique; l'étude de la singularité de \mathcal{C} à l'infini lui permet d'obtenir des informations sur le degré de g (*voir* [74]). GUTWIRTH reprend cette démonstration en 1961 dans [88]. Quelques années plus tard, dans le but de donner une preuve valable pour tout corps, MAKAR-LIMANOV aborde le problème sous un angle algébrique ([106]); cette approche est simplifiée par DICKS en 1983 (*voir* [70]) et précisée par COHN deux ans plus tard ([29]). En 1972, NAGATA adopte, dans [115], un point de vue plus géométrique.

De nombreux mathématiciens ont obtenu le théorème de JUNG à partir d'autres préoccupations. RENTSCHLER montre, en 1968, que *toute représentation algébrique de $(\mathbb{C}, +)$ dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est donnée, à conjugaison près, par un flot d'automorphismes élémentaires* et en déduit le théorème de JUNG ([124]). En 1975, ABHYANKAR et MOH ([2]) montrent que *deux plongements algébriques biréguliers de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 diffèrent d'un automorphisme de \mathbb{C}^2* ; le théorème de JUNG en est un corollaire. Signalons que l'on peut trouver, dans [109], une preuve du théorème de JUNG à partir de la théorie de MORI.

Pour finir remarquons que certains auteurs considèrent le théorème de JUNG comme un résultat de géométrie birationnelle puisque tout automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 peut se prolonger en une transformation birationnelle du plan projectif complexe. C'est ainsi qu'en 1944, KELLER affirme, dans [99], qu'il est certainement possible de donner une preuve simplifiée du théorème de JUNG à partir des résultats connus sur les transformations birationnelles. En 1966, SHAFAREVICH est plus précis : la démonstration du théorème de JUNG pourrait être obtenue à partir du théorème de ZARISKI, théorème de structure des transformations birationnelles propres du plan projectif complexe ([137]). Le premier, semble-t-il, à avoir vraiment adopté ce point de vue est LAMY en 2002 : soient f un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 et \tilde{f} la transformation birationnelle induite par f ; en s'appuyant sur le théorème de ZARISKI, LAMY montre le théorème de JUNG par récurrence sur le nombre de points d'indétermination de \tilde{f} (voir [101]).

D'après la théorie de BASS-SERRE ([135]), à tout produit amalgamé peut être associé canoniquement un arbre \mathcal{T} ; rappelons rapidement cette construction pour le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. L'ensemble des sommets de \mathcal{T} est l'union disjointe des classes à gauche $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/A$ et $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/E$, celui des arêtes l'union disjointe des classes à gauche $(\text{Aut}[\mathbb{C}^2])/S$; pour tout automorphisme polynomial f , l'arête fS relie les sommets fA et fE . Nous avons ainsi construit un graphe \mathcal{T} ; dire que A et E sont amalgamés le long de S revient à dire que \mathcal{T} est un arbre ([135]). À isomorphisme près c'est le seul arbre à vérifier la propriété suivante : il existe une action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur \mathcal{T} tel que le domaine fondamental de cette action soit une arête avec ses deux sommets dont les stabilisateurs sont E et A (le stabilisateur de ce segment est donc S). Cette action est en fait la translation à gauche ; soient f et g dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, nous avons :

$$f.(g.E) = (f \circ g).E.$$

À partir de cette action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur \mathcal{T} , LAMY décrit, dans [100], les propriétés de certains sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et établit, en particulier, l'alternative de TITS.

Nous ne savons pas si le groupe de CREMONA possède une telle propriété ce qui explique la différence des techniques utilisées dans les Chapitres 1 et 2. À partir du Théorème 2, WRIGHT reformule le théorème de NETHER en terme de produit amalgamé ([147]). Avant d'énoncer ce résultat, introduisons quelques notations. Identifions l'élément

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \right) \right)$$

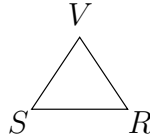
de $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ avec la transformation birationnelle $(x, y) \mapsto \left(\frac{ax+b}{cx+d}, \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta} \right)$; il est alors possible de voir

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = (\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})) \rtimes ((x, y) \mapsto (y, x))$$

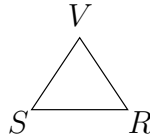
comme un sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

THÉORÈME 5 ([147]). *Le groupe de CREMONA est le produit libre des groupes $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, \mathbf{J} et $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ amalgamé le long de $\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \cap \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, $\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \cap \mathbf{J}$ et $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cap \mathbf{J}$.*

WRIGHT montre que cette structure peut être retrouvée à partir de l'action de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ sur un complexe simplicial C de dimension 2 dont les sommets sont certains modèles (*i.e.* ensembles d'anneaux locaux de schémas bien particuliers) dans le corps des fonctions $\mathbb{C}(x, y)$. On peut choisir comme domaine fondamental de cette action la face suivante



où $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $R = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; les stabilisateurs de S , V et R sont respectivement $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ et \mathbf{J} . Il constate aussi que le complexe simplicial C contient l'arbre \mathcal{T} : le domaine fondamental



contient



qui est un domaine fondamental de \mathcal{T} .

Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ ne se plonge pas dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ où \mathbb{K} désigne un corps de caractéristique nulle ([22]). Rappelons l'énoncé suivant attribué à BIRKHOFF : soient \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle et A, B, C trois éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $[A, B] = C$, $[A, C] = [B, C] = C^p = \text{Id}$ avec p premier ; alors $p \leq n$. Soit ρ un morphisme injectif de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. Pour tout nombre premier p considérons le groupe $\langle (\exp(-2i\pi/p)x, y), (x, xy), (x, \exp(2i\pi/p)y) \rangle$. Les images par ρ des trois générateurs satisfont le lemme de BIRKHOFF donc $p \leq n$; ceci étant valable pour tout premier p , nous obtenons le résultat annoncé.

2.3. Quelques travaux récents. ([19, 72]). Soit $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la transformation définie par

$$(x : y : z) \mapsto ((\alpha x + y)z : \beta y(x + z) : z(x + z)).$$

Elle agit sur le second groupe de cohomologie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et détermine une application linéaire f^* de $\mathbf{H}^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ dans lui-même; f^* est la multiplication par le degré de f , ici 2. En composant f avec elle-même, nous obtenons

$$f^2 : (x : y : z) \mapsto (x(\alpha^2 z + \beta y) + (\alpha + \beta)yz : \beta^2 y(z + (1 + \alpha)x + y) : z(z + (1 + \alpha)x + y)).$$

Nous avons donc $\deg(f^2) = \deg(f)^2 - 2$; l'application $f \mapsto f^*$ n'est pas un morphisme. Lors du calcul de f^2 nous avons pu « factoriser » par $z(x + z)$; ceci traduit, entre autres, le phénomène géométrique suivant : la droite d'équation $z = 0$ est contractée sur $(0 : 1 : 0)$ qui est un point d'indétermination de f . FORNAESS et SIBONY ont donc introduit la notion suivante : f est **algébriquement stable** si l'une des propriétés suivantes est vérifiée

- $(f^n)^* = (f^*)^n \quad \forall n \geq 0$;
- il n'existe pas de courbe V de S telle que $f^n(V)$ soit un point d'indétermination de f pour un certain n .

DILLER et FAVRE montrent que pour toute transformation birationnelle f d'une surface compacte S dans elle-même, il existe une modification propre $\varepsilon : S' \rightarrow S$ telle que $\varepsilon^{-1}f\varepsilon$ soit algébriquement stable ([72], théorème 0.1). Supposons que S soit KÄHLER et que f soit algébriquement stable; soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{H}^2(S, \mathbb{R})$. La croissance de $(\|(f^n)^*\|)_n$ est un invariant birationnel et $(\|(f^n)^*\|)_n$ est bornée, à croissance linéaire, quadratique ou exponentielle ([72], corollaire 1.16 et théorème 0.2). Les trois premières éventualités correspondent au cas où f est de premier degré dynamique 1, cas que nous sommes amenés à rencontrer et qu'ils décrivent : à conjugaison près

- ou bien f est un automorphisme virtuellement isotope à l'identité;
- ou bien f préserve une unique fibration rationnelle ou elliptique.

Ils étudient aussi le cas où $\lambda(f) > 1$.

Les feuilletages \mathcal{F} holomorphes singuliers sur une surface complexe, compacte et projective S ont été classés à équivalence birationnelle près par BRUNELLA, MC-QUILLAN et MENDES ([15, 110, 111]). Notons $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ (resp. $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$) le groupe des transformations birationnelles (resp. biholomorphes) de S qui préservent \mathcal{F} . Génériquement $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ coïncide avec $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$ et est fini. CANTAT et FAVRE se proposent d'étudier les feuilletages qui ne vérifient pas cette philosophie (voir [19]). Ils obtiennent 5 classes de feuilletages :

- \mathcal{F} est invariant par un champ de vecteurs holomorphe;
- \mathcal{F} est une fibration elliptique;

- S est une surface de KUMMER généralisée et \mathcal{F} est la projection sur S du feuilletage stable ou instable d’un certain automorphisme d’ANOSOV ;
- \mathcal{F} est une fibration rationnelle ;
- il existe des entiers p, q, r et s tels qu’à revêtement près nous ayons

$$\text{Bir}(S, \mathcal{F}) = \{(x^p y^q, x^r y^s), (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}.$$

Génériquement une applicaton biméromorphe qui laisse un feuilletage invariant préserve un pinceau de courbes rationnelles ou elliptiques ; CANTAT et FAVRE décrivent les transformations birationnelles dont la dynamique n’est pas triviale et qui ne satisfont pas cette « généralité ».

3. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans la dernière partie de cette introduction nous allons exposer les résultats nouveaux de cette thèse. Rappelons d’abord la conception de la géométrie de KLEIN :

“KLEIN, in his 1872 Erlanger Programme, defined geometry as the study of those properties of figures that remain invariant under a particular group of transformations. [...] “Invariance” and “group” are the unifying concepts in KLEIN’s Erlanger Programme. Groups of transformations had been used in geometry for many years, but KLEIN’s originality consisted in reversing the roles, in making the group the primary object of interest and letting it operate on various geometries, looking for invariants.” ([86])

“Gradually mathematicians came to realize that the way to classify transformations was by a study of the group, without paying much attention to the sort of objects which were transformed, or how these were affected. This point of view was set forth in words of flame in the inaugural dissertation of the greatest synthesist that geometry has ever known, Felix KLEIN. [...] KLEIN states the relation of transformation to group in about this way :

a. Here is a group of transformations. What are the invariants ? What numbers and what geometrical relations are unaltered by the transformations of this group ?

b. What group of transformations will keep this or that geometrical relation unaltered ?” ([31])

Dans cet esprit de nombreux auteurs ont étudié les automorphismes des groupes ; dans le cas des groupes « classiques » on pourra consulter le livre de DIEUDONNÉ ([71]). Par exemple, nous avons le :

THÉORÈME 6 ([71]). *Le groupe d'automorphismes de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ coïncide avec $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$; les automorphismes de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ sont engendrés par les automorphismes intérieurs, la contragrédiente $u \mapsto {}^t u^{-1}$ et les automorphismes du corps \mathbb{C} .*

Ce théorème est « géométrique ». En effet, soient E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} et τ un automorphisme du corps \mathbb{K} . Une **collinéation** (relative à τ) est une application semi-linéaire bijective $\ell : E \rightarrow E$ satisfaisant

$$\begin{aligned} - \ell(x + y) &= \ell(x) + \ell(y) \quad \forall x, y \in E ; \\ - \ell(x\lambda) &= \ell(x)\tau(\lambda) \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Une collinéation donne, par passage au quotient, une application bijective $\bar{\ell}$ de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même. Notons que les collinéations sont précisément les transformations bijectives qui respectent les « relations d'incidence ». Le théorème fondamental de la géométrie projective s'énonce comme suit.

THÉORÈME 7 ([71]). *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps \mathbb{K} . Soit f une application bijective de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même qui préserve l'alignement. Si $n \geq 3$, nous avons $f = \bar{\ell}$ où ℓ désigne une collinéation relative à un certain automorphisme de corps.*

La démonstration du Théorème 6 présentée par DIEUDONNÉ repose sur le fait que tout automorphisme de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ provient par passage au quotient d'un automorphisme de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ et sur l'étude de certains éléments de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ d'ordre 2, les « involutions extrémales ». Ce résultat peut être retrouvé en étudiant les sous-groupes abéliens et résolubles maximaux de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$.

En 1963, WHITTAKER montre que tout isomorphisme entre les groupes d'homéomorphismes de deux variétés topologiques connexes est induit par un homéomorphisme entre les variétés elles-mêmes ([144]) ; FINE et SCHWEIGERT ([79]), WECHSLER ([142]), GERSTENHABER ([82]) avaient déjà obtenu des résultats dans ce sens dans les années 50. En 1982, FILIPKIEWICZ propose un résultat semblable pour les variétés différentiables ; si M est une variété de classe \mathcal{C}^k , notons $\mathrm{Diff}^k(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^k sur M .

THÉORÈME 8 ([78]). *Soient M et N deux variétés réelles connexes respectivement de classe \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^j . Si $\varphi : \mathrm{Diff}^k(M) \rightarrow \mathrm{Diff}^j(N)$ est un isomorphisme de groupes, alors $k = j$ et il existe un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^k tel que, pour tout f dans $\mathrm{Diff}^k(M)$, on ait :*

$$\varphi(f) = \psi f \psi^{-1}.$$

FILIPKIEWICZ reprend l'idée de WHITTAKER : il montre qu'un isomorphisme de groupes φ induit une bijection ψ entre les stabilisateurs de points de M et ceux de N . D'après un résultat de TAKENS, si $j = k = \infty$, alors ψ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme

([139]) ; dans le cas général, FILIPKIEWICZ utilise un résultat de MONGTGOMERY et ZIPPIN sur les groupes de LIE agissant par difféomorphismes sur les variétés pour montrer que $k = j$ et que ψ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme ([113]). Nous renvoyons à [7, 8, 9] pour des résultats analogues dans différents contextes (groupes des difféomorphismes qui préservent une forme volume, une forme de contact ou une forme symplectique mais aussi groupes d'homéomorphismes de variété connexe lisse préservant une « bonne »⁸ mesure de RADON).

Si M est une surface de RIEMANN de genre supérieur ou égal à 2, alors le groupe des difféomorphismes qui préservent la structure complexe est fini. Il n'y a dans ce cadre aucun espoir d'obtenir une variante du théorème de FILIPKIEWICZ. Plus généralement si M est une variété complexe compacte de type général, alors le groupe d'automorphismes de M est fini et souvent il est trivial. À l'opposé considérons un exemple de variété homogène. Le groupe d'automorphismes du tore \mathbb{C}/Γ est, pour tout réseau Γ générique, le produit semi-direct $\mathbb{C}/\Gamma \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; ces groupes sont donc tous isomorphes à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, indépendamment de la structure complexe. Un résultat analogue est valable pour les tores \mathbb{C}^n/Γ où Γ est un réseau générique de \mathbb{C}^n .

Dans les Chapitres 1, 2 et 3 nous parlerons de **l'action d'un isomorphisme du corps \mathbb{C} sur un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 (resp. une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$)** ; expliquons de quoi il s'agit. Soit V une variété algébrique complexe définie sur \mathbb{Q} ; notons $\text{Aut}(V)$ le groupe des biholomorphismes de V et $\text{Bir}(V)$ le groupe des transformations birationnelles de V . Puisque V est définie sur \mathbb{Q} , un automorphisme τ du corps \mathbb{C} induit un isomorphisme $\tau(\cdot)$ de $\text{Aut}(V)$ (resp. $\text{Bir}(V)$) : par exemple lorsque $V = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, à un élément f de $\text{Bir}(V)$ nous associons l'élément $\tau(f)$ obtenu en faisant agir τ sur les coefficients de f exprimé en coordonnées homogènes.

Commençons par considérer le cas de l'espace affine complexe. En dimension 1, le groupe d'automorphismes de \mathbb{C} coïncide avec le groupe affine qui est un groupe de LIE complexe de dimension 2 ; nous avons le résultat suivant sans doute bien connu :

PROPOSITION 9. *Soit ϕ un automorphisme du groupe des transformations affines de la droite complexe ; ϕ est la composée d'un automorphisme intérieur et de l'action d'un isomorphisme du corps \mathbb{C} .*

À partir de la dimension 2, le groupe d'automorphismes de \mathbb{C}^n n'est plus de dimension finie, même si nous ne considérons que les automorphismes polynomiaux. L'étude de ces groupes, tant dynamique qu'algébrique, est pertinente ([23, 81, 138]).

⁸ Une « bonne » mesure de RADON est une mesure de RADON μ telle que $\mu(\{p\}) = 0$ et $\mu(\Omega) > 0$ pour tout ouvert Ω non vide.

Dans [3], AHERN et RUDIN montrent que $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ et $\text{Aut}(\mathbb{C}^\ell)$ sont isomorphes si et seulement si $\ell = n$; leur preuve s'adapte textuellement au cas des groupes d'automorphismes polynomiaux $\text{Aut}[\mathbb{C}^n]$. Dans l'esprit du théorème de FILIPKIEWICZ il est naturel de chercher à décrire le groupe d'automorphismes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^n]$ pour $n \geq 2$; nous répondons à cette question pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Nous disposons de deux types d'automorphismes évidents pour ce groupe :

- les automorphismes intérieurs;
- ceux associés aux automorphismes de corps.

Nous montrons que ces deux familles d'automorphismes engendrent le groupe d'automorphismes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Plus généralement, on a le :

THÉORÈME 10. *Soient \mathbb{K} un corps commutatif non dénombrable de caractéristique nulle et \mathcal{A} le groupe d'automorphismes polynomiaux du plan affine \mathbb{K}^2 . Soit φ un automorphisme du groupe \mathcal{A} . Il existe ψ dans \mathcal{A} et τ un automorphisme du corps \mathbb{K} tels que, pour tout f dans \mathcal{A} , on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Si $\text{Int}(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des automorphismes intérieurs de \mathcal{A} , le groupe $\text{Aut}(\mathcal{A})$ coïncide donc avec le produit semi-direct $\text{Int}(\mathcal{A}) \rtimes \text{Aut}(\mathbb{K}, +, \cdot)$ où $\text{Aut}(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est le groupe d'automorphismes du corps \mathbb{K} .

Remarquons par exemple que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les automorphismes de \mathcal{A} sont intérieurs. L'hypothèse de non dénombrabilité est nécessaire pour utiliser une caractérisation algébrique des automorphismes de type HÉNON dûe à LAMY ([100]) et celle sur la caractéristique lorsque nous utilisons l'argument de linéarisation de CARTAN, BOCHNER (Lemme 1.8). Nous obtenons comme corollaire, grâce à une autre caractérisation des automorphismes de type HÉNON, le même énoncé pour un corps dénombrable et algébriquement clos. Une autre conséquence directe est la suivante : *l'obstruction à ce qu'un automorphisme soit intérieur se lit au niveau de l'action sur le déterminant jacobien.*

Certains auteurs se sont intéressés au semi-groupe $\text{End}(M)$ des endomorphismes d'une variété complexe M . En particulier, BUZZARD et MERENKOV ont montré l'énoncé qui suit : *soit M une variété complexe non réduite à un point ; si $\varphi : \text{End}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{End}(M)$ est un morphisme de semi-groupes surjectif, φ est la conjugaison par un difféomorphisme holomorphe ou anti-holomorphe de \mathbb{C}^n sur M (voir [17]).* Nous obtenons un énoncé analogue au Théorème 10 pour le semi-groupe des endomorphismes polynomiaux du plan affine \mathbb{K}^2 .

La stratégie de preuve du Théorème 10 est la suivante. Soit φ un automorphisme de \mathcal{A} ; il s'agit de le modifier afin qu'il fixe certains sous-groupes de \mathcal{A} bien choisis, les modifications permises étant les conjugaisons par un élément de \mathcal{A} et l'action d'un isomorphisme du corps \mathbb{K} . La difficulté réside en le fait qu'à chaque modification de φ , il faut continuer à préserver les groupes fixés par φ . À partir des travaux de

LAMY ([100]), nous établissons un critère de rigidité pour le groupe élémentaire ce qui permet de supposer E fixé par φ . Grâce à un argument classique de moyennisation (CARTAN-BOCHNER), nous montrons qu'à conjugaison par un élément de E près, le groupe F engendré par les involutions $(-x, y)$ et $(x, -y)$ est invariant par φ . Ensuite le groupe diagonal

$$D = \{(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}$$

commutant à F , on constate que $\varphi(D) = D$. En utilisant l'action de D sur le groupe des translations

$$T = \{(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\},$$

nous obtenons $\varphi(T) = T$. Plus précisément les groupes

$$T_1 = \{(x, y) \mapsto (x + \alpha, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad T_2 = \{(x, y) \mapsto (x, y + \beta) \mid \beta \in \mathbb{C}\}$$

sont invariants par φ . Nous en déduisons que φ fixe les groupes

$$D_1 = \{(x, y) \mapsto (\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{(x, y) \mapsto (x, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}.$$

Ainsi, pour tous α, β dans \mathbb{C}^* et r, s dans \mathbb{C} , nous avons :

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\varphi_1(\alpha x + r), \varphi_2(\beta y + s)).$$

À conjugaison et automorphisme de corps près, les groupes T_i et D_i sont laissés invariants point par point ; ceci résulte entre autres de la Proposition 9. Il s'en suit que E est invariant point par point par φ . Les groupes E et A engendrent \mathcal{A} ; par ailleurs $S \subset E$ et $(x, x + y)$ engendrent A . Il suffit donc pour déterminer l'image de \mathcal{A} par φ de déterminer $\varphi(x, x + y)$. Les égalités

$$\varphi(x, x + y)\varphi(x + \alpha, y + \beta) = \varphi(x + \alpha, y + \alpha + \beta)\varphi(x, x + y)$$

et

$$\varphi(x, x + y)\varphi(\alpha x, \alpha y) = \varphi(\alpha x, \alpha y)\varphi(x, x + y)$$

permettent de montrer que $\varphi(x, x + y) = (x, x + y)$.

Au Chapitre 2 nous généralisons, via des techniques complètement différentes, le Théorème 10 au groupe de CREMONA.

THÉORÈME 11. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Il existe un automorphisme τ du corps \mathbb{C} et ψ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ tels que, pour toute transformation birationnelle f , on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Autrement dit, le groupe des automorphismes extérieurs de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ s'identifie au groupe des automorphismes du corps \mathbb{C} .

Nous en déduisons un énoncé analogue pour le semi-groupe des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (Corollaire 2.36) et le :

COROLLAIRE 12. *Soient S une surface projective complexe et φ un isomorphisme entre $\text{Bir}(S)$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Il existe une transformation birationnelle $\psi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et un automorphisme τ du corps \mathbb{C} tels que, pour tout f dans $\text{Bir}(S)$, on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Nous constatons que le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}(x, y)$ est isomorphe au groupe des automorphismes de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

Présentons en quelques mots l'idée de la démonstration du Théorème 11. Rappelons que tout groupe maximal de transformations birationnelles qui préservent une fibration rationnelle donnée est birationnellement conjugué au **groupe J de JONQUIÈRES**, groupe des transformations birationnelles qui laissent la fibration $y = \text{cte}$ invariante. Un élément f de J permute les fibres de la fibration et induit donc un isomorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *i.e.* un élément π_f de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Notons π le morphisme de J dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ qui à f associe π_f . Remarquons que l'image par φ d'un sous-groupe abélien maximal du groupe de CREMONA est encore abélien maximal ; la compréhension de l'action de φ repose donc naturellement sur la description de ce type de groupe. Nous commençons par faire l'observation suivante : *tout élément d'un sous-groupe abélien non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ laisse invariant un champ de vecteurs rationnel non nul* (Lemme 2.4). Ceci permet d'utiliser les travaux de CANTAT et FAVRE sur les symétries des feuilletages des surfaces ([19]) ; nous obtenons alors l'énoncé qui suit : *soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; ou bien G possède des éléments de torsion, ou bien G préserve une fibration rationnelle *i.e.* est à conjugaison près contenu dans J . Dans le but de montrer en particulier qu'à conjugaison près φ laisse J invariant, nous sommes amenés à étudier les sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables G de J ; nous raisonnons suivant la nature du sous-groupe $\pi(G)$ de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ qui peut être trivial, le groupe à quatre éléments $\{y, -y, 1/y, -1/y\}$, un groupe d'homothéties ou de translations.*

THÉORÈME 13. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Il satisfait l'une des propriétés suivantes :*

- G contient un élément de torsion ;
- G est conjugué à $J_a = \{(x, y) \mapsto (x + a(y), y) \mid a \in \mathbb{C}(y)\}$;
- G est conjugué à $T = \{(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$;
- tout sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur G est virtuellement résoluble.

REMARQUE 1. Voici deux propriétés qui permettent de distinguer J_a des autres sous-groupes abéliens maximaux de J :

- le groupe J_a ne contient pas d'élément de torsion ;

– le groupe non virtuellement résoluble

$$\{(a(y)x + b(y), \nu(y)) \mid a \in \mathbb{C}(y)^*, b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\}$$

agit par conjugaison sur J_a .

Les deux énoncés précédents ajoutés à la Remarque 1 assurent que si φ désigne un automorphisme du groupe de CREMONA, alors $\varphi(J_a)$ est conjugué à J_a ; ainsi, quitte à composer φ par un automorphisme intérieur de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, nous avons $\varphi(J_a) = J_a$. Nous montrons ensuite qu'à conjugaisons près, les groupes T_1, T_2, D_1 et D_2 sont invariants par φ et ce sans modifier le fait que J_a soit fixé par φ . Ainsi φ induit deux automorphismes du groupe des transformations affines de la droite : pour tout α, β dans \mathbb{C}^* et r, s dans \mathbb{C} , nous avons

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\varphi_1(\alpha x + r), \varphi_2(\beta y + s)).$$

Par suite, quitte à composer φ par un automorphisme intérieur et un isomorphisme du corps \mathbb{C} , les groupes T et D sont laissés invariants point par point (Proposition 9). Nous constatons après ces modifications que les involutions $(x, 1/y), (y, x)$ et $(1/x, 1/y)$ sont fixées par φ . Or le groupe engendré par $D, T, (y, x)$ et $(x, 1/y)$ contient $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$; ces groupes et involutions étant invariants point par point par φ , nous obtenons, grâce au Théorème 1, le résultat annoncé.

L'étude des sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de J nous a conduit à établir certains résultats de forme normale; par exemple, nous obtenons : *soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de J tel que $G_0 = \ker \pi \cap G$ soit non trivial et contenu dans J_a . Si $\pi(G)$ est un sous-groupe non dénombrable d'homothéties, alors G est conjugué à $\{(x + a, by) \mid a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*\}$.*

Dans un troisième Chapitre, nous nous intéressons aux représentations de certains réseaux de groupes de LIE dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; cette étude ainsi que les résultats de [12] laissent à penser que le groupe de CREMONA se comporte comme un groupe de rang 2.

Rappelons quelques définitions. Le **rang réel** ou **\mathbb{R} -rang** d'un groupe de LIE semi-simple connexe d'algèbre de LIE \mathfrak{g} est l'entier maximal r tel qu'il existe une sous-algèbre abélienne \mathbb{R}^r de \mathfrak{g} dont l'image par la représentation adjointe est diagonalisable sur \mathbb{R} . Soient G un groupe localement compact, \mathcal{H} un espace de HILBERT et $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateurs unitaires sur \mathcal{H} . Une représentation de G dans \mathcal{H} est un morphisme $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tel que l'application $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ associée soit continue. Soient $\varepsilon > 0$ et Ω une partie compacte de G ; un vecteur unité ξ de \mathcal{H} est (ε, Ω) -invariant si $\|\rho(g)\xi - \xi\| < \varepsilon$ pour tout g dans Ω . On dit que ρ possède presque un vecteur invariant si, pour tout (ε, Ω) , il existe un vecteur unité (ε, Ω) -invariant. La représentation ρ possède des vecteurs invariants non nuls s'il existe η dans \mathcal{H} non nul tel que $\rho(g)\eta = \eta$ pour tout g dans G . Le groupe G a la **propriété (T)** ou est un **groupe de KAZHDAN** si toute représentation hilbertienne de G qui possède presque

des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls. Par exemple tout groupe de LIE réel simple connexe de rang réel supérieur ou égal à 2 est un groupe de KAZHDAN (*voir* [69]).

Afin de généraliser les travaux de MARGULIS sur les représentations linéaires des réseaux de groupes de LIE réels simples de rang réel strictement supérieur à 1 (*voir* [108, 141]) aux représentations non linéaires, ZIMMER propose d'étudier les actions des réseaux sur les variétés compactes ([149, 150, 151, 152]). L'une des principales conjectures de ce programme est la suivante : *soient G un groupe de LIE réel simple connexe et Γ un réseau⁹ de G . S'il existe un morphisme d'image infinie de Γ dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte M , le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension de M .*

Il y a eu de nombreux travaux dans cette direction. En 1993, GHYS étudie les groupes engendrés par des difféomorphismes analytiques réels proches de l'identité sur une variété compacte ; il obtient en particulier que *tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ est métabélien* et que *si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$, avec $n \geq 4$, alors tout morphisme de Γ dans $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ est d'image finie* ([83]). Dans [146], WITTE considère G un \mathbb{Q} -groupe algébrique \mathbb{Q} -simple de \mathbb{Q} -rang supérieur ou égal à 2 et Γ un sous-groupe arithmétique de G ; il montre qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur Γ préservée par la multiplication à droite. La preuve de cette propriété algébrique repose en partie sur des résultats de AULT ([6]) et RHEMTULLA ([125]) concernant les ordres totaux dans les groupes nilpotents ; elle est aussi basée sur l'étude des \mathbb{Q} -systèmes de racines de G et sur les sous-groupes nilpotents de Γ engendrés par un sous-groupe de \mathbb{Q} -racines de G intersecté avec Γ . Il en déduit que *toute action continue d'un sous-groupe arithmétique de G sur \mathbb{S}^1 ou sur la droite réelle est d'image finie*. L'hypothèse relative au \mathbb{Q} -rang est forte, le théorème de WITTE s'applique donc à une classe restreinte de réseaux, classe dont il sera question dans le Chapitre 3 ; il n'en est pas de même pour l'énoncé suivant dû à GHYS ([84]). *Soit G un groupe de LIE semi-simple, connexe, de rang réel supérieur ou égal à 2 et n'ayant pas de facteur simple isomorphe à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Si Γ est un réseau irréductible de G et ρ un morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{S}^1 qui préservent l'orientation, alors l'image de ρ est finie*. Notons qu'un cas particulier de cet énoncé a aussi été démontré par BURGER et MONOD lors de leur étude de la cohomologie bornée des réseaux ([16]). En 2002, dans le même esprit, NAVAS obtient que *si Γ est un groupe de KAZHDAN et φ un morphisme de Γ dans le groupe $\text{Diff}^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$, avec $\alpha > 1/2$, alors $\varphi(\Gamma)$ est fini* ([116]).

Notons que FERES établit des résultats lorsque l'action préserve une forme volume ou une structure géométrique ([76, 77]). Dans le reste de ce paragraphe, S est une surface orientée, fermée et Ω une forme volume lisse. POLTEROVICH se place dans le cadre suivant : *soient G un groupe de LIE réel, semi-simple, connexe, sans facteur*

⁹ Un **réseau** d'un groupe G est un sous-groupe discret de covolume fini.

compact, de centre fini, de rang réel supérieur ou égal à 2 et Γ un réseau irréductible non co-compact de G . Supposons que le genre de S soit supérieur ou égal à 2 ; tout morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes \mathcal{C}^∞ de S qui préservent Ω est d'image finie ([122]). Soit Γ un groupe presque simple¹⁰ contenant un sous-groupe isomorphe au groupe des matrices triangulaires supérieures ; FRANKS et HANDEL prouvent que tout morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes de S qui préservent Ω est d'image finie ([80]).

FARB et SHALEN s'intéressent aux actions analytiques réelles de réseaux sur certaines variétés ; soient G un groupe de LIE semi-simple, de rang réel supérieur ou égal à 2 et Γ un réseau irréductible de G . Le réseau Γ est dit « 1-big » s'il vérifie l'une des conditions suivantes :

- son \mathbb{Q} -rang est supérieur ou égal à 2 ;
- le centralisateur d'un élément d'ordre infini de Γ contient un sous-groupe isomorphe à un réseau irréductible d'un groupe de LIE semi-simple de rang réel supérieur ou égal à 2.

Par induction, Γ est dit « $(k + 1)$ -big » si le centralisateur d'un élément d'ordre infini de Γ est un sous-groupe isomorphe à un réseau « k -big ». Dans [75], FARB et SHALEN montrent, entre autres, que *tout morphisme d'un réseau « 1-big » (resp. « 2-big ») dans \mathbb{S}^1 (resp. dans une surface compacte distincte de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et de la bouteille de KLEIN) est d'image finie.*

Plus récemment, en 2004, CANTAT a résolu cette conjecture dans le cas particulier des actions holomorphes sur les variétés kählériennes compactes : *soient M une variété complexe compacte kählérienne et $\text{Aut}(M)$ le groupe de ses difféomorphismes holomorphes ; soient G un groupe de LIE réel, simple, connexe et Γ un réseau de G . S'il existe un morphisme de Γ dans $\text{Aut}(M)$ dont l'image est infinie, alors le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension complexe de M (voir [18]).* Pour montrer cet énoncé, il utilise des résultats sur les groupes de difféomorphismes des variétés complexes compactes ([14, 102]), sur les réseaux et sous-groupes de CARTAN de G (voir [123]) et sur les groupes abéliens d'automorphismes d'une variété kählérienne ([73]).

Signalons enfin l'existence d'un énoncé analogue dans le cadre des automorphismes polynomiaux du plan complexe dû à CANTAT et LAMY ([20]) que nous évoquerons plus en détail au Chapitre 3, §1.2.

Dans l'esprit des résultats précédents nous montrons le :

THÉORÈME 14. *Soit G un \mathbb{Q} -groupe algébrique \mathbb{Q} -simple de \mathbb{Q} -rang r . Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbb{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si ρ est d'image infinie, alors $r \leq 2$.*

¹⁰ Un groupe **presque simple** est un groupe dont tous les sous-groupes distingués sont finis ou d'indice fini.

De plus, si $r = 2$ et ρ est d'image infinie, alors G possède un système de \mathbb{Q} -racines de type A_2 et l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Nous en déduisons le :

COROLLAIRE 15. *Soit G un \mathbb{Q} -groupe algébrique \mathbb{Q} -simple de \mathbb{Q} -rang supérieur ou égal à 3. Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbb{Z})$ et M une surface de KÄHLER compacte. Tout morphisme de Γ dans le groupe des transformations birationnelles de M est d'image finie.*

La preuve du Théorème 14 repose en particulier sur le fait suivant¹¹ : le système de \mathbb{Q} -racines d'un \mathbb{Q} -groupe algébrique \mathbb{Q} -simple de \mathbb{Q} -rang supérieur ou égal à 3 contient un sous-système de type A_3 ou B_2 ; nous nous ramenons donc à l'étude des morphismes d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ et de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Pour ces groupes nous obtenons les deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 16. *1) Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et ρ un morphisme injectif de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Alors ρ coïncide, à conjugaison birationnelle près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution $u \mapsto {}^t u^{-1}$.*

2) Si un morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA est d'image infinie, alors $n \leq 3$.

THÉORÈME 17. *Il n'existe pas de morphisme injectif d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA.*

Avant de donner une idée de la preuve de l'énoncé 16, rappelons quelques définitions et résultats. Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a pour présentation :

$$\langle e_{ij}, i \neq j \mid [e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{si } i \neq l \text{ et } j \neq k \\ e_{il} & \text{si } i \neq l \text{ et } j = k \\ e_{kj}^{-1} & \text{si } i = l \text{ et } j \neq k \end{cases}, (e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \mathrm{Id} \rangle.$$

Les e_{ij}^q engendrent des sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ appelés **groupes de congruence** et notés $\Gamma_3(q)$; on dira que les e_{ij}^q (resp. e_{ij}) sont les **générateurs standards** de $\Gamma_3(q)$ (resp. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$). Remarquons qu'ils satisfont des relations similaires aux e_{ij} (seule la relation $(e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \mathrm{Id}$ n'a pas d'analogue). Les $\Gamma_3(q)$ contiennent de nombreux k -groupes de HEISENBERG, i.e. de nombreux groupes ayant pour présentation

$$\langle f, g, h \mid [f, g] = h^k, [f, h] = [g, h] = \mathrm{id} \rangle.$$

La **longueur** d'un élément f d'un groupe de type fini $G = \{a_1, \dots, a_k\}$ est le plus petit entier p pour lequel il existe une suite (s_1, \dots, s_p) d'éléments de $\{a_1, \dots, a_k, a_1^{-1}, \dots, a_k^{-1}\}$ telle que $f = s_1 \dots s_p$; nous noterons $\|f\|$ la longueur de f . Un élément

¹¹ Merci à D. WITTE de m'avoir signalé ceci.

f d'un groupe de type fini G est **distordu** s'il est d'ordre infini et si la quantité $\lim_n \|f^n\|/n$ est nulle.

Comme FRANKS et HANDEL ([80]), nous nous appuyons sur la présence de k -groupes de HEISENBERG dans $\Gamma_3(q)$; tout k -groupe de HEISENBERG contient un élément distordu et l'image d'un tel élément est de premier degré dynamique¹² égal à 1. Nous obtenons ainsi que le premier degré dynamique de l'image des générateurs standards de $\Gamma_3(q)$ vaut 1. Alors, d'après [72], nous avons pour chaque générateur standard e_{ij}^q : ou bien $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration (rationnelle ou elliptique), ou bien $\rho(e_{ij}^q)$ est birationnellement conjugué à un automorphisme dont une puissance est isotope à l'identité. Les relations dans $\Gamma_3(q)$ assurent que si l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ fixe une unique fibration, alors tous la fixent ; nous avons donc l'alternative suivante :

- l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration (rationnelle ou elliptique),
- chaque $\rho(e_{ij}^q)$ est birationnellement conjugué à un automorphisme dont une puissance est isotope à l'identité.

Commençons par considérer la première éventualité. Comme un groupe de transformations birationnelles du plan projectif complexe qui fixent une fibration elliptique est virtuellement métabélien et que Γ ne l'est pas, cette possibilité est exclue. Un groupe de transformations birationnelles qui préservent une fibration rationnelle est un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; nous montrons, puisque Γ est un groupe de KAZHDAN, que ρ ne peut être injectif. Envisageons maintenant la seconde éventualité. Soient f , g et h trois éléments de Γ qui engendrent un groupe de HEISENBERG. Supposons que f , g et h soient conjugués à un automorphisme dont une puissance est isotope à l'identité; nous montrons qu'il existe une surface S , une transformation birationnelle $\eta : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow S$ et un entier k tels que $\eta\rho(f)^k\eta^{-1}$, $\eta\rho(g)^k\eta^{-1}$ et $\eta\rho(h)^k\eta^{-1}$ soient des automorphismes de S isotopes à l'identité. Nous sommes donc ramenés à considérer les représentations des groupes de HEISENBERG dans le groupe d'automorphismes d'une surface minimale. Cette étude ainsi que les résultats de CANTAT et LAMY ([20]) permettent de conclure. La seconde assertion du Théorème 16 découle de la première.

Ensuite, par des techniques analogues, nous montrons que le groupe des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures à coefficients entiers et valant 1 sur la diagonale, ne s'injecte pas dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ dès que $n \geq 4$; ceci nous permet de montrer directement la seconde assertion du Théorème 16.

Pour finir nous redémontrons le Théorème 11 à l'aide du Théorème 16; les techniques utilisées sont complètement différentes de celles du Chapitre 2.

¹² Soient S une surface rationnelle et f un élément de $\mathrm{Bir}(S)$. Le **premier degré dynamique** d'une transformation birationnelle f est défini par : $\lambda(f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |(f^n)^*|^{1/n}$ où f^* désigne l'application linéaire induite par f sur $\mathrm{H}^{1,1}(S, \mathbb{R})$ et $|\cdot|$ une norme sur $\mathrm{End}(\mathrm{H}^{1,1}(S, \mathbb{R}))$.

Le Chapitre 4 est un « chapitre expérimental » qui traite de la « dynamique » de certaines transformations birationnelles. Les applications de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type HÉNON sont réputées « avoir de la dynamique » ; elles possèdent un ensemble de JULIA non vide, de nombreux points périodiques hyperboliques. . . LAMY montre que de telles applications ont un centralisateur dénombrable et que ce sont les seules à avoir cette propriété ([100]). D'après FRIEDLAND et MILNOR ([81]), un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 qui n'est pas de type HÉNON est conjugué à un élémentaire qui préserve la fibration $y = \text{cte}$; ces éléments « n'admettent pas de dynamique » (très souvent ils sont conjugués à des transformations affines). Nous donnons des exemples de transformations birationnelles qui semblent contredire cette philosophie ; ces transformations

- préservent une fibration rationnelle ;
- ont un premier degré dynamique égal à 1 (*voir* Lemme 4.5) ;
- semblent (expériences numériques) avoir des exposants de LYAPUNOV constants égaux à 0 ;
- ont un centralisateur qui est une extension finie de \mathbb{Z} (*voir* Proposition 4.4) ;
- semblent « admettre de la dynamique » : nous montrons qu'au voisinage d'un certain point l'adhérence de l'orbite d'un point générique est un tore (Proposition 4.2), qu'au voisinage d'un autre point c'est un cercle (Proposition 4.3) et des simulations numériques montrent qu'entre ces deux zones règne un certain chaos.

Dans l'Annexe A nous présentons une preuve du Théorème de NETHER dûe à ALEXANDER ([5]).

Pour finir nous donnons, dans l'Annexe B, les procédures Maple utilisées au Chapitre 4.

RÉFÉRENCES DE L'INTRODUCTION

- [1] *Algebraic surfaces*. By the members of the seminar of I. R. Šafarevič. Translation edited, with supplementary material, by K. Kodaira and D. C. Spencer. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 75 (1965). American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.
- [2] S. S. ABHYANKAR & T. T. MOH. Embeddings of the line in the plane. *J. Reine Angew. Math.*, 276 :148–166, 1975.
- [3] P. AHERN & W. RUDIN. Periodic automorphisms of \mathbb{C}^n . *Indiana Univ. Math. J.*, 44(1) :287–303, 1995.
- [4] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [5] J. W. ALEXANDER. On the factorization of Cremona plane transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17(3) :295–300, 1916.
- [6] J. C. AULT. Right-ordered locally nilpotent groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 4 :662–666, 1972.
- [7] A. BANYAGA. On isomorphic classical diffeomorphism groups. I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(1) :113–118, 1986.
- [8] A. BANYAGA. *The structure of classical diffeomorphism groups*, volume 400 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
- [9] A. BANYAGA. Isomorphisms between classical diffeomorphism groups. In *Geometry, topology, and dynamics (Montreal, PQ, 1995)*, volume 15 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 1–15. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [10] L. BAYLE & A. BEAUVILLE. Birational involutions of \mathbb{P}^2 . *Asian J. Math.*, 4(1) :11–17, 2000. Kodaira’s issue.
- [11] A. BEAUVILLE & J. BLANC. On Cremona transformations of prime order. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(4) :257–259, 2004.
- [12] A. BEAUVILLE. p-elementary subgroups of the Cremona group. *arXiv :math.AG/0502123*.
- [13] E. BERTINI. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. *Brioschi Ann.*, (2) VIII :254–287, 1877.
- [14] S. BOCHNER & D. MONTGOMERY. Locally compact groups of differentiable transformations. *Ann. of Math. (2)*, 47 :639–653, 1946.
- [15] M. BRUNELLA. *Birational geometry of foliations*. Monografías de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2000. Available electronically at <http://www.impa.br/Publicacoes/Monografias/Abstracts/brunella.ps>.
- [16] M. BURGER & N. MONOD. Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(2) :199–235, 1999. Erratum, 1(3) :338, 1999.

- [17] G. T. BUZZARD & S. MERENKOV. Maps conjugating holomorphic maps in \mathbb{C}^n . *Indiana Univ. Math. J.*, 52(5) :1135–1146, 2003.
- [18] S. CANTAT. Version kählérienne d’une conjecture de Robert J. Zimmer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(5) :759–768, 2004.
- [19] S. CANTAT & C. FAVRE. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :199–235, 2003. Erratum, 582 :229–231, 2005.
- [20] S. CANTAT & S. LAMY. Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan. *Preprint*, 2004.
- [21] G. CASTELNUOVO. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36 :861–874, 1901.
- [22] D. CERVEAU, Communication personnelle.
- [23] D. CERVEAU, E. GHYS, N. SIBONY & J. C. YOCOZ. Dynamique et géométrie complexes, volume 8 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 1999.
- [24] M. CHASLES. *Aperçu historique sur l’origine et le développement des méthodes en géométrie*. Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1989. Reprint of the 1837 original.
- [25] M. CHASLES. Propriétés des courbes à double courbure et de troisième ordre. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1857.
- [26] H. CLEMENS, J. KOLLÁR & S. MORI. Higher-dimensional complex geometry. *Astérisque*, (166) :144 pp. (1989), 1988.
- [27] W. K. CLIFFORD. Analysis of Cremona’s transformations. *Math. Papers, MacMillan, London*, 538–542, 1882.
- [28] A. CORTI, J. KOLLÁR & K. SMITH. *Rational and nearly rational varieties*, volume 92 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [29] P. M. COHN. *Free rings and their relations*, volume 19 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press Inc., London, second edition, 1985.
- [30] J. L. COOLIDGE. *A treatise on algebraic plane curves*. Dover Publications Inc., New York, 1959.
- [31] J. L. COOLIDGE. *A history of geometrical methods*. Dover Publications Inc., New York, 1963.
- [32] A. CORTI. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. *J. Algebraic Geom.*, 4(2) :223–254, 1995.
- [33] L. CREMONA. Sulle tangenti sfero-conjugate. *Annali di sc. matem.*, 6 :382–392, 1855.
- [34] L. CREMONA. Intorno ad un teorema di Abel. *Annali di sc. matem.*, 7 :99–105, 1856.
- [35] L. CREMONA. Sur les questions 321 et 322 (voir t. XV, p. 154). *Nouv. ann. de mathem.*, 16 :41–43, 1857.
- [36] L. CREMONA. Solution analytique de la question 344 (Mannheim), (voir t. XV, p. 383). *Nouv. ann. de mathem.*, 16 :79–82, 1857.
- [37] L. CREMONA. Seconde solution de la question 368 (Cayley) (voir p. 192). *Nouv. ann. de mathem.*, 16 :250, 1857.
- [38] L. CREMONA. Seconde solution de la question 369 (voir p. 192). *Nouv. ann. de mathem.*, 16 :251–252, 1857.
- [39] L. CREMONA. Sulle linee del terz’ordine a doppia curvatura. *Annali di matem.*, 1 :164–174, 278–295, 1858.

- [40] L. CREMONA. Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. Teoremi. *Annali di matem.*, 2 :19–29, 1859.
- [41] L. CREMONA. Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. *Annali di matem.*, 2 :201–207, 1859.
- [42] L. CREMONA. Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe. *J. Reine Angew. Math.*, 58 :138–150, 1861.
- [43] L. CREMONA. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. *Bologna Mem.*, 12 :305–436, 1861.
- [44] L. CREMONA. Intorni alle trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell'altra una sola retta. *Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna*, 88–91, 1861-1862.
- [45] L. CREMONA. Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches. *Nouv. ann. de mathem.*, 1 :287–304, 366–378, 436–446, 1862.
- [46] L. CREMONA. Un teorema sulle cubiche. *Giorn. di matem.*, 1 :278–280, 1863.
- [47] L. CREMONA. Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba. *Annali di matem.*, 5 :227–231, 1863.
- [48] L. CREMONA. Nuove ricerche di geometrica pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola goba. *Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna*, 64 :25–28, 1863.
- [49] L. CREMONA. Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba. *Giorn. di matem.*, 2 :122–126, 1864.
- [50] L. CREMONA. Nuove ricerche di geometrica pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola goba. *Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna*, 3 :358–385, 1864.
- [51] L. CREMONA. Nuove ricerche di geometrica pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola goba. *Giorn. di matem.*, 202–210, 1864.
- [52] L. CREMONA. Sopra alcune questioni nelle teoria delle curve piane. *Annali di matem.*, 6 :153–168, 1864.
- [53] L. CREMONA. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna*, 18–21, 1864-1865.
- [54] L. CREMONA. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Mem. dell' acc. d. sc. Bologna*, 5 :3–35, 1865.
- [55] L. CREMONA. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Giorn. di matem.*, 3 :269–280, 363–376, 1865.
- [56] L. CREMONA. Preliminari di una teori geometrica delle superficie. *Bologna Mem.*, 6 :29–78, 1867.
- [57] L. CREMONA. Sulle superficie e le curve che passano pei vertici d'infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba. *Rend. Ist. Lomb.*, 12 :347–359, 1879.
- [58] DARBOUX. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, 1873.
- [59] J. DAUBEN & C. SCRIBA, editors. *Writing the history of mathematics : its historical development*, volume 27 of *Science Networks. Historical Studies*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [60] T. DE FERNEX. On planar Cremona maps of prime order. *Nagoya Math. J.*, 174 :1–28, 2004.
- [61] E. DE JONQUIÈRES. Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples des degrés supérieurs, et théorèmes relatifs à ces courbes. *Annali di matem.*, 1 :110–112, 1858.

