



**HAL**  
open science

## Sur la géométrie des transferts orbitaux

Jean-Baptiste Caillau

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Caillau. Sur la géométrie des transferts orbitaux. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2006. tel-00125863v1

**HAL Id: tel-00125863**

**<https://theses.hal.science/tel-00125863v1>**

Submitted on 22 Jan 2007 (v1), last revised 13 Jun 2007 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur la géométrie des transferts orbitaux

Jean-Baptiste Caillau

ENSEEIH-IRIT (UMR CNRS 5505)  
Institut National Polytechnique de Toulouse

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches  
présenté le 1er décembre 2006 devant le jury composé de

MM. A. Agrachev                    *Rapporteurs*  
      B. Bonnard  
      J.-M. Coron

MM. J. Baillieul                   *Examineurs*  
      P. Legendre  
      J. Noailles

M. R. Roussarie                  *Président*

À Joseph Noailles

Tous les noms,  
tous les noms ardu, impossibles  
des herbes folles du printemps

Shadô

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>1 Temps minimal</b>	<b>1</b>
1.1 Contrôlabilité . . . . .	1
1.2 Extrémales en sous-riemannien avec dérive . . . . .	4
1.3 Points conjugués, cas régulier . . . . .	7
1.4 Extrémales en mono-entrée affine . . . . .	10
1.5 Points conjugués, cas singulier mono-entrée affine . . . . .	13
<b>2 Énergie minimale</b>	<b>15</b>
2.1 Moyennation . . . . .	15
2.2 Problèmes sous-riemanniens périodiques . . . . .	17
2.3 Intégrabilité et courbure du moyenné . . . . .	19
2.4 Analyse dans les demi-plans méridiens . . . . .	22
2.5 Points conjugués, analyse globale . . . . .	27

# Introduction

Ce mémoire est une synthèse des travaux référencés en fin de document et consacrés au contrôle optimal des transferts orbitaux. Le modèle est l'équation de Kepler contrôlée,

$$\ddot{q} = -\frac{q}{|q|^3} + F, \quad q \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\},$$

où  $q$  est la position dans un référentiel fixe  $(i, j, k)$  de l'objet (assimilé à un point matériel) que l'on souhaite contrôler, et où  $F$  est le contrôle que l'on exerce. Il s'agit en pratique de la poussée du moteur d'un engin spatial, limitée par une contrainte du type

$$|F| \leq F_{\max}.$$

On donne ici le modèle sous sa forme la plus simple : outre le fait qu'on a, sans perte de généralité, normalisé la constante de gravitation traduisant l'origine du champ central, on a entre autres approximations supposé la masse de l'objet contrôlé constante. Les modèles plus réalistes utilisés dans les simulations numériques dont sont tirés certains des résultats qui seront présentés prennent évidemment en compte les variations de cette masse (dus, par exemple, à la consommation de carburant). Pour des valeurs appropriées de la position et de la vitesse, la trajectoire libre est une ellipse ou *orbite*. Le problème du transfert consiste alors à faire passer l'objet contrôlé d'une orbite initiale à une orbite terminale en minimisant un certain coût. On s'intéressera tout particulièrement au problème du temps minimal, crucial quand la poussée maximale  $F_{\max}$  dont on dispose est très petite.

Si  $q \times \dot{q}$  est non nul, la poussée peut être décomposée dans le repère *tangentiel-normal* selon  $F = u_t F_t + u_n F_n + u_c F_c$  avec

$$F_t = \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \quad F_c = \frac{q \times \dot{q}}{|q \times \dot{q}|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}},$$

et  $F_n = F_c \times F_t$ . Un autre repère local utilisé dans la suite est le repère *radial-orthoradial* dans lequel  $F = u_r F_r + u_{or} F_{or} + u_c F_c$  avec

$$F_r = \frac{q}{|q|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \quad F_{or} = F_c \times F_r.$$

Si la composante  $u_c$  du contrôle est nulle, le système est dit *coplanaire* et reste dans le plan osculateur constant engendré par  $q$  et  $\dot{q}$ . Deux intégrales premières classiques du mouvement libre sont le *moment angulaire*,  $c = q \times \dot{q}$ , et le *vecteur de Laplace*,  $L = -\frac{q}{|q|} + \dot{q} \times c$ . Toujours en supposant le moment angulaire non nul, la trajectoire est circulaire si  $L = 0$ , elliptique (non dégénérée) si  $L \neq 0$  et

si l'énergie  $E = \dot{q}^2/2 - 1/|q|$  est strictement négative. Le *domaine elliptique*  $X$  est en conséquence défini par

$$X = \{(q, \dot{q}) \mid E < 0, c \neq 0\}.$$

On introduit sur ce domaine les coordonnées géométriques [60, 66] qui décrivent l'orbite osculatrice : les trois angles d'Euler du plan osculateur dans le repère  $(i, j, k)$ ,  $\Omega$  (précession ou *longitude du nœud ascendant*),  $i$  (nutation ou *inclinaison*), et  $\omega$  (rotation propre ou *argument du péricentre*), et deux paramètres déterminant la forme de l'ellipse, par exemple  $a$  (demi-grand axe) ou  $P$  (paramètre), et  $e$  (excentricité). La dernière coordonnée est la *longitude*  $l$ , qui permet de repérer la position de l'objet sur l'ellipse. Dans ces coordonnées,

$$X = \{e < 1\} \times \mathbf{S}^1,$$

et la structure de fibré trivial de fibre  $\mathbf{S}^1$  du domaine est claire. Au voisinage des orbites circulaires ou coplanaires, on désingularise les coordonnées en posant

$$\begin{aligned} e_x &= e \cos(\omega + \Omega), & h_x &= \tan(i/2) \cos \Omega, \\ e_y &= e \sin(\omega + \Omega), & h_y &= \tan(i/2) \sin \Omega. \end{aligned}$$

Le *vecteur excentricité*  $(e_x, e_y)$  est colinéaire à  $L$ , et  $(h_x, h_y)$  dirige l'intersection du plan osculateur avec le *plan équatorial*  $(i, j)$ .

La présentation des résultats est organisée en deux chapitres : le premier est consacré au temps minimal, le second à la moyennation du problème de la minimisation de l'énergie. L'action du contrôle peut être considérée comme la perturbation d'un système intégrable, perturbation dont la moyennation fournit une approximation dont on vérifie qu'elle est encore intégrable.

Un objet fondamental dans l'étude est l'application exponentielle définie par le flot extrémal du problème de contrôle. Ses propriétés renseignent sur l'existence de solution, ainsi que sur l'optimalité locale ou globale des extrémales du problème. Parmi les résultats obtenus, on peut citer la mise en évidence de l'existence de  $\Pi$ -singularités et de points conjugués en temps minimal, la platitude de la métrique associée par la moyennation au transfert à énergie minimale vers les orbites circulaires (les trajectoires optimales sont des droites), ainsi que la caractérisation du lieu de coupure du moyenné par comparaison avec la restriction de la métrique plate à un ellipsoïde de révolution.

# Remerciements

L'enseignement et la confiance de Joseph Noailles, professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, sont à l'origine de cette étude. Ce mémoire lui est dédié.

Les deux rapporteurs externes de ce travail sont Andrei Agrachev, professeur à l'International School for Advanced Studies, et Jean-Michel Coron, professeur à l'Université Paris-Sud. Qu'ils reçoivent l'expression de ma gratitude pour leur soutien.

Mes remerciements vont également à John Baillieul, professeur à l'Université de Boston, qui a accepté d'être examinateur de cette habilitation, et à Robert Roussarie, professeur à l'Université de Bourgogne, qui en a présidé le jury.

Le Centre National d'Études Spatiales est un partenaire privilégié de l'équipe Algorithmes Parallèles & Optimisation de l'ENSEEIHHT depuis de nombreuses années. Que les personnes avec qui nous avons travaillé, représentées dans ce jury par Paul Legendre, soient remerciées.

Enfin et surtout, merci Bernard.

# Chapitre 1

## Temps minimal

### 1.1 Contrôlabilité

En coordonnées cartésiennes,  $\dot{x} = F_0(x) + F$  avec  $x = (q, \dot{q})$ ,  $F_0 = \dot{q}\partial/\partial q - q/|q|^3\partial/\partial\dot{q}$ ,  $F$  étant la poussée. Cette dernière peut être décomposée dans l'un des repères locaux, tangentiel-normal ou radial-orthoradial. On peut ensuite se restreindre à une seule direction de poussée et considérer le système mono-entrée affine  $\dot{x} = F_0(x) + uF_1(x)$ . Le calcul de l'algèbre de Lie correspondante,  $\text{Lie}\{F_0, F_1\}$ , permet de comprendre l'action spécifique de chaque moteur, sachant que l'on peut avoir en pratique des contraintes astreignant par exemple la poussée à rester dans un cône (voir [38] pour le cas où ce cône est dirigé par la vitesse). L'effet d'une force opposée à  $F_t$  et d'intensité proportionnelle à  $\rho\dot{q}^2$  – où  $\rho$  est la densité de l'atmosphère – traduit par ailleurs classiquement une force de *traînée* en mécanique spatiale. Dans ce qui suit, l'orbite d'un point est la variété intégrale associée à la distribution involutive engendrée par les deux champs de vecteurs choisis.

Dans le cas d'une poussée dirigée selon  $F_t$ , on a un système coplanaire et on note  $r = |q|$ ,  $v = \dot{q} = (v_1, v_2)$ . Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs est le commutateur  $[X, Y] = XY - YX$ . Dans la mesure où les trajectoires singulières qu'on calculera au 1.4 sont feedback-invariantes [28], on pose  $u' = u/|v|$  et on réécrit le système sous la forme

$$\dot{x} = F_0(x) + u'F'_t(x)$$

avec  $F'_t = v\partial/\partial v$ . On obtient

$$\begin{aligned} [F_0, F'_t] &= -v\frac{\partial}{\partial q} - \frac{q}{r^3}\frac{\partial}{\partial v}, \\ [F'_t, [F_0, F'_t]] &= -F_0, \\ [F_0, [F_0, F'_t]] &= \frac{2q}{r^3}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{2}{r^5}((2q_1^2 - q_2^2)v_1 + 3q_1q_2v_2)\frac{\partial}{\partial v_1} \\ &\quad + \frac{2}{r^5}(3q_1q_2v_1 + (2q_2^2 - q_1^2)v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}, \end{aligned}$$

de sorte que les champs de vecteurs  $F_0$ ,  $F'_t$ ,  $[F_0, F'_t]$ ,  $[F_0, [F_0, F'_t]]$  forment une base puisque  $q \times \dot{q} \neq 0$ . Comme la dérive du système est périodique, le résultat de contrôlabilité en découle [48].



**Proposition 1.** *Le système mono-entrée affine  $\dot{x} = F_0(x) + uF_t(x)$ ,  $|u| \leq 1$  est contrôlable sur le domaine elliptique coplanaire.*

Dans le cas d'une poussée normale,

$$F_n = -\frac{v_2}{|v|} \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{v_1}{|v|} \frac{\partial}{\partial v_2},$$

et on vérifie non seulement que

$$[F_0, F_n] = -\frac{(q \times v) \times v}{|(q \times v) \times v|} \frac{\partial}{\partial q} - v \frac{|q \times v|}{r^3 |v|^3} \frac{\partial}{\partial v},$$

mais aussi que les crochets de longueur trois sont contenus dans  $\text{Vect}\{F_0, F_n\}$ .

**Proposition 2.** *L'orbite d'un point tel que  $q \times \dot{q} \neq 0$  à travers le système  $\dot{x} = F_0(x) + uF_n(x)$ ,  $|u| \leq 1$ , est de dimension trois et formée par l'intersection du domaine elliptique coplanaire avec le plan osculateur  $\{a = a(0)\}$ .*

Concernant la poussée *hors-plan*, dirigée par  $F_c$ , on observe que ni le demi-grand axe ni l'excentricité ne sont contrôlables, le cas  $e = 0$  étant singulier (orbites circulaires). Plus précisément,

$$\begin{aligned} [F_0, F_c] &= -\frac{q \times v}{|q \times v|} \frac{\partial}{\partial q}, \\ [F_0, [F_0, F_c]] &= -\frac{1}{r^3} F_c, \\ [F_c, [F_0, F_c]] &= \frac{(q \times v) \times q}{|q \times v|^2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{(q \times v) \times v}{|q \times v|^2} \frac{\partial}{\partial v}, \\ [F_0, [F_c, [F_0, F_c]]] &= 0, \\ [F_c, [F_c, [F_0, F_c]]] &= -\frac{r^2}{|q \times v|^2} [F_0, F_c] + \frac{q \cdot v}{|q \times v|^2} F_c. \end{aligned}$$

On vérifie (i) que les vecteurs  $F_0$ ,  $F_c$  et  $[F_0, F_c]$  sont indépendants, (ii) que  $F_0$ ,  $F_c$ ,  $[F_0, F_c]$  et  $[F_c, [F_0, F_c]]$  forment une base de  $\text{Lie}\{F_0, F_c\}$  si et seulement si  $L(0) \neq 0$  (où  $L$  est le vecteur de Laplace), et que (iii) l'algèbre de Lie engendrée par le système est de dimension finie égale à trois si  $L(0) = 0$ . On en déduit les orbites correspondantes.

**Proposition 3.** *On considère le système  $\dot{x} = F_0(x) + uF_c(x)$ ,  $|u| \leq 1$ . Si  $L(0) \neq 0$ , l'orbite est de dimension quatre et formée par l'intersection du domaine elliptique avec  $\{a = a(0), e = e(0) \neq 0\}$ . Si  $L(0) = 0$ , l'orbite est de dimension trois et constituée de l'intersection du domaine elliptique avec  $\{a = a(0), e = e(0) = 0\}$ .*

Dans le cas d'une décomposition de la poussée dans le repère local radial-orthoradial, on a

$$\begin{aligned} F_0 &= v \frac{\partial}{\partial q} - q \frac{\mu}{r^3} \frac{\partial}{\partial v}, \\ F_r &= \frac{q}{r} \frac{\partial}{\partial v}, \\ F_{\text{or}} &= \frac{q_2}{r} \frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{q_1}{r} \frac{\partial}{\partial v_2}, \end{aligned}$$

et on introduit comme précédemment le feedback  $u' = u/r$  (et  $F'_r = rF_r$ ,  $F'_{\text{or}} = rF_{\text{or}}$ ). Dans le cas d'une poussée radiale seule, tout d'abord, les crochets de longueur trois sont donnés par

$$\begin{aligned} [F_0, F'_r] &= -q \frac{\partial}{\partial q} + v \frac{\partial}{\partial v}, \\ [F_0, [F_0, F'_r]] &= -(q+v) \frac{\partial}{\partial q} - \frac{q}{r^3} \frac{\partial}{\partial v}, \\ [F'_r, [F_0, F'_r]] &= 2F'_r, \end{aligned}$$

et l'on déduit la description des orbites ci-après.

**Proposition 4.** *Soit  $\dot{x} = F_0(x) + uF_r(x)$ ,  $|u| \leq 1$ . L'algèbre de Lie engendrée par  $F_0$  et  $F_r$  est dimension trois et  $F_0$ ,  $F_r$ ,  $[F_0, F_r]$  forment une base. L'orbite est donnée par l'intersection du domaine elliptique avec le plan osculateur et  $\{P = P(0)\}$  où  $P$  est le paramètre.*

Pour une poussée orthoradiale, enfin, on a

$$\begin{aligned} [F_0, F'_{\text{or}}] &= -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial}{\partial v_2}, \\ [F_0, [F_0, F'_{\text{or}}]] &= 2 \left( -v_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{q_2}{r^3} \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{q_1}{r^3} \frac{\partial}{\partial v_2} \right), \\ [F'_{\text{or}}, [F_0, F'_{\text{or}}]] &= -2F'_r, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_0 &= F'_{\text{or}} \wedge [F_0, F'_{\text{or}}] \wedge [F_0, [F_0, F'_{\text{or}}]] \wedge F_0 = 2(v \wedge q)(|v|^2 + \frac{1}{r}), \\ D_1 &= F'_{\text{or}} \wedge [F_0, F'_{\text{or}}] \wedge [F_{\text{or}}, [F_0, F'_{\text{or}}]] \wedge F_0 = -2r^2 q \cdot v. \end{aligned}$$

On en tire particulier (i) que les vecteurs  $F_0$ ,  $F'_{\text{or}}$ ,  $[F_0, F'_{\text{or}}]$ ,  $[F_0, [F_0, F'_{\text{or}}]]$  forment une base de l'algèbre de Lie engendrée par  $F_0$  et  $F'_{\text{or}}$ , (ii) que  $F_0$ ,  $F'_{\text{or}}$ ,  $[F_0, F'_{\text{or}}]$  et  $[F'_{\text{or}}, [F_0, F'_{\text{or}}]]$  sont linéairement indépendants si et seulement si  $q \cdot v \neq 0$ , c'est-à-dire en dehors des péricentres et apocentres.