- [62] E. DE JONQUIÈRES. De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres. *Nouv. ann. de mathem.*, 3 :97–111, 1864.
- [63] E. DE JONQUIÈRES. Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n . *C. R. CI.*, 720–724, 1886.
- [64] E. DE JONQUIÈRES. Solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations de Cremona. *C. R. CI.*, 857–861, 1886.
- [65] E. DE JONQUIÈRES. Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations de Cremona. *C. R. CI.*, 921–922, 1886.
- [66] E. DE JONQUIÈRES. Etude sur une question d'analyse indéterminée. *Giorn. Mat. Battaglini*, 1–11, 1186.
- [67] E. DE JONQUIÈRES. Sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. *Comptes rendus Paris*, 110–115, 1890.
- [68] E. DE JONQUIÈRES. Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. *Comptes rendus Paris*, 169–173, 1890.
- [69] P. DE LA HARPE & A. VALETTE. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger), *Astérisque*, (175) :158, 1989.
- [70] W. DICKS. Automorphisms of the polynomial ring in two variables. *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona*, 27(1) :155-162, 1983.
- [71] J. A. DIEUDONNÉ. *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin, 1971. Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5.
- [72] J. DILLER & C. FAVRE. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [73] T. C. DINH & N. SIBONY. Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte. *Duke Math. J.*, 123(2) :311–328, 2004.
- [74] W. ENGEL. Ganze Cremona-Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene. *Math. Ann.*, 136 :319–325, 1958.
- [75] B. FARB & P. SHALEN. Real-analytic actions of lattices. *Invent. Math.*, 135(2) :273–296, 1999.
- [76] R. FERES. Affine actions of higher rank lattices. *Geom. Funct. Anal.*, 3(4) :370–394, 1993.
- [77] R. FERES. Actions of discrete linear groups and Zimmer's conjecture. *J. Differential Geom.*, 42(3) :554–576, 1995.
- [78] R. P. FILIPKIEWICZ. Isomorphisms between diffeomorphism groups. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2(2) :159–171, 1982.
- [79] N. J. FINE & G. E. SCHWEIGERT. On the group of homeomorphisms of an arc. *Ann. of Math. (2)*, 62 :237–253, 1955.
- [80] J. FRANKS & M. HANDEL. Area preserving group actions on surfaces. *Geom. Topol.*, 7 :757–771 (electronic), 2003.
- [81] S. FRIEDLAND & J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.
- [82] M. GERSTENHABER. On canonical constructions. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42 :881–883, 1956.

- [83] E. GHYS. Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 24(2) :137–178, 1993.
- [84] E. GHYS. Actions de réseaux sur le cercle. *Invent. Math.*, 137(1) :199–231, 1999.
- [85] M. Kh. GIZATULLIN. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) :909–970, 1134, 1982.
- [86] M. J. GREENBERG. *Euclidean and non-Euclidean geometries*. W. H. Freeman and Company, New York, third edition, 1993. Development and history.
- [87] G. B. GUCCIA. Mémoires sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites. *Giorn. di matem.*, 23, 1885, 48–75.
- [88] A. GUTWIRTH. An inequality for certain pencils of plane curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 :631–638, 1961.
- [89] H. P. HUDSON. *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press, 1927.
- [90] V. A. ISKOVSKIKH. Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*; 40(5(245)) :255–256, 1985.
- [91] V. A. ISKOVSKIKH. Generators in the two-dimensional Cremona group over an unclosed field. *Nova J. Algebra Geom.*, 1(2) :165–183, 1992.
- [92] V. A. ISKOVSKIKH, F. K. KABDYKAIROV & S. L. TREGUB. Relations in a two-dimensional Cremona group over a perfect field. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 57(3) :3–69, 1993.
- [93] V. A. ISKOVSKIKH & S. L. TREGUB. Relations in the two-dimensional Cremona group over a nonclosed field. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 207 :123–152, 1994.
- [94] H. W. E. JUNG. Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen. *J. Reine Angew. Math.*, 180 :97–109, 1939.
- [95] H. W. E. JUNG. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.* 184 :161–174, 1942.
- [96] S. KANTOR. Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. *Mayer & Mullen, Berlin*, 1895.
- [97] S. KANTOR. Théorème fondamental sur les transformations birationnelles à coefficients entiers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 126 :946–949, 1898.
- [98] S. KANTOR. Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren. *Monatsh. f. Math.*, 10 :54–74, 1899.
- [99] O. H. KELLER. Zu einem Satze von H. W. E. Jung über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 186 :78–79, 1944.
- [100] S. LAMY. L'alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.
- [101] S. LAMY. Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, 48(3-4) :291–325, 2002.
- [102] D. I. LIEBERMAN. Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, volume 670 of *Lecture Notes in Math.*, pages 140–186. Springer, Berlin, 1978.
- [103] G. LORIA. L'œuvre scientifique d'Ernest de Jonquières. *Bibliotheca Math.*, 3 :276–322, 1902.

- [104] G. LORIA. Luigi Cremona et son oeuvre mathématique. *Bibliotheca Math.*, 3 :125–195, 1904.
- [105] MAGNUS. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie, 1863.
- [106] L. MAKAR-LIMANOV. On automorphisms of certain algebras. *Candidate's dissertation, Moscow*, 1970.
- [107] J. I. MANIN. Rational surfaces over perfect fields. II. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114) :161–192, 1967.
- [108] G. A. MARGULIS. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [109] K. MATSUKI. *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [110] M. MCQUILLAN. Diophantine approximations and foliations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (87) :121–174, 1998.
- [111] L. G. MENDES. Kodaira dimension of holomorphic singular foliations. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 31(2) :127–143, 2000.
- [112] M. MENGHINI. Notes on the correspondence between Luigi Cremona and Max Noether. *Historia Math.*, 13(4) :341–351, 1986.
- [113] D. MONTGOMERY & L. ZIPPIN. *Topological transformation groups*. Interscience Publishers, New York-London, 1955.
- [114] M. NAGATA. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32 :351–370, 1960.
- [115] M. NAGATA. *On automorphism group of $k[x, y]$* . Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5, 1972.
- [116] A. NAVAS. Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(5) :749–758, 2002.
- [117] M. NÆTHER. Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. *Göttigen Nachr.*, 1–6, 1869.
- [118] M. NÆTHER. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. *Math. Ann.*, 3(2) :161–227, 1870.
- [119] M. NÆTHER. Zur Theorie der eidentigen Ebenentransformationen. *Math. Ann.*, 5(4) :635–639, 1872.
- [120] M. NÆTHER. Luigi Cremona. *Math. Ann.*, 59(1-2) :1–19, 1904.
- [121] I. PAN. Une remarque sur la génération du groupe de Cremona. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(1) :95–98, 1999.
- [122] L. POLTEROVICH. Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry. *Invent. Math.*, 150(3) :655–686, 2002.
- [123] G. PRASAD & M. S. RAGHUNATHAN. Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups. *Ann. of Math. (2)*, 96 :296–317, 1972.
- [124] R. RENTSCHLER. Opérations du groupe additif sur le plan affine. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 267 :A384–A387, 1968.
- [125] A. H. RHEMTULLA. Right-ordered groups. *Canad. J. Math.*, 24 :891–895, 1972.
- [126] F. RONGA & T. VUST. Birational diffeomorphisms of the real projective plane. *Comment. Math. Helv.*, 80(3) :517–540, 2005.

- [127] F. P. RUFFINI. Di un problema d'analisi indeterminata, che si presenta nella teoria della trasformazione delle figure piane. *Rend. di Bol.*, 105–108, 1876.
- [128] F. P. RUFFINI. Risoluzione di 2 equazioni di condizione di trasformazione cremoniana di figure piane. *Mem. di Bologna*, VIII, 1878.
- [129] F. P. RUFFINI. Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche. *Mem. dell' acc. di Bologna*, 1880.
- [130] G. V. SCHIAPARELLI. Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica. *Mem. dell' acc. d. sc. di Torino*, 31 :227–319, 1864.
- [131] H. SCHRÖTER. Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde. *J. Reine Angew. Math.*, 54 :31–47, 1857.
- [132] H. SCHRÖTER. Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung. *J. Reine Angew. Math.*, 56 :27–43, 1859.
- [133] C. SEGRE. Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 26 :377–383, 1901.
- [134] C. SEGRE. La trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36 :872, 1871.
- [135] J. P. SERRE. *Arbres, amalgames, SL_2* . Société mathématique de France, Paris, 1977. Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [136] SEYDEWITZ. Linear-Construction einer Curve doppelter Krümmung. *Archiv der Mathem. und Physic*, 10, 1847.
- [137] I. R. SHAFAREVICH. On some infinite-dimensional groups. *Rend. Mat. e Appl. (5)*, 25(1-2) :208–212, 1966.
- [138] J. SMILLIE. Dynamics in two complex dimensions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, pages 373–382, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [139] F. TAKENS. Characterization of a differentiable structure by its group of diffeomorphisms. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 10(1) :17–25, 1979.
- [140] W. VAN DER KULK. On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wiskunde (3)*, 1 :33–41, 1953.
- [141] E. B. VINBERG, V. V. GORBATSEVICH & O. V. SHVARTSMAN. Discrete subgroups of Lie groups. In *Lie groups and Lie algebras, II*, volume 21 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–123, 217–223. Springer, Berlin, 2000.
- [142] M. T. WECHSLER. Homeomorphism groups of certain topological spaces. *Ann. of Math. (2)*, 62 :360–373, 1955.
- [143] E. WEYR. Ueber Involutionen höherer Grade. *J. Reine Angew. Math.*, 72 :285–292, 1870.
- [144] J. V. WHITTAKER. On isomorphic groups and homeomorphic spaces. *Ann. of Math. (2)*, 78 :74–91, 1963.
- [145] A. WIMAN. Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. *Math. Ann.*, 48(1-2) :195–240, 1896.
- [146] D. WITTE. Arithmetic groups of higher \mathbf{Q} -rank cannot act on 1-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(2) :333–340, 1994.

- [147] D. WRIGHT. Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 331(1) :281–300, 1992.
- [148] D.-Q. ZHANG. Automorphisms of finite order on rational surfaces. *J. Algebra*, 238(2) :560–589, 2001. With an appendix by I. Dolgachev.
- [149] R. J. ZIMMER. Kazhdan groups acting on compact manifolds. *Invent. Math.*, 75(3) :425–436, 1984.
- [150] R. J. ZIMMER. On connection-preserving actions of discrete linear groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4) :639–644, 1986.
- [151] R. J. ZIMMER. Actions of semisimple groups and discrete subgroups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 1247–1258, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.
- [152] R. J. ZIMMER. Lattices in semisimple groups and invariant geometric structures on compact manifolds. In *Discrete groups in geometry and analysis*, volume 67 of *Progr. Math.*, pages 152–210. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

CHAPITRE 1

SUR LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DU PLAN AFFINE

Ce chapitre détaille et complète un article paru dans *J. Algebra* dans lequel nous étudions le groupe des difféomorphismes polynomiaux du plan affine. En particulier nous montrons le :

THÉORÈME 1.1. *Soient \mathbb{K} un corps commutatif non dénombrable de caractéristique nulle et \mathcal{A} le groupe d'automorphismes polynomiaux du plan affine \mathbb{K}^2 . Soit φ un automorphisme du groupe \mathcal{A} . Il existe ψ dans \mathcal{A} et τ un automorphisme du corps \mathbb{K} tels que pour tout f dans \mathcal{A} , on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Si $\text{Int}(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des automorphismes intérieurs de \mathcal{A} , le groupe $\text{Aut}(\mathcal{A})$ coïncide donc avec le produit semi-direct $\text{Int}(\mathcal{A}) \rtimes \text{Aut}(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

Dans tout ce qui suit les corps sont supposés commutatifs.

La première partie de ce chapitre est consacrée à des rappels sur le groupe \mathcal{A} ; puis nous montrons l'analogie du Théorème 1.1 en dimension 1. La troisième partie consiste à établir la rigidité du groupe des transformations élémentaires. Nous nous attaquons ensuite à la démonstration du Théorème 1.1 : il s'agit de « transformer » φ de sorte que certains sous-groupes abéliens maximaux de \mathcal{A} soient invariants par φ . La difficulté est la suivante : supposons que les groupes G_1, \dots, G_i soient fixes par φ ; le but est de modifier φ pour que G_{i+1} soit invariant par φ sans changer le fait que $\varphi(G_1) = G_1, \dots, \varphi(G_i) = G_i$. Puis nous énonçons des conséquences de ce théorème : l'obstruction à ce qu'un automorphisme de \mathcal{A} soit intérieur se lit au niveau de l'action sur le déterminant jacobien ; nous remarquons que le Théorème 1.1 est aussi valable pour un corps \mathbb{k} dénombrable, algébriquement clos et de caractéristique nulle. Enfin nous montrons un analogue du Théorème 1.1 pour le semi-groupe des endomorphismes polynomiaux de \mathbb{K}^2 et \mathbb{k}^2 .

1. DÉFINITIONS ET RAPPELS

Commençons par introduire quelques notions et notations. Soit \mathbb{K} un corps (commutatif). Un système de coordonnées étant fixé sur \mathbb{K}^2 , si f est un élément de $\mathcal{A} = \text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ nous noterons souvent f par ses deux composantes $(f_1(x, y), f_2(x, y))$; par exemple si $f(x, y) = (y, x)$, nous dirons que « f est l'automorphisme (y, x) ». Si f_S est une famille d'éléments de \mathcal{A} , alors $\langle f_S \rangle$ désigne le groupe engendré par la famille f_S .

DÉFINITION 1. Un **automorphisme élémentaire** est un automorphisme du type

$$(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$$

avec α, β dans \mathbb{K}^* , γ dans \mathbb{K} et P dans $\mathbb{K}[y]$; l'ensemble de ces automorphismes forme le **groupe élémentaire E**.

DÉFINITION 2. On appelle **application de HÉNON généralisée** toute application qui s'écrit

$$(y, P(y) - \delta x)$$

où δ appartient à \mathbb{K}^* , P à $\mathbb{K}[y]$ et $\deg P \geq 2$. Nous notons \mathcal{H} l'ensemble des applications

$$\psi g_m \dots g_1 \psi^{-1}$$

où les g_i sont des applications de HÉNON généralisées et ψ un élément de \mathcal{A} . Les éléments de \mathcal{H} seront dits **de type HÉNON**.

Notons **A** le groupe des automorphismes affines

$$\mathbf{A} := \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$$

et **S** := **A** \cap **E**.

Rappelons le résultat suivant dû à FRIEDLAND et MILNOR.

PROPOSITION 1.2 ([23]). *Soit f un automorphisme polynomial de \mathbb{K}^2 . Alors f satisfait l'alternative suivante :*

- f est conjugué à un élément de **E** ou de **A** ;
- f est un élément de \mathcal{H} .

On peut associer à un élément f de $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ le sous-arbre $\text{Fix}(f)$ de \mathcal{T} constitué des sommets et des arêtes fixés par l'action de f . La première éventualité de la Proposition 1.2 correspond à $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$, la seconde à $\text{Fix}(f) = \emptyset$; en effet, le stabilisateur du sommet fE (resp. du sommet fA , resp. de l'arête fS) est le groupe $fE f^{-1}$ (resp. $fA f^{-1}$, resp. $fS f^{-1}$).

À partir de l'action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur \mathcal{T} , LAMY décrit, dans [31], les propriétés de certains sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, valables aussi pour $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$ où \mathbb{k} désigne un corps non dénombrable. Nous en utiliserons certaines dans le texte; précisons-les :

- un groupe non abélien dont chaque élément est conjugué à un automorphisme élémentaire est conjugué à un sous-groupe de E ou de A ,
- les automorphismes de type HÉNON sont caractérisés par la propriété algébrique suivante : h est de type HÉNON si et seulement si son centralisateur est dénombrable (c'est ici que nous utilisons l'hypothèse de non dénombrabilité du corps).

2. LE GROUPE AFFINE DE LA DROITE

PROPOSITION 1.3. Soient \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle et ϕ un automorphisme du groupe $\{az + b \mid a \in \mathbb{k}^*, b \in \mathbb{k}\}$; alors ϕ est la composée d'un automorphisme intérieur et de l'action d'un isomorphisme du corps \mathbb{k} .

DÉMONSTRATION. Les groupes abéliens maximaux du groupe des transformations affines de la droite sont de deux types. Il y a le groupe des translations

$$B = \{z + b \mid b \in \mathbb{k}\}$$

et les groupes de transformations affines qui fixent un point

$$L_{z_0} = \{a(z - z_0) + z_0 \mid a \in \mathbb{k}^*\}.$$

Les groupes L_{z_0} contiennent des éléments de torsion alors que le groupe B n'en contient pas; comme un automorphisme ϕ du groupe des transformations affines de la droite complexe envoie un groupe abélien maximal sur un autre, nécessairement $\phi(B) = B$. Par suite il existe une bijection $\tau_2 : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ telle que pour tout b dans \mathbb{k} :

$$\phi(z + b) = z + \tau_2(b).$$

Puisque ϕ est un morphisme de groupes, τ_2 est additif. L'automorphisme ϕ envoie L_0 sur un autre sous-groupe abélien possédant des éléments de torsion donc sur un certain L_{z_0} . Quitte à conjuguer ϕ par la translation de vecteur z_0 nous pouvons supposer que $\phi(L_0) = L_0$; il existe alors une bijection $\tau_1 : \mathbb{k}^* \rightarrow \mathbb{k}^*$, multiplicative, telle que :

$$\phi(az) = \tau_1(a)z.$$

Soit a dans \mathbb{k}^* ; l'image de $az + a$ par ϕ s'écrit d'une part $\phi(z + a)\phi(az)$ et d'autre part $\phi(az)\phi(z + 1)$, autrement dit $\tau_1(a)z + \tau_2(a) = \tau_1(a)z + \tau_1(a)\tau_2(1)$. Nous en déduisons, pour tout a dans \mathbb{k}^* , l'égalité : $\tau_2(a) = \tau_1(a)\tau_2(1)$; or $\tau_2(1)$ est non nul donc τ_1 est additif. Finalement τ_1 est un isomorphisme de corps et

$$\begin{aligned} \phi(az + b) &= \tau_1(a)z + \tau_2(1)\tau_1(b) \\ &= \tau_1(az + \zeta b) \\ &= \tau_1(\zeta z \circ (az + b) \circ \zeta^{-1}z) \end{aligned}$$

où $\zeta = \tau_1^{-1}(\tau_2(1))$. □

3. RIGIDITÉ DU GROUPE DES AUTOMORPHISMES ÉLÉMENTAIRES

Sauf mention expresse du contraire \mathbb{K} désigne un corps non dénombrable de caractéristique nulle.

Dans le résultat qui suit intervient la caractérisation algébrique des automorphismes de type HÉNON rappelée au §1.

LEMME 1.4. *Si φ est un automorphisme de \mathcal{A} , alors $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.*

DÉMONSTRATION. Un élément g de \mathcal{H} a un centralisateur non dénombrable par suite son image par φ aussi; d'après l'une des propriétés de LAMY ([31]), rappelée au §1, l'image de g par φ est donc de type HÉNON. \square

Notons $\mathbf{E}^{(1)} = [\mathbf{E}, \mathbf{E}] = \{(x + P(y), y + \gamma) \mid P \in \mathbb{K}[y], \gamma \in \mathbb{K}\}$ le groupe dérivé de \mathbf{E} et $\mathbf{E}^{(2)} = \{(x + P(y), y) \mid P \in \mathbb{K}[y]\}$ celui de $\mathbf{E}^{(1)}$.

Nous nous intéressons à l'image de \mathbf{E} par φ . Nous allons montrer que \mathbf{E} est rigide c'est-à-dire qu'à automorphisme intérieur près $\varphi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$. Commençons par caractériser le groupe $\mathbf{E}^{(2)}$.

LEMME 1.5. *Le groupe $\mathbf{E}^{(2)}$ est un sous-groupe abélien maximal de \mathbf{E} .*

DÉMONSTRATION. Soient B un sous-groupe abélien de \mathbf{E} contenant $\mathbf{E}^{(2)}$ et $g = (g_1, g_2)$ un élément de B . Pour tout polynôme P et tout t dans \mathbb{K} , notons $f_{tP} := (x + tP(y), y)$. L'automorphisme g commute aux f_{tP} ; en particulier en dérivant $gf_{tP} = f_{tP}g$ en $t = 0$ nous obtenons :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} P(y) = P(g_2(x, y)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} P(y) = 0.$$

Par suite g_2 ne dépend que de y . L'égalité

$$(2) \quad P(y) \frac{\partial g_1}{\partial x} = P(g_2(y))$$

assure que $\frac{\partial g_1}{\partial x}$ est une fonction polynomiale en y ; comme g est inversible il existe Q dans $\mathbb{K}[y]$ et α dans \mathbb{K}^* tel que $g_1(x, y)$ soit du type $\alpha x + Q(y)$. Ainsi (2) se réécrit :

$$P(y)\alpha = P(g_2(y)).$$

En particulier pour $P \equiv 1$, nous obtenons $\alpha = 1$. Ensuite, en choisissant $P(y) = y$, nous remarquons que $g_2(y) = y$; ceci montre que g appartient à $\mathbf{E}^{(2)}$ et termine la preuve. \square

PROPOSITION 1.6. *Le groupe \mathbf{E} est maximal parmi les sous-groupes résolubles de longueur 3 de \mathcal{A} .*

DÉMONSTRATION. Soit B un groupe résoluble de longueur de résolubilité 3 contenant \mathbf{E} . Le groupe $B^{(2)}$ est abélien et contient $\mathbf{E}^{(2)}$; comme $\mathbf{E}^{(2)}$ est un groupe abélien maximal, nous avons $B^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)}$. Le groupe $B^{(2)}$ est distingué dans B ; pour

tout élément $f = (f_1, f_2)$ de B et tout élément $(x + P(y), y)$ de $\mathbf{E}^{(2)} = B^{(2)}$ il existe une application Θ de $\mathbb{K}[y]$ dans lui-même qui dépend de f telle que

$$(3) \quad f_1(x + P(y), y) = f_1(x, y) + \Theta(P)(f_2(x, y))$$

$$(4) \quad f_2(x + P(y), y) = f_2(x, y).$$

L'égalité (4) implique que f_2 s'écrit $\beta y + \gamma$, avec β dans \mathbb{K}^* et γ dans \mathbb{K} . En dérivant (3) par rapport à x , nous obtenons pour tout P appartenant à $\mathbb{K}[y]$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x + P(y), y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)$$

ce qui conduit à

$$f_1(x, y) = R(y)x + Q(y)$$

où R et Q désignent deux éléments de $\mathbb{K}[y]$. Comme f est un automorphisme, R appartient à \mathbb{K}^* . Par suite B et \mathbf{E} coïncident. \square

Cette propriété algébrique de \mathbf{E} nous permet d'établir la propriété de rigidité annoncée.

PROPOSITION 1.7. *Si φ est un automorphisme de \mathcal{A} , il existe un élément ψ de \mathcal{A} tel que :*

$$\varphi(\mathbf{E}) = \psi \mathbf{E} \psi^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble \mathcal{H} est préservé par l'automorphisme φ (Lemme 1.4); donc chaque élément de $\varphi(\mathbf{E})$ est conjugué à un élément de \mathbf{E} ou de \mathbf{A} . D'après l'une des propriétés établies par LAMY (voir §1), l'image de \mathbf{E} par φ est conjuguée à un sous-groupe de \mathbf{E} ou de \mathbf{A} .

Montrons que si $\varphi(\mathbf{E})$ est conjugué à un sous-groupe de \mathbf{A} , il est conjugué à un sous-groupe de \mathbf{E} . Quitte à faire une conjugaison, nous pouvons supposer que $\varphi(\mathbf{E})$ est contenu dans \mathbf{A} . Le groupe \mathbf{E} étant résoluble, $\varphi(\mathbf{E})$ l'est et de même longueur; ainsi l'image de $\varphi(\mathbf{E})$ par le morphisme « partie linéaire » de \mathbf{A} dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est un sous-groupe résoluble, non virtuellement abélien B de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. La composante neutre \overline{B}_0^Z de l'adhérence de ZARISKI de B est triangulable dans $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{K}})$ donc le groupe $B_0 = B \cap \overline{B}_0^Z$ aussi. Par suite $[B_0, B_0]$ est abélien et tous ses éléments sont du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe B_0 est non abélien; en effet, s'il l'était \overline{B}^Z serait virtuellement abélien et B aussi. Il s'en suit que $[B_0, B_0]$ n'est pas trivial; comme il est distingué dans B tout élément de B est triangulaire et B est conjugué à un sous-groupe de \mathbf{E} .

Dans les deux cas, il existe un automorphisme ψ de \mathbb{K}^2 tel que $\varphi(\mathbf{E})$ soit inclus dans $\psi\mathbf{E}\psi^{-1}$. Par maximalité de \mathbf{E} comme sous-groupe résoluble de longueur 3 de \mathcal{A} , nous avons l'égalité $\varphi(\mathbf{E}) = \psi\mathbf{E}\psi^{-1}$. \square

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL

Nous venons de montrer que, quitte à conjuguer φ par un élément de \mathcal{A} , le groupe \mathbf{E} est envoyé sur lui-même par φ ; dans la suite nous supposons donc que $\varphi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$. Afin de comprendre l'action de φ sur le groupe élémentaire, nous étudions l'image du groupe diagonal par φ , puis celle du groupe des translations.

4.1. Etude du groupe diagonal. Notons $d_{\alpha,\beta}$ l'automorphisme défini par

$$(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y).$$

L'ensemble de ces automorphismes forme le groupe \mathbf{D} des transformations diagonales.

LEMME 1.8. *Tout sous-groupe de \mathbf{E} isomorphe à $F = \langle(-x, y), (x, -y)\rangle$ est conjugué à F dans \mathbf{E} .*

DÉMONSTRATION. Notons B un sous-groupe de \mathbf{E} isomorphe à F . Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \rho : \quad B &\longrightarrow \mathbf{D} \\ (\alpha x + P(y), \beta y + \delta) &\longmapsto (\alpha x, \beta y) \end{aligned}$$

Tout élément du noyau de ρ est périodique de période 2, donc $\ker \rho$ est trivial. Par suite, ρ réalise une bijection de B sur son image. Comme tout élément $(\alpha x + P(y), \beta y + \delta)$ de B est périodique de période 2 nécessairement $\alpha^2 = \beta^2 = 1$. Ainsi $\rho(B) = F$. En particulier B contient un élément f du type $(-x + P(y), -y + \delta)$; il admet un unique point fixe $(\frac{1}{2}P(\frac{\delta}{2}), \frac{\delta}{2})$. Quitte à conjuguer f par une translation, nous pouvons supposer que ce point fixe est $(0, 0)$; ce choix étant fait, f est de la forme

$$(-x + P(y), -y)$$

avec $P(0) = 0$. Or tout élément qui commute à f admet l'origine pour point fixe; donc tous les éléments de B fixent $(0, 0)$.

Par un argument classique de moyennisation (CARTAN, BOCHNER), nous pouvons alors linéariser B par un élément de \mathbf{E} . Notons f_i les éléments de B et posons :

$$g := \sum_{i=0}^3 Df_i(0)^{-1} \circ f_i.$$

Puisque la caractéristique de \mathbb{K} est nulle, l'automorphisme g est un élément de \mathbf{E} et linéarise B :

$$gfl = Df_\ell(0) \sum_{i=0}^3 D(f_i f_\ell)^{-1} (f_i f_\ell)^{-1}(0) = Df_\ell(0)g.$$

Ainsi $B = gFg^{-1}$. □

En particulier, quitte à conjuguer φ par un élément de \mathbf{E} , nous pouvons supposer dans la suite que $\varphi(F) = F$.

COROLLAIRE 1.9. *Si φ est un automorphisme de \mathcal{A} tel que $\varphi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$ et $\varphi(F) = F$, alors \mathbf{D} est invariant par φ .*

DÉMONSTRATION. Le groupe F commute à \mathbf{D} donc F commute à $\varphi(\mathbf{D}) \subset \mathbf{E}$. Soit $(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$ dans $\varphi(\mathbf{D})$. La commutation de $(x, -y)$ et $(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$ entraîne que γ est nul; en écrivant que $(-x, y)$ commute à $(\alpha x + P(y), \beta y)$, nous obtenons que $P \equiv 0$. Il en résulte que $\varphi(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. □

4.2. Etude du groupe des translations. Pour tout élément (α, β) de \mathbb{K}^2 , notons $t_{\alpha, \beta}$ la translation $(x + \alpha, y + \beta)$; le groupe de toutes les translations $t_{\alpha, \beta}$ est noté \mathbf{T} . Un élément $t_{\alpha, \beta}$ de \mathbf{T} s'écrit $t_{\alpha, 0} t_{0, \beta}$; pour déterminer l'image de \mathbf{T} par φ , nous allons donc étudier les groupes $\mathbf{T}_1 = \{t_{\alpha, 0} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ et $\mathbf{T}_2 = \{t_{0, \alpha} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$. Le groupe \mathbf{D}_1 (resp. \mathbf{D}_2) désigne $\{d_{\alpha, 1} \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$ (resp. $\{d_{1, \alpha} \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$).

REMARQUE 1. Le groupe des translations \mathbf{T} est un sous-groupe abélien maximal dans \mathbf{E} . En effet soient B un groupe abélien contenant \mathbf{T} et f un élément de B ; comme f commute à toute translation, sa différentielle est constante et f est affine. Par suite f est une translation.

Le groupe des translations \mathbf{T} satisfait lui aussi une propriété de rigidité.

LEMME 1.10. *Soit φ un automorphisme du groupe \mathcal{A} . Si $\varphi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$ et $\varphi(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, alors $\varphi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Plus précisément, nous avons $\varphi(\mathbf{T}_i) = \mathbf{T}_i$.*

DÉMONSTRATION. Le sous-groupe \mathbf{T}_1 de $\mathbf{E}^{(2)}$ commute à \mathbf{D}_2 . Comme $\varphi(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, il existe deux applications $\zeta, \mu : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{K}^*$ telles que $\varphi(\mathbf{T}_1)$ commute à

$$\{(\zeta(s)x, \mu(s)y) \mid s \in \mathbb{K}^*\}.$$

La commutation d'un élément $(x + q(y), y)$ de $\varphi(\mathbf{T}_1)$ et de $(\zeta(s)x, \mu(s)y)$ se traduit par

$$\zeta(s)q(\mu(s)^{-1}y) = q(y).$$

Un calcul élémentaire montre qu'il existe un entier i tel que toutes les transformations de $\varphi(\mathbf{T}_1)$ soient de la forme $(x + ay^i, y)$ où a appartient à \mathbb{K} .

En procédant comme ci-dessus avec les groupes \mathbf{T}_2 et \mathbf{D}_1 , nous obtenons que le sous-groupe $\varphi(\mathbf{T}_2)$ de $\mathbf{E}^{(1)}$ commute avec $\{(\alpha(t)x, \beta(t)y) \mid t \in \mathbb{K}^*\}$ où α, β désignent

deux applications de \mathbb{K}^* dans lui-même non constantes simultanément. Un élément $(x + P(y), y + \delta)$ de $\varphi(\mathbb{T}_2)$ et $(\alpha(t)x, \beta(t)y)$ commutent si et seulement si :

$$(5) \quad (x + \alpha(t)P(\beta(t)^{-1}y), y + \beta(t)\delta) = (x + P(y), y + \delta).$$

Si tout f dans $\varphi(\mathbb{T}_2)$ est du type $(x + P(y), y)$, l'égalité précédente conduit à :

$$\alpha(t)P(\beta(t)^{-1}y) = P(y);$$

par suite P est un monôme et l'image du groupe \mathbb{T}_2 par φ est contenue dans :

$$\{(x + by^j, y) \mid b \in \mathbb{K}\}.$$

Alors $\varphi(\mathbb{T})$ est inclus dans le groupe abélien $\{(x + ay^i + by^j, y) \mid a, b \in \mathbb{K}\}$; ce groupe n'étant pas maximal, $\varphi(\mathbb{T}_2)$ contient au moins une transformation f avec $\delta \neq 0$.

Dans ce cas, en reprenant (5), nous obtenons que $P \equiv 0$ et $\beta \equiv 1$. Ainsi tous les éléments f de $\varphi(\mathbb{T}_2)$ sont de la forme $(x, y + c)$ et $\varphi(\mathbb{T}_2)$ est un sous-groupe de \mathbb{T}_2 . Pour c et b non nuls, $(x, y + c)$ et $(x + by^j, y)$ commutent si et seulement si $j = 0$. Par conséquent $\varphi(\mathbb{T}_1)$ est inclus dans \mathbb{T}_1 et $\varphi(\mathbb{T})$ dans \mathbb{T} ; par maximalité de \mathbb{T} , nous avons $\varphi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Il en résulte que les groupes \mathbb{T}_i sont laissés invariants par φ . \square

Le groupe \mathbb{D}_1 (resp. \mathbb{D}_2) agit trivialement sur \mathbb{T}_2 (resp. \mathbb{T}_1), les groupes \mathbb{T}_i et \mathbb{D} sont invariants par φ donc les \mathbb{D}_i aussi. Autrement dit pour tout (α, β) dans \mathbb{K}^{*2} et (r, s) dans \mathbb{K}^2 nous avons :

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\varphi_1(\alpha x + r), \varphi_2(\beta y + s)).$$

La Proposition 1.3 assure alors qu'à conjugaison par une translation près

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\tau_1(\alpha)x + \zeta\tau_1(r), \tau_2(\beta)y + \kappa\tau_2(s))$$

où τ_1, τ_2 sont deux automorphismes du corps \mathbb{K} et ζ, κ deux constantes non nulles. Le groupe $\mathbb{E}^{(2)}$ est laissé invariant par φ ; en particulier $\varphi(x + y, y) = (x + \xi(y), y)$. Comme pour tout α dans \mathbb{K}^* l'élément $(x + y, y)$ commute à $d_{\alpha, \alpha}$, l'automorphisme $(x + \xi(y), y)$ commute à $d_{\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha)}$ autrement dit :

$$\tau_1(\alpha)\xi(\tau_2(\alpha)^{-1}y) = \xi(y).$$

Écrivons $\xi(y)$ sous la forme $\sum_{i \geq 0} \xi_i y^i$; alors

$$(\tau_1(\alpha)\tau_2(\alpha)^{-i} - 1)\xi_i = 0.$$

Puisque $(x + y, y)$ n'est pas trivial il existe un entier i_0 tel que $\tau_2(\alpha)^{i_0} = \tau_1(\alpha)$. Par ailleurs τ_1 étant additif, cette égalité implique que $\tau_2^{i_0}$ est additif; ceci n'est possible que si $i_0 = 1$. Ainsi nous avons

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\tau_1(\alpha)x + \zeta\tau_1(r), \tau_1(\beta)y + \kappa\tau_1(s))$$

soit quitte à conjuguer φ par $d_{\tau_1(\zeta), \tau_1(\kappa)}$ puis composer par l'action de l'automorphisme de corps τ_1 :

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\alpha x + r, \beta y + s).$$

Autrement dit nous avons prouvé le :

LEMME 1.11. *Soit φ un automorphisme de \mathbf{E} préservant \mathbf{D} et \mathbf{T} ; alors, à automorphisme intérieur et isomorphisme de corps près, les groupes \mathbf{D} et \mathbf{T} sont laissés invariants point par point par φ .*

4.3. Conclusion et conséquences. Supposons désormais que $\varphi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$ (Proposition 1.7) et que les groupes \mathbf{T} et \mathbf{D} soient laissés invariants point par point par φ (Lemme 1.11).

LEMME 1.12. *Si les groupes \mathbf{D} et \mathbf{T} sont laissés invariants point par point, il en est de même pour \mathbf{E} .*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathbf{E}^{(2)}$ est invariant par φ , il existe une application additive Θ telle que

$$(6) \quad \varphi(x + P(y), y) = (x + \Theta(P)(y), y).$$

De plus, pour tout élément α de \mathbb{K}^* , nous avons d'une part

$$\varphi(x + \alpha P(y), y) = \varphi(x + (\alpha P)(y), y) = (x + \Theta(\alpha P)(y), y)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(x + \alpha P(y), y) &= \varphi(d_{\alpha,1} \circ (x + P(y), y) \circ d_{\alpha^{-1},1}) \\ &= d_{\alpha,1} \circ (x + \Theta(P)(y), y) \circ d_{\alpha^{-1},1} \\ &= (x + \alpha \Theta(P)(y), y). \end{aligned}$$

Autrement dit Θ est un endomorphisme \mathbb{K} -linéaire du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[y]$. Écrivons $\Theta(y^N) = \sum_{i \geq 0} a_i y^i$; l'invariance de \mathbf{D} implique pour tout β dans \mathbb{K}^* :

$$\varphi(x + \beta^{-N} y^N, y) = \varphi(d_{1,\beta}(x + y^N, y) d_{1,\beta^{-1}}) = \left(x + \sum_{i \geq 0} a_i \beta^{-i} y^i, y \right).$$

Mais pour $P(y) = \beta^{-N} y^N$ l'égalité (6) donne

$$\varphi(x + \beta^{-N} y^N, y) = (x + \beta^{-N} \Theta(y^N), y) ;$$

ainsi, pour tout entier i et tout β dans \mathbb{K}^* , nous avons $a_i(\beta^{-N} - \beta^{-i}) = 0$. Nous obtenons donc :

$$\Theta(y^N) = a_N y^N.$$

En conjuguant $(x + y^N, y)$ avec $t_{0,\kappa}$ et en appliquant φ , nous constatons que $a_{N-\ell} = a_N$ pour tout $\ell = 0, \dots, N$. Or, par hypothèse, φ laisse le groupe des translations

invariant point par point ; donc $(x + 1, y)$ est envoyé sur lui-même par φ et les a_N valent tous 1. Par suite

$$\varphi(x + y^N, y) = (x + y^N, y).$$

Nous en déduisons, puisque \mathbf{D} est invariant, que $\varphi(x + ay^N, y) = (x + ay^N, y)$. Comme Θ est additive, la restriction de φ à $\mathbf{E}^{(2)}$ est l'identité. Les groupes des homothéties et des translations étant invariants point par point, nous avons finalement $\varphi|_{\mathbf{E}} = \text{id}$. \square

REMARQUE 2. Le groupe \mathbf{E} et l'automorphisme $(x, x + y)$ engendrent le groupe \mathcal{A} . En effet, d'une part les groupes \mathbf{E} et \mathbf{A} engendrent \mathcal{A} (VAN DER KULK, [39]) ; d'autre part, \mathbf{S} et $(x, x + y)$ engendrent \mathbf{A} . Il nous suffit donc de déterminer l'image de $(x, x + y)$ par φ pour connaître l'action de φ sur \mathcal{A} .

LEMME 1.13. *Si les groupes \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{T} sont laissés invariants point par point par φ , alors l'automorphisme $(x, x + y)$ est fixé par φ .*

DÉMONSTRATION. Notons $g := (x, x + y)$ et $h := \varphi(g)$. Nous avons $gt_{\alpha, \beta}g^{-1} = t_{\alpha, \alpha + \beta}$ donc $ht_{\alpha, \beta} = t_{\alpha, \alpha + \beta}h$ autrement dit :

$$(h_1(x + \alpha, y + \beta), h_2(x + \alpha, y + \beta)) = (h_1(x, y) + \alpha, h_2(x, y) + \alpha + \beta).$$

En particulier pour $y = -\beta$, l'élément $h_1(x + \alpha, 0)$ s'écrit $h_1(x, -\beta) + \alpha$; ainsi h_1 ne dépend pas de y et pour $x = 0$ nous obtenons $h_1(\alpha) = \alpha + \kappa$. Posons

$$h_2(x, y) := x + y + f(x, y) ;$$

alors l'égalité $h_2(x + \alpha, y + \beta) = h_2(x, y) + \alpha + \beta$ entraîne :

$$f(x + \alpha, y + \beta) = f(x, y)$$

autrement dit f est invariante par translation donc constante. Ainsi h s'écrit :

$$(x + \delta, x + y + \gamma).$$

En conjuguant $(x, x + y)$ avec $d_{\alpha, \alpha}$ et en appliquant φ , nous montrons que δ et γ sont nuls. \square

La démonstration de la partie principale du Théorème 1.1 est terminée : au §3, nous avons obtenu $\varphi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$, quitte à conjuguer φ par un élément de \mathcal{A} . Ensuite nous avons montré que les groupes \mathbf{D} et \mathbf{T} étaient, à automorphisme intérieur et isomorphisme de corps près, laissés invariants point par point par φ (Lemme 1.11) ; nous en avons déduit que \mathbf{E} aussi (Lemme 1.12). Finalement comme \mathbf{E} et l'automorphisme $(x, x + y)$ engendrent \mathcal{A} et que $(x, x + y)$ est envoyé sur lui-même par φ (Lemme 1.13), nous obtenons le résultat annoncé. La deuxième partie du théorème correspond à la Proposition 1.15.

5. APPLICATIONS

5.1. Compléments sur les automorphismes. A posteriori nous obtenons le résultat suivant ; la contribution éventuelle d'un automorphisme de corps, obstruction à ce que l'automorphisme soit intérieur, se lit au niveau des déterminants jacobiens.

COROLLAIRE 1.14. *Un automorphisme φ du groupe \mathcal{A} est intérieur si et seulement si pour tout f dans \mathcal{A} on a*

$$\det\text{jac}(\varphi(f)) = \det\text{jac}(f).$$

DÉMONSTRATION. Soit φ un automorphisme du groupe \mathcal{A} . D'après le Théorème 1.1 il existe un automorphisme τ du corps \mathbb{K} et un élément ψ de \mathcal{A} tels que, pour tout f dans \mathcal{A} , nous ayons $\varphi(f) = \tau(\psi^{-1}f\psi)$. D'où :

$$\det\text{jac}(\varphi(f)) = \det\text{jac}(\tau(f)) = \tau(\det\text{jac}(f)).$$

Ainsi $\det\text{jac}(\varphi(f)) = \det\text{jac}(f)$ pour tout f si et seulement si τ est trivial. \square

Notons $\text{Int}(\mathcal{A})$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de \mathcal{A} . Notre résultat s'interprète comme suit.

PROPOSITION 1.15. *Nous avons la suite exacte :*

$$1 \rightarrow \text{Int}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{K}, +, \cdot) \rightarrow 1.$$

De plus, la suite est scindée : $\text{Aut}(\mathcal{A}) = \text{Int}(\mathcal{A}) \rtimes \text{Aut}(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

COROLLAIRE 1.16. *Soient \mathbb{k} un corps dénombrable, algébriquement clos, de caractéristique nulle et $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$ le groupe d'automorphismes polynomiaux du plan affine \mathbb{k}^2 . Soit φ un automorphisme du groupe $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$. Il existe ψ dans $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$ et τ un automorphisme du corps \mathbb{k} tel que, pour tout f dans $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$, on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

DÉMONSTRATION. Notons \mathbb{K} un corps non dénombrable contenant \mathbb{k} . Soit f dans $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$. Considérons f comme un élément de $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$; nous avons alors l'alternative suivante :

- f est élémentaire ; il existe un flot ϕ_t , où t parcourt \mathbb{K} , tel que ϕ_1 coïncide avec f . En particulier l'équation $g^n = f$ a une solution pour tout n dans \mathbb{K} .
- f est de type HÉNON ; nous ne pouvons pas résoudre dans \mathbb{K} l'équation $g^n = f$ pour tout entier n .

Remarquons que si l'équation $g^n = f$ a, pour tout entier n , une solution dans \mathbb{K} , alors elle a une solution dans $\bar{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$. En effet, posons $g = \sum_I g_I z^I$, $f = \sum_J f_J z^J$ où I, J sont finis et f_J dans \mathbb{k}^2 ; alors g^n s'écrit $\sum P_{n,J}(\dots, g_I, \dots) z^J$ où $P_{n,J}$ désigne un polynôme universel à coefficients entiers. Résoudre $g^n = f$ c'est résoudre un nombre fini d'équations du type

$$P_{n,J}(\dots, g_I, \dots) = f_J ;$$

ces équations ont une solution dans l'extension \mathbb{K} de \mathbb{k} donc dans $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$.

Ainsi nous disposons d'un critère pour distinguer un élément de type HÉNON d'un automorphisme élémentaire dans $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$: un élément de $\text{Aut}[\mathbb{k}^2]$ est dit élémentaire si pour tout n l'équation $g^n = f$ a une solution, sinon f est de type HÉNON.

En reprenant la démonstration du Théorème 1.1 nous obtenons le résultat annoncé. \square

5.2. Le semi-groupe des endomorphismes polynomiaux. BUZZARD et MERENKOV répondent à la même question que FILIPKIEWICZ dans un cadre un peu différent : sous quelles conditions une variété complexe est-elle déterminée par son semi-groupe d'endomorphismes ?

THÉORÈME 1.17 ([12]). *Soit M une variété complexe non réduite à un point.*

Si $\varphi : \text{End}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{End}(M)$ est un morphisme de semi-groupes surjectif, φ est la conjugaison par un difféomorphisme holomorphe ou anti-holomorphe de \mathbb{C}^n sur M .

Soit $\varphi : \text{End}(M) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)$ un morphisme de semi-groupes surjectif. Supposons que $\text{End}(M)$ agisse doublement transitivement sur M ; alors φ est la conjugaison par un difféomorphisme holomorphe ou anti-holomorphe de M sur \mathbb{C}^n .

Reprenant certaines idées développées dans [12] et appliquant le Théorème 1.1, nous obtenons le :

COROLLAIRE 1.18. *Soient \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle et $\text{End}[\mathbb{K}^2]$ le semi-groupe des endomorphismes polynomiaux du plan affine \mathbb{K}^2 . Supposons que \mathbb{K} soit non dénombrable ou dénombrable et algébriquement clos. Soit φ un isomorphisme du semi-groupe $\text{End}[\mathbb{K}^2]$ dans lui-même ; il existe τ un automorphisme du corps \mathbb{K} et ψ dans $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ tels que, pour tout f dans $\text{End}[\mathbb{K}^2]$, on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

DÉMONSTRATION. L'isomorphisme φ induit un automorphisme de $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$. Le Théorème 1.1 ou le Corollaire 1.16 (suivant que \mathbb{K} est non dénombrable ou dénombrable et algébriquement clos) assure que, quitte à composer φ par un automorphisme de corps puis à conjuguer par un automorphisme de \mathbb{K}^2 , nous pouvons supposer que la restriction de φ à $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ est l'identité.