**Proposition 5.** *Le système  $\dot{x} = F_0(x) + uF_{\text{or}}(x)$ ,  $|u| \leq 1$  est contrôlable sur le domaine elliptique coplanaire.*

Notons pour finir l'existence de trajectoires temps minimales comme conséquence du théorème de Filippov, quelle que soit la contrainte sur le module de la poussée. En effet, le champ des vitesses est convexe et borné par la contrainte sur le contrôle et le fait que  $q/r^3 \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ , à condition de se restreindre à une boule de sécurité autour de la collision  $q = 0$ .

**Proposition 6.** *Étant donnés deux points du domaine elliptique appartenant à une même orbite du système considéré, soit  $r_1$  la distance à la collision d'une trajectoire les joignant. Il existe alors une trajectoire temps minimale reliant ces deux points et telle que  $|q| \leq r_1$ .*

Une telle trajectoire peut *a priori* posséder des arcs frontières où la contrainte  $|q| \leq r_1$  devient active. On suppose en pratique que ce n'est pas le cas afin d'utiliser la version classique du principe du maximum sans contraintes sur l'état. Une

approche constructive permettant d'obtenir des trajectoires coplanaires admissibles est également possible [38], l'idée de départ étant la remarque suivante : une trajectoire  $(P, e_x, e_y)$  paramétrée par la longitude vérifie la dynamique de Kepler (au sens où il existe un contrôle dont elle soit la réponse) si et seulement si

$$(1/P)' + (e_x/P)' \cos l + (e_y/P)' \sin l = 0,$$

où  $' = d/dl$ .

Les conséquences de la structure des algèbres de Lie qui viennent d'être décrites sur les extrémales des systèmes mono-entrée affines associés sont détaillées au 1.4. On analyse auparavant les extrémales du cas multi-entrée (deux contrôles en coplanaire, trois en non-coplanaire).

## 1.2 Extrémales en sous-riemannien avec dérive

L'ensemble des contrôles admissibles pour le problème du temps minimal du système lisse

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in X, \quad u \in U$$

où  $X$  est une variété de dimension  $n$ ,  $U$  une variété (éventuellement avec bord) de dimension  $m$ , est l'ensemble des (classes de) fonctions localement (essentiellement) bornées à valeurs dans  $U$ ,

$$\mathcal{U} = \{u \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbf{R}) \mid u \in U \text{ p.p.}\}.$$

Étant données des extrémités fixées  $x_0, x_f$ , et un contrôle optimal  $u$  de temps minimal  $t_f$  et de réponse  $x$ , le principe du maximum assure l'existence d'une paire non triviale  $(p^0, p)$  où  $p^0$  est une constante négative et  $p$  une fonction absolument continue telle que, si on définit le (pseudo) hamiltonien du problème (paramétré par  $p^0$ ) sur  $T^*X \times U$  par

$$H(x, p, u) = p^0 + \langle p, f(x, u) \rangle,$$

on a, presque partout sur  $[0, t_f]$ , d'une part

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u),$$

d'autre part

$$H(x, p, u) = \max_{v \in U} H(x, p, v).$$

L'homogénéité en  $(p^0, p)$  conduit à normaliser le couple soit par  $p^0 = -1$  si  $p^0 \neq 0$  (extrémale *normale*), soit par  $|p(0)| = 1$  si  $p^0 = 0$  (extrémale *anormale*). On dispose en temps minimal d'une condition supplémentaire qui fixe le niveau du hamiltonien le long de l'extrémale :  $H = 0$  (de sorte qu'on peut aussi fixer  $|p(0)|$  à un dans le cas normal).

On appelle problème *sous-riemannien avec dérive* le problème du temps minimal pour un système lisse de la forme

$$\dot{x} = F_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i F_i(x)$$

où  $u$  appartient à  $U = \mathbf{B}^{m-1}$ , la boule unité de  $\mathbf{R}^m$ , avec  $m$  au moins égal à deux (si  $m = 1$ ,  $\partial U = \{-1, 1\}$  n'est pas lisse, et on a un problème affine mono-entrée, voir 1.4). Le problème du transfert en temps minimal appartient clairement à cette classe. On définit alors le relèvement hamiltonien de chaque champ de vecteurs,

$$H_i = \langle p, F_i(x) \rangle, \quad i = 0, \dots, m,$$

et on note  $\Sigma$  la *surface de commutation*

$$\Sigma = \{H_1 = \dots = H_m = 0\}.$$

La classification des extrémales se fait selon l'ordre du contact avec la surface de commutation [41], ce qui revient à stratifier cette dernière. Soit donc  $z_0 = (x_0, p_0)$  n'appartenant pas à  $\Sigma$  (contact d'ordre zéro) : la condition de maximisation du hamiltonien  $H = p^0 + H_0 + \sum_{i=1}^m u_i H_i$  implique que

$$u_i = \frac{H_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m H_i^2}}, \quad i = 1, \dots, m$$

au voisinage du point. En injectant le feedback dynamique ainsi défini dans le hamiltonien, on forme le *vrai hamiltonien* (encore noté  $H$ ) sur  $T^*X$ ,

$$H = p^0 + H_0 + \left( \sum_{i=1}^m H_i^2 \right)^{1/2},$$

dont les extrémales d'ordre zéro sont des courbes intégrales contenues dans le niveau nul. Si  $(z, u)$  est une telle paire extrémale associée au temps minimal  $t_f$  (on note  $z = (x, p)$ ), le principe du maximum dit que l'application *entrée-sortie* définie sur un voisinage de  $u$  dans  $L^\infty([0, t_f], \mathbf{S}^{m-1})$  par

$$E_{x_0, t_f} : u \mapsto x(t_f, x_0, u)$$

est lisse et admet  $u$  comme point critique.

Supposant la distribution  $\mathcal{D} = \text{Vect}\{F_1, \dots, F_m\}$  involutive, on remarque que les  $H_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  le long d'une extrémale avec

$$\dot{H}_i = \{H_0, H_i\} \text{ sur } \Sigma.$$

Un point  $z_0 \in \Sigma$  est donc un contact d'ordre un s'il appartient à la strate

$$\Sigma_1 = \Sigma \setminus \{\{H_0, H_1\} = \dots = \{H_0, H_m\} = 0\}.$$

On prend  $m = 2$  pour analyser le comportement des extrémales au voisinage d'un tel point, l'étude s'étendant directement en dimension supérieure. Avec l'éclatement en polaires

$$H_1 = \rho \cos \varphi, \quad H_2 = \rho \sin \varphi,$$

on obtient le système en  $(\rho, \varphi)$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \cos \varphi \{H_1, H_0\} + \sin \varphi \{H_2, H_0\}, \\ \dot{\varphi} &= 1/\rho \left( -\sin \varphi \{H_1, H_0\} + \cos \varphi \{H_2, H_0\} \right). \end{aligned}$$

Le système s'intègre dans le nouveau temps  $d\tau = dt/\rho$ , et les extrémales qui traversent  $\Sigma$  sont obtenues en résolvant  $\dot{\varphi} = 0$ .

**Proposition 7.** *Il existe des extrémales obtenues par concaténation de deux extrémales d'ordre zéro. Au point de contact sur la surface de commutation, le contrôle tourne instantanément d'un angle  $\pi$ .*

Au voisinage d'un tel point, appelé  $\Pi$ -singularité, on peut utiliser un modèle nilpotent pour estimer la complexité de l'exponentielle. On est en dimension quatre, et un modèle avec des crochets de longueur supérieure à trois tous nuls est

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 + x_3, & \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= u_1, & \dot{x}_4 &= u_2.\end{aligned}$$

On vérifie que l'ensemble  $\Lambda$  des valeurs initiales de l'état adjoint qui donnent lieu à des commutations est stratifié selon

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup (\Lambda_2^1 \cup \Lambda_2^2)$$

où  $\Lambda_1 = \{p_1 \neq 0, p_2 \neq 0, p_1 p_4 - p_2 p_3 = 0\}$  est la quadrique (codimension un) depuis laquelle les deux composantes de la fonction de commutation s'annulent simultanément, et  $\Lambda_2^1 = \{p_1 = p_3 = 0, p_2 \neq 0\}$ ,  $\Lambda_2^2 = \{p_2 = p_4 = 0, p_1 \neq 0\}$ , qui sont des réunions disjointes de demi-plans (codimension deux) depuis lesquels l'une des composantes est identiquement nulle et l'autre avec un seul zéro. Sur  $\Lambda_1$ , intégrer le modèle nilpotent revient à intégrer

$$\dot{\xi} = \frac{t - \delta}{\sqrt{t^2 + \delta^2}}$$

où  $\delta = (p_4/p_2 - p_3/p_1)/2$  est la demi-distance entre les deux pôles, et la singularité de l'exponentielle en  $\delta = 0$  est du type

$$\xi_t(\delta) = \sqrt{t^2 + \delta^2} - |\delta|(\operatorname{arcsch} \frac{t}{\delta} + 1) + \text{cte},$$

*i.e.* du type  $\delta \log |\delta|$ . On a continuité mais pas différentiabilité. On vérifie de même sur  $\Lambda_2^1$  (et symétriquement sur  $\Lambda_2^2$ ) que l'intégration porte sur

$$\dot{\xi} = \frac{t - \sigma}{|t - \sigma|}$$

où  $\sigma = p_3/p_1$  est l'unique racine de la première composante de la fonction de commutation, et on a le même type de régularité. Les singularités rencontrées ne posent pas de problème à un intégrateur différentiel classique, pas plus qu'à une méthode de Newton, les points critiques du flot (et donc de la fonction de tir, *cf.* 1.3) étant localisées sur des sous-variétés de codimension non nulle.

L'application au transfert est immédiate, en coplanaire (deux entrées) ou non-coplanaire (trois entrées), puisque dans les deux cas la distribution  $\mathcal{D}$  est involutive et que l'analyse du 1.1 implique que  $\Sigma = \Sigma_1$ . Les contacts sont d'ordre au plus un, et on ne peut avoir de trajectoire *singulière* (contact d'ordre infini). Les seules commutations possibles sont des  $\Pi$ -singularités, en nombre fini sur tout compact. On peut également obtenir une majoration globale sur le nombre de commutations consécutives aux péricentres ou apocentres [2].

### 1.3 Points conjugués, cas régulier

L'objectif étant d'analyser l'optimalité des extrémale d'ordre zéro définies au 1.3, on suppose dans la suite que le domaine de contrôle  $U$  du problème temps minimal du système

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in X, \quad u \in U,$$

est une variété sans bord, si bien que la condition nécessaire locale de maximisation du hamiltonien s'écrit

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

dans une carte. Cette maximisation révèle en général la *compétition entre plusieurs hamiltoniens* décrite dans [41]. L'analyse micro-locale qui en résulte peut être effectuée comme suit sous l'hypothèse de *régularité* de la paire extrémale de référence (condition forte de Legendre) :

**(H1)** Le hessien  $\partial^2 H / \partial u^2$  est défini négatif le long de l'extrémale de référence.

Alors, on tire au voisinage de cette extrémale le maximiseur global du hamiltonien comme une fonction à paramètres de  $x$  et  $p$ ,  $u(x, p)$ , ce qui permet comme au 1.2 (la condition revient dans le cas du transfert à supposer l'extrémale d'ordre zéro) de définir le vrai hamiltonien (toujours paramétré par  $p^0$ ) selon

$$H(x, p) = H(x, p, u(x, p)).$$

La condition de Legendre est une condition classique d'optimalité  $L^\infty$ -locale [22, 63]. La notion de temps conjugué, qui étend au contrôle optimal le théorème de Jacobi du riemannien [37] permet de préciser jusqu'où cette optimalité est préservée.

On définit l'application exponentielle dans le cas normal (plus généralement, voir [6]).

**(H2)** L'extrémale de référence est normale.

On pose  $p^0 = -1$ , et on définit  $\exp_{x_0, t} : \Lambda_0 \rightarrow X$  par

$$\exp_{x_0, t}(p_0) = x(t, x_0, p_0)$$

pour  $(t, p_0)$  dans un voisinage de  $(t_f, p(0))$ , avec  $\Lambda_0$  égal à (un ouvert de)  $T_{x_0}^* X \cap \{H = 0\}$  (et on suppose que 0 est une valeur régulière de  $H(x_0, \cdot)$ ).

**Définition 1.** L'instant  $t_c$  est dit *conjugué* (à  $t = 0$ ) le long de l'extrémale de référence si  $\exp_{x_0, t_c}$  n'est pas une immersion en  $p(0)$ . La valeur critique correspondante,  $x(t_c)$ , est appelée *point conjugué* (à  $x_0$ ). Quand il existe, le premier temps (*resp.* point) conjugué le long de l'extrémale est noté  $t_{1c}$  (*resp.*  $x_{1c}$ ).

L'existence d'un tel instant traduit l'apparition le long de l'extrémale de référence d'un noyau non-trivial de la dérivée seconde intrinsèque de l'application entrée-sortie pour ce temps et évaluée en le contrôle de référence. Une condition suffisante pour garantir que les temps conjugués sont isolés le long de l'extrémale est que le contrôle soit une singularité de corang un de l'application entrée-sortie sur tout intervalle inclus dans  $[0, t_f]$ .

**(H3)** Quels que soient  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_f$ ,  $\text{codim Im } dE_{x(t_1), t_2 - t_1}(u) = 1$ .

**Théorème 1.** [63] *Sous les hypothèses précédentes, le contrôle de référence est  $L^\infty$ -localement optimal jusqu'au premier temps conjugué, plus  $L^\infty$ -localement optimal après.*

L'analyse faite le long de l'extrémale de référence s'étend à toutes les extrémales générées par les  $p_0$  dans  $\Lambda_0$ . On définit en particulier le *lieu conjugué*  $C(x_0)$  comme l'ensemble des premiers points conjugués. Il s'agit d'après ce qui précède du lieu des points où les extrémales perdent leur optimalité  $L^\infty$ -locale. On définit également le *lieu de coupure*,  $\text{Cut}(x_0)$ , comme le lieu des points après lesquels une extrémale perd son optimalité globale.

Dans le cas sous-riemmanien avec dérive examiné au 1.2,  $H = p^0 + H_r$  où

$$H_r = H_0 + \left( \sum_{i=1}^m H_i^2 \right)^{1/2}$$

est le hamiltonien *réduit*. Quitte à remplacer  $T^*X$  par une composante connexe de  $T^*X \setminus \Sigma$ , on peut supposer la condition forte de Legendre remplie et  $H_r$  lisse sur  $T^*X \setminus X$ . Dans le cas normal, on est sur le niveau  $\{H_r = 1\}$ , et  $H_r$  est homogène sur les fibres de  $T^*X \setminus X$ . Alors, la projection  $\sigma : T^*X \setminus X \rightarrow \mathbf{S}(T^*X)$  sur le cotangent sphérique (fibré des éléments de contact orientés) induit un difféomorphisme local qui transfère sur  $\{H_r = 1\}$  la structure de contact de  $\mathbf{S}(T^*X)$ . En particulier, quitte à restreindre  $\Lambda_0$ , on a  $\sigma|_{\Lambda_0}$  difféomorphisme sur un ouvert de la fibre  $\mathbf{S}(T_{x_0}^*X)$ , et  $\Lambda_0$  est une sous-variété legendrienne. On désigne par  $\vec{H}$  le gradient symplectique du hamiltonien.

**Proposition 8.** [25] *Soit  $\Lambda_t = \exp t\vec{H}(\Lambda_0)$  l'image de  $\Lambda_0$  par le groupe à un paramètre généré par  $\vec{H}$ . Alors,  $\Lambda_t$  est une sous-variété legendrienne du niveau  $\{H = 0\}$ .*

Le *front d'onde*  $W(x_0, t)$  est la projection  $\Pi(\Lambda_t)$  sur  $X$ ,  $\Pi : T^*X \rightarrow X$  étant la projection canonique sur la base. Par définition de l'exponentielle, les points conjugués sont les valeurs critiques des restrictions de la projection aux  $\Lambda_t$ , et on dispose de la classification des singularités génériques dans ce cas (singularités legendriennes, cf. [24]).

On peut renforcer les conclusions du théorème d'optimalité précédent à l'aide de la notion de champ central (*field of extremals*, cf. [22]). En effet, sous les hypothèses de Legendre et de normalité, on sait (en supposant qu'on n'a pas un point d'équilibre à l'origine,  $f(x_0, u(x_0, p(0))) \neq 0$ ) que l'extrémale de référence est  $\mathcal{C}^0$ -localement optimale en temps petit [52]. Comme précédemment, la notion de temps de conjugué permet de préciser jusqu'où cette optimalité est préservée. On suppose dans ce qui suit la trajectoire de référence injective.

**Proposition 9.** *Soit  $L_0$  la fibre  $T_{x_0}^*X$ , et soit  $L_t = \exp t\vec{H}(L_0)$  son image par le groupe à un paramètre généré par  $\vec{H}$ . Alors,  $L_t$  est une sous-variété lagrangienne de  $T^*X$ .*

La restriction de  $\Pi$  à  $L_t$  est de rang au plus  $n - 1$ . On pose

$$L = (\cup_{t \geq 0} L_t) \cap \{H = 0\}.$$

**Proposition 10.** *La sous-variété  $L$  est lagrangienne et, en l'absence de point conjugué le long de l'extrémale de référence, la projection  $\Pi$  restreinte à  $L$  est*

régulière le long de l'extrémale. La projection de  $L$  sur  $X$  s'appelle dans ce cas un champ central.

La projection possède en général des singularités sur  $L$  (singularités lagrangiennes, cf. [24]) et l'ensemble des valeurs critiques définit la *caustique*, qui contient le lieu conjugué. Dans la configuration champ central, il existe une fonction génératrice  $g$  telle que, localement,  $L$  soit le graphe  $\{p = dg(x)\}$ .

**Théorème 2.** *En l'absence de point conjugué le long de l'extrémale de référence, il existe un voisinage ouvert  $V$  de la trajectoire (extrémité initiale exclue) et deux applications lisses,  $g : V \rightarrow \mathbf{R}$  et  $\hat{u} : V \rightarrow U$ , telles que pour tout  $(x, u)$  dans  $V \times U$ ,*

$$0 = H(x, dg(x), \hat{u}(x)) \geq H(x, dg(x), u),$$

et la trajectoire de référence est  $\mathcal{C}^0$ -localement optimale.

L'analyse ci-avant montre que la fonction de tir

$$S : (t, p_0) \mapsto \exp_{x_0, t}(p_0) - x_f$$

est définie, lisse et de rang plein sur un voisinage de  $(t_f, p(0))$ , la dynamique du système étant transverse aux sous-variétés  $L_t$ .

Le calcul pratique de points conjugués utilise la description des espaces tangents aux  $L_t$  à l'aide des champs de Jacobi.

**Définition 2.** On appelle *champ de Jacobi* une solution non-triviale  $\delta z = (\delta x, \delta p)$  de l'équation aux variations le long de l'extrémale de référence,

$$\delta \dot{z} = d\vec{H}(z(t))\delta z.$$

Le champ est dit *vertical* en  $t$  si  $\delta x(t)$  est nul.

Une conséquence de la définition est que les champs de Jacobi verticaux à l'origine engendrent à l'instant  $t$  l'espace tangent à  $L_t$  en  $z(t)$ . On en déduit les deux premiers tests équivalents.

**Test 1.** Soient  $\delta z_1, \dots, \delta z_n$  des champs de Jacobi qui forment une base de  $T_{z(0)}L_0$  en  $t = 0$ ,  $t_c$  est un instant conjugué si et seulement si

$$\text{rang}\{\delta x_1(t_c), \dots, \delta x_n(t_c)\} < n - 1.$$

**Test 2.** Soient  $\delta z_1, \dots, \delta z_{n-1}$  des champs de Jacobi qui forment une base de  $T_{z(0)}\Lambda_0$  en  $t = 0$ ,  $t_c$  est un instant conjugué si et seulement si

$$\text{rang}\{\delta x_1(t_c), \dots, \delta x_{n-1}(t_c)\} < n - 1.$$

La transversalité de la dynamique permet d'écrire un troisième test.

**Test 3.** Soient  $\delta z_1, \dots, \delta z_{n-1}$  des champs de Jacobi qui forment une base de  $T_{z(0)}\Lambda_0$  en  $t = 0$ ,  $t_c$  est un instant conjugué si et seulement si

$$\delta x_1(t_c) \wedge \dots \wedge \delta x_{n-1}(t_c) \wedge \dot{x}(t_c) = 0.$$

Les tests 1 (ou 2) et 3 sont complémentaires dans la mesure où le rang peut être évalué dans les deux premiers cas en estimant à chaque instant la plus petite



valeur singulière  $\sigma_{n-1}(t)$  de la famille des champs de Jacobi, et où on est ramené à une équation scalaire dans le troisième. Calculer une valeur singulière est meilleur en temps petit puisqu'on découple ce faisant  $\sigma_{n-1}$  des autres valeurs singulières, toutes nulles à l'origine, et responsable donc de la très faible magnitude du déterminant du test 3 au voisinage de  $t = 0$ , déterminant dont l'ordre de grandeur est déterminé par le produit de ces valeurs singulières. Réciproquement, on ne peut détecter de zéro par changement de signe sur  $\sigma_{n-1}$  qui est toujours positive, alors que c'est génériquement possible sur le déterminant. Les deux tests sont réalisés par le code de calcul décrit dans [6], les champs de Jacobi étant eux évalués par intégration du système extrémal augmenté de son linéarisé.

L'application au transfert orbital est illustrée par les figures 1.1 et 1.2. Le modèle utilisé est non-coplanaire à masse variable, voir [4, 6]. Le calcul de point conjugué effectué assure l'optimalité locale des extrémales déterminées antérieurement [42, 53, 21]. Il montre aussi l'existence de points conjugués quand la longitude (cumulée, cf. 1.1) finale est fixée (il faut sinon introduire la notion de *point focal* [28]), ce qui confirme l'importance du test et conduit à raffiner l'étude à l'aide de l'approximation riemannienne du chapitre 2.

## 1.4 Extrémales en mono-entrée affine

Étant donné le système mono-entrée affine

$$\dot{x} = F_0(x) + uF_1(x), \quad x \in X, \quad |u| \leq 1,$$

on procède comme au 1.2 à la classification des extrémales [51] selon l'ordre de leur contact avec la surface de commutation  $\Sigma = \{H_1 = 0\}$  (qu'on suppose être une sous-variété de codimension un). La fonction de commutation  $\Phi$  le long de l'extrémale de référence est notée  $\Phi_+$  ou  $\Phi_-$  selon que le contrôle vaut plus ou moins un. On différentie deux fois,

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_+ &= \dot{\Phi}_- = \{H_0, H_1\}, \\ \ddot{\Phi}_\pm &= \{H_0, \{H_0, H_1\}\} \pm \{H_1, \{H_0, H_1\}\}, \end{aligned}$$

et on traite immédiatement le cas où  $z_0$  est un point de contact d'ordre un : si  $z_0$  appartient à  $\Sigma_1 = \Sigma \setminus \{\{H_0, H_1\} = 0\}$ , l'extrémale de référence est transverse à  $\Sigma$  en  $z_0$  et possède localement une seule commutation.

Soit maintenant  $z_0 \in \Sigma \setminus \Sigma_1 = \{H_1 = \{H_0, H_1\} = 0\}$  (qu'on suppose être de codimension deux) un point de contact d'ordre deux (ou *fold*), c'est-à-dire tel que les deux dérivées secondes (*a priori* distinctes) de  $\Phi$  à gauche et à droite de l'instant de commutation soient non nulles :  $\ddot{\Phi}_\pm \neq 0$ . Parmi les trois possibilités qui se présentent alors, la première est le *fold parabolique* où  $\ddot{\Phi}_+$  et  $\ddot{\Phi}_-$  ont même signe. L'extrémale de référence et toutes les extrémales voisines sont localement bang-bang avec au plus deux commutations. Dans le second cas, dit *hyperbolique*, on a  $\ddot{\Phi}_+ > 0$  et  $\ddot{\Phi}_- < 0$ . Nécessairement,  $\{H_1, \{H_0, H_1\}\}(z_0) > 0$ , et par  $z_0$  passe une singulière d'ordre minimal (anormale ou hyperbolique, cf. ci-après). Les extrémales dans un voisinage sont des concaténations d'arcs de la forme  $\gamma_\pm \gamma_s \gamma_\pm$ . Enfin, dans le dernier cas ou cas *elliptique*, on a  $\ddot{\Phi}_+ < 0$  et  $\ddot{\Phi}_- > 0$  en  $z_0$ . Comme dans le cas hyperbolique, une singulière d'ordre minimal passe par  $z_0$ , mais la connection avec un arc  $\pm 1$  est impossible. Les extrémales au voisinage sont bang-bang mais on ne peut pas donner de borne sur le nombre de commutations.

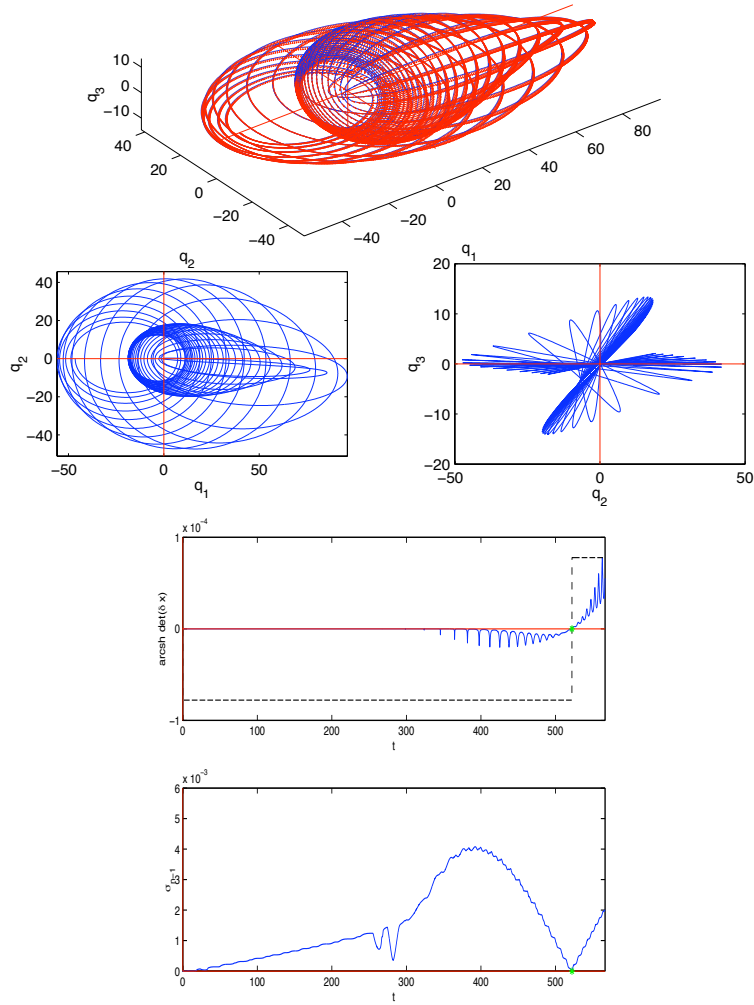


FIG. 1.1 – Un transfert à poussée maximale permise de 6 Newtons. Le temps minimum est d'environ 141.60 heures (soit à peu près 6 jours) pour 7 révolutions autour de la Terre. La trajectoire optimale (avec des projections dans le plan équatorial et dans un plan perpendiculaire pour illustrer comment l'inclinaison est corrigée) est prolongée jusqu'à quatre fois le temps minimum. Sont ensuite représentés le déterminant et la plus petite valeur singulière des champs de Jacobi le long de l'extrémale. Le premier temps conjugué est détecté vers 3.7 fois le temps minimum : l'optimalité (locale) de la trajectoire est donc perdue après environ 522.07 heures.

On décrit pour finir les extrémales *singulières*, associées à un contact d'ordre infini :  $H_1$  identiquement nul le long de l'extrémale. En différentiant comme

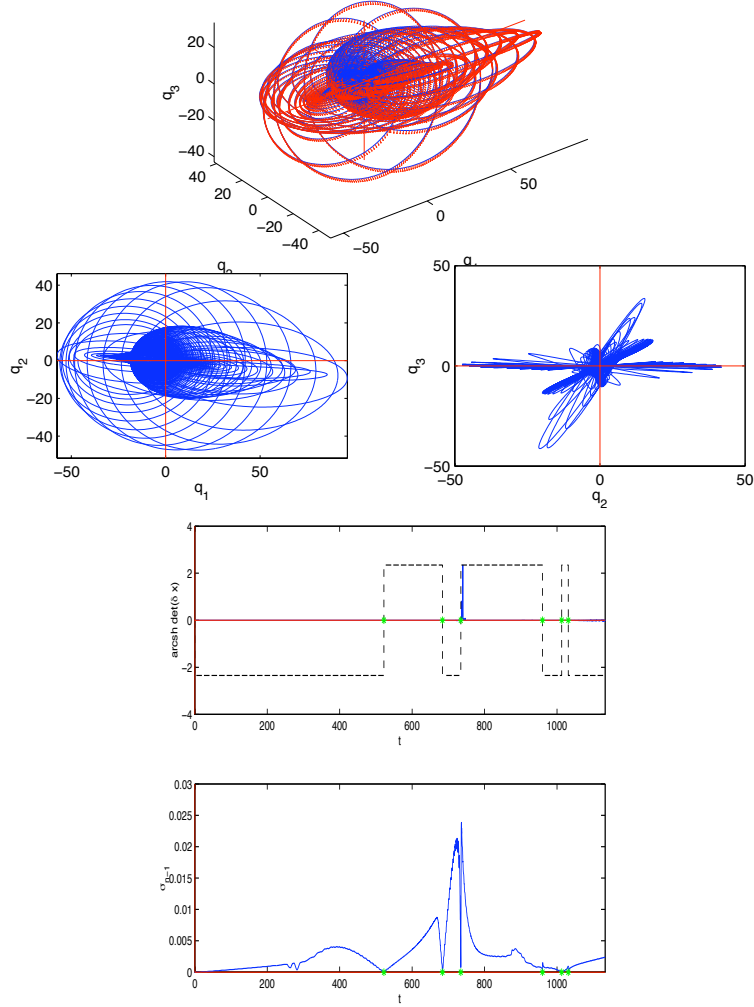


FIG. 1.2 – Le même transfert que Fig. 1.1 prolongé jusqu'à huit fois le temps minimum : six points conjugués sont détectés le long de l'extrémale.

auparavant deux fois, on obtient  $H_1 = \{H_0, H_1\} = 0$  et

$$\{H_0, \{H_0, H_1\}\} + u\{H_1, \{H_0, H_1\}\} = 0.$$

Si  $\{H_1, \{H_0, H_1\}\} \neq 0$ , la singulière est dite *d'ordre minimal* [28] et le feedback dynamique

$$u = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}$$

permet, comme dans le cas régulier du 1.3, de définir le *vrai hamiltonien* par  $H(x, p) = H(x, p, u(x, p))$ . Les extrémales singulières sont ainsi génériquement les courbes intégrales de ce hamiltonien contenues dans  $\Sigma \setminus \Sigma_1$ . On distingue alors

trois cas, selon qu'une telle extrémale est anormale ( $H_0 = 0$ ), ou normale et telle que  $\{H_0, \{H_0, H_1\}\} > 0$  (extrémale *hyperbolique*), ou enfin normale et telle que  $\{H_0, \{H_0, H_1\}\} < 0$  (extrémale *elliptique*). Comme on le rappelle au 1.5, cette sous-classification des singulières est en lien direct avec leur optimalité puisque la condition d'ordre minimal s'interprète, au signe près, comme une condition forte de Legendre.