Pour tout α dans \mathbb{K}^2 , notons f_α l'endomorphisme constant de \mathbb{K}^2 qui vaut α . Nous avons $f_\alpha \circ g = f_\alpha$ pour tout élément g de $\text{End}[\mathbb{K}^2]$. Cette égalité implique que φ envoie l'endomorphisme f_α sur un endomorphisme constant f_β ; ceci définit une application inversible ψ de \mathbb{K}^2 dans lui-même telle que $\varphi(f_\alpha) = f_{\psi(\alpha)}$. À partir de l'égalité $g \circ f_\alpha = f_{g(\alpha)}$ valable pour tout g dans $\text{End}[\mathbb{K}^2]$ et tout α dans \mathbb{K}^2 , nous vérifions que $\varphi(g) = \psi g \psi^{-1}$. La restriction de φ au groupe $\text{Aut}[\mathbb{K}^2]$ étant l'identité, nous en déduisons que ψ est trivial. \square

CHAPITRE 2

SUR LES AUTOMORPHISMES DU GROUPE DE CREMONA

La majeure partie de ce chapitre a fait l'objet d'un article à paraître dans *Compos. Math.* dans lequel nous décrivons le groupe des automorphismes du groupe de CREMONA :

THÉORÈME 2.1. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Il existe un automorphisme τ du corps \mathbb{C} et ψ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ tels que, pour toute transformation birationnelle f , on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

La première partie du chapitre consiste à décrire les sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; si G désigne un tel groupe, nous avons l'alternative suivante : ou bien G contient un élément de torsion, ou bien G préserve une fibration rationnelle. Dans le second paragraphe nous donnons la liste des sous-groupes abéliens maximaux laissant une fibration rationnelle invariante fibre à fibre puis, au §3, nous considérons le cas où la fibration n'est pas préservée fibre à fibre. Dans la quatrième partie nous montrons qu'un automorphisme de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ satisfaisant certaines hypothèses laisse les groupes

$$\{(x+\alpha, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}, \quad \{(x, y+\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}, \quad \{(\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\} \quad \text{et} \quad \{(x, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$$

invariants point par point ; nous en déduisons que φ fixe l'involution de CREMONA. Puis nous donnons quelques conséquences du Théorème 2.1 dont un énoncé analogue pour le semi-groupe des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$... Finalement, dans une dernière partie, nous démontrons quelques résultats de forme normale.

1. FEUILLETAGES

1.1. Deux résultats de CANTAT et FAVRE ([15]). Introduisons quelques notations et définitions. Si S est une surface complexe compacte, un **feuilletage** \mathcal{F} sur S est donné par une famille $(X_i)_i$ de champs de vecteurs holomorphes à zéros isolés définis sur les ouverts \mathcal{U}_i d'un recouvrement de S . Les champs X_i sont soumis à des conditions de compatibilité : il existe g_{ij} dans $\mathcal{O}^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ tel que X_i coïncide avec $g_{ij}X_j$ sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Notons qu'un champ de vecteurs méromorphe non trivial sur S définit un tel feuilletage. Soit S une surface projective munie d'un feuilletage \mathcal{F} ; nous désignons par $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ (resp. $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$) le groupe des transformations birationnelles (resp. holomorphes) laissant le feuilletage \mathcal{F} invariant sur la surface S . Génériquement $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ coïncide avec $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$ et est fini; CANTAT et FAVRE donnent la liste des feuilletages qui ne vérifient pas cette philosophie ([15]).

THÉORÈME 2.2 ([15], théorème 1.1). *Soient S une surface projective et \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier sur S tel que $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$ soit infini. Il existe alors au moins un élément d'ordre infini ψ dans $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$ et nous sommes dans l'une des situations suivantes :*

- \mathcal{F} est invariant par un champ de vecteurs holomorphe;
- \mathcal{F} est une fibration elliptique;
- S est une surface de KUMMER généralisée, ψ se relève en un automorphisme d'ANOSOV ξ du tore et \mathcal{F} est la projection sur S du feuilletage stable ou instable de ξ .

THÉORÈME 2.3 ([15], théorème 1.2. et exemple 1.3.). *Soit \mathcal{F} un feuilletage sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tel que pour toute surface S et toute transformation birationnelle ξ de S dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nous ayons $\text{Aut}(S, \xi^*\mathcal{F}) \subsetneq \text{Bir}(S, \xi^*\mathcal{F})$. Alors $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathcal{F})$ possède un élément d'ordre infini et :*

- soit il existe des entiers p, q, r et s tels qu'à revêtement fini près nous ayons

$$\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathcal{F}) = \{(x^p y^q, x^r y^s), (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\};$$

- soit \mathcal{F} est une fibration rationnelle.

1.2. Lemme fondamental. Le lemme qui suit s'avère fondamental; il repose sur un argument classique de géométrie analytique.

LEMME 2.4. *Soit G un sous-groupe abélien non dénombrable du groupe de CREMONA. Pour tout élément f de G il existe au moins un champ de vecteurs méromorphe non nul X sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tel que $f_*X = X$. En particulier, tout élément f de G préserve au moins un feuilletage holomorphe singulier de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ une transformation birationnelle ; rappelons que $\deg f = \deg f_i$. Puisque le groupe \mathbf{G} n'est pas dénombrable, il existe un entier n tel que $\mathbf{G}_n = \{f \in \mathbf{G} \mid \deg f = n\}$ ne soit pas dénombrable. Par suite, l'adhérence de ZARISKI $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ de \mathbf{G}_n dans

$$E_n = \{f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \mid \deg f \leq n\}$$

est un ensemble algébrique de dimension supérieure ou égale à 1. Considérons un élément f_0 dans \mathbf{G}_n tel que la dimension du germe $(\overline{\mathbf{G}_n}^Z, f_0)$ soit supérieure ou égale à 1 et f_0 n'appartienne pas au lieu singulier de $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application analytique non constante $s \mapsto f_s$ du disque unité \mathbb{D} dans $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ telle que

$$f_{s=0} = f_0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial f_s}{\partial s} \right|_{s=0} \neq 0.$$

Si m n'appartient pas au lieu d'indétermination de f_0^{-1} posons :

$$X(m) := \left. \frac{\partial f_s}{\partial s} \right|_{s=0} (f_0^{-1}(m)).$$

Ce champ X s'étend en un champ de vecteurs rationnel sur le plan projectif. Puisque $\left. \frac{\partial f_s}{\partial s} \right|_{s=0} \neq 0$, le champ X n'est pas identiquement nul. Remarquons que les éléments de $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ sont des applications rationnelles qui commutent ; en particulier f_s et f_0 commutent pour tout s dans \mathbb{D} . En dérivant l'identité $f_0 f_s f_0^{-1}(m) = f_s(m)$ par rapport à s à m fixé, nous obtenons $f_{0*} X = X$.

A posteriori, si g est un élément quelconque de \mathbf{G} , nous constatons, en considérant le chemin $g_s = g f_0^{-1} f_s$, que g laisse un champ rationnel invariant. \square

Le Lemme 2.4 nous permet d'établir la :

PROPOSITION 2.5. *Si \mathbf{G} est un sous-groupe abélien non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, il vérifie l'une des conditions suivantes :*

- tous les éléments de \mathbf{G} sont périodiques ;
- \mathbf{G} laisse un feuilletage invariant.

DÉMONSTRATION. Soit f un élément non trivial de \mathbf{G} ; notons $\chi(f)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel défini par :

$$\chi(f) = \{X \text{ champ de vecteurs rationnel} \mid f_* X = X\}.$$

i. Si la dimension de $\chi(f)$ est 1, alors $\chi(f) = \mathbb{C}.X$ et, pour tout g dans \mathbf{G} , nous avons $g_ X = \zeta(g)X$ où $\zeta(g)$ désigne un élément de \mathbb{C}^* : le feuilletage induit par X est donc invariant par \mathbf{G} .*

ii. Supposons que $\chi(f)$ soit de dimension 2. Si pour tout Y et \tilde{Y} dans $\chi(f)$ il existe une fonction rationnelle R telle que $Y = R\tilde{Y}$, notons X un élément fixé de $\chi(f)$;

pour tout g dans \mathbf{G} , le champ g_*X s'écrit $\mu(g)X$, où cette fois $\mu(g)$ est rationnelle. Le feuilletage induit par X est donc invariant par \mathbf{G} . Sinon nous obtenons un morphisme

$$\nu : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}(\chi(f)) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

tel que $g_*X = \nu(g)X$. L'image de \mathbf{G} est abélienne donc triangulable; il s'en suit l'existence d'un vecteur propre commun à tous les $\nu(g)$ produisant un feuilletage invariant par \mathbf{G} .

iii. Pour finir considérons le cas où $\dim \chi(f) \geq 3$; choisissons X_1, X_2 et X_3 trois éléments linéairement indépendants dans $\chi(f)$. Il existe φ_1 et φ_2 deux fonctions rationnelles non toutes constantes telles que $\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + X_3 = 0$. Supposons par exemple que φ_1 soit non constante; à partir de $X_3 = -\varphi_1 X_1 - \varphi_2 X_2$ nous obtenons que φ_1 est invariant par f . Nous avons alors l'alternative suivante : ou bien f laisse plusieurs fonctions invariantes auquel cas f est périodique, ou bien f laisse une unique fonction invariante alors, par abélianité, \mathbf{G} laisse une fibration invariante. \square

Dorénavant nous supposerons que \mathbf{G} est un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de CREMONA et que \mathcal{F} est un feuilletage de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ invariant sous l'action de \mathbf{G} .

1.3. Symétrie des feuilletages. Dans cette partie nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Il satisfait l'une des conditions suivantes :*

- \mathbf{G} possède un élément de torsion;
- \mathbf{G} est conjugué à un sous-groupe de \mathbf{J} .

La preuve repose en particulier sur certains résultats de CANTAT et FAVRE (voir [15]).

1.3.1. Automorphismes des surfaces minimales. Supposons qu'il existe une surface S et une transformation birationnelle ξ de S dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Aut}(S, \xi^*\mathcal{F}) = \mathrm{Bir}(S, \xi^*\mathcal{F})$. Puisque $\mathrm{Aut}(S, \xi^*\mathcal{F})$ est infini et \mathbf{G} non dénombrable, nous pouvons supposer (Théorème 2.2) que $\xi^*\mathcal{F}$ est invariant par un champ holomorphe X sur S . Il existe alors, toujours d'après [15], un morphisme birationnel ψ de S vers un modèle minimal \tilde{S} de S tel que $\tilde{\mathbf{G}} = \psi g \psi^{-1}(\mathbf{G})$ soit un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\tilde{S})$.

Les surfaces rationnelles minimales sont $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et les surfaces de HIRZEBRUCH F_n avec $n \geq 2$. Rappelons que, pour $n \geq 2$, le groupe des automorphismes de la n -ième surface de HIRZEBRUCH F_n est, dans la carte affine

(x, y) , du type (voir [1] chapitre 5, [33])

$$(7) \quad \left\{ \left(\frac{\alpha x + f(y)}{(cy + d)^n}, \frac{ay + b}{cy + d} \right) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}^*, f \in \mathbb{C}[y], \deg f \leq n \right\}.$$

Notons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^{(2)} &= \{(x + P(y), y) \mid P \in \mathbb{C}[y], \deg P \leq n\}, \\ \mathbf{T} &= \{(x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \text{ le groupe des translations,} \\ \mathbf{D} &= \{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\} \text{ le groupe diagonal} \\ &\text{et } \mathbf{D}_1 \text{ le groupe } \{(\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}. \end{aligned}$$

Un élément f de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$ permute les fibres de la fibration $y = \text{cte}$; il induit donc un isomorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, i.e. un élément ν_f de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Soit π le morphisme qui à f associe ν_f . Si H désigne un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$, posons $H_0 := H \cap \ker \pi$. Rappelons que si H est un sous-groupe abélien de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, alors H est, à conjugaison près, un groupe de translations, d'homothéties ou le groupe à quatre éléments $\{y, -y, 1/y, -1/y\} = \langle -y, 1/y \rangle$.

REMARQUE 3. Le groupe $\mathbf{E}_n^{(2)}$ est un sous-groupe abélien maximal de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$. En effet, un élément g de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$ commute à $(x + 1, y)$ si et seulement s'il s'écrit :

$$(x + f(y), ay + b) ;$$

la commutation de g et $(x + y, y)$ implique alors que g appartient à $\mathbf{E}_n^{(2)}$.

PROPOSITION 2.7. Soient S une surface rationnelle minimale et H un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Aut}(S)$. Alors nous sommes dans l'une des situations suivantes :

- H contient un élément de torsion ;
- H coïncide, à conjugaison dans $\mathrm{Aut}(S)$ près, avec $\mathbf{E}_n^{(2)}$;
- H est, à conjugaison dans $\mathrm{Aut}(S)$ près, le groupe des translations ;
- H est contenu, à conjugaison birationnelle près, dans :

$$\{(\alpha x + \beta, \gamma y) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Avant de donner la preuve de la Proposition 2.7 mentionnons le :

COROLLAIRE 2.8. Soient S une surface rationnelle minimale et H un sous-groupe abélien non dénombrable de $\mathrm{Aut}(S)$ maximal dans $\mathrm{Bir}(S)$. Alors H vérifie, à conjugaison près, l'une des conditions suivantes :

- H contient un élément de torsion ;
- H coïncide avec $\mathbf{E}_n^{(2)}$;
- H est le groupe des translations.

La preuve de la Proposition 2.7 est longue ; nous raisonnons suivant la nature de S et celle du sous-groupe abélien $\pi(H)$ de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION. Le cas $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est élémentaire car son groupe d'automorphismes est

$$(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})) \rtimes (y, x).$$

Si $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ donc H est, à conjugaison près, l'un des groupes suivants :

$$\mathrm{D}, \quad \mathrm{T}, \quad \{(x + \alpha, \beta y) \mid \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^*\}, \quad \{(\alpha x + \beta y, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\};$$

remarquons que si H n'est pas conjugué à T , il contient un élément de torsion.

Désormais S est une surface de HIRZEBRUCH \mathbf{F}_n avec $n \geq 2$; nous allons raisonner en distinguant les cas où $\pi(H)$ est trivial, fini ou infini.

LEMME 2.9. *Soit H un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$ tel que $\pi(H)$ soit trivial. Alors H coïncide avec $\mathbf{E}_n^{(2)}$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.9. Deux applications $(\alpha x + P(y), y)$ et $(\beta x + Q(y), y)$ commutent si et seulement si

$$(\alpha - 1)Q(y) = (\beta - 1)P(y).$$

Si H contient un élément non trivial du type $(x + P(y), y)$, alors H est contenu dans $\mathbf{E}_n^{(2)}$; par maximalité (Remarque 3), nous avons : $H = \mathbf{E}_n^{(2)}$. Sinon soit $f = (\alpha x + P(y), y)$ avec $\alpha \neq 1$; à conjugaison près par $(x + \frac{P(y)}{1-\alpha}, y)$, la transformation f s'écrit $(\alpha x, y)$. Après cette modification, nous avons par abélianité $H = \mathrm{D}_1$ mais le groupe D_1 n'est pas maximal. \square

LEMME 2.10. *Soit H un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$ tel que $\pi(H)$ soit fini non trivial. Alors H contient au moins un élément de torsion.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.10. L'étude du cas où $\pi(H)$ est trivial assure que H_0 est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathbf{E}_n^{(2)}$ ou D_1 .

a. Considérons le cas où $\pi(H)$ est, à conjugaison près, le groupe $\langle -y, 1/y \rangle$.

Remarquons qu'alors les éléments de $H \setminus H_0$ sont de la forme $(\alpha x + f(y), -y)$ ou $(\frac{\alpha x + f(y)}{y^n}, \frac{1}{y})$ (voir (7)). Puisque H n'est pas dénombrable, il en est de même pour H_0 .

Supposons que H_0 soit contenu dans D_1 . Un élément $(\alpha x, y)$ de H_0 commute à $(\frac{\gamma x + R(y)}{y^n}, \frac{1}{y})$ si et seulement si $(\alpha - 1)R(y) = 0$; puisque H_0 est non dénombrable, R est nul. De même, par abélianité de H , nous obtenons que tout élément g de H

tel que $\pi(g) = -y$ s'écrit $(\beta x, -y)$. Ainsi, par maximalité, $H_0 = D_1$; le groupe H contient donc des éléments de torsion.

Si H_0 est un sous-groupe de $E_n^{(2)}$, fixons $f = (x + Q(y), y)$ dans $H_0 \setminus \{\text{id}\}$. Le carré d'un élément g de H tel que $\pi(g) = -y$ appartient à H_0 ; en particulier g s'écrit $(\beta x + P(y), -y)$ avec $\beta = \pm 1$. Si $\beta = 1$ (resp. -1), la commutation de g avec f implique que Q est pair (resp. impair). Le groupe H_0 étant non trivial ou bien tous les éléments h de H tels que $\pi(h) = -y$ sont du type $(x + P(y), -y)$, ou bien du type $(-x + P(y), -y)$. Supposons que nous soyons dans la première éventualité. Écrivons g sous la forme :

$$(x + P_1(y^2) + yP_2(y^2), -y) ;$$

alors $g^2 = (x + 2P_1(y^2), y)$ appartient à H_0 . En utilisant la maximalité de H on peut vérifier que $(x - P_1(y^2), y)$ est aussi dans H_0 (il suffit de constater que tout élément dont la projection par π est $\frac{1}{y}$ et qui commute à g^2 commute à $(x - P_1(y^2), y)$). Par suite l'élément périodique $(x + yP_2(y^2), -y)$ est dans H . Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque tous les éléments h de H satisfaisant $\pi(h) = -y$ sont de la forme $(-x + P(y), -y)$. Le cas $\beta = -1$ se traite de la même façon.

b. Étudions l'éventualité suivante : $\pi(H)$ est engendré par αy avec α d'ordre fini q . Notons que H_0 n'est pas dénombrable.

Si H_0 est un sous-groupe de D_1 , alors H n'est pas maximal : comme précédemment nous obtenons que H est strictement inclus dans D .

Supposons que H_0 soit contenu dans $E_n^{(2)}$. Les transformations $g = (\gamma x + R(y), \alpha y)$ et $f = (x + p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n, y)$ commutent si et seulement si :

$$(\gamma - \alpha^j)p_j = 0 \quad \forall 0 \leq j \leq n;$$

puisque H_0 est non trivial, il existe un entier ℓ tel que $\gamma = \alpha^\ell$. La condition de commutation assure que p_j ne peut être non nul que s'il existe un entier m tel que $j = \ell + mq$; par maximalité :

$$H_0 = \{(x + y^\ell P(y^q), y) \mid P \in \mathbb{C}[y], (\deg P)q + \ell \leq n\}.$$

Quitte à composer g par un élément de H_0 , il s'écrit :

$$(\alpha^\ell x + r_0(y^q) + y r_1(y^q) + \dots + y^{\ell-1} r_{\ell-1}(y^q) + y^{\ell+1} r_{\ell+1}(y^q) + \dots + y^{q-1} r_{q-1}(y^q), \alpha y) ;$$

une telle transformation est périodique de période q . \square

LEMME 2.11. *Soit H un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ tel que $\pi(H)$ soit infini. Alors H vérifie l'une des propriétés suivantes :*

- H contient un élément de torsion ;
- H est contenu dans $\{(\alpha x + \beta, y + \gamma) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$ à conjugaison birationnelle près.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.11. L'étude du cas $\pi(H)$ trivial assure que H_0 est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathbf{E}_n^{(2)}$ ou \mathbf{D}_1 .

a. Supposons que $\pi(H)$ soit, à conjugaison près, un groupe infini de racines de l'unité.

Notons qu'alors, toujours d'après (7), les éléments de $H \setminus H_0$ s'écrivent $(\alpha x + f(y), \beta y)$. Ici encore H_0 n'est pas dénombrable.

Si H_0 est contenu dans \mathbf{D}_1 , nous pouvons choisir un élément d'ordre infini $(\zeta x, y)$ dans H_0 ; il commute à la transformation $(tx + P(y), \beta y)$ de $H \setminus H_0$ si et seulement si $P \equiv 0$. Ainsi H est un sous-groupe du groupe diagonal et n'est donc pas maximal (dénombrabilité de $\pi(H)$).

Supposons que H_0 soit inclus dans $\mathbf{E}_n^{(2)}$; soient $f = (x + p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n, y)$ dans $H_0 \setminus \{\text{id}\}$ et $g = (\alpha x + a(y), \beta y)$ dans $H \setminus H_0$. Les éléments f et g commutent si et seulement si :

$$(\alpha - \beta^j)p_j = 0 \quad \forall 0 \leq j \leq n.$$

Comme $\pi(H)$ est infini, nous pouvons choisir g de sorte que β soit d'ordre strictement supérieur à n ; par suite il existe un unique entier $0 \leq k \leq n$ tel que $\alpha - \beta^k = 0$. Nous en déduisons que H_0 est un sous-groupe de $\{(x + \varepsilon y^k, y) \mid \varepsilon \in \mathbb{C}\}$ et que g est du type $(\beta^k x + a(y), \beta y)$; par maximalité :

$$H_0 = \{(x + \varepsilon y^k, y) \mid \varepsilon \in \mathbb{C}\}.$$

Quitte à composer g par un élément de H_0 , le coefficient d'ordre k de a est nul. Notons q la période de β ; alors g^q est de la forme $(x + \varepsilon y^k, y)$. Mais ε est nécessairement nul puisque le coefficient d'ordre k de a vaut 0; autrement dit H possède un élément de torsion.

b. Considérons l'éventualité suivante : $\pi(H)$ est un groupe de translations.

Nous pouvons nous ramener au cas où $y + 1$ appartient à $\pi(H)$. Considérons dans H un élément f du type $(tx + P(y), y + 1)$; écrivons P sous la forme : $p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n$. Si $t \neq 1$, posons $q_n := \frac{p_n}{t-1}$ et pour $j \leq n-1$:

$$q_j := \frac{1}{t-1} \left(p_j + \sum_{k=j+1}^n \mathfrak{C}_k^j q_k \right).$$

À conjugaison près par $(x + \sum_{j=0}^n q_j y^j, y)$, nous avons $f = (tx, y + 1)$. Un élément $(sx + R(y), y + \gamma)$ de H commute à f si et seulement si $R = 0$; ainsi :

$$H = \{(\alpha x, y + \beta) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\}$$

donc H contient des éléments périodiques.

Si $t = 1$, posons $q_n := -\frac{p_n}{n+1}$ et

$$q_j := -\frac{1}{j+1} \left(p_j + \sum_{k=j+1}^n \mathfrak{C}_{k+1}^j q_k \right)$$

pour tout $0 \leq j \leq n-1$; à conjugaison *birationnelle* près par $(x + \sum_{j=0}^n q_j y^{j+1}, y)$, la transformation f s'écrit $(x, y+1)$. Un élément de H qui commute à f est du type $(sx + \mu, y + \zeta)$. Par suite, H est contenu, à conjugaison *birationnelle* près, dans :

$$\{(\alpha x + \beta, y + \gamma) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}.$$

c. Finalement étudions le cas où $\pi(H)$ est un sous-groupe d'homothéties contenant un élément ζy d'ordre infini.

Soit $f = (tx + p_0 + p_1 y + \dots + p_n y^n, \zeta y)$ dans H ; si, pour tout $0 \leq j \leq n$, le terme $t - \zeta^j$ est non nul, alors, à conjugaison près par :

$$\left(x + \sum_{j=0}^n \frac{p_j}{t - \zeta^j} y^j, y \right),$$

la transformation f est de la forme $(tx, \zeta y)$. Un élément de H qui commute à $(tx, \zeta y)$ est du type $(sx + \eta, \mu y)$; autrement dit H est un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de :

$$\{(\alpha x + \beta, \gamma y) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Par suite, H coïncide, à conjugaison près, avec $\{(x + \alpha, \beta y) \mid \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^*\}$ ou avec le groupe diagonal; ces deux groupes contiennent des éléments de torsion.

Reste à traiter le cas où il existe un entier j_0 tel que $t = \zeta^{j_0}$; puisque ζ n'est pas racine de l'unité, j_0 est unique. Quitte à conjuguer f par

$$\left(x + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^n \frac{p_j}{t - \zeta^j} y^j, y \right)$$

et par l'homothétie $(x, p_{j_0} y)$ si $p_{j_0} \neq 0$, nous pouvons supposer que f s'écrit $(\zeta^{j_0} x + v y^{j_0}, \zeta y)$ où $v \in \{0, 1\}$. Un calcul montre qu'un élément g de H commute à f si et seulement si $g = (\beta^{j_0} x + v' y^{j_0}, \beta y)$. Donc :

$$H = \{(\alpha^{j_0} x + \varepsilon y^{j_0}, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \varepsilon \in \mathbb{C}\};$$

notons que H contient des éléments de torsion. □

Ces trois lemmes épuisent tous les cas possibles lorsque S est une surface de HIRZEBRUCH; ceci achève la démonstration de la proposition. □

1.3.2. *Cas restants.* Lorsque la situation 1.3.1 n'a pas lieu, le Théorème 2.3 assure que nous avons, à conjugaison près, l'alternative suivante :

(i) il existe des entiers p, q, r et s tels que, à revêtement fini près, nous avons :

$$\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathcal{F}) = \{(x^p y^q, x^r y^s), (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\};$$

(ii) \mathcal{F} est une fibration rationnelle.

(i) Un sous-groupe abélien maximal non dénombrable G de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathcal{F})$ est alors le groupe diagonal ou le groupe suivant :

$$\{(x^p y^q, x^r y^s), (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \alpha = \alpha^p \beta^q, \beta = \alpha^r \beta^s\}.$$

Si G est conjugué à D , il contient des éléments de torsion. Étudions le second cas ; puisque G n'est pas dénombrable, il ne peut se réduire au groupe engendré par $(x^p y^q, x^r y^s)$. Il existe donc un élément non trivial dans G du type $(\zeta x, \mu y)$ et satisfaisant $\zeta = \zeta^p \mu^q$ et $\mu = \zeta^r \mu^s$; pour tout ρ , la transformation $(\zeta^\rho x, \mu^\rho y)$ vérifie ces égalités donc appartient à G . Soit ρ tel que $\zeta^\rho = i$; alors $\mu^\rho = \exp\left(i\pi \frac{1-p}{2q}\right)$ est aussi racine de l'unité : $(\zeta^\rho x, \mu^\rho y)$ est un élément de torsion de G . Le groupe G contient donc des éléments de torsion de tout ordre.

(ii) Le groupe G est, à conjugaison près, contenu dans le groupe de JONQUIÈRES : c'est l'objet du §3.

2. LE GROUPE J_0

2.1. Définitions et notations. Un élément f du groupe de JONQUIÈRES permute les fibres de la fibration $y = \text{cte}$ et par suite induit un isomorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *i.e.* un élément ν_f de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$; notons π le morphisme qui à f associe ν_f . Posons $G_0 := (\ker \pi) \cap G$. Si f_S est une famille d'éléments de G , alors $\langle f_S \rangle$ est le groupe engendré par la famille f_S .

Introduisons les cinq types de sous-groupes abéliens de $J_0 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$ suivants :

- $J_a = \{(x + a(y), y) \mid a \in \mathbb{C}(y)\}$;
- $J_m = \{(a(y)x, y) \mid a \in \mathbb{C}(y)^*\}$;
- pour tout F dans $\mathbb{C}(y)$ qui n'est pas un carré : $J_F = \left\{ \left(\frac{a(y)x + F(y)}{x + a(y)}, y \right) \mid a \in \mathbb{C}(y) \right\}$;
- pour tous C et F dans $\mathbb{C}(y)$ tels que F ne soit pas un carré :

$$I_F^C = \left\langle \left(\frac{F(y)}{x}, y \right), \left(\frac{C(y)x - F(y)}{x - C(y)}, y \right) \right\rangle ;$$

- et enfin $I_B = \langle (-x, y), \left(\frac{1}{B(y)x}, y \right) \rangle$ pour tout B dans $\mathbb{C}(y)^*$.

REMARQUES 4. (i) Si F était un carré, le groupe J_F correspondant serait conjugué à J_m .

(ii) Les groupes I_F^C et I_B ont quatre éléments.

(iii) Chaque élément du groupe J_F laisse la courbe hyperelliptique $x^2 = F(y)$ invariante; une façon de distinguer ces différents groupes est de considérer leurs courbes de points fixes. Par analogie avec $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$, le groupe J_a est dit parabolique, J_m hyperbolique et J_F elliptique.

Dans la suite, $\psi(a, b, c, d; \nu(y))$ désigne l'élément $\left(\frac{a(y)x+b(y)}{c(y)x+d(y)}, \nu(y) \right)$ du groupe de JONQUIÈRES.

2.2. Centralisateurs. Comme souvent en théorie des groupes, des calculs effectifs de centralisateurs s'avèrent nécessaires.

LEMME 2.12. *Le centralisateur dans J_0 d'un élément non trivial de J_a est J_a . Le centralisateur dans J_0 d'un élément non trivial de J_m distinct de $(-x, y)$ est J_m . Le centralisateur dans J_0 d'un élément non trivial de J_F distinct de $(F(y)/x, y)$ est J_F .*

Le centralisateur dans J_0 de $(-x, y)$ est :

$$\left\{ (a(y)x, y), \left(\frac{1}{b(y)x}, y \right) \mid a, b \in \mathbb{C}(y)^* \right\}.$$

Le centralisateur dans J_0 de $(F(y)/x, y)$, où F désigne un élément de $\mathbb{C}(y)^$ qui n'est pas un carré, est :*

$$\left\{ \left(\frac{a(y)x + F(y)}{x + a(y)}, y \right), \left(\frac{b(y)x - F(y)}{x - b(y)}, y \right), (-x, y) \mid a, b \in \mathbb{C}(y) \right\}.$$

La démonstration de ce lemme est purement calculatoire.

PROPOSITION 2.13. *Soit H un sous-groupe abélien de J_0 . Alors H est, à conjugaison près, un sous-groupe de J_a , J_m , J_F , I_B ou I_F^C . Les groupes J_a , J_m et J_F sont des sous-groupes abéliens maximaux de J ; tous sont maximaux dans J_0 .*

DÉMONSTRATION. 1. *Commençons par montrer que les groupes J_a , J_m et J_F (resp. I_B et I_F^C) sont maximaux dans J (resp. J_0).*

Soit f dans le groupe de JONQUIÈRES; supposons que f commute à J_a . En écrivant la commutation de f avec $(x + y^k, y)$ pour tout $k \geq 0$, nous obtenons que f est contenu dans J_a .

Soit f un élément du groupe de JONQUIÈRES commutant aux éléments de J_m . Alors f appartient à J_m : il suffit d'écrire, par exemple, la commutation de f avec les transformations $(2x, y)$ et (yx, y) . Ainsi J_m est maximal dans J .

Chaque groupe J_F est maximal dans J . En effet, soit f un élément du groupe de JONQUIÈRES ; f commute aux éléments $\psi(a, F, 1, a; y)$ de J_F si et seulement si les points fixes (x, y) de f sont donnés par $x^2 = F(y)$ et

$$a^2(y)F(\pi(f)) = a^2(\pi(f))F(y)$$

pour tout a dans $\mathbb{C}(y)$. Ainsi les fonctions rationnelles a^2/F sont toutes invariantes par $\pi(f)$ qui est donc nécessairement trivial. Ceci implique que f appartient à J_0 ; un calcul direct montre alors que f est dans J_F .

Le groupe I_B est un sous-groupe abélien maximal de J_0 . Ceci résulte du Lemme 2.12 et du fait que I_B est le centralisateur dans J_0 de $\left(\frac{1}{B(y)x}, y\right)$.

De même, puisque les éléments $\psi(b, F, 1, b; y)$ et $\psi(a, -F, a, -a; y)$ commutent si et seulement si $b \equiv 0$, le Lemme 2.12 assure que I_F^C est abélien maximal dans J_0 .

2. Montrons que J_a, J_m, J_F, I_B et I_F^C sont, à conjugaison près, les seuls sous-groupes abéliens maximaux de $J_0 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$.

Fixons un élément non trivial $g = \psi(a, b, c, d; y)$ d'un sous-groupe abélien maximal H de J_0 . Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que g s'écrit sous forme normale :

$$\left(\frac{\alpha(y)x + \beta(y)}{\gamma(y)x + \alpha(y)}, y\right).$$

2.a. Lorsque α est nul, g s'écrit $\psi(0, F, 1, 0; y)$ où $F(y) = \beta(y)/(\gamma(y)x)$.

Si F n'est pas un carré, le Lemme 2.12 assure qu'une transformation h de H qui commute à g est de l'un des types suivants :

$$(-x, y), \quad \psi(a, F, 1, a; y) \quad \text{ou} \quad \psi(a, -F, 1, -a; y).$$

Si $h = (-x, y)$, alors, toujours d'après le Lemme 2.12, le groupe H coïncide avec $I_{1/F}$. Sinon suivant que H contient un élément de la forme $\psi(C, F, 1, C; y)$, avec $C \not\equiv 0$, ou non, nous obtenons $H = J_F$ ou $H = I_F^C$.

Si F s'écrit \tilde{F}^2 , alors g est conjugué, via $\psi(-\tilde{F}; \tilde{F}, 1, 1; y)$, à $(-x, y)$. Nous obtenons alors les groupes I_B ou J_m .

2.b. Etudions le cas où $\alpha \neq 0$, autrement dit le cas où g est du type $\psi(1, b, c, 1; y)$.

Si $c \equiv 0$, alors g appartient à J_a et le Lemme 2.12 assure que $H = J_a$. Si c est non nul, alors g s'écrit $\psi(1/c, b/c, 1, 1/c; y)$. Supposons que b/c ne soit pas un carré ; g appartient à $J_{b/c}$ et le Lemme 2.12 assure que H coïncide avec $J_{b/c}$. Si b/c est un carré, alors g est, à conjugaison près, dans J_m ; d'après le Lemme 2.12 nous avons, à conjugaison près, $H = J_m$ ou $H = I_B$. \square

2.3. Propriétés de J_a . Voici deux propriétés de J_a qui vont nous permettre de le distinguer des autres sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables du groupe de CREMONA :

- J_a ne contient pas d'élément de torsion ;
- le groupe non virtuellement résoluble

$$\{(a(y)x + b(y), \nu(y)) \mid a \in \mathbb{C}(y)^*, b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\}$$

agit par conjugaison sur J_a .

REMARQUE 5. Les groupes J_m et J_F ne sont pas isomorphes à J_a car ils contiennent des éléments de torsion.

3. SOUS-GROUPES ABÉLIENS MAXIMAUX NON DÉNOMBRABLES DE J

Commençons par remarquer le fait suivant :

LEMME 2.14. *Les groupes $\varphi(J_a)$ et T ne sont pas conjugués.*

DÉMONSTRATION. Un calcul élémentaire montre que tout sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur T est contenu dans le groupe affine :

$$\mathrm{Aff} = \{(ax + by + c, dx + ey + f) \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}, ae - bd \neq 0\}.$$

Supposons que $\varphi(J_a)$ et T soient conjugués, alors

$$\varphi(\{(x, \nu(y)) \mid \nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Aff}.$$

Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est simple, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ s'injecte dans :

$$H = [\mathrm{Aff}, \mathrm{Aff}] = \{(ax + by + c, dx + ey + f) \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}, ae - bd = 1\} ;$$

notons j cette injection. Soient $q : H \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ l'application « partie linéaire » et

$$p : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

la projection canonique. Si $p \circ q$ était trivial, alors $j(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$ serait métabélien ce qui est impossible donc $p \circ q$ n'est pas trivial. Par simplicité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, l'application $p \circ q \circ j$ est injective ; il en résulte que $q \circ j : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ aussi, ce qui est impossible. \square

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.15. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Le groupe G vérifie l'une des propriétés suivantes :*

- G contient un élément de torsion ;
- G est conjugué à J_a ;
- G est conjugué à T ;

– tout sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur G est virtuellement résoluble.

Remarquons que si $\pi(G)$ est trivial, le Théorème 2.15 est une conséquence de la Proposition 2.13.

Nous déduisons des Théorèmes 2.6, 2.15, du Lemme 2.14, de la Remarque 5 et des propriétés de J_a (§2.3) le :

COROLLAIRE 2.16. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Si G est isomorphe à J_a , alors G est conjugué à J_a .*

Les énoncés qui suivent sont des résultats techniques auxquels nous nous référerons souvent.

LEMME 2.17. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES tel que G_0 soit un sous-groupe non trivial de J_m . Alors G contient un élément de torsion.*

DÉMONSTRATION. Soient $g = (a(y)x, y)$ un élément non trivial de G_0 et $f = (f_1, f_2)$ dans G . La condition de commutation de f et g implique que f_1 est du type $b(y)x$ ou de la forme $\frac{1}{b(y)x}$; ceci permet de remarquer que $(-x, y)$ commute à f . Par maximalité l'involution $(-x, y)$ appartient à G . \square

LEMME 2.18. *Une transformation birationnelle qui commute à $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$ est du type $(x + a, y + b)$. Une transformation birationnelle qui commute à $(x + 1, y)$ et $(x + y, y)$ est de la forme $(x + a(y), y)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f = (f_1, f_2)$ une transformation birationnelle; supposons que f commute à $(x + 1, y)$. En particulier $f_2(x + 1, y) = f_2(x, y)$, i.e. f_2 ne dépend que de y . On a aussi $f_1(x + 1, y) = f_1(x, y) + 1$ d'où

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x + 1, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y);$$

par suite $\frac{\partial f_1}{\partial x} = a(y)$ et f_1 est de la forme $a(y)x + b(y)$. En réécrivant l'égalité

$$f_1(x + 1, y) = f_1(x, y) + 1,$$

on obtient que a est constante et vaut 1. Finalement f s'écrit $(x + b(y), f_2(y))$.

Soit f une transformation birationnelle qui commute à $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$. D'après ce qui précède la commutation avec $(x + 1, y)$ assure que f est de la forme $(x + b(y), f_2(y))$. De plus,

$$b(y) = b(y + 1) \quad \text{et} \quad f_2(y) + 1 = f_2(y + 1).$$

La première égalité assure que b est constante; la seconde entraîne que $f'_2(y)$ est constante autrement dit que $f_2(y) = cy + b$. On constate alors que $f_2(y) = f_2(y + 1)$ implique $c = 1$. Il en résulte que $f = (x + a, y + b)$.

Soit f une transformation birationnelle commutant à $(x + 1, y)$ et $(x + y, y)$. On a vu que f est du type $(x + b(y), f_2(y))$. La commutation de f et $(x + y, y)$ conduit à :

$$x + y + b(y) = x + b(y) + f_2(y),$$

soit $f_2(y) = y$. Ainsi $f = (x + b(y), y)$. \square

LEMME 2.19. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} tel que $\pi(\mathbf{G})$ soit infini et \mathbf{G}_0 un sous-groupe non trivial de \mathbf{J}_a . Après conjugaison par un élément de \mathbf{J}_m nous pouvons supposer que :*

- (i) $(x + 1, y)$ appartient à \mathbf{G}_0 ;
- (ii) \mathbf{G} est contenu dans $\{(x + b(y), \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \pi(\mathbf{G})\}$;
- (iii) $\mathbf{G}_0 = \{(x + a(y), y) \mid a \in \mathbb{C}(y)^{\pi(\mathbf{G})}\}$ où $\mathbb{C}(y)^{\pi(\mathbf{G})}$ désigne le corps des fonctions rationnelles invariantes par $\pi(\mathbf{G})$.

DÉMONSTRATION. (i) Par hypothèse \mathbf{G}_0 contient une transformation du type $(x + b(y), y)$ avec $b \neq 0$ qui, à conjugaison près par $(b(y)x, y)$, s'écrit $(x + 1, y)$.

(ii) Une transformation birationnelle qui commute à $(x + 1, y)$ est de la forme $(x + b(y), \nu(y))$ avec b dans $\mathbb{C}(y)$ et ν dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ (voir démonstration du Lemme 2.18).

(iii) Soient $(x + a(y), y)$ un élément de \mathbf{G}_0 et $(x + b(y), \nu(y))$ un élément de $\mathbf{G} \setminus \mathbf{G}_0$; la commutation de ces deux transformations conduit à l'égalité $a(y) = a(\nu(y))$. \square

3.1. Cas $\pi(\mathbf{G})$ fini non trivial. Ici nous pouvons supposer, à conjugaison près, que $\pi(\mathbf{G}) = \langle -y, 1/y \rangle$ ou que $\pi(\mathbf{G}) = \langle \alpha y \rangle$ avec α racine q -ième de l'unité.

PROPOSITION 2.20. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES tel que $\pi(\mathbf{G}) = \langle -y, 1/y \rangle$. Alors \mathbf{G} contient un élément de torsion.*

DÉMONSTRATION. Si \mathbf{G}_0 est un sous-groupe de \mathbf{J}_m , le Lemme 2.17 permet de conclure.

Nous allons distinguer deux éventualités : celle où \mathbf{G}_0 est un sous-groupe de \mathbf{J}_a et celle où c'est un sous-groupe de \mathbf{J}_F .

LEMME 2.21. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} tel que \mathbf{G}_0 soit contenu dans \mathbf{J}_a et $\pi(\mathbf{G})$ soit le groupe à quatre éléments $\langle -y, 1/y \rangle$. Alors \mathbf{G} contient un élément de torsion et à conjugaison près*

$$\mathbf{G} = \langle (x, -y), (x, 1/y), (x + c(y^2 + 1/y^2), y) \mid c \in \mathbb{C}(y) \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Adoptons les notations suivantes

$$H_1 := \langle -y \rangle, \quad h_1(y) := -y, \quad \eta_1(y) := y^2, \quad H_2 := \langle 1/y \rangle, \quad h_2(y) := 1/y \quad \text{et} \quad \eta_2(y) := y+1/y.$$

Les fonctions η_i sont invariantes sous l'action des H_i ; toute fonction invariante par le groupe $\langle -y, 1/y \rangle$ se factorise dans $y^2 + 1/y^2$.

En écrivant qu'un élément de \mathbf{G}_0 et un élément de $\pi^{-1}(H_i) \setminus \mathbf{G}_0$ commutent, puis que deux transformations de $\pi^{-1}(H_i) \setminus \mathbf{G}_0$ commutent, nous obtenons

$$\pi^{-1}(H_i) = \{(x + c(\eta_i(y)), y), (x + b_i(y) + r(\eta_i(y)), h_i(y)) \mid c \in \Theta_i, r \in \tilde{\Theta}_i\},$$

où $\Theta_i, \tilde{\Theta}_i$ désignent deux sous-groupes additifs de $\mathbb{C}(y)$ et b_i un élément fixé de $\mathbb{C}(y)$. Par maximalité de \mathbf{G} nous avons

$$\mathbf{G}_0 = \pi^{-1}(H_1 \cap H_2) = \{(x + c(y^2 + 1/y^2), y) \mid c \in \mathbb{C}(y)\};$$

en particulier $\Theta_i = \mathbb{C}(y)$.

Soit $f = (x + b_1(y) + r(y^2), -y)$ dans $\pi^{-1}(H_1) \setminus \mathbf{G}_0$; écrivons b_1 sous la forme $\tilde{b}_1(y^2) + y\bar{b}_1(y^2)$. Quitte à conjuguer f par

$$(x + y\bar{b}_1(y^2)/2, y),$$

nous pouvons supposer que f est du type $(x + e(y^2), -y)$; une telle conjugaison n'a pas d'effet sur le noyau et laisse $\pi^{-1}(H_2)$ invariant. La transformation $f^2 = (x + 2e(y^2), y)$ est dans \mathbf{G}_0 donc e se factorise dans $y^2 + 1/y^2$. Ainsi

$$(x, -y) = (x - 2e(y^2 + 1/y^2), y) \circ f$$

appartient à $\pi^{-1}(H_1)$: le groupe \mathbf{G} possède donc au moins un élément de torsion.

Nous pouvons montrer, de la même façon, que $(x, 1/y)$ appartient à \mathbf{G} ; en effet, $(x, 1/y)$ est conjugué à $(x, -y)$ via $(x, \frac{y+1}{y-1})$. \square

LEMME 2.22. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Supposons que \mathbf{G}_0 soit inclus dans \mathbf{J}_F et $\pi(\mathbf{G})$ soit le groupe $\langle -y, 1/y \rangle$; alors \mathbf{G} contient un élément de torsion.*

DÉMONSTRATION. Avec les notations du Lemme 2.21, un élément de \mathbf{G}_0 et une transformation de $\pi^{-1}(H_i \setminus \mathbf{G}_0)$ commutent si et seulement s'ils s'écrivent

$$\psi(\ell(\eta_i(y)), F(\eta_i(y)), 1, \ell(\eta_i(y)); y) \quad \text{et} \quad \psi(a, b(y)F(\eta_i(y)), b, a; h_i(y)).$$

Ceci étant valable pour $i = 1, 2$, nous en déduisons que F et ℓ se factorisent dans $y^2 + 1/y^2$. Par maximalité de \mathbf{G} , nous obtenons

$$\mathbf{G}_0 = \left\{ \left(\frac{\ell(y^2 + 1/y^2)x + F(y^2 + 1/y^2)}{x + \ell(y^2 + 1/y^2)}, y \right) \mid \ell \in \mathbb{C}(y) \right\};$$

le groupe \mathbf{G} contient donc l'élément de torsion

$$\left(\frac{F(y^2 + 1/y^2)}{x}, y \right).$$

□

La démonstration est terminée : nous avons épuisé tous les cas possibles. □

PROPOSITION 2.23. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES tel que $\pi(\mathbf{G}) = \langle \alpha y \rangle$ avec α élément d'ordre $q > 1$. Alors \mathbf{G} contient un élément de torsion.*

DÉMONSTRATION. Si \mathbf{G}_0 est un sous-groupe de \mathbf{J}_m , le Lemme 2.17 permet de conclure. Précisons toutefois un résultat de forme normale.

LEMME 2.24. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} . Supposons que \mathbf{G}_0 soit contenu dans \mathbf{J}_m et $\pi(\mathbf{G})$ soit engendré par αy avec α élément d'ordre $q > 1$. Alors \mathbf{G} est, à conjugaison près, l'un des groupes suivants :*

$$\langle (b(y^q)x, y), (a(y)x, \alpha y) \mid b \in \mathbb{C}(y)^* \rangle,$$

$$\langle (b(y)x, y), \left(\frac{1}{a(y)x}, \alpha y \right) \mid b \in \mathbb{C}(y)^*, b(y)b(\alpha y) \equiv 1 \rangle,$$

où a désigne un élément de $\mathbb{C}(y)^*$.

DÉMONSTRATION. Fixons un élément non trivial $g = (b(y)x, y)$ dans \mathbf{G}_0 . Une transformation f de \mathbf{G} telle que $\pi(f) = \alpha y$ commute à g si et seulement si nous sommes dans l'une des situations suivantes :

- $f = (a(y)x, \alpha y)$ et $g = (b(y^q)x, y)$;
- $f = \left(\frac{1}{a(y)x}, \alpha y \right)$ et b vérifie l'égalité $b(y)b(\alpha y) = 1$.

Tout élément de $\mathbf{G} \setminus \mathbf{G}_0$ s'écrit comme la composée d'une transformation de \mathbf{G}_0 et d'un itéré de f . Par suite si f est du type $(a(y)x, \alpha y)$, alors, par maximalité, nous avons

$$\mathbf{G} = \langle (b(y^q)x, y), (a(y)x, \alpha y) \mid b \in \mathbb{C}(y)^* \rangle;$$

dans le cas où f est de la forme $\left(\frac{1}{a(y)x}, \alpha y \right)$, nous constatons qu'à conjugaison près

$$\mathbf{G} = \langle (b(y)x, y), \left(\frac{1}{a(y)x}, \alpha y \right) \mid b \in \mathbb{C}(y)^*, b(y)b(\alpha y) \equiv 1 \rangle.$$

□

LEMME 2.25. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} tel que \mathbf{G}_0 soit contenu dans \mathbf{J}_a et $\pi(\mathbf{G})$ soit engendré par αy avec α d'ordre $q > 1$. Alors \mathbf{G} contient un élément de torsion et est, à conjugaison près, de la forme :*

$$\langle (x + a(y^q), y), (x, \alpha y) \mid a \in \mathbb{C}(y) \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Soient g dans \mathbf{G}_0 et f tel que $\pi(f) = \alpha y$. Nous pouvons supposer, à conjugaison près, que g s'écrit $(x + 1, y)$; nous constatons que f et g commutent si et seulement si $f = (x + a(y), \alpha y)$. Par suite une transformation de \mathbf{G}_0 qui commute à f est du type $(x + b(y^q), y)$. Puisque tout élément de $\mathbf{G} \setminus \mathbf{G}_0$ est la composée d'une transformation de \mathbf{G}_0 et d'un itéré de f , nous avons à conjugaison près

$$\mathbf{G} = \langle (x + b(y^q), y), (x + a(y), \alpha y) \mid a \in \mathbb{C}(y) \rangle.$$

Ce groupe est conjugué à $\langle (x + b(y^q), y), (x, \alpha y) \mid b \in \mathbb{C}(y) \rangle$. En effet, écrivons f sous la forme

$$(x + a_0(y^q) + ya_1(y^q) + \dots + y^{q-1}a_{q-1}(y^q), \alpha y)$$

où a_i appartient à $\mathbb{C}(y)$. Nous pouvons supposer, quitte à conjuguer par

$$\left(x + y \frac{a_1(y^q)}{\alpha - 1} + \dots + y^{q-1} \frac{a_{q-1}(y^q)}{\alpha^{q-1} - 1}, y \right),$$

que $f = (x + a_0(y^q), \alpha y)$; le groupe \mathbf{G} contient donc l'élément

$$(x, \alpha y) = (x - a_0(y^q), y) \circ f.$$

□

LEMME 2.26. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Supposons que \mathbf{G}_0 soit inclus dans \mathbf{J}_F et $\pi(\mathbf{G})$ engendré par αy avec α d'ordre $q > 1$. Alors \mathbf{G} contient un élément de torsion et est, à conjugaison près, l'un des deux groupes suivants*

$$\begin{aligned} & \langle (x, \alpha y), \left(\frac{a(y^q)x + F(y^q)}{x + a(y^q)}, y \right) \mid a \in \mathbb{C}(y) \rangle, \\ & \left\langle \left(\frac{b(y)x + F(y^q)}{x + b(y)}, \alpha y \right), \left(\frac{a(y^q)x + F(y^q)}{x + a(y^q)}, y \right) \mid a \in \mathbb{C}(y) \right\rangle \end{aligned}$$

où b désigne un élément fixé de $\mathbb{C}(y)$.

DÉMONSTRATION. Soient f dans \mathbf{G} tel que $\pi(f) = \alpha y$ et $g = \psi(a, F, 1, a; y)$ dans \mathbf{G}_0 . La commutation de f et g se traduit par $a^2(\alpha y)F(y) = a^2(y)F(\alpha y)$. En particulier, si $\psi(\tilde{a}, F, 1, \tilde{a}; y)$ est un élément de \mathbf{G}_0 , non trivial et distinct de g , nous obtenons l'égalité

$$a^2(y)\tilde{a}^2(\alpha y) = a^2(\alpha y)\tilde{a}^2(y)$$

qui conduit à $\tilde{a}(y) = \ell(y^q)a(y)$ où ℓ appartient à $\mathbb{C}(y)$.

Un calcul direct montre que F est une fonction de y^q ; de plus g et f s'écrivent respectivement à conjugaison près $\psi(\ell(y^q), F(y^q), 1, \ell(y^q); y)$ et $\psi(b, cF(y^q), c, b; \alpha y)$.

Autrement dit

$$\mathbf{G}_0 = \left\{ \left(\frac{\ell(y^q)x + F(y^q)}{x + \ell(y^q)}, y \right) \mid \ell \in \mathbb{C}(y) \right\}$$

et \mathbf{G} contient au moins un élément de torsion : $\left(\frac{F(y^q)}{x}, y\right)$.

Si $(x, \alpha y)$ appartient à \mathbf{G} nous obtenons à conjugaison près

$$\mathbf{G} = \left\langle (x, \alpha y), \left(\frac{a(y^q)x + F(y^q)}{x + a(y^q)}, y \right) \mid a \in \mathbb{C}(y) \right\rangle;$$

sinon, les transformations f et $\psi(b, F(y^q), 1, b; \alpha y)$ commutent si et seulement si il existe r dans $\mathbb{C}(y)$ tel que

$$a(y) = \frac{F(y^q) + b(y)r(y^q)}{b(y) + r(y^q)}.$$

Par maximalité, f est la composée d'un élément de \mathbf{G}_0 et de $\psi(b, F(y^q), 1, b; \alpha y)$. Ainsi à conjugaison près

$$\mathbf{G} = \left\langle \left(\frac{b(y)x + F(y^q)}{x + b(y)}, \alpha y \right), \left(\frac{a(y^q)x + F(y^q)}{x + a(y^q)}, y \right) \mid a \in \mathbb{C}(y) \right\rangle,$$

où b désigne un élément fixé de $\mathbb{C}(y)$. □

Ceci termine la démonstration de la Proposition 2.23. □

3.2. Cas $\pi(\mathbf{G})$ infini. Dans ce cas, nous pouvons supposer que \mathbf{G}_0 est un sous-groupe de \mathbf{J}_a , \mathbf{J}_m , \mathbf{I}_B ou \mathbf{I}_F^C . En effet, nous avons le :

LEMME 2.27. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Si $\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{J}_F$ est non trivial, alors $\pi(\mathbf{G})$ est fini ou \mathbf{G} contient un élément de torsion.*

DÉMONSTRATION. *a.* Supposons qu'il existe dans $\mathbf{J}_F \cap \mathbf{G}_0$ un élément g de la forme $\left(\frac{a(y)x + F(y)}{x + a(y)}, y\right)$ avec $a \neq 0$. Comme F n'est pas un carré, la fonction F/a^2 n'est pas constante. Soit $f = (f_1, \nu)$ dans \mathbf{G} . La commutation de f et g entraîne que les matrices

$$\begin{pmatrix} a & F \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & F \\ 1 & a \end{pmatrix} \circ \nu$$

de $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$ sont conjuguées. Puisque $\frac{\det}{(\text{trace})^2}$ est un invariant de conjugaison, un calcul rapide conduit à :

$$\frac{F}{a^2} \circ \nu = \frac{F}{a^2} \quad \forall \nu \in \pi(\mathbf{G}).$$

Comme F n'est pas un carré, la fonction F/a^2 n'est pas constante et le groupe $\pi(\mathbf{G})$ est fini.

b. Si $\mathbf{J}_F \cap \mathbf{G}_0$ est réduit à $\langle (F(y)/x, y) \rangle$, alors \mathbf{G} contient un élément de torsion. □

Rappelons que si G_0 est un sous-groupe non trivial de J_m , le groupe G contient un élément de torsion (Lemme 2.17). Reste donc à examiner les deux éventualités suivantes : G_0 est un sous-groupe non trivial de J_a ou G_0 est un sous-groupe de I_B ou I_F^C .

3.2.1. *Cas G_0 sous-groupe non trivial de J_a .*

LEMME 2.28. *Soit f une fonction rationnelle non nulle telle que pour a et ζ deux complexes non nuls $f(x + a, y) = \zeta f(x, y)$; alors ζ vaut 1.*

DÉMONSTRATION. En dérivant $f(x + a, y) = \zeta f(x, y)$ par rapport à x , nous obtenons l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x + a, y) = \zeta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Remarquons que $\frac{\partial f}{f}$ est invariant par $(x + a, y)$ donc ne dépend pas de x . Comme f est rationnelle f ne dépend que de y et nécessairement $\zeta = 1$. \square

THÉORÈME 2.29. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Si $\pi(G)$ est infini et G_0 est un sous-groupe non trivial de J_a , alors à conjugaison près :*

- (i) $G_0 = \{(x + a, y) \mid a \in \mathbb{C}\}$;
- (ii) tout sous-groupe agissant par conjugaison sur G est virtuellement résoluble ;
- (iii) si $\pi(G)$ est un sous-groupe non dénombrable de translations, alors G est conjugué à T .

DÉMONSTRATION. Le (i) est une conséquence directe du Lemme 2.19 ; en effet, une fonction rationnelle $a(y)$ invariante par une infinité d'éléments ν de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ est constante. Dans la suite nous allons montrer les assertions (ii) et (iii) en raisonnant suivant la nature de $\pi(G)$.

Rappelons que les éléments de $G \setminus G_0$ sont de la forme $(x + b(y), \nu(y))$ (Lemme 2.19). Puisque $G_0 = \{(x + a, y) \mid a \in \mathbb{C}\}$, chaque élément ν de $\pi(G)$ a un unique antécédent $(x + b(y), \nu(y))$ tel que le terme constant du développement en série de LAURENT de b à l'origine soit nul ; nous le noterons $(x + b_\nu(y), \nu(y))$.

a. Commençons par étudier l'éventualité suivante : $\pi(G)$ est un groupe d'homothéties. Soient H un sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur G et $h = (h_1, h_2)$ un élément de H . S'il existait $g = (x + a, y)$ dans G_0 tel que hgh^{-1} s'écrive $(x + b(y), \gamma y)$ avec $\gamma \neq 1$, alors h_2 vérifierait $h_2(x + a, y) = \gamma h_2(x, y)$ ce qui, d'après le Lemme 2.28, est impossible. Ainsi pour tout g dans G_0 la transformation hgh^{-1} appartient à G_0 ; par conséquent pour tout f dans $G \setminus G_0$ l'élément hfh^{-1} est dans $G \setminus G_0$. Il s'en suit que $h_1(x + 1, y) = h_1(x, y) + \xi$ pour un certain ξ et $h_2(x + 1, y) = h_2(x, y)$; en particulier, h_1 est de la forme $\alpha x + c(y)$ et h_2 est une fonction de y . Soit $f = (f_1, \beta y)$ un élément de $G \setminus G_0$; comme hfh^{-1} appartient à $G \setminus G_0$, la seconde

composante de h est du type $\mu y^{\pm 1}$. Finalement h s'écrit $(\alpha x + c(y), \mu y^{\pm 1})$ et tout sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur \mathbf{G} est virtuellement résoluble.

b. Supposons que $\pi(\mathbf{G})$ soit un groupe dénombrable de translations.

Soit f une transformation birationnelle agissant par conjugaison sur \mathbf{G} ; en considérant la restriction de l'action par conjugaison de f à \mathbf{G}_0 , nous constatons qu'une infinité non dénombrable d'éléments de la forme $(x + a, y)$ est envoyée sur des éléments du même type. Un calcul direct montre alors que f s'écrit $(\alpha x + a(y), \beta y + \gamma)$, où α, β appartiennent à \mathbb{C}^* , γ à \mathbb{C} et a à $\mathbb{C}(y)$; autrement dit tout sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur \mathbf{G} est résoluble.

c. Considérons le cas où $\pi(\mathbf{G})$ est un sous-groupe non dénombrable de translations.

Il existe un entier n tel que $\mathbf{G}_n = \{(x + c(y), y + \alpha) \in \mathbf{G} \mid \deg c = n\}$ ne soit pas dénombrable. Notons E_n^0 l'ensemble des éléments c de $\mathbb{C}(y)$ de degré n dont le terme constant $c_0(c)$ dans le développement en série de LAURENT est nul

$$E_n^0 := \{c \in \mathbb{C}(y) \mid \deg c = n, c_0(c) = 0\}.$$

L'ensemble

$$\Omega_n := \{(c, \beta) \in E_n^0 \times \mathbb{C} \mid c_\alpha(y + \beta) - c_\alpha(y) = c(y + \alpha) - c(y), \quad \forall y + \alpha \in \pi(\mathbf{G})\}$$

est une sous-variété algébrique de $E_n^0 \times \mathbb{C}$. La normalisation par $c_0 = 0$ et le fait que \mathbf{G}_n soit non dénombrable impliquent que Ω_n est de dimension 1. Notons p la projection de $\mathbb{C}(y) \times \mathbb{C}$ sur \mathbb{C} . L'image de Ω_n par p est un sous-ensemble constructible de \mathbb{C} qui contient un ensemble non dénombrable; donc $p(\Omega_n) = \mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ et p est injective sur Ω_n . L'ensemble Ω_n est inclus dans \mathbf{G} . En effet, une transformation f de \mathbf{G} commute aux éléments de \mathbf{G}_n et \mathbf{G}_n est ZARISKI dense dans Ω_n ; par suite f commute aux transformations $(x + c_\beta(y), y + \beta)$ où (c, β) appartient à Ω_n . En particulier, comme $\pi(\mathbf{G})$ est un groupe, $\pi(\mathbf{G})$ est isomorphe à \mathbb{C} . L'application $\beta \mapsto (c_\beta, \beta)$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$, est une paramétrisation injective de Ω_n donc holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$; il en résulte que $\beta \mapsto c_\beta$ est rationnelle sur \mathbb{C} (argument de compactification). Notons $c(\alpha, y) := c_\alpha(y)$. Dérivons l'égalité

$$(8) \quad c(\alpha, y) - c(\alpha, y + \beta) = c(\beta, y) - c(\beta, y + \alpha)$$

par rapport à α et β , nous obtenons

$$(9) \quad \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial y}(\alpha, y + \beta) = \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial y}(\beta, y + \alpha).$$

Posons $a := \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial y}$. Dérivons l'égalité (9) en α et en y , alors $\frac{\partial a}{\partial \alpha}(\alpha, y + \beta) = \frac{\partial a}{\partial y}(\alpha, y + \beta)$; autrement dit a annule le champ $\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial y}$. Ainsi $\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial y}$ est une fonction de $y + \alpha$. Notons que $c_\alpha(y)$ est rationnelle en α et y ; il en est donc de même pour $\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial y}$. Par conséquent nous avons

$$c_\alpha(y) = \ell(y + \alpha) + l_1(\alpha) + l_2(y)$$

où ℓ , l_1 et l_2 sont rationnelles. La condition de commutation (8) conduit à $l_2(t) = -\ell(t)$. Il s'en suit que $(x + c_\alpha(y), y + \alpha)$ s'écrit $(x + \ell(y + \alpha) - \ell(y) + l_1(\alpha), y + \alpha)$. Or

$$(x + \ell(y + \alpha) - \ell(y) + l_1(\alpha), y + \alpha)$$

est conjugué à $(x + l_1(\alpha), y + \alpha)$ via $(x + \ell(y), y)$.

Cette conjugaison laisse \mathbf{G}_0 invariant donc \mathbf{G} est, à conjugaison près, un sous-groupe de \mathbf{T} ; par maximalité cette inclusion est une égalité. \square

3.2.2. \mathbf{G}_0 sous-groupe de \mathbf{I}_B ou \mathbf{I}_F^C . Remarquons que si \mathbf{G}_0 est conjugué à un sous-groupe non trivial de \mathbf{I}_B ou de \mathbf{I}_F^C , le groupe \mathbf{G} contient un élément de torsion car les groupes \mathbf{I}_B et \mathbf{I}_F^C sont engendrés par deux involutions. Reste donc à étudier le cas où \mathbf{G}_0 est trivial; nécessairement $\pi(\mathbf{G})$ est un sous-groupe non dénombrable d'homothéties ou de translations.

Introduisons la variété algébrique K_n définie par

$$K_n := \{(f, \nu) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \mid \deg f \leq n, \deg f^{-1} \leq n\}.$$

PROPOSITION 2.30. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES. Si \mathbf{G}_0 est trivial, alors \mathbf{G} est algébrique, i.e. les éléments de \mathbf{G} sont de degré borné et \mathbf{G} est une sous-variété algébrique de K_n .*

DÉMONSTRATION. Elle procède du même principe qu'en 2.29. Il existe un entier n tel que $\mathbf{G}_n = \{(f, \nu) \in \mathbf{G} \cap K_n\}$ ne soit pas dénombrable. Notons $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ l'adhérence de ZARISKI de \mathbf{G}_n dans K_n . Soit h une transformation de \mathbf{G} ; elle commute aux éléments de \mathbf{G}_n . Comme \mathbf{G}_n est ZARISKI dense dans $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$, la transformation h commute à celles de $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$; ainsi $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ est contenu dans \mathbf{G} . Rappelons que π est la projection de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Quitte à identifier $y + \alpha$ (resp. αy) avec α , l'image de $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ par π est un sous-ensemble constructible non dénombrable de \mathbb{C} (resp. \mathbb{C}^*) donc $\pi(\overline{\mathbf{G}_n}^Z) = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ (resp. $\pi(\overline{\mathbf{G}_n}^Z) = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$). Le groupe $\pi(\mathbf{G})$ est un sous-groupe de \mathbb{C} (resp. \mathbb{C}^*) contenant un ouvert donc $\pi(\mathbf{G})$ est isomorphe à \mathbb{C} (resp. \mathbb{C}^*). Puisque π est injective sur \mathbf{G} , elle l'est sur $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$ qui, par suite, est de dimension 1. Il en résulte que

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{G}_n}^Z \cup \{g^{-1}(\alpha_1), \dots, g^{-1}(\alpha_s)\},$$

où $g^{-1}(\alpha_i)$ désigne l'élément de \mathbf{G} tel que $\pi(g) = y + \alpha_i$ (resp. $\pi(g) = \alpha_i y$), est algébrique. En fait, a posteriori les $g^{-1}(\alpha_i)$ sont dans $\overline{\mathbf{G}_n}^Z$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.15. *a. Commençons par supposer que \mathbf{G}_0 n'est pas trivial.* La Proposition 2.13 et les propriétés de \mathbf{J}_a (§2.3) assurent que lorsque $\pi(\mathbf{G})$ est trivial, \mathbf{G} est isomorphe à \mathbf{J}_a si et seulement si \mathbf{G} est conjugué à \mathbf{J}_a . D'après le Lemme 2.17 et les Propositions 2.20 et 2.23, si \mathbf{G}_0 est contenu dans \mathbf{J}_m ou si $\pi(\mathbf{G})$ est fini et non trivial, alors \mathbf{G} contient un élément de torsion. Si $\pi(\mathbf{G})$ est

infini, il suffit de considérer le cas où G_0 est un sous-groupe de J_a (Lemme 2.27) ; alors G satisfait l'une des propriétés suivantes (Théorème 2.29) :

- tout sous-groupe agissant par conjugaison sur G est virtuellement résoluble ;
- G est conjugué à T .

b. Enfin si G_0 est trivial, G est algébrique (Proposition 2.30) ; l'action de G sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ étant clairement algébrique, G est, à conjugaison près, contenu dans le groupe des automorphismes d'une surface minimale (voir [21, 38]). Le Corollaire 2.8 assure alors que, par maximalité, G est conjugué à T ou contient un élément de torsion. \square

4. CLASSIFICATION DES AUTOMORPHISMES

4.1. Groupes de translations. Rappelons que φ désigne un automorphisme du groupe de CREMONA. D'après le Corollaire 2.16, nous pouvons supposer, quitte à faire une conjugaison, que J_a est invariant par φ et que $\varphi(x+1, y) = (x+1, y)$.

Supposons qu'à une certaine étape de la preuve, nous ayons montré que φ fixe une famille $\{H_i\}_i$ de groupes. La conjugaison par une transformation birationnelle f est dite **permise** si $fH_i f^{-1} = H_i$ pour tout i .

Pour tout couple (α, β) de \mathbb{C}^2 , notons $t_{\alpha, \beta}$ l'application $(x + \alpha, y + \beta)$. Tout élément $t_{\alpha, \beta}$ du groupe des translations s'écrit $t_{\alpha, 0} t_{0, \beta}$; introduisons donc les groupes T_1 et T_2 définis par

$$T_1 := \{t_{\alpha, 0} \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad T_2 := \{t_{0, \alpha} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Posons aussi

$$D_1 := \{(\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\} \quad \text{et} \quad D_2 := \{(x, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}.$$

PROPOSITION 2.31. *Soit φ un automorphisme de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ qui fixe le groupe J_a et $(x+1, y)$. Alors, à conjugaison permise près, φ préserve les groupes T_i .*

Commençons par établir le résultat suivant :

LEMME 2.32. *Soit φ un automorphisme de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ fixant le groupe J_a et $(x+1, y)$. Alors $\varphi(T_i) \subset T_i$ et $\varphi(D_2) \subset \{(x + b(y), \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})\}$.*

DÉMONSTRATION. L'image de T_2 par φ est contenue dans

$$\{(x + b(y), \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})\}.$$

En effet tout élément de $\varphi(T_2)$ agit trivialement par conjugaison sur $\varphi(T_1)$, en particulier sur $t_{1,0}$. Ainsi, pour tout (h_1, h_2) dans $\varphi(T_2)$, nous avons

$$h_1(x+1, y) = h_1(x, y) + 1 \quad \text{et} \quad h_2(x+1, y) = h_2(x, y)$$

ce qui montre que h_2 ne dépend pas de x et que h_1 est de la forme $x + b(y)$ (voir Lemme 2.18).

Comme T_1 est un sous-groupe de J_a et commute à T_2 , l'image de T_1 par φ est contenue dans T_1 .

Le groupe D_2 agit trivialement par conjugaison sur T_1 donc $\varphi(D_2)$ est un sous-groupe de $\{(x + b(y), \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})\}$. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.31. Considérons un élément g dans $\varphi(T_2) \cap T_1$; il s'écrit $(x + a, y)$. Pour toute transformation $(x + b(y), \nu(y))$ de $\varphi(D_2)$ nous avons

$$g(x + b(y), \nu(y)) = (x + b(y), \nu(y))g.$$

Le groupe D_2 agissant sans point fixe sur T_1 , le complexe a est nul. Ainsi $\varphi(T_2) \cap T_1$ est trivial. Puisque T est maximal et $\varphi(T_1)$ est inclus dans T_1 , nous obtenons T_1 est invariant par φ .

Soit $(x + b(y), y)$ dans $\varphi(T_2) \cap \ker \pi$. Comme $\varphi(T_2)$ est abélien, nous avons, pour tout ν dans $\pi(\varphi(T_2))$, l'égalité $b \circ \nu = b$. Le groupe T ne contenant pas d'élément de torsion, les Propositions 2.13, 2.20 et 2.23 assurent que $\pi(\varphi(T))$, et donc $\pi(\varphi(T_2))$, est infini. Il en résulte que b est constant; puisque $\varphi(T_2)$ et T_1 sont disjoints, b est nul. Ainsi $\pi|_{\varphi(T_2)}$ est injective et $\pi(\varphi(T_2))$ est non dénombrable. Le Théorème 2.29 assure que φ fixe T à conjugaison près; par suite $\varphi(T_2) = T_2$. \square

4.2. Groupes diagonaux. Supposons maintenant que $\varphi(J_a) = J_a$ et $\varphi(T_i) = T_i$ pour $i = 1, 2$. Pour tout élément (α, β) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, notons

$$d_{\alpha, \beta} : (x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y).$$

PROPOSITION 2.33. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Supposons que $\varphi(J_a) = J_a$ et $\varphi(T_i) = T_i$ pour $i = 1, 2$. Alors, à conjugaison permise près, les groupes D_i sont fixés par φ .*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 2.32, l'image de D_2 par φ est contenue dans

$$\{(x + b(y), \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})\}.$$

À conjugaison permise près nous pouvons supposer que $\varphi(t_{0,1}) = t_{0,1}$. Puisque D_1 agit trivialement sur T_2 , et en particulier sur $t_{0,1}$, l'image de D_1 par φ est un sous-groupe de

$$\{(\nu(x), y + c(x)) \mid \nu \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}), c \in \mathbb{C}(x)\}.$$

Le groupe T est un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ donc $\varphi(T)$ aussi. Le groupe D_2 agit par conjugaison sur T_2 par suite $\varphi(D_2)$ est inclus dans

$$\{(x + a, by + c) \mid a, c \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*\};$$

cette action est sans point fixe donc tout élément $(x + a, by + c)$ de $\varphi(D_2)$ satisfait l'alternative suivante : $c = 0$ ou $b = 1$. Si $b = 1$, alors $\varphi(D_2) \cap \varphi(T)$ est non trivial; il en résulte que c est nul et que $\varphi(D_2)$ est un sous-groupe de $\{(x + a, by) \mid a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*\}$.

\mathbb{C}^* . De même en considérant l'action de D_1 sur T_1 nous montrons que $\varphi(D_1)$ est contenu dans $\{(ax, y + b) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$. Finalement comme $\varphi(D_1)$ et $\varphi(D_2)$ commutent, φ préserve les groupes D_i . \square

4.3. Invariance point par point des groupes T_i et D_i . Rappelons l'énoncé suivant (Proposition 1.3) : *soit ϕ un automorphisme du groupe des transformations affines de la droite complexe; alors ϕ est la composée d'un automorphisme intérieur et de l'action d'un isomorphisme du corps \mathbb{C} .* Il nous permet d'établir un résultat de rigidité pour les groupes T et D .

LEMME 2.34. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA fixant J_a , T_i et D_i . Quitte à conjuguer φ par un automorphisme intérieur et un automorphisme du corps \mathbb{C} , les groupes D et T sont laissés invariants point par point.*

DÉMONSTRATION. Les groupes T_i et D_i étant fixes par φ , il existe φ_1 et φ_2 deux automorphismes du groupe des transformations affines de la droite tels que, pour tout (α, β) dans \mathbb{C}^{*2} et pour tout (r, s) dans \mathbb{C}^2 , nous ayons

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\varphi_1(\alpha x + r), \varphi_2(\beta y + s)).$$

La Proposition 1.3 assure que

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\tau_1(\alpha)x + \zeta\tau_1(r), \tau_2(\beta)y + \mu\tau_2(s))$$

où τ_1, τ_2 sont des automorphismes du corps \mathbb{C} et ζ, μ deux complexes non nuls. Le groupe J_a étant invariant par φ , il existe $a(y)$ dans $\mathbb{C}(y)$ tel que $\varphi(x + y, y)$ s'écrive $(x + a(y), y)$. Puisque, pour tout élément α de \mathbb{C}^* , l'élément $(x + y, y)$ commute à $d_{\alpha, \alpha}$, l'application $(x + a(y), y)$ commute à $d_{\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha)}$, autrement dit

$$\tau_1(\alpha)a(\tau_2(\alpha)^{-1}y) = a(y).$$

Développons a en série de LAURENT à l'origine, $a(y) = \sum_{i \geq -N} a_i y^i$; l'égalité précédente conduit, pour tout $i \geq -N$, à

$$(\tau_1(\alpha)\tau_2(\alpha)^{-i} - 1)a_i = 0.$$

Pour tout entier i tel que $a_i \neq 0$, nous avons : $\tau_1(\alpha)\tau_2(\alpha)^{-i} = 1$. Comme τ_1 est additif, l'égalité $\tau_2(\alpha)^i = \tau_1(\alpha)$ implique que τ_2^i est additif; nécessairement $i = 1$, *i.e.* $\tau_2 = \tau_1$. Ainsi

$$\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\tau_1(\alpha)x + \xi\tau_1(r), \tau_1(\beta)y + \mu\tau_1(s)).$$

Quitte à conjuguer φ par $d_{\tau_1(\xi), \tau_1(\mu)}$, puis composer par l'action de l'automorphisme de corps τ_1 nous obtenons $\varphi(\alpha x + r, \beta y + s) = (\alpha x + r, \beta y + s)$. \square

4.4. Conclusion.

LEMME 2.35. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA laissant les groupes \mathbf{D} et \mathbf{T} invariants point par point. Alors les involutions $(x, 1/y)$, (y, x) et σ sont fixées par φ .*

DÉMONSTRATION. Notons $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2)$ l'image de $(\pm y, \pm x)$ par φ . L'action de l'involution $(\pm y, \pm x)$ sur \mathbf{D} implique que

$$\varsigma_1(d_{\alpha,\beta}) = \beta\varsigma_1(x, y) \quad \text{et} \quad \varsigma_2(d_{\alpha,\beta}) = \alpha\varsigma_2(x, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* ;$$

ainsi ς_1 et ς_2 s'écrivent respectivement $\pm y$ et $\pm x$. La transformation $(\pm y, \pm x)$ agit par conjugaison sur \mathbf{T} alors que $(-y, x)$ et $(y, -x)$ non, donc $\varsigma = (y, x)$ ou $\varsigma = (-y, -x)$. L'involution (y, x) agit trivialement sur les éléments $t_{\alpha,\alpha}$ de \mathbf{T} alors que $(-y, -x)$ non ; (y, x) et $(-y, -x)$ sont donc invariants par φ .

L'involution $(x, 1/y)$ agit sur le groupe diagonal ; soit $d_{\alpha,\beta}$ un élément de \mathbf{D} , nous avons

$$(x, 1/y) d_{\alpha,\beta} (x, 1/y) = d_{\alpha,1/\beta}.$$

En appliquant φ nous obtenons, pour tous α, β dans \mathbb{C}^*

$$\xi_1(d_{\alpha,\beta}) = \alpha\xi_1(x, y) \quad \text{et} \quad \xi_2(d_{\alpha,\beta}) = \xi_2(x, y)/\beta$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ désigne l'image de $(x, 1/y)$ par φ . Par suite, $\xi(x, y) = (\pm x, \pm 1/y)$. L'action de $(x, 1/y)$ sur $t_{1,0}$ entraîne : $\varphi(x, 1/y) = (x, \pm 1/y)$.

L'égalité $((y, x)(x, 1/y))^2 = \sigma$ assure que $\varphi(\sigma) = \pm\sigma$ suivant que $(x, 1/y)$ est envoyé sur lui-même ou sur $(x, -1/y)$. Notons $h := \left(\frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)$; comme l'a remarqué GIZATULLIN (*voir [85]*), la transformation $(h\sigma)^3$ est triviale donc $(h\varphi(\sigma))^3$ doit aussi l'être. Nous en déduisons que l'involution de CREMONA est invariante par φ ; par suite $(x, 1/y)$ l'est aussi. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Le Corollaire 2.16 permet de supposer que \mathbf{J}_a est invariant par φ . Nous montrons que si $\varphi(\mathbf{J}_a) = \mathbf{J}_a$, les groupes \mathbf{T}_i sont fixes par φ à conjugaison permise près (Proposition 2.31) ; sous ces hypothèses nous obtenons, toujours à conjugaison permise près, que $\varphi(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}_i$ pour $i = 1, 2$ (Proposition 2.33). Ainsi, à automorphisme de corps et conjugaison près, les groupes \mathbf{T}_i et \mathbf{D}_i sont invariants point par point (Lemme 2.34) ; il en résulte que les involutions (y, x) , $(x, 1/y)$ et σ sont envoyées sur elles-mêmes par φ (Lemme 2.35). Or le groupe engendré par le groupe diagonal, le groupe des translations, (y, x) et $(x, \frac{1}{y})$ contient $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ donc le Théorème de NETHER (Théorème 1) permet de conclure. \square

5. COMPLÉMENTS

Soit H un sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ de la forme $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$ avec p premier ; si $p \geq 5$, alors $r \leq 2$ (voir [8, 29, 41]). Notons que $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \text{Bir}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ ne contient pas $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$, $n > 1$, $p > 2$; comme $\text{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ et donc $\text{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ contient $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ dès que $n \geq 2$, nous en déduisons la :

REMARQUE 6. *Les groupes $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ sont isomorphes si et seulement si $n = 2$.*

Nous pouvons déduire du Théorème 2.1 un résultat sur le groupe d'automorphismes du semi-groupe $\text{Rat}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même ; ce semi-groupe contient $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ nous pouvons donc parler d'automorphisme intérieur.

COROLLAIRE 2.36. *Un isomorphisme du semi-groupe des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même est intérieur à composition près par un automorphisme du corps \mathbb{C} .*

DÉMONSTRATION. Soit ϕ un isomorphisme de $\text{Rat}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ dans lui-même ; ϕ induit un automorphisme de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Quitte à composer ϕ par un automorphisme de corps puis à conjuguer par un automorphisme intérieur, nous supposons que la restriction de ϕ au groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est l'identité (voir Théorème 2.1).

Pour tout α dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, notons f_α l'endomorphisme constant de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui vaut α . Pour tout élément g de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, nous avons $f_\alpha \circ g = f_\alpha$. Ainsi ϕ envoie l'endomorphisme f_α sur un endomorphisme constant f_κ ; ceci définit une application inversible h de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même telle que $\phi(f_\alpha) = f_{h(\alpha)}$. À partir de l'égalité $g \circ f_\alpha = f_{g(\alpha)}$ valable pour tout g dans $\text{Rat}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ et tout α dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, nous remarquons que d'une part

$$\phi(g \circ f_\alpha) = \phi(f_{g(\alpha)}) = f_{h(g(\alpha))}$$

et d'autre part

$$\phi(g \circ f_\alpha) = \phi(g)\phi(f_\alpha) = g f_{h(\alpha)} = f_{g(h(\alpha))}.$$

Par suite $g(h(\alpha)) = h(g(\alpha))$: l'application h commute à $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ donc est triviale. \square

Nous allons démontrer le :

COROLLAIRE 2.37. *Soient S une surface projective complexe et ϕ un isomorphisme entre $\text{Bir}(S)$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Il existe une transformation birationnelle $\psi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et un automorphisme τ du corps \mathbb{C} tels que, pour tout f dans $\text{Bir}(S)$, nous ayons*

$$\phi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

DÉMONSTRATION. Si la dimension de KODAIRA de S , que nous notons $\text{kod}(S)$, est 2, alors tout élément de $\text{Bir}(S)$ est d'ordre fini. Lorsque $\text{kod}(S) = 1$, le groupe $\text{Bir}(S)$ préserve une fibration elliptique et est virtuellement abélien ([4]). Dans chacun de ces cas, nous constatons que $\text{Bir}(S)$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ ne sont pas isomorphes. Supposons que $\text{kod}(S) = 0$; si $\text{Bir}(S)$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ sont isomorphes, alors ce dernier contient un sous-groupe distingué abélien d'indice dénombrable H (voir [4]). Considérons l'inclusion

$$j : \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$$

et la projection

$$p : \text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \rightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))/H.$$

Puisque $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ est simple et que $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))/H$ est dénombrable, $\ker(p \circ j) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ est contenu dans H : impossible.

Si $\text{kod}(S) = -\infty$, alors S est une surface réglée non rationnelle ou une surface rationnelle. Plaçons nous dans la première éventualité; il existe une fibration rationnelle $\mathcal{F} : S \rightarrow B$ localement triviale. Cette fibration est préservée par $\text{Bir}(S)$, *i.e.* il existe

$$\rho : \text{Bir}(S) \rightarrow \text{Aut}(B)$$

tel que, pour tout élément f de $\text{Bir}(S)$, nous ayons $\mathcal{F} \circ f = \rho(f) \circ \mathcal{F}$. Supposons que $\text{Bir}(S)$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ soient isomorphes, alors $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ s'injecte via j dans $\text{Bir}(S)$; par simplicité, $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ s'injecte dans $\ker \rho = \text{PGL}_2(\mathbb{k})$, où \mathbb{k} désigne le corps des fonctions méromorphes de B , ce qui est impossible. La surface S est donc nécessairement rationnelle. \square

Nous obtenons le fait suivant :

COROLLAIRE 2.38. *Le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}(x, y)$ est isomorphe au groupe des automorphismes du groupe de CREMONA.*

DÉMONSTRATION. Soit ϕ un automorphisme du corps $\mathbb{C}(x, y)$. Les constantes sont les seuls éléments de $\mathbb{C}(x, y)$ à posséder une racine n -ième pour tout n . Il s'en suit que \mathbb{C} est invariant par ϕ ; ainsi, à automorphisme de corps près, $\phi|_{\mathbb{C}}$ est trivial. Notons f la transformation birationnelle définie par $f := (\phi(x), \phi(y))$; pour tout couple d'entiers (i, j) , nous avons $\phi(x^i y^j) = x^i y^j \circ f$. Ceci conduit pour tout polynôme P à $\phi(P) = P \circ f$; nous en déduisons une égalité du même type pour toute fonction rationnelle R . Par suite tout automorphisme de $\mathbb{C}(x, y)$ s'obtient par la composition de l'action d'un automorphisme du corps \mathbb{C} et d'une transformation birationnelle. \square

6. FORMES NORMALES

Soit G un sous-groupe abélien non dénombrable du groupe de JONQUIÈRES; nous avons montré (Théorème 2.29) que si G_0 est un sous-groupe non trivial de

J_a et $\pi(\mathbf{G})$ un groupe non dénombrable de translations, alors \mathbf{G} est conjugué à \mathbf{T} . Nous allons, dans cette partie, donner des résultats analogues précisant la nature de certains sous-groupes abéliens maximaux de \mathbf{J} .

THÉORÈME 2.39. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} tel que \mathbf{G}_0 soit non trivial et contenu dans J_a . Si $\pi(\mathbf{G})$ est un groupe non dénombrable d'homothéties, alors \mathbf{G} est conjugué à $\{(x + a, by) \mid a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*\}$.*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 2.29 nous avons à conjugaison près :

- $\mathbf{G}_0 = \{(x + a, y) \mid a \in \mathbb{C}\}$,
- \mathbf{G} est contenu dans $\{(x + b(y), \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y), \nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\}$.

Puisque $\mathbf{G}_0 = \mathbf{T}_1$, pour tout αy dans $\pi(\mathbf{G})$ il existe un unique élément $(x + b(y), \alpha y)$ tel que le coefficient constant du développement en série de LAURENT de b à l'origine soit nul ; nous noterons $(x + b_\alpha(y), \alpha y)$ cet élément.

Soit $(x + b_\zeta(y), \zeta y)$ un élément de \mathbf{G} tel que ζ soit d'ordre infini. Notons $b_\zeta(y) = \sum_{i \geq -q} b_i y^i$ le développement en série de LAURENT à l'origine ; posons $\ell_0 := 0$ et $\ell_i := \frac{b_i}{\zeta^i - 1}$ pour tout $i \neq 0$. En conjuguant $(x + b_\zeta(y), \zeta y)$ par la série de LAURENT formelle

$$h = \left(x + \sum_{i \geq -q} \ell_i y^i, y\right),$$

nous obtenons $(x, \zeta y)$. Si $d(y)$ est une série de LAURENT formelle en y , la transformation $(x + d(y), \beta y)$ commute à $(x, \zeta y)$ si et seulement si $d(y)$ est une constante. Autrement dit le groupe \mathbf{G} est formellement conjugué, via h , à

$$\{(x + \alpha, \beta y) \mid \alpha \in \mathbb{C}, \beta y \in \pi(\mathbf{G})\}.$$

Montrons qu'en fait cette conjugaison formelle est rationnelle. L'égalité

$$b_\beta(y) = \sum_{i \geq -q} \ell_i (1 - \beta^i) y^i,$$

valable pour une infinité non dénombrable de β , assure que la série formelle

$$f(z, y) = \sum_{i \geq -q} \ell_i (1 - z^i) y^i$$

est rationnelle en y pour un ensemble non dénombrable de z . Autrement dit, pour une infinité non dénombrable de z , il existe $a = (a_0, \dots, a_N)$ et $b = (b_{q+1}, \dots, b_N)$ tels que $f(z, y)$ s'écrive

$$\frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_N y^N}{y^q + b_{q+1} y^{q+1} + \dots + b_N y^N}$$

où les a_i et b_i dépendent de z . Considérons l'ensemble

$$\Omega := \left\{ \frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_N y^N}{y^q + b_{q+1} y^{q+1} + \dots + b_N y^N} \mid a_i, b_i \in \mathbb{C} \right\} ;$$

il est isomorphe à \mathbb{C}^{2N+1-q} . Tout élément de Ω admet un développement en série de LAURENT : $\sum_{i \geq -q} F_i(a, b)y^i$. Soit Θ le sous-ensemble algébrique de $\Omega \times \mathbb{C}$ défini par

$$\Theta := \{L_i(1 - z^i) = F_i(a, b), i \geq -q\}.$$

Comme $\pi(\mathbf{G})$ n'est pas dénombrable, Θ est un ensemble algébrique de dimension supérieure ou égale à 1 dans $\mathbb{C}^{2N+1-q} \times \mathbb{C}$. Soit p la projection de $\mathbb{C}^{2N+1-q} \times \mathbb{C}$ sur \mathbb{C} ; remarquons que $p(\Theta)$ n'est pas dénombrable. Le théorème de PUISEUX assure donc l'existence d'une courbe dans Θ et d'une fonction méromorphe $z \mapsto (a(z), b(z))$ qui paramètre cette courbe sur un voisinage \mathbb{D} de l'origine. Il existe un entier k tel que

$$a(z) = \left(\frac{A_0(z)}{z^k}, \dots, \frac{A_N(z)}{z^k} \right) \quad \text{et} \quad b(z) = \left(\frac{B_{q+1}(z)}{z^k}, \dots, \frac{B_N(z)}{z^k} \right)$$

où les A_i et B_i sont holomorphes. Pour tout z dans \mathbb{D} , nous avons

$$f(z, y) = \sum_{i \geq -q} \ell_i(1 - z^i)y^i = \frac{A_0(z) + A_1(z)y + \dots + A_N(z)y^N}{y^q z^k + B_{q+1}(z)y^{q+1} + \dots + B_N(z)y^N}.$$

Par suite, $f(0, y) = \sum_{i \geq -q} \ell_i y^i$ est rationnelle.

Les groupes

$$\mathbf{G} \quad \text{et} \quad \{(x + \alpha, \beta y) \mid \alpha \in \mathbb{C}, \beta y \in \pi(\mathbf{G})\}$$

sont donc conjugués via un élément du groupe de CREMONA. La maximalité de \mathbf{G} assure que $\pi(\mathbf{G})$ est isomorphe à \mathbb{C}^* . \square

THÉORÈME 2.40. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} tel que \mathbf{G}_0 soit un sous-groupe non fini de \mathbf{J}_m . Si $\pi(\mathbf{G})$ est un groupe non dénombrable d'homothéties, alors \mathbf{G} est conjugué au groupe diagonal.*

DÉMONSTRATION. Comme dans le Lemme 2.29 nous pouvons montrer que :

- $\mathbf{G}_0 = \{(ax, y) \mid a \in \mathbb{C}^*\}$;
- \mathbf{G} est contenu dans $\{(b(y)x, \nu(y)) \mid b \in \mathbb{C}(y)^*, \nu \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})\}$.

Notons $\text{ord}_0(b)$ l'ordre d'un élément b de $\mathbb{C}(y)$ en 0 et pour tout ℓ et m

$$\mathbf{G}_{\ell, m} := \{(b(y)x, \beta y) \in \mathbf{G} \mid \deg b \leq \ell, \text{ord}_0(b) = m\}.$$

Puisque $\pi(\mathbf{G})$ n'est pas dénombrable, il existe deux entiers p et N tels que l'ensemble $\pi(\mathbf{G}_{p, N})$ ne soit pas dénombrable. Soit $(b_\beta(y)x, \beta y)$ l'unique élément de $\mathbf{G}_{p, N}$ tel que le coefficient de y^N dans le développement en série de LAURENT en 0 de b_β soit β^N . Écrivons b_β sous la forme $y^N \tilde{b}_\beta(y)$ où \tilde{b}_β est holomorphe en 0 et $\tilde{b}_\beta(0) = \beta^N$. Soient βy et γy dans $\pi(\mathbf{G}_{p, N})$; la condition de commutation $b_\beta(y)b_\gamma(\beta y) = b_\gamma(y)b_\beta(\gamma y)$ s'écrit aussi

$$\tilde{b}_\beta(y)\tilde{b}_\gamma(\beta y)\beta^N = \tilde{b}_\gamma(y)\tilde{b}_\beta(\gamma y)\gamma^N.$$

Cette dernière égalité conduit pour $y = 0$ à $\beta^N = \gamma^N$. Notons $\sum_{i \geq N} b_i y^i$ le développement en série de LAURENT de b_β . L'ensemble $\pi(\mathbf{G}_{p,N})$ n'étant pas dénombrable, nous en déduisons que $N = 0$ puis que $b_0 = 1$. Soit $(b_\zeta(y)x, \zeta y)$ dans $\mathbf{G}_{p,N}$ tel que ζ ne soit pas racine de l'unité. Posons $\ell_0 := 1$ et pour tout $i > 0$

$$\ell_i := \frac{1}{\zeta^i - 1} \sum_{k=0}^{i-1} \ell_k a_{i-k},$$

où les a_i sont les coefficients du développement en série de Laurent à l'origine de b_ζ . En conjuguant $(b_\zeta(y)x, \zeta y)$ par $g := (\sum_{i \geq 0} \ell_i y^i x, y)$, nous obtenons $(x, \zeta y)$. Une transformation $(h(y)x, \gamma y)$, où h est une série de LAURENT formelle, commute à $(x, \zeta y)$ si et seulement si h est une constante. Ainsi \mathbf{G} est conjugué, via g , au groupe

$$\{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta y \in \pi(\mathbf{G})\}.$$

En procédant comme dans la démonstration du Théorème 2.39 nous montrons que cette conjugaison est rationnelle. L'égalité $\ell(\beta y)b_\beta(y) = \xi \ell(y)$, où ξ désigne une constante non nulle et $\ell(y) := \sum_{i \geq 0} \ell_i y^i$, valable pour une infinité non dénombrable de β , implique que la fonction

$$f(z, y) = \frac{1}{\ell(y)} \sum_{i \geq -q} \ell_i z^i y^i$$

est rationnelle en y pour tout z donc $\tilde{f}(z, y) := z^q f(z, y)$ aussi. En particulier l'élément $\tilde{f}(0, y) = \frac{1}{y^q \ell(y)}$ et donc L sont rationnels. Autrement dit

$$\{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta y \in \pi(\mathbf{G})\} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}$$

sont conjugués via une transformation birationnelle. Le groupe \mathbf{G} étant maximal, $\pi(\mathbf{G})$ est isomorphe à \mathbb{C}^* . \square

THÉORÈME 2.41. *Soit \mathbf{G} un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de \mathbf{J} tel que \mathbf{G}_0 soit un sous-groupe non fini de \mathbf{J}_m . Si $\pi(\mathbf{G})$ est un groupe non dénombrable de translations, alors \mathbf{G} est conjugué à*

$$\{(ax, y + b) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$$

DÉMONSTRATION. Par le même argument que dans la preuve du Théorème 2.29 nous pouvons montrer que l'application $\beta \mapsto b_\beta$ est rationnelle sur \mathbb{C} .

De la condition de commutation $b_\alpha(y)b_\beta(y + \alpha) = b_\alpha(y + \beta)b_\beta(y)$, nous déduisons une égalité de type (8) :

$$\log b_\alpha(y) - \log b_\alpha(y + \beta) = \log b_\beta(y) - \log b_\beta(y + \alpha).$$

Les déterminations du log sont sans importance puisque nous allons dériver. Remarquons, puisque $b_\alpha(y)$ est une fonction rationnelle en y et α , que $\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial y} \log b_\alpha(y)$ est une fonction rationnelle; de plus c'est une fonction en $y + \alpha$ (voir démonstration

du Théorème 2.29). Ainsi $\frac{\partial}{\partial y} \log b_\alpha(y)$ est une fonction rationnelle de la forme $T(y + \alpha) + t(y)$. Comme b_α est un élément de $\mathbb{C}(y)^*$, il existe ℓ et l dans $\mathbb{C}(y)^*$ tels que

$$\log b_\alpha(y) = \log(\ell(y + \alpha) - \ell(y) + l(\alpha)).$$

Il en résulte que

$$(b_\alpha(y)x, y + \alpha) = (\ell(y + \alpha)l(\alpha)x/\ell(y), y + \alpha);$$

or

$$(\ell(y + \alpha)l(\alpha)x/\ell(y), y + \alpha)$$

est conjugué à $(l(\alpha)x, y + \alpha)$ via $(\ell(y)x, y)$. Le groupe \mathbf{G} étant abélien et maximal,

$$\mathbf{G} \quad \text{et} \quad \{(ax, y + b) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$$

sont conjugués dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. □

CHAPITRE 3

REPRÉSENTATIONS DE CERTAINS RÉSEAUX DE GROUPES DE LIE DANS LE GROUPE DE CREMONA

Ce chapitre détaille et complète un article à paraître dans *Int. Math. Res. Not.* Il traite des représentations de certains réseaux de groupes de LIE dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; ces problèmes sont suggérés par une conjecture issue d'un programme, dû en partie à ZIMMER, qui vise à généraliser certains travaux de MARGULIS (voir [32, 40]). Dans un premier temps nous obtenons un théorème de rigidité pour $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$.

THÉORÈME 3.1. 1) Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ et ρ un morphisme injectif de Γ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Alors ρ coïncide, à conjugaison birationnelle près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution $u \mapsto {}^t u^{-1}$.

2) Si un morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA est d'image infinie, alors $n \leq 3$.

Nous montrons ensuite le :

THÉORÈME 3.2. Soit G un \mathbb{Q} -groupe algébrique \mathbb{Q} -simple de \mathbb{Q} -rang r . Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbb{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si ρ est d'image infinie, alors $r \leq 2$.

De plus, si $r = 2$ et ρ est d'image infinie, alors G possède un système de \mathbb{Q} -racines de type A_2 et l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Comme conséquence du Théorème 3.2 nous obtenons à l'aide de [14] l'énoncé suivant :

COROLLAIRE 3.3. Soit G un \mathbb{Q} -groupe algébrique \mathbb{Q} -simple de \mathbb{Q} -rang supérieur ou égal à 3. Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbb{Z})$ et M une surface de KÄHLER compacte. Tout morphisme de Γ dans le groupe des transformations birationnelles de M est d'image finie.