L'application au transfert orbital est une conséquence de l'analyse de l'algèbre de Lie faite au 1.1 et se trouve résumée ci-après dans le cas des deux directions de poussées pour lesquelles on conserve la contrôlabilité en coplanaire (et en non-coplanaire en rajoutant une poussée hors plan), à savoir la poussée tangentielle et la poussée orthoradiale.

**Proposition 11.** *Soit  $\dot{x} = F_0(x) + uF_t(x)$ ,  $|u| \leq 1$ , le système contrôlé par une poussée tangentielle. Toutes les singulières sont d'ordre minimal elliptiques, et les contacts d'ordre deux sont paraboliques ou elliptiques, pas hyperboliques. De plus, il ne peut y avoir de point de Fuller.*

Les singulières d'ordre minimal elliptiques ne pouvant être temps minimales (cf. 1.5), on en déduit que les trajectoires optimales en mono-entrée tangentiel sont nécessairement bang-bang. C'est le point de départ du travail [38].

**Proposition 12.** *Soit  $\dot{x} = F_0(x) + uF_{or}(x)$ ,  $|u| \leq 1$ , le système contrôlé par une poussée orthoradiale. Alors, toutes les singulières anormales sont d'ordre minimal en dehors des péricentres et apocentres, et le contrôle correspondant vérifie*

$$D_0 + uD_1 = 0.$$

## 1.5 Points conjugués, cas singulier mono-entrée affine

On étudie l'optimalité des singulières du système mono-entrée affine précédent, ce qui revient à l'étudier sans contrainte sur le contrôle (le problème de l'admissibilité du contrôle singulier se posant ensuite). Soit donc  $\dot{x} = F_0(x) + uF_1(x)$ , on rappelle les résultats de [31]. On fait les deux hypothèses suivantes le long de la trajectoire de référence (que l'on suppose lisse et injective) :

(H1)'  $\text{ad}^2 F_1 \cdot F_0$  n'est pas dans  $\text{Vect}\{\text{ad}^k F_0 \cdot F_1, k = 0, \dots, n-2\}$ ,

(H3)'  $\text{Vect}\{\text{ad}^k F_0 \cdot F_1, k = 0, \dots, n-2\}$  est de codimension un.

Sous (H3)', qui est comme (H3) au 1.3 une condition de corang un du contrôle de référence, (H1)' assure que l'extrémale singulière est d'ordre minimal. Avec l'hypothèse supplémentaire que, le long de la trajectoire extrémale,

(H4)'  $F_0$  n'est pas dans  $\text{Vect}\{\text{ad}^k F_0 \cdot F_1, k = 0, \dots, \max\{0, n-3\}\}$ ,

on peut identifier  $F_1$  à  $\partial/\partial x_n$  et mettre le système sous la forme normale

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, x_n), \\ \dot{x}_n &= g(y, x_n) + u. \end{aligned}$$

La *transformation de Goh* consiste alors à considérer le nouveau système  $\dot{y} = f(y, x_n)$ , contrôlé par  $x_n$ . On vérifie en particulier que (H1)' s'interprète, au signe près, comme la condition forte de Legendre sur le nouveau système, et on a le résultat suivant (moyennant la définition idoine de point conjugué faite ensuite).

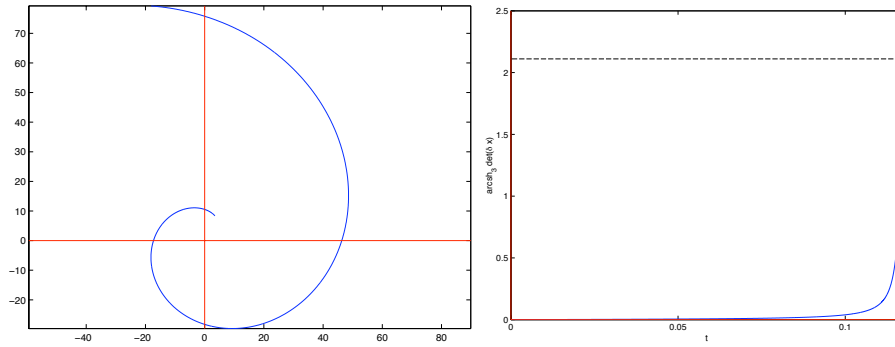


FIG. 1.3 – Une trajectoire anormale (à gauche), qui quitte rapidement le domaine elliptique. Le déterminant (à droite) équivalent au calcul de rang du Test 5 reste strictement négatif, assurant la  $\mathcal{C}^0$ -locale optimalité de la trajectoire.

**Théorème 3.** [31] *Sous les hypothèses précédentes, dans les cas hyperbolique et anormal (resp. elliptique), la trajectoire de référence est  $\mathcal{C}^0$ -localement temps minimisante (resp. maximisante) jusqu'au premier temps conjugué.*

L'état adjoint étant normalisé par  $|p(0)| = 1$ , on donne la définition de point conjugué dans le cas hyperbolique (ou elliptique) puis anormal sous la forme du test de rang correspondant sur les champs de Jacobi du linéarisé associé aux singulières d'ordre minimal.

**Test 4.** Dans le cas hyperbolique (ou elliptique), soient  $n - 2$  champs de Jacobi formant à l'instant initial une base des  $\delta z$  dans  $T_{z(0)}(\mathbf{S}(T_{x_0}^*X) \cap \{H_1 = \{H_0, H_1\} = 0\})$  tels que  $\delta x$  appartienne à  $\mathbf{R}F_1(x_0)$ . Un temps est conjugué si

$$\text{rang}\{\delta x_1(t_c), \dots, \delta x_{n-2}(t_c), F_1(x(t_c))\} < n - 1,$$

ce qui est encore équivalent sous les hypothèses précédentes à

$$\delta x_1(t_c) \wedge \dots \wedge \delta x_{n-2}(t_c) \wedge F_1(x(t_c)) \wedge F_0(x(t_c)) = 0.$$

**Test 5.** Dans le cas anormal, soient  $n - 3$  champs de Jacobi formant à l'instant initial une base des  $\delta z$  dans  $T_{z(0)}(\mathbf{S}(T_{x_0}^*X) \cap \{H_0 = H_1 = \{H_0, H_1\} = 0\})$  tels que  $\delta x$  appartienne à  $\mathbf{R}F_1(x_0)$ . Un temps est conjugué si

$$\text{rang}\{\delta x_1(t_c), \dots, \delta x_{n-3}(t_c), F_1(x(t_c)), F_0(x(t_c))\} < n - 1,$$

ce qui est encore équivalent sous les hypothèses précédentes à

$$\delta x_1(t_c) \wedge \dots \wedge \delta x_{n-2}(t_c) \wedge F_1(x(t_c)) \wedge F_0(x(t_c)) \wedge \text{ad}^2 F_1 \cdot F_0(x(t_c)) = 0.$$

La Fig. 1.3 illustre sur le transfert orbital le test de point conjugué le long de l'extrémale singulière anormale associée au contrôle-feedback dans le cas de la direction de poussée orthoradiale.

## Chapitre 2

# Énergie minimale

### 2.1 Moyennation

On considère le problème de contrôle à données périodiques suivant : minimiser la fonctionnelle  $\int_0^{l_f} f^0(l, x, u) dl$  pour les trajectoires du système

$$\frac{dx}{dl} = f(l, x, u), \quad x \in X, \quad u \in U,$$

avec conditions aux limites et  $l_f$  fixés, sachant que  $f$  et  $f^0$  sont définies sur  $\mathbf{S}^1 \times X \times U$ . À partir du (pseudo) hamiltonien, paramétré par  $p^0$ ,

$$H(l, x, p, u) = p^0 f^0(l, x, u) + \langle p, f(l, x, u) \rangle,$$

on définit le vrai hamiltonien en injectant un feedback dynamique  $u(l, x, p)$  donné par le principe du maximum,  $H(l, x, p) = H(l, x, p, u(l, x, p))$ .

On s'intéresse au système pour les temps grands,  $l$  dans  $[0, l_f]$ , de sorte que le petit paramètre est  $\varepsilon = 1/l_f$ . Avec  $s = \varepsilon l$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial p}(s/\varepsilon, x, p), \quad s \in [0, 1], \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial p}(s/\varepsilon, x, \varepsilon q) \end{aligned}$$

où  $q = p/\varepsilon$ . De même,

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x}(s/\varepsilon, x, p), \quad s \in [0, 1],$$

soit

$$\frac{dq}{ds} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial H}{\partial x}(s/\varepsilon, x, \varepsilon q), \quad s \in [0, 1].$$

On pose donc  $G_\varepsilon(l, x, q) = (1/\varepsilon^2)H(l, x, \varepsilon q)$ ,  $w = (x, q)$ , et on a encore

$$\frac{dw}{ds} = \vec{G}_\varepsilon(s/\varepsilon, w), \quad s \in [0, 1].$$

La fonction coût est traitée de la même manière, selon

$$\frac{dx^0}{ds} = f^0(s/\varepsilon, x, u(s/\varepsilon, x, \varepsilon q)), \quad s \in [0, 1].$$

Le nouvel Hamiltonien  $G_\varepsilon$  dépend en général de  $\varepsilon$ , le cas remarquable étant celui où  $H$  est quadratique en  $p$  : on a alors  $G_\varepsilon = H$ .

Dans ce contexte, la comparaison entre un système  $dx/ds = f(s/\varepsilon, x)$ , où  $f$  est périodique par rapport à sa première variable, et le système moyenné  $dx/dl = \bar{f}(x)$  avec

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(l, x) dl,$$

est légitimée par la remarque que, si  $g$  est une fonction lisse et périodique,  $g(s/\varepsilon)$  converge au sens des distributions vers  $\bar{g}$  : si  $\varphi$  est une fonction test,

$$\begin{aligned} \langle g(s/\varepsilon), \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{2k\pi\varepsilon}^{2(k+1)\pi\varepsilon} f(s/\varepsilon) \varphi(s) ds \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(\tau - 2k\pi) \varphi(\varepsilon\tau + 2k\pi\varepsilon) \varepsilon d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(\varepsilon\tau + 2k\pi\varepsilon) \varepsilon \end{aligned}$$

et la somme de Riemann dans l'intégrande converge vers l'intégrale de  $\varphi$  sur  $\mathbf{R}$ , soit  $g(s/\varepsilon) \rightarrow \bar{g} \cdot 1_{\mathbf{R}}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Plus précisément, on a la convergence uniforme sur un intervalle de longueur  $1/\varepsilon$  de la solution vers celle du moyenné, la condition initiale étant la même, sous les hypothèses standards de [24], puisqu'on peut évidemment réécrire le système non-moyenné précédent sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f(l, x), \quad t \in [0, 1/\varepsilon], \\ \dot{l} &= 1, \end{aligned}$$

avec  $l = s/\varepsilon = t$ . Dans le cas d'un système Hamiltonien,  $\overline{\overline{H}} = \overrightarrow{H}$  de sorte que le calcul du moyenné se fait directement sur  $H$ .

L'équation de Kepler non contrôlée est classiquement intégrable, et le transfert orbital en constitue une perturbation. Mais plutôt que de moyenné les extrémales du temps minimal en utilisant le module de la poussée comme petit paramètre, on suit [40, 42] et on considère la minimisation de la norme  $L^2$  du contrôle (ou *énergie*) à temps final fixé, sans contrainte sur la commande. On note qu'en conséquence des calculs de rang du 1.1, un tel système n'admet pas d'extrémale anormale. La relaxation ainsi effectuée, qui consiste à substituer à un problème sous-riemannien avec dérive dont le temps final est libre et le contrôle contraint, un problème sous-riemannien (périodique) dont le temps final est fixé et le contrôle non contraint, permet au 2.2 le calcul explicite du système hamiltonien moyenné dans le but d'obtenir une approximation intégrable du système hamiltonien de départ.

**Proposition 13.** *Étant donnés deux points du domaine elliptique appartenant à une même orbite du système considéré, soit  $r_1$  la distance à la collision d'une trajectoire les joignant, et soit  $t_f$  supérieur au temps minimal pour la contrainte*

définie par  $r_1$ . Il existe alors, sans contrainte uniforme sur le contrôle, une trajectoire énergie minimale reliant ces deux points en temps  $t_f$  et telle que  $|q| \geq r_1$ .

On a en effet  $|\dot{q}| \leq 1/r_1^2 + |u|$ , et  $\|\dot{q}\|_\infty \leq t_f/r_1^2 + \|u\|_1$ , d'où  $\|(q, \dot{q})\|_\infty \leq \phi(\|u\|_1)$  avec

$$\phi(v) = |q_0| + (1 + t_f) \left( |\dot{q}_0| + \frac{t_f}{r_1^2} + v \right)$$

qui est croissante. On peut par conséquent appliquer la condition suffisante de [54] pour conclure à l'existence de minimiseurs en norme  $L^p$ ,  $p > 1$ . Concernant le cas  $p = 1$  qui correspond à l'important problème de transfert à consommation minimale, on peut conjecturer sur la base des résultats de [46, 43] que l'existence ne subsiste pas sans contrainte sur le contrôle.

Dans la mesure où  $\dot{l} = W^2/P^{3/2}$  ne s'annule pas sur le domaine elliptique coplanaire ( $W = 1 + e_x \cos l + e_y \sin l$ ), on peut reparamétriser les trajectoires par la *longitude cumulée*,  $l \in \mathbf{R}$ , qu'il convient de distinguer de la longitude  $l \in \mathbf{S}^1$ . Les résultats de contrôlabilité du 1.1 sont en particulier obtenus relativement à  $l$  dans  $\mathbf{S}^1$ . Les orbites du système reparamétrisé par la longitude se déduisent des précédentes par projection sur la base du domaine elliptique. En lien avec le phénomène d'incomplétude observé au 2.4 et au 2.5, la singularité  $\dot{l} = 0$  (due, entre autres, au bord parabolique) complique les résultats d'existence à longitude finale fixée et temps final libre.

## 2.2 Problèmes sous-riemanniens périodiques

Soit  $X$  une variété de dimension  $n$ , et soient  $F_1, \dots, F_m$  des champs de vecteurs paramétrés par  $l$  dans  $\mathbf{S}^1$ ,

$$F_i(l, x) \in T_x X, \quad l \in \mathbf{S}^1, \quad x \in X.$$

Soit  $g$  une fonction lisse et strictement positive sur  $\mathbf{S}^1 \times X$ , on définit le problème *sous-riemannien périodique* de minimisation de la fonctionnelle

$$\int_0^{l_f} |u|^2 \frac{dl}{g(l, x)} \rightarrow \min$$

pour le système

$$\frac{dx}{dl} = \frac{1}{g(l, x)} \sum_{i=1}^m u_i F_i(l, x), \quad x \in X, \quad u \in U = \mathbf{R}^m,$$

où les extrémités  $x_0, x_f$  et le temps final  $l_f$  sont fixés. Les extrémales normales du système sont les courbes intégrales du hamiltonien

$$H(l, x, p) = \frac{1}{2g(l, x)} \sum_{i=1}^m H_i^2(l, x, p),$$

avec la notation usuelle  $H_i = \langle p, F_i(l, x) \rangle$  pour les relèvements. Ce hamiltonien étant quadratique en  $p$ , le moyenné est d'après le 2.1 donné par

$$\bar{H}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(l, x, p) dl.$$



Bien clairement,  $\overline{H}$  définit encore une forme quadratique sur les fibres de  $T^*X$  et, sur chacune d'elles,

$$\text{Ker } \overline{H}_x = \bigcap_{l \in S^1} \text{Ker } H_{l,x}$$

de sorte que le rang de la forme moyennée ne peut qu'augmenter. On suppose désormais que ce rang est partout maximum et que  $\overline{H}_x$  définit une structure riemannienne sur le cotangent [45]. Il existe alors  $n$  champs de vecteurs indépendants,  $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$ , tels que le hamiltonien moyenné s'écrit comme une somme de carrés,

$$\overline{H}(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle p, \overline{F}_i(x) \rangle^2,$$

c'est-à-dire comme le hamiltonien du problème Riemannien défini par cette distribution :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{F}_i(x), \quad \int_0^{t_f} |u|^2 dt \rightarrow \min.$$

On peut donc définir une métrique sur  $X$ , unique modulo la réduction de Gauss effectuée sur la forme quadratique moyennée.