Le premier paragraphe de ce chapitre est constitué de divers rappels sur les groupes qui ont la propriété (T) de KAZHDAN, les transformations rationnelles des surfaces, les groupes $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\text{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ et les groupes de HEISENBERG. Nous nous

intéressons ensuite aux représentations des groupes de HEISENBERG dans le groupe des automorphismes des surfaces. Dans un troisième paragraphe nous démontrons la rigidité de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$; ceci nous permet d'obtenir, dans une quatrième partie, le Théorème 3.2. Puis en étudiant les plongements des groupes de matrices 4×4 triangulaires supérieures à coefficients entiers et valant 1 sur la diagonale, dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ nous donnons une seconde preuve du fait suivant : *le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ ne s'injecte pas dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ dès que $n \geq 4$* ; nous reprenons certaines des techniques utilisées au §3. Pour finir nous redémontrons à l'aide de la rigidité de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ que le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ s'identifie au groupe des automorphismes du corps \mathbb{C} (Théorème 2.1).

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Quelques définitions et résultats ([18]). Commençons par rappeler quelques notions et propriétés des groupes de KAZHDAN ; pour un exposé plus complet nous renvoyons à [18].

Soient G un groupe localement compact, \mathcal{H} un espace de HILBERT et $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateurs unitaires sur \mathcal{H} . Une **représentation** de G est un morphisme $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tel que l'application $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ associée soit continue. Soient $\varepsilon > 0$ et Ω une partie compacte de G ; un vecteur unité ξ de \mathcal{H} est (ε, Ω) -invariant si :

$$\sup \{ \|\rho(g)\xi - \xi\| \mid g \in \Omega \} < \varepsilon.$$

On dit que ρ **possède presque un vecteur invariant** si, pour tout (ε, Ω) , il existe un vecteur unité (ε, Ω) -invariant. La représentation ρ **possède des vecteurs invariants** non nuls s'il existe η dans \mathcal{H} non nul tel que $\rho(g)\eta = \eta$ pour tout g dans G . Le groupe G a la **propriété (T)** ou est **un groupe de KAZHDAN** si toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls. Avant de donner une large classe de groupes vérifiant la propriété (T) rappelons la notion suivante : le **rang réel** ou **\mathbb{R} -rang** d'un groupe de LIE semi-simple connexe d'algèbre de LIE \mathfrak{g} est l'entier maximal r tel qu'il existe une sous-algèbre abélienne \mathbb{R}^r de \mathfrak{g} dont l'image par la représentation adjointe est diagonalisable sur \mathbb{R} .

THÉORÈME 3.4. *Tout groupe de LIE réel simple connexe de rang réel supérieur ou égal à 2 est un groupe de KAZHDAN.*

Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe localement compact. Rappelons que G/H possède une mesure invariante par G si et seulement si la restriction à H de la fonction module sur G est la fonction module sur H (voir [34], chapitre 1). On dit que H est de **covolume fini** dans G s'il existe une mesure G -invariante finie sur G/H .

THÉORÈME 3.5. *Soient G un groupe de KAZHDAN et H un sous-groupe fermé de G de covolume fini. Alors H est un groupe de KAZHDAN.*

Un **réseau** d'un groupe G est un sous-groupe discret de covolume fini. Les Théorèmes 3.4 et 3.5 entraînent l'énoncé qui suit.

COROLLAIRE 3.6. *Soit Γ un réseau dans un groupe algébrique simple de rang réel supérieur ou égal à 2. Alors Γ est un groupe de KAZHDAN.*

EXEMPLE. Pour $n \geq 3$, les réseaux $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ ont la propriété (T).

Signalons enfin deux énoncés dont nous nous servirons par la suite.

THÉORÈME 3.7. *Un groupe de KAZHDAN G a la propriété suivante : toute action continue de G par isométries d'un espace hyperbolique réel ou complexe possède un point fixe.*

PROPOSITION 3.8 ([42]). *Tout sous-groupe dénombrable de $SO_n(\mathbb{R})$ qui a la propriété (T) est un groupe fini si $n \leq 4$.*

1.2. La « conjecture de ZIMMER » pour le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Une action d'un groupe Γ sur un arbre est dite **sans inversion** s'il n'existe pas de couple de sommets adjacents qui soient permutés par un élément de Γ . Un groupe Γ a la **propriété (FA)** si pour toute action sans inversion de Γ sur un arbre X il existe un sommet de X invariant par tous les éléments de Γ . Un groupe de KAZHDAN a la propriété (FA) (voir [18], chapitre 6).

THÉORÈME 3.9 ([16]). *Soient G un groupe de LIE réel simple et Γ un réseau de G . S'il existe un morphisme injectif de Γ dans le groupe des automorphismes polynomiaux du plan complexe, le groupe G est isomorphe à $\text{PSO}(1, n)$ ou à $\text{PSU}(1, n)$ pour un certain entier n .*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION, (pour les détails voir [16]). Ce résultat repose en partie sur la structure de produit amalgamé du groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (Théorème de JUNG) : $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'écrit comme le produit amalgamé de E et A au dessus de $E \cap A$ où

$$E := \{(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[y]\}$$

et

$$A := \{(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}.$$

Si un groupe G se plonge dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, alors :

- ou bien G agit sur un arbre sans fixer de sommet ;
- ou bien G se plonge dans A ou E .

À partir de cette remarque et du fait que tout groupe de KAZHDAN a la propriété (FA), CANTAT et LAMY étudient les plongements des groupes de KAZHDAN et, par suite, des réseaux des groupes de LIE de \mathbb{R} -rang ≥ 2 . \square

1.3. Transformations rationnelles des surfaces. Nous allons dans cette partie rappeler quelques résultats et idées de DILLER et FAVRE (voir [20]).

À une surface S on peut associer son groupe de cohomologie de DOLBEAULT $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ et ses groupes de cohomologie $H^k(S, \mathbb{Z})$, $H^k(S, \mathbb{R})$ et $H^k(S, \mathbb{C})$.

Soient X, Y deux surfaces complexes compactes et $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe dominante¹ ; notons $\text{Ind}(f)$ le lieu d'indétermination de f et $\text{Exc}(f)$

¹ Soient $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe, Γ_f l'adhérence du graphe de f et π_2 la projection de Γ_f sur Y . L'application f est **dominante** si π_2 est surjective.

l'union des courbes contractées par f . Soient Γ_f l'adhérence du graphe de f , $\pi_1 : \Gamma_f \rightarrow X$ et $\pi_2 : \Gamma_f \rightarrow Y$ les projections naturelles ; si Γ_f est une sous-variété singulière de $X \times Y$, nous considérons une désingularisée de Γ_f sans changer de notation. Si β est une forme différentielle de bidegré $(1, 1)$ sur Y , alors $\pi_2^*\beta$ détermine une forme de bidegré $(1, 1)$ sur Γ_f qui peut être poussée en un courant $f^*\beta := \pi_{1*}\pi_2^*\beta$ sur X à l'aide de la première projection. Remarquons que f^* induit un opérateur entre $\mathbf{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ et $\mathbf{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$: si β et γ sont homologues, alors $f^*\beta$ et $f^*\gamma$ le sont aussi. Supposons désormais que $X = Y$. La transformation f est dite **algébriquement stable** s'il n'existe pas de courbe V dans X telle que $f^k(V)$ appartienne à $\text{Ind}(f)$ pour un certain entier $k \geq 0$.

THÉORÈME 3.10 ([20], théorème 0.1). *Soient S une surface rationnelle et f une application birationnelle de S dans elle-même. Il existe une surface \tilde{S} , un morphisme birationnel $\varepsilon : \tilde{S} \rightarrow S$ telle que $\varepsilon^{-1}f\varepsilon$ soit algébriquement stable.*

Le **premier degré dynamique** d'une transformation birationnelle $f : S \dashrightarrow S$ est défini par

$$\lambda(f) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} |(f^n)^*|^{1/n}$$

où $|\cdot|$ désigne une norme sur $\text{End}(\mathbf{H}^{1,1}(S, \mathbb{R}))$; ce nombre est minoré par 1 (*voir* [22, 35]). Notons que, pour toute transformation birationnelle f du plan projectif complexe, nous avons l'inégalité

$$\lambda(f)^n \leq \text{deg } f^n$$

où $\text{deg } f$ désigne le degré algébrique de f (le degré algébrique de $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ est le degré des polynômes homogènes f_i).

L'énoncé suivant donne une « description » des transformations birationnelles de premier degré dynamique 1.

THÉORÈME 3.11 ([20], théorème 0.2). *Soient S une surface rationnelle et f une application birationnelle de S dans elle-même telle que $\lambda(f) = 1$. Alors f satisfait une et une seule des conditions suivantes :*

- la suite $|(f^n)^*|$ est bornée, alors f^n est, à conjugaison birationnelle près, un automorphisme isotope à l'identité pour un certain $n > 0$;
- la suite $|(f^n)^*|$ est à croissance linéaire, alors f laisse, à conjugaison birationnelle près, une unique fibration rationnelle invariante et n'est pas conjuguée à un automorphisme ;
- la suite $|(f^n)^*|$ est à croissance quadratique, alors f est, à conjugaison birationnelle près, un automorphisme qui préserve une unique fibration elliptique.

Pour finir ce paragraphe, nous détaillons la première assertion de l'énoncé précédent ; nous reprendrons ce genre d'arguments au §2.

LEMME 3.12 ([20], lemme 4.1). Soient S une surface de KÄHLER et $f : S \dashrightarrow S$ une application biméromorphe telle que $\lambda(f) = 1$. Notons $\|\cdot\|$ une norme hermitienne sur $H^2(S, \mathbb{C}) \supset H^{1,1}(S)$. La suite $(\|f^{n*}\|)_n$ est bornée si et seulement si f est conjuguée à un automorphisme dont une puissance est isotope à l'identité.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite $(\|f^{n*}\|)_n$ soit bornée; quitte à faire une suite finie d'éclatements η bien choisie, $\eta f \eta^{-1}$ est algébriquement stable. Remarquons que la suite $(\|(\eta f \eta^{-1})^{n*}\|)_n = (\|(\eta f \eta^{-1})^{*n}\|)_n$ est encore bornée ([20], proposition 1.16). Posons, pour simplifier, $f := \eta f \eta^{-1}$. D'après [20] (corollaire 3.4) l'opérateur f^* induit une isométrie de $H^{0,2}(S)$ (resp. $H^{2,0}(S)$) dans lui-même; ainsi la suite

$$((f^*)^n : H^2(S) \rightarrow H^2(S))_n$$

est bornée. Comme f^* préserve le réseau $H^2(S, \mathbb{Z})$ nous avons $(f^*)^{n+k} = (f^*)^k$ pour un certain $n > 0$ et k suffisamment grand. Soient ω une forme de KÄHLER sur S et $\alpha = \{f^{k*}\omega\}$; alors α est une classe nef non nulle vérifiant $f^{n*}\alpha = \alpha$. D'après [20] (corollaire 3.4) nous avons $\alpha \cdot V = 0$ pour toute composante irréductible V de $\text{Exc}(f^{-n})$. Par suite $(\omega, f_*^k V) = 0$; puisque $f_*^k V$ est effectif, $f_*^k V = 0$. Ainsi, toujours d'après le corollaire 3.4 de [20], pour tout élément V de $\text{Exc}(f^{-n})$ nous avons $V \cdot V \leq 0$; plus précisément $V \cdot V < 0$ sinon nous aurions, par le théorème d'indice de HODGE, $\{V\} = \alpha$ puis $f_*^k f^{k*}\{\omega\} = 0$ ce qui est impossible. Puisque S est lisse, $V \cdot V = -1$.

Soit $\varepsilon : \tilde{S} \dashrightarrow S$ la contraction d'une courbe de $\text{Exc}(f^{-1})$. La transformation $\tilde{f} : \tilde{S} \dashrightarrow \tilde{S}$ définie par $\tilde{f} := \varepsilon^{-1} f \varepsilon$ est algébriquement stable et comme $\text{Ind}(\varepsilon) = \text{Exc}(\varepsilon^{-1}) = \emptyset$ nous avons par [20] :

$$(\tilde{f}^*)^j = \varepsilon_*(f^*)^j \varepsilon^* \quad \forall j.$$

Il s'en suit que $\tilde{f}^{(n+k)*} = \tilde{f}^{k*}$ et que $\text{Exc}(\tilde{f}^{-1})$ n'a pas de composante irréductible d'auto-intersection positive ou nulle. Nous pouvons donc continuer à contracter toutes les courbes jusqu'à ce que $\text{Exc}(\tilde{f}^{-1})$ soit vide. Puisque $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(S)$ diminue de 1 à chaque étape, nous obtenons au bout d'un nombre fini d'opérations un automorphisme g . L'opérateur g^* est nécessairement inversible; ainsi g^{n*} est l'identité et, d'après [13], une puissance de g^n est isotope à l'identité. \square

1.4. Les groupes $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ ([37]). Nous allons rappeler quelques propriétés sur les groupes $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$; pour un exposé plus complet, nous renvoyons à [37].

Pour tout entier q introduisons le morphisme $\Theta_q : \text{SL}_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ qui à une matrice à coefficients entiers associe sa réduite modulo q . Soient $\Gamma_n(q)$ le noyau de Θ_q et $\tilde{\Gamma}_n(q)$ l'image réciproque du sous-groupe diagonal de $\text{SL}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ par Θ_q ; les $\Gamma_n(q)$ sont des sous-groupes distingués appelés **groupes de congruence**. Les études de BASS, LAZARD, MILNOR et SERRE ([5, 6]) sur les groupes de congruence ont, entre autres, conduit à l'énoncé suivant :

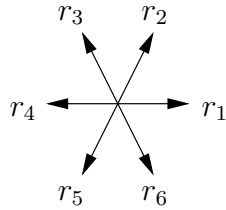
THÉOREME 3.13 ([5, 6]). Soient $n \geq 3$ et Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Si Γ est d'indice fini, il existe un entier q tel que Γ contienne un groupe $\Gamma_n(q)$ et soit contenu dans $\tilde{\Gamma}_n(q)$.
Si Γ est d'indice infini, alors Γ est fini.

Notons δ_{ij} la matrice de KRONECKER 3×3 et $e_{ij} = \mathrm{Id} + \delta_{ij}$.

PROPOSITION 3.14. Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a pour présentation :

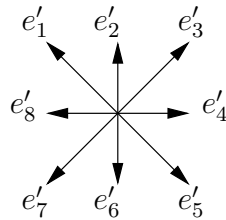
$$\langle e_{ij}, i \neq j \mid [e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si } i \neq l \text{ et } j \neq k \\ e_{il} & \text{si } i \neq l \text{ et } j = k \\ e_{kj}^{-1} & \text{si } i = l \text{ et } j \neq k \end{cases}, (e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \mathrm{Id} \rangle.$$

Les e_{ij}^q engendrent $\Gamma_3(q)$ et vérifient des relations similaires aux e_{ij} (remarquons que la relation $(e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \mathrm{Id}$ n'a pas d'analogue); nous les appellerons **générateurs standards** de $\Gamma_3(q)$. Le système de racines de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est de type A_2 (voir [24]) :



Chacun des générateurs standards d'un $\Gamma_3(q)$ est un élément du groupe à un paramètre associé à une racine r_i du système; le système de racines permet donc de retrouver la plupart des relations apparaissant dans la présentation de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Par exemple $r_1 + r_3 = r_2$ correspond à $[e_{12}, e_{23}] = e_{13}$, la relation $r_2 + r_4 = r_3$ à $[e_{13}, e_{21}] = e_{23}^{-1}$ et le fait que $r_1 + r_2$ ne soit pas une racine à $[e_{12}, e_{13}] = \mathrm{Id}$.

1.5. Le groupe $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$. On peut aussi pour $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ considérer le morphisme Θ_q qui à une matrice associe sa réduite modulo q et définir des sous-groupes de congruence. Le Théorème 3.13 est valable pour $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 2$ (voir [6]) donc, en particulier, pour $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ car $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{R})$. L'algèbre $\mathfrak{so}_{2,3}(\mathbb{Q})$ admet pour système de racines un système de type B_2 (voir [24]) :



Avec la convention $\alpha_i = \alpha_{i \bmod 8}$, les générateurs α_i d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} [\alpha_i, \alpha_{i+1}] &= [\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i+1}] = \mathrm{Id}, & [\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i+2}] &= \alpha_{2i}^{p_i}, \\ [\alpha_{2i}, \alpha_{2i+2}] &= \alpha_{2i+1}^{q_i}, & [\alpha_{2i}, \alpha_{2i+3}] &= \alpha_{2i+2}^{r_i} \end{aligned}$$

où les p_i , q_i et r_i désignent des entiers non nuls.

1.6. Groupes de HEISENBERG.

DÉFINITION 3. Soit k un entier. Nous appelons k -groupe de HEISENBERG un groupe qui a pour présentation :

$$\mathcal{H}_k = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \mid [\mathbf{f}, \mathbf{h}] = [\mathbf{g}, \mathbf{h}] = \mathrm{id}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \mathbf{h}^k \rangle.$$

Par convention $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$; c'est un groupe de HEISENBERG.

Notons que le groupe de HEISENBERG engendré par \mathbf{f} , \mathbf{g} et \mathbf{h}^k est un sous-groupe d'indice k de \mathcal{H}_k . Nous appellerons \mathbf{f} , \mathbf{g} et \mathbf{h} les **générateurs standards** de \mathcal{H}_k .

REMARQUE 7. Dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, chaque e_{ij}^q s'écrit comme le commutateur de deux e_{kl}^q avec lesquels il commute ; autrement dit tout générateur standard de $\Gamma_n(q)$ est contenu dans le groupe dérivé d'un sous-groupe de $\Gamma_n(q)$. Les $\Gamma_3(q)$ contiennent donc de nombreux k -groupes de HEISENBERG ; par exemple le sous-groupe $\langle e_{12}^q, e_{13}^q, e_{23}^q \rangle$ de $\Gamma_3(q)$ en est un (pour $k = q$).

REMARQUE 8. Le sous-groupe $\langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ est un q_1 -groupe de HEISENBERG.

2. REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE HEISENBERG

Comme nous l'avons noté précédemment les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ contiennent des groupes de HEISENBERG, nous sommes donc naturellement amenés à étudier les représentations de ceux-ci dans le groupe des automorphismes des surfaces de HIRZEBRUCH, de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Commençons par établir quelques propriétés.

DÉFINITION 4. Soit S une surface complexe compacte. La transformation birationnelle $f : S \dashrightarrow S$ est dite **virtuellement isotope à l'identité** s'il existe une surface \tilde{S} , une transformation birationnelle $\eta : S \dashrightarrow \tilde{S}$ et un entier $k > 0$ tels que $\eta f^k \eta^{-1}$ soit un automorphisme de \tilde{S} isotope à l'identité.

Deux transformations birationnelles f et g sur S sont dites **simultanément virtuellement isotopes** à l'identité si le couple (η, \tilde{S}) est commun à f et g .

REMARQUE 9. Si C_1 et C_2 désignent deux courbes irréductibles d'auto-intersection négative homologues alors C_1 et C_2 coïncident. Ainsi un automorphisme f d'une surface S isotope à l'identité fixe chaque courbe d'auto-intersection négative ; pour toute suite de contractions ψ de S vers un modèle minimal \tilde{S} de S , l'élément $\psi f \psi^{-1}$ est donc un automorphisme de \tilde{S} isotope à l'identité.

LEMME 3.15. *Soient f et g deux transformations birationnelles sur une surface S virtuellement isotopes à l'identité. Supposons que f et g commutent ; alors f et g sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse il existe une surface \tilde{S} , une transformation birationnelle $\zeta : \tilde{S} \dashrightarrow S$ et un entier n tels que $\zeta^{-1} f^n \zeta$ soit un automorphisme de \tilde{S} isotope à l'identité. Plaçons nous sur \tilde{S} ; pour simplifier nous noterons encore f l'automorphisme $\zeta^{-1} f^n \zeta$ et g la transformation $\zeta^{-1} g \zeta$.

Nous allons commencer par montrer qu'il existe $\eta : Y \dashrightarrow \tilde{S}$ birationnel tel que $\eta^{-1} f^\ell \eta$ soit un automorphisme de Y isotope à l'identité pour un certain ℓ et $\eta^{-1} g \eta$ soit algébriquement stable. Notons $\nu(g)$ le nombre minimum d'éclatements nécessaires pour rendre g algébriquement stable. La preuve procède par induction sur $\nu(g)$.

Si $\nu(g)$ est nul, alors $\eta = \text{id}$ convient.

Supposons le lemme démontré pour les transformations f et g satisfaisant $\nu(g) \leq j$; considérons (\tilde{f}, \tilde{g}) satisfaisant les hypothèses de l'énoncé et $\nu(\tilde{g}) = j + 1$. Puisque \tilde{g} n'est pas algébriquement stable, il existe une courbe V dans $\text{Exc}(\tilde{g})$ et un entier q tels que $\tilde{g}^q(V)$ soit un point d'indétermination p de \tilde{g} . Comme \tilde{f} et \tilde{g} commutent, \tilde{f}^m fixe les composantes irréductibles de $\text{Ind}(\tilde{g})$ pour un certain entier m . Pour rendre \tilde{g} algébriquement stable, considérons κ l'éclatement au point p ; ce point étant fixé par \tilde{f}^m , d'une part $\kappa^{-1} \tilde{f}^m \kappa$ est un automorphisme, d'autre part $\nu(\kappa^{-1} \tilde{g} \kappa) = j$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe $\eta : Y \dashrightarrow \tilde{S}$ et ℓ tels que $\eta^{-1} \tilde{f}^\ell \eta$ soit un automorphisme isotope à l'identité et $\eta^{-1} \tilde{g} \eta$ soit algébriquement stable.

Notons $\bar{f} := \eta^{-1} f^\ell \eta$ et $\bar{g} := \eta^{-1} g \eta$. En reprenant la démonstration du Lemme 3.12, nous constatons que f et g sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité. En effet, la première étape pour rendre \bar{g} automorphisme consiste à considérer ε_1 la contraction d'une courbe de $\text{Exc}(\bar{g}^{-1})$; comme les courbes contractées par \bar{g}^{-1} sont d'auto-intersection négative (Lemme 3.12, c'est ici que l'hypothèse g virtuellement isotope à l'identité intervient) et que \bar{f} est isotope à l'identité, elles sont fixées par \bar{f} donc par $\varepsilon_1 \bar{f} \varepsilon_1^{-1}$. La i -ème étape consistant à répéter la première avec $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_1 \bar{f} \varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{i-1}^{-1}$ et $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_1 \bar{g} \varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{i-1}^{-1}$, nous obtenons le résultat souhaité. Le procédé termine et une puissance de $\varepsilon g \varepsilon^{-1}$ est isotope à l'identité (Lemme 3.12, toujours parce g est supposé virtuellement isotope à l'identité). \square

Nous allons montrer le même genre de résultat pour les générateurs standards d'un k -groupe de HEISENBERG.

PROPOSITION 3.16. *Soit ς une représentation de \mathcal{H}_k dans le groupe de CREMONA. Supposons que tout générateur standard de $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ soit virtuellement isotope à l'identité. Alors $\varsigma(\mathbf{f})$, $\varsigma(\mathbf{g})$ et $\varsigma(\mathbf{h})$ sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité.*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 3.15 nous pouvons supposer que $\varsigma(\mathbf{f})$ et $\varsigma(\mathbf{h})$ sont simultanément isotopes à l'identité. Comme \mathbf{g} et \mathbf{h} commutent, $\text{Exc}(\varsigma(\mathbf{g}))$ et $\text{Ind}(\varsigma(\mathbf{g}))$ sont invariants, à conjugaison birationnelle près, par $\varsigma(\mathbf{h})$. La relation $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \mathbf{h}^k$, qui s'écrit aussi $\mathbf{f}\mathbf{g} = \mathbf{h}^k\mathbf{g}\mathbf{f}$, assure que les ensembles $\text{Exc}(\varsigma(\mathbf{g}))$ et $\text{Ind}(\varsigma(\mathbf{g}))$ sont invariants par $\varsigma(\mathbf{f})$. En reprenant le raisonnement de la démonstration du Lemme 3.15 et en utilisant le Lemme 4.1 de [20], nous obtenons le résultat souhaité. \square

Dans la suite nous nous intéressons aux représentations de \mathcal{H}_k dans les groupes d'automorphismes des surfaces minimales qui sont $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et les surfaces de HIRZEBRUCH F_m avec $m \geq 2$. Rappelons que dans des cartes affines bien choisies

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = (\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})) \rtimes (y, x)$$

et $\text{Aut}(F_m)$ se décrit, pour $m \geq 2$, comme suit ([1] chapitre 5, [33])

$$(10) \quad \left\{ \left(\frac{\zeta x + P(y)}{(cy + d)^m}, \frac{ay + b}{cy + d} \right) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}), \zeta \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[y], \deg P \leq m \right\}.$$

LEMME 3.17. *Il n'existe pas de plongement de \mathcal{H}_k dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.*

DÉMONSTRATION. Soit ς un morphisme de \mathcal{H}_k dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Quitte à considérer $\mathcal{H}_{2k} \subset \mathcal{H}_k$ nous pouvons supposer que $\varsigma(\mathbf{f})$, $\varsigma(\mathbf{g})$ et $\varsigma(\mathbf{h})$ fixent les deux fibrations standards, *i.e.* que ς est à valeurs dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Pour $j = 1, 2$ notons π_j la j -ième projection. L'image de $\varsigma(\mathcal{H}_{2k})$ par π_j est un sous-groupe résoluble de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ et comme $\pi_j(\varsigma(\mathbf{h}^k))$ est un commutateur, cette homographie est conjuguée à la translation $z + \beta_j$. Supposons que $\beta_j \neq 0$; alors, par commutation, $\pi_j(\varsigma(\mathbf{f}))$ et $\pi_j(\varsigma(\mathbf{g}))$ sont des translations. Dans ce cas la relation $[\pi_j(\varsigma(\mathbf{f})), \pi_j(\varsigma(\mathbf{g}))] = \pi_j(\varsigma(\mathbf{h}^k))$ entraîne que $\beta_j = 0$: contradiction. Les β_j sont donc nuls et $\varsigma(\mathbf{h}^k)$ est trivial : ς n'est pas injectif. \square

Pour les morphismes de \mathcal{H}_k à valeurs dans $\text{Aut}(F_m)$, avec $m \geq 2$, nous obtenons un résultat essentiellement différent. Notons qu'on peut voir $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ comme un sous-groupe du groupe de CREMONA ; en effet tout automorphisme $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ de \mathbb{C}^2 se prolonge naturellement en une transformation birationnelle

$$(z^n f_1(x/z, y/z) : z^n f_2(x/z, y/z) : z^n)$$

où $n = \max(\deg f_1, \deg f_2)$.

LEMME 3.18. Soit ς un morphisme injectif de \mathcal{H}_k dans $\text{Aut}(\mathbb{F}_m)$, $m \geq 2$. Alors $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe de \mathbf{E} . De plus, $\varsigma(\mathfrak{h}^{2k})$ est de la forme $(x + P(y), y)$ où P désigne un polynôme.

REMARQUE 10. Les sous-groupes abéliens de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ sont, à conjugaison près, des groupes d'homothéties, de translations et des sous-groupes de $\{-y, y, 1/y, -1/y\}$.

DÉMONSTRATION. Notons π la projection de $\text{Aut}(\mathbb{F}_m)$ sur $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Quitte à considérer \mathcal{H}_{2k} , ce qu'ici nous faisons, l'image de $\varsigma(\mathcal{H}_{2k})$ par π n'est pas conjuguée à $\{y, -y, 1/y, -1/y\}$. Nous pouvons donc supposer que $\pi(\varsigma(\mathcal{H}_{2k}))$ est contenu dans le groupe des transformations affines de la droite. Il s'en suit (voir (10)) que $\varsigma(\mathcal{H}_{2k})$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de \mathbf{E} . Les relations satisfaites par les générateurs assurent que $\varsigma(\mathfrak{h}^{2k})$ est du type $(x + P(y), y)$. \square

Enfin nous mentionnons un résultat sans doute bien classique.

LEMME 3.19. Soit ς un morphisme injectif de \mathcal{H}_k dans $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$. À conjugaison linéaire près, nous avons

$$\varsigma(\mathfrak{f}) = (x + \zeta y, y + \beta), \quad \varsigma(\mathfrak{g}) = (x + \gamma y, y + \delta) \quad \text{et} \quad \varsigma(\mathfrak{h}^k) = (x + k, y)$$

avec $\zeta\delta - \beta\gamma = k$.

DÉMONSTRATION. L'adhérence de ZARISKI $\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}^Z$ de $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ est un sous-groupe algébrique unipotent de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$; comme ς est injective, l'algèbre de LIE de $\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}^Z$ est isomorphe à :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \zeta & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid \zeta, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Notons π la projection canonique de $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ sur $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$. L'algèbre de LIE de $\pi^{-1}(\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}^Z)$ est, à conjugaison près, égale à \mathfrak{h} . L'application exponentielle envoie \mathfrak{h} dans le groupe \mathbf{H} des matrices triangulaires supérieures qui est un groupe algébrique connexe. Il en résulte que la composante neutre de $\pi^{-1}(\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}^Z)$ coïncide avec \mathbf{H} . Tout élément \mathfrak{g} de $\pi^{-1}(\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}^Z)$ agit par conjugaison sur \mathbf{H} donc appartient au groupe engendré par \mathbf{H} et $j \cdot \text{Id}$ où $j^3 = 1$. Puisque $\pi(j \cdot \text{Id})$ est trivial, la restriction de π à \mathbf{H} est surjective sur $\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}^Z$; or elle est injective, c'est donc un isomorphisme. Par conséquent ς se relève en une représentation $\tilde{\varsigma}$ de \mathcal{H}_k dans \mathbf{H} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_k & \xrightarrow{\tilde{\varsigma}} & \mathbf{H} \\ & \searrow \varsigma & \downarrow \pi|_{\mathbf{H}} \\ & & \overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)} \end{array}$$

Comme $\tilde{\zeta}(\mathbf{h}^k)$ s'écrit comme un commutateur, il est unipotent. En écrivant les relations satisfaites par les générateurs nous obtenons à conjugaison près dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{h}^k) = (x + k, y), \quad \tilde{\zeta}(\mathbf{f}) = (x + \zeta y, y + \beta) \quad \text{et} \quad \tilde{\zeta}(\mathbf{g}) = (x + \gamma y, y + \delta)$$

avec $\zeta\delta - \beta\gamma = k$ ce qui implique le lemme. \square

3. QUASI-RIGIDITÉ DE $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$

3.1. Dynamique de l'image d'un groupe de congruence.

DÉFINITIONS 5. Soient G un groupe de type fini, $\{a_1, \dots, a_n\}$ une partie génératrice de G et f un élément de G .

- (i) La **longueur** de f , notée $\|f\|$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une suite (s_1, \dots, s_k) d'éléments de $\{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$ telle que $f = s_1 \dots s_k$.
- (ii) La quantité $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f^k\|/k$ est la **longueur stable** de f (voir [17]).
- (iii) Un élément f de G est **distordu** s'il est d'ordre infini et si sa longueur stable est nulle. Cette notion est invariante par conjugaison.

LEMME 3.20. *La puissance k -ième du générateur standard \mathbf{h} d'un k -groupe de HEISENBERG \mathcal{H}_k est distordu. En particulier les générateurs standards de tout sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ sont distordus.*

DÉMONSTRATION. Puisque $[\mathbf{f}, \mathbf{h}] = [\mathbf{g}, \mathbf{h}] = \mathrm{id}$, pour tout couple d'entiers (n, m) , nous avons $\mathbf{h}^{knm} = [\mathbf{f}^n, \mathbf{g}^m]$. Pour $n = m$ nous obtenons $\mathbf{h}^{kn^2} = [\mathbf{f}^n, \mathbf{g}^n]$; par suite $\|\mathbf{h}^{kn^2}\| \leq 4n$.

La seconde assertion résulte du fait que tout générateur standard d'un $\Gamma_n(q)$ s'écrit comme le commutateur de deux autres et commute à chacun d'eux (Remarque 7). \square

LEMME 3.21. *Soient f un élément d'un groupe de type fini G et ς un morphisme de G dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Il existe une constante positive ou nulle m telle que :*

$$1 \leq \lambda(\varsigma(f)) \leq \exp\left(m \frac{\|f^n\|}{n}\right) \quad \forall n.$$

En particulier, si f est distordu, la longueur stable de f est nulle et le premier degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut 1.

DÉMONSTRATION. Soit $\{a_1, \dots, a_k\}$ une partie génératrice de G . Les inégalités

$$\lambda(\varsigma(f))^n \leq \deg \varsigma(f)^n \leq \max_i (\deg \varsigma(a_i))^{\|f^n\|}$$

conduisent à

$$0 \leq \log \lambda(\varsigma(f)) \leq \frac{\|f^n\|}{n} \log(\max_i (\deg \varsigma(a_i))).$$

\square

3.2. Notations. Dans la suite ρ désigne un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Nous déduisons des Lemmes 3.20 et 3.21 l'égalité $\lambda(\rho(e_{ij}^q)) = 1$. D'après le Théorème 3.11, nous avons l'alternative suivante :

- l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, rationnelle ou elliptique ;
- tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité.

Nous allons traiter séparément ces deux éventualités.

3.3. Fibration invariante.

LEMME 3.22. *Soient Γ un groupe de type fini ayant la propriété (T) et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$ (resp. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$). Alors l'image de ρ est finie.*

DÉMONSTRATION. Notons γ_i les générateurs de Γ et

$$\begin{pmatrix} a_i(y) & b_i(y) \\ c_i(y) & d_i(y) \end{pmatrix}$$

leur image par ρ . Un \mathbb{Q} -groupe de type fini est isomorphe à un sous-corps de \mathbb{C} donc $\mathbb{Q}(a_i(y), b_i(y), c_i(y), d_i(y))$ est isomorphe à un sous-corps de \mathbb{C} et nous pouvons supposer que ρ est à valeurs dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}_3)$. Comme Γ a la propriété (T), toute action continue de Γ par isométries d'un espace hyperbolique réel ou complexe possède un point fixe ; l'image de ρ est donc, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. D'après la Proposition 3.8, l'image de ρ est finie. \square

PROPOSITION 3.23. *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, alors l'image de ρ est finie.*

DÉMONSTRATION. Notons \tilde{e}_{ij}^q les images des e_{ij}^q par ρ ; d'après la Remarque 7, les différents générateurs « jouent un rôle identique », nous pouvons donc supposer, sans perdre de généralité, que \tilde{e}_{12}^q préserve une unique fibration \mathcal{F} .

Les relations entraînent que \mathcal{F} est invariante par tous les $\tilde{e}_{ij}^{q^2}$. En effet, puisque \tilde{e}_{12}^q commute à \tilde{e}_{13}^q et \tilde{e}_{32}^q , les éléments \tilde{e}_{13}^q et \tilde{e}_{32}^q préservent \mathcal{F} (c'est l'unicité) ; puis, la relation $[\tilde{e}_{12}^q, \tilde{e}_{23}^q] = \tilde{e}_{13}^{q^2}$, qui s'écrit aussi $\tilde{e}_{23}^q \tilde{e}_{12}^q \tilde{e}_{23}^{-q} = \tilde{e}_{13}^{-q^2} \tilde{e}_{12}^q$, entraîne que \tilde{e}_{23}^q laisse \mathcal{F} invariante. De même $[\tilde{e}_{12}^q, \tilde{e}_{31}^q] = \tilde{e}_{32}^{-q^2}$ assure que \mathcal{F} est invariante par \tilde{e}_{31}^q . Enfin comme $[\tilde{e}_{23}^q, \tilde{e}_{31}^q] = \tilde{e}_{21}^{q^2}$, l'élément $\tilde{e}_{21}^{q^2}$ préserve \mathcal{F} .

Ainsi, pour tout $\tilde{e}_{ij}^{q^2}$, il existe h_{ij} dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ définissant \mathcal{F} tels que $F \circ \tilde{e}_{ij}^{q^2} = h_{ij} \circ F$. Soit ς le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} \Gamma_3(q^2) &\rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \\ e_{ij}^{q^2} &\mapsto h_{ij} \end{aligned}$$

Puisque $\Gamma_3(q^2)$ a la propriété (T) de KAZHDAN, le groupe $\Gamma = \ker \varsigma$ est d'indice fini (Lemme 3.22) donc possède la propriété (T). Si \mathcal{F} est rationnelle, nous pouvons supposer que $\mathcal{F} = (y = \text{cte})$ où y est une coordonnée d'une carte affine de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; comme le groupe des transformations birationnelles préservant la fibration $y = \text{cte}$ s'identifie à $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{C})$, la restriction de ρ à Γ est « à valeurs » dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$; elle ne peut donc être injective (Lemme 3.22). Dans ce cas $\rho(\Gamma)$ est donc fini ce qui implique que $\rho(\Gamma_3(q^2))$ et $\rho(\Gamma_3(q))$ le sont. La fibration \mathcal{F} ne peut être elliptique; en effet le groupe des transformations birationnelles qui préservent une fibration elliptique fibre à fibre est métabélien et un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_3(q^2)$ ne peut pas l'être. \square

3.4. Factorisation dans un groupe d'automorphismes. Supposons que tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ soit virtuellement isotope à l'identité. D'après la Remarque 9, la Proposition 3.16, les Lemmes 3.20 et 3.21, les images de e_{12}^{qn} , e_{13}^{qn} et e_{23}^{qn} par ρ sont, pour un certain n , des automorphismes d'une surface minimale S . Commençons par considérer le cas où $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

LEMME 3.24. *Soit ρ un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n , des éléments de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, alors $\rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ est un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$.*

Avant de démontrer ce résultat, montrons le lemme suivant.

LEMME 3.25. *Soit f une transformation birationnelle telle que $\text{Exc}(f)$, $\text{Exc}(f^2)$ soient non vides et contenus dans la droite à l'infini. Si les points d'indétermination de f sont aussi sur la droite à l'infini, alors f est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 .*

DÉMONSTRATION. Comme l'intersection du lieu d'indétermination de f avec \mathbb{C}^2 est vide, $f|_{\mathbb{C}^2} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est holomorphe. Commençons par montrer que l'image de \mathbb{C}^2 par f est contenue dans \mathbb{C}^2 . Supposons que ce ne soit pas le cas; alors il existe p dans \mathbb{C}^2 tel que $f(p)$ soit sur la droite à l'infini que nous noterons L_∞ . Écrivons f sous la forme $(P : Q : R)$; soit γ le lieu des zéros de R . Comme p appartient à γ , cette courbe intersecte le plan affine \mathbb{C}^2 . Soit $\tilde{\gamma}$ une composante irréductible de γ contenant p ; elle n'est pas contractée par f . Il en résulte que $f(\tilde{\gamma}) = L_\infty$. Notons p_∞ l'image de L_∞ par f ; l'image de $\tilde{\gamma}$ par f^2 et p_∞ coïncident: contradiction avec l'hypothèse sur $\text{Exc}(f^2)$.

Puisque $f(\mathbb{C}^2)$ est inclus dans \mathbb{C}^2 le lieu des zéros de R est contenu dans L_∞ , i.e. $R = z^n$. Par suite f est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . \square

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.24. Notons $\tilde{e}_{ij} := \rho(e_{ij})$. Le Lemme 3.19 permet de supposer que $\tilde{e}_{13}^{qn} = (x + qn, y)$, $\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + \zeta y, y + \beta)$ et $\tilde{e}_{23}^{qn} = (x + \gamma y, y + \delta)$ avec $\zeta\delta - \beta\gamma = q^2n^2$.

Commençons par considérer le cas où $\beta\delta$ est non nul. La relation $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{21}^{kqn}] = \tilde{e}_{23}^{-kq^2n^2}$ assure que les éventuelles courbes contractées par \tilde{e}_{21}^{kqn} sont de la forme $y = \text{cte}$. Puisque \tilde{e}_{21}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} commutent, les ensembles $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{21}^{kqn})$ et $\mathrm{Ind}(\tilde{e}_{21}^{kqn})$ sont invariants par \tilde{e}_{23}^{qn} . Nous en déduisons que $\mathrm{Ind}(\tilde{e}_{21}^{qn})$, $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{21}^{qn})$ et $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{21}^{2qn})$ sont contenus dans la droite à l'infini. Ainsi nous avons l'alternative :

- \tilde{e}_{21}^{qn} est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$;
- \tilde{e}_{21}^{qn} est, d'après le Lemme 3.25, un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 .

Remarquons que si \tilde{e}_{21}^{qn} est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ il laisse, par commutation avec \tilde{e}_{23}^{qn} , la droite à l'infini invariante ; il est donc dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$. De même nous montrons, à l'aide des égalités $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{qn}] = \tilde{e}_{12}^{q^2n^2}$ et $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{qn}] = \mathrm{Id}$, que \tilde{e}_{32}^{qn} appartient à $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Ainsi tous les $\tilde{e}_{ij}^{q^2n^2}$ sont des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 ; d'après le Théorème 3.9, le morphisme ρ ne peut pas être injectif.

Si $\beta\delta = 0$, l'égalité $\zeta\delta - \beta\gamma = q^2n^2$ assure que β et δ ne sont pas tous les deux nuls. Considérons le cas où $\beta = 0$. La conjugaison par $(x + \frac{\gamma}{2}y - \frac{\gamma}{2\delta}y^2, y)$ laisse \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{12}^{qn} invariants et envoie \tilde{e}_{23}^{qn} sur $(x, y + \delta)$; supposons donc que \tilde{e}_{23}^{qn} s'écrive $(x, y + \delta)$. La transformation \tilde{e}_{21}^{qn} satisfait les relations $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{21}^{qn}] = \tilde{e}_{23}^{-q^2n^2}$ et $[\tilde{e}_{21}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}] = \mathrm{Id}$; notons que l'élément $\xi := (x, \delta nx + y)$ de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ vérifie aussi ces égalités (c'est le fait de rendre γ nul par conjugaison qui permet une telle construction). Remarquons que l'application f définie par $f := \tilde{e}_{21}^{qn}\xi^{-1}$ commute à \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} ; nous en déduisons que f s'écrit $(x + a, y + b)$ et, qu'à conjugaison près par $(x + \frac{b}{\delta}, y)$, la transformation \tilde{e}_{21}^{qn} est de la forme $(x + a, \delta x + y)$; en particulier \tilde{e}_{21}^{qn} est linéaire. De même, si η désigne $(\frac{x}{1+\zeta y}, \frac{y}{1+\zeta y})$, alors l'application g définie par $g := \tilde{e}_{32}^{qn}\eta^{-1}$ commute à \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{12}^{qn} . Il en résulte que g s'écrit $(x + b(y), y)$ et que \tilde{e}_{32}^{qn} est du type :

$$\left(\frac{x}{1 + \zeta y} + b \left(\frac{y}{1 + \zeta y} \right), \frac{y}{1 + \zeta y} \right).$$

Comme $[\tilde{e}_{23}^{qn}, \tilde{e}_{31}^{qn}] = \tilde{e}_{21}^{q^2n^2}$, $[\tilde{e}_{21}^{qn}, \tilde{e}_{31}^{qn}] = \mathrm{Id}$ et $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{31}^{qn}] = \tilde{e}_{32}^{-q^2n^2}$ la transformation \tilde{e}_{21}^{qn} s'écrit $(x, \delta x + y)$ et

$$\tilde{e}_{31}^{qn} = \left(\frac{x}{1 + \delta x}, \frac{y}{1 + \delta x} \right).$$

Finalement, puisque \tilde{e}_{31}^{qn} et \tilde{e}_{32}^{qn} commutent, b est nul : l'image de ρ est un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

Nous constatons, en reprenant le même raisonnement, que le cas $\delta = 0$ n'arrive pas. \square

Le lemme qui suit traite le cas des surfaces de HIRZEBRUCH.

LEMME 3.26. Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Supposons que $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ soient, pour un certain n , simultanément conjugués à des éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_m)$ avec $m \geq 2$; alors l'image de ρ est finie ou contenue, à conjugaison près, dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION. Posons $\tilde{e}_{ij} := \rho(e_{ij})$. D'après le Lemme 3.18, nous pouvons supposer, à conjugaison près, que $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2}$ s'écrit $(x + P(y), y)$. Remarquons que si $P \equiv 0$, l'image de ρ est finie; en effet $\ker \rho$ n'étant pas fini il est, d'après le Théorème 3.13, d'indice fini. Sinon nous constatons que \tilde{e}_{12}^{qn} est du type $(\beta x + Q(y), \xi_1(y))$ et \tilde{e}_{23}^{qn} de la forme $(\delta x + R(y), \xi_2(y))$ où β, δ désignent deux complexes non nuls et ξ_1, ξ_2 deux transformations affines qui commutent. Nous pouvons donc supposer, quitte à reprendre l'argument du Lemme 3.17, que le groupe engendré par les ξ_i n'est pas le groupe abélien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donc que ξ_1 et ξ_2 sont simultanément soit des homothéties, soit des translations.

a. *Considérons le cas où ξ_1 et ξ_2 sont des homothéties.*

Si elles sont toutes deux d'ordre fini, alors, quitte à prendre une puissance de \tilde{e}_{12}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} , nous pouvons supposer, à conjugaison birationnelle près, que :

$$\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + F(y), y) \quad \text{et} \quad \tilde{e}_{23}^{qn} = (x + G(y), y);$$

par suite $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2} = [\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}]$ est trivial : ρ n'est pas injectif. Supposons, par exemple, que ξ_1 ne soit pas d'ordre fini; alors, à conjugaison par un automorphisme près, \tilde{e}_{12}^{qn} est de la forme $(\beta x, \zeta y)$ ou $(\zeta^{i_0} x + \mu y^{i_0}, \zeta y)$. Dans le premier cas, nous obtenons, en écrivant la commutation de \tilde{e}_{12}^{qn} et $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2}$, que $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2}$ est trivial ce qui implique encore que ρ est d'image finie (Théorème 3.13). Dans le second cas, puisque \tilde{e}_{23}^{qn} et $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2}$ commutent, nous avons l'une des deux possibilités suivantes :

- $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2}$ est trivial;
- $\tilde{e}_{23}^{qn} = (\nu^{i_0} x + R(y), \nu y)$ et $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2} = (x + p_{i_0} y^{i_0}, y)$.

La première éventualité entraîne que l'image de ρ est finie (Théorème 3.13); la seconde aussi en écrivant l'égalité $\tilde{e}_{13}^{q^2n^2} = [\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}]$. Remarquons que pour montrer que l'image de ρ est finie, nous nous sommes uniquement servis des relations du qn -groupe de HEISENBERG $\langle \tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn} \rangle$. Notons π la projection de $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_m)$ sur $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; puisque $\pi(\tilde{e}_{13}^{qn})$ est trivial, $\pi(\tilde{e}_{12}^{qn})$ et $\pi(\tilde{e}_{23}^{qn})$ jouent des rôles identiques dans le qn -groupe de HEISENBERG $\langle \pi(\tilde{e}_{12}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{13}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{23}^{qn}) \rangle$: le cas où ξ_2 est d'ordre infini se traite de la même manière.

b. *Enfin étudions le cas où les ξ_i sont des translations.*

Si les deux sont triviales, nous concluons comme ci dessus. Supposons ξ_1 non triviale; à normalisation près nous avons $\xi_1(y) = y + 1$. Écrivons les relations satisfaites par

\tilde{e}_{12}^{qn} , \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} ; nous obtenons :

$$\tilde{e}_{13}^{qn} = (x + 1, y), \quad \tilde{e}_{12}^{qn} = (x + Q(y), y + 1) \quad \text{et} \quad \tilde{e}_{23}^{qn} = (x + R(y), y + \beta).$$

Les égalités $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{kqn}] = \mathrm{Id}$ et $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{kqn}] = \tilde{e}_{12}^{kq^2n^2}$ assurent que $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{32}^{kqn})$ et $\mathrm{Ind}(\tilde{e}_{32}^{qn})$ sont invariants par \tilde{e}_{12}^{qn} et \tilde{e}_{13}^{qn} . Il s'en suit que $\mathrm{Ind}(\tilde{e}_{32}^{qn})$, $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{32}^{qn})$ et $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{32}^{2qn})$ sont contenus dans la droite à l'infini. Alors \tilde{e}_{32}^{qn} est ou bien dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ ou bien, d'après le Lemme 3.25, un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . La commutation de \tilde{e}_{12}^{qn} et \tilde{e}_{32}^{qn} assure que \tilde{e}_{32}^{qn} est dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Si ξ_2 est non triviale, alors \tilde{e}_{21}^{qn} appartient à $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ par le même argument que ci-dessus (en utilisant cette fois $[\tilde{e}_{21}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}] = \mathrm{Id}$ et $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{21}^{qn}] = \tilde{e}_{23}^{-q^2n^2}$). Les relations assurent alors que $\rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$; d'après le Théorème 3.9, le morphisme ρ est d'image finie.

Considérons le cas où ξ_2 est l'identité ; alors \tilde{e}_{23}^{qn} s'écrit $(x + R(y), y)$. La commutation de \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{12}^{qn} entraîne que $\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + Q(y), y + 1)$; posons $Q(y) := \sum_{k=0}^{\ell} q_k y^k$. Conjuguons \tilde{e}_{12}^{qn} , \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} par $(x + \sum_{j=0}^{\ell} h_j y^{j+1}, y)$ où $h_\ell := -\frac{q_\ell}{\ell+1}$ et pour tout $0 \leq j \leq \ell - 1$:

$$h_j := -\frac{1}{j+1} \left(q_j + \sum_{k=j+1}^{\ell} \mathfrak{G}_{k+1}^j h_k \right) ;$$

nous obtenons que \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} sont inchangés et que \tilde{e}_{12}^{qn} est du type $(x, y + 1)$. Finalement en écrivant que $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}] = \tilde{e}_{13}^{-q^2n^2}$ nous constatons que R est linéaire : après conjugaison, \tilde{e}_{12}^{qn} , \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} sont dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$; le Lemme 3.24 permet de conclure.

Remarquons que, dans ce dernier cas, nous avons uniquement utilisé les relations du qn -groupe de HEISENBERG $\langle \tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn} \rangle$. Puisque $\pi(\tilde{e}_{13}^{qn})$ est trivial, $\pi(\tilde{e}_{12}^{qn})$ et $\pi(\tilde{e}_{23}^{qn})$ jouent des rôles symétriques dans le qn -groupe de HEISENBERG $\langle \pi(\tilde{e}_{12}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{13}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{23}^{qn}) \rangle$ l'éventualité où ξ_2 est non triviale et ξ_1 triviale se traite donc de la même manière. \square

3.5. Conclusion. Démontrons le Théorème 3.1.

La Proposition 3.23 assure que tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. D'après la Proposition 3.16 les transformations $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n , conjuguées à des automorphismes d'une surface minimale S ; seuls les cas $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et $S = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_m)$, avec $m \geq 2$, sont à considérer (Lemme 3.17). Nous obtenons finalement que $\rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ (Lemmes 3.24 et 3.26). Nous pouvons donc supposer que $\rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ est un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

La restriction de ρ à $\Gamma_3(q^2n^2)$ se prolonge alors en un morphisme de groupe de LIE de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ dans lui-même (voir [37]) ; par simplicité de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$, ce prolongement est injectif et donc surjectif. Or d'après le chapitre IV de [19] les automorphismes lisses de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs et de

la contragrédiente; ainsi, à conjugaison linéaire près, la restriction de ρ à $\Gamma_3(q^2n^2)$ coïncide avec le plongement canonique ou la contragrédiente.

Soit f un élément de $\rho(\Gamma) \setminus \rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ qui contracte au moins une courbe $\mathcal{C} = \text{Exc}(f)$. Le groupe $\Gamma_3(q^2n^2)$ est distingué dans Γ ; la courbe \mathcal{C} est donc invariante par tous les éléments de $\rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ donc par tous ceux de $\overline{\rho(\Gamma_3(q^2n^2))}^Z = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$, où l'adhérence est prise au sens de ZARISKI, ce qui est impossible. Donc f appartient à $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ et $\rho(\Gamma)$ est inclus dans $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$.

4. APPLICATIONS AUX GROUPES ARITHMÉTIQUES

4.1. Cas des groupes $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$.

THÉORÈME 3.27. *Tout morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA est d'image finie dès que $n \geq 4$.*

DÉMONSTRATION. Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_4(\mathbb{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Le sous-groupe Γ de $\text{SL}_4(\mathbb{Z})$ contient, d'après le Théorème 3.13, un sous-groupe de congruence $\Gamma_4(q)$. Notons E_{ij}^q les images des générateurs standards de $\Gamma_4(q)$ par ρ . Le morphisme ρ induit une représentation fidèle $\tilde{\rho}$ de $\Gamma_3(q)$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$:

$$\Gamma \supset \left(\begin{array}{cc|c} \Gamma_3(q) & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \rightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})).$$

Le Théorème 3.1 assure qu'à conjugaison près $\tilde{\rho}$ est le plongement canonique ou la contragrédiente.

Plaçons nous dans la première éventualité. L'élément E_{34}^q commute à $E_{31}^q = (x, y, qx + z)$ et $\text{Exc}(E_{34}^q)$ est invariant par $(x, y, qx + z)$. Par ailleurs E_{34}^q commute à E_{12}^q et E_{21}^q , autrement dit au $\Gamma_2(q)$ suivant :

$$\Gamma \supset \left(\begin{array}{cc|cc} \Gamma_2(q) & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Or l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{C}^2 ne laisse pas de courbe invariante; les éventuelles courbes contractées par E_{34}^q sont donc contenues dans la droite à l'infini. L'image de celle-ci par $(x, y, qx + z)$ intersecte \mathbb{C}^2 ; par suite $\text{Exc}(E_{34}^q)$ est vide et E_{34}^q appartient à $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$. Nous montrons de la même manière que E_{43}^q est un élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$. Alors les relations assurent que $\rho(\Gamma_4(q))$ est dans $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$; l'image de ρ est donc finie. En effet la restriction de ρ à $\Gamma_4(q)$ se prolonge en un morphisme η de $\text{PGL}_4(\mathbb{C})$ dans $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$. Le morphisme η est trivial donc $\rho|_{\Gamma_4(q)}$ aussi; $\Gamma_4(q)$ étant d'indice fini dans Γ , l'image de ρ est finie.

Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque $\tilde{\rho}$ est la contragrédiente.

Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, avec $n \geq 4$, et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; notons $\Gamma_n(q)$ le sous-groupe de congruence contenu dans Γ (Théorème 3.13). Le morphisme ρ induit une représentation de $\Gamma_4(q)$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. D'après ce qui précède le noyau de celle-ci est infini; il en est donc de même pour $\ker \rho$. \square

4.2. Représentation de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$. Remarquons que les générateurs α_i d'un groupe d'indice fini de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ sont distordus : les α_{2i+1} le sont car $\langle \alpha_{2i}, \alpha_{2i+2}, \alpha_{2i+1} \rangle$ est un q_i -groupe de HEISENBERG (Lemme 3.20); enfin les α_{2i} sont aussi distordus puisque les α_{2i-1} le sont et que $\alpha_{2i}^{p_i n}$ s'écrit $[\alpha_{2i-1}^n, \alpha_{2i+2}]$.

Dans cette partie nous allons montrer le :

THÉORÈME 3.28. *Il n'existe pas de morphisme injectif d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA.*

Rappelons que le sous-groupe $\langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ est un q_1 -groupe de HEISENBERG; nous pouvons alors appliquer les énoncés 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19 à ce groupe. Il suffit donc, pour montrer ce théorème, de démontrer des résultats analogues à la Proposition 3.23, aux Lemmes 3.24 et 3.26; c'est ce que nous allons faire.

PROPOSITION 3.29. *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA. Si l'un des $\rho(\alpha_i)$ préserve une unique fibration, alors ρ n'est pas injectif.*

DÉMONSTRATION. Posons $\tilde{\alpha}_i := \rho(\alpha_i)$. Montrons que si un $\tilde{\alpha}_i$ préserve une unique fibration \mathcal{F} , alors tous les $\tilde{\alpha}_i$ laissent \mathcal{F} invariante. « La symétrie des relations » assure qu'il suffit de considérer les deux cas suivants : $\tilde{\alpha}_1$ ou $\tilde{\alpha}_2$ préserve une unique fibration \mathcal{F} . Commençons par supposer que $\tilde{\alpha}_1$ préserve une unique fibration \mathcal{F} ; puisque $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_7$ et $\tilde{\alpha}_8$ commutent à $\tilde{\alpha}_1$, ils préservent \mathcal{F} . Enfin les relations $[\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_2^{p_2}$, $[\tilde{\alpha}_6, \tilde{\alpha}_1] = \tilde{\alpha}_8^{r_3}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6] = \tilde{\alpha}_5^{q_2}$ impliquent que $\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6$ et $\tilde{\alpha}_5^{q_2}$ laissent \mathcal{F} invariante. Si $\tilde{\alpha}_2$ préserve une unique fibration \mathcal{F} , alors, comme $\tilde{\alpha}_3$ et $\tilde{\alpha}_1$ commutent à $\tilde{\alpha}_2$, ils préservent \mathcal{F} ; les égalités $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_3^{q_2}$, $[\tilde{\alpha}_8, \tilde{\alpha}_2] = \alpha_1^{q_4}$, $[\tilde{\alpha}_7, \tilde{\alpha}_2] = \tilde{\alpha}_8^{p_4}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_7] = \tilde{\alpha}_6^{r_2}$ assurent que $\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_8, \tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_7$ et $\tilde{\alpha}_6^{r_2}$ laissent \mathcal{F} invariante. Le Lemme 3.22 et un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la Proposition 3.23 permettent de conclure. \square

LEMME 3.30. *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si $\rho(\alpha_2^n)$, $\rho(\alpha_3^n)$ et $\rho(\alpha_4^n)$ sont, pour un certain n , des éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$, alors ρ n'est pas injectif.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer α_i^n par α_i , nous allons supposer que n vaut 1. Notons $\tilde{\alpha}_i$ l'image de α_i par ρ . Supposons que ρ soit injectif; le Lemme 3.19

assure que $\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + q_1, y)$, $\tilde{\alpha}_2 = (x + \zeta y, y + \beta)$ et $\tilde{\alpha}_4 = (x + \gamma y, y + \delta)$ avec $\zeta\delta - \beta\gamma = q_1$.

Si $\beta\delta = 0$, l'égalité $\zeta\delta - \beta\gamma = q_1$ assure que β et δ sont non tous deux nuls. Supposons, par exemple, que $\beta = 0$; à conjugaison près nous avons :

$$\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + nq_1, y), \quad \tilde{\alpha}_2 = (x + \zeta y, y) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_4 = (x, y + \delta) \quad \text{avec} \quad \zeta\delta = q_1.$$

Les éléments $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_5$ commutent à $\tilde{\alpha}_3$ donc s'écrivent $(x + b(y), \xi_1(y))$ et $(x + a(y), \xi_5(y))$. La relation $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_5] = \tilde{\alpha}_4^{r_1}$ implique alors $\delta = 0$ ce qui est exclu.

Si δ est nul, le même raisonnement conduit à $\beta = 0$ ce qui est impossible.

Supposons que le produit $\beta\delta$ soit non nul. Les relations $[\tilde{\alpha}_1^k, \tilde{\alpha}_3] = \text{Id}$ et $[\tilde{\alpha}_1^k, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_2^{p_1}$ assurent que $\text{Exc}(\tilde{\alpha}_1)$, $\text{Exc}(\tilde{\alpha}_1^2)$ et $\text{Ind}(\tilde{\alpha}_1)$ sont contenus dans la droite à l'infini. Alors ou bien $\tilde{\alpha}_1$ est dans $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, ou bien $\tilde{\alpha}_1$ est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 (Lemme 3.25). Remarquons que si $\tilde{\alpha}_1$ est dans $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, il laisse, par commutation avec $\tilde{\alpha}_2$, la droite à l'infini invariante; autrement dit c'est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . De même les relations $[\tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_5^k] = \text{Id}$, $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_5^k] = \tilde{\alpha}_4^{kr_1}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5] = \text{Id}$ entraînent que $\tilde{\alpha}_5$ est dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$; les égalités $[\tilde{\alpha}_3^{q_1}, \tilde{\alpha}_6] = \tilde{\alpha}_4^{q_1 p_2}$, $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6^k] = \tilde{\alpha}_5^{q_2}$ et $[\tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_6] = \text{Id}$ impliquent que $\tilde{\alpha}_6$ est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . Pour finir d'après $[\tilde{\alpha}_8^k, \tilde{\alpha}_3] = \tilde{\alpha}_2^{kr_4}$, $[\tilde{\alpha}_8^k, \tilde{\alpha}_2] = \tilde{\alpha}_1^{kq_4}$ et $[\tilde{\alpha}_8, \tilde{\alpha}_1] = \text{Id}$ l'élément $\tilde{\alpha}_8$ appartient à $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Par suite $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$: impossible par le Théorème 3.9. \square

LEMME 3.31. *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence Γ de $\text{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$ dans le groupe de CREMONA. Supposons que $\rho(\alpha_2^n)$, $\rho(\alpha_3^n)$ et $\rho(\alpha_4^n)$ soient, pour un certain n , simultanément conjugués à des éléments de $\text{Aut}(\mathbb{F}_m)$ avec $m \geq 2$; alors ρ n'est pas injectif.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer α_i^n par α_i , nous allons supposer que $n = 1$. Notons $\tilde{\alpha}_i$ l'image de α_i par ρ . Supposons que ρ soit injectif; le Lemme 3.18 assure que

$$\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + P(y), y), \quad \tilde{\alpha}_2 = (a_2 x + Q(y), \xi_2(y)), \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_4 = (a_4 x + R(y), \xi_4(y)).$$

Si nous reprenons la démonstration du Lemme 3.26 nous constatons le fait suivant : la présence d'un k -groupe de HEISENBERG permet de conclure sauf dans le cas où les ξ_i sont des translations non triviales; nous n'envisageons donc que ce cas. Écrivons les relations satisfaites par $\tilde{\alpha}_3^{q_1}$, $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_4$; nous obtenons :

$$\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + 1, y), \quad \tilde{\alpha}_2 = (x + Q(y), y + \beta) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_4 = (x + R(y), y + \gamma).$$

Les égalités $[\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3^{q_1}] = \text{Id}$ et $[\tilde{\alpha}_1^k, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_2^{kp_1}$ assurent que $\text{Ind}(\tilde{\alpha}_1)$, $\text{Exc}(\tilde{\alpha}_1)$ et $\text{Exc}(\tilde{\alpha}_1^2)$ sont contenus dans la droite à l'infini; ainsi ou bien $\tilde{\alpha}_1$ appartient à $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$, ou bien $\tilde{\alpha}_1$ est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 (Lemme 3.25). La commutation de $\tilde{\alpha}_1$ avec $\tilde{\alpha}_2$ assure que $\tilde{\alpha}_1$ laisse la droite à l'infini invariante, *i.e.* $\tilde{\alpha}_1$ est dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$.

Remarquons que, de la même manière, $[\tilde{\alpha}_3^{q_1}, \tilde{\alpha}_5] = \text{Id}$, $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_5^k] = \tilde{\alpha}_4^{kr_1}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5] = \text{Id}$ impliquent que $\tilde{\alpha}_5$ appartient à $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$; enfin $[\tilde{\alpha}_3^{q_1}, \tilde{\alpha}_6] = \tilde{\alpha}_4^{q_1 p_2}$, $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6^k] = \tilde{\alpha}_5^{k q_2}$ et $[\tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_6] = \text{Id}$ entraînent qu'il en est de même pour $\tilde{\alpha}_6$. Par suite l'image de ρ est un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$; d'après le Théorème 3.9, le morphisme ρ n'est pas injectif. \square

4.3. Cas des groupes arithmétiques. Nous finissons cette partie en démontrant le Théorème 3.2. Supposons que $r \geq 3$. Puisque G est simple, son système de \mathbb{Q} -racines possède un sous-système irréductible de rang 3, *i.e.* un système de racines de type A_3 , B_3 ou C_3 (voir [9], page 197, théorème 3). Or C_3 (resp. B_3) possède un sous-système de type A_3 (resp. B_2) donc le système de \mathbb{Q} -racines de G possède un sous-système de type A_3 ou B_2 .

Commençons par supposer qu'il s'agit d'un sous-système de type A_3 . Dans ce cas Γ contient un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_4(\mathbb{Z})$; alors le Théorème 3.27 assure que le noyau de $\rho|_{\tilde{\Gamma}}$ est infini, donc l'image de ρ est finie. Si G possède un sous-système de type B_2 , alors Γ contient un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\text{SO}_{2,3}(\mathbb{Z})$; d'après le Théorème 3.28 le noyau de $\rho|_{\tilde{\Gamma}}$ est infini donc le noyau de ρ aussi. Ainsi dès que $r \geq 3$, l'image de ρ est finie.

Enfin si $r = 2$, le groupe G possède un système de type A_2 ou B_2 . Si ρ est d'image infinie, il s'agit d'un système de type A_2 (Théorème 3.28) ; le Théorème 3.1 assure alors que l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$.

5. GROUPES NILPOTENTS

Nous allons dans cette partie redémontrer le Théorème 3.27 : *il n'existe pas de plongement d'un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ dès que $n \geq 4$.* La démarche est la suivante : nous montrons que le groupe nilpotent des matrices 4×4 triangulaires à coefficients entiers, ces coefficients valant 1 sur la diagonale, ne se plonge pas dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

Rappelons que J désigne le groupe de JONQUIÈRES et J_0 le sous-groupe de J isomorphe à $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$.

LEMME 3.32. *Soit ς un morphisme injectif de \mathcal{H} dans J . La transformation $\varsigma(\mathbf{h}^2)$ appartient à J_0 .*

DÉMONSTRATION. Notons π la projection de J sur $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Si $\pi(\varsigma(\mathbf{h}))$ n'est pas de 2 torsion, alors son centralisateur est abélien. Puisque $\pi(\varsigma(\mathbf{h})) = [\pi(\varsigma(\mathbf{f})), \pi(\varsigma(\mathbf{g}))]$ ceci démontre le lemme. \square

De la même manière nous obtenons le :

LEMME 3.33. Soit ς un morphisme injectif de \mathcal{H} dans $\text{Aut}(F_m)$. La transformation $\varsigma(\mathfrak{h}^2)$ appartient à :

$$\{(\zeta x + f(y), y) \mid \zeta \in \mathbb{C}^*, f \in \mathbb{C}[y], \deg f \leq m\}.$$

Notons :

$$g_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\mathbf{N} := \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 \rangle$.

PROPOSITION 3.34. Le groupe \mathbf{N} ne se plonge pas dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

Écrivons les relations satisfaites par les g_i :

$$\begin{aligned} [g_1, g_2] &= \text{Id}, & [g_1, g_3] &= \text{Id}, & [g_1, g_4] &= g_2, & [g_1, g_5] &= g_3, & [g_1, g_6] &= \text{Id} \\ [g_2, g_3] &= \text{Id}, & [g_2, g_4] &= \text{Id}, & [g_2, g_5] &= g_3, & [g_2, g_6] &= g_3, & [g_3, g_4] &= \text{Id} \\ [g_3, g_5] &= \text{Id}, & [g_3, g_6] &= \text{Id}, & [g_4, g_5] &= \text{Id}, & [g_4, g_6] &= g_5, & [g_5, g_6] &= \text{Id}. \end{aligned}$$

REMARQUE 11. Supposons que ρ soit un morphisme injectif de \mathbf{N} dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. L'élément g_2 (resp. g_3 , resp. g_5) s'écrit comme le commutateur de deux g_i avec lesquels il commute donc $\lambda(\rho(g_2)) = \lambda(\rho(g_3)) = \lambda(\rho(g_5)) = 1$ (Lemme 3.21). Ainsi nous avons, d'après le Théorème 3.11, l'alternative suivante :

- $\rho(g_2)$ ou $\rho(g_3)$ ou $\rho(g_5)$ préserve une unique fibration (rationnelle ou elliptique) ;
- $\rho(g_2)$, $\rho(g_3)$ et $\rho(g_5)$ sont virtuellement isotopes à l'identité.

LEMME 3.35. Supposons que ρ soit un morphisme injectif de \mathbf{N} dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Si $\rho(g_2)$ ou $\rho(g_3)$ ou $\rho(g_5)$ préserve une unique fibration \mathcal{F} , alors $\rho(\mathbf{N})$ préserve cette fibration.

DÉMONSTRATION. Si la fibration \mathcal{F} est invariante par $\rho(g_3)$, alors, puisque g_3 est dans le centre de \mathbf{N} , tous les $\rho(g_i)$ préservent \mathcal{F} (c'est l'unicité).

Supposons que $\rho(g_2)$ préserve une unique fibration \mathcal{F} . Par commutation les transformations $\rho(g_1)$, $\rho(g_3)$ et $\rho(g_4)$ laissent \mathcal{F} invariante. La relation $[g_2, g_5] = g_3$, qui s'écrit aussi $g_5 g_2 g_5^{-1} = g_2^{-1} g_3$, assure que $\rho(g_5)$ préserve \mathcal{F} ; comme $[g_2, g_6] = g_3$ nous obtenons le résultat annoncé.

Le cas restant ($\rho(g_5)$ laisse \mathcal{F} invariante) se traite de la même manière. \square

LEMME 3.36. *Supposons que ρ soit un morphisme injectif de \mathbf{N} dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Alors ni $\rho(g_2)$, ni $\rho(g_3)$, ni $\rho(g_5)$ ne préserve une unique fibration elliptique.*

DÉMONSTRATION. Si $\rho(g_2)$ ou $\rho(g_3)$ ou $\rho(g_5)$ préserve une unique fibration elliptique \mathcal{F} , alors, d'après le Lemme 3.35, l'image de \mathbf{N} par ρ laisse \mathcal{F} invariante. À indice fini près, les $\rho(g_i)$ préservent \mathcal{F} fibre à fibre ([15], proposition 3.6); or le groupe des transformations birationnelles qui préservent une fibration elliptique fibre à fibre est virtuellement abélien et \mathbf{N} n'est pas virtuellement abélien. \square

LEMME 3.37. *Supposons que ρ soit un morphisme injectif de \mathbf{N} dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; alors ni $\rho(g_2)$, ni $\rho(g_3)$, ni $\rho(g_5)$ ne préserve une unique fibration rationnelle.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\rho(g_2)$ ou $\rho(g_3)$ ou $\rho(g_5)$ laisse une unique fibration rationnelle \mathcal{F} invariante. D'après le Lemme 3.35, l'image de \mathbf{N} par ρ laisse \mathcal{F} invariante autrement dit $\rho(\mathbf{G})$ est contenu dans le groupe de JONQUIÈRES. Le Lemme 3.32 assure que $\rho(g_2)$, $\rho(g_3)$ et $\rho(g_5)$ sont dans \mathbf{J}_0 , i.e. $\langle \rho(g_2), \rho(g_3), \rho(g_5) \rangle$ forme un sous-groupe nilpotent non abélien de $\mathbf{J}_0 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$: impossible. \square

LEMME 3.38. *Soit ρ un morphisme de \mathbf{N} dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Supposons que $\rho(g_2)$, $\rho(g_3)$ et $\rho(g_5)$ soient virtuellement isotopes à l'identité, alors ρ n'est pas injectif.*

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 3.16 et la Remarque 9, nous nous ramenons aux cas où $\rho(g_2)$, $\rho(g_3)$ et $\rho(g_5)$ sont des automorphismes d'une surface minimale S ; le Lemme 3.17 assure que seuls les cas $S = \mathbf{F}_m$ avec $m \geq 2$ et $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont à considérer.

Supposons que $S = \mathbf{F}_m$, $m \geq 2$, et que ρ soit injectif. D'après les Lemmes 3.18 et 3.33 nous avons à indice fini et conjugaison près :

$$\rho(g_3) = (x + P(y), y), \quad \rho(g_2) = (\alpha x + Q(y), y) \quad \text{et} \quad \rho(g_5) = (\beta x + R(y), y).$$

Ainsi $\langle \rho(g_2), \rho(g_3), \rho(g_5) \rangle$ est un sous-groupe nilpotent infini non abélien de $\mathbf{J}_0 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$: impossible.

Reste le cas $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Supposons que ρ soit injectif. D'après le Lemme 3.19, nous avons à conjugaison près :

$$\rho(g_2) = (x + \alpha y, y + \beta), \quad \rho(g_5) = (x + \gamma y, y + \delta) \quad \text{et} \quad \rho(g_3) = (x + 1, y) \quad \text{avec} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Un élément qui commute à $\rho(g_3)$ est du type $(x + a(y), \nu_a(y))$, où a appartient à $\mathbb{C}(y)$ et ν_a à $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$, autrement dit :

$$\rho(g_1) = (x + a(y), \nu_a(y)), \quad \rho(g_4) = (x + b(y), \nu_b(y)) \quad \text{et} \quad \rho(g_6) = (x + c(y), \nu_c(y)).$$

La relation $[g_1, g_5] = g_3$ assure que nous avons l'alternative suivante :

- ou bien δ est nul, $\gamma\beta = -1$ et $\rho(g_1) = (x + a(y), y - \beta)$;
- ou bien $\rho(g_1) = (x + \frac{\gamma\lambda+1}{\delta}y + \mu, y + \lambda)$.

Commençons par envisager la première possibilité. La commutation de g_4 (resp. g_6) et g_5 assure que ν_b (resp. ν_c) est trivial. Alors $\langle \rho(g_4), \rho(g_5), \rho(g_6) \rangle$ est un sous-groupe nilpotent infini non abélien de J_0 : impossible.

Étudions la seconde éventualité. Puisque g_1 et g_6 commutent, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- a. $\rho(g_1)$ s'écrit $(x + \frac{y}{\delta} + \mu, y)$ et ν_c est trivial ;
- b. $\rho(g_6)$ s'écrit $(x + \frac{\gamma\lambda+1}{\lambda\delta}y + \eta, y + \varepsilon)$.

Traisons ces cas séparément.

a. La commutation de g_1 et g_2 entraîne que $\rho(g_2) = (x + \alpha y, y)$ et $\alpha\delta = 1$. Par suite $\langle \rho(g_2), \rho(g_6), \rho(g_3) \rangle$ est un sous-groupe nilpotent infini non abélien de J_0 ce qui est exclu.

b. Comme g_5 et g_6 commutent, nous avons $\gamma\varepsilon = \frac{\gamma\lambda+1}{\lambda}$. À partir de $[g_2, g_6] = g_3$ nous obtenons $\alpha\delta = \beta\gamma$ ce qui contredit l'égalité $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. \square

La Proposition 3.34 résulte de la Remarque 11, des Lemmes 3.36, 3.37 et 3.38.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.27. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini dans $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$; il contient un sous-groupe de congruence $\Gamma_4(q)$ (Théorème 3.13). Il existe dans $\Gamma_4(q)$ un sous-groupe nilpotent isomorphe à \mathbb{N} ; la Proposition 3.34 assure alors le résultat annoncé pour $n = 4$.

Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, avec $n \geq 4$, et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; d'après le Théorème 3.13, le groupe Γ contient un groupe de congruence $\Gamma_n(q)$. Le morphisme ρ induit une représentation de $\Gamma_4(q)$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Le noyau de celle-ci est infini ; il en est donc de même pour $\ker \rho$. \square

6. AUTOMORPHISMES DU GROUPE DE CREMONA

Nous allons redémontrer le Théorème 2.1 : *soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA ; il existe un automorphisme τ du corps \mathbb{C} et ψ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ tels que, pour toute transformation birationnelle f , on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

LEMME 3.39. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Si la restriction de φ à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est l'identité, alors, à automorphisme de corps et conjugaison linéaire près, sa restriction à $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Notons \mathbf{H} le groupe des matrices triangulaires supérieures :

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Les groupes \mathbf{H} et $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ engendrent $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ donc montrer que $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ est invariant par φ revient à montrer que $\varphi(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$. Posons :

$$f_b(x, y) := \varphi(x + b, y), \quad g_a(x, y) := \varphi(x + ay, y) \quad \text{et} \quad h_c(x, y) := \varphi(x, y + c).$$

Les transformations birationnelles f_b et h_c commutent à $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$ donc

$$f_b = (x + \eta(b), y + \zeta(b)) \quad \text{et} \quad h_c = (x + \gamma(c), y + \beta(c))$$

où η , ζ , γ et β sont des morphismes additifs de \mathbb{C} ; puisque g_a commute à $(x + y, y)$ et $(x + 1, y)$ il est de la forme $(x + A_a(y), y)$ (voir Lemme 2.18). La relation

$$(x + ay, y)(x, y + c)(x + ay, y)^{-1}(x, y + c)^{-1} = (x + ac, y)$$

implique que, pour tous nombres complexes a et c , nous avons $g_a h_c = f_{ac} g_a$. Nous en déduisons que :

$$f_b = (x + \eta(b), y), \quad g_a = (x + \mu(a)y + \delta(a), y) \quad \text{et} \quad \mu(a)\beta(c) = \eta(ac).$$

En particulier $\varphi(\mathbf{H})$ est inclus dans \mathbf{H} . L'égalité $\mu(a)\beta(c) = \eta(ac)$ conduit à $\eta = \mu = \beta$ car $\eta(1) = \mu(1) = \beta(1) = 1$; remarquons qu'alors cette même égalité assure que η est multiplicatif.

Notons \mathbf{T} le groupe des translations dans l'ouvert affine \mathbb{C}^2 ; tout élément de \mathbf{T} s'écrit $(x + a, y)(x, y + b)$. Puisque f_b et h_c sont respectivement du type

$$(x + \eta(b), y) \quad \text{et} \quad (x + \eta(c), y + \eta(c)),$$

l'image de \mathbf{T} par φ est un sous-groupe de \mathbf{T} . Le groupe des translations étant un sous-groupe abélien maximal de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ (voir Théorème 2.15), cette inclusion est une égalité ; l'application η est donc surjective et $\varphi(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$. Ainsi φ induit un automorphisme de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ trivial sur $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Or les automorphismes de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ sont engendrés par les automorphismes intérieurs, les automorphismes du corps \mathbb{C} , la contragrédiente (voir [19]) et la restriction de la contragrédiente à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ ne coïncide pas avec la restriction d'un automorphisme intérieur ; $\varphi|_{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est donc, à conjugaison et automorphisme de corps près, l'identité. \square

COROLLAIRE 3.40. *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Si la restriction de φ à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est la contragrédiente, alors sa restriction à $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Notons ψ la composée de $\varphi|_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})}$ avec la restriction de la contragrédiente C à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Le morphisme ψ se prolonge en un morphisme $\tilde{\psi}$ de

$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ par $\tilde{\psi} = \varphi|_{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})} \circ C$. Le noyau de $\tilde{\psi}$ contient $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$; le groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ étant simple, $\tilde{\psi}$ est trivial. \square

LEMME 3.41. *Soit φ un automorphisme de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ tel que $\varphi|_{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})}$ soit l'identité ou la contragrédiente. Il existe a, b deux complexes non nuls tels que $\varphi(\sigma) = \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}\right)$ où σ désigne l'involution de CREMONA.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\varphi|_{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})}$ soit l'identité. Écrivons $\varphi(\sigma)$ sous la forme $(f/x, g/y)$ où f et g sont rationnelles. L'égalité $\sigma(\beta x, \mu y) = (\beta^{-1}x, \mu^{-1}y)\sigma$ conduit à

$$(f, g)(\beta x, \mu y) = (f, g) ;$$

ceci étant valable pour tout couple (β, μ) de complexes non nuls, les fonctions f et g sont constantes.

La contragrédiente laissant le groupe diagonal invariant le même raisonnement s'applique au cas où $\varphi|_{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est la contragrédiente. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Le Théorème 3.1, le Lemme 3.39 et le Corollaire 3.40 permettent de supposer qu'à automorphisme de corps et conjugaison près, $\varphi|_{\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est la contragrédiente ou l'identité. Supposons que nous soyons dans le premier cas. Posons $h := (x, x - y, x - z)$; comme l'a remarqué GIZATULLIN (voir [25]), la transformation $(h\sigma)^3$ est triviale. Or $\varphi(h) = (x + y + z, -y, -z)$ et $\varphi(\sigma) = \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{1}{z}\right)$ (Lemme 3.41); nous constatons que la seconde (resp. troisième) composante de

$$\varphi(h\sigma)^3 = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}, -\frac{b}{y}, -\frac{1}{z}\right)^3$$

vaut $-b/y$ (resp. $-1/z$). Il en résulte que $\varphi(h\sigma)^3$ est distinct de id ; par suite la restriction de φ à $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ est triviale. La relation $(h\sigma)^3 = \mathrm{id}$ conduit à $\varphi(\sigma) = \sigma$ et le Théorème de NÖTHER permet de conclure. \square

CHAPITRE 4

TRANSFORMATIONS DE JONQUIÈRES ET DYNAMIQUE

Le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 a fait l'objet de nombreux travaux. À partir des résultats obtenus nous pouvons observer la « dichotomie » suivante : soit f un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 . Nous savons que f est ou bien de type élémentaire ou bien de type HÉNON. Dans le premier cas f préserve une fibration, a un centralisateur non dénombrable et présente une dynamique pauvre (essentiellement affine) ; dans le second f ne préserve pas de fibration rationnelle, a un centralisateur dénombrable et « admet une dynamique sauvage ». Dans ce chapitre nous exhibons une famille de transformations birationnelles qui « transgressent ce principe » ; ces transformations préservent la fibration $y = \text{cte}$, ont un centralisateur dénombrable, ont un premier degré dynamique égal à 1 et pourtant « admettent de la dynamique » comme en témoignent les figures de ce chapitre.

1. UNE FAMILLE PARTICULIÈRE DE TRANSFORMATIONS

Nous nous proposons d'étudier expérimentalement la famille des transformations birationnelles $f_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$f_{\alpha,\beta} : (x : y : z) \mapsto ((\alpha x + y)z : \beta y(x + z) : z(x + z))$$

où α et β sont deux complexes non nuls, en particulier lorsqu'ils sont respectivement du type $\exp(2i\eta)$ et $\exp(2i\mu)$ avec η, μ deux réels « génériques ». Notons que cette famille laisse la fibration $y = \text{cte}$ invariante (en carte affine).

Cette transformation s'écrit, d'après le Théorème de NØTHER (Théorème 1), comme un produit d'éléments de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ et de l'involution de CREMONA :

$$(x + \alpha z : \beta(y + \alpha z) : z)(yz : xz : xy)(x + z : z : y - \alpha z).$$

Suivant le type de problème nous regarderons $f_{\alpha,\beta}$ comme application birationnelle tantôt de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, tantôt de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

1.1. Un théorème de SIEGEL. Commençons par rappeler le théorème de linéarisation suivant dû à POINCARÉ : *soit f dans $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$; si le spectre de la partie linéaire de f est sans résonance et dans le domaine de POINCARÉ (i.e. les valeurs propres sont toutes situées à l'intérieur du disque unité ouvert), alors f est analytiquement linéarisable.* Notons aussi le résultat suivant dû à SIEGEL.

THÉORÈME 4.1 (SIEGEL, [36]). *Soit f dans $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$; notons ℓ sa partie linéaire à l'origine et η_1, \dots, η_n les valeurs propres de ℓ . S'il existe une constante $c > 0$ et un entier positif ν tels que*

$$|\eta_s - \eta^m| \geq \frac{c}{|m|^\nu} \quad \forall m = (m_1, \dots, m_n)$$

où $\eta^m = \eta_1^{m_1} \dots \eta_n^{m_n}$, $s = 1, \dots, n$, $m_k \geq 0$ et $|m| = \sum m_k \geq 2$, alors f est holomorphiquement linéarisable.

1.2. Quelques résultats de linéarisation. Vue sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la transformation $f_{\alpha,\beta}$ compte trois points d'indétermination :

$$\text{Ind}(f_{\alpha,\beta}) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (-1 : \alpha : 1)\} ;$$

son lieu exceptionnel est formé des trois droites suivantes :

$$\text{Exc}(f_{\alpha,\beta}) = \{(z = -x), (z = 0), (y = \alpha z)\}.$$

Notons que le point $(0 : 1 : 0)$ est éclaté par $f_{\alpha,\beta}$ sur la droite d'équation $z = 0$ et que cette droite est contractée sur ce même point ; comme nous le verrons plus loin, ce phénomène disparaît lorsque nous étudions $f_{\alpha,\beta}^2$. Si nous regardons maintenant $f_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{P}_x^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_y^1(\mathbb{C})$ elle contracte une unique droite : $y = \alpha$.

PROPOSITION 4.2. *Si α et β sont « génériques », il existe un réel ρ strictement positif tel $f_{\alpha,\beta}$ soit conjugué à $(\alpha x, \beta y)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$, où $\mathbb{D}(0, \rho)$ désigne un disque de centre 0 et de rayon ρ .*

REMARQUE 12. La condition de généricité est celle qui permet d'appliquer le Théorème 4.1 à $f_{\alpha,\beta}$.

DÉMONSTRATION. Dans la carte affine $z = 1$, la transformation $f_{\alpha,\beta}$ s'écrit $(\frac{\alpha x + y}{x+1}, \beta y)$; elle compte deux points fixes $(0, 0)$ et $(\alpha - 1, 0)$.

Plaçons nous au voisinage de l'origine. La partie linéaire ℓ de $f_{\alpha,\beta}$ est $(\alpha x + y, \beta y)$; à conjugaison près par $(x + \frac{y}{\beta - \alpha}, y)$, l'application ℓ s'écrit $(\alpha x, \beta y)$. Ainsi $f_{\alpha,\beta}$ est linéarisable sur un voisinage U de l'origine (Théorème 4.1).

Cherchons la conjugante sous la forme $(\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + 1}, y)$; nous obtenons les trois égalités suivantes :

$$\alpha^2 a(y)c(\beta y) + \alpha a(y) - \alpha c(y)a(\beta y) - c(y)b(\beta y) = 0$$

$$\alpha a(y)c(\beta y)y + \alpha a(y) + \alpha^2 b(y)c(\beta y) + \alpha b(y) - c(y)a(\beta y)y - c(y)b(\beta y) - \alpha a(\beta y) - b(\beta y) = 0$$

$$\alpha b(y)c(\beta y)y + \alpha b(y) - a(\beta y)y - b(\beta y) = 0.$$

Écrivons $a(y)$ (resp. $b(y)$, resp. $c(y)$) sous la forme $\sum_{i \geq 0} a_i y^i$ (resp. $\sum_{i \geq 0} b_i y^i$, resp. $\sum_{i \geq 0} c_i y^i$). Notons que nous pouvons poser

$$a_0 := 1, \quad b_0 := 0 \quad \text{et} \quad c_0 := \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Supposons que nous ayons calculé $a_0, b_0, c_0, \dots, a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$ et $c_{\nu-1}$. Les trois égalités précédentes conduisent à :

$$b_\nu(\alpha - \beta^\nu) + F_1(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) = 0$$

$$\alpha(1 - \beta^\nu)a_\nu + \frac{\alpha^2 - 2\beta^\nu + \alpha\beta^\nu}{1 - \alpha}b_\nu + F_2(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) = 0$$

$$\alpha \frac{2 - \alpha - \beta^\nu}{1 - \alpha}a_\nu - \frac{\beta^\nu}{1 - \alpha}b_\nu + \alpha(\beta^\nu - 1)c_\nu + F_3(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) = 0$$

où les F_i désignent des polynômes universels du second degré en les a_i, b_i, c_i , à coefficients entiers, faisant intervenir certains a_i, b_i, c_i avec $i < \nu$ ce qui permet de calculer b_ν, a_ν et c_ν ; nous obtenons ainsi une conjugaison formelle. Le Théorème de SIEGEL assure que toute linéarisante est convergente sur un polydisque ; ceci implique que $a(y), b(y)$ et $c(y)$ sont convergentes. À y fixé, $\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + 1}$ est une homographie en x donc $f_{\alpha,\beta}$ est conjuguée à $(\alpha x, \beta y)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$ où ρ désigne un réel strictement positif. \square

Pour ce qui suit, il est préférable de se placer sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La transformation $f_{\alpha,\beta}^2$ s'écrit :

$$(x(\alpha^2 z + \beta y) + (\alpha + \beta)yz : \beta^2 y(z + (1 + \alpha)x + y) : z(z + (1 + \alpha)x + y)).$$

Nous avons

$$\text{Ind}(f_{\alpha,\beta}^2) = \{(1 : 0 : 0), (-1 : \alpha : 1), (-(\alpha + \beta) : \alpha(1 + \alpha) : \beta(1 + \alpha))\}$$

et

$$\text{Exc}(f_{\alpha,\beta}^2) = \{(z = -y - (1 + \alpha)x), (y = \alpha z/\beta), (y = \alpha z)\}.$$

PROPOSITION 4.3. *Si β est du type $\exp(2i\mu)$ avec μ un réel « générique », il existe V un voisinage de $(0 : 1 : 0)$ tel que la dynamique de $f_{\alpha,\beta}^2$ soit localement linéaire dans V ; l'adhérence de l'orbite d'un point générique de V est un cercle.*

DÉMONSTRATION. Dans la carte affine $y = 1$, la transformation $f_{\alpha,\beta}^2$ est de la forme :

$$\left(\frac{x(\alpha^2 z + \beta) + (\alpha + \beta)z}{\beta^2(z + (1 + \alpha)x + 1)}, \frac{z}{\beta^2} \right).$$

L'origine est un point fixe où la partie linéaire ℓ de $f_{\alpha,\beta}^2$ s'écrit $\left(\frac{\beta x + (\alpha + \beta)z}{\beta^2}, \frac{z}{\beta^2} \right)$. Puisque $\beta \neq 1$, l'application ℓ est diagonalisable :

$$\ell \sim \left(\frac{x}{\beta}, \frac{z}{\beta^2} \right);$$

autrement dit $f_{\alpha,\beta}$ est conjugué à $\left(\frac{x}{\beta} + p(x, z), \frac{z}{\beta^2} + q(x, z) \right)$ où p et q sont deux applications holomorphes sans partie linéaire. Posons $\eta_1 := \frac{1}{\beta}$ et $\eta_2 := \frac{1}{\beta^2}$; comme $\eta_2 = \eta_1^2$, une variante (résonante) du Théorème 4.1 assure que $f_{\alpha,\beta}$ est conjugué à $\left(\frac{x}{\beta}, \frac{z}{\beta^2} + \gamma x^2 \right)$. Mais puisque la droite d'équation $z = 0$ est invariante par $f_{\alpha,\beta}$, le coefficient γ est nécessairement nul et la transformation $f_{\alpha,\beta}^2$ est linéarisable. Ainsi dans la carte affine $y = 1$, l'adhérence de l'orbite d'un point au voisinage de l'origine est un cercle. \square

REMARQUE 13. Nous pouvons voir l'application

$$\left(\frac{x(\alpha^2 z + \beta) + (\alpha + \beta)z}{\beta^2(z + (1 + \alpha)x + 1)}, \frac{z}{\beta^2} \right)$$

sur $\mathbb{P}_x^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_z^1(\mathbb{C})$; il est alors possible de préciser le domaine V comme dans l'énoncé 4.2 : la conjugaison est holomorphe sur un produit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times D(0, \rho)$.

1.3. Quelques orbites. Les dessins qui suivent ont été obtenus à partir de la procédure *orbite* (voir Annexe B) ; étant donné un point (x, y) et des paramètres α et β , cette procédure retourne la liste des points $(x, y), f_{\alpha, \beta}(x, y), \dots, f_{\alpha, \beta}^{30000}(x, y)$. Autrement dit, dans la suite lorsque nous parlons d'« orbite du point (x, y) sous l'action de $f_{\alpha, \beta}$ » il s'agit du calcul de :

$$(x_0, y_0) := (x, y), (x_1, y_1) := f_{\alpha, \beta}(x, y), \dots, (x_{30000}, y_{30000}) := f_{\alpha, \beta}^{30000}(x, y);$$

nous avons demandé à **Maple** les parties réelle et imaginaire de x_n ainsi que la partie réelle de y_n puis nous avons fait diverses projections planes. Notons que les points de croisement ou les points cuspidaux que nous pouvons observer sont des artéfacts de la projection.

1.3.1. *Au voisinage de l'axe $y = 0$.*



Orbite des points $(10^{-4}i, 10^{-4}i)$ et $(0.1 + 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

Ces deux dessins sont « conformes » à la Proposition 4.2 : l'adhérence de cette orbite est un tore réel de dimension 2.

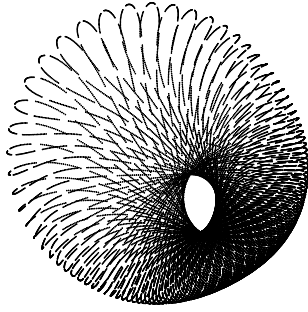


figure 1

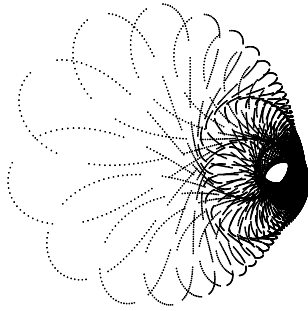


figure 2

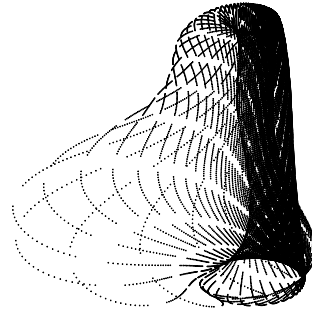


figure 3

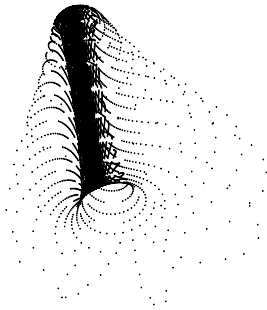


figure 4

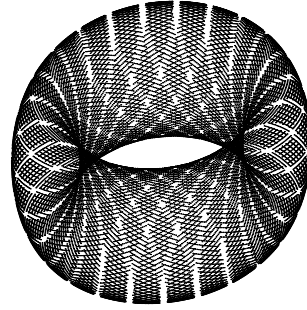
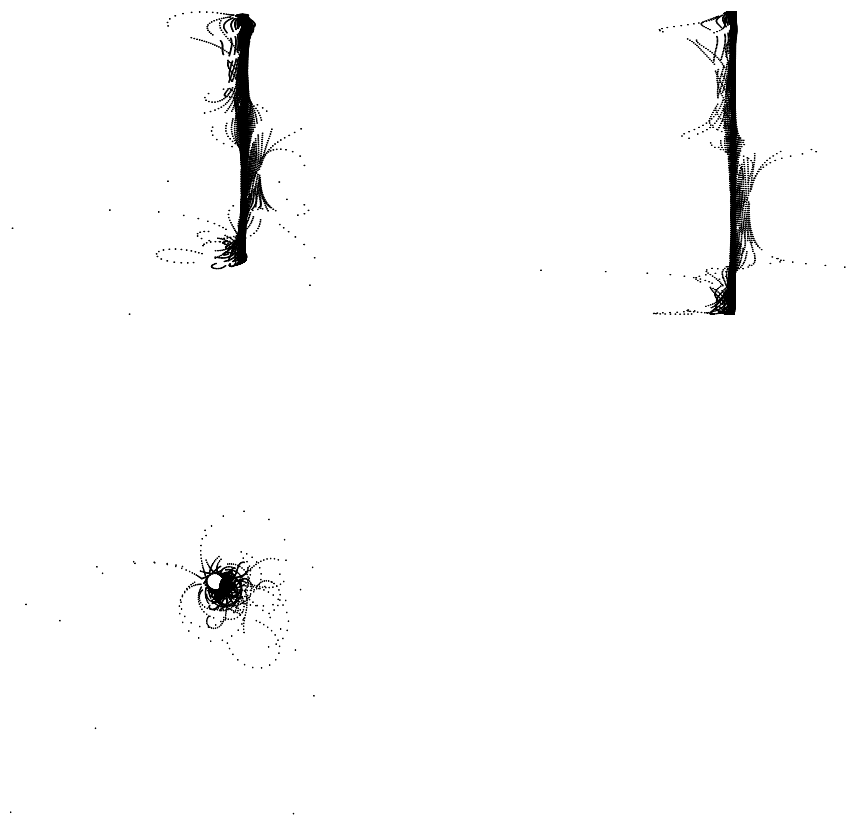


figure 5

Orbite des points $(0.2 + 10^{-4}i, 0.2 + 10^{-4}i)$, $(0.3 + 10^{-4}i, 0.3 + 10^{-4}i)$, $(0.3 + 10^{-4}i, 0.3 + 10^{-4}i)$, $(-0.25 - 0.5i, 0.1i)$ et $(-0.45 - 0.84i, 0.01i)$ sous l'action de $f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

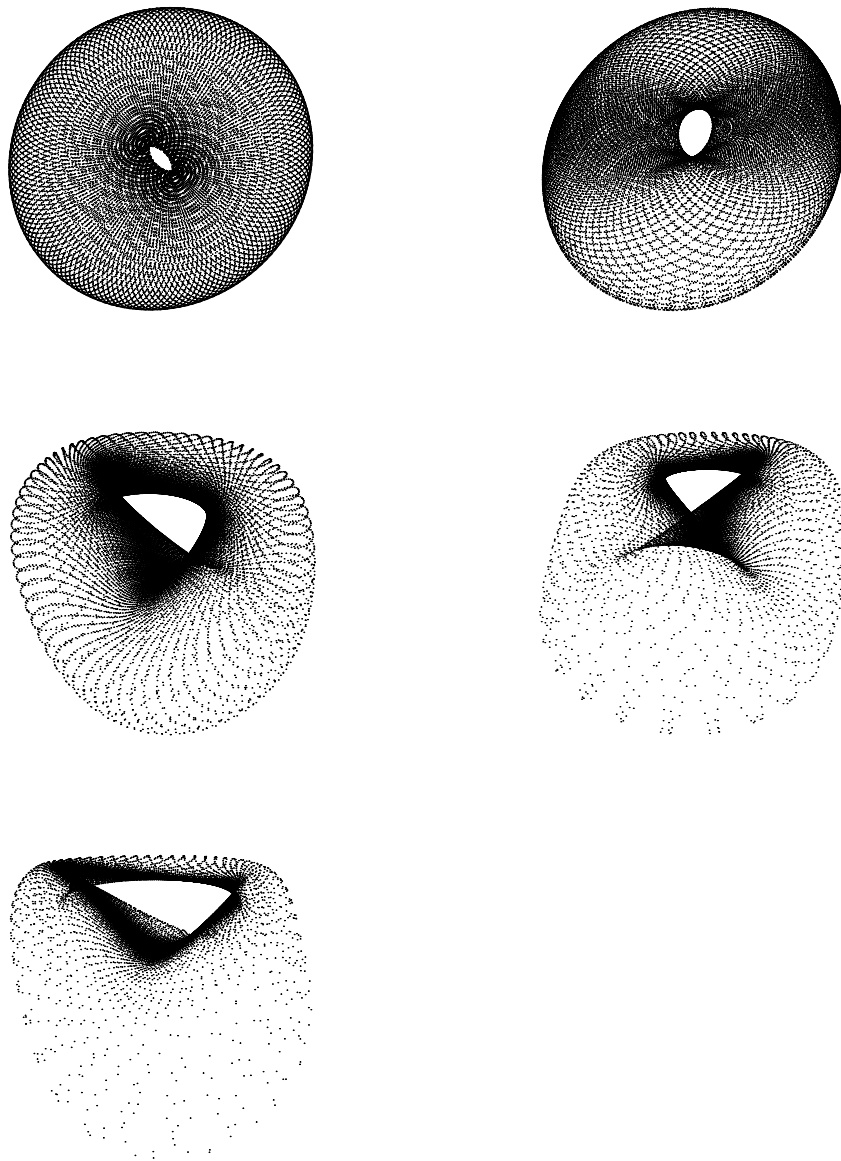
Nous sommes encore dans le domaine de linéarisation évoqué dans la Proposition 4.2. Notons que les deuxième et troisième figures représentent la même orbite, nous avons seulement fait tourner la figure. Les tores persistent mais commencent à se déformer.