Dans le cas du transfert, coplanaire tout d'abord, le résultat de la moyennation en coordonnées  $(P, e_x, e_y)$  est le suivant.

**Proposition 14.** *Le hamiltonien moyenné est calculé à partir des résidus au pôle  $z = (-1 + \sqrt{1 - e^2})/\overline{\mathbf{e}}$  de fractions rationnelles dans  $\mathbf{C}(z, e_x, e_y)$ , où  $\mathbf{e} = e_x + ie_y$  est l'excentricité complexe. On a*

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{P^{5/2}}{4(1 - e^2)^{5/2}} \left[ 4p_P^2 P^2 \left( -3 + \frac{5}{1 - e^2} \right) \right. \\ &+ p_{e_x}^2 (5(1 - e^2) + e_y^2) + p_{e_y}^2 (5(1 - e^2) + e_x^2) \\ &\left. - 20p_P p_{e_x} P e_x - 20p_P p_{e_y} P e_y - 2p_{e_x} p_{e_y} e_x e_y \right]. \end{aligned}$$

*Le hamiltonien moyenné est de rang maximal trois et provient d'une métrique riemannienne.*

Un résultat remarquable dû à [40, 42] est l'existence de *coordonnées orthogonales*.

**Proposition 15.** *En coordonnées  $(n, e, \omega)$  où  $n$  est l'anomalie moyenne,  $P = (1 - e^2)/n^{2/3}$ ,  $\mathbf{e} = e \exp(i\omega)$ , le hamiltonien moyenné s'écrit*

$$\overline{H} = \frac{1}{2n^{5/3}} \left[ 9n^2 p_n^2 + \frac{5}{2}(1 - e^2) p_e^2 + (5 - 4e^2) \frac{p_\omega^2}{2e^2} \right],$$

*et la métrique riemannienne correspondante est*

$$g = \frac{1}{9n^{1/3}} dn^2 + \frac{2n^{5/3}}{5(1 - e^2)} de^2 + \frac{2n^{5/3}}{5 - 4e^2} e^2 d\omega^2.$$

Il est tout aussi remarquable que les mêmes coordonnées soient encore orthogonales pour le hamiltonien moyenné en mono-entrée tangentiel [7, 38]. En

non-coplanaire, la dérivée temporelle de la longitude dépend aussi affinement du contrôle, et une approximation consiste à négliger cette dépendance. Le terme supplémentaire qui résulte de la moyennation de l'action de la poussée hors plan se calcule alors explicitement avec l'approche précédente. Le hamiltonien complet en dimension cinq est encore de rang maximum et se met sous la forme  $\overline{H} + \overline{H}_1$ . Le nouvel hamiltonien  $\overline{H}_1$  est associé à un problème sous-riemannien en dimension trois, et on a finalement la proposition suivante [8].

**Proposition 16.** *Le hamiltonien  $\overline{H}_1$  correspond au problème sous-riemannien défini en dimension trois par la distribution de contact*

$$(\sigma^2 + 1)d\omega - (\sigma^2 - 1)d\Omega = 0$$

où  $\sigma = \tan(i/2)$ , et la métrique

$$g_1 = \frac{1}{(\sigma^2 + 1)^2} \left( \frac{\cos^2 \omega}{K^2} + \sin^2 \omega \right) d\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - 1)^2} \left( \frac{\sin^2 \omega}{K^2} + \cos^2 \omega \right) d\omega^2 - \frac{2\sigma \cos \omega \sin \omega}{(\sigma^2 + 1)(\sigma^2 - 1)} \left( 1 - \frac{1}{K^2} \right) d\sigma d\omega \quad (K > 1).$$

On se restreint dans la suite à l'étude de la métrique riemannienne du problème coplanaire, en commençant par l'intégrabilité.

### 2.3 Intégrabilité et courbure du moyenné

On définit la compactification suivante. Soit  $\Pi$  la projection de  $\mathbf{S}^2$  sur  $\mathbf{B}^1$ ,

$$\Pi : (\theta, \varphi) \mapsto \sin \varphi \exp(i\theta),$$

poser  $e = \sin \varphi$  (et  $\theta = \omega$ ) relève sur  $\mathbf{S}^2$  la métrique induite par le transfert coplanaire sur  $\{n = \text{cte}\}$ . La première forme normale pour la nouvelle métrique sur  $X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}^2$  est obtenue en posant ensuite  $n = (5r/2)^{6/5}$ , si bien que

$$g = dr^2 + \frac{r^2}{c^2} (G(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2)$$

avec  $G$  et  $c$  respectivement fonction et constante positives ( $c > 0$ ). Pour le transfert (coplanaire moyenné),

$$G(\varphi) = \frac{5 \sin^2 \varphi}{1 + 4 \cos^2 \varphi} \text{ et } c = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

où les deux pôles en  $\varphi = 0$  et  $\pi$  ne sont dus qu'aux singularités des coordonnées sphériques. On note  $g_2 = G(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2$  la métrique induite sur  $\{r = c\} \simeq \mathbf{S}^2$ . La forme normale du hamiltonien correspondant est de même

$$\overline{H} = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{c^2}{r^2}H_2, \quad H_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{p_\theta^2}{G(\varphi)} + p_\varphi^2 \right).$$

On en déduit immédiatement l'intégrabilité au sens de Liouville.

**Proposition 17.** *La coordonnée  $\theta$  est cyclique, et  $\overline{H}$ ,  $H_2$ ,  $p_\theta$  sont trois intégrales premières indépendantes en involution.*

Le flot géodésique est donc intégrable, ce que l'on vérifie également en constatant que, sur le niveau  $\{H = 1/2\}$  d'un hamiltonien sous la forme normale précédente, la coordonnée  $r^2$  est un polynôme du second degré en  $t$  indépendant de  $G$  et  $c$ ,

$$r^2 = t^2 + 2r_0 p_{r_0} t + r_0^2.$$

L'algorithme d'intégration consiste alors à faire le changement de temps  $d\tau = c^2 dt/r^2$ , et on vérifie que

$$\tau(t, r_0, p_{r_0}) = \frac{c^2}{r_0 \cos \alpha_0} \left[ \arctan \left( \frac{t}{r_0 \cos \alpha_0} + \tan \alpha_0 \right) - \alpha_0 \right] \text{ avec } p_{r_0} = \sin \alpha_0.$$

Pour  $p_{r_0} = \pm 1$  ( $\alpha_0 = \pm \pi/2$ ),  $p_\theta$  et  $p_\varphi$  sont identiquement nuls, donc  $\theta$  et  $\varphi$  constants, et on convient de poser  $\tau(t, r_0, \pm 1) = 0$ . La métrique  $g_2$  est une métrique de *Clairaut-Liouville* [27, 35], classiquement intégrable (d'où, à nouveau, l'intégrabilité du système complet en dimension trois). Les lignes de niveau de  $\theta$  et  $\varphi$  définissent respectivement les méridiens et les parallèles (dont l'équateur pour  $\varphi = \pi/2$ ).

Si  $V$  est le sous-espace engendré par  $\partial/\partial\theta$  et  $\partial/\partial\varphi$ , la courbure sectionnelle  $K_V$  est [37]

$$K_V = \frac{R_{2323}}{|\frac{\partial}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial}{\partial\varphi}|^2}$$

où  $R$  est le tenseur de courbure et

$$R_{2323} = R\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

On vérifie que la nullité de la courbure sectionnelle, clairement nécessaire à la platitude de la métrique, est aussi suffisante. En effet, en utilisant la deuxième forme normale

$$g = dr^2 + r^2(\Gamma(\psi)d\theta^2 + d\psi^2)$$

avec  $\psi = \varphi/c$  et  $\Gamma(\psi) = G(c\psi)$ ,  $V$  est encore engendré par  $\partial/\partial\theta$  et  $\partial/\partial\psi$ , et dans ces coordonnées,

$$K_V = -\frac{F + F''}{r^2 F}, \quad F = \sqrt{\Gamma}.$$

Si  $K_V$  est nulle,  $F$  peut être normalisée à  $\sin \psi$  et on a  $g = dr^2 + r^2(\sin^2 \psi d\theta^2 + d\psi^2)$ , c'est-à-dire la métrique plate en coordonnées sphériques.

**Proposition 18.** *La métrique associée au transfert n'est pas plate, mais asymptotiquement plate,*

$$K_V = \frac{1 - 24 \cos^2 \varphi - 16 \cos^4 \varphi}{r^2(1 + 4 \cos^2 \varphi)^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

On calcule également la courbure de Gauss de  $g_2$ ,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2 \sqrt{G}}{d\varphi^2}.$$

**Proposition 19.** Soit  $G(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2$  une métrique de Clairaut-Liouville. L'intégrale première linéaire  $p_\theta$  vérifie la relation de Clairaut  $p_\theta = \cos(\phi)\sqrt{G(\varphi)}$ , où  $\phi$  est l'angle de la géodésique avec un parallèle. Dans le cas du transfert, la courbure de Gauss est

$$K = \frac{5(1 - 8 \cos^2 \varphi)}{(1 + 4 \cos^2 \varphi)^2}.$$

La courbure obtenue diffère logiquement de la courbure sectionnelle, et la non nullité de la deuxième forme fondamentale traduit le fait que l'injection de  $Y = \{r = c\} \simeq \mathbf{S}^2$  dans  $X$  n'est pas géodésique : les géodésiques de  $Y$  n'en sont pas sur  $X$  (c'est évident, par exemple en remarquant que  $r^2$  n'est pas constant dès que  $p_{r_0}$  est différent de zéro, c'est-à-dire dès qu'on a une géodésique non réduite à un point sur  $Y$ ).

Le caractère cyclique de la coordonnée  $\theta$  invite à chercher une surface de révolution de  $\mathbf{R}^3$  sur laquelle la métrique plate se restreindrait en  $G(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2$ . Or, soit

$$x = a(\varphi) \cos \theta, \quad y = a(\varphi) \sin \theta, \quad z = b(\varphi)$$

le plongement de  $\mathbf{S}^2$  dans  $\mathbf{R}^3$  définissant une telle variété (avec  $a$  et  $b$   $\pi$ -périodiques), la métrique de Clairaut induite est

$$a^2(\varphi)d\theta^2 + (a'^2(\varphi) + b'^2(\varphi)) d\varphi^2,$$

de sorte que l'on est amené à résoudre le système

$$\begin{aligned} a^2 &= G, \\ a'^2 + b'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Une condition nécessaire est par conséquent

$$\frac{G'^2}{4G} \leq 1,$$

et l'obstruction dans le cas du transfert en résulte immédiatement puisqu'alors,

$$\frac{G'^2}{4G} = \frac{125}{4}Q(1 + 4 \cos^2 \varphi)$$

avec  $Q(Y) = 1/Y^2 - 1/Y^3$ , si bien que le maximum vaut  $(5/3)^3 > 1$ . En d'autres termes, la courbure ne peut provenir de la surface seule, et la propriété remarquable suivante vient de la comparaison avec l'ellipsoïde.

**Proposition 20.** La métrique de Clairaut du transfert est conforme à la métrique plate sur l'ellipsoïde oblat de demi-petit axe  $1/\sqrt{5}$ .

La restriction de la métrique plate  $g_0 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  à l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_\mu$  de révolution de demi-grand axe unité et de demi-petit axe  $0 < \mu \leq 1$  plongé dans  $\mathbf{R}^3$  selon

$$x = \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \mu \cos \theta$$

est en effet

$$\sin^2 \varphi d\theta^2 + E_\mu(\varphi) d\varphi^2$$

avec

$$E_\mu(\varphi) = \mu^2 + (1 - \mu^2) \cos^2 \varphi.$$

On remarque alors que, dans le cas du transfert,

$$\begin{aligned} G(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2 &= \frac{\sin^2 \varphi}{(1/5) + (4/5) \cos^2 \varphi} d\theta^2 + d\varphi^2, \\ &= \frac{\sin^2 \varphi}{E_\mu(\varphi)} d\theta^2 + d\varphi^2 \end{aligned}$$

avec  $\mu = 1/\sqrt{5}$ , de sorte qu'on a bien

$$g_2 = \frac{1}{E_\mu(\varphi)} g_{0|_{\mathcal{E}_\mu}}.$$

On en déduit en particulier une homotopie permettant de connecter sur  $\mathbf{S}^2$  la restriction de la métrique plate à celle du transfert, consistant à faire passer continûment  $\mu$  de 1 à  $1/\sqrt{5}$ . Les géodésiques sur l'ellipsoïde pour chacune des deux métriques sont présentées Fig. 2.1.

## 2.4 Analyse dans les demi-plans méridiens

Le *demi-plan méridien* défini par  $\theta_0$  est la sous-variété  $\{r > 0, |\varphi| < \pi/2, \theta = \theta_0\}$  de  $X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}^2$ . Par symétrie, tous les demi-plans méridiens sont isométriques à celui défini par  $\theta_0 = 0$ , noté  $X_0$ . En coordonnées  $(r, \psi)$ ,  $X_0$  est égal à  $\{r > 0, |\psi| < \pi/(2c)\}$  et la restriction de la métrique y est donnée sous la forme polaire  $g|_{X_0} = dr^2 + r^2 d\psi^2$ .

**Proposition 21.** *La restriction de la métrique à un demi-plan méridien est plate, et les trajectoires optimales associées du transfert coplanaire moyenné sont des droites dans les coordonnées  $x = r \sin \psi$ ,  $z = r \cos \psi$  avec  $r = 2n^{5/6}/5$  et  $\psi = \sqrt{5}/2 \arcsin e$ .*

Le résultat s'applique notamment aux transferts vers les cibles circulaires, dont la géostationnaire, cibles pour lesquelles  $\omega = \theta$  est libre à l'instant final donc constant par transversalité.

**Corollaire 1.** *Les demi-plans méridiens sont géodésiquement convexes si et seulement si  $c \geq 1$ .*

En transfert orbital,  $c = \sqrt{2/5} < 1$  donc on n'a pas convexité géodésique et il existe des conditions aux limites pour lesquelles on perd l'existence de trajectoires optimales sur le moyenné (condition d'étoilement du demi-plan méridien par rapport au point initial). La métrique n'est *a fortiori* pas complète, et les sphères de grand rayon ne sont pas compactes en application du théorème de Hopf-Rinow. L'incomplétude a deux causes : d'une part l'existence des *séparatrices*  $\{\varphi = \varphi_0\} = \{\psi = \psi_0\}$  le long desquelles on observe un contact avec le bord du domaine en  $r = 0$ , d'autre part les contacts des autres géodésiques avec le bord parabolique  $\{e = 1\}$  (i.e.  $|\psi| = \psi_c = \pi/(2c)$ ). Les figures 2.2 et 2.3 illustrent ces différentes situations. Les géodésiques et les sphères associées sont représentées Fig. 2.4.

On analyse pour finir le contact avec le bord du demi-plan. En coordonnées  $(n, e)$ ,  $X_0 = \{n > 0, |e| < 1\}$ , et le sous système sur  $(e, p_e)$  est régi par les

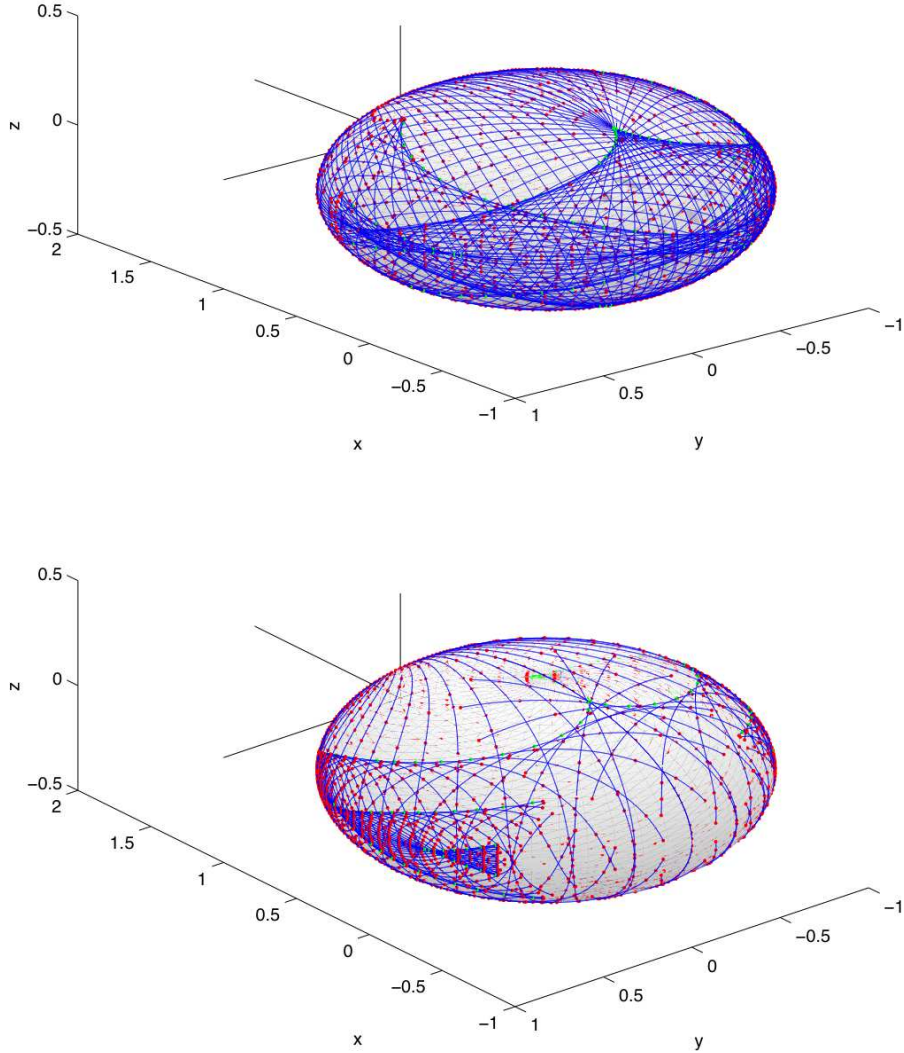


FIG. 2.1 – Géodésiques sur l'ellipsoïde oblat de demi-petit axe  $1/\sqrt{5}$  : restriction de la métrique plate en haut, métrique du transfert coplanaire moyenné en bas.

équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{5(1-e^2)}{2n^{5/3}} p_e, \\ \dot{p}_e &= \frac{5e}{2n^{5/3} p_e^2}. \end{aligned}$$

À l'exception de la séparatrice qui réalise le contact avec le bord du domaine en  $n = 0$ , l'anomalie moyenne est strictement positive le long des géodésiques et on utilise le changement de temps  $d\tau = 5dt/(2n^{5/3})$ . Le système précédent

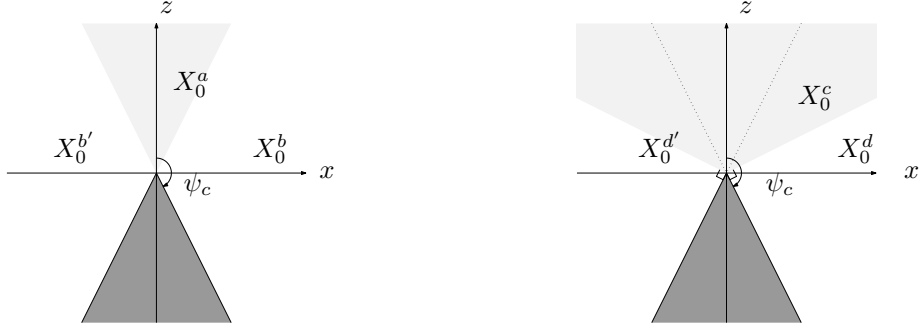


FIG. 2.2 – Existence et complétude des géodésiques (1). Sur la gauche, pour les points dans  $X_0^a$  il existe des géodésiques vers n'importe quelle cible puisque  $X_0$  est étoilé par rapport à de tels points. Réciproquement, pour les points dans  $X_0^b$  (resp.  $X_0^{b'}$ ), l'existence est perdue pour les cibles telles que  $\psi \leq \psi_0 - \pi$  (resp.  $\psi \geq \psi_0 + \pi$ ). Sur la droite, les contacts avec  $\partial X_0$  sont classifiés selon que le contact a lieu avec  $\{r = 0\}$  pour les points initiaux dans  $X_0^c$ , ou avec  $\{e = 1\}$  (resp.  $\{e = -1\}$ ) pour ceux dans  $X_0^d$  (resp.  $X_0^{d'}$ ).

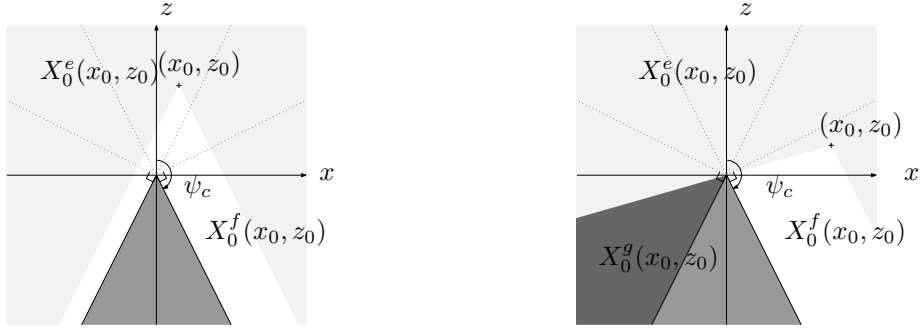


FIG. 2.3 – Existence et complétude des géodésiques (2). Étant donné  $(x_0, z_0)$  dans  $X_0$ , les cibles sont classifiées en trois catégories. Tout d'abord celles dans  $X_0^e(x_0, z_0)$  : les géodésiques existent et sont complètes. Deuxièmement, celles dans  $X_0^f(x_0, z_0)$  pour lesquelles les géodésiques existent mais ne sont plus complètes à cause du contact avec le bord du demi-plan méridien. Finalement, celles dans  $X_0^g(x_0, z_0)$  vers lesquelles il n'existe pas de géodésique (à droite).

devient ( $' = d/d\tau$ )

$$\begin{aligned} x' &= (1 - x^2)y, \\ y' &= xy^2 \end{aligned}$$

sur  $\mathbf{R}^2$ . En dehors des branches  $y = 0$ ,  $x = \text{cte}$ , on pose  $w = 1/y$  pour étudier le contact avec  $|x| = 1$ , soit

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1 - x^2}{w}, \\ w' &= -x \end{aligned}$$

sur  $\mathbf{R}^2 \setminus \Delta_0$ ,  $\Delta_0 = \{w = 0\}$ . Les trajectoires sont des coniques (éventuellement

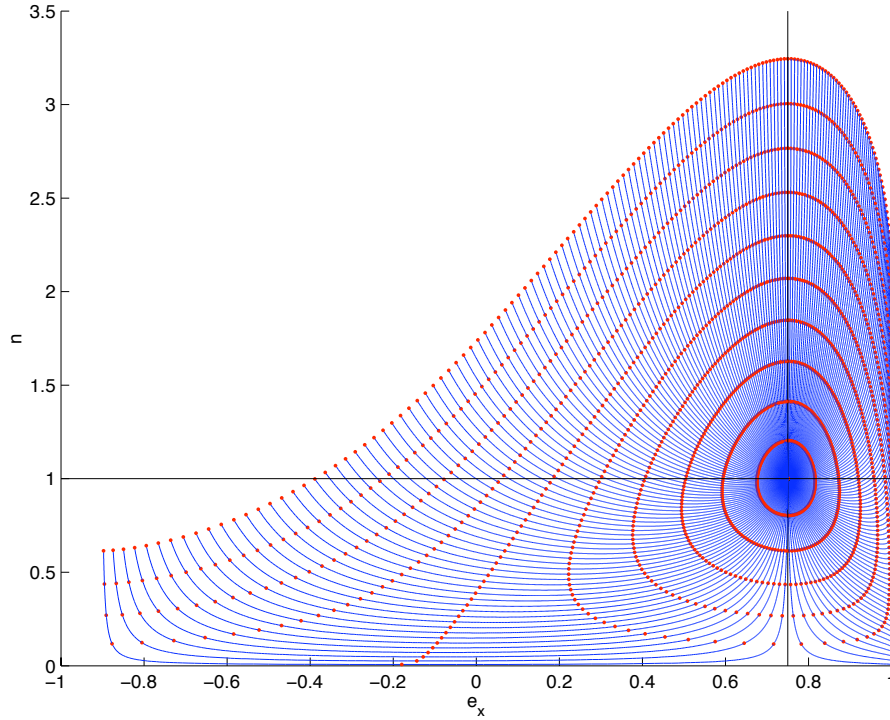


FIG. 2.4 – Géodésiques en coordonnées  $(n, e)$  dans le demi-plan méridien ( $\theta_0 = 0$ ) partant de  $(n_0, e_{x0}) = (1, 7.5e - 1)$ . Les points indiquent les sphères riemanniennes. La condition initiale est classifiée comme à la Fig. 2.2 et appartient à  $X_0^b \cap X_0^d$ , et il n'existe pas de géodésique vers  $e_x$  trop proche de  $-1$ . La perte de compacité des sphères est due au contact avec le bord parabolique en  $e_x = 1$ .

dégénérées) centrées sur l'origine et passant par  $\pm(1, 0)$  (cf. Fig. 2.5) :

$$x^2 + Cw^2 = 1$$

où  $C$  est (i) strictement positive sur  $\{|x| < 1\}$  (les trajectoires sont des ellipses), (ii) nulle sur les branches  $\{x = \pm 1\}$  (le sens de parcours est encore donné par  $w' = -x$ ), (iii) strictement négative sur  $\{|x| > 1\}$  (les trajectoires sont des hyperboles). En rajoutant une droite à l'infini  $\Delta_\infty = \mathbf{R} \times \{\omega\}$  pour prendre en compte les solutions  $y = 0, x = \text{cte}$ , on obtient le flot sur l'ouvert

$$\Omega = (\mathbf{R}^2 \setminus \Delta_0) \cup \Delta_\infty.$$

On perd l'unicité en les deux points de contact  $\pm(1, 0)$ .

**Proposition 22.** *Par tout point de  $\Omega$  passe une trajectoire qui se prolonge de manière unique en une trajectoire lisse et complète, ce prolongement étant périodique sur  $\Omega \cap \{|x| < 1\}$ . Le contact avec  $|x| = 1$  est d'ordre deux.*

Cette analyse est suffisante pour l'étude du système de départ puisque

$$\begin{aligned} \dot{e} &= e' \dot{\tau}, \\ \ddot{e} &= e'' \dot{\tau}^2 + e' \ddot{\tau}. \end{aligned}$$



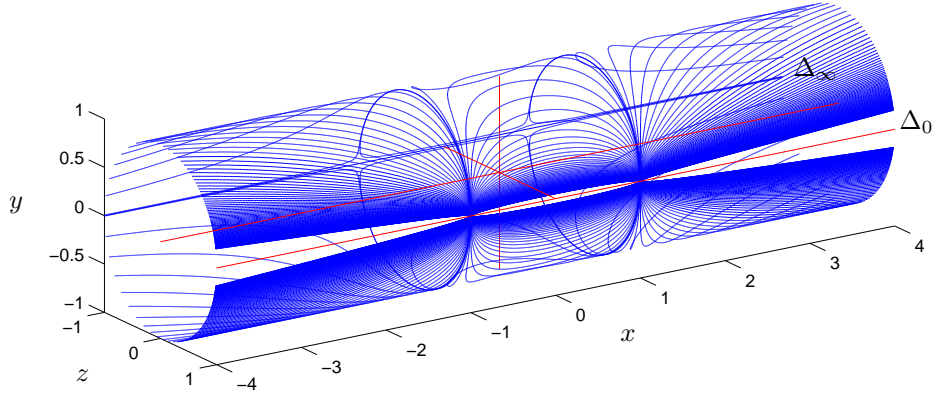


FIG. 2.5 – Trajectoires du système. On a utilisé le plongement du plan avec une droite à l’infini,  $\mathbf{R}^2 \cup \Delta_\infty$ , dans  $\mathbf{R}^3 \simeq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$  défini par  $z + iy = \exp(2i \arctan w)$ . On observe la droite à l’infini en  $y = 0$ ,  $z = -1$ .

Puisqu’en  $|e| = 1$  les dérivées première et seconde de  $\tau$  sont bien définies (cf.  $\dot{n} = 9n^{1/3}p_n$ ), la première étant non nulle, on a encore  $\dot{e} = 0$  et  $\ddot{e} = e''\dot{\tau}^2 \neq 0$ , et le contact est d’ordre deux d’après ce qui précède.

Dans la mesure où le contact  $|e| = 1$  coïncide avec une singularité pour la coordonnée polaire  $\psi = (1/c) \arcsin e$ ,  $c = \sqrt{2/5}$ , on fait également l’analyse dans ces coordonnées. En  $e = 1$ , par exemple, on peut au vu des calculs précédents écrire  $e = 1 - \alpha t^2/2 + o(t^2)$  avec  $\alpha = -\ddot{e}|_{e=1} \neq 0$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{c} \frac{-\alpha t + o(t)}{\sqrt{\alpha t^2 + o(t^2)}}, \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha}}{c} \operatorname{sgn}(t) + o(1), \end{aligned}$$

et  $\dot{\psi}_+ = -\dot{\psi}_-$  au point de contact.

Clairement, tout point géodésiquement accessible à l’aide d’une réflexion l’est aussi par une trajectoire sans réflexion et strictement plus courte (cf. Fig. 2.6) : le contact correspond donc à une perte d’optimalité.

**Proposition 23.** *Le contact avec le bord parabolique se traduit en coordonnées plates  $x = r \sin \psi$ ,  $z = r \cos \psi$  par une réflexion. Les points du bord du domaine forment une enveloppe pour les géodésiques et s’interprètent (hors l’origine) comme des points conjugués.*

Ces réflexions et le phénomène d’enveloppe associé trouvent leur interprétation naturelle à la section suivante grâce à la compactification de  $\{|e| < 1\}$  en  $\mathbf{S}^2$  définie au début du 1.3.

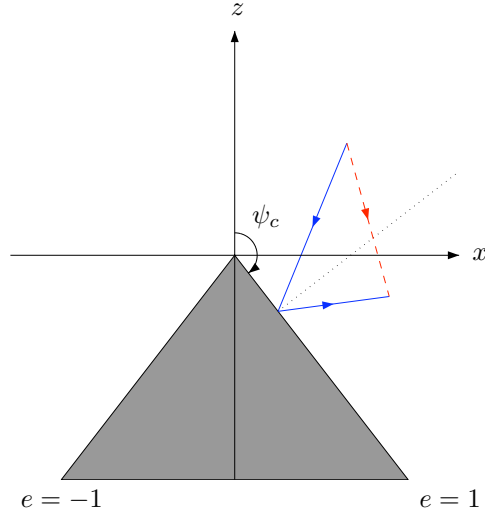


FIG. 2.6 – Réflexion au niveau du contact  $e = 1$ .

## 2.5 Points conjugués, analyse globale

On se place sur  $Y = \{r = c\} \simeq \mathbf{S}^2$  munie de la métrique  $g_2$ , l'objectif étant de montrer que l'étude de la variété riemannienne  $(X, g)$ , avec  $X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}^2$  et  $g = dr^2 + (r^2/c^2)g_2$ , se ramène entièrement, par projection, à celle de  $(Y, g_2)$ . Cette dernière est compacte, donc complète, et on peut se limiter à considérer  $\exp_{y_0} = \exp_{y_0,1}$  grâce à la propriété d'homogénéité

$$\exp_{y_0,t}(\lambda q_0) = \exp_{y_0,\lambda t}(q_0),$$

où  $q_0 = (p_{\theta_0}, p_{\varphi_0})$ . La complétude assure que l'exponentielle est définie sur toute la fibre  $L_0 = T_{y_0}^*Y$ , et les points conjugués sont ses valeurs critiques, c'est-à-dire les singularités lagrangiennes de la projection  $\Pi : T^*Y \rightarrow Y$  restreinte à la sous-variété lagrangienne  $L = L_1 = \exp \overrightarrow{H_2}(L_0)$ . L'ensemble des points conjugués forme la caustique, et le lieu conjugué  $C(y_0)$  est le lieu des premiers points conjugués. Le théorème de Jacobi classique assure l'optimalité  $\mathcal{C}^0$ -locale d'une géodésique jusqu'au premier point conjugué.