Orbite du point $(0.4 + 10^{-4}i, 0.4 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

Notons qu'il s'agit de l'orbite du même point, la figure a été tournée.

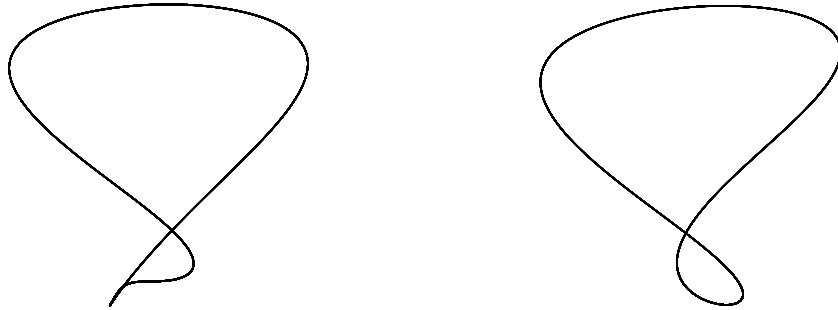
Changeons les paramètres α et β : le paramètre α (resp. β) vaut désormais $\exp(2i\sqrt{3})$ (resp. $\exp(2i\sqrt{2})$).



Orbite des points $(10^{-4}i, 10^{-4}i)$, $(0.1 + 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i)$, $(0.2 + 10^{-4}i, 0.2 + 10^{-4}i)$,
 $(0.3 + 10^{-4}i, 0.3 + 10^{-4}i)$ et $(0.4 + 10^{-4}i, 0.4 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{\exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2})}$.

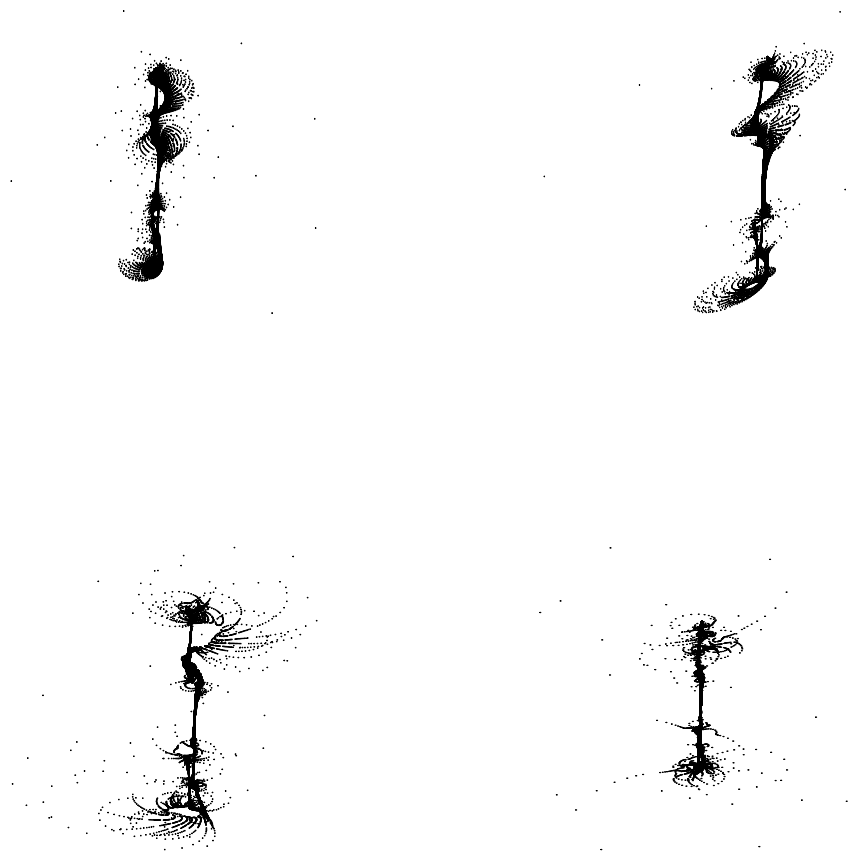
Ces dessins sont conformes à la Proposition 4.2.

1.3.2. « *Près* » de $(0 : 1 : 0)$. Comme annoncé dans la Proposition 4.3 l'orbite d'un point « *près* » de $(0 : 1 : 0)$ sous l'action de $f_{\alpha,\beta}^2$ est un cercle.

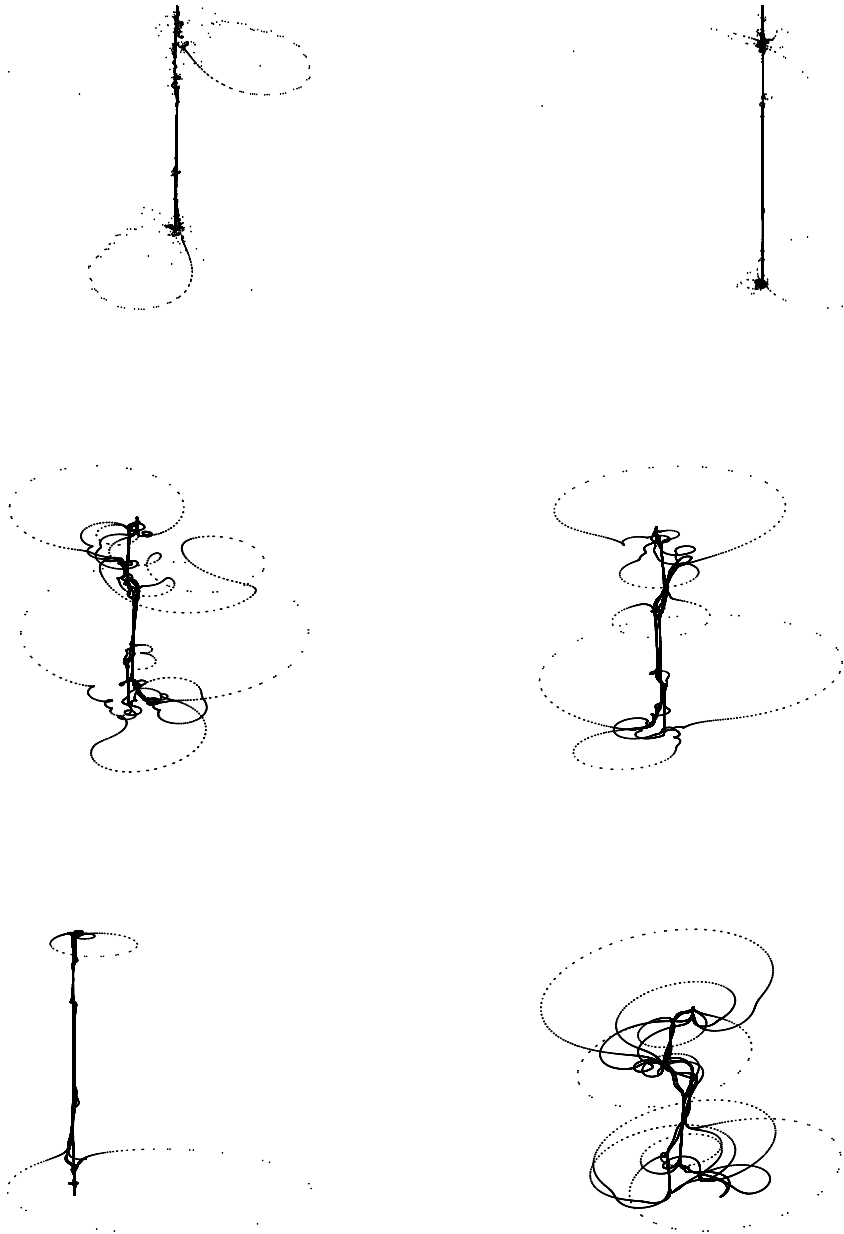


Orbite des points $(10 + 10^{-4}i, 10 + 10^{-4}i)$ et $(10000 + 10^{-4}i, 10000 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}^2$.

1.3.3. « *Chaos* ». Rappelons que $(-1 : \alpha : 1)$ est un point d'indétermination de $f_{\alpha,\beta}$; ainsi lorsque $|y| = |y_k|$ est très proche de 1 nous pouvons penser qu'il règne un certain chaos. Les figures qui suivent semblent conforter cette hypothèse.



Orbite des points $(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$, $(0.93 + 10^{-4}i, 0.93 + 10^{-4}i)$, $(0.96 + 10^{-4}i, 0.96 + 10^{-4}i)$ et $(0.98 + 10^{-4}i, 0.98 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.



Orbite des points $(1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i)$, $(1.02 + 10^{-4}i, 1.02 + 10^{-4}i)$,
 $(1.04 + 10^{-4}i, 1.04 + 10^{-4}i)$, $(1.05 + 10^{-4}i, 1.05 + 10^{-4}i)$, $(1.06 + 10^{-4}i, 1.06 + 10^{-4}i)$
 et $(1.08 + 10^{-4}i, 1.08 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

1.4. Centralisateur. Une façon de mesurer le chaos (algébrique) est d'observer la « taille » des centralisateurs. Donnons deux exemples. Les automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 qui admettent de la dynamique sont les automorphismes de HÉNON qui, contrairement aux élémentaires, ont un centralisateur dénombrable. En ce qui concerne les transformations rationnelles de la sphère, nous constatons que si le centralisateur d'une transformation f n'est pas réduit à $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, alors l'ensemble de JULIA de f est « particulier » (monômes, polynômes de TCHEBYCHEV, exemples de LATTES...)

PROPOSITION 4.4. *Le centralisateur de $f_{\alpha,\beta}^2$ s'identifie à un sous-groupe abélien de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.*

REMARQUES 14. 1. Le centralisateur de $f_{\alpha,\beta}^2$ contient $\{f_{\alpha,\beta}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$.
2. Le centralisateur de $f_{\alpha,\beta}^2$ est abélien : plaçons nous dans la carte affine $z = 1$; au voisinage de l'origine, $f_{\alpha,\beta}^2$ est conjugué à $(\alpha^2 x, \beta^2 y)$ dont le centralisateur est abélien.

DÉMONSTRATION. Plaçons nous dans la carte affine $z = 1$. Notons p le point d'indétermination $(-1, \alpha)$. Pour tout entier $n \geq 1$, l'image de p par $f_{\alpha,\beta}^{2n}$ est une fibre de la fibration $y = \text{cte}$; pour tout $n \leq 0$ l'image de p par $f_{\alpha,\beta}^{2n}$ est un point. Soit g un élément du centralisateur de $f_{\alpha,\beta}^2$. Comme $\text{Ind}(g)$ est fini, $gf_{\alpha,\beta}^{2k}(p)$ est un point pour un certain entier $k \leq 0$. De même puisque $\text{Exc}(g)$ est fini, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $gf_{\alpha,\beta}^{2n}(p)$ soit une courbe. Par suite $gf_{\alpha,\beta}^{2\ell}(p)$ appartient à $\text{Ind}(f_{\alpha,\beta}^2)$ pour un certain ℓ compris entre k et n . Comme $f_{\alpha,\beta}^2$ a trois points d'indétermination, nous pouvons supposer, quitte à considérer $g^6 f_{\alpha,\beta}^{2\ell}$, que p est fixe. Puisque f et g commutent, nous avons pour tout point m de l'orbite négative de p sous l'action de $f_{\alpha,\beta}^2$:

$$g^6 f_{\alpha,\beta}^{2\ell}(m) = m.$$

Cette orbite étant ZARISKI dense, $g^6 f_{\alpha,\beta}^{2\ell} = \text{id}$, autrement dit $g^6 = f_{\alpha,\beta}^{-2\ell}$. Comme le centralisateur $\mathcal{C}(f_{\alpha,\beta}^2)$ de $f_{\alpha,\beta}^2$ est abélien, le groupe $G := \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est distingué dans $\mathcal{C}(f_{\alpha,\beta}^2)$; en considérant le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(f_{\alpha,\beta}^2) & \rightarrow & G \\ g & \mapsto & g^6 \end{array}$$

nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(f_{\alpha,\beta}^2) & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(f_{\alpha,\beta}^2)/G & \longrightarrow & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{C}(f_{\alpha,\beta}^2)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. \square

1.5. Premier degré dynamique.

LEMME 4.5. *Le premier degré dynamique de $f_{\alpha,\beta}$ vaut 1.*

DÉMONSTRATION. Notons que $\deg f_{\alpha,\beta}^n \sim \frac{n}{2}$; les inégalités $1 \leq \lambda(f_{\alpha,\beta})^n \leq \deg f_{\alpha,\beta}^n$ permettent de conclure. \square

1.6. Exposants de Lyapunov ([11, 30]). Un système dynamique (X, f) est **sensible aux conditions initiales** sur un sous-ensemble X' de X s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous x dans X' et $\delta > 0$:

$$\exists y \in X, \exists n \in \mathbb{N}, d(x, y) < \delta \quad \text{et} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon,$$

où $d(x, y)$ désigne la distance entre les deux points x et y . Bien qu'il n'y ait pas de définition universelle du chaos, un système dynamique chaotique est souvent sensible aux conditions initiales. La sensibilité aux conditions initiales est fréquemment associée à la présence d'exposants de LYAPUNOV positifs. Soient f une application différentiable sur un ouvert U de \mathbb{R}^n dans lui-même et $Df_{(x)}$ la différentielle de f au point x . Soient x un point de U et v un vecteur non nul de \mathbb{R}^n ; l'**exposant de LYAPUNOV** $\chi(x, v)$ est défini par :

$$\chi(x, v) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_{(x)}^n(v)\|;$$

il mesure la vitesse exponentielle de séparation de deux orbites proches. Si $\chi(x, v) = \chi$ est strictement positif pour un certain vecteur v , il existe une suite $(n_j)_j$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j = \infty$ et pour tout $\eta > 0$:

$$\|Df_{(x)}^{n_j}(v)\| \geq \exp((\chi - \eta)n_j)\|v\|.$$

Par suite, pour un certain j fixé il existe y dans U tel que :

$$d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) \geq \frac{1}{2} \exp((\chi - \eta)n_j)d(x, y).$$

Cela n'implique pas que (X, f) est sensible aux conditions initiales car $d(x, y)$ n'est pas contrôlée. Néanmoins de nombreux systèmes dynamiques dont les exposants de LYAPUNOV sont strictement positifs sont sensibles aux conditions initiales.

DÉFINITION 6. Soient (X, \mathcal{B}, μ) un espace de LEBESGUE et $g : X \rightarrow X$ une transformation inversible préservant μ . Pour toute fonction mesurable $A : X \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et tout y dans X posons

$$\mathcal{A}(y, m) := A(g^{m-1}(y)) \dots A(y) \quad \text{pour } m > 0$$

$$\mathcal{A}(y, m) := A(g^m(y))^{-1} \dots A(g^{-1}(y))^{-1} \quad \text{pour } m < 0$$

et

$$\mathcal{A}(y, 0) := \text{id}.$$

Remarquons que :

$$(11) \quad \mathcal{A}(y, m+k) = \mathcal{A}(g^k(y), m)\mathcal{A}(y, k).$$

Toute fonction mesurable $\mathcal{A} : X \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant (11) est appelée **cocycle linéaire mesurable au dessus de g** .

DÉFINITION 7. Soit \mathcal{A} un cocycle mesurable linéaire au dessus d'une transformation $g : X \rightarrow X$. Soit (y, v) dans $X \times \mathbb{R}^n$; si elle existe, la quantité

$$\chi^+(y, v, \mathcal{A}) = \chi^+(y, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(y, m)v\|$$

est appelée **exposant de LYAPUNOV** de (y, v) par rapport à \mathcal{A} .

Rappelons le résultat suivant dû à OSEDELEC ([30]).

THÉORÈME 4.6. Soient (X, μ) un espace de LEBESGUE, $g : X \rightarrow X$ une transformation préservant μ et $\mathcal{A} : X \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un cocycle mesurable au dessus de g . Si $\log^+ \|\mathcal{A}^{\pm 1}(y)\|$ appartient à $L^1(X, \mu)$ alors il existe un sous-ensemble Y de X tel que Y soit de mesure pleine et pour tout y dans Y :

1. il existe une décomposition de \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k(y)} H_i(y);$$

2. pour tout v dans $H_i(y) \setminus \{0\}$ nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|m|} \log \frac{\|\mathcal{A}(y, m)v\|}{\|v\|} = \pm\chi_i(y).$$

Dans notre contexte, X est \mathbb{S}^1 , la mesure μ la mesure de HAAR et g l'application qui à y associe βy .

Notons

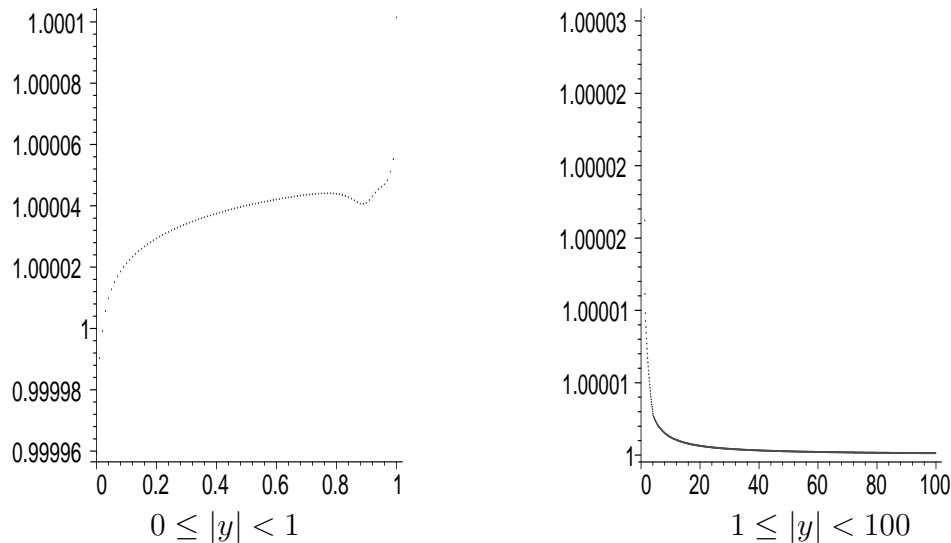
$$\mathcal{A}_n(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta^n y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta^{n-1} y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \alpha & \beta y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i.e. A := \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $f_{\alpha,\beta}^n(x,y)$ lorsque $f_{\alpha,\beta}^k(x,y) \neq (-1,\alpha)$ pour tout $1 \leq k \leq n$ revient à calculer :

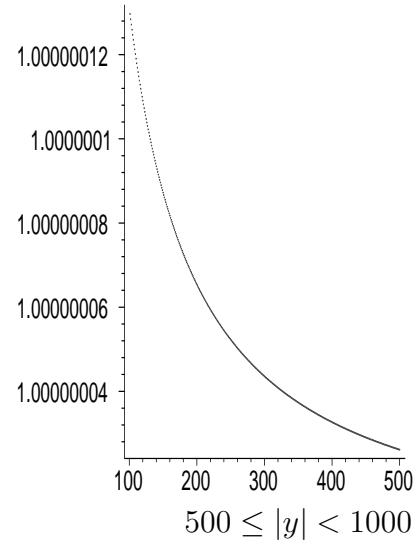
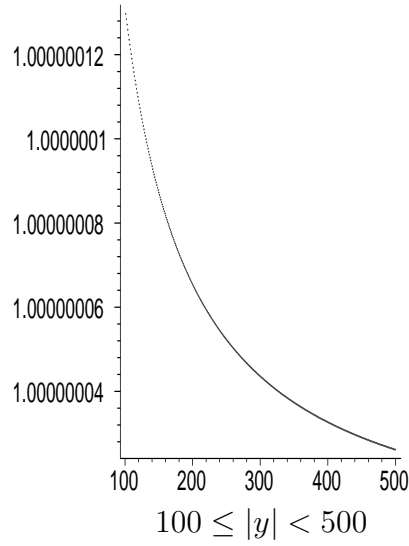
$$\mathcal{A}_n(\alpha,\beta) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^n y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta^{n-1} y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha & \beta y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les applications $f_{\alpha,\beta}$ sont naturellement associées à un cocycle linéaire. Les graphes suivants donnent l'exponentielle de l'exposant de LYAPUNOV (calculée à l'aide de **Maple**, voir l'Annexe B) de $\mathcal{A}_{100000}(\exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2}))$ en fonction du module de y .



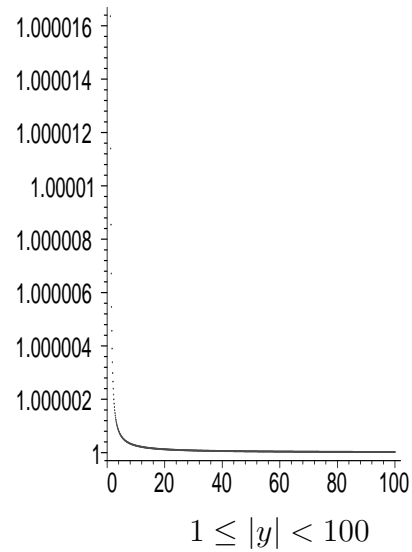
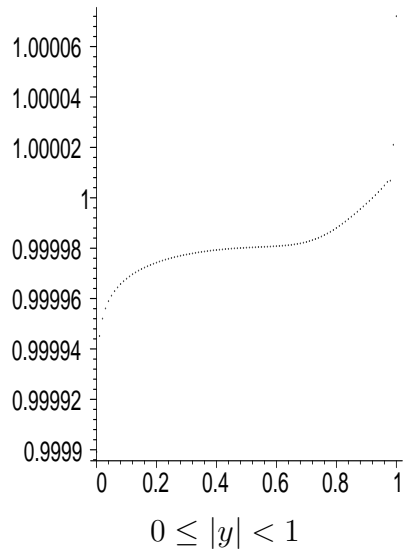
Sur le premier dessin il semble qu'au voisinage de l'origine l'exponentielle de l'exposant de LYAPUNOV ne vaille pas 1 alors que d'après la Proposition 4.2, il devrait... ceci est dû aux erreurs d'approximations successives mais aussi aux échelles choisies sur les axes.

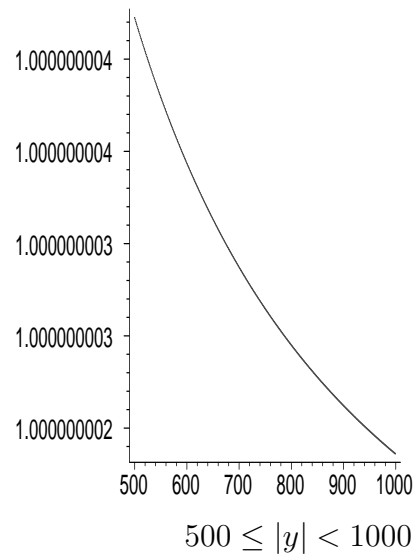
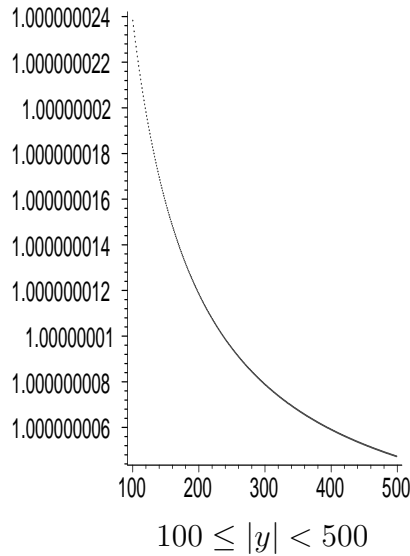
Nous avons ensuite calculé, pour $100 \leq |y| \leq 1000$, l'exponentielle de l'exposant de LYAPUNOV de $\mathcal{A}_{100000}(\exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2}))$.



Notons, pour ces dessins comme pour ceux qui suivent, que l'exponentielle de l'exposant de LYAPUNOV semble fortement décroître mais ceci est un artéfact de l'échelle.

Nous avons ensuite réalisé les mêmes calculs en changeant les paramètres α et β ; désormais $\alpha = \exp(2i\sqrt{7})$, $\beta = \exp(2i\sqrt{5})$ et n vaut toujours 100000.





2. PREMIÈRE VARIANTE

2.1. Un résultat de linéarisation. Considérons la sous-famille de $f_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$\begin{aligned} f_{1,\beta}: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) &\dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ (x : y : z) &\mapsto ((x + y)z : \beta y(x + z) : z(x + z)) \end{aligned}$$

qui correspond donc au cas où α vaut 1.

REMARQUE 15. Comme nous l'avons vu il existe un voisinage de $(0 : 1 : 0)$ sur lequel $f_{1,\beta}^2$ est linéarisable et l'adhérence de l'orbite d'un point est un cercle (Proposition 4.3).

Dans la carte affine $z = 1$, la transformation $f_{1,\beta}$ s'écrit

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x + y}{x + 1}, \beta y \right).$$

PROPOSITION 4.7. *Pour β générique, il existe un réel $\rho > 0$ tel que $(\frac{x+y}{x+1}, \beta y)$ soit analytiquement conjugué à $(\frac{x}{1+x}, \beta y)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times D(0, \rho)$, où $D(0, \rho)$ désigne un disque centré en 0 et de rayon ρ .*

DÉMONSTRATION. Elle est plus ou moins analogue à celle de la Proposition 4.2. Cherchons la conjuguante sous la forme $(\frac{x+a(y)}{b(y)x+c(y)}, y)$; nous obtenons les trois égalités suivantes :

$$c(\beta y)a(y) + c(\beta y)c(y)y - a(\beta y)a(y) - a(\beta y)c(y) = 0$$

$$c(\beta y) + c(\beta y)b(y)y - a(\beta y) - a(\beta y)b(y) - a(y) - c(y) + b(\beta y)c(y)y - b(\beta y)a(y) = 0$$

$$1 + b(y) - b(\beta y) - b(y)b(\beta y)y - a(y) - c(y) + b(\beta y)c(y)y + b(\beta y)a(y) = 0.$$

Écrivons $a(y)$ (resp. $b(y)$, resp. $c(y)$) sous la forme $\sum_{i \geq 0} a_i y^i$ (resp. $\sum_{i \geq 0} b_i y^i$, resp. $\sum_{i \geq 0} c_i y^i$). Notons que nous pouvons poser $c_0 = 1$ et $a_0 = b_0 = 0$. Supposons que nous ayons calculé $a_0, b_0, c_0, \dots, a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$ et $c_{\nu-1}$. Les trois égalités précédentes conduisent à :

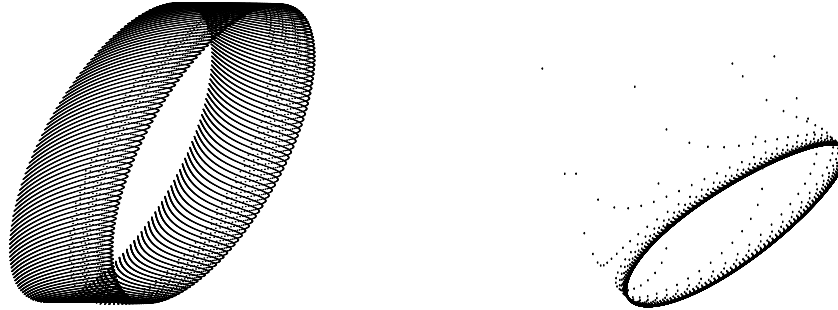
$$a_\nu(1 - \beta^\nu) + F_1(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) = 0$$

$$c_\nu(1 - \beta^\nu) - a_\nu(1 + \beta^\nu) + F_2(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) = 0$$

$$b_\nu(1 - \beta^\nu) - a_\nu - c_\nu + F_3(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) = 0$$

où les F_i désignent des polynômes universels du second degré en les a_i, b_i, c_i , à coefficients entiers, faisant intervenir certains a_i, b_i, c_i avec $i < \nu$. Nous pouvons donc déterminer a_ν, c_ν et b_ν et l'algorithme de SIEGEL ([36]) assure que $a(y), b(y)$ et $c(y)$ sont convergentes. Puisqu'à y fixé, $\frac{x+a(y)}{b(y)x+c(y)}$ est une homographie en x nous avons le résultat annoncé. \square

2.2. Quelques orbites.

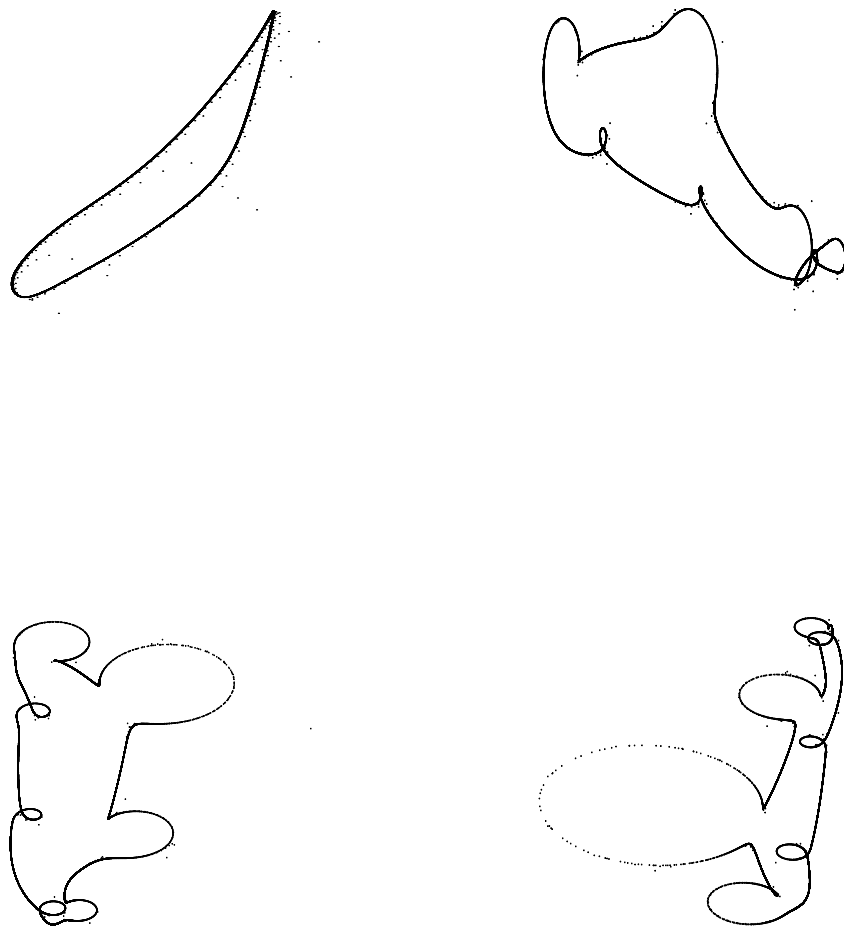


Orbite des points $(10^{-4}i, 10^{-4}i)$ et $(0.1 + 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}$.

Sur le second dessin nous voyons clairement les orbites s'accumuler sur un cercle; il en est de même pour le premier mais les itérés sont « plus denses ». Ces deux dessins sont conformes à l'énoncé 4.7; pour des raisons de projections, nous avons considéré $(x + y, y) \left(\frac{x}{1+x}, \beta y\right) (x - y, y)$:

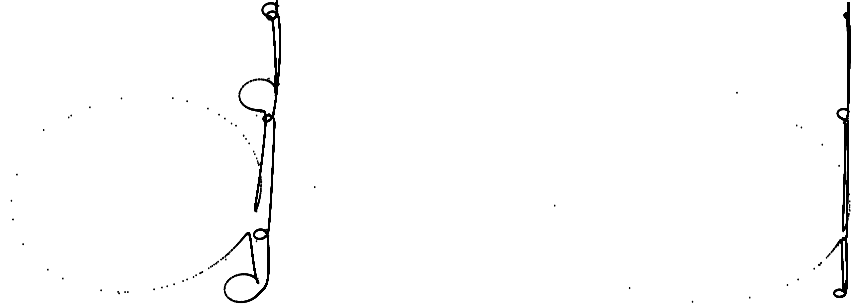


Orbite des points $(2 \times 10^{-4}i, 10^{-4}i)$ et $(0.2 + 2 \times 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $(x + y, y) \left(\frac{x}{1+x}, \beta y\right) (x - y, y)$.



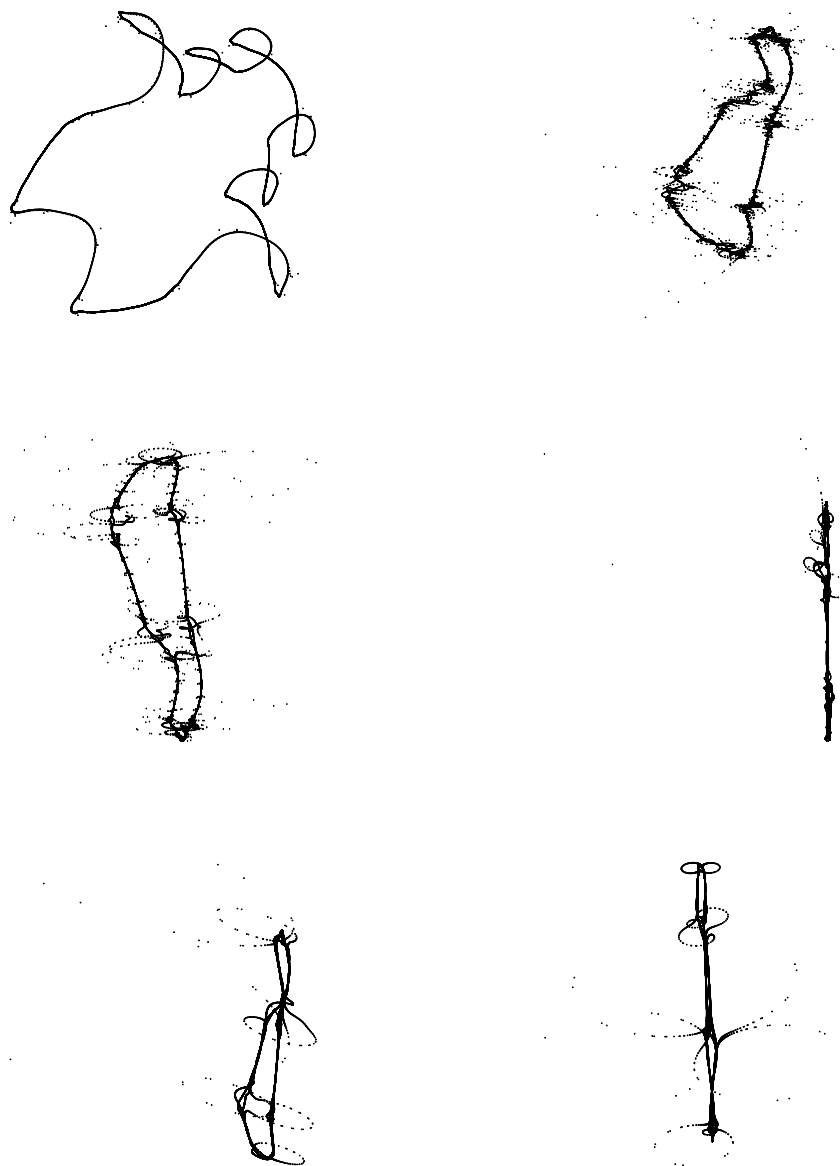
Orbite des points $(0.5 + 10^{-4}i, 0.5 + 10^{-4}i)$, $(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$,
 $(0.93 + 10^{-4}i, 0.93 + 10^{-4}i)$ et $(0.936 + 10^{-4}i, 0.936 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}$.

Le premier dessin est prédit par l'énoncé 4.7; ensuite nous observons encore des « cercles » limites qui se déforment.



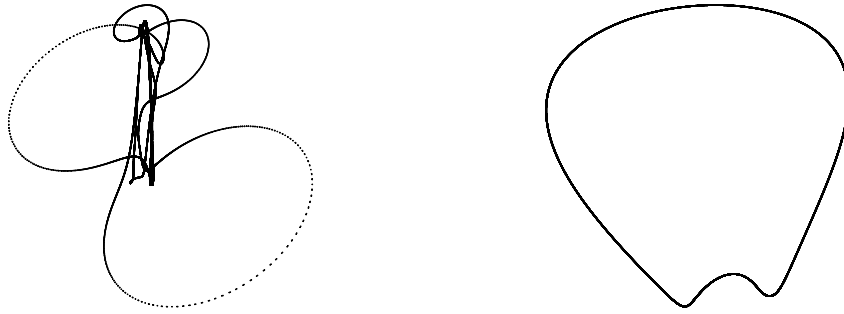
Orbite des points $(0.939 + 10^{-4}i, 0.939 + 10^{-4}i)$, $(0.94 + 10^{-4}i, 0.94 + 10^{-4}i)$, $(0.95 + 10^{-4}i, 0.95 + 10^{-4}i)$ et $(0.96 + 10^{-4}i, 0.96 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}$.

Est-ce la proximité du point d'indétermination qui explique la nature de ces figures ?



Orbite des points $(0.98 + 10^{-4}i, 0.98 + 10^{-4}i)$, $(1.02 + 10^{-4}i, 1.02 + 10^{-4}i)$,
 $(1.03 + 10^{-4}i, 1.03 + 10^{-4}i)$, $(1.04 + 10^{-4}i, 1.04 + 10^{-4}i)$, $(1.07 + 10^{-4}i, 1.07 + 10^{-4}i)$
 et $(1.1 + 10^{-4}i, 1.1 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}$.

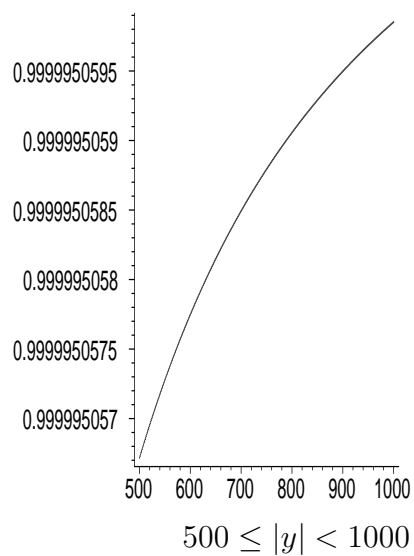
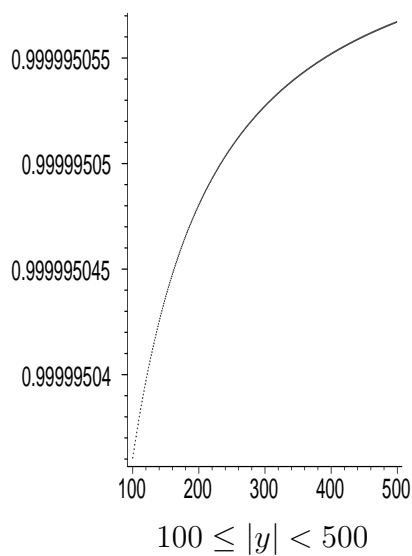
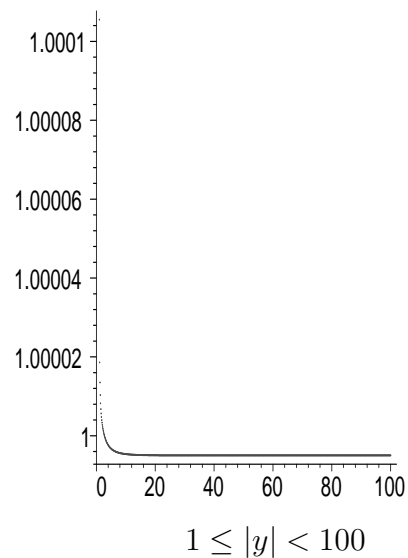
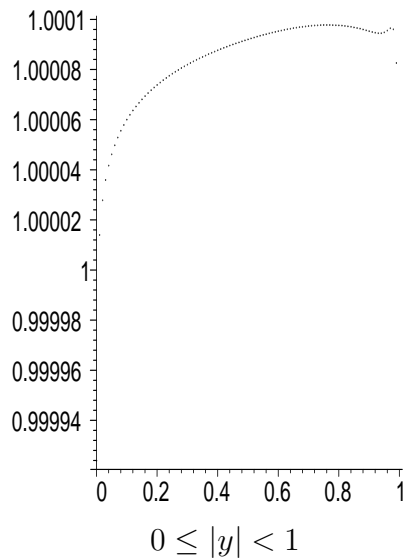
Si la première figure est bien un cercle limite, que penser des suivantes ?



Orbite du point $(2 + 10^{-4}i, 2 + 10^{-4}i)$ (resp. $(10 + 10^{-4}i, 10 + 10^{-4}i)$) sous l'action de $f_{1,\exp(2i\sqrt{5})}$ (resp. $f_{1,\exp(2i\sqrt{5})}^2$).

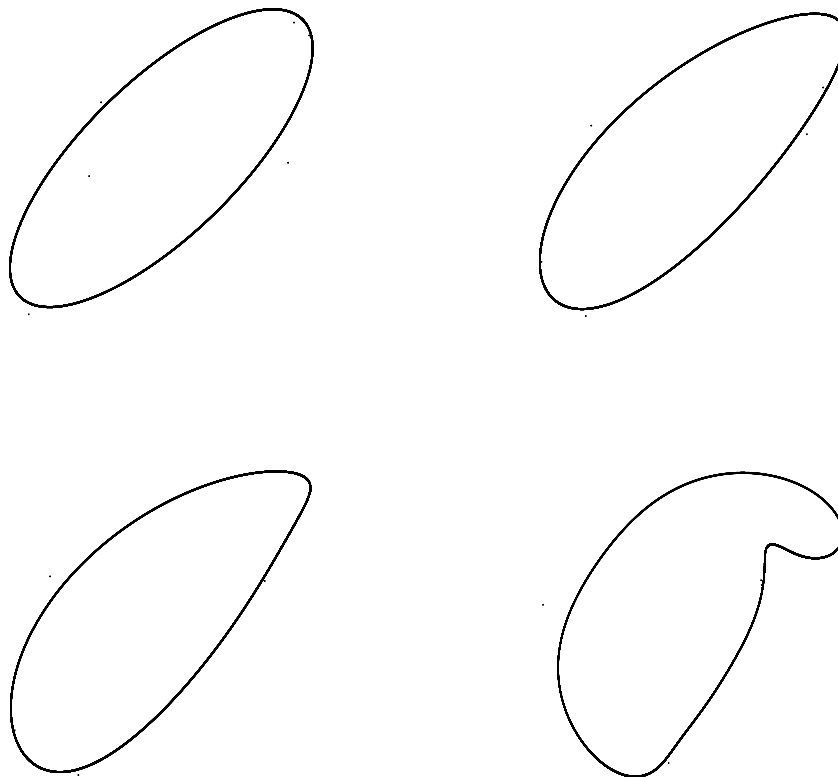
Une rotation de la première figure permet de distinguer deux « cercles » ; pour la seconde il s'agit de l'itération de $f_{1,\exp(2i\sqrt{5})}^2$, celle de $f_{1,\exp(2i\sqrt{5})}$ conduirait à deux « cercles ».

2.3. Exposants de LYAPUNOV. Comme au §1.6 les graphes qui suivent donnent l'exponentielle de l'exposant de LYAPUNOV (calculée à l'aide de procédures qui figurent dans l'Annexe B) de $\mathcal{A}_{100000}(1, \exp(2i\sqrt{2}))$ en fonction du module de y .



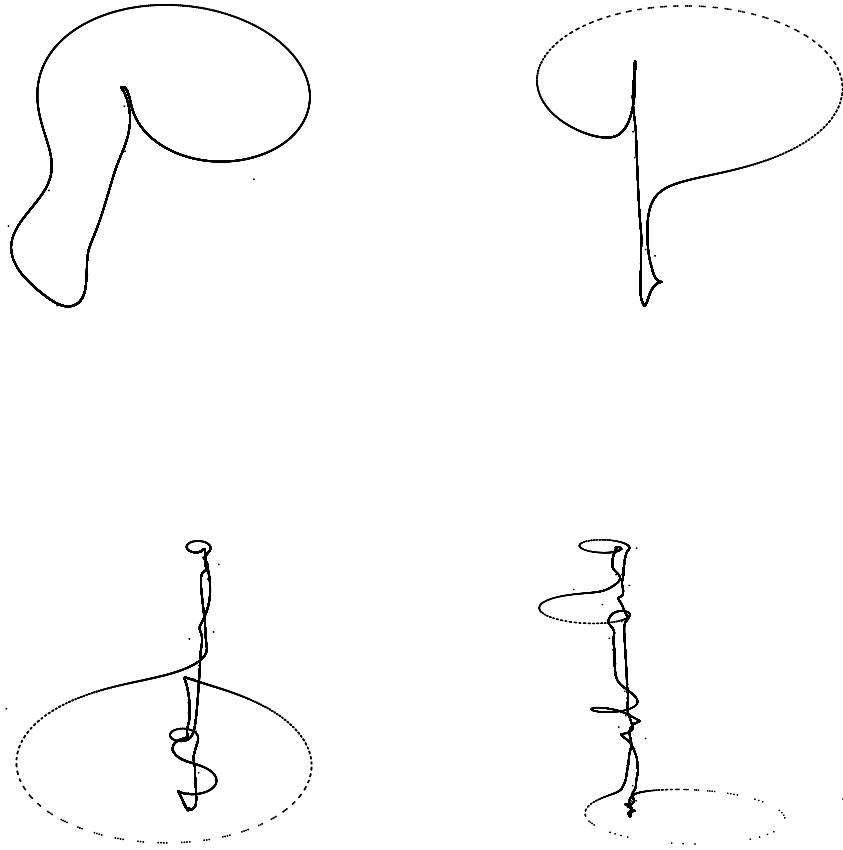
3. SECONDE VARIANTE

3.1. Quelques orbites. Dans cette partie, nous traçons l'orbite de quelques points sous l'action de $f_{0,5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$; alors que β est toujours de module 1, le paramètre α ne l'est plus.