On se restreint en pratique au niveau  $\{H_2 = 1/2\}$ , ce qui a pour effet de paramétriser les géodésiques par leur longueur. Soit alors

$$\Lambda_0 = T_{y_0}^*Y \cap \{H_2 = 1/2\} \simeq \mathbf{S}(T_{y_0}^*Y),$$

le groupe à un paramètre  $\exp t \overrightarrow{H_2}$  définit le *flot géodésique* [24] sur le fibré des éléments de contacts orientés  $\mathbf{S}(T^*Y)$ , et envoie  $\Lambda_0$ , sous-variété legendrienne sur  $\Lambda_t$ , également legendrienne. Par définition, le front d'onde est la projection  $W(y_0, t) = \Pi(\Lambda_t)$  dont les singularités legendriennes parcourent la caustique de  $L$  (cf. Fig. 2.8).

Le temps  $\sigma$  sur le niveau  $\{H_2 = 1/2\}$  est donné par le temps  $\tau$  à un facteur près, soit

$$\sigma(t, r_0, p_{r_0}) = c \left[ \arctan \left( \frac{t}{r_0 \cos \alpha_0} + \tan \alpha_0 \right) - \alpha_0 \right] \text{ avec } p_{r_0} = \sin \alpha_0,$$

et

$$\sup_{|p_{r_0}| < 1} \sup_{t \geq 0} \sigma(t, r_0, p_{r_0}) = c\pi.$$

Cette borne supérieure n'est pas atteinte et indépendante de la condition initiale  $r_0$ . Alors que  $X$  n'est jamais complète à cause de l'existence des séparatrices  $\{\varphi = \text{cte}\}$  contenues dans les demi-plans méridiens, elle peut néanmoins être géodésiquement convexe.

Si le diamètre de  $Y$  est supérieur à  $c\pi$ ,  $(X, g)$  n'est clairement pas géodésiquement convexe, comme on le voit sur le cas limite  $c = 1$  et  $g$  métrique plate ( $G(\varphi) = \sin^2 \varphi$ ) :  $X$  est isométrique à  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  qui n'est pas convexe. Réciproquement, si le diamètre est strictement inférieur à  $c\pi$ , les projetés  $y_0, y_f$  de deux points arbitraires  $x_0, x_f$  de  $X$  sont reliés par une géodésique  $\gamma$  sur  $Y$  (qui est complète), de longueur  $l(\gamma) < c\pi$ . En excluant le cas trivial où les deux points de  $X$  sont sur une séparatrice, cette géodésique se remonte en une géodésique sur  $X$  si et seulement s'il existe une solution  $(t, p_{r_0})$  dans  $\mathbf{R}_+^* \times ]-1, 1[$  au système

$$\begin{aligned} t^2 + 2r_0 p_{r_0} t + r_0^2 &= r_f^2, \\ \sigma(t, r_0, p_{r_0}) &= l(\gamma). \end{aligned}$$

On vérifie géométriquement que l'hyperbole (éventuellement dégénérée) définie par la première équation coupe toujours la deuxième courbe.

**Proposition 24.** *La variété  $(X, g)$  est géodésiquement convexe si et seulement si le diamètre de  $Y$  est strictement inférieur à  $c\pi$ .*

Les méridiens étant, indépendamment du choix de  $G$ , de longueur  $2\pi$ , le diamètre de  $Y$  est toujours minoré par  $\pi$  et on retrouve le résultat du Corollaire 1 quand  $c > 1$ . Dans le cas du transfert orbital, le défaut de surjectivité de l'exponentielle est mesuré, comme on le voit Fig. 2.7, par le contour apparent généré par la projection de la sphère de rayon  $c\pi$  de  $\mathbf{S}^2$  sur  $\{e \leq 1\}$ . On observe également les réflexions sur le bord parabolique analysées au 1.4 qui s'interprètent comme les projections des géodésiques du compactifié contenues dans l'hémisphère symétrique de celui auquel appartient le point initial.

Le transport de propriétés de  $Y$  vers  $X$  s'étend également à l'analyse de l'optimalité des géodésiques. On note  $W(y_0, < \sigma)$  la réunion des fronts d'ondes  $W(y_0, s)$ ,  $s < \sigma$ .

**Proposition 25.** *Soit  $x_0 \in X$ ,  $x$  appartient à  $C(x_0)$  si et seulement si  $y$  appartient à  $C(y_0) \cap W(y_0, < c\pi)$ .*

Il suffit en effet de remarquer que l'exponentielle sur le niveau  $\{H = 1/2\}$  se calcule selon

$$\exp_{x_0, t}(p_0) = \left( r(t, r_0, p_{r_0}), \exp_{y_0, \sigma(t, r_0, p_{r_0})}(q_0 / \sqrt{2H_2}) \right)$$

avec

$$\sqrt{2H_2} = \frac{r_0 \sqrt{1 - p_{r_0}^2}}{c},$$

de sorte qu'un simple calcul de rang montre qu'un point conjugué sur  $X$  induit bien un point conjugué sur  $Y$  à condition que le temps  $\sigma$  y soit non nul : un calcul direct de champ de Jacobi le long des séparatrices montre qu'elles sont sans point

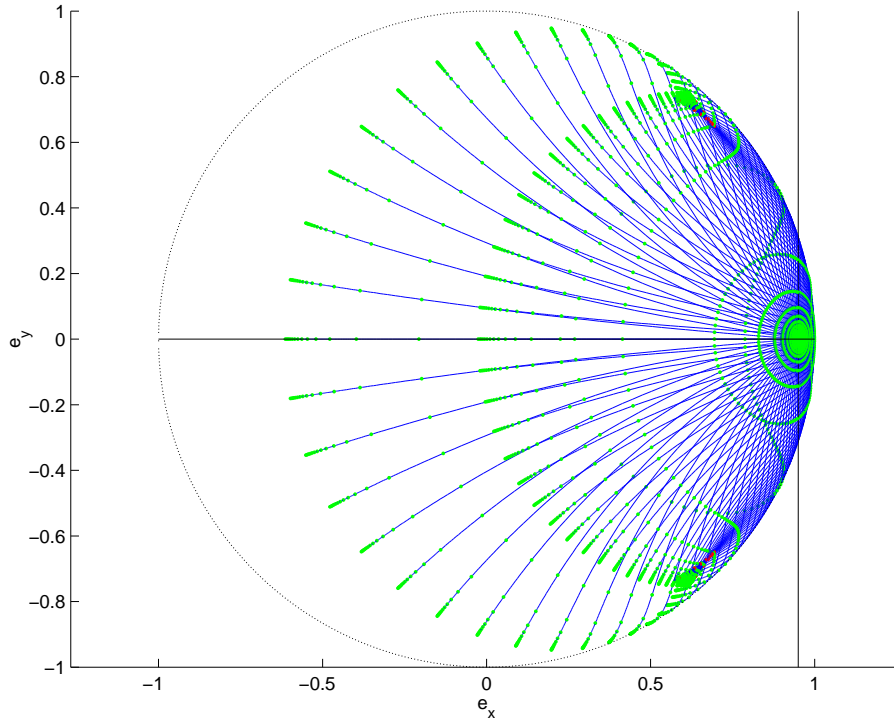


FIG. 2.7 – Non convexité géodésique du transfert orbital. Le contour apparent est la projection de la sphère de rayon  $\pi\sqrt{2/5}$  de  $\mathbf{S}^2$  et illustre le défaut de surjectivité de l’application exponentielle pour  $e_0 = 9.5e - 1$ , ainsi que les réflexions sur le bord parabolique qui permettent d’interpréter une partie de ce dernier comme une enveloppe d’extrémales.

conjugué. Réciproquement, tout point conjugué en temps inférieur à  $c\pi$  sur  $Y$  se remonte en un point conjugué sur  $X$  en utilisant la même construction qu’à la Proposition 24.

Si  $L(x_0)$  désigne la *ligne de partage*, c’est-à-dire l’ensemble des points où deux géodésiques d’égales longueurs issues de  $x_0$  se recoupent, on a le même résultat.

**Proposition 26.** *Soit  $x_0 \in X$ ,  $x$  appartient à  $L(x_0)$  si et seulement si  $y$  appartient à  $L(y_0) \cap W(y_0, < c\pi)$ .*

Le *lieu de coupure*  $\text{Cut}(x_0)$  après lequel les géodésiques issues de  $x_0$  perdent leur optimalité globale contenant les points de la ligne de partage et du lieu conjugué (et uniquement ceux-ci dans le cas complet [37, 50]), on en déduit une condition nécessaire d’optimalité globale à l’aide de la notion de rayon d’injectivité.

**Définition 3.** Le *rayon d’injectivité* de la variété riemannienne  $Y$  est défini comme la borne inférieure des distances d’un point à son lieu de coupure,

$$i(Y) = \inf_{y \in Y} d(y, \text{Cut}(y)).$$

**Théorème 4.** *Une condition nécessaire d'optimalité globale pour une métrique  $dr^2 + (r^2/c^2)(G(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2)$  sur  $X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}^2$  est que le rayon d'injectivité de  $Y = \{r = c\}$  soit supérieur à  $c\pi$ .*

Le cas limite est atteint pour la métrique plate et  $c = 1$  (pas de point cut sur  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  dans le cas plat).

L'application au transfert requiert l'estimation du rayon d'injectivité. Sur  $Y$ , compacte, on sait [37] que si la distance à  $\text{Cut}(y_0)$  est atteinte en un point  $y_1$ , celui-ci est soit conjugué à  $y_0$ , soit l'intersection de deux géodésiques qui sont les deux moitiés d'une même courbe fermée. Or, la courbure de Gauss étant majorée par 5 d'après la Proposition 19,  $\pi/\sqrt{5}$  est une borne inférieure sur les temps conjugués. Cette borne est optimale. En effet, la courbure est constante et égale à 5 le long de la géodésique périodique définie par l'équateur,  $\{\varphi = \pi/2\}$ , aussi le premier temps conjugué  $y$  est égal à  $\pi/\sqrt{5}$  (atteint en  $\theta = \pm\pi/5$ ). Il suffit donc pour conclure de minorer les géodésiques périodiques. Comme dans le cas de la métrique plate conformément équivalente sur l'ellipsoïde, les plus courtes sont les méridiens dont on évalue directement la demi-longueur à  $\pi > \pi/\sqrt{5}$ .

**Proposition 27.** *Le rayon d'injectivité de la métrique de Clairaut associée au transfert coplanaire moyenné est  $\pi/\sqrt{5}$ , et il existe des points de coupure pour la métrique sur  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}^2$ .*

Concernant le transfert à proprement parler, reste finalement à évaluer l'image du lieu de coupure en un point après projection de  $\mathbf{S}^2$  sur  $\{e \leq 1\}$ . La métrique de Clairaut du transfert étant analytique sur  $\mathbf{S}^2$ , on sait [57, 44] que le lieu de coupure est un arbre fini dont les extrémités sont des singularités du lieu conjugué, réduit dans certains cas à une branche simple. On dispose dans ce sens du résultat de [64]. Sous l'hypothèse que la courbure de Gauss de la métrique de Clairaut est croissante le long des demi-méridiens, le lieu de coupure d'un point est contenu dans le *parallèle antipodal*  $\{\varphi = \pi - \varphi_0\}$ . Bien que l'hypothèse ne soit pas vérifiée ici puisque la courbure passe sur  $[0, \pi/2]$  par un minimum en  $\varphi = \pi/4$ , on peut conclure en estimant les points conjugués à l'aide des simulations numériques (cf. Fig. 2.8). Une telle estimation est en effet suffisante dans la mesure où l'existence de la symétrie discrète  $\varphi \mapsto \pi - \varphi$  sur la métrique indique la ligne de partage, et parce-qu'il existe nécessairement des points conjugués dans une région bordée par des géodésiques qui se recourent [39, 61, 62].

**Théorème 5.** *Le lieu de coupure de la métrique de Clairaut du transfert sur  $\mathbf{S}^2$  est un arc contenu dans le parallèle antipodal du point considéré.*

Les points antipodaux au point initial ne pouvant être atteints qu'en passant l'équateur, c'est-à-dire, en projection, qu'après réflexion sur le bord parabolique (cf. Fig. 2.9), on a le résultat final.

**Corollaire 2.** *Le lieu conjugué et la ligne de partage en dimension trois du transfert orbital coplanaire moyenné sont toujours vides.*

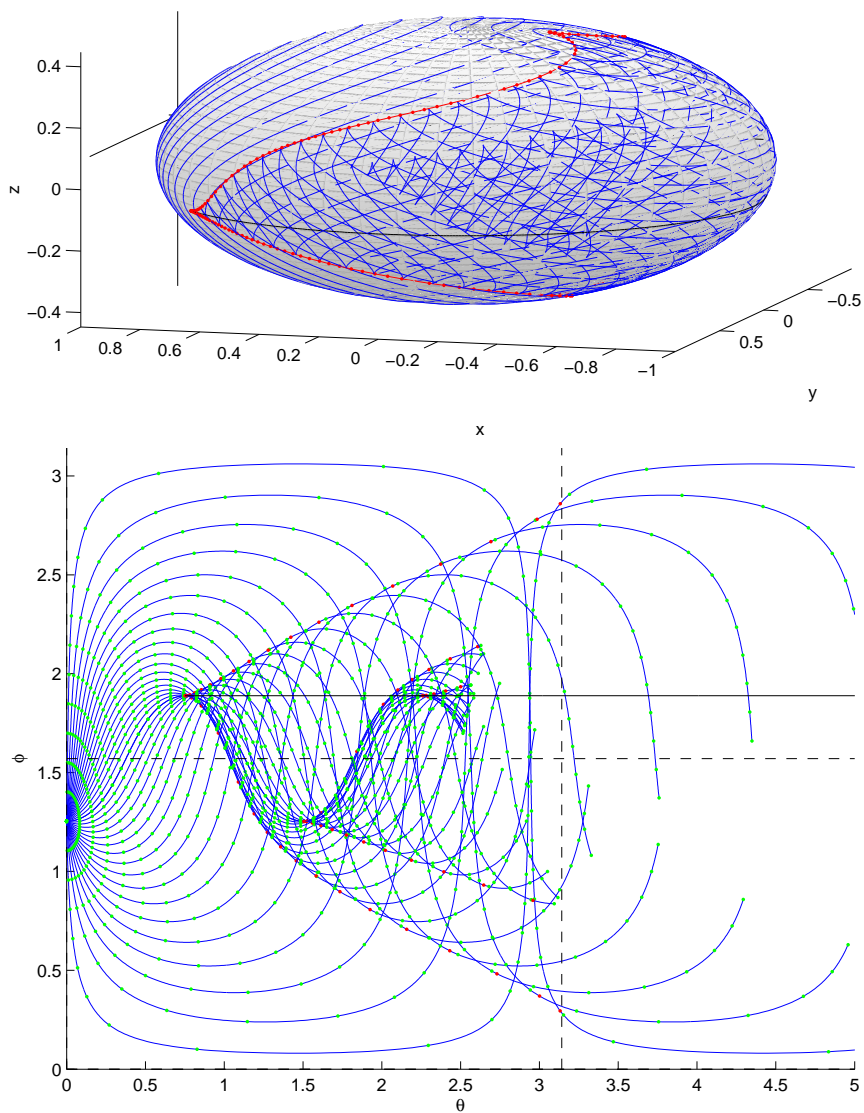


FIG. 2.8 – Front d’onde, lieu conjugué et lieu de coupure pour  $e_0 = 9.5e - 1$ . Le lieu conjugué est une déformation de l’astroïde obtenu pour la restriction de la métrique plate à l’ellipsoïde, avec quatre cusps. Deux de ces cusps sont des points cut qui délimitent le lieu de coupure qui passe par les points de self-intersection du front d’onde, et dont on vérifie qu’il est contenu dans le parallèle antipodal à  $\varphi_0$  (*cf.* représentation en coordonnées  $(\theta, \varphi)$ ). On observe sur l’ellipsoïde la bifurcation du front d’onde, et les singularités en queue d’aronde qui se forment s’inscrivent sur la caustique (on voit ainsi apparaître le second lieu conjugué).