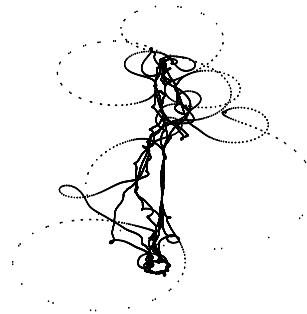
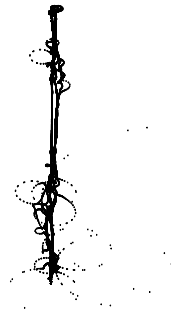
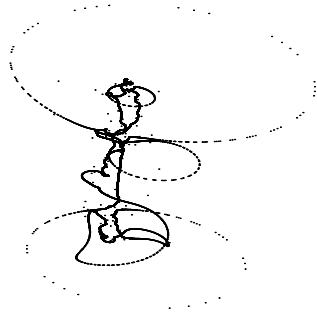
Orbite des points $(10^{-4}i, 10^{-4}i)$, $(0.1 + 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i)$, $(0.2 + 10^{-4}i, 0.2 + 10^{-4}i)$ et $(0.5 + 10^{-4}i, 0.5 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{0,5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

Ces dessins sont prédits par le Théorème 4.1; d'après cet énoncé, près de l'origine, $f_{\alpha, \beta}$, avec $\alpha = 0.5 \exp(2i\sqrt{7})$ et $\beta = \exp(2i\sqrt{5})$, est conjuguée à la transformation linéaire $(\alpha x, \beta y)$. Comme $|\alpha| < 1$, les itérés positifs d'un point (x_0, y_0) proche de $(0, 0)$ par $(\alpha x, \beta y)$ s'accumulent sur le cercle $\{(0, y) \mid |y| = 1\}$; nous retrouvons donc ce phénomène pour notre application. Puisque $|\alpha| = \frac{1}{2}$, l'approximation est très rapide ce qui explique que nous ne voyons qu'un très petit nombre de points « en dehors » du cercle.



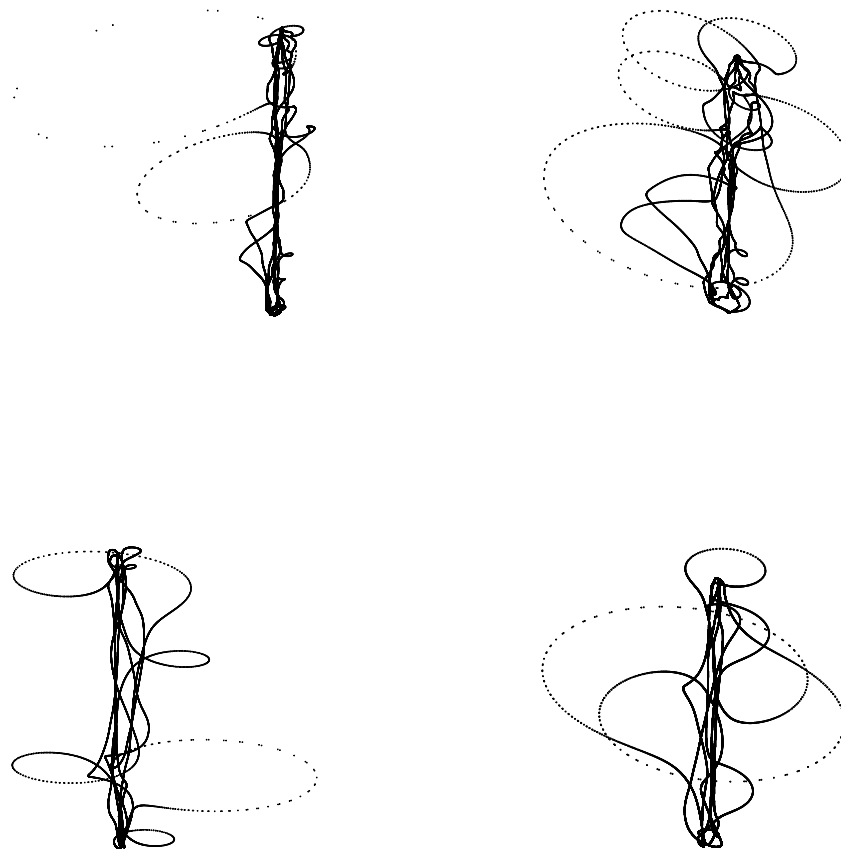
Orbite des points $(0.7 + 10^{-4}i, 0.7 + 10^{-4}i)$, $(0.8 + 10^{-4}i, 0.8 + 10^{-4}i)$,
 $(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$ et $(0.95 + 10^{-4}i, 0.95 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

Nous observons la déformation des cercles limites pour aboutir à un certain chaos dans les figures suivantes.



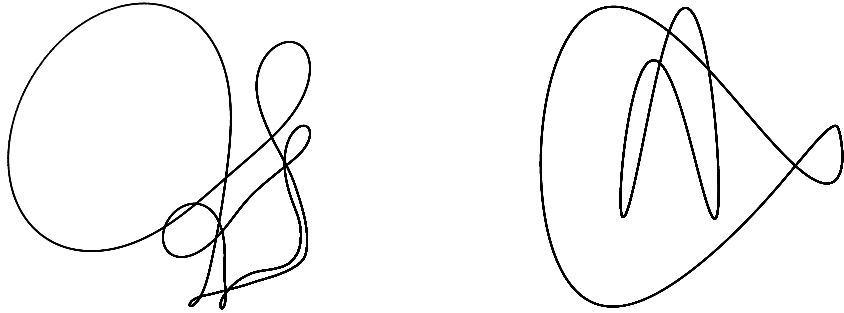
Orbite des points $(0.98 + 10^{-4}i, 0.98 + 10^{-4}i)$, $(1.03 + 10^{-4}i, 1.03 + 10^{-4}i)$,
 $(1.04 + 10^{-4}i, 1.04 + 10^{-4}i)$ et $(1.05 + 10^{-4}i, 1.05 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

Peut-on encore parler de cercles limites ?



Orbite des points $(1.07 + 10^{-4}i, 1.07 + 10^{-4}i)$, $(1.08 + 10^{-4}i, 1.08 + 10^{-4}i)$,
 $(1.15 + 10^{-4}i, 1.15 + 10^{-4}i)$ et $(1.2 + 10^{-4}i, 1.2 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

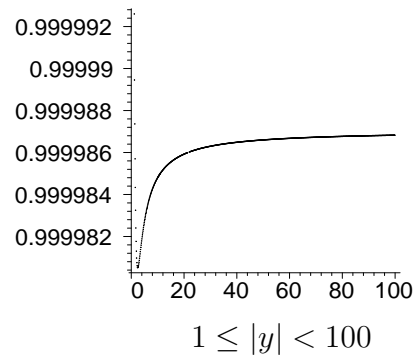
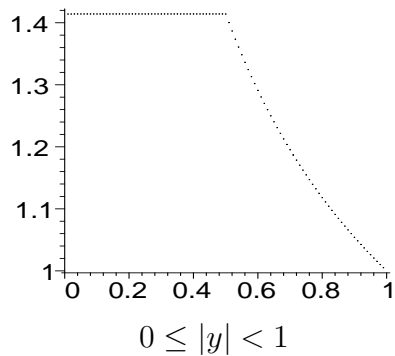
Sans doute les figures ci-dessus sont ou approchent la zone où les adhérences d'orbites
sont une paire de cercles.

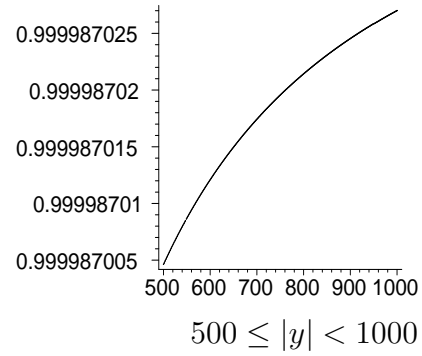
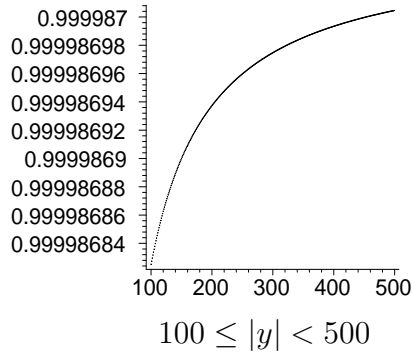


Orbite des points $(2 + 10^{-4}i, 2 + 10^{-4}i)$ et $(10 + 10^{-17}i, 10 + 10^{-17}i)$ sous l'action de $f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$.

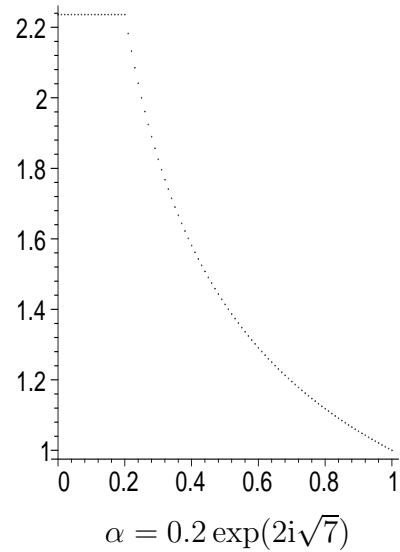
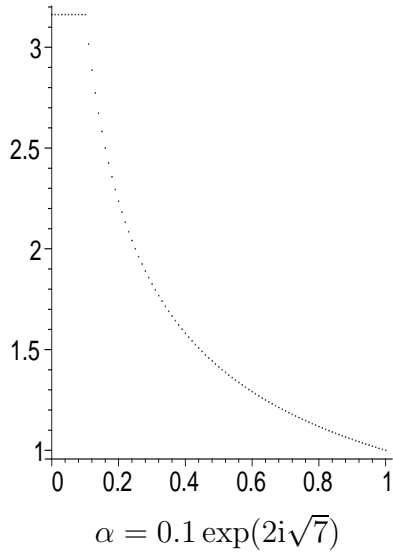
Ces deux dessins sont conformes à l'énoncé 4.3 : « près du point $(0 : 1 : 0)$ » les adhérences d'orbites pour f^2 sont des cercles; celles de f sont donc des couples de cercles. Comme toujours les points de croisement ou points cuspidaux sont des artéfacts de projection.

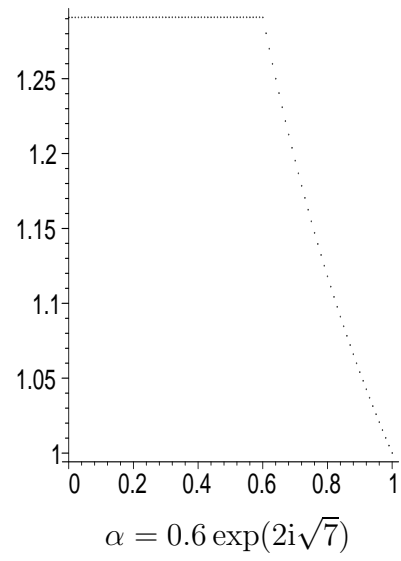
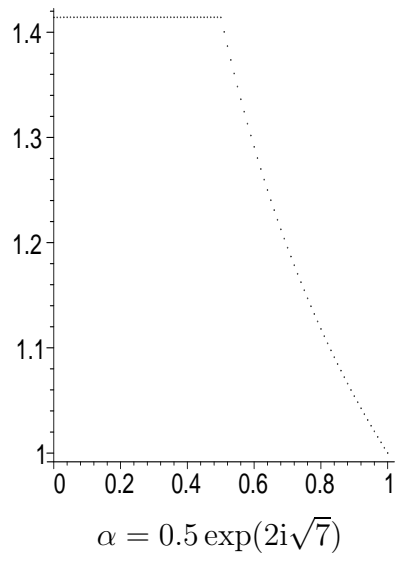
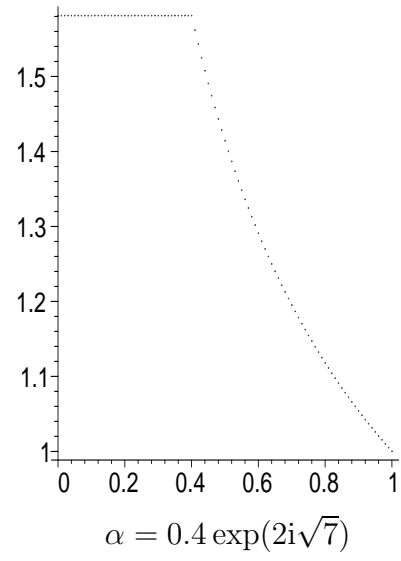
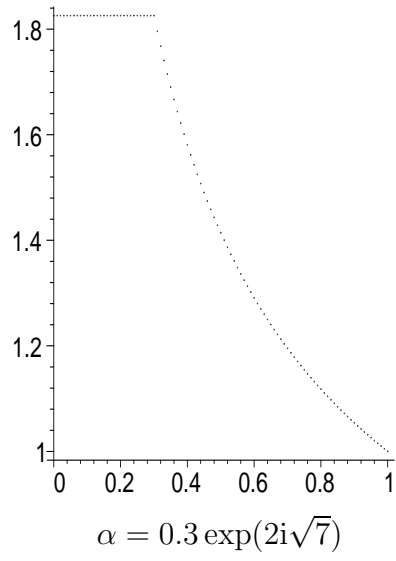
3.2. Exposants de LYAPUNOV. Les graphes qui suivent donnent l'exponentielle du coefficient de LYAPUNOV (calculée à l'aide de procédures qui figurent dans l'Annexe B) de $\mathcal{A}_{100000}(0.5 \exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2}))$ en fonction du module de y .

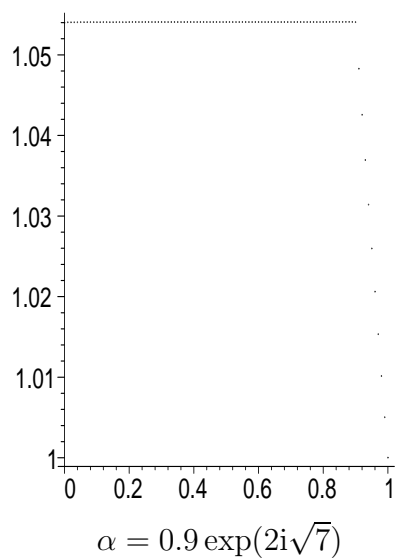
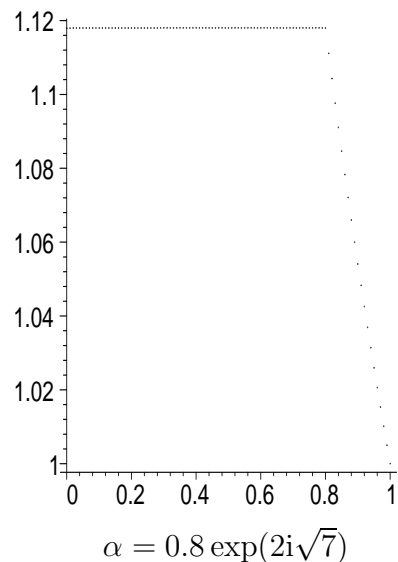
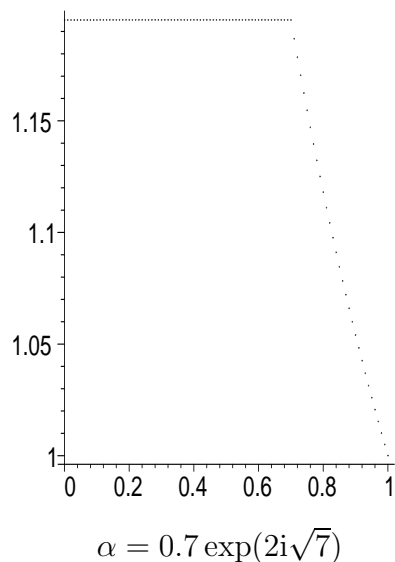




3.3. Domaine de linéarisation. Le premier graphe du §3.2 suggère que $f_{\alpha,\beta}$, où $\alpha = 0.5 \exp(2i\sqrt{3})$ et $\beta = \exp(2i\sqrt{2})$, est linéarisable sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, |\alpha|)$. Les dessins qui suivent confortent cette hypothèse; nous avons tracé l'exponentielle de l'exposant de LYAPUNOV de $\mathcal{A}_{100000}(\alpha, \exp(2i\sqrt{5}))$ en fonction de $|y|$.







Les méthodes classiques de séries majorantes sur ce type d'exemples nous montrent que $f_{\alpha,\beta}$ est linéarisable sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$ pour une valeur de $\rho < |\alpha|/4$; les expériences suggèrent pourtant que $\rho = |\alpha|$.

4. TROISIÈME VARIANTE

Dans cette partie, nous considérons $f_{\alpha,\beta}$ avec $|\alpha| < 1 < |\beta|$. Plaçons nous dans la carte affine $z = 1$. D'après la Proposition 4.2 la transformation $f_{\alpha,\beta}$ est conjuguée à $(\alpha x, \beta y)$ sur $\Omega := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times D(0, \rho)$ où ρ désigne un réel strictement positif. Soit m un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$; l'orbite positive (resp. négative) de m sous l'action de $(\alpha x, \beta y)$ tend asymptotiquement vers la droite d'équation $x = 0$ (resp. $y = 0$). De même l'orbite positive (resp. négative) d'un point de Ω tend vers une variété invariante W (resp. $y = 0$). Notons $\phi = \left(\frac{a(y)x+b(y)}{c(y)x+1}, y \right)$ la conjuguante, *i.e.* ϕ vérifie sur Ω

$$\phi(\alpha x, \beta y) = f(\phi(x, y)).$$

La variété W est paramétrée par $\left(-\frac{b(y)}{a(y)}, y \right)$ sur Ω . Soit (x, y) dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$; il existe un entier n tel que le point $(\alpha^{-n}x, \beta^{-n}y)$ appartienne à Ω . Or

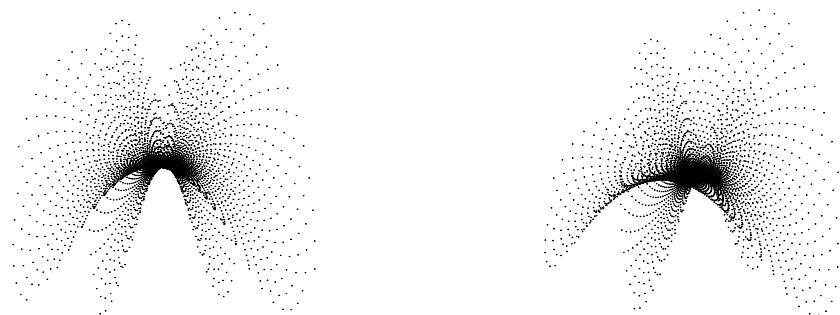
$$\phi(\alpha^{-n}x, \beta^{-n}y) = f^n(\phi(x, y))$$

et f^n contracte, dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$, les droites d'équation $y = \alpha, y = \frac{\alpha}{\beta}, \dots, y = \frac{\alpha}{\beta^{n-1}}$; il en résulte que la paramétrisation de la variété invariante se prolonge à

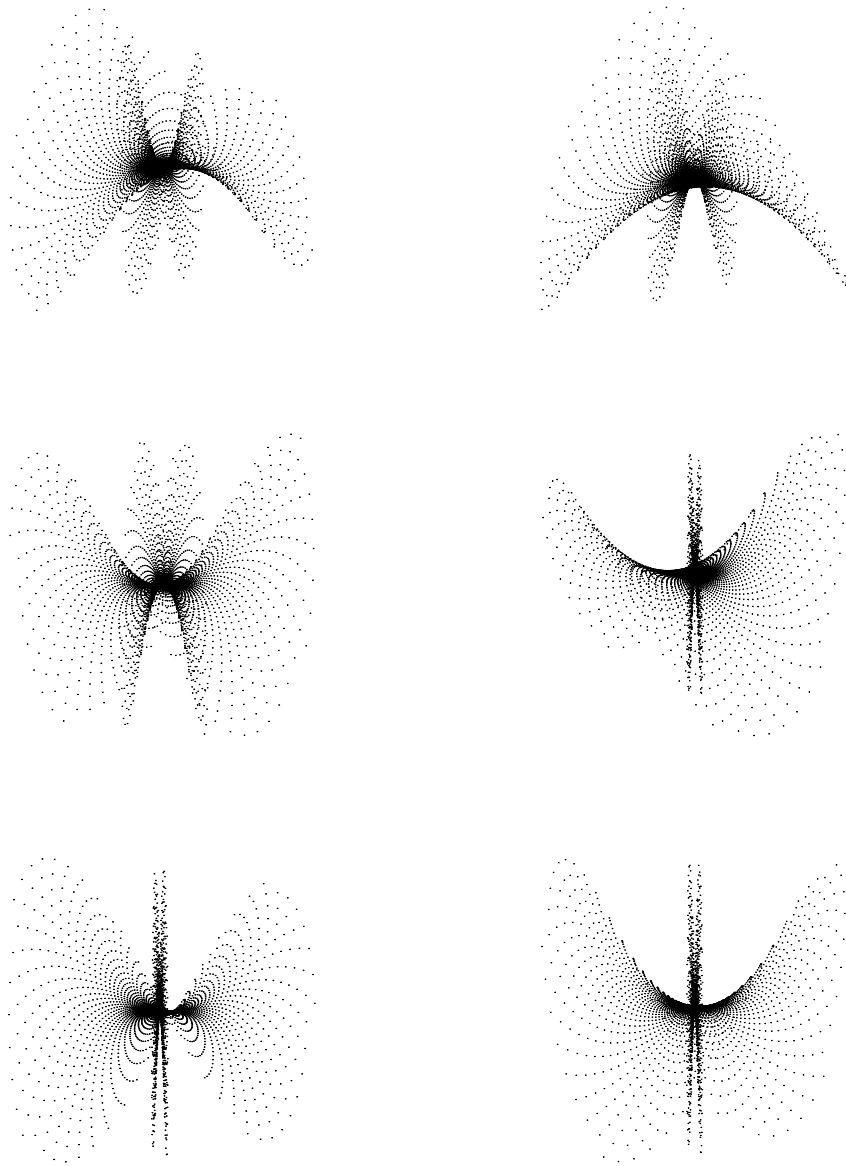
$$\mathbb{C} \setminus \{\alpha\beta, \alpha\beta^2, \dots, \alpha\beta^{n-1}, \dots\}$$

avec singularité méromorphe en les $\alpha\beta^i$, *i.e.* en une application entière de \mathbb{C} dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$.

Nous avons tracé l'orbite positive de certains points sous l'action de $f_{\alpha,\beta}$ pour avoir une idée de l'allure de W ; voici ce que nous avons obtenu.



Orbite du point $(10^{-4}i, 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{10^{-3} \exp(2i\sqrt{7}), (1+10^{-3}i) \exp(2i\sqrt{5})}$.



Orbite des points $(-1 + 10^{-4}i, \alpha + 10^{-4}i)$ et $(45 + 10^{-4}i, 45 + 10^{-4}i)$ sous l'action de
 $f_{10^{-3} \exp(2i\sqrt{7}), (1+10^{-3}i) \exp(2i\sqrt{5})}$.

Les « traits verticaux » sont-ils liés aux singularités méromorphes ?

THÉORÈME DE NØETHER

Dans cette partie nous donnons une preuve du théorème de NØETHER; elle est inspirée d'une suite d'exposés de LAMY.

1. QUELQUES DÉFINITIONS ET RAPPELS

Commençons par rappeler quelques définitions ([7, 26]). Soient S une surface et p un point de S . Il existe une surface \tilde{S} et un morphisme $\varepsilon : \tilde{S} \dashrightarrow S$ tels que

- la restriction de ε à $\varepsilon^{-1}(S \setminus \{p\})$ soit un isomorphisme,
- $E := \varepsilon^{-1}(p)$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

On dit que ε est l'**éclatement** de S en p et E la **courbe exceptionnelle**. La surface \tilde{S} et le morphisme ε sont uniques à isomorphisme près. Considérons une courbe irréductible \mathcal{C} sur S passant par p avec multiplicité ν . L'adhérence de $\varepsilon^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{p\})$ dans \tilde{S} est une courbe irréductible $\tilde{\mathcal{C}}$ appelée **transformée stricte** de \mathcal{C} dans \tilde{S} . Soient D et D' deux diviseurs sur S ; nous avons

$$\varepsilon^*\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} + \nu E, \quad (\varepsilon^*D, \varepsilon^*D') = (D, D'), \quad (E, \varepsilon^*D) = 0 \quad \text{et} \quad E^2 = -1.$$

Soient S une surface et p un point de S . Le diviseur exceptionnel E obtenu en éclatant p est appelé **premier voisinage infinitésimal** de p et les points de E sont dits **infiniment proches** de p . Le i -ème **voisinage infinitésimal** de p est l'ensemble des points contenu dans le premier voisinage d'un certain point du $(i-1)$ -ème voisinage infinitésimal de p . Lorsque qu'on souhaite distinguer les points de S des points infiniment proches on appelle **points propres** les points de S .

DÉFINITION 8. Le **fibré canonique** d'une variété complexe compacte M est le déterminant du fibré cotangent : $\mathbf{K}_M = \det(T^*M)$. Les sections holomorphes de \mathbf{K}_M sont donc les formes holomorphes de degré maximal. En reprenant les notations précédentes, nous avons $\mathbf{K}_{\tilde{S}} = \varepsilon^*\mathbf{K}_S + E$.

EXEMPLE. Le fibré canonique de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est donné par :

$$\mathbf{K}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} = [(\omega)] = [-(n+1)H]$$

où (z_0, \dots, z_n) désigne un système de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$,

$$\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$$

et H un hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Rappelons les définitions des genres réel et virtuel.

DÉFINITION 9. Soit S une surface algébrique. Le **genre virtuel** d'une courbe C sur S est défini par

$$\pi(C) = \frac{K_S \cdot C + C \cdot C}{2} + 1.$$

Le **genre réel** $g(C)$ de C est le genre topologique d'une désingularisée de C .

La proposition qui suit permet de relier les deux notions précédentes.

PROPOSITION A.1 ([10]). *Soit C une courbe algébrique complexe plane dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sans composante multiple. Les genres réel et virtuel de C sont liés par la relation*

$$g(C) = \pi(C) - \sum_i \frac{\nu_i(\nu_i - 1)}{2}$$

où la somme sur i porte sur les multiplicités des points infiniment proches des points singuliers de C .

2. PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES

Nous renvoyons à [1, 3] pour de plus amples détails.

Soit $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une transformation birationnelle de degré n ; notons p_i les points d'indétermination (propres ou non) de g et ν_i leur multiplicité. Quitte à réordonner les p_i nous pouvons supposer que

$$\nu_0 \geq \nu_1 \geq \dots \geq \nu_s.$$

Considérons un réseau L de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et C un représentant de g^*L ; alors C est d'auto-intersection 1 et de genre réel nul d'où

$$n^2 - \sum_{i=1}^s \nu_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s \nu_i(\nu_i - 1) = (n-1)(n-2)$$

que nous pouvons réécrire

$$\sum_{i=1}^s \nu_i^2 = (n-1)(n+1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s \nu_i = 3(n-1).$$

LEMME A.2. *Le point p_0 est propre de multiplicité $\nu_0 > \frac{n}{3}$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\nu_0 \geq \nu_i$ pour tout i , nous avons

$$0 \geq \sum_{i=0}^s \nu_i(\nu_i - \nu_0) = \sum_{i=0}^s \nu_i^2 - \nu_0 \sum_{i=0}^s \nu_i = (n+1 - 3\nu_0)(n-1).$$

Il en résulte que $3\nu_0 \geq n+1$. \square

Soient $j := \frac{n-\nu_0}{2}$ et h le nombre de points p_i , distincts de p_0 , de multiplicité $\nu_i > j$.

LEMME A.3. *L'entier h satisfait les propriétés suivantes :*

1. $h \geq 2$;
2. si $h \geq 3$, alors $\sum_{i=1}^h \nu_i > n$;
3. si $h \geq 3$ et si les points p_1, \dots, p_h sont propres, alors ils ne peuvent être tous alignés.

DÉMONSTRATION. 1. Pour montrer que $h \geq 2$, il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^h (\nu_i - j) > \nu_0 - j.$$

Par définition de h , nous avons : $\sum_{i=0}^h \nu_i(\nu_i - j) \geq \sum_{i=0}^s \nu_i(\nu_i - j)$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s \nu_i(\nu_i - j) &= \sum_{i=0}^s \nu_i^2 - j \sum_{i=0}^s \nu_i \\ &= (n-1)(n-3j+1) \\ &= n(n-3j) + 3j - 1 \\ &= n(\nu_0 - j) + 3j - 1. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\sum_{i=0}^h \nu_i(\nu_i - j) > n(\nu_0 - j) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^h \nu_i(\nu_i - j) > (n - \nu_0)(\nu_0 - j),$$

autrement dit $\sum_{i=1}^h \nu_i(\nu_i - j) > 2j(\nu_0 - j)$. Or, pour tout $i \geq 1$, l'entier ν_i est majoré par $2j$ donc $\sum_{i=1}^h (\nu_i - j) > \nu_0 - j$.

2. L'inégalité $\sum_{i=1}^h (\nu_i - j) > \nu_0 - j$ conduit à $\sum_{i=1}^h \nu_i > hj + \nu_0 - j$. Or $hj + \nu_0 - j$ s'écrit aussi $n + j(h-3)$; ainsi

$$\sum_{i=1}^h \nu_i > n + j(h-3).$$

Par suite, pour $h \geq 3$, nous obtenons $\sum_{i=1}^h \nu_i > n$. \square

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NETHER

Nous donnons, dans ce paragraphe, la preuve du fait suivant : *toute transformation birationnelle du plan projectif complexe se décompose, à automorphisme linéaire près, en un produit de transformations quadratiques ([1, 3]).*

Nous distinguons trois classes de transformations quadratiques :

- celles dont les points base sont propres, appelées **transformations quadratiques standards** ;
- celles qui comptent deux points base propres ;
- et enfin celles qui ont un unique point base propre.

Les transformations du second type (resp. troisième type) s'écrivent comme un produit de deux (resp. quatre) transformations quadratiques standards et chaque transformation quadratique standard s'écrit à l'aide d'éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ et de l'involution de CREMONA (voir [2, 27]).

Soit g une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même de degré n . Notons p_i les points d'indétermination de g et ν_i leur multiplicité ; supposons que les ν_i soient rangés par ordre décroissant. Considérons q l'involution quadratique centrée en p_0 , A et B où A et B désignent deux points dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Posons $g' := g \circ q$; soient n' le degré de g' et (j', h') le couple associé à g' . L'idée est la suivante : choisir A et B de sorte que $(j, h) > (j', h')$ pour l'ordre lexicographique. Il y a deux cas : celui où p_0 est le point de multiplicité maximale de g' , celui où il ne l'est pas.

3.1. Le point p_0 n'est pas le point base de multiplicité maximale de g' . L'entier $2j$ correspond au nombre d'intersections libres d'une droite générique passant par p_0 avec un élément de g^*L où L désigne un réseau de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si p_0 est un point base de multiplicité ν'_0 pour g' , nous avons $n' - \nu'_0 = n - \nu_0 = 2j$. D'autre part si m désigne le point base de multiplicité maximale ν_m pour g' , alors

$$2j' = n' - \nu_m < n' - \nu'_0 = 2j.$$

Autrement dit s'il existe A et B tels que, après avoir composé g avec l'involution quadratique centrée en p_0 , A et B , le point p_0 ne soit plus de multiplicité maximale, alors (j', h') est strictement inférieur à (j, h) .

3.2. Le point p_0 est le point base de multiplicité maximale de g' . D'après ce qui précède, j et j' sont égaux ; nous allons donc essayer de choisir convenablement A et B pour que h diminue.

Nous sommes dans l'une des situations suivantes :

- a. on compte deux points base propres p_1 et p_2 de multiplicités ν_1 et ν_2 supérieures à j ;

- b. il existe au plus un point base propre de multiplicité supérieure à j et il n'existe pas de point base infiniment proche de p_0 ;
- c. il y a au plus un point base propre de multiplicité supérieure à j et au moins un point base infiniment proche de p_0 .

Nous allons traiter ces possibilités au cas par cas.

a. Composons g par l'involution quadratique q centrée en p_0, p_1 et p_2 . La multiplicité ν'_1 de p_1 par rapport à g' est égale au nombre d'intersections libres entre un élément de g^*L et la droite passant par p_0 et p_2 . Par BEZOUT nous avons

$$n = \nu_0 + \nu_2 + \nu'_1.$$

Puisque $\nu_2 > j$ cette égalité conduit à $n - \nu_0 > j + \nu'_1$. Or $n - \nu_0 = 2j$ d'où l'inégalité $j > \nu'_1$; il en est de même pour ν'_2 . L'entier h a donc diminué de 2.

b. Supposons que les points base p_0, p_1 et p_2 de g satisfassent les conditions suivantes :

- p_0 est de multiplicité maximale;
- p_1 est propre;
- p_2 est infiniment proche de p_1 .

Fixons un point m de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tel que la droite passant par m et p_0 (resp. par m et p_1) ne contienne pas de point base de g distinct de p_0 (resp. p_1). Composons g par l'involution quadratique centrée en p_0, p_1 et m . Le point m devient un point base de multiplicité strictement inférieure à j , le point p_1 est désormais un point base de multiplicité $2j$ et p_2 un point propre toujours de multiplicité $\nu_2 > j$. Ainsi h reste constant et il y a un point base propre de multiplicité strictement supérieure à j de plus. En itérant ce procédé nous pouvons supposer que tous les points base de multiplicité strictement supérieure à j sont propres. Puisque $h \geq 2$, nous nous retrouvons dans le cas *a*.

c. Soient A et B deux points génériques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Après avoir composé g par l'involution centrée en p_0, A et B , l'entier h augmente de 2 puisque A et B sont désormais de multiplicité $2j$; en particulier, $h \geq 4$. Par contre il n'y a plus de point base infiniment proche de p_0 . D'après *b*. nous pouvons supposer que p_1, \dots, p_h sont propres. Le Lemme A.3 assure que ces points ne sont pas tous alignés; ainsi nous pouvons appliquer *a*. au moins deux fois de suite et h baisse de 4. Finalement h a donc diminué de 2.

ANNEXE B

PROCÉDURES Maple

1. ORBITES

Les figures du Chapitre 4 ont été obtenues à partir de la procédure suivante qui, étant donné un point (x, y) et des paramètres α et β , retourne la liste des points (x, y) , $f_{\alpha, \beta}(x, y)$, $f_{\alpha, \beta}^2(x, y)$, \dots , $f_{\alpha, \beta}^{30000}(x, y)$.

```
restart :
with(plots) :
orbite := proc(x,y,alpha,beta)
local j, N, L, alp, bet, X, Y;
N := 30000 :
alp := evalf(alpha) :
bet := evalf(beta) :
X := x;
Y := y;
L := [NULL] :
for j from 1 to N do
X := evalf((alp*X+Y)/(X+1));
Y := evalf(bet*Y);
L := [op(L), [Re(X), Im(X), Re(Y)]];
od :
RETURN(L);
end :
```

2. EXPOSANTS DE LYAPUNOV

Les procédures suivantes nous ont permis de déterminer, dans le Chapitre 4, l'exponentielle des exposants de LYAPUNOV de $\mathcal{A}_n(\alpha, \beta)$. La première procédure `maxim` prend deux nombres complexes et retourne celui de plus grand module. La seconde procédure `norme` donne la norme d'une matrice et la troisième `explya` permet de calculer l'exponentielle des exposants de LYAPUNOV de $\mathcal{A}_n(\alpha, \beta)$.

```
restart :
```

```

with(plots) : with(linalg) :
Digits := 40;

maxim := proc(lambda,mu)
local l, m;
  l := evalf(sqrt(Re(lambda)^2+Im(lambda)^2));
  m := evalf(sqrt(Re(mu)^2+Im(mu)^2));
  if l < m then RETURN(m) else RETURN(l) fi;
end :

norme := proc(M)
local mu, lambda;
  lambda := maxim(evalf(M[1,1]), evalf(M[1,2]));
  mu := maxim(evalf(lambda), evalf(M[2,1]));
  if lambda < mu then lambda := mu fi;
  mu := maxim(evalf(lambda), evalf(M[2,2]));
  if lambda < mu then lambda := mu fi;
  RETURN(lambda);
end :

explya := proc(alpha,beta,y,n)
local j, N, M, alp, bet;
  alp := evalf(alpha) :
  bet := evalf(beta) :
  M := matrix(2, 2, [alp, y, 1, 1]);
  M := multiply(M, matrix(2, 2, [1/(evalf(sqrt(det(M))))], 0, 0, 1/(evalf(sqrt(det(M))))]));
  if n= 1 then RETURN(norme(M)) else
  for j from 1 to (n-1) do
    N := matrix(2, 2, [alp, bet^j*y, 1, 1]);
    M := multiply(matrix(2, 2, [1/(evalf(sqrt(det(N))))], 0, 0, 1/(evalf(sqrt(det(N))))]),
      multiply(M, N));
  od;
  RETURN(evalf((norme(M))^(1/n)));
fi;
end :

```

NOTATIONS COMMENTÉES

$\text{Aut}(M)$: groupe des biholomorphismes d'une variété complexe M .

$\mathcal{A} = \text{Aut}[\mathbb{K}^2]$: groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{K}^2 . D'après [28, 39], le groupe \mathcal{A} a une structure de produit amalgamé : $\mathcal{A} = \mathbf{A} *_S \mathbf{E}$ où

$$\mathbf{A} = \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$$

désigne le groupe affine,

$$\mathbf{E} = \{(x, y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[y]\}$$

le groupe élémentaire et $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cap \mathbf{E}$. À tout produit amalgamé peut être associé canoniquement un arbre \mathcal{T} . Dans notre contexte, l'ensemble des sommets de \mathcal{T} est l'union disjointe des classes à gauche \mathcal{A}/\mathbf{A} et \mathcal{A}/\mathbf{E} , celui des arêtes l'union disjointe des classes à gauche \mathcal{A}/\mathbf{S} . Pour tout élément f de \mathcal{A} , l'arête $f\mathbf{S}$ relie les sommets $f\mathbf{A}$ et $f\mathbf{E}$. À isomorphisme près c'est l'unique arbre à vérifier la propriété suivante : il existe une action de \mathcal{A} sur \mathcal{T} telle que le domaine fondamental de cette action soit une arête avec ses deux sommets dont les stabilisateurs sont \mathbf{A} et \mathbf{E} . Cette action est en fait la translation à gauche : soient f et g dans \mathcal{A} , nous avons $f.(g.\mathbf{E}) = (f \circ g).\mathbf{E}$.

$\text{End}(M)$: semi-groupe des endomorphismes d'une variété M .

$\text{End}[\mathbb{K}^2]$: semi-groupe des endomorphismes polynomiaux de \mathbb{K}^2 .

$\langle f_S \rangle$: groupe engendré par la famille f_S .

$$\mathbf{D} = \{(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}.$$

$$\mathbf{D}_1 = \{(x, y) \mapsto (\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}.$$

$$\mathbf{D}_2 = \{(x, y) \mapsto (x, \beta y) \mid \beta \in \mathbb{C}^*\}.$$

$$d_{\alpha, \beta} : (x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y), \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$

$$\mathbf{T} = \{(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

$$\mathbf{T}_1 = \{(x, y) \mapsto (x + \alpha, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

$$T_2 = \{(x, y) \mapsto (x, y + \beta) \mid \beta \in \mathbb{C}\}.$$

$$t_{\alpha, \beta} : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$\mathcal{H} = \{\psi \circ g_1 \circ \dots \circ g_m \circ \psi^{-1} \mid \psi \in \mathbf{Aut}[\mathbb{C}^2], g_i : (x, y) \mapsto (y, P_i(y) - \delta_i x), \delta_i \neq 0, \deg P_i \geq 2\}$. Les éléments de \mathcal{H} seront dits de type HÉNON.

$\mathbf{Aut}(S, \mathcal{F})$: groupe des transformations biholomorphes laissant le feuilletage \mathcal{F} invariant sur la surface projective S .

$\mathbf{Bir}(M)$: groupe des transformations birationnelles de la variété algébrique M .

$\mathbf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$: groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe, encore appelé groupe de CREMONA. Le Théorème de NETHER (*voir* [2, 3]) assure que $\mathbf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est engendré par $\mathbf{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \mathbf{PGL}_3(\mathbb{C})$ et l'involution de CREMONA $\sigma : (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$; autrement dit tout élément de $\mathbf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ s'écrit comme le produit de transformations birationnelles quadratiques modulo un élément de $\mathbf{PGL}_3(\mathbb{C})$.

$\mathbf{Bir}(S, \mathcal{F})$: groupe des transformations birationnelles laissant le feuilletage \mathcal{F} invariant sur la surface projective S .

F_m : m -ième surface de HIRZEBRUCH, $m \geq 2$. Le groupe d'automorphismes d'une surface de HIRZEBRUCH est donné par

$$\left\{ \left(\frac{\alpha x + f(y)}{(cy + d)^m}, \frac{ay + b}{cy + d} \right) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{PGL}_2(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}^*, f \in \mathbb{C}[y], \deg f \leq m \right\}.$$

Un élément f de $\mathbf{Aut}(F_m)$ permute les fibres de la fibration $y = \text{cte}$ donc un induit un isomorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *i.e.* un élément ν_f de $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$. Notons π le morphisme qui à f associe ν_f .

J : groupe des transformations birationnelles qui laissent la fibration $y = \text{cte}$ appelé groupe de JONQUIÈRES. Tout sous-groupe maximal de $\mathbf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ fixant une fibration rationnelle donnée est birationnellement conjugué à J . Tout élément f de J permute les fibres de la fibration $y = \text{cte}$ donc induit un isomorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *i.e.* un élément ν_f de $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$. Nous notons encore π le morphisme qui à f associe ν_f .

$\psi(a, b, c, d, \nu(y))$ désigne l'élément $\left(\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + d(y)}, \nu(y) \right)$ du groupe de JONQUIÈRES avec a, b, c, d dans $\mathbb{C}(y)$ et ν dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$.

$$J_a = \{(x, y) \mapsto (x + a(y), y) \mid a \in \mathbb{C}(y)\}.$$

$$E_n^{(2)} = \{(x, y) \mapsto (x + P(y), y) \mid P \in \mathbb{C}[y], \deg P \leq n\}.$$

$J_m = \{(x, y) \mapsto (a(y)x, y) \mid a \in \mathbb{C}(y)^*\}$.

$J_F = \left\{ (x, y) \mapsto \left(\frac{a(y)x + F(y)}{x + a(y)}, y \right) \mid a \in \mathbb{C}(y) \right\}$, F dans $\mathbb{C}(y)$ fixé, F n'étant pas un carré.

$I_B = \left\langle (-x, y), \left(\frac{1}{B(y)x}, y \right) \right\rangle$, B désignant un élément fixé de $\mathbb{C}(y)^*$.

$I_C^F = \left\langle \left(\frac{F(y)}{x}, y \right), \left(\frac{C(y)x - F(y)}{x - C(y)}, y \right) \right\rangle$ où C, F sont des éléments fixés de $\mathbb{C}(y)$, F n'étant pas un carré.

$\text{Rat}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$: semi-groupe des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

$(e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$: générateurs de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$.

$\Gamma_n(q) = \langle e_{ij}^q \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle$: sous-groupe de congruence de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$.

$\mathcal{H}_k = \langle f, g, h \mid [f, h] = [g, h] = \text{id}, [f, g] = h^k \rangle$: k -groupe de HEISENBERG.

$\text{Ind}(f)$: lieu d'indétermination d'une transformation birationnelle f .

$\text{Exc}(f)$: lieu des courbes contractées d'une transformation birationnelle f .

$\lambda(f)$: premier degré dynamique d'une transformation birationnelle f .

RÉFÉRENCES

- [1] *Algebraic surfaces*. By the members of the seminar of I. R. Šafarevič. Translation edited, with supplementary material, by K. Kodaira and D. C. Spencer. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 75 (1965), American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.
- [2] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [3] J. W. ALEXANDER. On the factorization of Cremona plane transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17(3) :295–300, 1916.
- [4] W. P. BARTH, K. HULEK, C. A. M. PETERS & A. VAN DE VEN. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer-Verlag, Berlin, second edition 2004.
- [5] H. BASS, M. LAZARD & J. P. SERRE. Sous-groupes d'indice fini dans $SL(n, \mathbf{Z})$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (70) :385–392, 1964.
- [6] H. BASS, J. MILNOR & J. P. SERRE. Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (33) :59–137, 1967.
- [7] A. BEAUVILLE. *Surfaces algébriques complexes*. Société Mathématique de France, Paris, 1978. Astérisque, No. 54.
- [8] A. BEAUVILLE. p-elementary subgroups of the Cremona group. *arXiv :math.AG/0502123*.
- [9] N. BOURBAKI. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6.
- [10] E. BRIESKORN & H. KNÖRRER, *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Translated from the German by John Stillwell.
- [11] M. BRIN & G. STUCK, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] G. T. BUZZARD & S. MERENKOV. Maps conjugating holomorphic maps in \mathbb{C}^n . *Indiana Univ. Math. J.*, 52(5) :1135–1146, 2003.
- [13] S. CANTAT. Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes. Thèse, École Normale Supérieure de Lyon, 1999.
- [14] S. CANTAT. Endomorphismes des variétés homogènes. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :237–262, 2003.
- [15] S. CANTAT & C. FAVRE. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :199–235, 2003. Erratum, 582 :229–231, 2005.
- [16] S. CANTAT & S. LAMY. Groupes d'automorphismes polynomiaux du plan. *Preprint*, 2004.

- [17] P. DE LA HARPE. *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [18] P. DE LA HARPE & A. VALETTE. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger), *Astérisque*, (175) :158, 1989.
- [19] J. A. DIEUDONNÉ. *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin, 1971. Troisième édition, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 5.
- [20] J. DILLER & C. FAVRE. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [21] F. ENRIQUES. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano. *Rendic. Acad. dei Lincei*, 2 :468–473, 1893.
- [22] S. FRIEDLAND. Entropy of algebraic maps. In *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, number Special Issue, pages 215–228, 1995.
- [23] S. FRIEDLAND & J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.
- [24] W. FULTON & J. HARRIS. *Representation theory*, volume of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [25] M. Kh. GIZATULLIN. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) :909–970, 1134, 1982.
- [26] P. GRIFFITHS & J. HARRIS. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience, New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [27] H. P. HUDSON. *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press, 1927.
- [28] H. W. E. JUNG. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.* 184 :161–174, 1942.
- [29] S. KANTOR. *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*. Mayer & Mullen, Berlin, 1895.
- [30] A. KATOK & B. HASSELBLATT. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [31] S. LAMY. L’alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.
- [32] G. A. MARGULIS. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [33] M. NAGATA. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32 :351–370, 1960.
- [34] M. S. RAGHUNATHAN. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer-Verlag, New York, 1972. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 68.
- [35] A. RUSSAKOVSKII & B. SHIFFMAN. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3) :897–932, 1997.
- [36] C. L. SIEGEL. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 43 :607–612, 1942.
- [37] R. STEINBERG. Some consequences of the elementary relations in SL_n . In *Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982)*, volume 45 of *Contemp. Math.*, pages 335–350. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

- [38] H. UMEMURA. On the maximal connected algebraic subgroups of the Cremona group. I. *Nagoya Math. J.*, 88 :213–246, 1982.
- [39] W. VAN DER KULK. On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wiskunde (3)*, 1 :33–41, 1953.
- [40] E. B. VINBERG, V. V. GORBATSEVICH & O. V. SHVARTSMAN. Discrete subgroups of Lie groups. In *Lie groups and Lie algebras, II*, volume 21 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–123, 217–223. Springer, Berlin, 2000.
- [41] A. WIMAN. Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. *Math. Ann.*, 48(1-2) :195–240, 1896.
- [42] R. J. ZIMMER. Kazhdan groups acting on compact manifolds. *Invent. Math.*, 75(3) :425–436, 1984.