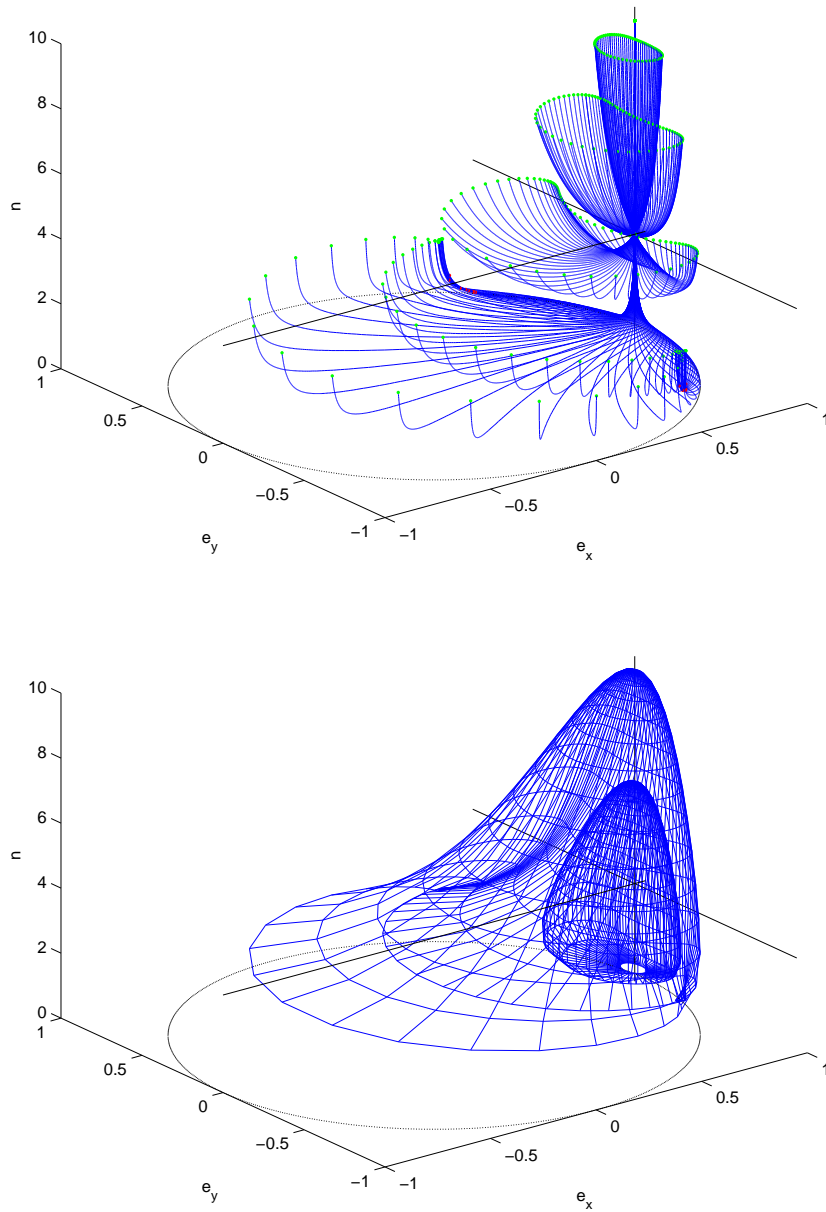


FIG. 2.9 – Géodésiques et front d’onde du transfert pour  $e_0 = 9.5e - 1$ . On observe sur le premier graphe les géodésiques pour différentes valeurs de  $p_{r0}$ , c’est-à-dire différentes paramétrisations du temps en projection (laquelle projection sur  $\{e \leq 1\}$  est celle présentée Fig. 2.7). Les points cut qu’on peut deviner apparaissent après réflexion sur le bord elliptique. Le second graphe présente deux sphères de rayons différents. Il s’agit plus précisément du front d’onde (prolongé au delà de la réflexion sur le bord parabolique) pour la plus grande, les singularités observables provenant du passage par des points cut.

# Références

## Articles de journaux

- [1] J.-B. Caillau and J. Noailles, Sensitivity analysis for time optimal orbit transfer, *Optimization*, Vol. 49 :4, pp. 327-350, 2001.
- [2] J.-B. Caillau and J. Noailles, Coplanar control of a satellite around the Earth, *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. 6, pp. 239-258, 2001.
- [3] J.-B. Caillau, J. Gergaud and J. Noailles, 3D Geosynchronous Transfer of a Satellite : Continuation on the Thrust, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 118 :3, pp. 541-565, 2003.
- [4] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, Vol. 5 :4, pp. 929-956, 2005.
- [5] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Averaging and optimal control of elliptic Keplerian orbits with low propulsion, *Systems and Control Letters*, Vol. 55 :9, pp. 755-760, 2006.
- [6] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control, *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, à paraître.
- [7] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Energy minimization of single input orbit transfer by averaging and continuation, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, à paraître.
- [8] B. Bonnard and J.-B. Caillau, Riemannian metric of the averaged energy minimization problem in orbital transfer with low thrust, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, à paraître.

## Chapitres de livres

- [9] J.-B. Caillau and J. Noailles, Continuous optimal control sensitivity analysis with AD in *Automatic Differentiation : From Simulation to Optimization*, pp. 109-117, George Corliss, Christèle Faure, Andreas Griewank, Laurent Hascoet and Uwe Naumann Eds., Springer, 2002.



- [10] J.-B. Caillau, J. Gergaud and J. Noailles, Minimum time control of the Kepler equation in *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, pp. 89-92, V. Blondel and A. Megretski Eds., Princeton University Press, 2004.
- [11] B. Bonnard and J.-B. Caillau, Introduction to nonlinear optimal control in *Advanced topics in control systems theory*, pp. 1-60, Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. 328, A. Loria, F. Lamnabhi and E. Panteley Eds., Springer-Verlag, 2006.

## Actes de conférences

- [12] J.-B. Caillau and J. Noailles, Wavelets for adaptive solution of boundary value problems, *Proceedings of the 16th IMACS World Congress*, pp. 1-9, Lausanne, Août 2000.
- [13] J.-B. Caillau, J. Gergaud, Th. Haberkorn, P. Martinon and J. Noailles, Numerical control and orbital transfers, *Sonderforschungsbereich 255 : Trans-atmosphärische Flugsysteme*, pp. 39-49, Hieronymus München, 2002 (Proceedings of the Workshop Optimal Control, Greifswald, Octobre 2002).
- [14] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Riemannian metric of the averaged controlled Kepler equation, *Systems, Control, Modelling and Optimization*, IFIP Series Vol. 202, pp. 79-89, F. Ceragioli, A. Dontchev, H. Furuta and L. Pandolfi Eds., Springer Verlag, 2006 (Proceedings of the 22nd IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, Turin, Juillet 2005).
- [15] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, Computation of conjugate times in smooth optimal control : the COTCOT algorithm, *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*, pp. 929-933, Seville, Décembre 2005.
- [16] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Averaging and optimal control of elliptic Keplerian orbits with low propulsion, *International Journal of Tomography and Statistics*, Vol. 5 :W07, pp. 20-25, 2007 (Proceedings of the 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, Paris, Avril 2006).
- [17] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Continuation methods and single-input time optimal orbital transfer, in *International Journal of Tomography and Statistics*, Vol. 5 :W07, pp. 26-31, 2007 (Proceedings of the 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, Paris, Avril 2006).
- [18] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, Second order optimality conditions in optimal control with applications to spaceflight mechanics, *Proceedings of the Sixth AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Poitiers, Juin 2006.
- [19] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Smooth approximations of single-input controlled Keplerian trajectories : homotopies and averaging, *Taming heterogeneity and complexity of embedded control*, pp. 73-96, F. Lamnabhi, S. Laghrouche, A. Loria, E. Panteley Eds., International Scientific

and Technical Encyclopedia, 2007 (Proceedings of the Joint CTS-HYCON Workshop on Nonlinear and Hybrid Control, Paris, Juillet 2006).

- [20] B. Bonnard, J.-B. Caillau and R. Dujol, Remarks on quadratic Hamiltonians in spaceflight mechanics, *Proceedings of the 3rd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, pp. 287-290, Nagoya, Juillet 2006.

## Thèse de doctorat

- [21] J.-B. Caillau, Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, Novembre 2000.

# Bibliographie

- [22] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Encyclopædia of Mathematical Sciences, Vol. 87, Springer-Verlag, 2004.
- [23] E. L. Allgower and K. Georg, *Introduction to numerical continuation methods*, Classics in Applied Math. 45, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [24] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New-York, 1989.
- [25] V. I. Arnold, A. N. Varchenko and, S.M. Gusein-Zade, *Singularities of differentiable maps*, Vol.1, Birkhäuser, 1988.
- [26] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, 1992.
- [27] A. Bolsinov and A. Fomenko, *Integrable geodesic flows on two-dimensional surfaces*, Kluwer, New-York, 2000.
- [28] B. Bonnard and M. Chyba, *Singular trajectories and their role in control theory*, Math. and Applications 40, Springer Verlag, 2003.
- [29] B. Bonnard and J. de Morant, Towards a geometric theory in the time minimal control of batch reactors, *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 33 :5, pp. 1279-1311, 1995.
- [30] B. Bonnard, L. Faubourg and E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*, Math. and Applications 51, Springer Verlag, 2005.
- [31] B. Bonnard et I. Kupka, Théorie des singularités de l'application entrée-sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal, *Forum Mathematicum*, Vol. 5, pp. 111-159, 1993.
- [32] B. Bonnard et E. Trélat, Une approche géométrique du contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale, *ESAIM COCV*, Vol. 7, pp. 179-222, 2002.
- [33] F. Chaplais, Averaging and deterministic optimal control, *SIAM J. Control and Opt.* Vol. 25 :3, pp. 767-780, 1987.
- [34] J.-M. Coron et L. Praly, Transfert orbital à l'aide de moteurs ioniques, *Rapport technique CNES 1442*, 1996.
- [35] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Tome III, Gauthiers-Villars, 1914.

- [36] M. Denguir, Contribution à l'étude numérique du problème de la synthèse optimale. Application au problème du transfert orbital, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 2001.
- [37] M. P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [38] R. Dujol, Contribution à l'étude du contrôle optimal des transferts orbitaux mono-entrée, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 2006.
- [39] D. Elerath, An improved Topogonov comparison theorem for non-negatively curved manifolds, *J. Differential Geom.*, Vol. 15, pp. 187-216, 1980.
- [40] R. Epenoy and S. Geffroy, Optimal low-thrust transfers with constraints : generalization of averaging techniques, *Acta Astronautica* Vol. 41 :3, pp. 133-149, 1997.
- [41] I. Ekeland, Discontinuité des champs Hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations, *Pub. IHES*, Vol. 47, pp. 5-32, 1977.
- [42] S. Geffroy, Généralisation des techniques de moyennisation en contrôle optimal. Application aux problèmes de transfert et de rendez-vous orbitaux à poussée faible, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 1997.
- [43] J. Gergaud and Th. Haberkorn, Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem, *ESAIM Control Opt. and Calc. of Var.*, Vol. 12, pp. 294-310, 2006.
- [44] H. Gluck and D. Singer, Scattering of geodesic fields I, *Annals of Math.*, Vol. 108, pp. 347-372, 1978.
- [45] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1985.
- [46] Th. Haberkorn, Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 2004.
- [47] H. Hermes, Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets, *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 16 :5, pp. 715-727, 1978.
- [48] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [49] J. Kevorkian and J. D. Cole, *Perturbation methods in applied mathematics*, Springer Verlag, New-York, 1981.
- [50] W. Klingenberg, *Riemannian geometry*, de Gruyter studies in mathematics, New-York, 1982.
- [51] I. Kupka, Generalized Hamiltonians and optimal control : a geometric study of extremals, In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pp. 1180-1189, Berkeley, 1987.
- [52] I. Kupka, Personal notes (communicated by B. Bonnard).

- [53] C. T. Le, Contrôle optimal et transfert orbital en temps minimal, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 1999.
- [54] E. B. Lee and L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley, New-York, 1967.
- [55] P. Martinon, Numerical resolution of optimal control problems by a piecewise linear continuation method, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 2005.
- [56] S. G. Peng, Analyse asymptotique et problème homogénéisé en contrôle optimal avec vibrations rapides, *SIAM J. Control and Opt.* Vol. 27 :4, pp. 673-696, 1989.
- [57] H. Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. AMS*, Vol. 5, pp. 237-274, 1905.
- [58] L. Pontriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, *Théorie mathématiques des processus optimaux*, MIR, Moscou, 1974.
- [59] D. Preda, Intégration d'une contrainte logique dans les problèmes de contrôle optimal et résolution par la programmation mixte, *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, 2004.
- [60] J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 90, pp. 353-365, 1983.
- [61] S. B. Myers, Connections between geometry and topology I, *Duke Math. J.*, Vol. 1, pp. 376-391, 1935.
- [62] S. B. Myers, Connections between geometry and topology II, *Duke Math. J.*, Vol. 2, pp. 95-102, 1936.
- [63] A. V. Sarychev, The index of second variation of a control system, *Math USSR Sbornik*, Vol. 41, pp. 338-401, 1982.
- [64] R. Sinclair and M. Tanaka, The cut locus of a 2-sphere of revolution and Toponogov's comparison theorem, Preprint, 2006.
- [65] H. J. Sussmann, The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the  $\mathcal{C}^\infty$  nonsingular case, *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 25 :2, pp. 433-465, 1987.
- [66] O. Zarrouati, *Trajectoires spatiales*, CNES-Cepadues, Toulouse, 1987.

**Résumé.** Le problème considéré est celui du contrôle optimal des transferts orbitaux (problème proposé par le Centre National d'Études Spatiales). Le modèle retenu est l'équation de Kepler contrôlée, la loi de commande étant la poussée d'un engin spatial en orbite autour de la Terre. Les contributions concernent d'une part le temps minimal, d'autre part la moyennation du problème de la minimisation de l'énergie. L'action du contrôle peut être considérée comme la perturbation d'un système intégrable, perturbation dont la moyennation fournit une approximation dont on vérifie qu'elle est encore intégrable. Un objet fondamental dans l'étude est l'application exponentielle définie par le flot extrémal du problème de contrôle. Ses propriétés renseignent sur l'existence de solution, ainsi que sur l'optimalité locale ou globale des extrémals du problème. Parmi les résultats obtenus, on peut citer la mise en évidence de l'existence de Pi-singularités et de points conjugués en temps minimal, la platitude de la métrique associée par la moyennation au transfert à énergie minimale vers les orbites circulaires (les trajectoires optimales sont des droites), ainsi que la caractérisation du lieu de coupure du moyenné par comparaison avec la restriction de la métrique plate à un ellipsoïde de révolution.

**Mots-clés.** Transfert orbital, contrôle en temps ou énergie minimale, conditions de points conjugués, moyennation

**Classification MSC2000.** 49K15, 70Q05

---

**Abstract.** The optimal control of orbital transfers is considered (problem proposed by the French Space Agency). The model is the controlled Kepler equation where the command law is the thrust of a spacecraft in orbit around the Earth. The contributions are twofold and deal with minimum time as well as with averaging of the energy minimization problem. The action of the control may be seen as the perturbation of an integrable system. Averaging then provides an approximation of this perturbation which turns to remain integrable. The exponential mapping defined by the extremal flow of the control problem is a fundamental object in this study. This mapping carries information about existence of solution, and local or global optimality of extremals. The obtained results comprise the evidence of Pi-singularities and conjugate points in minimum time, the flatness of the metric associated with energy minimum transfers towards circular orbits by averaging (optimal trajectories are straight lines), and the characterization of the cut locus of the averaged thanks to a comparison with the restriction of the flat metric to an ellipsoid of revolution.

**Keywords.** Orbital transfer, minimum time or energy control, conjugate point conditions, averaging

**MSC2000 classification.** 49K15, 70Q05

---

ENSEEIH-IRIT (UMR CNRS 5505), 2 rue Camichel, F-31071 Toulouse